J.I. Abdullayev,
R.N. G'anixo'jayev,
M.H. Shermatov,
O.I. Egamberdiyev

FUNKSIONAL ANALIZ

TOSHKENT — SAMARQAND
2009

O'zbekiston Respublikasi
Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi

J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev,
M.H. Shermatov, O.I.Egamberdiyev.

FUNKSIONAL ANALIZ

O'zbekiston Milliy Universiteti o'quv metodik boshqarmasi
tomonidan o'quv qo'llanma sifatida nashrga tavsiya etilgan

TOSHKENT – SAMARQAND – 2009

J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, M.H. Shermatov, O.I.Egamberdiyev. «Funksional analiz».
Oliy o'quv yurtlarining fizika-matematika fakulteti talabalari uchun o'quv qo'llanma. Toshkent – Samarqand - 2009. -424 bet.

Usbhu o'quv qo'llanma universitetlarning, «Matematika», «Mexanika» va «Informatika» yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalari uchun mo'ljallangan.

Taqrizchilar:

1. Fizika-matematika fanlari doktori, professor
   Ikromov Isroil Akramovich.

2. Fizika-matematika fanlari doktori, professor
   G'aniyev Inomjon G'ulomjonovich.

3. Fizika-matematika fanlari doktori
   Mo'minov Qobiljon Qodirovich.

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti
Alisher Navoiy nomidagi Samarqand Davlat Universiteti

MUNDARIJA

KIRISH

Funksional analiz - matematik analiz, geometriya va chiziqli algebraning g'oya va usullarini cheksiz o'lchamli fazolar uchun umumlashtiruvchi fan hisoblanadi. Hozirgi kunda funksional analizning g'oya, konsepsiya, usul va tushunchalari matematikaning barcha sohalari tomonidan tan olingan. So'nggi yillarda differensial tenglamalar, hisoblash usullari, matematik dasturlashning talab va ehtiyojlariga javoban funksional analizning yangi chiziqli bo'lmagan tarmog'i paydo bo'ldi. Zamonaviy matematikaning bu yo'nalishi amaliyotchilar va muhandislarning o'sib kelayotgan ehtiyojlarining bir qismini qondiradi.

Ushbu o'quv qo'llanma «Funksional analiz» fanidan ishchi dasturga moslab tuzilgan bir ishlanmadir. O'quv qo'llanma universitetlarning matematika, mexanika va amaliy matematika bakalavriat yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalari uchun mo'ljallab yozilgan.

O'quv qo'llanmaning asosiy maqsadi bo'lg'usi mutaxassislarni funksional analizning asosiy tushunchalari va usullari bilan tanishtirish, funksional analizning asosiy boblari bo'yicha nazariy fikrlashlarini shakllantirish, misol va masalalar yechishda malaka va ko'nikmalar hosil qilishdan, hamda ularda integral tenglamalar haqida umumiy tasavvur paydo qilishdan iborat.

O'quv qo'llanmani o'qish jarayonida talabalar o'zlarining matematik analiz, chiziqli algebra va geometriyadan olgan bilimlarini to'ldiradilar, hamda ularni funksional fazolarga moslab qo'llaydilar, ya'ni mustahkamlaydilar. Talabalar chiziqli funksional va operator tushunchalari bilan tanishadilar va ularning asosiy xossalarini o'rganadilar. Cheksiz o'lchamli funksional fazolarni o'rganish jarayonida o'quvchilar funksional analizning kuchli va nozik usullarini tushunishga biroz qiynaladilar, lekin tushunib yetganlaridan keyin o'zlarida ilmga undovchi qandaydir ichki kuch sezadilar. Bu kuch ta'siri ularda cheksiz o'lchamli fazolarda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lavermasligi va birlik sharning kompakt bo'lmasligini tushunib yetganlarida namoyon bo'ladi.

Ushbu o'quv qo'llanma O'zMU va SamDUda «Funksional analiz» fanidan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlar olib boruvchi professor-o'qituvchilarning ko'p yillik ish tajribalari asosida yozilgan.

O'quv qo'llanma 5 bob va 24 paragrafdan iborat. Har bir paragraf uchun ta'rif, teorema, lemma va formulalar alohida nomerlangan. Masalan, 2.3-teorema - bu 2-paragrafdagi 3-nomerli teorema degani. (1.8) belgilash esa 1-paragrafdagi 8-raqamli formula ekanligini anglatadi. Δ - belgisi teorema yoki lemma isboti tugaganligini bildiradi. Har paragraf oxirida mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar berilgan. Har bobdan so'ng talabalar o'z bilimlarini tekshirishlari uchun test savollari keltirilib, javoblari ham berilgan.

O'quv qo'llanmaning dastlabki to'rt bobi nazariy materiallarni bayon qilishga bag'ishlangan. Keltirilgan nazariy ma'lumotlar fan bo'yicha namunaviy va ishchi dasturda ko'rsatilgan mavzularni to'liq qamraydi va u professor-o'qituvchilarga o'zlarining ma'ruza matnlarini tuzishda yordam beradi.

Oxirgi beshinchi bob esa amaliyot darslarini va laboratoriya mashg'ulotlarini olib borish uchun mo'ljallangan. Unda tipik misollar namuna sifatida yechib ko'rsatilgan. Bundan tashqari bu bobda mavzu mohiyatini ochib beruvchi ko'plab misol va masalalar keltirilgan. Bu bobda keltirilgan mashqlarni mustaqil yechib o'rgangan talabalar o'zlarida yetarli darajada bilim va ko'nikmalar hosil qiladi. Bobda keltirilgan mashqlardan laboratoriya mashg'ulotlarini olib borishda ham foydalanish mumkin. Chunki keltirilgan masalalar ancha ko'p bo'lib, talabalardan individual tarzda laboratoriya ishlarini qabul qilish imkoniyatini beradi. Tajribalarimizdan kelib chiqib aytishimiz mumkinki, bu bob yosh mutaxassislarga funksional analiz fanidan amaliyot darslarini va laboratoriya mashg'ulotlarini olib borishda katta yordam beradi.

O'quv qo'llanmadan matematik tahlil va matematik fizika mutaxassisligi bo'yicha ta'lim olayotgan magistrantlar va aspirantlar ham foydalanishlari mumkin.

Mualliflar o'quv qo'llanmani yaxshilashda bergan foydali maslahatlari uchun taqrizchilar I.A. Ikromovga, I.G'. G'aniyevga, Q.Q. Mo'minovga, matnni tahrir qilish uchun bergan yordamlari uchun A.U. Arziqulovga, B.E. Davronovga, S.M. Samatovga va D.D. To'raqulovlarga o'z minnatdorchiliklarini bildiradi.

O'quv qo'llanma birinchi marta chop qilinayotgani uchun xato va kamchiliklar bo'lishi mumkin. Xato va kamchiliklar to'g'risidagi fikrlaringizni jabdullaev@mail.ru adresiga jo'natishlaringizni so'raymiz.

I bob. Metrik fazolar

Bu bob metrik fazolar va undagi asosiy tushunchalarni bayon qilishga bag'ishlangan bo'lib, 4 paragrafdan iborat.

Birinchi paragrafda metrik fazo ta'riflanib, ularga ko'plab misollar keltirilgan. R^n to'plamda har xil metrikalar kiritilgan. Metrikaning uchburchak tengsizligini isbotlashda Koshi-Bunyakovskiy, Minkovskiy va Gyolder tengsizliklaridan foydalanilgan. O'z navbatida bu tengsizliklar ham o'z isbotlarini topgan. Koshi-Bunyakovskiy, Minkovskiy va Gyolder tengsizliklarining integral formasi ham keltirilgan. Bundan tashqari gomeomorf va izomorf metrik fazolar ta'riflanib, ularga misollar keltirilgan.

2-paragraf esa metrik fazolarda yaqinlashish va undagi ochiq va yopiq to'plamlarning xossalariga bag'ishlangan. Ochiq va yopiq to'plamlarni ta'riflash uchun biz yordamchi tushunchalar - urinish nuqtasi, limitik nuqta, yakkalangan nuqta va ichki nuqta ta'riflarini berganmiz. Keyin yopiq va ochiq to'plamlarning xossalari isbotlangan. Jumladan metrik fazoda to'plam ochiq (yopiq) bo'lishining yetarli va zarur shartlari keltirilgan. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta'riflanib, unga misollar keltirilgan. Metrik fazoning hamma yerida zich va hech yerda zichmas to'plamlar ta'riflanib, ularga misollar qaralgan. R^n, R_p^n, $C[a,b]$, $C_p[a,b]$, ℓ_2 fazolarning separabel metrik fazolar bo'lishi ko'rsatilgan. Separabel bo'lmagan metrik fazoga misol keltirilgan. Sonlar o'qidagi ochiq to'plamlarning strukturasi berilgan.

3-paragraf to'la metrik fazolarga bag'ishlangan. Yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar orasidagi bog'lanish ochib berilgan. R^n, R_1^n, R_∞^n, $C[a,b]$. ℓ_2 metrik fazolarning to'laligi isbotlangan. $C_2[a,b]$ ning to'la bo'lmagan metrik fazo ekanligi isbotlangan. Metrik fazoning to'la bo'lishini ta'minlovchi ichma-ich joylashgan yopiq sharlar haqidagi teorema hamda Ber teoremasi isbotlangan. Har qanday metrik fazoni to'ldirish mumkinligi haqidagi teorema isboti bilan berilgan. Metrik fazolarda kompakt va nisbiy kompakt to'plam tushunchalari berilgan. Asosiy funksional fazolar $C[a,b]$ va ℓ_p da kompakt (nisbiy kompakt) lik kriteriylari keltirilib, isbotlangan. Kompakt (nisbiy kompakt) va kompakt bo'lmagan (nisbiy kompakt bo'lmagan) to'plamlarga misollar keltirilgan.

4-paragraf qisuvchi akslantirishlar prinsipi va uning tadbiqlariga bag'ishlangan. To'la metrik fazolarda har qanday qisuvchi akslantirishning yagona qo'zg'almas nuqtasi mavjudligi isbotlangan. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining R^n metrik fazodagi algebraik tenglamalar sistemasiga tadbig'i bayon qilingan. Bundan tashqari chiziqli va chiziqli bo'lmagan integral tenglamalarni yechishda qisuvchi akslantirishlar prinsipidan qanday foydalanish mumkinligi bayon qilingan.

1-§. Metrik fazolar va ularga misollar

Analizdagi eng muhim amallardan biri bu limitga o'tish amalidir. Bu amalning asosida sonlar o'qida ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi yotadi. Analizda kiritilgan ko'pgina fundamental tushunchalar sonlar o'qining algebraik xususiyatlariga bog'liq emas. Haqiqiy sonlar haqidagi tasavvurimizni to'plam ma'nosida umumlashtirib, metrik fazo tushunchasiga kelamiz. Metrik fazo tushunchasi hozirgi zamon matematikasida muhim o'rinni egallaydi.

1.1-ta'rif. *Bo'shmas X to'plamning ixtiyoriy x va y elementlar juftiga aniq bir manfiymas $\rho(x,y)$ son mos qo'yilgan bo'lib, bu moslik*

1) $\rho(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=y$,

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ *(simmetriklik aksiomasi),*

3) $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$ *(uchburchak aksiomasi)*

shartlarni qanoatlantirsa, ρ *ga* X *dagi masofa yoki metrika deb ataladi.* (X,ρ) *juftlik metrik fazo deyiladi.*

Odatda metrik fazo, ya'ni (X,ρ) juftlik bitta X harfi bilan belgilanadi. Agar X to'plamda $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$ metrikalar aniqlangan bo'lsa, u holda $(X,\rho_1),(X,\rho_2),\ldots,(X,\rho_n)$ metrik fazolar mos ravishda $X_1, X_2,\ldots, X_n$ harflari bilan belgilanadi.

Endi metrik fazoga bir nechta misollar keltiramiz.

1.1-misol. X qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin va har bir x, y elementlar juftiga

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & \text{agar } x=y,\\ 1, & \text{agar } x\neq y\end{cases}$$

qonuniyat bo'yicha son mos qo'yilsin. Ravshanki, ρ akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantiradi. Bu metrika diskret metrika deb ataladi. Hosil bo'lgan metrik fazo yakkalangan nuqtalar fazosi deb ataladi.

1.2. Haqiqiy sonlar to'plami $R=(-\infty,\infty)$, $\rho(x,y)=|x-y|$ masofa bo'yicha metrik fazo tashkil qiladi va bu metrik fazo ham R harfi bilan belgilanadi.

1.3. Ixtiyoriy n ta $x_1, x_2,\ldots,x_n$ haqiqiy sonlarning tartiblangan $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ guruhlaridan tashkil bo'lgan to'plamda har bir x va y lar jufti (x,y) ga

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} \tag{1.1}$$

manfiymas sonni mos qo'yuvchi ρ akslantirish masofani aniqlaydi. Hosil bo'lgan metrik fazo n - o'lchamli arifmetik Evklid fazo deb ataladi. Endi (1.1) formula bilan aniqlangan ρ moslik metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz:

1) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}=0 \Leftrightarrow x=y$

dan 1-aksiomaning bajarilishi bevosita ko'rinib turibdi.

2) $$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}=\rho(y,x).$$

Endi 3-aksiomaning bajarilishini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy uchta $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$, $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ nuqtalar uchun uchburchak aksiomasi

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2} \tag{1.2}$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar $a_k=x_k-y_k$, $b_k=y_k-z_k$ belgilashlarni kiritsak, $x_k-z_k=a_k+b_k$ bo'ladi va (1.2) tengsizlik

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2} \tag{1.3}$$

ko'rinishni oladi. Ushbu

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2$$

ayniyatni e'tiborga olsak,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\right|\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2} \tag{1.4}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. (1.4) *Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi* deb ataladi. U holda biz

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2+$$
$$+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu munosabatdan (1.3) tengsizlik bevosita kelib chiqadi. Demak, uchburchak aksiomasi o'rinli ekan. Hosil bo'lgan metrik fazo R^n simvol bilan belgilanadi.

1.4. Yana n - ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlari $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ dan tuzilgan to'plamni qaraymiz va unda masofani

$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k| \tag{1.5}$$

formula vositasida aniqlaymiz. Hosil bo'lgan metrik fazo R_1^n simvol bilan belgilanadi. Bu moslik metrikaning 1-3-aksiomalarini qanoatlantirishini o'quvchi mustaqil tekshirib ko'rishi mumkin.

1.5. Yuqoridagi 1.3 va 1.4-misollarda keltirilgan to'plamda elementlar orasidagi masofani

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k| \tag{1.6}$$

formula bilan aniqlaymiz. Metrika aksiomalarining bajarilishi oson tekshiriladi. Hosil bo'lgan metrik fazo R_∞^n simvol bilan belgilanadi.

1.6. $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz barcha funksiyalardan tashkil bo'lgan to'plamni $C[a,b]$ simvol bilan belgilaymiz. Bu to'plamda

$$\rho\,(x,y)=\max_{a\le t\le b}|\,x(t)-y(t)\,| \tag{1.7}$$

akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantiradi. Masofaning 1-3 aksiomalari bevosita tekshiriladi (o'quvchiga mustaqil tekshirish uchun tavsiya etiladi). Bu metrik fazo analizda muhim ahamiyatga ega bo'lib, u ham to'plam kabi $C[a,b]$ simvol bilan belgilanadi.

1.7. Haqiqiy sonlardan tuzilgan va

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ ketma-ketliklardan tashkil bo'lgan to'plamni ℓ_2 simvol bilan belgilaymiz. Bu to'plamda masofa

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2} \tag{1.8}$$

formula bilan aniqlanadi. Har bir $x,y\in\ell_2$ elementlar uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}y_k^2<\infty$$

shartlar bajarilgani uchun va $(x_k \pm y_k)^2 \le 2(x_k^2 + y_k^2)$ elementar tengsizlikdan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2$$

qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Endi (1.8) formula bilan aniqlangan ρ moslikning metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Ravshanki, 1 va 2-aksiomalar bajariladi. Uchburchak aksiomasi esa

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - z_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k - z_k)^2} \tag{1.9}$$

ko'rinishga ega. Yuqorida zikr etilganlarga ko'ra (1.9) tengsizlikdagi qatorlarning hammasi yaqinlashadi. Ikkinchi tomondan esa 1.3-misolda isbotlanganiga ko'ra har bir n da

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2}$$

tengsizlik o'rinli. Oxirgi tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga o'tsak, (1.9) tengsizlikning to'g'riligi isbotlanadi, ya'ni uchburchak aksiomasi o'rinli.

1.8. $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz barcha haqiqiy qiymatli funksiyalar to'plamida

$$\rho_2(x,y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2\,dt}$$

formula yordamida masofa aniqlash mumkin. Hosil bo'lgan metrik fazo $C_2[a,b]$ simvol bilan belgilanadi va uzluksiz funksiyalarning o'rtacha kvadratik metrikali fazosi deb ataladi. Ravshanki, ρ_2 moslik metrikaning 1 va 2-aksiomalarini qanoatlantiradi. Uchburchak aksiomasining bajarilishi Koshi - Bunyakovskiyning ushbu

$$\left(\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right)^2 \le \int_a^b x^2(t)dt \cdot \int_a^b y^2(t)dt \tag{1.10}$$

integral tengsizligidan foydalanib isbotlanadi. Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi esa osongina tekshirish mumkin bo'lgan

$$\left(\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right)^2 = \int_a^b x^2(t)dt\cdot\int_a^b y^2(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [x(s)y(t)-y(s)x(t)]^2\,dsdt$$

ayniyatga asoslangan.

1.9. Yana $[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plamda ushbu

$$\rho_1(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt \tag{1.11}$$

formula bilan aniqlangan akslantirish masofa aniqlaydi. Hosil bo'lgan metrik fazo $C_1[a,b]$ simvol bilan belgilanadi. ρ_1 akslantirish metrikaning 1-3 aksiomalarini qanoatlantirishini tekshirish o'quvchiga mustaqil mashq sifatida tavsiya qilinadi.

1.10. Barcha chegaralangan $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklaridan iborat to'plamni qaraymiz. Bu to'plamdagi har bir x va y elementlar juftiga

$$\rho\,(x,y)=\sup_{1\le k\le\infty}|x_k-y_k| \tag{1.12}$$

sonni mos qo'yuvchi ρ akslantirish masofa aniqlaydi. Hosil bo'lgan metrik fazo m harfi bilan belgilanadi. O'quvchi uchun 1-3 aksiomalarning bajarilishini tekshirish qiyin emas.

1.11. n - ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlaridan iborat R^n to'plamda har bir $p\ge 1$ son uchun

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.13}$$

formula bilan aniqlangan ρ_p moslik masofa aniqlaydi va hosil bo'lgan metrik fazo R_p^n simvol bilan belgilanadi. Bu misolda ham 1 va 2 aksiomalarning bajarilishini tekshirish qiyin emas. Shuning uchun 3 aksiomaning bajarilishini tekshirish yetarli. Qaralayotgan to'plamdan ixtiyoriy uchta $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $z=(z_1, z_2,\ldots,z_n)$ nuqtalarni olib $a_k=x_k-y_k$, $b_k=y_k-z_k$ belgilashlarni kiritsak, $x_k-z_k=a_k+b_k$ bo'ladi va natijada $\rho_p(x,z)\le \rho_p(x,y)+\rho_p(y,z)$ uchburchak tengsizligi

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.14}$$

ko'rinishni oladi. Hosil bo'lgan (1.14) tengsizlik *Minkovskiy tengsizligi* deb ataladi. Agar $p=1$ bo'lsa, Minkovskiy tengsizligining bajarilishi ko'rinib turibdi (chunki, yig'indining moduli modullar yig'indisidan oshmaydi), shuning uchun $p>1$ deb hisoblaymiz. Minkovskiy tengsizligining isboti *Gyolder tengsizligi* deb nomlanuvchi

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k\cdot b_k|\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.15}$$

tengsizlikka asoslangan. Bu yerda $p>1$ va $q>1$ sonlar

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{1.16}$$

shart bilan bog'langan. (1.16) dan quyidagi tengliklar kelib chiqadi

$$q=\frac{p}{p-1},\quad p=\frac{q}{q-1}.$$

Ta'kidlash lozimki, (1.15) tengsizlik $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ va $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ nuqtalar uchun bajarilsa, u ixtiyoriy λ va μ sonlarda $\lambda a=(\lambda a_1, \lambda a_2,\ldots,\lambda a_n)$ va $\mu b=(\mu b_1,\mu b_2,\ldots,\mu b_n)$ nuqtalar uchun ham bajariladi va aksincha. Ya'ni (1.15) bir jinsli tengsizlikdir. Shunday ekan, (1.15) tenksizlikni

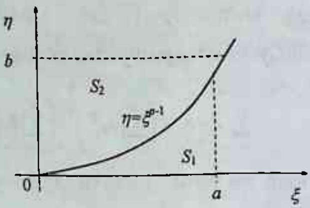
$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p=\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q=1 \tag{1.17}$$

shartni qanoatlantiruvchi a va $b\in R^n$ nuqtalar uchun isbotlash yetarli. U holda (1.15) tengsizlik (1.17) shart bajarilganda

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k \cdot b_k| \le 1 \qquad (1.18)$$

ko'rinishni oladi. (1.17) shartda (1.18) tengsizlikni isbotlash uchun (ξ,η) tekislikda $\eta=\xi^{p-1}$ $(\xi>0)$ yoki $\xi=\eta^{q-1}$ $(\eta>0)$ tenglamalar bilan aniqlangan egri chiziqli (1.1-chizma) trapetsiya yuzini hisoblaymiz. Chizmadan ko'rinib turibdiki, musbat a va b sonlarni qanday tanlamaylik, $ab\le S_1+S_2$ tengsizlik o'rinli. S_1 va S_2 yuzalarni hisoblaymiz:

$$S_1=\int_0^a \xi^{p-1}d\xi=\frac{a^p}{p}, \quad S_2=\int_0^b \eta^{q-1}d\eta=\frac{b^q}{q}.$$



1.1 – chizma

Shunday qilib, quyidagi sonli tengsizlik o'rinli:

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Agar a ni a_k ga, b ni b_k ga almashtirib va k ni 1 dan n gacha o'zgartirib yig'indi tuzsak, (1.16) va (1.17) shartlar bajarilganda (1.18) tengsizlik hosil bo'ladi. Shunday qilib, (1.18) tengsizlik isbotlandi. Shunday ekan, umumiy (1.15) tengsizlik ham isbotlandi.

Agar $p=2$ bo'lsa, (1.15) Gyolder tengsizligidan (1.4) Koshi - Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

Endi Minkovskiy tengsizligining isbotiga o'tamiz. Buning uchun

$$(|a|+|b|)^p=(|a|+|b|)^{p-1}|a|+(|a|+|b|)^{p-1}|b|$$

ayniyatdan foydalanamiz. Bu ayniyatda $|a|$ ni $|a_k|$ ga, $|b|$ ni $|b_k|$ ga almashtirib va k ni 1 dan n gacha o'zgartirib yig'indi tuzsak, quyidagi ayniyatga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p=\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{p-1}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{p-1}|b_k|.$$

Tenglikning o'ng tomonidagi har ikkala yig'indiga ham Gyolder tengsizligini qo'llasak va $(p-1)q=p$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\le\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\left[\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right).$$

Bu tengsizlikning har ikkala tomonini

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

ga bo'lib, isbotlanishi kerak bo'lgan (1.14) Minkovskiy tengsizligiga ega bo'lamiz. Shunday qilib, uchburchak aksiomasi o'rinli ekan.

Agar bu misolda $p=2$ desak, ρ_p metrika 1.3-misoldagi metrikaga va agar $p=1$ desak, 1.4-misoldagi metrikaga aylanadi. Ko'rsatish mumkinki, 1.5-misolda kiritilgan

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$$

metrika ρ_p metrikaning $p\to\infty$ dagi limitik holati boladi, ya'ni

$$\rho_\infty(x,y)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.19}$$

1.12. Hadlari

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty,\quad p\ge 1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklaridan iborat va ikki nuqtasi orasidagi masofa

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.20}$$

formula bilan aniqlangan to'plamni qaraymiz. Bu to'plamni ℓ_p deb belgilaymiz. Ixtiyoriy $x,y\in\ell_p$ lar uchun har bir n da

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.21}$$

Minkovskiy tengsizligi o'rinli bo'lgani va

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p<\infty$$

shartlar bajarilgani uchun (1.21) da $n\to\infty$ da limitga o'tsak,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ga ega bo'lamiz. Bundan ixtiyoriy $x,y\in\ell_p$ lar uchun (1.20) qator yaqinlashishiga ega bo'lamiz. (1.20) tenglik bilan aniqlangan ρ funksiya metrikaning 1 va 2-aksiomalarini qanoatlantirishi ko'rinib turibdi. Uchburchak aksiomasi (1.14) Minkovskiy tengsizligidan foydalanib isbotlanadi.

Endi biz Minkovskiy va Gyolder tengsizliklarining integral formasini beramiz.

$$\left(\int_a^b|x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},\quad p\ge 1. \tag{1.22}$$

Bu *Minkovskiy tengsizligi* deb ataladi. Minkovskiy tengsizligi, ya'ni (1.22) tengsizlik $[a,b]$ kesmada $p(p>1)$ - chi darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ixtiyoriy x va y funksiyalar uchun o'rinli.

$$\int_a^b|x(t)y(t)|dt\le\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}},\quad p>1,\ q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{1.23}$$

tengsizlik *Gyolder tengsizligi* deb ataladi. Gyolder tengsizligi $[a,b]$ kesmada $p(p>1)$-chi darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi x va $q\,(q>1)$-chi darajasi bilan integrallanuvchi ixtiyoriy y funksiyalar uchun o'rinli. (1.10) tengsizlik Koshi-Bunyakovskiy tengsizligining integral formasidir.

Endi haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi fanida xossalari o'rganilgan o'zgarishi chegaralangan va absolyut uzluksiz funksiyalar to'plamini qaraymiz.

1.13. Berilgan $[a,b]$ kesmada aniqlangan va o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plamida ikki nuqta orasidagi masofani

$$\rho(x,y)=|x(a)-y(a)|+V_a^b[x-y] \qquad (1.24)$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu yerda $V_a^b[f]$ - o'zgarishi chegaralangan f funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi to'la o'zgarishi (variatsiyasi). (1.24) tenglik bilan aniqlangan ρ akslantirishning metrika aksiomalarini qanoatlantirishi funksiya to'la o'zgarishining xossalaridan kelib chiqadi.

Masalan, uchburchak tengsizligi $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$ da

$$x(t)-y(t)=\varphi(t) \quad \text{va} \quad y(t)-z(t)=\psi(t)$$

belgilashlar olsak, u quyidagi ko'rinishni oladi

$$|\varphi(a)+\psi(a)|+V_a^b[\varphi+\psi]\le|\varphi(a)|+|\psi(a)|+V_a^b[\varphi]+V_a^b[\psi].$$

Bu esa $|a+b|\le|a|+|b|$ tengsizlikdan va o'zgarishi chegaralangan funksiyalarning

$$V_a^b[\varphi+\psi]\le V_a^b[\varphi]+V_a^b[\psi]$$

xossasidan kelib chiqadi. Hosil qilingan metrik fazo o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi deyiladi va $V[a,b]$ orqali belgilanadi.

1.14. Berilgan $[a,b]$ kesmada aniqlangan va absolyut uzluksiz funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plamda ham ikki x va y nuqtalar orasidagi masofa $\rho(x,y)$, (1.24) tenglik bilan aniqlanadi. Hosil qilingan metrik fazo absolyut uzluksiz funksiyalar fazosi deb ataladi va $AC[a,b]$ orqali belgilanadi.

1.1-eslatma. (X,ρ) - metrik fazo va M - uning ixtiyoriy qism to'plami bo'lsin. U holda X da aniqlangan ρ masofa, uning qismi bo'lgan M da ham masofa aniqlaydi. Shuning uchun (M,ρ) metrik fazo bo'ladi. (M,ρ) metrik fazo (X,ρ) metrik fazoning qism fazosi deb ataladi.

1.1. Metrik fazolarni uzluksiz akslantirishlar. Izometriya

$X=(X,\rho)$ va $Y=(Y,d)$ – metrik fazolar, f esa X ni Y ga akslantirish bo'lsin. Shunday qilib, har bir $x\in X$ elementga yagona $y=f(x)\in Y$ element mos qo'yilgan bo'lsin.

1.2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ mavjud bo'lib, $\rho(x,x_0)<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ nuqtalar uchun $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f akslantirish $x_0\in X$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar f akslantirish X ning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u holda f ni X da uzluksiz deb ataymiz.*

Agar X va Y lar sonli to'plamlar bo'lsa, ya'ni x - son, f - sonli funksiya bo'lsa, u holda akslantirishning uzluksizlik ta'rifi matematik analizdan ma'lum bo'lgan funksiyaning uzluksizligi ta'rifiga aylanadi.

Ta'kidlash lozimki, agar X metrik fazodagi ρ masofani $X\times X$ metrik fazoni $R_+:=[0,\infty)$ metrik fazoga akslantirish deb qarasak, ρ - uzluksiz akslantirish bo'ladi. Bu yerda $X\times X=\{(x,y):\ x,y\in X\}$ to'plamda (x_1,x_2) va (y_1,y_2) juftliklar orasidagi masofa $d((x_1,x_2),(y_1,y_2))$ $=\rho(x_1,y_1)+\rho(x_2,y_2)$ formula yordamida aniqlanadi. Endi ρ akslantirishning uzluksizligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $(x_0,y_0)\in X\times X$ nuqtani olamiz va mahkamlaymiz. Keyin ixtiyoriy $(x,y)\in X\times X$ nuqta olib, metrikaning uchburchak aksiomasidan foydalanamiz:

$$\rho(x,y)\le\rho(x,x_0)+\rho(x_0,y)\le\rho(x,x_0)+\rho(x_0,y_0)+\rho(y_0,y).$$

$$\rho(x_0,y_0)\le\rho(x_0,x)+\rho(x,y)+\rho(y,y_0).$$

Bu ikki tengsizlikdan

$$|\rho(x,y)-\rho(x_0,y_0)|\le\rho(x,x_0)+\rho(y_0,y)$$

ga kelamiz. Agar

$$d((x,y),(x_0,y_0))=\rho(x,x_0)+\rho(y,y_0)<\varepsilon$$

desak, u holda $|\rho(x,y)-\rho(x_0,y_0)|\le\varepsilon$ bo'ladi, ya'ni ρ uzluksiz akslantirish ekan.

Agar $f:X\to Y$ akslantirish X va Y metrik fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatsa, u holda Y ni X ga akslantiruvchi $x=f^{-1}(y)$ teskari akslantirish mavjud bo'ladi. Agar f o'zaro bir qiymatli moslik bo'lib, f va f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo'lsa, u holda f gomeomorf akslantirish yoki gomeomorfizm deb ataladi, X va Y fazolar esa gomeomorf fazolar deb ataladi. Gomeomorf metrik fazolarga $R=(-\infty,\infty)$ sonlar o'qi va $(-1,1)$ intervallarni misol sifatida qarash mumkin. Bu holda gomeomorfizm $y=\frac{2}{\pi}arctgx$ formula yordamida o'rnatiladi.

Agar $X=(X,\rho)$ va $Y=(Y,d)$ metrik fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatuvchi f akslantirish ixtiyoriy $x_1,x_2\in X$ lar uchun $\rho(x_1,x_2)=d(f(x_1),f(x_2))$ shartni qanoatlantirsa, f akslantirish izometriya deyiladi, X va Y fazolar esa izometrik fazolar deb ataladi.

X va Y metrik fazolarning izometrikligi, ular elementlari orasidagi metrik bog'lanishlar bir xil bo'lib, faqatgina ular elementlarining tabiatiga ko'ra bir - biridan farq qilinishini bildiradi. Ular orasidagi bu farq metrik fazolar nuqtai nazaridan muhim emas. Bundan keyin o'zaro izometrik fazolarni aynan bitta fazo deb qaraymiz.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Gyolder va Minkovskiy tengsizliklarini integral formada yozing.*
2. *(1.5) tenglik bilan aniqlangan* $\rho_1 : R^n \times R^n \to R_+$ *akslantirish metrikaning 1-3 shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.*
3. *(1.7) tenglik bilan aniqlangan* $\rho : C[a,b] \times C[a,b] \to R_+$ *akslantirish metrikaning 1-3 shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.*
4. *(1.11) tenglik bilan aniqlangan* $\rho_1 : C[a,b] \times C[a,b] \to R_+$ *akslantirish metrikaning 1-3 shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.*
5. *(1.12) tenglik bilan aniqlangan* $\rho : m \times m \to R_+$ *akslantirsh metrikaning 1-3 shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.*
6. *(1.19) tenglikni isbotlang.*
7. *(1.24) tenglik bilan aniqlangan* $\rho : V[a,b] \times V[a,b] \to R_+$ *akslantirish metrikaning 1-3 shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.*
8. *Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:*

   1) *Agar* $1 < p < q$ *bo'lsa,* ℓ_p *to'plam* ℓ_q *to'plamning qismi bo'ladi.*

   2) *Absolyut uzluksiz funksiyalar fazosi* $AC[a,b]$ *o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi* $V[a,b]$ *ning qism fazosi bo'ladi.*

2-§. Metrik fazolarda yaqinlashish. Ochiq va yopiq to'plamlar

Biz bu paragrafda metrik fazoning asosiy tushunchalarini keltirib, ochiq va yopiq to'plamlarning xossalarini o'rganamiz.

2.1-ta'rif. *X metrik fazoda $x_0 \in X$ nuqta va $r > 0$ son berilgan bo'lsin. $\rho(x, x_0) < r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to'plami markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan ochiq shar deb ataladi va u $B(x_0, r)$ orqali belgilanadi. Berilgan $x_0 \in X$ va $r > 0$ da $\rho(x, x_0) \le r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to'plami $B[x_0, r]$ orqali* *belgilanadi va u markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan yopiq shar deb ataladi.*

Metrik fazolar nazariyasida markazi x_0 nuqtada va radiusi $\varepsilon > 0$ bo'lgan $B(x_0,\varepsilon)$ ochiq shar x_0 nuqtaning ε - atrofi deyiladi va u $O_\varepsilon(x_0)$ ko'rinishda belgilanadi.

2.1-misol. Shunday metrik fazoga va undagi ikkita $B(x_1,r_1)$, $B(x_2,r_2)$ sharlarga misol keltiringki, $r_1 < r_2$ va $B(x_1,r_1) \supset B(x_2,r_2)$ bo'lsin.

Yechish. Faraz qilaylik, $X = [0,\infty)$ va $\rho(x,y) = |x-y|$ bo'lsin. Agar $B(1,5) = \{x \in [0,\infty) : |x-1| < 5\}$ deb markazi 1 nuqtada va radiusi 5 ga teng sharni, hamda $B(3,4) = \{x \in [0,\infty) : |x-3| < 4\}$ deb markazi 3 nuqtada va radiusi 4 ga teng bo'lgan ochiq sharlarni olsak, u holda $r_2 = 5 > r_1 = 4$, ammo $[0,6) = B(1,5) \subset B(3,4) = [0,7)$.

2.2-ta'rif. *Agar X metrik fazoning M qism to'plami uchun uni o'zida saqlovchi shar mavjud bo'lsa, M chegaralangan to'plam deb ataladi.*

2.3-ta'rif. *X metrik fazo, M uning qism to'plami va $x \in X$ bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_\varepsilon(x) \cap M \neq \varnothing$ munosabat bajarilsa, x nuqta M ning urinish nuqtasi deyiladi. M to'plamning barcha urinish nuqtalaridan iborat $[M]$ to'plam M ning yopig'i deyiladi.*

Shunday qilib, biz metrik fazo qism to'plamlari uchun ulardan ularning yopig'iga o'tish amalini aniqladik. To'plam yopig'i amali quyidagi xossalarga ega.

2.1-teorema. Ushbu tasdiqlar o'rinli:

1) $M \subset [M]$;

2) $[[M]] = [M]$;

3) *agar* $M_1 \subset M_2$ *bo'lsa, u holda* $[M_1] \subset [M_2]$;

4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Isbot. M to'plamning har bir nuqtasi uning uchun urinish nuqtasi bo'lishi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi, shuning uchun $M \subset [M]$.

Endi ikkinchi tasdiq isbotiga o'tamiz. Birinchi tasdiqqa ko'ra $[M] \subset [[M]]$. Endi $x \in [[M]]$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_{\varepsilon/2}(x) \cap [M] \neq \varnothing$, ya'ni shunday $y \in [M]$ mavjudki, $\rho(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Shunga o'xshash, $O_{\varepsilon/2}(y) \cap M \neq \varnothing$. Ya'ni shunday $z \in M$ mavjud bo'lib, $\rho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi. U holda

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ya'ni $O_{\varepsilon}(x) \cap M \neq \varnothing$. Bundan $x \in [M]$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday ekan, $[[M]] \subset [M]$. Demak, $[[M]] = [M]$.

Uchinchi tasdiqning isboti. $[M_1]$ to'plamning ixtiyoriy x nuqtasini olamiz. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_{\varepsilon}(x) \cap M_1 \neq \varnothing$. Bundan $O_{\varepsilon}(x) \cap M_2 \neq \varnothing$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, x nuqta M_2 to'plamning urinish nuqtasi, ya'ni $x \in [M_2]$ ekan. Bundan $[M_1] \subset [M_2]$.

Nihoyat, to'rtinchi tasdiq isbotiga o'tamiz. Agar $x \in [M_1 \cup M_2]$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_{\varepsilon}(x) \cap (M_1 \cup M_2) \neq \varnothing$ bo'ladi. Bundan, $O_{\varepsilon}(x) \cap M_1 \neq \varnothing$ yoki $O_{\varepsilon}(x) \cap M_2 \neq \varnothing$ tengsizliklardan kamida bittasi bajariladi. U holda $x \in [M_1]$ yoki $x \in [M_2]$, bundan $x \in [M_1] \cup [M_2]$ ekan. Ya'ni $[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2]$. Ikkinchi tomondan, $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ va $M_2 \subset M_1 \cup M_2$ bo'lgani uchun, 3-tasdiqqa ko'ra $[M_1] \subset [M_1 \cup M_2]$ va $[M_2] \subset [M_1 \cup M_2]$. Shunday ekan, $[M_1] \cup [M_2] \subset [M_1 \cup M_2]$. Demak, $[M_1] \cup [M_2] = [M_1 \cup M_2]$. Δ

2.4-ta'rif. *X - metrik fazo va M - uning bo'shmas qism to'plami bo'lsin. Agar $x \in X$ ning ixtiyoriy $O_{\varepsilon}(x)$ atrofi M ning cheksiz ko'p elementlarini saqlasa, u holda $x \in X$ nuqta M to'plamning limitik nuqtasi deyiladi.*

To'plamning limitik nuqtasi shu to'plamga tegishli bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

2.2. Agar Q barcha ratsional sonlar to'plami bo'lsa, u holda $R=(-\infty,\infty)$ ning har bir nuqtasi Q uchun limitik nuqta bo'ladi.

2.5-ta'rif. *Agar M to'plamga tegishli x nuqta uchun shunday $\varepsilon>0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x)\bigcap M=\{x\}$ bo'lsa, u holda x nuqta M to'plamning yakkalangan (yolg'iz) nuqtasi deyiladi.*

O'quvchi mustaqil isbotlashi mumkin bo'lgan quyidagi tasdiqlar o'rinli.

M to'plamning istalgan urinish nuqtasi shu to'plamning limitik nuqtasi, yoki yakkalangan nuqtasi bo'ladi. Bu yerdan xulosa sifatida kelib chiqadiki, $[M]$ to'plam uch turdagi nuqtalardan tashkil bo'ladi:

1) M to'plamning yakkalangan nuqtalari,

2) M ga tegishli bo'lgan, M ning limitik nuqtalari,

3) M ga tegishli bo'lmagan M ning limitik nuqtalari.

Bu xulosalardan kelib chiqadiki, M dan uning yopig'i $[M]$ ga o'tish, M ga tegishli bo'lmagan limitik nuqtalarni M ga qo'shib olish bilan amalga oshiriladi.

2.1. Metrik fazolarda yaqinlashish

2.6-ta'rif. *X metrik fazoda $x_1, x_2,\dots,x_n,\dots$ nuqtalar ketma-ketligi va x nuqta berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, barcha $n>n_0$ lar uchun x_n nuqta x ning $O_\varepsilon(x)$ atrofiga tegishli bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashadi deyiladi. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, u holda x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.*

Bu ta'rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin:

Agar

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$$

munosabat bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashadi deyiladi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta'rifidan quyidagi ikki xulosa bevosita kelib chiqadi:

1) hech qanday ketma-ketlik ikkita har xil limitga ega emas;

2) agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, u holda uning ixtiyoriy qismiy ketma-ketligi ham x nuqtaga yaqinlashadi.

2.2-teorema. *Biror x nuqta M to'plamning urinish nuqtasi bo'lishi uchun M da x ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* x nuqta M to'plamning urinish nuqtasi bo'lsin. U holda ixtiyoriy n natural son uchun $O_{1/n}(x)$ atrofda kamida bitta $x_n \in M$ element mavjud. Bu x_n nuqtalardan tuzilgan $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashadi.

Yetarliligi. Agar $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, $n > n_0$ bo'lganda $x_n \in O_\varepsilon(x)$ bo'ladi, ya'ni $O_\varepsilon(x) \cap M \neq \varnothing$. Demak, x nuqta M ning urinish nuqtasi bo'ladi. Δ

Agar x - M to'plamning limitik nuqtasi bo'lsa, u holda $x_n \in O_{1/n}(x) \cap M$ nuqtalarni har xil qilib tanlash mumkin, chunki $O_{1/n}(x) \cap M$ - cheksiz to'plam. Shunday qilib, x nuqta M to'plam uchun limitik nuqta bo'lishi uchun M da x ga yaqinlashuvchi har xil nuqtalardan tashkil bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

X metrik fazoni Y metrik fazoga akslantiruvchi f akslantirish uzluksizligi tushunchasini quyidagicha ham ta'riflash mumkin. Bizga $f: X \to Y$ akslantirish va $x_0 \in X$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun unga mos keluvchi $\{y_n = f(x_n)\}$ ketma-ketlik $y_0 = f(x_0)$ nuqtaga yaqinlashsa, $f: X \to Y$

akslantirish x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. 1-§ da keltirilgan uzluksizlik ta'rifi bilan bu ta'rifning teng kuchli ekanligini isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

2.2. Zich to'plamlar

2.7-ta'rif. *X metrik fazoning ikkita A va B qism to'plamlari berilgan bo'lsin. Agar $B \subset [A]$ bo'lsa, u holda A to'plam B to'plamda zich deyiladi. Xususan, agar $[A] = X$ bo'lsa, A to'plam hamma yerda zich (X da zich) deyiladi. Agar A to'plam birorta ham sharda zich bo'lmasa (ya'ni har bir $B \subset X$ sharda A to'plam bilan umumiy elementga ega bo'lmagan B' shar saqlansa), u holda A hech yerda zichmas to'plam deyiladi.*

2.3-misol. Q - ratsional sonlar to'plami R da zich to'plamdir.

2.4. Natural sonlar to'plami N haqiqiy sonlar metrik fazosi $R = (-\infty, \infty)$ ning hech yerida zichmas to'plamdir.

Endi hamma yerda zich sanoqli qism to'plamga ega bo'lgan metrik fazolarga misollar qaraymiz. Odatda hamma yerda zich sanoqli qism to'plamga ega bo'lgan metrik fazolar *separabel metrik fazolar* deb ataladi.

2.5. 1.1-misolda keltirilgan «diskret» fazo, hamma yerda zich sanoqli to'plamni fazoning elementlari sanoqli bo'lgan holda va faqat shu holda saqlaydi. Chunki, bu fazoda ixtiyoriy M uchun $[M] = M$ tenglik o'rinli. Shuning uchun «diskret» fazo separabel bo'lishi uchun uning sanoqli bo'lishi zarur va yetarli.

2.6. Haqiqiy sonlar to'plami $R = (-\infty, \infty)$ separabel metrik fazodir, chunki ratsional sonlar to'plami sanoqli va u R ning hamma yerida zich.

2.7. R^n, R_1^n, R_∞^n va R_p^n $(1 < p < \infty)$ metrik fazolarning hammasida ratsional koordinatali nuqtalar to'plami sanoqli va hamma yerda zichdir. Shuning uchun R^n, R_1^n, R_∞^n va R_p^n $(1 < p < \infty)$ lar separabel metrik fazolardir.

2.8. $C[a,b]$, $C_1[a,b]$ va $C_2[a,b]$ metrik fazolarda ratsional koeffitsiyentli ko'phadlar to'plami sanoqli va hamma yerda zichdir. Shunday ekan, ular separabel metrik fazolardir.

2.9. ℓ_2 fazoda hadlari ratsional sonlar bo'lib, ulardan cheklitasi noldan farqli bo'lgan ketma-ketliklar to'plami sanoqli bo'ladi va u ℓ_2 ning hamma yerida zich. Demak, ℓ_2 - separabel metrik fazo.

2.10. Yuqoridagi metrik fazolardan farqli o'laroq m separabel bo'lmagan metrik fazoga misol bo'ladi. Buni isbotlash uchun hadlari 0 va 1 lardan iborat barcha mumkin bo'lgan ketma-ketliklar to'plamini Φ bilan belgilaymiz. $\Phi \subset m$ va ikkita ixtiyoriy $x, y \in \Phi$ ketma-ketliklar kamida biror hadi bilan farq qilgani uchun $\rho(x,y)=1$. Ma'lumki, Φ - sanoqsiz (kontinuum quvvatli) to'plam. Φ ning elementlarini markaz qilib, radiusi $\frac{1}{2}$ ga teng ochiq sharlarni olamiz. Bu sharlar o'zaro kesishmaydi. Agar biror $M \subset m$ to'plam hamma yerda zich bo'lsa, har bir sharda M ning kamida bitta elementi yotadi. Sharlar soni Φ dagi elementlar soniga teng. M dagi elementlar soni esa sharlar sonidan, shuning uchun, Φ dagi elementlar sonidan kam emas. Shunday ekan, M - sanoqsiz to'plam. Demak, m ning hamma yerida zich sanoqli to'plam mavjud emas ekan.

2.11. ℓ_p, $p \geq 1$ va c_0 fazolarda hadlari ratsional sonlar bo'lib, ulardan cheklitasi noldan farqli bo'lgan ketma-ketliklar to'plami sanoqli bo'ladi va u ℓ_p va c_0 fazolarning hamma yerida zich. Demak, ℓ_p va c_0 separabel metrik fazolar bo'ladi.

2.3. Ochiq va yopiq to'plamlar

2.8-ta'rif. *Agar X metrik fazodagi M to'plam uchun $M=[M]$ tenglik bajarilsa, M yopiq to'plam deb ataladi. Boshqacha aytganda, agar* *to'plam o'zining barcha limitik nuqtalarini saqlasa, u yopiq to'plam deb ataladi.*

Ta'kidlash lozimki, 2.1-teoremaga ko'ra M to'plamning yopig'i $[M]$ - yopiq to'plamdir, hamda $[M]$ to'plam M ni o'zida saqlovchi minimal yopiq to'plamdir.

2.12-misol. Har qanday metrik fazoda yopiq shar yopiq to'plam bo'ladi. Xususan, $C[a,b]$ fazoda ixtiyoriy $C>0$ uchun $|f(x)|\le C$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami yopiq to'plam bo'ladi.

2.13. $C[a,b]$ fazoda $|f(x)|<C$ (ochiq shar) shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami yopiq emas, uning yopig'i $|f(x)|\le C$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamidan iborat.

2.14. Har qanday X metrik fazoda X va $\varnothing$ to'plamlar yopiq to'plamlardir.

2.15. Har qanday metrik fazoda chekli to'plam yopiqdir.

2.3-teorema. *Ixtiyoriy sondagi yopiq to'plamlar kesishmasi va chekli sondagi yopiq to'plamlar yig'indisi yopiqdir.*

Isbot. Ixtiyoriy sondagi F_α yopiq to'plamlarning

$$F=\bigcap_\alpha F_\alpha$$

kesishmasini qaraymiz. F to'plamning ixtiyoriy x limitik nuqtasini olaylik. U holda x ning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofida F ning cheksizta elementi mavjud. Shunday ekan, $O_\varepsilon(x)$ da har bir F_α ning cheksiz ko'p elementi mavjud. Bu ko'rsatadiki, x nuqta har bir F_α uchun limitik nuqta bo'ladi va F_α lar yopiq bo'lgani uchun har bir α da $x\in F_\alpha$. Bundan

$$x\in F=\bigcap_\alpha F_\alpha$$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni F yopiq to'plam.

Endi F - cheklita yopiq to'plamlar yig'indisi, ya'ni

$$F=\bigcup_{k=1}^{n}F_k$$

va $x\notin F$ bo'lsin. U holda $x\notin F_k$, $k=1,2,\dots,n$, ya'ni x nuqta F_k uchun limitik nuqta bo'la olmaydi. Shuning uchun x ning $O_{\varepsilon_1}(x),O_{\varepsilon_2}(x),\dots,$ $O_{\varepsilon_n}(x)$ atroflari mavjudki, $O_{\varepsilon_k}(x)$ da F_k ning ko'pi bilan cheklita elementi bo'lishi mumkin. Agar

$$\varepsilon=\min_{1\le k\le n}\varepsilon_k$$

desak, $O_\varepsilon(x)$ atrofda har bir F_k to'plam elementlari soni cheklitadan ko'p emas. U holda $O_\varepsilon(x)$ atrofda $F=\bigcup\limits_{k=1}^{n}F_k$ to'plam elementlarining soni ham cheklitadan ko'p emas. Shuning uchun x nuqta F uchun limitik nuqta bo'la olmaydi. Ya'ni F ning barcha limitik nuqtalari o'zida saqlanadi. Demak, F – yopiq to'plam. Δ

2.9-ta'rif. *Agar $x\in M$ nuqta uchun shunday $\varepsilon>0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x)$ atrof M da to'liq saqlansa ($O_\varepsilon(x)\subset M$), u holda x nuqta M to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. Faqat ichki nuqtalardan tashkil topgan to'plam ochiq to'plam deyiladi.*

2.16-misol. R sonlar o'qida ixtiyoriy (a,b) interval ochiq to'plamdir. Haqiqatan ham, agar $x\in(a,b)$ desak, $\varepsilon=\min\{x-a,b-x\}$ son uchun $O_\varepsilon(x)\subset(a,b)$.

2.17. $C[a,b]$ fazodagi g funksiyani olib, tayinlaymiz va G orqali $f(t)<g(t)$, $t\in[a,b]$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz. U holda G ochiq to'plam bo'ladi.

2.4-teorema. *M to'plam ochiq bo'lishi uchun uning butun fazogacha to'ldiruvchisi $X\setminus M$ yopiq bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* M ochiq to'plam bo'lsin. U holda M dan olingan har bir x nuqta o'zining biror $O_\varepsilon(x)$ atrofi bilan M ga tegishli bo'ladi, ya'ni $O_\varepsilon(x)\cap(X\setminus M)=\varnothing$. Shuning uchun $X\setminus M$ ga tegishli bo'lmagan nuqta $X \setminus M$ uchun urinish nuqtasi bo'la olmaydi, ya'ni $X \setminus M$ - yopiq to'plam.

Yetarliligi. $X \setminus M$ yopiq to'plam bo'lsin. U holda uning o'ziga tegishli bo'lmagan urinish nuqtasi yo'q, ya'ni har bir x uchun shunday $O_\varepsilon(x)$ atrof mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x) \subset M$ bo'ladi. Demak, M ochiq to'plam. Δ

2.18. Bo'sh to'plam va X fazo yopiq to'plamlardir. Ular biri-ikkinchisining to'ldiruvchisi bo'lgani uchun 2.4-teoremaga ko'ra $\varnothing$ va X lar ochiq to'plamlar ham bo'ladi.

Ikkilik prinsiplari hamda 2.3 va 2.4-teoremalar natijasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz.

2.5-teorema. *Ixtiyoriy sondagi ochiq to'plamlar yig'indisi va chekli sondagi ochiq to'plamlar kesishmasi yana ochiq to'plamdir.*

2.4. Sonlar o'qidagi ochiq va yopiq to'plamlar

Ixtiyoriy metrik fazoda, hattoki Evklid fazosida ham, ochiq va yopiq to'plamlar strukturasi, umuman olganda, juda murakkab. Ammo, bir o'lchamli Evklid fazosida, ya'ni sonlar o'qida barcha ochiq to'plamlarni (shu jumladan yopiq to'plamlarni) tavsiflash qiyin emas. Sonlar o'qidagi ochiq to'plamlar tavsifi quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

2.6-teorema. *Sonlar o'qidagi ixtiyoriy ochiq to'plam chekli yoki sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan intervallar yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi.*

Isbot. Sonlar o'qidagi G ochiq to'plamni qaraymiz. G to'plam elementlari orasida ekvivalentlik munosabatini kiritamiz. Agar $x, y \in G$ nuqtalar uchun shunday (α, β) interval mavjud bo'lib, $x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$ bo'lsa, $x \sim y$ deymiz. Ravshanki, bu munosabat refleksiv va simmetrikdir. Bundan tashqari $x \sim y$ va $y \sim z$ bo'lgani uchun shunday (α, β) va (γ, δ) intervallar mavjud bo'lib, $x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$ va $y, z \in (\gamma, \delta) \subset G$ bo'ladi. Bundan $\gamma < y < \beta$ va $(\alpha, \beta) \cap (\gamma, \delta) \neq \varnothing$ larga ko'ra $(\alpha, \beta) \cap (\gamma, \delta) \subset G$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar $a=\min\{\alpha,\gamma\}$, $b=\max\{\beta,\delta\}$ desak, $x,z\in(a,b)=(\alpha,\beta)\cup(\gamma,\delta)\subset G$ bo'ladi. Shunday ekan, $x\sim z$ ekanligi, ya'ni kiritilgan munosabatning tranzitivligi kelib chiqadi. Shuning uchun, G o'zaro kesishmaydigan I_τ bir-biri bilan ekvivalent nuqtalarning sinflariga ajraladi, ya'ni $G=\bigcup_\tau I_\tau$. Har bir I_τ ning interval ekanligini ko'rsatamiz. $a=\inf I_\tau$, $b=\sup I_\tau$ belgilashlarni kiritamiz. I_τ ning tuzilishiga ko'ra $a\notin I_\tau$ va $b\notin I_\tau$. U holda $I_\tau\subset(a,b)$. Ikkinchi tomondan, agar $x<y$, $x,y\in I_\tau$ desak, I_τ ning tuzilishiga ko'ra $(x,y)\subset I_\tau$. Bundan tashqari a dan o'ng tomonda va a ga istalgancha yaqin, b dan chap tomonda va b ga ixtiyoriy yaqinlikda I_τ ning elementlari mavjud. Shuning uchun, chetlari (a,b) ga tegishli ixtiyoriy (a',b') interval I_τ da saqlanadi. Bundan $I_\tau=(a,b)$ tenglik kelib chiqadi. Bunday kesishmaydigan I_τ intervallar soni ko'pi bilan sanoqli, chunki har bir I_τ interval kamida bitta ratsional nuqtani saqlaydi. Shuning uchun intervallar soni ratsional nuqtalar sonidan ko'p emas. Δ

Yopiq to'plamlar ochiq to'plamlarning to'ldiruvchi to'plami bo'lgani uchun, ixtiyoriy yopiq to'plam sonlar o'qidan chekli yoki sanoqlita o'zaro kesishmaydigan intervallarni chiqarib tashlashdan hosil bo'ladi.

2.19. Sonlar o'qida sodda yopiq to'plamlarga misol sifatida kesmalar, alohida nuqtalar va chekli shunday to'plamlar yig'indisini qarash mumkin.

Murakkabroq yopiq to'plamga misol qaraymiz. Qaralayotgan bu yopiq to'plam «*Kantor to'plami*» nomi bilan taniqli.

2.20. $F_0=[0,1]$ bo'lsin. Undan $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervalni chiqarib tashlaymiz, qolgan yopiq to'plamni F_1 bilan belgilaymiz. Keyin F_1 dan $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ va $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ intervallarni chiqarib tashlaymiz, qolgan yopiq to'plamni (to'rt kesmadan iborat) F_2 bilan belgilaymiz. Bu to'rtta kesmaning har biridan o'rtadagi uzunligi 3^{-3} teng bo'lgan interval chiqarib tashlanadi (2.1-chizma) va hokazo. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, yopiq to'plamlarning kamayuvchi F_n ketma-ketligini olamiz. Agar

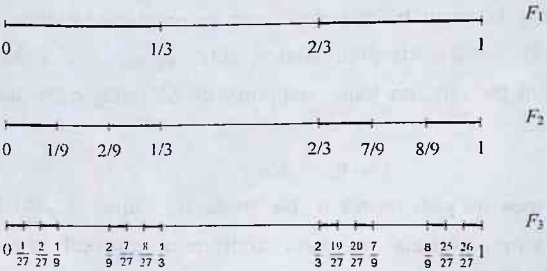
$$F=\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n$$

deb belgilasak, 2.3-teoremaga ko'ra F yopiq to'plam bo'ladi. U $[0,1]$ kesmadan sanoqli sondagi intervallarni chiqarib tashlash natijasida hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan F to'plam Kantor to'plami deb ataladi.

Endi F to'plamning strukturasini o'rganamiz. Ravshanki, F ga chiqarib tashlangan intervallarning oxirlari bo'lgan

$$0,1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9},\dots \tag{2.1}$$

nuqtalar tegishli. Biroq F to'plam faqat shu nuqtalardan iborat emas. $[0,1]$ kesmadagi F ga tegishli bo'lgan nuqtalarni quyidagicha xarakterlash mumkin.



2.1 – chizma

Buning uchun $[0,1]$ kesmadagi har bir x ni uchlik sistemada yozamiz:

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\dots+\frac{a_n}{3^n}+\dots$$

bu yerda a_n sonlar 0, 1 va 2 raqamlarni qabul qilishi mumkin. O'nli kasrlar holidagidek bu yerda ham ba'zi sonlarni ikki xil ko'rinishda yozish mumkin. Masalan,

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{0}{3^2}+\cdots+\frac{0}{3^n}+\cdots=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}+\cdots.$$

Endi F to'plamga tegishli sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasi haqida fikr yuritamiz. Ravshanki, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervaldagi sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasida a_1 son albatta 1 ga teng bo'ladi, $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ va $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ intervallarga tegishli sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasida a_2 son albatta 1 ga teng bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash $\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$ va $\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$ intervallarga tegishli sonlar uchun ularning uchlik sistemadagi yoyilmalarida a_3 son albatta 1 ga teng bo'ladi va hokazo. Shunday qilib ixtiyoriy $x\in[0,1]\setminus F$ son uchun uning uchlik sistemadagi yoyilmasida qatnashuvchi $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ sonlarning kamida bittasi 1 ga teng. Aytilgan mulohazalardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: F to'plamga kamida bir usul bilan uchlik kasr ko'rinishida tasvirlanuvchi shunday $x\in[0,1]$ sonlar kiradiki, ularga mos $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ ketma-ketlikda 1 raqami biror marta ham uchramaydi. Shunday qilib, har bir $x\in F$ uchun

$$a_1,a_2,\dots,a_n,\dots \tag{2.2}$$

ketma-ketlikni mos qo'yish mumkin, bu yerda a_n raqam 0 yoki 2 ga teng. Bunday ketma-ketliklar to'plami kontinuum quvvatli to'plamni tashkil qiladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun har bir (2.2) ketma-ketlikka

$$b_1,b_2,\dots,b_n,\dots \tag{2.3}$$

ketma-ketlikni shunday mos qo'yamizki, agar $a_n=0$ bo'lsa, $b_n=0$ bo'ladi, agar $a_n=2$ bo'lsa, $b_n=1$ bo'ladi. Har bir (2.3) ketma-ketlikni, $[0,1]$ kesmadagi biror y sonning ikkilik kasr yozuvi deb qarash mumkin. Shunday qilib, F to'plamni $[0,1]$ ga biyektiv akslantirishni olamiz. Bu yerdan F ning kontinuum quvvatli to'plam ekanligi kelib chiqadi. (2.1) ketma-ketlikdagi sonlar to'plami sanoqli bo'lgani uchun, ular F ni to'lig'icha qoplamaydi.

Biz ko'rsatdikki, F kontinuum quvvatga ega, ya'ni $[0,1]$ kesma bilan F to'plam o'rtasida biyektiv moslik mavjud.

Bundan tashqari Kantor to'plami $[0,1]$ kesmaning hech yerida zichmas va o'lchovi nolga teng. Kantor to'plami F ning o'lchovi nol ekanligi $\mu([0,1]\setminus F)=1$ ekanligidan kelib chiqadi. Barcha chiqarib tashlangan intervallar uzunliklari yig'indisi

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\dots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\dots=1.$$

Demak, $\mu(F)=0$.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $M=\{x\in R^2 : x_1^2+x_2^2<1\}$ *to'plamni* R^2 *metrik fazoda ochiq to'plam bo'lishini isbotlang.*

2. $N=\{x\in R^2 : 1\le x_1^2+x_2^2\le 4\}$ *to'plamni* R^2 *metrik fazoda yopiq to'plam bo'lishini isbotlang.*

3. *Ratsional sonlar to'plami* Q *ning yopig'ini toping.*

4. Q *ni* $R=(-\infty;\infty)$ *ning hamma yerida zich ekanligini isbotlang.*

5. *Butun sonlar to'plami* Z *ni* R *ning hech yerida zich emasligini isbotlang.*

6. Q *ning barcha yakkalangan nuqtalari to'plamini toping.*

7. Z *ning barcha yakkalangan nuqtalari to'plamini toping.*

8. $R\setminus Q$ *ning barcha limitik nuqtalari to'plamini toping.*

9. *To'plam yopig'ining xossalarini keltiring.*

10. *Sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi ochiq to'plam bo'lmasligiga misol keltiring.*

11. *Sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plam bo'lmasligiga misol keltiring.*

12. *Kantor to'plami* $[0,1]$ *kesmada zichmi?* F *to'plam* $[0,1]$ *kesmadagi biror* (a,b) *intervalda zich bo'la oladimi?*

13. *Kantor to'plamining Lebeg ma'nosida o'lchovli ekanligini ko'rsating. Uning o'lchovini toping.*

14. *Kantor to'plamining barcha yakkalangan nuqtalari to'plamini toping.*

15. *Kantor to'plami* $[0,1]$ *kesmaning hech yerida zichmas ekanligini ko'rsating.*

16. *Diskret metrik fazoda ixtiyoriy* M *uchun* $M=[M]$ *tenglikni isbotlang.*

3-§. To'la metrik fazolar

Matematik analizdan ma'lumki, har qanday fundamental sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir. Bu tasdiq sonlar o'qining to'laligini ifodalaydi. Quyida ko'rsatiladiki, ixtiyoriy metrik fazoda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lavermaydi.

3.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon>0$ *uchun shunday* N_ε *natural son mavjud bo'lib, barcha* $n>N_\varepsilon$ *va* $m>N_\varepsilon$ *nomerlar uchun* $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa, u holda* $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik deyiladi.*

Uchburchak aksiomasidan bevosita kelib chiqadiki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamentaldir. Haqiqatan ham, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x ga yaqinlashsa, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday N_ε son mavjudki, barcha $n>N_\varepsilon$ nomerlarda $\rho(x_n,x)<\varepsilon/2$ tengsizlik bajariladi. U holda ixtiyoriy $n>N_\varepsilon$ va $m>N_\varepsilon$ nomerlar uchun

$$\rho(x_n,x_m)\le\rho(x_n,x)+\rho(x,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Demak, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik ekan.

3.2-ta'rif. *Agar X metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la metrik fazo deyiladi.*

3.1-misol. Yakkalangan nuqtalar fazosida faqatgina statsionar (ya'ni biror nomerdan boshlab hamma nomerlarda birgina nuqta takrorlanadigan) ketma-ketliklar fundamental va shuning uchun yaqinlashadi, ya'ni bu fazo - to'la.

3.2. $R=(-\infty,\infty)$ fazoning to'laligi matematik analiz kursidan ma'lum.

3.3. R^n to'la metrik fazodir. Isbotlang.

Isbot. Faraz qilaylik, $x^{(p)}=\left(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\ldots,x_n^{(p)}\right)$ - R^n dagi ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon>0$ uchun shunday N_ε nomer mavjud bo'lib, barcha $p>N_\varepsilon$ va $q>N_\varepsilon$ nomerlar uchun

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^{(p)}-x_k^{(q)}\right)^2<\varepsilon^2. \qquad (3.1)$$

Natijada har bir $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ uchun $\left\{x_k^{(p)}\right\}$ ketma-ketlik barcha $p>N_\varepsilon$ va $q>N_\varepsilon$ nomerlar uchun $\left|x_k^{(p)}-x_k^{(q)}\right|<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi, ya'ni $\left\{x_k^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty}$ fundamental sonli ketma-ketlikdir va R fazo to'la bo'lganligi uchun u yaqinlashuvchi bo'ladi. Uning limitini

$$x_k=\lim_{p\to\infty}x_k^{(p)},\ \ k\in\{1,2,\ldots,n\}$$

orqali belgilaymiz. U holda, (3.1) tengsizlikda $p>N_\varepsilon$ deb $q\to\infty$ da limitga o'tsak

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^{(p)}-x_k\right)^2\le\varepsilon^2$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan

$$\lim_{p\to\infty}x^{(p)}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x.\ \Delta$$

3.4.-3.5. R_∞^n va R_p^n fazolarning to'laligi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

3.6. $C[a,b]$ fazo to'la metrik fazodir. Isbotlang.

Isbot. $\{x_n\} \subset C[a,b]$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε mavjudki, $n,m > N_\varepsilon$ bo'lganda

$$\rho(x_n, x_m) = \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \qquad (3.2)$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa $\{x_n\}$ funksional ketma-ketlikning $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashish shartidir. Shuning uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik $[a.b]$ kesmada aniqlangan biror x uzluksiz funksiyaga tekis yaqinlashadi. Agar (3.2) tengsizlikda $n > N_\varepsilon$ bo'lganda $m \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$\rho(x_n, x) = \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik $C[a,b]$ fazo metrikasida x funksiyaga yaqinlashadi. Δ

3.7. ℓ_2 to'la metrik fazodir. Isbotlang.

Isbot. $\{x^{(n)}\} \subset \ell_2$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε mavjudki, $n,m > N_\varepsilon$ bo'lganda

$$\rho^2\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 < \varepsilon^2 \qquad (3.3)$$

tengsizlik bajariladi, bu yerda $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right)$. (3.3) dan kelib chiqadiki, ixtiyoriy k natural son uchun $\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| < \varepsilon$ bo'ladi, ya'ni har bir k da $x_k^{(n)}$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi fundamentaldir va shuning uchun u yaqinlashadi. Aytaylik,

$$x_k = \lim_{n \to \infty} x_k^{(n)}, \quad k = 1,2,\ldots$$

bo'lsin. Endi x bilan yuqoridagi x_k limitlar orqali tuzilgan $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ ketma-ketlikni belgilaymiz.

Quyidagilarni ko'rsatishimiz kerak:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, ya'ni $x \in \ell_2$;

b) $\lim_{n\to\infty} \rho(x, x^{(n)}) = 0.$

(3.3) tengsizlikka asosan har bir belgilangan M natural son uchun

$$\sum_{k=1}^{M}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 < \varepsilon^2$$

tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlikning chap tomonidagi yig'indida cheklita qo'shiluvchi bo'lgani uchun $n > N_\varepsilon$ ni tayinlab, $m \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$\sum_{k=1}^{M}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2 \le \varepsilon^2$$

tengsizlikka kelamiz. Bu tengsizlik barcha M larda o'rinli, shuning uchun $M \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2 \le \varepsilon^2 \qquad (3.4)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}\right)^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lgani va

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right)^2 \le 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k - x_k^{(n)}\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}\right)^2$$

munosabatdan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi, ya'ni a) tasdiq isbotlandi. (3.4) tengsizlikda $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy kichik miqdor bo'lgani uchun

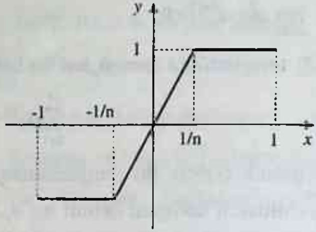
$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k - x_k^{(n)}\right)^2} = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni ℓ_2 fazo metrikasida $x^{(n)} \to x$. b) tasdiq ham isbot bo'ldi. Δ

3.8. $C_2[-1,1]$ metrik fazo to'la emas. Isbotlang.

Isbot. Buning uchun $C_2[-1,1]$ fazoda uzluksiz funksiyalarning

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1,-1/n],\\ nx, & x\in(-1/n,\ 1/n),\\ 1, & x\in[1/n,\ 1]\end{cases}$$



3.1 - chizma

ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlik $C_2[-1,1]$ fazoda fundamentaldir, chunki barcha $x\in[-1,1]$ lar uchun $|f_n(x)-f_m(x)|\le 1$ ekanligini hisobga olsak va $n<m$ desak,

$$\rho^2(f_n,f_m)=\int_{-1}^{1}(f_n(x)-f_m(x))^2dx<\int_{-1/n}^{1/n}1dx=\frac{2}{n}\to 0,\ n\to\infty.$$

Biroq $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_2[-1,1]$ fazodagi birorta ham funksiyaga yaqinlashmaydi. Haqiqatan ham, $f\in C_2[-1,1]$ ixtiyoriy funksiya va

$$\varphi(x)=\begin{cases}-1, & agar\ x\in[-1,0),\\ 1, & agar\ x\in[0,1]\end{cases}$$

nol nuqtada uzilishga ega funksiya bo'lsin. Ko'rinib turibdiki,

$$f_n(x)-\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,\ -1/n]\cup[1/n,\ 1],\\ nx+1, & x\in(-1/n,0),\\ nx-1, & x\in[0,1/n).\end{cases}$$

Bundan tashqari barcha $x\in[-1,1]$ lar uchun $|f_n(x)-\varphi(x)|\le 1$. Shuning uchun

$$\int_{-1}^{1}(f_n(x)-\varphi(x))^2dx=\int_{-1/n}^{1/n}(f_n(x)-\varphi(x))^2dx\le\frac{2}{n}\to 0,\ n\to\infty. \qquad (3.5)$$

Agar Minkovskiyning integral tengsizligidan foydalansak ((1.22) ga qarang),

$$\left[\int_{-1}^{1}(f(x)-\varphi(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}} \le \left[\int_{-1}^{1}(f(x)-f_n(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{-1}^{1}(f_n(x)-\varphi(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

tengsizlikka kelamiz. Endi quyidagi

$$\int_{-1}^{1}(f(x)-\varphi(x))^2dx>0 \quad (3.7)$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Uning isbotini ikki holga ajratamiz.

1) Faraz qilaylik, $f(0)\le 0$ bo'lsin, u holda f ning uzluksizligiga ko'ra shunday $\delta_1>0$ mavjudki, barcha $x\in[0,\delta_1]$ lar uchun $f(x)<1/2$ bo'ladi. Bundan

$$|f(x)-\varphi(x)|^2\ge 1/4, \quad x\in[0,\delta_1] \quad (3.8)$$

tengsizlik kelib chiqadi. (3.8) tengsizlikni $[0,\delta_1]$ kesma bo'yicha integrallab,

$$\int_{-1}^{1}(f(x)-\varphi(x))^2dx\ge\int_{0}^{\delta_1}(f(x)-\varphi(x))^2dx>\frac{\delta_1}{4}$$

tengsizlikka kelamiz.

2) Agar biz $f(0)>0$ deb faraz qilsak, u holda shunday $\delta_2>0$ mavjudki, barcha $x\in[-\delta_2,0]$ lar uchun $|f(x)-\varphi(x)|>1/2$ bo'ladi. Bundan

$$\int_{-1}^{1}(f(x)-\varphi(x))^2dx\ge\int_{-\delta_2}^{0}(f(x)-\varphi(x))^2dx>\frac{\delta_2}{4}.$$

Demak, (3.7) tengsizlik isbot bo'ldi. (3.6) tengsizlikdan

$$\left[\int_{-1}^{1}(f(x)-f_n(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}} \ge \left[\int_{-1}^{1}(f(x)-\varphi(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}} - \left[\int_{-1}^{1}(f_n(x)-\varphi(x))^2dx\right] \quad (3.9)$$

ni olamiz. (3.5), (3.7) va (3.9) lardan

$$\rho(f,f_n)=\left[\int_{-1}^{1}(f(x)-f_n(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

ning nolga yaqinlasha olmasligi kelib chiqadi, ya'ni $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_2[-1,1]$ dagi birorta ham funksiyaga yaqinlasha olmaydi. Δ

3.9. ℓ_p, $p\geq 1$ va m, c, c_0 fazolar to'la metrik fazolardir.

3.1. Ichma-ich joylashgan sharlar haqidagi teorema

Ma'lumki, analizda ichma-ich joylashgan kesmalar haqidagi lemma keng qo'llaniladi. Metrik fazolar nazariyasida esa «ichma-ich joylashgan yopiq sharlar haqidagi teorema» deb ataluvchi quyidagi teorema shunga o'xshash muhim ahamiyatga ega.

3.1-teorema. *X metrik fazo to'la bo'lishi uchun undagi ixtiyoriy ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo'sh bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isbot. *Zaruriyligi.* X to'la metrik fazo bo'lsin va $B_1, B_2, B_3, \ldots$ - ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligi bo'lib, ularning radiuslari ketma-ketligi nolga intilsin. B_n sharning markazi x_n nuqtada va radiusi r_n bo'lsin. Barcha $m>n$ lar uchun $\rho(x_n, x_m)<r_n$ va $n\to\infty$ da $r_n\to 0$ bo'lgani uchun, sharlarning markazlari ketma-ketligi $\{x_n\}$ fundamentaldir. X to'la metrik fazo bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

mavjud. Aytaylik,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

bo'lsin. Har bir n da barcha $m>n$ lar uchun $x_m \in B_n$. Shunday ekan, har bir n da x nuqta B_n shar uchun urinish nuqtasi bo'ladi. Barcha n larda B_n yopiq bo'lgani uchun $x\in B_n$. U holda

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing.$$

Yetarliligi. X da ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo'lsin. U holda bu ketma-ketlik uchun shunday n_1 nomer topiladiki, barcha $n>n_1$ larda $\rho(x_n, x_{n_1})<\frac{1}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Markazi x_{n_1}

nuqtada va radiusi 1 ga teng B_1 yopiq sharni olamiz. Keyin $n_2 > n_1$ nomerni shunday tanlaymizki, barcha $n > n_2$ larda $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ tengsizlik bajarilsin. Markazi x_{n_2} nuqtada va radiusi $\frac{1}{2}$ ga teng B_2 yopiq sharni olamiz. Tanlanishiga ko'ra, $B_2 \subset B_1$, $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{2}$. Endi $n_3 > n_2$ nomerni shunday tanlaymizki, barcha $n > n_3$ larda $\rho(x_n, x_{n_3}) < \frac{1}{2^3}$ tengsizlik bajarilsin. Agar shu usulda $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ nuqtalar tanlangan bo'lsa, u holda $x_{n_{k+1}}$ nuqtani shunday tanlaymizki, $n_{k+1} > n_k$ va barcha $n > n_{k+1}$ larda $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ bo'lsin. Yuqoridagidek markazi $x_{n_{k+1}}$ va radiusi $\frac{1}{2^k}$ ga teng bo'lgan yopiq sharni B_{k+1} orqali belgilaymiz. Sharlarni bunday qurish jarayonini davom ettira borib, ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligini hosil qilamiz va ularning radiuslari ketma-ketligi $\left\{ r_k = \frac{1}{2^{k-1}} \right\}$ $k \to \infty$ da nolga intiladi. Teorema shartiga ko'ra,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing \quad \text{va} \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

bo'lsin. Bu sharlar ketma-ketligi umumiy nuqtaga ega va bu nuqtani x deb belgilaymiz. B_k sharlar ketma-ketligining qurilishiga ko'ra x nuqta $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlikning limiti bo'ladi. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikning $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketligi x nuqtaga yaqinlashgani uchun, $\{x_n\}$ ham x nuqtaga yaqinlashadi. Shunday qilib, $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. Δ

3.2-teorema. *(Ber teoremasi). To'la metrik fazoni hech yerda zich bo'lmagan sanoqli sondagi to'plamlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin emas.*

Isbot. Faraz qilaylik,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

bo'lsin, bu yerda M_n larning har biri hech yerda zich bo'lmagan to'plamlar. Radiusi 1 ga teng biror B_0 yopiq sharni olamiz. Farazimizga ko'ra M_1 to'plam B_0 da zichmas. Shuning uchun radiusi $\frac{1}{2}$ dan kichik shunday yopiq $B_1 \subset B_0$ shar mavjudki, $B_1 \cap M_1 = \varnothing$. Hech yerda zichmas M_2 to'plam B_1 sharda ham zichmas, shunday ekan, radiusi $\frac{1}{3}$ dan kichik shunday $B_2 \subset B_1$ yopiq shar mavjudki, $B_2 \cap M_2 = \varnothing$ va hokazo. Jarayonni shu usulda cheksiz davom ettirib, yopiq sharlarning shunday ichma-ich joylashgan $\{B_n\}$ ketma-ketligini hosil qilamizki, ularning radiuslari ketma-ketligi nolga intiladi. 3.1-teoremaga ko'ra $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing$. Faraz qilaylik, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ bo'lsin. B_n sharlarning tuzilishiga ko'ra ixtiyoriy n da $x \notin M_n$, shunday ekan, $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, ya'ni $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Bu farazimizga zid. Δ

3.2. Metrik fazolarni to'ldirish

Agar R metrik fazo to'la bo'lmasa, uni biror usul bilan (aslini olganda yagona usul bilan) biror to'la metrik fazo ichiga joylashtirishimiz mumkin.

3.3-ta'rif. *Agar: 1) R metrik fazo R^* to'la metrik fazoning qism fazosi bo'lsa; 2) R to'plam R^* ning hamma yerida zich, ya'ni $[R] = R^*$ bo'lsa, u holda R^* metrik fazo R metrik fazoning to'ldirmasi deyiladi.*

3.3-teorema. *Har bir R metrik fazo to'ldirmaga ega va bu to'ldirma fazo R ning nuqtalarini qo'zg'almas holda qoldiruvchi izometriya aniqligida yagonadir.*

Isbot. Dastlab to'ldirma fazoning yagonaligini isbotlaymiz. R^* va R^{**} lar R ning ikkita to'ldirma fazolari bo'lib, ρ_1 va ρ_2 mos ravishda ulardagi masofalar bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, har bir $x^* \in R^*$ uchun shunday $\{x_n\} \subset R$ ketma-ketlik mavjud bo'lib, $\{x_n\} \to x^*$ bo'ladi. U holda

$$\lim_{m \geq n \to \infty} \rho(x_n, x_m) = \lim_{m \geq n \to \infty} \rho_1(x_n, x_m) = \lim_{m \geq n \to \infty} \rho_2(x_n, x_m) = 0$$

munosabatga ko'ra, $\{x_n\}$ ketma-ketlik R, R^* va R^{**} fazolarda fundamental ketma-ketlik bo'ladi. Shuning uchun, yagona $x^{**} \in R^{**}$ mavjud bo'lib, $\{x_n\} \to x^{**}$. Bu x^{**} nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog'liq emas. Chunki, agar $\{x_n\} \to x^*$ va $\{y_n\} \to x^*$ bo'lsa,

$$z_n = \begin{cases} x_k, & \text{agar } n = 2k-1, \\ y_k, & \text{agar } n = 2k \end{cases}$$

ketma-ketlik ham x^* ga yaqinlashadi. Tuzilishiga ko'ra, $\{z_n\}$ - fundamental va uning $\{x_k\}$ qismiy ketma-ketligi x^{**} nuqtaga yaqinlashadi. U holda $\{z_n\}$ ning o'zi ham x^{**} ga yaqinlashadi va shunday ekan, $\{y_n\}$ qismiy ketma-ketlik ham x^{**} ga yaqinlashadi. Ko'rsatilgan yo'l har bir $x^* \in R^*$ uchun yagona x^{**} ni mos qo'yadi. R^* va R^{**} o'rtasida $\varphi(x^*) = x^{**}$ moslikni o'rnatamiz. Agar $x \in R$ bo'lsa, $x \in R^*$ va $x \in R^{**}$ bo'ladi, hamda $x_n = x$ statsionar ketma-ketlik x elementga R^* va R^{**} fazolarda yaqinlashadi.

Shuning uchun, ixtiyoriy $x \in R$ uchun $\varphi(x) = x$. Bu usulda aniqlangan φ moslik R^* ni R^{**} ga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Endi φ ning izometriya ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik,

$$\{x_n\} \to x^*, x^* \in R^* \quad \text{va} \quad \{x_n\} \to x^{**}, x^{**} \in R^{**}$$

va

$$\{y_n\} \to y^*, y^* \in R^* \quad \text{va} \quad \{y_n\} \to y^{**}, y^{**} \in R^{**}$$

bo'lsin. U holda metrikaning uzluksizlik xossasiga ko'ra

$$\rho_1(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}\rho_1(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$$

va

$$\rho_2(x^{**},y^{**})=\lim_{n\to\infty}\rho_2(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$$

Bundan

$$\rho_1(x^*,y^*)=\rho_2(x^{**},y^{**}).$$

Demak, R^* ni R^{**} ga o'zaro bir qiymatli akslantiruvchi φ moslik mavjud bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) barcha $x\in R$ lar uchun $\varphi(x)=x$;

2) agar $x^*\leftrightarrow x^{**}$, $y^*\leftrightarrow y^{**}$ bo'lsa, u holda $\rho_1(x^*,y^*)=\rho_2(x^{**},y^{**})$.

To'ldirma fazoning yagonaligi isbotlandi.

Endi to'ldirma fazoning mavjudligini isbotlaymiz. R ixtiyoriy metrik fazo bo'lsin. R dan olingan $\{x_n\}$ va $\{x_n'\}$ fundamental ketma-ketliklar $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_n')=0$ shartni qanoatlantirsa, ular ekvivalent deb ataladi va $\{x_n\}\sim\{x_n'\}$ ko'rinishda yoziladi. Tekshirish qiyin emaski, fundamental ketma-ketliklar o'rtasida kiritilgan bu munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitivdir.

Bundan kelib chiqadiki, R ning elementlaridan tuzilgan barcha fundamental ketma-ketliklar to'plami har biri o'zaro ekvivalent ketma-ketliklardan tashkil bo'lgan va kesishmaydigan sinflarga ajraladi. Endi R^* fazoni aniqlaymiz. R^* ning elementlari sifatida yuqorida aniqlangan o'zaro ekvivalent fundamental ketma-ketliklardan iborat sinflarni qabul qilamiz va unda masofani quyidagicha aniqlaymiz. x^* va y^* shunday sinflardan ikkitasi bo'lsin. Bu sinflarning har biridan ixtiyoriy ravishda bittadan vakil tanlaymiz, ya'ni $\{x_n\}\in x^*$ va $\{y_n\}\in y^*$ fundamental ketma-ketliklarni olamiz. x^* va y^* orasidagi masofani

$$\rho^*(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n). \tag{3.10}$$

usulda aniqlaymiz. Masofani bu usulda aniqlash nuqsonlardan xoli ekanligini ko'rsatamiz, ya'ni (3.10) limit mavjud, hamda $\{x_n\}\in x^*$ va $\{y_n\}\in y^*$ vakillarning tanlanishiga bog'liq emas.

Ushbu

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\le\rho(x_n,x_m)+\rho(y_n,y_m) \tag{3.11}$$

tengsizlik ko'rsatadiki, agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ lar fundamental ketma-ketliklar bo'lsa, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday n va m lar mavjudki,

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. U holda $c_n=\rho(x_n,y_n)$ sonli ketma-ketlik Koshi kriteriysini qanoatlantiradi va shunday ekan, $\{c_n\}$ chekli limitga ega.

Bu limit $\{x_n\}\in x^*$ va $\{y_n\}\in y^*$ larning tanlanishiga bog'liq emas. Haqiqatan ham,

$$\{x_n\}\in x^*,\ \{x_n'\}\in x^* \quad \text{va} \quad \{y_n\}\in y^*,\ \{y_n'\}\in y^*$$

bo'lsin. $\{x_n\}\sim\{x_n'\}$ va $\{y_n\}\sim\{y_n'\}$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_n')=0 \quad \text{va} \quad \lim_{n\to\infty}\rho(y_n,y_n')=0$$

bo'ladi. U holda

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_n',y_n')|\le\rho(x_n,x_n')+\rho(y_n,y_n')$$

tengsizlikdan

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n',y_n')$$

tenglik kelib chiqadi.

Endi R^* da (3.10) formula bilan aniqlangan ρ^* akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Ishonch hosil qilish qiyin emaski, 1- va 2- aksiomalar bajariladi. Endi uchburchak aksiomasining bajarilishini tekshiramiz. Berilgan R fazoda uchburchak aksiomasi bajarilgani uchun ixtiyoriy, $\{x_n\}\in x^*$ va $\{y_n\}\in y^*$ va $\{z_n\}\in z^*$ fundamental ketma-ketliklar uchun, barcha n larda

$$\rho(x_n,z_n)\le\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,z_n)$$

tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlikda $n\to\infty$ da limitga o'tib,

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,z_n)\le\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)+\lim_{n\to\infty}\rho(y_n,z_n)$$

tengsizlikni olamiz, ya'ni

$$\rho^*(x^*,z^*)\le\rho^*(x^*,y^*)+\rho^*(y^*,z^*).$$

R metrik fazoni R^* ning qism fazosi sifatida qarash mumkinligini ko'rsatamiz.

Har bir $x\in R$ ga $\{x_n=x\}$ statsionar ketma-ketlik va unga ekvivalent fundamental ketma-ketliklardan tashkil bo'lgan sinfni mos qo'yamiz. Bu sinf x ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}\subset R$ ketma-ketliklardan iborat. Tuzilishiga ko'ra bu sinf bo'sh emas. Shu bilan birgalikda, agar $x,y\in R$ uchun

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n \quad \text{va} \quad y=\lim_{n\to\infty}y_n$$

bo'lsa, u holda

$$\rho^*(x,y)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

Chunki, (3.11) ko'ra

$$|\rho(x,y)-\rho(x_n,y_n)|\le\rho(x,x_n)+\rho(y,y_n).$$

Shunday ekan, har bir $x\in R$ ga unga yaqinlashuvchi fundamental ketma-ketliklar sinfi x^* ni mos qo'yish bilan R ni R^* ning ichiga izometrik akslantiramiz. Bundan keyin R va uning R^* dagi aksini farq qilmay R ni R^* ning qism fazosi deb qarash mumkin. Navbat R metrik fazoning R^* ning hamma yerida zich ekanligini ko'rsatishga keldi. Ixtiyoriy $x^*\in R^*$ element va ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olamiz. x^* sinfdan vakil tanlaymiz, ya'ni $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikni olamiz.

Endi N nomerni shunday tanlaymizki, $n>N$ va $m>N$ bo'lganda $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ bo'lsin. U holda $n>N$ da

$$\rho^*(x_n,x^*)=\lim_{m\to\infty}\rho(x_n,x_m)\le\varepsilon.$$

ya'ni x^* ning ixtiyoriy ε - atrofi R ning nuqtasini saqlaydi. Shunday qilib, R ning R^* dagi yopig'i R^* ga teng.

Endi R^* ning to'laligini isbotlash qoldi. Dastlab shuni ta'kidlash lozimki, R^* ning tuzilishiga ko'ra R dan olingan ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik shu ketma-ketlikni saqlovchi $x^* \in R^*$ elementga yaqinlashadi. R fazo R^* da zich bo'lgani uchun R^* dan olingan nuqtalarning ixtiyoriy $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots$ fundamental ketma-ketligi uchun R da shunday $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ fundamental ketma-ketlik topiladiki,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x_n, x_n^*) = 0.$$

Buning uchun har bir n da $x_n \in R$ nuqtani $\rho^*(x_n, x_n^*) < 1/n$ shart bo'yicha tanlash yetarli. Tanlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik R da fundamental va R^* ning aniqlanishiga ko'ra, biror $x^* \in R^*$ ga yaqinlashadi. U holda

$$\rho^*(x^*, x_n^*) \le \rho^*(x^*, x_n) + \rho^*(x_n, x_n^*)$$

tengsizlikka ko'ra,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x^*, x_n^*) = 0,$$

ya'ni $\{x_n^*\}$ ketma-ketlik x^* ga yaqinlashadi. Δ

3.10-misol. X deb ratsional sonlar to'plamini belgilasak, u to'la bo'lmagan metrik fazo bo'ladi. Uning to'ldirmasi X^* - haqiqiy sonlardan iborat metrik fazo bo'ladi. $C_2[a,b]$ to'la bo'lmagan metrik fazo bo'ladi. Uning to'ldirmasi $L_2[a,b]$ fazodir (8-§ ning 8.18-misoliga qarang).

3.3. Metrik fazolarda kompakt to'plamlar

Matematik analiz faniga qat'iy asos solishda va uning rivojida Bolsano-Veyershtrass teoremasi va Geyne-Borel lemmalari fundamental ahamiyatga ega. Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra sonlar o'qidagi istalgan chegaralangan cheksiz to'plam kamida bitta limitik nuqtaga ega. Geyne-Borel lemmasiga ko'ra sonlar o'qidagi $[a,b]$ kesmaning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratib olish mumkin.

Sonlar o'qidagi chegaralangan cheksiz to'plamlar va kesmalarning bu xossalarini metrik fazolarda umumlashtirish maqsadida biz kompaktlik tushunchasiga kelamiz.

Kompakt to'plamlar tushunchasi metrik fazolardagi asosiy tushunchalardan biri hisoblanadi. Kompakt to'plamlar kompakt operatorlarni ta'riflashda va ularni tekshirishda qo'llaniladi.

Bizga X metrik fazo berilgan bo'lsin. M va A_α to'plamlar X ning qism to'plamlari bo'lsin. $\{A_{\alpha'}\}$ to'plamlar sistemasi $\{A_\alpha\}$ to'plamlar sistemasining qismi bo'lsin.

3.4-ta'rif. *Agar $M \subset \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ bo'lsa, $\{A_\alpha\}$ to'plamlar sistemasi M to'plamning qoplamasi deyiladi. Agar $\{A_{\alpha'}\} \subset \{A_\alpha\}$ qism sistema uchun $M \subset \bigcup\limits_{\alpha'} A_{\alpha'}$ bo'lsa, u holda $\{A_{\alpha'}\}$ sistema M ning qism qoplamasi deyiladi. Xususiy holda, $X = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ bo'lsa, u holda $\{A_\alpha\}$ to'plamlar sistemasi X fazoning qoplamasi deyiladi.*

3.5-ta'rif. *Agar $K \subset X$ to'plamning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo'lsa, u holda K kompakt to'plam deyiladi. Agar X fazoning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo'lsa, u holda X kompakt metrik fazo deyiladi.*

Quyida ko'rsatamizki, sonlar o'qida $[a,b]$ kesma kompakt to'plam bo'lishi bilan bir qatorda R^n va C^n fazolarda istalgan chegaralangan yopiq to'plam kompakt to'plam bo'ladi. Aksincha, sonlar o'qi, R^n va C^n fazolar kompakt bo'lmagan metrik fazolarga misol bo'ladi.

Endi 3.5-ta'rifga ekvivalent bo'lgan quyidagi ta'rifni keltiramiz.

3.6-ta'rif. *Agar K to'plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan K da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, K ga kompakt to'plam deyiladi.*

3.7-ta'rif. *Agar M to'plamning yopig'i $[M]$ kompakt to'plam bo'lsa, yoki ixtiyoriy $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlikdan X da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, M ga nisbiy kompakt to'plam deyiladi.*

Endi biz R^n yoki C^n fazolardagi to'plamlarning kompaktlik kriteriysini beramiz. Quyida θ bilan $(0,0,...,0) \in R^n$ nuqta belgilangan.

3.4-teorema. *R_p^n, $p \geq 1$ $(C_p^n, p \geq 1)$ metrik fazodagi K to'plam kompakt bo'lishi uchun, uning chegaralangan va yopiq bo'lishi yetarli va zarurdir.*

Isbot. *Yetarliligi.* Chegaralangan va yopiq $K \subset R_p^n$ to'plam berilgan bo'lsin. K chegaralangan to'plam bo'lganligi uchun u biror $B[\theta,r]$ sharda saqlanadi, ya'ni

$$\rho(x,\theta) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq r, \quad \forall x \in K. \tag{3.12}$$

Endi K to'plamdan ixtiyoriy $x^{(p)} = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)$ ketma-ketlik olamiz. $\{x^{(p)}\}$ ketma-ketlik hadlari ham (3.12) tengsizlikni qanoatlantiradi. Bundan esa $\left\{x_1^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty}$, $\left\{x_2^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty}, \ldots, \left\{x_n^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketliklarning chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra $\left\{x_1^{(p)}\right\}$ ketma-ketlikdan biror $x_1^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\left\{x_1^{(p_{k_1})}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Chegaralangan $\left\{x_2^{(p_{k_1})}\right\}$ ketma-ketlikdan Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra biror $x_2^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\left\{x_2^{(p_{k_2})}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu holda ham $\left\{x_1^{(p_{k_2})}\right\}$ qismiy ketma-ketlik $x_1^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi bo'ladi. Xuddi shu yo'l bilan n-chi qadamda chegaralangan $\left\{x_n^{(p_{k,n-1})}\right\}$ ketma-ketlikdan Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra biror $x_n^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\left\{x_n^{(p_n)}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Natijada hosil bo'lgan $\left\{x^{(p_n)}\right\}=\left\{\left(x_1^{(p_n)}, x_2^{(p_n)}, \ldots, x_n^{(p_n)}\right)\right\}_1^{\infty}$ ketma-ketlik $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ elementga yaqinlashadi. K yopiq to'plam bo'lganligi uchun $x^{(0)} \in K$ bo'ladi. 3.6-ta'rifga ko'ra K kompakt to'plam bo'ladi.

Zaruriyligi. Bizga R^n metrik fazodagi K kompakt to'plam berilgan bo'lsin. R^n fazoning $\{B(\theta, n)\}_{n=1}^{\infty}$ ochiq qoplamasini olamiz. Tabiiyki, $\{B(\theta, n)\}_{n=1}^{\infty}$ ochiq sharlar sistemasi K to'plamni ham qoplaydi. K kompakt to'plam bo'lganligi uchun shunday chekli $\{B(\theta, n_i)\}_{i=1}^{l}$ qism sistema mavjudki, u ham K to'plamni qoplaydi. Agar biz $n_1, n_2, \ldots, n_l$ sonlarning eng kattasini n_0 bilan belgilasak, $B(\theta, n_0)$ ochiq shar K ni saqlaydi. Bu esa K to'plamning chegaralangan ekanligini bildiradi.

Endi K ning yopiqligini isbotlaymiz. Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni K yopiq bo'lmasin. U holda $R^n \setminus K$ to'plamda K ning hech bo'lmaganda bitta limitik nuqtasi mavjud. Uni x^0 bilan belgilaymiz. Limitik nuqta ta'rifiga ko'ra x^0 ga yaqinlashuvchi $\{x_k\}$, $x_k \in K$ ketma-ketlik mavjud. K kompakt to'plam bo'lganligi uchun $\{x_k\}$ ketma-ketlikdan K da yaqinlashuvchi $\{x_{k_l}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. $\{x_k\}$ ketma-ketlik $x^0 \in R^n \setminus K$ elementga yaqinlashganligi uchun uning ixtiyoriy qismiy ketma-ketligi, jumladan $\{x_{k_l}\}$ qismiy ketma-ketlik ham x^0 ga yaqinlashadi. Bundan $x^0 \in K$ ekanligi kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik K ning yopiq to'plam ekanligini isbotlaydi. Δ

3.1-natija. *$R_p^n, p \geq 1$ $\left(C_p^n, p \geq 1\right)$ metrik fazodagi K to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun, uning chegaralangan bo'lishi yetarli va zarurdir.*

Metrik fazolarda nisbiy kompaktlik tushunchasi to'la chegaralanganlik tushunchasi bilan ustma-ust tushadi. Shu maqsadda to'la chegaralangan to'plam tushunchasini beramiz. Bizga (X,ρ) metrik fazodan olingan A, M to'plamlar va $\varepsilon>0$ son berilgan bo'lsin.

3.8-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $x\in M$ uchun shunday $a\in A$ mavjud bo'lib, $\rho(x,a)\leq\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A to'plam M to'plam uchun ε to'r deyiladi.*

A to'plam M ning qismi bo'lishi shart emas, umuman $A\cap M=\varnothing$ bo'lishi ham mumkin.

3.9-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun M to'plamning chekli ε to'ri mavjud bo'lsa, M ga to'la chegaralangan to'plam deyiladi.*

Har qanday to'la chegaralangan to'plam chegaralangan bo'ladi, lekin teskarisi o'rinli emas.

3.5-teorema. *(X,ρ) to'la metrik fazodagi M to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun, uning to'la chegaralangan bo'lishi yetarli va zarurdir* [1].

Asosiy funksional fazolardan biri $C[a,b]$ fazodir. Bu fazodagi to'plamning kompaktlik kriteriysini keltiramiz. Paragraf so'ngida ℓ_p, $p\geq 1$ fazodagi to'plamlarning kompaktlik kriteriysini beramiz.

$F\subset C[a,b]$ funksiyalar oilasi berilgan bo'lsin.

3.10-ta'rif. *Agar shunday $C>0$ mavjud bo'lib, ixtiyoriy $\phi\in F$ va barcha $x\in[a,b]$ lar uchun $|\phi(x)|\leq C$ tengsizlik bajarilsa, u holda F funksiyalar oilasi tekis chegaralangan deyiladi.*

3.11-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $|x_1-x_2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1,x_2\in[a,b]$ hamda barcha $\phi\in F$ lar uchun*

$$|\phi(x_1)-\phi(x_2)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, F funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz deyiladi.

3.6-teorema. *(Arsela teoremasi). $M \subset C[a,b]$ to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun uning tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo'lishi yetarli va zarurdir.*

Isbot. *Zaruriyligi.* $M \subset C[a,b]$ - ixtiyoriy nisbiy kompakt to'plam bo'lsin. $C[a,b]$ to'la metrik fazo bo'lgani uchun 3.5-teoremaga ko'ra, ixtiyoriy ε da M ning chekli $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k\}$ elementdan iborat $\varepsilon/3$ - to'ri mavjud. Har bir φ_i funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun u chegaralangandir, ya'ni

$$\max_{x\in[a,b]}|\varphi_i(x)| \le K_i, \quad i=1,2,\ldots,k.$$

$K=\max\limits_{1\le i\le k} K_i+\varepsilon/3$ belgilash kiritamiz. $\varepsilon/3$ - to'r ta'rifiga ko'ra, har bir $\varphi \in M$ uchun birorta φ_i da

$$\rho(\varphi,\varphi_i)=\max_{x\in[a,b]}|\varphi(x)-\varphi_i(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan kelib chiqadiki, har bir $x\in[a,b]$ uchun

$$|\varphi(x)| \le |\varphi_i(x)|+\frac{\varepsilon}{3} \le K_i+\frac{\varepsilon}{3} \le K.$$

Shunday qilib, M to'plam funksiyalar oilasi sifatida tekis chegaralangan ekan. Kantor teoremasiga ko'ra har bir φ_i funksiya $[a,b]$ kesmada tekis uzluksiz bo'ladi. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_i>0$ mavjud bo'lib, $|x_1-x_2|<\delta_i$ bo'lganda

$$|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik bajariladi. Aytaylik, $\delta=\min\limits_{1\le i\le k}\delta_i$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\varphi\in M$ uchun φ_i funksiyani shunday tanlaymizki, $\rho(\varphi,\varphi_i)<\varepsilon/3$ bo'lsin. U holda $|x_1-x_2|<\delta$ shart bajarilganda

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \le |\varphi(x_1)-\varphi_i(x_1)|+|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|+|\varphi_i(x_2)-\varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

o'rinli. Bundan M ning tekis darajada uzluksizligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Funksiyalarning $M \subset C[a,b]$ oilasi tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo'lsin. Agar biz, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun M ning chekli ε to'ri mavjud ekanligini ko'rsatsak, 3.5-teoremaga ko'ra M ning nisbiy kompakt to'plam ekanligi kelib chiqadi. Hamma $\varphi \in M$ va barcha $x \in [a,b]$ uchun $|\varphi(x)| \le K$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\delta > 0$ ni shunday tanlaymizki, barcha $\varphi \in M$ lar uchun $|x_1 - x_2| < \delta$ bo'lganda $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$ shart bajarilsin. Koordinatalar sistemasining OX o'qidagi $[a,b]$ kesmani

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

nuqtalar bilan uzunliklari $\delta > 0$ dan kichik oraliqlarga bo'lamiz va bu nuqtalar orqali OY o'qiga parallel (vertikal) to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Keyin OY o'qidagi $[-K,K]$ kesmani

$$-K = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = K$$

nuqtalar bilan uzunliklari $\varepsilon/5$ dan kichik oraliqlarga bo'lamiz va bu bo'linish nuqtalari orqali OX o'qiga parallel (gorizontal) to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Shunday qilib, $[a,b] \times [-K,K]$ to'g'ri to'rtburchak gorizontal tomoni δ dan kichik va vertikal tomoni $\varepsilon/5$ dan kichik yacheykalarga ajraladi. Har bir $\varphi \in M$ funksiyaga uchlari (x_k, y_l) nuqtalarda bo'lgan va har bir x_k nuqtada $\varphi(x_k)$ dan $\varepsilon/5$ dan kichik chetlangan ψ siniq chiziqni mos qo'yamiz (bunday siniq chiziq mavjud).

Bu $\psi(x)$ siniq chiziqning tanlanishiga ko'ra

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

bo'lgani uchun

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

tengsizlik bajariladi. Tuzilishiga ko'ra ψ funksiya $[x_k, x_{k+1}]$ kesmada chiziqli bo'lganligi sababli, barcha $x \in [x_k, x_{k+1}]$ lar uchun

$$|\psi(x_k)-\psi(x)|<\frac{3\varepsilon}{5}.$$

Endi x - $[a,b]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasi va x_k esa x ga chapdan eng yaqin bo'linish nuqtasi bo'lsin. U holda

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\le|\varphi(x)-\varphi(x_k)|+|\varphi(x_k)-\psi(x_k)|+|\psi(x_k)-\psi(x)|\le\varepsilon.$$

Shunday ekan, yuqorida ko'rsatilgan usulda qurilgan barcha ψ siniq chiziqlar to'plami chekli va u M to'plam uchun ε - to'r bo'ladi. 3.5-teoremaga ko'ra M nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. Δ

3.11-misol. $C[a,b]$ fazoda

$$F=\left\{\, y(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt,\quad x\in B[0,1]\right\} \tag{3.13}$$

funksiyalar oilasini kompaktlikka tekshiring. Bu yerda $B[0,1]$ to'plam - $C[a,b]$ fazodagi markazi nol $(x(t)\equiv 0)$ nuqtada radiusi 1 ga teng bo'lgan yopiq shar. $K(s,t)$ - $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda aniqlangan uzluksiz funksiya.

Yechish. Arsela teoremasiga ko'ra F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatish yetarli. $K(s,t)$ funksiya - $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda uzluksiz bo'lganligi uchun u chegaralangan, ya'ni shunday $C>0$ son mavjudki, barcha $s,t\in[a,b]$ lar uchun $|K(s,t)|\le C$ tengsizlik o'rinli. $x\in B[0,1]$ shartdan $\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|\le 1$ ekanligi kelib chiqadi. Endi F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz:

$$|y(s)|=\left|\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt\right|\le\int_a^b|K(s,t)|\cdot|x(t)|\,dt\le C\cdot 1\cdot(b-a).$$

Bu tengsizlik F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini isbotlaydi. Endi F funksiyalar oilasining tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz:

$$|y(s_1)-y(s_2)|=\left|\int_a^b K(s_1,t)x(t)\,dt-\int_a^b K(s_2,t)x(t)\,dt\right|\leq$$

$$\leq\int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t)|\cdot|x(t)|\,dt\leq\varepsilon\cdot 1\cdot(b-a).$$

So'nggi munosabat $|s_1-s_2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $s_1,s_2\in[a,b]$ va barcha $x\in B[0,1]$ lar uchun o'rinli. Demak, F funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz ekan. Shunday qilib, Arsela teoremasiga ko'ra (3.13) tenglik bilan aniqlangan F funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. Δ

Endi tekis chegaralangan, lekin tekis darajada uzluksiz bo'lmagan Φ funksiyalar oilasiga misol keltiramiz.

3.12. $C[0,1]$ fazoda

$$\Phi=\left\{x_\alpha(t)=\frac{2\alpha t}{1+\alpha^2t^2},\quad \alpha\in(0,\infty)\right\}\tag{3.14}$$

funksiyalar oilasini kompaktlikka tekshiring.

Yechish. Arsela teoremasiga ko'ra (3.14) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini tekshirishimiz kerak. $(1-\alpha t)^2=1-2\alpha t+\alpha^2t^2\geq 0$ tengsizlikdan $|x_\alpha(t)|\leq 1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis chegaralangan ekan. Tekis darajada uzluksiz emas degan tushunchani ta'riflaymiz.

Agar biror $\varepsilon>0$ son va ixtiyoriy $\delta>0$ uchun shunday $x_\alpha\in\Phi$ va shunday $t_1,\ t_2\in[0,1]$ lar mavjud bo'lib $|t_1-t_2|<\delta$ tengsizlik bajarilganda

$$|x_\alpha(t_1)-x_\alpha(t_2)|\geq\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, Φ funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz emas deyiladi. Endi $\varepsilon=1/2$ va $\delta>0$ - ixtiyoriy son bo'lsin. Agar $\alpha>\frac{1}{\delta}$ va $t_1=\frac{1}{\alpha},\ t_2=0$ bo'lsa, u holda $|t_1-t_2|=\frac{1}{\alpha}<\delta$ bo'ladi, ammo

$$\left|x_\alpha(t_1)-x_\alpha(t_2)\right|=\frac{2\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}}{1+\alpha^2\cdot\dfrac{1}{\alpha^2}}=1>\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz emas ekan. Shunday qilib, (3.14) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to'plam emas ekan. Δ

Arsela teoremasining umumlashmasi quyidagicha. C_{MN} bilan M to'plamni N to'plamga akslantiruvchi barcha uzluksiz akslantirishlar to'plamini belgilaymiz. Bu yerda M va N lar kompakt to'plamlar.

3.7-teorema. *(Arsela teoremasining umumlashmasi).* $D\subset C_{MN}$ *to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun* D *ning tekis darajada uzluksiz bo'lishi yetarli va zarur.*

Endi ℓ_p, $p\ge 1$ fazoda to'plamning nisbiy kompaktlik kriteriysini beramiz.

3.8-teorema. $K\subset\ell_p$ *to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun uning chegaralangan va* $\varepsilon>0$ *son qanday bo'lmasin, shunday* n_0 *nomer mavjud bo'lib, ixtiyoriy* $n\ge n_0$ *va ixtiyoriy* $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)\in K$ *uchun*

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\varepsilon^p$$

shartning bajarilishi yetarli va zarur.

Isbot. *Zaruriyligi.* Bizga nisbiy kompakt $K\subset\ell_p$ to'plam berilgan bo'lsin. U holda u to'la chegaralangan bo'lgani uchun, chegaralangan ham bo'ladi. Endi ikkinchi shartning bajarilishini ko'rsatamiz.

Biror $\eta>0$ sonni olamiz va K uchun chekli η- to'r $\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ ni quramiz. Har bir $x\in K$ uchun η - to'rga tegishli x_i elementni shunday tanlaymizki, $\rho_p(x,x_i)<\eta$ bo'lsin. Har bir $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)\in\ell_p$ element uchun $S_nx=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,0,0,\ldots)$ va $R_nx=(0,0,\ldots,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\ldots)$ belgilashlarni kiritamiz. U holda x va $\theta=(0,0,\ldots,0,\ldots)$ elementlar uchun

$$\rho_p(R_n x,\theta)=\rho_p(x,S_n x)\le\rho_p(x,x_i)+\rho_p(x_i,S_n x)\le\rho_p(x,x_i)+\rho_p(S_n x_i,S_n x)+$$

$$+\rho_p(R_n x_i,\theta)\le 2\rho_p(x,x_i)+\rho_p(R_n x_i,\theta)<2\eta+\rho_p(R_n x_i,\theta).$$

Aniqlanishiga ko'ra, har bir belgilangan x element uchun

$$\lim_{n\to\infty}\rho_p(R_n x,\theta)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0.$$

Shuning uchun, shunday n_0 nomer mavjudki, $n\ge n_0$ bo'lganda barcha $i=1,2,\dots,k$ lar uchun $\rho_p(R_n x_i,\theta)<\eta$ bo'ladi. Shunday ekan, $n\ge n_0$ bo'lganda

$$\rho_p(R_n x,\theta)<3\eta.$$

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $\eta=\varepsilon/3$ desak,

$$\rho_p(R_n x,\theta)=\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon \quad \text{yoki} \quad \sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\varepsilon^p$$

bo'ladi.

Yetarliligi. Chegaralangan $K\subset\ell_p$ to'plam uchun $\varepsilon>0$ son qanday bo'lmasin, shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, ixtiyoriy $n\ge n_0$ va $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots)\in K$ larda

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\varepsilon^p$$

tengsizlik bajarilsin. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun K to'plamning chekli ε - to'ri mavjudligini ko'rsatamiz. Berilgan $\varepsilon>0$ uchun n_0 nomerni shunday tanlaymizki, barcha $x\in K$ larda

$$\rho_p(R_{n_0}x,\theta)=\left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon/2$$

tengsizlik bajarilsin. $K_{n_0}=\{S_{n_0}x:\ x\in K\}$ to'plamni qaraymiz. Har bir $x\in K$ da $\rho_p(R_{n_0}x,\theta)\le\rho_p(x,\theta)$ o'rinli va K chegaralangan to'plam bo'lganligi sababli K_{n_0} ham chegaralangan to'plamdir.

Har bir $S_{n_0}x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n_0},0,0,...)\in K_{n_0}$ nuqtaga $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n_0})\in R_p^{n_0}$ nuqtani mos qo'yish bilan K_{n_0} to'plamni

$$E_{n_0}=\{(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n_0}):(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n_0},0,0,...)\in K_{n_0}\}\subset R_p^{n_0}$$

to'plamga izometrik mos qo'yamiz. K_{n_0} chegaralangan to'plam bo'lganligi sababli E_{n_0} to'plam $R_p^{n_0}$ da chegaralangan bo'ladi. U holda 3.1-natijaga ko'ra E_{n_0} nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. Demak, unga izomorf bo'lgan K_{n_0} to'plam ham nisbiy kompaktdir. Shunday ekan, K_{n_0} to'plam uchun chekli $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ elementli $\varepsilon/2$ - to'r mavjud. Bu to'plam K uchun ε - to'r bo'ladi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x\in K$ uchun $S_{n_0}x\in K_{n_0}$ va shunday $x_i\in\{x_1,x_2,...,x_k\}$ element mavjud bo'lib, $\rho_p(S_{n_0}x,x_i)<\varepsilon/2$ bo'ladi. U holda

$$\rho_p(x,x_i)=\rho_p(x,S_{n_0}x)+\rho_p(S_{n_0}x,x_i)=\rho_p(R_{n_0}x,\theta)+\rho_p(S_{n_0}x,x_i)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Demak, 3.5-teoremaga ko'ra K nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *3.8-misolda keltirilgan f_n ketma-ketlikni $C_1[-1,1]$ fazoda fundamentallikka tekshiring. U yaqinlashuvchi bo'ladimi?*
2. *To'la va to'la bo'lmagan metrik fazolarga misollar keltiring.*
3. *$R=(-\infty,\infty)$ metrik fazoda $B_n=\left(1-\frac{1}{n},1\right)$ ichma-ich joylashgan sharlar ketma-ketligini qaraymiz. Ularning radiuslari ketma-ketligining nolga intilishini ko'rsating. B_n sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo'sh ekanligini isbotlang. B_n sharlar ketma-ketligi uchun 3.1-teorema shartlari bajariladimi?*
4. *$C[a,b]$, $C_1[a,b]$ va $C_2[a,b]$ metrik fazolarni to'lalikka tekshiring.*

5. $C[a,b]$ va ℓ_2 *metrik fazolarda birlik sharning nisbiy kompakt to'plam emasligini isbotlang.*

6. $R=(-\infty,\infty)$ *metrik fazoda* $A_n=\left(\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right)$, $n\in N$ *sistema* $M=(0,1)$ *to'plam uchun qoplama bo'lishini ko'rsating.* $\{A_n\}$ *qoplamadan* M *ni qoplovchi chekli qism qoplama ajratish mumkinmi?* M *kompakt to'plam bo'ladimi?*

4-§. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi va uning tatbiqlari

Berilgan shartlarda tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi bilan bog'liq masalalarni mos metrik fazolardagi biror akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi mavjudligi va yagonaligi haqidagi masala ko'rinishida ifodalash mumkin. Qo'zg'almas nuqta mavjudligi va yagonaligi belgilari ichida eng sodda va shu bilan birga juda muhim belgi - bu «qisuvchi akslantirishlar prinsipi» deb nomlanuvchi belgidir.

4.1-ta'rif. X *metrik fazo va uni o'zini-o'ziga akslantiruvchi* A *akslantirish berilgan bo'lsin. Agar shunday* $\alpha\in(0,1)$ *son mavjud bo'lib, barcha* $x,y\in X$ *nuqtalar uchun*

$$\rho(Ax,\ Ay)\le\alpha\,\rho(x,y) \qquad (4.1)$$

tengsizlik bajarilsa, A *qisuvchi akslantirish deb ataladi.*

Har bir qisuvchi akslantirish uzluksizdir. Haqiqatan ham, agar $x_n\to x$ $(\rho(x_n,x)\to 0)$ bo'lsa, u holda

$$\rho(Ax_n,\ Ax)\le\alpha\,\rho(x_n,x)$$

bo'lgani uchun $Ax_n\to Ax$.

Agar $A:X\to X$ akslantirish uchun shunday $x\in X$ nuqta mavjud bo'lib, $Ax=x$ tenglik bajarilsa, x nuqta A akslantirishning *qo'zg'almas nuqtasi* deyiladi.

4.1-teorema. *(Qisuvchi akslantirishlar prinsipi). To'la metrik fazoda aniqlangan har qanday qisuvchi akslantirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.*

Isbot. X metrik fazodan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz. Keyin

$$x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1 = A^2x_0,\ x_3 = Ax_2 = A^3x_0, \ldots,\ x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \ldots$$

nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz. Ixtiyoriy $n < m$ natural sonlar uchun

$$\rho(x_n, x_m) = \rho\left(A^n x_0, A^m x_0\right) \le \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le$$

$$\le \alpha^n \left(\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\right) \le$$

$$\le \alpha^n \rho(x_0, x_1)\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}\right) \le \alpha^n \frac{1}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$$

tengsizlik o'rinli. $\alpha \in (0, 1)$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n (1-\alpha)^{-1} \rho(x_0, x_1) = 0 .$$

Shuning uchun $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikdir. X to'la metrik fazo va $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lgani uchun u yaqinlashuvchi. Aytaylik,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

bo'lsin. U holda A akslantirishning uzluksizligiga ko'ra

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x .$$

Shunday qilib, A akslantirish uchun qo'zg'almas nuqta mavjud ekan. Uning yagonaligini isbotlaymiz. Agar

$$Ax = x, \quad Ay = y$$

desak, (4.1) tengsizlikka ko'ra

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\, \rho(x, y).$$

Bundan $\alpha \in (0, 1)$ bo'lgani uchun

$$\rho(x, y)(1-\alpha) \le 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0$$

ya'ni $x = y$ bo'lishi kelib chiqadi. Qo'zg'almas nuqta yagona ekan. Δ

4.1. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining tadbiqlari

Qisuvchi akslantirishlar prinsipini har xil turdagi tenglamalar yechimlari mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalarni isbotlashda qo'llash mumkin. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi $Ax = x$ tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchungina qo'llanib qolmay, bu tenglama yechimini topish usulini ham beradi.

Qisuvchi akslantirishlar prinsipining tadbig'iga doir misollar qaraymiz.

4.1-misol. R^n fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1,2,\dots,n$$

formulalar orqali aniqlangan A akslantirishning qisuvchilik shartlarini toping.

Yechish. Qanday shartlarda A qisuvchi akslantirish bo'ladi? Bu savolga javob fazoda qanday metrika berilishiga bog'liq. Biz quyida uch xil variantni qaraymiz:

a) R^n_∞ fazo, ya'ni $\rho(x,y) = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$ bo'lsin.

$$\rho(y',y'') = \max_{1\le i\le n} |y'_i - y''_i| = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x'_j - x''_j) \right| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |x'_j - x''_j| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \max_{1\le j\le n} |x'_j - x''_j| = \left(\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \rho(x',x'').$$

Bu yerdan kelib chiqadiki, A qisuvchi akslantirish bo'lishi uchun

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \alpha < 1 \tag{4.2}$$

shartning bajarilishi yetarli. Shuning uchun R^n_∞ fazoda (4.2) shartni A akslantirishning qisuvchilik sharti sifatida qabul qilamiz.

b) R^n_1 fazo, ya'ni $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ bo'lsin. U holda

$$\rho(y',y'')=\sum_{i=1}^{n}|y_i'-y_i''|=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x_j'-x_j''\right)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j'-x_j''|=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\cdot|x_j'-x_j''|\le\left(\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}|x_j'-x_j''|\le\left(\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\cdot\rho(x',x'').$$

Bu yerdan ko'rinadiki, A akslantirish uchun qisuvchilik sharti R_1^n fazoda

$$\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=\alpha<1 \tag{4.3}$$

ko'rinishga ega.

c) R^n fazo, ya'ni

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

bo'lsin. U holda

$$\rho^2(y',y'')=\sum_{i=1}^{n}(y_i'-y_i'')^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x_j'-x_j''\right)\right)^2\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}(x_j'-x_j'')^2\le\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\cdot\rho^2(x',x'').$$

Yuqorida keltirilgan tenglik va tengsizliklarga ko'ra R^n fazoda A akslantirishning qisuvchilik sharti

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\le\alpha<1 \tag{4.4}$$

ko'rinishga ega.

Shunday qilib, agar (4.2)-(4.4) shartlardan birortasi bajarilsa, u holda yagona $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ nuqta mavjud bo'lib,

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i,\quad i=1,2,\dots,n$$

bo'ladi. Bundan tashqari bu nuqtada ketma-ket yaqinlashishlar quyidagi ko'rinishga ega

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i, \quad x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \; k = 1,2,3\ldots.$$

Bu yerda $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ sifatida R^n dagi ixtiyoriy nuqtani qabul qilish mumkin.

Qaralayotgan $y = Ax$ akslantirish qisuvchi bo'lishi uchun (4.2)-(4.4) shartlarning ixtiyoriy birining bajarilishi yetarli. Isbotlash mumkinki, (4.2) va (4.3) shartlar mos ravishda R^n_∞ va R^n_1 fazolarda $y = Ax$ akslantirish qisuvchi bo'lishi uchun zarur ham bo'ladi.

Ta'kidlash lozimki, (4.2) - (4.4) shartlarning birortasi ham ketma-ket yaqinlashishlar usulining tadbig'i uchun zarur emas.

Agar $|a_{ij}| < n^{-1}$ bo'lsa, u holda (4.2) - (4.4) shartlarning hammasi bajariladi va ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo'llash mumkin.

Agar $|a_{ij}| \geq n^{-1}$ bo'lsa, u holda (4.2) - (4.4) shartlarning birortasi ham bajarilmaydi.

4.2. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining integral tenglamalarga tadbiqi

Fredholm tenglamasi. Qisuvchi akslantirishlar prinsipini ushbu

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x) \tag{4.5}$$

ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasi yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchun qo'llaymiz. Bu yerda K integral tenglama yadrosi, φ - berilgan funksiya, f - izlanayotgan (noma'lum) funksiya, λ esa - haqiqiy parametr.

Ko'rsatamizki, qisuvchi akslantirishlar prinsipini λ parametrning yetarlicha kichik qiymatlarida qo'llash mumkin.

Faraz qilamiz, $K(x,y)$ - $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda uzluksiz funksiya bo'lsin. Shunday ekan, musbat M son mavjud bo'lib, barcha $x,y\in[a,b]$ uchun $|K(x,y)|\le M$ tengsizlik bajariladi. To'la $C[a,b]$ fazoni o'zini-o'ziga

$$g(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy+\varphi(x) \tag{4.6}$$

formula vositasida akslantiruvchi $g=Af$ akslantirish berilgan bo'lsin. U holda

$$\rho(g_1,g_2)=\max_{a\le x\le b}|g_1(x)-g_2(x)|\le|\lambda|M(b-a)\cdot\max_{a\le x\le b}|f_1(x)-f_2(x)|$$

yoki

$$\rho(Af_1,Af_2)\le|\lambda|M(b-a)\cdot\rho(f_1,f_2).$$

Shunday ekan,

$$|\lambda|<\frac{1}{M\cdot(b-a)} \tag{4.7}$$

bo'lganda A qisuvchi akslantirish bo'ladi. Qisuvchi akslantirishlar prinsipiga asoslanib xulosa qilamizki, (4.7) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy λ da (4.5) Fredholm tenglamasi yagona uzluksiz yechimga ega.

Bu yechimga intiluvchi ketma-ket yaqinlashishlar $f_0, f_1,\dots, f_n,\dots$

$$f_n(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)f_{n-1}(y)\,dy+\varphi(x)$$

ko'rinishga ega, bu yerda f_0 sifatida ixtiyoriy uzluksiz funksiyani olish mumkin.

Chiziqlimas integral tenglamalar. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining

$$f(x)=\lambda\int_a^b K(x,y;f(y))\,dy+\varphi(x)$$

ko'rinishdagi chiziqlimas integral tenglamalarga tadbiqini qaraymiz. Bu yerda K va φ funksiyalar uzluksiz bo'lib, bundan tashqari K o'zining 3-

chi funksional argumenti bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsin, ya'ni shunday $L>0$ mavjud bo'lib,

$$|K(x,y;z_1)-K(x,y;z_2)|\le L|z_1-z_2|$$

tengsizlik barcha $x,y\in[a,b]$ va z_1,z_2 lar uchun o'rinli bo'lsin. Bu holda $C[a,b]$ fazoni o'zini-o'ziga

$$g(x)=\lambda\int_a^b K(x,y;f(y))dy+\varphi(x)$$

formula vositasida akslantiruvchi $g=Af$ akslantirish uchun

$$\max_{a\le x\le b}|g_1(x)-g_2(x)|\le|\lambda|\,L(b-a)\cdot\max_{a\le x\le b}|f_1(x)-f_2(x)|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda $g_1=Af_1$, $g_2=Af_2$. Shunday ekan,

$$|\lambda|<\frac{1}{L\cdot(b-a)}$$

shartda A akslantirish qisuvchi bo'ladi.

Volterra tenglamasi. Endi Volterra tipidagi

$$f(x)=\lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy+\varphi(x) \tag{4.8}$$

tenglamani qaraymiz. Agar $y>x$ da $K(x,y)=0$ desak, (4.8) Volterra tenglamasi (4.5) ko'rinishdagi ikkinchi tur Fredholm tenglamasiga keladi.

Biroq Fredholm integral tenglamasi holida biz λ parametrning kichik qiymatlari bilan chegaralanishga majburmiz. Volterra tenglamasi holida qisuvchi akslantirishlar prinsipi (va ketma-ket yaqinlashishlar usuli) ni λ ning barcha qiymatlarida qo'llash mumkin. Aniqrog'i, qisuvchi akslantirishlar prinsipining quyidagi umumlashmasi o'rinli.

4.2-teorema. *X metrik fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A uzluksiz akslantirish uchun biror n da $B=A^n$ - qisuvchi akslantirish bo'lsin. U holda $Ax=x$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi.*

Isbot. $x \in X$ nuqta B akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi bo'lsin, ya'ni $Bx = x$. U holda B qisuvchi akslantirishga ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo'llasak,

$$Ax = ABx = AB^k x = AA^{nk} x = A^{nk+1} x = A^{nk} Ax = B^k Ax = B^k x_0 \to x,\ k \to \infty.$$

Chunki ixtiyoriy $x_0 \in X$, xususiy holda $x_0 = Ax$ uchun, $Bx_0, B^2 x_0, \ldots, B^k x_0, \ldots$ ketma-ketlik x qo'zg'almas nuqtaga yaqinlashadi. Shunday ekan, $Ax = x$. Bu x nuqta yagona, chunki A uchun qo'zg'almas bo'lgan x nuqta $B = A^n$ uchun ham qo'zg'almas nuqtadir, B esa yagona qo'zg'almas nuqtaga ega. Δ

4.2. $C[a,b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Af)(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) f(y)\, dy + \varphi(x) \tag{4.9}$$

formula bilan aniqlangan A akslantirishning biror darajasi qisuvchi ekanligini ko'rsating.

Yechish. $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan f_1 va f_2 funksiyalarni olamiz. U holda

$$|(Af_1)(x) - (Af_2)(x)| = |\lambda| \cdot \left| \int_a^x K(x,y)\big(f_1(y) - f_2(y)\big) dy \right| \le$$

$$\le |\lambda| \cdot M(x-a) \cdot \max_{a \le x \le b} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Bu yerda

$$M = \max_{a \le x, y \le b} |K(x,y)|.$$

Olingan tengsizlikdan kelib chiqadiki,

$$\left|\left(A^2 f_1\right)(x) - \left(A^2 f_2\right)(x)\right| = |\lambda|^2 \cdot M^2 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \max_{a \le x \le b} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Umuman,

$$\left|\left(A^n f_1\right)(x)-\left(A^n f_2\right)(x)\right|=|\lambda|^n\cdot M^n\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}\cdot\max_{a\le x\le b}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|=$$

$$=|\lambda|^n\cdot M^n\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}\cdot\rho(f_1,f_2).$$

Ixtiyoriy λ uchun n nomerni shunday tanlash mumkinki,

$$|\lambda|^n\cdot M^n\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}<1$$

tengsizlik bajariladi. U holda $B=A^n$ akslantirish qisuvchi bo'ladi. Δ

Shuning uchun, yuqoridagi tasdiqqa asosan (4.8) Volterra tenglamasi har qanday λ da yagona yechimga ega.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Qisuvchi akslantirish prinsipining umumlashmasini ayting.*
2. R^n *fazoni o'zini-o'ziga akslantiriuvchi* $y=Ax+b$ *akslantirishning qisuvchilik shartlarini toping.*
3. $C[a,b]$ *fazoda (4.9) tenglik bilan aniqlangan akslantirishning qisuvchilik shartlarini keltiring.*

I bobni takrorlash uchun test savollari

1. $R=(-\infty,\infty)$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=|x-y|$ B) $\rho(x,y)=|x|-|y|$

C) $\rho(x,y)=|x-y|^2$ D) $\rho(x,y)=|x|+|y|$

2. R^n fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ B) $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$ D) $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2$

3. R^n fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ B) $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$ D) $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2$

4. R^n fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ B) $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$ D) $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2$

5. $C[a,b]$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b|x(t)-y(t)|^2dt}$ B) $\rho(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt$

C) $\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ D) $\rho(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|^2dt$

6. $C[a,b]$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b|x(t)-y(t)|^2dt}$ B) $\rho(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt$

C) $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ D) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt$

7. $C_2[a,b]$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt}$ B) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|\,dt$

C) $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ D) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt$

8. $\ell_p,\ p\ge 1$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sup\limits_{1\le k\le\infty}|x_k-y_k|$ B) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-k}|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,y)=\sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p}$ D) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p$

9. ℓ_2 fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sup\limits_{1\le k\le\infty}|x_k-y_k|$ B) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-k}|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^2}$ D) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2$

10. Ratsional sonlar to'plami Q ning barcha limitik nuqtalari to'plamini toping.

A) R B) Q C) $\varnothing$ D) $R\setminus Q$

11. Ratsional sonlar to'plami Q ning barcha urinish nuqtalari to'plamini toping.

A) R B) Q C) $\varnothing$ D) $R\setminus Q$

12. Ratsional sonlar to'plami Q ning barcha yakkalangan nuqtalari to'plamini toping.

A) R B) Q C) $\varnothing$ D) $R\setminus Q$

13. Butun sonlar to'plami Z ning barcha limitik nuqtalari to'plamini toping.

A) R B) Q C) $\varnothing$ D) Z

14. Butun sonlar to'plami Z ning barcha urinish nuqtalari to'plamini toping.

A) R B) Q C) $\varnothing$ D) Z

15. Butun sonlar to'plami Z ning barcha yakkalangan nuqtalari to'plamini toping.

A) R B) Q C) $\varnothing$ D) Z

16. R dagi ochiq to'plamni toping.

A) $(0,2)$ B) $(0,2]$ C) $[0,2)$ D) $[0,2]$

17. R dagi yopiq to'plamni toping.

A) $(0,1)$ B) $[0,1)$ C) $(0,2]$ D) $[0,4]$

18. R dagi chegaralangan to'plamni toping.

A) $[0,1]$ B) $(-\infty,0)$ C) Q D) $(0,\infty)$

19. (X,ρ) metrik fazoda chegaralangan to'plam ta'rifini keltiring.

A) $F\subset X$ to'plam X dagi birorta sharda saqlansa;

B) $F\subset X$ - yopiq to'plam bo'lsa;

C) $F\subset X$ - ochiq to'plam bo'lsa;

D) $F\subset X$ - chekli yoki sanoqli dona elementdan iborat bo'lsa.

20. Quyidagilar ichidan metrika shartlarini ajrating.

1) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$. 2) $\rho(x,y)=\rho(y,x),\ \forall x,y\in X$.

3) $\rho(\lambda x,y)=\lambda\rho(y,x)$, 4) $\rho(x,y)=\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

A) 1, 2, 3 B) 1, 2, 4 C) 1, 3, 4 D) 1, 2, 3, 4

21. Quyidagilarning qaysilari (X,ρ) metrik fazodagi yopiq to'plam ta'rifi bo'ladi?

1. Agar F to'plam barcha limitik nuqtalarini o'zida saqlasa;
2. Agar F ning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa;
3. Agar $F=[F]$ bo'lsa;
4. Agar F ning to'ldiruvchisi ochiq to'plam bo'lsa.

A) 1, 2, 3 B) 1, 3, 4 C) 2, 3, 4 D) 1, 2, 3, 4

22. Quyidagilarning qaysilari (X,ρ) metrik fazodagi ochiq to'plam ta'rifi bo'ladi?

1. Agar F to'plam barcha limitik nuqtalarini o'zida saqlasa;
2. Agar F ning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa;
3. Agar $F=[F]$ bo'lsa;
4. Agar F ning to'ldiruvchisi yopiq to'plam bo'lsa.

A) 1, 2, 3 B) 1, 3, 4 C) 2, 3, 4 D) 2, 4

23. $R=(-\infty,\infty)$ metrik fazoning hamma yerida zich to'plamni toping.

A) Q - ratsional sonlar to'plami B) tub sonlar to'plami

C) Z - butun sonlar to'plami D) N - natural sonlar to'plami

24. $R=(-\infty,\infty)$ metrik fazoning hamma yerida zich to'plamni toping.

A) murakkab sonlar to'plami B) $R\setminus Q$ - irratsional sonlar to'plami

C) Z - butun sonlar to'plami D) N - natural sonlar to'plami

25. $R=(-\infty,\infty)$ metrik fazoning hech yerida zich bo'lmagan to'plamni toping.

A) Q - ratsional sonlar to'plami B) Z - butun sonlar to'plami

C) $R\setminus Q$ - irratsional sonlar to'plami D) $[0,\infty)$

26. Kantor to'plamining xossalari keltirilgan javobni toping.

A) $[0,1]$ ning hech yerida zichmas, nol o'lchovli, sanoqli to'plam.

B) $[0,1]$ ning hamma yerida zich, nol o'lchovli, kontinuum quvvatli to'plam.

C) $[0,1]$ ning hech yerida zichmas, nol o'lchovli, ochiq to'plam.

D) $[0,1]$ ning hech yerida zichmas, nol o'lchovli, kontinuum quvvatli yopiq to'plam.

27. Quyidagi tasdiqlardan to'g'rilarini ajrating.

1) Ochiq to'plamning to'ldiruvchisi yopiq to'plamdir.
2) Ochiq to'plamning to'ldiruvchisi ochiq to'plamdir.
3) Sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning birlashmasi ochiq to'plamdir.
4) Sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi ochiq to'plamdir.

A) 1, 2, 4 B) 1, 2, 3 C) 1, 4 D) 1, 3

28. Quyidagi tasdiqlardan to'g'rilarini ajrating.

1) Yopiq to'plamning to'ldiruvchisi ochiq to'plamdir.

2) Yopiq to'plamning to'ldiruvchisi yopiq to'plamdir.

3)Sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plamdir.

4) Sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning kesishmasi yopiq to'plamdir.

A) 1, 2, 4 B) 1, 2, 3 C) 1, 4 D) 1, 3

29. Quyida keltirilganlardan qaysilari to'la metrik fazo bo'ladi?

1) $R=(-\infty,\infty)$ 2) R^n 3) $C[a,b]$ 4) ℓ_2 5) $C_2[a,b]$.

A) 1, 2, 3, 4 B) 1, 2, 4, 5 C) 1, 2, 3, 5 D) 2, 3, 4, 5

30. $C_1[-1,1]$ fazoda quyidagi ketma-ketliklardan qaysilari nolga yaqinlashadi?

1) $f_n(x)=x^n$, 2) $f_n(x)=1-x^n$, 3) $f_n(x)=(\sin x)^n$, 4) $f_n(x)=(\cos x)^n$

A) 1, 3, 4 B) 1, 2 C) 2, 4 D) 1, 2, 3

31. $C_2[0,1]$ fazoda $x_n(t)=t^n+t^{n+1}$ ketma-ketlikning limitini toping.

A) $x(t)=0$ B) $x(t)=2t$ C) $x(t)=1$ D) $x(t)=2$

32. R^n fazoda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini ko'rsating.

A) $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k\cdot b_k|\le\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2$

B) $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k\cdot b_k|\le\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},p,q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

C) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},p\ge1$

D) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\right|\le\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2}$

33. R^n fazoda Minkovskiy tengsizligini yozing.

A) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2$

B) $\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \ge 1$

C) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right|^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

D) $\sum_{k=1}^{n}|a_k \cdot b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, p,q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

34. R^n fazoda Gyolder tengsizligini ko'rsating.

A) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right|^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

B) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

C) $\sum_{k=1}^{n}|a_k \cdot b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, p,q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

D) $\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \ge 1$

35. Yopiq birlik shar qaysi fazoda kompakt to'plam bo'ladi?

A) R^n da B) $C[a,b]$ da C) ℓ_2 da D) m da

36. R^n fazoda kompaktlik kriteriysini keltiring.

A) To'plamning chegaralangan va ochiq bo'lishi

B) To'plamning chegaralangan va yopiq bo'lishi

C) To'plamning chegaralangan va sanoqli bo'lishi

D) To'plamning chegaralangan bo'lishi

37. R^n fazoda nisbiy kompaktlik kriteriysini keltiring.

A) To'plamning chegaralangan va ochiq bo'lishi

B) To'plamning chegaralangan va yopiq bo'lishi

C) To'plamning chegaralangan va sanoqli bo'lishi

D) To'plamning chegaralangan bo'lishi

38. $C_2[a,b]$ fazoda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini yozing.

A) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$

B) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}, p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

C) $\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, p\ge 1$

D) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right|^2 \le \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$

39. Minkovskiy tengsizligini integral formada yozing.

A) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$

B) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}, p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

C) $\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, p\ge 1$

D) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right|^2 \le \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$

40. Gyolder tengsizligini integral formada yozing.

A) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$

B) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}, p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

C) $\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, p\ge 1$

D) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right|^2 \le \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$

41. To'la metrik fazoni ko'rsating.

A) $C[a,b]$ B) $C_1[a,b]$ C) $C_2[a,b]$ D) $C_3[a,b]$

42. Separabel metrik fazolar keltirilgan javobni toping.

A) $R^n, C[a,b], \ell_2, m$ B) $R_1^n, C_2[a,b], \ell_2, c_0$

C) $R_\infty^n, C[a,b], \ell_2, m$ D) $C^n, R_p^n, C_2[a,b], m$

43. Separabel bo'lmagan metrik fazoni ko'rsating.

A) R^n B) $C[a,b]$ C) m D) ℓ_2

44. Birlik shar qaysi fazoda nisbiy kompakt to'plam bo'ladi?

A) R^n da B) $L_2[0,1]$ da C) ℓ_2 da D) m da

45. Metrik fazoda M to'plamning nisbiy kompaktlik kriteriysini keltiring.

A) Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun M to'plamning chekli ε - to'ri mavjud bo'lishi

B) M ning chegaralangan va yopiq bo'lishi

C) M ning chegaralangan va ochiq bo'lishi

D) M ning chegaralangan va sanoqli bo'lishi

46. Ber teoremasini bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan?

A) To'la metrik fazo, hech yerda zich bo'lmagan to'plam, birlashma

B) Nisbiy kompakt, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz

C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, qo'zg'almas nuqta

D) Metrik fazo, to'ldirma metrik fazo, izometriya aniqligida yagona

47. Arsela teoremasini bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan?

A) To'la metrik fazo, hech yerda zichmas to'plam, birlashma

B) Nisbiy kompakt, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz

C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, yagona qo'zg'almas nuqta

D) Metrik fazo, to'ldirma metrik fazo, izometriya aniqligida yagona

48. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi haqidagi teoremani bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan?

A) To'la metrik fazo, hech yerda zichmas to'plam, birlashma

B) Nisbiy kompakt, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz

C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, yagona qo'zg'almas nuqta

D) Metrik fazo, to'ldirma metrik fazo, izometriya aniqligida yagona

49. Metrik fazolarni to'ldirish haqidagi teoremani bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan?

A) To'la metrik fazo, hech yerda zichmas to'plam, birlashma

B) Nisbiy kompakt, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz

C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, yagona qo'zg'almas nuqta

D) Metrik fazo, to'ldirma metrik fazo, izometriya aniqligida yagona

50. ℓ_p, $p>1$ fazoda nisbiy kompakt to'plam kriteriysini quyidagi tasdiqlardan qaysilarini birlashtirish bilan hosil qilish mumkin.

1) $K \subset \ell_p$ - chegaralangan to'plam;

2) ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, barcha $n \geq n_0$ va barcha $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in K$ uchun;

3) $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} x_j^p < \varepsilon^p$ tengsizlikning bajarilishi;

4) $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} x_j^p > \varepsilon^p$ tengsizlikning bajarilishi.

A) 2+3+4 B) 1+2+3 C) 1+2+4 D) 1+3+4

Bu bobda biz chiziqli fazolar, chiziqli normalangan fazolar, Evklid fazolari va Hilbert fazolarining xossalarini o'rganamiz. Bu bob 6 (5-10) paragrafdan iborat.

5-§ da chiziqli fazo ta'riflanib, ularga ko'plab misollar keltirilgan. Chiziqli fazo o'lchami ta'riflanib, chekli va cheksiz o'lchamli chiziqli fazolarga misollar keltirilgan. Chiziqli fazoning qism fazosi va faktor fazosi tushunchalari bayon qilingan. Faktor fazoda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari kiritilgan va faktor fazoning chiziqli fazo tashkil qilishi ko'rsatilgan. 6-§ da chiziqli funksionallar, ularning xossalari qarab chiqilgan. Chiziqli funksionalning geometrik ma'nosi ochib berilgan. Chiziqli funksionallar va gipertekisliklar o'rtasida biyektiv moslik o'rnatilgan. 7-§ qavariq to'plamlar va qavariq funksionallarning xossalarini tahlil qilishga bag'ishlangan. Qavariq jism va qavariq funksionallar orasidagi bog'lanish ochib berilgan. Chiziqli funksionalni davom ettirish haqidagi Xan-Banax teoremasi va Xan-Banax teoremasining kompleks varianti isbotlangan. Chiziqli normalangan fazolar mavzusi 8-§ da keltirilgan. Bu paragrafda chiziqli normalangan fazolarga ko'plab misollar qaralgan. Normalangan fazolardagi tushunchalar metrik fazolardagi tushunchalar bilan taqqoslangan. Normalangan fazoning qism fazosi va faktor fazosiga misollar qaralgan. Navbatdagi 9-§ Evklid fazolariga bag'ishlangan. Evklid fazolarining xarakteristik xossalari ochib berilgan. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi, Bessel tengsizligi, Parseval tengliklari isbotlangan. Nomdor teoremalar - Riss-Fisher, Shmidtning ortogonallashtirish jarayoni haqidagi teoremalar isboti bilan berilgan. Ortogonal, ortonormal sistemalarga misollar qaralgan. Separabel Evklid fazolarida to'la ortonormal sistema va yopiq ortonormal sistemalarning ekvivalentligi isbotlangan. Normalangan fazo Evklid fazo bo'lishining zarur va yetarli sharti keltirilgan.

Oxirgi 10-§ Hilbert fazolariga bag'ishlangan. Barcha separabel Hilbert fazolari o'zaro izomorfligi isbotlangan. Hilbert fazolarining qism fazosi, qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi, ortogonal qism fazolarning to'g'ri yigindilari qaralgan. Xuddi shunday Hilbert fazolarining to'g'ri yigindilari ta'riflangan. Paragraf so'ngida haqiqiy va kompleks Evklid fazolaridagi skalyar ko'paytmalardagi tafovutlar tahlil qilingan.

5-§. Chiziqli fazolar va ularga misollar

Chiziqli fazo tushunchasi matematikada asosiy tayanch tushunchalardan hisoblanadi. Quyida C bilan kompleks sonlar, R bilan haqiqiy sonlar to'plamini belgilaymiz.

5.1-ta'rif. *Agar elementlari $x,y,z,...$ bo'lgan L to'plamda quyidagi ikki amal aniqlangan bo'lsa:*

I. Ixtiyoriy ikkita $x,y\in L$ elementlarga ularning yig'indisi deb ataluvchi aniq bir $x+y\in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, ixtiyoriy $x,y,z\in L$ elementlar uchun

1) $x+y=y+x$ *(kommutativlik),*

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ *(assotsiativlik),*

3) *L da shunday θ element mavjud bo'lib, $x+\theta=x$ (nolning mavjudligi),*

4) *shunday $-x\in L$ element mavjud bo'lib, $x+(-x)=\theta$ (qarama-qarshi elementning mavjudligi) aksiomalar bajarilsa;*

II. ixtiyoriy $x\in L$ element va ixtiyoriy α son ($\alpha\in R$ yoki $\alpha\in C$) uchun x elementning α songa ko'paytmasi deb ataluvchi aniq bir $\alpha x\in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, ixtiyoriy $x,y\in L$ va ixtiyoriy α,β sonlar uchun

5) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,

6) $1\cdot x=x$,

7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

aksiomalar bajarilsa, u holda L to'plam chiziqli fazo deb ataladi.

Ta'rifda kiritilgan I va II amallar mos ravishda yig'indi va songa ko'paytirish amallari deb ataladi.

Ta'rifda foydalanilgan sonlar zahirasiga (haqiqiy sonlar R yoki kompleks sonlar C) bog'liq holda chiziqli fazo haqiqiy yoki kompleks chiziqli fazo deb ataladi.

Chiziqli fazolarga misollar keltiramiz.

5.1-misol. $L=R$ haqiqiy sonlar to'plami odatdagi qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi. $L=C$ kompleks sonlar to'plami ham kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan kompleks chiziqli fazo tashkil qiladi.

5.2. $L=R^n\equiv\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n), x_i\in R, i=1,2,\ldots,n\}-n$ ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlari to'plami. Bu yerda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi. Ixtiyoriy $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$ lar uchun

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n), \tag{5.1}$$

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n). \tag{5.2}$$

R^n - to'plam (5.1) va (5.2) tengliklar bilan aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi va u n- o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo deb ataladi.

5.3. $L=C^n\equiv\{z=(z_1,z_2,\ldots,z_n), z_k\in C, k=1,2,\ldots,n\}$. Bu yerda ham elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari (5.1) va (5.2) tengliklar ko'rinishida aniqlanadi. C^n - to'plam kompleks chiziqli fazo bo'ladi va u n- o'lchamli kompleks chiziqli fazo deb ataladi.

5.4. $L=C[a,b]-[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plami. Funksiyalarni qo'shish va funksiyani songa ko'paytirish amallari mos ravishda

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \tag{5.3}$$

va

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \tag{5.4}$$

ko'rinishda aniqlanadi. (5.3) va (5.4) tengliklar bilan aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $C[a,b]$ to'plam chiziqli fazo tashkil qiladi.

5.5. $\ell_2 \equiv \left\{ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots): \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty \right\}$ - kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar to'plami. Bu yerda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n,\ldots), \tag{5.5}$$

$$\alpha x=\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n,\ldots), \quad \alpha\in C. \tag{5.6}$$

Yig'indi $x+y\in\ell_2$ ekanligi $|a+b|^2\le 2|a|^2+2|b|^2$ tengsizlikdan kelib chiqadi. (5.5) va (5.6) tengliklar bilan aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, ℓ_2 to'plam kompleks chiziqli fazo bo'ladi.

5.6. $c_0\equiv\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots): \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\}$ - nolga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to'plami. Bu to'plamda ham qo'shish va songa ko'paytirish amallari (5.5) va (5.6) tengliklar ko'rinishida aniqlanadi va ular chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, c_0 to'plam chiziqli fazo bo'ladi.

5.7. $c\equiv\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots): \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\}$ - yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to'plami. Bu to'plam ham 5.5-misolda kiritilgan qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

5.8. $L=m$ - barcha chegaralangan ketma-ketliklar to'plami. Bu to'plam ham 5.5-misolda kiritilgan qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

Endi haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi fanida xossalari o'rganilgan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar va o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plamini qaraymiz.

5.9. Berilgan $[a,b]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar to'plamini $\widetilde{L}_1[a,b]$ simvol bilan belgilaymiz. Bu to'plamda elementlarni qo'shish va elementni songa ko'paytirish amallari (5.3) va (5.4) tengliklar bilan aniqlanadi. $\widetilde{L}_1[a,b]$ to'plam funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq. Chunki, integrallanuvchi f va g funksiyalar yig'indisi $f+g$ ham integrallanuvchi va

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]\,dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

tenglik o'rinli. Xuddi shunday integrallanuvchi funksiyaning songa ko'paytmasi yana integrallanuvchi funksiyadir. Funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari esa chiziqli fazo aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $\widetilde{L}_1[a,b]$ to'plam chiziqli fazo bo'ladi.

5.10. Berilgan $[a,b]$ kesmada $p(p>1)$ -darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar to'plamini $\widetilde{L}_p[a,b]$ simvol bilan belgilaymiz. Bu to'plamda ham qo'shish va songa ko'paytirish amallari (5.3) va (5.4) tengliklar bilan aniqlanadi va $\widetilde{L}_p[a,b]$ to'plam chiziqli fazo tashkil qiladi. Yig'indi $f+g\in\widetilde{L}_p[a,b]$ ekanligi Minkovskiy tengsizligi

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

dan kelib chiqadi.

5.11. Berilgan $[a,b]$ kesmada aniqlangan va o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plamini $V[a,b]$ bilan belgilaymiz. Bu to'plamda ham funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari 5.4-

misoldagidek kiritiladi. Ishonch hosil qilish mumkinki, $V[a,b]$ to'plam funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Hosil qilingan fazo o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi deyiladi va $V[a,b]$ simvol bilan belgilanadi.

5.2-ta'rif. *Bizga L va L^* chiziqli fazolar berilgan bo'lsin. Agar bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,*

$$x \leftrightarrow x^* \quad \text{va} \quad y \leftrightarrow y^*, \quad (x, y \in L,\ x^*, y^* \in L^*)$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^* \quad \text{va} \quad \alpha x \leftrightarrow \alpha x^*, \quad (\alpha - \text{ixtiyoriy son})$$

ekanligi kelib chiqsa, u holda L va L^* chiziqli fazolar o'zaro izomorf fazolar deyiladi.

Izomorf fazolarni aynan bitta fazoning har xil ko'rinishi deb qarash mumkin.

5.3-ta'rif. *Agar L chiziqli fazoning $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlar sistemasi uchun hech bo'lmaganda birortasi noldan farqli bo'lgan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlar mavjud bo'lib,*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \tag{5.7}$$

tenglik bajarilsa, u holda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog'langan deyiladi. Aks holda, ya'ni (5.7) tenglikdan

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

ekanligi kelib chiqsa, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan yoki chiziqli erkli deyiladi.

Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ cheksiz elementlar sistemasining ixtiyoriy chekli qism sistemasi chiziqli erkli bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema chiziqli erkli deyiladi.

5.4-ta'rif. *Agar L chiziqli fazoda n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lib, bu fazoning ixtiyoriy $n+1$ ta elementdan iborat sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda L n- o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va*

$\dim L = n$ *kabi yoziladi.* n*-o'lchamli* L *chiziqli fazoning ixtiyoriy* n *ta elementdan iborat chiziqli erkli sistemasi shu fazoning bazisi deyiladi.*

5.5-ta'rif. *Agar* L *chiziqli fazoda ixtiyoriy* $n \in N$ *uchun* n *elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lsa, u holda* L *cheksiz o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va* $\dim L = \infty$ *ko'rinishda yoziladi.*

R^n va C^n fazolar n o'lchamli chiziqli fazolardir. $L = C[a,b]$ fazodan boshlab 5.4-5.11 misollarda keltirilgan barcha fazolar cheksiz o'lchamli fazolardir. Masalan, ℓ_2 fazoda

$$\{e_n = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{n},0,\ldots)\}_{n=1}^{\infty} \tag{5.8}$$

sistema cheksiz chiziqli erkli sistemaga misol bo'ladi.

5.1. Chiziqli fazoning qism fazosi

Bizga L chiziqli fazoning bo'sh bo'lmagan L' qism to'plami berilgan bo'lsin.

5.6-ta'rif. *Agar* L' *ning o'zi* L *da kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil qilsa, u holda* L' *to'plam* L *ning qism fazosi deyiladi.*

Boshqacha qilib aytganda, agar ixtiyoriy $x, y \in L'$ va $a, b \in C(R)$ sonlar uchun $ax + by \in L'$ bo'lsa, L' qism fazo deyiladi.

Har qanday L chiziqli fazoning faqat nol elementdan iborat $\{\theta\}$ qism fazosi bor. Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy L chiziqli fazoni o'zining qism fazosi sifatida qarash mumkin.

5.7-ta'rif. L *chiziqli fazodan farqli va hech bo'lmaganda bitta nolmas elementni saqlovchi qism fazo xos qism fazo deyiladi.*

5.12-misol. $\ell_2 \subset c_0 \subset c \subset m$ fazolarning har biri o'zidan keyingilari uchun xos qism fazo bo'ladi.

5.13. Endi $[a,b]$ kesmada $p(p \geq 1)$-darajasi bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosi $\tilde{L}_p[a,b]$ ni qaraymiz. Bu fazoning nolga ekvivalent funksiyalaridan tashkil bo'lgan qism to'plamni $\tilde{L}_p^{(0)}[a,b]$ ko'rinishda belgilaymiz. Ma'lumki, nolga ekvivalent funksiyalar yig'indisi yana nolga ekvivalent bo'lgan funksiya bo'ladi. Nolga ekvivalent funksiyaning songa ko'paytmasi ham nolga ekvivalent funksiya bo'ladi. Demak, $\tilde{L}_p^{(0)}[a,b]$ to'plam $\tilde{L}_p[a,b]$ fazoning xos qism fazosi bo'ladi.

5.14. O'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ ni qaraymiz. Ma'lumki, $[a,b]$ kesmada absolyut uzluksiz funksiyalar to'plami $V[a,b]$ ning qism to'plami bo'ladi. Absolyut uzluksiz funksiyalar to'plami funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq to'plam. Shuning uchun u $V[a,b]$ fazoning qism fazosi bo'ladi va u $AC[a,b]$ simvol bilan belgilanadi.

5.15. $V[a,b]$ fazoda $f(a)=0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plam funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq to'plamdir. Shuning uchun u $V[a,b]$ fazoning qism fazosi bo'ladi va u $V_0[a,b]$ simvol bilan belgilanadi.

5.16. Yana o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ ni qaraymiz. Ma'lumki, $[a,b]$ kesmada monoton funksiyalar to'plami $V[a,b]$ ning qism to'plami bo'ladi. Ammo ikki monoton funksiyaning yig'indisi har doim monoton funksiya bo'lavermaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin. $x(t)=t^2+1$, $y(t)=-2t$ funksiyalarning har biri $[0,2]$ kesmada monoton funksiya bo'ladi, ammo ularning yig'indisi $x(t)+y(t)=(t-1)^2$ funksiya $[0,2]$ kesmada monoton emas. Demak, $[a,b]$ kesmada monoton funksiyalar to'plami $V[a,b]$ fazoning qism fazosi bo'la olmaydi. Demak, chiziqli fazoning har qanday qism to'plami qism fazo tashkil qilavermas ekan.

Bizga L fazoning bo'sh bo'lmagan $\{x_i\}$ qism to'plami berilgan bo'lsin. U holda L chiziqli fazoda $\{x_i\}$ sistemani o'zida saqlovchi minimal qism fazo mavjud.

Haqiqatan ham, $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi hech bo'lmaganda bitta qism fazo mavjud, bu L ning o'zi.

Ixtiyoriy sondagi qism fazolarning kesishmasi yana qism fazo bo'ladi. Haqiqatan ham, agar

$$L^{*}=\bigcap_{i} L_i$$

bo'lib $x, y \in L^{*}$ bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra ixtiyoriy i uchun $x, y \in L_i$ bo'ladi. L_i qism fazo bo'lganligi uchun $\alpha x+\beta y \in L_i$ munosabat barcha α, β sonlar uchun o'rinli. Demak, $\alpha x+\beta y \in L^{*}$ bo'ladi.

Endi $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi L ning barcha qism fazolarini olamiz va ularning kesishmasini qaraymiz hamda uni $L(\{x_i\})$ orqali belgilaymiz. $L(\{x_i\})$ qism fazo $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi minimal qism fazo bo'ladi. Bu $L(\{x_i\})$ minimal qism fazo $\{x_i\}$ «sistemadan hosil bo'lgan» qism fazo yoki $\{x_i\}$ sistemaning chiziqli qobig'i deyiladi.

5.2. Chiziqli fazoning faktor fazosi

Bizga L chiziqli fazo va uning L' xos qism fazosi berilgan bo'lsin. L ning elementlari orasida quyidagicha munosabat o'rnatish mumkin

5.8- ta'rif. *Agar $x, y \in L$ elementlar uchun $x-y$ ayirma L' ga tegishli bo'lsa, x va y ekvivalent elementlar deb ataladi.*

Fazo elementlari orasida o'rnatilgan bu munosabat refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega. Haqiqatan ham, $x-x \in L'$ (refleksivlik); $x-y \in L'$ dan $y-x=-(x-y) \in L'$ (simmetriklik); $x-y \in L'$, $y-z \in L'$ dan $x-z=(x-y)+(y-z) \in L'$ (tranzitivlik). Shuning uchun bu munosabat L ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi va har bir sinf o'zaro ekvivalent elementlardan tashkil topgan. Bu sinflar qo'shni sinflar deb ataladi. Barcha qo'shni sinflar to'plami L chiziqli fazoning L' qism fazo bo'yicha faktor fazosi deb ataladi va L/L' ko'rinishda belgilanadi.

Tabiiyki, har qanday faktor fazoda yig'indi va songa ko'paytirish amallari kiritiladi.

Aytaylik, ξ va η lar L/L' dan olingan ixtiyoriy qo'shni sinflar bo'lsin. Bu sinflarning har biridan bittadan vakil tanlaymiz, masalan $x\in\xi, y\in\eta$. ξ va η sinflarning yig'indisi sifatida $x+y$ elementni saqlovchi ζ sinf qabul qilinadi. ξ qo'shni sinfning α songa ko'paytmasi sifatida αx elementni saqlovchi sinf qabul qilinadi. Natija $x\in\xi, y\in\eta$ vakillarning tanlanishiga bog'liq emas, chunki, qandaydir boshqa $x'\in\xi, y'\in\eta$ vakillarni olsak ham $(x+y)-(x'+y')=(x-x')+(y-y')\in L'$ bo'lgani uchun $x'+y'\in\zeta$ bo'ladi. Bevosita tekshirish shuni ko'rsatadiki, L/L' da aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallari chiziqli fazo ta'rifidagi aksiomalarni qanoatlantiradi (buni mustaqil tekshirib ko'rishni o'quvchiga tavsiya qilamiz). Boshqacha aytganda, L/L' faktor fazo chiziqli fazo tashkil qiladi.

Shunday qilib, har bir L/L' faktor fazo unda yuqorida ko'rsatilgan usulda kiritilgan yig'indi va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Shuni ta'kidlash joizki, har qanday faktor fazoda L' qism fazo L/L' faktor fazoning nol elementi bo'ladi. Ma'lumki, L' qism fazoning elementlari o'zaro ekvivalent va L' qism fazo L chiziqli fazoning nol elementini saqlaydi. Shuning uchun ξ va L' qo'shni sinflarning yig'indisi $x+\theta=x$ $(x\in\xi,\theta\in L')$ elementni saqlovchi qo'shni sinfga, ya'ni ξ ga teng.

5.17. Faktor fazoga misol keltirishni tushunish nisbatan osonroq bo'lgan R^2 fazodan boshlaymiz. $L=R^2$ fazoning $L'=\{(x_1,x_2)\in R^2:\ x_2=0\}$ xos qism fazosini qaraymiz va L/L' faktor fazoning elementlarini, ya'ni qo'shni sinflarning tavsifini beramiz. Ma'lumki, $x-y=(x_1-y_1,x_2-y_2)\in L'$ bo'lishi uchun $x_2=y_2$ bo'lishi zarur va yetarli. Demak, L/L' faktor fazoning elementlari (qo'shni sinflar) Ox_1 o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlardan iborat. Masalan, $(a,b)\in R^2$ nuqtani o'zida saqlovchi ξ qo'shni sinf Ox_1 o'qiga parallel bo'lgan $x_2=b$ to'g'ri chiziqdan iborat. Xuddi shunday, (1,2) va (2,3) nuqtalarni saqlovchi qo'shni sinflar yig'indisi (3,5) nuqtani saqlovchi $x_2=5$ to'g'ri chiziqdan iborat. $(1,2)\in\xi$ qo'shni sinfning 3 ga ko'paytmasi (3,6) nuqtani saqlovchi $x_2=6$ to'g'ri chiziqdan iborat.

5.18. Ma'lumki (5.9-5.10 misollarga qarang), $[a,b]$ kesmada $p(p\geq 1)$-darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar to'plami chiziqli fazo tashkil qiladi va u $\tilde{L}_p[a,b]$ simvol bilan belgilanadi. Bu fazoning nolga ekvivalent funksiyalaridan tashkil topgan qism fazosini $\tilde{L}_p^0[a,b]$ (5.13-misolga qarang) ko'rinishda belgilaymiz. Endi $\tilde{L}_p[a,b]$ chiziqli fazoning $\tilde{L}_p^0[a,b]$ qism fazo bo'yicha faktor fazosini qaraymiz va bu faktor fazoni $L_p[a,b]$ bilan belgilaymiz. Bu fazo $[a,b]$ kesmada aniqlangan va p-darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar fazosi deb ataladi.

Agar L – n o'lchamli chiziqli fazo va L' uning $k(0<k<n)$ o'lchamli qism fazosi bo'lsa, u holda L/L' faktor fazo $(n-k)$ o'lchamli bo'ladi.

Bu tasdiqni isbotlaymiz. Aytaylik, $x_1,x_2,\dots,x_k$ elementlar sistemasi L' da bazis bo'lsin. Bu sistemani $x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n\in L$ elementlar bilan L fazo bazisigacha to'ldiramiz. Bu $x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n$ elementlar bir-biri bilan ekvivalent emas, aks holda $x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n$ sistema chiziqli bog'langan bo'lar edi. Shuning uchun $x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n$ elementlar har xil qo'shni sinflarga tegishli bo'ladi. ξ_i orqali x_{k+i}, $i\in\{1,2,\dots,n-k\}$ element tegishli bo'lgan sinfni belgilaymiz.

Endi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-k}$ elementlar sistemasining L/L' da bazis bo'lishini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $\xi \in L/L'$ qo'shni sinfni olaylik va $x \in \xi$ bo'lsin. U holda

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k + \beta_1 x_{k+1} + \beta_2 x_{k+2} + \cdots + \beta_{n-k} x_n$$

yoyilma o'rinli bo'ladi. $\xi + L' = \xi$ (har qanday L/L' faktor fazoda L' qism fazo L/L' faktor fazoning nol elementi bo'ladi, ya'ni $\theta = L'$) bo'lgani uchun

$$x' = x - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \cdots - \alpha_k x_k$$

element ξ qo'shni sinfga tegishli va

$$x' = \beta_1 x_{k+1} + \beta_2 x_{k+2} + \cdots + \beta_{n-k} x_n$$

yoyilma o'rinli bo'ladi. Bundan

$$\xi = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \cdots + \beta_{n-k} \xi_{n-k}$$

tenglik kelib chiqadi. Har qanday $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-k}) \neq 0$ da

$$\beta_1 x_{k+1} + \beta_2 x_{k+2} + \cdots + \beta_{n-k} x_n \notin L'$$

bo'lgani uchun $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-k}$ chiziqli bog'lanmagan sistema bo'ladi. Shunday qilib, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-k}$ sistema chiziqli bog'lanmaganligi va har bir $\xi \in L/L'$ sinf $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-k}$ sinflarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lganligi uchun $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-k}$ sistemaning bazis ekanligiga kelamiz. Demak, L/L' fazo $(n-k)$ o'lchamli chiziqli fazo ekan.

5.9-ta'rif. *L/L' faktor fazoning o'lchami L' qism fazoning koo'lchami deyiladi.*

Agar L' qism fazo chekli n koo'lchamga ega bo'lsa, u holda L da shunday $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlarni tanlash mumkinki, ixtiyoriy $x \in L$ element $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + y$ ko'rinishda bir qiymatli ifodalanadi, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - sonlar, $y \in L'$. Haqiqatan ham, L/L' faktor fazo n - o'lchamli bo'lsin. Bu faktor fazoda $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ bazisni tanlaymiz va har bir ξ_k sinfdan bittadan x_k vakil olamiz. Endi $x \in L$ ixtiyoriy element bo'lsin va ξ esa x ni saqlovchi L/L' dagi qo'shni sinf bo'lsin. U holda

$$\xi = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_n \xi_n.$$

Ta'rifga ko'ra ξ sinfdagi har bir element, xususiy holda, x element $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlarning

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

chiziqli kombinatsiyasidan L' dan olingan elementgagina farq qiladi, ya'ni

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + y, \quad y \in L'.$$

Bu tasvirning yagonaligini ko'rsatamiz. Aytaylik

$$x = \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \cdots + \alpha_n' x_n + y', \ y' \in L'$$

tasvir ham o'rinli bo'lsin. U holda

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_1')x_1 + (\alpha_2 - \alpha_2')x_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_n')x_n + y - y'$$

tenglikka kelamiz. Bundan $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 = \alpha_2'$, $\ldots, \alpha_n = \alpha_n'$, $y = y'$.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Chiziqli fazoga misollar keltiring.*
2. *Chiziqli bog'langan (chiziqli bog'lanmagan) sistema ta'rifini bering.*
3. *Chiziqli fazo o'lchami ta'rifini bering.*
4. $[-1,1]$ *kesmada aniqlangan uzluksiz va juft (toq) funksiyalar to'plamini* $C^+[-1,1]$ $(C^-[-1,1])$ *bilan belgilaymiz.* $C^+[-1,1]$ $(C^-[-1,1])$ *to'plam* $C[-1,1]$ *chiziqli fazoning qism fazosi bo'lishini isbotlang.*
5. $\tilde{L}_p^{(0)}[a,b]$ *qism fazoning o'lchamini toping.*
6. $L_p[a,b]$ *faktor fazoning o'lchamini toping.*

6-§. Chiziqli funksionallar

Bu paragraf chiziqli funksionallar, ularning ayrim xossalariga bag'ishlangan.

6.1-ta'rif. *L chiziqli fazoda aniqlangan f sonli funksiya funksional deb ataladi. Agar barcha $x, y \in L$ lar uchun*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

bo'lsa, f additiv funksional deyiladi.

6.2-ta'rif. *Agar barcha $x \in L$ va barcha $\alpha \in C$ lar uchun*

$$f(\alpha x) = \alpha f(x),$$

bo'lsa, f bir jinsli funksional deyiladi. Agar barcha $x \in L$ va barcha $\alpha \in C$ sonlar uchun

$$f(\alpha x) = \overline{\alpha} f(x)$$

bo'lsa, u holda kompleks chiziqli fazoda aniqlangan f funksional qo'shma bir jinsli deyiladi, bu yerda $\overline{\alpha}$ soni α ga qo'shma kompleks son.

6.3-ta'rif. *Additiv va bir jinsli funksional chiziqli funksional deyiladi. Additiv va qo'shma bir jinsli funksional qo'shma chiziqli (yoki antichiziqli) funksional deyiladi.*

Chiziqli funksionallarga misollar keltiramiz.

6.1-misol. $R^n \equiv \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in R\}$ - n o'lchamli vektor fazo va $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$ belgilangan element bo'lsin. U holda

$$f : R^n \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

moslik R^n da chiziqli funksional bo'ladi.

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{z}_k$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $u : C^n \to C$ akslantirish qo'shma chiziqli funksionalni aniqlaydi.

6.2. Quyidagi I va $I^*: C[a,b] \to C$ funksionallar

$$I(x)=\int_a^b x(t)\,dt, \quad I^*(x)=\int_a^b \overline{x(t)}\,dt$$

$C[a,b]$ fazodagi chiziqli va qo'shma chiziqli funksionallarga misol bo'ladi.

6.3. $y_0 \in C[a,b]$ berilgan element bo'lsin. Har bir $x \in C[a,b]$ funksiyaga

$$F(x)=\int_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt$$

sonni mos qo'yamiz. Bu funksionalning chiziqliligi integrallash amalining asosiy xossalaridan kelib chiqadi.

$$F^*(x)=\int_a^b \overline{x(t)}\,y_0(t)\,dt$$

funksional $C[a,b]$ fazoda qo'shma chiziqli funksional bo'ladi.

6.4. ℓ_2 fazoda chiziqli funksionalga misol keltiramiz. k- belgilangan natural son bo'lsin. ℓ_2 dagi har bir $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)$ uchun

$$f_k(x)=x_k$$

deymiz. Bu funksionalning chiziqliligi ko'rinib turibdi.

6.1. Chiziqli funksionalning geometrik ma'nosi

Bizga L chiziqli fazoda aniqlangan, nolmas f chiziqli funksional berilgan bo'lsin. Bu f funksional uchun $f(x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in L$ nuqtalar to'plami uning yadrosi deyiladi va $Ker\, f=\{x \in L:\ f(x)=0\}$ ko'rinishda belgilanadi. $Ker\, f$ to'plam L ning qism fazosi bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $x, y \in Ker\, f$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy a, b sonlar uchun

$$f(ax+by)=a\,f(x)+b\,f(y)=0$$

tenglik o'rinli.

6-§. Chiziqli funksionallar

Bu paragraf chiziqli funksionallar, ularning ayrim xossalariga bag'ishlangan.

6.1-ta'rif. *L chiziqli fazoda aniqlangan f sonli funksiya funksional deb ataladi. Agar barcha $x, y \in L$ lar uchun*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

bo'lsa, f additiv funksional deyiladi.

6.2-ta'rif. *Agar barcha $x \in L$ va barcha $\alpha \in C$ lar uchun*

$$f(\alpha x) = \alpha f(x),$$

bo'lsa, f bir jinsli funksional deyiladi. Agar barcha $x \in L$ va barcha $\alpha \in C$ sonlar uchun

$$f(\alpha x) = \overline{\alpha} f(x)$$

bo'lsa, u holda kompleks chiziqli fazoda aniqlangan f funksional qo'shma bir jinsli deyiladi, bu yerda $\overline{\alpha}$ soni α ga qo'shma kompleks son.

6.3-ta'rif. *Additiv va bir jinsli funksional chiziqli funksional deyiladi. Additiv va qo'shma bir jinsli funksional qo'shma chiziqli (yoki antichiziqli) funksional deyiladi.*

Chiziqli funksionallarga misollar keltiramiz.

6.1-misol. $R^n \equiv \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in R\}$ - n o'lchamli vektor fazo va $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$ belgilangan element bo'lsin. U holda

$$f : R^n \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

moslik R^n da chiziqli funksional bo'ladi.

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{z}_k$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $u : C^n \to C$ akslantirish qo'shma chiziqli funksionalni aniqlaydi.

6.2. Quyidagi I va $I^*: C[a,b] \to C$ funksionallar

$$I(x) = \int_a^b x(t)\,dt, \quad I^*(x) = \int_a^b \overline{x(t)}\,dt$$

$C[a,b]$ fazodagi chiziqli va qo'shma chiziqli funksionallarga misol bo'ladi.

6.3. $y_0 \in C[a,b]$ berilgan element bo'lsin. Har bir $x \in C[a,b]$ funksiyaga

$$F(x) = \int_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt$$

sonni mos qo'yamiz. Bu funksionalning chiziqliligi integrallash amalining asosiy xossalaridan kelib chiqadi.

$$F^*(x) = \int_a^b \overline{x(t)}\,y_0(t)\,dt$$

funksional $C[a,b]$ fazoda qo'shma chiziqli funksional bo'ladi.

6.4. ℓ_2 fazoda chiziqli funksionalga misol keltiramiz. k - belgilangan natural son bo'lsin. ℓ_2 dagi har bir $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ uchun

$$f_k(x) = x_k$$

deymiz. Bu funksionalning chiziqliligi ko'rinib turibdi.

6.1. Chiziqli funksionalning geometrik ma'nosi

Bizga L chiziqli fazoda aniqlangan, nolmas f chiziqli funksional berilgan bo'lsin. Bu f funksional uchun $f(x) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in L$ nuqtalar to'plami uning yadrosi deyiladi va $Ker\, f = \{x \in L: \ f(x) = 0\}$ ko'rinishda belgilanadi. $Ker\, f$ to'plam L ning qism fazosi bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $x, y \in Ker\, f$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy a, b sonlar uchun

$$f(ax + by) = a\,f(x) + b\,f(y) = 0$$

tenglik o'rinli.

$Ker\,f$ qism fazoning koo'lchami birga teng. Haqiqatan ham, $Ker\,f$ ga qarashli bo'lmagan, ya'ni $f(x_0)\neq 0$ bo'ladigan qandaydir x_0 elementni olamiz. Bunday element mavjud, chunki $f(x)\neq 0$ (aynan nolga teng emas). Umumiylikni chegaralamasdan hisoblashimiz mumkinki, $f(x_0)=1$ (aks holda biz $x_0/f(x_0)$ ni olgan bo'lar edik, chunki $f(x_0/f(x_0))=1$). Ixtiyoriy x element uchun $y=x-x_0\cdot f(x)$ desak, u holda

$$f(y)=f(x-x_0\cdot f(x))=0,$$

ya'ni $y\in Ker\,f$. Qaralayotgan x element $x=ax_0+y$, $y\in Ker\,f$ ko'rinishda tasvirlanadi va bu tasvir yagonadir. Haqiqatan ham,

$$x=ax_0+y,\quad y\in Ker\,f \quad \text{va} \quad x=a'x_0+y',\quad y'\in Ker\,f$$

bo'lsin. U holda

$$(a-a')x_0=y'-y$$

tenglik o'rinli. Agar $a=a'$ bo'lsa, $y=y'$ ekanligi ko'rinib turibdi. Agar $a-a'\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$x_0=\frac{y'-y}{a-a'}\in Ker\,f$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $x_0\notin Ker\,f$ shartga zid. Bu qarama-qarshilik tasdiqni isbotlaydi.

Bu yerdan kelib chiqadiki, ikkita x_1 va x_2 elementlar $Ker\,f$ qism fazo bo'yicha bitta qo'shni sinfda yotishi uchun $f(x_1)=f(x_2)$ shartning bajarilishi zarur va yetarli. Haqiqatan ham,

$$x_1=f(x_1)x_0+y_1,\ y_1\in Ker\,f,\ x_2=f(x_2)x_0+y_2,\ y_2\in Ker\,f$$

tenglikdan

$$x_1-x_2=(f(x_1)-f(x_2))x_0+(y_1-y_2)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu yerdan ko'rinib turibdiki, $x_1-x_2\in Ker\,f$ bo'lishi uchun $f(x_1)-f(x_2)=0$ bo'lishi zarur va yetarli.

$Ker\, f$ qism fazo bo'yicha har qanday ξ sinf o'zining ixtiyoriy vakili bilan bir qiymatli aniqlanadi. Bunday vakil sifatida $a x_0$ ko'rinishdagi elementni olish mumkin. Bu yerdan ko'rinadiki, $L/Ker\, f$ qism fazoning o'lchami birga teng ekan, ya'ni $Ker\, f$ ning koo'lchami birga teng.

Chiziqli funksionalning yadrosi $Ker\, f$ o'zida nolga aylanadigan funksionalni o'zgarmas ko'paytuvchi aniqligida bir qiymatli aniqlaydi.

Haqiqatan ham, f va g funksionallar yadrolari teng bo'lsin, ya'ni $Ker\, f = Ker\, g$. U holda f uchun $x_0 \in L$ elementni shunday tanlaymizki, $f(x_0) = 1$ bo'lsin. Ko'rsatamizki, $g(x_0) \neq 0$. Ixtiyoriy $x \in L$ uchun

$$x = f(x)x_0 + y,\ y \in Ker\, f \quad \text{va} \quad g(x) = f(x)g(x_0) + g(y) = f(x)g(x_0)$$

tengliklarga egamiz. Agar $g(x_0) = 0$ bo'lsa, $g(x) \equiv 0$ bo'lar edi. $g(x) = g(x_0)f(x)$ tenglikdan f va g funksionallarning proporsional ekanligi kelib chiqadi.

Koo'lchami birga teng bo'lgan ixtiyoriy L' qism fazo berilgan bo'lsin. U holda shunday f chiziqli funksional mavjudki, $Ker\, f = L'$ bo'ladi. Buning uchun L' qism fazoda yotmaydigan ixtiyoriy $x_0 \in L$ elementni olamiz va ixtiyoriy $x \in L$ elementni $x = a x_0 + y,\ y \in L'$ ko'rinishda yozamiz. Bunday yoyilma yagona. $f(x) = a$ tenglik yordamida aniqlanuvchi chiziqli funksionalning yadrosi $Ker\, f = L'$ bo'ladi.

L chiziqli fazoda koo'lchami birga teng bo'lgan qandaydir L' qism fazo berilgan bo'lsin. U holda L fazoning L' qism fazo bo'yicha har qanday qo'shni sinfi L' qism fazoga parallel bo'lgan gipertekislik deyiladi (xususan, L' qism fazoning o'zi θ elementni saqlovchi, ya'ni «koordinata boshidan o'tuvchi» gipertekislik hisoblanadi). Boshqacha aytganda, L' qism fazoga parallel bo'lgan M' gipertekislik - bu L' qism fazoni qandaydir $x_0 \in L$ vektorga parallel ko'chirishdan paydo bo'ladigan to'plam, ya'ni

$$M' = L' + x_0 = \{y : y = x + x_0,\ x \in L'\}.$$

Ko'rinib turibdiki, agar $x_0 \in L'$ bo'lsa, $M' = L'$ bo'ladi, agarda $x_0 \notin L'$ bo'lsa, u holda $M' \neq L'$.

Agar f - L chiziqli fazoda aniqlangan chiziqli funksional bo'lsa, $M_f = \{x \in L :\ f(x) = 1\}$ to'plam $Ker f$ qism fazoga parallel gipertekislik bo'ladi. Haqiqatan ham, $f(x_0) = 1$ bo'ladigan x_0 elementni tanlab, ixtiyoriy elementni $x = \alpha x_0 + y,\ y \in Ker f$ ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Ikkinchi tomondan, agar M' - koo'lchami birga teng bo'lgan L' qism fazoga parallel va koordinata boshidan o'tmaydigan gipertekislik bo'lsa, u holda shunday yagona f chiziqli funksional mavjudki,

$$M' = \{x : f(x) = 1\}$$

bo'ladi. Haqiqatan ham, $M' = L' + x_0,\ x_0 \in L$ bo'lsin. U holda har qanday $x \in L$ element yagona ravishda $x = a x_0 + y,\ y \in L'$ ko'rinishda tasvirlanadi. $f(x) = a$ tenglik yordamida aniqlanadigan chiziqli funksional izlanayotgan funksional bo'ladi. Uning yagonaligi quyidagidan kelib chiqadi:

Agar $x \in M'$ da $g(x) = 1$ bo'lsa, u holda $y \in L'$ da $g(y) = 0$ bo'ladi. Bundan

$$g(a x_0 + y) = a = f(a x_0 + y)$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, L chiziqli fazoda aniqlangan noldan farqli barcha chiziqli funksionallar bilan koordinata boshidan o'tmaydigan L dagi barcha gipertekisliklar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatildi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Chiziqli funksionalning geometrik ma'nosini tushuntiring.*

2. $C[a,b]$ *fazoda gipertekislikka misol keltiring.*

3. $C[a,b]$ *fazoda* $f(x)=x(b)$ *chiziqli funksionalni qaraymiz.* $C[a,b]$ *fazoda* $M=\{f\in C[a,b]:\ f(x)=1\}$ *to'plam gipertekislik bo'ladimi?*

4. $f:V[a,b]\to R$, $f(x)=x(a)$ *chiziqli funksionalning yadrosini toping.* $Ker\, f=V_0[a,b]$ *tenglik to'g'rimi?*

5. $f:C[-1,1]\to R$ *va*

$$f(x)=\int_{-1}^{1}x(t)dt$$

funksionalning chiziqli ekanligini ko'rsating. Toq funksiyalar to'plami $C^-[-1,1]=\{x\in C[-1,1]:\ x(-t)=-x(t)\}$ *uchun* $C^-[-1,1]\subset Ker\, f$ *munosabat to'g'rimi?*

6. $f:R^3\to R,\ f(x)=x_1$ *chiziqli funksionalning yadrosini toping. Bu fazoda* $\{x\in R^3:\ f(x)=1\}$ *gipertekislikni chizmada tasvirlang.*

7-§. Qavariq to'plamlar va qavariq funksionallar

L - haqiqiy chiziqli fazo, x va y uning ikki nuqtasi bo'lsin. U holda

$$\alpha x+\beta y,\quad \alpha,\beta\in[0,1],\ \alpha+\beta=1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha elementlar to'plami x va y nuqtalarni tutashtiruvchi kesma deyiladi va u $[x,y]$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$[x,y]=\{\alpha x+\beta y:\quad \alpha,\beta\in[0,1],\ \alpha+\beta=1\}.$$

7.1-ta'rif. *Agar* $M\subset L$ *to'plam o'zining ixtiyoriy* $x,y\in M$ *nuqtalarini tutashtiruvchi* $[x,y]$ *kesmani ham o'zida saqlasa,* M *ga qavariq to'plam deyiladi.*

7.2-ta'rif. *Agar biror* $x\in E$ *nuqta va ixtiyoriy* $y\in L$ *uchun shunday* $\varepsilon=\varepsilon(y)>0$ *son mavjud bo'lib, barcha* t, $|t|<\varepsilon$ *larda* $x+ty\in E$

munosabat bajarilsa, $x\in E$ nuqta $E\subset L$ to'plamning yadrosiga qarashli deyiladi. $E\subset L$ to'plamning yadrosi - $J(E)$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$J(E)=\{x\in E:\forall y\in L,\ \exists\varepsilon=\varepsilon(y)>0,\ \forall t\in R,\ |t|<\varepsilon,\ x+ty\in E\}.$$

7.3-ta'rif. *Yadrosi bo'sh bo'lmagan qavariq to'plam qavariq jism deyiladi.*

7.1-misol. R^3 fazoda kub, shar, tetrayedr, tekislikda to'g'ri to'rtburchak, doira, uchburchak qavariq jism bo'ladi. ℓ_2 fazodagi

$$B[0,1]=\left\{x\in\ell_2:\ \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\le 1\right\}$$

birlik shar qavariq jism bo'ladi.

7.2. R^2 da to'g'ri chiziq (kesma) qavariq to'plam bo'ladi, lekin qavariq jism bo'lmaydi. Chunki, uning yadrosi bo'sh to'plam (mustaqil isbotlang).

Agar M qavariq to'plam bo'lsa, u holda uning yadrosi $J(M)$ ham qavariq to'plamdir. Haqiqatan ham,

$$x,y\in J(M) \quad \text{va} \quad z=\alpha x+\beta y,\ \alpha,\beta\ge 0,\ \alpha+\beta=1$$

bo'lsin. U holda ixtiyoriy $a\in L$ uchun shunday $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ sonlar mavjudki, $|t_1|<\varepsilon_1$, $|t_2|<\varepsilon_2$ shartni qanoatlantiruvchi barcha t_1, t_2 larda $x+t_1a$ va $y+t_2a$ elementlar M to'plamda yotadi. Bundan kelib chiqadiki, barcha $|t|<\varepsilon$, $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ larda

$$\alpha(x+ta)+\beta(y+ta)=\alpha x+\beta y+\alpha ta+\beta ta=z+ta\in M,\ \text{ya'ni}\ \ z\in J(M).$$

7.1-teorema. *Istalgan sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi yana qavariq to'plamdir.*

Isbot. Faraz qilaylik,

$$M=\bigcap_{\alpha}M_{\alpha}$$

bo'lib, barcha M_α lar qavariq to'plamlar bo'lsin, x va y lar M ning ikki ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda x va y nuqtalarni tutashtiruvchi $[x,y]$

kesma M_α larning har biriga qarashli va demak, M ga ham qarashli. Shunday qilib, M haqiqatan ham qavariq to'plam ekan. Δ

Shuni eslatib o'tamizki, qavariq jismlarning kesishmasi yana qavariq jism bo'lavermaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin.

7.3. Tekislikdagi $P=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\}$ va $Q=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 1\le y\le 2\}$ qavariq jismlarning kesishmasi

$$P\cap Q=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ y=1\}$$

kesmadan iborat bo'lib, u qavariq jism emas (7.2-misolga qarang).

Qavariq to'plam tushunchasi qavariq funksional tushunchasi bilan uzviy bog'liq.

7.4-ta'rif. *Agar L haqiqiy chiziqli fazoda aniqlangan manfiymas p funksional*

1) $p(x+y)\le p(x)+p(y),\ \ \forall x,y\in L$,

2) $p(\alpha x)=\alpha\, p(x),\ \forall\alpha\ge 0\ \ va\ \ \forall x\in L$

shartlarni qanoatlantirsa, p ga qavariq funksional deyiladi.

Biz bu yerda $p(x)$ miqdorni chekli deb faraz qilmaymiz, ya'ni ayrim $x\in L$ lar uchun $p(x)=\infty$ ham bo'lishi mumkin. Agar barcha $x\in L$ lar uchun $p(x)$ chekli bo'lsa, p chekli funksional deyiladi.

7.4-misol. $p{:}C[a,b]\to R$ va

$$p(x)=\int_a^b |\,x(t)\,|\,dt$$

akslantirishning chekli qavariq funksional ekanligini isbotlang.

Isbot. Integralning monotonlik xossasidan, ixtiyoriy $x\in C[a,b]$ uchun $p(x)\ge 0$ ekanligi kelib chiqadi. Endi bizga $C[a,b]$ fazoning ixtiyoriy x va y elementlari berilgan bo'lsin. U holda

$$p(x+y)=\int_a^b |x(t)+y(t)|dt \le \int_a^b |x(t)|dt+\int_a^b |y(t)|dt=p(x)+p(y)$$

tengsizlik o'rinli. Xuddi shunday ixtiyoriy x va $\alpha \ge 0$ uchun

$$p(\alpha x)=\int_a^b |\alpha x(t)|dt=\alpha\int_a^b |x(t)|dt=\alpha\, p(x)$$

tenglik o'rinli. Demak, p qavariq funksional ekan. Uning chekli qavariq funksional ekanligi $p(x)\le(b-a)\max|x(t)|<\infty$ tengsizlikdan kelib chiqadi. Δ

7.5. $q:C[0,1]\to R$ va

$$q(x)=V_0^1[x]$$

akslantirish chekli bo'lmagan qavariq funksional bo'lishini isbotlang.

Isbot. q funksionalning manfiymasligi va qavariq funksional ta'rifidagi 1-2 shartlarning bajarilishi funksiya to'la o'zgarishi xossalaridan kelib chiqadi. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi fanidan ma'lumki, $C[0,1]$ fazoning $x_0(t)=t\sin(1/t)$ elementi uchun $V_0^1[x_0]=+\infty$ tenglik o'rinli. Demak, q chekli bo'lmagan qavariq funksional ekan. Δ

Endi qavariq to'plamlar bilan qavariq funksionallar orasidagi bog'lanishni qaraymiz.

7.2-teorema. *Agar $p:L\to R_+$ qavariq funksional va $k>0$ bo'lsa, u holda*

$$E=\{x\in L: p(x)\le k\}$$

qavariq to'plam bo'ladi. Agar p funksional chekli bo'lsa, u holda E to'plam yadrosi nol elementni saqlaydigan,

$$J(E)=\{x\in L: p(x)<k\}$$

yadroli qavariq jism bo'ladi.

Isbot. Agar $x, y\in E$ va $\alpha+\beta=1$, $\alpha,\beta\ge 0$ bo'lsa, u holda

$$p(\alpha x+\beta y)\le p(\alpha x)+p(\beta y)=\alpha\, p(x)+\beta\, p(y)<k\alpha+k\beta=k,$$

ya'ni E - qavariq to'plam. Endi p chekli funksional, $p(x)<k$, $t>0$ va $y\in L$ bo'lsin. U holda

$$p(x\pm t\,y)\leq p(x)+t\,p(\pm\,y)$$

Agar $p(-y)=p(y)=0$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy t uchun $x\pm t\,y\in E$ bo'ladi. Agar $p(-y)$, $p(y)$ sonlardan hech bo'lmaganda birortasi noldan farqli bo'lsa, u holda

$$t<\frac{k-p(x)}{\max(p(y),p(-y))}$$

shartda $x\pm t\,y\in E$ bo'ladi. Qavariq funksionalning θ nuqtadagi qiymati nolga teng bo'lgani uchun $\theta\in J(E)$. Δ

Endi $k=1$ holni qaraymiz. U holda har qanday chekli p qavariq funksional L da $\theta\in J(E)$ bo'ladigan yagona $E=\{x\in L: p(x)\leq 1\}$ qavariq jismni aniqlaydi. Aksincha, E - yadrosi nol elementni saqlaydigan qavariq jism bo'lsin. U holda har bir $x\in L$ ga

$$p_E(x)=\inf\left\{r>0:\ \frac{x}{r}\in E\right\}$$

sonni mos qo'yuvchi akslantirish qavariq funksional bo'ladi (mustaqil isbotlang). Bu funksional E qavariq jism uchun *Minkovskiy funksionali* deyiladi.

7.5-ta'rif. *L - haqiqiy chiziqli fazo va L_0 - uning biror qism fazosi bo'lsin. L_0 qism fazoda f_0 chiziqli funksional va L fazoda f chiziqli funksional berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x\in L_0$ uchun $f(x)=f_0(x)$ tenglik bajarilsa, f chiziqli funksional f_0 funksionalning L fazoga davomi deyiladi.*

Funksionalning davomi bir qiymatli emas. Funksionalning ixtiyoriy davomi maqsadga muvofiq emas. Odatda funksionalni qandaydir shartni saqlab qolgan holda davom ettirish talab qilinadi.

7.3-teorema. *(Xan-Banax). Aytaylik, p - L haqiqiy chiziqli fazoda aniqlangan qavariq funksional va L_0 - L ning qism fazosi bo'lsin. Agar L_0 da aniqlangan f_0 chiziqli funksional*

$$f_0(x) \leq p(x), \quad x \in L_0 \tag{7.1}$$

shartni qanoatlantirsa, u holda f_0 ni L da aniqlangan va L da (7.1) shartni qanoatlantiruvchi f chiziqli funksionalgacha davom ettirish mumkin.

Isbot. $L_0 \neq L$ bo'lgan holda f_0 chiziqli funksionalni L_0 dan kengroq bo'lgan $L^{(1)}$ qism fazogacha (7.1) shartni saqlagan holda chiziqli davom ettirish mumkinligini ko'rsatamiz. L_0 ga qarashli bo'lmagan ixtiyoriy $z \in L$ elementni olamiz. $L^{(1)}$ bilan L_0 va z elementlardan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz. $L^{(1)}$ quyidagicha ko'rinishdagi elementlardan tashkil topgan

$$\{tz + x, \ t \in R, \ x \in L_0\} = L^{(1)}$$

Agar f_1 funksional f_0 ning $L^{(1)}$ qism fazogacha chiziqli davomi bo'lsa, u holda

$$f_1(tz + x) = f_1(tz) + f_1(x) = t f_1(z) + f_0(x),$$

yoki $f_1(z) = c$ deb olsak,

$$f_1(tz + x) = tc + f_0(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Endi c ni shunday tanlaymizki, f_1 funksional (7.1) shartni qanoatlantirsin, ya'ni

$$f_1(tz + x) = tc + f_0(x) \leq p(tz + x) \tag{7.2}$$

tengsizlik bajarilsin. Agar $t > 0$ bo'lsa, (7.2) shart quyidagi shartga teng kuchli:

$$c + f_0\left(\frac{x}{t}\right) \leq p\left(z + \frac{x}{t}\right) \quad \text{yoki} \quad c \leq p\left(z + \frac{x}{t}\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right),$$

$t < 0$ bo'lsa,

$$c+f_0\left(\frac{x}{t}\right)\geq -p\left(-z-\frac{x}{t}\right) \text{ yoki } c\geq -p\left(-z-\frac{x}{t}\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right).$$

Bu ikkala shartni qanoatlantiruvchi c son har doim mavjudligini ko'rsatamiz. L_0 qism fazodan olingan ixtiyoriy y' va y'' elementlar uchun

$$-f_0(y'')+p(y''+z)\geq -f_0(y')-p(-y'-z) \tag{7.3}$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham, bu tengsizlik quyidagi tengsizlikdan bevosita kelib chiqadi:

$$f_0(y'')-f_0(y')=f_0(y''-y')\leq p(y''-y')=$$
$$=p((y''+z)+(-y'-z))\leq p(y''+z)+p(-y'-z).$$

Endi

$$c''=\inf_{y''}(-f_0(y'')+p(y''+z)), \quad c'=\sup_{y'}(-f_0(y')-p(-y'-z))$$

deb olamiz. (7.3) tengsizlik ixtiyoriy y' va y'' lar uchun o'rinli bo'lganidan $c''\geq c'$ ekanligi kelib chiqadi. Agar c sonini $c''\geq c\geq c'$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlasak, u holda

$$f_1(tz+x)=tc+f_0(x)$$

formula bilan aniqlangan f_1 funksional chiziqli va (7.1) shartni qanoatlantiradi.

Shunday qilib, biz f_0 funksionalni L_0 qism fazodan undan kengroq bo'lgan $L^{(1)}$ qism fazogacha (7.1) shartni saqlagan holda chiziqli davom ettirdik.

Agar L chiziqli fazoda sanoqlita $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ elementlar sistemasi mavjud bo'lib, bu sistemani saqlovchi $L(\{x_k\})$ minimal qism fazo L ning o'ziga teng bo'lsa, u holda f_0 funksionalni

$$L^{(1)}=\{L_0,\, x_1\},\ L^{(2)}=\{L^{(1)},\, x_2\},\ldots$$

kengayib boruvchi qism fazolarda yuqoridagidek aniqlab, f_0 funksionalni L fazogacha (7.1) shartni saqlagan holda davom ettirish mumkin.

Agar chiziqli qobig'i L ga teng bo'ladigan sanoqli sistema mavjud bo'lmasa, u holda teoremaning isboti Sorn lemmasi yordamida nihoyasiga etkaziladi ([1] ga qarang). Δ

7.6. $L = C[-1,1]$ uzluksiz funksiyalar fazosi va uning qism fazosi $L_0 = \{ x \in C[-1,1]: x(t) \equiv 0,\ t \in [-1,0] \}$ ni qaraymiz. L_0 qism fazoda f_0 chiziqli funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_0(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt, \quad x \in L_0.$$

$L = C[-1,1]$ chiziqli fazoda f va p funksionallarni esa quyidagicha aniqlaymiz:

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t) y_0(t)\,dt + \int_{0}^{1} x(t)\,dt, \quad p(x) = 2 \max_{-1 \le t \le 1} |x(t)|, \quad x \in L$$

Quyidagicha savollar qo'yamiz.

1) f_0 funksional (7.1) tengsizlikni qanoatlantiradimi?

2) f funksional f_0 funksionalning L fazogacha davomi bo'ladimi?

3) $y_0 \in C[-1,0]$ qanday tanlanganda f funksional Xan-Banax teoremasining shartlarini qanoatlantiradi?

Yechish. f_0 funksional (7.1) tengsizlikni qanoatlantiradi. Haqiqatan ham,

$$f_0(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt \le \int_{-1}^{1} \max_{-1 \le t \le 1} |x(t)|\,dt = 2 \max_{-1 \le t \le 1} |x(t)| = p(x), \quad x \in L_0.$$

Agar $x \in L_0$, bo'lsa u holda

$$\int_{-1}^{0} x(t) y_0(t)\,dt = 0$$

bo'ladi. Shuning uchun, barcha $y_0 \in C[-1,0]$ larda $f(x)=f_0(x), x \in L_0$ tenglik o'rinli. Demak, barcha y_0 lar uchun f funksional f_0 funksionalning L fazogacha davomi bo'ladi. Nihoyat,

$$f(x) \le \max_{-1\le t\le 0} |x(t)| \int_{-1}^{0} |y_0(t)|\,dt + \int_0^1 \max_{0\le t\le 1} |x(t)|\,dt \le 2\max_{-1\le t\le 1} |x(t)| = p(x), \quad x \in L$$

tengsizlik,

$$\int_{-1}^{0} |y_0(t)|\,dt = c \le 1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $y_0 \in C[-1,0]$ larda o'rinli. Demak, $c \in [0,1]$ bo'lsa, Xan-Banax teoremasining shartlari bajariladi. Shunday qilib f_0 funksionalni (7.1) shartni saqlagan holda cheksiz ko'p usul bilan L fazogacha davom ettirish mumkin ekan.

Endi Xan-Banax teoremasining kompleks variantini isbot qilamiz.

7.6-ta'rif. L *- kompleks chiziqli fazo va unda aniqlangan manfiymas* p *funksional berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy* $x,y \in L$ *va ixtiyoriy* $\alpha \in C$ *uchun*

$$p(x+y) \le p(x)+p(y) \quad va \quad p(\alpha x)=|\alpha|\,p(x)$$

shartlar bajarilsa, u holda p *- qavariq funksional deyiladi.*

7.4-teorema. *(Xan-Banax).* p *-* L *kompleks chiziqli fazoda aniqlangan qavariq funksional,* f_0 *esa* L_0 *qism fazoda aniqlangan va bu qism fazoda*

$$|f_0(x)| \le p(x), \quad x \in L_0$$

shartni qanoatlantiruvchi chiziqli funksional bo'lsin. U holda butun L *da aniqlangan va*

$$f(x)=f_0(x), \ \forall x \in L_0, \ |f(x)| \le p(x), \ \forall x \in L$$

shartlarni qanoatlantiruvchi f *chiziqli funksional mavjud.*

Isbot. L va L_0 fazolarni haqiqiy chiziqli fazo sifatida qarab, mos ravishda L_R va L_{0R} bilan belgilaymiz. Tushunarliki, p funksional L_R da aniqlangan qavariq funksional bo'ladi, $f_{0R}(x) = \mathrm{Re}\, f_0(x)$ esa

$$|f_{0R}(x)| \leq p(x), \quad x \in L_{0R}(= L_0)$$

shartni, bundan esa $f_{0R}(x) \leq p(x)$ shartni qanoatlantiruvchi L_{0R} dagi haqiqiy chiziqli funksional bo'ladi. 7.3-teoremaga ko'ra, L_R da aniqlangan va

$$f_R(x) \leq p(x), \quad x \in L_R(= L),$$

$$f_R(x) = f_{0R}(x), \quad x \in L_{0R}(= L_0)$$

shartni qanoatlantiruvchi f_R chiziqli funksional mavjud. Tushunarliki,

$$-f_R(x) = f_R(-x) \leq p(-x) = p(x).$$

Demak,

$$|f_R(x)| \leq p(x), \quad x \in L_R(= L) \tag{7.4}$$

Endi f funksionalni L da quyidagicha aniqlaymiz

$$f(x) = f_R(x) - i\, f_R(ix).$$

Murakkab bo'lmagan hisoblashlar yordamida ko'rsatish mumkinki, f - L kompleks chiziqli fazoda aniqlangan chiziqli funksional bo'ladi hamda

$$f(x) = f_0(x), \ \forall x \in L_0, \qquad \mathrm{Re}\, f(x) = f_R(x), \ \forall x \in L.$$

Ixtiyoriy $x \in L$ uchun $|f(x)| \leq p(x)$ ekanligini ko'rsatsak, teorema isbot bo'ladi. Teskaridan faraz qilamiz. Biror $x_0 \in L$ uchun $|f(x_0)| > p(x_0)$ bo'lsin. $f(x_0)$ kompleks sonni $f(x_0) = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$ ko'rinishda yozamiz va $y_0 = e^{-i\varphi} x_0$ deb olamiz. U holda

$$f_R(y_0) = \mathrm{Re}\, f(y_0) = \mathrm{Re}\left[e^{-i\varphi} f(x_0)\right] = \rho > p(x_0) = p(y_0).$$

Bu esa (7.4) shartga zid. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $V_0[a,b]$ qism fazoda aniqlangan $f_0(x)=x(b)$ funksional uchun $f:V[a,b]\to R$, $f(x)=\alpha x(a)+x(b)$ funksional uning davomi bo'ladimi? $p(x)=|x(a)|+|x(b)|$, $x\in V[a,b]$ funksional qavariqmi? Parametr $\alpha\in R$ ning qanday qiymatlarida bu funksionallar uchun 7.3-teorema shartlari bajariladi?

2. Yadrosi bo'sh to'plam bo'lgan qavariq to'plamga misol keltiring.

3. R^2 fazoda qavariq va qavariq bo'lmagan funksionalga misol keltiring. Bu fazoda $p_1(x)=x_1^2+x_2^2$ va $p_2(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ funksionallarni qavariqlikka tekshiring.

4. 7.6-misolda keltirilgan f_0 va f funksionallarning chiziqli ekanligini ko'rsating.

5. 7.6-misolda keltirilgan p akslantirishning chekli qavariq funksional ekanligini ko'rsating.

6. Berilgan $E=\{x\in C[a,b]:\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|\le 1\}$ qavariq jismga mos Minkovskiy funksionalini quring.

7. $p:R^2\to R,\ p(x)=|x_1+x_2|$ funksionalning chekli qavariq funksional ekanligini ko'rsating. Unga mos $E=\{x\in R^2:\ p(x)\le 1\}$ qavariq jismni R^2 fazoda chizib ko'rsating.

8-§. Chiziqli normalangan fazolar

Chiziqli fazolarda elementlarning bir-biriga yaqinligi degan tushuncha yo'q. Ko'plab amaliy masalalarni hal qilishda elementlarni qo'shish va ularni songa ko'paytirish amallaridan tashqari, elementlar orasidagi masofa, ularning yaqinligi tushunchasini kiritishga to'g'ri keladi. Bu bizni normalangan chiziqli fazo tushunchasiga olib keladi. Normalangan fazolar nazariyasi S.Banax va boshqa matematiklar tomonidan rivojlantirilgan.

8.1-ta'rif. *Bizga L chiziqli fazo va unda aniqlangan p funksional berilgan bo'lsin. Agar p quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi:*

1) $p(x)\geq 0,\ \forall x\in L;\ \ p(x)=0 \Leftrightarrow x=\theta;$

2) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x),\ \forall \alpha\in C,\ \forall x\in L;$

3) $p(x+y)\leq p(x)+p(y),\ \forall x,y\in L.$

8.2-ta'rif. *Norma kiritilgan L chiziqli fazo chiziqli normalangan fazo deyiladi va $x\in L$ elementning normasi $\|x\|$ orqali belgilanadi.*

Agar L - normalangan fazoda $x,y\in L$ elementlar jufti uchun

$$\rho(x,y)=\|x-y\|$$

sonni mos qo'ysak, ρ funksional metrikaning 1-3 aksiomalarini qanoatlantiradi (1.1-ta'rifga qarang). Metrika aksiomalarining bajarilishi normaning 1-3 shartlaridan bevosita kelib chiqadi. Demak, har qanday chiziqli normalangan fazoni metrik fazo sifatida qarash mumkin. Metrik fazolarda o'rinli bo'lgan barcha tasdiqlar (ma'lumotlar) chiziqli normalangan fazolarda ham o'rinli.

X chiziqli normalangan fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

8.3-ta'rif. *Biror $x \in X$ va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ larda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in X$ elementga yaqinlashadi deyiladi.*

8.4-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ va $p \in N$ larda $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ - fundamental ketma-ketlik deyiladi.*

8.3 va 8.4 ta'riflarni 2.6 va 3.1 ta'riflar bilan taqqoslang.

8.5-ta'rif. *Agar X chiziqli normalangan fazodagi ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la normalangan fazo yoki Banax fazosi deyiladi.*

Bu ta'rifni quyidagicha aytish mumkin: Agar (X,ρ), $\rho(x,y) = \|x - y\|$ metrik fazo to'la bo'lsa, u holda X *to'la normalangan fazo* deyiladi.

Chiziqli normalangan fazolarga misollar keltiramiz.

8.1-misol. $L = R$ - haqiqiy sonlar to'plami. Agar ixtiyoriy $x \in R$ soni uchun $\|x\| = |x|$ sonni mos qo'ysak, R normalangan fazoga aylanadi.

8.2. $L = C$ - kompleks sonlar to'plami. Bu yerda ham norma yuqoridagidek kiritiladi: $\|z\| = |z|$.

8.3. $L = R^n$ - n - o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo. Bu fazoda

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|, \quad x \in R^n$$

funksionallar norma shartlarini qanoatlantiradi. R^n chiziqli fazoda $\|\cdot\|_p$ norma kiritilgan bo'lsa, uni R_p^n, agar $\|\cdot\|_\infty$ norma kiritilgan bo'lsa uni R_∞^n deb belgilaymiz (1.3-1.5, 1.11-misollar bilan taqqoslang).

8.4. $L = C^n$ - n o'lchamli kompleks chiziqli fazo. Bu fazoda

$$\|z\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}$$

funksional norma shartlarini qanoatlantiradi.

8.5. $C[a,b]$ – $[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda $f\in C[a,b]$ elementning normasi (1.6-misol bilan taqqoslang)

$$\|f\|=\max_{a\le x\le b}|f(x)|,$$

tenglik bilan aniqlanadi. Xuddi 8.3-misoldagidek $C[a,b]$ chiziqli fazoda norma

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt$$

formula vositasida kiritilgan bo'lsa, uni $C_1[a,b]$ (1.9-misol), agar norma

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b|f(t)|^2dt}$$

tenglik orqali kiritilgan bo'lsa uni $C_2[a,b]$ (1.8-misolga qarang) deb belgilaymiz.

Quyida biz chiziqli fazo va unda kiritilgan normalarni beramiz.

8.6. ℓ_2 fazoda x elementning normasi quyidagicha kiritiladi:

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2}\ .$$

8.7. c_0, c, m fazolarda x elementning normasi quyidagicha kiritiladi:

$$\|x\|=\sup_{1\le n<\infty}|x_n|.$$

ℓ_2, c_0, c va m fazolarning aniqlanishi 5.5-5.8 misollarda keltirilgan.

8.8. $M[a,b]$ - bilan $[a,b]$ kesmada aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Bu to'plam odatdagi funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda aniqlangan

$$p(x) = \sup_{a \le t \le b} |x(t)|, \quad x \in M[a,b] \tag{8.1}$$

funksional norma shartlarini qanoatlantiradi va $M[a,b]$ chiziqli normalangan fazo bo'ladi.

8.9. $C^{(n)}[a,b]$ - bilan $[a,b]$ kesmada aniqlangan n marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz. $C^{(n)}[a,b]$ to'plam odatdagi funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda aniqlangan

$$p(x) = \max_{a \le t \le b} |x(t)| + \sum_{k=1}^{n} \max_{a \le t \le b} |x^{(k)}(t)|, \quad x \in C^{(n)}[a,b] \tag{8.2}$$

funksional normaning 1-3 shartlarini qanoatlantiradi.

8.10. $[a,b]$ kesmada aniqlangan o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ (5.11-misolga qarang) ni qaraymiz. Bu fazoda

$$p : V[a,b] \to R, \quad p(x) = |x(a)| + V_a^b[x] \tag{8.3}$$

funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi va $V[a,b]$ chiziqli normalangan fazo bo'ladi.

Endi Banax fazolariga misollar keltiramiz.

8.11. R^n, R_p^n, $C[a,b]$, $\ell_p, p \ge 1, c, c_0$ fazolarni to'lalikka tekshiring.

Yechish. To'la metrik fazolar (3-paragraf) mavzusidan ma'lumki R^n, R_p^n, $C[a,b]$, ℓ_p, $p \ge 1$, c, c_0 lar (3.3-3.7 misollarga qarang) to'la metrik fazolar edi. Shuning uchun ular to'la normalangan fazolar, ya'ni Banax fazolari bo'ladi.

8.12. $C_2[a,b]$ to'la bo'lmagan (3.8-misolga qarang) metrik fazo edi. Shuning uchun $C_2[a,b]$ to'la bo'lmagan normalangan fazoga misol bo'ladi.

8.1. Normalangan fazoning qism fazosi

Biz yuqorida chiziqli fazoning qism fazosi tushunchasini kiritgan edik, ya'ni agar ixtiyoriy $x, y \in L_0$ elementlar va ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in L_0$ bo'lsa, bo'sh bo'lmagan $L_0 \subset L$ qism to'plam, qism fazo deyilar edi.

Normalangan fazolarda yopiq qism fazolar, ya'ni barcha limitik nuqtalarini o'zida saqlovchi qism fazolar muhim ahamiyatga ega. Chekli o'lchamli normalangan fazolarda har qanday qism fazo yopiqdir. Cheksiz o'lchamli normalangan fazolarda qism fazolar doim yopiq bo'lavermaydi. Quyida keltiriladigan misol fikrimizni tasdiqlaydi.

8.13. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[a,b]$ dagi barcha ko'phadlar to'plami qism fazo tashkil qiladi, lekin u yopiq emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun

$$P_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

ko'phadlar ketma-ketligini qaraymiz. Ravshanki, $\{P_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lib, uning limiti $x(t) = e^t$ ga teng. $x(t) = e^t$ funksiya esa ko'phad emas.

Normalangan fazolarda asosan yopiq chiziqli qism fazolarni qaraymiz. Shuning uchun 5-§ da kiritilgan qism fazo atamasiga o'zgartirish kiritish tabiiydir.

8.6-ta'rif. *Agar L normalangan fazoning $L_0 \subset L$ qism to'plamida ixtiyoriy $x, y \in L_0$ elementlar va ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in L_0$ bo'lsa L_0 chiziqli ko'pxillilik deyiladi. Agar $L_0 \subset L$ qism to'plam yopiq chiziqli ko'pxillilik bo'lsa, L_0 qism to'plam L ning qism fazosi deyiladi.*

8.14. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[-1,1]$ dagi barcha toq funksiyalar to'plami $C^-[-1,1]$ (5-§ ning 4-chi topshirig'iga qarang) chiziqli ko'pxillilik tashkil qiladi va u yopiq. Haqiqatan ham, $\{x_n\}$ toq funksiyalar ketma-ketligi biror $x \in C[-1,1]$ elementga yaqinlashsin. U holda

$$x(-t) = \lim_{n\to\infty} x_n(-t) = \lim_{n\to\infty}(-x_n(t)) = -\lim_{n\to\infty} x_n(t) = -x(t).$$

8.15. $[a,b]$ kesmada aniqlangan va $x(a)=0$ shartni qanoatlantiruvchi o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plamini $V_0[a,b]$ bilan belgilaymiz. Ma'lumki, $V_0[a,b]$ to'plam $V[a,b]$ fazoning (5.15-misolga qarang) qism fazosi, ya'ni yopiq chiziqli ko'pxillilik bo'ladi. Bu fazoda ham x elementning normasi (8.3) tenglik bilan aniqlanadi. (8.3) tenglik $V_0[a,b]$ fazoda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\|x\| = V_a^b[x] \tag{8.4}$$

va u norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $V_0[a,b]$ to'plam - chiziqli normalangan fazo bo'ladi.

8.16. $[a,b]$ kesmada aniqlangan va $x(a)=0$ shartni qanoatlantiruvchi absolyut uzluksiz funksiyalar to'plamini $AC_0[a,b]$ bilan belgilaymiz. Ma'lumki, $AC_0[a,b]$ to'plam $V_0[a,b]$ fazoning (8.15-misolga qarang) qism fazosi bo'ladi. Shuning uchun bu fazoda ham x elementning normasi (8.4) tenglik bilan aniqlanadi va $AC_0[a,b]$ to'plam - chiziqli normalangan fazo hosil qiladi.

8.2. Normalangan fazoning faktor fazosi

Bizga L normalangan fazo va uning $L_0 \subset L$ qism fazosi berilgan bo'lsin. $P = L/L_0$ faktor fazoni qaraymiz va unda normani quyidagicha aniqlaymiz. Har bir $\xi \in P$ qo'shni sinfga

$$\|\xi\| = \inf_{x\in\xi}\|x\| \tag{8.5}$$

sonni mos qo'ysak, bu funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, L/L_0 faktor fazo ham normalangan fazo bo'lar ekan.

Agar L to'la normalangan fazo bo'lsa, L/L_0 faktor fazo ham (8.5) normaga nisbatan to'la fazo bo'ladi [1].

8.17-misol. Faktor fazoga misol keltirishni tushunish nisbatan osonroq bo'lgan R^3 fazodan boshlaymiz. $L=R^3$ fazoning xos qism fazosi $L'=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 : x_3=0\}$ ni qaraymiz va L/L' faktor fazoning elementlarini, ya'ni qo'shni sinflarning tavsifini beramiz. Ma'lumki, $x-y=(x_1-x_2,x_2-y_2,x_3-y_3)\in L'$ bo'lishi uchun $x_3=y_3$ bo'lishi zarur va yetarli. Demak, L/L' faktor fazoning elementlari Ox_1x_2 tekislikka parallel bo'lgan tekisliklardan iborat. Masalan, $(a,b,c)\in R^3$ nuqtani o'zida saqlovchi ξ qo'shni sinf Ox_1x_2 tekisligiga parallel bo'lgan $x_3=c$ tekislikdan iborat. Bu faktor fazoda ξ elementning normasi

$$p(\xi)=\inf_{x\in\xi}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\inf_{x_1,x_2\in R}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=|x_3|$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu faktor fazoning o'lchami 1 ga teng va u to'la normalangan fazo.

8.18. $L_p[a,b]$ faktor fazoni (5.18-misolga qarang) qaraymiz. Agar $L_p[a,b]$ dan olingan har bir ξ qo'shni sinfga uning ixtiyoriy $f\in\xi$ vakili yordamida aniqlanuvchi va vakilning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan

$$\|\xi\|=\inf_{f\in\xi}\left(\int_a^b|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\| \tag{8.6}$$

sonni mos qo'ysak, bu moslik $L_p[a,b]$ da norma aniqlaydi va $L_p[a,b]$, $p\geq 1$ chiziqli normalangan fazoga aylanadi. Bu fazo $[a,b]$ kesmada aniqlangan va p - chi darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar fazosi deb ataladi. Barcha $p\geq 1$ larda $L_p[a,b]$ fazo to'la normalangan fazo, ya'ni Banax fazosi bo'ladi [1].

8.19. O'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ ni (8.10-misolga qarang) qaraymiz. Unda o'zgarmas funksiyalardan iborat

$L' = \{x \in V[a,b]:\ x(t) = const\}$ bir o'lchamli qism fazoni olamiz. Endi $V[a,b]$ chiziqli fazoning L' qism fazo bo'yicha faktor fazosini qaraymiz. Faktor fazo ta'rifiga ko'ra $x, y \in V[a,b]$ elementlar bitta qo'shni sinfda yotishi uchun $x(t) - y(t) \equiv const$ bo'lishi zarur va yetarli. Boshqacha aytganda $y \in V[a,b]$ element x elementni saqlovchi ξ qo'shni sinfda yotishi uchun $y(t) \equiv x(t) - C$, $C = const$ ko'rinishda tasvirlanishi zarur va yetarli. Ma'lumki, har qanday faktor fazoda ξ elementning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|\xi\| = \inf_{y\in\xi} \|y\| = \inf_{C\in R} \left(|x(a) - C| + V_a^b[x - C]\right). \tag{8.7}$$

O'zgarishi chegaralangan funksiyalar xossalaridan ma'lumki, istalgan C o'zgarmas uchun

$$V_a^b[x - C] = V_a^b[x]$$

tenglik o'rinli. $|x(a) - C|$ ning aniq quyi chegarasi esa nolga teng. Bulardan foydalanib, (8.7) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\|\xi\| = V_a^b[x], \quad x \in \xi \quad \text{va} \quad x(a) = 0. \tag{8.8}$$

Shunday qilib ξ qo'shni sinfga, shu sinfning a nuqtada nolga aylanuvchi x elementini mos qo'yish bilan $V[a,b]/L'$ faktor fazo va $V_0[a,b]$ (8.15-misolga qarang) fazolar o'rtasida izomorfizm o'rnatiladi. Demak, $V[a,b]/L'$ va $V_0[a,b]$ fazolar o'zaro izomorf ekan.

8.20. 7.6-misolda keltirilgan $L_0 = \{x \in C[-1,1]:\ x(t) = 0,\ t \in [-1,0]\}$ qism fazoni qaraymiz. L_0 yopiq qism fazo bo'ladi (mustaqil isbotlang). $C[-1,1]/L_0$ faktor fazoda ξ elementning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|\xi\| = \inf_{x\in\xi} \max_{t\in[-1,1]} |x(t)| = \max_{t\in[-1,0]} |x(t)|. \tag{8.9}$$

$C[-1,1]$ Banax fazosi bo'lganligi uchun, $C[-1,1]/L_0$ faktor fazo ham Banax fazosi bo'ladi.

8.21. Shuni ta'kidlash lozimki, $L_p[a,b]$, $p\geq 1$ fazolar to'la normalangan fazolar, ya'ni Banax fazolari bo'ladi. Ma'lumki, har qanday normalangan fazoni metrik fazo sifatida qarash mumkin. Agar biz $C_p[a,b]$, $p\geq 1$ to'la bo'lmagan metrik fazoni to'ldirsak, uning to'ldirmasi $L_p[a,b]$, $p\geq 1$ fazo bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. R^n, R^n_p, $C[a,b]$, ℓ_p, c, c_0 *fazolarda norma qanday kiritiladi?*

2. $L=R^2$ *fazoning* $L'=\{(x_1,x_2)\in R^2:\ x_2=0\}$ *xos qism fazosi bo'yicha* L/L' *faktor fazoning elementlarini tavsiflang. (2,3) nuqtani saqlovchi qo'shni sinfning normasini toping.* $x_2=3$ *to'g'ri chiziq* L/L' *faktor fazoning elementi bo'ladimi?*

3. $M[a,b]$ *fazoda (8.1) tenglik bilan aniqlangan* $p:M[a,b]\to R$ *funksionalning norma shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.*

4. $V[a,b]$ *fazo* $M[a,b]$ *fazoning qism fazosi bo'ladimi?*

5. $C^{(n)}[a,b]$ *fazoda (8.2) tenglik bilan aniqlangan* $p:C^{(n)}[a,b]\to R$ *funksionalning norma shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.*

6. $C^{(n)}[a,b]$ *fazo* $C[a,b]$ *fazoning qism fazosi bo'ladimi?*

7. $C^{(n)}[a,b]$, $C_1[a,b]$ *va* $C_2[a,b]$ *normalangan fazolarning qaysilari to'la?*

8. *3-§ ning 3.8 misolida keltirilgan* $\{f_n\}$ *ketma-ketlikni* $C_1[-1,1]$ *fazoda fundamentallikka tekshiring. U yaqinlashuvchi bo'ladimi? 3.8 misoldan foydalaning.*

9. $M[a,b]$ *chiziqli normalangan fazoda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchimi?*

10. $V[a,b]$ *chiziqli normalangan fazo to'la normalangan fazo bo'ladimi?*

Chiziqli fazolarda norma kiritishning sinalgan usullaridan biri, unda skalyar ko'paytma kiritishdir.

9.1-ta'rif. *Bizga L haqiqiy chiziqli fazo berilgan bo'lsin. Agar $L\times L$ dekart ko'paytmada aniqlangan p funksional quyidagi to'rtta shartni qanoatlantirsa, unga skalyar ko'paytma deyiladi:*

1) $p(x,x)\geq 0,\ \ \forall x\in L;\ \ p(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta;$

2) $p(x,y)=p(y,x),\ \ \forall x,y\in L;$

3) $p(\alpha x,y)=\alpha\, p(x,y),\ \forall\alpha\in R,\ \forall x,y\in L;$

4) $p(x_1+x_2,\ y)=p(x_1,y)+p(x_2,y),\ \ \forall x_1,x_2,\ y\in L,$

9.2-ta'rif. *Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo Evklid fazosi deyiladi va x,y elementlarning skalyar ko'paytmasi (x,y) orqali belgilanadi.*

Evklid fazosida x elementning normasi

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \tag{9.1}$$

formula orqali aniqlanadi. Bu funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Skalyar ko'paytmaning 1-4 shartlaridan normaning 1-2 shartlari bevosita kelib chiqadi. Uchburchak aksiomasining bajarilishi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi quyidagi

$$|(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\| \tag{9.2}$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Endi (9.2) tengsizlikni, ya'ni Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini isbotlaymiz. $\lambda\in R$ ning barcha qiymatlarida nomanfiy bo'lgan kvadrat uchhadni qaraymiz:

$$\phi(\lambda)=(\lambda x+y,\lambda x+y)=\lambda^2(x,x)+2\lambda(x,y)+(y,y)=\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(x,y)+\|y\|^2.$$

Bu kvadrat uchhadning diskriminanti musbat emas, ya'ni

$$D=4[(x,y)]^2-4\|x\|^2\cdot\|y\|^2\leq 0.$$

Bundan

$$[(x,y)]^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2, \quad \text{ya'ni} \quad |(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|.$$

Endi (9.1) norma uchun uchburchak aksiomasining bajarilishini ko'rsatamiz:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le$$
$$\le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Bundan $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ tengsizlik kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlaymizki, Evklid fazosida yig'indi, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytma amallari uzluksizdir, ya'ni agar $x_n \to x$, $y_n \to y$ (norma bo'yicha yaqinlashish ma'nosida), $\alpha_n \to \alpha$ (sonli ketma-ketlik sifatida) bo'lsa, u holda

$$x_n + y_n \to x + y, \quad \alpha_n x_n \to \alpha x, \quad (x_n, y_n) \to (x,y).$$

Bu tasdiqlarning isboti quyidagicha:

$$\|(x_n + y_n) - (x+y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0, \ n \to \infty;$$

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \le \|(\alpha - \alpha_n) x_n\| + \|\alpha(x_n - x)\| =$$
$$= |\alpha - \alpha_n| \cdot \|x_n\| + |\alpha| \cdot \|x_n - x\| \to 0, \ n \to \infty;$$

$$|(x_n, y_n) - (x,y)| = |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x,y)| \le$$
$$\le |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \le \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0, \ n \to \infty.$$

Evklid fazolarida nafaqat vektorning normasini (ya'ni uzunligini), balki vektorlar orasidagi burchak tushunchasini ham kiritish mumkin. Noldan farqli x va y vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusi

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \tag{9.3}$$

formula bilan aniqlanadi. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra (9.3) ning o'ng tomoni moduli bo'yicha birdan oshmaydi va demak (9.3) formula haqiqatan ham, nolmas x va y vektorlar orasidagi φ, $0 \le \varphi \le \pi$ burchakni bir qiymatli aniqlaydi.

Agar $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda x va y vektorlar ortogonal deyiladi.

9.3-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\alpha \neq \beta$ da $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ bo'lsa, u holda nolmas $\{x_\alpha\}$ vektorlar sistemasiga ortogonal sistema deyiladi. Agar bu holda har bir elementning normasi birga teng bo'lsa, $\{x_\alpha\}$ ortogonal normalangan sistema, qisqacha ortonormal sistema deyiladi.*

Agar $\{x_\alpha\}$ vektorlar ortogonal sistemani tashkil qilsa, u holda $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'lanmagan bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$$

bo'lsin. Bu tenglikning ikkala qismini x_i ga skalyar ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$(x_i, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_i (x_i, x_i) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

$(x_i, x_i) \neq 0$ bo'lgani uchun, barcha $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ larda $\alpha_i = 0$ bo'ladi.

9.4-ta'rif. *Agar $\{x_\alpha\}$ sistemani o'zida saqlovchi minimal yopiq qism fazo E fazoning o'ziga teng bo'lsa, u holda $\{x_\alpha\}$ sistema to'la deyiladi.*

9.5-ta'rif. *Agar $\{x_\alpha\}$ ortonormal sistema to'la bo'lsa, u holda bu sistema E fazodagi ortonormal (ortogonal normalangan) bazis deyiladi.*

Ravshanki, agar $\{x_\alpha\}$ - ortogonal sistema bo'lsa, u holda

$$\left\{\|x_\alpha\|^{-1} \cdot x_\alpha\right\}$$

ortonormal sistema bo'ladi.

9.1-misol. $R^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \; x_i \in R\}$ - n o'lchamli Evklid fazosi. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Bu fazoda $\{e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, \ldots, 0)\}_{k=1}^{n}$ vektorlar sistemasi ortonormal bazisni tashkil qiladi.

9.2. Kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar fazosi, ya'ni ℓ_2 ni qaraymiz. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i .$$

ℓ_2 fazoda ortonormal bazis sifatida (5.8) tenglik bilan aniqlanuvchi $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektorlar sistemasini olish mumkin.

9.3. $C_2[a,b]$ fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{9.4}$$

Bu fazoda ortogonal (normalanmagan) bazisga

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{2\pi nt}{b-a},\ \sin\frac{2\pi nt}{b-a}, \quad n=1,2,\ldots$$

funksiyalardan tashkil topgan trigonometrik sistema misol bo'ladi.

9.4. $L_2[a,b]$ fazoda ham f va g elementlarning skalyar ko'paytmasi (9.4) tenglik bilan aniqlanadi.

9.6-ta'rif. *Agar E Evklid fazosining hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud bo'lsa, E separabel Evklid fazosi deyiladi.*

Yuqorida keltirilgan R^n, ℓ_2, $C_2[a,b]$ va $L_2[a,b]$ fazolar (2.3-2.6 misollarga qarang) separabel Evklid fazolariga misol bo'ladi. Har qanday separabel Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema ko'pi bilan sanoqlidir. Mustaqil isbotlang.

9.1-teorema. *(Ortogonallashtirish jarayoni). Bizga E Evklid fazosida chiziqli bog'lanmagan*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{9.5}$$

elementlar sistemasi berilgan bo'lsin. U holda E Evklid fazosida quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots \tag{9.6}$$

sistema mavjud:

1) *(9.6) ortonormal sistema.*

2) *Har bir ϕ_n element $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat, ya'ni*

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \cdots + a_{nn}f_n, \quad a_{nn} > 0;$$

3) *har bir* f_n *element*

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + b_{n2}\phi_2 + \cdots + b_{nn}\phi_n, \quad b_{nn} > 0$$

ko'rinishda tasvirlanadi.

4) *(9.6) sistemaning har bir elementi* 1-3 *shartlar bilan bir qiymatli aniqlanadi.*

Isbot. ϕ_1 element $a_{11}f_1$ ko'rinishda izlanadi va a_{11}

$$(\phi_1, \phi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1$$

shartdan aniqlanadi. Bu yerdan

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} = \frac{1}{\| f_1 \|} > 0.$$

Ko'rinib turibdiki, ϕ_1 bir qiymatli aniqlanadi. Faraz qilaylik, 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi ϕ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ elementlar qurilgan bo'lsin. Ushbu

$$\psi_n = f_n - (f_n, \phi_1)\phi_1 - (f_n, \phi_2)\phi_2 - \cdots - (f_n, \phi_{n-1})\phi_{n-1}$$

elementni kiritamiz. Ko'rinib turibdiki, agar $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ bo'lsa, $(\psi_n, \phi_k) = 0$ bo'ladi. $(\psi_n, \psi_n) = 0$ tenglik (9.5) sistemaning chiziqli erkli ekanligiga zid, shuning uchun $(\psi_n, \psi_n) > 0$. Endi

$$\phi_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}}$$

deymiz. ψ_n vektorning qurilishiga ko'ra u $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi va demak, ϕ_n ham ularning chiziqli kombinatsiyasi, ya'ni

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \cdots + a_{nn}f_n, \quad \text{bu yerda} \quad a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}} > 0$$

Bundan tashqari $(\phi_n, \phi_n) = 1$, $(\phi_n, \phi_k) = 0$, $(k < n)$ va

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + b_{n2}\phi_2 + \cdots + b_{nn}\phi_n, \quad b_{nn} = a_{nn}^{-1} = \sqrt{(\psi_n, \psi_n)} > 0,$$

ya'ni ϕ_n teorema shartlarini qanoatlantiradi. Δ

(9.5) sistemadan 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi (9.6) sistemaga o'tish ortogonallashtirish jarayoni deyiladi. Ko'rinib turibdiki, (9.5) va (9.6) sistemalardan hosil bo'lgan qism fazolar ustma-ust tushadi. Bundan kelib chiqadiki, bu sistemalar bir vaqtda to'la yoki to'la emas.

9.1-natija. *Har qanday separabel Evklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.*

Isbot. ϕ_n - E Evklid fazosining hamma yerida zich sanoqli to'plam bo'lsin. Undan chiziqli bog'langan elementlarni chiqarib tashlab, qolgan $\{f_n\}$ sistemaga ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, ortonormal bazisni hosil qilamiz. Δ

9.1. Bessel tengsizligi. Yopiq ortogonal sistema

Bizga n - o'lchamli E Evklid fazosi va uning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormal bazisi berilgan bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x \in E$ elementni

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \tag{9.7}$$

yoyilma ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $c_k = (x, e_k)$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Bu yoyilmani cheksiz o'lchamli Evklid fazolari uchun qanday umumlashtirish mumkinligini ko'rib chiqamiz. Bizga E Evklid fazosining

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots \tag{9.8}$$

ortonormal sistemasi va $f \in E$ ixtiyoriy elementi berilgan bo'lsin. f elementga

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots \tag{9.9}$$

sonlar ketma-ketligini mos qo'yamiz va c_k sonlarni f elementning koordinatalari yoki $\{\phi_n\}$ sistemadagi Fur'e koeffitsiyentlari deb ataymiz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \tag{9.10}$$

formal qatorni esa f elementning $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema bo'yicha Fur'e qatori deb ataymiz.

Quyidagicha savol tug'iladi. (9.10) qator yaqinlashuvchimi? Ya'ni qatorning qismiy yig'indilari ketma-ketligi

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k = f_n$$

biror elementga yaqinlashadimi? Agar $\{f_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (9.10) qatorning yig'indisi f ga teng bo'ladimi?

Bu savollarga javob berish uchun quyidagi masalani qaraymiz. Berilgan n natural son uchun $\alpha_k,\ k \in \{1,2,\dots,n\}$ koeffitsiyentlarni shunday tanlash kerakki, f va

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k \tag{9.11}$$

yig'indi orasidagi $\|f - S_n\|$ masofa minimal bo'lsin. Bu masofa kvadratini hisoblaymiz. (9.8) ortonormal sistema bo'lgani uchun

$$\|f - S_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k\right) = (f,f) - \left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k, f\right) +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j\right) = (f,f) - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (f,\phi_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 .$$

Bu ifoda

$$\alpha_k = c_k,\ \forall k \in \{1,2,\dots,n\} \tag{9.12}$$

bo'lgan holda minimumga erishadi. Bu holda

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 . \tag{9.13}$$

Biz isbotladikki, (9.11) ko'rinishdagi yig'indilar ichida f elementdan Fur'e qatorining

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$$

qismiy yig'indisi eng kam chetlanar ekan.

Bu tasdiqning geometrik ma'nosi shundan iboratki,

$$f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k$$

vektor $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ vektorlarning barcha chiziqli kombinatsiyalariga ortogonal, ya'ni $f - S_n$ element $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ vektorlardan hosil bo'lgan qism fazoga ortogonal bo'lishi uchun (9.12) shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

$\|f - S_n\|^2 \geq 0$ bo'lgani uchun (9.13) tenglikka ko'ra

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \| f \|^2 .$$

Bu tengsizlik ixtiyoriy $n \in N$ uchun o'rinli, shunday ekan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

qator yaqinlashuvchi va

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \| f \|^2 . \tag{9.14}$$

So'nggi (9.14) tengsizlik *Bessel tengsizligi* deyiladi.

9.7-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $f \in E$ uchun*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| f \|^2, \quad c_k = (f, \phi_k) \tag{9.15}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema yopiq sistema deyiladi. (9.15) tenglik Parseval tengligi deyiladi.

(9.13) tenglikdan kelib chiqadiki, $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemaning yopiq bo'lishi uchun, har bir $f \in E$ da

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$$

Fur'e qatorining qismiy yig'indilar ketma-ketligi f elementga yaqinlashishi kerak.

9.2-teorema. *Separabel Evklid fazosida har qanday to'la ortonormal sistema yopiq va aksincha.*

Isbot. E dan olingan ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistemani qaraymiz. Istalgan $f \in E$ uchun $c_k = (f, \phi_k)$, $k = 1,2,\ldots,n,\ldots$ Fur'e koeffitsiyentlarini olamiz. $\{\phi_n\}$ sistema to'la bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ songa ko'ra shunday $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k$ chekli yig'indi mavjud bo'lib,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k \right\|^2 < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. U holda $n \ge N$ bo'lganda

$$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \le \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{N} c_k^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k \right\|^2 \le \left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k \right\|^2 < \varepsilon .$$

Olingan bu munosabatlardan

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Parseval tengligi kelib chiqadi, ya'ni $\{\phi_n\}$ sistema yopiq ekan.

Endi $\{\phi_n\}$ - E dan olingan ixtiyoriy yopiq ortonormal sistema bo'lsin. $f \in E$ vektor qanday bo'lmasin, uning Fur'e qatori $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ ning qismiy yig'indilar ketma-ketligi f elementga yaqinlashadi, chunki

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k \right\|^2 = \lim_{n \to \infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \right) = 0 .$$

Shuning uchun $\{\phi_n\}$ - sistemaning barcha chekli kombinatsiyalari to'plami E ning hamma yerida zich bo'ladi. Ya'ni $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistema bo'ladi. Δ

9.5. $C_2[-\pi,\pi]$ separabel Evklid fazosida $\left\{\phi_n(t)=\pi^{-1/2}\sin nt\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistema ortonormal bo'ladimi? Agar $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema bo'lsa, u to'lami?

Yechish. Ma'lumki, $\left\{\pi^{-1/2}\sin nt\right\}$ trigonometrik sistema ortogonaldir. Endi $(\phi_n,\phi_n)=1$ tenglikni tekshiramiz.

$$(\phi_n,\phi_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nt\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nt)\,dt=\frac{1}{2\pi}(2\pi-0)=1.$$

Demak, $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema ekan. Endi uni to'lalikka tekshiramiz. 9.2-teoremaga ko'ra $\{\phi_n\}$ sistema to'la bo'lishi uchun uning yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir. $f_0(t)\equiv 1\in C_2[-\pi,\pi]$ uchun Parseval tengligi bajarilishini tekshiramiz. f_0 ning Fur'e koeffitsiyentlarini hisoblaymiz. Ma'lumki, toq funksiyaning $[-a,a]$ kesma bo'yicha olingan integrali nolga teng. Shuning uchun istalgan $n\in N$ da

$$c_n=(f_0,\phi_n)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt=0.$$

Bundan

$$2\pi=\|f_0\|^2>0=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$$

tengsizlik kelib chiqadi. Parseval tengligi bajarilmayapti, shuning uchun $\{\varphi_n\}$ sistema yopiq emas, demak, u to'la bo'lmagan ortonormal sistema ekan.

9.2. To'la Evklid fazolari. Riss-Fisher teoremasi

Bizni asosan to'la Evklid fazolari qiziqtiradi.

9.8-ta'rif. *E Evklid fazosi $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ normaga nisbatan to'la bo'lsa, u to'la Evklid fazosi deyiladi.*

9.6-misol. $C_2[a,b]$ to'la bo'lmagan separabel Evklid fazosi bo'ladi (3.8-misolga qarang).

9.7. ℓ_2 va $L_2[a,b]$ to'la separabel Evklid fazolariga misol bo'ladi (3.7 va 8.18-misollarga qarang).

E - to'la separabel Evklid fazosi va $\{\phi_n\}$ -undagi ortonormal sistema (to'la bo'lishi shart emas) bo'lsin. Bessel tengsizligidan kelib chiqadiki, $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ sonlar biror f elementning Fur'e koeffitsiyentlari bo'lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \tag{9.16}$$

qatorning yaqinlashishi zarur.

To'la Evklid fazolarida bu shart yetarli ham ekan.

9.3-teorema. *(Riss-Fisher).* $\{\phi_n\}$ - E *to'la Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema va* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *sonlar shunday bo'lsinki,* (9.16) *qator yaqinlashsin. U holda shunday* $f \in E$ *element mavjudki,*

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots \qquad va \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. E to'la Evklid fazosida $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k .$$

(9.16) qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n(\varepsilon) > 0$ mavjudki, barcha $n > n(\varepsilon)$ va $p \in N$ larda

$$\left\| f_{n+p} - f_n \right\|^2 = \left\| c_{n+1}\phi_{n+1} + \cdots + c_{n+p}\phi_{n+p} \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 < \varepsilon^2$$

tengsizlik o'rinli, ya'ni $\{f_n\}$ - fundamental ketma-ketlik. E ning to'laligiga ko'ra $\{f_n\}$ ketma-ketlik biror $f \in E$ elementga yaqinlashadi. Istalgan $i \in N$ uchun

$$(f,\phi_i)=(f_n,\phi_i)+(f-f_n,\phi_i), \tag{9.17}$$

tenglik o'rinli. (9.17) ning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi $n \ge i$ da c_i ga teng, ikkinchi qo'shiluvchi esa $n \to \infty$ da nolga intiladi, chunki

$$|(f-f_n,\phi_i)| \le \|f-f_n\| \cdot \|\phi_i\| = \|f-f_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

(9.17) tenglikning chap tomoni n ga bog'liq emas, shuning uchun $n \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$(f,\phi_i)=c_i.$$

f ning aniqlanishiga ko'ra,

$$\|f-f_n\|^2 = \left(f-\sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k, f-\sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k\right) = (f,f) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Shuning uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f,f) = \|f\|^2. \quad \Delta$$

Ortogonal sistemaning to'laligi haqida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

9.4-teorema. *To'la separabel Evklid fazosidagi $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema to'la bo'lishi uchun, E da $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lgan nolmas elementning mavjud bo'lmasligi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* Faraz qilaylik, $\{\phi_n\}$ to'la sistema bo'lsin, u holda 9.2-teoremaga ko'ra u yopiq ham bo'ladi. Agar f element $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lsa, u holda uning barcha Fur'e koeffitsiyentlari nolga teng, ya'ni $c_n = 0$ bo'ladi. U holda Parseval tengligiga ko'ra,

$$(f,f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 ,$$

ya'ni $f = \theta$.

Yetarliligi. Teskarisini faraz qilaylik, $\{\phi_n\}$ to'la bo'lmagan sistema bo'lsin, ya'ni E da shunday $g \neq \theta$ element mavjud bo'lib,

$$(g,g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \text{ bu yerda } c_k = (g, \phi_k)$$

tengsizlik bajarilsin. Riss-Fisher teoremasiga asosan, shunday $f \in E$ element mavjudki,

$$(f, \phi_k) = c_k, \quad (f,f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

tengliklar o'rinli. Bu holda $f - g$ element barcha ϕ_k larga ortogonal bo'ladi.

$$(f,f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g,g)$$

tengsizlikdan $f - g \neq \theta$ ekanligi kelib chiqadi. Δ

9.8-misol. $L_2[-\pi, \pi]$ Evklid fazosida $\{\psi_n(t) = \pi^{-1/2} \cos nt\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistema to'la bo'ladimi?

Yechish. $\{\psi_n\}$ larning barchasiga ortogonal bo'lgan $f_0(t) = 1$ nolmas element mavjud. Shuning uchun, 9.4-teoremaga ko'ra $\{\psi_n\}$ sistema to'la emas.

9.3. Evklid fazolarining xarakteristik xossalari

Quyidagicha savolni qaraymiz. R - normalangan fazo bo'lsin. R da aniqlangan norma qanday qo'shimcha shartlarni qanoatlantirsa, R Evklid fazosi ham bo'ladi? Boshqacha aytganda, qanday shartlarda norma orqali unga mos skalyar ko'paytma kiritish mumkin?

9.5-teorema. *R normalangan fazo Evklid fazosi bo'lishi uchun, ixtiyoriy ikkita $f, g \in R$ elementlar uchun*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \tag{9.18}$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* $f+g$ va $f-g$ tomonlari f va g vektorlardan iborat parallelogramm diagonallaridir. (9.18) tenglik Evklid fazosidagi parallelogramning ma'lum xossasini ifodalaydi, ya'ni parallelogramm diagonallari kvadratlarining yig'indisi barcha tomonlar kvadratlarining yig'indisiga teng.

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=(f+g,f+g)+(f-g,f-g)=$$
$$=2(f,f)+2(g,g)=2\|f\|^2+2\|g\|^2.$$

Yetarliligi. R normalangan fazoda normaning (9.18) ayniyatidan foydalanib, R da skalyar ko'paytma kiritish mumkinligini ko'rsatish kifoya. Ixtiyoriy $f,g\in R$ elementlar uchun

$$(f,g)=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right) \qquad (9.19)$$

[illegible]. Ko'rsatish mumkinki, agar (9.18) tenglik bajarilsa, (9.19) tenglik yordamida aniqlangan funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradi. ∎

[illegible] R_n^p – n o'lchamli vektor fazoni qaraymiz. Bu fazoda x elementning normasi quyidagicha aniqlanadi (8.3-misolga qarang):

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

[illegible] R_n^p normalangan fazo Evklid fazosi bo'ladi?

[illegible] R_n^p dan $f=(1,1,0,\dots,0)$ va $g=(1,-1,0,\dots,0)$ vektorlarni olamiz. U holda

$$f+g=(2,0,0,\dots,0), \qquad f-g=(0,2,0,\dots,0).$$

Endi (9.18) tenglikning bajarilishini tekshirib ko'ramiz:

$$\|f+g\|_p=(2^p)^{\frac{1}{p}}=2, \quad \|f-g\|_p=2, \quad \|f\|_p=\|g\|_p=2^{1/p},$$

$$2^2+2^2=2\cdot 2^{2/p}+2\cdot 2^{2/p}, \qquad 2=2^{2/p}.$$

So'nggi tenglik faqat $p=2$ da o'rinli. Demak, faqat $p=2$ da R_p^n normalangan fazo Evklid fazosi ham bo'ladi.

9.10. $C[0,\pi/2]$ fazoni qaraymiz. Ma'lumki, bu fazoda f elementning normasi quyidagicha aniqlanadi

$$\|f\|=\max_{0\le t\le\pi/2}|f(t)|. \tag{9.20}$$

Bu fazo Evklid fazosi bo'ladimi?

Yechish. $C[0,\pi/2]$ fazodan $f(t)=\cos t$, $g(t)=\sin t$ elementlarni olamiz. U holda $\|f\|=\|g\|=1$,

$$\|f+g\|=\max_{0\le t\le\pi/2}|\cos t+\sin t|=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2},$$

$$\|f-g\|=\max_{0\le t\le\pi/2}|\cos t-\sin t|=1.$$

Endi (9.18) tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

$$2+1=2(1+1),\quad 3\ne 4.$$

Demak, $C[0,\pi/2]$ fazo Evklid fazosi bo'la olmaydi. Boshqacha aytganda (9.20) tenglik bilan aniqlanuvchi normani biror bir skalyar ko'paytma yordamida berish mumkin emas.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Shunday funksionalga misol keltiringki, skalyar ko'paytmaning 1-sharti bajarilmasin.*

2. *Skalyar ko'paytmaning 1-sharti bajarilib, 2-4 shartlari bajarilmaydigan funksionalga misol keltiring.*

3. *To'la va to'la bo'lmagan Evklid fazolariga misollar keltiring.* ℓ_2 *va* $C_2[-1,1]$ *fazolarni tahlil qiling.*

4. R^3 *fazoda* $x=(1,1,1)$, $y=(1,1,0)$, $z=(1,0,0)$ *vektorlarni ortogonallashtiring.*

5. $C_2[a,b]$ *fazoda ortonormal sistemaga misol keltiring.*

6. $C_2[-1,1]$ fazoda $f(x)=1$ va $g(x)=x$ vektorlar orasidagi burchakni toping. Uni funksiya grafiklari orasidagi burchak bilan taqqoslang.

7. $\{f_n(t)=\cos(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemani $C_2[-1,1]$ fazoda ortogonallikka tekshiring. U ortonormal sistema bo'ladimi?

8. $\{g_n(t)=\sin(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistema $L_2[-1,1]$ fazoda yopiq sistema bo'ladimi?.

9. $L_2[-1,1]$ fazoda $f(x)=1$ va $g(x)=x$ vektorlarning $\{f_n(x)=\cos(n\pi x)\}$, $n\in N$ ortonormal sistemadagi Fur'e koeffitsiyentlarini toping.

10. $L_2[-1,1]$ separabel Evklid fazosida

$$2^{-1/2},\quad f_n(x)=\cos(n\pi x),\qquad g_n(x)=\sin(n\pi x),\qquad n\in N$$

ortonormal sistema to'la bo'ladimi?

11. ℓ_p chiziqli normalangan fazo $p\geq 1$ ning qanday qiymatlarida Evklid fazosi bo'ladi.

12. $L_p[a,b]$, $p\geq 1$ chiziqli normalangan fazo p ning qanday qiymatlarida Evklid fazosi bo'ladi.

10-§. Hilbert fazolari

To'la Evklid fazolarini qarashda davom etamiz. Bizni faqat cheksiz o'lchamli Evklid fazolari qiziqtiradi, chunki chekli o'lchamli Evklid fazolari R^n fazoga izomorfdir.

10.1-ta'rif. *Cheksiz o'lchamli to'la Evklid fazosi Hilbert fazosi deyiladi.*

Shunday qilib, ixtiyoriy tabiatli $f, g, \varphi, \ldots$ elementlarning H to'plami Hilbert fazosi bo'lsa, u quyidagi uchta shartni qanoatlantiradi:

1) H - Evklid fazosi, ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo;

2) $\rho(x,y)=\sqrt{(x-y,x-y)}$ metrika ma'nosida H - to'la fazo;

3) H fazo - cheksiz o'lchamli, ya'ni unda cheksiz elementli chiziqli erkli sistema mavjud.

Odatda separabel Hilbert fazolari qaraladi, ya'ni H ning h
yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud.

Bundan keyin biz faqat separabel Hilbert fazolarini qaraymiz.

10.1-misol. $C_2[a,b]$ Evklid fazosi to'la emas (3.8 va 9.6-miso
qarang), shuning uchun $C_2[a,b]$ Hilbert fazosi bo'la olmaydi.

10.2. ℓ_2 va $L_2[a,b]$ lar cheksiz o'lchamli to'la separabel E
fazolaridir (9.7-misolga qarang). Shuning uchun ular Hilbert fa
bo'ladi.

10.2-ta'rif. *Agar R va R^* Evklid fazolari o'rtasida o'zaro bir qiy
moslik o'rnatish mumkin bo'lib,*

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*, \quad x, y \in R, \quad x^*, y^* \in R^*$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \quad va \quad (x,y) = (x^*, y^*)$$

munosabatlar kelib chiqsa, R va R^* lar izomorf fazolar deyiladi.

Boshqacha aytganda, Evklid fazolarining izomorfligi shu
iboratki, bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'li
moslik shu fazolardagi chiziqli amallarni va ulardagi skalyar ko'payt
saqlaydi.

Ma'lumki, n - o'lchamli ixtiyoriy ikkita Evklid fazosi o
izomorfdir. Cheksiz o'lchamli Evklid fazolari o'zaro izomorf bo'lishi
emas. Masalan ℓ_2 va $C_2[a,b]$ fazolar izomorf emas, chunki ℓ_2
$C_2[a,b]$ esa to'la emas.

Quyidagi teorema o'rinli.

10.1-teorema. *Ixtiyoriy ikkita separabel Hilbert fazosi*
izomorfdir.

Isbot. Ixtiyoriy H Hilbert fazosini ℓ_2 fazoga izomorf
ko'rsatamiz. Agar shuni ko'rsatsak, teorema isbot bo'lgan bo'lad
Hilbert fazosidan ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistemani olam

$f \in H$ elementga uning Fur'e koeffitsiyentlari bo'lgan $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ ketma-ketlikni mos qo'yamiz. Bessel tengsizligiga ko'ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty .$$

Shuning uchun $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ ketma-ketlik ℓ_2 fazoning elementi bo'ladi. Teskarisi, Riss-Fisher teoremasiga ko'ra, ℓ_2 fazoning ixtiyoriy $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ elementiga (ketma-ketligiga) H fazoning yagona f elementi mos keladi va uning Fur'e koeffitsiyentlari bo'lib, $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ sonlar xizmat qiladi. O'rnatilgan bu moslik o'zaro bir qiymatlidir. Agar

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots) \quad \text{va} \quad g \leftrightarrow (d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$$

bo'lsa, u holda

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n, \ldots)$$

va

$$\alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, \ldots, \alpha c_n, \ldots).$$

Va nihoyat, Parseval tengligidan

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = (c, d)$$

ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \qquad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \tag{10.1}$$

va

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 .$$

Bu yerdan va (10.1) dan

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = (c, d).$$

Shunday qilib, biz o'rnatgan moslik izomorfizm ekan, ya'ni bu moslik chiziqli amallarni va skalyar ko'paytmani saqlaydi. Δ

Isbotlangan teoremadan shunday xulosa kelib chiqadiki, izomorfizm aniqligida faqat ℓ_2 Hilbert fazosi mavjud ekan. Boshqacha aytganda, ℓ_2 fazo H Hilbert fazosining «koordinat ko'rinishi» desak bo'ladi.

H Hilbert fazosining qism fazosi deganda yopiq qism fazoni tushunamiz. Hilbert fazosining qism fazolariga misollar keltiramiz.

10.3-misol. $h \in H$ - ixtiyoriy element bo'lsin. h ga ortogonal bo'lgan barcha $f \in H$ elementlar to'plami qism fazo tashkil qiladi.

10.4. ℓ_2 fazoda $x_1 = x_2$ shartni qanoatlantiruvchi elementlar to'plami qism fazo tashkil qiladi.

10.5. ℓ_2 fazoning $M = \{x \in \ell_2 : x = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots, 0, x_{2n-1}, 0, \ldots)\}$ to'plami uning qism fazosi bo'ladi.

Hilbert fazosining har qanday qism fazosi yo chekli o'lchamli Evklid fazosi bo'ladi, yo uning o'zi Hilbert fazosini tashkil qiladi.

10.6. $L_2[-1,1]$ separabel Hilbert fazosida toq funksiyalardan iborat $L_2^-[-1,1] = \{f \in L_2[-1,1] : f(-t) = -f(t)\}$ to'plam qism fazo tashkil qiladi.

10.7. $L_2[-1,1]$ separabel Hilbert fazosida quyidagi to'plam $L_0^-[-1,1] = \{f \in L_2[-1,1] : f(t) \equiv 0, t \in [-1,0]\}$ qism fazo tashkil qiladi.

Agar H Hilbert fazosi separabel bo'lsa, uning ixtiyoriy qismi ham separabel bo'ladi. Bu quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

10.1-lemma. *R separabel Evklid fazosining har qanday R' qismi yana separabeldir.*

Hilbert fazosining qism fazolari ayrim maxsus xossalarga egaki, ixtiyoriy normalangan fazoning qism fazolari bu xossalarga ega emas. Bu xossalar Hilbert fazosida kiritilgan skalyar ko'paytma va unga mos ortogonallik tushunchasiga asoslangan.

H separabel Hilbert fazosining M qism fazosi berilgan bo'lsin. Bu qism fazoning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli sistema olamiz va unga ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

10.2-teorema. *H separabel Hilbert fazosining ixtiyoriy M qism fazosida shunday $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema mavjudki, uning chiziqli qobig'ining yopig'i M ga teng.*

Bizga H Hilbert fazosining M - qism fazosi berilgan bo'lsin. Barcha $f \in M$ elementlarga ortogonal bo'lgan $g \in H$ elementlar to'plamini $M^{\perp} = H \ominus M$ orqali belgilaymiz, ya'ni

$$M^{\perp} = \{g \in H : (f, g) = 0, \ \forall f \in M\}.$$

$M^{\perp}$ ham H ning qism fazosi ekanligini isbotlaymiz. Bu to'plamning qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiqligini ko'rsatamiz. Agar $g_1, g_2 \in M^{\perp}$ bo'lsa, u holda

$$(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = \alpha_1 (g_1, f) + \alpha_2 (g_2, f) = 0.$$

Endi $M^{\perp}$ to'plamning yopiqligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $\{g_n\} \subset M^{\perp}$ elementlar ketma-ketligi $g \in H$ elementga yaqinlashsin. U holda skalyar ko'paytmaning uzluksizligiga ko'ra, istalgan $f \in M$ uchun

$$(g, f) = \lim_{n \to \infty} (g_n, f) = 0.$$

Demak, $g \in M^{\perp}$, ya'ni $M^{\perp}$ yopiq qism fazo bo'lar ekan. $M^{\perp}$ qism fazo M qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi deyiladi.

10.3-teorema. *Agar M - H Hilbert fazosining yopiq qism fazosi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f \in H$ element yagona usul bilan $f = h + h'$ yig'indiga yoyiladi, bu yerda $h \in M$, $h' \in M^{\perp}$.*

Isbot. Avvalo, bu yoyilmaning mavjudligini isbotlaymiz. Buning uchun M da $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistema olamiz va

$$h=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n,\quad c_n=(f,\phi_n)$$

deymiz. Bessel tengsizligiga ko'ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $h\in M$. Endi $h'=f-h$ deb olamiz. Ko'rinib turibdiki, ixtiyoriy $n\in N$ uchun

$$(h',\phi_n)=(f,\phi_n)-(h,\phi_n)=c_n-c_n=0\,.$$

Ixtiyoriy $\xi\in M$ element uchun

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n \quad \text{va} \quad (h',\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(h',\phi_n)=0\,,$$

ya'ni $h'\in M^{\perp}$.

Endi yoyilmaning yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, boshqa bir $f=h_1+h_1'$, $h_1\in M$, $h_1'\in M^{\perp}$ yoyilma mavjud bo'lsin. U holda ixtiyoriy $n\in N$ uchun

$$(h_1,\phi_n)=(f,\phi_n)=c_n\,.$$

Bu yerdan kelib chiqadiki $h_1=h$, $h_1'=h'$. Δ

10.1-natija. *$M\subset H$ qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisining ortogonal to'ldiruvchisi M ning o'ziga teng, ya'ni* $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}=M$.

Shunday qilib, H fazoning o'zaro to'ldiruvchi qism fazolari haqida fikr yuritish mumkin. Agar M va $M^{\perp}$ ikkita shunday bir-birini to'ldiruvchi qism fazolar va $\{\phi_n\}$, $\{\phi_n'\}$ - mos ravishda M va $M^{\perp}$ dagi to'la ortonormal sistema bo'lsa, u holda $\{\phi_n\}$ va $\{\phi_n'\}$ sistemalarning birlashmasi butun H fazoda to'la ortonormal sistema bo'ladi.

10.2-natija. *H fazodagi har qanday ortonormal sistemani to'la sistemagacha to'ldirish mumkin.*

Agar $\{\phi_n\}$ sistema chekli bo'lsa, u holda bu sistemaga kiruvchi elementlar soni $\{\phi_n\}$ sistemadan hosil qilingan M qism fazoning o'lchamiga va $M^{\perp}$ qism fazoning koo'lchamiga teng. Shunday qilib, quyidagiga egamiz.

10.3-natija. *n o'lchamli qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi n koo'lchamga ega va aksincha.*

10.3-ta'rif. *Agar H Hilbert fazosining ixtiyoriy $f \in H$ elementi*

$$f = h_1 + h_2, \quad h_1 \in M_1, \ h_2 \in M_2$$

ko'rinishda tasvirlansa, u holda H fazo o'zaro ortogonal M_1 va M_2 qism fazolarning to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi va

$$H = M_1 \oplus M_2$$

ko'rinishda yoziladi.

To'g'ri yig'indini chekli yoki sanoqli sondagi qism fazolar uchun ham umumlashtirish mumkin. Agar quyidagi shartlar bajarilsa H o'zining $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ qism fazolarining to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi:

a) M_i qism fazolar juft-jufti bilan o'zaro ortogonal, ya'ni M_i dagi ixtiyoriy vektor M_k dagi barcha vektorlarga ortogonal, $i \neq k$;

b) ixtiyoriy $f \in H$ element

$$f = h_1 + h_2 + \cdots + h_n + \cdots, \quad h_n \in M_n, \ n = 1, 2, \ldots \qquad (10.2)$$

ko'rinishda tasvirlanadi, agar qo'shiluvchilar soni cheksiz bo'lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| h_n \|^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda $H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_n$ ko'rinishda yoziladi.

Osongina ko'rsatish mumkinki, agar f uchun (10.2) yoyilma mavjud bo'lsa, u yagona va quyidagi tenglik o'rinli:

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|^2 .$$

Qism fazolarning to'g'ri yig'indisi bilan bir qatorda chekli yoki sanoqli sondagi Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi haqida ham gapirish mumkin. Agar H_1 va H_2 lar ixtiyoriy Hilbert fazolari bo'lsa, u holda ularning to'g'ri yig'indisi $H=H_1\oplus H_2$ quyidagicha aniqlanadi. H fazoning elementlari barcha (h_1,h_2), $h_1\in H_1$, $h_2\in H_2$ juftliklardan iborat. $H=H_1\oplus H_2$ fazoda qo'shish, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytma amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$(h_1,h_2)+(h_1',h_2')=(h_1+h_1',h_2+h_2'),\ h_1,h_1'\in H_1,\ h_2,h_2'\in H_2,$$

$$\alpha(h_1,h_2)=(\alpha h_1,\alpha h_2),\ h_1\in H_1,\ h_2\in H_2,\alpha\in C$$

$$((h_1,h_2),(h_1',h_2'))=(h_1,h_1')_{H_1}+(h_2,h_2')_{H_2},\ h_1,h_1'\in H_1,\ h_2,h_2'\in H_2 .$$

Chekli sondagi $H_1,H_2,\ldots,H_n$ Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi ham xuddi shunday aniqlanadi.

Sanoqli sondagi $H_1,H_2,\ldots,H_n,\ldots$ Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi

$$H=\sum_{n=1}^{\infty}\oplus H_n$$

quyidagicha aniqlanadi

$$H=\left\{h=(h_1,h_2,\ldots,h_n,\ldots),\ h_n\in H_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|^2<\infty\right\}.$$

H fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(h,g)=\sum_{n=1}^{\infty}(h_n,g_n),\ h=(h_1,h_2,\ldots,h_n,\ldots),\ g=(g_1,g_2,\ldots,g_n,\ldots),\ h_n,g_n\in H_n.$$

10.8. 10.6-misolda keltirilgan $L_2^-[-1,1]$ (toq funksiyalar to'plami) qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisini toping.

Yechish. $L_2^+[-1,1]=\{f\in L_2[-1,1]: f(-t)=f(t)\}$ juft funksiyalardan iborat to'plam $L_2[-1,1]$ fazoning qism fazosi bo'ladi va $L_2^-[-1,1]\perp L_2^+[-1,1]$. Haqiqatan ham,

$$\left(f^-,f^+\right)=\int_{-1}^{1}f^-(t)\cdot f^+(t)\,dt=0,\ \ \forall f^-\in L_2^-[-1,1],\ \ \forall f^+\in L_2^+[-1,1].$$

Bu yerdan $\left(L_2^-[-1,1]\right)^{\perp}\supset L_2^+[-1,1]$ va $\left(L_2^-[-1,1]\right)^{\perp}\subset L_2^+[-1,1]$ munosabatlar kelib chiqadi. Bulardan esa $\left(L_2^-[-1,1]\right)^{\perp}=L_2^+[-1,1]$ tenglikni olamiz.

10.1. Kompleks Evklid fazolari

Haqiqiy Evklid fazolari bilan bir qatorda kompleks Evklid fazolari ham qaraladi (ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan kompleks chiziqli fazo). Lekin haqiqiy Evklid fazolaridagi skalyar ko'paytmaning 1-4 aksiomalari kompleks Evklid fazolari uchun bir vaqtda bajarilmaydi. Haqiqiy Evklid fazolarida skalyar ko'paytmaning 1-4 aksiomalari quyidagicha edi:

1) $(x,x)\geq 0,\ \forall x\in E;\ (x,x)=0\Leftrightarrow x=\theta,$

2) $(x,y)=(y,x),\ \ \forall x,y\in E,$

3) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y),\ \forall\lambda\in R,\ \forall x,y\in E,$

4) $(x_1+x_2,\ y)=(x_1,y)+(x_2,y),\ \ \forall x_1,x_2,\ y\in E.$

Biz 2 va 3 dan quyidagiga ega bo'lamiz

$$(\lambda x,\lambda x)=\lambda(x,\lambda x)=\lambda(\lambda x,\ x)=\lambda^2(x,x).$$

Agar λ kompleks son bo'lsa, u holda $\lambda=i$ bo'lganda, $(ix,ix)=-(x,x)$, ya'ni x va ix vektorlarning skalyar ko'paytmasi bir vaqtda musbat bo'la olmaydi, bu esa 1-shartga zid, ya'ni kompleks chiziqli fazolar holida 1, 2 va 3-shartlar bir vaqtda bajarilishi mumkin emas. Demak, kompleks chiziqli fazolarda skalyar ko'paytmaning shartlarini biroz o'zgartirish kerak.

Kompleks chiziqli fazoda skalyar ko'paytmaning shartlarini keltiramiz:

1) $(x,x)\geq 0,\ \forall x\in E;\ (x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta,$

2) $(x,y)=\overline{(y,x)},\ \forall x,y\in E,$

3) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y),\ \forall\lambda\in C,\ \forall x,y\in E,$

4) $(x_1+x_2,\ y)=(x_1,y)+(x_2,y),\ \forall x_1,x_2,\ y\in E.$

2 va 3 dan $(x,\lambda y)=\overline{\lambda}(x,y)$ kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$(x,\lambda y)=\overline{(\lambda y,x)}=\overline{\lambda(y,x)}=\overline{\lambda}\ \overline{(y,x)}=\overline{\lambda}\ (x,y).$$

10.9-misol. $E=C^n$ - kompleks chiziqli fazo. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}.$$

10.10. $\ell_2=\left\{x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots),\ x_n\in C:\ \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\right\}$ kompleks chiziqli fazo. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k}.$$

10.11. $E=C_2[a,b]$ - $[a,b]$ kesmada aniqlangan kompleks qiymatli uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt. \qquad (10.3)$$

10.12. $E=L_2[a,b]$ - $[a,b]$ kesmada aniqlangan kompleks qiymatli va kvadrati bilan integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar sinfi. Bu fazoda ham f va g elementlarning skalyar ko'paytmasi (10.3) tenglik bilan aniqlanadi.

Kompleks Evklid fazolarida ham elementning normasi xuddi haqiqiy Evklid fazolari holidagidek

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}\quad \text{yoki}\quad \|x\|=\sqrt{(x,x)}$$

formula bilan aniqlanadi.

Kompleks Evklid fazolarida ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi kiritilmaydi, lekin vektorlarning ortogonallik tushunchasi saqlanib qoladi. Ya'ni, agar $(x,y)=0$ bo'lsa, u holda x va y vektorlar o'zaro ortogonal deyiladi.

10.4-ta'rif. *Agar*

$$(\phi_n,\phi_m)=\begin{cases}1, & agar\ n=m\\ 0, & agar\ n\neq m.\end{cases}$$

bo'lsa, nolmas $\{\phi_n\}\subset E$ sistema ortogonal normalangan sistema deyiladi.

Xuddi haqiqiy Evklid fazolaridagi kabi, $c_n=(f,\phi_n)$, $n\in N$ sonlar $f\in E$ vektorning $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemadagi Fur'e koeffitsiyentlari deyiladi.

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n$$

qator f vektorning $\{\phi_n\}$ sistemadagi Fur'e qatori deyiladi. Bu yerda ham Bessel tengsizligi o'rinli:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\leq\|f\|^2.$$

Kompleks Evklid fazolari holida ham Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi o'z kuchini saqlaydi:

$$|(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|.$$

10.5-ta'rif. *Cheksiz o'lchamli to'la kompleks Evklid fazosi kompleks Hilbert fazosi deyiladi.*

Kompleks Hilbert fazolari uchun ham izomorfizm haqidagi teorema o'rinli.

10.4-teorema. *Barcha separabel kompleks Hilbert fazolari o'zaro izomorfdir.*

10.13. ℓ_2 va $L_2[a,b]$ lar separabel kompleks Hilbert fazolariga misol bo'ladi.

10.14. $L_2[-\pi,\pi]$ separabel kompleks Hilbert fazosida

$$\varphi_n(t)=\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}},\quad n\in Z$$

sistema to'la ortonormal sistema bo'ladi. Mustaqil isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Hilbert fazolariga misollar keltiring.* ℓ_2 *fazo Hilbert fazosi bo'ladimi?*
2. *Separabel bo'lmagan Evklid fazosiga misol keltiring.*
3. *m - chegaralangan ketma-ketliklar fazosida*

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x_n y_n$$

funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradimi? m separabel Evklid fazosi bo'ladimi?

4. ℓ_2 *fazoni ikkita ortogonal qism fazolarning to'g'ri yig'indisi shaklida yozing.*
5. $L_2[-1,1]$ *Hilbert fazosida* $L_2^+[-1,1]=\{f\in L_2[-1,1]: f(-t)=f(t)\}$ *juft funksiyalar to'plami qism fazo bo'lishini ko'rsating. Uning ortogonal to'ldiruvchisini toping.*
6. *10.7-misolda keltirilgan* $L_0^-[-1,1]$ *qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisini toping.*
7. *Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisida skalyar ko'paytma qanday kiritiladi?*
8. ℓ_2 *va* $L_2[-1,1]$ *Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisida skalyar ko'paytma qanday kiritiladi?*
9. *Quyidagi* $((x,f),(y,g))=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}+\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}\,dx,\ x,y\in\ell_2,\ f,g\in L_2[-1,1]$

funksional $\ell_2\oplus L_2[-1,1]$ *Hilbert fazosida skalyar ko'paytma bo'ladimi?*

II bobni takrorlash uchun test savollari

1. Darajasi 100 dan oshmaydigan ko'phadlar fazosining o'lchamini toping.

   A) 100 B) 101 C) 50 D) 200

2. Uch satr va uch ustundan iborat matritsalar fazosining o'lchamini toping.

   A) 3 B) 6 C) 9 D) 27

3. Chekli o'lchamli chiziqli fazolar ko'rsatilgan javobni toping.

   A) $C[a,b]$, ℓ_2 B) $C_2[a,b]$, c_0 C) C^n, R^3 D) C^n, $L_2[a,b]$

4. Cheksiz o'lchamli chiziqli fazolar ko'rsatilgan javobni toping.

   A) R^n, $C[a,b]$, ℓ_2 B) $C[a,b]$, ℓ_2, c_0 C) C^n, c, m D) C^n, $L_2[a,b]$, ℓ_p

5. $C[0,1]$ fazoda chiziqli bog'langan vektorlar sistemasini toping.

   A) $1, t, t^2$ B) t^2, t^3, t^5 C) $1+t^2$, $2t$, $(1-t)^2$ D) $1, t^2, t^4$

6. $f: R^3 \to R$, $f(x) = x_1$ chiziqli funksionalning yadrosini toping.

   A) $\{x \in R^3 : x_1 = x_2 = 0\}$ B) $\{x \in R^3 : x_1 = 0\}$

   C) $\{x \in R^3 : x_2 = 0\}$ D) $\{x \in R^3 : x_3 = 0\}$

7. $L' = \{x \in R^5 : x_1 = x_5 = 0\}$ qism fazoning koo'lchamini toping.

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

8. Faktor fazoda elementning normasi qanday aniqlanadi?

   A) $\|\xi\| = \sup\limits_{x \in \xi} \|x\|$ B) $\|\xi\| = \inf\limits_{x \in \xi} \|x\|$ C) $\|\xi\| = \|x\|$ D) $\|\xi\| = \sup\limits_{y \in L'} \|x - y\|$

9. $C[0,1]$ fazoda aniqlangan chiziqli bo'lmagan funksionalni toping.

   A) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt$ B) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)e^t\,dt$ C) $f(x) = x(0) + x(1)$ D) $f(x) = |x(0)|$

10. $C[a,b]$ fazoda aniqlangan qavariq funksionalni toping.

    A) $f(x) = \int\limits_a^b x(t)\,dt$ B) $f(x) = \int\limits_a^b x(t)e^t\,dt$ C) $f(x) = x(a) + x(b)$ D) $f(x) = \left|\int\limits_a^b x(t)\,dt\right|$

11. Tekislikda qavariq bo'lmagan to'plamni toping.

A) uchburchak B) kvadrat C) trapetsiya D) besh yulduz

12. Tekislikda keltirilgan quyidagi to'plamlardan qaysi biri qavariq to'plam bo'ladi, ammo qavariq jism bo'lmaydi.

A) uchburchak B) kvadrat C) doira D) kesma

13. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[a,b]$ fazoning qism fazosi bo'ladi?

A) Monoton o'suvchi funksiyalar B) Manfiymas funksiyalar

C) Monoton kamayuvchi funksiyalar D) Barcha ko'phadlar

14. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) ℓ_1 fazo ℓ_2 fazoning qism fazosi bo'ladi

B) c_0 fazo c fazoning qism fazosi bo'ladi.

C) ℓ_2 fazo c_0 fazoning qism fazosi bo'ladi

D) m fazo c fazoning qism fazosi bo'ladi.

15. To'la bo'lmagan normalangan fazoni toping.

A) $C_1[a,b]$ B) ℓ_2 C) R^n D) $C[a.b]$

16. E normalangan fazo. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) E dagi ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchidir

B) Agar $x_n \to x$, $y_n \to y$ bo'lsa, u holda $x_n + y_n \to x + y$

C) $x, y \in E$ uchun $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ tengsizlik o'rinli

D) $x_n \to x$ va $\lambda_n \to \lambda$ bo'lsa, u holda $\lambda_n x_n \to \lambda x$

17. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysilari $C_1[0,1]$ fazoda nol funksiyaga yaqinlashadi.

1) $x_n(t) = \dfrac{t}{1+n^2t^2}$, 2) $x_n(t) = t\,e^{-nt}$, 3) $x_n(t) = t^n$.

A) 1, 2 B) 1, 2, 3 C) 1, 3 D) 2, 3

18. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysilari $C[0,1]$ fazoda fundamental?

1) $x_n(t)=\frac{nt}{1+n^2t^2}$, 2) $x_n(t)=te^{-nt}$, 3) $x_n(t)=t^n$

A) 1, 2 B) 1, 2, 3 C) 1, 3 D) 2

19. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[-1,1]$ fazoda qism fazo tashkil qilmaydi?

A) Barcha ko'phadlar to'plami

B) $x(-1)=0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami

C) Monoton funksiyalar to'plami

D) Uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami

20. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[-1,1]$ fazoda qism fazo tashkil qilmaydi?

A) Darajasi 100 dan oshmaydigan ko'phadlar to'plami

B) $x(1)=1$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami

C) Toq funksiyalar to'plami

D) Juft funksiyalar to'plami

21. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[-1,1]$ fazoda qism fazo tashkil qiladi?

A) Monoton o'suvchi funksiyalar

B) Monoton kamayuvchi funksiyalar

C) $\{x\in C[-1,1]:\ \int_{-1}^{1}x(t)\,dt=0\}$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar

D) Darajasi 2 bo'lgan ko'phadlar

22. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) Chiziqli bog'lanmagan sistemaning biror qism sistemasi chiziqli bo'glangan bo'ladi.

B) Chiziqli bog'lanmagan sistemaning ixtiyoriy qism sistemasi ham chiziqli bo'glanmagan bo'ladi.

C) Agar sistemaning biror qism sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, berilgan sistema ham chiziqli bo'g'langan bo'ladi.

D) Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, bu vektorlardan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi.

23. E - chiziqli fazo, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ bo'lsin. Chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasining ta'rifini ko'rsating.

A) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

B) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

C) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$

D) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$

24. $f_0 : V_0[a,b] \to R, \ f_0(x) = x(b)$ funksionalning davomini toping.

A) $f(x) = x(a) - 2x(b), x \in V[a;b]$ B) $f(x) = x(a) + x(b), x \in V[a;b]$

C) $f(x) = x(a) + 2x(b), x \in V[a;b]$ D) $f(x) = x(a) - x(b), x \in V[a;b]$

25. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) n-o'lchamli chiziqli fazoda ixtiyoriy n ta chiziqli bog'lanmagan vektorlardan iborat sistema bazis bo'ladi.

B) $\{e_k = (\underbrace{0,0,\ldots,1}_{k},0,\ldots,0)\}_{k=1}^{n}$ vektorlar sistemasi R^n fazoda bazis bo'ladi.

C) n - o'lchamli chiziqli fazoda ixtiyoriy n ta vektordan iborat sistema bazis bo'ladi.

D) R^3 fazoda ixtiyoriy to'rtta vektor chiziqli bog'langandir.

26. Chiziqli bog'langan sistemani toping.

A) $x(t) = \sin^2 2t; \ y(t) = \cos^2 2t; \ z(t) = 1 \in C[0, \pi]$

B) $x = (0,1); \ y = (1,0) \in R^2$

C) $x = (1,1,1); \ y = (0,1,1); \ z = (0,0,1) \in R^3$

D) $x(t) = 1; \ y(t) = t \in C[0,1]$

27. Chiziqli bog'lanmagan sistemani toping.

A) $x(t) = t; \ y(t) = \lg(1+t); \ z(t) = 1 \in C[0,1]$

B) $x = (0,1); \ y = (2,1); \ z = (1,1) \in R^2$

C) $x=(0,1,1);\ y=(1,0,0);\ z=(0,2,2)\in R^3$

D) $x(t)=\sin^2 2t;\ y(t)=\cos^2 2t;\ z(t)=\cos 4t\in C[0,\pi]$

28. Quyidagi formulalar yordamida berilgan funksionallardan qaysi biri ko'rsatilgan fazoda skalyar ko'paytma aniqlaydi?

A) $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 y_k,\ x,y\in \ell_2$ B) $(x,y)=x_1y_2+x_2y_1,\ x,y\in R^2$

C) $(x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k,\ x,y\in C^n$ D) $(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt,\ \ x,y\in C[a,b]$

29. Qanday fazo Banax fazosi deyiladi?

A) Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo

B) Har qanday normalangan fazo.

C) To'la normalangan fazo

D) Istalgan metrik fazo.

30. Qanday fazo Evklid fazosi deyiladi?

A) Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo

B) Har qanday normalangan fazo

C) To'la normalangan fazo

D) Istalgan metrik fazo.

31. Evklid fazolari keltirilgan javobni toping.

A) $R^n, C[a,b], \ell_2$ B) $R^n, C_2[a,b], \ell_2$ C) $C^n, C_2[a,b], \ell_1$ D) $C^n, C_2[a,b], \ell_p$

32. Hilbert fazolari keltirilgan javobni toping.

A) $C_2[a,b],\ \ell_2$ B) $L_2[a,b],\ \ell_2$ C) $C^n, C_2[a,b]$ D) $C^n,\ \ell_2$

33. $L_2[a,b]$ kompleks Hilbert fazosidagi skalyar ko'paytmani ko'rsating.

A) $(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,e^{n}dt$ B) $(x,y)=\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$

C) $(x,y)=\int_a^b |x(t)y(t)|dt$ D) $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$

34. $C_2[a,b]$ haqiqiy Evklid fazosidagi skalyar ko'paytmani ko'rsating.

A) $(x,y)=\int_a^b x(t)\,y(t)\,e^{t}dt$ B) $(x,y)=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt$

C) $(x,y)=\int_a^b |x(t)y(t)|dt$ D) $(x,y)=x(a)y(a)+x(b)y(b)$

35. Haqiqiy Evklid fazosida nolga teng bo'lmagan x va y vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusi qanday formula bilan aniqlanadi?

A) $\cos\varphi=\dfrac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$ B) $\cos\varphi=\dfrac{(x,x)-(y,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$

C) $\cos\varphi=\dfrac{\|x\|+\|y\|}{\|x\|\cdot\|y\|}$ D) $\cos\varphi=\dfrac{\|x+y\|}{\|x\|\cdot\|y\|}$

36. Evklid fazosida Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini toping.

A) $|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|$ B) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

C) $\|x+y\|^2\le\|x\|^2+\|y\|^2$ D) $\|x+y\|+\|x-y\|\le 2(\|x\|+\|y\|)$

37. E normalangan fazo Evklid fazosi bo'lishi uchun quyidagi shartlardan qaysi birining bajarilishi zarur va yetarli?

A) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ B) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

C) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ D) $\|x+y\|+\|x-y\|\le 2(\|x\|+\|y\|)$

38. To'la bo'lmagan separabel Evklid fazosini toping.

A) R^n B) $C_2[a,b]$ C) C^n D) ℓ_2

39. R Evklid fazosidagi $\{x_n\}$ sistema uchun quyidagi shartlarning qaysi biri bajarilganda u R da ortonormal bazis deyiladi?

A) Agar $(x_n,x_m)=\begin{cases}1, & agar\ \ n=m\\ 0, & agar\ \ n\ne m\end{cases}$ bo'lsa.

B) Agar $\{x_n\}$ ortonormal sistema bo'lib, u R da to'la bo'lsa.

C) Agar $\{x_n\}$ sistemani saqlovchi minimal yopiq qism fazo R ning xos qismi bo'lsa.

D) $\{x_n\}$ sistema chiziqli bog'lanmagan bo'lib, $\|x_n\|=1$ bo'lsa.

40. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) Har qanday Evklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.

B) Evklid fazosida yig'indi va songa ko'paytirish amallari uzluksizdir.

C) Evklid fazosida skalyar ko'paytma amali uzluksizdir.

D) Har qanday separabel Evklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.

41. R to'la haqiqiy Evklid fazosi, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ undagi ortonormal sistema va $f \in R$, $c_k = (f, \varphi_k)$ bo'lsin. Quyidagi shartlarning qaysi biri bajarilganda berilgan sistema yopiq deyiladi?

A) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2, \ \forall f \in R$ B) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \ \forall f \in R$

C) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \geq \|f\|^2, \ \forall f \in R$ D) $\left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$

42. Quyidagi tasdiqlarning qaysi biri to'g'ri?

A) Separabel Evklid fazosida har qanday to'la ortonormal sistema yopiq va aksincha.

B) Separabel Evklid fazosida har qanday ortonormal sistema to'ladir.

C) Separabel Evklid fazosida har qanday ortonormal sistema yopiqdir.

D) To'la Evklid fazosida har qanday ortonormal sistema yopiqdir.

43. $C[-1,1]$ Evklid fazosida $f(x) = 1$ funksiyaning $\{\varphi_n(t) = \sin n\pi t\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemadagi Fur'e koeffitsiyentlarini toping.

A) $c_n = 0, n \in N$ B) $c_n = n^{-1}, n \in N$

C) $c_n = (-1)^n / n, n \in N$ D) $c_n = n^{-2}, n \in N$

44. $L_2[-\pi, \pi]$ kompleks Evklid fazosida to'la ortonormal sistemani toping.

A) $\{(2\pi)^{-1/2} \exp\{int\}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ B) $\{\pi^{-1/2} \cos nt\}_{n=1}^{\infty}$

C) $\{\pi^{-1/2} \sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ D) $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$

45. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o'rinli?

A) Har qanday ikki separabel Hilbert fazolari o'zaro izomorfdir.

B) Har qanday ikki Evklid fazolari o'zaro izomorfdir.

C) Har qanday ikki Hilbert fazolari o'zaro izomorfdir.

D) Har qanday ikki separabel Evklid fazolari o'zaro izomorfdir.

46. Quyidagilar ichidan skalyar ko'paytma shartlarini ajrating.

1) $(x+z,y)=(x,y)+(z,y)$, 2) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ 3) $(x,z)\le(x,y)+(y,z)$

4) $(x,y)=(y,x)$ 5) $(x,x)\ge 0,\ (x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

A) 1, 3, 4, 5 B) 1, 2, 4, 5 C) 1, 3, 5 D) 2, 3, 4, 5

47. Qaysi javobda Evklid fazosidagi norma to'g'ri keltirilgan.

A) $\|x\|=(x,x)^{1/2}$ B) $\|x+y\|=|(x,y)|$ C) $\|x\|=(x,x)$ D) $\|x-y\|=|(x,y)|$

48. Quyidagilardan qaysilari $C[a,b]$ kompleks chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlaydi?

1) $(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$ 2) $(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,e^t dt$ 3) $(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)\,dt$

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1, 2 D) 1, 2, 3

49. Evklid fazosida noldan farqli x va y elementlar qanday shartda ortogonal elementlar deyiladi?

A) $(x,y)=0$ B) $(x,x)=(y,y)=1$ C) $\|x-y\|=0$ D) $(x,y)=\sqrt{(x,x)}\,(y,y)$

50. Evklid fazosida noldan farqli $\{x_\alpha\}$ elementlar sistemasi uchun .... bo'lsa, u ortogonal sistema deyiladi?

A) ixtiyoriy $\alpha\ne\beta$ da $(x_\alpha,x_\beta)=0$ B) $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'lanmagan

C) ixtiyoriy α da $(x_\alpha,x_\alpha)=1$ D) $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'langan

III bob. Chiziqli operatorlar

Bu bob 6 paragrafdan (11-16-§§ lardan) iborat bo'lib, unda biz chiziqli operatorlar va chiziqli funksionallarning asosiy xossalarini o'rganamiz. 11-§ chiziqli uzluksiz operatorlar xossalariga bag'ishlangan bo'lib, unda chiziqli operatorlarning asosiy xossalari isbotlangan. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrolari ta'riflanib, misollarda tushuntirilgan. Chiziqli operatorlar uchun uzluksizlik va chegaralanganlik ekvivalent tushunchalar ekanligi isbotlangan. X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli uzluksiz operatorlar to'plami - $L(X,Y)$ chiziqli normalangan fazo bo'lishi ko'rsatilgan. 12-§ da normalangan fazolarda chiziqli uzluksiz funksionallarning ayrim xossalari qaralgan. Chiziqli uzluksiz funksionalning normasini saqlagan holda butun fazogacha davom ettirish mumkinligi haqidagi Xan-Banax teoremasi isbotlangan. Asosiy funksional fazolarda (ℓ_p, $C[a,b]$, $L_p[a,b]$) chiziqli uzluksiz funksionallarning umumiy ko'rinishidan foydalanib, asosiy funksional fazolarga qo'shma fazolar izomorfizm aniqligida topilgan. 13-§ chiziqli uzluksiz operatorlar fazosining xossalariga bag'ishlangan. Unda chiziqli operatorlar ketma-ketligining tekis (norma bo'yicha), kuchli (nuqtali) va kuchsiz yaqinlashishlari ta'riflanib, misollarda tahlil qilingan. Agar Y to'la normalangan fazo bo'lsa, u holda $L(X,Y)$ chiziqli normalangan fazoning Banax fazosi bo'lishi isbotlangan. $X=C[-1,1]$, $Y=C_2[-1,1]$ bo'lgan holda $L(X,Y)$ ning to'la bo'lmagan chiziqli normalangan fazo bo'lishi isbotlangan. Bundan tashqari Banax-Shteynxaus teoremasi (tekis chegaralanganlik prinsipi) isbotlangan va uning yordamida X va Y lar Banax fazolari bo'lgan holda chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi $L(X,Y)$ - ning kuchli yaqinlashishga nisbatan ham to'la bo'lishi ko'rsatilgan. 14-§ teskari operatorlar, ularning asosiy xossalariga bag'ishlangan. Bu paragrafda chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari keltirilgan. Shuningdek chegaralangan teskari operator mavjud bo'lishining yetarli, zaruriy va yetarli shartlari keltiriladi. Keltirilgan teorema shartlarining bajarilishiga doir misollar qaralgan. Navbatdagi 15-§ da Banax va Hilbert fazolarida berilgan operatorlarning qo'shmalari ta'riflanib, ularning asosiy xossalari bayon qilingan. Hilbert fazolari ℓ_2 va $L_2[a,b]$ larda ko'paytirish operatorining o'z-o'ziga qo'shmalik kriteriysi berilgan. $L_2[a,b]$ fazoda $K(x,y)$ yadro bilan aniqlanuvchi integral operatorning o'z-o'ziga qo'shmalik shartlari keltirilgan. So'nggi 16-paragrafda chiziqli operatorlarning spektri klassifikatsiya qilinib, ularga doir misollar qaralgan. Chiziqli uzluksiz operatorning spektri bo'sh bo'lmagan yopiq to'plam ekanligi isbotlangan. Muhim spektr, qoldiq spektr va chiziqli operatorning xos qiymatlarini topishga doir misollar qaralgan. Spektri kompleks sonlar to'plami C bilan ustma-ust tushuvchi chiziqli operatorga misol keltirilgan.

11-§. Chiziqli uzluksiz operatorlar

Biz asosan chiziqli operatorlarni qaraymiz. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami chiziqli normalangan fazolarning qism fazolari bo'ladi. Shunday qilib, bizga X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo'lsin.

11.1-ta'rif. *X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi*

$$Ax = y \qquad (x \in X,\ y \in Y)$$

akslantirish operator deyiladi.

Umuman A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo'lishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo'lgan barcha $x \in X$ lar to'plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya'ni:

$$D(A)=\{x\in X: Ax \quad \text{mavjud va} \quad Ax\in Y\}.$$

Agar chiziqli A operator qaralayotgan bo'lsa, $D(A)$ ning chiziqli ko'pxillilik (8.6-ta'rifga qarang) bo'lishi talab qilinadi, ya'ni agar $x,y\in D(A)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha,\beta\in C$ lar uchun $\alpha x+\beta y\in D(A)$.

11.2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x,y\in D(A)\subset X$ *elementlar va ixtiyoriy* $\alpha,\beta\in C$ *sonlar uchun*

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A *ga chiziqli operator deyiladi.*

11.3-ta'rif. *Bizga* $A:X\to Y$ *operator va* $x_0\in D(A)$ *nuqta berilgan bo'lsin. Agar* $y_0=Ax_0\in Y$ *ning ixtiyoriy* V *atrofi uchun,* x_0 *nuqtaning shunday* U *atrofi mavjud bo'lib, ixtiyoriy* $x\in U\cap D(A)$ *lar uchun* $Ax\in V$ *bo'lsa,* A *operator* $x=x_0$ *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

11.3-ta'rifga teng kuchli quyidagi ta'riflarni keltiramiz.

11.4-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon>0$ *uchun shunday* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *mavjud bo'lib,* $\|x-x_0\|<\delta$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha* $x\in D(A)$ *lar uchun*

$$\|Ax-Ax_0\|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A *operator* $x=x_0$ *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

11.5-ta'rif. *Agar* x_0 *nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy* x_n *ketma-ketlik uchun* $\|Ax_n-Ax_0\|\to 0$ *bo'lsa, u holda* A *operator* x_0 *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Agar A operator ixtiyoriy $x\in D(A)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, A uzluksiz operator deyiladi.

11.6-ta'rif. $Ax=\theta$ *tenglikni qanoatlantiruvchi barcha* $x\in X$ *lar to'plami* A *operatorning yadrosi deb ataladi va u* $KerA$ *bilan belgilanadi.*

11.7-ta'rif. *Biror $x \in D(A)$ uchun $y = Ax$ bajariladigan $y \in Y$ lar to'plami A operatorning qiymatlar sohasi yoki tasviri deb ataladi va u $\operatorname{Im} A$ yoki $R(A)$ bilan belgilanadi.*

Matematik simvollar yordamida operator yadrosi va qiymatlar sohasini quyidagicha yozish mumkin:

$$KerA = \{\, x \in D(A) \colon Ax = \theta\},$$

$$R(A) := \operatorname{Im} A = \{\, y \in Y : \text{biror } x \in D(A) \text{ uchun } \quad y = Ax\}.$$

Chiziqli operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi chiziqli ko'pxillilik bo'ladi. Agar $D(A) = X$ bo'lib, A uzluksiz operator bo'lsa, u holda $KerA$ yopiq qism fazo bo'ladi, ya'ni $KerA = [KerA]$. A operator uzluksiz bo'lgan holda ham $\operatorname{Im} A \subset Y$ yopiq qism fazo bo'lmasligi mumkin.

Chiziqli operatorlarga misollar.

11.1-misol. X - ixtiyoriy chiziqli normalangan fazo bo'lsin.

$$Ix = x, \quad x \in X$$

akslantirish birlik operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu operatorning chiziqliligi va uzluksizligi quyidagi tengliklardan bevosita kelib chiqadi:

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha I x + \beta I y, \qquad \| I(x - x_0)\| = \| x - x_0 \|.$$

Qo'shimcha qilib aytishimiz mumkinki, uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o'rinli:

$$D(I) = X, \ R(I) = X, \quad KerI = \{\theta\}.$$

11.2. X va Y ixtiyoriy chiziqli normalangan fazolar bo'lsin.

$$\Theta : X \to Y, \quad \Theta x = \theta$$

operator nol operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Nol operatorning chiziqliligi va uzluksizligi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. Uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o'rinli:

$$D(\Theta) = X, \qquad R(\Theta) = \{\theta\}, \qquad Ker(\Theta) = X.$$

11.3. Aniqlanish sohasi $D(A)=C^{(1)}[a,b]\subset C[a,b]$ bo'lgan va $C[a,b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi

$$A:C[a,b]\to C[a,b], \quad (Af)(x)=f'(x)$$

operatorni qaraymiz. Bu operator differensial operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Uning chiziqli ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $f,g\in D(A)$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'lgan $\alpha f+\beta g$ elementga A operatorning ta'sirini qaraymiz:

$$(A(\alpha f+\beta g))(x)=(\alpha f(x)+\beta g(x))'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)=\alpha(Af)(x)+\beta(Ag)(x).$$

Biz bu yerda yig'indining hosilasi hosilalar yig'indisiga tengligidan, hamda o'zgarmas sonni hosila belgisi ostidan chiqarish munkinligidan foydalandik. Demak, A operator chiziqli ekan. Uni nol nuqtada uzluksizlikka tekshiramiz. Ma'lumki, $A\theta=\theta$, bu yerda θ - $C[a;b]$ fazoning nol elementi, ya'ni $\theta(x)\equiv 0$. Endi nolga yaqinlashuvchi $f_n\in D(A)$ ketma-ketlikni tanlaymiz. Umumiylikni buzmagan holda $a=0,\ b=1$ deymiz.

$$f_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty}\|f_n\|=\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$(Af_n)(x)=x^n, \quad \lim_{n\to\infty}\|Af_n-A\theta\|=\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}|x^n|=\lim_{n\to\infty}1=1\ne 0.$$

Demak, A operator nol nuqtada uzluksiz emas ekan. 11.2-teoremaga ko'ra differensial operator aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida uzilishga ega.

Uning qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o'rinli:

$$R(A)=C[a,b], \qquad Ker A=\{const\}.$$

11.4. Endi $C[a,b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi B operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Bf)(x)=\int_a^b K(x,t)f(t)dt \tag{11.1}$$

Bu operator integral operator deyiladi. Bu yerda $K(x,y)$ funksiya $[a,b]\times[a,b]$ - kvadratda aniqlangan, uzluksiz. $K(x,y)$ integral operatorning o'zagi (yadrosi) deyiladi. B operatorni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Ma'lumki, ixtiyoriy $f\in C[a,b]$ uchun $K(x,t)f(t)$ funksiya x va t ning uzluksiz funksiyasidir. Matematik analiz kursidan ma'lumki,

$$\int_a^b K(x,t)f(t)dt$$

integral parametr $x\in[a,b]$ ning uzluksiz funksiyasi bo'ladi. Bulardan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B)$ uchun $D(B)=C[a,b]$ tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Integral operatorning chiziqli ekanligi integrallash amalining chiziqlilik xossasidan kelib chiqadi, ya'ni ixtiyoriy $f,g\in C[a,b]$ va $\alpha,\beta\in C$ lar uchun

$$(B(\alpha f+\beta g))(x)=\int_a^b K(x,t)(\alpha f(t)+\beta g(t))dt=$$

$$=\alpha\int_a^b K(x,t)f(t)dt+\beta\int_a^b K(x,t)g(t)dt=\alpha(Bf)(x)+\beta(Bg)(x)$$

tengliklar o'rinli. Endi integral operator B ning uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. $f_0\in C[a,b]$ ixtiyoriy tayinlangan element va $\{f_n\}\subset C[a,b]$ unga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. U holda

$$\|Bf_n-Bf_0\|=\max_{a\le x\le b}\left|\int_a^b K(x,t)(f_n(t)-f_0(t))dt\right|\le$$

$$\le\max_{a\le x\le b}|f_n(t)-f_0(t)|\max_{a\le x\le b}\left|\int_a^b K(x,t)dt\right|=C\cdot\|f_n-f_0\|. \tag{11.2}$$

Bu yerda

$$C=\max_{a\le x\le b}\int_a^b|K(x,t)|dt.$$

C ning chekli ekanligi $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiyaning chegaralangan ekanligidan kelib chiqadi. Agar (11.2) tengsizlikda $n\to\infty$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{n\to\infty}\|Bf_n - Bf_0\| \le C\cdot\lim_{n\to\infty}\|f_n - f_0\| = 0$$

ekanligini olamiz. Agar $\|Bf_n - Bf_0\| \ge 0$ tengsizlikni hisobga olsak,

$$\lim_{n\to\infty}\|B f_n - B f_0\| = 0.$$

Shunday qilib, B integral operator ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekan.

B integral operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi integral operatorning o'zagi - $K(x,y)$ funksiyaning berilishiga bog'liq. Masalan, $K(x,t)\equiv 1$ bo'lsa, B operatorning qiymatlar sohasi $\operatorname{Im} B$ o'zgarmas funksiyalardan iborat, ya'ni $\operatorname{Im} B = \{f \in C[a,b] : f(t) = const\}$, uning yadrosi $KerB$ o'zgarmasga ortogonal funksiyalardan iborat, ya'ni

$$KerB = \{ f \in C[a,b] : \int_a^b f(t)dt = 0\}.$$

11.8-ta'rif. *Bizga X normalangan fazoning M to'plami berilgan bo'lsin. Agar shunday $C>0$ son mavjud bo'lib, barcha $x\in M$ uchun $\|x\|\le C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, M to'plam chegaralangan deyiladi.*

11.9-ta'rif. *X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar A ning aniqlanish sohasi $D(A)=X$ bo'lib, har qanday chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga akslantirsa, A ga chegaralangan operator deyiladi.*

Chiziqli operatorning chegaralanganligini tekshirish uchun quyidagi ta'rif qulaydir.

11.10-ta'rif. *$A: X\to Y$ chiziqli operator bo'lsin. Agar shunday $C>0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x\in D(A)$ uchun*

$$\|Ax\| \le C\cdot\|x\| \tag{11.3}$$

tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi.

11.11-ta'rif. *(11.3) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to'plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi, va u $\|A\|$ bilan belgilanadi, ya'ni*

$$\|A\| = \inf C.$$

Bu ta'rifdan ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

11.1-teorema. *X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan A operatorning normasi $\|A\|$ uchun*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \ne \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{11.4}$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\alpha = \sup_{x \ne \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

A chiziqli operator bo'lgani uchun

$$\alpha = \sup_{x \ne \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \ne \theta} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Ixtiyoriy $x \ne 0$ uchun

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \alpha.$$

Demak, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|Ax\| \le \alpha \|x\|$. Bundan esa

$$\|A\| \le \alpha. \tag{11.5}$$

Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $x_\varepsilon \ne \theta$ element mavjudki,

$$\alpha - \varepsilon \le \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \le \|A\|$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lgani uchun,

$$\alpha \le \|A\|. \tag{11.6}$$

(11.5) va (11.6) lardan $\|A\| = \alpha$ tenglik kelib chiqadi. Δ

11.1-tasdiq. *Chiziqli chegaralangan A operator uchun*

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$$

tenglik o'rinli.

11.1-tasdiqni mustaqil isbotlang.

X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini $L(X,Y)$ bilan belgilaymiz. Xususan, $X = Y$ bo'lsa $L(X,X) = L(X)$.

11.1-natija. *Ixtiyoriy $A \in L(X,Y)$ va $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$ uchun*

$$\|Ax\| \le \|A\| \tag{11.7}$$

tengsizlik o'rinli.

(11.7) tengsizlikning isboti (11.4) tengsizlikdan kelib chiqadi.

11.12-ta'rif. *$A : X \to Y$ va $B : X \to Y$ chiziqli operatorlarning yig'indisi deb, $x \in D(A) \cap D(B)$ elementga $y = Ax + Bx \in Y$ elementni mos qo'yuvchi $C = A + B$ operatorga aytiladi.*

Ravshanki, C chiziqli operator bo'ladi. Agar A, $B \in L(X,Y)$ bo'lsa, u holda C ham chegaralangan operator bo'ladi va

$$\|C\| = \|A + B\| \le \|A\| + \|B\| \tag{11.8}$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| \le (\|A\| + \|B\|)\|x\|.$$

Bu yerdan (11.8) tengsizlik kelib chiqadi.

11.13-ta'rif. *A chiziqli operatorning α songa ko'paytmasi x elementga αAx elementni mos qo'yuvchi operator sifatida aniqlanadi, ya'ni*

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

11.14-ta'rif. *$A : X \to Y$ va $B : Y \to Z$ chiziqli operatorlar berilgan bo'lib $R(A) \subset D(B)$ bo'lsin. B va A operatorlarning ko'paytmasi deganda,* *har bir $x \in D(A)$ ga Z fazoning $z = B(Ax)$ elementini mos qo'yuvchi $C = BA : X \to Z$ operator tushuniladi.*

Agar A va B lar chiziqli chegaralangan operatorlar bo'lsa, u holda C ham chiziqli chegaralangan operator bo'ladi va

$$\|C\| \le \|B\| \cdot \|A\| \tag{11.9}$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\|_Z = \|B(Ax)\|_Z \le \|B\| \cdot \|Ax\|_Y \le \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X.$$

Bu yerdan (11.9) tengsizlik kelib chiqadi.

Operatorlarni qo'shish va ko'paytirish assotsiativdir. Qo'shish amali kommutativ, lekin ko'paytirish amali kommutativ emas.

Agar X va Y lar chiziqli normalangan fazolar bo'lsa, $L(X,Y)$ ham chiziqli normalangan fazo bo'ladi, ya'ni $p : L(X,Y) \to R$,

$$p(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

funksional normaning 1-3 - shartlarini qanoatlantiradi.

11.2-teorema. *X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi $A : X \to Y$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:*

1) *A operator biror x_0 nuqtada uzluksiz;*

2) *A operator uzluksiz;*

3) *A operator chegaralangan.*

Isbot. 1) $\to$ 2). Chiziqli A operatorning biror x_0 nuqtada uzluksiz ekanligidan uning ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekanligini keltirib chiqaramiz.

A operator x_0 nuqtada uzluksiz bo'lganligi uchun, x_0 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n^0\}$ ketma-ketlik uchun $Ax_n^0 \to Ax_0$. Ixtiyoriy $x' \in D(A)$ nuqta uchun, $x'_n \to x'$ ekanligidan $Ax'_n \to Ax'$ kelib chiqishini ko'rsatamiz. $y'_n = x'_n - x' + x_0 \to x_0$ deymiz. U holda

$$\lim_{n\to\infty} Ay'_n = \lim_{n\to\infty} A(x'_n - x' + x_0) = \lim_{n\to\infty}(Ax'_n - Ax' + Ax_0) = Ax_0.$$

Bu esa

$$\lim_{n\to\infty} Ax'_n = Ax'$$

ekanligini bildiradi. Demak, A operator ixtiyoriy x' nuqtada uzluksiz.

2) $\to$3). A operatorning uzluksiz ekanligidan uning chegaralanganligi kelib chiqishini ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, A chiziqli operator uzluksiz bo'lsin, lekin chegaralangan bo'lmasin, ya'ni ixtiyoriy $C>0$ son uchun shunday $x_c \in D(A)$ element mavjud bo'lib,

$$\| Ax_c\| \geq C\| x_c\|$$

bo'lsin. Agar $C = n \in N$ desak, ixtiyoriy $n \in N$ uchun shunday $x_n \in D(A)$ mavjudki, $\| Ax_n\| \geq n\| x_n\|$ tengsizlik bajariladi. Quyidagi

$$\xi_n = \frac{x_n}{n\| x_n\|}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Ko'rinib turibdiki, $\xi_n \to \theta$, ya'ni

$$\| \xi_n - \theta \| = \left\| \frac{x_n}{n\| x_n\|} \right\| = \frac{1}{n\| x_n\|}\| x_n\| = \frac{1}{n} \to 0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$\| A\xi_n - A\theta \| = \left\| A\left(\frac{x_n}{n\| x_n\|}\right)\right\| = \left\| \frac{1}{n\| x_n\|} Ax_n \right\| = \frac{1}{n\| x_n\|}\| Ax_n\| \geq 1$$

Bu qarama-qarshilik A operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatadi.

3)$\to$1). A chiziqli chegaralangan operatorning biror nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz.

Ta'rifga ko'ra, shunday $C>0$ son mavjudki, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\| Ax\|_Y \leq C\| x\|_X$$

tengsizlik bajariladi. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ - x ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin, u holda $Ax_n \to Ax$ ekanligini ko'rsatamiz:

$$\| Ax_n - Ax\| = \| A(x_n - x)\| \leq C\| x_n - x\| \to 0,$$

ya'ni $Ax_n \to Ax$. Δ

11.2-natija. *A chiziqli operator chegaralangan bo'lishi uchun uning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.*

11.5-misol. Birlik va nol operatorlarning (11.1 va 11.2-misollar) chegaralangan ekanligini ko'rsatib, ularning normasini hisoblang.

Yechish. Birlik operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini hisoblaymiz. Ixtiyoriy $x \in E$ uchun $\|Ix\| = \|x\|$ tenglik o'rinli. Ta'rifga ko'ra, I chegaralangan va uning normasi 1 ga teng. Endi nol operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, uning normasini topamiz. Istalgan $x \in E$ uchun $\|\Theta x\| = \|\theta\| = 0$ tenglik o'rinli. Bundan $\|\Theta\| = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Nol operator $L(X, Y)$ chiziqli normalangan fazoning nol elementi bo'ladi.

11.6. 11.3-misolda keltirilgan $A: C[a,b] \to C[a,b]$ differensial operatorning chegaralanmagan ekanligini ko'rsating.

Yechish. Buning uchun A akslantirishda $D(A) = C^{(1)}[0,1]$ fazodagi birlik shar $B[\theta,1]$ ning tasviri chegaralanmagan to'plam ekanligini ko'rsatish yetarli. Birlik shar $B[\theta,1]$ da yotuvchi $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha tanlaymiz:

$$f_n(x) = x^n, \quad \|f_n\| = \max_{0 \le x \le 1} |x^n| = 1.$$

U holda

$$(Af_n)(x) = n \cdot x^{n-1}, \quad \|Af_n\| = \max_{0 \le x \le 1} |n \cdot x^n| = n.$$

Bundan

$$\lim_{n \to \infty} \|Af_n\| = \infty$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, differensial operator chegaralanmagan ekan.

11.7. 11.4-misolda keltirilgan $B: C[a,b] \to C[a,b]$ integral operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsating.

Yechish. 11.4-misolda B operatorning uzluksiz ekanligi ko'rsatilgan edi. 11.2-natijaga ko'ra, u chegaralangan bo'ladi.

11.8. $C[-1,1]$ fazoda x ga ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$B:C[-1,1]\to C[-1,1],\quad (Bf)(x)=xf(x) \tag{11.10}$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini toping.

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Uzluksiz funksiyalarning ko'paytmasi uzluksiz ekanligidan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B)=C[-1,1]$ ekanligi kelib chiqadi. Endi B operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz.

$$\|Bf\|=\max_{-1\le x\le 1}|xf(x)|\le\max_{-1\le x\le 1}|x|\cdot\max_{-1\le x\le 1}|f(x)|=1\cdot\|f\|.$$

Bu tengsizlikdan B operatorning chegaralangan ekanligi va $\|B\|\le 1$ kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, agar $f_0(x)=1$ desak, u holda

$$(Bf_0)(x)=x,\quad \|Bf_0\|=1,\quad \|B\|\ge\frac{\|Bf_0\|}{\|f_0\|}=1$$

ni olamiz. Yuqoridagilardan $\|B\|=1$ kelib chiqadi.

Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, $L_2[-1,1]$ Hilbert fazosida ham (11.10) tenglik bilan aniqlangan B operator chiziqli chegaralangan bo'lib, normasi 1 ga teng bo'ladi.

11.9. Endi ℓ_2 fazoda ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$A:\ell_2\to\ell_2,\quad (Ax)_n=a_nx_n,\quad \sup_{n\ge 1}|a_n|=a<\infty \tag{11.11}$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini toping.

Yechish. Ixtiyoriy $x\in\ell_2$ uchun $Ax\in\ell_2$ ekanligini ko'rsatamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(Ax)_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_nx_n|^2\le\sup_{n\ge 1}|a_n|^2\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=a^2\|x\|^2. \tag{11.12}$$

Bu munosabatlardan $D(A)=\ell_2$ ekanligini olamiz. Endi uning chiziqli ekanligini ko'rsatamiz. A operatorning aniqlanishiga ko'ra

$$(A(\alpha x+\beta y))_n = a_n(\alpha x_n+\beta y_n) = \alpha a_n x_n + \beta a_n y_n = \alpha (Ax)_n + \beta (Ay)_n .$$

Demak, A chiziqli operator ekan. Uning chegaralangan ekanligi (11.12) tengsizlikdan kelib chiqadi. Bundan tashqari (11.12) tengsizlikdan $\|A\| \le a$ ekanligi ham kelib chiqadi. A operatorning normasi $\|A\| = a$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun ℓ_2 fazoda $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemani ((5.8)ga qarang) olamiz. A operatorning aniqlanishiga ko'ra, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $Ae_n = a_n e_n$ tenglik o'rinli. Bundan va (11.7) dan

$$\|A\| \ge \|Ae_n\| = \|a_n e_n\| = |a_n| \cdot \|e_n\| = |a_n|$$

munosabat kelib chiqadi. Bu tengsizlik ixtiyoriy $n \in N$ da o'rinli bo'lgani uchun

$$\|A\| \ge \sup_{n \ge 1} |a_n| = a \qquad (11.13)$$

ni olamiz. Demak, $\|A\| = a$ tenglik isbotlandi. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $L_2[-1,1]$ *Hilbert fazosida (11.10) tenglik bilan aniqlangan* B *ko'paytirish operatorining chiziqli chegaralangan ekanligini ko'rsatib, uning normasini toping.*

2. $L_2[a,b]$ *Hilbert fazosida (11.1) tenglik bilan aniqlangan* B *integral operatorning chiziqli chegaralangan ekanligini ko'rsating.*

3. $L_2[-\pi,\pi]$ *Hilbert fazosida (11.1) tenglik bilan aniqlangan* B *integral operatorning o'zagi* $K(x,t)=\cos(x-t)$ *bo'lgan holda, uning yadrosi* $Ker\,B$ *va qiymatlar sohasi* $R(B)$ *ni tavsiflang.*

4. *11.3 va 11.8-misollarda keltirilgan operatorlar yig'indisini toping.*

5. *Integral operator*

$$A: C[-1,1] \to C[-1,1], \quad (Af)(x) = \int_{-1}^{1} (1+xy) f(y)\,dy$$

va 11.8-misolda keltirilgan x *ga ko'paytirish operatori* B *larning ko'paytmasini toping.* $AB = BA$ *tenglik to'g'rimi?*

6. *Agar* $A,B \in L(X,Y)$ *bo'lsa, u holda* $\big| \|A\| - \|B\| \big| \le \|A-B\|$ *tengsizlikni isbotlang.*

7. *Aytaylik,* X *chiziqli normalangan fazo bo'lsin.* $p: X \to R$, $p(x) = \|x\|$ *akslantirishning uzluksizligini isbotlang.*

12-§. Normalangan fazolarda chiziqli funksionallar

Ma'lumki, chiziqli funksional va uning nollari 6-§ da o'rganilgan edi. 7-§ da esa L_0 qism fazoda aniqlangan f_0 chiziqli funksionalni p qavariq funksionalga «bo'ysungan» holda butun L fazogacha chiziqli davom ettirish mumkinligi haqidagi Xan-Banax teoremasi isbotlangan edi. Biz bu paragrafda chiziqli funksionalning normasini saqlagan holda uni butun L fazogacha davom ettirish mumkinligi haqidagi Xan-Banax teoremasini isbotlaymiz, hamda funksional fazolarda chiziqli uzluksiz funksionallarning umumiy ko'rinishidan foydalanib, asosiy funksional fazolarga qo'shma fazolarni izomorfizm aniqligida topamiz.

12.1. Chiziqli funksionallar

Agar operatorning qiymatlari sonlardan iborat bo'lsa, bunday operator funksional deyiladi (6.1-ta'rifga qarang). Agar X chiziqli fazoda aniqlangan f funksional uchun quyidagi shartlar bajarilsa

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$; additivlik

2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in C$ (yoki R), bir jinslilik

f ga chiziqli funksional (6.2, 6.3-ta'riflarga qarang) deyiladi.

12.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *mavjud bo'lib,* $\|x - x_0\| < \delta$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha* $x \in D(f)$ *lar uchun* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa,* f *funksional* $x = x_0$ *nuqtada* *uzluksiz deyiladi. Agar f funksional ixtiyoriy $x \in D(f)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, f uzluksiz funksional deyiladi.*

12.1-ta'rifga teng kuchli bo'lgan quyidagi ta'rifni keltiramiz.

12.2-ta'rif. *Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$ bo'lsa, u holda f funksional x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.*

C - kompleks sonlar to'plami (R - haqiqiy sonlar to'plami) Banax fazosi bo'lganligi uchun 11-§ da chiziqli operatorlar uchun o'rnatilgan teorema va tasdiqlar chiziqli funksionallar uchun ham o'rinli bo'ladi.

12.1-teorema. *X chiziqli normalangan fazoda aniqlangan chiziqli funksional biror $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda bu chiziqli funksional butun X fazoda uzluksiz.*

12.2-teorema. *X chiziqli normalangan fazoda aniqlangan chiziqli f funksional uzluksiz bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

Xuddi chiziqli operatorlardagidek $|f(x)| \le M\|x\|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi M sonlarning aniq quyi chegarasi f funksionalning normasi deyiladi va $\|f\|$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|.$$

Bundan tashqari, chiziqli chegaralangan funksionalning normasi $\|f\|$ uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \ne \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \tag{12.1}$$

12.3-teorema. *(Xan-Banax). E kompleks chiziqli normalangan fazo, E_0 - E ning qism fazosi va f_0 - E_0 da aniqlangan chiziqli uzluksiz funksional bo'lsin. U holda f_0 ni normasini saqlagan holda E da aniqlangan f chiziqli funksionalgacha davom ettirish mumkin, ya'ni*

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in E_0 \quad va \quad \|f\|_E = \|f_0\|_{E_0}$$

$$\|f_0\| \ge \sup_{n\ge1} |f_0(x_n)| = \sup_{n\ge1}\left\{1-\frac{1}{n}\right\} = 1$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu ikkala tengsizlikdan $\|f_0\| = 1$ tenglikni olamiz. 7.6-misoldagi kabi $C[-1,1]$ chiziqli fazoda g_y, $y \in V_0[-1,0]$ funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$g_y(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\,y(t)\,dt + \int_{0}^{1} x(t)\,dt, \qquad x \in L. \qquad (12.4)$$

Ma'lumki, istalgan $y \in V_0[-1,0]$ uchun g_y funksional f_0 funksionalning $C[-1,1]$ fazogacha davomi bo'ladi. g_y funksional uchun Xan-Banax teoremasining tasdig'i o'rinlimi? Boshqacha aytganda $\|f_0\| = \|g_y\|$ tenglik qanday $y \in V_0[-1,0]$ lar uchun o'rinli? $C[a,b]$ fazodagi chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishi haqidagi F. Riss - 12.4-teorema, hamda (12.19) tenglikdan foydalansak, (12.4) ko'rinishdagi davomlar ichida yagona g_0 funksional f_0 funksionalning normasini saqlagan holda $L = C[-1,1]$ fazogacha davomi bo'ladi. 7.6-misolda f_0 funksionalni (7.1) shartni saqlagan holda cheksiz ko'p (kontinuum) usul bilan L fazogacha davom ettirish mumkin edi.

12.2. Qo'shma fazolar

Chiziqli funksionallarning umumiy ko'rinishidan foydalanib, qo'shma fazoni ayrim hollarda izomorfizm aniqligida topish mumkin.

12.3-ta'rif. *X normalangan fazoda aniqlangan, chiziqli uzluksiz funksionallar fazosi X ga qo'shma fazo deyiladi va X^* bilan belgilanadi, ya'ni $X^* = L(X,C)$.*

Bundan keyingi 13-§ da ya'ni chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi mavzusida biz Y to'la fazo bo'lgan holda $L(X,Y)$ fazoning Banax fazosi bo'lishini isbotlaymiz. Shunga ko'ra (13.1-natijaga qarang) X chiziqli normalangan fazoga qo'shma bo'lgan $X^* = L(X,C)$ fazo Banax fazosi boladi. Chunki, kompleks sonlar to'plami $C=Y$ to'la normalangan fazo. Qo'shma fazolarni o'rganishni eng sodda holdan, yani X fazo n o'lchamli (haqiqiy yoki compleks) chiziqli fazo bo'lgan holdan boshlaymiz.

12.2-misol. X n o'lchamli (haqiqiy yoki compleks) chiziqli fazo bo'lsin. Bu fazoda biror $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisni tanlaymiz. U holda har bir $x \in X$ vektor yagona ravishda

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \tag{12.5}$$

ko'rinishda tasvirlanadi. Agar f - X da aniqlangan chiziqli funksional bo'lsa, u holda ravshanki,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \tag{12.6}$$

bo'ladi. Shunday ekan, chiziqli funksional o'zining $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis vektorlardagi qiymatlari bilan bir qiymatli aniqlanadi. Bundan tashqari bu qiymatlarni ixtiyoriy berish mumkin. Ushbu $g_1, g_2, \ldots, g_n$ funksionallarni

$$g_j(e_i) = \begin{cases} 0, & \text{agar } i \neq j, \\ 1, & \text{agar } i = j \end{cases}$$

deb aniqlaymiz. Ko'rsatish mumkinki, bu funksionallar chiziqli bog'lanmagan. Agar $x \in X$ element (12.5) ko'rinishda bo'lsa, u holda $g_j(x) = x_j$ tenglik bajariladi. Shuning uchun (12.6) formulani

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f(e_i)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Shunday qilib $g_1, g_2, \ldots, g_n$ funksionallar X^* fazoda bazis tashkil qilar ekan, ya'ni X^* ham n o'lchamli fazodir. X^* dagi $g_1, g_2, \ldots, g_n$ bazis X dagi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisga ikkilamchi bazis deb ataladi.

X fazoda aniqlangan har xil normalar X^* fazoda har xil normalarni keltirib chiqaradi. Hozir biz X va X^* fazolarda bir-biriga mos keluvchi normalarga misol keltiramiz.

a) Yuqoridagi n - o'lchamli X va X^* fazolarni qaraymiz. Har bir $x \in X$ uchun (12.5) o'rinli bo'lib, x ning normasi

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

formula bilan aniqlangan bo'lsin. U holda ixtiyoriy $f \in X^*$ uchun

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} g_i(x) f(e_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2} \cdot \|x\|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz, bu yerda $f_i = f(e_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Agar

$$x_f = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} \cdot e_i$$

desak,

$$|f(x_f)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} \cdot f(e_i)\right| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2} \cdot \|x_f\|.$$

Bundan

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}$$

tenglikni olamiz. Shunday ekan, X va X^* fazolarda

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad \text{va} \quad \|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2}$$

normalar bir-biriga mos kelar ekan.

b) Endi X fazodagi har bir $x \in X$ element uchun uning normasi

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty$$

formula bilan aniqlangan bo'lsin. Bu normaga mos X^* fazodagi normani aniqlash uchun Gyolder tengsizligidan ((1.15) formulaga qarang) foydalanamiz. U holda har bir $f \in X^*$ chiziqli funksional va ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \quad \text{va} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \cdot g(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i$$

desak, Gyolder tengsizligiga asosan

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|x\|_p$$

tengsizlik barcha $x \in X$ lar uchun o'rinli bo'ladi. Bu yerda

$$1 < p < \infty, \quad 1 < q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{12.7}$$

Agar $x_f \in X$ elementning koordinatalarini

$$x_i = \overline{f_i} \cdot |f_i|^{q-2}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

ko'rinishda tanlasak (agar $f_i = 0$ bo'lsa, $x_i = 0$ deb olinadi), u holda

$$x_i \cdot f_i = \overline{f_i} \cdot |f_i|^{q-2} \cdot f_i = |f_i|^q \ge 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

va

$$x_i \cdot f_i = |f_i|^q = |f_i|^{\frac{p}{p-1}} = \left(|f_i|^{\frac{1}{p-1}}\right)^p = |x_i|^p$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Chunki

$$|x_i| = |f_i|^{q-1} = |f_i|^{\frac{1}{p-1}}, \quad q - 1 = \frac{1}{p-1}.$$

U holda $x_i \cdot f_i = |f_i|^q$ va $x_i \cdot f = |x_i|^p$ tengliklarga ko'ra

$$|f(x_f)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i\right| = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|x\|_p.$$

Demak, f funksionalning normasi uchun quyidagi tenglik o'rinli

$$\|f\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Shunday qilib, X va X^* fazolarda mos normalar juftligi

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (12.8)$$

ko'rinishda bo'lar ekan. Bu yerda p va q sonlar (12.7) munosabatni qanoatlantiradi.

c) X fazodagi har bir $x \in X$ uchun (12.5) tasvir o'rinli bo'lib, x ning normasi

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

formula bilan aniqlangan bo'lsin. Ixtiyoriy $f \in X^*$ chiziqli funksional va barcha $x \in X$ larda

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i, \quad f_i = f(e_i), \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{n} |f_i \cdot x_i| \le \max_{1 \le i \le n} |f_i| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) = \max_{1 \le i \le n} |f_i| \cdot \|x\|_1,$$

ya'ni

$$\|f\| \le \max_{1 \le i \le n} |f_i|.$$

Faraz qilaylik, biror $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ uchun

$$|f_{i_0}| = \max_{1 \le i \le n} |f_i|$$

bo'lsin. Agar

$$x_0 = \Big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{i_0}, 0, \ldots, 0\Big),$$

desak, $\|x_0\|_1 = 1$ va

$$|f(x_0)| = |f_{i_0}| = \max_{1 \le i \le n} |f_i| = \max_{1 \le i \le n} |f_i| \cdot \|x_0\|_1$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bundan

$$\|f\| = \max_{1\le i\le n}|f_i|$$

tenglikka ega bo'lamiz. So'nggi normani biz $\|\cdot\|_\infty$ bilan belgilaymiz. Matematik analizdan ma'lumki, ((1.19) ga qarang)

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\le i\le n}|x_i| = \|x\|_\infty .$$

Shunday qilib, X va X^* chekli n - o'lchamli fazolarda

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|, \quad \|f\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|f_i| \tag{12.9}$$

lar bir-biriga mos keluvchi normalar juftligini hosil qiladi. Agar biz (12.7) munosabatni saqlagan holda $q\to\infty$ da limitga o'tsak, $p=1$ va $q=\infty$ ni olamiz. Demak, (12.9) normalar juftligi (12.8) normalar juftligining limitik holati ekan.

d) Endi n - o'lchamli X fazoda norma

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|$$

formula vositasida aniqlangan bo'lsin. Ixtiyoriy $f\in X^*$ chiziqli funksional uchun $f_i = f(e_i)$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ ($e_1,e_2,\ldots,e_n$ lar X fazoning bazisi) desak, barcha $x\in X$ lar uchun

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

tenglik va

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{n}|f_i\cdot x_i| \le \max_{1\le i\le n}|x_i|\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|\right) = \max_{1\le i\le n}|f_i|\cdot\|x\|_\infty ,$$

tengsizlik o'rinli. Ikkinchi tomondan

$$x_f = \left(\frac{\overline{f_1}}{|f_1|}, \frac{\overline{f_2}}{|f_2|}, \ldots, \frac{\overline{f_n}}{|f_n|}\right), \quad \|x_f\|_\infty = 1$$

element uchun

$$|f(x_f)| = \sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{f_i}\,f_i}{|f_i|} = \sum_{i=1}^{n}|f_i| = \left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|\right)\cdot\|x_f\|_\infty .$$

U holda

$$\| f \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | f_i |$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, X va X^* fazolarda

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} | x_i | , \quad \| f \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | f_i | \tag{12.10}$$

normalar bir-biriga mos keluvchi normalar juftligi bo'ladi. (12.10) tenglik (12.8) tenglikning $p \to \infty$ dagi limitik holatiga mos keladi.

12.3. Endi ℓ_p fazoni qaraymiz. Ma'lumki, bu fazo

$$\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = \{ x_n \}$ ketma-ketliklardan iborat va unda x elementning normasi

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar biz $q > 1$ sonni (12.7) munosabatdan aniqlasak, u holda ℓ_p^* fazo ℓ_q fazoga izomorf bo'ladi. Buni isbotlash uchun ℓ_q fazoning ixtiyoriy $f = \{ f_n \}$ elementi yordamida ℓ_p fazoda

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot x_n \tag{12.11}$$

chiziqli funksionalni aniqlaymiz. Dastlab (12.11) tenglikning o'ng tomonidagi qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Ma'lumki, ixtiyoriy n natural son uchun

$$\sum_{i=1}^{n} | f_i \cdot x_i | \le \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i |^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} | f_i |^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \| x \|_p \tag{12.12}$$

o'rinli. Birinchi tengsizlikni yozishda biz Gyolder tengsizligidan ((1.15) formulaga qarang) foydalandik. Bu yerdan (12.11) tenglikning o'ng tomonidagi qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi hamda $\tilde{f}$ funksional uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$|\tilde{f}(x)| = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i \cdot x_i| \leq \|f\|_q \cdot \|x\|_p, \quad \|\tilde{f}\| \leq \|f\|_q.$$

Demak, (12.11) tenglik bilan aniqlangan $\tilde{f}$ funksional chiziqli va uzluksiz. Agar $x_f \in \ell_p$ elementning hadlarini

$$x_i = \overline{f_i} \cdot |f_i|^{q-2}, \quad i \in \{1,2,\dots,\infty\}$$

(agar $f_i = 0$ bo'lsa, $x_i = 0$ deb olinadi) ko'rinishda tanlasak, 12.1-misolning b) bandidagidek quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$x_i \cdot f_i = |f_i|^q \geq 0, \quad x_i \cdot f_i = |x_i|^p \geq 0, \quad i \in \{1,2,\dots,\infty\}.$$

Biz $x_f \in \ell_p$ va $f = \{f_i\} \in \ell_q$ ekanligini hisobga olsak,

$$|\tilde{f}(x_f)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i\right| = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_q \cdot \|x\|_p.$$

Demak,

$$\|\tilde{f}\|_q = \|f\|_q.$$

Ko'rsatish mumkinki, ℓ_p fazodagi ixtiyoriy $\tilde{f}$ chiziqli uzluksiz funksional (12.11) ko'rinishda tasvirlanadi.

Shunday qilib ℓ_p^* va ℓ_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ fazolarning izomorfligi isbotlandi. Xususan, $p = 2$ da $\ell_2^* = \ell_2$ kelib chiqadi. Shuning uchun ℓ_2 fazo o'z-o'ziga qo'shma fazo deyiladi. Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, ixtiyoriy Hilbert fazosining qo'shmasi ham o'ziga izomorf bo'ladi.

12.4. Endi ℓ_1 fazoning qo'shmasini topamiz. 12.2-misolning c) bandidagiga o'xshash mulohazalar qilib ko'rsatish mumkinki, ℓ_1 fazoning qo'shmasi $\ell_\infty = m$ - chegaralangan ketma-ketliklar fazosiga izomorfdir, ya'ni $\ell_1^* = m$. Quyidagi tasdiqlarni o'quvchiga mustaqil isbotlash uchun qoldiramiz:

$$c^* = \ell_1, \quad c_0^* = \ell_1.$$

Bu tengliklarni izomorfizm aniqligida tushunish kerak.

12.5. Endi $X = C[a,b]$ fazoga qo'shma fazoni izomorfizm aniqligida topamiz. Ma'lumki, $[a,b]$ kesmada aniqlangan va $t = a$ nuqtada nolga aylanuvchi o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V_0[a,b]$ orqali belgilanadi (8.15-misolga qarang). Ko'rsatish mumkinki, bu to'plam funksiyalarni qo'shish va ularni songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda x elementning normasi $\|x\| = V_a^b[x]$ tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda $V_a^b[x]$ o'zgarishi chegaralangan x funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi to'la o'zgarishi. Ko'rsatamizki, $C[a,b]^* = V_0[a,b]$.

Biz $M[a,b]$ - bilan $[a,b]$ kesmada aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Bu to'plam odatdagi funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi (8.8-misolga qarang) Bu fazoda x elementning normasi

$$\|x\| = \sup_{a \le t \le b} |x(t)|$$

tenglik bilan aniqlanadi. Har bir $x \in C[a,b]$ funksiya chegaralangan va

$$\sup_{a \le t \le b} |x(t)| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun $C[a,b]$ fazoni $M[a,b]$ fazoning qism fazosi sifatida qarash mumkin. Endi $f \in C^*[a,b]$ ixtiyoriy chiziqli uzluksiz funksional bo'lsin. Normalangan fazolarda Xan-Banax teoremasiga (12.3-teoremaga qarang) ko'ra, $f \in C^*[a,b]$ funksionalni normasini saqlagan holda butun $M[a,b]$ fazoga davom ettirish mumkin. F deb f funksionalning $C[a,b]$ dan $M[a,b]$ ga davomini belgilaymiz.

Endi

$$\varphi_t(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{agar } a \le \xi \le t, \\ 0, & \text{agar } t < \xi \le b \end{cases}$$

$t \in [a,b]$ funksiyalar oilasini qaraymiz. Ravshanki, ixtiyoriy $t \in [a,b]$ uchun $\varphi_t \in M[a,b]$. F funksionalning $\varphi_t \in M[a,b]$ elementdagi qiymatini $u(t)$ deb belgilaymiz, ya'ni

$$u(t) = F(\varphi_t), \quad t \in [a,b].$$

Natijada $[a,b]$ kesmada u funksiya aniqlandi. Bu funksiyaning o'zgarishi chegaralangan ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmani ixtiyoriy chekli sondagi

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \tag{12.13}$$

nuqtalar bilan bo'lakchalarga ajratamiz. (12.13) bo'linishga mos

$$\sum_{k=1}^{n} | u(t_k) - u(t_{k-1}) |$$

yig'indini qaraymiz. Agar

$$\alpha_k = sign[u(t_k) - u(t_{k-1})], \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

belgilashlarni kiritsak, u holda

$$\sum_{k=1}^{n} | u(t_k) - u(t_{k-1}) | = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [u(t_k) - u(t_{k-1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [F(\varphi_{t_k}) - F(\varphi_{t_{k-1}})] = F\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}})\right].$$

F chiziqli funksionalning chegaralanganligi va $\| F \| = \| f \|$ dan

$$\sum_{k=1}^{n} | u(t_k) - u(t_{k-1}) | \le \| F \| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}) \right\| = \| f \|$$

tenglik kelib chiqadi. So'nggi tenglik

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}) \right\| = \sup_{\xi \in [a,b]} \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_{t_k}(\xi) - \varphi_{t_{k-1}}(\xi)) \right| = 1$$

tenglikka asoslangan. Shunday qilib, (12.13) ko'rinishdagi ixtiyoriy bo'linishda

$$\sum_{k=1}^{n} | u(t_k) - u(t_{k-1}) | \le \| f \|$$

tengsizlik o'rinli. Bundan kelib chiqadiki, $u \in V[a,b]$ va

$$V_a^b[u] \leq \| f \|. \qquad (12.14)$$

$x \in C[a,b]$ – ixtiyoriy element bo'lsin. Har bir n natural son uchun $[a,b]$ kesmani

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b, \quad t_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = 1,2,\ldots,n \qquad (12.15)$$

nuqtalar yordamida n ta teng bo'lakka ajratamiz va

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\left[\varphi_{t_k}(t) - \varphi_{t_{k-1}}(t)\right] \qquad (12.16)$$

pog'onasimon funksiyani quramiz. U holda $F(y_n)$ quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$F(y_n) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)[u(t_k) - u(t_{k-1})].$$

Bu y_n funksiyalarning aniqlanishidan ko'rinib turibdiki, $y_n(a) = x(a)$ va agar $t_{k-1} < t < t_k$ bo'lsa $y_n(t) = x(t_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$. Kantor teoremasiga ko'ra, x funksiya $[a,b]$ kesmada tekis uzluksiz funksiya bo'ladi. Shuning uchun $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, $|t - t'| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $t, t' \in [a,b]$ lar uchun $|x(t) - x'(t)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Shunday ekan, n yetarlicha katta bo'lganda

$$\frac{b-a}{n} < \delta$$

bo'lgani uchun

$$\max_{t \in [a,b]} |x(t) - y_n(t)| = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{t \in [t_{k-1}, t_k]} |x(t) - x(t_k)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan $\{y_n\}$ ketma-ketlikning x funksiyaga $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. F uzluksiz funksional bo'lganligi uchun

$$\lim_{n \to \infty} F(y_n) = F(x).$$

Ikkinchi tomondan $[a, b]$ da uzluksiz x va $[a, b]$ da o'zgarishi chegaralangan u funksiyalar uchun

$$\int_a^b x(t)du(t)$$

Riman-Stiltes integrali mavjudligi va (12.16) yig'indi uning (12.15) bo'linish bo'yicha integral yig'indisi bo'lganligi sababli

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}F(y_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x(t_k)[u(t_k)-u(t_{k-1})]=\int_a^b x(t)du(t).$$

Ammo, $x\in C[a,b]$ bo'lgani uchun $F(x)=f(x)$, ya'ni

$$f(x)=\int_a^b x(t)du(t). \qquad (12.17)$$

tenglik o'rinli. Shunday qilib ixtiyoriy $x\in C[a,b]$ uchun $f(x)$ (12.17) formula bo'yicha aniqlanadi.

Riman-Stiltes integrallari uchun o'rta qiymat haqidagi teoremaga ko'ra ixtiyoriy $x\in C[a,b]$ uchun

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)du(t)\right|\le\max_{t\in[a,b]}|x(t)|\,V_a^b[u] \quad \text{yoki} \quad |f(x)|\le V_a^b[u]\,\|x\|$$

tengsizlikni olamiz. Bundan

$$\|f\|\le V_a^b[u] \qquad (12.18)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Endi (12.14) va (12.18) tengsizliklarni taqqoslab,

$$\|f\|=V_a^b[u] \qquad (12.19)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Olingan natijalardan tashqari yana shuni ta'kidlash lozimki, $\varphi_a(t)\equiv 0$ va $F(0)=0$ bo'lgani uchun $u(a)=F(\varphi_a)=0$ shart o'rinli.

Endi f funksional uchun olingan natijalarni jamlab, quyidagi F.Riss teoremasini keltiramiz.

12.4-teorema. *$C[a,b]$ fazoda berilgan ixtiyoriy f chiziqli uzluksiz funksional uchun shu f funksional bo'yicha aniqlanuvchi shunday $u\in V_0[a,b]$ o'zgarishi chegaralangan funksiya mavjudki, barcha $x\in C[a,b]$ larda (12.17) va (12.19) tengliklar o'rinli.*

Ko'rsatish mumkinki [1], har bir o'zgarishi chegaralangan $u \in V_0[a,b]$ funksiya (12.17) tenglik yordamida yagona $f \in C^*[a,b]$ funksionalni aniqlaydi. Shuning uchun, $C^*[a,b]$ dagi chiziqli funksionallar bilan $V_0[a,b]$ o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosining elementlari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Bundan tashqari $\|f\| = \|u\|$ bo'lgani uchun, bu moslik izomorfdir, ya'ni $C^*[a,b] = V_0[a,b]$.

12.6. Berilgan $[a,b]$ kesmada $p(p \geq 1)$ - darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar sinfini $L_p[a,b]$ bilan belgilaymiz (8.15-misolga qarang). Ma'lumki, $L_p[a,b]$ to'la normalangan fazo, ya'ni Banax fazosidir.

Endi $p > 1$ uchun (12.7) munosabatni qanoatlantiruvchi q sonni olamiz. Isbotlamasdan quyidagi tasdiqni keltiramiz. Har bir $f \in L_p^*[a,b]$ funksional uchun yagona $y \in L_q[a,b]$ element mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in L_p[a,b]$ larda

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt \tag{12.20}$$

tenglik bajariladi va aksincha, $y \in L_q[a,b]$ uchun (12.20) formula $L_p^*[a,b]$ ga tegishli biror funksionalni aniqlaydi. Bundan tashqari (12.20) formula $L_p^*[a,b]$ va $L_q[a,b]$ fazolar o'rtasida izometrik moslik o'rnatadi. Shuning uchun $L_p^*[a,b]$ va $L_q[a,b]$ fazolar o'zaro izomorfdir, ya'ni $L_p^*[a;b] = L_q[a;b]$. Xususan, $p = 2$ da $L_2^*[a,b] = L_2[a,b]$. Shuning uchun $L_2[a,b]$ o'z-o'ziga qo'shma fazo deyiladi.

12.7. Hilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiy ko'rinishi quyidagicha $f(x) = (x, y)$, ya'ni ixtiyoriy f chiziqli uzluksiz funksionalga shu fazoning yagona y elementi mos keladi, shuning uchun Hilbert fazosi o'z-o'ziga qo'shma fazo hisoblanadi. Xuddi shu sababli, n o'lchamli Evklid fazosi ham o'z-o'ziga qo'shma fazo bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $f_0 : c_0 \to C$, $f_0(x) = x_1$ *chiziqli funksionalni normasini saqlagan holda c fazoga chiziqli davom ettiring.*

2. *Chiziqli funksional davomi yagonami? Javobni asoslang.*

3. $f : C_2[0,1] \to C_2[0,1]$, $f(x) = x(0)$ *funksionalni chiziqli chegaralanganlikka tekshiring.*

4. *Evklid fazolarida chiziqli funksionalning umumiy ko'rinishi qanday bo'ladi?*

5. *Uzluksiz funksiyalar fazosi* $C[-1,1]$ *dagi barcha toq funksiyalar to'plami* $C^-[-1,1] = L_0$ *(8.14-misolga qarang) qism fazo tashkil qiladi.* L_0 *qism fazoda* f_0 *chiziqli funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:*

$$f_0(x) = \int_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt, \qquad x \in L_0.$$

f_0 *funksionalni normasini saqlagan holda* $C[-1,1]$ *gacha davom ettiring.*

6. ℓ_1, ℓ_2 *va* ℓ_p, $p \geq 1$ *fazolarga qo'shma fazolarni toping.*

7. c_0, c *va* m *fazolarga qo'shma fazolarni toping.*

8. $C[a,b]$ *fazoga qo'shma fazoni toping.*

9. $L_2[a,b]$ *fazoga qo'shma fazoni toping.*

10. H *Hilbert fazosiga qo'shma fazoni toping.*

13-§. Chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi

Bu paragrafda biz chiziqli uzluksiz (chegaralangan) operatorlar fazosi $L(X,Y)$ ning to'laligi haqidagi teoremani isbotlaymiz. Operatorlar ketma-ketligining kuchsiz, kuchli (nuqtali) va tekis (norma bo'yicha) yaqinlashish ta'riflarini beramiz. Ularni misollarda tahlil qilamiz.

13.1-ta'rif. *Agar* $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ *operatorlar ketma-ketligi uchun shunday* $A \in L(X,Y)$ *operator mavjud bo'lib,* $\|A_n - A\| \to 0$, $n \to \infty$ *bo'lsa,*

$\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga norma bo'yicha yoki tekis yaqinlashadi deyiladi va* $A_n \xrightarrow{u} A$ *shaklda belgilanadi.*

13.2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x \in X$ *uchun* $\|A_n x - Ax\| \to 0$ *bo'lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchli yoki nuqtali yaqinlashadi deyiladi va* $A_n \xrightarrow{s} A$ *shaklda belgilanadi.*

13.3-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $f \in Y^*$ *va ixtiyoriy* $x \in X$ *uchun* $f(A_n x) \to f(Ax)$ *bo'lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchsiz yoki kuchsiz ma'noda* ($A_n \xrightarrow{w} A$) *yaqinlashuvchi deyiladi.*

13.3-ta'rif Hilbert fazosida quyidagicha bo'ladi.

13.4-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x, y \in H$ *uchun* $(A_n x, y) \to (Ax, y)$ *bo'lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchsiz yaqinlashuvchi deyiladi.*

13.1-misol. $A_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad A_n x = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_1, x_2, x_3, \ldots)$

operatorlar ketma- ketligining kuchli va kuchsiz ma'noda nol operatorga yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. ℓ_2 Hilbert fazosi bo'lganligi uchun $A_n : \ell_2 \to \ell_2$ operatorlar ketma-ketligining kuchsiz ma'noda nol operatorga yaqinlashishini 13.4-ta'rifdan foydalanib tekshiramiz. Ixtiyoriy $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_2$ uchun

$$|(A_n x, y) - (\Theta x, y)|^2 = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{n+k}\right|^2 \le \|x\|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2 \qquad (13.1)$$

munosabat o'rinli. $y \in \ell_2$ bo'lganligi uchun

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty.$$

Shunday ekan yaqinlashuvchi qatorning qoldig'i

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2$$

$n \to \infty$ da nolga intiladi. Bundan (13.1) ga ko'ra, ixtiyoriy $x, y \in \ell_2$ larda $|(A_n x, y) - (\Theta x, y)|$ ning $n \to \infty$ da nolga intilishi kelib chiqadi. Demak,

$\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operator Θ ga kuchsiz ma'noda yaqinlashar ekan. $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchli ma'noda yaqinlashmaydi, chunki

$$\lim_{n\to\infty}\| A_n x - \Theta x\| = \lim_{n\to\infty}\| x\| = \| x\| \neq 0.$$

13.2. Quyida berilgan $P_n, Q_n \in L(\ell_2)$ operatorlar ketma-ketligining kuchli va tekis ma'noda birlik va nol operatorlarga yaqinlashishini teksiring.

$$P_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad P_n x = (x_1, x_2, x_n, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

$$Q_n = I - P_n, \quad Q_n x = (0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots)$$

Yechish. Ixtiyoriy $x \in \ell_2$ uchun

$$\| Q_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | x_{n+k}|^2 \to 0, \; n \to \infty.$$

Chunki $x \in \ell_2$, ya'ni

$$\| x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k|^2 < \infty.$$

Shunday ekan, oxirgi qatorning qoldig'i

$$\sum_{k=1}^{\infty} | x_{n+k}|^2$$

$n \to \infty$ da nolga intiladi. Demak $\{Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchli ma'noda yaqinlashar ekan. Bundan $\{P_n = I - Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligining birlik operator I ga kuchli ma'noda yaqinlashishi kelib chiqadi. Endi $\{Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis ma'noda yaqinlashadimi yoki yo'qmi, shuni tekshiramiz.

$$\| Q_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | x_{n+k}|^2 \leq \| x\|^2.$$

Bundan

$$\| Q_n\| \leq 1 \tag{13.2}$$

ekanligini olamiz. Ikkinchi tomondan, $Q_n e_{n+1} = e_{n+1}$. Bundan

$$\| Q_n \| \geq \| Q_n e_{n+1}\| = 1. \tag{13.3}$$

(13.2) va (13.3) dan ixtiyoriy $n \in N$ uchun $\|Q_n\| = 1$ ga kelamiz. Demak, Q_n operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis (norma bo'yicha) yaqinlashmaydi. Bu yerdan $\{P_n\}$ operatorlar ketma-ketligi birlik operator I ga tekis yaqinlashmasligi kelib chiqadi.

13.3. $L_2[-1/2, 1/2]$ Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(A_n f) = x^n f(x)$$

formula bilan aniqlanuvchi A_n operatorlar ketma-ketligining nol operatorga tekis yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Ixtiyoriy $f \in L_2[-1/2, 1/2]$ uchun

$$\| A_n f \|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \left| x^n f(x) \right|^2 dt \le \max_{-1/2 \le x \le 1/2} \left| x^{2n} \right| \int_{-1/2}^{1/2} |f(x)|^2 dt \le \frac{1}{2^{2n}} \cdot \| f \|^2. \quad (13.4)$$

Bundan $\|A_n\| \le \frac{1}{2^n}$ tengsizlikni olamiz. Agar biz $0 \le \|A_n\|$ ekanligini hisobga olib, $n \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{n \to \infty} \| A_n - \Theta \| = 0.$$

Shunday ekan, A_n operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis yaqinlashadi.

Yuqorida kuchsiz yaqinlasuvchi operatorlar ketma-ketligi kuchli ma'noda yaqinlashmasligiga (13.1-misol) va kuchli ma'noda yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligi norma bo'yicha yaqinlashmasligiga (13.2-misol) misol keltirildi.

Quyida biz tekis yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligining kuchli ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'lishini va kuchli ma'noda yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligining kuchsiz ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'lishini isbotlaymiz.

13.1-lemma. *Agar $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ operatorlar ketma-ketligi biror $A \in L(X,Y)$ operatorga tekis yaqinlashsa, u holda $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Isbot. Lemma shartiga ko'ra $\|A_n - A\| \to 0,\ n \to \infty$. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\| \cdot \|x\|.$$

sonli tengsizlikka ega bo'lamiz. Matematik analizdan ma'lumki, tengsizliklarda limitga o'tish mumkin. Bunga ko'ra,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| \le \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| \cdot \|x\| = 0.$$

Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli ma'noda ham yaqinlashar ekan.

Shunga o'xshash quyidagi tasdiqni, bevosita ta'rifdan foydalanib isbotlash mumkin.

13.2-lemma. *Agar* $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ *operatorlar ketma-ketligi biror* $A \in L(X,Y)$ *operatorga kuchli ma'noda yaqinlashsa, u holda* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchsiz ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Isbot. Lemma shartiga ko'ra, ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0.$$

U holda ixtiyoriy $x \in X$ va $f \in Y^*$ uchun

$$0 \le |f(A_n x) - f(Ax)| = |f(A_n x - Ax)| \le \|A_n x - Ax\| \cdot \|f\|$$

sonli tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga o'tib,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} |f(A_n x) - f(Ax)| \le \lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| \cdot \|f\| = 0$$

munosabatni olamiz. Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi kuchsiz ma'noda A operatorga yaqinlashar ekan.

13.1-teorema. *Agar Y to'la fazo bo'lsa, u holda $L(X,Y)$ fazo ham to'la, ya'ni Banax fazosi bo'ladi.*

Isbot. $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo'lsin, ya'ni $n, m \to \infty$ da $\|A_n - A_m\| \to 0$. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Shuning uchun ixtiyoriy $x \in X$ da $\{A_n x\} \subset Y$ ketma-ketlik fundamentaldir. Y to'la fazo bo'lgani uchun $\{A_n x\}$ ketma-ketlik biror $y \in Y$ elementga yaqinlashadi. Demak, har bir $x \in X$ ga $\{A_n x\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lgan yagona $y \in Y$ element mos qo'yilyapti. Bu moslikni $A : X \to Y$ orqali belgilaymiz:

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x = y.$$

Endi $A \in L(X,Y)$ ekanligini ko'rsatamiz. Chiziqliligi:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n\to\infty}(\alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2) =$$

$$= \alpha_1 \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \alpha_2 \lim_{n\to\infty} A_n x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 .$$

Endi A ning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Shartga ko'ra,

$$\| A_n - A_m \| \to 0, \quad n, m \to \infty .$$

Demak, (11-§ ning 6-topshirig'iga qarang)

$$\big|\, \| A_n \| - \| A_m \| \,\big| \le \| A_n - A_m \| \to 0, \quad n, m \to \infty .$$

Bundan $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlikning fundamentalligi kelib chiqadi. Haqiqiy sonlar fazosi R to'la bo'lganligi uchun, $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir, yaqinlashuvchi ketma-ketlik esa chegaralangan bo'ladi. Ya'ni shunday $K > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$\|A_n\| \le K$$

tengsizlik bajariladi. Norma ta'rifidan

$$\|A_n x\| \le \|A_n\| \cdot \| x \| \le K \cdot \| x \| .$$

Bundan esa

$$\| A x \| = \left\| \lim_{n\to\infty} A_n x \right\| = \lim_{n\to\infty} \| A_n x \| \le K \cdot \| x \| .$$

Bu yerda biz normaning uzluksizligidan foydalandik. Endi $\{A_n\}$ ketma-ketlikni chiziqli operatorlar fazosi $L(X,Y)$ da A ga yaqinlashishini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 son mavjudki, barcha $n > n_0$, $p \in N$ va $\|x\| \le 1$ lar uchun

$$\|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Agar so'nggi tengsizlikda $p \to \infty$ da limitga o'tsak va normaning uzluksizligidan foydalansak, ixtiyoriy $n > n_0$ va $\|x\| \le 1$ lar uchun

$$\|Ax - A_n x\| \le \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Shuning uchun ixtiyoriy $n > n_0$ da

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax - A_n x\| \le \varepsilon$$

Demak, $L(X,Y)$ fazodagi norma ma'nosida

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A .$$

Shunday qilib, $L(X,Y)$ fazo to'la fazo ekan. Δ

13.1-natija. *X chiziqli normalangan fazoga qo'shma bo'lgan $X^* = L(X,C)$ fazo Banax fazosidir.*

Isbot. Kompleks sonlar to'plami C to'la fazo, shuning uchun 13.1-teoremaga ko'ra, $L(X,C)$ Banax fazosi bo'ladi. Δ

13.4-misol. $L(C_2[a,b], C[a,b])$ fazoni to'lalikka tekshiring.

Yechish. $Y = C[a,b]$ to'la fazo bo'lganligi uchun 13.1-teoremaga ko'ra, $L(C_2[a,b], C[a,b])$ to'la fazo, ya'ni Banax fazosi bo'ladi. Δ

13.5. $L(C[a,b], C_2[a,b])$ fazo uchun 13.1-teorema sharti bajariladimi? U to'lami?

Yechish. $Y = C_2[a,b]$ fazo to'la bo'lmagan (3.8 va 8.12-misollarga qarang) normalangan fazo bo'lganligi uchun 13.1-teorema sharti bajarilmaydi. Shuning uchun biz $L(C[a,b], C_2[a,b])$ fazoni to'la fazo deya olmaymiz. Aniqlik uchun $a = -1$, $b = 1$ deymiz va $L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ fazoning to'la emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $C_2[-1,1]$ fazoning to'la emasligini ko'rsatishda qo'llanilgan (3.8-misol va 3.1-chizmaga qarang) uzluksiz funksiyalarning

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1,-1/n],\\ nx, & x\in(-1/n,1/n)\\ 1, & x\in[1/n,1]\end{cases} \tag{13.5}$$

ketma-ketligidan foydalanib, $A_n \in L(C[-1,1], C_2[-1,1])$, $n\in N$ operatorlar ketma-ketligini quyidagicha quramiz:

$$(A_n f)(x)=f_n(x)f(x). \tag{13.6}$$

A_n operatorning chiziqli va uzluksizligi oson tekshiriladi. $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining $L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ fazoda fundamental ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\|A_n - A_m\|$ normani hisoblaymiz:

$$\|A_n - A_m\| = \sup_{\|f\|\le 1}\|A_n f - A_m f\| = \sup_{\|f\|\le 1}\sqrt{\int_{-1}^{1}|f_n(x)-f_m(x)|^2|f(x)|^2dx}\,. \tag{13.7}$$

(13.7) va

$$\|f\| = \max_{-1\le x\le 1}|f(x)|\le 1$$

ekanligidan foydalansak,

$$\|A_n - A_m\| \le \sqrt{\int_{-1}^{1}|f_n(x)-f_m(x)|^2dx} = \|f_n - f_m\|_{C_2[-1,1]} \tag{13.8}$$

tengsizlikni olamiz. $\{f_n\}$ ketma-ketlikning $C_2[-1,1]$ fazoda fundamentalligi 3.8-misolda isbotlangan. (13.8) dan hamda $\{f_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligidan $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining fundamentalligi kelib chiqadi. Lekin $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi $L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ fazoda yaqinlashuvchi emas. Teskaridan faraz qilaylik, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi biror $A\in L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ operatorga yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $f\in C[a,b]$ uchun $\lim_{n\to\infty}\|A_n f - Af\| = 0$ tenglik o'rinli. Ikkinchi tomondan $f_0(x)\equiv 1$ uchun

$$(A_n f_0)(x) = f_n(x),\ n\in N$$

tenglik o'rinli va $(Af_0)(x)=g_0(x)$ deylik. 3.8-misolda $\{f_n\}$ ketma-ketlikning birorta ham uzluksiz funksiyaga $C_2[-1,1]$ fazo normasida yaqinlasha olmasligi ko'rsatilgan edi, jumladan $\{A_n f_0 = f_n\}$ ketma-ketlik $g_0 = Af_0$ funksiyaga ham yaqinlasha olmaydi. Bu qarama qarshilik $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining yaqinlashuvchi emasligini bildiradi. Demak, $L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ to'la bo'lmagan normalangan fazo ekan. Δ

Banax-Shteynxaus teoremasi yordamida ko'rsatish mumkinki, agar X va Y lar Banax fazolari bo'lsa, u holda $L(X,Y)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan ham to'la bo'ladi.

13.2-teorema. *(Banax-Shteynxaus yoki tekis chegaralanganlik prinsipi). Agar chiziqli uzluksiz operatorlarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi X Banax fazosining har bir nuqtasida chegaralangan (ya'ni har bir $x \in X$ uchun shunday $M_x > 0$ mavjud bo'lib, ixtiyoriy $n \in N$ uchun*

$$\| A_n x \| \le M_x \tag{13.9}$$

tengsizlik o'rinli) bo'lsa, u holda bu operatorlarning normalaridan tuzilgan $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlik ham chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Avvalo (13.9) shart bajarilganda shunday

$$B[a_0, r_0] = \{x \in X : \|x - a_0\| \le r_0\}$$

yopiq shar mavjud bo'lib, bu sharda $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lishini (ya'ni shunday $M_0 > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyotiy $x \in B[a_0, r_0]$ va barcha $n \in N$ larda $\| A_n x \| \le M_0$ tengsizlik bajarilishini) ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, ya'ni $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik birorta ham yopiq sharda chegaralangan bo'lmasin. Ixtiyoriy $B[x_0, \varepsilon_0]$ shar olamiz. $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik $B[x_0, \varepsilon_0 / 2]$ sharda chegaralanmagan bo'lgani uchun shunday $x_1 \in B[x_0, \varepsilon_0 / 2]$ element va n_1 nomer mavjudki, $\| A_{n_1} x_1 \| > 1$ bo'ladi. A_{n_1} operatorning uzluksizligidan bu tengsizlik

$B[x_1,\varepsilon_1]\subset B[x_0,\varepsilon_0/2]$ sharda ham bajariladi. $B[x_1,\varepsilon_1/2]$ sharda $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralanmagan bo'lgani uchun shunday $x_2\in B[x_1,\varepsilon_1/2]$ element va n_2 nomer mavjudki, $\|A_{n_2}x_2\|>2$ shart bajariladi. A_{n_2} ning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_2,\varepsilon_2]\subset B[x_1,\varepsilon_1/2]$ sharda ham bajariladi va hokazo k-chi qadamda $B[x_{k-1},\varepsilon_{k-1}]$ sharning x_k nuqtasida $\|A_{n_k}x_k\|>k$ shart bajariladi. A_{n_k} ning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_k,\varepsilon_k]\subset B[x_{k-1},\varepsilon_{k-1}/2]$ sharda ham bajariladi. Demak, ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi

$$B[x_0,\varepsilon_0]\supset B[x_1,\varepsilon_1]\supset\cdots\supset B[x_k,\varepsilon_k]\supset\cdots$$

yopiq sharlar ketma-ketligining barchasiga qarashli bo'lgan $\bar{x}\in B[x_k,\varepsilon_k]$ element mavjud va barcha $k\in N$ larda $\|A_{n_k}\bar{x}\|>k$ tengsizlik bajariladi. Bu esa (13.9) ga zid. Shunday qilib, $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladigan $B[a_0,r_0]$ yopiq shar mavjud. Ixtiyoriy $x\in B[\theta,1]$ uchun $x'=r_0x+a_0$ nuqta $B[a_0,r_0]$ sharda yotadi. Shuning uchun, ixtiyoriy n da $\|A_n x'\|\le M_0$. Endi $x=r_0^{-1}(x'-a_0)$ tenglikdan foydalansak,

$$\|A_n x\|=\left\|A_n\left(\frac{1}{r_0}(x'-a_0)\right)\right\|=\frac{1}{r_0}\|A_n x'-A_n a_0\|\le$$

$$\le\frac{1}{r_0}\left(\|A_n x'\|+\|A_n a_0\|\right)\le\frac{1}{r_0}\left(M_0+\|A_n a_0\|\right)\le\frac{1}{r_0}\left(M_0+M_{a_0}\right)=M.$$

U holda

$$\|A_n\|=\sup_{\|x\|\le1}\|A_n x\|\le M.\quad\Delta$$

13.3-teorema. *Agar X va Y lar Banax fazolari bo'lsa, u holda $L(X,Y)$ operatorlar fazosi kuchli yaqinlashishga nisbatan to'ladir.*

Isbot. Istalgan $x\in X$ da $\{A_n x\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, har bir $x\in X$ da $\lim_{n\to\infty}A_n x$ mavjud va biz $Ax=\lim_{n\to\infty}A_n x=y$ tenglik bilan aniqlanuvchi A operatorga ega bo'lamiz. Bu operatorning chiziqliligi 13.1-teorema isbotida keltirilgan. Endi uning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Har bir $x \in X$ da $\{A_n x\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, u chegaralangandir. Banax-Shteynxaus teoremasiga ko'ra, ixtiyoriy $n \in N$ da $\|A_n\| \le M$ o'rinli. Bundan

$$\| Ax \| = \left\| \lim_{n\to\infty} A_n x \right\| = \lim_{n\to\infty} \| A_n x \| \le M \cdot \| x \|.$$

Demak, $\|A\| \le M$. Δ

13.6-misol. 13.2-misolda keltirilgan

$$P_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad P_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. $P_n : \ell_2 \to \ell_2$ operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatan ham, $X = \ell_2$ va $Y = \ell_2$-lar Banax fazolari. P_n ning chegaralangan ekanligi oson tekshiriladi. Har bir $x \in \ell_2$ nuqtada $\{P_n x\}$ chegaralangan ekanligi

$$\| P_n x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} = \| x \| = M_x$$

munosabatdan kelib chiqadi.

13.7. $L(\ell_2)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to'la fazo bo'ladimi?

Yechish., $X = Y = \ell_2$ lar to'la fazolar bo'lganligi uchun 13.3-teoremaga ko'ra $L(\ell_2)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to'la fazo bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Operatorlar ketma-ketligining kuchsiz, kuchli va tekis yaqinlashishlarini ta'riflang.*

2. *Kuchli yaqinlashuvchi, lekin tekis yaqinlashmaydigan operatorlar ketma-ketligiga misol keltiring (13.2-misolga qarang).*

3. *Kuchsiz yaqinlashuvchi, lekin kuchli yaqinlashmaydigan operatorlar ketma-ketligiga misol keltiring (13.1-misolga qarang).*

4. $L(\ell_1)$ *fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to'la fazo bo'ladimi? 13.3-teoremadan foydalaning.*

5. *13.2-misolda keltirilgan* $Q_n : \ell_2 \to \ell_2$

$$Q_n x = (0,\ldots,0,x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3},\ldots),$$

operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

6. $A_n : L_2[-\pi,\pi] \to L_2[-\pi,\pi]$,

$$(A_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos ny f(y)\,dy$$

operatorlar ketma-ketligini nol operatorga kuchli va kuchsiz ma'noda yaqinlashishga tekshiring.

7. $\{A_n\} \subset L(C[-1,1], L_2[-1,1])$ *operatorlar ketma-ketligini quyidagicha aniqlaymiz:*

$$(A_n f)(x) = f_n(x) f(x).$$

Bu yerda f_n *lar (13.5) tenglik bilan aniqlanadi.* A_n *operatorlar ketma-ketligining limitini toping. Limitik operatorga* A_n *operatorlar ketma-ketligi qaysi ma'noda (tekis, kuchli, kuchsiz) yaqinlashadi?*

8. $L(C_1[a,b])$ *fazo 13.1-teorema shartini qanoatlantiradimi?*

14-§. Teskari operatorlar

Bizga X ni Y ga akslantiruvchi A operator berilgan bo'lsin. $D(A)$ - uning aniqlanish sohasi, $\operatorname{Im} A$ esa uning qiymatlar sohasi bo'lsin.

14.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $y \in \operatorname{Im} A$ *uchun* $Ax = y$ *tenglama yagona yechimga ega bo'lsa, u holda* A *teskarilanuvchan operator deyiladi.*

Agar A teskarilanuvchan operator bo'lsa, u holda ixtiyoriy $y \in \operatorname{Im} A$ ga $Ax = y$ tenglamaning yechimi bo'lgan yagona $x \in D(A)$ element mos keladi. Bu moslikni o'rnatuvchi operator A operatorga teskari operator deyiladi va A^{-1} bilan belgilanadi, hamda

$$A^{-1}:Y \to X, \quad D(A^{-1}) = \operatorname{Im} A, \quad \operatorname{Im} A^{-1} = D(A).$$

Bundan tashqari teskari operatorning aniqlanishidan

$$A^{-1}Ax = x, \ \ x \in D(A), \quad AA^{-1}y = y, \quad y \in D(A^{-1}) \tag{14.1}$$

tengliklar kelib chiqadi.

Endi A akslantirish X ni o'zini-o'ziga akslantiruvchi chiziqli operator bo'lsin. Agar $B \in L(X, X) = L(X)$ operator uchun $BA = I$ bo'lsa, u holda B operator A operatorga chap teskari operator deyiladi. Xuddi shunday, $AC = I$ tenglik bajarilsa, C operator A ga o'ng teskari operator deyiladi.

14.1-tasdiq. *Agar A operator uchun ham chap teskari, ham o'ng teskari operatorlar mavjud bo'lsa, u holda ular o'zaro teng.*

Isbot. A uchun B chap teskari, C o'ng teskari operatorlar bo'lsin, u holda

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. \ \Delta \tag{14.2}$$

14.1-misol. $A:\ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$ operatorga chap teskari operatorni toping. A o'ngga siljitish operatori deyiladi.

Yechish. $B:\ell_2 \to \ell_2$ bilan chapga siljitish operatorini belgilaymiz:

$$Bx = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

Endi BA operatorning $x \in \ell_2$ elementga ta'sirini qaraymiz.

$$BAx = B(Ax) = B(0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = Ix.$$

Demak, B operator A uchun chap teskari operator ekan.

14.2. 14.1-misolda keltirilgan $A:\ell_2 \to \ell_2$ operatorga o'ng teskari operator mavjudmi?

Yechish. Faraz qilaylik, A ga o'ng teskari operator mavjud bo'lsin. Uni $C:\ell_2 \to \ell_2$ orqali belgilaymiz. 14.1-tasdiqqa ko'ra (14.1-misolga qarang) $B = C$ bo'ladi, ya'ni

$$Cx=(x_2,x_3,\ldots,x_{n+1},\ldots).$$

Endi AC operatorning $x\in\ell_2$ elementga ta'sirini qaraymiz.

$$ACx=A(Cx)=A(x_2,x_3,\ldots,x_{n+1},\ldots)=(0,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots)\neq Ix.$$

Demak, C operator A uchun o'ng teskari operator emas ekan. Bundan A uchun o'ng teskari operatorning mavjud emasligi kelib chiqadi.

14.2-tasdiq. *Agar A uchun bir vaqtda ham o'ng teskari, ham chap teskari operatorlar mavjud bo'lsa, u holda A teskarilanuvchan operator bo'ladi va $A^{-1}=B=C$ tenglik o'rinli.*

14.2 tasdiqning isboti 14.1-tasdiq va (14.1) tenglikdan kelib chiqadi.

14.1-teorema. *A chiziqli operatorga teskari bo'lgan A^{-1} operator ham chiziqlidir.*

Isbot. Shuni aytib o'tish kerakki, $\operatorname{Im}A=D(A^{-1})$ chiziqli ko'pxillilikdir. Shunday ekan ixtiyoriy α_1,α_2 sonlar va ixtiyoriy $y_1,y_2\in\operatorname{Im}A$ elementlar uchun

$$A^{-1}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\alpha_1A^{-1}y_1+\alpha_2A^{-1}y_2 \tag{14.3}$$

tenglikning to'g'ri ekanligini ko'rsatish yetarli. $Ax_1=y_1$ va $Ax_2=y_2$ deymiz. A chiziqli bo'lgani uchun

$$A(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2\,. \tag{14.4}$$

Teskari operator ta'rifiga ko'ra,

$$x_1=A^{-1}y_1,\qquad\qquad x_2=A^{-1}y_2\,.$$

Bu tengliklarni mos ravishda α_1 va α_2 sonlarga ko'paytirib qo'shsak,

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=\alpha_1A^{-1}y_1+\alpha_2A^{-1}y_2\,.$$

Ikkinchi tomondan, (14.4) dan va teskari operatorning ta'rifidan

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=A^{-1}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)$$

tenglik kelib chiqadi. Oxirgi ikki tenglikdan (14.3) tenglikni olamiz. Δ

14.2-teorema. *(Teskari operator haqida Banax teoremasi). A operator X Banax fazosini Y Banax fazosiga biyektiv akslantiruvchi* *chiziqli chegaralangan operator bo'lsin. U holda A^{-1} operator mavjud va chegaralangan.*

Teoremani isbotlashdan oldin quyidagi lemmani isbotlaymiz.

14.1-lemma. *M to'plam X Banax fazosining hamma yerida zich bo'lsin. U holda ixtiyoriy nolmas $y \in X$ elementni*

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots$$

qatorga yoyish mumkin. Bu yerda $y_k \in M$, $\|y_k\| \le 3 \cdot 2^{-k} \cdot \|y\|$, $k \in N$.

Isbot. $y_1, y_2, \ldots$ elementlarni ketma-ket quramiz. M to'plam X Banax fazosining hamma yerida zich bo'lgani uchun, shunday $y_1 \in M$ mavjudki,

$$\|y - y_1\| \le \frac{\|y\|}{2}$$

bo'ladi. $y_2 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\|y - y_1 - y_2\| \le \frac{\|y\|}{4}$$

bo'lsin. Endi $y_3 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\|y - y_1 - y_2 - y_3\| \le \frac{\|y\|}{8}$$

bajarilsin. Umuman $y_n \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\|y - y_1 - y_2 - y_3 - \cdots - y_n\| \le \frac{\|y\|}{2^n}$$

bo'lsin. Bunday tanlash mumkin, chunki M to'plam X ning hamma yerida zich. $y_n \in M$ elementlarning tanlanishiga ko'ra

$$\lim_{n \to \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| = 0,$$

ya'ni

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

qator yaqinlashadi va uning yig'indisi y ga teng. Endi $y_n \in M$ elementlarning normalarini baholaymiz:

$$\|y_1\|=\|y_1-y+y\|\le\|y_1-y\|+\|y\|\le\frac{\|y\|}{2}+\|y\|\le\frac{3\|y\|}{2},$$

$$\|y_2\|=\|y_2+y_1-y+y-y_1\|\le\|y_2+y_1-y\|+\|y-y_1\|\le\frac{\|y\|}{4}+\frac{\|y\|}{2}\le\frac{3\|y\|}{2^2}$$

va nihoyat

$$\|y_n\|=\|y_n+y_{n-1}+\cdots+y_1-y+y-y_1-\cdots-y_{n-1}\|\le$$

$$\le\|y_n+y_{n-1}+\cdots+y_1-y\|+\|y-y_1-\cdots-y_{n-1}\|\le\frac{\|y\|}{2^n}+\frac{\|y\|}{2^{n-1}}\le\frac{3\|y\|}{2^n}. \ \Delta$$

14.2-teoremaning isboti. A biyektiv akslantirish bo'lganligi uchun A^{-1} operator mavjud va $D(A^{-1})=Y$. Endi Y fazoda

$$M_k=\{y\in Y:\|A^{-1}y\|\le k\|y\|\},\ k=1,2,\ldots,$$

to'plamlarni qaraymiz. Y fazoning ixtiyoriy elementi M_k to'plamlarning birortasida yotadi. Shuning uchun

$$Y=\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k.$$

Ber teoremasiga ko'ra, M_k to'plamlarning birortasi qandaydir $B\subset Y$ sharda zich bo'ladi. Faraz qilaylik, M_n to'plam B sharda zich bo'lsin. B shar ichida sharsimon P qatlam olamiz, ya'ni

$$P=\{z\in B:\beta<\|z-y_0\|<\alpha,\ \ 0<\beta<\alpha,\ \ y_0\in M_n\}.$$

P qatlamni markazi nolda bo'ladigan qilib parallel ko'chiramiz va

$$P_0=\{z\in Y:\beta<\|z\|<\alpha\}.$$

sharsimon qatlamga ega bo'lamiz. Birorta $n_0\in N$ uchun M_{n_0} to'plam P_0 da zich bo'lishini ko'rsatamiz. Agar $z\in P\cap M_n$ bo'lsa, u holda $z-y_0\in P_0$ bo'ladi. Bundan tashqari

$$\|A^{-1}(z-y_0)\|\le\|A^{-1}z\|+\|(-1)A^{-1}y_0\|=\|A^{-1}z\|+\|A^{-1}y_0\|\le n\|z\|+n\|y_0\|=$$

$$=n(\|z-y_0+y_0\|+\|y_0\|)\le n(\|z-y_0\|+2\|y_0\|)=n\|z-y_0\|\left(1+\frac{2\|y_0\|}{\|z-y_0\|}\right)\le$$

$$\leq n\|z-y_0\|\left(1+\frac{2\|y_0\|}{\beta}\right). \tag{14.5}$$

Ma'lumki, $n\left(1+\frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)$ miqdor z ga bog'liq emas va biz

$$n_0 = 1+\left[n\left(1+\frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)\right]$$

deb olamiz. U holda (14.5) ga ko'ra, $z-y_0 \in M_{n_0}$ bo'ladi. M_n to'plamning P qatlamda zich ekanligidan M_{n_0} to'plamning P_0 qatlamda zich ekanligi kelib chiqadi. Endi Y dan ixtiyoriy nolmas y element olamiz. Shunday λ son mavjudki, $\beta<\|\lambda y\|<\alpha$ tengsizlik o'rinli, ya'ni $\lambda y \in P_0$ bo'ladi. M_{n_0} to'plam P_0 qatlamda zich bo'lgani uchun λy ga yaqinlashuvchi $y_k \in M_{n_0}$ ketma-ketlik qurish mumkin. U holda $y_k/\lambda \to y$. Ravshanki, $y_k \in M_{n_0}$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\lambda \neq 0$ uchun $\frac{y_k}{\lambda} \in M_{n_0}$ bo'ladi. Shunday qilib, M_{n_0} to'plam $Y \setminus \{0\}$ da zich va demak, Y ning o'zida ham zich.

Endi ixtiyoriy nolmas $y \in Y$ elementni olamiz va 14.1-lemmaga ko'ra M_{n_0} to'plamning elementlari orqali qatorga yoyamiz:

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots, \quad \|y_k\| \leq 3\cdot 2^{-k}\|y\|, \ k \in N.$$

X fazoda $x_k = A^{-1}y_k$ elementlardan tuzilgan qatorni qaraymiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-1}y_k. \tag{14.6}$$

Bu qator qandaydir $x \in X$ elementga yaqinlashadi, chunki

$$\|x_k\| = \|A^{-1}y_k\| \leq n_0\|y_k\| \leq 3n_0\frac{\|y\|}{2^k}$$

va

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| \leq 3n_0\|y\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 3n_0\|y\|.$$

(14.6) qatorning yaqinlashuvchiligidan va A ning uzluksizligidan

$$Ax = A\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A x_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y.$$

Bu yerdan $x = A^{-1}y$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| \le 3n_0\|y\|.$$

Bu yerdan

$$\|A^{-1}\| \le 3 \cdot n_0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shunday qilib, A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligi isbotlandi. Δ

Berilgan operatorga teskari operatorning mavjudligini ko'rsatish birmuncha osonroq, lekin teskari operatorni topish masalasi murakkab masaladir. Shuning uchun teskari operatorni topishni soddaroq holdan, ya'ni qaralayotgan fazo o'lchami chekli bo'lgan holdan boshlaymiz.

14.3. $A: R^3 \to R^3$, $Ax = (x_1, x_2 + x_1, x_3)$ operatorga teskari operator mavjudmi? Agar mavjud bo'lsa, uni toping.

Yechish. Berilgan A operatorga teskari operator mavjud bo'lishi uchun, ixtiyoriy $y \in \operatorname{Im} A = R^3$ da $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'lishi kerak. Endi $Ax = y$ tenglikdan x ni topamiz:

$$Ax = y \Leftrightarrow (x_1, x_2 + x_1, x_3) = (y_1, y_2, y_3).$$

Bundan

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

ya'ni

$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2 - y_1, y_3) = A^{-1}y.$$

Shunday qilib, A operatorga teskari operator mavjud bo'lib u

$$A^{-1}: R^3 \to R^3, \quad A^{-1}x = (x_1, x_2 - x_1, x_3)$$

ko'rinishga ega. 14.1-teoremaga ko'ra u chiziqli operator bo'ladi. Δ

14.4. 14.3 misolda qaralgan $A: R^3 \to R^3$ operator teskari operatorlar haqida Banax teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. $X = R^3$ va $Y = R^3$ lar Banax fazolari bo'lganligi uchun A akslantirishning biyeksiya ekanligini ko'rsatish yetarli. R^3 fazodan ixtiyoriy ikkita turli $x = (x_1, x_2, x_3)$ va $y = (y_1, y_2, y_3)$ elementlarni olamiz va $Ax \neq Ay$ ekanligini ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, $Ax - Ay = 0$ bo'lsin. So'nggi tenglikdan $x = y$ ekanligiga kelamiz. Bu qarama-qarshilik A akslantirishning inyektiv ekanligini ko'rsatadi. 14.3-misolda ixtiyoriy $y \in R^3$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega ekanligi ko'rsatilgan edi. Bu esa A akslantirishning syuryektiv ekanligini ko'rsatadi. Demak, A biyektiv akslantirish ekan. Δ

14.1. Teskari operatorlar haqida ba'zi teoremalar

Biz bu bandda operator teskarilanuvchan bo'lishining zaruriy va yetarli shartini keltiramiz. Shuningdek teskari operator mavjud va chegaralangan bo'lishining yetarli, zarur va yetarli shartlarini keltiramiz.

14.3-teorema. *$A: X \to Y$ chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun $Ax = \theta$ tenglama faqat $x = \theta$ yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* A teskarilanuvchan bo'lsin. U holda $Ax = \theta$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi. A chiziqli bo'lgani uchun bu yechim $x = \theta$ bo'ladi.

Yetarliligi. $Ax = \theta$ tenglama faqat nol yechimga ega bo'lsin, u holda ixtiyoriy $y \in \operatorname{Im} A$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi. Teskarisini faraz qilaylik, biror $y \in \operatorname{Im} A$ uchun yechim ikkita bo'lsin, ya'ni $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$. U holda $A(x_1 - x_2) = \theta$ bo'ladi. Shartga ko'ra, $x_1 - x_2 = \theta$. Bundan $x_1 = x_2$. Δ

14.4-teorema. *X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli A operator berilgan bo'lsin.*

$\operatorname{Im} A$ *da chegaralangan* A^{-1} *operator mavjud bo'lishi uchun, shunday* $m>0$ *son mavjud bo'lib, ixtiyoriy* $x \in D(A)$ *lar uchun*

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \tag{14.9}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* A^{-1} mavjud va chegaralangan bo'lsin, ya'ni

$$\left\|A^{-1}y\right\| \leq \frac{1}{m}\|y\|, \quad \forall y \in D\left(A^{-1}\right).$$

U holda

$$\|Ax\| = \|y\| \geq m\left\|A^{-1}y\right\| = m\|x\|.$$

Demak, (14.9) shart o'rinli.

Yetarliligi. (14.9) shartdan A operatorning o'zaro bir qiymatli ekanligi kelib chiqadi. Teskarisini faraz qilaylik, (14.9) shart bajarilsinu A o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lmasin. U holda shunday $x_1, x_2 \in D(A)$, $x_1 \neq x_2$ elementlar mavjudki,

$$Ax_1 = y, \qquad Ax_2 = y.$$

Bundan $A(x_1 - x_2) = \theta$ ekanligi kelib chiqadi. (14.9) tengsizlikka ko'ra,

$$0 \leq m\|x_1 - x_2\| \leq \|A(x_1 - x_2)\| = 0.$$

Bu yerdan $x_1 = x_2$ qarama-qarshilikka kelamiz. Demak, A - o'zaro bir qiymatli akslantirish ekan. Shuning uchun, teskari A^{-1} operator mavjud. Endi A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. (14.9) tengsizlikka ko'ra,

$$\|x\| \leq \frac{1}{m}\|Ax\|.$$

Ixtiyoriy $y = Ax \in \operatorname{Im} A$ uchun

$$\left\|A^{-1}y\right\| \leq \frac{1}{m}\|y\|.$$

Bu yerdan A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligi hamda

$$\left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{1}{m}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Δ

Endi 14.3 va 14.4-teorema shartlarining bajarilishiga doir misollar qaraymiz.

14.5-misol. $C[0,1]$ fazoda x ga ko'paytirish operatorini (11.8-misolga qarang), ya'ni

$$B: C[0;1] \to C[0;1], \quad (Bf)(x) = x f(x)$$

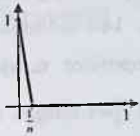
operatorni qaraymiz. Bu operator 14.3-teorema shartlarini qanoatlantiradimi? B teskarilanuvchan operator bo'ladimi?

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Endi $Bf = 0$ tenglamani, ya'ni $xf(x) = 0$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglama $C[0,1]$ fazoda faqat $f(x) \equiv 0$ yechimga ega. B operator 14.3-teorema shartlarini qanoatlantiradi. Demak, B - teskarilanuvchan operator, ya'ni B ga teskari operator mavjud.

14.6. 14.5-misolda qaralgan x ga ko'paytirish operatori $B: C[0,1] \to C[0,1]$, 14.4-teorema shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Ma'lumki, B - chiziqli operator. B operator uchun 14.4-teoremaning (14.9) sharti bajarilmasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $C[0,1]$ fazoda har bir elementining normasi 1 bo'lgan

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{agar } x \in [0, 1/n] \\ 0, & \text{agar } x \in (1/n, 1] \end{cases}$$



14.1-chizma.

ketma-ketlikni qaraymiz. Endi $\|Bg_n\|$ normani hisoblaymiz:

$$\|Bg_n\| = \max_{0\le x\le 1} |(Bg_n)(x)| = \max_{0\le x\le 1} |x g_n(x)| = \max_{0\le x\le 1/n} |x - nx^2| = \frac{1}{4n} \|g_n\|.$$

Istalgan $m > 0$ son uchun shunday n_0 natural son mavjudki, $\frac{1}{4n_0} < m$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan kelib chiqadiki,

$$\|Bg_n\| = \frac{1}{4n}\|g_n\| < m\|g_n\|.$$

Demak, B operator uchun (14.9) tengsizlikni qanoatlantiruvchi $m > 0$ son mavjud emas. 14.5-misolda ko'rsatildiki, B ga teskari operator mavjud, lekin 14.4-teoremaning sharti bajarilmaganligi uchun, B ga teskari operator chegaralanmagan bo'ladi. Δ

14.7. Endi $L_2[-1,1]$ Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi

$$A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1], \quad (Af)(x) = (x^2+1)f(x)$$

operatorni qaraymiz. A operator 14.4-teorema shartlarini qanoatlantiradimi? A ga chegaralangan teskari operator mavjudmi?

Yechish. A operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Endi A operator uchun 14.4-teoremaning (14.9) sharti bajarilishini ko'rsatamiz. Buning uchun $\|Af\|$ normani quyidan baholaymiz.

$$\|Af\|^2 = \int_{-1}^{1}\left|(x^2+1)f(x)\right|^2 dx \geq \int_{-1}^{1}|f(x)|^2 dx = \|f\|^2.$$

Biz bu yerda $|x^2+1| \geq 1$ tengsizlikdan hamda integralning monotonlik xossalaridan foydalandik. So'nggi tengsizlikdan $\|Af\| \geq \|f\|$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu yerda $m > 0$ son sifatida $(0,1]$ dagi ixtiyoriy sonni olish mumkin. 14.4-teorema tasdig'idan foydalansak A ga chegaralangan teskari operator mavjudligi hamda $\|A^{-1}\| \leq 1$ tengsizlik kelib chiqadi. Aslida $\|A^{-1}\| = 1$ tenglik o'rinli. Δ

14.5-teorema. X *- Banax fazosi va* $A \in L(X)$. *Agar* $\|A\| \leq q < 1$ *bo'lsa, u holda* $I - A$ *operator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.*

Isbot. $L(X)$ fazoda quyidagi formal qatorni qaraymiz:

$$I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots . \qquad (14.10)$$

Ma'lumki, $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Xuddi shuningdek, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. U holda (14.10) qatorning

$$S_n = I + \sum_{k=1}^{n} A^k$$

qismiy yig'indilari ketma-ketligi Koshi shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$\left\| S_{n+p} - S_n \right\| = \left\| A^{n+1} + A^{n+2} + \dots + A^{n+p} \right\| \le q^{n+1} + q^{n+2} + \dots + q^{n+p} \to 0,\ n \to \infty.$$

(14.10) qatorning qismiy yig'indilari ketma-ketligi S_n - fundamental ekan, $L(X) := L(X, X)$ to'la bo'lgani (13.1-teoremaga qarang) uchun

$$S_n \to S \in L(X).$$

Shunday qilib,

$$I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k = S.$$

Bundan tashqari

$$S(I - A) = \lim_{n\to\infty} S_n(I - A) = \lim_{n\to\infty}\left(I + A + A^2 + \dots + A^n - A - A^2 - \dots - A^{n+1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(I - A^{n+1}\right) = I.$$

Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, $(I - A)S = I$. Demak, S operator $I - A$ operator uchun teskari operator ekan. S operatorning normasi

$$\| S \| \le \sum_{n=0}^{\infty} \| A^n \| \le \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Demak, $S = (I - A)^{-1}$ operator chegaralangan va uning normasi

$$\| S \| = \left\| (I - A)^{-1} \right\| \le \frac{1}{1-q}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Δ

14.1-natija. *X - Banax fazosi va $A \in L(X)$ bo'lib, $\|A\| \le q < 1$ bo'lsa, u holda $I + A$ operator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.*

Natijaning isboti 14.5-teoremadan kelib chiqadi va

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - \dots + (-1)^n A^n + \dots.$$

14.2-lemma. *Agar $A, B \in L(X)$ bo'lib, $A^{-1}, B^{-1} \in L(X)$ bo'lsa, u holda AB operatorga chegaralangan teskari operator mavjud va $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ tenglik o'rinli.*

Lemmaning isboti $ABB^{-1}A^{-1}=I$, $B^{-1}A^{-1}AB=I$ tengliklardan hamda 14.2-tasdiqdan kelib chiqadi.

14.6-teorema. $A \in L(X)$ *operatorga chegaralangan teskari operator mavjud bo'lsin. Agar* $A': X \to X$ *operatorning normasi*

$$\|A'\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $B = A - A'$ *operatorga chegaralangan teskari operator mavjud.*

Isbot. B operatorni quyidagicha yozib olamiz: $A - A' = A\left(I - A^{-1}A'\right)$. Endi $A^{-1}A'$ operatorning normasini baholaymiz:

$$\left\|A^{-1}A'\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|A'\right\| < 1.$$

14.5-teoremaga ko'ra, $I - A^{-1}A$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud. U holda 14.2-lemmaga ko'ra, $A\left(I - A^{-1}A'\right)$ operator ham teskarilanuvchan bo'ladi, hamda

$$B^{-1} = \left(I - A^{-1}A'\right)^{-1}A^{-1}, \quad \left\|B^{-1}\right\| \le \left\|\left(I - A^{-1}A'\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$$

munosabatlar o'rinli. Δ

14.8-misol. Parametr $\lambda \in R$ ning qanday qiymatlarida

$$(I - \lambda A)f(x) = f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y \, f(y)dy, \quad f \in L_2[-\pi, \pi]$$

operatorga 14.5-teoremani va uning 14.1-natijasini qo'llash mumkin?

Yechish. $A \in L(L_2[-\pi, \pi])$ ekanligini tekshiramiz. Shu maqsadda ixtiyoriy $f, g \in L_2[-\pi, \pi]$ elementlarni va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ sonlarni olamiz va A operatorning $\alpha f + \beta g$ elementga ta'sirini qaraymiz:

$$(A(\alpha f + \beta g))(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y (\alpha f + \beta g)(y)dy = \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y \, f(y)dy +$$

$$+ \beta \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y \, g(y)\, dy = \alpha (Af)(x) + \beta (Ag)(x).$$

Biz bu yerda integralning additivlik va bir jinslilik xossalaridan foydalandik. Endi A operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\|Af\|$ norma kvadratini baholaymiz:

$$\|Af\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin y f(y)dy\right|^2 dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx\cdot\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sin y f(y)dy\right|^2. \quad (14.11)$$

Endi Koshi-Bunyakovskiy - $|(f,g)|\le\|f\|\cdot\|g\|$ tengsizligidan hamda

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

ayniyatlardan va $\cos 2x$ ning 1 ga ortogonalligidan foydalansak, (14.11) dan

$$\|Af\|^2\le\pi^2\|f\|^2 \quad (14.12)$$

tengsizlik kelib chiqadi. (14.12) dan

$$\|Af\|\le\pi\|f\|\Rightarrow\|A\|\le\pi \quad (14.13)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Ikkinchi tomondan $f_0(x)=\sin x$ desak, u holda

$$(Af_0)(x)=\pi\cos x \quad \text{va} \quad \|f_0\|=\sqrt{\pi},\quad \|Af_0\|=\pi\|f_0\|$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\|A\|\ge\frac{\|Af_0\|}{\|f_0\|}=\pi$$

va (14.13) dan foydalansak, $\|A\|=\pi$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerdan barcha $\lambda\in\left(-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ lar uchun $\|\lambda A\|<1$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, 14.5-teorema va uning natijasiga ko'ra, barcha $\lambda\in\left(-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ larda $I-\lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan. 14.5-teorema shartlarining bajarilishi $I-\lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan bo'lishini ta'minlaydi. Lekin $\lambda\notin\left(-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ ekanligidan $I-\lambda A$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud emas degan xulosa kelib chiqmaydi. Δ

Navbatdagi misolimiz bu fikrimizni tasdiqlaydi.

14.9. Parametr λ ning $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$ qiymatlarida

$$(I - \lambda A)f(x) = f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y\, f(y)dy, \quad f \in L_2[-\pi, \pi]$$

operatorga 14.5-teoremani qo'llab, unga teskari operatorni toping.

Yechish. 14.8-misolda $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ qiymatlar uchun $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjudligi ko'rsatilgan edi. Bu misolga 14.5-teoremani qo'llashimiz uchun A operatorning darajalarini hisoblashimiz kerak. Dastlab A operator kvadratini hisoblaymiz:

$$\left(A^2 f\right)(x) = A\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y\, f(y)dy\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin t \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin y\, f(y)dy\right)dt. \quad (14.14)$$

(14.14) tenglikda t bo'yicha integralni hisoblash mumkin. Agar biz

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t\, dt = 0$$

tenglikni hisobga olsak, $A^2 = 0$ ga ega bo'lamiz. Bu tenglikdan barcha $n \geq 2$ larda $A^n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada biz, $S = I - \lambda A = (I - \lambda A)^{-1}$ ga ega bo'lamiz. Haqiqatan ham,

$$(I - \lambda A)(I + \lambda A) = I + \lambda A - \lambda A - \lambda^2 A^2 = I$$

va

$$(I + \lambda A)(I - \lambda A) = I - \lambda A + \lambda A - \lambda^2 A^2 = I$$

tengliklar o'rinli. Isbot jarayonidan ma'lum bo'ldiki, barcha $\lambda \in R$ larda $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan bo'ladi.

14.10. Parametr $\lambda \in R$ ning qanday qiymatlarida

$$(Bf)(x) = \left(1 + x^2\right)f(x) - \lambda \int_{-1}^{1} x y\, f(y)dy, \quad f \in L_2[-1, 1] \quad (14.15)$$

operatorga 14.6-teoremani qo'llash mumkin?

Yechish. B operatorni $A-\lambda A'$ ko'rinishda yozib olamiz. $A\in L(L_2[-1,1])$ operator sifatida (14.7-misolga qarang)

$$(Af)(x)=(x^2+1)f(x), \quad f\in L_2[-1,1]$$

ni, $A'\in L(L_2[-1,1])$ operator sifatida esa

$$(A'f)(x)=\int_{-1}^{1} x\,y\,f(y)dy, \quad f\in L_2[-1,1]$$

ni olamiz. 14.7-misolda A operatorning teskarisi mavjud va $\|A^{-1}\|=1$ ekanligi ko'rsatilgan edi. 14.6-teoremani (14.15) tenglik bilan aniqlangan $B=A-\lambda A'$ operatorga qo'llashimiz uchun

$$\|\lambda A'\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}=1 \tag{14.16}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladigan λ ning barcha qiymatlarini topishimiz kerak. Shu maqsadda A' operatorning normasini topamiz. Buning uchun $\|A'f\|$ norma kvadratini baholaymiz:

$$\|A'f\|^2=\int_{-1}^{1}\left|\int_{-1}^{1} x\,y\,f(y)dy\right|^2 dx=\int_{-1}^{1} x^2\,dx\cdot\left|\int_{-1}^{1} y\,f(y)dy\right|^2\le\left(\frac{2}{3}\right)^2\|f\|^2. \tag{14.17}$$

Biz bu yerda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan hamda

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx=\frac{2}{3}$$

tenglikdan foydalandik. (14.17) dan

$$\|A'\|\le\frac{2}{3} \tag{14.18}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan $f_0(x)=x$ desak, u holda

$$(A'f_0)(x)=\frac{2}{3}\cdot x=\frac{2}{3}\cdot f_0(x) \quad \text{va} \quad \|A'f_0\|=\frac{2}{3}\cdot\|f_0\|, \quad \|f_0\|=\frac{2}{3}$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\|A'\|\ge\frac{\|A'f_0\|}{\|f_0\|}=\frac{2}{3}. \tag{14.19}$$

(14.18) va (14.19) lardan $\|A'\|=\frac{2}{3}$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerdan barcha $\lambda\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ lar uchun (14.16) ning, ya'ni $\|\lambda A'\|<1$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. 14.6-teoremaga ko'ra, barcha $\lambda\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ larda B operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan. 14.8-misoldagidek, $\lambda\notin\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ ekanligidan B operatorga chegaralangan teskari operator mavjud emas degan xulosa kelib chiqmaydi. Δ

14.11. Quyidagi operatorning teskarilanuvchan emasligini ko'rsating

$$A:C[0,1]\to C[0,1],\ (Af)(x)=f(0)x+f(1)x^2. \tag{14.20}$$

Yechish. Ma'lumki, chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun $Af=0$ tenglama faqat $f(x)\equiv 0$ yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli. (14.20) formula bilan berilgan A operator uchun $f_0(x)=x(1-x)$ funksiyani olsak, $f_0(0)=f_0(1)=0$ bo'lgani uchun

$$(Af_0)(x)=f_0(0)x+f_0(1)x^2\equiv 0.$$

Demak, $Af=0$ tenglama nolmas f_0 yechimga ega, 14.3-teoremaga ko'ra, A operator teskarilanuvchan emas. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Teskarilanuvchan operator ta'rifini keltiring.*
2. *Chiziqli operatorga teskari operator har doim chiziqli bo'ladimi?*
3. *Chiziqli chegaralangan operatorga teskari operator mavjud bo'lsa, u chiziqli chegaralangan bo'ladimi? Misollarda tushuntiring. 14.5, 14.6-misollarga qarang.*
4. *A - chiziqli operatorning yadrosi $KerA$ nolmas elementni saqlasa, u holda A ga teskari operator mavjud bo'lishi mumkinmi?*

5. *14.10-misoldagi B operatorga teskari operatorni toping.*

6. *14.5-misolda keltirilgan B operatorga teskari operatorni toping. B^{-1} operatorning aniqlanish sohasini toping. $D(B^{-1})=C[0,1]$ tenglik to'g'rimi? Agar bu tenglik to'g'ri bo'lmasa, $D(B^{-1})$ to'plam $C[0,1]$ fazoning hamma yerida zichmi?*

7. *Ko'paytirish operatori $A:\ell_2\to\ell_2$, $(Ax)_n=a_nx_n$ ning teskarilanuvchan bo'lishining zarur va yetarli shartini toping.*

8. *Ko'paytirish operatori $A:\ell_2\to\ell_2$, $(Ax)_n=a_nx_n$ ga chegaralangan teskari operator mavjud bo'lishining zarur va yetarli shartini toping.*

9. *Ko'paytirish operatori $A:\ell_2\to\ell_2$, $(Ax)_n=n^{-1}x_n$ ga teskari operatorni toping. U chegaralangan operator bo'ladimi?*

10. *Ko'paytirish operatori $A:L_2[-1,1]\to L_2[-1,1]$, $(Af)(x)=[x]f(x)$ ga teskari operator mavjudmi? Bu operatorning yadrosini toping.* dim $KerA=\infty$ *tenglik to'g'rimi? Bu yerda $[x]$ deb x sonining butun qismi belgilangan.*

15-§. Qo'shma operatorlar

Bu paragrafda biz Banax va Hilbert fazolarida aniqlangan operatorlarga qo'shma operatorlarni qaraymiz va ularning ayrim xossalarini o'rganamiz.

15.1. Banax fazosida qo'shma operatorlar

X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli uzluksiz A operator berilgan bo'lsin, ya'ni

$$A:X\to Y,\quad y=Ax\in Y,\quad D(A)=X.$$

Bizga ixtiyoriy $g:Y\to C$ chiziqli chegaralangan funksional berilgan bo'lsin. Bu funksionalning $y=Ax$ elementga ta'sirini qaraymiz

$g(y) = g(Ax)$. Osongina ko'rsatish mumkinki, $g(Ax)$ funksional X da aniqlangan biror chiziqli f funksionalni aniqlaydi. Shunday qilib,

$$g(Ax) = f(x). \qquad (15.1)$$

Endi (15.1) tenglik bilan aniqlangan f funksionalning chiziqli ekanligini ko'rsatamiz:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = g(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = g(\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2) =$$
$$= \alpha_1 g(Ax_1) + \alpha_2 g(Ax_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \qquad (15.2)$$

(15.2) tenglik barcha $x_1, x_2 \in X$ va ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ lar uchun o'rinli. Demak, f chiziqli funksional ekan. Endi uning chegaralangan ekanligini (uzluksizligini) ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$|f(x)| = |g(Ax)| \le \|g\| \cdot \|Ax\| \le \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$$

tengsizlik o'rinli. Bu yerdan f funksionalning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Agar f funksionalning x nuqtadagi qiymatini (f, x) deb belgilasak, u holda

$$(f, x) = (g, Ax). \qquad (15.3)$$

15.1-ta'rif. *Bizga $X, Y-$ chiziqli normalangan fazolar va $A : X \to Y$ chiziqli chegaralangan operator berilgan bo'lsin. Agar biror $A^* : Y^* \to X^*$ operator va ixtiyoriy $x \in X$, $g \in Y^*$ lar uchun*

$$(g, Ax) = (A^* g, x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* operator A ga qo'shma operator deyiladi.

Demak, har bir $g \in Y^*$ funksionalga (15.3) tenglik bilan aniqlanuvchi $f \in X^*$ funksionalni mos qo'yuvchi $A^* : Y^* \to X^*$ operator A operatorga qo'shma operator deb ataladi.

Qo'shma operatorlar quyidagi xossalarga ega:

1. A^* operator chiziqli.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

3. Ixtiyoriy k son uchun $(kA)^* = kA^*$.

4. Agar A uzluksiz bo'lsa, u holda A^* ham uzluksiz bo'ladi.

Aniqrog'i, quyidagi tasdiq o'rinli.

15.1-teorema. *Agar $A \in L(X,Y)$ bo'lsa, u holda $A^* \in L(Y^*, X^*)$ va*

$$\|A^*\| = \|A\|$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Funksional hamda operator normasining xossalariga ko'ra,

$$|(A^*g, x)| = |(g, Ax)| \le \|g\| \, \|Ax\| \le \|A\| \, \|g\| \|x\|.$$

Bu yerdan

$$\|A^*g\| \le \|A\| \, \|g\|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak,

$$\|A^*\| \le \|A\| \tag{15.4}$$

Endi $x \in X$, $Ax \ne \theta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy element bo'lsin, $y_0 = \dfrac{Ax}{\|Ax\|} \in Y$ deymiz. Ko'rinib turibdiki, $\|y_0\| = 1$. Xan-Banax teoremasining 12.1-natijasiga ko'ra, shunday $g: Y \to C$ funksional mavjudki, $\|g\| = 1$ va $g(y_0) = \|y_0\| = 1$, ya'ni

$$g(y_0) = g\left(\frac{Ax}{\|Ax\|}\right) = \frac{1}{\|Ax\|} g(Ax) = 1.$$

Bu yerdan,

$$g(Ax) = \|Ax\|$$

tenglikka ega bo'lamiz. U holda

$$\|Ax\| = g(Ax) = |(A^*g)(x)| \le \|A^*g\| \, \|x\| \le \|A^*\| \, \|g\| \|x\| = \|A^*\| \, \|x\|$$

munosabatdan

$$\|A\| \le \|A^*\| \tag{15.5}$$

tengsizlikni olamiz. (15.4) va (15.5) munosabatlardan

$$\|A\| = \|A^*\|$$

tenglik kelib chiqadi. Δ

15.2. Hilbert fazosida qo'shma operatorlar

Ma'lumki, Hilbert fazosiga qo'shma fazo uning o'ziga izomorf, ya'ni $H = H^*$ (tenglik izomorfizm ma'nosida). Shuning uchun Hilbert fazolarida qo'shma operatorlar xossalarini o'rganish ancha qulay.

15.2-ta'rif. *H Hilbert fazosi va $A \in L(H)$ operator berilgan bo'lsin. Agar biror $A^* : H \to H$ operator va ixtiyoriy $x, y \in H$ lar uchun*

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* operator A ga qo'shma operator deyiladi.

Bu ta'rif Banax fazosidagi qo'shma operatorning ta'rifidan biroz farq qiladi, ya'ni bu yerda $(kA)^* = \bar{k}A^*$ (3-xossaga qarang) tenglik o'rinli.

Hilbert fazosi holida A va A^* operatorlar aynan bitta fazoda aniqlangani uchun, ba'zan $A = A^*$ tenglik ham o'rinli bo'lishi mumkin.

15.3-ta'rif. *Agar $A = A^*$ bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $x, y \in H$ uchun*

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A operator o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi.

15.4-ta'rif. *Bizga $A : H \to H$ chiziqli operator va $H_0 \subset H$ qism fazo berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in H_0$ uchun $Ax \in H_0$ bo'lsa, u holda H_0 qism fazo A operatorga nisbatan invariant qism fazo deyiladi.*

15.1-lemma. *Bizga $A : H \to H$ chiziqli operator va $H_0 \subset H$ qism fazo berilgan bo'lsin. Agar H_0 qism fazo A operatorga nisbatan invariant bo'lsa, u holda uning ortogonal to'ldiruvchisi bo'lgan $H_0^\perp \subset H$ qism fazo A^* operatorga nisbatan invariant bo'ladi.*

Isbot. Haqiqatan ham, agar $y \in H_0^\perp$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in H_0$ uchun

$$(A^*y,x)=(y,Ax)=0,$$

chunki $Ax\in H_0$. Demak, $A^*y\in H_0^\perp$. Δ

Xususiy holda, agar $A=A^*$ bo'lsa, u holda $A(H_0)\subset H_0$ ekanligidan $A(H_0^\perp)\subset H_0^\perp$ ekanligi kelib chiqadi.

Hilbert fazosida qo'shma operatorlar quyidagi xossalarga ega:

15.2-lemma. *Agar $A,B\in L(H)$ bo'lsa, u holda*

1) $(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$,

2) $(AB)^*=B^*A^*$,

3) $(A^*)^*=A$ *tengliklar o'rinli.*

Isbot. Birinchi tenglikni isbotlaymiz.

$$((\alpha A+\beta B)x,y)=(\alpha Ax+\beta Bx,y)=\alpha(Ax,y)+\beta(Bx,y)=$$

$$=\alpha(x,A^*y)+\beta(x,B^*y)=(x,\overline{\alpha}A^*y)+(x,\overline{\beta}B^*y)=(x,(\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*)y).$$

Bundan $(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$ tenglik kelib chiqadi.

2) ni isbotlaymiz:

$$((AB)x,y)=(A(Bx),y)=(Bx,A^*y)=(x,B^*A^*y).$$

Bundan $(AB)^*=B^*A^*$ tenglik kelib chiqadi.

3) ning isboti bevosita qo'shma operator ta'rifidan kelib chiqadi. Δ

Endi operatorlarning Banax va Hilbert qo'shmalarini topishga doir misollar qaraymiz.

15.1-misol. $X=Y=\ell_1$ va T o'ngga siljitish operatori bo'lsin (14.1-misolga qarang), ya'ni

$$Tx=(0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},\ldots),\quad x\in\ell_1$$

bo'lsin. T ga qo'shma T^* operatorni toping.

Yechish. $X=\ell_1$ va $Y=\ell_1$ lar Banax fazolari bo'lganligi uchun T operatorning Banax qo'shmasini topamiz. Ma'lumki, $T\in L(\ell_1)$ operatorning Banax qo'shmasi barcha $x\in\ell_1$ va $f\in(\ell_1)^*$ lar uchun

$$(T^*f)(x)=f(Tx) \tag{15.6}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi va $(\ell_1)^*$ fazoni $(\ell_1)^*$ fazoga akslantiruvchi operatordan iborat. Bizga ma'lumki, $(\ell_1)^* = m$, boshqacha aytganda har qanday $f \in (\ell_1)^*$ uchun shunday yagona $y \in m$ mavjudki,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots) \in m \tag{15.7}$$

tenglik barcha $x \in \ell_1$ lar uchun o'rinli bo'ladi. Xuddi shuningdek, shunday $\zeta \in m$ mavjudki,

$$(T^* f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \zeta_k, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n, \dots) \in m \tag{15.8}$$

tenglik barcha $x \in \ell_1$ lar uchun bajariladi. (15.7) va (15.8) tengliklarni hisobga olsak, berilgan T operator uchun (15.6) shart quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \zeta_k = \sum_{k=2}^{\infty} x_{k-1} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1}. \tag{15.9}$$

Bu tenglik barcha $x \in \ell_1$ lar uchun bajariladi. Xususiy holda, $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{k}, 0, \dots)$, $k \in N$ elementlar uchun (15.9) tenglik

$$\zeta_k = y_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots$$

tengliklarga aylanadi. Shunday qilib, $T^* : m \to m$ operator

$$T^* y = T^*(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (y_2, y_3, \dots, y_{n+1}, \dots)$$

formula bilan aniqlanar ekan.

15.1-teoremaga ko'ra, $T \in L(X, Y)$ ekanligidan $T^* \in L(Y^*, X^*)$ ekanligi kelib chiqadi va $\|T^*\| = \|T\|$ tenglik bajariladi. Qaralayotgan misolda 15.1-teoremaning o'rinli ekanligini tekshirib ko'ramiz. T^* operatorning chiziqli ekanligi uning aniqlanishidan ko'rinib turibdi. $\|T\| = \|T^*\|$ tenglik bajarilishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = 1, \qquad \|T^*\| = \sup_{\|y\|=1} \|T^* x\| = \sup_{2 \le k < \infty} |y_k| = 1.$$

15.2. ℓ_2 fazoda ko'paytirish operatorini, ya'ni (11.9-misolga qarang)

$$A:\ell_2\to\ell_2,\quad (Ax)_n=a_nx_n,\quad \sup_{n\geq 1}|a_n|=a<\infty \tag{15.10}$$

operatorni qaraymiz. Unga qo'shma operatorni toping.

Yechish. $X=Y=\ell_2$ Hilbert fazolari bo'lganligi uchun A ga Hilbert ma'nosidagi qo'shma operatorni topamiz. A operatorning chiziqli va chegaralanganligi 11.9-misolda ko'rsatilgan. A ga qo'shma operatorni topish uchun (Ax,y) skalyar ko'paytmani qaraymiz. ℓ_2 fazodagi skalyar ko'paytmadan foydalansak,

$$(Ax,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(Ax)_n\overline{y_n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\overline{y_n}=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{\overline{a_n}y_n}=(x,A^*y).$$

Bundan

$$A^*:\ell_2\to\ell_2,\quad (A^*x)_n=\overline{a_n}x_n,$$

ni olamiz. Bu yerdan A ning qo'shmasi o'ziga teng bo'lishi uchun $a_n,\ n\in N$ sonlarning haqiqiy bo'lishi zarur va yetarlidir degan xulosaga kelamiz. Δ

15.3. $L_2[a,b]$ kompleks Hilbert fazosida, $u(x)$ funksiyaga ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$(Af)(x)=u(x)f(x),\quad f\in L_2[a,b]$$

operatorni qaraymiz. Bu yerda $u-$ chegaralangan va o'lchovli funksiya. A ga qo'shma operatorni toping.

Yechish. $X=Y=L_2[a,b]$ Hilbert fazolari bo'lganligi uchun A ga Hilbert ma'nosidagi qo'shma operatorni topamiz. u funksiyaning chegaralangan va o'lchovli ekanligidan A operatorning aniqlanish sohasi $D(A)=L_2[a,b]$ ekanligi va A ning chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Ta'rifga ko'ra, $A\in L(L_2[a,b])$ operatorning qo'shmasi hamma $f,g\in L_2[a,b]$ lar uchun

$$(Af,g)=(f,A^*g) \tag{15.11}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $A^* \in L(L_2[a,b])$ operatordan iborat. Agar biz $L_2[a,b]$ fazodagi skalyar ko'paytmadan foydalansak, (15.11) tenglikni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$(Af,g) = \int_a^b (Af)(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_a^b u(x)f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\overline{\overline{u(x)}\,g(x)}\,dx = (f,A^*g).$$

Bu tenglikdan

$$(A^*g)(x) = \overline{u(x)}g(x), \quad g \in L_2[a,b]$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan $A = A^*$ bo'lishi uchun, deyarli barcha $x \in [a,b]$ larda $u(x) \in R$ bo'lishi zarur va yetarlidir degan xulosaga kelamiz. Δ

15.4. Endi $L_2[a,b]$ Hilbert fazosida $K(x,y)$ yadro bilan aniqlanuvchi integral operatorni, ya'ni

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy, \quad f \in L_2[a,b] \tag{15.12}$$

operatorni qaraymiz. Bu yerda K - $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda aniqlangan chegaralangan va o'lchovli funksiya. A operatorga qo'shma operatorni toping.

Yechish. K funksiyaning chegaralangan va o'lchovli ekanligidan, uning $L_2([a,b]\times[a,b])$ fazoga qarashli ekanligi kelib chiqadi. Fubini teoremasidan (19.1-teorema) foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(Af,g) = \int_a^b\left\{\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right\}\overline{g(x)}\,dx = \int_a^b\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy\,\overline{g(x)}\,dx =$$

$$= \int_a^b\left\{\int_a^b K(x,y)\overline{g(x)}\,dx\right\}f(y)dy = \int_a^b f(x)\left\{\overline{\int_a^b \overline{K(y,x)}g(y)dy}\right\}dx = (f,A^*g).$$

Bu yerdan

$$(A^*g)(x) = \int_a^b \overline{K(y,x)}g(y)dy \tag{15.13}$$

tenglik kelib chiqadi. Xususan, (15.12) ko'rinishdagi A operator $L_2[a,b]$ fazoda o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun, deyarli barcha $x,y\in[a,b]$ lar uchun

$$K(x,y)=\overline{K(y,x)} \tag{15.14}$$

tenglikning bajarilishi yetarli va zarurdir.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Banax fazosida operatorning qo'shmasi qanday ta'riflanadi?*
2. *Hilbert fazosida operatorning qo'shmasi qanday ta'riflanadi?*
3. *Yuqoridagi ta'riflarda qanday farq bor? Javobni xossalarda tushuntiring.*
4. *O'z-o'ziga qo'shma va o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan operatorlarga misollar keltiring.*
5. *Hilbert fazosida birlik operatorga qo'shma operatorni toping. U o'z-o'ziga qo'shma bo'ladimi?*
6. *Chiziqli chegaralangan operatorga qo'shma operator har doim chiziqli chegaralangan bo'ladimi?*
7. $A:\ell_2\to\ell_2$, $Ax=(a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n,\ldots)$ *operatorga qo'shma operatorni toping. Bu yerda* $a_n\in C$, $n\in N$. *15.2-misoldan foydalaning.*
8. $B:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $(Bf)(x)=u(x)f(x)$ *operatorga qo'shma operatorni toping. Bu yerda* $u:[a,b]\to C$ *uzluksiz funksiya.*
9. *O'z-o'ziga qo'shma* $A,B:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ *operatorlar berilgan:*

$$(Af)(x)=xf(x),\qquad (Bf)(x)=\int_0^1 xyf(y)dy.$$

AB *va* BA *operatorlarni toping. Ular o'z-o'ziga qo'shma bo'ladimi?*

10. $A:L_2[-1,1]\to L_2[-1,1]$ *operator berilgan:*

$$(Af)(x)=\int_{-1}^{1}(x^2+iy^2)f(y)dy.$$

Uning invariant qism fazolarini toping. Juft funksiyalardan iborat $L_2^+[-1,1]=\{f\in L_2[-1,1]: f(-x)=f(x)\}$ qism fazo A operator uchun invariant qism fazo bo'ladimi?

16-§. Chiziqli operatorning spektri va rezolventasi

Operatorlar nazariyasida spektr tushunchasi eng muhim tushunchalardan biridir. Chiziqli operator spektrini o'rganish matematik fizika uchun muhimdir. Masalan, kvant mexanikasida sistema Hamiltoniani - bu Hilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operatordir, uning spektrini o'rganish sistema fizik xususiyatlarini o'rganish uchun muhimdir. Spektr tushunchasini dastlab chekli o'lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun eslatamiz.

Faraz qilaylik, $A: C^n \to C^n$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar biror λ son uchun

$$Ax=\lambda x$$

tenglama nolmas $x\in C^n$ yechimga ega bo'lsa, u holda λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos keluvchi nolmas x yechim esa xos vektor deyiladi. Ma'lumki, har bir $A: C^n \to C^n$ chiziqli operatorga $\{a_{ij}\}-n\times n$ matritsa mos keladi va aksincha. Chiziqli algebra kursidan ma'lumki, agar λ son A operatorning xos qiymati bo'lsa, $det(A-\lambda I)=0$ bo'ladi va aksincha. $n\times n$ matritsa determinanti $det(A-\lambda I)$, parametr λ ning $n-$ darajali ko'phadi bo'ladi va $det(A-\lambda I)=0$ tenglama ko'pi bilan n ta ildizga ega, ya'ni $A: C^n \to C^n$ chiziqli operator ko'pi bilan n ta xos qiymatga ega. Agar λ son A operatorning xos qiymati bo'lsa $A-\lambda I$ ga teskari operator mavjud emas va aksincha. Agar λ son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa, ya'ni $det(A-\lambda I)\neq 0$ bo'lsa, u holda $A-\lambda I$ ga teskari operator mavjud va u C^n fazoning hamma yerida aniqlangan bo'ladi.

16.1-teorema. $A: C^n \to C^n$ *chiziqli operator chegaralangandir.*

Isbot. C^n fazoda $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormal bazisni tanlaymiz. U holda har bir $x \in C^n$ vektor yagona usulda

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$$

ko'rinishda tasvirlanadi. Agar A operator C^n da aniqlangan chiziqli operator bo'lsa, u holda

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A(e_i)$$

bo'ladi. Shunday ekan, chiziqli operator o'zining $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis vektorlardagi qiymatlari bilan bir qiymatli aniqlanadi. Endi Ax ning normasini baholaymiz:

$$\|Ax\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|A(e_i)\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|A(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M \cdot \|x\|.$$

Bu yerda

$$M = \left(\sum_{i=1}^{n} \|A(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demak, chekli o'lchamli fazoda aniqlangan har qanday chiziqli operator chegaralangan bo'lar ekan. Δ

Yuqorida aytilganlarning natijasi sifatida shuni ta'kidlash lozimki, chekli o'lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun quyidagi ikki holat sodir bo'lishi mumkin:

1) λ son uchun $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas yechimga ega, ya'ni λ son A operator uchun xos qiymat, bu holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas;

2) λ son uchun C^n fazoning hamma yerida aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud va demak, chegaralangan.

Chekli o'lchamli fazolarda chiziqli operatorning xos qiymatlari to'plami uning spektri deb ataladi. Agar $\lambda \in C$ son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa, u A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi. Umuman aytganda, chekli o'lchamli fazolarda spektr termini kam ishlatiladi.

Agar A operator cheksiz o'lchamli X fazoda berilgan bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan 1 va 2 holatlardan farqli bo'lgan uchinchi holat ham bo'ladi, ya'ni:

3) $(A-\lambda I)^{-1}$ operator mavjud, ya'ni $Ax=\lambda x$ tenglama faqat nol yechimga ega, lekin $(A-\lambda I)^{-1}$ operator X ning hamma yerida aniqlanmagan yoki $\overline{Im(A-\lambda I)} \neq X$.

16.1-ta'rif. *Agar $\lambda \in C$ son uchun $A-\lambda I$ ga teskari operator mavjud bo'lib, u X ning hamma yerida aniqlangan bo'lsa, λ soni A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi,*

$$R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$$

operator esa A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to'plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

16.2-ta'rif. *A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalari to'plami A operatorning spektri deyiladi va u $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.*

16.3-ta'rif. *Agar biror $\lambda \in C$ son uchun $(A-\lambda I)x=0$ tenglama nolmas $(x \neq 0)$ yechimga ega bo'lsa, λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, nolmas yechim x esa xos vektor deyiladi.*

Ko'rinib turibdiki, barcha xos qiymatlar to'plami spektrda yotadi, chunki λ xos qiymat bo'lsa, $A-\lambda I$ operatorning teskarisi mavjud emas.

Spektr quyidagi qismlarga ajratiladi.

16.4-ta'rif. *a) Barcha xos qiymatlar to'plami A operatorning nuqtali spektri deyiladi va $\sigma_{pp}(A)$ bilan belgilanadi.*

b) Agar λ xos qiymat bo'lmasa va $\overline{Im(A-\lambda I)} \neq X$, ya'ni $A-\lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi X ning hamma yerida zich emas. Bunday λ

lar to'plami A operatorning qoldiq spektri deyiladi va $\sigma_{qol}(A)$ bilan belgilanadi.

Endi o'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun muhim spektr ta'rifini keltiramiz.

16.5-ta'rif. *Agar biror $\lambda \in \sigma(A)$ son uchun nolga kuchsiz yaqinlashuvchi $f_n \in H$ birlik vektorlar ketma-ketligi mavjud bo'lib*

$$\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda I)f_n\| = 0$$

bo'lsa, u holda λ son $A = A^*$ operatorning muhim spektriga qarashli deyiladi. A operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(A)$ bilan belgilanadi.

Operatorning nuqtali va qoldiq spektrlari o'zaro kesishmaydi. Nuqtali va muhim spektrlar o'zaro kesishishi mumkin.

16.2-teorema. *Agar $A \in L(X)$ va $|\lambda| > \|A\|$ bo'lsa, u holda λ regulyar nuqta bo'ladi.*

Isbot. $A - \lambda I$ operatorni quyidagicha yozib olamiz:

$$A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A). \tag{16.1}$$

Teorema shartidan $\frac{1}{\lambda}A$ operatorning normasi 1 dan kichik ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun 14.5-teoremaga ko'ra, $I - \frac{1}{\lambda}A$ operatorning chegaralangan teskarisi mavjud. Bundan va (16.1) tenglikdan $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Δ

Shunday qilib, chegaralangan $A: X \to X$ operatorning spektri markazi koordinatalar boshida va radiusi $\|A\|$ ga teng yopiq doirada saqlanar ekan.

16.3-teorema. *Agar $A \in L(X)$ bo'lsa, u holda $\sigma(A)$ yopiq to'plamdir.*

Isbot. Operatorning spektri $\sigma(A)$ regulyar nuqtalar to'plamining to'ldiruvchi to'plami bo'lgani uchun, $\rho(A)$ ning ochiq to'plam ekanligini ko'rsatish yetarli. Endi $\lambda \in \rho(A)$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin, ya'ni $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan bo'lsin. U holda 14.6-

teoremaga ko'ra, barcha δ, $\delta < \left(\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|\right)^{-1}$ lar uchun $A-\lambda I-\delta I$ operatorning ham chegaralangan teskarisi mavjud. Demak, $\lambda \in \rho(A)$ nuqta o'zining $\varepsilon = \left(\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|\right)^{-1} > 0$ atrofi bilan $\rho(A)$ ga qarashli ekan. Bu esa λ nuqtaning $\rho(A)$ to'plam uchun ichki nuqta ekanligini bildiradi. λ ning ixtiyoriyligidan $\rho(A)$ ning ochiq to'plam ekanligi kelib chiqadi. Demak, 2.4-teoremaga ko'ra $\sigma(A) = C \setminus \rho(A)$ yopiq to'plam. Δ

Quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiaz.

16.4-teorema. $A \in L(H)$ *o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin: U holda:*

(a) $\sigma_{qol}(A)$ *-- bo'sh to'plam.*

(b) $\sigma(A)$ *to'plam* R *ning qismi, ya'ni* $\sigma(A) \subset R$.

(c) A *operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o'zaro ortogonaldir.*

16.1-misol. $L_2[a,b]$ Hilbert fazosida erkin o'zgaruvchi x ga ko'paytirish operatori (15.3-misolga qarang), ya'ni

$$A : L_2[a,b] \to L_2[a,b], \quad (Af)(x) = xf(x)$$

operatorni qaraymiz. Uning nuqtali, qoldiq va muhim spektrini toping.

Yechish. 15.3-misol natijasiga va $u(x) = x = \overline{x} = \overline{u(x)}$ tenglikka ko'ra, $A = A^*$. 16.4-teoremaning (a) tasdig'iga ko'ra, $\sigma_{qol}(A) = \varnothing$. Ma'lumki,

$$(Af)(x) = \lambda f(x) \quad \text{ya'ni} \quad (x-\lambda)f(x) = 0 \tag{16.2}$$

tenglama ixtiyoriy $\lambda \in C$ uchun yagona nol yechimga ega. Demak, A operator xos qiymatlarga ega emas, ya'ni $\sigma_{pp}(A) = \varnothing$. (16.2) tenglama faqat nol yechimga ega ekanligidan 14.3-teoremaga ko'ra, $(A-\lambda I)f(x) = g(x)$ tenglamaning ixtiyoriy $g \in \operatorname{Im} A$ da yagona yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Ko'rsatish mumkinki $A-\lambda I$ operatorga teskari operator

$$(A-\lambda I)^{-1} g(x) = (x-\lambda)^{-1} g(x) \tag{16.3}$$

formula bilan aniqlanadi. Agar $\lambda \notin [a,b]$ bo'lsa, u holda $x - \lambda \neq 0$, natijada $(A-\lambda I)^{-1}$ operator $L_2[a,b]$ fazoning hamma yerida aniqlangan va Banax teoremasiga ko'ra, u chegaralangan bo'ladi. Demak, $\lambda \notin [a,b]$ regulyar nuqta, ya'ni $\sigma(A) \subset [a,b]$. Lekin (16.3) formula bilan aniqlangan teskari operator $\lambda \in [a,b]$ bo'lganda $L_2[a,b]$ fazoning hamma yerida aniqlanmagan. Demak, $[a,b] \subset \sigma(A)$. Bulardan, $\sigma(A) = [a,b]$. Endi A operatorning spektridagi ixtiyoriy nuqta uning muhim spektriga qarashli ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $\lambda \in [a,b)$ uchun

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n(n+1)}, & \text{agar} \quad x \in A_n := [\lambda + \frac{1}{n+1}, \lambda + \frac{1}{n}), \\ 0, & \text{agar} \quad x \in [a, b] \setminus A_n \end{cases}$$

deymiz. Ma'lum nomerdan boshlab $\lambda + \frac{1}{n} < b$ bo'ladi va bunday nomerlar uchun $\|f_n\| = 1$ tenglik o'rinli. Bundan tashqari har xil n va m larda $A_n \cap A_m = \varnothing$ bo'lgani uchun $(f_n, f_m) = 0$ tenglik o'rinli, ya'ni $\{f_n\}$ ortonormal sistema ekan. Ma'lumki, ixtiyoriy ortonormal sistema nolga kuchsiz ma'noda yaqinlashadi, shuning uchun $\{f_n\}$ ketma-ketlik ham nolga kuchsiz ma'noda yaqinlashadi. Endi $\|(A - \lambda I)f_n\|$ norma kvadratini hisoblaymiz:

$$\|(A - \lambda I)f_n\|^2 = n(n+1) \int_{\lambda + \frac{1}{n+1}}^{\lambda + \frac{1}{n}} (t - \lambda)^2 dt = \frac{3n^2 + 3n + 1}{3n^3(n+1)^2} \to 0, n \to \infty.$$

Demak, ta'rifga ko'ra, $\lambda \in [a,b)$ son A operatorning muhim spektriga qarashli ekan. $\lambda = b$ nuqtani A operatorning muhim spektriga qarashli bo'lishini o'quvchiga mustaqil isbotlash uchun qoldiramiz. Shunday qilib, A operatorning spektri faqat muhim spektrdan iborat bo'lib, u $[a,b]$ kesma bilan ustma-ust tushadi. Xulosa

$$\sigma_{qol}(A) = \sigma_{pp}(A) = \varnothing, \quad \sigma_{ess}(A) = \sigma(A) = [a,b]. \quad \Delta$$

16.2. 16.1-misolda qaralgan A operatorni $C[a,b]$ Banax fazosida, ya'ni

$$A : C[a,b] \to C[a,b], \quad Af(x) = xf(x)$$

operatorni qaraymiz. Uning nuqtali va qoldiq spektrini toping.

Yechish. Ma'lumki, ((16.2) ga qarang)

$$(Af)(x) = \lambda f(x) \quad \text{ya'ni} \quad (x-\lambda)f(x) = 0, \quad f \in C[a,b] \tag{16.4}$$

tenglama ixtiyoriy $\lambda \in C$ uchun yagona nol yechimga ega. Demak, A operator xos qiymatlarga ega emas, ya'ni $\sigma_{pp}(A) = \varnothing$. (16.4) tenglama faqat nol yechimga ega ekanligidan 14.3-teoremaga ko'ra $(A-\lambda I)f(x) = g(x)$ tenglamaning ixtiyoriy $g \in ImA$ da yagona yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Demak, $A-\lambda I$ operatorga teskari operator mavjud va u (16.3) formula bilan aniqlanadi. Xuddi 16.1-misoldagi kabi ko'rsatishimiz mumkinki, $\sigma(A) = [a,b]$ tenglik o'rinli. Haqiqatan ham, agar $\lambda \notin [a,b]$ bo'lsa, u holda (16.3) ning o'ng tomoni ixtiyoriy $g \in C[a,b]$ da uzluksiz funksiya bo'ladai, ya'ni $D((A-\lambda I)^{-1}) = C[a,b]$ va teskari operatorlar haqidagi Banax teoremasiga ko'ra, $(A-\lambda I)^{-1}$ operator chegaralangan bo'ladi, demak λ regulyar nuqta, ya'ni $\sigma(A) \subset [a,b]$. Agar $\lambda \in [a,b]$ bo'lsa, u holda (16.3) formula bilan aniqlangan $(A-\lambda I)^{-1}$ operator $C[a,b]$ fazoning hamma yerida aniqlanmagan, bundan $[a,b] \subset \sigma(A)$. Bulardan, $\sigma(A) = [a,b]$ ekanligi kelib chiqadi. Endi $\sigma(A) = \sigma_{qol}(A)$ ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $\lambda \in [a,b]$ uchun $A-\lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi

$$Im(A-\lambda I) = \{g \in C[a,b] : g(x) = (x-\lambda)f(x)\}$$

$C[a,b]$ fazoda zich emas. Haqiqatan ham, $Im(A-\lambda I)$ chiziqli ko'pxillilikdagi ixtiyoriy g uchun $g(\lambda) = 0$ shart bajariladi. Agar biz $f_0(x) \equiv 1$ desak, u holda ixtiyoriy $g \in Im(A-\lambda I)$ uchun

$$\|g - f_0\| = \max_{x \in [a,b]} |g(x) - f_0(x)| \geq |g(\lambda) - f_0(\lambda)| = 1$$

tengsizlik o'rinli. Demak, $Im(A-\lambda I)$ chiziqli ko'pxillilikdan $f_0(x) \equiv 1$ elementga yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Qoldiq spektr ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\lambda \in [a,b]$ uchun $\lambda \in \sigma_{qol}(A)$ munosabat o'rinli. Bundan $\sigma(A) \subset \sigma_{qol}(A)$ kelib chiqadi. Teskari munosabat $\sigma(A) \supset \sigma_{qol}(A)$ doim o'rinli. Demak, $\sigma(A) = \sigma_{qol}(A) = [a,b]$. Δ

16.1 va 16.2-misollarda bir xil qonuniyat bo'yicha ta'sir qiluvchi A operator har xil $L_2[a,b]$ va $C[a,b]$ fazolarda qaralgan. Har ikki holda ham A operatorning spektri $[a,b]$ kesma bilan ustma-ust tushgan, lekin spektrning qismlarida (strukturasida) o'zgarish bo'ldi. Birinchi holda (16.1-misolda) $\sigma_{qol}(A)=\varnothing$ edi, ikkinchi holda $\sigma_{qol}(A)=[a,b]$.

16.3. Endi ℓ_2 Hilbert fazosida ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax=(a_1x_1,a_2x_2,a_3x_3,\dots,a_nx_n,\dots) \tag{16.5}$$

operatorni qaraymiz (11.9, 15.2-misollarga qarang). Uning xos qiymatlarini va spektrini toping.

Yechish. $\sup\limits_{n\ge1}|a_n|=a<\infty$ bo'lgan holda, A ning chegaralangan ekanligi 11.9-misolda ko'rsatilgan. Bundan tashqari $\|A\|=\sup\limits_{n\ge1}|a_n|=a$ tenglik isbotlangan edi. $Ax=\lambda x$ tenglama $\lambda=a_n$ bo'lganda $e_n=(0,\dots,0,1,0,\dots)$ nolmas yechimga ega. Demak, $a_n, n\in N$ sonlar A operatorning xos qiymatlari bo'lar ekan. Agar birorta ham $n\in N$ da $\lambda\ne a_n$ bo'lsa, u holda $(A-\lambda I)$ operator teskarilanuvchan bo'ladi va

$$(A-\lambda I)^{-1}x=-\left(\frac{x_1}{\lambda-a_1},\frac{x_2}{\lambda-a_2},\dots,\frac{x_n}{\lambda-a_n},\dots\right) \tag{16.6}$$

Bulardan $\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}=\sigma_{pp}(A)$ tenglik kelib chiqadi. Ma'lumki, xos qiymatlar operatorning spektriga qarashli bo'ladi, shuning uchun $\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}\subset\sigma(A)$. Ikkinchi tomondan chegaralangan operatorning spektri yopiq to'plamdir, demak $\sigma_{pp}(A)$ to'plamning yopig'i $[\sigma_{pp}(A)]$ uchun

$$\overline{\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}}=[\sigma_{pp}(A)]\subset\sigma(A) \tag{16.7}$$

munosabat o'rinli. Agar $\lambda\notin[\sigma_{pp}(A)]$ bo'lsa, u holda (16.6) tenglik bilan aniqlangan $(A-\lambda I)^{-1}$ operator ℓ_2 fazoning hamma yerida aniqlangan va chegaralangan bo'ladi. Bundan $C\setminus[\sigma_{pp}(A)]\subset\rho(A)$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu yerdan

$$\sigma(A) \subset [\sigma_{pp}(A)]. \tag{16.8}$$

(16.7) va (16.8) munosabatlardan

$$\sigma(A) = [\sigma_{pp}(A)]$$

ga kelamiz. Ko'rsatamizki, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning barcha limitik nuqtalari A operatorning muhim spektriga qarashli bo'ladi. Buning uchun limitik nuqta λ ga yaqinlashuvchi $\{a_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlikni qaraymiz. U holda

$$\|(A-\lambda I)e_{n_k}\| = \|(a_{n_k}-\lambda)e_{n_k}\| = |a_{n_k}-\lambda| \to 0, \quad k\to\infty.$$

$\{e_{n_k}\}$ ketma-ketlik ortonormal sistema bo'lganligi uchun nolga kuchsiz ma'noda yaqinlashadi. Demak, λ son A operatorning muhim spektriga qarashli ekan. Δ

16.4. Quyidagicha savol qo'yamiz. ℓ_2 Hilbert fazosida shunday $A:\ell_2\to\ell_2$ chiziqli operatorga misol keltiringki, uning spektri oldindan berilgan $M\subset C$ yopiq to'plam bilan ustma-ust tushsin.

Yechish. Kompleks sonlar to'plami C separabel metrik fazo bo'lgani uchun, uning hamma yerida zich sanoqli D to'plam mavjud. U holda $M\cap D$ to'plam sanoqli va M ning hamma yerida zich bo'ladi. Endi $M\cap D$ to'plam elementlarini $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ nomerlab chiqamiz va 16.3-misolda qaralgan, (16.5) tenglik bilan aniqlanuvchi A operatorni qaraymiz. 16.3-misolda ko'rsatilganidek

$$\sigma(A) = [\sigma_{pp}(A)] = \overline{M\cap D} = M. \quad \Delta$$

Bu yerda, biz $M = C$ deb olishimiz ham mumkin. Demak, spektri butun kompleks sonlar to'plami C bilan ustma-ust tushuvchi chiziqli operator mavjud ekan. Bu holda ta'rifga ko'ra, $\rho(A)=\varnothing$ bo'ladi. Shuni ta'kidlaymizki, agar $M\subset C$ yopiq to'plam chegaralangan bo'lsa, u holda spektri M bilan ustma-ust tushuvchi A operator ham chegaralangan bo'ladi va aksincha.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Chekli o'lchamli fazolarda operatorning spektri faqat chekli sondagi xos qiymatlardan iborat ekanligini ko'rsating.*

2. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Af)(x) = u(x) f(x)$ *operatorning spektrini toping. Bu yerda* $u:[a,b] \to C$ – *uzluksiz funksiya.*

3. $L_2[-\pi,\pi]$ *fazoda integral operatorning xos qiymatlarini toping:*

$$(Af)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin ny f(y) dy.$$

4. *Birlik operatorning spektrini toping.*

5. $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $(Af)(x) = f(x) - \int_{-1}^{1} (1 + xy) f(y) dy$

operatorning xos qiymatlarini toping.

6. *Yuqorida keltirilgan* $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$ *operatorning* λ *nuqtadagi rezolventasini toping.*

7. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *lar* A *chiziqli operatorning* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari bo'lsin.* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *larning chiziqli erkli (chiziqli bog'lanmagan) ekanligini isbotlang.*

8. *Spektri birlik doiradan iborat bo'lgan operatorga misol keltiring.*

9. *Spektri* $\varnothing$ *to'plamdan iborat bo'lgan chiziqli operator mavjudmi? Mavjud bo'lsa misol keltiring.*

10. *16.1-misolda* $\lambda = b$ *nuqtani* A *operatorning muhim spektriga qarashli ekanligini isbotlang.*

III bobni takrorlash uchun test savollari

1. $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$, $(Af)(x) = \int_{-1}^{1} xyf(y)dy$ operator yadrosini toping.

A) $KerA = \{f : f(x) = const\}$ B) $KerA = \{f : f(x) = \alpha + \beta x\}$

C) $KerA = \{f : \int_{-1}^{1} yf(y)dy = 0\}$ D) $KerA = \{0\}$

2. $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$, $(Af)(x) = \int_{-1}^{1} (1+xy)f(y)dy$ operatorning qiymatlari sohasini toping.

A) $ImA = \{f : f(x) = const\}$ B) $ImA = \{f : f(x) = \alpha + \beta x\}$

C) $ImA = \{f : \int_{-1}^{1} yf(y)dy = 0\}$ D) $ImA = \{0\}$

3. $A: C[a,b] \to C[a,b]$, $(Af)(x) = f'(x)$ differensial operator yadrosini toping.

A) $KerA = \{f : f(x) = const\}$ B) $KerA = \{f : f(x) = \alpha + \beta x\}$

C) $KerA = \{f : \int_{a}^{b} f(x)dx = 0\}$ D) $KerA = \{0\}$

4. $A: C[a,b] \to C[a,b]$, $(Af)(x) = f'(x)$ differensial operatorning aniqlanish sohasini toping.

A) $D(A) = C[a,b]$ B) $D(A) = \{f : f(x) = const\}$

C) $D(A) = C^{(1)}[a,b]$ D) $D(A) = \{f : \int_{a}^{b} f(x)dx = 0\}$

5. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Af)(x) = (x+1)f(x)$ operatorning kvadratini toping.

A) $(A^2 f)(x) = (x+1)^2 f^2(x)$ B) $(A^2 f)(x) = (x+1)^2 f(x)$

C) $(A^2 f)(x) = (x^2+1)f(x)$ D) $(A^2 f)(x) = (x+1)^2 f(x^2)$

6. $A: X \to Y$ operator qachon teskarilanuvchan deyiladi?

A) Agar ixtiyoriy $y \in ImA$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'lsa.

B) Shunday C operator topilib, $AC = I$ bo'lsa.

C) Shunday B operator topilib, $BA = I$ bo'lsa.

D) $A-$ ustiga akslantirish bo'lsa.

7. Qachon $\lambda \in C$ son A operator uchun regulyar nuqta deyiladi?

A) Shunday C operator topilib, $A = \lambda C$ bo'lsa.

B) Agar $(A-\lambda I)^{-1}$ operator mavjud va chegaralangan bo'lsa.

C) Agar $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas yechimga ega bo'lsa.

D) Agar $Ax = \lambda x$ tenglama yagona $x = 0$ yechimga ega bo'lsa.

8. Qachon $\lambda \in C$ son A operatorning xos qiymati deyiladi?

A) Shunday C operator topilib, $A = \lambda C$ bo'lsa.

B) Agar $(A-\lambda I)^{-1}$ operator mavjud va chegaralangan bo'lsa.

C) Agar $Ax = \lambda x$ tenglama noldan farqli yechimga ega bo'lsa.

D) Agar $Ax = \lambda x$ tenglama yagona $x = 0$ yechimga ega bo'lsa.

9. $A : X \to X$ operator spektri ta'rifini keltiring.

A) Barcha xos qiymatlar to'plami operatorning spektri deyiladi.

B) Regulyar bo'lmagan $\lambda \in C$ lar to'plami operatorning spektri deyiladi.

C) Barcha regulyar nuqtalar to'plami A operatorning spektri deyiladi.

D) Barcha $|\lambda| > \|A\|$ lar to'plami A operatorning spektri deyiladi.

10. Teskari operatorlar haqidagi Banax teoremasini keltiring.

A) X Banax fazosini Y Banax fazosiga biyektiv akslantiruvchi A chiziqli operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan.

B) Agar Y Banax fazosi bo'lsa, $L(X,Y)$ ham Banax fazosi bo'ladi.

C) Har qanday $f_0 : L_0 \to C$ chiziqli uzluksiz funksionalni butun L fazogacha normasini saqlagan holda davom ettirish mumkin.

D) Agar chiziqli uzluksiz operatorlarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi X Banax fazosining har bir nuqtasida chegaralangan bo'lsa, u holda $\{\|A_n\|\}$ ketma-ketlik ham chegaralangan bo'ladi.

11. Banax-Shteynxaus teoremasini keltiring.

A) X Banax fazosini Y Banax fazosiga biyektiv akslantiruvchi A chiziqli operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan.

B) Agar Y Banax fazosi bo'lsa, $L(X,Y)$ ham Banax fazosi bo'ladi.

C) Har qanday $f_0 : L_0 \to C$ chiziqli uzluksiz funksionalni butun L fazogacha normasini saqlagan holda davom ettirish mumkin.

D) Agar chiziqli uzluksiz operatorlarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi X Banax fazosining har bir nuqtasida chegaralangan bo'lsa, u holda $\{\|A_n\|\}$ ketma-ketlik ham chegaralangan bo'ladi.

12. Xan-Banax teoremasini keltiring.

A) X Banax fazosini Y Banax fazosiga biyektiv akslantiruvchi A chiziqli operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan.

B) Agar Y Banax fazosi bo'lsa, $L(X,Y)$ ham Banax fazosi bo'ladi.

C) Har qanday $f_0 : L_0 \to C$ chiziqli uzluksiz funksionalni butun L fazogacha normasini saqlagan holda davom ettirish mumkin.

D) Agar chiziqli uzluksiz operatorlarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi X Banax fazosining har bir nuqtasida chegaralangan bo'lsa, u holda $\{\|A_n\|\}$ ketma-ketlik ham chegaralangan bo'ladi.

13. Chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi $L(X,Y)$ ning to'laligi haqidagi teoremani keltiring.

A) X Banax fazosini Y Banax fazosiga biyektiv akslantiruvchi A chiziqli operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan.

B) Agar Y Banax fazosi bo'lsa, $L(X,Y)$ ham Banax fazosi bo'ladi.

C) Har qanday $f_0 : L_0 \to C$ chiziqli uzluksiz funksionalni butun L fazogacha normasini saqlagan holda davom ettirish mumkin.

D) Agar chiziqli uzluksiz operatorlarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi X Banax fazosining har bir nuqtasida chegaralangan bo'lsa, u holda $\{\|A_n\|\}$ ketma-ketlik ham chegaralangan bo'ladi.

14. $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ operatorlar ketma-ketligining $A \in L(X,Y)$ operatorga

tekis yaqinlashish ta'rifini toping.

A) agar $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$ bo'lsa.

B) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n x - Ax\| = 0$ bo'lsa.

C) ixtiyoriy $f \in Y^*$ va ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n x) = f(Ax)$ bo'lsa.

D) ixtiyoriy $x, y \in H = X = Y$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n x, y) = (Ax, y)$ bo'lsa.

15. $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ operatorlar ketma-ketligining $A \in L(X,Y)$ operatorga kuchli yaqinlashish ta'rifini toping.

A) agar $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$ bo'lsa.

B) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n x - Ax\| = 0$ bo'lsa.

C) ixtiyoriy $f \in Y^*$ va ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n x) = f(Ax)$ bo'lsa.

D) ixtiyoriy $x, y \in H = X = Y$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n x, y) = (Ax, y)$ bo'lsa.

16. $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ operatorlar ketma-ketligining $A \in L(X,Y)$ operatorga kuchsiz yaqinlashish ta'rifini toping.

A) agar $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$ bo'lsa.

B) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n x - Ax\| = 0$ bo'lsa.

C) ixtiyoriy $f \in Y^*$ va ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n x) = f(Ax)$ bo'lsa.

D) ixtiyoriy $x, y \in H = X = Y$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n x, y) = |(Ax, y)|$ bo'lsa.

17. Nol operatorga kuchsiz ma'noda yaqinlashuvchi, lekin kuchli ma'noda yaqinlashmaydigan operatorlar ketma-ketligini ko'rsating.

A) $A_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad A_n x = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n}, x_1, x_2, x_3, \ldots)$

B) $Q_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad Q_n x = (0,0,\ldots,0, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots)$

C) $A_n : L_2[-1/2, 1/2] \to L_2[-1/2, 1/2], \quad (A_n f) = x^n f(x)$

D) $P_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad P_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots)$

18. Nol operatorga kuchli ma'noda yaqinlashuvchi, lekin tekis yaqinlashmaydigan operatorlar ketma-ketligini ko'rsating.

A) $A_n : \ell_2 \to \ell_2$, $A_n x = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n}, x_1, x_2, x_3, \ldots)$

B) $Q_n : \ell_2 \to \ell_2$, $Q_n x = (0,0,\ldots,0, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots)$

C) $A_n : L_2[-1/2,1/2] \to L_2[-1/2,1/2]$, $(A_n f) = x^n f(x)$

D) To'g'ri javob keltirilmagan.

19. Nol operatorga tekis yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligini ko'rsating.

A) $A_n : \ell_2 \to \ell_2$, $A_n x = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, x_1, x_2, x_3, \ldots)$

B) $Q_n : \ell_2 \to \ell_2$, $Q_n x = (0,\ldots,0, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots)$

C) $A_n : L_2[-1/2,1/2] \to L_2[-1/2,1/2]$, $(A_n f) = x^n f(x)$

D) $P_n : \ell_2 \to \ell_2$, $P_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots)$

20. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) Agar A chiziqli operator bo'lsa, A^{-1} ham chiziqli operator bo'ladi.

B) Agar $A \in L(X,Y)$ bo'lsa, u holda $A^{-1} \in L(Y,X)$ bo'ladi.

C) Agar A chiziqli operator bo'lsa, u holda A^* ham chiziqlidir.

D) Agar $A \in L(X,Y)$ bo'lsa, u holda $A^* \in L(Y^*, X^*)$ bo'ladi.

21. $A : X \to Y$ chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun quyidagi shartlardan qaysi birining bajarilishi zarur va yetarli.

A) $\|A\| \le q < 1$ B) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ C) $\dim Ker A = 1$

D) biror $m > 0$ va barcha $x \in D(A)$ larda $\|Ax\| \ge m\|x\|$ bo'lishi

22. $A : X \to Y$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud bo'lishining zarur va yetarli shartini keltiring.

A) $\|A\| \le q < 1$ B) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ C) $\dim Ker A = 1$

D) biror $m > 0$ va barcha $x \in D(A)$ larda $\|Ax\| \ge m\|x\|$ bo'lishi

23. $I - A : X \to X$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud bo'lishining yetarli shartini keltiring.

A) $\|A\| \le q < 1$ B) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ C) $\dim KerA = 1$

D) biror $m > 0$ va barcha $x \in D(A)$ larda $\|Ax\| \ge m\|x\|$ bo'lishi

24. $A - A' : X \to X$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud bo'lishining yetarli shartini keltiring.

A) $\|A\| \le q < 1$ B) $\|A'\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ C) $KerA = \{0\}$ D) $\|A'\| < \|A\|^{-1}$

25. $A : R^3 \to R^3$, $Ax = (x_1, 2x_2, 3x_3)$ operatorga teskari operatorni toping.

A) $A^{-1}x = (3x_3, 2x_2, x_1)$ B) $A^{-1}x = (x_1, 2^{-1}x_2, 3^{-1}x_3)$

C) $A^{-1}x = (x_1, 2^{-2}x_2, 3^{-2}x_3)$ D) $A^{-1}x = (x_1, 2x_2^{-1}, 3x_3^{-1})$

26. $A : X \to Y$ chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun quyidagi shartlardan qaysi birining bajarilishi zarur va yetarli.

A) $\|A\| \le q < 1$ B) $KerA = \{0\}$ C) $\dim KerA = 1$ D) $\|A\| \ge 1$

27. A operator chiziqli bo'lishini ta'minlaydigan shartlarni ajrating:

1) $A(x + y) = Ax + Ay$, 2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$ 3) $A(\alpha x) = \overline{\alpha} Ax$

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

28. $A : X \to Y$ operator yadrosini matematik simvollar bilan ifodalang.

A) $KerA = \{x \in D(A) : Ax = \theta\}$

B) $KerA = \{y \in Y :$ biror $x \in D(A)$ uchun $y = Ax\}$

C) $KerA = \{x \in X : Ax \in Y\}$

D) $KerA = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$

29. $A : X \to Y$ operator qiymatlar sohasini matematik simvollar bilan ifodalang.

A) $\operatorname{Im} A = \{x \in D(A) : Ax = \theta\}$

B) $\operatorname{Im} A = \{y \in Y :$ biror $x \in D(A)$ uchun $y = Ax\}$

C) $ImA = \{x \in X : Ax \in Y\}$

D) $ImA = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$

30. Chiziqli bo'lmagan $A : C[a,b] \to C[a,b]$ operatorni toping.

A) $(Af)(x) = f'(x)$ B) $(Af)(x) = f(x)$

C) $(Af)(x) = 0$ D) $(Af)(x) = f(x)+1$

31. $C[a,b]$ ni $C[a,b]$ ga akslantiruvchi birlik operatorni toping.

A) $(Af)(x) = f'(x)$ B) $(Af)(x) = f(x)$

C) $(Af)(x) = 0$ D) $(Af)(x) = f(x)+1$

32. $C[a,b]$ ni $C[a,b]$ ga akslantiruvchi nol operatorni toping.

A) $(Af)(x) = f'(x)$ B) $(Af)(x) = f(x)$

C) $(Af)(x) = 0$ D) $(Af)(x) = f(x)+1$

33. $C[a,b]$ ni $C[a,b]$ ga akslantiruvchi chegaralanmagan operatorni toping.

A) $(Af)(x) = f'(x)$ B) $(Af)(x) = f(x)$

C) $(Af)(x) = 0$ D) $(Af)(x) = f(x)+1$

34. Quyidagilar ichidan A chiziqli chegaralangan operator normasini hisoblash formulalarini ajrating:

1) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$, 2) $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$, 3) $\|A\| = \inf\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$.

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

35. Quyidagilar ichidan to'g'ri tasdiqlarni ajrating:

1) Operatorlarni qo'shish kommutativ. 2) Operatorlarni ko'paytirish kommutativ. 3) Operatorlarni ko'paytirish assotsiativ.

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

36. Quyidagilar ichidan to'g'rilarini ajrating:

1) $\|A+B\| \le \|A\|+\|B\|$, 2) $\|A\cdot B\| \le \|A\|\cdot\|B\|$, 3) $\|A\cdot B\| = \|A\|\cdot\|B\|$,

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

37. $A: X \to Y$ - chiziqli operator. Teng kuchli tasdiqlarni ajrating:

1) A operator biror x_0 nuqtada uzluksiz.

2) A operator uzluksiz.

3) A operator chegaralangan.

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

38. $C[-1,1]$ fazoda normasi 1 bo'lgan operatorlarni ko'rsating.

1) $(Af)(x) = xf(x)$ 2) $(Bf)(x) = f(x)$ 3) $(Cf)(x) = 0.$

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

39. R^n fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) R^n B) R^n_∞ C) R^n_q D) R^n_p

40. R^n_p, $p > 1$ fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) R^n B) R^n_∞ C) R^n_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ D) R^n_p

41. R^n_1 fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) R^n B) R^n_∞ C) R^n_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ D) R^n_1

42. R^n_∞ fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) R^n B) R^n_∞ C) R^n_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ D) R^n_1

43. $C[a, b]$ fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) $C[a, b]$ B) $V_0[a, b]$ C) $L_q[a, b]$ D) $L_2[a, b]$

44. $L_p[a, b]$, $p > 1$ fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) $C[a, b]$ B) $V_0[a, b]$ C) $L_q[a, b], p^{-1} + q^{-1} = 1$ D) $L_2[a, b]$

45. $L_2[a, b]$ fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) $C[a, b]$ B) $V_0[a, b]$ C) $L_q[a, b], p^{-1} + q^{-1} = 1$ D) $L_2[a, b]$

46. ℓ_2 fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) ℓ_2 B) ℓ_1 C) m D) c

47. ℓ_1 fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) ℓ_2 B) ℓ_1 C) m D) c

48. c fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) ℓ_2 B) ℓ_1 C) m D) c

49. c_0 fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) ℓ_2 B) ℓ_1 C) m D) c

50. ℓ_p, $p > 1$ fazoga qo'shma fazoni ko'rsating.

A) ℓ_p B) ℓ_∞ C) $\ell_q,\ p^{-1}+q^{-1}=1$ D) ℓ_1

51. $T:\ell_1\to\ell_1,\ Tx=(0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},\ldots)$ ga qo'shma operatorni toping.

A) $T^*:m\to m,\quad T^*x=(x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{n+1},\ldots)$

B) $T^*:\ell_1\to\ell_1,\quad T^*x=(x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{n+1},\ldots)$

C) $T^*:\ell_p\to\ell_q,\quad T^*y=(y_2,y_3,y_4,\ldots,y_{n+1},\ldots)$

D) $T^*:\ell_2\to\ell_2,\quad T^*y=(y_2,y_3,y_4,\ldots,y_{n+1},\ldots)$

52. $T:\ell_2\to\ell_2,\ Tx=(0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},\ldots)$ ga qo'shma operatorni toping.

A) $T^*:m\to m,\quad T^*x=(x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{n-1},\ldots)$

B) $T^*:\ell_1\to\ell_1,\quad T^*x=(x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{n+1},\ldots)$

C) $T^*:\ell_p\to\ell_q,\quad T^*y=(y_2,y_3,y_4,\ldots,y_{n+1},\ldots)$

D) $T^*:\ell_2\to\ell_2,\quad T^*y=(y_2,y_3,y_4,\ldots y_{n+1},\ldots)$

53. $T:\ell_2\to\ell_2,\qquad Tx=(a_1x_1,a_2x_2,a_3x_3,\ldots,a_nx_n,\ldots)$ operatorga qo'shma operatorni toping.

A) $T^*:m\to m,\quad T^*x=(a_1x_1,a_2x_2,a_3x_3,\ldots,a_nx_n,\ldots)$

B) $T^*:\ell_2\to\ell_2,\quad T^*x=(\overline{a_1}x_1,\overline{a_2}x_2,\overline{a_3}x_3,\ldots,\overline{a_n}x_n,\ldots)$

C) $T^*:\ell_2\to\ell_2,\quad T^*x=(x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{n+1},\ldots)$

D) $T^*:\ell_2\to\ell_2,\quad T^*x=(\frac{1}{a_1}x_1,\frac{1}{a_2}x_2,\frac{1}{a_3}x_3,\ldots,\frac{1}{a_n}x_n,\ldots)$

54. $T:L_2[a,b]\to L_2[a,b],\qquad (Tf)(x)=u(x)f(x)$ operatorga Hilbert ma'nosidagi qo'shma operatorni toping.

A) $(T^*f)(x)=u(x)f(x)$ B) $(T^*f)(x)=\overline{u(x)}f(x)$

C) $(T^*f)(x)=\overline{u(x)f(x)}$ D) $(T^*f)(x)=\dfrac{f(x)}{u(x)}$

55. $T:L_2[a,b]\to L_2[a,b],\qquad (Tf)(x)=\int_a^b K(x,y)f(y)dy$ operatorga Hilbert ma'nosidagi qo'shma operatorni toping.

A) $(T^*f)(x)=\int_a^b \overline{K(y,x)}f(y)dy$ B) $(T^*f)(x)=\int_a^b K(y,x)f(y)dy$

C) $(T^*f)(x)=\int_a^b \overline{K(x,y)}f(y)dy$ D) $(T^*f)(x)=\int_a^b K^*(y,x)f(y)dy$

56. $A:C^n\to C^n$ chiziqli operator spektri haqidagi tasdiqlarning qaysi biri to'g'ri.

A) $\sigma(A)$ faqat chekli sondagi xos qiymatlardan iborat.

B) A ning spektri biror kesmani to'la to'ldiradi.

C) A ning spektri $(-\infty;\infty)$ to'plamning qismi.

D) $\sigma(A)$ doim nolni saqlaydi.

57. $A:\ell_2\to\ell_2$, $Ax=(a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n,\ldots)$ operatorning spektrini toping.

A) $\sigma(A)=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}$ B) $\sigma(A)=\overline{\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}}$

C) $\sigma(A)=\{\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3},\ldots,\overline{a_n},\ldots\}$ D) $\sigma(A)=\{1/a_1,1/a_2,1/a_3,\ldots,1/a_n,\ldots\}$

58. $A:\ell_2\to\ell_2$, $Ax=(a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n,\ldots)$ operatorning barcha xos qiymatlarini toping.

A) $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}$ B) $\overline{\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}}$

C) $\{\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3},\ldots,\overline{a_n},\ldots\}$ D) $\{1/a_1,1/a_2,1/a_3,\ldots,1/a_n,\ldots\}$

59. $A:L_2[a,b]\to L_2[a,b]$, $(Af)(x)=xf(x)$ operatorning spektri haqida to'liq ma'lumotni toping.

A) $\sigma(A)=[a,b]$, $\sigma_{pp}(A)=\varnothing$, $\sigma_{qol}(A)=\varnothing$, $\sigma_{ess}(A)=[a,b]$

B) $\sigma(A)=[a,b]$, $\sigma_{pp}(A)=\varnothing$, $\sigma_{qol}(A)=[a,b]$, $\sigma_{ess}(A)=\varnothing$

C) $\sigma(A)=[a,b]$, $\sigma_{pp}(A)=[a,b]$, $\sigma_{qol}(A)=\varnothing$, $\sigma_{ess}(A)=\varnothing$

D) $\sigma(A)=[a,b]$, $\sigma_{pp}(A)=[a,b]$, $\sigma_{qol}(A)=\varnothing$, $\sigma_{ess}(A)=[a,b]$

60. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $(Af)(x)=xf(x)$ operatorning $\lambda\in C\setminus[0,1]$ nuqtadagi rezolventasini toping.

A) $R_\lambda(A)f(x)=(x-\lambda)f(x)$ B) $R_\lambda(A)f(x)=(x-\lambda)^{-1}f(x)$

C) $R_\lambda(A)f(x)=(x-\overline{\lambda})^{-1}f(x)$ D) $R_\lambda(A)f(x)=|x-\lambda|^{-1}f(x)$

IV bob. Kompakt operatorlar va integral tenglamalar

Chiziqli operatorning spektri va rezolventasi mavzusida (16-§ ga qarang) ko'rsatildiki, chekli o'lchamli fazolarda aniqlangan A chiziqli operatorning spektri chekli sondagi xos qiymatlardan iborat. Chekli o'lchamli fazolarda aniqlangan chiziqli operatorlardan farqli o'laroq, cheksiz o'lchamli fazolardagi ixtiyoriy chiziqli operatorning spektrini to'la o'rganish ancha qiyin masaladir. Lekin ba'zi bir sinf operatorlarning spektrini biz to'laroq o'rganishimiz mumkin. Operatorlarning bunday sinfi kompakt operatorlar deb nomlangan. Bu sinf operatorlari o'zining xossalari bo'yicha chekli o'lchamli operatorlarga o'xshab ketadi va ularning spektri yetarlicha aniq izohlanadi. Shunday qilib, bu bob kompakt operatorlar va ularning muhim sinfi integral operatorlarga bag'ishlangan.

Bu bob 4 paragrafdan (17-20-§§ lardan) iborat bo'lib, unda biz kompakt operatorlar va integral tenglamalarning asosiy xossalarini o'rganamiz. 17-18-§§ lar kompakt operatorlarning asosiy xossalariga bag'ishlangan bo'lib, unda Banax va Hilbert fazolaridagi kompakt operatorlarning muhim xossalari ochib berilgan. 17-§ da chekli o'lchamli fazolardagi chiziqli operatorlarning kompaktligi va chekli o'lchamli operatorlarning kompaktligi ko'rsatilgan. Cheksiz o'lchamli fazolarda birlik operatorning kompakt emasligi ko'rsatilgan. 18-§ da esa kompakt operatorlarning asosiy xossalari isbotlangan. Jumladan, X Banax fazosini Y Banax fazosiga akslantiruvchi kompakt operatorlar to'plami $-K(X,Y)$ ning to'la normalangan fazo bo'lishi isbotlangan. Kompakt operatorga qo'shma operatorning kompaktligi isbotlangan. Agar $\{A_n\}$ kompakt operatorlar ketma-ketligi A operatorga norma bo'yicha yaqinlashsa, u holda limitik operatorning kompaktligi ko'rsatilgan. Paragraf oxirida Banax fazolarida aniqlangan kompakt operatorlar xossalari Hilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma kompakt operatorlarga taalluqli bo'lgan ayrim faktlar bilan to'ldirilgan. Xususan, bunday operatorlar uchun chiziqli algebra kursidan ma'lum bo'lgan matritsalarni diagonal ko'rinishga keltirish haqidagi teoremaga o'xshash Hilbert-Shmidt teoremasi isbotlangan.

19-20-§§ larda kompakt operator xossalari integral tenglamalarga tadbiq qilinadi. II tur Fredholm integral tenglamasi yechimining mavjudlik masalasi, T kompakt operator uchun 1 soni xos qiymat bo'lish yoki bo'lmaslik masalasi bilan bog'lanadi. Agar 1 soni T kompakt operatorning xos qiymati bo'lmasa, $u = f + Tu$ integral tenglama istalgan f uchun yagona yechimga ega bo'ladi. Agar 1 soni T kompakt operatorning xos qiymati bo'lsa, u holda $u = f + Tu$ tenglama yechimga ega bo'lishi uchun f funksiya bir jinsli $g = T^* g$ tenglamaning barcha yechimlariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlanadi. Bundan tashqari $u = Tu$ va $g = T^* g$ bir jinsli tenglamalarning chiziqli bog'lanmagan yechimlari soni chekli va o'zaro teng ekanligi isbotlanadi. Bu tasdiqlar Fredholmning fundamental teoremalari nomi bilan mashhurdir.

17-§. Kompakt operatorlar

Dastlab normalangan fazodagi kompakt, nisbiy kompakt to'plamlarga ta'rif beramiz. Chunki kompakt operatorlar shu tushunchalar asosida ta'riflanadi. Biz normalangan fazolarda kompaktlik kriteriylarini ham keltiramiz. Keyin esa asosiy tushuncha kompakt operatorga ta'rif beramiz va unga misollar keltiramiz.

Bizga X – Banax fazosi va $M \subset X$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar M to'plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan M da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, M ga kompakt to'plam deyiladi (3.6-ta'rifga qarang). Agar N to'plamning yopig'i $[N]$ kompakt to'plam bo'lsa, u holda N nisbiy kompakt to'plam deyiladi (3.7-ta'rifga qarang). To'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun uning to'la chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli (3.5-teoremaga qarang). Chekli o'lchamli fazolarda to'plam kompakt bo'lishi uchun (3.4-teoremaga qarang) uning chegaralangan va yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir. Asosiy funksional fazolardan biri $C[a,b]$ fazodir. Bu fazodagi to'plamning kompaktlik kriteriysi Arsela teoremasi (3.6-teoremaga qarang) yordamida bayon qilingan. $\ell_p, p \geq 1$ fazoda to'plam nisbiy kompakt bo'lishining zarur va yetarli shartlari 3.8-teoremada keltirilgan.

Banax fazosida kompakt operatorlar. Chekli o'lchamli fazolarda aniqlangan chiziqli operatorlardan farqli o'laroq, cheksiz o'lchamli fazolardagi ixtiyoriy chiziqli operatorning spektrini to'la o'rganish ancha qiyin masaladir. Lekin kompakt operatorlarning spektrini to'laroq o'rganish mumkin. Kompakt operatorlar xossalariga ko'ra chekli o'lchamli operatorlarga o'xshab ketadi va ularning spektri yetarlicha aniq tavsiflanadi. Bundan tashqari, kompakt operatorlar ko'plab tatbiqlarga ega, masalan integral tenglamalar nazariyasida. Bu nazariyani biz keyingi 19 va 20-paragraflarda keltiramiz.

17.1-ta'rif. *Agar* $A \in L(X,Y)$ *va* $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ *bo'lsa, u holda* A *ga chekli o'lchamli operator deyiladi. Agar* $\dim \operatorname{Im} A = n$ *bo'lsa, u holda* A *ga* n *o'lchamli operator deyiladi.*

17.2-ta'rif. *Bizga* $A : X \to Y$ *operator berilgan bo'lsin. Agar* A *operator* X *dagi har qanday chegaralangan to'plamni* Y *dagi nisbiy kompakt to'plamga akslantirsa, u holda* A *kompakt operator yoki to'la uzluksiz operator deyiladi.*

Chekli o'lchamli fazolarda to'plam kompakt bo'lishi uchun (3.4-teoremaga qarang) uning chegaralangan va yopiq bo'lishi yetarli va zarurdir. Demak, chekli o'lchamli fazodagi har qanday chegaralangan to'plam nisbiy kompaktdir va aksincha (3.1-natijaga qarang).

17.1-teorema. *$A: C^n \to C^n$ chiziqli operator kompaktdir.*

Isbot. C^n fazoda aniqlangan chiziqli A operatorning chegaralanganligi 16.1-teoremada isbotlangan edi. A chegaralangan operator bo'lgani uchun har qanday chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga o'tkazadi. Har qanday chegaralangan to'plam esa chekli o'lchamli fazoda nisbiy kompaktdir. Demak, $A: C^n \to C^n$ chiziqli operator kompaktdir. Δ

17.2-teorema. $A \in L(X,Y)$, $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ *bo'lsin. U holda A kompakt operator bo'ladi.*

Isbot. A chegaralangan operator bo'lgani uchun ixtiyoriy chegaralangan M to'plamni yana chegaralangan $A(M)$ to'plamga akslantiradi. Ma'lumki, $A(M) \subset \operatorname{Im} A$ va $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ bo'lgani uchun $A(M)$ nisbiy kompaktdir. Demak, $A-$ kompakt operator. Δ

17.1-misol. C^n Evklid fazosidagi $Ix = x$ birlik operatorni kompaktlikka tekshiring.

Yechish. Birlik operatorning chiziqliligi va uzluksizligi 11.1-misolda ko'rsatilgan. 17.1-teoremaga ko'ra birlik operator kompakt bo'ladi. Δ

Cheksiz o'lchamli fazolarda kompaktlik talabi uzluksizlik talabidan ancha kuchliroq hisoblanadi. Hozir biz uzluksiz, lekin kompakt bo'lmagan operatorga misol keltiramiz.

17.2. H Hilbert fazosidagi $Ix = x$ birlik operatorning kompakt emasligini ko'rsating.

Yechish. Birlik operatorning uzluksizligi uning chegaralangan ekanligidan kelib chiqadi (11.1-misolga qarang). Endi uning kompakt emasligini ko'rsatamiz. H dagi $B[\theta,1] := \{\phi \in H : \|\phi\| \le 1\}$ birlik yopiq sharni qaraymiz. Bu to'plam chegaralangan to'plam bo'ladi, uning I akslantirishdagi tasviri (aksi) o'ziga teng. Lekin birlik shar kompakt emas. Buni isbotlash uchun H da ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemani olamiz. Ma'lumki, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $\phi_n \in B[\theta,1]$. Agar $n \neq m$ bo'lsa, u holda

$$\|\phi_n - \phi_m\|^2 = (\phi_n - \phi_m, \phi_n - \phi_m) = (\phi_n, \phi_n) + (\phi_m, \phi_m) = 2.$$

Bu yerdan ko'rinadiki $\{\phi_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Demak, birlik shar $B[\theta;1]$ nisbiy kompakt to'plam emas ekan. Bu o'z navbatida birlik operatorning kompakt emasligini bildiradi. Δ

Cheksiz o'lchamli Banax fazolarida birlik sharning nisbiy kompakt to'plam emasligi quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

17.1-lemma. *X – chiziqli normalangan fazo va $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ lar X dagi chiziqli erkli sistema bo'lsin. X_n bilan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlarning chiziqli qobig'idan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz. U holda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ vektorlar mavjud:*

$$1)\ \|y_n\| = 1; \quad 2)\ y_n \in X_n; \quad 3)\ \rho(y_n, X_{n-1}) = \inf_{x \in X_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2}.$$

Isbot. Lemma shartiga ko'ra $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ elementlar sistemasi chiziqli erkli. Shuning uchun, $x_n \notin X_{n-1}$ va X_{n-1} ning yopiq ekanligidan $\rho(x_n, X_{n-1}) = \alpha > 0$ bo'ladi. Shunday $x^* \in X_{n-1}$ element mavjudki $\|x^* - x_n\| < 2\alpha$ bo'ladi. U holda

$$\alpha \le \rho(x_n - x^*, X_{n-1}).$$

Natijada

$$y_n = \frac{x^* - x_n}{\|x^* - x_n\|}$$

vektor 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi vekror bo'ladi. y_1 vektor sifatida $x_1 / \|x_1\|$ vektorni olish yetarli. Δ

Bu lemmadan foydalanib, cheksiz o'lchamli Banax fazosidagi yopiq birlik sharda yotuvchi shunday $\{y_n\}$ ketma-ketlik qurish mumkinki,

$\|y_n - y_m\| > 1/2, n \neq m$ shart bajariladi. Bunday ketma-ketlik o'zida birorta ham yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni saqlamaydi. Demak, cheksiz o'lchamli Banax fazosidagi birlik shar nisbiy kompakt to'plam emas. Bu yerdan quyidagi natija kelib chiqadi.

17.1-natija. *Agar X – cheksiz o'lchamli Banax fazosi bo'lsa, u holda $I : X \to X$, $Ix = x$ operator kompakt emas.*

17.3-ta'rif. *Bizga X, Y – Banax fazolari berilgan bo'lsin. Agar $A : X \to Y$ chiziqli operator X fazodagi birlik sharni Y fazodagi nisbiy kompakt to'plamga akslantirsa, u holda A kompakt operator deyiladi.*

17.3-ta'rifga teng kuchli bo'lgan quyidagi ta'rifni keltiramiz.

17.4-ta'rif. *Bizga $A \in L(X, Y)$ (X, Y – Banax fazolari) operator va ixtiyoriy $\{x_n\} \subset X$ chegaralangan ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $\{Ax_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, u holda A ga kompakt operator deyiladi.*

17.3-misol. Berilgan har bir $n \in N$ uchun

$$A_n : \ell_2 \to \ell_2, A_n x = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n, 0, 0, \ldots)$$

operatorning kompaktligini ko'rsating.

Yechish. A_n operatorning kompakt ekanligini ko'rsatishda 17.2-teoremadan foydalanamiz. Chunki A_n chegaralangan operator va $\dim \operatorname{Im} A_n = n < \infty$. Haqiqatan ham,

$$\|A_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k \cdot x_k|^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|^2 \|x\|^2.$$

Demak, A_n chegaralangan va uning normasi uchun

$$\|A_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$$

tengsizlik o'rinli. A_n operatorning qiymatlar sohasi $\operatorname{Im} A_n$ esa $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vektorlar sistemasidan hosil bo'lgan qism fazo bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun $\dim \operatorname{Im} A_n = n$. 17.2-teoremaga ko'ra, A_n kompakt operator bo'ladi.

17.4. $L_2[-\pi,\pi]$ fazoda quyidagi integral operatorning kompaktligini ko'rsating.

$$(Af)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} cos(x-y)f(y)dy.$$

Yechish. Dastlab A operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz.

$$\|Af\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} cos(x-y)f(y)dy\right|^2 dx \le \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|cos(x-y)|^2\,dy\right\}dx\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|^2\,dy.$$

Bu yerda biz Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalandik. Agar $|cos(x-y)| \le 1$ tengsizlikni e'tiborga olsak,

$$\|Af\|^2 \le \left(2\pi\cdot\|f\|\right)^2 \Rightarrow \|Af\| \le 2\pi\cdot\|f\|$$

ga ega bo'lamiz. Bundan $\|A\| \le 2\pi$ ekanligi kelib chiqadi. Agar biz $cos(x-y) = cosxcosy + sinxsiny$ ayniyatdan foydalansak,

$$(Af)(x) = cosx\int_{-\pi}^{\pi} cosyf(y)dy + sinx\int_{-\pi}^{\pi} sinyf(y)dy = \alpha cosx + \beta sinx$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda

$$\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} cosyf(y)dy, \quad \beta = \int_{-\pi}^{\pi} sinyf(y)dy.$$

Demak, ixtiyoriy $g = Af$ element $cosx$ va $sinx$ larning chiziqli kombinatsiyasi shaklida tasvirlanadi. Bundan $\dim \mathrm{Im}\, A = 2$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, 17.2-teoremaga ko'ra A operator kompakt bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *C^n va ℓ_2 fazolarda birlik shar nisbiy kompakt to'plam bo'ladimi?*
2. *ℓ_2 fazoda $Ax = (x_1, 2x_2, 4x_3, 0, \ldots)$ operatorning o'lchamini toping.*
3. *ℓ_2 fazodagi birlik sharning $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (x_1, 2^{-1}x_2, 3^{-1}x_3, 0, \ldots)$ akslantirishdagi tasvirining nisbiy kompakt to'plam bo'lishini ko'rsating.*
4. *Chekli o'lchamli operatorga misol keltiring.*

18-§. Kompakt operatorlarning asosiy xossalari

Bu paragrafda biz kompakt operatorlar to'plamining chiziqli normalangan fazo tashkil qilishini ko'rsatamiz. Agar X Banax fazosini Y Banax fazosiga akslantiruvchi barcha kompakt operatorlar to'plamini $K(X,Y)$ orqali belgilasak, u holda $K(X,Y)$ ning Banax fazosi bo'lishini isbotlaymiz.

18.1-lemma. *$K(X,Y)$ to'plam $L(X,Y)$ (X,Y – Banax fazolari) chiziqli normalangan fazoning qism fazosi bo'ladi.*

Isbot. Lemmani isbotlash uchun kompakt operatorlarning yig'indisi va songa ko'paytmasi yana kompakt operator bo'lishini ko'rsatish yetarli. Faraz qilaylik, $A,B \in K(X,Y)$ va $\{x_n\} \subset X$ ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin. Ko'rsatamizki, $\{(A+B)x_n\} \subset Y$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. A kompakt operator bo'lgani uchun $\{Ax_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{Ax_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. B kompakt operator bo'lgani uchun $\{Bx_{n_k}\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{Bx_{n_{k_l}}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Demak, $\{(A+B)x_{n_{k_l}}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi. Bundan $A+B$ operatorning kompakt ekanligi kelib chiqadi (17.4-ta'rifga qarang). Kompakt operatorning songa ko'paytmasi yana kompakt operator bo'lishi shunga o'xshash ko'rsatiladi. Δ

Endi $K(X,Y)$ qism fazoning yopiqligini isbotlaymiz.

18.1-teorema. *Agar Y Banax fazosi bo'lsa, u holda $K(X,Y)$ ham Banax fazosi bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\{A_n\} \subset K(X,Y)$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo'lsin. $A_n \in K(X,Y)$ ekanligidan $A_n \in L(X,Y)$ ekanligi kelib chiqadi. $L(X,Y)$ fazoning to'laligidan (13.1-teoremaga qarang) $\{A_n\}$ fundamental ketma-ketlikning biror $A \in L(X,Y)$ operatorga yaqinlashishi kelib chiqadi. Endi limitik operator A ning kompaktligini isbotlaymiz. Buning uchun chegaralangan $\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik qanday bo'lmasin, $\{Ax_n\} \subset Y$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinligini ko'rsatish yetarli.

A_1 kompakt operator bo'lganligi uchun $\{A_1 x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots \tag{18.1}$$

qismiy ketma-ketlik shunday bo'lsinki, $\{A_1 x_n^{(1)}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsin. Endi $\{A_2 x_n^{(1)}\}$ ketma-ketlikni qaraymiz. A_2 kompakt operator bo'lganligi uchun shunday $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinki, $\{A_2 x_n^{(2)}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda $\{A_1 x_n^{(2)}\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Yuqoridagidek mulohaza yurgizib, $\{x_n^{(2)}\}$ ketma-ketlikdan shunday $\{x_n^{(3)}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinki, bunda $\{A_1 x_n^{(3)}\}, \{A_2 x_n^{(3)}\}, \{A_3 x_n^{(3)}\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz va

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots \tag{18.2}$$

diagonal ketma-ketlikni olamiz. Bu ketma-ketlikni $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ operatorlar yaqinlashuvchi ketma-ketliklarga o'tkazadi. (18.2) ketma-ketlikni A operator ham yaqinlashuvchi ketma-ketlikka o'tkazishini ko'rsatamiz. Y Banax fazosi bo'lganligi uchun $\{Ax_n^{(n)}\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko'rsatish kifoya.

$$\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| = \left\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)} + A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)} + A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\| \le$$

$$\le \left\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\right\| + \left\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\right\| + \left\|A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\|. \tag{18.3}$$

$\{x_n^{(n)}\} \subset X$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lganligi uchun, shunday $C > 0$ mavjudki, ixtiyoriy $n \in N$ da $\left\|x_n^{(n)}\right\| \le C$ bo'ladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $k \in N$ sonni shunday tanlaymizki,

$$\|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3C}$$

tengsizlik bajarilsin. Shunday n_0 soni mavjudki, barcha $n, m > n_0$ lar uchun

$$\left\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Bu shartlar bajarilganda (18.3) dan quyidagiga ega bo'lamiz

$$\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3C}C + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3C}C = \varepsilon.$$

Demak, $n, m \to \infty$ da $\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| \to 0$. Bu esa $\{Ax_n^{(n)}\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko'rsatadi. Y to'la fazo bo'lganligi uchun u - yaqinlashuvchi. Demak, A– kompakt operator. Δ

18.1-natija. *Agar $\{A_n\} \subset K(X, Y)$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga norma bo'yicha yaqinlashsa, u holda A ham kompakt operator bo'ladi.*

Natijaning isboti 18.1-teoremaning isbotidan bevosita kelib chiqadi.

18.2-teorema. *Agar $A \in K(X)$ va $B \in L(X)$ bo'lsa, u holda AB va BA operatorlar ham kompakt operatorlar bo'ladi.*

Isbot. Agar $M \subset X$ to'plam chegaralangan bo'lsa, u holda $B(M)$ ham chegaralangan to'plam bo'ladi. A kompakt operator bo'lgani uchun $A(B(M))$ to'plam - nisbiy kompakt to'plamdir. Bu esa AB operatorning kompakt ekanligini isbotlaydi.

Endi BA operatorning kompaktligini ko'rsatamiz. Buning uchun chegaralangan $\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik qanday bo'lmasin, $\{BAx_n\} \subset X$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinligini ko'rsatish yetarli. A kompakt operator bo'lgani uchun $\{Ax_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{Ax_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. B operator uzluksiz bo'lgani uchun $\{BAx_{n_k}\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, BA kompakt operator ekan.

18.2-natija. *X – cheksiz o'lchamli Banax fazosi bo'lsin. U holda $A \in K(X)$ operatorning chegaralangan teskarisi mavjud emas.*

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik, ya'ni A^{-1} mavjud va chegaralangan bo'lsin. U holda $I = A^{-1}A$ birlik operator cheksiz o'lchamli X Banax fazosida kompakt bo'lar edi (17.1-natijaga qarang), bu qarama-qarshilik natijani isbotlaydi. Δ

18.3-teorema. *Kompakt operatorga qo'shma operator kompaktdir.*

Isbot. Bizga X Banax fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi A kompakt operator berilgan bo'lsin. Ko'rsatamizki, A ga qo'shma bo'lgan A^* operator X^* dagi har qanday chegaralangan to'plamni nisbiy kompakt to'plamga o'tkazadi. Normalangan fazodagi har qanday chegaralangan to'plam qandaydir sharda saqlanadi, shuning uchun A^* operator X^* dagi birlik shar S^* ni (17.3-ta'rifga qarang) nisbiy kompakt to'plamga o'tkazishini ko'rsatish yetarli.

X^* dagi uzluksiz funksionallarni X fazoda emas, faqat kompakt $\overline{A(S)}$ – to'plamda aniqlangan funksional sifatida qaraymiz. Bu yerda S to'plam X dagi birlik shar. Bu holda S^* dagi funksionallarga mos keluvchi funksiyalar to'plami Φ tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $\|\varphi\| \le 1$ bo'lsa, u holda

$$\sup_{x \in \overline{A(S)}} |\varphi(x)| = \sup_{x \in A(S)} |\varphi(x)| \le \|\varphi\| \cdot \sup_{x \in S} \|Ax\| \le \|A\|,$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \|\varphi\| \cdot \|x - y\| \le \|x - y\|.$$

Arsela teoremasiga ko'ra, Φ to'plam $C[\overline{A(S)}]$ fazoda nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[\overline{A(S)}]$ dagi Φ to'plam X^* fazodagi $A^*(S^*)$ to'plamga izometrik bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $g_1, g_2 \in S^*$ bo'lsa, u holda

$$\|A^* g_1 - A^* g_2\| = \sup_{x \in S} |(A^* g_1 - A^* g_2, x)| = \sup_{x \in S} |(g_1 - g_2, Ax)| =$$

$$= \sup_{z\in A(S)} |(g_1 - g_2, z)| = \rho(g_1, g_2).$$

Φ nisbiy kompakt to'plam bo'lganligi uchun u to'la chegaralangan bo'ladi. O'z navbatida, unga izometrik bo'lgan $A^*(S^*)$ to'plam ham to'la chegaralangan bo'ladi. Demak, $A^*(S^*)$ - nisbiy kompakt to'plam. Δ

18.4-teorema. *X Banax fazosida A kompakt operator va ixtiyoriy $\rho > 0$ son berilgan bo'lsin. A operatorning absolyut qiymati bo'yicha ρ dan katta bo'lgan xos qiymatlariga mos keluvchi chiziqli erkli xos vektorlarining soni cheklidir.*

Isbot. Avvalo shuni ta'kidlaymizki, A operatorning nolmas λ xos qiymatiga mos keluvchi xos vektorlaridan tashkil topgan X_λ invariant qism fazo chekli o'lchamli bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $X_\lambda = Ker(A - \lambda I)$ qism fazoning o'lchami cheksiz bo'lganda edi, u holda A operator X_λ qism fazoda va demak, butun X da kompakt bo'lmas edi. Shu sababli, teoremaning isbotini yakunlash uchun, agar $\{\lambda_n\}$ - kompakt A operatorning nolmas, har xil xos qiymatlarining ixtiyoriy ketma-ketligi bo'lsa, u holda $\lambda_n \to 0$ ekanligini ko'rsatish yetarli. O'z navbatida λ_n^{-1} ketma-ketlik chegaralangan bo'ladigan har xil λ_n xos qiymatlarning cheksiz ketma-ketligi mavjud emasligini ko'rsatish yetarli.

Faraz qilaylik, bunday ketma-ketlik mavjud bo'lsin va x_n vektor λ_n xos qiymatga mos keluvchi xos vektor bo'lsin. Ma'lumki, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ vektorlar chiziqli erkli bo'ladi. X_n bilan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlarning chiziqli qobig'ini belgilaymiz, ya'ni X_n to'plam

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

ko'rinishdagi elementlardan tashkil topgan. Har bir $y \in X_n$ uchun quyidagiga egamiz

$$y - \frac{1}{\lambda_n} Ay = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right) x_k .$$

Bu yerdan ko'rinadiki,

$$y-\frac{1}{\lambda_n}Ay\in X_{n-1}.$$

Endi $\{y_n\}$ ketma-ketlikni shunday tanlaymizki,

$$1)\, y_n\in X_n;\quad 2)\|y_n\|=1;\quad 3)\,\rho(y_n,X_{n-1})=\inf_{x\in X_{n-1}}\|y_n-x\|>\frac{1}{2}$$

shartlar bajarilsin (bunday ketma-ketlikning mavjudligi 17.1-lemmada isbotlangan). Agar $\{\lambda_n^{-1}\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, u holda $\{\lambda_n^{-1}y_n\}$ ketma-ketlik X da chegaralangan bo'ladi. Lekin shu bilan birga, $\{A(\lambda_n^{-1}y_n)\}$ ketma-ketlik o'zida birorta ham yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni saqlamaydi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $n>m$ da

$$\left\|A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)-A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right\|=\left\|y_n-\left(y_n-\frac{1}{\lambda_n}Ay_n+A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right)\right\|\geq\frac{1}{2}.$$

Chunki

$$y_n-\frac{1}{\lambda_n}Ay_n+A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\in X_{n-1}.$$

Hosil qilingan qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi. Δ

18.1-misol. ℓ_1 Banax fazosida

$$A:\ell_1\to\ell_1,\ Ax=\left(x_1,\frac{1}{2}x_2,\ldots,\frac{1}{n}x_n,\ldots\right)$$

operatorni qaraymiz. Uning kompaktligini ko'rsating.

Yechish. Agar biz A operatorga tekis yaqinlashuvchi kompakt operatorlar ketma-ketligi mavjud ekanligini ko'rsatsak, u holda 18.1-natijaga ko'ra, A kompakt operator bo'ladi. A_n operatorlarni quyidagicha quramiz:

$$A_n:\ell_1\to\ell_1,\quad A_nx=\left(x_1,\frac{1}{2}x_2,\ldots,\frac{1}{n}x_n,0,0,\ldots\right).$$

A_n operatorlarning chiziqliligi oson tekshiriladi. Ularning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz.

$$\|A_n x\| = \sum_{1\le k\le n}\left|\frac{1}{k}x_k\right| \le \sum_{1\le k\le n}|x_k| \le \|x\|.$$

Bu yerdan $\|A_n\| \le 1$ tengsizlik kelib chiqadi. 17.3-misolda ko'rsatilganidek $\dim \operatorname{Im} A_n = n$ tenglik o'rinli. Demak, A_n chegaralangan va $n-$ o'lchamli operator. 17.2-teoremaga ko'ra, A_n kompakt operator. Bundan tashqari A_n operatorlar ketma-ketligi A operatorga tekis yaqinlashadi. Haqiqatan ham,

$$\|(A - A_n)x\| = \sum_{n+1\le k<\infty}\left|\frac{1}{k}x_k\right| \le \frac{1}{n+1}\sum_{n+1\le k<\infty}|x_k| \le \frac{1}{n+1}\|x\|.$$

Bu yerdan

$$\|A - A_n\| \le \frac{1}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty$$

ekanligini olamiz. 18.1-natijaga ko'ra, A kompakt operator bo'ladi. Δ

Hilbert fazolarida kompakt operatorlar. Yuqorida biz Banax fazosida aniqlangan kompakt operatorlar haqida so'z yuritdik va ularning ba'zi xossalarini isbotladik. Hozir biz bu ma'lumotlarni Hilbert fazosidagi kompakt operatorlarga taalluqli bo'lgan ayrim faktlar bilan to'ldiramiz.

Bizga H Hilbert fazosi, uning x nuqtasi hamda $\{x_n\} \subset H$ ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

18.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $y \in H$ *uchun* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)$ *bo'lsa,* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik* x *ga kuchsiz yoki kuchsiz ma'noda yaqinlashuvchi deyiladi va* $x_n \xrightarrow{w} x$ *shaklda belgilanadi.*

18.2-ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ *bo'lsa,* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik* x *ga kuchli ma'noda yaqinlashuvchi deyiladi va* $x_n \to x$ *shaklda belgilanadi.*

Endi H Hilbert fazosida kuchsiz ma'nodagi nisbiy kompakt to'plam ta'rifini beramiz.

18.3-ta'rif. *Agar* $M \subset H$ *to'plamning ixtiyoriy* $\{x_n\}$ *ketma-ketligidan* *kuchsiz ma'noda yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, M ga kuchsiz ma'nodagi kompakt to'plam deyiladi.*

Quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

18.5-teorema. *$M \subset H$ to'plam kuchsiz ma'noda kompakt bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Biz har qanday chegaralangan to'plamni nisbiy kompakt to'plamga akslantiruvchi A operatorni kompakt operator deb atadik. 18.5-teoremaga ko'ra H dagi hamma chegaralangan to'plamlar (va faqat ular) - kuchsiz kompakt. Demak, Hilbert fazosidagi kompakt operatorlarni har qanday kuchsiz kompakt to'plamni nisbiy kompakt to'plamga o'tkazuvchi operator sifatida aniqlash mumkin. Va nihoyat, ayrim hollarda Hilbert fazosidagi operatorlarning kompaktligini tekshirishda quyidagi ta'rif qulay.

18.4-ta'rif. *Agar H Hilbert fazosida aniqlangan A operator har qanday kuchsiz yaqinlashuvchi ketma-ketlikni kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikka akslantirsa, u holda A kompakt operator deyiladi.*

Haqiqatan ham, bu shart bajarilgan bo'lsin va $M \subset H$ chegaralangan to'plam bo'lsin. M to'plamning har qanday cheksiz qism to'plami o'zida kuchsiz yaqinlashuvchi ketma-ketlikni saqlaydi. Agar bu ketma-ketlik A operator ta'sirida kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikka o'tkazilsa, u holda $A(M)$ – nisbiy kompakt.

Aksincha, A– kompakt operator va $\{x_n\}$ ketma-ketlik x elementga kuchsiz ma'noda yaqinlashsin. U holda $\{Ax_n\}$ ketma-ketlik o'zida kuchli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni saqlaydi. Shu bilan birga $\{Ax_n\}$ ketma-ketlik, A ning uzluksizligiga ko'ra, Ax ga kuchsiz yaqinlashadi. Bu yerdan kelib chiqadiki, $\{Ax_n\}$ ketma-ketlik bittadan ortiq limitik nuqtaga ega emas. Demak, $\{Ax_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik.

Endi biz o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan kompakt operatorlarni batafsilroq o'rganamiz. Xususan, bunday operatorlar uchun chiziqli algebra kursidan ma'lum bo'lgan matritsalarni diagonal ko'rinishga keltirish haqidagi teoremaga o'xshash Hilbert-Shmidt teoremasini isbotlaymiz. Avval quyidagi ikkita tasdiqni isbotlaymiz.

18.2-lemma. *H kompleks Hilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan chegaralangan A operatorning barcha xos qiymatlari haqiqiydir.*

Isbot. Haqiqatan ham, $Ax = \lambda x$ tenglama $x \neq \theta$ yechimga ega bo'lsin. U holda

$$\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x,x).$$

Bu yerdan $\lambda = \overline{\lambda}$. Δ

18.3-lemma. *O'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o'zaro ortogonaldir.*

Isbot. Haqiqatan ham, agar $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, hamda $\lambda - \mu \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\lambda(x,y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x,y).$$

Bu yerdan $(\lambda - \mu)(x,y) = 0$, ya'ni $(x,y) = 0$. Demak, $x \perp y$. Δ

Endi quyidagi fundamental teoremani isbotlaymiz.

18.6-teorema. *(Hilbert-Shmidt). H Hilbert fazosida kompakt, o'z-o'ziga qo'shma, chiziqli A operator berilgan bo'lib, $\{\lambda_n\}$ - uning barcha nolmas xos qiymatlari ketma-ketligi bo'lsin. U holda H fazoda shu xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlardan iborat shunday $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema mavjudki, har bir $\xi \in H$ element yagona usulda*

$$\xi = \sum_k c_k \phi_k + \xi'$$

ko'rinishda tasvirlanadi, bu yerda ξ' vektor $A\xi' = 0$ shartni qanoatlantiradi. Bu holda

$$A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \phi_k.$$

Agar nolmas xos qiymatlar soni cheksiz bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0.$$

Bu asosiy teoremani isbotlash uchun bizga quyidagi yordamchi tasdiqlar kerak bo'ladi.

18.4-lemma. *A kompakt operator va $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik ξ elementga kuchsiz yaqinlashsin, u holda*

$$Q(\xi_n)=(A\xi_n,\xi_n)\to(A\xi,\xi)=Q(\xi).$$

Isbot. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$|(A\xi_n,\xi_n)-(A\xi,\xi)|=|(A\xi_n,\xi_n)-(A\xi,\xi_n)+(A\xi,\xi_n)-(A\xi,\xi)|\le$$

$$\le|(A\xi_n,\xi_n)-(A\xi,\xi_n)|+|(A\xi,\xi_n)-(A\xi,\xi)|.$$

Ikkinchi tomondan,

$$|(A\xi_n,\xi_n)-(A\xi,\xi_n)|\le\|\xi_n\|\cdot\|A(\xi_n-\xi)\|$$

va

$$|(A\xi,\xi_n)-(A\xi,\xi)|=|(A\xi,\xi_n-\xi)|=|(\xi,A^*(\xi_n-\xi))|\le\|\xi\|\,\|A^*(\xi_n-\xi)\|.$$

Ma'lumki, $\|\xi_n\|$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan va

$$\lim_{n\to\infty}\|A(\xi_n-\xi)\|+\|A^*(\xi_n-\xi)\|=0,$$

bo'lgani uchun, $n\to\infty$ da

$$|(A\xi_n,\xi_n)-(A\xi,\xi)|\to 0.\quad \Delta$$

18.5-lemma. *$A-$ o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator va $(A\xi,\xi)=Q(\xi)$ bo'lsin. Agar $|Q(\xi)|$ funksional birlik sharning ξ_0 nuqtasida maksimumga erishsa, u holda $(\xi_0,\zeta)=0$ ekanligidan*

$$(A\xi_0,\zeta)=(\xi_0,A\zeta)=0$$

tengliklar kelib chiqadi.

Isbot. Ravshanki, ixtiyoriy $\xi\in H$ uchun $Q(\xi)=(A\xi,\xi)\in R$. Agar $|Q(\xi)|$ funksional birlik sharning ξ_0 nuqtasida maksimumga erishsa, u holda $\|\xi_0\|=1$. Haqiqatan ham, agar $\|\xi_0\|<1$ bo'lsa, u holda

$$\left|Q\left(\frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\right)\right|=\left|\left(A\left(\frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\right),\frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\right)\right|=\frac{1}{\|\xi_0\|^2}|(A\xi_0,\xi_0)|>|(A\xi_0,\xi_0)|=|Q(\xi_0)|.$$

Bu munosabat $|Q(\xi_0)|$ ning maksimal qiymat ekanligiga zid. Endi $\zeta\in H$

vektor ξ_0 ga ortogonal bo'lgan ixtiyoriy element bo'lsin. Bu elementlar yordamida ξ elementni quyidagicha quramiz

$$\xi = \frac{\xi_0 + a\zeta}{\sqrt{1+|a|^2 \cdot \|\zeta\|^2}}.$$

Bu yerda a - ixtiyoriy kompleks son. $\|\xi_0\| = 1$ ekanligidan $\|\xi\| = 1$ kelib chiqadi.

$$Q(\xi) = \frac{1}{1+|a|^2 \cdot \|\zeta\|^2}[Q(\xi_0) + 2Re\, a\,(A\xi_0, \zeta) + |a|^2\, Q(\zeta)]$$

bo'lgani uchun, yetarlicha kichik a larda

$$Q(\xi) = Q(\xi_0) + 2Re\, a\,(A\xi_0, \zeta) + O(a^2).$$

Oxirgi tenglikdan ko'rinib turibdiki, agar $(A\xi_0, \zeta) \neq 0$ bo'lsa, u holda a ni shunday tanlash mumkinki, $|Q(\xi)| > |Q(\xi_0)|$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $|Q(\xi_0)|$ maksimal qiymat ekanligiga zid. Δ

18.6-lemma. *Agar $A-$ o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'lib, $|(A\xi, \xi)| = |Q(\xi)|$ funksional birlik sharning ξ_0 nuqtasida maksimumga erishsa, u holda biror λ son uchun $A\xi_0 = \lambda\xi_0$ tenglik o'rinli.*

Isbot. 18.5-lemmaga ko'ra, ξ_0 vektorga ortogonal bo'lgan $M_0^\perp := \{\xi \in H : (\xi_0, \xi) = 0\}$ qism fazo A operatorga nisbatan invariant bo'ladi. $A-$ o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lganligi uchun $M_0^\perp$ qism fazoga ortogonal bo'lgan, bir o'lchamli $M_0 = \{\xi \in H : \xi = \alpha\xi_0\}$ qism fazo ham A ga nisbatan (15.1-lemmaga qarang) invariant bo'ladi. Bir o'lchamli fazoda har qanday chiziqli operator songa ko'paytirish operatoridir. Demak, $A\xi_0 = \lambda\xi_0$ tenglik o'rinli. Δ

18.6-teoremaning isboti. Biz ϕ_k elementlarni ularga mos keluvchi xos qiymatlarning absolyut qiymatlari kamayib borishi tartibida induksiya bo'yicha quramiz:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \cdots.$$

ϕ_1 elementni qurish uchun $|Q(\xi)|=|(A\xi,\xi)|$ funksionalni qaraymiz va uni birlik sharda maksimumga erishishini isbotlaymiz.

$$S_1=\sup_{\|\xi\|\le 1}|(A\xi,\xi)|$$

va $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – ketma-ketlik uchun, $\|\xi_n\|\le 1$ va

$$\lim_{n\to\infty}|(A\xi_n,\xi_n)|=S_1$$

bo'lsin. Birlik shar H da kuchsiz kompakt bo'lganligi uchun $\{\xi_n\}$ dan biror ζ elementga kuchsiz yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu holda $\|\zeta\|\le 1$ va 18.4-lemmaga ko'ra

$$|(A\zeta,\zeta)|=S_1.$$

Biz ζ elementni ϕ_1 deb qabul qilamiz. 18.5-lemma isbotiga ko'ra $\|\zeta\|=\|\phi_1\|=1$. Bu holda 18.6-lemmaga ko'ra $A\phi_1=\lambda_1\phi_1$, bu yerdan $|\lambda_1|=|(A\phi_1,\phi_1)|=S_1$. Endi $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ xos qiymatlarga mos keluvchi $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$ xos vektorlar qurilgan bo'lsin. $|Q(\xi)|=|(A\xi,\xi)|$ funksionalni

$$M_n^{\perp}=H\ominus M(\{\phi_k\}_{k=1}^{n})$$

qism fazoda qaraymiz. $M_n^{\perp}$ qism fazo A operatorga nisbatan invariant (chunki $M(\{\phi_k\}_{k=1}^{n})$ invariant va A o'z-o'ziga qo'shma operator). $|(A\xi,\xi)|$ funksional $\phi_{n+1}\in M_n^{\perp}$ da maksimumga erishsin. 18.6-lemmaga ko'ra u A operatorning xos vektori bo'ladi, ya'ni $A\phi_{n+1}=\lambda_{n+1}\phi_{n+1}$.

Bu yerda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin.

I. Chekli qadamdan so'ng, biz shunday $M_n^{\perp}$ qism fazoga ega bo'lamiz, bu fazoda $(A\xi,\xi)=0$.

II. Ixtiyoriy $n\in N$ uchun $M_n^{\perp}$ qism fazoda $(A\xi,\xi)\neq 0$.

Birinchi holda 18.6-lemmadan kelib chiqadiki, A operator $M_n^{\perp}$ qism fazoni nolga o'tkazadi, ya'ni $M_n^{\perp}$ qism fazo $\lambda=0$ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlardan iborat. Bu holda qurilgan $\{\phi_n\}$ vektorlar sistemasi chekli sondagi elementdan iborat.

Ikkinchi holda xos vektorlarning $\{\phi_n\}$ ketma-ketligi hosil bo'lib, ularning har biri uchun $\lambda_n \neq 0$. Bu holda $\lambda_n \to 0$ ekanligini ko'rsatamiz. $\{\phi_n\}$ ketma-ketlik (har qanday ortonormal sistema kabi) nolga kuchsiz yaqinlashadi, chunki ixtiyoriy $f \in H$ uchun uning Fur'e koeffitsiyentlari $c_n = (f, \phi_n)$ uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2$$

munosabat o'rinli. Sonli qator yaqinlashishining zaruriy shartidan $c_n = (f, \phi_n) \to 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$ ketma-ketlik nolga kuchli ma'noda (norma bo'yicha) yaqinlashadi. Bundan

$$\lim_{n\to\infty} \|A\phi_n\| = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0.$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$M^{\perp} = H \ominus M(\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}) = \bigcap_{n=1} M_n^{\perp}.$$

Faraz qilaylik, $M^{\perp}$ bo'sh bo'lmasin. Agar $\xi \in M^{\perp}$ va $\xi \neq 0$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$|(A\xi, \xi)| \leq |\lambda_n| \cdot \|\xi\|^2.$$

Bu yerdan limitga o'tsak,

$$(A\xi, \xi) = 0.$$

18.6-lemmani $M^{\perp}$ qism fazo uchun qo'llab, $A\xi = 0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $Ker\, A = M^{\perp}$. $\{\phi_n\}$ sistemaning qurilishidan ko'rinib turibdiki, ixtiyoriy $\xi \in H = M \oplus M^{\perp}$ vektor

$$\xi = \sum_k c_k \phi_k + \xi', \quad \xi' \in M^{\perp} = Ker\, A,$$

ko'rinishda tasvirlanadi. Bu yerdan

$$A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \phi_k. \ \Delta$$

Endi kompakt operatorlarga misollar keltiramiz.

18.2. ℓ_2 Hilbert fazosida $\{a_n\}$ ga ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$A: \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, \ldots)$$

operatorni qaraymiz. $A \in K(\ell_2)$ bo'lishi uchun

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{18.4}$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

Isbot. *Yetarliligi.* (18.4) shart bajarilsin. Agar biz A operatorga tekis yaqinlashuvchi kompakt operatorlar ketma-ketligi mavjud ekanligini ko'rsata olsak, u holda 18.1-natijaga ko'ra A kompakt operator bo'ladi. A_n operatorlarni quyidagicha quramiz:

$$A_n: \ell_2 \to \ell_2, \quad A_nx = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, 0, 0, \ldots).$$

17.3-misolga ko'ra, har bir $n \in N$ da A_n operatorlar kompakt. Bundan tashqari A_n operatorlar ketma-ketligi A operatorga tekis yaqinlashadi. Haqiqatan ham, 11.9-misolga ko'rsa

$$\|A - A_n\| = \sup_{n<k<\infty} |a_k|.$$

Bundan va (18.4) shartdan

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = \lim_{n\to\infty} \sup_{n<k<\infty} |a_k| = 0.$$

Demak, 18.1-natijaga ko'ra, A kompakt operator bo'ladi.

Zaruriyligi. Faraz qilaylik, A kompakt operator bo'lsin. U holda nolga kuchsiz yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\} \subset \ell_2$ ketma-ketlik uchun Ax_n ketma-ketlik nolga intiluvchi bo'ladi. Nolga kuchsiz yaqinlashuvchi ketma-ketlik sifatida ℓ_2 fazodagi ortonormal bazis $\{e_n = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{n},0,\ldots)\}_{n=1}^{\infty}$ ni olamiz. 16.3-misolga ko'ra, $Ae_n = a_ne_n$ tenglik o'rinli. Ae_n ketma-ketlikning nolga intilishidan

$$\lim_{n\to\infty} \|Ae_n\| = \lim_{n\to\infty} |a_ne_n| = \lim_{n\to\infty} |a_n|\,\|e_n\| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

ni olamiz. Demak, (18.4) shart bajariladi. Δ

18.3. 17.4-misolda qaralgan integral operatorni, ya'ni

$$(Af)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}cos(x-y)f(y)dy,\quad f\in L_2[-\pi,\pi]$$

operatorni qaraymiz. A operator Hilbert-Shmidt teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. A operatorning kompaktligi 17.4-misolda ko'rsatilgan edi. 15.4-misolda $L_2[a;b]$ fazoda $K(x,y)$ yadroli integral operatorning qo'shmasi topilib, integral operatorning o'z-o'ziga qo'shma bo'lishining zarur va yetarli sharti (15.14) ko'rinishda bo'lishi keltirilgan edi. Qaralayotgan A operator uchun (15.14) shartning bajarilishini tekshiramiz. Bizning holimizda $K(x,y)=cos(x-y)$ bo'lgani uchun

$$K(x,y)=\cos(x-y)=\cos(y-x)=\overline{\cos(y-x)}=\overline{K(y,x)}$$

tenglik o'rinli. Demak, $A=A^*$. Shunday qilib, A operator Hilbert-Shmidt teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Δ

18.4. 18.3-misolda qaralgan A operatorning xos qiymat va xos funksiyalarini toping.

Yechish. Xos qiymatga nisbatan tenglama $Af=\lambda f$, ya'ni

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x-y)f(y)dy=\lambda f(x)$$

tenglamani qaraymiz. Bu tenglamani quyidagicha ham yozish mumkin.

$$\lambda f(x)=\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\cos y f(y)dy+\sin x\int_{-\pi}^{\pi}\sin y f(y)dy=\alpha\cos x+\beta\sin x. \tag{18.5}$$

Bu yerda

$$\alpha=\int_{-\pi}^{\pi}\cos y f(y)dy,\quad \beta=\int_{-\pi}^{\pi}\sin y f(y)dy. \tag{18.6}$$

Ikki holni alohida qaraymiz: i) $\lambda=0$, ii) $\lambda\neq 0$.

i). Bu holda $\alpha\cos x+\beta\sin x=0$ ga ega bo'lamiz. $u_1(x)=cosx$ va $v_1(x)=sinx$ elementlar chiziqli bog'lanmagan, shuning uchun $\alpha=\beta=0$. Dmak, (18.6) ga ko'ra,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos y f(y) dy = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y) dy = 0 \tag{18.7}$$

bo'ladi. (18.7) shartni qanoatlantiruvchi elementlar to'plami A operatorning yadrosini tashkil qiladi va $\dim KerA = \infty$. Boshqacha aytganda, (18.7) shartni qanoatlantiruvchi elementlar to'plami $u_1(x) = \cos x$ va $v_1(x) = \sin x$ elementlarga ortogonal qism fazo. Bu qism fazoda

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right\}_{n=2}^{\infty}, \left\{v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}_{n=2}^{\infty}$$

sistema ortonormal bazis bo'ladi. Demak, $\lambda = 0$ soni A operator uchun cheksiz karrali xos qiymat bo'ladi.

Endi $\lambda \neq 0$ bo'lsin, ya'ni ii) holni qaraymiz. (18.5) dan foydalansak, $Af = \lambda f$ tenglamaning yechimi f uchun quyidagi ko'rinishni olamiz:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\cos x + \frac{\beta}{\lambda}\sin x. \tag{18.8}$$

Bu yerda α va β koeffitsiyentlar noma'lumlar, chunki ular izlanayotgan f funksiyaning integrali orqali ifodalangan. Agar biz f ning (18.8) ifodasini (18.6) ga qo'ysak, α va β noma'lumlarga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y \left[\frac{\alpha}{\lambda}\cos y + \frac{\beta}{\lambda}\sin y\right] dy = \frac{\pi\alpha}{\lambda}, \\ \beta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \left[\frac{\alpha}{\lambda}\cos y + \frac{\beta}{\lambda}\sin y\right] dy = \frac{\pi\beta}{\lambda}. \end{cases}$$

Bu tenglama faqatgina $\lambda = \pi$ da nolmas yechimga ega. Bu holda α va β lar sifatida ixtiyoriy sonni olish mumkin. (18.8) ga ko'ra

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \tag{18.9}$$

element $\lambda = \pi$ xos qiymatga mos keluvchi xos funksiya bo'ladi. Demak, $A - \pi I$ operatorning yadrosi ikki o'lchamli qism fazo ekan. Bundan $\lambda = \pi$ xos qiymatning karraligi 2 ekanligi kelib chiqadi. Δ

Agar biz 18.3-misolda qaralgan A operatorga Hilbert-Shmidt teoremasini qo'llasak, $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi$, va $\lambda_n = 0$, $n \geq 3$ ekanligini hosil qilamiz.

18.5. Kompakt operatorlarning muhim sinfi sifatida $L_2[a,b]$ fazodagi integral operatorlarni qarash mumkin. Masalan, har bir $x \in L_2[a,b]$ elementga

$$(Ax)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt$$

formula bo'yicha ta'sir qiluvchi operatorni qaraymiz. Bu yerda integral operator yadrosi $K(s,t) - [a,b]\times[a,b]$ da uzluksiz funksiya.

Ko'rsatma. A operator uchun 19-§ dagi 19.1-teorema shartlari bajarilishini ko'rsating.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $L_2[0,1]$ – *fazoda chekli o'lchamli operatorga misol keltiring.*

2. $A: H \to H$ *o'z-oziga qo'shma, chegaralangan operator.* m *va* M *sonlar* (Ax,x) *funksionalning birlik shardagi aniq quyi va aniq yuqori chegaralari bo'lsin.* $\sigma(A) \subset [m,M]$ *munosabatni isbotlang.*

3. *O'z-oziga qo'shma, chegaralangan* A *operator uchun* $\sigma(A) \supset \{m,M\}$ *munosabatni isbotlang.*

4. *Shunday o'z-oziga qo'shma, chegaralangan* A *operatorga misol keltiringki,* $\sigma(A) \cap (m,M) = \varnothing$ *bo'lsin.*

5. *O'z-oziga qo'shma, chegaralangan* $A: H \to H$ *operator uchun*

$$\sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)| = S_1 = \|A\|$$

tenglikni isbotlang.

6. u - $[0,1]$ *kesmada uzluksiz funksiya.* $L_2[0,1]$ *fazoda* $(Af)(x) = u(x)f(x)$ *tenglik bilan aniqlangan* A *operatorga qo'shma operatorni toping.* *Natijani* $u(x) = \cos x + i\sin x$ *bo'lgan holda tekshirib ko'ring.*

7. $L_2[-\pi,\pi]$ *Hilbert fazoda aniqlangan*

$$(Af)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x\cos y)f(y)dy$$

operatorning o'z-oziga qo'shma va kompakt ekanligini ko'rsating. $|(Ax,x)|=Q(x)$ *funksionalning birlik shardagi aniq yuqori chegarasini toping.* A *operatorning noldan farqli xos qiymatlari sonini toping.*

8. $L_2[-\pi,\pi]$ *Hilbert fazoda berilgan*

$$(Af)(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos ny\, f(y)dy$$

operatorning o'z-oziga qo'shma ekanligini ko'rsating. Kompaktlikka tekshiring. Noldan farqli xos qiymatlarini toping. Ularga mos xos funksiyalarning $\{\phi_n\}$ *sistemasini quring. Bu operatorga Hilbert-Shmidt teoremasini qo'llang va* $M^{\perp}$ *qism fazoning tavsifini bering.*

19-§. Chiziqli integral tenglamalar

Funksional fazoda (masalan, $C[a,b], L_2[a,b], C_2[a,b]$) tenglama berilgan bo'lib, noma'lum element funksiyadan iborat bo'lsa, bunday tenglama funksional tenglama deyiladi. Agar funksional tenglamada noma'lum funksiya integral ostida bo'lsa, u holda tenglama integral tenglama deyiladi. Masalan,

$$\phi(s)=\int_a^b K(s,t)g(\phi(t),t)dt$$

tenglama ϕ ga nisbatan integral tenglamadir, bu yerda $K(s,t), g(s,t)$ – berilgan funksiyalar.

Integral tenglamadagi ifoda noma'lum funksiyaga nisbatan chiziqli bo'lgan holda tenglama chiziqli integral tenglama deyiladi. Quyidagi tenglamalar chiziqli integral tenglamalarga misol bo'ladi:

$$\int_a^b K(s,t)\phi(t)dt+f(s)=0, \tag{19.1}$$

$$\phi(s)=\int_a^b K(s,t)\phi(t)dt+f(s). \tag{19.2}$$

Bu yerda $\phi-$ noma'lum funksiya, $K(s,t)$ va $f(s)$ ma'lum funksiyalar. (19.1) va (19.2) tenglamalar mos ravishda birinchi va ikkinchi tur Fredholm tenglamalari deyiladi.

Xususan, $K(s,t)$ funksiya $t>s$ qiymatlar uchun $K(s,t)=0$ shartni qanoatlantirsa, u holda (19.1) va (19.2) tenglamalar mos ravishda

$$\int_a^s K(s,t)\phi(t)dt+f(s)=0, \tag{19.3}$$

$$\phi(s)=\int_a^s K(s,t)\phi(t)dt+f(s) \tag{19.4}$$

ko'rinishlarga ega bo'ladi. Bunday tenglamalar birinchi va ikkinchi tur Volterra tenglamalari deyiladi. Volterra tenglamalari Fredholm tenglamalarining xususiy holi bo'lsa-da, ular alohida o'rganiladi, chunki Volterra tenglamalari o'ziga xos bo'lgan xossalarga ega.

Agar (19.1)-(19.4) tenglamalarda f funksiya nolga teng bo'lsa, bu tenglamalar bir jinsli deyiladi.

19.1-misol. Quyidagi

$$f(s)=\int_0^s \frac{\phi(t)}{(s-t)^\alpha}dt,\ (0<\alpha<1,\ f(0)=0)$$

tenglama ϕ noma'limga nisbatan Abel tenglamasi deyiladi. Bu tenglama Volterra tenglamalarining xususiy holi bo'lib, 1823 yilda N. Abel tomonidan qaralgan, uning yechimi

$$\phi(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^t \frac{f'(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}$$

ko'rinishga ega.

Biz bu yerda faqat ikkinchi tur Fredholm tenglamasini qaraymiz. $L_2[a,b]$ kompleks Hilbert fazosida ikkinchi tur Fredholm tenglamasini, ya'ni (19.2) tenglamani olamiz. Bu tenglamada f ma'lum, ϕ noma'lum funksiyalar bo'lib, ular $L_2[a,b]$ fazoning elementlaridir.

(19.2) tenglamaning yadrosi deb nomlanuvchi $K(s,t)$ funksiyadan quyidagilarni talab qilamiz, u – o'lchovli va

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\, dsdt < \infty \qquad (19.5)$$

shartni qanoatlantirsin, ya'ni $K(s,t)$– kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya. $L_2[a,b]$ fazoda aniqlangan

$$(T\phi)(s) = \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt \qquad (19.6)$$

operatorni qaraymiz. Bu operator K yadroli Fredholm operatori deb ataladi. (19.2) tenglamani o'rganish shu operatorning xossalarini tekshirishga keltiriladi.

Navbatdagi teoremalarni isbotlashda biz integrallash tartibini almashtirish haqidagi Fubini teoremasining natijasidan foydalanamiz. Fubini teoremasi natijasining quyidagi bayoni biz uchun qulaydir.

19.1-teorema *(Fubini). Agar $K(x,y)$ funksiya $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda integrallanuvchi bo'lsa, u holda deyarli barcha $x\in[a,b]$ $(y\in[a,b])$ larda*

$$\int_a^b |K(x,y)|^2\, dy \quad \left(\int_a^b |K(x,y)|^2\, dx\right)$$

integral mavjud va quyidagilar o'rinli

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\, dxdy = \int_a^b dx\int_a^b |K(x,y)|^2\, dy = \int_a^b dy\int_a^b |K(x,y)|^2\, dx.$$

19.2-teorema. *Agar $K(x,y)$ yadro (19.5) shartni qanoatlantirsa, u holda $L_2[a,b]$ fazoda (19.6) tenglik bilan aniqlanuvchi T operator chiziqli, kompakt va*

$$\|T\| \le \sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\, dsdt} \qquad (19.7)$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. Avvalo shuni ta'kidlaymizki, Fubini teoremasi va (19.5) shartga ko'ra, deyarli barcha s lar uchun

$$\int_a^b |K(s,t)|^2\,dt$$

integral mavjud. Boshqacha aytganda, $K(s,t)$ funksiya t ning funksiyasi sifatida deyarli barcha s larda $L_2[a,b]$ fazoga qarashli. Kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning ko'paytmasi integrallanuvchi bo'lgani uchun, (19.6) ning o'ng tomonidagi integral deyarli barcha s lar uchun mavjud, ya'ni $\psi(s)=(T\phi)(s)$ funksiya deyarli hamma yerda aniqlangan. $\psi\in L_2[a,b]$ ekanligini ko'rsatamiz. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra, deyarli barcha s lar uchun

$$|\psi(s)|^2=\left|\int_a^b K(s,t)\phi(t)dt\right|^2\le\int_a^b|K(s,t)|^2\,dt\int_a^b|\phi(t)|^2\,dt=\|\phi\|^2\int_a^b|K(s,t)|^2\,dt$$

tengsizlikni olamiz. Oxirgi ifodani a dan b gacha s bo'yicha integrallab va $|K(s,t)|^2$ dan takroriy integralni ikki karrali integralga almashtirib, quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz

$$\|T\phi\|^2=\int_a^b|\psi(s)|^2\,ds\le\|\phi\|^2\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2\,dsdt.$$

Bu yerdan $|\psi(s)|^2$ ning integrallanuvchanligi va (19.7) tengsizlik kelib chiqadi. Endi T operatorning kompaktligini ko'rsatish qoldi. $\{\psi_n\}$ sistema $L_2[a,b]$ fazoda to'la ortonormal sistema bo'lsin. U holda $\{\psi_m(s)\psi_n(t)\}$ ko'paytmalar sistemasi $L_2([a,b]\times[a,b])$ fazoda to'la ortonormal sistemani tashkil qiladi va demak,

$$K(s,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\psi_m(s)\psi_n(t)$$

yoyilma o'rinli. Endi

$$K_N(s,t)=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}a_{mn}\psi_m(s)\psi_n(t)$$

deymiz. Bu yadroga mos Fredholm operatorini T_N bilan belgilaymiz. Bu operator kompakt, chunki u chegaralangan va $L_2[a,b]$ fazoni chekli N - o'lchamli qism fazoga akslantiradi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $\phi\in L_2[a,b]$

uchun

$$(T_N\phi)(s)=\int_a^b K_N(s,t)\phi(t)dt=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}a_{mn}\psi_m(s)\int_a^b f(t)\psi_n(t)dt=\sum_{m=1}^{N}\psi_m(s)\sum_{n=1}^{N}a_{mn}b_n$$

bu yerda $b_n=\int_a^b f(t)\psi_n(t)dt$. Demak, T_N operator $L_2[a,b]$ fazoni $\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_N$ funksiyalarning chiziqli qobig'I bo'lgan N - o'lchamli qism fazoga akslantiradi.

$K_N(s,t)$ funksiya $K(s,t)$ funksiyaning $\{\psi_m(s)\psi_n(t)\}$ sistema bo'yicha Fur'e qatorining qismiy yig'indisidan iborat. Shuning uchun, $N\to\infty$ da

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)-K_N(s,t)|^2 dsdt\to 0.$$

Endi (19.7) tengsizlikni $T-T_N$ operatorga qo'llasak,

$$\|T-T_N\|\le\sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(s,t)-K_N(s,t)|^2 dsdt}\to 0,\quad N\to\infty.$$

Shunday qilib, $\{T_N\}$ kompakt operatorlar ketma-ketligi norma bo'yicha T operatorga yaqinlashadi. Kompakt operatorlarning asosiy xossalari mavzusidagi 18.1-natijaga asosan T ham kompakt operator bo'ladi. Δ

Eslatmalar.

1. 19.2-teoremaning isboti davomida biz shu narsani o'rnatdikki, har qanday Fredholm operatori chekli o'lchamli operatorlarning norma bo'yicha limitidir.

2. T_1,T_2 - (19.6) ko'rinishdagi ikkita operator va K_1,K_2 – ularga mos keluvchi yadrolar bo'lsin. Agar barcha $\phi\in L_2[a,b]$ lar uchun $T_1\phi=T_2\phi$ bo'lsa, u holda deyarli hamma yerda $K_1(s,t)=K_2(s,t)$. Haqiqatan ham, agar barcha $\phi\in L_2[a,b]$ lar uchun

$$(T_1\phi-T_2\phi)(s)=\int_a^b\big(K_1(s,t)-K_2(s,t)\big)\phi(t)dt=0$$

bo'lsa, u holda deyarli barcha $s\in[a,b]$ larda

$$\int_a^b |K_1(s,t) - K_2(s,t)|^2 dt = 0$$

va demak,

$$\|K_1 - K_2\|^2 = \int_a^b \int_a^b | K_1(s,t) - K_2(s,t)|^2 \, ds dt = 0.$$

Bu yerdan bizning tasdig'imiz $K_1(s,t) = K_2(s,t)$ kelib chiqadi. Ma'lumki, $L_2\left([a,b]^2\right)$ fazoda ekvivalent funksiyalar bitta element sifatida qaraladi, shuning uchun aytish mumkinki, integral operatorlar bilan yadrolar o'rtasidagi moslik o'zaro bir qiymatlidir.

19.3-teorema. *$T-K(s,t)$ yadro bilan aniqlanuvchi Fredholm operatori bo'lsin. U holda unga qo'shma bo'lgan T^* operator $\overline{K(t,s)}$ yadro bilan aniqlanadi.*

Isbot. Fubini teoremasidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$(Tf, g) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s,t) f(t) dt \right\} \overline{g(s)} ds = \int_a^b \int_a^b K(s,t) f(t) dt \, \overline{g(s)} ds =$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s,t) \overline{g(s)} ds \right\} f(t) dt = \int_a^b f(s) \overline{\left\{ \int_a^b \overline{K(t,s)} g(t) dt \right\}} ds = (f, T^* g).$$

Bu yerdan

$$(T^* g)(s) = \int_a^b \overline{K(t,s)} g(t) dt$$

tenglik, ya'ni teoremaning tasdig'i kelib chiqadi. Δ

Xususan, (19.6) ko'rinishdagi T operator $L_2[a,b]$ fazoda o'z-o'ziga qo'shma, ya'ni $T^* = T$ bo'lishi uchun

$$K(s,t) = \overline{K(t,s)} \tag{19.8}$$

shartning bajarilishi yetarli va zarurdir. Haqiqiy Hilbert fazosi (va demak haqiqiy K yadro) qaraladigan holda o'z-o'ziga qo'shmalik sharti bo'lib, $K(s,t) = K(t,s)$ tenglik xizmat qiladi.

(19.8) shartni qanoatlantiruvchi yadrolar simmetrik yadrolar deyiladi. Endi (19.8) shartni qanoatlantiruvchi yadroli integral tenglamani o'rganamiz. Yuqorida aytilganidek, bu holda

$$(T\phi)(s) = \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt$$

o'z-o'ziga qo'shma kompakt operator. Demak, bu operatorga Hilbert-Shmidt teoremasini qo'llash mumkin. (19.2) tenglamani qisqacha

$$\phi = T\phi + f \qquad (19.9)$$

ko'rinishda yozamiz. Hilbert-Shmidt teoremasiga asosan, T operator uchun $\{\lambda_n\}$ xos qiymatlarga mos keluvchi xos funksiyalarning shunday $\{\psi_n\}$ ortonormal sistemasi mavjudki, ixtiyoriy $\xi \in L_2[a,b]$ element yagona usul bilan

$$\xi = \sum_{n=1} a_n\psi_n + \xi', \quad \xi' \in KerT,$$

ko'rinishda ifodalanadi. Shunday qilib,

$$f = \sum_{n=1} b_n\psi_n + f',\ f' \in KerT, \qquad (19.10)$$

deymiz va (19.9) tenglamaning yechimini

$$\phi = \sum_{n=1} x_n\psi_n + \phi',\ \phi' \in KerT, \qquad (19.11)$$

ko'rinishda izlaymiz. (19.10),(19.11) yoyilmalarni (19.9) ga qo'yib,

$$\sum_{n=1} x_n\psi_n + \phi' = \sum_{n=1} x_n\lambda_n\psi_n + \sum_{n=1} b_n\psi_n + f'$$

tenglamaga kelamiz, ya'ni

$$\sum_{n=1} (1-\lambda_n)x_n\psi_n + \phi' = \sum_{n=1} b_n\psi_n + f'.$$

Bunday yoyilma yagona bo'lganligi sababli

$$\phi' = f', \quad x_n(1-\lambda_n) = b_n, \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

Agar $\lambda_n \neq 1$ bo'lsa, u holda $x_n = b_n(1-\lambda_n)^{-1}$ va $\lambda_n = 1$ bo'lsa, $b_n = 0$.

Ko'rinib turibdiki, $\lambda_n = 1$ holda $b_n = 0$ shart (19.9) tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun yetarli va zarurdir. Bunday $\lambda_n = 1$ uchun

x_n – ixtiyoriy. Shu bilan quyidagi teorema isbotlandi.

19.4-teorema. *Agar* 1 *soni* T *operator uchun xos qiymat bo'lmasa, u holda (19.9) tenglama ixtiyoriy* f *uchun yagona yechimga ega. Agar* 1 *soni* T *operator uchun xos qiymat bo'lsa, u holda (19.9) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun* f *funksiya* 1 *soniga mos keluvchi barcha xos funksiyalarga ortogonal bo'lishi yetarli va zarurdir. Bu holda (19.9) tenglama yechimlarining soni cheksizdir.*

19.2. $L_2[-\pi,\pi]$ Hilbert fazosida

$$u(x)=\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x\cos y)u(y)dy+f(x):=(T_\lambda u)(x)+f(x) \qquad (19.12)$$

integral tenglama berilgan. Parametr $\lambda\in R$ ning qanday qiymatlarida T_λ uchun bir soni xos qiymat bo'ladi?

Yechish. Qaralayotgan integral tenglamaning yadrosi

$$K(x,y)=\frac{\lambda}{2\pi}(1+\cos x\cos y)$$

haqiqiy qiymatli va simmetriklik shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$K(x,y)=K(y,x)\Rightarrow T_\lambda^*=T_\lambda.$$

Endi xos qiymat uchun tenglama $T_\lambda u=u$ ni qaraymiz, ya'ni:

$$\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(y)dy+\frac{\lambda}{2\pi}\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\cos y u(y)dy=u(x). \qquad (19.13)$$

Agar biz (19.13) da

$$\alpha=\int_{-\pi}^{\pi}u(y)dy \quad \text{va} \quad \beta=\int_{-\pi}^{\pi}\cos y u(y)dy \qquad (19.14)$$

belgilashlarni kiritsak, u holda $u(x)$ uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$u(x)=\frac{\lambda}{2\pi}\alpha+\frac{\lambda}{2\pi}\beta\cos x. \qquad (19.15)$$

(19.15) ni (19.14) ga qo'yib,

$$\int_{-\pi}^{\pi}dy=2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos y dy=0, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 y dy=\pi \qquad (19.16)$$

tengliklardan foydalansak, α va β larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \alpha = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\alpha + \frac{\lambda}{2\pi}\beta\cos y\right)dy = \frac{\lambda}{2\pi}\cdot\alpha\cdot 2\pi = \alpha\lambda, \\ \beta = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos y\left(\frac{\lambda}{2\pi}\alpha + \frac{\lambda}{2\pi}\beta\cos y\right)dy = \frac{\lambda}{2\pi}\beta\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 y\,dy = \pi\cdot\frac{\lambda}{2\pi}\beta = \frac{\lambda}{2}\beta. \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti

$$\Delta(\lambda) = (1-\lambda)(1-\frac{\lambda}{2}) = 0 \qquad (19.17)$$

bo'lishi zarur va yetarli. (19.17) dan $\lambda = 1$ yoki $\lambda = 2$ larni olamiz. Demak, λ parametrning $\lambda_1 = 1$ va $\lambda_2 = 2$ qiymatlarida T_λ uchun 1 soni xos qiymat bo'ladi. Endi $T_1 u = u$ va $T_2 u = u$ tenglamalarni yechamiz. Yuqorida bayon qilinganlardan bu tenglamalarning yechimlari mos ravishda $u_1(x) = C$ va $u_2(x) = C\cdot\cos x$ ($C = const$) ekanliklari kelib chiqadi.

19.3. 19.2-misolda qaralgan (19.12) integral tenglamaga $\lambda \notin \{1;2\}$ bo'lgan holda 19.4-teoremani qo'llang va (19.12) integral tenglamani yeching.

Yechish. Agar $\lambda \notin \{1;2\}$ bo'lsa, u holda T_λ operator uchun bir xos qiymat emas, 19.4-teoremaga ko'ra, (19.12) integral tenglama yagona yechimga ega. (19.14) belgilashdan foydalansak, (19.12) tenglamani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2\pi}\alpha + \frac{\lambda}{2\pi}\beta\cos x. \qquad (19.18)$$

(19.18) ni (19.14) ga qo'yib, (19.16) tengliklardan foydalansak, α va β larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \alpha = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \alpha\lambda, \\ \beta = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos y\, f(y)dy + \frac{\lambda}{2}\beta. \end{cases}$$

Bu sistema $\lambda \notin \{1;2\}$ da yagona yechimga ega va

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{1-\lambda}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy, \\ \beta = \dfrac{2}{2-\lambda}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, f(y)dy. \end{cases}$$

α va β larning bu qiymatlarini (19.18) ga qo'yib, (19.12) tenglamaning yechimini olamiz:

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{1-\lambda}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{2-\lambda}\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\, f(y)dy. \qquad (19.19)$$

19.4. 19.2-misolda qaralgan tenglamani $\lambda = 1$ bo'lgan holda, ya'ni

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x\cos y)u(y)dy + f(x) \qquad (19.20)$$

tenglamani yeching.

Yechish. Agar $\lambda = 1$ bo'lsa, u holda T_λ operator uchun bir xos qiymat bo'ladi. 19.4-teoremaga ko'ra, (19.20) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun f funksiya $T_1 u = u$ tenglamaning barcha yechimlariga, ya'ni $u(x) = const$ ga (19.2-misolga qarang) ortogonal bo'lishi zarur va yetarli. Demak, (19.20) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy = 0 \qquad (19.21)$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli. Agar biz (19.14) belgilashdan foydalansak, (19.20) tenglamani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{2\pi}\alpha + \frac{1}{2\pi}\beta\cos x. \qquad (19.22)$$

(19.22) ni (19.14) ga qo'yib, (19.16) va (19.21) tengliklardan foydalansak, α va β larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha, \\ \beta = 2\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\, f(y)dy. \end{cases}$$

Bu yerdan ko'rinib turibdiki, α sifatida ixtiyoriy sonni olish mumkin. Bu qiymatlarni (19.22) ga qo'yib, (19.20) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos y\, f(y)dy + C.$$

Bu yerda $C-$ ixtiyoriy o'zgarmas son.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $L_2[-\pi, \pi]$ *Hilbert fazosida*

$$(Au)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)u(y)dy$$

integral operator normasini 19.2-teoremadan foydalanib baholang.

2. *19.3-teoremadan foydalanib,* $L_2[-\pi, \pi]$ *fazoda*

$$(Au)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x \sin y + i \sin x \cos y)u(y)dy$$

integral operatorga qo'shma operatorni toping.

3. $L_2[-\pi, \pi]$ *Hilbert fazosida quyidagi integral tenglamani yeching:*

$$u(x) = \sin x + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y\, u(y)dy.$$

4. *Parametr* $\lambda \in R$ *ning qanday qiymatlarida*

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos x \cos y)u(y)dy$$

integral tenglama ixtiyoriy $f \in L_2[-\pi, \pi]$ *da yagona yechimga ega bo'ladi?*

5. $L_2[-\pi, \pi]$ *Hilbert fazosida*

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos y\, u(y)dy$$

integral tenglama berilgan. Tenglama yechimga ega bo'ladigan f *lar to'plamini tavsiflang. Bu to'plam qism fazo tashkil qiladimi? Agar u qism fazo tashkil qilsa, uning o'lchamini toping.*

20-§. Fredholm teoremalari

Bu yerda ham yuqorida ko'rilgan

$$\phi = T\phi + f \tag{20.1}$$

tenglamani o'rganishni davom ettiramiz. Navbatdagi mulohazalarda T operatorning integral ko'rinishi emas, balki faqat uning kompaktligi muhim rol o'ynaydi. Shuning uchun H Hilbert fazosida birorta T kompakt operatorni olib, (20.1) ko'rinishdagi tenglamani o'rganamiz. Buning uchun $A = I - T$ operatorni kiritgan holda (20.1) tenglamani

$$A\phi = f \tag{20.2}$$

ko'rinishda yozamiz. (20.2) tenglama bilan bir qatorda bir jinsli bo'lgan

$$A\phi_0 = \theta \tag{20.3}$$

tenglamani va bularga qo'shma bo'lgan

$$A^*\psi = g \tag{20.2'}$$

$$A^*\psi_0 = \theta \tag{20.3'}$$

tenglamalarni qaraymiz. Bu yerda A^* operator A operatorga qo'shma, ya'ni $A^* = (I-T)^* = I - T^*$.

Quyida isbotlanadigan Fredholm teoremalari shu to'rt tenglamaning yechimlari orasidagi bog'lanishlarni ifodalaydi.

20.1-teorema. *(20.2) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun f vektor* (20.3') *tenglamaning har bir yechimiga ortogonal bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. $KerA$ va $\mathrm{Im}A$ lar A operatorning mos ravishda yadrosi va qiymatlari sohasi, ya'ni

$$KerA = \{x \in H : Ax = \theta\},$$

$$\mathrm{Im}\,A = \{y = Ax : x \in H\} = A(H)$$

ekanligini eslatamiz. Ma'lumki, A uzluksiz bo'lgani uchun $KerA$ to'plam H ning yopiq qism fazosi bo'ladi. $\mathrm{Im}A$ ham H ning yopiq qism fazosi ekanligini isbotlaymiz. $\{y_n\} \subset \mathrm{Im}A$ ketma-ketlik biror $y \in H$ elementga yaqinlashuvchi bo'lsin deb faraz qilaylik. Demak,

$$y_n = Ax_n = x_n - Tx_n \to y \tag{20.4}$$

shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud. x_n vektorlarni $Ker A$ fazoga ortogonal deb hisoblash mumkin, aks holda x_n ning o'rniga $x'_n = x_n - prx_n$ vektorlarni olish mumkin; bu yerda prx_n element x_n vektorning $Ker A$ qism fazoga proyeksiyasi. Bundan tashqari, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangandir. Darhaqiqat, aks holda $\|x_n\| \to \infty$ deb hisoblash mumkin, demak, (20.4) ga asosan

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} - T\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{y_n}{\|x_n\|} \to \theta \tag{20.5}$$

munosabat o'rinli.

Ikkinchi tomondan $\{x_n\|x_n\|^{-1}\}$ ketma-ketlik birlik sharga tegishli bo'lgani va T kompakt ekanligi tufayli biror $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik uchun $T\left(x_{n_k}\|x_{n_k}\|^{-1}\right)$ ketma-ketlik biror z elementga yaqinlashuvchi bo'ladi. Bundan (20.5) ga asosan $\left\{\|x_{n_k}\|^{-1} \cdot x_{n_k}\right\}$ ketma-ketlik ham shu z elementga yaqinlashuvchi bo'ladi. Ravshanki,

$$\|z\| = 1, \quad (\text{chunki} \quad \left\|\|x_n\|^{-1} \cdot x_n\right\| = 1\,),$$

$$Az = z - Tz = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\|^{-1} \cdot x_{n_k} - \lim_{k\to\infty} T\left(\|x_{n_k}\|^{-1} \cdot x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} A\left(\|x_{n_k}\|^{-1} \cdot x_{n_k}\right) = \theta,$$

ya'ni $z \in Ker A$. Ammo har bir x_n element $Ker A$ ga ortogonal edi, demak, $z \perp Ker A$. Bu ikki munosabatdan $z = \theta$ kelib chiqadi. Bu $\|z\| = 1$ tenglikka zid. Bu ziddiyat $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralangan ekanligini ko'rsatadi. T operator kompakt bo'lgani uchun $\{Tx_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi bo'lgan $\{Tx_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. (20.4) ga asosan $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu limitni x bilan belgilasak, u holda

$$y=\lim_{n\to\infty} Ax_n=\lim_{n\to\infty} Ax_{n_i}=A(\lim_{n\to\infty} x_{n_i})=Ax.$$

Bu yerdan $y\in \mathrm{Im}A$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\mathrm{Im}A$ yopiqdir. 18.3-teoremaga asosan, T^* operator ham T bilan bir qatorda kompakt bo'lgani sababli, $\mathrm{Im}A^*$ ham H ning yopiq qism fazosi bo'ladi.

Endi biz quyidagi munosabatlarni isbotlaymiz:

$$Ker A\oplus \mathrm{Im}A^*=H, \tag{20.6}$$

$$Ker A^*\oplus \mathrm{Im}A=H. \tag{20.7}$$

Ravshanki, $KerA$ va $\mathrm{Im}A^*$ o'zaro ortogonal qism fazolardir. Haqiqatan, ixtiyoriy $h\in KerA$ va $x\in H$ uchun

$$(h,A^*x)=(Ah,x)=(\theta,x)=0.$$

Ma'lumki, $\mathrm{Im}A^*$ ga ortogonal har qanday qism fazo $(\mathrm{Im}A^*)^\perp$ ning qismidir. Shunday ekan, $KerA\subset(\mathrm{Im}A^*)^\perp$. Agar biz $(\mathrm{Im}A^*)^\perp\subset KerA$ ekanligini ko'rsatsak, (20.6) tenglik isbot bo'lgan bo'ladi. Faraz qilaylik, z vektor $\mathrm{Im}A^*$ ga ortogonal bo'lgan ixtiyoriy element bo'lsin, u holda barcha $x\in H$ uchun

$$(Az,x)=(z,A^*x)=0.$$

Demak, $Az=0$, ya'ni $z\in KerA$. Bundan $(\mathrm{Im}A^*)^\perp\subset KerA$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday, $KerA^*=(\mathrm{Im}\,A)^\perp$ tenglikni ko'rsatib, (20.7) tenglikning isbotiga ega bo'lamiz. (20.7) tenglikdan 20.1-teorema bevosita kelib chiqadi, ya'ni $f\in \mathrm{Im}A$ bo'lishi uchun $f\perp KerA^*$ bo'lishi yetarli va zarurdir. Δ

Har bir k natural son uchun H^k orqali $\mathrm{Im}A^k$ fazoni belgilaymiz. xususan $H^1=\mathrm{Im}\,A$. H^k ning tuzilishidan ravshanki, $A(H^k)=H^{k+1}$ va

$$H\supset H^1\supset H^2\supset\cdots$$

20.1-teoremani isbotlash davomida ko'rsatilganidek, har bir H^k yopiqdir.

20.1-lemma. *Shunday j_0 natural son mavjudki, barcha $k \geq j_0$ uchun*

$$H^{k+1} = H^k$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik, hamma H^k fazolar har xil bo'lsin. Bu holda shunday $\{x_k\}$ ortonormal sistema mavjudki, $x_k \in H^k$ va $x_k \perp H^{k+1}$. Demak, ixtiyoriy l, k $(l > k)$ sonlar uchun

$$Tx_l - Tx_k = -x_k + (x_l + Ax_k - Ax_l).$$

Bu yerda $x_l + Ax_k - Ax_l \in H^{k+1}$ bo'lgani uchun

$$\|Tx_l - Tx_k\|^2 = \|x_k\|^2 + \|x_l + Ax_k - Ax_l\|^2 \geq 1,$$

ya'ni $\{Tx_k\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Bu esa T operatorning kompaktligiga zid. Δ

20.2-teorema. *(Fredholm alternativasi). Yo (20.2) tenglama ixtiyoriy $f \in H$ uchun yagona yechimga ega, yo (20.3) tenglamaning noldan farqli yechimi mavjud.*

Isbot. Agar $Ker A = \{\theta\}$ bo'lsa (ya'ni (20.3) tenglama noldan farqli yechimga ega bo'lmasa), u holda A o'zaro bir qiymatli akslantirishdir. Shuning uchun, agar $H^1 = \operatorname{Im} A \neq H$ deb faraz qilsak, u holda $H^2 \neq H^1, \ldots, H^{k+1} \neq H^k$ munosabatlar ixtiyoriy k uchun o'rinlidir. Bu esa 20.1-lemmaga zid. Demak, $\operatorname{Im} A = H$, ya'ni (20.2) tenglama ixtiyoriy f uchun yagona yechimga ega.

Agar (20.2) tenglama ixtiyoriy f uchun yagona yechimga ega bo'lsa, u holda $\operatorname{Im} A = H$ va (20.7) munosabatga asosan $Ker A^* = \{\theta\}$. Bu tenglikdan yuqoridagidek $\operatorname{Im} A^* = H$ munosabat kelib chiqadi. Endi (20.6) munosabatdan foydalansak, $Ker A = \{\theta\}$, ya'ni (20.3) tenglama faqat nol yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Δ

20.3-teorema. *(20.3) va (20.3') tenglamalarning chiziqli erkli bo'lgan yechimlari soni chekli va o'zaro tengdir. Boshqacha qilib aytganda,*

$$\dim Ker A = \dim Ker A^* < \infty.$$

Isbot. $Ker A$ fazoning o'lchami cheksiz deb faraz qilaylik. Bu holda $Ker A$ da cheksiz elementli $\{x_n\}$ ortonormal sistema mavjud. $x_n \in Ker A$, ya'ni $Ax_n = x_n - Tx_n = \theta$ bo'lgani sababli, $x_n = Tx_n$. Demak,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n - x_m\| = \sqrt{2}, \ n \neq m.$$

Bu yerdan kelib chiqadiki, $\{Tx_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Bu esa T ning kompaktligiga zid. Shunday qilib, $\dim Ker A < \infty$ ekan. Xuddi shunday $\dim Ker A^* < \infty$ ekanligi isbotlanadi. Faraz qilaylik,

$$\dim Ker A = \mu, \quad \dim Ker A^* = \nu$$

bo'lib, $\mu < \nu$ bo'lsin. Endi $Ker A$ va $Ker A^*$ fazolardan mos ravishda

$$\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\mu\} \subset Ker A \quad \text{va} \quad \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu\} \subset Ker A^*$$

ortonormal basizlarni tanlab olamiz va

$$Sx = Ax + \sum_{j=1}^{\mu}(x, \phi_j)\psi_j$$

operatorni qaraymiz. S operator A operatorga chekli o'lchamli operatorni qo'shish natijasida hosil bo'lgani sababli, S operator uchun ham yuqorida A uchun isbotlangan barcha tasdiqlar o'rinli. Bu operator uchun $Sx = \theta$ tenglama faqat nol yechimga ega. Haqiqatan ham,

$$Sx = Ax + \sum_{j=1}^{\mu}(x, \phi_j)\psi_j = \theta \tag{20.8}$$

bo'lsin, u holda (20.7) munosabatga asosan $Ax \perp \sum_{j=1}^{\mu}(x, \phi_j)\psi_j$. Bu yerdan va (20.8) tenglikdan

$$Ax = \theta \quad \text{va} \quad \sum_{j=1}^{\mu}(x, \phi_j)\psi_j = \theta \tag{20.9}$$

ga ega bo'lamiz. $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu\}$ sistemaning ortogonalligidan (chiziqli erkliligidan) hamda (20.9) dan barcha $j \in \{1, 2, \ldots, \mu\}$ larda

$$(x, \phi_j) = 0$$

tengliklarni olamiz. Shunday qilib, bir tomondan $x \in KerA$, ya'ni x vektor $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\mu\}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidir, ikkinchi tomondan, x bu vektorlarga ortogonal. Bundan $x = \theta$. Demak, $KerS = \{\theta\}$. 20.2-teoremani S operatorga qo'llagan holda $f = \psi_{\mu+1}$ deb olsak,

$$Ay + \sum_{j=1}^{\mu}(y, \phi_j)\psi_j = \psi_{\mu+1}$$

tenglama biror y yechimga ega bo'ladi. Bu tenglikning ikkala qismini $\psi_{\mu+1}$ vektorga skalyar ko'paytirsak, $0 = 1$ ziddiyat hosil bo'ladi (chunki $\operatorname{Im} A \perp KerA^*$ va $Ay \in \operatorname{Im} A$, $\psi_{\mu+1} \in KerA^*$). Demak, $\mu < \nu$ farazimiz ziddiyatga olib keldi, ya'ni $\mu \geq \nu$ ekan. Xuddi shunday, A operator o'rniga A^* operator olinsa, $\mu \leq \nu$ tengsizlik isbotlanadi. Demak, $\mu = \nu$. Δ

Yuqoridagi teoremalarda biz $T - I$ operatorga teskari operatorning mavjudlik shartlarini ko'rdik. Ravshanki, 20.1-20.3-teoremalar $T - \lambda I$ $(\lambda \neq 0)$ operatorlar uchun ham o'rinlidir. Fredholm teoremalaridan quyidagi natija kelib chiqadi.

20.1-natija. *Kompakt operatorlarning spektridan olingan ixtiyoriy noldan farqli son bu operator uchun chekli karrali xos qiymatdir.*

Isbot. Faraz qilaylik, nolmas $\lambda \in \sigma(T)$ bo'lsin. U holda 20.2-teoremani $T - \lambda I$ operator uchun qo'llab $(T - \lambda I)f = 0$ tenglama noldan farqli yechimga ega ekanligiga kelamiz. Bu yerdan $\lambda \neq 0$ soni T operatorning xos qiymati ekanligi kelib chiqadi. 20.3-teoremaga ko'ra $\dim Ker(T - \lambda I) = n < \infty$. Bu esa λ soni T operatorning n - karrali xos qiymati ekanligini bildiradi. Δ

Misol sifatida «ajralgan» yadroli integral tenglamalarni qaraymiz.

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt + f(s). \tag{20.10}$$

Fredholm integral tenglamasining yadrosi

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)Q_i(t) \tag{20.11}$$

ko'rinishga ega bo'lsa, u holda $K(s,t)$ *ajralgan yadro* deyiladi. Bu yerda P_i, Q_i funksiyalar $L_2[a,b]$ fazodan olingan. Ravshanki, $P_1, P_2, ..., P_n$ funksiyalarni chiziqli erkli deb hisoblash mumkin, aks holda $K(s,t)$ yadroni chiziqli erkli bo'lgan $P_1, P_2, ..., P_i \ (i < n)$ lar orqali ifodalash mumkin. (20.11) tenglikdan foydalanib, (20.10) tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\phi(t)dt + f(s).$$

Agar biz

$$\int_a^b Q_i(t)\phi(t)dt = q_i, \ i \in \{1,2,...,n\}$$

belgilashlarni kiritsak, u holda (20.10) tenglama

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s) \tag{20.12}$$

ko'rinishga keladi. ϕ funksiyaning bu ifodasini berilgan integral tenglamaga qo'ysak,

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t) \left[\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t) \right] dt + f(s),$$

ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i \right] \tag{20.13}$$

ko'rinishdagi tenglikka kelamiz. Bu yerda

$$a_{ij} = \int_a^b Q_i(t) P_j(t) dt, \quad b_i = \int_a^b Q_i(t) f(t) dt.$$

Endi $P_i(s)$ funksiyalar chiziqli erkli ekanligini hisobga olsak, (20.13) munosabatdan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i, i \in \{1,2,...,n\}. \tag{20.14}$$

Agar biz bu chiziqli tenglamalar sistemasini q_i larga nisbatan yechsak, u holda (20.12) tenglikdan $\phi(s)$ funksiya ham topiladi. Shunday qilib, ajralgan yadroli integral tenglamani yechish masalasi (20.14) chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasiga teng kuchli. Bunday tenglamalar yechimlarining xossalari bizga chiziqli algebra kursidan ma'lum.

Yuqorida bayon qilingan Fredholm teoremalarini chekli o'lchamli fazolarda quyidagicha bayon qilish mumkin.

20.4-teorema. $Ax = y,$

$$A = (a_{ij}), i, j \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad x = (x_1,\ldots,x_n), \quad y = (y_1,\ldots,y_n)$$

chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lishi uchun y *vektor qo'shma bir jinsli*

$$A^* z = \theta \ (A^* = (\overline{a_{ji}}))$$

tenglamaning barcha yechimlariga ortogonal bo'lishi yetarli va zarurdir.

20.5-teorema. *Agar* A *matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda* $Ax = y$ *tenglama ixtiyoriy* y *uchun yagona yechimga ega. Agar* A *matritsaning determinanti nolga teng bo'lsa, u holda bir jinsli* $Ax = \theta$ *tenglama noldan farqli yechimga ega.*

20.6-teorema. $A = (a_{ij})$ *va* $A^* = (\overline{a_{ji}})$ *matritsalarning ranglari o'zaro teng bo'lgani uchun, bir jinsli* $Ax = \theta$ *va* $A^* z = \theta$ *sistemalarning chiziqli erkli yechimlari soni o'zaro teng.*

Ko'rinib turibdiki, ajralgan yadroli Fredholm tenglamalari uchun Fredholmning $20.1 - 20.3$ teoremalari yuqoridagi $20.4 - 20.6$ teoremalardan kelib chiqadi.

20.1-misol. T operatorni $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda quyidagicha aniqlaymiz

$$(Tf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x \cos y + 3 \sin x \sin y) f(y) dy. \tag{20.15}$$

Bu operatorni o'z-o'ziga qo'shma va kompaktlikka tekshiring, uning xos qiymat va xos funksiyalarini toping.

Yechish. Qaralayotgan operatorning yadrosi

$$K(x,y) = 1 + \cos x \cos y + 3\sin x \sin y$$

haqiqiy qiymatli va (19.8) shartni qanoatlantiradi. Demak, T o'z-o'ziga qo'shma operator ekan. Integral operator T ning yadrosi (19.5) shartni qanoatlantiradi, shuning uchun 19.2-teoremaga ko'ra T kompakt operator bo'ladi. Endi T operatorning xos qiymatlarini topamiz. Buning uchun xos qiymatga nisbatan tenglama yozamiz:

$$Tf = zf \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos x \cos y + 3\sin x \sin y) f(y)dy = zf(x).$$

Bundan

$$zf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos y f(y)dy + 3\sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y)dy \qquad (20.16)$$

tenglikka kelamiz.

i). Agar (20.16) tenglikda $z = 0$ bo'lsa, u holda $1, \cos x, \sin x$ funksiyalarning chiziqli erkli ekanligidan quyidagi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos y f(y)dy = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y)dy = 0 \qquad (20.17)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. (20.17) tengliklar f funksiyaning $1, \cos x, \sin x$ elementlarga ortogonal ekanligini bildiradi. Ma'lumki $L_2[-\pi;\pi]$ fazoda bu elementlarga ortogonal bo'lgan cheksiz ko'p chiziqli erkli elementlar mavjud, bular:

$$\{\cos nx, \sin nx\}_{n=2}^{\infty}.$$

Demak, $Tf = 0 \cdot f$ tenglama cheksiz ko'p chiziqli erkli yechimlarga ega ekan. Bu esa o'z navbatida $z = 0$ soni T operator uchun cheksiz karrali xos qiymat ekanligini bildiradi.

ii). Agar (20.16) tenglikda $z \neq 0$ bo'lsa, u holda xos funksiya f uchun quyidagi ko'rinishni olamiz

$$f(x) = \frac{1}{z}[a + b\cos x + 3c\sin x]. \qquad (20.18)$$

Bu yerda

$$a=\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy, \quad b=\int_{-\pi}^{\pi}\cos y f(y)dy, \quad c=\int_{-\pi}^{\pi}\sin y f(y)dy. \qquad (20.19)$$

f ning (20.18) ifodasini (20.19) ga qo'yib, a,b,c larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{z}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}[a+b\cos y+3c\sin y]dy=\dfrac{2a\pi}{z}, \\ b=\dfrac{1}{z}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos y[a+b\cos y+3c\sin y]dy=\dfrac{b\pi}{z}, \\ c=\dfrac{1}{z}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin y[a+b\cos y+3c\sin y]dy=\dfrac{3c\pi}{z}. \end{cases} \qquad (20.20)$$

Biz bu yerda $\{1,\cos x,\cos 2x,\sin x\}$ funksiyalar sistemasining ortogonal ekanligidan hamda

$$\cos^2 y=\frac{1}{2}[1+\cos 2y], \quad \sin^2 y=\frac{1}{2}[1-\cos 2y]$$

ayniyatlardan foydalandik. (20.20) tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun, uning determinanti

$$\Delta(z)=\left(1-\frac{2\pi}{z}\right)\left(1-\frac{\pi}{z}\right)\left(1-\frac{3\pi}{z}\right)=0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Agar $z=2\pi$ bo'lsa, u holda $\Delta(z)=0$ bo'ladi. Bu holda (20.20) dan $b=c=0$ va $a-$ ixtiyoriy son ekanligini olamiz. Endi (20.18) dan xos funksiya $f(x)=C=const$ bo'lishiga kelamiz.

Agar $z=\pi$ bo'lsa, u holda $\Delta(z)=0$ bo'ladi. Bu holda (20.20) dan $a=c=0$ va $b-$ ixtiyoriy son bo'ladi. (20.18) dan esa xos funksiya uchun $f(x)=C\cdot\cos x$ ko'rinishni olamiz.

Xuddi shunday $z=3\pi$ xos qiymatga mos keluvchi xos funksiya $f(x)=C\cdot\sin x$ ekanligini olamiz.

Shunday qilib, biz (20.15) formula bilan aniqlangan T operatorning o'z-o'ziga qo'shma ekanligini ko'rsatib, uning barcha xos qiymatlari va xos funksiyalarini topdik. $z=0$ cheksiz karrali xos qiymat, qolgan $\pi, 2\pi$

va 3π sonlar – bir karrali xos qiymatlar ekan.

20.2. Parametr $\lambda \in C$ ning qanday qiymatlarida

$$Tf - \lambda f = g \qquad (20.21)$$

tenglama ixtiyoriy $g \in L_2[-\pi, \pi]$ da yagona yechimga ega bo'ladi. Bu yerda T operator (20.15) tenglik bilan aniqlanadi.

Yechish. $A = T - \lambda I$ operatorga 20.1-teoremani qo'llaymiz. 20.1-misoldan ma'lumki, $\lambda \in C \setminus \{\pi, 2\pi, 3\pi\}$ bo'lsa $Ker\, A^* = Ker(T - \bar{\lambda} I) = \{\theta\}$. Demak, barcha $\lambda \in C \setminus \{\pi, 2\pi, 3\pi\}$ larda (20.21) tenglama ixtiyoriy $g \in L_2[-\pi, \pi]$ da yagona yechimga ega. Agar $\lambda = \pi$ ($\lambda = 2\pi$, $\lambda = 3\pi$) bo'lsa, u holda (20.21) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun $g \in L_2[-\pi, \pi]$ funksiya $f(x) = \cos x$ ($f(x) = 1$, $f(x) = \sin x$) funksiyaga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Ajralgan yadroli integral tenglamaga misollar keltiring.*
2. $L_2[a, b]$ *fazoda*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \varphi(x)\psi(t)u(t)dt$$

integral tenglamani yeching. Bunda φ va ψ funksiyalar uzluksiz bo'lib, $(\varphi, \psi) = 0$ shartni qatoatlantiradi.

3. *Parametr $\lambda \in R$ ning qanday qiymatlarida*

$$u(x) = \sin x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x \cos t - \sin x \sin t)u(t)dt$$

tenglama yagona yechimga ega? Qanday qiymatlarda tenglama yechimga ega emas? Qanday qiymatlarda tenglama cheksiz ko'p yechimga ega?

4. $A : L_2[-\pi, \pi] \to L_2[-\pi, \pi]$ *operator yadrosining o'lchamini toping.*

$$(Au)(x) = u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos(x - t)\right)u(t)dt.$$

IV bobni takrorlash uchun test savollari

1. ℓ_2 ni ℓ_2 ga akslantiruvchi A,B,C operatorlar berilgan:

$Ax=(0,0,\dots,0,x_1,x_2,x_3,\dots)$

$Bx=(0,0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3},\dots)$

$Cx=(x_1,x_2,x_3,0,\dots,0,\dots)$.

Kompakt operatorlar keltirilgan javobni toping.

A) AB va BC B) B va C C) A va B D) AC va BC

2. $L_2[-1,1]$ ni $L_2[-1,1]$ ga akslantiruvchi A,B,I operatorlar berilgan:

$$(Af)(x)=xf(x),\quad (Bf)(x)=\int_{-1}^{1}(1+xy)f(y)dy,\quad (If)(x)=f(x).$$

Kompakt operatorlar keltirilgan javobni toping.

A) AB va B B) B va I C) A va B D) A va I

3. $L_2[-1,1]$ ni $L_2[-1,1]$ ga akslantiruvchi

$$(Af)(x)=3\int_{-1}^{1}xyf(y)dy$$

kompakt operatorning xos qiymatlarini toping:

A) 0, 2 B) 2 C) 0, 1, 2 D) 2, 3

4. $L_2[-1,1]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi

$$(Af)(x)=3\int_{-1}^{1}xyf(y)dy$$

kompakt operatorning xos funksiyalarini ko'rsating:

A) $f_0(x)=1,\quad f_3(x)=x$ B) $f_0(x)=1+x,\quad f_3(x)=x^2$

C) $f_0(x)=3+x,\quad f_3(x)=5x^2$ D) $f_0(x)=4+x,\quad f_3(x)=x^4$

5. Chekli o'lchamli $A:\ell_2\to\ell_2$ operatorni toping.

A) $Ax=(0,0,\dots,0,x_1,x_2,x_3,\dots)$

B) $Ax=(0,0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3},\dots)$

C) $Ax=(x_1,x_2,x_3,0,\dots,0,\dots)$

D) $Ax=(x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3},\dots)$

6. Kompakt $A:\ell_2 \to \ell_2$ operatorni toping.

A) $Ax=(0,0,\dots,0,x_1,x_2,x_3,\dots)$

B) $Ax=(0,0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3},\dots)$

C) $Ax=(a_1x_1,a_2x_2,a_3x_3,\dots,a_nx_n,\dots)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

D) $Ax=(x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3},\dots)$

7. ℓ_2 fazoda berilgan $Ax=(a_1x_1,a_2x_2,a_3x_3,\dots,a_nx_n,\dots)$ operatorning kompaktlik kriteriysini toping.

A) $\sup\limits_{n\ge 1}|a_n|<\infty$

B) shunday $n_0\in N$ mavjud bo'lib, barcha $n>n_0$ larda $a_n=0$ bo'lishi

C) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

D) $\{a_n\}$ nolga yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni saqlashi

8. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Chekli o'lchamli $A\in L(X,Y)$ operator kompakt bo'ladi.

2) Chiziqli $A:C^n\to C^n$ operator kompakt bo'ladi.

3) Birlik $I:X\to X$, $\dim X<\infty$ operator kompakt bo'ladi.

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

9. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Kompakt operatorlarning yig'indisi kompakt bo'ladi.

2) Kompakt operatorning songa ko'paytmasi kompakt bo'ladi.

3) Kompakt operatorning chegaralangan operatorga ko'paytmasi kompakt bo'ladi.

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

10. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Kompakt operatorga qo'shma operator kompakt bo'ladi.

2) Kompakt operatorga teskari operator kompakt bo'ladi.

3) Birlik $I:X\to X$, $\dim X=\infty$ operator kompakt bo'ladi.

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1 D) 1, 3

11. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Kompakt operatorning xos qiymatlari oddiy bo'ladi.

2) O'z-o'ziga qo'shma operatorning xos qiymatlari haqiqiy bo'ladi.

3) O'z-o'ziga qo'shma kompakt operatorning har xil xos qiymatlariga mos xos vektorlari ortogonal bo'ladi.

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

12. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Kompakt operatorning noldan farqli xos qiymatlari chekli karralidir.

2) $A:\ell_2 \to \ell_2$ kompakt operatorning spektri nolni saqlaydi.

3) Birlik $I:C[a;b] \to C[a;b]$ operator kompakt emas.

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1 D) 1, 2, 3

13. $C[-1,1]$ fazoda chekli o'lchamli operatorlarni ko'rsating.

$$(Af)(x) = xf(x), \quad (Bf)(x) = \int_{-1}^{1}(x-y)f(y)dy, \quad (Cf)(x) = f(0)x^2$$

A) A, B B) A, C C) B, C D) A, B, C

14. ℓ_2 fazoda berilgan $Ax = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots, a_nx_n, \ldots)$ operator uchun quyidagilardan qaysilari invariant qism fazo bo'ladi.

1) $L_1 = \{x \in \ell_2 : x_1 = x_2 = 0\}$

2) $L_2 = \{x \in \ell_2 : x_3 = x_4 = x_5 = 0\}$

3) $L_3 = \{x \in \ell_2 : x_n = 0, \quad n \geq 6\}$

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

15. $L_2[-\pi,\pi]$ fazoda kompakt operatorni ko'rsating.

A) $(Af)(x) = xf(x)$ B) $(Af)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} cos(x-y)f(y)dy$

C) $(Af)(x) = f(x)$ D) $(Af)(x) = (x^2+1)f(x)$

16. $\{A_n\} \subset K(X)$ kompakt operatorlar ketma-ketligi, $A \in L(X)$ bo'lsin.

A) Agar $A_n \xrightarrow{u} A$ (tekis) bo'lsa, u holda A kompakt bo'ladi.

B) Agar $A_n \xrightarrow{s} A$ (kuchli) bo'lsa, u holda A kompakt bo'ladi.

C) Agar $A_n \xrightarrow{s} A$ (kuchsiz) bo'lsa, u holda A kompakt bo'ladi.

D) Agar $A_n \to A$ (nuqtali) bo'lsa, u holda A kompakt bo'ladi.

17. Chekli o'lchamli operator ta'rifini toping.

A) Agar $A \in L(X,Y)$ bo'lib, $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ bo'lsa

B) Agar A har qanday chegaralangan to'plamni nisbiy kompakt to'plamga akslantirsa

C) Agar A har qanday nisbiy kompakt to'plamni kompakt to'plamga akslantirsa

D) Agar $A : C^n \to C^n$ bo'lib, $\dim \operatorname{Im} A < n$ bo'lsa

18. Kompakt operator ta'rifini toping.

A) Agar $A \in L(X,Y)$ bo'lib, $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ bo'lsa

B) Agar $A \in L(X,Y)$ har qanday chegaralangan to'plamni nisbiy kompakt to'plamga akslantirsa

C) Agar $A \in L(X,Y)$ har qanday nisbiy kompakt to'plamni kompakt to'plamga akslantirsa

D) Agar $A : C^n \to C^n$ bo'lib, $\dim \operatorname{Im} A < n$ bo'lsa

19. Quyidagilar ichidan kompakt operator ta'riflarini ajrating.

1) Agar $A \in L(X,Y)$ har qanday chegaralangan to'plamni nisbiy kompakt to'plamga akslantirsa

2) Agar $A \in L(X,Y)$ operator X dagi birlik sharni nisbiy kompakt to'plamga akslantirsa

3) Agar $A \in L(H)$ operator H dagi ixtiyoriy kuchsiz yaqinlashuvchi ketma-ketlikni kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikka akslantirsa.

A) 1, 2, 3 B) 2, 3 C) 1, 3 D) 1, 2

20. u ga nisbatan Fredholmning I tur integral tenglamasini toping.

A) $u(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x)$ B) $f(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy$

C) $u(x) = \int_a^x K(x,y)u(y)dy + f(x)$ D) $f(x) = \int_a^x K(x,y)u(y)dy$

21. u ga nisbatan Fredholmning II tur integral tenglamasini toping.

A) $u(x)=\int_a^b K(x,y)u(y)dy+f(x)$ B) $f(x)=\int_a^b K(x,y)u(y)dy$

C) $u(x)=\int_a^x K(x,y)u(y)dy+f(x)$ D) $f(x)=\int_a^x K(x,y)u(y)dy$

22. u ga nisbatan Volterraning I tur integral tenglamasini toping.

A) $u(x)=\int_a^b K(x,y)u(y)dy+f(x)$ B) $f(x)=\int_a^b K(x,y)u(y)dy$

C) $u(x)=\int_a^x K(x,y)u(y)dy+f(x)$ D) $f(x)=\int_a^x K(x,y)u(y)dy$

23. u ga nisbatan Volterraning II tur integral tenglamasini toping.

A) $u(x)=\int_a^b K(x,y)u(y)dy+f(x)$ B) $f(x)=\int_a^b K(x,y)u(y)dy$

C) $u(x)=\int_a^x K(x,y)u(y)dy+f(x)$ D) $f(x)=\int_a^x K(x,y)u(y)dy$

24. $T^*:L_2[-\pi,\pi]\to L_2[-\pi,\pi]$ kompakt operator bo'lib, 1 uning oddiy xos qiymati bo'lsin. 1 xos qiymatga mos keluvchi xos funksiya esa $\cos 2x$ bo'lsin. $u=Tu+f$ tenglama yechimga ega bo'ladigan f ni toping:

A) $\cos x$ B) $\cos 2x$ C) $1-\cos 2x$ D) $\cos^2 x$

25. $T^*:L_2[-\pi,\pi]\to L_2[-\pi,\pi]$ kompakt operator bo'lib, 1 uning ikki karrali xos qiymati bo'lsin. 1 xos qiymatga mos keluvchi xos funksiyalar esa $\cos x$ va $\sin x$ lar bo'lsin. $u=Tu+f$ tenglama yechimga ega bo'ladigan f ni toping:

A) $\cos x$ B) $\cos 2x$ C) $\cos x+\sin x$ D) $\cos x-\sin x$

26. $T^*:L_2[-\pi,\pi]\to L_2[-\pi,\pi]$ kompakt operator bo'lib, 1 uning oddiy xos qiymati bo'lsin. 1 xos qiymatga mos keluvchi xos funksiya esa $\cos 2x$ bo'lsin. $u=Tu+f$ tenglama yechimga ega bo'lmaydigan f ni toping:

A) $\cos x$ B) $\cos 2x$ C) 1 D) $\sin x$

27. $T^*: L_2[-\pi, \pi] \to L_2[-\pi, \pi]$ kompakt operator bo'lib, 1 uning ikki karrali xos qiymati bo'lsin. 1 xos qiymatga mos keluvchi xos funksiyalar esa $\cos x$ va $\sin x$ lar bo'lsin. $u = Tu + f$ tenglama yechimga ega bo'lmaydigan f ni toping:

A) $\cos x + \sin x$ B) $\cos 2x$ C) 1 D) $\sin 2x$

28. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$u(x) = 1 + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y u(y) dy$$

integral tenglamani yeching.

A) $1 + \cos x$ B) $1 + \sin x$ C) 1 D) $1 + \pi \cos x$

29. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$u(x) = \sin x + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y u(y) dy$$

integral tenglamani yeching.

A) $\sin x + \cos x$ B) $1 + \sin x$ C) 1 D) $\sin x + \pi \cos x$

30. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$u(x) = \cos x + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y u(y) dy$$

integral tenglamani yeching.

A) $\sin x + \cos x$ B) $1 + \sin x$ C) $\cos x$ D) $\sin x + \pi \cos x$

31. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$(Au)(x) = u(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos y u(y) dy$$

chiziqli operator yadrosining o'lchamini toping.

A) $\dim KerA = 0$ B) $\dim KerA = 1$ C) $\dim KerA = 2$ D) $\dim KerA = \infty$

32. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$(Au)(x) = u(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x - y) u(y) dy$$

chiziqli operator yadrosining o'lchamini toping.

A) $\dim KerA = 0$ B) $\dim KerA = 1$ C) $\dim KerA = 2$ D) $\dim KerA = \infty$

33. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$(Au)(x) = u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{2} + \cos(x-y)]u(y)dy$$

chiziqli operator yadrosining o'lchamini toping.

A) $\dim KerA = 1$ B) $\dim KerA = 2$ C) $\dim KerA = 3$ D) $\dim KerA = \infty$

34. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{2} + \cos(x-y)]u(y)dy$$

chiziqli integral tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning chiziqli bog'lanmagan yechimlari sonini toping.

A) 1 B) 2 C) 3 D) ∞

35. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x-y)u(y)dy$$

chiziqli integral tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning chiziqli bog'lanmagan yechimlari sonini toping.

A) 1 B) 2 C) 3 D) ∞

36. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x \cos y u(y)dy$$

chiziqli integral tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning chiziqli bog'lanmagan yechimlari sonini toping.

A) 1 B) 2 C) 3 D) ∞

37. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$(Au)(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(x-y)u(y)dy,$$

$$(Bu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi}(\alpha\cos x\cos y - \beta\sin x\sin y)u(y)dy$$

integral operatorlar berilgan. $A^* = B$ tenglik o'rinli bo'ladigan $\alpha \in R$

va $\beta \in R$ parametrlarning qiymatlarini toping.

A) $\alpha = 1, \beta = 1$ B) $\alpha = 1, \beta = -1$ C) $\alpha = -1, \beta = 1$

D) bunday qiymatlar yo'q

38. T - $L_2[a,b]$ fazodagi kompakt operator, 1 soni uning xos qiymati bo'lsin. $u = f + Tu$ (1) tenglama uchun quyidagi tasdiqlardan qaysilari .to'g'ri?

1) (1) tenglama ba'zi $f \in L_2[a,b]$ larda yechimga ega emas.

2) (1) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun f funksiya $u = T^* u$ tenglamaning barcha yechimlariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarli.

3) (1) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun $\dim KerT = \dim KerT^*$ bo'lishi zarur va yetarli.

A) 1,2,3 B) 2,3 C) 3 D) 1,2

39. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda ajralgan yadroli integral tenglamalarni ko'rsating:

1) $u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)u(y)dy,$

2) $u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha \cos x \cos y - \beta \sin x \sin y)u(y)dy,$

3) $u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} ln(1+|x-y|)u(y)dy.$

A) 1,2,3 B) 2,3 C) 3 D) 1,2

40. $L_2[-1,1]$ fazoda ajralgan yadroli integral tenglamalarni ko'rsating:

1) $u(x) = \int_{-1}^{1} (x-y)^3 u(y)dy,$

2) $u(x) = \int_{-1}^{1} (1+xy)^2 u(y)dy,$

3) $u(x) = \int_{-1}^{1} ln(1+|x-y|)u(y)dy.$

A) 1,2,3 B) 2,3 C) 3 D) 1,2

Bu bob funksional analiz fanidan amaliyot darslari va laboratoriya mashg'ulotlarini olib borish uchun mo'ljallangan. Unda amaliyot darslarini olib boruvchilar uchun tipik misollar namuna sifatida yechib ko'rsatilgan. Bu bobda keltirilgan mashqlar talabalarda yuqori darajada bilim va ko'nikma hosil qilishi uchun yetarli. Bobda keltirilgan mashqlardan laboratoriya mashg'ulotlarini olib borishda ham foydalanish mumkin. Chunki keltirilgan masalalar ancha ko'p bo'lib, har bir talaba uchun alohida variant qilish imkoniyatini beradi.

Bu bob 4 paragraf (21-24) dan iborat. Bobning birinchi 21-paragrafida metrik fazolar, undagi asosiy tushunchalarning mohiyatini ochib beruvchi misol va masalalar jamlangan. Jumladan, to'plamlar va akslantirishlar, ekvivalent metrikalar, yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar, ochiq va yopiq to'plamlar, hamma yerda zich to'plam, kompakt va tutash to'plamlar haqida qiziqarli misollar keltirilgan. Qisqartirib akslantirish prinsipining qo'llanishiga doir misollar qaralgan.

22-paragrafda chiziqli fazolar, normalangan fazolar, Banax fazolari, Evklid fazolari hamda Hilbert fazolarining xususiyatlariga oid masalalar keltirilgan. Bundan tashqari chiziqli funksionallar, ularning uzluksizligi, chegaralanganligi va normasini hisoblashga doir nisbatan oson yechiladigan misollar berilgan. Chiziqli funksionalning davomi va qo'shma fazolarni tushunishga aloqador mashqlar ham bor.

23-paragrafda chiziqli operatorlar, ularning chegaralanganligi va normasini hisoblashga doir misollar berilgan. Chiziqli uzluksiz operatorlar fazosida operatorlarlar ketma-ketligining tekis, kuchli va kuchsiz ma'noda yaqinlashishlari, teskarilanuvchan operatorlar, teskari operatorning mavjudligi, teskari va qo'shma operatorlarni topishga doir xilma-xil misollar keltirilgan. Chiziqli operatorlar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri spektr tushunchasini yoritishga katta e'tibor qaratilgan.

24-paragraf kompakt operatorlar va integral tenglamalar mavzusiga bag'ishlangan. Bu yerda kompakt operatorlar xossalarini tekshirishga doir bir talay misollar bor. Ma'lumki, kompakt operatorlar bir qator ajoyib xossalarga ega. Jumladan, bu sinf operatorlarining spektrini to'laroq o'rganish mumkin. Hilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma kompakt operatorlarning spektri esa misollarda yanada aniqroq tushuntirilgan. Ajralgan yadroli, simmetrik yadroli integral tenglamalar, ularning yechimi, yechimning xossalarini tahlil qilishga doir misollar ham shu paragrafga kiritilgan.

21-§. Metrik fazolar

Birinchi paragrafda metrik fazo ta'riflanib, ularga ko'plab misollar keltirilgan. Bu paragrafda uzluksiz akslantirishlar, izometriya va gomeomorfizm haqida ham ma'lumotlar olish mumkin. Metrik fazolarda yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketlik ta'riflarini, ularga doir misollarni hamda ochiq va yopiq to'plamlar haqidagi tasdiq va teoremalarni 2-§ dan topish mumkin. Bu paragrafdan sonlar o'qidagi ochiq va yopiq to'plamlarning tuzilishi va Kantorning mukammal to'plami haqidagi ma'lumotlarni ham topish mumkin. To'la metrik fazolar, separabellik va Ber teoremasi haqidagi ma'lumotlar 3-§ da keltirilgan. Qisqartirib aks ettirish prinsipi va uning tadbiqlariga 4-§ bag'ishlangan. Nazariy qismda keltirilmagan ba'zi tushunchalarni, mukammal to'plam, 1-va, 2-kategoriya to'plamlar, to'plamning ichi tushunchalarini keltiramiz. M to'plamning barcha limitik nuqtalaridan iborat to'plamni M' bilan belgilaymiz. Agar $M = M'$ tenglik o'rinli bo'lsa, M ga *mukammal to'plam* deyiladi. Agar X to'la metrik fazodagi M to'plamni hech yerda zich bo'lmagan sanoqli sondagi to'plamlar birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lsa M to'plam 1-

kategoriyali to'plam deyiladi. Agar M to'plamni hech yerda zich bo'lmagan sanoqli sondagi to'plamlar birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lmasa M ga *2-kategoriyali to'plam* deyiladi. M to'plamning barcha ichki nuqtalaridan iborat to'plam M to'plamning *ichi* deyiladi va $\mathring{M}$ bilan belgilanadi. $A \subset (X,\rho)$ to'plamning *chegarasi* $\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ tenglik bilan aniqlanadi. Agar metrikaning 3-aksiomasi, ya'ni uchburchak tengsizligi $\rho(x,z) \le \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}$ tengsizlik bilan almashtirilsa, (X,ρ) - *ultrametrik fazo* deyiladi. Agar X metrik fazoda X va $\varnothing$ to'plamlardan farqli ham ochiq, ham yopiq bo'lgan to'plam mavjud bo'lmasa, X ga *tutash metrik fazo* deyiladi. Xuddi shunday X metrik fazoning M to'plami uchun (M,ρ) metrik fazo tutash bo'lsa, M ga *tutash to'plam* deyiladi.

21.1. Metrik fazolarga misollar

21.1. R^2 to'plamda $x=(x_1,x_2)$ va $y=(y_1,y_2)$ elementlar uchun kiritilgan ushbu

$$\rho_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|; \qquad \rho_2(x,y)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|;$$

$$\rho_3(x,y)=|x_1-y_2|+|x_2-y_1|; \qquad \rho_4(x,y)=|x_1x_2-y_1y_2|$$

ifodalardan qaysi biri metrika bo'ladi?

Yechish. ρ_1 akslantirishning metrika aksiomalarini qanoatlantirishini tekshiramiz. $\rho_1(x,y)\ge 0$ shart modulning manfiymasligidan kelib chiqadi. Faraz qilaylik, $\rho_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|=0$ bo'lsin. U holda $|x_1-y_1|=|x_2-y_2|=0$ ekanligini olamiz. Bundan $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, ya'ni $x=y$. Endi $x=y$ bo'lsin, ya'ni $x_1=y_1$, $x_2=y_2$. Bu yerdan $\rho_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|=0$ ekanligini olamiz. Demak, 1- aksioma bajariladi. Quyidagi tenglikdan

$$|x_1-y_1|+|x_2-y_2|=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|$$

2-aksiomaning bajarilishi kelib chiqadi. Nihoyat,

$$|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| = |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \le$$
$$|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|$$

tengsizlikdan 3-aksiomaning bajarilishi kelib chiqadi. Shunday qilib, (R^2, ρ_1) metrik fazo bo'ladi.

Agar $x = (1,1)$, $y = (2,2)$ deb olsak, u holda $\rho_2(x,y) = |1-1| + |2-2| = 0$ tenglik o'rinli, ammo $x \ne y$. Demak, ρ_2 akslantirish uchun metrikaning 1-aksiomasi bajarilmaydi.

Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, ρ_3 va ρ_4 akslantirishlar uchun ham metrikaning 1-aksiomasi bajarilmaydi.

21.2. R to'g'ri chiziqda $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ ifoda metrika bo'lishini tekshiring. $\rho_1(x,y) = \operatorname{arctg}|x - y|$ ifoda R to'plamda metrika bo'ladimi?

21.3. R^n to'plamda ushbu ifodalar metrika bo'ladimi?

$\rho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$; $\rho_2(x,y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|$;

$\rho_3(x,y) = \left|\max_{1 \le k \le n}(x_k - y_k)\right|$; $\rho_4(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ agar } x \ne y \\ 0, \text{ agar } x = y \end{cases}$; $\rho_5(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign}|x_k - y_k|$.

21.4. Uch o'lchamli fazoda boshi koordinatalar markazida bo'lgan barcha birlik (uzunligi birga teng) vektorlar to'plamida

$$\rho(\bar{e}, \bar{f}) = \arccos\frac{(\bar{e}, \bar{f})}{|\bar{e}| \cdot |\bar{f}|}$$

ifoda metrika bo'lishini isbotlang.

21.5. $[0,1]$ kesmadagi barcha ochiq to'plamlardan iborat to'plam X bo'lsin. Agar μ – Lebeg o'lchovi bo'lsa,

$$\rho(A,B) = \mu(A \Delta B)$$

ifoda X da metrika bo'lishini isbotlang.

21.6. Barcha ko'phadlardan iborat P to'plamda

$$\rho(p_n, q_m) = \sum_{i=0}^{\infty} \left| p_n^{(i)}(0) - q_m^{(i)}(0) \right|$$

ifoda metrika bo'lishini isbotlang.

21.7. N natural sonlar to'plamida

$$\rho_1(n,m)=|e^n-e^m|;\qquad \rho_2(n,m)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n+m}, & \text{agar } n\neq m\\ 0, & \text{agar } n=m\end{cases};$$

ifodalar metrika bo'lishini isbotlang.

21.8. Z butun sonlar to'plamida

$$\rho_1(n,m)=\frac{|m-n|}{\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{1+n^2}};\qquad \rho_2(n,m)=10^{-k},$$

(bu yerda k son $|n-m|$ ayirmaning oxiridagi nollar soni) ifodalar metrika bo'lishini ko'rsating.

21.9. Ushbu $|z|<1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks sonlar to'plamida

$$\rho(z_1,z_2)=\ln\frac{1+\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-z_2\bar{z}_1}\right|}{1-\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-z_2\bar{z}_1}\right|}$$

ifoda metrika bo'lishini isbotlang. Bu metrika Lobachevskiy metrikasi deyiladi.

21.10. $[a,b]$ kesmada aniqlangan $x(t)$ funksiya uchun shunday α va β o'zgarmas sonlar mavjud bo'lib, barcha $t_1,t_2\in[a,b]$ uchun

$$|x(t_1)-x(t_2)|\le\beta\cdot|t_1-t_2|^{\alpha}$$

tengsizlik bajarilsa, $x(t)$ funksiya α ko'rsatkichli Gyolder shartini qanoatlantiradi deyiladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalarni $H^{\alpha}[a,b]$ orqali belgilaylik. Agar $\alpha>1$ bo'lsa, $H^{\alpha}[a,b]$ faqat o'zgarmas funksiyalardan iborat ekanligini isbotlang. Agar $0<\alpha\le1$ bo'lsa,

$$\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+\sup_{t_1\neq t_2}\frac{|(x(t_1)-y(t_1))-(x(t_2)-y(t_2))|}{|t_1-t_2|^{\alpha}}$$

ifoda $H^{\alpha}[a,b]$ to'plamda metrika bo'lishini isbotlang. $H^{\alpha}[a,b]$ - Gyolder fazosi, $\alpha=1$ bo'lganda Lipshits fazosi deyiladi.

21.11. $[a,b]$ kesmada cheksiz marta differensiallanuvchi barcha funksiyalar to'plami $C^{\infty}[a,b]$ da

$$\rho(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\max\limits_{a\le t\le b}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|}{1+\max\limits_{a\le t\le b}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|}$$

ifoda metrika bo'lishini isbotlang.

21.12. (X,ρ) metrik fazo bo'lsa, X to'plamda

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)};\qquad \rho_2(x,y)=\ln(1+\rho(x,y));$$

$$\rho_3(x,y)=e^{\rho(x,y)}-1;\qquad \rho_4(x,y)=\min\{1;\rho(x,y)\}$$

ifodalarning har biri metrika bo'lishini isbotlang.

21.2. Metrik fazolarda yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar

21.13. Agar $\rho(x_n,x_0)\to 0$ va $\rho(x_n,y_n)\to 0$ bo'lsa, u holda $\rho(y_n,x_0)\to 0$ ekanligini isbotlang.

Yechish. Metrikaning 1 va 3-aksiomalaridan foydalansak,

$$0\le\rho(y_n,x_0)\le\rho(y_n,x_n)+\rho(x_n,x_0)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu sonli tengsizlkda limitga o'tib,

$$\lim_{n\to\infty}\rho(y_n,x_0)=0$$

ni olamiz.

21.14. (X,ρ) metrik fazoning ixtiyoriy x,y,z,t nuqtalari uchun

a) $|\rho(x,z)-\rho(y,t)|\le\rho(x,y)+\rho(z,t)$; b) $|\rho(x,z)-\rho(y,z)|\le\rho(x,y)$

tengsizliklarni isbotlang.

21.15. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $\rho(x_{2n},a)\to 0$, $\rho(x_{2n+1},b)\to 0$ va $\rho(x_n,c)\to 0$ bo'lsa, $a=b=c$ hamda $\rho(x_n,a)\to 0$ munosabatlarni isbotlang.

21.16. $C[0,1]$ metrik fazoda ushbu

a) $x_n(t)=t^n-t^{n+1}$; b) $y_n(t)=t^n-t^{2n}$;

c) $z_n(t)=t^n-2t^{n+1}+t^{n+2}$; d) $u_n(t)=\frac{t^n}{n}-\frac{t^{n+1}}{n+1}$

ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'ladimi?

21.17. Avvalgi misoldagi funksiyalar ketma-ketligi $C^{(1)}[0,1]$; $L_1[0,1]$ metrik fazolarda yaqinlashuvchi bo'ladimi?

21.18. $L_1[0,1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi, ammo $C^{(1)}[0,1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi bo'lmagan $x_n(t)$ uzluksiz funksiyalar ketma-ketligiga misol keltiring.

21.19. $x_n(t)=n^2t\cdot e^{-nt}$ funksiyalar ketma-ketligi $x(t)=0$ funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi, ammo $L_1[0;1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi emas. Isbot qiling.

21.20. $L_1[0,1]$ metrik fazoda $x(t)=0$ funksiyaga yaqinlashuvchi, ammo hech bir $t\in[0,1]$ nuqtada 0 ga yaqinlashmaydigan funksiyalar ketma-ketligiga misol keltiring.

21.21. Agar $x_n(t)$ uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi $C[0,1]$ metrik fazoda $x(t)$ funksiyaga yaqinlashsa, bu ketma-ketlik $L_1[0,1]$ va $L_2[0,1]$ metrik fazolarda ham shu $x(t)$ funksiyaga yaqinlashadi. Isbotlang.

21.22. $C[0,1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi, ammo $C^{(1)}[0,1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi bo'lmagan uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalardan iborat ketma-ketlikka misol keltiring.

21.23. Ushbu

a) $x_n=(1,2,...,n,0,0,...)$; b) $y_n=(-1,2,-3,...,(-1)^n n,0,0,...)$;

c) $z_n=\left(\underbrace{1,1,...,1}_{n},0,0,...\right)$; d) $u_n=\left(1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},0,0,...\right)$;

e) $e_n=\left(\underbrace{0,0,...,0,1}_{n},0,...\right)$; f) $w_n=\left(\underbrace{\frac{1}{n^\alpha},\frac{1}{n^\alpha},...,\frac{1}{n^\alpha}}_{n},0,...\right)$, $\alpha>0$

ketma-ketliklarning qaysilari c_0, c, ℓ_p, m metrik fazolarda yaqinlashuvchi bo'ladi.

21.24. $R=(-\infty,\infty)$ to'plamda metrika $\rho(x,y)=|arctgx-arctgy|$ tenglik bilan aniqlangan bo'lsin. U holda ixtiyoriy monoton ketma-ketlik (masalan, $x_n=n$) fundamental ekanligini isbotlang.

21.25. Biror qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lgan fundamental ketma-ketlik - yaqinlashuvchi. Isbotlang.

21.26. $\rho(x_k,x_m)\geq\varepsilon>0$, $k\neq m$ shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi va hatto fundamental qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin emas. Isbotlang.

21.27. (X,ρ) metrik fazo, $\{x_n\},\{y_n\}$ esa undan olingan fundamental ketma-ketliklar bo'lsin. U holda $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(x_n,y_n)$ mavjud ekanligini isbotlang.

21.28. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsin. Agar biror $\{y_n\}$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(x_n,y_n)=0$ bo'lsa, $\{y_n\}$ ketma-ketlik ham fundamental bo'lishi kelib chiqadimi?

21.29. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ fundamental ketma-ketliklar uchun

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n,y_n)=0$$

shart bajarilsa, bu ketma-ketliklarni ekvivalent deylik va $\{x_n\}\sim\{y_n\}$ ko'rinishda yozaylik. Bu (vaqtincha) kiritilgan munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv ekanligi, ya'ni haqiqatan ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

21.30. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{t_n\}$ fundamental ketma-ketliklar uchun $\{x_n\}\sim\{y_n\}$ va $\{z_n\}\sim\{t_n\}$ bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,z_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(y_n,t_n)$$

tenglikni isbotlang. Demak, fundamental ketma-ketliklar to'plamida kiritilgan masofa ekvivalentlik sinfidan tanlangan vakilga bog'liq emas.

21.3 . Ochiq va yopiq sharlar. Ochiq va yopiq to'plamlar

21.31. R^2 to'plamda $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ uchun

a) $\rho_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$; b) $\rho_2(x,y)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$;

c) $\rho_3(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$; d) $\rho_4(x,y)=sign|x_1-y_1|+sign|x_2-y_2|$

tengliklar orqali kiritilgan metrikalarning har birida markazi $0=(0,0)$ nuqtada va radiusi 1 ga teng ochiq shar $B(0;1)$, yopiq shar $B[0;1]$ va $S[0;1]$ sferalarni chizib ko'rsating.

21.32. R^3 to'plamda

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{3} sign|x_i-y_i|$$

metrika kiritilgan. Markazi (0;1;2) nuqtada radiusi esa a) 1 ga; b) 2 ga; c) 3 ga teng bo'lgan sferalarni chizing.

21.33. Kengaytirilgan to'g'ri chiziq, ya'ni $R^*=(-\infty;+\infty)\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ to'plamda

a) $\rho_1(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$; b) $\rho_2(x,y)=\left|\dfrac{x}{1+|x|}-\dfrac{y}{1+|y|}\right|$

metrikalar kiritilgan. Agar $0<r<1$ bo'lsa, $B(-\infty,r)$; $B(\infty,r)$ to'plamlarni, ya'ni markazi $\pm\infty$, radiusi r bo'lgan ochiq sharlarni chizib ko'rsating.

21.34. $M\subset(X,\rho)$ to'plamning diametri $diamM=\sup\limits_{x,y\in M}\rho(x,y)$ tenglik bilan aniqlanadi. U holda:

a) $diamB(x_0,r)\le 2r$ tengsizlikni isbotlang;

b) $diamB(x_0,r)<2r$ bo'lgan sharga misol keltiring;

c) $diamB(x_0,r)=diamB[x_0,r]$ tenglik to'g'rimi?

21.35. Ochiq shar - ochiq to'plam, yopiq shar esa yopiq to'plam ekanligini isbotlang.

21.36. R^2 tekislikda $(0,1)$ va $(0,-1)$ nuqtalardan hamda OX o'qidagi $(-1,1)$ intervaldan iborat to'plamni M deb belgilab, M to'plamda Evklid metrikasini kiritamiz:

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,;\quad x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in M\,.$$

U holda markazi (0,0) nuqtada, radiusi 1 ga teng ochiq sharning yopiq to'plam, ammo yopiq shar emasligini ko'rsating.

21.37. Shunday yopiq sharga misol keltiringki, u ochiq to'plam bo'lsin, ammo ochiq shar bo'lmasin.

21.38. Kattaroq radiusli shar kichikroq radiusli sharning qismi bo'lishi mumkinmi? Misol keltiring.

21.39. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy ikkita shar yoki kesishmaydi yoki biri ikkinchisining qismi bo'lishini isbotlang.

21.40. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy «uchburchak» teng tomonli, ultrametrik fazoda esa har qanday «uchburchak» teng yonli ekanligini isbotlang.

21.41. Diskret metrik fazoda har qanday to'plam ham ochiq, ham yopiq to'plam ekanligini isbotlang.

21.4. R da ochiq va yopiq to'plamlarning tuzilishi

21.42. Interval ochiq, kesma yopiq to'plam ekanligini isbotlang.

Yechish. Sonlar o'qida ixtiyoriy (a,b) interval ochiq to'plamdir. Haqiqatan ham, agar $x\in(a,b)$ desak, $\varepsilon=\min\{x-a,\,b-x\}$ son uchun $O_\varepsilon(x)\subset(a,b)$. Endi $(-\infty,a)$ to'plamning ochiq ekanligini ko'rsatamiz. Agar ixtiyoriy $x\in(-\infty,a)$ uchun, $\varepsilon=a-x$ desak, $O_\varepsilon(x)\subset(-\infty,a)$. Xuddi shunday (b,∞) to'plamning ochiq ekanligi ko'rsatiladi. Ochiq to'plamlarning birlashmasi (2.5-teorema) ochiq ekanligidan $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ to'plamning ochiq ekanligi kelib chiqadi. 2.4-teoremaga ko'ra bu ochiq to'plamning to'ldiruvchi to'plami bo'lgan $[a,b]$ kesma yopiqdir.

21.43. O'zaro kesishmaydigan intervallardan iborat to'plamning quvvati chekli yoki sanoqli ekanligini isbotlang.

21.44. R da ixtiyoriy ochiq to'plam o'zaro kesishmaydigan intervallarning birlashmasidan (yig'indisidan) iborat bo'lishini isbotlang. Bu yerda $(-\infty, a)$, (a, ∞), $(-\infty, \infty)$ va $(a, a)=\varnothing$ to'plamlar ham intevallar jumlasiga kiradi.

21.45. R dagi ixtiyoriy yopiq to'plamni $(-\infty, \infty)$ dan o'zaro kesishmaydigan intervallarni chiqarib tashlash natijasida hosil qilish mumkin. Isbot qiling.

21.46. Ixtiyoriy $x\in[0,1]$ sonni uchlik kasrga yoyish mumkinligini isbotlang: $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{3^i}$, bu yerda ε_i - 0,1,2 sonlardan biri. U holda $x=0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ ko'rinishda yozamiz. Agar biror $x\in[0,1]$ uchun shunday n mavjud bo'lib, $\varepsilon_n\neq 0$ va $\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_{n+2}=\ldots=0$ bo'lsa, x soni chekli uchlik kasrga yoyilgan deyiladi. Bu x sonini cheksiz yoyilma ko'rishda ham tasvirlash mumkin: $x=0,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n 0\ldots=0,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}(\varepsilon_n-1)22\ldots$ masalan, $0{,}100\ldots=0{,}0222\ldots$. Isbotlang. F_1 orqali yoyilmasida 1 raqami qatnashmaydigan usulda yozish mumkin bo'lgan barcha $x\in[0;1]$ sonlar to'plamini belgilaylik. Masalan, $0{,}1 = 0{,}0222\ldots$ yoki $\frac{1}{4} = 0{,}020202\ldots$. F_1 to'plamning yopiq va kontinuum quvvatli to'plam ekanligini isbotlang. $F_1=F$ to'plam Kantor to'plami (2.20-misol) deyiladi.

21.47. $\{z: z=x+y,\ x, y\in F_1\}=[0, 2]$ tenglikni isbotlang.

21.48. $\frac{1}{4}\in F_1$ ekanligini isbotlang.

21.49. Kantor to'plami mukammal to'plam, ya'ni $F_1'=F_1$. Isbotlang.

21.50. Ixtiyoriy $x\in F_1$ uchun shunday $y\in F_1$ topiladiki, $\rho(x,y)=|x-y|$ son irratsional bo'ladi. Isbot qiling.

21.51. $R=(-\infty, \infty)$ metrik fazoda shunday A to'plamga misol keltiringki, $\overset{0}{A}$, $\overset{\overline{0}}{A}$, $\overline{\overset{0}{A}}$, $\overset{\overline{0}}{\overline{A}}$, $\overline{\overset{\overline{0}}{A}}$, $\overset{0}{\overline{\overset{\overline{0}}{A}}}$ to'plamlar turli, ya'ni hech qaysi ikkitasi teng bo'lmasin.

21.5. To'la metrik fazo. Metrik fazoni to'ldirish

21.52. c metrik fazoning to'laligini isbotlang.

21.53. To'la metrik fazolarning to'g'ri ko'paytmasi yana to'la metrik fazo bo'lishini isbotlang. Demak, R^n va C^n metrik fazolar to'la.

21.54. $C[a,b]$ uzluksiz funksiyalar to'plamida metrika

$$\rho(x,y)=\int_a^b sign|x(t)-y(t)|dt$$

ifoda bilan aniqlangan bo'lsa, $(C[a,b],\rho)$ to'la metrik fazo bo'ladimi?

21.55. $C^{(1)}[a,b]$- uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamida metrika

$$\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

tenglik bilan aniqlangan bo'lsa, $(C^{(1)}[a,b],\rho)$ metrik fazo to'la emas. To'ldirmasini toping.

21.56. $f:R\to R$ funksiya qanday shartlarni qanoatlantirsa $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$ ifoda R to'plamda: a) metrika bo'ladi; b) (R,ρ) to'la metrik fazo bo'ladi?

21.57. Agar $\rho(x,y)=|\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}y|$ bo'lsa, (R,ρ) metrik fazoning to'ldirmasini toping.

21.58. Φ - barcha finit ketma-ketliklar, ya'ni faqat cheklita hadi noldan farqli $x=(x_1,x_2,...,x_n,0,0,...)$ ketma-ketliklar to'plami bo'lsin. Agar

$$\rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|;\qquad \rho_2(x,y)=\max_{1\le i<\infty}|x_i-y_i|$$

bo'lsa, (Φ,ρ_1) va (Φ,ρ_2) metrik fazolarning to'ldirmasini toping.

21.59. $X=(-\pi,\pi)$ to'plamda $\rho(x,y)=\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$ metrika kiritilgan. (X,ρ) metrik fazoning to'ldirmasini toping.

21.60. P - barcha haqiqiy koeffitsiyentli ko'phadlar to'plamida $x,y\in$ P uchun

a) $\rho_1(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x''(t)-y''(t)|$;

b) $\rho_2(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|$;

c) $\rho_3(x,y)=\max\limits_{-1\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+|x'(0)-y'(0)|$

metrikalar kiritilgan. (P,ρ_1), (P,ρ_2), (P,ρ_3) metrik fazolarning to'ldirmasini toping.

21.6. Separabellik. Kategoriya. Ber teoremasi

21.61. Q, $R\setminus Q$, $\left\{\frac{m}{2^n};m,n\in Z\right\}$ to'plamlarning har biri R metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

Yechish. Faraz qilaylik, $x\in R$ ixtiyoriy haqiqiy son bo'lsin. U holda $x_n=\frac{[x]}{n}$ ratsional sonlar ketma-ketligi x ga yaqinlashadi. Bu yerda $[x]$ deb x ning butun qismi belgilangan. Demak, ratsional sonlar to'plami Q haqiqiy sonlar to'plami R ning hamma yerida zich ekan. Endi irratsional sonlar to'plami $R\setminus Q$ haqiqiy sonlar to'plami R da zich ekanligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x\in R$ haqiqiy son uchun $y_n=\frac{[x]}{n}+\frac{\pi}{n}$ irratsional sonlar ketma-ketligi x ga yaqinlashadi. Demak, $R\setminus Q$ to'plam R da zich ekan. $\left\{\frac{m}{2^n};m,n\in Z\right\}$ to'plamning R da zich ekanligi haqiqiy sonlarni ikkilik sistemaga yoyish orqali isbotlanadi.

21.62. $Z,\left\{\frac{1}{n};n\in Z,n\ne 0\right\},\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}:n,m\in Z,\ n\cdot m\ne 0\right\}$ to'plamlar R metrik fazoning hech yerida zich emas. Isbotlang.

21.63. Hamma yerda zich, ammo ichkarisi bo'sh bo'lgan to'plamga misol keltiring.

21.64. Kantor to'plami $[0,1]$ ning hech yerida zich emas. Isbotlang.

21.65. $A\subset(X,\rho)$ hech yerda zich bo'lmasa, $X\setminus A$ to'plam hamma yerda zichligini isbotlang.

21.66. Agar A hamma yerda zich va ochiq to'plam bo'lsa, $X \setminus A$ to'plam hech yerda zich emas. Isbotlang.

21.67. Shunday A to'plamga misol keltiringki, A va $X \setminus A$ to'plamlarning har biri hamma yerda zich bo'lsin.

21.68. Φ – finit ketma-ketliklar to'plami c_0 va $\ell_p (p \geq 1)$ metrik fazolarda zich joylashgan, ammo c va m metrik fazolarda zich emasligini isbot qiling.

21.69. Agar A to'plam B da, B esa C da zich joylashgan bo'lsa, A to'plam C da zich ekanligini isbotlang.

21.70. Barcha ko'phadlar to'plami $C[a,b]$ metrik fazoda zich. Isbotlang.

21.71. $[a,b]$ kesmada $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ nuqtalar va ixtiyoriy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sonlar berilgan bo'lsin. U holda $x(t_i) = x_i,\ i = \overline{1,n}$ va $[t_i, t_{i+1}]$ oraliqlarning har birida chiziqli bo'lgan $x(t)$ funksiya qisman chiziqli uzluksiz funksiya deyiladi. Barcha qisman chiziqli uzluksiz funksiyalar to'plami $C[a,b]$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

21.72. Barcha sodda funksiyalar (o'lchovli va qiymatlari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lgan funksiyalar) to'plami $L_1[a,b]$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

21.73. Sodda funksiyalar to'plami $L_p[a,b]\,(p \geq 1)$ metrik fazoda zich. Isbotlang.

21.74. $[a,b]$ kesmada $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ nuqtalar berilgan bo'lsin. (t_i, t_{i+1}), $i = \overline{1, n-1}$ intervallarning har birida o'zgarmas, t_i bo'linish nuqtalaridagi qiymatlari esa ixtiyoriy bo'lgan funksiya pog'onasimon funksiya deyiladi. Ravshanki, pog'onasimon funksiya sodda funksiya bo'ladi. Pog'onasimon bo'lmagan sodda funksiyaga misol keltiring.

21.75. Pog'onasimon funksiyalar $L_p[a,b]\,(p\geq 1)$ metrik fazodagi barcha sodda funksiyalar to'plamida zich joylashgan. Isbotlang.

21.76. Pog'onasimon funksiyalar $L_p[a,b]\,(p\geq 1)$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

21.77. Barcha uzluksiz funksiyalar $L_p[a,b]\,(p\geq 1)$ metrik fazodagi pog'onasimon funksiyalar to'plamida zich. Isbotlang. Demak, $C[a,b]$ to'plam sifatida $L_p[a,b]$ metrik fazoda zich.

21.78. $[a,b]$ kesmada aniqlangan ixtiyoriy uzluksiz funksiyani istalgancha aniqlikda $L_p[a,b]$ fazo metrikasida ko'phad bilan yaqinlashtirish mumkin, ya'ni $x(t)$ uzluksiz funksiya va ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $p_n(t)$ ko'phad topiladiki,

$$\rho(x,p_n)=\left(\int_a^b |x(t)-p_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p}<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli. Isbotlang.

21.79. Avvalgi 78-masaladagi $p_n(t)$ ko'phadning barcha koeffitsiyentlarini ratsional sonlar qilib tanlash mumkin. Isbot qiling.

21.80. Separabel metrik fazoning to'ldirmasi ham separabel bo'ladimi? Misol keltiring.

21.81. Separabel fazoda ixtiyoriy G ochiq to'plamni sanoqli yoki chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan ochiq sharlarning yig'indisi ko'rinishida:

$$G=\bigcup_n B(x_n,r_n),\quad B(x_i,r_i)\cap B(x_j,r_j)=\varnothing,\ i\neq j$$

tasvirlash mumkin. Isbot qiling.

21.82. Separabel fazoda yopiq to'plamni

$$F=M\cup N$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $M=M'$ - mukammal to'plam, N esa sanoqli yoki chekli to'plam. Isbotlang.

21.83. Diskret metrik fazo separabel bo'lishining zarur va yetarli shartini toping.

21.84. R metrik fazoda Q to'plam 1- kategoriyali, $R \setminus Q$ to'plam 2 - kategoriyali to'plam ekanligini isbotlang.

21.85. Darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlarning $P_{\le n}$ to'plami $C[a,b]$ metrik fazoning hech yerida zich emas. Isbot qiling.

21.86. $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{\le n}$ ko'phadlar to'plami $C[a,b]$ metrik fazoda 1-kategoriyali to'plam bo'lishini ko'rsating.

21.87. $L_2[a,b]$ to'plam $L_1[a,b]$ metrik fazoda 1-kategoriyali to'plam. Isbotlang.

21.88. $x_n(t)$- uzluksiz funksiyalar va ixtiyoriy $t \in R$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$ bo'lsa, $x_0(t)$ funksiyaning uzilish nuqtalaridan iborat to'plam 1-kategoriyali to'plam ekanligini isbotlang.

21.89. $C[a,b]$ to'plamda

$$\rho(x,y) = \int_a^b sign|x(t) - y(t)|dt$$

metrika kiritilgan. $(C[a,b],\rho)$ separabel emas. Isbotlang.

21.90. $C[a,b]$ metrik fazoda

$$M_n = \{x(t):\ |x(t') - x(t'')| \le n \cdot |t' - t''|,\ \forall t', t'' \in [a,b]\}$$

to'plam yopiq va hech yerda zich emas. Isbotlang.

21.91. $C[a,b]$ fazoda Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ (21.90-masalaga qarang) 1- kategoriyali to'plam. M to'plam yopiq emas va $C[a,b]$ fazoda zich ekanligini isbotlang.

21.92. $C[a,b]$ fazoda har bir $n \in N$ da

$$D_n = \{x:\ x'(t) \in C[a,b] \quad \text{va} \quad \max_{a \le t \le b} |x'(t)| \le n\}$$

to'plam yopiq va yech yerda zich emasligini isbotlang.

21.93. $C[a,b]$ fazoda uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami $C^{(1)}[a,b]=\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ (21.92-masalaga qarang) 1-kategoriyali to'plam, yopiq emas va hamma yerda zich ekanligini isbotlang.

21.94. x haqiqiy sonning kasr qismi $\{x\}$ ko'rinishda belgilanadi. $\{n\cdot\sqrt{2}\}, n\in N$ sonlar to'plami $[0,1]$ kesmada zich ekanligini isbotlang. Umuman, $\sqrt{a}$ - irratsional son bo'lsa, $\{n\cdot\sqrt{a}\}, n\in N$ sonlar to'plami $[0,1]$ kesmada zich. Isbot qiling.

21.95. Hech yerda zich bo'lmagan to'plamning qism to'plami hech yerda zich emas. Isbotlang.

21.96. Chekli sondagi hech yerda zich bo'lmagan to'plamlarning yig'indisi hech yerda zich emas. Isbot qiling.

21.97. Hech yerda zich bo'lmagan to'plamning yopig'i ham hech yerda zich emas. Isbotlang.

21.98. (X,ρ) to'la metrik fazo, $M\subset X$ esa 1- kategoriyali to'plam bo'lsin. U holda $X\setminus M$ to'plam X fazoda zich bo'lishini ko'rsating.

21.99. (X,ρ) to'la metrik fazo, $G_n\subset X,\ n\in N$ esa ochiq va hamma yerda zich to'plamlar bo'lsin. U holda $M=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ to'plam ham hamma yerda zich ekanligini isbotlang.

21.100. M to'plam hech yerda zich bo'lmasligi uchun $\overset{0}{\overline{M}}=\varnothing$ shartning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

21.101. X - to'la metrik fazo, $M\subset X$ esa 1 - kategoriyali to'plam bo'lsin. U holda $X\setminus M$ 2 - kategoriyali to'plam. Isbot qiling.

21.102. Agar $y_0\in B(x_0,r)$ bo'lsa, $B(y_0,r)\subset B(x_0,2r)$ munosabatni isbotlang.

21.103. Biror A to'plamning ε - atrofi ushbu

$$V_\varepsilon(A)=\left\{x\in X:\inf_{y\in A}\rho(x,y)<\varepsilon\right\}$$

tenglik bilan aniqlanadi. U holda $\overline{A}=\bigcap_{\varepsilon>0} V_\varepsilon(A)$ tenglikni isbotlang.

21.104. To'g'ri chiziqda $[a,b]$, (a,b), Z, Q, $[a,\infty)$, $\varnothing$ to'plamlarning chegaralarini toping.

21.105. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy to'plamning chegarasi bo'sh ekanligini isbotlang.

21.106. $Fr(A\bigcup B)\subset FrA\bigcup Fr B$ munosabatni isbotlang. Agar $\overline{A}\bigcap\overline{B}=\varnothing$ bo'lsa, $Fr(A\bigcup B)=FrA\bigcup Fr B$ tenglikni isbot qiling.

21.107. Separabel metrik fazoda ixtiyoriy to'plamning yakkalangan nuqtalari chekli yoki sanoqli to'plam bo'ladi. Isbotlang.

21.108. $\{x_n\}\subset[a,b]$ bo'lsin. Ixtiyoriy $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ interval uchun $n(\alpha;\beta)$ orqali $x_1,x_2,\dots,x_n$ nuqtalarning (α,β) oraliqqa tushganlarining sonini belgilaylik. Agar ixtiyoriy $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\alpha;\beta)}{n}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

tenglik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $[a;b]$ kesmada tekis taqsimlangan deyiladi. Ushbu $0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\dots,\frac{1}{k},\frac{2}{k},\dots,\frac{k-1}{k},\dots$ ketma-ketlik $[0,1]$ kesmada tekis taqsimlangan bo'ladimi?

21.109. α-irratsional son bo'lsin. $\{n\cdot\alpha\}=n\cdot\alpha-[n\cdot\alpha]$, ya'ni $n\cdot\alpha$ sonining kasr qismlaridan tuzilgan ketma-ketlik $[0,1]$ kesmada tekis taqsimlangan bo'lishini isbotlang.

21.110. Avvalgi masaladan foydalanib, $1,5,5^2,\dots,5^n,\dots$ ketma-ketlikdagi 5^n sonning (o'nlik sanoq sistemasida) 13 dan boshlanish ehtimolligini toping.

21.111. X -- to'la metrik fazo, $\{f_n\}$ esa X da aniqlangan uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun chekli $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ mavjud bo'lsa, f funksiyaning uzilish nuqtalari to'plami 1-kategoriyali to'plam ekanligini isbot qiling.

21.112. Agar $f:R\to R$ funksiya har bir nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, $f'(x)$ funksiya uzluksiz bo'ladigan nuqtalar to'plami 2-kategoriyali to'plam ekanligini isbotlang.

21.113. $f:R^2\to R$ funksiya har bir tayinlangan x da y o'zgaruvchi bo'yicha ko'phad va har bir tayinlangan y da x o'zgaruvchi bo'yicha ko'phad bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya ikkala argumenti bo'yicha ham ko'phad ekanligini isbotlang.

21.114. Ikki argumentli $f:[0,1]\times[0,1]\to R$ funksiya har bir x da y bo'yicha va har bir y da x bo'yicha uzluksiz bo'lsa, shunday (x_0,y_0) nuqta mavjudki, bu nuqtada f funksiya ikkala argumenti bo'yicha birgalikda uzluksiz bo'ladi. Isbot qiling.

21.115. f funksiya $(0,1)$ intervalda cheksiz marta differensiallanuvchi bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x\in(0,1)$ uchun shunday $n=n(x)\in N$ topilsaki, $f^{(n)}(x)=0$ bo'lsa, f funksiyaning ko'phad ekanligini isbotlang.

21.116. F_1 va F_2 yopiq to'plamlar o'zaro kesishmasin, ya'ni $F_1\cap F_2=\varnothing$. U holda shunday $G_1\supset F_1$ va $G_2\supset F_2$ ochiq to'plamlar mavjudki, $G_1\cap G_2=\varnothing$. Isbot qiling.

21.7. Uzluksiz akslantirishlar. Izometriya. Gomeomorfizm

21.117. (X,ρ) va (Y,d) metrik fazolar bo'lsin. $f:X\to Y$ akslantirishning uzluksizligi quyidagi shartlarning har biriga teng kuchli ekanligini isbotlang:

a) ixtiyoriy $G\subset Y$ ochiq to'plam uchun $f^{-1}(G)\subset X$ ham ochiq to'plam;

b) ixtiyoriy $F\subset Y$ yopiq to'plam uchun $f^{-1}(F)\subset X$ ham yopiq to'plam;

c) ixtiyoriy $\{x_n\}\subset X$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik uchun $\{f(x_n)\}\subset Y$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi.

21.118. Shunday $f:R\to R$ uzluksiz funksiya, G-ochiq va F-yopiq to'plamlarga misol keltiringki, $f(G)$ to'plam ochiq emas, $f(F)$ to'plam esa yopiq emas.

21.119. Ixtiyoriy fundamental ketma-ketlikni yana fundamental ketma-ketlikka akslantiruvchi funksiya uzluksiz bo'lishi shartmi?

21.120. Agar X diskret metrik fazo bo'lsa, har qanday $f:X\to Y$ akslantirish uzluksiz bo'ladi. Isbotlang.

21.121. $f_i:X\to Y,\ (i=1,2)$ uzluksiz akslantirishlar bo'lsin. U holda $M=\{x\in X: f_1(x)=f_2(x)\}$ to'plam yopiq ekanligini isbotlang.

21.122. $f_i:X\to Y,\ (i=1,2)$ uzluksiz akslantirishlar va X da zich bo'lgan biror M to'plam berilgan bo'lsin. Agar barcha $x\in M$ uchun $f_1(x)=f_2(x)$ bo'lsa, $f_1\equiv f_2$, ya'ni akslantirishlar butun X fazoda teng. Isbot qiling.

21.123. $f:X\to Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsin. Quyidagi implikatsiyalardan qaysi biri to'g'ri? Ixtiyoriy $M\subset X$ to'plam uchun:

a) $x\in\overline{M}\Rightarrow f(x)\in\overline{f(M)}$;

b) $x\in\overset{0}{M}\Rightarrow f(x)\in\overline{\overset{0}{f(M)}}$;

c) $x\in M'\Rightarrow f(x)\in(f(M))'$

d) $x\in Fr\,M\Rightarrow f(x)\in Fr(f(M))$.

21.124. X separabel metrik fazo va $f:X\to Y$ haqiqiy funksiya bo'lsin. M orqali X fazodagi barcha shunday nuqtalarni belgilaymizki, $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ mavjud va $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq f(a)$ bo'lsin. M to'plamning ko'pi bilan sanoqli ekanligini isbotlang.

21.125. $S=\{z\in C:|z|=1\}$ aylanada $\rho(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$ metrika kiritilgan. Ixtiyoriy $f:S\to R$ uzluksiz funksiya uchun shunday $z_0\in S$ mavjudki,

$$f(z_0)=f(-z_0)$$

tenglik o'rinli. Demak, aylanada aniqlangan uzluksiz funksiya qandaydir diametral qarama-qarshi nuqtalarda teng qiymatlarni qabul qiladi.

Isbotlang.

21.126. $f:C[a,b]\to C[0,1]$ akslantirish $f(x(t))=x(a+(b-a)t),\ 0\le t\le 1$ tenglik bilan aniqlangan. Bu akslantirish: a) uzluksiz, b) izometriya bo'ladimi?

21.127. $f:C[0,1]\to L_p[0,1]$ $(p\ge 1)$ akslantirish $f(x(t))=x(t)$ tenglik bilan aniqlangan bo'lsa, uning uzluksiz ekanligini isbotlang.

21.128. $f(x(t))=x(t^2)$ tenglik bilan

a) $f:C[-1,1]\to C[0,1]$; b) $f:L_p[-1,1]\to L_p[0,1]$; c) $f:C[-1,1]\to L_1[0,1]$

akslantirishlar aniqlangan. Ularning har birini uzluksizlikka tekshiring.

21.129. $f(x(t))=x^2(t)$ tenglik bilan

a) $f:C[0,1]\to C[0,1]$; b) $f:L_p[0,1]\to L_2[0,1]$; c) $f:L_1[0,1]\to L_2[0,1]$;

d) $f:L_2[0,1]\to L_1[0,1]$; e) $f:L_1[0,1]\to L_1[0,1]$

akslantirishlar aniqlangan. Ularni uzluksizlikka tekshiring.

21.130. $f:C[0,1]\to C[0,1]$ akslantirish quyidagi

a) $f(x(t))=\int\limits_0^t x(s)ds$; b) $f(x(t))=\int\limits_0^1 \sin(t-s)x(s)ds$;

c) $f(x(t))=\int\limits_0^t x^2(s)ds$; d) $f(x(t))=x(t^\alpha),\quad \alpha\ge 0$

tenglik bilan aniqlangan. Ularning qaysilari uzluksiz, qaysilari tekis uzluksiz bo'ladi?

21.131. $f:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ akslantirish quyidagi

a) $f(x(t))=\int\limits_0^t x(s)ds$; b) $f(x(t))=\int\limits_0^1 \sin(t-s)x(s)ds$;

c) $f(x(t))=\int\limits_0^t x^2(s)ds$; d) $f(x(t))=\int\limits_0^t x(s^\alpha)ds,\ \alpha\ge 0$

tenglik bilan aniqlangan. Ularning qaysilari uzluksiz, qaysilari tekis uzluksiz bo'ladi?

21.132. $f:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ akslantirish ushbu

a) $f(x(t))=u(t)\cdot x(t),\ u\in C[0;1]$; b) $f(x(t))=x(t^\alpha),\ \alpha>0$

tenglik bilan aniqlangan. Ularni uzluksizlikka tekshiring.

21.133. $(-\infty,\infty)$ da uzluksiz, lekin tekis uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

21.134. X, Y - metrik fazolar bo'lib, Y- to'la bo'lsin. Agar $M\subset X$ hamma yerda zich, $f:M\to Y$ tekis uzluksiz akslantirish bo'lsa, shunday $F:X\to Y$ tekis uzluksiz akslantirish mavjudki, $F|_M=f$, ya'ni ixtiyoriy $x\in M$ uchun $F(x)=f(x)$. Isbotlang.

21.135. Lipshits shartini qanoatlantiruvchi akslantirish tekis uzluksiz akslantirish bo'lishini isbotlang.

21.136. $K(t,s)$ funksiya $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda ikkala argumenti bo'yicha uzluksiz bo'lsa,

$$Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

tenglik bilan aniqlangan $A:C[a,b]\to C[a.b]$ akslantirish Lipshits shartini qanoatlantirishini isbotlang.

21.137. O'lchovli $K(t,s)$ funksiya uchun

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,dtds\le M$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $A:L_2[a,b]\to L_2[a,b]$

$$Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

akslantirish tekis uzluksiz bo'lishini isbotlang.

21.138. $f:X\to Y$ tekis uzluksiz va $g:Y\to Z$ Lipshits shartini qanoatlantiruvchi akslantirishlar bo'lsin. U holda $g\circ f:X\to Z$ akslantirish tekis uzluksiz (Lipshits shartini qanoatlantiruvchi) bo'ladimi?

21.139. $[0,1]$ kesmada tekis uzluksiz, ammo Lipshits shartini qanoatlantirmaydigan funksiyaga misol keltiring.

21.140. (X,ρ) metrik fazo bo'lsin. $\rho:X\times X\to R$ akslantirish

a) uzluksiz; b) tekis uzluksiz bo'ladimi?

21.141. (X,ρ) metrik fazo, $A\neq\varnothing$, $A\subset X$ biror to'plam bo'lsin. $d:X\to R$ funksiya $d(x)=\inf\limits_{y\in A}\rho(x,y)$ tenglik bilan aniqlangan. Shu akslantirishning tekis uzluksiz ekanligini isbotlang.

21.142. R^2 to'plamda $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ metrika, C kompleks sonlar to'plamida $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$ metrika kiritilgan. Bu fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

21.143. X va Y lar metrik fazolar bo'lsin. $X\times Y$ va $Y\times X$ metrik fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

21.144. c va $R\times c_0$ fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

21.145. $C[0;1]$ va $C[a;b]$ metrik fazolar orasida izometriya o'rnating.

21.146. Izometriya ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

21.147. R metrik fazoning barcha izometriyalarini toping.

21.148. R^2 metrik fazoning ($\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$) barcha izometriyalarini toping.

21.149. Metrik fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha izometriyalar gruppa tashkil etishini isbotlang.

21.150. Biror X to'plamda ρ_1 va ρ_2 metrikalar berilgan bo'lsin. Agar shunday $C_1>0$, $C_2>0$ sonlar mavjud bo'lib, barcha $x,y\in X$ lar uchun

$$C_1\rho_1(x,y)\le\rho_2(x,y)\le C_2\rho_1(x,y)$$

tengsizliklar bajarilsa, ρ_1 va ρ_2 metrikalar ekvivalent deyiladi. X to'plamdagi barcha metrikalar uchun kiritilgan bu munosabat haqiqatda ham ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

21.151. X chekli to'plam bo'lsa, unda kiritilgan ixtiyoriy ikki metrika ekvivalent ekanligini isbotlang.

21.152. Ekvivalent metrikalarning birida yaqinlashuvchi (fundamental) bo'lgan ketma-ketlik ikkinchisida ham yaqinlashuvchi (fundamental) bo'lishini isbotlang.

21.153. Ekvivalent metrikalarning birida ochiq (yopiq) bo'lgan to'plam ikkinchisida ham ochiq (yopiq) ekanligini isbotlang.

21.154. ρ_1 va ρ_2 ekvivalent metrikalar bo'lsin. Agar (X,ρ_1) metrik fazo a) to'la; b) separabel; c) diskret bo'lsa, (X,ρ_2) metrik fazo ham shu xossaga ega bo'ladi. Isbot qiling.

21.155. R^n (C^n) to'plamda

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|,\ \rho_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2},\ \rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

metrikalarning ixtiyoriy ikkitasi ekvivalent ekanligini isbotlang.

21.156. $R=(-\infty;\infty)$ to'plamda

$$\rho_1(x,y)=|x-y| \quad \text{va} \quad \rho_2(x,y)=\begin{cases}1, & agar\ \ x\neq y\\ 0, & agar\ \ x=y\end{cases}$$

metrikalar ekvivalent emas. Isbotlang.

21.157. $C[a;b]$ to'plamda kiritilgan

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le t\le n}|x(t)-y(t)|,\qquad \rho_2(x,y)=\sqrt{\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt},$$

$$\rho_1(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,dt,\qquad \rho_4(x,y)=\int_a^b sign|x(t)-y(t)|\,dt$$

metrikalarning ixtiyoriy ikkitasi ekvivalent emas. Isbotlang.

21.158. X to'plam $[a,b]$ kesmada o'lchovli va chegaralangan funksiyalardan iborat. Shu to'plamda aniqlangan

$$\rho_1(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^{p_1}\,dt\right)^{1/p_1};\quad \rho_2(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^{p_2}\,dt\right)^{1/p_2}$$

metrikalar $p_1\neq p_2$ $(p_1\ge 1,\ p_2\ge 1)$ bo'lganda ekvivalent emasligini isbotlang.

21.159. Gomeomorfizm ekvivalentlik munosabati ekanligini isbotlang.

21.160. $f:X\to Y$ gomeomorfizm, $M\subset X$ to'plam berilgan bo'lsin. Ushbu tasdiqlarni isbotlang:

a) M ochiq to'plam bo'lsa, $f(M)$ ham ochiq;

b) M yopiq to'plam bo'lsa, $f(M)$ ham yopiq;

c) $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$.

21.161. Gomeomorf metrik fazolardan biri separabel bo'lsa, ikkinchisi ham separabel bo'lishini ko'rsating.

21.162. $X=(-\infty,\infty)$ to'plamda $\rho_1(x,y)=|x-y|$ va $\rho_2(x,y)=|arctgx-arctgy|$ metrikalar kiritilgan. (R,ρ_1) va (R,ρ_2) metrik fazolar gomeomorf ekanligini isbotlang. $x_n=n$ kelma-ketlik (R,ρ_2) metrik fazoda fundamental, (R,ρ_1) fazoda esa fundamental emasligini isbotlang. (R,ρ_1) to'la metrik fazo (R,ρ_2) esa to'la metrik fazo emas. Demak, gomeomorf metrik fazolarning biri to'la bo'lsa, ikkinchisi to'la bo'lishi shart emas. Xulosa: metrik fazoning to'laligi topologik xossa emas.

21.163. (X,ρ) metrik fazo bo'lsin. Agar $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ bo'lsa, (X,ρ) va (X,ρ_1) metrik fazolar gomeomorf ekanligini isbotlang.

21.164. R va R^2 metrik fazolar gomeomorf emas. Umuman R^n va R^m, $n\neq m$, metrik fazolar gomeomorf emasligini isbotlang.

21.165. $C^{(2)}[a,b]$ to'plamda aniqlangan

$$\rho_1(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)-y'(t)|+\max_{a\le t\le b}|x''(t)-y''(t)|$$

$$\rho_2(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\le t\le b}|x''(t)-y''(t)|$$

metrikalarning ekvivalent ekanligini isbotlang.

21.166. (X,ρ) va (Y,d) metrik fazolar bo'lsin. Agar (Y,d) fazoning biror metrik qism fazosi (X,ρ) metrik fazoga izometrik (gomeomorf) bo'lsa, (X,ρ) fazoni (Y,d) fazoga *izometrik (gomeomorf) joylashtirish* mumkin deyiladi. Agar $n\le m$ bo'lsa, R^n metrik fazoni R^m fazoga izometrik joylashtirish mumkinligini isbotlang. Bu yerda metrika sifatida

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i|^2},\quad \rho_\infty(x,y)=\max_{1\le i\le k}|x_i-y_i|,\quad \rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i|$$

($k=n$ yoki $k=m$) ifodalardan biri olingan.

21.167. S tabiiy metrika kiritilgan aylana bo'lsin. U holda $S\times[0;1]$ va $S\times S$ metrik fazolarning har birini R^3 metrik fazoga gomeomorf joylashtirish mumkinligini isbotlang.

21.168. Uchta nuqtadan iborat bo'lgan ixtiyoriy metrik fazoni R^2 metrik fazoga izometrik joylashtirish mumkinligini isbotlang. To'rtta nuqtadan iborat bo'lgan diskret metrik fazoni R^2 metrik fazoga izometrik joylashtirish mumkin emas, ammo R^3 metrik fazoga izometrik joylashtirish mumkinligini isbotlang.

21.169. To'rtta nuqtadan iborat shunday metrik fazo mavjudki, uni R^n metrik fazolarning birortasiga ham izometrik joylashtirish mumkin emasligini isbotlang.

21.170. $L_2[0,1]$ metrik fazoni $L_1[0,1]$ metrik fazoga

a) gomeomorf,

b) izometrik joylashtirish mumkinmi?

21.8. Qisqartirib aks ettirish prinsipi

21.171. $x=\frac{1}{3}\cos x-2$ tenglama yagona yechimga ega ekanligini isbotlang. Kalkulyator yordamida yechimni 0,001 aniqlik bilan toping.

Yechish. Haqiqiy sonlar to'plami R - to'la metrik fazo, $f:R\to R$, $f(x)=\frac{1}{3}\cos x-2$ akslantirish esa - qisuvchi. Shuning uchun qisqartirib aks ettirish haqidagi 4.1-teoremaga ko'ra, berilgan tenglama yagona yechimga ega. Uning yechimi taqriban $x\approx-2{,}194749278$.

21.172. Agar $f:R\to R$ va $|f'(x)|\le q<1$ bo'lsa, $x=f(x)$ tenglama yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

21.173. Agar $f:[a,b]\to[a,b]$ uzluksiz funksiya bo'lsa, $x=f(x)$ tenglamaning yechimi mavjudligini isbotlang.

21.186. $Ax(t)=\int_0^t x^2(s)ds$ tenglik bilan aniqlangan $A:C[0,a]\to C[0,a]$ akslantirish hech bir $a>0$ uchun qisuvchi emas. Isbot qiling.

21.187. $a>0$ sonning qanday qiymatlarida

$$x(t)=1+\int_0^t x^2(s)ds$$

integral tenglama $C[0;a]$ fazoda yechimga ega?

21.188. R metrik fazoda shunday $f:R\to R$ akslantirishga misol keltiringki, barcha $x,y\in R$, $x\neq y$ lar uchun

$$\rho(f(x),f(y))<\rho(x,y)$$

tengsizlik o'rinli, ammo $f(x)=x$ tenglama yechimga ega bo'lmasin.

21.189. R^n fazoda

$$S^{n-1}=\left\{\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n):\ \ \sum_{i=1}^n x_i=1,\quad x_i\geq 0\right\}$$

qism to'plam simpleks deb ataladi. Agar $P=(p_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$ matritsa elementlari $p_{ij}\geq 0$ va $\sum_{i=1}^n p_{ij}=1$ shartlarni qanoatlantirsa, P stoxastik matritsa deyiladi. $x\mapsto Px$ akslantirish S^{n-1} simpleksni o'zini-o'ziga akslantirishini ko'rsating. S^{n-1} to'plamda

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|,\qquad x,y\in S^{n-1}$$

metrika kiritilgan bo'lsin. Agar P matritsaning biror satri musbat elementlardan iborat bo'lsa ($p_{i1}>0,p_{i2}>0,\ldots,p_{in}>0$), $Px=x$ tenglama S^{n-1} simpleksda yagona yechimga ega bo'lishini isbotlang.

21.190. $K(t,s)$ funksiya $[0,1]\times[0,1]$ kvadratda uzluksiz bo'lsin.

$$\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1|K(t,s)|ds=M$$

belgilash kiritaylik. Agar $4M|\lambda|<1$ tengsizlik bajarilsa,

$$x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

integral tenglama $C[0,1]$ fazoda yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

21.191. Kalkulyatordan foydalanib,

a) $5x - 3\sin x = 7$, b) $3x + e^{-|x|} = 10$, c) $x = \ln\sqrt[3]{1+x^2} - 3$

tenglamalar yechimini 0,01 aniqlikda toping.

21.192. f biror uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$x(t) - \frac{1}{2}\sin x(t) + f(t) = 0$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $x \in C[0,1]$ funksiya mavjudligini isbotlang.

21.193. Ushbu

$$x(t) = e^{-x(t)} + \sin t$$

tenglamaning $C[0;1]$ fazoga tegishli yechimi mavjudligini isbotlang.

21.194. X to'la metrik fazo, $A : X \to X$, $\rho(Ax, Ay) \le q \cdot \rho(x,y)$, $0 \le q < 1$ qisuvchi akslantirish bo'lsin. Ixtiyoriy $x_0 \in X$ uchun $Ax = x$ tenglamaning yechimi $B[x_0, \frac{\rho(x_0, Ax_0)}{1-q}]$ sharga tegishli. Isbotlang.

21.195. X to'la metrik fazo, $B[x_0, r] \subset X$ yopiq shar va $f : B[x_0, r] \to X$ biror akslantirish bo'lsin. Agar f akslantirish $B[x_0, r]$ sharni qisqartirib akslantirsa, ya'ni

$$\rho(f(x), f(y)) < q \cdot \rho(x,y), \quad 0 \le q < 1, \quad x, y \in B[x_0, r]$$

shartni qanoatlantirsa va $\rho(f(x), x_0) \le (1-q) \cdot r$ tengsizlik bajarilsa, $f(x) = x$ tenglama $B[x_0, r]$ sharda yagona yechimga ega. Isbotlang.

21.196. X to'la metrik fazo, $f : X \to X$ uzluksiz akslantirish

$$\rho(f(x), f(y)) \ge \alpha \cdot \rho(x,y), \quad \alpha > 1, \quad x, y \in X$$

shartni qanoatlantirsin. U holda $f(x) = x$ tenglama yechimga ega bo'lishi shartmi?

21.197. R^n fazoda metrika

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|$$

tenglik bilan aniqlangan. $A=(a_{ij}),\ i,j=\overline{1,n}$ matritsa elementlari

$$\max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1$$

shartni qanoatlantirsa, $A: R^n \to R^n$ akslantirish qisuvchi bo'ladi. Isbotlang.

21.198. $A=(a_{ij})$ cheksiz matritsa bo'lsin. $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ uchun

$$Ax=\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{1i}x_i,\sum_{i=1}^{\infty}a_{2i}x_i,\ldots,\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}x_i,\ldots\right)$$

belgilash kiritaylik. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) agar

$$\sup_{1\le j<\infty} \sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|<1$$

bo'lsa, $A:\ell_1\to\ell_1$ - qisuvchi:

b) agar

$$\sup_{1\le i<\infty} \sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<1$$

bo'lsa, $A: m\to m$ - qisuvchi:

c) agar

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<1$$

bo'lsa, $A:\ell_2\to\ell_2$ - qisuvchi.

21.199. Akslantirish $A: C[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\lambda\cdot x(t^\alpha)$, $\alpha\ge 0$ tenglik bilan berilgan. Parametr λ ning qanday qiymatlarida bu akslantirish qisuvchi bo'ladi?

21.200. f va g uzluksiz funksiyalar bo'lib, $|f(0)|<1$, $|f(1)|<1$ shart bajarilsa,

$$x(t) = f(t) \cdot x(t^{\alpha}) + g(t)$$

tenglama $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ bo'lganda, $C[0,1]$ fazoda yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

21.201. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = \lambda \cdot x(t^{\alpha})$, $0 < \alpha \leq 1$ akslantirish λ parametrning qanday qiymatlarida qisuvchi bo'ladi?

21.202. $K(t,s)$ uzluksiz va $\alpha < 1$ bo'lsin. Parametr λ ning qanday qiymatlarida $A: C[0,1] \to C[0,1]$ akslantirish

$$Ax(t) = \lambda \cdot \int_0^1 \frac{K(t,s)}{|t-s|^{\alpha}} x(s)ds$$

qisuvchi bo'ladi?

21.9. Kompakt metrik fazolar

21.203. Kompakt metrik fazo to'la ekanligini isbotlang.

21.204. Kompakt metrik fazo separabel. Isbot qiling.

21.205. Kompaktning uzluksiz akslantirishdagi tasviri yana kompakt bo'lishini isbotlang.

21.206. X kompakt metrik fazo, $\{F_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ esa undagi yopiq to'plamlar bo'lsin. Agar F_{α} to'plamlarning ixtiyoriy cheklitasi bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega bo'lsa, u holda $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_{\alpha}$ kesishma ham bo'sh emas. Isbotlang.

21.207. Kompakt metrik fazolarning to'g'ri ko'paytmasi yana kompakt bo'lishini isbotlang.

21.208. X metrik fazoda A va B kompakt to'plamlar bo'lsa, $A \cup B$, $A \cap B$ to'plamlar ham kompakt bo'lishini isbotlang.

21.209. X, Y metrik fazolar, Y kompakt va $f: X \to Y$ uzluksiz va inyektiv (o'zaro bir qiymatli) akslantirish bo'lsin. U holda X va $f(X)$ gomeomorf ekanligini isbotlang.

21.210. X metrik fazoda sanoqli va kompakt bo'lgan to'plamga misol keltiring.

21.211. X kompakt metrik fazo va $f:X\to X$ akslantirish uchun

$$\rho(f(x),f(y))\geq\rho(x,y),\quad x,y\in X$$

tengsizlik bajarilsa, f izometriya bo'lishini isbotlang.

21.212. X kompakt metrik fazo va $f:X\to X$ akslantirish

$$\rho(f(x),f(y))<\rho(x,y),\quad x\neq y$$

shartni qanoatlantirsin. U holda $f(x)=x$ tenglama yagona yechimga ega bo'lishini isbotlang.

21.213. X kompakt metrik fazo va $f:X\to X$ izometriya bo'lsin. U holda $f(X)=X$ ekanligini isbotlang.

21.214. $R=(-\infty;\infty)$ metrik fazoda

a) Z, b) $M_n=\left\{\frac{k}{n}:\ k\in Z\right\}$

to'plam R uchun qanday to'rni tashkil etadi?

21.215. Z^2 to'plam R^2 da qanday to'rni tashkil etadi?

21.216. $f:X\to Y$ tekis uzluksiz, $M\subset X$ to'plam to'la chegaralangan bo'lsa, $f(M)$ to'plam ham to'la chegaralangan. Isbot qiling. Agar tekis uzluksizlik shartini faqat uzluksizlik sharti bilan almashtirilsa, xulosa noto'g'ri bo'ladi. Misol keltiring.

21.217. X metrik fazo. Agar ixtiyoriy uzluksiz $f:X\to R$ funksiya chegaralangan bo'lsa, X kompakt metrik fazo bo'lishini isbotlang.

Demak, X metrik fazoda uzluksiz, ammo chegaralanmagan funksiya mavjud bo'lsa, X kompakt metrik fazo emas.

21.218. Agar M-kompakt to'plam, F- yopiq to'plam va $M\cap F=\varnothing$ bo'lsa,

$$d(M,F)=\inf_{x\in M,\,y\in F}\rho(x,y)>0$$

bo'lishini isbotlang.

21.219. Shunday M va F yopiq to'plamlarga misol keltiringki,

$$M\bigcap F=\varnothing \quad \text{va} \quad d(M,F)=\inf_{x\in M,\,y\in F}\rho(x,y)=0$$

bo'lsin.

21.220. Ushbu

a) $\left\{t^{\alpha}\right\}$, $\alpha>0$; b) $\{\sin\alpha t\}$, $\alpha\in R$;

c) $\left\{\dfrac{1}{\alpha+t^2}\right\}$, $\alpha>0$; d) $\left\{\dfrac{t^{\alpha}}{1+t^2}\right\}$, $\alpha>0$; e) $\left\{\ln^{\alpha} t\right\}$, $\alpha>0$

funksiyalar oilalarining qaysilari $[0,1]$ kesmada tekis darajada uzluksiz? Qaysilari tekis chegaralangan?

21.221. K kompakt, $C(K)$ shu kompaktda uzluksiz bo'lgan barcha haqiqiy (kompleks) qiymatli funksiyalar to'plami bo'lsin. Agar

$$\rho(x,y)=\max_{t\in K}|x(t)-y(t)|$$

deb olsak, $C(K)$ to'la va separabel metrik fazo ekanligini isbotlang.

21.222. X metrik fazo va $K\subset X$ kompakt to'plam bo'lsin. Ixtiyoriy $x\in X$ uchun shunday $y\in K$ mavjudki,

$$\rho(x,y)=\inf_{z\in K}\rho(x,z)$$

ya'ni x uchun K da unga eng yaqin element mavjud. Isbotlang.

21.223. X metrik fazoda K to'plam berilgan. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun K to'plamning kompakt ε to'ri mavjud bo'lsa, K kompakt bo'lishini isbotlang.

21.224. Arsela teoremasidan foydalanib, $C^{(1)}[a,b]$ metrik fazoda K to'plamning nisbiy kompakt bo'lishining zarur va yetarli shartini toping.

21.225. $C[0,1]$ metrik fazoda ushbu

$M_1=\{x\in C[0,1]:\ |x(t)|\le 1\}$;

$M_2=\{x\in C[0,1]:\ |x(t)|\le 1,\ |x'(t)|\le 2\}$;

$M_3=\{x\in C[0,1]:\ |x(t)|\le 1,\ |x'(t)|\le 2,\ |x''(t)|\le 3\}$;

$M_4=\{x\in C[0,1]:\ |x(t)|\le 1,\ \ |x''(t)|\le 2\}$;

$M_5=\{x\in C[0,1]:\ |x'(t)|\le 1,\ \ |x''(t)|\le 2\}$;

to'plamlardan qaysilari nisbiy kompakt to'plam bo'ladi?

21.226. $K=[0,1]\times[0,1]$ kvadratda uzluksiz differensiallanuvchi va

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_1}\right|\leq 1,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial t_2}\right|\leq 1;\quad f(0,0)=1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $f(t_1,t_2)$ funksiyalardan iborat to'plam $C(K)$ metrik fazoda kompakt ekanligini isbotlang.

21.227. $\{a_n\}$ sonlar qanday bo'lganda

$$M=\{x\in \ell_2 : |x_n|\leq a_n\}$$

«parallelepiped» ℓ_2 metrik fazoda kompakt bo'ladi?

21.228. $K\subset X$ kompakt, f_n lar - shu kompaktda aniqlangan, haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar. Agar ixtiyoriy $x\in K$ uchun $\{f_n(x)\}$ monoton kamaymovchi

$$f_1(x)\leq f_2(x)\leq\cdots\leq f_n(x)\leq\cdots$$

bo'lsa, hamda $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa, $\{f_n\}$ funksional ketma-ketlik f funksiyaga tekis yaqinlashadi, ya'ni $C(K)$ metrik fazoda $\rho(f_n,f)\to 0$. Isbot qiling.

21.10. Tutash (bog'lamli) metrik fazolar

21.229. $R=(-\infty,\infty)$ metrik fazoda $\varnothing, [a,b], (a,b), [a,b), (a,b], [a,\infty)$, (a,∞), $(-\infty,a], (-\infty,a), (-\infty,\infty)$ to'plamlar tutash ekanligini isbotlang. Ulardan boshqa tutash to'plamlar yo'qligini ko'rsating.

21.230. A_α, $\alpha\in I$ tutash to'plamlar bo'lsin. Agar $\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha=\varnothing$ bo'lsa, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ to'plam tutash bo'lishini isbotlang.

21.231. Uzluksiz akslantirishda tutash to'plamning tasviri yana tutash to'plam bo'lishini isbotlang.

21.232. M_n to'plamlar tutash va $M_n\bigcap M_{n+1}=\varnothing$, $n=1,2,\ldots$ bo'lsin. U holda $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ to'plam tutash bo'lishini isbotlang.

21.233. A va B yopiq to'plamlar bo'lsin. Agar $A\cup B$ va $A\cap B$ tutash to'plamlar bo'lsa, A va B to'plamlar ham tutash bo'lishini isbotlang. Masalada A va B to'plamlarning yopiqlik sharti muhim ekanligiga misol keltiring.

21.234. M tutash to'plam bo'lsin. Agar $f:M\to R$ uzluksiz funksiya uchun $f(x)=a,\ f(y)=b,\ x,y\in M$ va $a<b$ bo'lsa, ixtiyoriy $c\in(a;b)$ uchun shunday $z\in M$ mavjudki, $f(z)=c$ tenglik bajariladi. Isbot qiling.

21.235. Tutash metrik fazolarning to'g'ri ko'paytmasi ham tutash ekanligini isbotlang.

21.236. Metrik fazoda ixtiyoriy sfera bo'sh emas. Bu holda fazo tutash bo'lishi shartmi?

21.237. Q metrik fazo tutash emas. Isbotlang.

21.238. $C[a,b]$ to'plamda metrika

$$\rho(x,y)=\int_a^b sign\,|\,x(t)-y(t)\,|\,dt$$

tenglik bilan aniqlangan. $(C[a,b],\rho)$ tutash fazo bo'ladimi?

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyidagi misollarda $\rho: X\times X\to R$ akslantirishning metrika shartlarini qanoatlantirishini tekshiring (239-257).

21.239. $\rho(x,y)=2\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+3\max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)-y'(t)|,\quad x,y\in C^{(1)}[a,b]$

21.240. $\rho(x,y)=\sqrt{2\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2},\quad x,y\in R^n$

21.241. $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}|x_n-y_n|^2},\quad x,y\in \ell_2$

21.242. $\rho(x,y)=8\max\limits_{1\le i\le n}|x_i-y_i|,\quad x,y\in R^n$

21.243. $\rho(f,g)=5\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|,\quad f,g\in C[a,b]$

21.244. $\rho(f,g)=\sqrt{2}\int\limits_a^b|f(x)-g(x)|dx,\quad f,g\in C[a,b]$

21.245. $\rho(f,g)=\sqrt{3\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx}$, $f,g\in C[a,b]$

21.246. $\rho(x,y)=7\sup\limits_{1\le n<\infty}|x_n-y_n|$, $x,y\in m$.

21.247. $\rho(x,y)=2\sup\limits_{1\le n<\infty}|x_n-y_n|$, $x,y\in c$

21.248. $\rho(x,y)=\sqrt{5}\sup\limits_{1\le n<\infty}|x_n-y_n|$, $x,y\in c_0$

21.249. $\rho(x,y)=(x-y)^2$, $x,y\in R$.

21.250. $\rho(x,y)=|\sin x-\sin y|$, $x,y\in R$.

21.251. $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x<y\\ 2, & x>y\end{cases}$, $x,y\in R$.

21.252. $\rho(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$, $x,y\in R^3$

21.253. $\rho(f,g)=|f(0)-g(0)|+|f(1)-g(1)|$, $f,g\in C[a,b]$

21.254. $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^2$, $x,y\in R^n$

21.255. $\rho(x,y)=|x_1-y_2|+|y_1-x_2|$, $x,y\in R^2$

21.256. $\rho(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^2$, $x,y\in \ell_2$

21.257. $\rho(x,y)=|x_1-y_1|+2|x_2-y_2|^2$, $x,y\in R^2$.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyidagi misollarda $x\in X$ va $y\in X$ elementlar orasidagi masofani toping (258-267).

21.258. $X=C[0,\pi]$, $x(t)=\sin t$, $y=\cos t$.

21.259. $X=\ell_2$, $x=(1,1,0,1,0,0,\ldots)$, $y=(0,0,0,\ldots)$.

21.260. $X=P_{\le n}$, $x(t)=1+t$, $y(t)=2t$, $\rho(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|dt$.

21.261. $X=N$, $x=5$, $y=25$, $\rho(x,y)=\frac{1}{10}|x-y|$.

21.262. $X = m,\quad x=\left(2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\right),\quad y=\left(-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\ldots\right)$

21.263. $X = R^4_\infty,\quad x=(-1;-2;3;0),\quad y=(4;2;0;-2)$

21.264. $X = R^4_1,\quad x=(4;5;0;1),\quad y=(-3;0;2;7)$

21.265. $X = R^3,\quad x=(8;4;3),\quad y=(6;0;-1)$

21.266. $X = m,\quad x=(-1,1,-1,1,\ldots,-1,1,\ldots),\quad y=\left(0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots\right)$

21.267. $X = C_2[-\pi,\pi],\quad x(t)=e^{it},\quad y(t)=e^{-it}.$

22-§. Chiziqli fazolar

22.1. Chiziqli normalangan fazolar

Bizga X chiziqli normalangan fazo va uning x elementi berilgan bo'lsin. x elementning normasi $\|x\|$ orqali belgilanadi. Xuddi metrik fazolardagidek $B(x_0,r)=\{x\in X: \|x-x_0\|<r\}$ to'plam markazi x_0 da radiusi $r\geq 0$ bo'lgan ochiq shar deyiladi. Markazi x_0 da radiusi $r\geq 0$ bo'lgan yopiq shar deganda $B[x_0,r]=\{x\in X: \|x-x_0\|\leq r\}$ to'plam tushuniladi. Agar X chiziqli normalangan fazodagi M to'plamni biror sharga joylashtirish mumkin bo'lsa, unga chegaralangan to'plam deyiladi. M to'plamning diametri deb $diamM = \sup\limits_{x,y\in M}\|x-y\|$ songa aytiladi. $\rho(x,M)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$ miqdorga x nuqtadan M to'plamgacha bo'lgan masofa deyiladi. Xuddi shunday $\rho(A,B)=\inf\limits_{x\in A,y\in B}\|x-y\|$ miqdorga A va B to'plamlar orasidagi masofa deyiladi. Normalangan fazolarda ham ochiq va yopiq to'plamlar xuddi metrik fazolardagidek ta'riflanadi. M ning barcha limitik nuqtalari to'plami M' orqali belgilanadi. Xuddi metrik fazolardagidek $M\cup M'$ to'plam M to'plamning yopig'i deyiladi va $[M]$ yoki $\overline{M}$ orqali belgilanadi. X chiziqli normalangan fazodagi A

A va B to'plamlarning algebraik yig'indisi deganda $A+B=\{a+b:\ a\in A, b\in B\}$ to'plam tushuniladi. Agar L, M lar X normalangan fazoning qism fazolari bo'lib X ning har bir x elementi yagona usul bilan $x=u+v,\ u\in L,\ v\in M$ ko'rinishda tasvirlansa, X normalangan fazo L va M qism fazolarning to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi va $X=L\oplus M$ shaklda yoziladi.

Endi bir mavzuga oid bir nechta misollar yechib ko'rsatamiz.

22.1. Ushbu $p(x)=|arctgx|$ funksiya R da norma shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Bu funksiya normaning musbat bir jinslilik shartini qanoatlantirmaydi, chunki norma ta'rifidagi 2-shart $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$ bajarilmaydi. Masalan, $x=\sqrt{3},\ \lambda=\frac{1}{3}$ sonlari uchun

$$p(\lambda x)=|arctg\lambda x|=\left|arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\frac{\pi}{6} \quad \text{va} \quad |\lambda|p(x)=\frac{1}{3}|arctg\sqrt{3}|=\frac{\pi}{9}$$

bo'lganligi sababli $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$ tenglik o'rinli emas.

22.2. $C[-1,1]$ fazoda $x_n(t)=t^n\ (n\in N)$ ketma-ketlikni fundamentallikka tekshiring.

Yechish. $C[-1,1]$ fazo to'la normalangan fazo bo'lganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligidan uning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. $C[-1,1]$ fazodagi yaqinlashish tekis yaqinlashishni ifodalaganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti ham uzluksiz bo'lishi kerak. Qaralayotgan ketma-ketlikning limiti uzluksiz emas. Shuning uchun qaralayotgan ketma-ketlikning fundamental emasligini ko'rsatishga harakat qilamiz. Buning uchun shunday $\varepsilon_0>0$ soni mavjud bo'lib, istalgan $n\in N$ uchun undan katta $n_0>n$ va shunday $p_0\in N$ sonlari mavjud bo'lib, $\|x_{n_0+p_0}-x_{n_0}\|>\varepsilon_0$ tengsizlik o'rinli ekanligini ko'rsatish kifoya. $\varepsilon_0=\frac{1}{5}$ va har bir $n\in N$ dan katta biror $n_0>n$ natural son uchun $p_0=n_0$ deb olamiz. Barcha $t\in[0;1]$ lar uchun

$$\|x_{2n_0}-x_{n_0}\|=\max_{-1\le t\le 1}\left|t^{2n_0}-t^{n_0}\right|\ge t^{n_0}-t^{2n_0}$$

tengsizlikga ega bo'lamiz. Bu tengsizlikdan $t_0=\frac{1}{\sqrt[n_0]{2}}$ bo'lganida ushbu

$$\|x_{2n_0}-x_{n_0}\|\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}>\frac{1}{5}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamental emasligini ko'rsatadi.

Quyida keltirilgan to'plamlar $C[-1,1]$ fazoning qism fazosi bo'ladimi? (**22.3-22.10**).

22.3. Monoton funksiyalar to'plami.

22.4. Toq funksiyalar to'plami.

22.5. Juft funksiyalar to'plami.

22.6. Darajasi $n\,(n>1)$ dan oshmaydigan ko'phadlar to'plami.

22.7. $x(1)=a$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.

22.8. $[-1,1]$ kesmada aniqlangan barcha ko'phadlar to'plami.

22.9. Qisman chiziqli uzluksiz funksiyalar to'plami.

22.10. $\int_{-1}^{1}x(t)dt=0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.

22.11. R^n fazoda $V=\{x=(x_1,...,x_n):x_1=x_2\}$ to'plam qism fazo tashkil qilishini isbotlang, uning o'lchamini toping.

22.12. ℓ_2 fazoda $M=\{x=(x_1,...,x_n,...):x_1+x_2+x_3=0\}$ to'plam qism fazo tashkil qilishini isbotlang, qism fazoning koo'lchamini toping.

22.13. $c\subset m$ ekanligini isbotlang.

22.14. $\ell_2\subset c_0$ ekanligini isbotlang.

Quyidagi akslantirishlar norma shartlarini qanoatlantiradimi?

22.15. $p: P_{\le n} \to R$, $p(x) = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|\}$, bu yerda $P_{\le n}$ - darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar fazosi, $x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$.

22.16. $p: C^{(1)}[a, b] \to R$, $p(x) = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{a<t\le b} |x'(t)|$.

22.17. $p: C[a, b] \to R$, $p(x) = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

22.18. $p: R^n \to R$, $p(x) = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

22.19. $p: M[a,b] \to R$, $p(x) = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t)|$.

22.20. $p: C[a, b] \to R$, $p(x) = \int\limits_a^b |x(t)| dt$.

22.21. $p: C^{(1)}[a,b] \to R$, $p(x) = \max\limits_{a\le t\le b} |x'(t)|$.

22.22. $p: \Phi_C(R) \to R$, $p(x) = \max\limits_{-\infty\le t\le\infty} |x(t)|$. Bu yerda $\Phi_C(R)$ - sonlar o'qida aniqlangan uzluksiz va finit funksiyalar to'plami.

22.23. $p: C^{(2)}[a,b] \to R$, $p(x) = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x''(t)|$.

22.24. $p: C^{(2)}[a,b] \to R$, $p(x) = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x''(t)|$.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyidagi funksiyalar ketma-ketligi (22.25-22.34) $x(t) \equiv 0$ funksiyaga ko'rsatilgan fazoda yaqinlashuvchimi?

22.25. $x_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n^2 + t^2}$, $C[0, 1]$.

22.26. $x_n(t) = te^{-nt}$, $C_1[0, 10]$.

22.27. $x_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n}$, $C_1[-\pi, \pi]$.

22.28. $x_n(t) = t^n - t^{2n}$, $C_2[0, 1]$.

22.29. $x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{2+n}}{2+n}$, $C[0, 1]$.

22.30. $x_n(t) = \dfrac{t}{1 + n^2 t^2}$; $C_1[0, 1]$.

22.31. $x_n(t)=\sqrt{t^n-\frac{1}{n^2}}-t;\quad C_1[0,1].$

22.32. $x_n(t)=t^n-t^{n+1};\quad C_2[0,1]$

22.33. $x_n(t)=n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2nt}\cdot e^{-\frac{1}{2}nt};\quad C_2[0,1]$

22.34. $x_n(t)=2n\cdot t\cdot e^{-nt^2};\quad C_1[0,1].$

22.35. X normalangan fazo va $x_n, x, y_n, y\in X$ bo'lsin. Quyidagiarni isbotlang:

a) agar $x_n\to x$ bo'lsa, u holda x_n chegaralangan ketma-ketlik;

b) agar $x_n\to x, \lambda_n\to\lambda, \lambda_n\in C$ bo'lsa, u holda $\lambda_n\cdot x_n\to\lambda\cdot x$;

c) agar $x_n\to x$ bo'lsa, u holda $\|x_n\|\to\|x\|$;

d) agar $x_n\to x$ va $\|x_n-y_n\|\to 0$ bo'lsa, u holda $y_n\to x$;

e) agar $x_n\to x$ bo'lsa, u holda $\|x_n-y\|\to\|x-y\|$;

f) agar $x_n\to x, y_n\to y$ bo'lsa, u holda $\|x_n-y_n\|\to\|x-y\|$.

22.36. Har qanday normalangan fazoda ochiq shar ochiq to'plam, yopiq shar yopiq to'plam bo'lishini isbotlang.

22.37. $[B(x_0,r)]=B[x_0,r]$ tenglikni isbotlang.

22.38. Ixtiyoriy $x,y\in X$ lar uchun $\|x\|\le\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}$ tengsizlik o'rinli. Isbotlang.

22.39. Chegaralangan to'plamlarning birlashmasi yana chegaralangan to'plam bo'lishini isbotlang.

22.40. Chegaralangan to'plamlarning arifmetik yig'indisi yana chegaralangan to'plam bo'lishini isbotlang.

22.41. $M\subset X$ to'plam chegaralangan bo'lishi uchun $diam\, M<\infty$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

22.42. $M\subset X$ chegaralangan to'plam bo'lsin. U holda $[M]$ ham chegaralangan to'plam hamda $diam\, M=diam\,[M]$ tenglik o'rinli. Isbotlang.

22.43. Har qanday $M \subset X$ to'plam uchun M' yopiq to'plam bo'lishini isbotlang.

22.44. Har qanday $M \subset X$ to'plam uchun $(M')' \subset M'$ munosabatni isbotlang. $M' \setminus (M')' \neq \varnothing$ bo'lishi mumkinmi?

22.45. $[A] \subset [B]$ ekanligidan $A \subset B$ munosabat kelib chiqadimi?

22.46. $M \subset X$ yopiq to'plam bo'lsin. $\rho(x, M) = 0$ bo'lishi uchun $x \in M$ bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

22.47. $A, B \subset X$ ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. $\rho(A, B) = \rho(A, \overline{B}) = \rho(\overline{A}, B) = = \rho(\overline{A}, \overline{B})$ tengliklarni isbotlang.

22.48. $M \subset X$ ixtiyoriy to'plam bo'lsin. M to'plamning chegarasi - ∂M shunday $x \in X$ nuqtalardan iboratki, markazi x da bo'lgan har qanday shar ham M to'plamdan ham $X \setminus M$ dan hech bo'lmaganda bittadan elementni o'zida saqlaydi. ∂M - yopiq to'plam hamda $\partial M = \partial(X \setminus M)$ tenglikni isbotlang.

22.49. Shunday $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$ ketma-ketlikka misol keltiringki, u:

a) m da yaqinlashuvchi, ℓ_1 da uzoqlashuvchi bo'lsin;

b) m da yaqinlashuvchi, ℓ_2 da uzoqlashuvchi bo'lsin;

c) ℓ_2 da yaqinlashuvchi, ℓ_1 da uzoqlashuvchi bo'lsin;

d) c_0 da yaqinlashuvchi, ℓ_1 da uzoqlashuvchi bo'lsin;

e) c_0 da yaqinlashuvchi, ℓ_2 da uzoqlashuvchi bo'lsin.

22.50. $x = (1, 1/\ln 2, 1/\ln 3, \ldots, 1/\ln n, \ldots)$ elementning c_0 da yotishini ko'rsating va birorta ham $p \in N$ da $x \notin \ell_p$ ekanligini isbotlang.

22.51. Barcha ko'phadlar to'plami $C[a,b]$ fazoda ochiq to'plam bo'ladimi?

22.52. Barcha ko'phadlar to'plami $C[a,b]$ fazoda yopiq to'plam bo'ladimi?

22.53. Qisman chiziqli uzluksiz funksiyalar to'plami $C[a,b]$ fazoning hamma yerida zich ekanligini isbotlang.

22.54. Barcha ko'phadlar to'plami $C[a,b]$ fazoning hamma yerida zich ekanligini isbotlang.

22.55. ℓ_2 fazoda $\{x=(x_1,x_2,\ldots)\in \ell_2 : |x_n|<1\}$ parallelepiped ochiq to'plam bo'lishini isbotlang.

22.56. Agar $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ tenglik faqat $y=\lambda x, \lambda>0$ ko'rinishdagi elementlar uchun o'rinli bo'lsa, u holda X normalangan fazo qat'iy normalangan deyiladi. Quyidagilarning qaysilari qat'iy normalangan fazo bo'ladi?

a) R^2; b) ℓ_1; c) ℓ_2; d) m; e) $C[a,b]$; f) $C_2[a,b]$.

22.57. $A,B\subset X$ qavariq to'plamlar. $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A+B$ to'plamlardan qaysilari qavariq to'plam bo'ladi?

22.58. Agar $A,B\subset X$ to'plamlardan birortasi ochiq bo'lsa, u holda $A+B$ to'plam ham ochiq bo'ladi. Isbotlang.

22.59. Normalangan fazoda qavariq to'plamning yopig'i qavariq bo'ladimi?

22.60. $A,B\subset X$ lar hamma yerda zich to'plamlar bo'lsin. $A\bigcap B=\varnothing$ bo'lishi mumkinmi?

22.61. $C[-1,1]$ fazoni ikkita cheksiz o'lchamli qism fazolarning to'g'ri yig'indisi shaklida yozing.

22.62. Normalangan fazoda fundamental ketma-ketlikning chegaralangan ekanligini isbotlang.

22.63. $\{x_n\}\subset X$ fundamental ketma-ketlik va uning biror x_{n_k} qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda x_n ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Isbotlang.

22.64. $\{x_n\}\subset X$ va $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_{n+1}-x_n\|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda x_n fundamental ketma-ketlik bo'ladi. Isbotlang. Teskari tasdiq o'rinlimi?

22.65. Har qanday chekli o'lchamli normalangan fazo to'ladir. Isbotlang.

22.66. Ixtiyoriy $x, y \in X$ lar uchun $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$ tengsizlikni isbotlang.

22.67. $R^+ = (0, \infty)$ to'plamda x va y sonlar yig'indisi deganda ularning ko'paytmasini, x elementni λ- haqiqiy songa ko'paytirish deganda x^λ ni tushunamiz. U holda R^+ to'plam unda kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazo tashkil qilishini isbotlang. Bu fazoning nol elementini toping.

22.68. $\beta(X)$ orqali X chiziqli fazoning barcha qism to'plamlari to'plamini belgilaymiz. Ixtiyoriy $M, N \in \beta(X)$ lar uchun

$$M + N = \{x + y : x \in M, \, y \in N\}, \quad \lambda M = \{\lambda x : x \in M\}$$

kabi amallarni kiritamiz. Bu amallar chiziqli fazo aksiomalarini qanoatlantiradimi?

22.69. $g(x) = \ln x, \, x \in (0, \infty)$ akslantirish $R^+ = (0, \infty)$ va $R = (-\infty, \infty)$ lar orasida izomorfizm bo'lishini ko'rsating.

22.2. Evklid fazolari

Evklid va Hilbert fazolari ta'riflari, skalyar ko'paytma, ortonormal sistema,Shmidtning ortogonallashtirish jarayoni, Fur'e qatori, Fur'e koeffitsiyentlarihaqidagi ma'lumotlarni o'quv qo'llanmaning 9-10-§ laridan topish mumkin.

22.70. $C^n = \{x : x = (x_1, \ldots, x_n), x_k \in C, k = 1, 2, \ldots, n\}$ chiziqli fazoni qaraylik.

$$p(x, y) = (x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \quad x, y \in C^n \tag{22.1}$$

formula yordamida aniqlangan p funksional skalyar ko'paytma aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsating.

Yechish. Bunda biz kompleks sonlar xossalaridan foydalanamiz.

1) $(x, x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geq 0, \quad \forall x \in C^n$

tengsizlik $|x_k|\geq 0$ ekanligidan kelib chiqadi. Endi

$$(x,x)=\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2=0$$

bo'lsin. Qo'shiluvchilarning manfiy emasligidan har bir k uchun $x_k=0$, ya'ni $x=0$ ekanligi kelib chiqadi. Aksincha, har bir k uchun $x_k=0$ bo'lsa, u holda $(x,x)=0$ bo'lishi ko'rinib turibdi.

2) $(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{\overline{x_k}y_k}=\overline{\sum_{k=1}^{n}y_k\overline{x_k}}=\overline{(y,x)}$

Bu xossa ko'paytmaning qo'shmasi qo'shmalar ko'paytmasiga, yig'indining qo'shmasi esa qo'shmalar yig'indisiga tengligidan kelib chiqadi.

3) $x,y,z\in C^n$, $(x+y,z)=\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)\overline{z}_k=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{z}_k+\sum_{k=1}^{n}y_k\overline{z}_k=(x,z)+(y,z)$,

4) $x,y\in C^n$, $\lambda\in C$, $(\lambda x,y)=\sum_{k=1}^{n}\lambda x_k\overline{y}_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y}_k=\lambda(x,y)$.

Bu tengliklarning bajarilishi ham 2-xossa kabi tekshiriladi. Demak, (22.1) tenglik yordamida aniqlangan p funksional skalyar ko'paytma aksiomalarini qanoatlantiradi va C^n kompleks Evklid fazosi bo'ladi.

22.71. R^3 Evklid fazosida $f_1=(1,1,0)$, $f_2=(0,1,1)$, $f_3=(1,1,1)$ vektorlar sistemasiga Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llang.

Yechish. Ma'lumki, R^n fazoda n ta vektordan iborat sistemaning chiziqli erkli bo'lishi uchun bu vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir. Berilgan vektorlar uchun bu determinant

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

bo'lganligi sababli, ular chiziqli erklidir. Endi bu elementlarga Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llaymiz. $\varphi_1=f_1=(1,1,0)$ deb olsak, $\|\varphi_1\|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$ bo'ladi. φ_2 elementni $\varphi_2=f_2-a_{21}\varphi_1$ ko'rinishda olib, a_{21} koeffitsiyentni $(\varphi_2,\varphi_1)=0$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz:

$$0=(\varphi_2,\varphi_1)=(f_2,\varphi_1)-a_{21}(\varphi_1,\varphi_1) \quad \text{yoki} \quad a_{21}=\frac{(f_2,\varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}=\frac{1}{2}.$$

U holda

$$\varphi_2=(0,1,1)-\frac{1}{2}(1,1,0)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\ \|\varphi_2\|^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2=\frac{3}{2},\quad \|\varphi_2\|=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

bo'ladi. φ_3 vektorni quyidagicha izlaymiz:

$$\varphi_3=f_3-a_{31}\varphi_1-a_{32}\varphi_2. \tag{22.2}$$

Bunda a_{31}, a_{32} koeffitsiyentlarni shunday tanlaymizki, $(\varphi_3,\varphi_1)=$ $=(\varphi_3,\varphi_2)=0$ bo'lsin. Buning uchun (22.2) ni avval φ_1 ga, keyin esa φ_2 ga skalyar ko'paytirib, a_{31}, a_{32} koeffitsiyentlarni topamiz:

$$a_{31}=\frac{(f_3,\varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}=\frac{1\cdot1+1\cdot1+0\cdot1}{2}=1, \qquad a_{32}=\frac{(f_3,\varphi_2)}{\|\varphi_2\|^2}=\frac{1}{3/2}=\frac{2}{3}.$$

Demak,

$$\varphi_3=(1,1,1)-(1,1,0)-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\quad \|\varphi_3\|=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hosil bo'lgan $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ vektorlar ortogonaldir. Ulardan ortonormal sistemani hosil qilamiz:

$$\psi_1=\frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \psi_2=\frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ \psi_3=\frac{\varphi_3}{\|\varphi_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyidagi formulalar yordamida berilgan p funksional, ko'rsatilgan haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradimi?

22.72. $E=\ell_2,\quad p(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k y_k,\quad 0<\lambda_n<1.$

22.73. $E=C^{(1)}[a,b],\quad p(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)\,dt+\int_a^b x'(t)y'(t)\,dt.$

22.74. $E=R^2$, $\quad p(x,y)=\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)}$.

22.75. $E=C[a,b]$, $\quad p(x,y)=\int_a^b e^t x(t)y(t)\,dt$.

22.76. $E=R^3$, $\quad p(x,y)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$.

22.77. $E=R^2$, $\quad p(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$.

22.78. $E=R^2$, $\quad p(x,y)=x_1y_1-x_2y_1+2x_2y_2$.

22.79. $E=\ell_2$, $\quad p(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_ky_k}{k}$.

22.80. $E=R^3$, $\quad p(x,y)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$.

22.81. $E=C[a,b]$, $\quad p(x,y)=\int_a^b x^4(t)y^4(t)\,dt$.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Ko'rsatilgan fazolarda berilgan vektorlarning chiziqli erkliligini tekshiring, Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, ortonormal sistema hosil qiling.

22.82. $E=L_2[-1;1]$, $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$, $\quad x_3(t)=t^2+1$.

22.83. $E=\ell_2$, $x=(1,0,0,\ldots)$, $y=(1,1,0,0,\ldots)$, $\quad z=(1,1,1,0,0,\ldots)$.

22.84. $E=C_2[-1;1]$, $\quad x_1(t)=1$, $x_2(t)=t^3$, $x_3(t)=t^6$.

22.85. $E=R^3$, $x=(-1,0,0)$, $y=(0,-1,1)$, $z=(2,0,-1)$.

22.86. $E=\ell_2$, $\quad x=\left(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right)$, $\quad y=\left(1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right)$.

22.87. $E=L_2[0,\pi]$; $x(t)=1$, $\quad y(t)=\cos t$, $\quad z(t)=\sin t$, .

22.88. $E=R^3$; $x=(0,0,1)$, $\quad y=(0,1,1)$, $\quad z=(1,1,1)$.

22.89. $E=R^3$, $\quad x=(1,1,0)$, $y=(2,0,-1)$, $z=(0,-1,1)$.

22.90. $E=\ell_2$, $\quad x=(1,1,0,0,\ldots)$, $\quad y=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right)$.

22.91. $E=C_2[-1,1]$; $x(t)=1$, $\quad y(t)=t$, $\quad z(t)=t^2$.

22.92. E Evklid fazosida ixtiyoriy x,y,z elementlar uchun Apolloniy ayniyatini

$$\| z-x\|^2+\| z-y\|^2=\frac{1}{2}\| x-y\|^2+2\| z-\frac{x+y}{2}\|^2$$

isbotlang.

22.93. E Evklid fazosida ixtiyoriy x,y,z,t elementlar uchun Ptolemey tengsizligi $\| x-z\|\cdot\| y-t\|\le\| x-y\|\cdot\| z-t\|+\| y-z\|\cdot\| x-t\|$ ni isbotlang.

22.94. E Evklid fazosida x va y elementlar ortogonal bo'lishi uchun $\| x\|^2+\| y\|^2=\| x+y\|^2$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

22.95. E haqiqiy normalangan fazo va ixtiyoriy x,y elementlar uchun parallelogramm ayniyati $\| x+y\|^2+\| x-y\|^2=2\{\| x\|^2+\| y\|^2\}$ bajarilsin. U holda

$$p:E\times E\to R,\ p(x,y)=\frac{1}{4}\{\| x+y\|^2-\| x-y\|^2\}$$

funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.

22.96. $x_1,x_2,\dots,x_n$ lar E Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema bo'lsin. Ularning chiziqli erkli ekanligini isbotlang.

22.97. E haqiqiy Evklid fazosi. Ixtiyoriy x,y elementlar uchun $|(x,y)|\le\| x\|\cdot\| y\|$ tengsizlikni isbotlang.

22.98. E Evklid fazosidagi $x_1,x_2,\dots,x_n\in E$ sistemaning Gram determinanti deb

$$\Im(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}(x_1,x_1)(x_1,x_2)\cdots(x_1,x_n)\\(x_2,x_1)(x_2,x_2)\cdots(x_2,x_n)\\\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\(x_n,x_1)(x_n,x_2)\cdots(x_n,x_n)\end{vmatrix}$$

determinant tushuniladi. $x_1,x_2,\dots,x_n\in E$ elementlar sistemasining chiziqli erkli bo'lishi uchun, uning Gram determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

22.99. x_n va y_n lar H Hilbert fazosidagi yopiq birlik sharga tegishli va $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=1$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}\| x_n-y_n\|=0$ bo'ladi. Isbotlang.

22.100. H - Hilbert fazosi, L uning qism fazosi bo'lsin. x element L qism fazoga orthogonal bo'lishi uchun istalgan $y \in L$ da $\|x\| \le \|x-y\|$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

22.101. $C_2[-\pi, \pi]$ Evklid fazosida $\varphi_n(t) = \sin nt,\ n \in N$ sistemaning ortogonal ekanligini isbotlang. $\{\varphi_n\}$ sistemadan ortonormal sistemaga o'ting.

22.102. $L_2[-\pi, \pi]$ Hilbert fazosida $\varphi_n(t) = \exp\{int\},\ n \in Z$, sistemaning ortogonal ekanligini isbotlang. $\{\varphi_n\}$ sistemadan ortonormal sistemaga o'ting.

22.103. $C_2[-\pi, \pi]$ Evklid fazosida $\varphi(t) = \cos^2 t$ elementning

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt,\ n \in N\}$$

ortonormal sistemadagi Fur'e koeffitsiyentlarini toping.

22.104. H - Hilbert fazosi, $x_1, x_2, \dots, x_n$ undagi ixtiyoriy ortogonal sistema va $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ bo'lsin. $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$ tenglikni isbotlang.

22.105. Hilbert fazosi qat'iy normalangan fazo ekanligini isbotlang.

22.106. H Hilbert fazosidagi x_1, x_2 elementlar uchun $\mathrm{Re}(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2$ tenglik o'rinli bo'lsin. U holda $x_1 = x_2$ ekanligini isbotlang.

22.107. Har bir natural n da $M_n = \{x \in \ell_2 : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ to'plam ℓ_2 Hilbert fazosining qism fazosi bo'lishini isbotlang. M_1, M_2, M_3 qism fazolarning ortogonal to'ldiruvchilarini tavsiflang, ularning o'lchamlarini toping.

22.108. ℓ_2 Hilbert fazosida $M = \{x \in \ell_2 : x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = 0\}$ to'plamning chiziqli ko'pxillilik ekanligini hamda ℓ_2 fazoning hamma yerida zich bo'lishini isbotlang.

22.109. $L_2^-[-1, 1] = \{f \in L_2[-1, 1] : f(-t) = -f(t)\}$ toq funksiyalar to'plami $L_2[-1, 1]$ fazoning qism fazosi bo'lishini isbotlang. Uning ortogonal to'ldiruvchisini toping. $\dim L_2^-[-1, 1]$ va $\dim(L_2^-[-1, 1])^\perp$ larni hisoblang.

22.110. $L^+_{20}[-1,1]=\{f\in L_2[-1,1]: f(t)\equiv 0,\ t\in[0,1]\}$ to'plam $L_2[-1,1]$ fazoning qism fazosi bo'lishini isbotlang. Uning ortogonal to'ldiruvchisini toping.

22.3. Chiziqli funksionallar

Chiziqli funksionallar, funksionalning yadrosi, uning normasi, chiziqli funksionalning davomi haqidagi ma'lumotlarni o'quv qo'llanmaning 6-7 va 12-§ laridan topish mumkin.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyidagi funksionallarni chiziqlilikka tekshiring (22.111-22.120).

22.111. $f:C[0,1]\to C,\quad f(x)=\int_0^1 x(t)dt.$

22.112. $f:C[0,\pi]\to C,\quad f(x)=\int_0^\pi \cos t\overline{x(t)}\,dt.$

22.113. $f:C[0,1]\to C,\quad f(x)=x(0).$

22.114. $f:C^{(1)}[0,1]\to C,\quad f(x)=x'\left(\frac{1}{2}\right).$

22.115. $f:R^3\to R,\quad f(x)=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3.$

22.116. $f:C[0,1]\to C,\quad f(x)=\int_0^1 t^2x(t)dt.$

22.117. $f:L_1[0,1]\to C,\quad f(x)=\int_0^1 e^tx(t)dt.$

22.118. $f:L_2[0,1]\to C,\quad f(x)=x(0)+\int_0^1 x(t)dt.$

22.119. $f:L_2[0,\pi]\to C,\quad f(x)=\int_0^\pi \cos t\, x(t)dt.$

22.120. $f:L_2[0,\pi]\to C,\quad f(x)=\int_0^\pi \sin t\, x(t)dt.$

Quyidagi funksionallarni chiziqli chegaralanganlikka tekshiring va chegaralangan bo'lsa, normasini toping (22.121-22.130).

22.121. $f:C[-1,1]\to C,\quad f(x)=\frac{1}{3}[x(-1)+x(1)]$

22.122. $f: C[-1,1] \to C, \quad f(x) = 2[x(1) - x(0)]$

22.123. $f: C[-1,1] \to C, \quad f(x) = \frac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)), \ \varepsilon \in [-1,1]$

22.124. $f: L_2[0,1] \to C, \quad f(x) = \int_0^1 t^{-1/3} x(t)dt$

22.125. $f: \ell_1 \to C, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$

22.126. $f: \ell_2 \to C, \quad f(x) = x_1 + x_3 + x_5 + x_7$

22.127. $f: \ell_2 \to C, \quad f(x) = x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{200}$

22.128. $f: \ell_{3/2} \to C, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k/3}} \cdot x_k$

22.129. $f: L_2[-1,1] \to C, \quad f(x) = 2\int_{-1}^{0} t^{1/3} x(t)dt + \int_0^1 t^{-1/3} x(t)dt$

22.130. $f: L_2[0,1] \to C, \quad f(x) = \int_0^1 t^{-1/3} x(t)dt$.

Laboratoriya ishlati uchun topshiriqlar. Quyidagi funksionallarni uzluksizlikka tekshiring.

22.131. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots.) \in \ell_2$.

22.132. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$.

22.133. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{k}) x_k, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$.

22.134. $f(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{49}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots.) \in m$.

22.135. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$.

22.136. $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$.

22.137. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k+1} x_k, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$.

22.138. $f(x) = \lim_{n\to\infty} 7x_n, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$.

22.139. $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k^2}, \quad x=(x_1,x_2,\dots)\in \ell_2$.

22.140. $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{k^2})x_k, \quad x=(x_1,x_2,\dots)\in \ell_1$.

22.141. $C_1[0,1]$ fazoning hamma yerida aniqlangan chiziqli, ammo uzluksiz bo'lmagan funksionalga misol keltiring.

22.142. $C^{(1)}[0,1]$ - uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosi. $L=\{x\in C^{(1)}[0,1]: x(0)=x(1)=0\}$ uning qism fazosi va $u,v,w\in C[0;1]$ bo'lsin. Quyidagi funksionallarni qaraymiz:

$$f(x)=\int_0^1 u(t)x'(t)dt, \qquad g(x)=\int_0^1[v(t)x(t)+w(t)x'(t)]dt.$$

a) f va g lar $C^{(1)}[0,1]$ fazoda chiziqli uzluksiz ekanligini isbotlang.

b) agar barcha $x\in L$ lar uchun $f(x)=0$ bo'lsa, $u(t)\equiv const$ bo'ladi. Isbotlang.

c) agar barcha $x\in L$ lar uchun $g(x)=0$ bo'lsa, $w\in C^{(1)}[0,1]$ va $w'(t)=v(t)$ bo'ladi. Isbotlang.

22.143. $L=\{x\in R^n: x_1+x_2+\dots+x_n=0\}$ to'plam R^n fazoning qism fazosi bo'ladi. Qism fazoning koo'lchamini toping. Shunday $f\in(R^n)^*$ topingki, $L=Ker\,f$ bo'lsin.

22.144. $L=\{x\in C[-1,1]: \int_{-1}^{0}x(t)dt=\int_0^1 x(t)dt\}$ to'plam $C[-1;1]$ fazoning qism fazosi bo'ladi. Isbotlang. Shunday $f\in C^*[-1;1]$ topingki, $L=Ker\,f$ bo'lsin.

22.145. Agar $\dim X=n$ bo'lsa, u holda $\dim X^*=n$ bo'lishini isbotlang.

22.146. Agar $\dim X=\infty$ bo'lsa, u holda $\dim X^*=\infty$ bo'lishini isbotlang.

22.147. $f:C[-1,1]\to C$, $f(x)=x(0)$ chiziqli uzluksiz funksionalni

$$f(x)=\int_{-1}^{1}x(t)dg(t)$$

shaklda tasvirlang, ya'ni g o'zgarishi chegaralangan funksiyani toping.

22.148. $f: C[-1,1]\to C,\quad f(x)=\dfrac{x(-1)+x(1)}{2}+\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$

chiziqli uzluksiz funksionalni

$$f(x)=\int\limits_{-1}^{1} x(t)\,dg(t)$$

shaklda tasvirlang, ya'ni g o'zgarishi chegaralangan funksiyani toping.

22.149. R^2 fazoning $L=\{x\in R^2: 2x_1-x_2=0\}$ qism fazosida $f(x)=x_1$ chiziqli uzluksiz funksional berilgan. Bu funksionalni normasini saqlagan holda davom ettiring. Bu davom yagonami?

22.150. $C[0;1]$ fazoning $L=\{\lambda\cdot t\}$ qism fazosida f chiziqli uzluksiz funksionalni $f(x)=\lambda,\ x(t)=\lambda\cdot t$ tenglik yordamida aniqlaymiz. Bu funksionalni normasini saqlagan holda davom ettiring. Bu davom yagonami?

Chiziqli normalangan fazolarga qo'shma fazolarni toping.

22.151. ℓ_2 fazoga qo'shma fazoni toping.

22.152. c_0 fazoga qo'shma fazoni toping.

22.153. $\ell_p,\ \ p>1$ fazoga qo'shma fazoni toping.

22.154. $L_p[a,b], p>1$ fazoga qo'shma fazoni toping.

22.155. c- yaqinlashuvchi ketma-ketliklar fazosi, unga qo'shma fazoni toping.

22.156. m- ga qo'shma fazoni toping.

22.157. $C[a,b]$ fazoga qo'shma fazoni toping.

22.158. R^n_∞ fazoga qo'shma fazoni toping.

22.159. $L_2[a,b]$ fazoga qo'shma fazoni toping.

22.160. R^n_1 fazoga qo'shma fazoni toping.

23-§. Chiziqli operatorlar

Bu mavzuda normalangan fazolarda chegaralangan chiziqli operatorlar, ularning normasini topish, chiziqli operatorlarning teskarisi mavjud yoki mavjud emasligini tekshirish, agar teskari operator mavjud bo'lsa, uni aniqlash, chiziqli operatorlarga qo'shma operatorlarni aniqlash (Banax fazolarida Banax bo'yicha qo'shma operatorni, Hilbert fazolarda Hilbert qo'shmasini), chiziqli operatorlarning xos qiymatlari, xos vektorlari, spektri va rezolventasini aniqlashga doir mashqlarni bajarishga mo'ljallangan.

Mavzuning birinchi bandi operatorlarning chiziqli chegaralanganligini tekshirib, ularning normasini topishga va chiziqli operatorning aniqlanish sohasini ko'rsatib, uning chegaralan-maganligini yoki uzluksiz emasligini ko'rsatishga hamda chiziqli operatorlar ketma-ketligining yaqinlashishlarini tekshirishga doir mashqlarni bajarishga oid. Ikkinchi bandida berilgan chiziqli operatorga teskari operator mavjud ekanligini ko'rsatib, uning teskarisini topishga doir mashqlar keltirilgan. Bundan tashqari bu bandda teskari operatorning mavjud emasligini ko'rsatishga doir mashqlar ham keltirilgan. Uchinchi bandda esa, berilgan chiziqli operatorga mos Banax yoki Hilbert qo'shmasini topishga doir mashqlar keltirilgan. So'nggi to'rtinchi bandda esa chiziqli operatorning xos qiymatlari, xos vektorlari, spektri va rezolventasini aniqlashga doir mashqlar jamlangan.

Quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: X va Y orqali normalangan fazolar; X^* va Y^* orqali esa, mos ravishda X va Y larga qo'shma fazolar; $L(X,Y)$ bilan X ni Y ga akslantiruvchi barcha chegaralangan chiziqli operatorlar fazosi; H sifatida Hilbert fazosi belgilangan. Bundan tashqari, agar $A \in L(X,Y)$ bo'lsa, $A' \in L(Y^*, X^*)$ orqali A operatorning Banax qo'shmasi, agar $A \in L(H) \equiv L(H,H)$ bo'lsa, $A^* \in L(H)$ orqali esa, A operatorning Hilbert qo'shmasi belgilanadi.

Chiziqli operator ta'rifi, chiziqli operatorning uzluksizligi, chegaralanganligi tushunchalarini, chegaralangan (uzluksiz) chiziqli operatorlarning xossalarini o'quv-qo'llanmaning III bobidan foydalanib o'rganish mumkin.

23.1. Chiziqli uzluksiz operatorlar

23.1. Quyidagi operatorning chiziqli chegaralanganligini ko'rsatib, normasini toping:

$$A: C^{(2)}[0,1] \to C[0,1], \qquad (Ax)(t) = x''(t).$$

Yechish. **a)** Operatorning aniqlanish sohasi $D(A) = C^{(2)}[0,1]$. Operator chiziqli, chunki ixtiyoriy $x, y \in C^{(2)}[0,1]$ va α, β sonlar uchun

$$\begin{aligned}[A(\alpha x + \beta y)](t) &= (\alpha x + \beta y)''(t) = \alpha x''(t) + \beta y''(t) = \\ &= \alpha (Ax)(t) + \beta (Ay)(t) = (\alpha Ax + \beta Ay)(t).\end{aligned}$$

b) Operatorning chegaralanganligini tekshiramiz:

$$\|Ax\| = \max_{0 \le t \le 1} |(Ax)(t)| = \max_{0 \le t \le 1} |x''(t)| \le \|x\|,$$

ya'ni ixtiyoriy $x \in C^{(2)}[0,1]$ uchun

$$\|Ax\| \le \|x\|. \tag{23.1}$$

A operator normasini

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{23.2}$$

formula yordamida topamiz. Olingan (23.1) tengsizlikdan $\|A\| \le 1$ ni olamiz. Quyidagi funksiyalar ketma-ketligini qaraymiz:

$$x_n(t) = e^{-nt} \in C^{(2)}[0,1].$$

U holda

$$\|x_n\| = \max_{0 \le t \le 1} |e^{-nt}| + \max_{0 \le t \le 1} |-ne^{-nt}| + \max_{0 \le t \le 1} |n^2 e^{-nt}| = 1 + n + n^2,$$

$$\|Ax_n\| = \max_{0 \le t \le 1} |n^2 e^{-nt}| = n^2.$$

(23.2) ga ko'ra

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup_{n}\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \sup_{n}\frac{n^2}{1+n+n^2} = 1.$$

Olingan $\|A\| \leq 1$ va $\|A\| \geq 1$ tengsizliklardan $\|A\| = 1$ ekanligi kelib chiqadi.

23.2. Quyidagi operatorni chiziqli chegaralanganligini ko'rsatib, normasini toping:

$$A: L_5[-1,1] \to L_3[-1,1], \quad (Ax)(t) = t^4 x(t^3)$$

Yechish. Dastlab ixtiyoriy $x \in L_5[-1,1]$ uchun $Ax \in L_3[-1,1]$ ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $t^3 = r$ almashtirishdan foydalanamiz:

$$\|Ax\|_3 = \left(\int_{-1}^{1}\left|t^4 x(t^3)\right|^3 dt\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} r^{\frac{10}{3}}|x(r)|^3 dt\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Oxirgi integralni baholashda quyidagi umumlashgan Gyolder tengsizligidan foydalanamiz:

$$\| x\cdot y \|_s \leq \| x \|_k \cdot \| y \|_r,$$

bu yerda $x \in L_k[a,b]$, $y \in L_r[a,b]$, $\frac{1}{k}+\frac{1}{r}=\frac{1}{s}$.

Biz qarayotgan holda $k=\frac{15}{2}$, $r=5$, $s=3$. Shuning uchun

$$\| Ax \|_3 = \left(\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{3}} r^{\frac{10}{9}} x(r)\right|^3 dr\right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{3}} r^{\frac{10}{9}}\right|^{\frac{15}{2}} dr\right)^{\frac{2}{15}}\left(\int_{-1}^{1}|x(r)|^5 dr\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{2}{15}}\cdot\| x \|_5 .$$

Demak, ixtiyoriy $x \in L_5[-1,1]$ uchun

$$\| Ax \|_3 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{2}{15}}\cdot\| x \|_5 \qquad (23.3)$$

tengsizlik o'rinli. Shunday qilib, har bir $x \in L_5[-1,1]$ uchun $Ax \in L_3[-1,1]$. Demak, $D(A) = L_5[-1,1]$. Endi A operatorning chiziqli ekanligini ko'rsatamiz:

$$[A(\alpha x+\beta y)](t)=t^4(\alpha x+\beta y)(t^3)=\alpha t^4 x(t^3)+\beta t^4 y(t^3)=$$
$$=\alpha(Ax)(t)+\beta(Ay)(t)=[\alpha Ax+\beta Ay](t),\ \forall t\in[-1,1],$$

ya'ni $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ax,\quad \forall x,y\in L_5[-1,1]$ va $\forall \alpha,\beta\in C$. Operatorning chegaralanganligi (23.3) dan kelib chiqadi. Uning normasini topish uchun $x_0(t)=t^{\frac{5}{3}}\in L_5[-1,1]$ elementni qaraymiz:

$$\|x_0\|_5=\left(\int_{-1}^{1}|t|^{\frac{25}{3}}dt\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{1}{5}},\quad (Ax_0)(t)=t^9,$$

$$\|Ax_0\|=\left(\int_{-1}^{1}|t|^{27}dt\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{14}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\|Ax_0\|_3}{\|x_0\|_5}=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(3/14)^{\frac{1}{3}}}{(3/14)^{\frac{1}{5}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{2}{15}}. \qquad (23.4)$$

(23.3) va (23.4) dan $\|A\|=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\cdot\left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{2}{15}}$ tenglikni hosil qilamiz.

23.3. $A:C[0,1]\to C[0,1],\quad (Ax)(t)=\frac{x(t)}{t}$

operatorning chegaralanmagan ekanligini ko'rsating.

Yechish. Bu operatorning aniqlanish sohasi

$$D(A)=\left\{x\in C[0,1]:\frac{x(t)}{t}\in C[0,1]\right\}$$

to'plamdan iborat. $D(A)\neq C[0,1]$, masalan $x(t)\equiv 1\notin D(A)$. Quyidagi ketma-ketlikni qaraymiz: $x_n(t)=\sin nt\in D(A)$. U holda

$$\|x_n\|=\max_{0\le t\le 1}|\sin nt|=1,\qquad \|Ax_n\|=\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{\sin nt}{t}\right|=n\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{\sin nt}{nt}\right|=n$$

Bulardan $\|Ax_n\|\ge n\|x_n\|$ tengsizlikka kelamiz. Bu esa A operatorning chegaralanmagan ekanligini ko'rsatadi.

23.4. Shunday $A,B\in L(X)$ operatorlarga misol keltiringki, $AB\neq BA$ bo'lsin.

23.5. $A,B\in L(X,Y)$ noldan farqli operatorlar bo'lib, $R(A)\cap R(B)=0$ bo'lsa, A va B larning chiziqli erkli ekanligini isbotlang.

23.6. $A,B\in L(X,Y)$ va $R(A)=R(B)$, $Ker\,A=Ker\,B$ bo'lishidan $A=B$ ekanligi kelib chiqadimi?

23.7. X,Y lar normalangan fazolar, $U\subset X$ ochiq to'plam, $V\subset X$ yopiq to'plam hamda $A\in L(X,Y)$ bo'lsa, $A(U)$ ochiq, $A(V)$ esa yopiq to'plam bo'ladimi?

23.8. $p:L(X,Y)\to R,\quad p(A)=\|A\|$ funksional norma shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.

23.9. $p:L(X,Y)\to R,\quad p(A)=\|A\|$ akslantirish uzluksiz ekanligini isbotlang.

23.10. X chiziqli normalangan fazo, X' uning qism fazosi bo'lsin. $M=\{A\in L(X):Ker\,A=X'\}$ to'plam $L(X)$ ning qism fazosi bo'ladimi?

23.11. X chiziqli normalangan fazo, X' uning qism fazosi bo'lsin. $M=\{A\in L(X):Ker\,A\supset X'\}$ to'plam $L(X)$ ning qism fazosi bo'ladimi?

23.12. X chiziqli normalangan fazo, $A\in L(X)$ ixtiyoriy element, $N_k=Ker\,A^k,\quad k=0,1,2,\ldots$ bo'lsin.

a) $N_0\subset N_1\subset\cdots\subset N_k\subset N_{k+1}\subset\cdots$ munosablar o'rinli. Isbotlang.

b) faraz qilaylik m soni $N_m=N_{m+1}$ tenglik o'rinli bo'ladigan eng kichik natural son bo'lsin. U holda barcha p natural sonlar uchun $N_{m+p}=N_m$ tenglikning bajarilishini isbotlang.

23.13. X chiziqli normalangan fazo, $A\in L(X)$ tayinlangan element bo'lsin. $AB=0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $B\in L(X)$ lar to'plami $L(X)$ ning qism fazosi bo'ladimi?

23.14. X chiziqli normalangan fazo, $A \in L(X)$ tayinlangan element bo'lsin. $AB = BA$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $B \in L(X)$ lar to'plami $L(X)$ ning qism fazosi bo'ladimi?

23.15. H Hilbert fazosi, $A_n \in L(H), n \in N$ va har bir $x, y \in H$ uchun $\sup_{n \in N} |(A_n x, y)| < \infty$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda $\sup_{n \in N} \| A_n \| < \infty$ tengsizlik ham o'rinli. Isbotlang.

23.16. X, Y lar Banax fazolari, $A_n \in L(X, Y)$ $(n \in N)$ va har bir $x \in X$ da $A_n x$ ketma-ketlik fundamental bo'lsin. U holda shunday $A \in L(X, Y)$ operator mavjud bo'lib $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli ma'noda yaqinlashadi. Isbotlang.

23.17. $C[-\pi, \pi]$ Banax fazosining $M = \{x \in C[-\pi, \pi]: x(-\pi) = x(\pi)\}$ qism fazosini qaraymiz va har bir $x \in M$ uchun

$$(A_n x)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k(t - s) x(s) ds.$$

a) $(A_n x)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[(2n+1)(s-t)]}{\sin[(s-t)/2]} x(s) ds$ tenglikni isbotlang.

b) $A_n \in L(M)$ va

$$\| A_n \| = \frac{1}{2\pi} \max_{t \in [-\pi, \pi]} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin[(2n+1)(s-t)]}{\sin[(s-t)/2]} \right| ds$$

tenglikni isbotlang.

c) $L \subset C[-\pi, \pi]$ - trigonometrik ko'phadlardan iborat qism fazo bo'lsin. L da A_n operatorlar ketma-ketligi birlik operatorga kuchli ma'noda yaqinlashadi. Isbotlang.

23.18. $C[0, 1]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A, A_n, B_n operatorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Ax)(t) = \int_0^1 e^{st} x(s) ds, \quad (A_n x)(t) = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(st)^k}{k!} \right] x(s) ds, \quad (B_n x)(t) = \int_{1/n}^{1-1/n} e^{st} x(s) ds, n \in N.$$

A_n, B_n operatorlar A operatorga yaqinlashadimi? Yaqinlashish xarakterini (tekis, kuchli, kuchsiz) aniqlang.

23.19. $C[0,1]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A_n $(n \in N)$ operatorlarni

$$(A_n x)(t) = x(t^{1+1/n})$$

tenglik yordamida aniqlaymiz:

a) $A_n \in L(C[0,1])$ ekanligini isbotlang;

b) A_n operatorlar ketma-ketligi birlik operatorga kuchli ma'noda yaqinlashadi. Isbotlang.

c) A_n operatorlar ketma-ketligi birlik operatorga tekis yaqinlashadimi?

23.20. X, Y lar Banax fazolari, $x_n, x \in X$, $x_n \to x$, $A_n, A \in L(X,Y)$, $A_n \to A$ bo'lsin. U holda $A_n x_n \to Ax$ munosabatni isbotlang.

23.21. X, Y, Z lar Banax fazolari, $A_n, A \in L(X,Y)$, $B_n, B \in L(Y,Z)$ bo'lib A_n operatorlar ketma-ketligi A ga B_n operatorlar ketma-ketligi B ga kuchli ma'noda yaqinlashsin. U holda $B_n \cdot A_n$ operatorlar ketma-ketligi $B \cdot A$ operatorga kuchli ma'noda yaqinlashadi. Isbotlang.

23.22. X, Y, Z lar Banax fazolari, $A_n, A \in L(X,Y)$, $B_n, B \in L(Y,Z)$ bo'lib A_n operatorlar ketma-ketligi A ga B_n operatorlar ketma-ketligi B ga tekis (norma bo'yicha) yaqinlashsin. U holda $B_n \cdot A_n$ operatorlar ketma-ketligi $L(X,Z)$ fazoda $B \cdot A$ operatorga yaqinlashadi. Isbotlang.

23.23. Shunday X normalangan fazoga va $A, B \in L(X)$ operatorlarga misol keltiringki, $\|A \cdot B\| < \|A\| \cdot \|B\|$ bo'lsin.

23.24. X normalangan fazo va $A \in L(X)$, $B : X \to X$ chegaralanmagan operator bo'lsin, uning aniqlanish sohasi $D(B)$ X ning hamma yerida zich bo'lsin. $A \cdot B$ va $B \cdot A$ larning chegaralangan, chegaralanmagan hollariga misollar keltiring.

23.25. H Hilbert fazosi, $L \subset H$ uning qism fazosi bo'lsin. $P : H \to H$, $Px = u$, $x = u + v$, $u \in L$, $v \in L^{\perp}$ operator L ga ortogonal proyeksiyalash operatori deyiladi. P ning chiziqli chegaralangan ekanligini ko'psatib, normasini toping.

23.26. $L_2[-1,1]$ Hilbert fazosida A,B operatorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Ax)(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)], \qquad (Bx)(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)].$$

a) $R(A)$, $R(B)$ to'plamlarni tavsiflang. Ular $L_2[-1,1]$ ning qism fazolari bo'ladimi?

b) A,B operatorlarning chiziqli chegaralangan ekanligini ko'psatib, normalarini toping.

c) A^2, B^2 operatorlarni toping. A,B operatorlar ortogonal proyeksiyalash operatorlari bo'ladimi?

d) $A\cdot B$ va $B\cdot A$ operatorlarni toping.

23.27. H Hilbert fazosi, $L_1,L_2\subset H$ uning qism fazolari bo'lsin. P_1, P_2 lar mos ravishda L_1,L_2 larga ortogonal proyeksiyalash operatorlari bo'lsa, $\|P_1-P_2\|\leq 1$ ekanligini isbotlang.

23.28. Agar $A\cdot B=0$ bo'lsa, A va B operatorlar ortogonal deyiladi. H Hilbert fazosi, $L_1,L_2\subset H$ uning qism fazolari, P_1, P_2 lar mos ravishda L_1,L_2 larga ortogonal proyeksiyalash operatorlari bo'lsin. $P_1\cdot P_2=0$ bo'lishi uchun L_1 va L_2 qism fazolar o'zaro ortogonal bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

23.29. H Hilbert fazosi, $L_1,L_2\subset H$ uning qism fazolari, P_1, P_2 lar mos ravishda L_1,L_2 larga ortogonal proyeksiyalash operatorlari bo'lsin. P_1+P_2 proyeksiyalash operatori bo'lishi uchun L_1 va L_2 qism fazolar o'zaro ortogonal bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

23.30. H Hilbert fazosi, $L_1,L_2\subset H$ uning qism fazolari, P_1, P_2 lar mos ravishda L_1,L_2 larga ortogonal proyeksiyalash operatorlari bo'lsin. $P_1\cdot P_2$ proyeksiyalash operatori bo'lishi uchun $P_1\cdot P_2=P_2\cdot P_1$ shartning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

.3.31. X chiziqli normalangan fazo, $A:X\to X$ chiziqli operator. A chegaralanmagan bo'lishi uchun $D(A)$ da $\|x_n\|=1$ va $\|Ax_n\|\to\infty$ shartlarni qanoatlantiruvchi ketma-ketlikning mavjud bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyidagi operatorlarning chiziqli, chegaralangan ekanligini ko'rsating, ularning ı ormalarini toping.

23.32. $A:C[-2,2]\to C[-2,2]$, $(Ax)(t)=te^t x(t)$.

23.33. $A:L_2[-1,1]\to L_2[-1,1]$, $(Ax)(t)=(t^2-t)x(t)$.

23.34. $A:L_3[-1,1]\to L_3[-1,1]$, $(Ax)(t)=\sqrt[3]{1-t}\,x(t)$.

23.35. $A:L_5[0,2]\to L_5[0,2]$, $(Ax)(t)=(t^3-2t+1)\,x(t)$.

23.36. $A:L_5[0,2]\to L_5[0,2]$, $(Ax)(t)=(t^3+t^2)x(t)$.

23.37. $A:\ell_3\to\ell_3$, $Ax=((1+1)x_1,(1+1/2)x_2,\dots,(1+1/n)x_n,\dots)$.

23.38. $A:\ell_{5/2}\to\ell_{5/2}$, $Ax=(\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{\sqrt{2}}x_2,\dots,\frac{1}{\sqrt[n]{2}}x_n,\dots)$.

23.39. $A:\ell_5\to\ell_5$, $Ax=(\frac{1}{5}x_1,\frac{1}{5^2}x_2,\dots,\frac{1}{5^n}x_n,\dots)$.

23.40. $A:\ell_4\to\ell_4$, $Ax=(Sin1\cdot x_1,Sin2\cdot x_2,\dots,Sin\,n\cdot x_n,\dots)$.

23.41. $A:\ell_{5/4}\to\ell_{5/4}$, $Ax=\left(0,\frac{1}{2}x_2,\frac{2}{3}x_3,\dots,(1-\frac{1}{n})x_n,\dots\right)$.

23.42. $A:\ell_2\to\ell_2$, $Ax=\left(2x_1,\frac{3}{2}x_2,\dots,\frac{n+1}{n}x_n,\dots\right)$.

23.43. $A:\ell_1\to\ell_1$, $Ax=\left(2x_1,(1+\frac{1}{2})^2x_2,\dots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_n,\dots\right)$.

23.44. $A:\ell_2\to\ell_2$, $Ax=(x_1,\frac{1}{2}x_2,\frac{1}{3}x_3,\dots,\frac{1}{n}x_n,\dots)$.

23.45. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $(Ax)(t)=t^3x(t^{1/3})$.

23.46. $A:L_3[-1,1]\to L_3[-1,1]$, $(Ax)(t)=t\,x\left(\sqrt[3]{t}\right)$.

23.47. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2 x(t^3)$.

23.48. $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$, $(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} (ts + t^2 s^2) x(s) ds$.

23.49. $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} (t+s)^2 x(s) ds$.

23.50. $A: C^{(1)}[0,1 \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x'(t) + t x(t)$.

23.51. $C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2 x(t) + t^3 x(t)$.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. X, Y – normalangan fazolar va $A: X \to Y$. Quyidagi savollarga javob yozing: 1) A operatorning aniqlanish sohasi $D(A) = \{x \in X : Ax \in Y\}$ butun X fazoga tengmi? 2) Berilgan operator chiziqli uzluksizmi (chegaralanganmi)?

23.52. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x'(t)$.

23.53. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = \dfrac{x(t)}{t^2}$.

23.54. $A: L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$, $(Ax)(t) = t^2 x(t)$.

23.55. $A: L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$, $(Ax)(t) = \dfrac{x(t)}{t-2}$.

23.56. $A: L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, $(Ax)(t) = \dfrac{x(t)}{t}$.

23.57. $A: \ell_3 \to \ell_3$, $Ax = (x_1, \sqrt{2}\, x_2, \ldots, \sqrt{n}\, x_n, \ldots)$.

23.58. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (x_1, \ell n 2 \cdot x_2, \ldots, \ell n n \cdot x_n, \ldots)$

23.59. $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$, $(Ax)(t) = x''(t)$.

23.60. $A: \ell_2 \to \ell_1$, $Ax = (x_1, \dfrac{x_2}{\sqrt{2}}, \ldots, \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}, \ldots)$.

23.61. $A: c_0 \to c_0$, $Ax = (x_1, 2x_2, \ldots, n x_n, \ldots)$.

23.62. $A: L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)$, $(Ax)(t) = (t^2 + t) x(t)$.

23.63. $A: L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$, $(Ax)(t) = \int_0^{\infty} (ts+1) x(s) ds$.

23.64. $A:\ell_3 \to \ell_1$, $\quad Ax=(x_1, 2x_2, x_3, 2x_4, \ldots, x_{2n-1}, 2x_{2n}, \ldots)$.

23.65. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $\quad (Ax)(t) = x'(t) + 2x(t)$.

23.66. $A:\ell_1 \to m$, $\quad Ax = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ldots)$.

23.67. $A:\ell_2 \to \ell_2$, $\quad Ax = \left(ctg1 \cdot x_1, ctg\frac{1}{2} \cdot x_2, \ldots, ctg\frac{1}{n} \cdot x_n, \ldots \right)$.

23.68. $A:\ell_2 \to \ell_1$, $\quad Ax = (x_1, 2x_2, \frac{3}{2}x_3, \ldots, \frac{n}{n-1}x_n, \ldots)$.

23.69. $A: L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)$, $\quad (Ax)(t) = |t|\, x(t)$.

23.70. $A: L_2[0,1] \to L_1[0,1]$, $\quad (Ax)(t) = x(t^3)$.

23.71. $A: L_1[0,\infty) \to L_1[0,\infty)$, $\quad (Ax)(t) = t\, x(\sqrt{t})$.

23.2. Teskari operatorlar

23.72. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $\quad (Ax)(s) = \int_0^1 e^{s+t} x(t)dt + x(s)$ operator berilgan. Operator teskarilanuvchanmi? Agar teskarilanuvchan bo'lsa, teskari operator A^{-1} ni toping.

Yechish. Dastlab berilgan operatorning teskarilanuvchanligini tekshiramiz. Ma'lumki, A operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun $Ax=0$ tenglama faqat nol yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli. $Ax=0$ tenglamani yechamiz, ya'ni

$$\int_0^1 e^{s+t} x(t)dt + x(s) = 0, \quad \text{yoki} \quad x(s) = -c(x)e^s, \tag{23.5}$$

bu yerda

$$c(x) = \int_0^1 e^t x(t)dt. \tag{23.6}$$

Endi (23.5) ni (23.6) ga qo'ysak,

$$c(x) = -c(x)\int_0^1 e^{2t}dt = -\frac{1}{2}c(x)(e^2-1) \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{2}(e^2+1)c(x) = 0$$

tenglikga ega bo'lamiz. Bundan $c(x)=0$. (23.5) dan esa $x(s) \equiv 0$

ekanligiga ega bo'lamiz. Demak, $Ax=0$ tenglama faqat $x=0$ yechimga ega, shuning uchun A teskarilanuvchan operator. A^{-1} ni topish uchun ixtiyoriy $y\in C[0,1]$ element uchun $Ax=y$ tenglamani yechamiz, ya'ni

$$\int_0^1 e^{s+t}x(t)dt+x(s)=y(s) \quad \text{yoki} \quad x(s)=y(s)-c(x)e^s, \tag{23.7}$$

bu yerda $c(x)$ (23.6) ko'rinishga ega. $x(s)$ uchun olingan (23.7) ifodani (23.6) ga qo'ysak,

$$c(x)=\int_0^1 e^t y(t)dt-c(x)\int_0^1 e^{2t}dt=\int_0^1 e^t y(t)dt-\frac{1}{2}c(x)(e^2-1).$$

Bundan

$$c(x)=\frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^t y(t)dt \tag{23.8}$$

ni olamiz. $c(x)$ uchun olingan (23.8) ifodani (23.7) ga qo'ysak, $Ax=y$ tenglama yechimi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$x(s)=y(s)-\frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{s+t}y(t)dt.$$

Demak, har bir $y\in C[0,1]$ elementga $Ax=y$ tenglama yechimini mos qo'yuvchi A^{-1} operator quyidagi formula yordamida aniqlanar ekan:

$$A^{-1}:C[0,1]\to C[0,1],\ (A^{-1}x)(s)=x(s)-\frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{s+t}x(t)dt.$$

23.73. Quyidagi operatorni teskarilanuvchan emasligini ko'rsating:

$$A:C[0,1]\to C[0,1],\quad (Ax)(t)=x(0)\,t+x(1)\,t^2. \tag{23.9}$$

Yechish: Ma'lumki, A chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun $Ax=0$ tenglama faqat $x=0$ yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli. (23.9) formula bilan berilgan operator uchun $x_0(t)=t(t-1)\neq 0$ funksiyani olsak, $x_0(0)=x_0(1)=0$ bo'lgani uchun

$$(Ax_0)(t)=x_0(0)t+x_0(1)t^2=0,\ \forall t\in[0,1],$$

Demak, $Ax=0$ tenglama nolmas yechimga ega bo'lgani uchun A operator teskarilanuvchan emas.

23.74. Quyidagi operatorning teskarilanuvchanligini ko'rsatib, unga teskari operatorni toping:

$$A: R^3 \to R^3, \quad Ax = (2x_1 + x_3, x_2 + 2x_3, x_1 + x_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3.$$

Yechish. Bu operator uchun $Ax = 0$ tenglama

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad (23.10)$$

chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat. Bundan $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ga ega bo'lamiz. (23.10) sistemaning yechimi yagona bo'ladi, ya'ni $Ax = 0$ tenglama faqat $x = 0$ yechimga ega. Demak, A teskarilanuvchan operator. Endi $\forall y \in R^3$ uchun $Ax = y$ tenglama yoki

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = y_1 \\ x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_1 + x_3 = y_3 \end{cases} \qquad (23.11)$$

tenglamalar sistemasini yechamiz. (23.11) sistemadan quyidagi sistemaga o'tamiz:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_3 \\ x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_3 = -y_1 + 2y_3 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 4y_3 \\ x_3 = -y_1 + 2y_3, \end{cases}$$

bu yerda (x_1, x_2, x_3) va (y_1, y_2, y_3) lar o'rinlarini almashtirsak, $(y_1, y_2, y_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 4x_3, -x_1 + 2x_3)$. Bundan A^{-1} operator quyidagi formula bilan aniqlanishi kelib chiqadi:

$A^{-1}x = A^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 4x_3, -x_1 + 2x_3).$

23.75. X, Y chiziqli normalangan fazolar, $A: X \to Y$ teskarilanuvchan chiziqli operator bo'lsin. U holda $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D(A)$ va $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ elementlar sistemasi bir vaqtda yo chiziqli bog'langan, yo chiziqli bog'lanmagan bo'ladi. Isbotlang.

23.76. X chiziqli normalangan fazo, $A: X \to X$ chiziqli operator bo'lsin. Agar biror $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R^n$ uchun $I + \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot A^2 + \cdots + + \lambda_n \cdot A^n = 0$ shart bajarilsa A ga teskari operator mavjudligini isbotlang.

23.77. X chiziqli normalangan fazo, $A, B: X \to X$ chiziqli operatorlar bo'lib, $D(A) = D(B) = X$, hamda $(AB)^{-1}, (BA)^{-1}$ operatorlar mavjud bo'lsin. A va B larga teskari operatorlar mavjudmi?

23.78. X chiziqli normalangan fazo, $A: X \to X$ chiziqli operator va $D(A)$ da $\| x_n \| = 1$ va $\lim\limits_{n \to \infty} \| A x_n \| = 0$ shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketlik mavjud bo'lsin. U holda A ga chegaralangan teskari operator mavjud emasligini isbotlang.

23.79. $C^{(1)}[0,1]$ Banax fazosi, $L = \{x \in C^{(1)}[0,1] : x(0) = 0\}$ uning qism fazosi va $A: L \to C[0,1]$ chiziqli operatorni

$$(Ax)(t) = dx/dt + u(t)x(t), \quad u \in C[0;1]$$

tenglik bilan aniqlaymiz. A ga chegaralangan teskari operator mavjudligini isbotlang.

23.80. $A: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = dx/dt$ chiziqli operatorga o'ng teskari operator mavjud, chap teskari operator mavjud emasligini isbotlang.

23.81. $A: C[0,1] \to C[0,1]$ operatorni

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$$

tenglik bilan aniqlaymiz. Uning qiymatlar sohasi $R(A)$ qanday shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalardan iborat. $R(A)$ da A ga teskari operator mavjudmi? Agar mavjud bo'lsa, chegaralanganmi?

23.82. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds + x(t)$ operatorni qaraymiz:

a) $Ker A = 0$ tenglikni isbotlang.

b) A ga chegaralangan teskari operator mavjudligini isbotlang. A^{-1} ni toping.

23.83. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $\quad (Ax)(t) = x(t) + \int\limits_0^1 e^{s+t} x(s)ds$

operatorga teskari operator mavjudligini ko'rsating va uni toping.

23.84. $A: C[0,1] \to C[0,1]$ operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Ax)(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t),\ D(A) = \{x \in C^{(2)}[0;1] : x(0) = x'(0) = 0\}.$$

a) A chegaralanmagan operator. Isbotlang.

b) A ga chegaralangan teskari operator mavjudligini isbotlang va uni toping.

23.85. H Hilbert fazo, $A \in L(H)$, $R(A) = H$ va A ga chegaralangan o'ng teskari A_r^{-1} operator mavjud bo'lsin. U holda A ga chegaralangan teskari operator mavjud. Isbotlang.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Berilgan operatorning teskarilanuvchan ekanligini ko'rsating va teskari operatorni toping.

23.86. $A: R^3 \to R^3$, $\quad Ax = (x_1 + x_3, x_1 + x_2, x_2 + x_3)$.

23.87. $A: R^3 \to R^3$, $\quad Ax = (x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$.

23.88. $A: \ell_2 \to \ell_2$, $\quad Ax = (x_1, x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_4, x_5, \ldots)$.

23.89. $A: \ell_2 \to \ell_1$, $\quad Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots\right)$.

23.90. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $\quad Ax = (x_1, x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_3 + x_4 + x_5, x_6, x_7, \ldots)$.

23.91. $A: R^3 \to R^3$, $\quad Ax = (x_1 + 2x_3, 2x_2, 2x_1 - x_3)$.

23.92. $A: R^3 \to R^3$, $\quad Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - 2x_2, x_3)$.

23.93. $A: C_0^{(1)}[0,1] \to C^{(1)}[0,1]$, $\quad (Ax)(t) = x'(t)$.

23.94. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $\quad (Ax)(t) = \int\limits_0^t sx(s)ds$.

23.95. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $\quad (Ax)(t) = (t+2)x(t) + \int\limits_0^1 sx(s)ds$.

23.96. $A: m \to \ell_2$, $\quad Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots)$.

23.97. $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=(1+t)x(t)+\int\limits_0^1 tsx(s)ds.$

23.98. $A:C[0,\pi]\to C[0,\pi]$, $(Ax)(t)=(\sin t+1)x(t).$

23.99. $A:C[0,2]\to C[0,2]$, $(Ax)(t)=(t+1)x(t)+x(1)t+x(0).$

23.100. $A:R^3\to R^3$, $Ax=(x_1-2x_2+x_3,2x_1+x_3,x_1+x_2+x_3).$

23.101. $A:\ell_2\to\ell_2$, $Ax=(x_1,\frac{1}{2}x_2,\frac{2}{3}x_3,....,\frac{n-1}{n}x_n,.....).$

23.102. $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=t^2x(t)+x(1).$

23.103. $A:C[0,\pi]\to C[0,\pi]$, $(Ax)(t)=x(t)+\int\limits_0^\pi \sin t\cdot\sin s\,x(s)ds.$

23.104. $A:\ell_1\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=\sum\limits_{k=1}^\infty x_k\sin 2\pi kt.$

23.105. $A:m\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{x_k}{k^2}\cos 2\pi kt.$

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyidagi operatorlarning teskarilanuvchan emasligini isbotlang.

23.106. $A:\ell_2\to\ell_2$, $Ax=(x_1,0,x_3,0,x_5,0,x_7,x_8,x_9,....).$

23.107. $A:C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x'(t).$

23.108. $A:C^{(2)}[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x''(t).$

23.109. $A:C[-1,1]\to C[-1,1]$, $(Ax)(t)=\int\limits_{-1}^1 ts\,x(s)ds.$

23.110. $A:\ell_1\to\ell_1$, $Ax=(0,x_2,0,x_4,0,x_6,x_7,x_8,x_9,....).$

23.111. $A:L_2[-1,1]\to L_2[-1,1]$, $(Ax)(t)=\int\limits_{-1}^1 t^2(s^2+1)x(s)ds.$

23.112. $A:R^4\to R^4$, $Ax=(x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_4,x_1+x_4).$

23.113. $A:m\to m$, $Ax=(x_1,x_2,0,0,0,x_6,x_7,x_8,....).$

23.114. $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x(0)\cdot(t^2+1)+x(1)(t^2+3t+2).$

23.115. $A:C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x(0)+x'(t).$

23.116. $A: L_2[-1,1]\to L_2[-1,1]$, $(Ax)(t)=\cos t\int_{-1}^{1}\sin s\, x(s)ds$.

23.117. $A:\ell_1\to\ell_1$, $Ax=(x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4, x_1+x_4, x_5, x_6, \ldots)$.

23.118. $A: C[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=(t^2+t+1)\int_0^1 s\,x(s)ds$.

23.119. $A: C[0,2]\to C[0,2]$, $(Ax)(t)=x(0)+x(1)t+x(2)t^2$.

23.120. $A: C^{(1)}[0,1]\to C^{(1)}[0,1]$, $(Ax)(t)=\int_0^t x'(t)dt+[x(0)-x(1)]t$.

23.121. $A:\ell_1\to\ell_1$, $Ax=(x_1+x_2, 0, x_2-x_3, x_4, x_5, \ldots)$.

23.122. $A:\ell_1\to\ell_1$, $Ax=(x_1, 2x_2, 3x_3, x_4+x_5, 0, x_6, x_7, x_8, \ldots)$.

23.123. $A: C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x'(t)-2x(t)$.

23.124. $A: C[0,\pi]\to C[0,\pi]$, $(Ax)(t)=(\sin t+\cos t)x(0)-\cos 2t\, x(\pi)$.

23.125. $A: C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x'(t)-\dfrac{x(0)}{t^2+1}$.

23.3. Qo'shma operatorlar

23.126. $X=\ell_1$ va $T\in L(\ell_1)$ o'ngga siljitish operatori bo'lsin, ya'ni

$$Tx=T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)=(0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad x\in\ell_1$$

bo'lsin. T ga qo'shma T' operatorni toping.

Yechish. Ma'lumki, $T\in L(X,Y)$ operatorning Banax qo'shmasi hamma $x\in X$ va $f\in Y^*$ lar uchun

$$(T'f)(x)=f(Tx) \tag{23.12}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi va Y^* fazoni X^* fazoga akslantiruvchi T' operatordan iborat. Bizga ma'lumki, $\ell_1^*\cong m$, boshqacha aytganda har qanday $f\in\ell_1^*$ uchun shunday yagona $y\in m$ topiladiki,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k, \quad y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)\in m \tag{23.13}$$

tenglik ixtiyoriy $x\in\ell_1$ lar uchun o'rinli bo'ladi. Xuddi shuningdek, shunday $\zeta \in m$ mavjudki,

$$(T'f)(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\xi_k, \quad \xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)\in m \qquad (23.14)$$

tenglik ixtiyoriy $x \in \ell_1$ lar uchun bajariladi. (23.13) va (23.14) tengliklarni hisobga olsak, berilgan T operator uchun (23.12) shart quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k\xi_k=\sum_{k=2}^{\infty} x_{k-1}y_k=\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1} \qquad (23.15)$$

Bu tenglik ixtiyoriy $x \in \ell_1$ lar uchun bajariladi. Xususiy holda, $e_k \in \ell_1$, $k=1,2,3,\ldots.$ elementlar uchun (23.15) tenglik $\xi_k = y_{k+1}$, $k=1,2,3,\ldots,$ tengliklarga aylanadi. Shunday qilib, $T': m \to m$ operator

$$T'y=T'(y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)=(y_2,y_3,\ldots,y_{n+1},\ldots)$$

formula bilan aniqlanar ekan.

Biz bilamizki (15.1-teorema), agar $T \in L(X,Y)$ bo'lsa, $T' \in L(Y^*,X^*)$ bo'ladi va

$$\|T'\|=\|T\| \qquad (23.16)$$

tenglik bajariladi. Qaralayotgan misolda bu teoremaning o'rinli ekanligini tekshirib ko'ramiz. T' operatorning chiziqli ekanligi uning aniqlanishidan ko'rinib turibdi. (23.16) tenglik ham bajariladi. Haqiqatan ham,

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|\le 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\right)=1, \quad \|T'\|=\sup_{\|y\|\le 1}\|T'y\|=\sup_{2\le k<\infty}|y_k|=1.$$

23.127. $L_2[a,b]$ kompleks Hilbert fazosi, T - uzluksiz $u(t)$ funksiyaga ko'paytirish operatori, ya'ni

$$(Tx)(t)=u(t)x(t), \qquad x \in L_2[a,b].$$

T ga Hilbert ma'nosidagi qo'shma operatorni toping.

Yechish. Ta'rifga ko'ra $T \in L(H)$ operatorning Hilbert qo'shmasi hamma $x, y \in H$ lar uchun

$$(Tx,y)=(x,T^{*}y) \tag{23.17}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $T^{*}\in L(H)$ operatordan iborat, $L_2[a,b]$ fazo quyidagi

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt \tag{23.18}$$

skalyar ko'paytmaga nisbatan Hilbert fazosi bo'ladi. Shuning uchun misolda berilgan T operator uchun (23.17) tenglik

$$\int_a^b u(t)x(t)\overline{y(t)}\,dt=\int_a^b x(t)\overline{(T^{*}y)(t)}\,dt$$

tenglikdan iborat. Bu tenglikni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\int_a^b x(t)\,\overline{\overline{u(t)}\,y(t)}\,dt=\int_a^b x(t)\overline{(T^{*}y)(t)}\,dt. \tag{23.19}$$

Agar $z(t)=\overline{u(t)}y(t)$ belgilashni kiritsak, (23.18) ga ko'ra (23.19) tenglik $(x,z)=(x,T^{*}y)$ ko'rinishga keladi yoki $(x,T^{*}y)-(x,z)=(x,T^{*}y-z)=0$. Oxirgi tenglik barcha $x\in L_2[a,b]$ lar uchun o'rinli bo'ladi. Xususiy holda, $x=T^{*}y-z$ elementni olsak, $(T^{*}y-z,T^{*}y-z)=0$ tenglik hosil bo'ladi. Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga asosan oxirgi tenglik o'rinli bo'lishi uchun $T^{*}y-z=0$, ya'ni $T^{*}y=z$ bo'lishi kerak. Shunday qilib, qo'shma $T^{*}:L_2[a,b]\to L_2[a,b]$ operator

$$(T^{*}y)(t)=\overline{u(t)}y(t),\quad y\in L_2[a,b],$$

formula yordamida aniqlanar ekan. Agar $T^{*}=T$ bo'lsa, T operator o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi. Shuning uchun 23.127-misoldagi T operator u funksiya faqat haqiqiy qiymatlar qabul qilgandagina (ya'ni, $\overline{u(t)}\equiv u(t)$ bo'lgandagina) o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

23.128. $\ell_2=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots):\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty\right\}$ kompleks Hilbert fazosida

$$(Tx)_n=x_{n+1},\quad \text{ya'ni}\quad Tx=T(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)=(x_2,x_3,\ldots,x_{n+1},\ldots)$$

operator berilgan bo'lsin. T^* operatorni toping.

Yechish. ℓ_2 fazo quyidagi $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ skalyar ko'paytmaga nisbatan Hilbert fazosi bo'ladi. Hilbert ma'nosidagi qo'shma operator ta'rifiga ko'ra

$$(Tx,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(Tx)_k\overline{y_k}=\sum_{k=1}^{\infty}x_{k+1}\overline{y_k}=\sum_{k=2}^{\infty}x_k\overline{y_{k-1}}=(x,T^*y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{(T^*y)_k}.$$

Oxirgi tenglik hamma $x\in\ell_2$ lar uchun o'rinli. Bundan esa T^* operatorning

$$(T^*y)_1=0,\quad (T^*y)_k=y_{k-1},\quad k=2,3,\ldots,$$

yoki

$$T^*y=T^*(y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)=(0,y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)$$

formula bilan aniqlanishini ko'ramiz.

$$(Tx)_n=x_{n+1}=x_{n-1}=(T^*x)_n,\ n=1,2,3,\ldots\ldots$$

tenglik ℓ_2 fazoning faqat nol vektori uchun bajariladi. Shu sababli T operator o'z-o'ziga qo'shma operator bo'la olmaydi.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyidagi misollarda (129-148) berilgan $T\in L(X,Y)$ yoki $T\in L(H)$ operatorga qo'shma T' yoki T^* operatorni toping.

23.129. $T:\ell_1\to\ell_1,\quad Tx=(\lambda_1x_1,\ldots,\lambda_nx_n,\ldots),\quad |\lambda_n|\le 1, n=1,2,3,\ldots$.

23.130. $T:c_0\to c_0,\quad Tx=(x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots)$.

23.131. $T:\ell_1\to c_0,\quad Tx=(0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$.

23.132. $T:c_0\to\ell_1,\quad Tx=(x_1,x_2,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$.

23.133. $T:C_2[0,\pi]\to C_2[0,\pi],\quad (Tx)(t)=(t^2+i\cos t)x(t)$.

23.134. $T:L_2[0,1]\to L_2[0,1],\quad (Tx)(t)=\int_0^1[ts+i\cos(t+s)]x(s)ds$.

23.135. $T:L_2[0,1]\to L_2[0,1],\quad (Tx)(t)=\int_0^1(t^2+t+1)x(s)ds$.

23.136. $T: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Tx)(t) = \int_0^t s\,x(s)\,ds$.

23.137. $T: \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$, $\lambda_n \in C$ va $|\lambda_n| \le 1$ $(n \in N)$.

23.138. $T: \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots) \in \ell_2$.

23.139. $T: \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = (x_1 + x_3, x_2 + x_4, \dots, x_n + x_{n+2}, \dots)$.

23.140. $T: \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + 2x_3 + x_4, \dots, x_n + 2x_{n+1} + x_{n+2}, \dots)$.

23.141. $T: \ell_2(Z) \to \ell_2(Z)$, $(Tx)_n = x_{n-1} + x_{n+1}$, $n \in Z$.

23.142. $T: \ell_2(Z) \to \ell_2(Z)$, $(Tx)_n = x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}$, $n \in Z$.

23.143. $T: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $(Tx)(t) = (\cos t + i \sin t)x(t) + \int_{-1}^{1} (ts - its)x(s)\,ds$.

23.144. $T: \ell_1 \to c_0$, $Tx = \left(e^t x_1, e^{2t} x_2, \dots, e^{nt} x_n, \dots\right)$.

23.145. $T: \ell_1 \to \ell_2$, $Tx = \left(0, \frac{1}{2}x_2, \frac{2}{3}x_3, \dots, \frac{n-1}{n}x_n, \dots\right)$.

23.146. $T: m \to m$, $Tx = (x_1, 2x_2, \dots, 50x_{50}, 0, 0, \dots)$.

23.147. $T: \ell_3 \to \ell_3$, $Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$, $|\lambda_n| \le 2, n = 1, 2, \dots$.

23.148. $T: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Tx)(t) = (t + it^2)x(t) + \int_0^1 (t + is)x(s)\,ds$.

Eslatma. 141-142-misollarda keltirilgan $\ell_2(Z)$ fazo

$$\ell_2(Z) = \left\{ x = (\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots): \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

to'plamdan iborat bo'lib, $(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ skalyar ko'paytmaga nisbatan Hilbert fazosi bo'ladi.

23.4. Chiziqli operator spektri

X - normalangan fazo va unda $A \in L(X)$ operator berilgan bo'lsin. Chiziqli operator spektriga oid bir necha misollarni yechimlari bilan keltiramiz.

23.149. $C[a,b]$ orqali $[a,b]$ da aniqlangan uzluksiz (kompleks qiymatli) funksiyalardan iborat chiziqli fazo belgilangan. Bu fazoda

$$(Ax)(t) = u(t)\int_a^b u(s)x(s)ds, \quad x \in C[a,b]$$

formula vositasida aniqlangan A operatorning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

Yechish. Ta'rifga ko'ra, nol bo'lmagan $x \in C[a,b]$ vektor va biror $\lambda \in C$ soni uchun

$$Ax = \lambda x \qquad (23.20)$$

tenglik bajarilsa, x vektor A operatorning xos vektori va λ soni unga mos keluvchi xos qiymat deyiladi. Qaralayotgan operator uchun (23.20) tenglik quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u(t)\int_a^b u(s)x(s)ds = \lambda x(t). \qquad (23.21)$$

Bu yerda $x \neq 0$. Faraz qilaylik, $\lambda \neq 0$ bo'lsin. U holda $x \neq 0$ bo'lgani uchun

$$\alpha_x = \int_a^b u(s)x(s)ds \neq 0 \qquad (23.22)$$

tengsizlik bajarildi. (23.21) tenglikda (23.22) ni e'tiborga olsak,

$$x(t) = \lambda^{-1}\alpha_x\, u(t)$$

tenglikni olamiz. (23.22) tenglikka x funksiyaning bu ifodasini qo'yib

$$\alpha_x = \alpha_x \lambda^{-1}\int_a^b u^2(t)dt \quad \text{yoki} \quad \alpha_x\left(\lambda - \int_a^b u^2(t)dt\right) = 0$$

tenglikka kelamiz. Bunda $\alpha_x \neq 0$ bo'lgani uchun $\lambda = \int_a^b u^2(t)dt$ son A operatorning xos qiymati va $x(t) = u(t)$ unga mos xos vektor ekanligi kelib chiqadi. Yana shuni ta'kidlash kerakki, agar

$$\int_a^b u(t)x(t)dt = 0 \qquad (23.23)$$

shartini qanoatlantiruvchi nolmas x funksiya mavjud bo'lsa, u holda

$\lambda=0$ soni uchun ham (23.20) tenglik bajariladi. Albatta (23.23) shartni qanoatlantiruvchi nolmas x funksiya mavjud. Demak, A operator ikkita $\lambda=0$ va $\mu=\int_a^b u^2(t)dt$ xos qiymatlarga ega. (23.23) shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar $\lambda=0$ xos qiymatga mos keluvchi xos funksiyalar bo'ladi.

23.150. $C[a,b]$ fazoni o'zini-o'ziga aks ettiruvchi va

$$(Ax)(t)=tx(t) \tag{23.24}$$

formula bilan aniqlangan A operatorni qaraymiz. Uning spektri va rezolventasini toping.

Yechish. 16.2-misolda $C[a,b]$ fazoda (23.24) tenglik bilan aniqlanuvchi A operatorning spektri topilgan. Bu yerda biz A operator spektrini topishning yangi variantini taklif qilamiz.

Dastlab $A-\lambda I$ operatorni va unga teskari operator bo'lgan $R_\lambda(A)$ rezolventani topamiz. Ixtiyoriy $x\in C[a,b]$ uchun

$$(A-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)x(t)$$

bo'lgani uchun $Ax=\lambda x$ tenglik

$$(t-\lambda)x(t)=0 \tag{23.25}$$

tenglikka teng kuchli. Istalgan $\lambda\in C$ uchun (23.25) tenglama faqat aynan nolga teng uzluksiz yechimga ega. Shunday ekan, A operatorning xos qiymati yo'q. U holda 14.3-teoremaga ko'ra ixtiyoriy $\lambda\in C$ uchun $A-\lambda I$ operator teskarilanuvchan. Ammo, $\lambda\in(a,b)$ bo'lganda

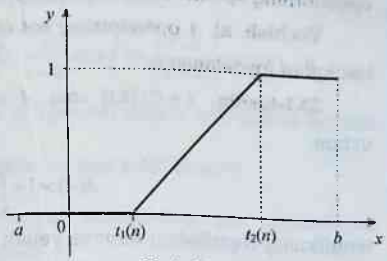
$$(A-\lambda I)^{-1}x(t)=\frac{1}{t-\lambda}x(t)$$

formula bilan berilgan $(A-\lambda I)^{-1}$ operator aniqlangan elementlar to'plami $C[a,b]$ fazoning qismi bo'lib, unga teng emas. Masalan, $x_0(t)=C$, $C\neq 0$ desak, $x_0\in C[a,b]$, ammo $(A-\lambda I)^{-1}x_0\notin C[a,b]$. Bundan tashqari, $\lambda\in(a,b)$ uchun $(A-\lambda I)^{-1}$ chegaralanmagan operator. Buni ko'rsatamiz.

Agar n yetarlicha katta bo'lsa, u holda $\lambda+2/n<b$ bo'ladi va

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & a\le t<t_1(n)\\ n(t-\lambda)-1, & t_1(n)\le t\le t_2(n)\\ 1, & t_2(n)<t\le b\end{cases}$$

funksiyalar ketma-ketligi $C[a,b]$ ga qarashli bo'ladi (23.1-chizma). Bu yerda $t_1=t_1(n)=\lambda+1/n$, $t_2=t_2(n)=\lambda+2/n$. Qurilishiga ko'ra $\|x_n\|=1$. Endi quyidagi $\|(A-\lambda I)^{-1}x_n\|$ normani hisoblaymiz.



23.1-chizma.

$$\|(A-\lambda I)^{-1}x_n\|=\max_{a\le t\le b}\left|\frac{1}{t-\lambda}x_n(t)\right|\ge\frac{n}{2}\cdot\left[n(\lambda+\frac{2}{n}-\lambda)-1\right]=\frac{n}{2}.$$

Shunday qilib, $\lambda\in(a,b)$ bo'lganda $(A-\lambda I)^{-1}$ chegaralanmagan operator ekan. Demak, $(a,b)\subset\sigma(A)$. Endi $\lambda\notin[a,b]$ holni qarasak, bu holda ixtiyoriy $x\in C[a,b]$ uchun $(t-\lambda)^{-1}x(t)$ uzluksiz funksiya bo'lgani uchun $(A-\lambda I)^{-1}$ operator fazoning barcha elementlarida aniqlangan va

$$\|(A-\lambda I)^{-1}x\|\le\frac{1}{\min\limits_{a\le t\le b}\{|t-\lambda|\}}\|x\|$$

tengsizlik o'rinli. Shunday qilib, ixtiyoriy $\lambda\notin[a,b]$ son A operator uchun regulyar nuqta bo'ladi. Spektr yopiq to'plam bo'lgani uchun berilgan A operatorning spektri $\sigma(A)=[a,b]$ kesmadan iborat. $C\setminus[a,b]$ to'plam esa A operatorning rezolvent to'plami bo'ladi. A operatorning $\lambda\in C\setminus[a,b]$ nuqtadagi rezolventasi

$$R_\lambda(A)x(t)=(A-\lambda I)^{-1}x(t)=\frac{1}{t-\lambda}x(t),\quad \lambda\in\rho(A)=C\setminus[a,b]$$

formula vositasida aniqlanadi.

23.151. $L_2[0,1]$ kompleks Hilbert fazosida quyidagi tenglik bilan aniqlangan

$$Ax(t)=tx(t)+\int_0^1 tsx(s)ds,\quad x\in L_2[0,1]$$

operatorning spektri va rezolventasini toping.

Yechish. a) A operatorning xos qiymatlarini topish uchun quyidagi tasdiqdan foydalanamiz.

23.1-tasdiq. $\lambda\in C\setminus[0,1]$ soni A operatorning xos qiymati bo'lishi uchun

$$\Delta(\lambda)=1+\int_0^1\frac{s^2}{s-\lambda}ds=0$$

tenglikning bajarilishini zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* Aytaylik $\lambda\in C\setminus[0,1]$ soni A operatorlarning xos qiymati bo'lsin, ya'ni biror nolmas $x\in L_2[0,1]$ element uchun

$$Ax(t)=tx(t)+\int_0^1 tsx(s)ds=\lambda x(t)$$

tenglik bajarilsin. U holda

$$(t-\lambda)x(t)+t\cdot\alpha_x=0, \tag{23.26}$$

bunda

$$\alpha_x=\int_0^1 sx(s)ds. \tag{23.27}$$

Agar $\alpha_x=0$ bo'lsa, (23.26) tenglik $(t-\lambda)x(t)=0$ tenglikka aylanadi. Bundan x ning nolga tengligiga ega bo'lamiz. Tanlanishiga ko'ra $x\neq0$. Shunday ekan, $\alpha_x\neq0$. Yuqoridagi (23.26) tenglikdan

$$x(t)=-\frac{\alpha_x\cdot t}{t-\lambda}$$

ni topamiz va buni (23.27) ga qo'yib

$$\alpha_x = -\alpha_x \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda} ds$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\alpha_x \neq 0$ bo'lganligi uchun

$$\Delta(\lambda) = 1 + \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda} ds = 0$$

tenglikni hosil qilamiz.

Yetarliligi. Aytaylik $\lambda \in C \setminus [0,1]$ son uchun $\Delta(\lambda) = 0$ tenglik bajarilsin. U holda $x(t) = t(t-\lambda)^{-1}$ fynksiyani olsak,

$$(A - \lambda I)x(t) = (t-\lambda)\frac{t}{t-\lambda} + t\int_0^1 s \cdot \frac{s}{s-\lambda} ds = t\left(1 + \int_0^1 \frac{s^2 ds}{s-\lambda}\right) = t\Delta(\lambda) = 0$$

tenglik bajariladi. Bundan λ son A operator uchun xos qiymat bo'lishi va $x(t) = \dfrac{t}{t-\lambda}$ unga mos xos funksiya bo'lishi kelib chiqadi.

A operatorning $[0,1]$ kesmadan tashqaridagi xos qiymatlarini topamiz. Hamma manfiy λ lar uchun

$$\Delta(\lambda) = 1 + \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda} ds \geq 1$$

tengsizlik o'rinli. Bundan tashqari $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ bo'lsa, $\Delta(\lambda) \neq 0$ bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas. 23.1-tasdiqqa ko'ra A operator $\lambda > 1$ xos qiymatlarga ega bo'lish mumkin. Aytaylik, $\lambda > 1$ bo'lsin. U holda

$$\Delta'(\lambda) = \int_0^1 \frac{s^2\, ds}{(s-\lambda)^2} > 0; \quad \lim_{\lambda \to 1} \Delta(\lambda) = -\infty; \quad \lim_{\lambda \to \infty} \Delta(\lambda) = 1$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bu yerdan $(1,\infty)$ intervalda $\Delta(\lambda)$ ning o'sishi va yagona $\lambda_0 \in (1,\infty)$ nuqtada $\Delta(\lambda_0) = 0$ tenglik bajarilishi kelib chiqadi. Shunday qilib, $[0,1]$ kesmadan tashqarida A operatorning yagona xos qiymati mavjud ekanligiga ega bo'lamiz. Aytaylik, $\lambda \in C \setminus [0,1]$ son A operatorning xos qiymati bo'lmasin. $A - \lambda I$ operatorga teskari operatorni topamiz (chunki, 14.3- teoremaga ko'ra $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud):

$$(A-\lambda I)x(t)=(t-x)x(t)+t\int_0^1 sx(s)ds=y(t), \quad x,y\in L_2[0,1]$$

tenglikdan (23.27) ni e'tiborga olgan holda $x(t)$ ni topamiz:

$$(t-\lambda)x(t)+t\cdot\alpha_x=y(t),$$

bundan

$$x(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}-\alpha_x\frac{t}{t-\lambda}. \tag{23.28}$$

$x(t)$ uchun olingan (23.28) ifodani (23.27) ga qo'ysak, α_x uchun

$$\alpha_x=\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds-\alpha_x\int_0^1\frac{s^2}{s-\lambda}ds$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu yerdan, shartga ko'ra $\Delta(\lambda)\neq 0$ bo'lganligi uchun

$$\alpha_x=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds$$

ni hosil qilamiz. Demak,

$$x(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}-\frac{t}{t-\lambda}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds.$$

Shunday qilib, A operatorning rezolventasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$R_\lambda(A)y(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}-\frac{t}{t-\lambda}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds, \qquad y\in L_2[0,1].$$

Olingan natijalardan ko'rinib turibdiki, agar $\lambda\in C\setminus\{[0,1]\cup\{\lambda_0\}\}$ bo'lsa, u holda $D(R_\lambda(A))=L_2[0,1]$ va $R_\lambda(A)$ chegaralangan, bu yerda $\lambda_0\in(1,\infty)$ va $\Delta(\lambda_0)=0$.

b) $\lambda\in[0,1]$ bo'lsin. U holda $\operatorname{Im}(A-\lambda I)\neq L_2[0,1]$, chunki $y_0(t)\equiv 1$ funksiyani olsak, $y_0\notin\operatorname{Im}(A-\lambda I)$. Demak, $D(R_\lambda(A))\neq L_2[0,1]$ va, shuning uchun, $\lambda\in\sigma(A)$. Shunday qilib, A operatorning spektri $\sigma(A)=[0,1]\cup\{\lambda_0\}$ to'plamdan iborat, bunda $\lambda_0\in(1,\infty)$ va $\Delta(\lambda_0)=0$.

23.152. ℓ_1 fazoda berilgan

$$A:\ell_1 \to \ell_1,\ Ax=(x_1+x_2, x_2+2x_3, 3x_3, 4x_4, x_5, x_6, \ldots)$$

operatorning spektri va rezolventasini toping.

Yechish. a) A operatorning xos qiymatlarini topish uchun $\lambda \in C$ songa mos $Ax=\lambda x$ yoki

$$(x_1+x_2, x_1+2x_2 3x_3, 4x_4, x_5, x_6, ..) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots) \tag{23.29}$$

tenglamani yechamiz. (23.29) tenglama quyidagi tenglamalar sistemaga teng kuchli:

$$x_1+x_2=\lambda x_1,\ x_1+2x_2=\lambda x_2,\ 3x_3=\lambda x_3,\ 4x_4=\lambda x_4,\ x_n=\lambda x_n,\ n\geq 5. \tag{23.30}$$

Agar $\lambda \notin \{1,3,4\}$ bo'lsa, (23.29) tenglik bajarilishi uchun $x_3=x_4=x_5=\ldots=0$ bo'lishi kerak. U holda (23.30) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+x_2=0\\ x_1+(2-\lambda)x_2=0\end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga keladi. Bu tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun $(1-\lambda)(2-\lambda)-1=0$ yoki

$$\lambda^2-3\lambda+1=0 \tag{23.31}$$

tenglik bajarilishi kerak. (23.31) tenglama $\lambda_1=2^{-1}(3-\sqrt{5})$, $\lambda_2=2^{-1}(3+\sqrt{5})$ ildizlarga ega. Bu yerdan kelib chiqadiki, (23.29) tenglama $\lambda_1=2^{-1}(3-\sqrt{5})$ songa mos nolmas

$$x^{(1)}=\left(1,\frac{1-\sqrt{5}}{2},0,0,\ldots\right) \tag{23.32}$$

yechimga va $\lambda_2=2^{-1}(3+\sqrt{5})$ soniga mos nolmas

$$x^{(2)}=\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2},0,0,\ldots\right) \tag{23.33}$$

yechimga ega. Shunday qilib, $\lambda_1=2^{-1}(3-\sqrt{5})$, $\lambda_2=2^{-1}(3+\sqrt{5})$ sonlari A operatorning xos qiymatlari bo'ladi va (23.32) va (23.33) ko'rinishdagi $x^{(1)}$ va $x^{(2)}$ elementlar A operatorning λ_1 va λ_2 ga mos xos vektorlari bo'ladi. Agar $\lambda_3 = 1$ bo'lsa $x^{(3)} = e_n$, $n \geq 5$ nolmas element $Ax^{(3)} = 1 \cdot x^{(3)}$ tenglikni qanoatlantiradi, ya'ni 1 soni A operatorning cheksiz karrali xos qiymati va $x^{(3)} = e_n, n \geq 5$ ko'rinishdagi elementlar unga mos xos vektorlar bo'ladi. Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, $\lambda_4 = 3, \lambda_5 = 4$ sonlar ham A operatorning xos qiymatlari bo'ladi va $x^{(4)} = e_3$, $x^{(5)} = e_4$ lar esa ularga mos xos vektorlar bo'ladi. Shunday qilib, A operator $2^{-1}(3-\sqrt{5})$, $2^{-1}(3+\sqrt{5})$, 1, 3, 4 xos qiymatlarga ega va boshqa xos qiymatlari yo'q. $2^{-1}(3-\sqrt{5})$, $2^{-1}(3+\sqrt{5})$, 3, 4 xos qiymatlar operatorning oddiy xos qiymatlari bo'ladi.

b) Endi $\lambda \notin \{2^{-1}(3-\sqrt{5}), 2^{-1}(3+\sqrt{5}), 1, 3, 4\}$ holni qaraymiz. Ta'rifga ko'ra, A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi $A-\lambda I$ operatorining teskarisi sifatida aniqlanadi. $(A-\lambda I)x = y$, ya'ni

$$((1-\lambda)x_1 + x_2, x_1 + (2-\lambda)x_2, (3-\lambda)x_3, (4-\lambda)x_4, (1-\lambda)x_5, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots), \qquad (23.34)$$

tenglikdan x ni topamiz. Buning uchun

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 = y_1, \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 = y_2, \\ (3-\lambda)x_3 = y_3, \\ (4-\lambda)x_4 = y_4, \\ (1-\lambda)x_n = y_n, \quad n \geq 5, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{(2-\lambda)y_1 - y_2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \\ x_2 = \dfrac{-y_1 + (1-\lambda)y_2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \\ x_3 = y_3(3-\lambda)^{-1}, \\ x_4 = y_4(4-\lambda)^{-1}, \\ x_n = y_n(1-\lambda)^{-1}, \quad n \geq 5 \end{cases}$$

munosabatlarni olamiz, ya'ni (23.34) tenglama

$$x = \left(\frac{(2-\lambda)y_1 - y_2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \frac{-y_1 + (1-\lambda)y_2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \frac{y_3}{3-\lambda}, \frac{y_4}{4-\lambda}, \frac{y_5}{1-\lambda}, \frac{y_6}{1-\lambda}, \ldots \right)$$

yagona yechimga ega. Shunday qilib, A operatorning rezolventasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$R_\lambda(A)x=\left(\frac{(2-\lambda)x_1-x_2}{\lambda^2-3\lambda+1},\frac{-x_1+(1-\lambda)x_2}{\lambda^2-3\lambda+1},\frac{x_3}{3-\lambda},\frac{x_4}{4-\lambda},\frac{x_5}{1-\lambda},\frac{x_6}{1-\lambda},\ldots\right)$$

Ko'rinib turibdiki, agar $\lambda\notin\{2^{-1}(3-\sqrt{5}),\,2^{-1}(3+\sqrt{5}),\,1,\,3,\,4\}$ bo'lsa, $D(R_\lambda(A))=\ell_1$. Banax teoremasiga ko'ra (14.2-teoremaga qarang) $R_\lambda(A)$ chegaralangan operator bo'ladi. Shunday qilib, barcha $\lambda\notin\{2^{-1}(3-\sqrt{5}),\,2^{-1}(3+\sqrt{5}),\,1,\,3,\,4\}$ lar, A operator uchun regulyar qiymat bo'ladi. Bundan $\sigma(A)=\{2^{-1}(3-\sqrt{5}),\,2^{-1}(3+\sqrt{5}),\,1,\,3,\,4\}$ tenglik kelib chiqadi.

Quyidagi keltirilgan mashqlar normalangan fazolardagi chiziqli chegaralangan operatorlarning xos qiymatlari, xos vektorlari, rezolventasi va spektrini o'rganishga mo'ljallangan.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyidagi operatorlarning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

23.153. $A:C[0,\pi]\to C[0,\pi]$, $(Ax)(t)=\int_0^\pi \sin(t+s)x(s)ds$.

23.154. $A:\ell_1\to\ell_1$, $Ax=(\frac{1}{2}x_1,\frac{2}{3}x_2,\ldots,\frac{n}{n+1}x_n,\ldots)$.

23.155. $A:C[0,2]\to C[0,2]$, $(Ax)(t)x=x(0)t^2+x(t)t+x(2)$.

23.156. $A:\ell_2\to\ell_2$, $Ax=(3x_1,4x_2,-2x_3,5x_4,x_5,x_6,\ldots)$.

23.157. $A:R^4\to R^4$, $Ax=(x_1,x_2+x_3,x_2-x_3,x_4)$.

23.158. $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=\int_0^1(t^2s+ts^2)x(s)ds$.

23.159. $A:\ell_3\to\ell_3$, $Ax=(x_1,2x_2,x_3,3x_4,x_5,x_6,x_7,\ldots)$.

23.160. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $(Ax)(t)=x(0)t+\int_0^1 x(s)ds$.

23.161. $A:R^3\to R^3$, $Ax=(x_1+x_2,x_2+x_3,x_1+x_3)$.

23.162. $A:m\to m$, $Ax=(6x_1,5x_2,4x_3,3x_4,2x_5,x_6,x_7,x_8,\ldots)$.

23.163. $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $(Ax)(t) = \int_{-1}^{1}(t+s+ts)x(s)ds$.

23.164. $A: C[0,2\pi] \to C[0,2\pi]$, $(Ax)(t) = \int_{0}^{2\pi}\cos(t+s)x(s)ds$.

23.165. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = \left(\frac{1}{4}x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{3}{8}x_3, \frac{1}{4}x_4, \ldots, \frac{2n-1}{4n}x_{2n-1}, \frac{1}{2n}x_{2n}, \ldots\right)$.

23.166. $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$.

23.167. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_4, 0, 0, \ldots)$.

23.168. $A: m \to m$, $Ax = (x_1, 2x_2 + x_3, x_2 + 3x_3, x_4, 0, 0 \ldots)$.

23.169. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = \int_{0}^{1}(1+ts)x(s)ds$.

23.170. $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$, $(Ax)(t) = 2x(-1)t + 3x(1)t^2$.

23.171. $A: m \to m$, $Ax = (4x_1, 5x_2, 3x_3, 2x_4, x_5, 0, 0 \ldots)$.

23.172. $A: L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$, $(Ax)(t) = \dfrac{4x(t)}{t+4} + 2x(0) + x(1)t$.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyida berilgan operatorlarning spektri va rezolventasini toping.

23.173. $A: C[1,3] \to C[1,3]$, $(Ax)(t) = x(2)t + x(3)t^2$.

23.174. $A: m \to m$, $Ax = (2x_1, \frac{3}{2}x_2, \frac{4}{3}x_3, \ldots, \frac{n+1}{n}x_n, \ldots)$.

23.175. $A: C[-2,2] \to C[-2,2]$, $(Ax)(t) = |t|x(t)$.

23.176. $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{3}{2}x_3, \frac{1}{4}x_4, \ldots, \frac{1}{2n}x_{2n}, \frac{2n+1}{2n}x_{2n+1}, \ldots)$.

23.177. $A: C[0,2] \to C[0,2]$, $(Ax)(t) = x(1) + x(2)t + t\,x(t)$.

23.178. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2x(t) + t\int_{0}^{1}sx(s)ds$.

23.179. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots)$.

23.180. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2x(t) + x(0)$.

23.181. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax=\left(\frac{1}{3}x_1,\frac{1}{4}x_2,\ldots,\frac{1}{n+2}x_n,\ldots\right).$

23.182. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1],\quad (Ax)(t)=(t+2)x(t).$

23.183. $A:\ell_1\to\ell_1,\quad Ax=(0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots).$

23.184. $A:\ell_1\to\ell_1,\quad Ax=(2x_1,4x_2,5x_3,3x_4,x_5,x_6,\ldots).$

23.185. $A:C[0,1]\to C[0,1],\quad (Ax)(t)=tx(t)+x(0)t^2+x(1)t^3.$

23.186. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax=(0,x_2,\frac{x_3}{2},\ldots,\frac{x_n}{n-1},\ldots).$

23.187. $A:L_2[0,\infty)\to L_2[0,\infty),\quad (Ax)(s)=e^{-t}x(t)+\int_0^{\infty}2^{-t+s}x(s)ds.$

23.188. $A:L_2(-\infty,\infty)\to L_2(-\infty,\infty),\quad (Ax)(t)=arctgt\cdot x(t).$

23.189. $A:L_2[-1,1]\to L_2[-1,1],\quad (Ax)(t)=t\,x(t)+\int_{-1}^{1}t\,s\,x(s)ds.$

23.190. $A:\ell_1\to\ell_1,\quad Ax=(x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots).$

23.191. $A:m\to m,\quad Ax=(x_1+x_2,x_2+x_3,x_1-x_3,x_4,x_5,\ldots).$

23.192. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax=(-x_1,x_2,-x_3,\ldots,-x_{2n-1},x_{2n},\ldots).$

23.193. Faraz qilaylik $A:X\to X$ chiziqli operator va A^{-1} mavjud bo'lsin. A va A^{-1} operatorlar bir xil xos vektorlarga ega. Isbotlang.

23.194. Faraz qilaylik $A\in L(X)$ va A^2 ning xos vektori mavjud bo'lsin, u holda A ham xos vektorga ega. Isbotlang.

23.195. A va $R_\lambda(A)$ lar o'rin almashinuvchi operatorlardir. Isbotlang.

23.196. Faraz qilaylik $\lambda,\mu\in\rho(A)$ bo'lsin, u holda Hilbert ayniyati $R_\lambda(A)-R_\mu(A)=(\lambda-\mu)R_\lambda(A)R_\mu(A)=(\lambda-\mu)R_\mu(A)R_\lambda(A)$ ni isbotlang.

23.197. Faraz qilaylik $A,B\in L(X)$, $\lambda\in\rho(A)\cap\rho(B)$ bo'lsin. $R_\lambda(A)-R_\lambda(B)=R_\lambda(A)(B-A)R_\lambda(B)$ tenglikni isbotlang.

23.198. Faraz qilaylik $A\in L(X)$ bo'lsin. Biror $\lambda\in\rho(A)$ uchun $R_\lambda(A)$ to'la uzluksiz (kompakt) bo'lishi mumkinmi?

23.199. $C[0;2\pi]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi $(Ax)(t)=e^{it}x(t)$ operatorni qaraymiz. $\sigma(A)=\{\lambda\in C:|\lambda|=1\}$ tenglikni isbotlang.

23.200. $C[0;1]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi $(Ax)(t)=x(0)+tx(1)$ operatorni qaraymiz. $\sigma(A)$ va $R_\lambda(A)$ larni toping.

23.201. L to'plam H Hilbert fazosining qism fazosi, P esa L ga ortogonal proyeksiyalash operatori bo'lsin. P operatorning spektrini toping, $R_\lambda(P)$ ni P orqali ifodalang.

23.202. H Hilbert fazosi, e_n $(n\in N)$ undagi ixtiyoriy ortonormal bazis bo'lsin. $A:H\to H$ operatorni quyidagicha aniqlaymiz: $Ae_1=0$, $Ae_{k+1}=e_k\,(k\in N)$.

a) $A\in L(H)$ munosabatni isbotlang;

b) A^* operatorni toping;

c) $\sigma(A)=\{\lambda\in C:|\lambda|\leq 1\}$ tenglikni isbotlang;

d) $\sigma(A)=\{\lambda\in C:|\lambda|<1\}$ to'plamning ixtiyoriy nuqtasi A operatorning xos qiymati ekanligini isbotlang;

e) $\sigma(A^*)=\{\lambda\in C:|\lambda|\leq 1\}$ tenglikni isbotlang;

f) A^* operatorning xos qiymatlari yo'q ekanligini isbotlang.

23.203. $C[0;1]$ fazoda differensiallash $(Ax)(t)=dx/dt$ operatorini qaraymiz. Quyidagilarni isbotlang.

a) agar $D(A)=\{x\in C[0,1]:\ x'\in C[0,1],\ x(0)=0\}$ bo'lsa, $\sigma(A)$ bo'sh to'plam.

b) agar $D(A)=\{x\in C[0,1]:\ x'\in C[0,1]\}$ bo'lsa, u holda $\sigma(A)=C$ tenglik o'rinli hamda istalgan kompleks son A operatorning xos qiymati bo'ladi.

c) agar $D(A)=\{x\in C[0,1]:\ x'\in C[0,1],\ x(0)=x(1)\}$ bo'lsa, u holda $\sigma(A)$ faqat $2\pi in$ $(n\in Z)$ ko'rinishdagi xos qiymatlardan iborat.

23.204. Faraz qilaylik $A,B\in L(X)$ bo'lsin. $\sigma(A\cdot B)$ va $\sigma(B\cdot A)$ to'plamlarning noldan farqli elementlari bir xil ekanligini isbotlang.

23.205. Faraz qilaylik $A \in L(X)$ bo'lsin. $\lambda \in C$ soni A operatorning xos qiymati bo'lishi uchun shunday $x_n \in D(A)$ $(n \in N), \|x_n\| = 1$ ketma-ketlik mavjud bo'lib, $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$ munosabatning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

23.206. Faraz qilaylik $A \in L(X)$, $\lambda \in \sigma(A)$ bo'lsin. Istalgan $n \in N$ uchun $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ ekanligini isbotlang.

23.207. Faraz qilaylik $A \in L(X)$ uchun uzluksiz teskari operator mavjud bo'lsin. $\lambda \in \sigma(A^{-1})$ bo'lishi uchun $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$ bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

24-§. Kompakt operatorlar va integral tenglamalar

Kompakt operatorlar va integral tenglamalarga oid ma'lumotlarni va ularning asosiy xossalarini o'quv-qo'llanmaning IV bobidan topish mumkin.

24.1. Kompakt operatorlar

Kompakt (to'la uzluksiz) operatorlar ta'rifi va ularning asosiy xossalarini o'quv-qo'llanmaning 17-18 paragraflaridan topish mumkin.

Endi operatorlarning kompakt yoki kompakt emasligi tekshirishga doir bir nechta misollar qaraymiz.

24.1. $A : \ell_p \to \ell_p$ operator $Ax = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, \ldots)$, tenglik bilan aniqlangan. Bu operator kompakt bo'lishi uchun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ munosabatning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

Isbot. *Yetarliligi.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lsin. Quyidagi A_n, $n = 1,2,3,\ldots$ operatorlar ketma-ketligini qaraymiz:

$$A_n x = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, 0, 0, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p.$$

Istalgan n natural son uchun A_n chekli o'lchamli chegaralangan operatordir. 17.2-teoremaga ko'ra A_n kompakt operator bo'ladi. Bu $\{A_n\}$

ketma-ketlikning berilgan A operatorga tekis yaqinlashishini ko'rsatamiz. Buning uchun $n\to\infty$ da $\|A_n - A\|\to 0$ bo'lishini ko'rsatish yetarli. Har bir $x\in\ell_p$ vektor uchun

$$\|A_n x - Ax\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|^p|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{n+1\le k<\infty}|a_k|\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|x\|\cdot \sup_{n+1\le k<\infty}|a_k|.$$

Bu yerdan $\|A_n - A\|\le \sup\limits_{n+1\le k<\infty}|a_k|$ tengsizlik kelib chiqadi. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ shartdan

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\| \le \lim_{n\to\infty}\sup_{n+1\le k<\infty}|a_k| = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. U holda $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$. 18.1-natijaga ko'ra A kompakt operator bo'ladi.

Zaruriyligi. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni A kompakt operator bo'lsin, ammo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ shart bajarilmasin. U holda shunday $a>0$ son va n_k $(n_k\to\infty)$ natural sonlar ketma-ketligi mavjud bo'lib, $|a_{n_k}|\ge a$ tengsizliklar bajariladi. $M=\{x^{(k)}\in\ell_p : x^{(k)} = e_{n_k},\ k=1,2,\ldots\}$ to'plamni qaraymiz. Bu to'plam chegaralangan to'plamdir, chunki ixtiyoriy $x^{(k)}\in M$ uchun $\|x^{(k)}\|=1$. Bu to'plamning A akslantirishdagi tasviri $A(M)$ ning nisbiy kompakt emasligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $y^{(k)} = Ax^{(k)} =$ $=(0,0\ldots,0,0,a_{n_k},0,\ldots) = a_{n_k}e_{n_k}$ tenglikdan, hamda $|a_{n_k}|\ge a$ dan $i\ne j$ da,

$$\|y^{(i)} - y^{(j)}\| = \|a_{n_i}e_{n_i} - a_{n_j}e_{n_j}\| \ge \sqrt[p]{2}\,a \tag{24.1}$$

tengsizlik kelib chiqadi. (24.1) tengsizlik $A(M)$ to'plamdan olingan $\{y^{(k)}\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin emasligini ko'rsatadi, ya'ni $A(M)$ nisbiy kompakt to'plam emas. A operator chegaralangan M to'plamni nisbiy kompakt bo'lmagan $A(M)$ to'plamga akslantirgani uchun A operator kompakt emas. Bu ziddiyat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ munosabatni isbotlaydi.

24.2. $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = tx(t)$ operatorni kompaktlikka tekshiring.

Yechish. A ni kompakt operator deb faraz qilaylik. U holda quyidagi $\Phi = \{x \in C[0,1] : x(t) = 0,\ t \in [0,\ 0{,}5]\}$ to'plamda aniqlangan $(Bx)(t) = tx(t)$, $D(B) = \Phi$ operator ham A ning qismi sifatida kompakt operator bo'lishi kerak. Lekin B operator Φ to'plamni yana Φ to'plamga akslantiradi va chegaralangan teskari operatorga ega:

$$(B^{-1}y)(t) = \frac{y(t)}{t}, \qquad D(B^{-1}) = \Phi.$$

18.2-natijaga asosan cheksiz o'lchamli fazoda kompakt operatorning chegaralangan teskarisi mavjud emas. Demak, A kompakt operator emas.

24.3. $C[0,1]$ Banax fazosida

$$(Ax)(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t x(s)ds, & t \neq 0, \\ (Ax)(0) = x(0) \end{cases}$$

formula bilan aniqlangan A operatorning chegaralangan, ammo kompakt emasligini ko'rsating.

Yechish. a) A operator uchun $D(A) = C[0,1]$ va $\operatorname{Im} A \subset C[0,1]$ ekanligini, ya'ni ixtiyoriy $x \in C[0,1]$ uchun $Ax \in C[0,1]$ ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $x \in C[0,1]$ uchun $y(t) = (Ax)(t)$ funksiyaning $t = 0$ nuqtada o'ngdan uzluksizligi x funksiyaning $t = 0$ nuqtada uzluksizligidan va

$$|y(t) - y(0)| = \left|\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t x(0)\,ds\right| \le \frac{1}{t}\int_0^t |x(s) - x(0)|\,ds$$

tengsizlikdan kelib chiqadi. Endi $t_0 \neq 0$ bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda ixtiyoriy $0 < t \le 1$ uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y(t) - y(t_0) = \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds - \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} x(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_{t_0}^t x(s)ds + \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_0}\right)\int_0^{t_0} x(s)ds$$

yoki

$$|y(t)-y(t_0)| \le \frac{\|x\|}{t}|t-t_0| + \left|\frac{1}{t}-\frac{1}{t_0}\right|\|x\|. \tag{24.2}$$

(24.2) dan $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y(t_0)$ tenglik kelib chiqadi. Shunday qilib, y funksiya $[0,1]$ da uzluksiz ekan, ya'ni $y = Ax \in C[0,1]$.

b) Endi A ning chegaralangan operator ekanligini ko'rsatamiz.

$$\|Ax\| = \max_{0\le t\le 1}\left|\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds\right| \le \|x\| \max_{0\le t\le 1}\frac{1}{t}\int_0^t ds = \|x\|.$$

Demak, $\|A\| \le 1$, ya'ni A chegaralangan operator ekan.

c) A kompakt operator emasligini ko'rsatamiz. Uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi $x_n(t)$, $n = 0,1,2,\ldots$, ni quyidagicha quramiz:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & agar \quad t \notin (2^{-n-1},\ 2^{-n}), \\ 1 - 2^{n+2}\left|t - 3\cdot 2^{-n-2}\right|, & agar \quad t \in (2^{-n-1},\ 2^{-n}). \end{cases}$$

$\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlikdir, chunki ixtiyoriy x_n uchun

$$\|x_n\| = \max_{0\le t\le 1}|x_n(t)| = 1.$$

$y_n(t) = (Ax_n)(t)$, $n = 1,2,\ldots$, funksiyalarni topamiz:

$$y_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0,\ 2^{-n-1}\right], \\ \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \left(1 - 2^{n+2}\left|s - 3\cdot 2^{-n-2}\right|\right)ds, & t \in (2^{-n-1}, 2^{-n}), \\ \dfrac{1}{t}2^{-n-2}, & t \in [2^{-n}, 1]. \end{cases}$$

U holda

$$y_n(2^{-n}) = 2^n \cdot 2^{-n-2} = 2^{-2},\ \ y_{n-m}(2^{-n}) = 0,\ \ n = 2,3,4,\ldots,\quad m = 1,2,3,\ldots,\ m \ne n$$

chunki $y_{n-m}(t) = 0$, $t \in [0, 2^{-n+m-1}]$. Bu tengliklardan $n \ne m$ bo'lganda

$$\|y_n - y_m\| \ge 2^{-2} \tag{24.3}$$

kelib chiqadi. (24.3) tengsizlikdan ko'rinadiki, $\{y_n = Ax_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlachuvchi qismiy ketma-ketlik ajranib olish mumkin emas. Bundan A kompakt operator emas degan xulosaga kelamiz.

24.4. $A:C[a,b]\to C[a,b]$, $(Ax)(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt$

operator berilgan. Bu yerda $K(s,t)$ $T=\{(s,t):\ a\le s,t\le b\}$ kvadratda uzluksiz bo'lgan biror funksiya. Shu operatorning kompakt ekanligini ko'rsating.

Yechish. $K(s,t)$ funksiya T yopiq sohada uzluksiz bo'lganligi sababli Veyershtrass teoremasiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday n natural son va

$$P_n(s,t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}s^it^j$$

ko'phad mavjud bo'lib,

$$\|K-P_n\|\le\max_{a\le s,t\le b}|K(s,t)-P_n(s,t)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Aytaylik, k,l - ixtiyoriy natural sonlar bo'lsin. $C[a,b]$ ni bir o'lchamli ct^k ko'rinishdagi funksiyalar fazosiga akslantiruvchi

$$(A_{k,l}x)(s)=s^k\int_a^b t^l\,x(t)\,dt$$

operatorni qaraymiz. $A_{k,l}$ chegaralangan va bir o'lchamli operator bo'lganligi uchun 17.2-teoremaga ko'ra u kompakt operator bo'ladi. Ixtiyoriy n uchun

$$(A_nx)(t)=\int_a^b P_n(s,t)x(t)dt$$

operator $A_{k,l}$ ko'rinishdagi kompakt operatorlarning chekli chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lganligi uchun kompakt operatordir. Bundan tashqari,

$$\|A_n x - Ax\| = \max_{a\le s\le b}\left|\int_a^b P_n(s,t)x(t)\,dt - \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt\right| \le$$
$$\max_{a\le s\le b}\int_a^b |P_n(s,t)-K(s,t)|\cdot|x(t)|\,dt \le (b-a)\cdot\|P_n - K\|\cdot\|x\|. \tag{24.4}$$

(24.4) dan

$$\|A_n - A\| \le (b-a)\cdot\|P_n - K\| \le \varepsilon(b-a) \tag{24.5}$$

tengsizlik kelib chiqadi. (24.5) dagi $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lganligi sababli shunday $P_n(s,t)$ ko'p hadlar ketma-ketligini tanlash mumkinki,

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0.$$

Shunday qilib, $\{A_n\}$ kompakt operatorlar ketma-ketligi A operatorga tekis yaqinlashar ekan. U holda 18.1-natijaga ko'ra A ning kompakt operator ekanligini olamiz.

Izoh. 24.4-misolda keltirilgan A operatorning kompaktligini $K(s,t)$ ning $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda tekis uzluksizligidan va Arsela teoremasidan ham keltirib chiqarish mumkin (3.6-teoremaga qarang).

24.5. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t^4)$

operatorning kompakt emasligini ko'rsating.

Yechish. Dastlab A teskarilanuvchan operator ekanligini ko'rsatamiz. $Ax = 0$ yoki $x(t^4) = 0$ tenglama $t^4 = s$ almashtirishdan keyin $x(s) = 0$ tenglamaga keladi. Shuning uchun, $Ax = 0$ tenglama faqat $x = 0$ yechimga ega, shunday ekan, A teskarilanuvchan operator. Ixtiyoriy $y \in C[0,1]$ uchun $Ax = y$ tenglama yoki $x(t^4) = y(t)$ tenglamani yechamiz. Agar $s = t^4$ almashtirishni olsak, $0 \le t \le 1$ bo'lganda $0 \le s \le 1$ bo'ladi va $x(t^4) = y(t)$ tenglama $x(s) = y(\sqrt[4]{s})$ ko'rinishni oladi, ya'ni $Ax = y$ tenglama yechimi $x(t) = y(\sqrt[4]{t})$ ko'rinishga ega. Bu yerdan A^{-1} operator $C[0,1]$ fazoning hamma yerida aniqlanganligi va $(A^{-1}y)(t) = y(\sqrt[4]{t})$ formula vositasida ta'sir qilishi kelib chiqadi. Endi ixtiyoriy $y \in C[0,1]$ uchun

$$\left\|A^{-1}y\right\| \le \max_{0\le t\le 1}\left|y(\sqrt[4]{t})\right| = \max_{0\le\sqrt[4]{t}\le 1}\left|y(\sqrt[4]{t})\right| = \max_{0\le s\le 1}|y(s)| = \|y\|$$

munosobatlar o'rinli bo'lgani uchun A^{-1} chegaralangan bo'ladi. U holda 18.2- natijaga ko'ra, A kompakt operator emas.

24.6. $\varphi \in C[0,1]$ nolmas funksiyaga qanday shartlar qo'yilganda $A: C[0,1 \to C[0,1]$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ operator kompakt bo'ladi.

24.7. $A: C[0,1 \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)x(t_k)$

operator berilgan, bu yerda $K(s,t)$, $T = \{(s,t):\ 0 \le s,t \le 1\}$ birlik kvadratda uzluksiz bo'lgan biror funksiya. $\varphi_k \in C[0,1]$, $t_k \in [0,1]$, $k = 1,2,\dots,n$. Bu operatorning kompaktligini isbotlang.

24.8. $Ax(t) = x'(t)$ differensial operator

a) $C^{(1)}[0,1]$ ni $C[0,1]$ ga;

b) $C^{(2)}[0,1]$ ni $C^{(1)}[0,1]$ ga;

c) $C^{(2)}[0,1]$ ni $C[0,1]$ ga,

akslantiruvchi operator sifatida kompakt bo'ladimi?

24.9. $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$

operatorning kompakt bo'lishini isbotlang.

24.10. Quyidagi operatorlardan qaysilari kompakt operator bo'ladi?

a) $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$;

b) $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$;

c) $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$.

24.11. Quyidagi ichiga joylashtirish operatorlarining kompakt bo'lishini isbotlang:

a) $I: C^{(1)}[a,b] \to C[a,b]$, $Ix = x$;

b) $I: H^{(1)}[a,b] \to C[a,b], \quad Ix = x$.

Bu yerda $H^{(1)}[a,b]$ -$[a,b]$ kesmada uzluksiz defferensiallanuvchi funksiyalar fazosi bo'lib, unda skalyar ko'paytma

$$(x,y) = \int_a^b [x(t)\overline{y(t)} + x'(t)\overline{y'(t)}]\,dt$$

tenglik bilan aniqlanadi.

24.12. $A: H^{(1)}[a,b] \to L_2[a,b], \quad Ax(t) = x'(t)$

operatorning kompakt ekanligini isbotlang.

24.13. $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1], \quad Ax(t) = \int_{-1}^{1} t^2 s\, x(s)\,ds$

operatorning kompakt ekanligini isbotlang va spektrini toping.

24.14. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 ts(1-ts)x(s)\,ds$

operatorning kompakt ekanligini isbotlang va spektrini toping.

24.15. O'z-o'ziga qo'shma operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o'zaro ortogonal ekanligini isbotlang.

24.16. Cheksiz o'lchamli H Hilbert fazoda berilgan A o'z-o'ziga qo'shma kompakt operator cheklita xos qiymatlarga ega bo'lsin. U holda $\lambda = 0$ son A operatorninf xos qiymati bo'lishini isbotlang.

24.17. H separabel Hilbert fazoda A kompakt operator berilgan bo'lsin.

a) A^*A ning o'z-o'ziga qo'shma kompakt operator bo'lishini isbotlang.

b) $A^*Ax = \sum_n \mu_n (x, h_n) h_n$ tasvirda barcha n larda $\mu_n > 0$ ekanligini isbotlang.

c) $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}, \quad e_n = \frac{1}{\lambda_n} Ah_n$ bo'lsin. $\{e_n\}$ lar ortonormal sistema tashkil qilishini va ixtiyoriy $x \in H$ lar uchun

$$Ax = \sum_n \lambda_n (x, h_n) e_n$$

tasvir o'rinli ekanligini isbotlang (λ_n lar A operatorning singulyar sonlari deb ataladi).

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyida berilgan operatorlarning kompaktligini ko'rsating.

24.18. $A: C[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = \int_0^1 (e^{s+t} + st)x(t)\,dt$.

24.19. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi], \quad (Ax)(s) = \int_0^\pi \cos(s+t)x(t)\,dt$.

24.20. $A: \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (x_1, \frac{x_2}{\ln 2}, \frac{x_3}{\ln 3}, \ldots, \frac{x_n}{\ln n}, \ldots)$.

24.21. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad (Ax)(s) = \int_0^1 (s^2 t + st^2)x(t)\,dt$.

24.22. $A: C[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = x(0)t + x(1)t^2$.

24.23. $A: L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi], \quad (Ax)(s) = \int_0^\pi (s\cos t + t\cos s)x(t)\,dt$.

24.24. $A: \ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (0, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, \ldots, 0, \frac{x_{2n}}{2n}, \ldots)$.

24.25. $A: \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (5x_1, 4x_2 3x_3, 2x_4, x_5, \frac{1}{2}x_6, \ldots, \frac{1}{n-4}x_n, \ldots)$.

24.26. $A: m \to m, \quad Ax = (x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_5, x_6, 0, 0, 0, \ldots)$.

24.27. $A: C[0,2] \to C[0,2], \quad (Ax)(s) = \int_0^2 \sin(s+t)x(t)\,dt$.

24.28. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi], \quad (Ax)(s) = \int_0^\pi \cos(s-t)x(t)\,dt$.

24.29. $A: \ell_3 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\ln 2x_1, \ln(1+\frac{1}{2})x_2, \ldots, \ln(1+\frac{1}{n})x_n, \ldots\right)$.

24.30. $A: \ell_5 \to \ell_5, \quad Ax = \left(arctg 1 \cdot x_1, arctg\frac{1}{2} \cdot x_2, \ldots, arctg\frac{1}{n} \cdot x_n, \ldots\right)$.

24.31. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad (Ax)(s) = \int_0^1 \frac{1}{2-st}x(t)\,dt$.

24.32. $A:C[0,1]\to C[0,1],\quad (Ax)(s)=\int\limits_0^1\frac{1}{1+st}\,x(t)\,dt$.

24.33. $A:\ell_1\to\ell_1,\quad Ax=(x_1,2x_2,3x_3,\ldots,9x_9,10x_{10},0,0,\ldots)$.

24.34. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax=(100x_1,99x_2,\ldots,2x_{99},x_{100},\frac{1}{101}x_{101},\ldots,\frac{1}{n}x_n,\ldots)$.

24.35. $A:C[0,3]\to C[0,3],\quad (Ax)(t)=x(0)+x(1)t+x(2)t^2+x(3)t^3$.

24.36. $A:\ell_4\to\ell_4,\quad Ax=(0,0,0,0,x_1,\frac{1}{2}x_2,\frac{1}{3}x_3,\frac{1}{4}x_4,\ldots,\frac{1}{n}x_n,\ldots)$.

24.37. $A:C[-1,1]\to C[-1,1],\quad (Ax)(s)=\int\limits_{-1}^1\frac{1}{9-s^2t^2}x(t)dt$.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyida berilgan operatorlarning kompakt emasligini ko'rsating.

24.38. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax=(x_1,\frac{1}{2}x_2,\ldots,\frac{1}{10}x_{10},x_{11},x_{12},\ldots)$.

24.39. $A:C[0,1]\to C[0,1],\quad (Ax)(t)=(t+1)x(t)$.

24.40. $A:\ell_1\to\ell_1,\quad Ax=(0,x_2,0,x_4,\ldots,0,x_{2n},\ldots)$.

24.41. $A:\ell_3\to\ell_3,\quad Ax=(x_1,\frac{1}{2}x_2,x_3,\frac{1}{4}x_4,\ldots,x_{2n+1},\frac{1}{2n}x_{2n},\ldots)$.

24.42. $A:C[0,1]\to C[0,1],\quad (Ax)(t)=x(t^2)$.

24.43. $A:C[0,1]\to C[0,1],\quad (Ax)(t)=(1+2t)x(t)$.

24.44. $A:\ell_4\to\ell_4,\quad Ax=\left(2x_1,(1+\frac{1}{2})^2x_2,(1+\frac{1}{3})^3x_3,\ldots,(1+\frac{1}{n})^n x_n,\ldots\right)$.

24.45. $A:C[-1,1]\to C[-1,1],\quad (Ax)(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$.

24.46. $A:C[-1,1]\to C[-1,1],\quad (Ax)(t)=(t^2+1)x(t)$.

24.47. $A:\ell_1\to\ell_1,\quad Ax=\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot x_1,\sin\frac{2\pi}{4}\cdot x_2,\ldots,\sin\frac{n\pi}{4}\cdot x_n,\ldots\right)$.

24.48. $A:C[-1,1]\to C[-1,1],\quad (Ax)(t)=x(t^3)$.

24.49. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax=(2x_1,0,2x_3,0,\ldots,2x_{2n-1},0,\ldots)$.

24.50. $A: C[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = \sqrt{t+1}\,x(t).$

24.51. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad (Ax)(t) = (\sin t + \cos t)x(t).$

24.52. $A: \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = \left(\frac{1}{5}x_1, \frac{2}{9}x_2, \frac{3}{13}x_3, \ldots, \frac{n}{4n+1}x_n, \ldots\right).$

24.53. $A: \ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (x_1, (1+\frac{1}{4})^2 x_2, (1+\frac{1}{9})^3 x_3, \ldots, (1+\frac{1}{n^2})^n x_n, \ldots).$

24.54. $A: L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty), \quad (Ax)(t) = \frac{t+3}{t+4}x(t).$

24.55. $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1], \quad (Ax)(t) = (t^2+2t+3)x(t).$

24.56. $A: \ell_3 \to \ell_3, \quad Ax = (x_1, 0,0,0, x_5, 0,0,0, x_9, \ldots, x_{4n+1}, 0,0,0, \ldots)$

24.57. $A: \ell_3 \to \ell_3, \quad Ax = (0,0,0,0,0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$

24.2. Integral tenglamalar

Integral tenglamalarga oid topshiriqlarni bajarish uchun Fredholm integral tenglamasining ta'rifini, uning turlarini va Fredholm teoremalarini o'rganib chiqish kerak. Kerakli ma'lumotlarni 19-20-§ lardan qarab olish mumkin.

Integral tenglamalarni yechishga doir bir nechta misollar qaraymiz.

24.58. Ushbu

$$x(s) - \int_{-1}^{1} (st + s^2)x(t)dt = 0$$

ajralgan yadroli integral tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan integral tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$x(s) - s\int_{-1}^{1} t\,x(t)dt - s^2\int_{-1}^{1} x(t)dt = 0 \tag{24.6}$$

Agar

$$\alpha_1 = \int_{-1}^{1} t\,x(t)dt, \qquad \alpha_2 = \int_{-1}^{1} x(t)dt \tag{24.7}$$

belgilashlarni kiritsak, (24.6) dan $x(s)$ uchun

$$x(s)=\alpha_1 s+\alpha_2 s^2 \tag{24.8}$$

ifodani hosil qilamiz. Agar (24.8) dagi α_1 va α_2 o'zgarmaslar aniqlansa, (24.8) tenglik bilan aniqlangan x funksiya berilgan integral tenglamaning yechimi bo'ladi. α_1 va α_2 o'zgarmaslarni aniqlash uchun (24.8) ni (24.7) ga qo'yib, quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \alpha_1=\int\limits_{-1}^{1} t\,(\alpha_1 t+\alpha_2 t^2)\,dt=\alpha_1\int\limits_{-1}^{1} t^2 dt+\alpha_2\int\limits_{-1}^{1} t^3 dt, \\ \alpha_2=\int\limits_{-1}^{1}(\alpha_1 t+\alpha_2 t^2)\,dt=\alpha_1\int\limits_{-1}^{1} t\,dt+\alpha_2\int\limits_{-1}^{1} t^2 dt. \end{cases} \tag{24.9}$$

Endi

$$\int\limits_{-1}^{1} t\,dt=0, \qquad \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt=\frac{2}{3}, \qquad \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt=0$$

tengliklarni nazarda tutsak, (24.9) sistemani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} \alpha_1=\frac{2}{3}\alpha_1, \\ \alpha_2=\frac{2}{3}\alpha_2 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} \frac{1}{3}\alpha_1=0, \\ \frac{1}{3}\alpha_2=0. \end{cases}$$

Bu yerdan $\alpha_1=\alpha_2=0$ ni olamiz. Demak, berilgan tenglama yechimi $x(s)\equiv\alpha_1 s+\alpha_2 s^2\equiv 0$ nol funksiyadan iborat bo'ladi.

24.59. Ushbu

$$x(s)-\lambda\int\limits_0^{2\pi}\sin(3s+t)x(t)dt=\cos s$$

ajralgan yadroli integral tenglamani yeching.

Yechish. Agar $\sin(3s+t)=\sin 3s\cdot\cos t+\cos 3s\cdot\sin t$ ayniyatni hisobga olsak, berilgan integral tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$x(s)=\lambda\sin 3s\int\limits_0^{2\pi}\cos t\;x(t)\,dt+\lambda\cos 3s\int\limits_0^{2\pi}\sin t\;x(t)\,dt+\cos s \tag{24.10}$$

Bu yerda

$$\alpha_1=\int\limits_0^{2\pi}\cos t\,x(t)dt, \qquad \alpha_2=\int\limits_0^{2\pi}\sin t\,x(t)dt \tag{24.11}$$

belgilashlarni kiritsak, (24.10) dan $x(s)$ uchun

$$x(s)=\lambda\alpha_1\sin 3s+\lambda\alpha_2\cos 3s+\cos s \tag{24.12}$$

ifodani olamiz. Endi α_1 va α_2 o'zgarmaslarni topish uchun (24.12) ni (24.11) tengliklarga qo'yib,

$$\begin{cases}\alpha_1=\lambda\alpha_1\int\limits_0^{2\pi}\sin 3t\cdot\cos t\,dt+\lambda\alpha_2\int\limits_0^{2\pi}\cos 3t\cdot\cos t\,dt+\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\\ \alpha_2=\lambda\alpha_1\int\limits_0^{2\pi}\sin 3t\cdot\sin t\,dt+\lambda\alpha_2\int\limits_0^{2\pi}\sin t\cdot\cos 3t\,dt+\int\limits_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt\end{cases} \tag{24.13}$$

algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Agar (24.13) da

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin 3t\cdot\cos t\,dt=0,\quad \int\limits_0^{2\pi}\cos 3t\cdot\cos t\,dt=0,\quad \int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\pi,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin 3t\cdot\sin t\,dt=0,\quad \int\limits_0^{2\pi}\sin t\cdot\cos 3t\,dt=0,\quad \int\limits_0^{2\pi}\sin t\cdot\cos t\,dt=0$$

ekanligini e'tiborga olsak, $\alpha_1=\pi$, $\alpha_2=0$ larni hosil qilamiz. Demak, tekshirilayotgan integral tenglama λ parametrning barcha nolmas qiymatlari uchun yagona yechimga ega va bu yechim $x(s)=\pi\lambda\sin 3s+\cos s$ funksiyadan iborat.

24.60. Ushbu

$$x(s)=1+s+\int\limits_0^s(s-t)x(t)\,dt \tag{24.14}$$

Volterra tipidagi integral tenglamani ketma-ket yaqinlashishlar usuli yordamida yeching.

Yechish. Boshlang'ich yaqinlashish sifatida $x_0(s)\equiv 1$ funksiyani olib, keyingi yaqinlashishlarni

$$x_n(s)=1+s+\int\limits_0^s(s-t)\,x_{n-1}(t)\,dt,\quad n=1,\,2,\ldots$$

iteratsion formula yordamida topamiz:

$$x_1(s)=1+s+\int_0^s(s-t)dt=1+s+\frac{s^2}{2!}.$$

$$x_2(s)=1+s+\int_0^s(s-t)\left(1+t+\frac{t^2}{2!}\right)dt=1+s+\frac{s^2}{2!}+\frac{s^3}{3!}+\frac{s^4}{4!}.$$

$$x_3(s)=1+s+\int_0^s(s-t)\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}\right)dt=1+s+\frac{s^2}{2!}+\frac{s^3}{3!}+\frac{s^4}{4!}+\frac{s^5}{5!}+\frac{s^6}{6!}.$$

Bu jarayonni n marta takrorlash natijasida quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_n(s)=1+s+\frac{s^2}{2!}+\frac{s^3}{3!}+\ldots+\frac{s^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{s^{2n}}{(2n)!}.$$

Bu yerdan ko'rinib turibdiki, $x_n(s)$ funksiya $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}=e^s$ qatorning $2n$ - xususiy yig'indisidan iborat. Shuning uchun

$$x(s)=\lim_{n\to\infty}x_n(s)=e^s.$$

Demak, (24.14) integral tenglama yechimi $x(s)=e^s$ funksiyadan iborat ekan.

Endi mustaqil yechish uchun misollar keltiramiz.

24.61. Agar:

a) $a=-\pi/4,\ b=\pi/4,\ K(t,s)=tgs,\ f(t)=1;$

b) $a=0,\ b=\pi/2,\ K(t,s)=\sin t\cos s,\ f(t)=\sin t;$

c) $a=0,\ b=\pi,\ K(t,s)=\sin t\cos s,\ f(t)=\sin t;$

d) $a=0,\ b=1,\ K(t,s)=t+s-2ts,\ f(t)=t+t^2;$

e) $a=-1,\ b=1,\ K(t,s)=ts-t^2s^2,\ f(t)=t^2+t^4;$

f) $a=0,\ b=2\pi,\ K(t,s)=|\pi-s|\sin t,\ f(t)=t;$

g) $a=0,\ b=\pi,\ K(t,s)=\sin s+s\cos t,\ f(t)=1-2t/\pi;$

h) $a=0,\ b=\pi,\ K(t,s)=\sin(t-2s),\ f(t)=\cos 2t;$

bo'lsa, $C[a,b]$ fazoda

$$x(t)-\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds=f(t)$$

tenglamaning yechimini toping.

24.62. Agar:

a) $a=0,\ b=2\pi,\quad K(t,s)=\sin(t+s)$;

b) $a=0,\ b=\pi,\quad K(t,s)=\cos(t+s)$;

c) $a=0,\ b=1,\quad K(t,s)=2ts-4t^2$;

d) $a=-1,\ b=1,\quad K(t,s)=ts+t^2s^2$

bo'lsa, $C[a,b]$ fazoda

$$x(t)-\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds=0$$

tenglamaning yechimini toping.

24.63. Agar:

a) $a=-1,\ b=1,\ K(t,s)=ts,\quad f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$;

b) $a=0,\ b=\pi,\quad K(t,s)=\cos(t+s),\quad f(t)=\alpha\sin s+\beta$;

c) $a=-1,\ b=1,\quad K(t,s)=t^2-2ts,\quad f(t)=\alpha t^2-\beta t$;

d) $a=-1,\ b=1,\quad K(t,s)=3t+ts-5t^2s^2,\quad f(t)=\alpha t$

bo'lsa, bu tenglama erkin hadiga kiruvchi α,β,γ parametrlarning barcha qiymatlarida $C[a,b]$ fazoda

$$x(t)-\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds=f(t)$$

tenglamaning yechimini toping.

24.64. Ixtiyoriy $\lambda\in C$ va ixtiyoriy $f\in L_2[0,2\pi]$ uchun

$$x(t)-\lambda\int_0^{2\pi}\sin(t-2s)x(s)ds=f(t)$$

tenglama yechimga ega ekanligini isbotlang va uning yechimini toping.

24.65. Agar:

a) $a=0,\ b=1,\ K(t,s)=\begin{cases} t, & agar\ 0\le t\le s\le 1,\\ s, & agar\ 0\le s<t\le 1;\end{cases}$

b) $a=0, b=\pi/2,\ K(t,s)=\begin{cases}\sin t\cos s, & agar\ 0\le t\le s\le\pi/2,\\ \sin s\cos t, & agar\ 0\le s<t\le\pi/2;\end{cases}$

c) $a=0,\ b=\pi/2,\ K(t,s)=\begin{cases}\sin t\cos s, & agar\ 0\le t\le s\le\pi,\\ \sin s\cos t, & agar\ 0\le s<t\le\pi;\end{cases}$

d) $a=0,\ b=1,\ K(t,s)=\begin{cases}s(t+1), & agar\ 0\le t\le s\le 1,\\ t(s+1), & agar\ 0\le s<t\le 1;\end{cases}$

e) $a=0,\ \ b=1,\quad K(t,s)=e^{-|t-s|}$;

f) $a=0,\ b=1,\ K(t,s)=\begin{cases}(t+1)(s-2), & agar\ 0\le t\le s\le 1,\\ (s+1)(t-2), & agar\ 0\le s<t\le 1\end{cases}$

bo'lsa, $C[a,b]$ fazoda

$$x(t)-\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds=0$$

integral tenglamaning λ_n xarakteristik sonlari va φ_n xos funksiyalarini toping.

24.66. Agar:

a) $f(t)=t,\ \ K(t,s)=\begin{cases}t(s-1), & agar\ 0\le t\le s\le 1,\\ s(t-1), & agar\ 0\le s<t\le 1;\end{cases}$

b) $f(t)=\cos\pi t,\qquad K(t,s)=\begin{cases}(t+1)s, & agar\ 0\le t\le s\le 1,\\ (s+1)t, & agar\ 0\le s<t\le 1\end{cases}$

bo'lsa,

$$x(t)-\lambda\int_0^1 K(t,s)x(s)ds=f(t)$$

integral tenglamaning yechimini toping.

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Integral tenglama λ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega, qanday qiymatlarida yechim mavjud emas, qanday qiymatlarida yechim cheksiz ko'p. Yechim mavjud bo'lgan hollarda yechimni toping.

24.67. $x(s)-\lambda\int_0^1 s(1+t)x(t)dt=s^2$

24.68. $x(s)-\lambda\int_0^1 (s+s^2t)x(t)dt=s^2+1$

24.69. $x(s) - \lambda\int_0^1 s\,x(t)dt = \sin 2\pi s$

24.70. $x(s) - \lambda\int_0^1 (t + st)x(t)dt = s^2 - 1$

24.71. $x(s) - \lambda\int_0^1 (1 + 2s)x(t)dt = 1 - \frac{3}{2}s$

24.72. $x(s) - \lambda\int_{-1}^1 (t + s + s^2 t)x(t)dt = s^2 + 2s$

24.73. $x(s) - \lambda\int_0^1 s\sin 2\pi t\, x(t)dt = s$

24.74. $x(s) - \lambda\int_0^1 (t + st + s^2 t)x(t)dt = 2s^2 + s$

24.75. $x(s) - \lambda\int_{-\pi/4}^{\pi/4} tg\,t \cdot x(t)dt = \cos s$

24.76. $x(s) - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} \cos(s + t)x(t)dt = \sin s$

24.77. $x(s) - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot \cos t\, x(t)dt = \cos s$

24.78. $x(s) - \int_{-1}^1 (st + s^2 t^2)x(t)dt = 1 + s^2$

24.79. $x(s) - \lambda\int_{-1}^1 (s + s^2 t)x(t)dt = \sin \pi s$

24.80. $x(s) - \lambda\int_0^{\pi} \sin(s + t)x(t)dt = \cos s$

24.81. $x(s) - \lambda\int_{-1}^1 (s + t)x(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}s$

24.82. $x(s) - \lambda\int_{-1}^1 (1 + st + t^2)x(t)dt = 1 + s$

24.83. $x(s)-\lambda\int\limits_{0}^{1}\arccos t\cdot x(t)dt = 1/\sqrt{1-s^2}$

24.84. $x(s)-\lambda\int\limits_{0}^{1} e^{s+t}\,x(t)dt = e^{2s}$

24.85. $x(s)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}(1+t+st^2)x(t)dt = s^2$

24.86. $x(s)-\lambda\int\limits_{0}^{1}(1+t+s+st)\,x(t)dt = 2s+s^2$

Laboratoriya ishlari uchun topshiriqlar. Quyidagi Volterra yoki Fredholm integral tenglamasini ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida yeching. Nolinchi yaqinlashish berilgan. Iteratsiyaning ikkinchi hadi $x_2(s)$ ni toping.

24.87. $x(s)=s+\int\limits_{0}^{s}x(t)dt, \quad x_0(s)=s$

24.88. $x(s)=1+\int\limits_{0}^{s}(s-t)x(t)dt, \quad x_0(s)\equiv 1$

24.89. $x(s)=2s^2+2-\int\limits_{0}^{s}s\,x(t)dt, \quad x_0(s)\equiv 2$

24.90. $x(s)=s+1+\int\limits_{0}^{s}x(t)dt, \quad x_0(s)=2s$

24.91. $x(s)=s+\int\limits_{0}^{s}(s-t)x(t)dt, \quad x_0(s)\equiv 0$

24.92. $x(s)=1+\int\limits_{0}^{s}(t-s)x(t)dt, \quad x_0(s)\equiv 0$

24.93. $x(s)=\frac{5}{6}s-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1}(s+t)x(t)dt, \quad x_0(s)\equiv 0$

24.94. $x(s)=1+\int\limits_{0}^{s}x(t)dt, \quad x_0(s)\equiv 0$

24.95. $x(s) = e^s - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)dt, \qquad x_0(s) \equiv 0$

24.96. $x(s) = \frac{1}{2}\int_0^\pi t\,s\,x(t)dt + \frac{5}{6}s, \qquad x_0(s) = s$

24.97. $x(s) = \frac{1}{3}\int_0^1 (s+t)x(t)dt + \frac{5}{6}s - \frac{1}{9}, \qquad x_0(s) = 2s$

24.98. $x(s) = \frac{1}{3}\int_0^1 x(t)dt + s, \qquad x_0(s) = 3s$

24.99. $x(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 tx(t)dt + s + 1, \qquad x_0(s) \equiv 1$

24.100. $x(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t \cdot x(t)dt + 1, \qquad x_0(s) \equiv 1$

24.101. $x(s) = \pi\int_0^1 (1-s)\sin 2\pi t\, x(t)dt + \frac{1}{2}(1-s), \qquad x_0(s) \equiv 2$

24.102. $x(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin s \cdot t\, x(t)dt + 2\sin s, \qquad x_0(s) \equiv 1$

24.103. $x(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)dt + \sin \pi s, \qquad x_0(s) \equiv 3$

24.104. $x(s) = s + \int_0^s x(t)dt, \qquad x_0(s) = s^2$

24.105. $x(s) = s + 1 + s^2\int_0^1 x(t)dt, \qquad x_0(s) = 2s$.

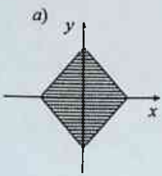
Javoblar va ko'rsatmalar

21-§

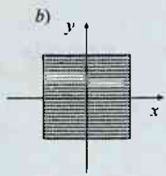
1. ρ_1 metrika bo'ladi, ρ_2, ρ_3, ρ_4 lar metrika bo'lmaydi. **2.** Ha. **3.** ρ_3 metrika bo'lmaydi, $\rho_1, \rho_2, \rho_4, \rho_5$ lar metrika bo'ladi. **16.** a) Ha. b) Yo'q. c) Ha. d) Ha. **17.** $C^{(1)}[0;1]$ da yo'q, $L_1[0;1]$ da ha. **18.** 17-misoldan foydalaning. **20.** Har bir $k \in N$ uchun $[0,1]$ kesmada $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_k^{(k)}$ funksiyalarni quyidagi usul bilan aniqlaymiz: $f_i^{(k)}(0) = 1$ va

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad \dfrac{i-1}{k} < x \le \dfrac{i}{k}, \\ 0, & \text{agar} \quad x \in (0;1] \setminus \left(\dfrac{i-1}{k}; \dfrac{i}{k} \right] \end{cases}$$

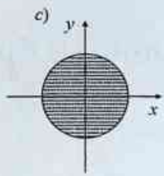
Bu funksiyalarni tartib bilan nomerlab, $\{g_n\}$ ketma-ketlikni hosil qilamiz. $\{g_n\}$ ketma-ketlik nol funksiyaga $L_1[0,1]$ fazoda yaqinlashadi va biror nuqtada ham nolga yaqinlashmaydi. **22.** 16-misoldagi ketma-ketliklarni tahlil qiling. **23.** x_n, y_n, z_n, e_n ketma-ketliklar barcha metrik fazolarda uzoqlashuvchi, u_n ketma-ketlik c_0, c va m metrik fazolarda yaqinlashuvchi, agar $\alpha p > 1$ bo'lsa, u ℓ_p fazoda ham yaqinlashuvchi, ℓ_1 da uzoqlashuvchi. **28.** Ha. **31.** a), b), c) larga mos yopiq sharlar 21.1-21.3 chizmalar,



21.1-chizma.

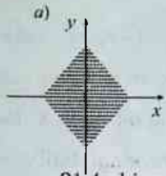


21.2-chizma.

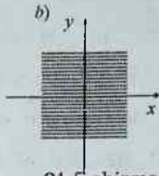


21.3-chizma.

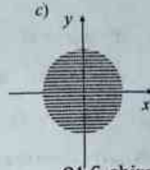
a), b), c) larga mos ochiq sharlar 21.4-21.6 chizmalar,



21.4-chizma.

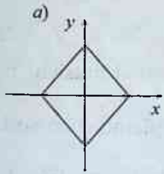


21.5-chizma.

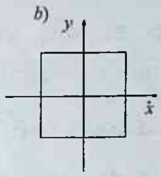


21.6-chizma

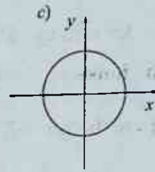
a), b), c) larga mos sferalar 21.7-21.9 chizmalar



21.7-chizma.

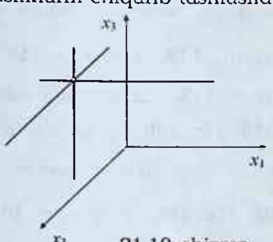


21.8-chizma.

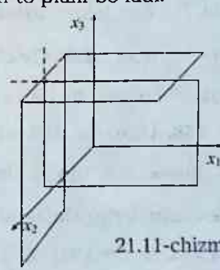


21.9-chizma.

d) $B(0,1)=\{0\}$, $B[0,1]$ - yopiq shar ox_1 va ox_2 o'qlarining birlashmasidan iborat. **32.** Radiusi 1 ga teng sfera - $(0,1,2)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlardan ularning kesishish nuqtasi $(0,1,2)$ ni chiqarib tashlashdan hosil bo'lgan to'plam bo'ladi, 21.10-chizmaga qarang. Radiusi 2 ga teng sfera - $(0,1,2)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata tekisliklariga parallel tekisliklardan, har juft tekislikning kesishish cizig'ini chiqarib tashlashdan hosil bo'lgan to'plam bo'ladi, 21.11-chizmaga qarang. Radiusi 3 ga teng sfera -- R^3 fazodan $(0,1,2)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata tekisliklariga parallel tekisliklarni chiqarib tashlashdan hosil bo'lgan to'plam bo'ladi.



21.10-chizma.



21.11-chizma.

33. a) $B(-\infty,r)=B(\infty,r)=\varnothing$. b) $B(-\infty,r)=(-\infty,-(1-r)/r)$, $B(\infty,r)=$ $=((1-r)/r,\infty)$ **34.** b) Diskret metrik fazodagi birlik ochiq shar uchun $diam\,B(x_0,1)=0<2\cdot 1$. c) Har doim to'g'ri emas. Diskret metrik fazoda $0=diam\,B(x_0,1)<diam\,B[x_0,1]=1$. **37.** Diskret metrik fazodagi birlik yopiq shar. **38.** 2.1-misolga qarang. **48.** 46-misolga qarang. $\frac{1}{4}=0{,}020202...$ tenglikni ko'rsating. **51.** Ha. **54.** Yo'q. **55.** $C[a;b]$. **56.** a) f - qat'iy monoton funksiya bo'lsa. b) f - qat'iy monoton funksiya bo'lib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ bo'lsa. **57.** To'ldirmasi $X=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ to'plamga izomorf. **58.** $(\Phi,\rho_1)\cong\ell_1$, $(\Phi,\rho_2)\cong m$. **63.** R da ratsional sonlar to'plami. **67.** $X=R$, $A=Q$. **74.** [0;1] da Riman yoki Dirixle funksiyasi. **83.** X ning sanoqli bo'lishi. **104.** $Fr[a,b]=Fr(a,b)=\{a,b\}$, $Fr\,Z=Z$, $FrQ=R$, $Fr[a,\infty)=\{a\}$, $Fr\varnothing=\varnothing$. **108.** Ha. **118.** $f(x)=K(x)$ - Kantorning zinapoya funksiyasi, $G=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. **119.** Ha. **123.** a) to'g'ri. b), c) va d) lar doim to'g'ri emas. **126.** a) uzluksiz. b) izometruya bo'ladi. **128.** a) va c) uzluksiz, b) uzluksiz emas. **129.** a) va d) uzluksiz, b), c) va e) lar uzluksiz emas. **130.** a), b) va d) lar tekis uzluksiz, c) uzluksiz, lekin tekis uzluksiz emas. **131.** a) va b) lar tekis uzluksiz, c) uzluksiz, lekin tekis uzluksiz emas, d) $\alpha\in(0,2)$ da tekis uzluksiz, $\alpha\geq 2$ da tekis uzluksiz emas. **132.** a) tekis uzluksiz, b) $\alpha\in(0,2)$ da tekis uzluksiz, $\alpha\geq 2$ da tekis uzluksiz emas. **133.** $f(x)=x^\alpha$, $\alpha>1$. **138.** Tekis uzluksiz bo'ladi. **139.** $f(x)=\sqrt{x}$. **140.** a) Uzluksiz bo'ladi. b) har doim uzluksiz emas. **145.** 126-misolga qarang. **147. 148.** Uzluksiz. **170.** a) Ha. b) Yo'q. **176.** Ha. **180.** f_1 uchun barcha juft funksiyalar qo'zg'almas nuqta bo'ladi. f_2 uchun barcha toq funksiyalar qo'zg'almas nuqta bo'ladi. **187.** Ha. **188.** $f(x)=\sqrt{x}$. **191.** a) x=1,414, b) x=3,321, c) x=-2,369. **196.** Yo'q. **197.** 4.1-misolning b) siga qarang. **199.** $\lambda\in(-q,q), 0<q<1$. **201.** $\lambda\in(0,1)$. **210.** $X=R$, $M=\{0;1;2^{-1};3^{-1};\ldots n^{-1},\ldots\}$. **214.** a) $\varepsilon=0{,}5$. b) $\varepsilon=\frac{1}{2n}$. **215.** $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **219.** $X=R^2$, $M=\{(x,y):y=0\}$, $F=\{(x,y):y=x^{-1}\}$. **220.** Birortasi ham tekis darajada uzluksiz emas. a), b), d) lar tekis chegaralangan. **224.** $C^{(1)}[a,b]$ fazodagi K toplam nisbiy kompakt bolishi uchun uning tekis chegaralangan hamda ozi va hosilalari tekis darajada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli. **225.** M_2, M_3, M_4. **227.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. **236.** Yo'q. **238.** Yo'q. **239.** ρ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. **240.** ρ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. **241.** ρ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. **242.** ρ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. **243.** ρ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. **244.** ρ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. **245.** ρ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. **246.** ρ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. **247.** ρ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. **248.** ρ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. **249.** ρ akslantirish metrikaning 3-shartini qanoatlantirmaydi. **250.** ρ akslantirish metrikaning 1-shartini qanoatlantirmaydi. **251.** ρ akslantirish metrikaning 2-3-sharlarini qanoatlantirmaydi. **252.** ρ akslantirish metrikaning 1-shartini qanoatlantirmaydi. **253.** ρ akslantirish metrikaning 1-shartini qanoatlantirmaydi. **254.** ρ akslantirish metrikaning 3-shartini qanoatlantirmaydi. **255.** ρ akslantirish metrikaning 1-shartini qanoatlantirmaydi. **256.** ρ akslantirish metrikaning 3-shartini qanoatlantirmaydi. **257.** ρ akslantirish metrikaning 3-shartini qanoatlantirmaydi. **258.** $\sqrt{2}$. **259.** $\sqrt{3}$. **260.** 2^{-1}. **261.** 2. **262.** 3. **263.** 5. **264.** 20. **265.** 6. **266.** 2. **267.** $2\sqrt{\pi}$.

$B:\ell_2\to\ell_2$, $Bx=(x_1,2x_2,\ldots,nx_n,\ldots)$. Agar $\{na_n\}$ chegaralangan bo'lsa, u holda $A\cdot B$ va $B\cdot A$ operatorlar ham chegaralangan bo'ladi, agar $\{na_n\}$ chegaralanmagan bo'lsa, u holda $A\cdot B$ va $B\cdot A$ operatorlar ham chegaralanmagan bo'ladi. Masalan, $a_n=\frac{1}{n}$ va $a_n=\frac{n-1}{n}$ hollarni qarang. **25.** $\|P\|=1$. **26.** a) $R(A)$ -juft funksiyalar to'plami, $R(B)$ - toq funksiyalar to'plami. Ikkalasi ham qism fazo tashkil qiladi. b) $\|A\|=\|B\|=1$. c) $A^2=A, B^2=B$, A va B lar proeksiyalash operatorlari bo'ladi. **32.** $\|A\|=2e^2$. **33.** $\|A\|=\frac{4}{\sqrt{15}}$. **34.** $\|A\|=\sqrt[3]{2}$. **35.** $\|A\|=5$. **36.** $\|A\|=2$. **37.** $\|A\|=2$. **38.** $\|A\|=1$. **39.** $\|A\|=\frac{1}{5}$. **40.** $\|A\|=\sup\limits_{n\geq1}|\sin n|$. **41.** $\|A\|=1$. **42.** $\|A\|=2$. **43.** $\|A\|=e$. **44.** $\|A\|=1$. **45.** $\|A\|=\frac{1}{\sqrt{19}}$. **46.** $\|A\|=3$. **47.** $\|A\|=\frac{1}{\sqrt{7}}$. **48.** $\|A\|=\frac{2}{3}$. **49.** $\|A\|=2+\frac{2}{\sqrt{15}}$. **50.** $\|A\|=1$. **51.** $\|A\|=2$. **52.** 1) $D(A)=C^{(1)}[0,1]\neq C[0,1]$. 2) Uzluksiz emas, chegaralangan emas. **53.** 1) $D(A)=\{x\in C[0,1]: t^{-2}x(t)\in C[0,1]\}\neq C[0,1]$. 2) Uzluksiz emas, chegaralangan emas. **54.** 1) $D(A)=\left\{x\in L_2[0,\infty): \int\limits_0^\infty s^4|x(s)|^2\,ds<\infty\right\}\neq L_2[0,\infty)$. 2) Uzluksiz emas, chegaralangan emas. **55.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **56.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **57.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **58.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **59.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **60'61.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **62.** .1) Yo'q. 2) Yo'q. **63.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **64.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **65.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **66.** 1) $D(A)=\ell_1$, ha. 2) Uzluksiz, chegaralangan. **67.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **68.** 1) Yo'q. 2) Yo'q. **69.** 1) Yo'q. 2) Uzluksiz emas, chegaralangan emas. **70.** 1) $D(A)=\left\{x\in L_2[0,1]: \int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{s^2}}|x(s)|\,ds<\infty\right\}\neq L_2[0,1]$. 2) Yo'q. **71.** 1) $D(A)=\left\{x\in L_1[0,\infty): \int\limits_0^\infty s^3|x(s)|\,ds<\infty\right\}\neq L_1[0,\infty)$. 2) Uzluksiz emas, chegaralangan emas. **77.** Ha. **81.** a) $R(A)$- bu $y(0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosi. b) A^{-1}- operator mavjud, lekin chegaralanmagan. **82.** b) $(A^{-1}x)(t) = x(t) - \int\limits_0^t e^{s-t} x(s)ds$.

83. $A^{-1}x(t) = x(t) - \dfrac{2}{e^2-1}\int\limits_0^1 e^{s+t} x(s)ds$. **84.** b) $A^{-1}x(t) = \int\limits_0^t x(s)\sin(t-s)ds$. **86.** $A^{-1}y = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3, -y_1 + y_2 + y_3, y_1 - y_2 + y_3)$.

87. $A^{-1}y = (y_1, y_1 - y_2, y_1 - y_2 - y_3)$.

88. $A^{-1}y = (y_1, \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3), \dfrac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3), y_4, y_5, \ldots)$.

89. $A^{-1}y = (y_1, 2y_2, \ldots, ny_n, \ldots)$.

90. $A^{-1}y = (y_1, y_2, y_3 - y_2, y_4 - y_3 + y_2, y_5 - y_4, y_6, y_7, \ldots)$.

91. $A^{-1}y = (\dfrac{1}{5}y_1 + \dfrac{2}{3}y_3, \dfrac{1}{2}y_2, \dfrac{2}{5}y_1 - \dfrac{1}{5}y_3)$.

92. $A^{-1}y = \dfrac{1}{3}(2y_1 - y_2 - 2y_3, y_1 - y_2 - y_3, 3y_3)$.

93. $A^{-1}y(t) = \int\limits_0^t y(s)ds$. **94.** $A^{-1}y(t) = \dfrac{1}{t}y'(t)$, $y(0) = 0$.

95. $A^{-1}y(t) = \dfrac{y(t)}{t+2} + \dfrac{1}{t+2}\dfrac{1}{1-\ln\dfrac{3}{2}}\int\limits_0^1 \dfrac{y(s)ds}{s+2}$. **96.** $A^{-1}y = (y_1, 2y_2, \ldots, ny_n, \ldots)$.

97. $A^{-1}y(t) = \dfrac{y(t)}{t+1} - \dfrac{t}{t+1}\dfrac{2}{1+2\ln 2}\int\limits_0^1 \dfrac{sy(s)ds}{s+1}$. **98.** $A^{-1}y(t) = \dfrac{y(t)}{1+\sin t}$.

99. $A^{-1}y(t) = \dfrac{y(t)}{t+1} - \dfrac{3+t}{6(t+1)}y(0) - \dfrac{t}{3(t+1)}y(1)$.

100. $A^{-1}y = \dfrac{1}{3}(-y_1 + 3y_2 - 2y_3, -y_1 + y_3, 2y_1 - 3y_2 - 4y_3)$.

101. $A^{-1}y = (y_1, 2y_2, \dfrac{3}{2}y_3, \ldots, \dfrac{n}{n-1}y_n, \ldots)$.

102. $A^{-1}y(t)=\frac{1}{t^2}y(t)$, $\frac{y(t)}{t^2}\in C[0,1], y(1)=0$

103. $A^{-1}y(t)=y(t)-\frac{2\sin t}{2+\pi}\int_0^{\pi} y(s)\sin s\,ds$.

104. $(A^{-1}y)_n=2\int_0^1 y(t)\sin 2\pi nt dt, A^{-1}:C[0,1]\to \ell_1$.

105. $(A^{-1}y)_n=n^2\int_{-1}^{1} y(t)\cos\pi nt dt, A^{-1}:C[-1,1]\to m$. **106-125** misollar uchun berilgan operatorning chiziqli ekanligini va $Ax=0$ tenglamaning noldan farqli yechimi mavjudligini ko'rsating.

129. $T^{*}x=(\overline{\lambda}_1x_1,\overline{\lambda}_2x_2,\dots,\overline{\lambda}_nx_n,\dots)$. **130.** $T'x=(0,x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$.

131. $T'x=(x_2,x_3,\dots,x_n,\dots)$. **132.** $T'x=(x_1,x_2,\dots,x_n,0,0,\dots)$.

133. $(T'x)(t)=(t^2-i\cos t)x(t)$. **134.** $(T'x)(t)=\int_0^1[ts-i\cos(t+s)]x(s)ds$.

135. $(T'x)(t)=\int_0^1(s^2+s+1)x(s)ds$. **136.** $(T'x)(t)=\int_0^1 tx(s)ds$.

137. $T'x=(\overline{\lambda}_1x_1,\overline{\lambda}_2x_2,\dots,\overline{\lambda}_nx_n,\dots)$. **138.** $T'x=(\overline{\lambda}_1x_1,\overline{\lambda}_2x_2,\dots,\overline{\lambda}_nx_n,\dots)$.

139. $T'x=(x_1,x_2,x_3+x_1,x_4+x_2,\dots,x_n+x_{n-2},\dots)$.

140. $T'x=(x_1,x_2+2x_1,x_3+2x_2+x_1,x_4+2x_3+x_2,\dots,x_n+2x_{n-1}+x_{n-2},\dots)$.

141. $(T'x)_n=x_{n+1}+x_{n-1}$, $n\in Z$. **142.** $(T'x)_n=x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}$, $n\in Z$.

143. $(T'x)(t)=(\cos t-i\sin t)x(t)+\int_{-1}^{1}(ts+its)x(s)ds$.

144. $T'x=\left(e^{-t}x_1,e^{-2t}x_2,\dots,e^{-nt}x_n,\dots\right)$.

145. $T'x=(0,\frac{1}{2}x_2,\frac{2}{3}x_3,\dots,\frac{n}{n-1}x_n,\dots)$. **146.** $T'x=\left(x_1,2x_2,\dots,50x_{50},0,0,\dots\right)$.

147. $T'x=(\overline{\lambda}_1x_1,\overline{\lambda}_2x_2,\dots,\overline{\lambda}_nx_n,\dots)$. **148.** $(T'x)(t)=(t-it^2)x(t)+\int_0^1(s-it)x(s)ds$.

153. $\lambda_1=\frac{\pi}{2}$, $x_1(t)=\sin t$; $\lambda_2=-\frac{\pi}{2}$, $x_2(t)=\cos t$; $\lambda=0$ cheksiz karrali xos qiymat, unga mos keluvchi xos vektorlar $\sin t$, $\cos t$ larga ortogonal bo'lgan funksiyalardir. **154.** $\lambda_n=\frac{n}{n+1}$, $e_n=\left(\underbrace{0,\ldots,0,1}_{n},0,0,\ldots\right)$, $n\in N$. **155.** $\lambda_1=-1$, $x_1(t)=1-t$; $\lambda_2=4$, $x_2(t)=\frac{t^2+4}{4-t}$. **156.** $\lambda_1=3$, $e_1=(1,0,0,\ldots)$; $\lambda_2=4$, e_2; $\lambda_3=-2$, e_3; $\lambda_4=5$, e_4; $\lambda_5=1$ cheksiz karrali xos qiymat, unga mos keluvchi xos vektorlar e_n, $n\geq 5$. **157.** $\lambda_1=\lambda_2=1$, $x_1=(1,0,0,0)$, $x_2=(0,0,0,1)$; $\lambda_3=\sqrt{2}$, $x_3=(0,1,\sqrt{2}-1,0)$; $\lambda_4=-\sqrt{2}$, $x_4=(0,1,-\sqrt{2}-1,0)$.
158. $\lambda_1=\frac{15-4\sqrt{15}}{60}$, $x_1(t)=\frac{60t^2-12\sqrt{15}t}{15-4\sqrt{15}}$; $\lambda_2=\frac{15+4\sqrt{15}}{60}$; $x_2(t)=\frac{60t^2+12\sqrt{15}t}{15+4\sqrt{15}}$ $\lambda=0$ cheksiz karrali xos qiymat, $\int_0^1 s\,x(s)ds==\int_0^1 s^2x(s)ds=0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar $\lambda=0$ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlar bo'ladi. **159.** $\lambda_1=1$ cheksiz karrali xos qiymat, unga mos keluvchi xos vektorlar $e_1,e_3,e_n,n\geq 5$, $\lambda_2=2$, $x_2=e_2=(0,1,0,\ldots)$; $\lambda_3=3$, $x_3=e_4$. **160.** $\lambda_1=\sqrt{3}+1$, $x_1(t)=1+\frac{t}{\sqrt{3}+1}$; $\lambda_2=\sqrt{3}-1$, $x_2(t)=1-\frac{t}{\sqrt{3}-1}$; $\lambda_3=0$ cheksiz karrali xos qiymat, $x(0)=\int_0^1 x(s)ds=0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar $\lambda=0$ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlar bo'ladi.

161. $\lambda_1=2$, $x_1=(1,1,1)$; $\lambda_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2=(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};-1;\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$; $\lambda_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3=(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};-1;\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$. **162.** $\lambda_1=6$, $x_1=e_1$; $\lambda_2=5$, $x_2=e_2$; $\lambda_3=4$, $x_3=e_3$; $\lambda_4=3$, $x_4=e_4$; $\lambda_5=2$, $x_5=e_5$; $\lambda_6=1$ cheksiz karrali xo qiymat, unga mos keluvchi xos vektorlar $x_6 = e_n$, $n \ge 6$. **163.**

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4},\quad x_1(t) = \frac{9+\sqrt{17}}{2(1+\sqrt{17})} t + \frac{1}{2};\quad \lambda_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4},\quad x_2(t) = \frac{9-\sqrt{17}}{2\left(1-\sqrt{17}\right)} t + \frac{1}{2};$$

$\lambda_3 = 0$ - cheksiz karrali xos qiymat, $\int_{-1}^{1} x(s)\,ds = \int_{-1}^{1} s\,x(s)\,ds = 0$ shartni

qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar $\lambda = 0$ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlar bo'ladi. **164.** $\lambda_1 = \pi$, $x_1(t) = \cos t$; $\lambda_2 = -\pi$, $x_2(t) = \sin t$. $\lambda_3 = 0$ cheksiz karrali xos qiymat, unga mos keluvchi xos vektorlar

1, $x_n^{(3)}(t) = \sin nt$, $y_n^{(3)}(t) = \cos nt$, $n \ge 2$. **165.** $\lambda_{2n-1} = 2n-1$, $x_{2n-1} = e_{2n-1}$;

$\lambda_{2n} = \dfrac{1}{2n}$, $x_{2n} = e_{2n}$, $n \in N$. **166.** $\lambda_1 = 2$, $x^{(1)} = (1,1,1,0,0,\ldots)$; $\lambda_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$x^{(2)} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -1; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \ldots\right);\quad \lambda_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$x^{(3)} = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -1; \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \ldots\right)$; $\lambda_4 = 1$ cheksiz karrali xos qiymat,

unga mos keluvchi xos vektorlar $x^{(4)} = e_n$, $n \ge 4$. **167.**

$\lambda_1 = -1$, $x^{(1)} = (0,0,1,0,0,\ldots)$; $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $x^{(2)} = (1, -(\sqrt{2}+1), 3+2\sqrt{2}, 0, 0, \ldots)$;

$\lambda_3 = \sqrt{2}$, $x^{(3)} = (1, \sqrt{2}-1, 3-2\sqrt{2}, 0, 0, \ldots)$; $\lambda_4 = 1$, $x^{(4)} = (0,0,0,1,0,0,\ldots)$; $\lambda_5 = 0$

cheksiz karrali xos qiymat, unga mos keluvchi xos vektorlar

$x^{(5)} = (0,0,0,0,x_5,x_6,\ldots)$, $x \ne 0$. **168.** $\lambda_1 = 1$ - ikki karrali xos qiymat,

$x^{(1)} = (1,0,0,\ldots)$, $y^{(1)} = (0,0,0,1,0,0,\ldots)$; $\lambda_2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$,

$x^{(2)} = \left(0, 1, \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0, 0, \ldots\right)$; $\lambda_3 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $x^{(3)} = \left(0, 1, \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0, 0, \ldots\right)$; $\lambda_4 = 0$

cheksiz karrali xos qiymat, unga mos keluvchi xos vektorlar

$x^{(4)} = (0,0,0,0,x_5,x_6,\ldots)$. **169.** $\lambda_1 = \dfrac{4+\sqrt{13}}{6}$, $\lambda_2 = \dfrac{4-\sqrt{13}}{6}$;

$$x_1(t)=2(4-\sqrt{13})\left(t+\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right),\ x_2(t)=2(4+\sqrt{13})\left(t+\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right).$$ **170.**

$\lambda_1=-3,\ x_1(t)=2t-t^2;\ \lambda_2=4,\ x_2(t)=\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}t^2;\ \lambda_3=0$- cheksiz karrali xos qiymat, $x_3(t)=(t^2-1)y(t),\ y\in C[-1,1]$. **171.** $\lambda_1=4,\ x^{(1)}=(1,0,0,\dots);$ $\lambda_2=5,\ x^{(2)}=(0,1,0,0,\dots);\ \lambda_3=3,\ x^{(3)}=(0,0,1,0,0,\dots);\ \lambda_4=2,$ $x^{(4)}=(0,0,0,1,0,0,\dots);\ \lambda_5=1,,\ x^{(5)}=(0,0,0,0,1,0,0,\dots);\ \lambda_6=0,$ $x^{(4)}=(0,0,0,0,0,x_6,x_7,\dots)\neq 0\ \ \lambda_6=0$ - cheksiz karrali xos qiymat. **172.**

$$\lambda_1=3,\ x_1(t)=\frac{(5t+6)(t+4)}{3t-8};\ \lambda_2=1{,}8,\ x_2(t)=\frac{5t(t+4)}{9t+16}$$

173. $\sigma(A)=\left\{0,\frac{11-\sqrt{97}}{2},\frac{11+\sqrt{97}}{2}\right\};$

$$R_\lambda(A)x(t)=\frac{1}{\lambda}\left[-x(t)+\frac{(9-\lambda)x(2)-4x(3)}{\lambda^2-11\lambda+6}t-\frac{3x(2)+(\lambda-2)x(3)}{\lambda^2-11\lambda+6}t^2\right].$$

174. $\sigma(A)=\left\{1,2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\dots,\frac{n+1}{n},\dots\right\};$

$$R_\lambda(A)x=\left(\frac{1}{2-\lambda}x_1,\frac{2}{3-2\lambda}x_2,\dots,\frac{n}{n+1-n\lambda}x_n,\dots\right),\ \lambda\notin\sigma(A).$$

175. $\sigma(A)=[0,2],\quad R_\lambda(A)x(t)=\frac{x(t)}{|t|-\lambda}.$

176. $\sigma(A)=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4},\dots,\frac{1}{2n},\frac{2n+1}{2n},\dots\right\};\ R_\lambda(A)x=$

$$=\left(\frac{1}{1-\lambda}x_1,\frac{2}{1-2\lambda}x_2,\frac{2}{3-2\lambda}x_3,\dots,\frac{2n}{1-2n\lambda}x_{2n},\frac{2n}{2n+1-2n\lambda}x_{2n+1},\dots\right).$$

177. $\sigma(A)=[0,2]\cup\{3+\sqrt{2}\},$

$$R_\lambda(A)x(t)=\frac{1}{t-\lambda}\left[x(t)+\frac{x(1)+(\lambda-2)x(2)}{\lambda^2-6\lambda+7}t+\frac{(\lambda-4)x(1)+x(2)}{\lambda^2-6\lambda+7}\right].$$

178. $\sigma(A)=[0,1]\cup\{\lambda:\ \Delta(\lambda)=0\},\ \Delta(\lambda)=2+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right|.$

$$R_\lambda(A)x(t)=\frac{x(t)}{t^2-\lambda}-\frac{t}{\Delta(\lambda)(t^2-\lambda)}\int_0^1\frac{s\,x(s)}{s^2-\lambda}ds.$$

179. $\sigma(A)=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$,

$$R_\lambda(A)x=\left(\frac{1}{1-\lambda}x_1,\frac{2}{1-2\lambda}x_2,\frac{3}{1-3\lambda}x_3,\dots,\frac{n}{1-n\lambda}x_n,\dots\right);\ \lambda\notin\sigma(A).$$

180. $\sigma(A)=[0,1]$, $\quad R_\lambda(A)x(t)=\dfrac{x(t)}{t^2-\lambda}-\dfrac{x(t)}{(1-\lambda)(t^2-\lambda)}$.

181. $\sigma(A)=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$,

$$R_\lambda(A)=\left(\frac{3}{1-3\lambda}x_1,\frac{4}{1-4\lambda}x_2,\dots,\frac{n+2}{1-(n+2)\lambda}x_n,\dots\right),\ \lambda\notin\sigma(A).$$

182. $\sigma(A)=[2,3]$, $\quad R_\lambda(A)x(t)=\dfrac{x(t)}{t+2-\lambda}$.

183. $\sigma(A)=\{\lambda\in C:\ |\lambda|\le 1\}$, $\quad R_\lambda(A)x=$

$$=\left(-\frac{1}{\lambda}x_1,-\frac{1}{\lambda^2}x_1-\frac{1}{\lambda}x_2,\dots,-\frac{1}{\lambda^n}x_1-\frac{1}{\lambda^{n-1}}x_2-\dots-\frac{1}{\lambda}x_n,\dots\right),\ \lambda\notin\sigma(A).$$

184. $\sigma(A)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\quad R_\lambda(A)x=$

$$=\left(\frac{1}{2-\lambda}x_1,\frac{1}{4-\lambda}x_2,\frac{1}{5-\lambda}x_3,\frac{1}{3-\lambda}x_4,\frac{1}{1-\lambda}x_5,\frac{1}{1-\lambda}x_6,\dots\right),\ \lambda\notin\sigma(A).$$

185. $\sigma(A)=[0,1]\cup\{2\}$, $R_\lambda(A)x(t)=\dfrac{x(t)}{t-\lambda}+\dfrac{x(0)}{\lambda(t-\lambda)}t^2-\dfrac{\lambda\,x(1)+x(0)}{\lambda(2-\lambda)(t-\lambda)}t^3$.

186. $\sigma(A)=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$,

$$R_\lambda(A)x=\left(-\frac{1}{\lambda}x_1,\frac{1}{1-\lambda}x_2,\frac{2}{1-2\lambda}x_3,\dots,\frac{n}{1-n\lambda}x_{n+1},\dots\right),\ \lambda\notin\sigma(A).$$

187. $\sigma(A)=[0,1]\cup\{\lambda:\ \Delta(\lambda)=0\}$, $\ \Delta(\lambda)=1+\displaystyle\int_0^\infty\frac{4^{-s}}{e^{-s}-\lambda}ds$,

$$R_\lambda(A)x(t)=\frac{x(t)}{e^{-t}-\lambda}-\frac{2^{-t}}{\Delta(\lambda)(e^{-t}-\lambda)}\int_0^1\frac{2^{-s}x(s)}{e^{-s}-\lambda}ds.$$

188. $\sigma(A)=[-\pi/2,\pi/2]$, $\quad R_\lambda(A)x(t)=\dfrac{x(t)}{arctgt-\lambda}$.

189. $\sigma(A)=[-1,1]\cup\{\lambda\in C\setminus[-1,1]:\ \Delta(\lambda)=0\}$, $\Delta(\lambda)=1+2\lambda+\lambda^2\ln\left|\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right|$,

$$R_\lambda(A)x(t)=\frac{x(t)}{t-\lambda}-\frac{t}{\Delta(\lambda)(t-\lambda)}\int_{-1}^1\frac{s\,x(s)}{s-\lambda}ds.$$

190. $\sigma(A)=\{\lambda\in C:|\lambda|\le 1\}$, $(R_\lambda(A)x)_n=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k-1}x_{n+k}$, $n=1,2,\dots$.

191. $\sigma(A)=\{0,1,\dfrac{1-\sqrt5}{2},\dfrac{1+\sqrt5}{2}\}$, $\quad R_\lambda(A)x=\left(\dfrac{(1-\lambda^2)x_1-(1+\lambda)x_2-x_3}{\lambda(\lambda^2-\lambda-1)},\right.$

$$\left.\frac{-x_1+(1-\lambda)^2x_2+(1-\lambda)x_3}{\lambda(\lambda^2-\lambda-1)},\frac{(1-\lambda)x_1-x_2-(1-\lambda)^2x_3}{\lambda(\lambda^2-\lambda-1)},\frac{x_4}{1-\lambda},\frac{x_5}{1-\lambda},\dots\right).$$

192. $\sigma(A)=\{-1,1\}$, $R_\lambda(A)x=\left(-\dfrac{x_1}{1+\lambda},\dfrac{x_2}{1-\lambda},-\dfrac{x_3}{1+\lambda},-\dfrac{x_5}{1+\lambda},\dots,-\dfrac{x_{2n-1}}{1+\lambda},\dfrac{x_{2n}}{1-\lambda},\dots\right)$.

200. $\sigma(A)=\{0;1\}$, $R_\lambda(A)x(t)=-\dfrac{1}{\lambda}x(t)+\dfrac{x(0)}{\lambda(1-\lambda)}+\dfrac{x(1)t}{\lambda(1-\lambda)}-\dfrac{x(0)t}{\lambda(1-\lambda)^2}$.

201. $\sigma(P)=\{0;1\}$, $R_\lambda(P)=\dfrac{P}{1-\lambda}-\dfrac{I-P}{\lambda}$.

24-§

18. 24.4-misoldan foydalaning. **19.** 24.4-misoldan foydalaning. **20.** 18.2-misoldan foydalaning. **21.** 19.2-teoremadan foydalaning. **22.** 17.2-teoremadan foydalaning. **23.** 19.2-teoremadan foydalaning. **24.** 24.1-misoldan foydalaning. **25.** 18.2-misoldan foydalaning. **26.** 17.2-teoremadan foydalaning. **27.** 24.4-misoldan yoki 17.2-teoremadan foydalaning. **28.** 17.2-teoremadan foydalaning. **29.** 24.1-misoldan foydalaning. **30.** 24.1-misoldan foydalaning. **31.** 19.2-teoremadan foydalaning. **32.** 24.4-misoldan foydalaning. **33.** 17.2-teoremadan foydalaning. **34.** 18.2-misoldan foydalaning. **35.** 17.2-teoremadan foydalaning. **36.** $A = B\cdot C,\ Cx = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots),\quad Bx = (0,0,0,0,x_1,x_2,\ldots)$ tasvirdan hamda 18.2-teoremadan foydalaning. **37.** Artsel teoremasidan foydalaning. **38.** ℓ_2 fazoda ko'paytirish operatorining kompaktlik mezoni (kriteriysi) dan foydalaning, 18.2-misolga qarang. **39.** 18.2-natijadan foydalaning. **40.** $\{Ae_{2n}\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emasligini ko'rsating. **41.** $\{Ae_{2n+1}\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emasligini ko'rsating. **42.** 24.5-misoldan hamda 18.2-natijadan foydalaning. **43.** 18.2-natijadan foydalaning. **44.** ℓ_p fazoda ko'paytirish operatorining kompaktlik mezoni (kriteriysi) dan foydalaning, 24.1-misolga qarang. **45.** $C^{+}[-1,1] = \{x \in C[-1,1] : x(-t) = x(t)\}$ juft funksiyalar qism fazosida A^{-1} ning mavjud va chegaralanganligini ko'rsating va 18.2-natijadan foydalaning. **46.** 18.2-natijadan foydalaning. **47.** 32-misoldan foydalaning yoki $\{Ae_{2n+1}\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emasligini ko'rsating. **48.** 24.5-misol yechimidan foydalaning. **49.** 26-misoldan foydalaning yoki $\{Ae_{2n+1}\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emasligini ko'rsating. **50.** 18.2-natijadan foydalaning. **51.** 18.2-natijadan foydalaning. **52.** 18.2-misoldan foydalaning. **53.** 32-misoldan foydalaning. **54.** 18.2-natijadan foydalaning. **55.** 18.2-natijadan foydalaning. **56.** $\{Ae_{4n+1}\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emasligini ko'rsating. **57.** $\{Ae_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emasligini ko'rsating. **67.** Parametr λ ning $\frac{6}{5}$ dan farqli barcha qiymatlarida tenglama yagona yechimga ega va u

$x(s)=s^2+1+\frac{7\lambda s}{2(6-5\lambda)}$ ko'rinishga ega. **68.** Parametr $\lambda\in C$ ning $\pm\frac{3}{2}$ dan farqli barcha qiymatlarida tenglama yagona yechimga ega va u $x(s)=s^2+1+\frac{24\lambda s}{9-4\lambda^2}+\frac{16\lambda^2 s^2}{9-4\lambda^2}$ ko'rinishga ega. **69.** Parametr $\lambda\in C$ ning barcha qiymatlarida tenglama yechimga ega. $\lambda\neq 2$ da yechim yagona $x(s)=\sin 2\pi s$, $\lambda=2$ da yechim cheksiz ko'p bo'lib, uning ko'rinishi $x(s)=\sin 2\pi s+sa$, $a\in C$ - ixtiyoriy son. **70.** Parametr $\lambda\in C$ ning barcha qiymatlarida tenglama yechimga ega. $\lambda\neq 3/2$ bo'lsa, $x(s)=s^2-1$ tenglamaning yagona yechimi bo'ladi. Agar $\lambda=3/2$ bo'lsa, tenglama yechimi cheksiz ko'p bo'lib, ular $x(s)=s^2-1+\alpha(1+s)$, $\alpha\in C$ ko'rinishga ega. **71.** Parametr $\lambda\in C$ ning barcha $\lambda\neq 1/2$ qiymatlarida tenglama $x(s)=1-\frac{3}{2}s+\frac{\lambda(1+2s)}{4(1-2\lambda)}$ ko'rinishdagi yagona yechimga ega. Agar $\lambda=1/2$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. **72.** Agar $\lambda=\pm 3/4$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. Agar $\lambda\neq\pm 3/4$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=s^2+2s+\lambda\alpha s+\lambda\beta(1+s^2)$, bu yerda $\alpha=\frac{2}{3}+\frac{8\lambda}{3}+\frac{12}{9-16\lambda^2}+\frac{4\lambda}{9-16\lambda^2}$, $\beta=\frac{12}{9-16\lambda^2}+\frac{4\lambda}{9-16\lambda^2}$ yechimga ega. **73.** Parametr $\lambda\in C$ ning barcha qiymatlarida tenglama yagona $x(s)=s$ yechimga ega. **74.** Parametr $\lambda\in C$ ning barcha $\lambda\neq 3/2$ qiymatlarida tenglama $x(s)=2s^2+s+\frac{2\lambda}{3-2\lambda}(1+s+s^2)$ ko'rinishdagi yagona yechimga ega. Agar $\lambda=3/2$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. **75.** Parametr $\lambda\in C$ ning barcha qiymatlarida tenglama yagona $x(s)=\cos s$ yechimga ega. **76.** Agar $\lambda\neq\pm\frac{1}{\pi}$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=\frac{1}{1+\lambda\pi}\sin s$ yechimga ega. Agar $\lambda=-\frac{1}{\pi}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. Agar $\lambda=\frac{1}{\pi}$ bo'lsa, tenglama cheksiz ko'p $x(s)=\frac{1}{2}\sin s+\alpha\cos s$, $\alpha\in C$ yechimlarga ega. **77.** Parametr $\lambda\in C$ ning barcha qiymatlarida tenglama yagona $x(s)=\cos s+\frac{\lambda\pi}{2}$ yechimga ega. **78.** Agar $\lambda\notin\left\{\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right\}$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=1+s^2+\frac{16\lambda s^2}{3(5-3\lambda)}$ yechimga ega. Agar $\lambda=\frac{5}{3}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. Agar $\lambda=\frac{3}{2}$ bo'lsa, tenglama cheksiz ko'p $x(s)=1+17\cdot s^2+\alpha\cdot s$, $\forall\alpha\in C$ yechimlarga ega. **79.** Agar $\lambda\neq\pm\frac{3}{2}$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=\sin\pi s$ yechimga ega. Agar $\lambda=\pm\frac{3}{2}$ bo'lsa, tenglama cheksiz ko'p $x(s)=\sin\pi s+\alpha s+\beta s^2$, $\forall\alpha,\beta\in C$ yechimlarga ega. **80.** Agar $\lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=\cos+\frac{2\pi\lambda}{4-\pi^2\lambda^2}\sin s+\frac{\lambda^2\pi^2}{4-\pi^2\lambda^2}\cos s$ yechimga ega. Agar $\lambda=\pm\frac{2}{\pi}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. **81.** Agar $\lambda\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=\frac{1}{2}+\frac{\lambda(3+2\lambda)}{3-4\lambda^2}+\frac{2s(3+\lambda-2\lambda^2)}{2(3-4\lambda^2)}$ yechimga ega. Agar $\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. **82.** Agar $\lambda\neq\frac{3}{2}$, $\lambda\neq\frac{3}{8}$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=\frac{3}{3-8\lambda}+\frac{3s}{3-2\lambda}$ yechimga ega. Agar $\lambda=\frac{3}{2}$, $\lambda=\frac{3}{8}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. **83.** Agar $\lambda\neq 1$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}+\frac{\pi\lambda}{2(1-\lambda)}$ yechimga ega. Agar $\lambda=\frac{3}{2}$, $\lambda=\frac{3}{8}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. **84.** Agar $\lambda\neq\frac{2}{e^2-1}$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=e^{2s}+\frac{2\lambda(e^2-1)e^s}{3(2-\lambda e^2+\lambda)}$ yechimga ega. Agar $\lambda=\frac{2}{e^2-1}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. **85.** Agar $\lambda\neq\frac{-9\pm3\sqrt{13}}{4}$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=\frac{6\lambda}{9-18\lambda-4\lambda^2}+\frac{9-14\lambda-4\lambda^2}{9-18\lambda-4\lambda^2}s$ yechimga ega. Agar $\lambda=\frac{-9\pm3\sqrt{13}}{4}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. **86.** Agar $\lambda\neq\frac{3}{8}$ bo'lsa, tenglama yagona $x(s)=s+s^2+\frac{6\lambda(1+s)}{3-8\lambda}$ yechimga ega. Agar $\lambda=\frac{3}{8}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas. **87.** $x_2(s)=s+\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{6}$; $x(s)=e^s-1$. **88.** $x_2(s)=1+\frac{s^2}{2}+\frac{s^4}{24}$; $x(s)=chs$. **89.** $x_2(s)=2$; $x(s)=2$. **90.** $x_2(s)=1+2s+\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{3}$; $x(s)=2e^s-1$. **91.** $x_2(s)=s+\frac{s^3}{6}$; $x(s)=shs$. **92.** $x_2(s)=1-\frac{s^2}{2}$; $x(s)=\cos s$. **93.** $x_2(s)=\frac{101}{108}s-\frac{1}{27}$; $x(s)=\frac{461}{474}s-\frac{65}{948}$. **94.** $x_2(s)=1+s$; $x(s)=e^s$. **95.** $x_2(s)=e^s+\frac{1-e}{4}$; $x(s)=e^s$. **96.** $x_2(s)=x(s)=s$. **97.** $x_2(s)=s-\frac{1}{162}$; $x_2(s)=\frac{101}{108}s-\frac{1}{27}$; $x(s)=\frac{461}{474}s-\frac{65}{948}$. **98.** $x_2(s)=s+\frac{1}{3}$; $x(s)=s+\frac{1}{4}$. **99.** $x_2(s)=s+1\frac{23}{48}$; $x(s)=s+1\frac{5}{9}$. **100.** $x_2(s)=1\frac{3}{4}$; $x(s)=2$. **101.** $x_2(s)=\frac{3}{4}(1-s)$; $x(s)=1-s$. **102.** $x_2(s)=\frac{\pi+24}{8}\sin s$; $x(s)=4\sin s$. **103.** $x_2(s)=\frac{1}{\pi}+\frac{3}{4}+\sin\pi s$; $x(s)=\frac{2}{\pi}+\sin\pi s$. **104.** $x_2(s)=s+\frac{s^2}{2}+\frac{s^4}{12}$; $x(s)=e^s-$

105. $x_2(s)=1+s+\frac{11}{6}s^2$; $x(s)=1+s+\frac{9}{4}s^2$.

I - IV boblarda keltirilgan testlar javoblari

I bobda keltirilgan test javoblari

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	A	B	C	C	B	A	C	C
1	A	A	C	C	D	D	A	D	A	A
2	B	B	D	A	B	B	D	D	C	A
3	A	A	D	B	C	A	B	D	D	C
4	B	A	B	C	A	A	A	B	C	D
5	B									

II bobda keltirilgan test javoblari

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	C	C	B	C	B	B	B	D
1	D	D	D	D	D	A	A	B	D	C
2	B	C	A	A	B	C	A	A	D	C
3	A	B	B	B	B	A	A	B	B	B
4	A	B	A	A	A	A	B	A	C	A
5	A									

III bobda keltirilgan test javoblari

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	B	A	C	B	A	B	C	B
1	A	D	C	B	A	B	C	A	B	C
2	B	B	D	A	B	B	B	A	A	B
3	D	B	C	A	A	D	A	C	A	A
4	C	B	D	B	C	D	A	C	B	B
5	C	A	D	B	B	A	A	B	A	A
6	B									

IV bobda keltirilgan test javoblari

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	A	A	A	C	C	C	C	C
1	C	B	D	C	C	B	A	A	B	A
2	B	A	D	C	A	B	B	A	C	D
3	C	B	C	C	C	B	A	B	D	D
4	D	B	A	A	A	A	B	A	C	A

Asosiy belgilashlar

Ushbu o'quv qo'llanmada ko'p ishlatiladigan belgilashlar ro'yxatini keltiramiz. Satr oxiridagi son belgilash qaysi sahifada birinchi marta kiritilganligini ko'rsatadi.

1. $[A]$ yoki $\overline{A}$ -- A to'plamning yopig'i -23
2. A' -- A to'plamning barcha limitik nuqtalari to'plami -295
3. $\overset{\circ}{A}$ -- A ning barcha ichki nuqtalaridan iborat to'plam -296
4. N -- natural sonlar to'plami.
5. Z -- butun sonlar to'plami.
6. Q -- ratsional sonlar to'plami.
7. R -- haqiqiy sonlar to'plami.
8. C -- kompleks sonlar to'plami.
9. $\rho(x,y)$ -- x va y elementlar orasidagi masofa -9,10
10. $\|x\|$ -- x elementning normasi -108
11. R^n -- n o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo, bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\left(\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ bilan aniqlanadi -109, 10
12. $R_p^n\ (p\geq 1)$ -- n o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo, bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $\left(\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_n)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$ bilan aniqlanadi -109,14
13. R_∞^n -- n-o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo, bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k|$ $\left(\rho(x,y)=\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k-y_k|\right)$ bilan aniqlanadi -109, 12
14. ℓ_2 -- modulining kvadratlaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lgan barcha ketma-ketliklar to'plami, bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\left(\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ bilan aniqlanadi -110, 12

15. $\ell_p\,(p\geq 1)$ -- modullarining p-chi darajalaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lgan barcha ketma-ketliklar to'plami, bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $\left(\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$ bilan aniqlanadi -111, 17-18

16. c -- yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to'plami, bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\sup\limits_{1\leq k<\infty}|x_k|$ $\left(\rho(x,y)=\sup\limits_{1\leq k<\infty}|x_k-y_k|\right)$ bilan aniqlanadi -110

17. c_0 -- nolga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to'plami, bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\sup\limits_{1\leq k<\infty}|x_k|$ $\left(\rho(x,y)=\sup\limits_{1\leq k<\infty}|x_k-y_k|\right)$ bilan aniqlanadi -110

18. m -- chegaralangan ketma-ketliklar to'plami, bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\sup\limits_{1\leq k<\infty}|x_k|$ $\left(\rho(x,y)=\sup\limits_{1\leq k<\infty}|x_k-y_k|\right)$ bilan aniqlanadi -110

19. Φ -- finit ketma-ketliklar to'plami, bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\sup\limits_{1\leq k<\infty}|x_k|$ $\left(\rho(x,y)=\sup\limits_{1\leq k<\infty}|x_k-y_k|\right)$ bilan aniqlanadi -305

20. $C[a,b]$ -- $[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)|$ $\left(\rho(x,y)=\max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|\right)$ bilan aniqlanadi -110, 12

21. $C_2[a,b]$ -- $[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda norma (metrika) quyidagicha aniqlanadi -110, 13

$$\|x\|=\sqrt{\int_a^b|x(t)|^2\,dt}\quad\left(\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt}\right)$$

22. $C^{(n)}[a,b]$ -- $[a,b]$ kesmada aniqlangan n marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosi. Bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\sum\limits_{k=0}^{n}\max\limits_{a\leq t\leq b}|x^{(k)}(t)|$ $\left(\rho(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}\max\limits_{a\leq t\leq b}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|\right)$ bilan aniqlanadi-111

23. $V[a,b]$ -- $[a,b]$ kesmada aniqlangan o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi. Bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=|x(a)|+V_a^b[x]$ $\left(\rho(x,y)=|x(a)-y(a)|+V_a^b[x-y]\right)$ bilan aniqlanadi -111, 19

24. $AC[a,b]$ -- $[a,b]$ kesmada aniqlangan absolyut uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda norma (metrika) quyidagicha aniqlanadi -86, 19-20

$$\|x\|=|x(a)|+V_a^b[x] \quad \left(\rho(x,y)=|x(a)-y(a)|+V_a^b[x-y]\right).$$

25. $M[a,b]$ -- $[a,b]$ kesmada aniqlangan chegaralangan funksiyalar fazosi. Bu fazoda norma (metrika) quyidagicha aniqlanadi -110

$$\|x\|=\sup_{a\le t\le b}|x(t)| \quad \left(\rho(x,y)=\sup_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|\right)$$

26. $H^{(1)}[a,b]$ -- $[a,b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosi, unda skalyar ko'paytma quyidagicha aniqlanadi -338

$$(x,y)=\int_a^b[x(t)\overline{y(t)}+x'(t)\overline{y'(t)}]\,dt.$$

27. $\Phi_C(R)$ -- sonlar o'qida aniqlangan uzluksiz va finit funksiyalar to'plami. Bu fazoda norma (metrika) $\|x\|=\max_{a\le t\le b}|x(t)|$ $\left(\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|\right)$ bilan aniqlanadi -334

28. $L(X,Y)$ -- X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli uzluksiz (chegaralangan) operatorlar fazosi. Bu fazoda norma $\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$ bilan aniqlanadi -160

29. $K(X,Y)$ -- X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi kompakt (to'la uzluksiz) operatorlar fazosi. Bu fazoda norma $\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$ bilan aniqlanadi -247

30. H -- Hilbert fazosi -132

31. $M^{\perp}$ -- $M \subset H$ qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi -136

32. $L(H)$ -- H Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi. Bu fazoda norma $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ bilan aniqlanadi -160

33. $A_n \xrightarrow{u} A$ -- A_n operatorlar ketma-ketligining A operatorga tekis (norma bo'yicha) yaqinlashishi -184

34. $A_n \xrightarrow{s} A$ -- A_n operatorlar ketma-ketligining A operatorga kuchli (nuqtali) yaqinlashishi -184

35. $A_n \xrightarrow{w} A$ -- A_n operatorlar ketma-ketligining A operatorga kuchsiz yaqinlashishi -184

36. $x_n \xrightarrow{w} x$ -- x_n ketma-ketlikning x elementga kuchsiz yaqinlashishi -253

37. $x_n \to x$ -- x_n ketma-ketlikning x elementga yaqinlashishi -109, 253

38. $R_\lambda(A)$ -- A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi -222

39. $\rho(A)$ -- A operatorning barcha regulyar nuqtalari to'plami, rezolvent to'plam -222

40. $\sigma(A)$ -- A operatorning spektri -222

41. $\sigma_{pp}(A)$ -- A operatorning barcha xos qiymatlari to'plami, ya'ni diskret spektr -223

42. $\sigma_{qol}(A)$ -- A operatorning qoldiq spektri -223

43. $\sigma_{ess}(A)$ -- A operatorning muhim spektri -223

44. $\det A$ -- $A = (a_{ij}), 1 \le i, j \le n$ matritsaning determinanti -221

45. $H_1 \oplus H_2$ -- H_1 va H_2 Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi -139

46. (x, y) – Evklid fazosida x, y elementlarning skalyar kopaytmasi -117

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука. 1989.
2. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. Toshkent: Fan. 1994.
3. Sarimsoqov T.A. Funksional analiz kursi. Toshkent: O'qituvchi. 1986.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. Москва: Наука. 1965.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва: Наука. 1980.
6. В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Москва: Наука. 1984.
7. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg'unboyev. Funksiyalar nazariyasi. Toshkent. 2004.
8. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg'unboyev. Funksional analiz. Toshkent. 2008.
9. Funksional analiz va integral tenglamalar kursi bo'yicha amaliy mashg'ulotlar uchun metodik ko'rsatmalar. I qism. Samarqand. SamDU, 1984.
10. Funksional analiz va integral tenglamalar kursi bo'yicha amaliy mashg'ulotlar uchun metodik ko'rsatmalar. II qism. Samarqand. SamDU, 1986.
11. Funksional analiz va integral tenglamalar kursi bo'yicha laboratoriya ishlariga doir metodik ko'rsatmalar. II qism. Samarqand. SamDU, 1989.
12. J.I. Abdullayev, M.H. Shermatov. Fizika-matematika fakulteti talabalari uchun «Funksional analiz» fanidan uslubiy qo'llanma. I, II qismlar. Samarqand. SamDU nashri. 2008.

Xolisa Raxmonova
Gulnura

Abdullayev Janikul Ibragimovich, G'anixo'jayev Rasul Nabiyevich, Shermatov Mamarajab Himmatovich, Egamberdiyev Odiljon Ismonaliyevich.

«Funksional analiz» o'quv qo'llanma.
Toshkent-Samarqand – 2009, 424 bet.

Muharrir: Q.Meliyev
Musahhih: E.Qulaxmedov
Tex. muharrir: F.Aminov

3.11.2009 yilda bosishga ruxsat etildi.
№22 buyurtma. 26,5 bosma taboq.
Hajmi 60x84 1/16 Adadi 300 nusxa.

Samarqand viloyat pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish instituti bosmaxonasida chop etildi.
Samarqand shahar, Boysunqur Mirzo ko'chasi, 3-uy.