Т. АЗЛАРОВ,
Ҳ. МАНСУРОВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ

1

Т. АЗЛАРОВ, Ҳ. МАНСУРОВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ

1-ҚИСМ

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги
университетлар ва педагогика институтлари
талабалари учун дарслик сифатида рухсат этган

ҚАЙТА ИШЛАНГАН ВА ТЎЛДИРИЛГАН
ИККИНЧИ НАШРИ

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1994

Тақризчилар: Самарқанд Давлат университети математик анализ кафедраси, ЎзР. ФА мухбир аъзоси, физика-математика фанлари доктори, проф. **А. С. Саъдуллаев**, физика-математика фанлари доктори, проф. **Ҳ. Р. Латипов**

Махсус муҳаррир: ТашДУ профессори **F. Н. Насритдинов**

Ушбу китоб университетлар ҳамда педагогика институтлари шунингдек, олий техника ўқув юртларининг олий математика предмети чуқур дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари учун мўлжалланган. Уни ёзишда муаллифлар Тошкент Давлат университетининг математика, амалий математика ва механика факультетларида бир неча йиллар давомида ўқиган маърузаларидан фойдаланганлар.

Китобни ёзишда, бир томондан, математика фанининг тобора интенсив ривожлана бориши, янги тушунчалар, янги ғоялар билан бойиб боришига эътибор қаратилган бўлса, иккинчи томондан, математиканинг фан ва техниканинг турли соҳаларига татбиқ доираси кенгайиб бориши ҳисобга олинган.

Китоб анализ курсининг 1-қисми бўлиб, бир ўзгарувчили функциялар анализига бағишланган. Унда дифференциал ва интеграл ҳисоб курси ҳамда қаторлар назарияси батафсил баён этилган.

А 36

Азларов Т., Мансуров Ҳ.

Математик анализ: Университет ва пед. институтлар талабалари учун дарслик: 2 қисмли. 1-қ.— Қайта ишланган ва тўлдирилган 2-нашри.— Т.: Ўқитувчи, 1994.—416 б.

1. Автордош.

Азларов Т., Мансуров Х. Математический анализ: Учеб. пособие для студ. университетов и пединститутов: В 2 ч. Ч. 1.—2-изд. перераб. и доп.

22.16я.73

$$А\frac{1602070000-68}{353(04)-94}81-93$$

ISBN 5—645—01910

ИККИНЧИ НАШРИГА СУЗ БОШИ

Ушбу дарслик биринчи марта 1986 (1-қисм) ва 1989 (2-қисм) йилларда ўқув қўлланма сифатида нашр этилган эди. Шундан буён ўтган давр мобайнида муаллифлар шу қўлланмага асосланиб, математик анализ курсини ўқишни давом эттирдилар. Муаллифлар ўз тажрибаларига таяниб, ҳамкасбларининг кўплаб маслаҳатларини эътиборга олиб, қўлланмани бирмунча қайта ишлаб чиқдилар. Аввало шуни таъкидлаш лозимки, дарсликни иккинчи нашрга тайёрлашда таърифлар, теоремалар, тасдиқларнинг қисқа, аниқ ва равон баёнига алоҳида эътибор берилди. Ўқувчи китоб ўқиш давомида жуда кўп саҳифаларда шу маънода киритилган ўзгаришларга дуч келади. Иккинчидан, мантиқий қатъиятга риоя қилиш ва методик нуқтаи назардан мукаммалроқ бўлиши учун у ёки бу тушунчага тескари тушунча ҳам аниқ таърифланди. Масалан, тўпламнинг юқоридан чегараланмаганлиги, функциянинг текис узлуксиз эмаслиги, функционал кетма-кетликларнинг нотекис яқинлашувчилиги ва шу кабилар. Бу борада муаллифларни изчил бўлишга ундаган яна бир сабаб кўпгина теоремаларнинг одатда тасдиқнинг тескарисини фараз қилиш усули билан исботланишидир.

Китобни қайта ишлаш давомида бир қатор янги мавзулар киритилди, баъзилари чиқарилди, баъзи мавзуларнинг жойлашиш тартиби ўзгартирилди.

Муаллифлар бу тадбирлар китобнинг асосий йўналишини ўзгартирмай, балки уни такомиллаштиришга хизмат қилди, деб ҳисоблайдилар.

Пировардида, муаллифлар расмий тақризчиларга, проф. Н. Сатимовга, проф. Ш. Аюповга китобнинг биринчи ва иккинчи нашри қўлёзмаси юзасидан билдирилган танқидий фикрлари ва қимматли маслаҳатлари учун миннатдорчилик изҳор этадилар.

БИРИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Математик анализ олий математиканинг дастлабки ва айни вақтда, асосий бўлими бўлиб, барча олий ўқув юртларида тегишли дастурга қараб у ёки бу ҳажмда ўқитилади. Илгарилари «Чексиз кичик миқдорлар ҳисоби», «Дифференциал ва интеграл ҳисоб» номлари билан аталиб келинган бу курс кейинги пайтларда деярли ҳамма ерда математик анализ деб юритила бошланди. Курснинг бундай аталиши унинг мазмуни ва мақсадини ҳақиқатан ҳам тўла акс эттиради ва унинг вазифаси функцияларни анализ — таҳлил қилиш эканлигини англатади. Бунда анализга кириш — ҳақиқий сонлар назарияси, лимитлар назарияси, узлуксизлик; бир аргументли ва кўп аргументли функцияларнинг дифференциал ва интеграл ҳисоби, қаторлар назарияси, Фурье қаторлари назарияси кўзда тутилади. Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, анализ курси баён этиш тартибининг қатъийлиги билан характерлидир. Ундаги мавзулар деярли ҳамма вақт муайян кетма-кетликда бўлиши керак. Ана шундагина курснинг мантиқий изчиллиги ва яхлитлиги кўринади. Аммо, бу кетма-кетликни сақлаган ҳолда математик анализ курсини турлича қуриш ҳам мумкин. Бундай қуришлар аввало қабул қилинган математик қатъиятлик даражаси билан баённинг тўлалик миқдори билан фарқланади. Турли олий ўқув юртлари (техник, педагогик, университетларнинг ҳар хил факультетлари) учун ёзилган дарсликларда ва қўлланмаларда бу вазиятни яққол кузатиш мумкин.

Табиийки, бевосита математика мутахассислиги бўйича таълим оладиган талабаларга мўлжалланган анализ курси ўзининг юқори даражада математик қатъияти ва изчиллиги билан фарқ қилмоғи керак.

Ушбу китобни ёзишда муаллифлар ана шу мураккаб вазифани бажаришга интилдилар. Китоб, асосан университетлар ва педагогика институтлари математика, амалий математика ва физика-математика факультетлари математик анализ курси дастурларига мувофиқ ёзилган. Тошкент Давлат университетида кўп йиллар мобайнида мазкур курс бўйича ўқиган маърузаларимиз китобни ёзиш жараёнида катта ёрдам берди. Шу билан бирга, китоб қўлёзмаси тайёр бўлгач, у маърузаларимизда «синов»дан ўтказилди.

Китоб ёзилиши жараёнида биз математик қатъият ва изчилликни таъминлашга интилиш билан бирга яна қуйидагиларга амал қилдик.

Биринчидан. Маълумки, талабалар юқори курсларда математик анализнинг узвий давоми сифатида функционал анализ курси билан танишадилар. Ундаги асосий тушунчалар (функционал, оператор, метрик фазо ва ҳ. к.) абстракция даражаси нуқтаи назаридан анализнинг тушунчаларидан «бир поғона» юқори ҳисобланади, шунинг учун уларни анализ курси давомида талабалар онгига сингдира бориш, уларни «бир қадам» илгарини кўришга ўргата бориш, фикримизча, иккала фанни эгаллаш учун ҳам фойда келтиради. Айни пайтда, талабалар математиканинг моҳиятлари билан танишиш имкониятига эга бўладилар. Бу эса бўлажак мутахассиснинг математик жиҳатдан шаклланишида маълум методологик аҳамиятга эга.

Иккинчидан. Математик анализнинг турли соҳаларга татбиқ доираси ниҳоятда кенг. Аммо шулардан энг муҳими, фикримизча, унинг ҳар хил математик объектларни (иррационал сонларни, функцияларни, хос ва хосмас интегралларни) тақрибий ҳисоблашга қўлланишидадир. Сирасини айтганда, анализнинг барпо бўлишидаги асосий манбалардан бири ҳам шудир. Бундай масалалар ҳозирга қадар ҳам анализнинг тараққиёти учун хизмат қилиб келяпти. Шу мулоҳазага таянган ҳолда анализнинг тақрибий ҳисоблашларга қўлланишига асосий эътибор берилган. Бу ўринда муаллифлар ўз илмий изланишларидан ҳам фойдаланганлар.

Учинчидан. Асосий тушунчаларни киритиш, асосий фактларни шарҳлашда мумкин қадар соддароқ, тушунарлироқ фикр юритишга ва муайян тасаввур ҳосил қилингандан кейингина уларни математик қатъият ва изчиллик билан баён этишга ҳаракат қилинди. Бу ҳамма дарслик ва қўлланмалар учун ҳам фойдадан ҳоли бўлмаган ўзига хос методик ёндашиш бўлиб, китобдан техник олий ўқув юртларининг талабалари ва ўқитувчилари фойдалана олишлари учун имкон яратади.

Китоб қўлёзмасининг дастлабки вариантини синчиклаб ўқиб чиқиб, уни илмий ва методик жиҳатдан яхшиланишига ўз ҳиссаларини қўшганлари учун доцентлар Э. Х. Якубов ва Б. Наимжоновларга муаллифлар ташаккур изҳор қиладилар. Фикр-мулоҳазалари билан китобнинг янада яхшиланишига муносиб ҳиссаларини қўшганликлари учун профессорлар Л. И. Волковский, А. С. Саъдуллаев, Х. Р. Латипов, доцентлар А. Ворисов, Р. Ғанихўжаевларга ҳамда махсус муҳаррирлик вазифасини масъулият билан бажарганлиги учун Тошкент Давлат университети профессори Ғ. Н. Насритдиновга муаллифлар самимий миннатдорчилик билдирадилар. Қўлланмадаги камчиликларни бартараф этишга ва унинг сифатини яхшилашга қаратилган фикр ва мулоҳазаларини билдирган ўртоқларга муаллифлар аввалдан ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

I-БОБ

ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

Ушбу бобда математика фанининг барча тармоқларида қўлланиладиган энг муҳим тушунчалар ҳақида баъзи маълумотлар берилади. Бундай тушунчалардан тўплам ва акслантириш тушунчаларини келтириш мумкин. Улардан математик анализ курси давомида муттасил фойдаланиб борилади.

1-§. Тўплам. Тўпламлар устида амаллар

1. Тўплам тушунчаси. Ҳар бир фанни ўрганиш аввало унинг асосий тушунчалари билан танишишдан бошланади. Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич тушунчаларидан бири бўлиб, у мисоллар ёрдамида тушунтирилади. Масалан, шкафдаги китоблар, барча тўғри касрлар, Қуёш системасидаги сайёралар, берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами ҳақида гапириш мумкин.

Тўпламни ташкил этган нарсалар (предметлар) унинг *элементлари* деб аталади.

Одатда, тўпламлар лотин ёки юнон алфавитининг бош ҳарфлари билан, унинг элементлари эса кичик ҳарфлари билан белгиланади. Масалан, A, B, . . . , E, F, . . . лар билан тўпламни, a, b, c, . . . лар билан тўпламнинг элементини белгилаймиз.

Агар A тўпламнинг элементи a бўлса, $a\in A$ ёки $A\ni a$ каби ёзилади ва «a элемент A тўпламга тегишли» деб ўқилади. Акс ҳолда $a\overline{\in}A$ ёки $a\notin A$ деб ёзилади ва «a элемент A тўпламга тегишли эмас» деб ўқилади. Масалан, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ бўлса, у ҳолда $6\in A$, $7\overline{\in}A$ бўлади.

Чекли сондаги элементлардан ташкил топган тўплам *чекли тўплам* деб аталади. Масалан, юқорида келтирилган тўпламлардан шкафдаги китоблар чекли тўпламни ташкил этади.

Математикада кўпинча чекли бўлмаган тўпламларни — *чексиз тўпламларни* қарашга тўғри келади. Масалан, барча тўғри касрлар, барча натурал сонлар, берилган нуқтадан ўтувчи барча тўғри чизиқлар тўплами чексиз тўпламларга мисол бўла олади.

Барча натурал сонлардан иборат тўплам N ҳарфи билан белгиланади ва

$$N=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \text{ ёки } N=\{n: n=1, 2, 3, \ldots\}$$

каби ёзилади. Яна бир мисол сифатида $B = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$ тўпламни келтирайлик. Бу тўплам $x^2 - 5x + 6 = 0$ тенглама илдизларидан ташкил топган.

Юқорида биз тўплам унинг барча элементлари учун характерли бўлган хусусиятни, қоидани келтириш билан берилишини, шунингдек, унинг барча элементларини бевосита кўрсатиш билан берилишини кўрдик. Айрим вақтларда тўплам қандай характерли хусусиятга эга бўлган элементлардан ташкил топганлиги маълум бўлса ҳам, бундай хусусиятли элементлар мавжуд бўлмаслиги мумкин. Масалан, A тўплам $m + x = n$ тенгламанинг ($n \in N$, $m \in N$, $n < m$) натурал сонлар тўпламидаги илдизларидан ташкил топган дейилса, бу тўпламнинг битта ҳам элементи йўқлиги маълум бўлади. Бунга сабаб, берилган тенгламанинг натурал сонлар тўпламида илдизга эга эмаслигидир. Бундан кўринадики, элементга эга бўлмаган тўпламларни ҳам кўришга тўғри келади.

Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам *бўш тўплам* дейилади ва $\varnothing$ каби белгиланади.

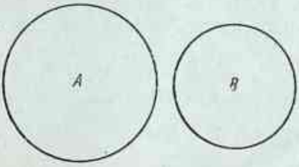
Шуни таъкидлаш лозимки, тўпламни аниқлашда уни ташкил этган элементлар орасида айнан бир-бирига тенг бўлган элементлар тўпламнинг элементи сифатида фақат бир мартагина олинади. Масалан, B тўплам $x^3 - 3x + 2 = 0$ тенгламанинг илдизларидан иборат бўлсин. Бу тенгламанинг илдизлари $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ бўлиб, улардан тузилган B тўплам деганда биз 1 ва -2 элементлардан тузилган $B = \{1, -2\}$ тўпламни тушунамиз.

Кўпинча тўпламлар, улар чекли ёки чексиз бўлишидан қатъи назар, символик равишда текисликда бирор шакл, масалан, доирачалар билан тасвирланади. Бу эса тўпламлар устида бажарилган амалларни тасаввур қилишда, улар орасидаги муносабатларни ўрганишда анча қулайлик туғдиради (1-чизма).

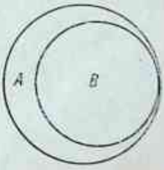
Агар B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламнинг ҳам элементи бўлса, B тўплам A тўпламнинг *қисми* ёки *қисмий тўплами (тўплам ости)* деб аталади ва $B \subset A$ каби белгиланади (2-чизма). Масалан, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ бўлсин. Бунда $B \subset A$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Бўш тўплам $\varnothing$ ҳар қандай A тўпламнинг қисми (қисмий тўплами) деб ҳисобланади.

Бирор A тўплам берилган бўлсин. Бу тўпламнинг барча қисмий тўпламларидан иборат тўпламни $\mathcal{F}(A)$ каби белгилаймиз. Равшанки,



1-чизма.



2-чизма.

$\varnothing \in \mathcal{F}(A)$, $A \in \mathcal{F}(A)$. $\mathcal{F}(A)$ тўплам элементларининг ўзи тўпламдир. Масалан, $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$ тўпламлар учун

$$\mathcal{F}(A)=\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \varnothing\},$$
$$\mathcal{F}(B)=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \varnothing\}$$

бўлади. Умуман, элементлари сони n та бўлган тўпламнинг барча қисмий тўпламларидан тузилган тўпламнинг элементлари сони 2^n га тенг.

Агар тўплам чексиз бўлса, унинг қисмий тўпламларидан тузилган тўпламнинг элементлари сони беқиёс кўп бўлади.

1-таъриф. Агар A тўплам B тўпламнинг қисми, B тўплам A тўпламнинг қисми бўлса, у ҳолда A ва B тўпламлар *тенг тўпламлар* деб аталади.

A ва B тўпламлар тенг эканлиги $A=B$ каби ёзилади.

Масалан, A тўплам $k\pi$ кўринишдаги сонлардан иборат бўлсин, бунда $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, яъни $A=\{a\colon a=k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

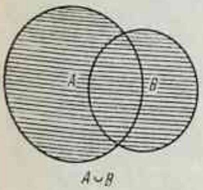
B тўплам эса $\sin x=0$ тенгламанинг ечимларидан иборат бўлсин, яъни $B=\{x\colon \sin x=0\}$. Агар $\sin x=0$ тенгламанинг барча ечимлари $x=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ формула билан ёзилишини ҳисобга олсак, $A=B$ бўлишини кўрамиз.

2-таъриф. Агар шундай $a\in A$ топилсаки, $a\bar{\in} B$ бўлса ёки шундай $b\in B$ топилсаки, $b\bar{\in} A$ бўлса, у ҳолда A ва B тўпламлар *тенг эмас* дейилади.

Бу ҳол $A\neq B$ каби ёзилади.

Масалан, ушбу $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$ тўпламлар тенг эмас.

2. Тўпламлар устида амаллар. Биз қуйида тўпламлар устида бажариладиган амалларни келтирамиз.



3- чизма.

3-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча элементларидан ташкил топган C тўплам A ва B тўпламларнинг *йиғиндиси* деб аталади.

A ва B тўпламларнинг йиғиндиси $C=A\cup B$ каби белгиланади (3- чизма). Масалан, $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$, $E=\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $D=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ бўлса, унда уларнинг йиғиндилари қуйидаги тўпламлардан иборат бўлади: $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $E\cup D=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}=N$, $A\cup E=\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

Юқорида келтирилган 3-таърифдан:

$$A\cup A=A, \quad A\cup B=B\cup A$$

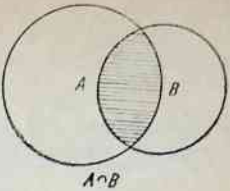
келиб чиқади, шунингдек, агар $A\subset B$ бўлса, унда $A\cup B=B$ бўлади.

4-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча умумий элементларидан ташкил топган D тўплам A ва B тўпламларнинг *кўпайтмаси* дейилади.

A ва B тўпламларнинг кўпайтмаси $D = A \cap B$ каби белгиланади (4- чизма). Масалан, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ бўлса, уларнинг кўпайтмаси $A \cap B = \{2, 4\}$ тўплам бўлади. Тўпламлар кўпайтмасининг 4- таърифидан бевосита

$$A \cap A = A, \quad A \cap B = B \cap A$$

келиб чиқади, шунингдек, агар $A \subset B$ бўлса, унда $A \cap B = A$ бўлади.



4- чизма.

Икки тўплам кўпайтмаси бўш тўплам, яъни $A \cap B = \varnothing$ бўлса, у ҳолда A ва B тўпламлар *кесишмайдиган тўпламлар* дейилади. Масалан, $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $F = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ тўпламлар кесишмайдиган тўпламлар бўлади, чунки $E \cap F = \varnothing$.

Биз тўпламларнинг йиғиндиси ҳамда кўпайтмаси таърифларини икки тўпламга нисбатан келтирдик. Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламлар берилган бўлса, уларнинг йиғиндиси

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

ҳамда кўпайтмаси

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

юқоридагига ўхшаш таърифланади.

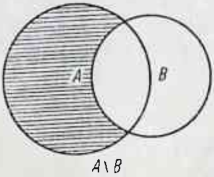
5-таъриф. A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган барча элементларидан тузилган E тўплам A тўпламдан B тўпламнинг *айирмаси* деб аталади.

A дан B нинг айирмаси $E = A \setminus B$ каби белгиланади (5- чизма) Масалан, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ бўлса, $A \setminus B = \{1, 2. 4, 5\}$ ва $B \setminus A = \{6, 9, 12\}$ бўлади.

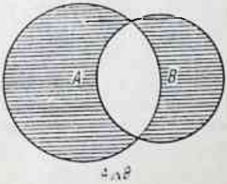
Агар A тўплам S тўпламнинг қисми (яъни $A \subset S$) бўлса, ушбу $S \setminus A$ айирма A тўпламни S тўпламга *тўлдирувчи тўплам* деб аталади ва $C_S A$ каби ёзилади:

$$C_S A = S \setminus A.$$

6-таъриф. A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган барча элементларидан ва B тўпламнинг A тўпламга тегишли бўлмаган бар-



5- чизма.



6- чизма.

ча элементларидан тузилган тўплам A ва B тўпламларнинг *симметрик айирмаси* деб аталади. Симметрик айирма $A\Delta B$ каби белгиланади (6-чизма). Таърифга кўра

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Масалан, агар $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ бўлса, у ҳолда бу тўпламларнинг симметрик айирмаси

$$A\Delta B=\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$$

бўлади.

Икки A ва B тўплам берилган бўлсин. Биринчи элементи A тўпламга, иккинчи элементи B тўпламга тегишли бўлган тартибланган (a, b) жуфтликларни қарайлик:

$$a\in A,\quad b\in B.$$

7-таъриф. Барча (a, b) кўринишдаги жуфтликлардан тузилган тўплам A ва B тўпламларнинг *Декарт кўпайтмаси* деб аталади.

Тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси $A\times B$ каби белгиланади. Одатда $A\times A$ тўплам A^2 деб белгиланади, яъни

$$A\times A=A^2.$$

Масалан, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 4\}$ бўлсин. Бу тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси қуйидаги

$$A\times B=\{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$$

тўплам бўлади. Умуман айтганда, $A\times B\neq B\times A$.

Юқорида тўпламларни ва улар устида бажарилган амалларни тасвирлаш учун ишлатилган шакллар *Эйлер — Виен диаграммалари* деб аталади (1 — 6-чизмалар).

3. Универсал тўплам. Юқорида киритилган амаллар ихтиёрий тўпламлар учун, тўпламларнинг табиатига ҳеч қандай шарт қўймасдан таърифланди. Аммо бундай «умумийлик» баъзан конкрет ҳолларда маънонинг йўқолишига олиб келиши ҳам мумкин. Масалан, A тўплам сифатида 2, 4, 6, 8, 10 сонлар тўпламини: $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, B тўплам сифатида Қуёш системасидаги сайёралар тўпламини олсак, уларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси формаль айтила олинса ҳам, муайян ғайритабиийликка олиб келиши равшан. Бундай маъносизлик ҳолларини истисно қилиш учун, одатда барча амаллар бирор универсал тўплам деб аталувчи тўпламнинг қисмий тўпламлари устида бажарилади деб ҳисобланади. Бу универсал тўплам U ёки Ω билан белгиланади. Масалан, юқорида келтирилган сонли мисолларда универсал тўплам сифатида натурал сонлар тўплами $U=N=\{1, 2, 3, \ldots\}$ олиниши мумкин. Эйлер — Виен диаграммалари учун эса U сифатида текисликнинг нуқталари тўплами олиниши мумкин.

Математик анализ курси давомида, асосан, универсал тўплам сифатида ҳақиқий сонлар тўплами R (қаранг 2-боб, 4-§) қаралади.

4. Тўпламни бўлаклаш. Бирор A тўплам берилган бўлиб, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламлар унинг қисмий тўпламлари бўлсин: $A_k\subset A$ $(k=1, 2, 3, \ldots, n)$.

Агар $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ қисмий тўпламлар системаси учун

1°. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$,

2°. $A_k \cap A_i = \varnothing \quad (k \neq i;\ k,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$

шартлар бажарилса, $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ система A да *бўлаклаш* бажарган ёки A тўплам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламларга *бўлакланган* дейилади.

Биринчи шарт $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламлар йиғиндиси A тўплам бўлишини, иккинчи шарт эса бу тўпламларнинг ҳеч бир иккитаси ўзаро кесишмаслигини билдиради. Иккала шарт биргаликда A даги ҳар бир элемент бўлаклашнинг битта ва фақат битта элементига тегишли бўлишини таъминлайди.

Баъзан $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ни A даги *бўлаклаш*, A_i ларни эса бўлаклашнинг *элементлари* дейилади.

Табиийки, битта A тўпламда турли бўлаклашлар бажарилган бўлиши мумкин ва ҳар қандай $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ бўлаклаш $\mathcal{F}(A)$ нинг қисмидир.

Мисоллар. 1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ тўплам берилган бўлиб, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$ бўлсин, Равшанки, $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A$, $A_3 \subset A$ бўлиб,

1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = A$,

2) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_2 \cap A_3 = \varnothing$, $A_1 \cap A_3 = \varnothing$

бўлади. Демак, берилган A тўплам A_1, A_2, A_3 тўпламларга бўлаклангандир, ((A_1, A_2, A_3) система A тўпламдаги бўлаклашдир.)

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ бўлиб, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_5 = \{5\}$, $A_6 = \{6\}$ бўлсин. Бу ҳолда ҳам $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ система учун юқоридаги 1°—2°-шартлар бажарилади ва, демак, у A даги бўлаклаш бўлади.

2-§. Акслантиришлар

1. Акслантириш тушунчаси. Акслантириш тушунчаси математиканинг асосий тушунчаларидан бири. Акслантиришлар назариясида бир тўпламнинг элементларини иккинчи тўпламнинг элементларига мос келтириш қонуниятлари ўрганилади.

Икки E ва F тўплам берилган бўлсин.

8-таъриф. Агар E тўпламдан олинган ҳар бир x элементга $(x \in E)$ бирор қоида ёки қонунга кўра F тўпламда битта y элемент $(y \in F)$ мос қўйилган бўлса, у ҳолда E тўпламни F тўпламга *акслантириш* берилган деб аталади.

Акслантиришлар кўпинча f ҳарфи орқали белгиланиб, қуйидагича ёзилади:

$$f : E \to F \quad \text{ёки} \quad x \xrightarrow{f} y.$$

E тўплам f акслантиришнинг *аниқланиш соҳаси* деб аталади.

Мисоллар. 1. $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$

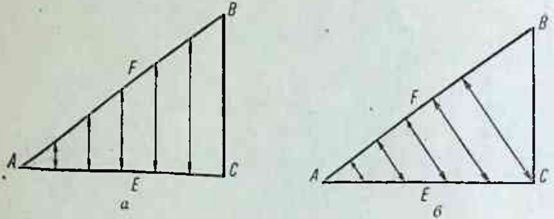
тўпламлар берилган бўлсин. Агар ҳар бир натурал сон n га $\frac{1}{n}$ сонни мос қўйсак: $n \xrightarrow{f} \frac{1}{n}$, биз $f: N \to N'$ акслантиришга эга бўламиз. Баъзан бу муносабат $f(n) = \frac{1}{n}$ каби ҳам ёзилади.

2. N ва N' тўпламлар берилган бўлиб, ҳар бир $n \in N$ сонга $\frac{1}{n^2} \in N'$ сонни мос қўйсак, яъни $n \to \frac{1}{n^2}$, унда ушбу $g: N \to N'$, яъни $g(n) = \frac{1}{n^2}$ акслантириш ҳосил бўлади.

3. Ҳар бир $n \in N$ сонга N' тўпламнинг 1 сонини мос қўйиб (яъни $n \xrightarrow{\varphi} 1$)

$$\varphi: N \to N', \text{ яъни } \varphi(n) = 1$$

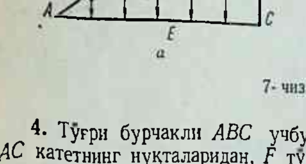
акслантиришга келамиз.



7- чизма.

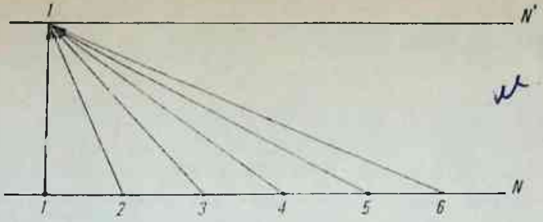
4. Тўғри бурчакли ABC учбурчак берилган бўлсин, E тўплам AC катетнинг нуқталаридан, F тўплам эса гипотенузанинг нуқталаридан иборат бўлсин. E тўпламнинг ҳар бир x элементига F тўпламнинг y элементини 7-*а* чизмада кўрсатилганидек мос қўйиб, $f: E \to F$ акслантиришга, бу тўпламларнинг элементлари орасида 7-*б* чизмада кўрсатилганидек мослик ўрнатиб, бошқа, $g: E \to F$ акслантиришга эга бўламиз.

Келтирилган мисоллардан бир тўплам элементларини иккинчи тўплам элементларига акслантиришлар ($E \to F$) турлича бўлиши мумкин эканлигини кўрамиз.



8- чизма.

E ва F тўпламларнинг элементларини нуқталар деб тасаввур қилиб, $f: E \to F$ акслантиришни 8-чизмада кўрсатилганидек геометрик ифодалаш мумкин. Масалан, юқорида келтирилган 3-мисолдаги $\varphi(n) = 1$ акслантириш 9-чизмадагидек тасвирланади.



9- чизма.

Ушбу $f: E \to F$ акслантириш берилган бўлсин. f акслантириш ёрдамида E тўпламнинг x элементига мос келган F тўпламнинг y элементи x элементнинг *акси (образи)* деб аталади ва $y = f(x)$ каби белгиланади. Энди F тўпламда ихтиёрий y элемент олайлик. E тўпламнинг шундай x элементларини қарайликки, уларнинг акслари қаралаётган y га тенг бўлсин. Бундай $x \in E$ элементлар y нинг *асли (прообрази)* деб аталади ва $f^{-1}(y)$ каби белгиланади, яъни $f^{-1}(y) = \{x: x \in E, \ f(x) = y\}$.

Агар $A \subset E$ бўлса, A тўплам элементларининг аксларидан иборат $\{f(x); x \in A\}$ тўплам A тўпламнинг F даги *акси* деб аталади ва у $f(A)$ каби белгиланади. Агар $B \subset F$ бўлса, B тўплам элементларининг аслларидан иборат $\{x: f(x) \in B\}$ тўплам B тўпламнинг *асли* деб аталади ва у $f^{-1}(B)$ каби белгиланади.

Мисол. $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $M = \{-1, +1\}$, тўпламлар ва $f(n) = (-1)^n$ акслантириш берилган бўлсин. Бунда, масалан, $5 \in N$ нинг акси $f(5) = -1$ бўлиб, M тўпламда олинган 1 нинг асли эса $f^{-1}(1) = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ жуфт сонлар тўпламидан иборатдир. N тўпламнинг қисми бўлган $A = \{3, 4\}$ $(A \subset N)$ тўпламнинг акси $f(A) = \{-1, +1\} = M$ бўлади. M тўпламнинг қисми бўлган $B = \{-1\}$ $\{B \subset M\}$ тўпламнинг асли эса $f^{-1}(B) = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ бўлади.

1-теорема. *F нинг қисмлари бўлган A ва B тўпламлар кўпайтмасининг асли бу тўпламлар аслларининг кўпайтмасига тенг:*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \qquad (1.1)$$

Исбот. (1.1) тенгликнинг тўғрилигини кўрсатиш учун ушбу

$$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \text{ ва } f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$$

муносабатларни исботлаш етарлидир.

Фараз қилайлик, x элемент $f^{-1}(A \cap B)$ тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин: $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Бундан $f(x) \in A \cap B$ келиб чиқади. Демак, $f(x) \in A$ ва $f(x) \in B$ бўлади. Энди $f(x) \in A$ дан $x \in f^{-1}(A)$, шунингдек, $f(x) \in B$ дан $x \in f^{-1}(B)$ га эгамиз. Шундай қилиб, $x \in f^{-1}(A)$, $x \in f^{-1}(B)$, демак, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Биз $f^{-1}(A \cap B)$ тўпламдан олинган ҳар бир x элемент $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ тўпламнинг ҳам элементи эканлигини кўрсатдик. Демак,

$$f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B). \qquad (1.2)$$

Энди x элемент $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин: $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$. У ҳолда $x\in f^{-1}(A)$ ва $x\in f^{-1}(B)$ бўлади. Бундан эса, $f(x)\in A$, $f(x)\in B$ га эга бўламиз. Демак, $f(x)\in A\cap B$ бўлиб, натижада $x\in f^{-1}(A\cap B)$ эканлигини аниқлаймиз. Шундай қилиб, $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ тўпламнинг ихтиёрий x элементи $f^{-1}(A\cap B)$ тўпламнинг ҳам элементи бўлади. Бу эса

$$f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cap B) \qquad (1.3)$$

эканини англатади. (1.2) ва (1.3) муносабатлардан (1.1) тенглик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Қуйидаги теоремалар худди шунга ўхшаш исбот қилинади.

2-теорема. *F нинг қисмлари бўлган A ва B тўпламлар йиғиндисининг асли бу тўпламлар аслларининг йиғиндисига тенг:*

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B). \qquad (1.4)$$

3-теорема. *E нинг қисмлари бўлган A ва B тўпламлар йиғиндисининг акси бу тўпламлар акслари йиғиндисига тенг:*

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B). \qquad (1.5)$$

2. Акслантиришнинг турлари. Ушбу

$$f:E\to F$$

акслантириш берилган бўлиб, $f(E)$ эса E тўпламнинг акси бўлсин:

$$f(E)=\{f(x):\ x\in E\}.$$

Равшанки, ҳар қандай акслантириш учун $f(E)\subset F$ муносабат ўринли.

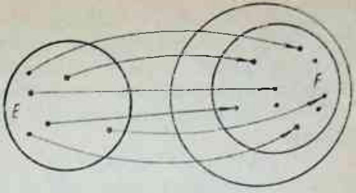
9-таъриф. Агар $f:E\to F$ акслантиришда $f(E)\neq F$ бўлса, бундай акслантириш E тўпламни F нинг *ичига акслантириш* деб аталади.

Мисол. $N=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$, $N'=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\right\}$ тўпламлар берилган бўлиб, $f:N\to N'$ акслантириш эса $n\to\frac{1}{3n}$ $\left(\text{ёки } f(n)=\frac{1}{3n}\right)$ кўринишда берилган бўлсин. Бу акслантиришда N тўпламнинг акси $f(N)=\left\{\frac{1}{3n};\ n=1,\ 2,\ \ldots\right\}=\left\{\frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \ldots\right\}$ тўпламдан иборат бўлиб, $f(N)\neq N'$ бўлади. Демак, f акслантириш ичига акслантиришдир. 1-бандда келтирилган 2, 3-мисоллардаги ва 7-б чизмадаги акслантиришлар ҳам ичига акслантиришлар бўлади.

Ичига акслантиришни 10-чизмадаги каби геометрик тасвирлаш мумкин.

10-таъриф. Агар $f:E\to F$ акслантиришда $f(E)=F$ бўлса, бундай акслантириш E тўпламни F нинг *устига акслантириш* деб аталади.

Устига акслантиришни баъзан *сюръектив акслантириш* дейилади.



10- чизма.

Мисол. E тўплам текисликдаги (a, b), $a=0, \pm 1$; $b=0, \pm 1$ нуқталардан иборат: $E=\{(a, b): a=0, \pm 1; b=0, \pm 1\}$, F тўплам эса 0, 1, 2 сонлардан иборат: $F=\{0, 1, 2\}$. E тўпламнинг ҳар бир (a, b) элементини ушбу

$$(a, b)\xrightarrow{f} a^2+b^2$$

қоидага кўра F тўпламнинг элементларига акс эттирувчи f акслантиришни қарайлик. Бу акслантириш сюръектив акслантириш бўлади. Чунки $f(E)=\{0, 1, 2\}=F$. Шунингдек, аввалги бандда келтирилган 1-мисолдаги ва 7-a чизмадаги акслантиришлар устига акслантиришга мисол бўлади.

11-таъриф. Агар $f: E\to F$ акслантириш E тўпламнинг турли элементларини F тўпламнинг турли элементларига акс эттирса, f *инъектив акслантириш* деб аталади.

Юқорида 1-бандда келтирилган 1 ва 2-мисолларда қаралган $f(n)=\frac{1}{n}$ ва $g(n)=\frac{1}{n^2}$ акслантиришлар инъектив акслантириш бўлиб, 2-§ даги 3-мисолда $\varphi(n)=1$ акслантириш эса инъектив бўлмайди.

12-таъриф. Агар $f: E\to F$ акслантириш устига акслантириш бўлса ва ихтиёрий $y\in F$ элемент E тўпламдаги ягона элементнинг акси бўлса, f акслантириш *ўзаро бир қийматли мослик* деб аталади.

Ўзаро бир қийматли мослик баъзан *биектив акслантириш* дейилади.

Мисол. Радиуслари r_1 ва r_2 $(r_1<r_2)$ бўлган концентрик айланалар берилган. E тўплам r_1 радиусли айлана нуқталаридан, F тўплам эса r_2 радиусли айлана нуқталаридан иборат бўлсин. Марказдан чиққан ҳар бир нур r_1 радиусли айланани x нуқтада, r_2 радиусли айланани y нуқтада кесиб ўтади. Ҳар бир $x\in E$ га $y\in F$ ни мос қўямиз. Натижада E тўпламнинг элементларини F тўпламнинг элементларига акс эттирувчи f акслантиришни ҳосил қиламиз. Бу акслантириш, равшанки, биектив акслантириш бўлади (11-чизма).

11- чизма.

1-банддаги 1-мисолда берилган $f(n)=\frac{1}{n}$, $n\in N$ акслантириш ҳам биектив акслантиришдир.

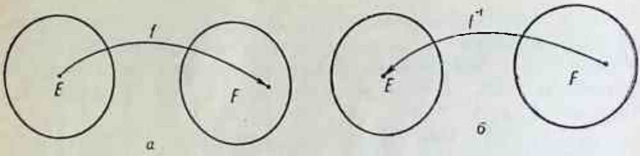
3. Тескари акслантириш. Биз юқорида $f: E\to F$ акслантириш ва унинг турларини қараб ўтдик. Маълумки, $f: E\to F$ акслантиришда E

тўпламнинг ҳар бир x элементига бирор қоидага кўра F тўпламнинг битта y элементи мос қўйилар эди. Энди $f:E \to F$ акслантириш берилган ҳолда F тўпламнинг ҳар бир элементини E тўпламнинг битта элементига акс эттирувчи акслантиришни қараймиз. $f:E \to F$ акслантириш биектив, яъни ўзаро бир қийматли мослик бўлсин.

13-таъриф. F тўпламнинг ҳар бир y элементига E тўпламнинг битта x элементини мос қўядиган ва

$$g(y) = g(f(x)) = x$$

муносабат билан аниқланадиган $g:F \to E$ акслантириш $f:E \to F$ акслантиришга нисбатан тескари акслантириш деб аталади. f акслантиришга нисбатан тескари акслантириш f^{-1} каби белгиланади (12-a, $б$ чизма).



12-чизма.

Мисол. $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, $N_1 = \{1, -2, 3, -4, \ldots, (-1)^{n+1} n, \ldots\}$ тўпламлар берилган бўлиб, $f:N \to N_1$ акслантириш $n \to (-1)^{n+1} n$ кўринишда бўлсин. Бу акслантириш биектив акслантиришдир. Унга тескари бўлган $f^{-1}:N_1 \to N$ акслантириш ушбу $(-1)^{n+1} n \to n$ кўринишда бўлади. Шунингдек, 1-банднинг 1-мисолидаги акслантириш тескари акслантиришга эга бўлиб, у $\frac{1}{n} \to n$ кўринишда бўлади. Шундай қилиб, $f:E \to F$ акслантиришга нисбатан тескари акслантириш мавжуд бўлиши учун:

1) $f:E \to F$ акслантириш сюръектив акслантириш бўлиши.

2) F тўпламдан олинган ҳар бир y элементнинг E тўпламдаги асли $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ ягона бўлиши керак.

3-§. Тўпламларни таққослаш

Одатда, кўпинча турли тўпламларни таққослашга, яъни уларни элементларининг миқдори бўйича солиштиришга тўғри келади.

Агар A ва B лар чекли тўпламлар бўлса, у ҳолда уларнинг элементларини бевосита санаш билан элементлар сони бир-бирига тенглигини ёки A тўпламнинг элементлари сони B тўпламнинг элементлари сонидан кўп ёки кам эканини аниқлаш мумкин.

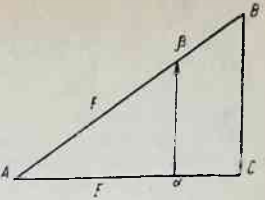
Агар A ва B тўпламлар чексиз тўпламлар бўлса, унда бу тўпламларнинг элементларини, равшанки, санаш йўли билан таққослаб бўлмайди. Аммо бу тўпламларни уларнинг элементларини бир-бирига мос қўйиш йўли билан таққослаш мумкин.

14-таъриф. Агар A ва B тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлса, улар бир-бирига *эквивалент тўпламлар* деб аталади.

Эквивалент A ва B тўпламлар

$$A \sim B$$

каби белгиланади.



13- чизма.

Масалан, тўғри бурчакли ABC учбурчак ($\Delta\, ABC$) берилган бўлсин (13-чизма). Бу учбурчакнинг гипотенузаси AB нинг нуқталаридан иборат тўпламни F деб, AC катетни ташкил этган нуқталар тўпламини эса E деб олайлик. Бу E ва F тўпламларнинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин. F тўпламда олинган ҳар бир β нуқтага шу нуқтадан AC га туширилган перпендикулярнинг асоси α ни мос қўямиз ва аксинча. Бу эса E ва F тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эканлигини кўрсатади. Демак, таърифга биноан, $E \sim F$ экан.

Шунингдек,
$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $N=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, $N'=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ тўпламлар берилган бўлса, унда $A\sim B$ ва $N\sim N'$ эканини кўрамиз.

Эквивалентлик тушунчаси тўпламларни синфларга ажратиш имконини беради.

Масалан, бизга қуйидаги тўпламлар берилган бўлсин:

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{10, 11\}$, $D=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $E=\{1\}$. Бу тўпламлар орасида A ва D тўпламлар, B ва C тўпламлар эквивалент: $A\sim D$, $B\sim C$. Бунда A ва D тўпламлар битта 6 элементли тўпламлар синфига кирса, B ва C тўпламлар эса бошқа 2 элементли тўпламлар синфига киради. Аммо E тўплам A, B, C, D тўпламларнинг биронтасига ҳам эквивалент эмас. У бир элементли тўпламни ташкил этади.

Натурал сонлар тўплами N берилган бўлсин. Бу тўпламга эквивалент бўлган тўпламларга мисоллар келтирайлик:

$$N'=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}, \; n\longleftrightarrow\frac{1}{n};$$
$$N''=\{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}, \; n\longleftrightarrow 2n;$$
$$N'''=\{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots\}, \; n\longleftrightarrow 2n-1$$

ва ҳ. к.

15-таъриф. Натурал сонлар тўплами N га эквивалент бўлган ҳар қандай тўплам *саноқли тўплам* деб аталади.

Натурал сонлар тўплами N га эквивалент бўлган барча тўпламлар *саноқли тўпламлар синфини* ташкил этади.

Қуйидаги икки $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, $N'' = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ тўплам берилган бўлсин. Бунда $N'' \subset N$ эканлиги равшан. Аммо юқорида $N \sim N''$ эканлигини таъкидлаган эдик. Демак, $N'' \subset N$, $N'' \sim N$.

Тўпламнинг қисми ўзига эквивалент бўлиши фақат чексиз тўпламларгагина хосдир.

Биз юқорида мисол тариқасида келтирган тўпламларимиз асосан чекли тўпламлар ёки саноқли тўпламлар эди. Табиийки, чексиз, аммо саноқли бўлмаган тўпламлар борми? — деган савол туғилади. Бундай тўпламлар мавжуд. Улар билан кейинроқ танишамиз (3- боб, 8- § нинг 3- бандига қаранг).

Эквивалент тўпламлар синфининг миқдорий характеристикаси сифатида тўпламнинг қуввати тушунчаси киритилади. Чекли тўпламлар учун қувват тўплам элементларининг сонидан иборатдир.

4-§. Математик белгилар

Тўплам тушунчаси билан танишишда биз баъзи бир математик белгиларни ишлатдик. Масалан, «A тўпламнинг элементи a» ёки «a элемент A тўпламга тегишли» дейилганда $a \in A$ деб тегишлилик белгиси «$\in$» ни ишлатдик. Шунингдек, «$\subset$» ёки «$\supset$» белги бир тўплам иккинчи тўпламнинг қисми бўлганида қўлланилган эди.

Математикада баъзи ҳолларда ёзувни қисқартириш мақсадида тез-тез учрайдиган сўз ва сўз бирикмалари ўрнига махсус белгилар ишлатилади.

«Агар . . . бўлса, у ҳолда . . . бўлади» ибораси «$\Rightarrow$» — импликация белгиси орқали ёзилади.

Масалан, A, B ва C тўпламлар берилган бўлсин. «Агар $A \subset B$, $B \subset C$ бўлса, у ҳолда $A \subset C$ бўлади» иборасини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C.$$

Икки эквивалент тасдиқлар эквивалентлик белгиси «$\Leftrightarrow$» орқали ёзилади. Масалан,

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \varnothing.$$

«Ҳар қандай», «ихтиёрий», «барчаси учун» сўзлари ўрнига «$\forall$» *умумийлик квантори* белгисидан фойдаланилади.

«Мавжудки», «топиладики» сўзлари ўрнига «$\exists$» *мавжудлик квантори* белгиси ишлатилади. Масалан:

1) «Ихтиёрий n ҳамда m натурал сонлар йиғиндиси яна натурал сон бўлади» иборани

$$\forall n \in N,\ \forall m \in N \Rightarrow (n + m) \in N$$

каби ёзиш мумкин.

2) «Икки A ва B тўпламлар кўпайтмаси бўш эмас» деган иборани

$$A \cap B \neq \varnothing \quad \text{ёки} \quad \exists a:\ a \in A,\ a \in B$$

каби ифодалаш мумкин.

Шундай қилиб, $\in$, $\bar{\in}$, $\subset$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ математик белгиларни кўриб ўтдик. Биз улардан қулай келганда, фойдаланиб борамиз.

Математик белгиларнинг ишлатилиш мазмунини қулайлик учун қуйидаги жадвалда ифодалаймиз:

№	Математик белгилар	Математик белгиларнинг ишлатилиш мазмуни
1	$\in$	тегишлилик белгиси, a элемент A тўпламнинг элементи бўлса, $a \in A$ каби ёзилади.
2	$\bar{\in}$	тегишли эмаслик белгиси. b элемент B тўпламнинг элементи бўлмаса, $b \bar{\in} B$ каби ифодаланади.
3	$\subset$	қисм белгиси. A тўплам B тўпламнинг қисми бўлса, у $A \subset B$ каби ёзилади.
4	$\forall$	умумийлик квантори белгиси. «Ҳар қандай», «ихтиёрий», «барчаси учун» сўзлари ва сўз бирикмалари ўрнида ишлатилади.
5	$\exists$	мавжудлик квантори белгиси. «Мавжудки», «топиладики» ўрнида ишлатилади.
6	$\Rightarrow$	импликация белгиси. «Агар . . . бўлса, у ҳолда . . . бўлади» ибораси ўрнида ишлатилади.
7	$\Leftrightarrow$	эквивалентлик белгиси.

2-БОБ

ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

Сон тушунчаси узоқ ўтмишдан маълум. Одамлар санаш тақозоси билан дастлаб 1, 2, 3, . . . — натурал сонларни қўллангаилар. Сўнгра манфий сон, рационал сон ва, ниҳоят, ҳақиқий сон тушунчалари киритилган ва ўрганилган. Албатта, бу тушунчалар китобхонга ўрта мактаб математика курсидан маълум. Шунинг учун ҳам қуйида (шу бобнинг 1-, 2-§ ларида) натурал сонлар, бутун сонлар, рационал сонлар тўпламларининг энг муҳим хоссалари қисқагина баён этилган. Ҳақиқий сон тушунчасига келганда шуни айтиш керакки, унинг киритилиши математик анализ учун қаноатланарли даражада эмас. Шу сабабга кўра қуйида (шу бобнинг 3—5-§ ларида) ҳақиқий сон тушунчасини Дедекинд бўйича киритамиз ва ҳақиқий сонлар тўпламининг хоссаларини батафсил ўрганамиз.

1-§. Натурал сонлар. Бутун сонлар

1. Натурал сонлар. Маълумки, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — барча натурал сонлар тўпламини ифодалайди. Бу тўпламдан олинган ихтиёрий натурал n, m ва p сонлар учун қуйидаги икки тасдиқнинг ўринли экани равшан:

1) $n = m$, $n > m$, $n < m$ муносабатлардан биттаси ва фақат биттаси ўринли,

2) $n < m$, $m < p$ тенгсизликлардан $n < p$ тенгсизликнинг ўринли экани келиб чиқади.

Агар бирор E тўпламнинг элементлари учун юқорида келтирилган 1) ва 2) муносабатлар (тасдиқлар) ўринли бўлса, E тўплам *тартибланган тўплам* дейилади. Натурал сонлар тўплами тартибланган тўпламга дастлабки мисол бўла олади.

Агар E тартибланган тўплам бўлиб, унда шундай x_0 элемент мавжуд бўлсаки, $\forall x \in E$ учун $x = x_0$ ёки $x > x_0$ $(x < x_0)$ бўлса, x_0 E нинг энг кичик (энг катта) элементи дейилади. Тартибланган тўпламда энг кичик (энг катта) элемент мавжуд бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин.

Натурал сонлар тўплами элементларини ўзаро таққослаб, бу тўплам элементлари орасида энг кичик элемент мавжудлигини ва у 1 сони эканлигини топамиз. Аммо N тўплам элементлари орасида энг катта элемент йўқ. Ҳақиқатан, ҳар бир $n \in N$ учун яна N га тегишли $n + 1$ сон топилади.

Маълумки, натурал сонлар тўплами N да иккита амал қўшиш $(n + m)$ ва кўпайтириш $(n \cdot m)$ амаллари киритилади ва улар қуйидаги хоссаларга эга бўлади.

1°. Коммутативлик: $n + m = m + n$, $n \cdot m = m \cdot n$.

2°. Ассоциативлик: $(n + m) + p = n + (m + p)$, $(n \cdot m)\, p = n\, (m \cdot p)$.

3°. Дистрибутивлик: $(n + m) \cdot p = n \cdot p + m \cdot p$.

4°. N тўпламда шундай k элемент борки, $k \cdot n = n \cdot k = n$ бўлади. Бу элемент $k = 1$ дир.

Кўпгина масалаларни натурал сонлар тўпламида ҳал қилиб бўлмайди. Масалан, қуйидаги содда

$$x + 2 = 1 \tag{2.1}$$

тенглама натурал сонлар тўпламида ечимга эга эмас, яъни шу тенгламани қаноатлантирадиган натурал сон мавжуд эмас. Бу ҳол натурал сонлар тўпламини кенгайтиришни тақозо этади.

2. Бутун сонлар. Барча манфий натурал сонлар, ноль сони ва барча натурал сонлардан иборат тўплам бутун сонлар тўпламини ташкил этади ва у одатда Z ҳарфи билан белгиланади:

$$Z = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Равшанки, $N \subset Z$.

Бутун сонлар тўплами натурал сонлар тўплами каби тартибланган тўплам бўлади. Бутун сонлар тўпламида энг кичик элемент ҳам, энг катта элемент ҳам мавжуд бўлмайди. Бутун сонлар тўпламида қўшиш, кўпайтириш амаллари билан бир қаторда айириш амали $(p - q)$ ҳам киритилади ва бу амалларга нисбатан 1-банддаги 1°, 2°, 3°, 4°-хоссалар билан бирга яна қуйидаги хоссалар ҳам ўринлидир:

5°. $\forall q \in Z$ элемент учун Z тўпламда шундай элемент $-q$ мавжудки, $q + (-q) = 0$ бўлади.

6°. $\forall q \in Z$ элемент учун $q + 0 = 0 + q = q$ бўлади.

7°. $\forall q \in Z$ элемент учун $q \cdot 0 = 0 \cdot q = 0$ бўлади.

Z тўплам элементлари учун киритилган қўшиш ва кўпайтириш амаллари N тўплам элементлари учун киритилган шу амалларнинг Z га *тарқатилишидир.*

Юқоридаги (2.1) тенглама бутун сонлар тўпламида ечимга эга. Натурал сонлар тўплами N бутун сонлар тўплами Z гача кенгайтирилса-да, бу Z тўпламда ҳам кўпгина масалалар ечилавермайди. Масалан, ушбу содда

$$2x + 5 = 0 \tag{2.2}$$

тенглама бутун сонлар тўпламида ечимга эга эмас. Бу ҳол, юқоридагидек, бутун сонлар тўпламини ҳам кенгайтириш зарурлигини кўрсатади.

2-§. Рационал сонлар тўплами ва унинг хоссалари

1. Рационал сонлар. Ушбу қисқармайдиган $r = \frac{p}{n}$, $p \in Z$, $n \in N$ каср кўринишида тасвирланадиган ҳар бир сон *рационал сон* дейилади. Барча рационал сонлар тўпламини Q деб белгилаймиз.

Юқоридаги p ва n сонларнинг 1 дан бошқа умумий бўлувчилари йўқлигини $(p, n) = 1$ белги билан ифодалаймиз. Шундай қилиб,

$$Q = \left\{r:\ r = \frac{p}{n},\ (p, n) = 1,\ p \in Z,\ n \in N\right\}.$$

Рационал сонларнинг юқорида келтирилган таърифи қуйидаги таърифга эквивалент: чексиз даврий ўнли каср кўринишида тасвирланадиган ҳар бир сон *рационал сон* дейилади.

Равшанки,

$$N \subset Z \subset Q.$$

Шуни таъкидлаш лозимки, тўпламдаги бир хил элементлар унинг битта элементи сифатида олинганидек, Q тўпламда ҳам бир-бирига тенг бўлган рационал сонлар битта элемент деб қаралади. Масалан, $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{16}{24}$ рационал сонлар битта $\frac{2}{3}$ га тенг бўлган рационал сон деб олинади.

Рационал сонлар тўплами Q ҳам бутун сонлар тўплами каби тартибланган. Рационал сонлар тўпламида энг кичик элемент ҳам, энг катта элемент ҳам мавжуд бўлмайди.

Рационал сонлар тўпламида қўшиш, кўпайтириш, айириш амаллари билан бир қаторда бўлиш амали (нолга тенг бўлмаган сонга) $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ ҳам киритилади ва бу амалларга нисбатан ушбу хоссалар ўринлидир (бу хоссаларда r, t ва s лар ихтиёрий рационал сонлар):

1°. Коммутативлик: $r+t=t+r$, $rt=tr$.

2°. Ассоциативлик: $(r+t)+s=r+(t+s)$, $(r\cdot t)\ s=r\ (t\cdot s)$.

3°. Дистрибутивлик: $(r+t)\ s=r\cdot s+t\cdot s$.

4°. Ноль сонининг хусусияти: $r+0=r$, $r\cdot 0=0$.

5°. Бир сонининг хусусияти: $r\cdot 1=r$.

6°. Қарама-қарши элементнинг мавжудлиги: $\forall\, r\in Q$ учун шундай $-r\in Q$ сон мавжудки, $r+(-r)=0$ бўлади.

7°. Тескари элементнинг мавжудлиги: $\forall\, r\in Q$ $(r\neq 0)$ учун шундай $r^{-1}\in Q$ сон мавжудки, $r\cdot r^{-1}=1$ бўлади.

8°. $\forall\, r\in Q$, $\forall\, t\in Q$, $\forall\, s\in Q$ сонлар учун $r>t$ бўлганда $r+s>t+s$.

9°. $\forall\, r\in Q$, $\forall\, t\in Q$, $\forall\, s\in Q$ $(s>0)$ сонлар учун $r>t$ бўлганда $r\cdot s>t\cdot s$ бўлади.

10°. Ихтиёрий икки мусбат r ва t рационал сонлар учун шундай натурал сон n мавжудки, $n\cdot r>t$ бўлади. Бу хосса одатда *Архимед аксиомаси* деб ҳам юритилади.

2. Рационал сонлар тўпламининг зичлиги. Бу бандда рационал сонлар тўплами Q нинг тартибланганлик хоссаси билан боғлиқ бўлган яна бир хоссасини қараймиз.

Фараз қилайлик, $r\in Q$, $t\in Q$ ва $r<t$ бўлсин. У ҳолда $\frac{r+t}{2}\in Q$ ва $r<\frac{r+t}{2}<t$. Бу эса ихтиёрий r ва t рационал сонлар орасида $\frac{r+t}{2}$ рационал сон бор эканлигини кўрсатади. $\frac{r+t}{2}$ сонни s билан белгилаб, r ва s сонлар орасида жойлашган $\frac{r+s}{2}$ ҳамда s ва t орасида жойлашган $\frac{s+t}{2}$ рационал сонлар борлигини кўрамиз:

$$r < \frac{r+s}{2} < \frac{r+t}{2} < \frac{s+t}{2} < t.$$

Бу жараённи исталганча давом эттириш йўли билан ихтиёрий r ва t рационал сонлар орасида чексиз кўп рационал сонлар борлиги аниқланади. Мана шу хосса рационал сонлар тўплами Q нинг *зичлик хоссаси* дейилади.

3. Рационал сонли чегараланган ва чегараланмаган тўпламлар. A рационал сонлардан тузилган бирор тўплам бўлсин.

1-таъриф. Агар шундай рационал r сон (s сон) мавжуд бўлсаки, $\forall a \in A$ учун $a \leqslant r$ ($a \geqslant s$) бўлса, A тўплам *юқоридан (қуйидан) чегараланган* деб аталади, r рационал сон (s рационал сон) эса A тўпламнинг *юқори (қуйи) чегараси* дейилади.

Масалан, $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$ тўплам юқоридан чегараланган, чунки бу тўпламнинг ҳар бир элементи 1 дан кичик. $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ тўплам қуйидан чегараланган, чунки бу тўпламнинг ҳар бир элементи 0 дан катта.

2-таъриф. Агар A тўплам ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, у *чегараланган* деб аталади.

Масалан, $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ тўплам чегараланган, чунки бу тўпламнинг ҳар бир элементи 0 дан катта, 1 дан кичик.

Айтайлик, A тўплам ($A \subset Q$) юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлсин. У ҳолда, равшанки, бу тўпламнинг юқори (қуйи) чегаралари чексиз кўп бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$A = \{r\colon r \in Q;\ r \leqslant 1\}$$

тўпламни қарайлик. Бу тўпламнинг юқоридан чегараланганлиги равшан. Унинг юқори чегараларидан иборат тўплам

$$B = \{r\colon r \in Q;\ r \geqslant 1\}$$

бўлади. B тўплам элементлари орасида энг кичиги мавжуд ва у 1 га тенг.

2. Барча манфий рационал сонлар, ноль сони ва квадрати 2 дан кичик бўлган мусбат рационал сонлардан иборат тўпламни A дейлик:

$$A = \{r\colon r \in Q,\ r \leqslant 0\} \cup \{r\colon r \in Q,\ r > 0,\ r^2 < 2\}.$$

Бу тўплам юқоридан чегараланган. Квадрати 2 дан катта бўлган ҳар бир мусбат рационал сон A тўпламнинг юқори чегараси бўлади. Демак, A нинг юқори чегараларидан иборат тўплам

$$B = \{r\colon r \in Q,\ r > 0,\ r^2 > 2\}$$

бўлади*. Бу B тўплам элементлари орасида энг кичик сон мавжуд

---

* Квадрати 2 га тенг бўлган рационал сон мавжуд эмас. 28-бетдаги 1-теоремага қаранг.

бўлмайди. Шуни исботлаймиз. B тўпламдан r_0 сонни ($r_0 \in B$, $r_0 > 1$) олиб, унинг ёрдамида ушбу

$$r_1 = r_0 - \frac{r_0^2 - 2}{2r_0} \quad \left(0 < \frac{r_0^2 - 2}{2r_0} < 1\right)$$

рационал сонни ҳосил қиламиз. Бу r_1 рационал соннинг квадрати 2 дан катта бўлади. Ҳақиқатан,

$$r_1^2 = \left(r_0 - \frac{r_0^2 - 2}{2r_0}\right)^2 = r_0^2 - 2r_0 \frac{r_0^2 - 2}{2r_0} + \left(\frac{r_0^2 - 2}{2r_0}\right)^2 >$$

$$> r_0^2 - (r_0^2 - 2) = 2.$$

Демак, $r_1 \in B$.

Шундай қилиб B тўпламда r_0 сондан кичик бўлган r_1 рационал соннинг мавжуд бўлиши кўрсатилди. Бу эса B тўпламнинг элементлари орасида энг кичиги мавжуд эмаслигини билдиради.

3. Ушбу

$$A = \{r\colon r \in Q;\ r > 1\}$$

тўпламни қарайлик. Бу тўплам қуйидан чегаралангандир. Унинг қуйи чегараларидан иборат тўплам

$$B = \{r\colon r \in Q;\ r \leqslant 1\}$$

бўлади. B тўплам элементлари орасида энг каттаси мавжуд ва у 1 га тенг.

4. Квадрати 2 дан катта бўлган барча мусбат рационал сонлардан иборат тўпламни A дейлик:

$$A = \{r\colon r \in Q.\ r > 0,\ r^2 > 2\}.$$

Бу тўплам қуйидан чегараланган. A нинг қуйи чегараларидан иборат тўплам

$$B = \{r\colon r \in Q,\ r \leqslant 0\} \cup \{r\colon r \in Q,\ r > 0,\ r^2 < 2\}$$

бўлади. Бу B тўплам элементлари орасида энг катта сон мавжуд бўлмайди. Шуни кўрсатамиз. B тўпламдан $\forall r_0$ сонни ($r_0 \in B$, $r_0 > 1$) олиб унинг ёрдамида ушбу

$$r_1 = r_0 + \frac{2 - r_0^2}{2r_0 + 1} \quad \left(0 < \frac{2 - r_0^2}{2r_0 + 1} < 1\right)$$

рационал сонни ҳосил қиламиз. Бу r_1 рационал соннинг квадрати 2 дан кичик бўлади. Ҳақиқатан,

$$r_1^2 = \left(r_0 + \frac{2 - r_0^2}{2r_0 + 1}\right)^2 = r_0^2 + 2r_0 \frac{2 - r_0^2}{2r_0 + 1} + \left(\frac{2 - r_0^2}{2r_0 + 1}\right)^2 <$$

$$< r_0^2 + 2r_0 \frac{2 - r_0^2}{2r_0 + 1} + \frac{2 - r_0^2}{2r_0 + 1} = r_0^2 + (2 - r_0^2) = 2.$$

Демак, $r_1 \in B$.

Шундай қилиб, B тўпламда r_0 сондан катта бўлган r_1 рационал соннинг мавжуд бўлиши кўрсатилди. Бу эса B тўпламнинг элементлари орасида энг каттаси мавжуд эмаслигини билдиради. Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, рационал сонлар тўплами юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, бу тўпламнинг юқори (қуйи) чегаралари орасида энг кичиги мавжуд (энг каттаси мавжуд) бўлиши ҳам мумкин (1, 3-мисоллар), мавжуд бўлмасдан қолиши ҳам мумкин (2, 4-мисоллар).

3-таъриф. Юқоридан чегараланган A тўплам ($A \subset Q$) юқори чегараларининг энг кичиги (агар у мавжуд бўлса) унинг *аниқ юқори чегараси* деб аталади.

У $\sup A$ каби белгиланади.

Бу лотинча supremum — «энг юқори» деган маънони англатувчи сўздан олингандир.

4-таъриф. Қуйидан чегараланган A тўплам ($A \subset Q$) қуйи чегараларининг энг каттаси (агар у мавжуд бўлса) унинг *аниқ қуйи чегараси* деб аталади.

У $\inf A$ каби белгиланади.

Бу лотинча infimum «энг қуйи» деган маънони англатувчи сўздан олингандир.

Мисоллар. 1. Юқорида келтирилган

$$A = \{r\colon r \in Q;\ r \leqslant 1\}$$

тўпламнинг аниқ юқори чегараси мавжуд ва у 1 га тенг: $\sup A = 1$.

2. Ушбу

$$A = \{r\colon r \in Q;\ r > 1\}$$

тўпламнинг аниқ қуйи чегараси мавжуд ва у 1 га тенг:

$$\inf A = 1.$$

4. Тўғри чизиқнинг хоссалари. Сонлар ўқи. Биз ушбу бандда тўғри чизиқнинг хоссаларини келтирамиз. l — тўғри чизиқ, M эса шу тўғри чизиқдаги нуқта бўлсин.

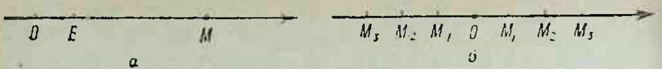
1°. Тартибланганлик хоссаси. Икки турли M ва P ($M \in l$, $P \in l$) нуқталардан бири иккинчисига нисбатан чапда жойлашган.

2°. Чегарасизлик хоссаси. Ҳар қандай $M \in l$ нуқта учун l тўғри чизиқда шундай P ва S нуқталар топиладики, булардан бири M нуқтадан чапда, иккинчиси эса M нуқтадан ўнгда жойлашган бўлади.

3°. Зичлик хоссаси. Ҳар қандай икки турли M ва P ($M \in l$, $P \in l$) нуқталар учун камида шундай битта S нуқта ($S \in l$) топиладики, бу нуқта M ва P нуқталар орасида жойлашган бўлади.

Тўғри чизиқдаги ихтиёрий икки M ва P нуқталарни олайлик. M нуқта P нуқтадан чапда ётсин. Тўғри чизиқнинг M ва P ҳамда улар орасидаги барча нуқталаридан иборат тўплам *кесма* деб аталади ва MP каби белгиланади. Бунда M нуқта MP кесманинг *чап учи*, P нуқта эса шу кесманинг *ўнг учи* дейилади.

Тўғри чизиқда икки MP ва $M'P'$ кесма берилган бўлсин. Агар MP кесмани тўғри чизиқ бўйлаб суриш натижасида M нуқта M' нуқта устига, P нуқта P' нуқта устига тушса (бунда M билан P ораси-



14- чизма.

даги нуқталар M' билан P' орасидаги нуқталар устига тушади), у ҳолда MP кесма $M'P'$ кесмага тенг дейилади.

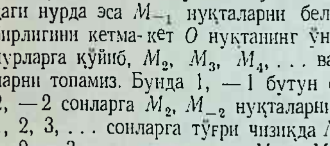
l тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқда ихтиёрий нуқта олайлик (14- *а* чизма). Бу нуқтани O ҳарфи билан белгилаймиз. O нуқта (бошланғич нуқта) тўғри чизиқни икки қисмга — икки нурга ажратади. Бу нурлардан бирининг йўналишини мусбат, иккинчисиникини эса манфий деб келишиб оламиз. Одатда O нуқтадан ўнг томондаги нурни мусбат йўналишда, чап томондаги нурни эса манфий йўналишда олинади. Шунингдек, масштаб кесмаси OE ни (бу кесманинг узунлиги 1 га тенг) тайинлаймиз. Бундай тўғри чизиқ *сонлар ўқи* деб аталади.

Равшанки, сонлар ўқидаги ҳар бир M нуқта шу ўқда OM (ёки MO) кесмани ҳосил қилади.

5. Рационал сонларни геометрик тасвирлаш. а) **Бутун сонларни геометрик тасвирлаш.** Сонлар ўқини олайлик. Бу ўқнинг бошланғич O нуқтасини ноль сонининг *геометрик тасвири* деб атаймиз.

Масштаб кесмаси (масштаб бирлиги) OE ни O нуқтадан бошлаб ўнг ва чап томонларга қўямиз. Бу бирлик кесманинг бир учи O нуқтада бўлиб, иккинчи учи эса ўнг томондаги нурда M_1, чап томондаги нурда эса M_{-1} нуқталарни белгилайди. Шу усулда масштаб бирлигини кетма-кет O нуқтанинг ўнг ва чап томонида жойлашган нурларга қўйиб, M_2, M_3, M_4, . . . ва M_{-2}, M_{-3}, M_{-4}, . . . нуқталарни топамиз. Бунда 1, —1 бутун сонларга M_1, M_{-1} нуқталарни, 2, —2 сонларга M_2, M_{-2} нуқталарни ва ҳ.к. мос қўйиб, натижада, 1, 2, 3, . . . сонларга тўғри чизиқда M_1, M_2, M_3, . . . нуқталар, —1, —2, —3, . . . сонларга эса M_{-1}, M_{-2}, M_{-3}, . . . нуқталар мос келишини кўрамиз. l тўғри чизиқдаги M_1, M_2, M_3, . . . ва M_{-1}, M_{-2}, M_{-3}, . . . нуқталар 1, 2, 3, . . . ҳамда —1, —2, —3, . . . бутун сонларнинг геометрик тасвири бўлади (14- *б* чизма).

б) **Ихтиёрий рационал сонларни геометрик тасвирлаш.** Ихтиёрий рационал сонни геометрик тасвирлашдан аввал бирлик кесма (масштаб бирлиги) нинг $\frac{1}{n}$ ($n \in N$) қисмини топишни айтиб ўтамиз.



15- чизма.

Бир катети бирлик кесма OE, иккинчи катети бирлик кесмани n марта қўйишдан ҳосил бўлган OF кесмадан иборат OFE тўғри бурчакли учбурчакни қарайлик (15- чизма). Бу $\triangle OFE$ нинг OF томонидаги 1, 2, 3, . . ., $n — 1$ сонларни тасвирловчи нуқталар F_1, F_2,

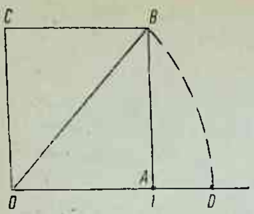
..., F_{n-1} бўлсин. Натижада OF катетда бир-бирига тенг бўлган n та OF_1, F_1F_2, ..., $F_{n-1}F$ кесмалар ҳосил бўлади.

Энди OF катетдаги F_1, F_2, ..., F_{n-1} нуқталардан FE гипотенузага параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг OE катет билан кесишган нуқталари E_1, E_2, ..., E_{n-1} бўлсин. Равшанки, бу нуқталар OE да OE_1, E_1E_2, ..., $E_{n-1}E$ кесмаларни ҳосил қилади. Демак, OE бирлик кесма n та OE_1, E_1E_2, ..., $E_{n-1}E$ кесмаларга ажралди. *Фалес* теоремасига кўра бу кесмалар бир-бирига тенг бўлади. Демак, OE_1 кесма OE кесманинг $\frac{1}{n}$ қисмига тенг.

Масштаб кесмаси OE нинг $\frac{1}{n}$ қисми бўлган OE_1 кесмани O нуқтадан бошлаб ўнг ва чап томонларга қўямиз. Бу кесманинг бир учи O нуқтада бўлиб, иккинчи учи эса ўнг томондаги нурда $M_{\frac{1}{n}}$, чап томондаги нурда эса $M_{-\frac{1}{n}}$ нуқталарни белгилайди. Энди $\frac{1}{n}$ ва $-\frac{1}{n}$ сонларга $M_{\frac{1}{n}}$ ва $M_{-\frac{1}{n}}$ нуқталарни мос қўямиз. OE_1 кесмани O нуқтадан унинг ўнг ва чап томонларидаги нурга кетма-кет m марта қўйиш натижасида $\frac{m}{n}$ ҳамда $-\frac{m}{n}$ рационал сонларни геометрик тасвирловчи $M_{\frac{m}{n}}$ ва $M_{-\frac{m}{n}}$ нуқталарни топамиз. Шу йўл билан l тўғри чизиқда $r=\frac{m}{n}\in Q$ сонни геометрик тасвирловчи нуқта топилади. Масалан, ушбу $\frac{5}{4}\in Q$ сонни тасвирловчи нуқтани топиш учун аввал масштаб бирлигини O нуқтадан ўнг томонга бир марта жойлаштириб, M_1 нуқта топилади. Сўнгра бу M_1 нуқтадан бошлаб масштаб бирлигининг $\frac{1}{4}$ қисмини қўйиб, $\frac{5}{4}$ сонни геометрик ифодаловчи $M_{\frac{5}{4}}$ нуқтани топамиз.

Шундай қилиб, рационал сонлар тўпламидан олинган ихтиёрий $r=\frac{m}{n}$ $(m\in Z,\ n\in N)$ сонга тўғри чизиқда битта M_r нуқта мос келади. Бунда $\frac{m}{n}$ сонга $M_{\frac{m}{n}}$ нуқта, $\frac{m_1}{n_1}$ $(m_1\in Z,\ n_1\in N)$ сонга $M_{\frac{m_1}{n_1}}$ нуқта мос келиб, $\frac{m}{n}<\frac{m_1}{n_1}$ бўлса, $M_{\frac{m_1}{n_1}}$ нуқта $M_{\frac{m}{n}}$ нуқтадан ўнгда ётади.

Бундан кейин қулайлик учун $r\in Q$ сонга тўғри чизиқда мос келадиган нуқтани M_r каби белгиламасдан r нуқта деб олаверамиз.



16- чизма.

Рационал сонга мос келадиган тўғри чизиқдаги нуқта *рационал нуқта* ҳам деб аталади.

6. Рационал сонлар тўпламини кенгайтириш зарурияти. Биз аввалги бандда ҳар бир рационал сонга тўғри чизиқда битта нуқта (рационал нуқта) мос қўйилишини кўриб ўтдик. Аммо тўғри чизиқда шундай нуқталар борки, улар бирорта ҳам рационал сонга мос қўйилган бўлмайди. Шуни кўрсатайлик.

Томони бир бирликка тенг бўлган $OABC$ квадратни қарайлик (16- чизма). Бу квадратнинг диагонали OB нинг узунлиги $\sqrt{2}$ га тенг. Циркулнинг учини O нуқтага қўйиб, радиуси OB га тенг бўлган айлана чизайлик. Бу айлана OA томон жойлашган тўғри чизиқни D нуқтада кесади. $OA < OB$ бўлгани учун D нуқта A нуқтадан ўнгда жойлашган бўлади. Равшанки, $OB = OD = \sqrt{2}$, демак, D нуқтага $\sqrt{2}$ сон мос келади. $\sqrt{2}$ эса рационал сон эмас. Бу қуйидаги теоремада исботланади.

1-теорема. *Рационал сонлар тўплами Q да квадрати 2 га тенг бўлган рационал сон мавжуд эмас.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни Q тўпламда шундай қисқармайдиган $\frac{p}{n}$ ($p \in Z$, $n \in N$) каср кўринишда ёзиладиган рационал сон борки, бу сон учун

$$\left(\frac{p}{n}\right)^2 = 2 \qquad (2.3)$$

тенглик ўринли бўлсин. (2.3) тенгликни

$$p^2 = 2n^2 \qquad (2.4)$$

каби ёзиб оламиз. Бундан p жуфт сон эканлиги кўринади. Демак, $p = 2m$ ($m \in Z$), p нинг қийматини (2.4) га қўйиб $n^2 = 2m^2$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу эса n соннинг ҳам жуфт сон эканлигини кўрсатади. Демак, юқоридаги фараздан p ва n сонлар жуфт сонлиги келиб чиқади. Бинобарин, улар учун 2 умумий кўпайтувчи. Бу эса $\frac{p}{n}$ соннинг қисқармайдиган каср эканига зид. Теорема исботланди.

Шундай қилиб, тўғри чизиқда олинган ҳар бир нуқтага Q тўпламда унга мос келадиган рационал сон мавжуд бўлавермас экан.

Агар тўғри чизиқни чизиб, унда рационал сонларга мос нуқталарни бирор рангга (масалан, қизил рангга) бўясак, шу тўғри чизиқда бўялмай қолган нуқталарни (жумладан $\sqrt{2}$ сонга мос нуқтани) ҳам кўрамиз.

Равшанки, рационал сонлар тўпламида (2.1), (2.2) тенгламалар доим ечимга эга, аммо $x^2 - a = 0$, $a \in Q$ тенглама Q тўпламда доим ечимга эга бўлавермайди.

Масалан, $a = 4$ бўлганда $x^2 - 4 = 0$ тенглама $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ ечимларга эга, $a = 2$ бўлганда эса 1-теоремага кўра $x^2 - 2 = 0$ тенглама Q тўпламда ечимга эга эмас. Бундан рационал сонлар тўпламини кенгайтириш зарурияти келиб чиқади. Демак, рационал сонлар тўпламига янги типдаги сонларни қўшиб, уни шундай кенгайтириш керакки, бир томондан, сонларнинг бу кенгайтирилган тўпламида $x^2 - 2 = 0$ тенгламани ечиш ва шу каби кўпгина масалаларни ҳал қилиш мумкин бўлсин, иккинчи томондан эса, рационал сонлар тўпламининг барча хоссалари сонларнинг кенгайтирилган тўпламида ҳам ўринли бўлсин.

Рационал сонлар тўпламини кенгайтиришда бир-бирига эквивалент бўлган бир нечта усуллар мавжуд (Коши усули, Кантор усули, Вейерштрасс усули ҳамда Дедекинд усули). Биз қуйида Дедекинд усулини келтирамиз.

3-§. Рационал сонлар тўпламида кесим

1. Кесим. Иррационал сон таърифи. Q — барча рационал сонлар тўплами бўлсин. Бу тўпламда бажарилган кесим тушунчаси билан танишайлик.

5-таъриф. Рационал сонлар тўплами Q шундай A ва A' тўпламларга ажратилсаки, бунда

1) $A \neq \varnothing$, $A' \neq \varnothing$,

2) $A \cup A' = Q$,

3) $\forall a \in A$, $\forall a' \in A' \Rightarrow a < a'$

шартлар қаноатлантирилса, A ва A' тўпламлар Q тўпламда *кесим бажаради* деб айтилади.

Кесим таърифидаги биринчи шарт A ва A' тўпламларининг бўш эмаслигини, иккинчи шарт ҳар бир рационал сон ёки A тўпламга ёки A' тўпламга тегишли бўлишини ва учинчи шарт эса A тўпламга тегишли бўлган ҳар бир рационал a сон A' тўпламга тегишли бўлган ҳар қандай a' рационал сондан кичик эканлигини англатади.

Юқоридаги кесим таърифидан, унинг бўлаклашнинг хусусий ҳоли эканлиги кўринади (1-боб, 1-§ га қаранг).

Одатда, кесим (A, A') каби белгиланиб, A тўплам кесимнинг қуйи синфи, A' тўплам эса кесимнинг юқори синфи деб аталади.

Кесим таърифидан бевосита қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1°. (A, A') кесим Q тўпламда бажарилган кесим бўлиб, $a \in A$ бўлса, $a_1 < a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий a_1 рационал сон ҳам кесимнинг қуйи синфи A га тегишли бўлади.

2°. (A, A') кесим Q тўпламда бажарилган кесим бўлиб, $a' \in A'$ бўлса, $a_1' > a'$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий a_1' рационал сон ҳам кесимнинг юқори синфи A' га тегишли бўлади.

Энди Q тўпламда бажарилган кесимларга мисоллар келтирайлик.

Мисоллар. 1. 5 ва ундан кичик бўлган барча рационал сонлардан иборат тўплам A, 5 дан катта бўлган барча рационал сонлар тўплами A' бўлсин: $A=\{r: r\in Q,\ r\leqslant 5\}$, $A'=\{r: r\in Q,\ r>5\}$. Бу A ва A' тўпламлар учун 5-таърифдаги учала шартнинг бажарилишини кўриш қийин эмас. Демак, бундай тузилган A ва A' тўпламлар Q да кесим бажаради.

2. A тўплам деб 1 ва 2 рационал сонлар орасидаги барча рационал сонлардан иборат бўлган $A=\{r: r\in Q,\ 1<r<2\}$ тўпламни, A' тўплам деб 1 ва ундан кичик бўлган барча рационал сонлар ҳамда 2 ва ундан катта бўлган барча рационал сонлардан иборат

$$A'=\{r: r\in Q,\ r\leqslant 1\}\cup\{r: r\in Q,\ r\geqslant 2\}$$

тўпламни олайлик. Равшанки, $A\neq\varnothing$, $A'\neq\varnothing$ ҳамда $A\cup A'=Q$. Аммо A тўпламдан олинган ҳар бир рационал сон A' тўпламдан олинган исталган рационал сондан ҳар доим кичик бўлмаганлиги сабабли бундай тузилган A ва A' тўпламлар Q тўпламда кесим бажармайди (кесим таърифидаги учинчи шарт бажарилмайди).

3. Ушбу $A=\{r: r\in Q,\ r\leqslant 1\}$, $A'=\{r: r\in Q,\ 1<r\leqslant 5\}$ тўпламларни олайлик. Бунда $A\neq\varnothing$, $A'\neq\varnothing$ бўлиб, A тўпламнинг ҳар бир элементи A' тўпламнинг исталган элементидан кичикдир. Аммо $A\cup A'\neq Q$ бўлгани учун бу A ва A' тўпламлар Q да кесим бажармайди (кесим таърифидаги иккинчи шарт бажарилмайди).

4. Бирор $r_0\in Q$ сонни олайлик. r_0 ва ундан кичик барча рационал сонлардан иборат бўлган $A=\{r: r\in Q,\ r\leqslant r_0\}$ ва r_0 сондан катта барча рационал сонлардан иборат $A'=\{r: r\in Q,\ r>r_0\}$ тўпламларни кўрайлик. Бу тўпламлар Q да кесим бажаришини кўрсатамиз. Олинган $r_0\in Q$ сон A тўпламга тегишли эди. Демак, $A\neq\varnothing$. Энди

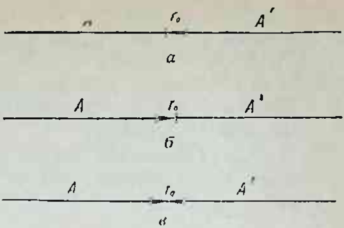
$$r_0\in Q,\ r_0+1\in Q \text{ ва } r_0+1>r_0$$

бўлишидан $r_0+1\in A'$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $A'\neq\varnothing$. Равшанки, $A\cup A'=\{r: r\in Q, r\leqslant r_0\}\cup\{r: r\in Q,\ r>r_0\}=\{r: r\in Q\}=Q$. Бу кесим таърифининг иккинчи шарти бажарилишини кўрсатади. Агар $\forall a\in A$, $\forall a'\in A'$ бўлса, ундан $a\leqslant r_0$, $a'>r_0$, яъни $a\leqslant r_0<a'$ экани келиб чиқади. Демак, $a<a'$ ва кесим таърифининг 3-шарти ҳам бажарилади. Шундай қилиб, A ва A' тўпламлар Q да кесим бажаради. Одатда бу кесимни

$$r_0=(A,\ A')$$

каби ҳам белгиланади. Бу кесимнинг қуйи синфи A тўпламда (унинг элементлари орасида) энг катта элемент мавжуд бўлиб, у r_0 эканлиги равшандир. Аммо кесимнинг юқори синфи A' тўпламда эса (унинг элементлари орасида) энг кичик элемент мавжуд эмас. Бу ҳолни исботлаш учун тескарисини, яъни юқоридаги $r_0=(A,\ A')$ кесимнинг юқори синфи A' элементлари орасида энг кичиги мавжуд бўлсин деб фараз қиламиз. Уни r^* деб белгилайлик: $r^*\in A'$. Кесим таърифига кўра $r_0<r^*$ бўлади. Рационал сонлар тўплами зич тўплам бўлгани учун шундай t рационал сон мавжудки, $r_0<t<r^*$ бўлади. A' нинг тузилишига биноан топилган t учун $t\in A'$ бўлиши керак. Демак, A' да r^* дан кичик бўлган t сон мавжуд. Ваҳоланки, биз r^* ни A' нинг энг кичик элементи деб олган эдик. Бу зиддият A' тўплам элементлари орасида энг кичиги мавжуд эмаслигини ис-

ботлайди. Бундай кесимларни *қуйи синфи ёпиқ, юқори синфи очиқ* кесимлар ва r_0 сонни эса A тўпламни *ёпувчи элемент* деб аталади (17-*а* чизма).



17- чизма.

5. r_0 рационал сондан кичик барча рационал сонлардан иборат $A=\{r\colon r\in Q,\ r<r_0\}$ ва r_0 ҳамда ундан катта барча рационал сонлардан иборат $A'=\{r\colon r\in Q,\ r\geqslant r_0\}$ тўпламларни кўрайлик.

Юқорида келтирилган 4-мисолдагидек кўрсатиш мумкинки, Q да бу A ва A' тўпламлар $(A,\ A')$ кесим бажаради. Бу ҳолда $(A,\ A')$ кесимнинг қуйи синфи A тўпламда (унинг элементлари орасида) энг катта элемент мавжуд эмас, кесимнинг юқори синфи A' тўпламнинг элементлари орасида энг кичик элемент мавжуд. Қуйи синф A очиқ, юқори синф A' эса ёпиқ бўлиб, r_0 рационал сон эса тўпламни ёпувчи элемент бўлади (17-*б* чизма).

6. Куби 2 дан кичик бўлган барча рационал сонлардан иборат тўплам A' бўлсин*:

$$A=\{r\colon r\in Q,\ r^3<2\},\ A'=\{r\colon r\in Q,\ r^3>2\}.$$

Бу A ва A' тўпламларнинг тузилишидан 5-таърифнинг барча шартларининг бажарилишини кўриш қийин эмас. Демак, A ва A' тўпламлар Q да $(A,\ A')$ кесим бажаради. Энди шу кесимнинг қуйи синфи A тўпламнинг элементлари орасида энг катта элемент, шунингдек юқори синфи A' тўпламнинг элементлари орасида энг кичик элемент мавжуд эмаслигини кўрсатайлик. A тўпламдан r_0 сонни ($r_0\in A$, $r_0>1$) олиб, унинг ёрдамида ушбу

$$r_1=r_0+\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\quad\left(0<\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}<1\right)$$

рационал сонни ҳосил қиламиз. Бу r_1 рационал сонннинг куби 2 дан кичик бўлади: $r_1^3<2$. Ҳақиқатан ҳам,

$$r_1^3=\left(r_0+\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\right)^3=r_0^3+3\,\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\,r_0^2+$$

$$+3\left(\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\right)^2\cdot r_0+\left(\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\right)^3<r_0^3+3r_0^2\,\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}+$$

$$+3r_0\,\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}+\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}=r_0^3+\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\,(3r_0^2+3r_0+1)=$$

$$=r_0^3+(2-r_0^3)=2.$$

---

* Куби 2 га тенг бўлган рационал сон мавжуд эмаслиги 28-бетдаги 1-теоремадагидек исбот этилади.

Демак, $r_0 < r_1 \in A$, яъни $r_0 \in A$ сондан катта бўлган r_1 рационал сон ҳам A тўпламга тегишли бўлади.

Шундай қилиб, ихтиёрий $r_0 \in A$ рационал сон берилганда ҳам, камида битта шундай r_1 рационал сон топилар эканки, у $r_1 > r_0$ ва $r_1 \in A$. Бу эса A тўпламнинг элементлари орасида энг каттаси мавжуд эмаслигини кўрсатади.

Энди (A, A') кесимнинг юқори синфи A' тўпламнинг элементлари орасида энг кичиги мавжуд эмаслигини исботлаймиз. $r'_0 \in A'$ $(r'_0 > 1)$ бўлсин. Демак, $r_0'^3 > 2$.

Ушбу

$$r'_1 = r'_0 - \frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2} \quad \left(0 < \frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2} < 1\right)$$

рационал сонни қарайлик. Бу r'_1 рационал соннинг куби 2 дан катта бўлади: $r_1'^3 > 2$. Ҳақиқатан ҳам,

$$r_1'^3 = \left(r'_0 - \frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2}\right)^3 = r_0'^3 - 3 \cdot \frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2} \cdot r_0'^2 + 3\left(\frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2}\right)^2 \cdot r'_0 -$$

$$- \left(\frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2}\right)^3 > r_0'^3 - (r_0'^3 - 2) = 2.$$

Демак, $r'_0 > r'_1 \in A'$, яъни $r'_0 \in A'$ сондан кичик бўлган r'_1 рационал сон ҳам A' тўпламга тегишли бўлади.

Шундай қилиб, ихтиёрий $r'_0 \in A'$ рационал сон берилганда ҳам, камида битта, шундай r'_1 рационал сон топилар эканки, у $r'_1 < r'_0$ ва $r'_1 \in A'$. Бу эса A' тўпламнинг элементлари орасида энг кичиги мавжуд эмаслигини англатади.

Шундай қилиб, кўрилаётган мисолда (A, A') кесим учун қуйи синф A ҳам, юқори синф A' ҳам очиқ бўлиб, A ва A' тўпламларнинг ёпувчи элементлари мавжуд эмас (17-*в* чизма).

Рационал сонлар тўплами Q да ҳам қуйи синф — A тўпламнинг элементлари орасида энг каттаси, ҳам юқори синф — A' тўпламининг элементлари орасида энг кичиги мавжуд бўлган (A, A') кесим мавжуд эмас. Бу тасдиқни исботлаймиз.

Фараз қилайлик, Q тўпламда шундай (A, A') кесим мавжуд бўлсинки, a_0 сони A тўпламнинг энг катта элементи, a'_0 эса A' тўпламнинг энг кичик элементи бўлсин. У ҳолда кесим таърифига кўра $a_0 < a'_0$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Равшанки,

$$a_0 < \frac{a_0 + a'_0}{2} < a'_0.$$

Бунда $\frac{a_0 + a'_0}{2}$ рационал сон A тўпламга тегишли эмас, чунки a'_0 сон

A' тўпламнинг энг катта элементи ва $a_0 < \frac{a_0 + a_0'}{2}$. Шунингдек, $\frac{a_0 + a_0'}{2}$ рационал сон A' тўпламига ҳам тегишли эмас, чунки a_0' сон A' тўпламнинг энг кичик элементи ва $\frac{a_0 + a_0'}{2} < a_0'$. Демак, $\frac{a_0 + a_0'}{2}$ рационал сон A тўпламга ҳам, A' тўпламга ҳам тегишли бўлмайди. Бу эса кесим таърифига зиддир. Шундай қилиб, бир вақтда қуйи синфида энг катта элемент, юқори синфида эса энг кичик элемент мавжуд бўлган кесим мавжуд эмас.

Рационал сонлар тўплами Q да бажарилган кесим таърифи ва кесимга келтирилган мисоллардан қуйидаги хулосани келтириб чиқариш мумкин. Q тўпламда бажарилган (A, A') кесим фақат уч турли бўлиши мумкин:

1) Кесимнинг қуйи синфи A да энг катта элемент (r_0 рационал сон) мавжуд, кесимнинг юқори синфи A' да эса энг кичик элемент мавжуд эмас. Бунда r_0 рационал сон қуйи синф A нинг ёпувчи элементи бўлади.

2) Кесимнинг қуйи синфи A да энг катта элемент мавжуд эмас, кесимнинг юқори синфи A' да эса кичик элемент (r_0' рационал сон) мавжуд. Бунда r_0' рационал сон юқори синф A' нинг ёпувчи элементи бўлади.

3) Кесимнинг қуйи синфи A да энг катта элемент мавжуд эмас, кесимнинг юқори синфи A' да энг кичик элемент мавжуд эмас. Бунда қуйи синф A да, юқори синф A' да ёпувчи элементлар мавжуд эмас.

Биринчи ва иккинчи тур кесимларда уларнинг қуйи ёки юқори синфлари ёпиқ бўлиб, ёпувчи элементларни бир синфдан иккинчи синфга ўтказиб, ҳар доим бир турдаги кесимга — қуйи синфи очиқ, юқори синфи эса ёпиқ бўлган кесимга келтириш мумкин. Биз бундан буён биринчи ва иккинчи тур кесимлар ўрнига бир тур кесимни, қуйи синфда энг катта элемент мавжуд бўлмаган (очиқ синф), юқори синфда эса энг кичик элемент мавжуд бўлган (ёпиқ синф) кесимни қараймиз. Бундай кесимларни рационал кесим деб атаймиз.

Ихтиёрий $r \in Q$ рационал сон учун Q тўпламда ҳар доим (A, A') кесим бажарилиши мумкинки, бу кесим рационал кесим бўлади, бунда A тўплам очиқ синф, A' тўплам ёпиқ синф, ёпувчи элемент r сонниниг ўзи бўлади. Демак, Q тўпламда олинган ҳар бир рационал сонга Q да бажарилган рационал кесим мос келади.

Аксинча, Q тўпламда (A, A') кесим бажарилган бўлиб, кесимнинг қуйи синфи A очиқ, юқори синфи A' ёпиқ ҳамда ёпувчи элемент r бўлса, бу кесим r рационал сонни ифодалайди.

Демак, Q да бажарилган ҳар бир рационал кесим битта рационал сонни аниқлайди.

Шундай қилиб, Q тўплам элементлари билан Q тўпламда бажарилган рационал кесимлар тўпламининг элементлари ўзаро бир қийматли мосликда бўлади.

Рационал сонлар тўплами Q да бажарилган учинчи тур кесим— қуйи синф ҳам, юқори синф ҳам очиқ бўлган кесим *иррационал кесим* дейилади.

6-таъриф. Рационал сонлар тўплами Q да бажарилган иррационал кесим *иррационал сонни* аниқлайди дейилади.

Иррационал сонлар тўпламини U ҳарфи билан белгилайлик.

4-§. Ҳақиқий сонлар. Ҳақиқий сонлар тўпламининг хоссалари

Рационал сонлар тўплами Q да бажарилган кесим фақат икк тур — рационал ёки иррационал бўлиб, рационал кесим рационал со ни, иррационал кесим эса иррационал сонни аниқлашини биз юқорида кўрдик.

7-таъриф. Рационал ҳамда иррационал сонлар умумий ном билан *ҳақиқий сонлар* деб аталади.

Барча ҳақиқий сонлар тўплами R ҳарфи билан белгиланади. Таърифига кўра, $R = Q \cup U$.

Шундай қилиб, рационал сонлар тўплами Q ни ҳақиқий сонла тўплами R гача кенгайтирилди. Ҳақиқий сонлар тўплами R нин хоссаларини қараймиз.

1. *Ҳақиқий сонлар тўпламининг тартибланганлиги.* Аввал ҳақиқий сонлар тўпламида тенглик, катта ва кичик тушунчаларини киритамиз. Айтайлик, x ва y ҳақиқий сонлар берилган бўлсин: $x \in R$, $y \in R$. Маълумки, ҳар бир ҳақиқий сон рационал сонла тўплами Q да бажарилган кесим билан аниқланади. Бинобарин, x в y ларни аниқловчи (A, A') ва (B, B') кесимлар берилган:

$$x = (A, A'), \quad y = (B, B').$$

Бу кесимларнинг қуйи синфлари A, B лар учун ёки $A = B$ (бу ҳо да, албатта, $A' = B'$ бўлади), ёки $A \neq B$ (бу ҳолда $A' \neq B'$) мун сабатлардан бири ўринли бўлади.

Агар $A = B$ бўлса, (A, A') ва (B, B') кесимлар бир-бирига те дейилади: $(A, A') = (B, B')$. Бу ҳолда улар аниқлаган x ва y ҳақ қий сонлар ҳам бир-бирига тенг дейилади: $x = y$.

Энди $A \neq B$ бўлсин. Таърифга кўра, шундай $r_1 \in A$ борки, $r_1 \overline{\in}$ бўлади, ёки шундай $r_2 \in B$ борки, $r_2 \overline{\in} A$ бўлади. Биринчи ҳол $r_1 \in A \cap B'$ эканлиги келиб чиқади. Кесимнинг таърифига кўра, ҳолда $B \subset A$ бўлади. Иккинчи ҳолда эса $r_2 \in B \cap A'$ эканлигидан $A \subset$ келиб чиқади.

Шундай қилиб, $A \neq B$ бўлганда ё $A \subset B$, ёки $B \subset A$ бўлар эка

Агар $A \subset B$ бўлса, (A, A') кесим (B, B') кесимдан кичик дейи ди. Бу ҳолда ҳақиқий сон x ҳақиқий сон y дан кичик деб атала $x < y$.

Агар $A \supset B$ бўлса, (A, A') кесим (B, B') кесимдан катта дейи ди. Бу ҳолда x ҳақиқий сон y ҳақиқий сондан катта дейилади: $x >$

Шундай қилиб, ихтиёрий икки x ва y ҳақиқий сон берилган б са, унда

$$x = y, \quad x < y, \quad x > y$$

муносабатлардан биттаси ва фақат биттаси ўринли бўлади.

Энди $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$ сонлар учун ушбу $x < y$, $y < z$ тенгсизликлардан $x < z$ тенгсизлик келиб чиқишини исботлаймиз. $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$ сонларни аниқловчи кесимлар

$$x = (A,\ A'),\quad y = (B,\ B'),\quad z = (C,\ C')$$

бўлсин.

Айтайлик, $x < y$ ва $y < z$ бўлсин. Таърифга асосан

$$x < y \Rightarrow A \subset B,\quad y < z \Rightarrow B \subset C$$

бўлади. Равшанки,

$$A \subset B,\quad B \subset C \Rightarrow A \subset C.$$

Бу эса $x < z$ эканлигини билдиради. Демак, ҳақиқий сонлар тўплами R тартибланган тўплам.

Икки $x \in R$, $y \in R$ ҳақиқий сон орасидаги тенг, катта ва кичик тушунчалари, хусусан, бу сонлар рационал бўлган ҳолда, рационал сонлар орасида, тенг, катта ва кичик тушунчалари билан бир хил бўлади. Масалан, x, $y \in Q$ сонлар Q да бажарилган рационал кесим сифатида $x = (A,\ A')$, $y = (B,\ B')$ каби аниқланган бўлиб, улар орасидаги $x < y$ муносабат юқоридагидек кесимлар орасидаги муносабат ёрдамида таърифланган бўлсин, яъни $x < y \Leftrightarrow A \subset B$. Демак, шундай рационал сон r мавжудки, $r \notin A$, $r \in B$. У ҳолда $r \in A'$. Шунинг учун $x \leqslant r$ бўлади. Шунингдек, $r \in B$, $y = (B,\ B')$ бўлганидан эса $r < y$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $x \leqslant r$ ва $r < y$ тенгсизликлар ўринли бўлса, $x < y$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

2. Ҳақиқий сонлар тўпламининг зичлиги. Фараз қилайлик, $x \in R$, $y \in R$ ва $x < y$ бўлсин. У ҳолда шундай r рационал сон мавжудки, шу сон учун ушбу $x < r < y$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Шуни исботлайлик. Q тўпламда бажарилган $(A,\ A')$, $(B,\ B')$ кесимлар x ва y сонларни аниқласин: $x = (A,\ A')$, $y = (B,\ B')$. У ҳолда $x < y$ дан $A \subset B$ келиб чиқади. Демак, B тўпламда шундай рационал сон $r_0 \in B$ мавжудки, $r_0 \notin A$ бўлади: $r_0 \in B$. Унда $r_0 \in A'$ бўлади ва демак, $x \leqslant r_0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Иккинчи томондан, $y = (B,\ B')$, $r_0 \in B$ ва B тўпламнинг элементлари орасида энг каттаси мавжуд эмаслиги сабабли, шундай рационал сон $r \in B$ мавжудки, $r_0 < r$ ва $r < y$ бўлади. Натижада $x \leqslant r_0 < r < y$ тенгсизликларга эга бўламиз. Бундан эса $x < r < y$ эканлигини кўрамиз. Шу усул билан $x \in R$, $y \in R$ ва $x > y$ бўлганда ҳам $x > r > y$ муносабатларни қаноатлантирувчи рационал сон r мавжуд эканлиги кўрсатилади. Шундай қилиб, ихтиёрий иккита бир-бирига тенг бўлмаган ҳақиқий сонлар орасида камида битта ҳақиқий сон мавжуд. Бундан эса улар орасида чексиз кўп ҳақиқий сон мавжудлиги келиб чиқади. Демак, R — зич тўплам.

5- §. Ҳақиқий сонлар тўпламининг тўлиқлиги. Дедекинд теоремаси

Агар ҳақиқий сонлар тўплами R да бажарилган кесим тушунчаси киритилса, рационал сонлар тўплами Q да содир бўлганидек, R ни ҳам кенгайтириш зарурияти содир бўладими ёки йўқми деган табиий савол тугилади. Қуйида биз бундай ҳолат бўлмаслигини, яъни R д бажарилган ҳар қандай кесим фақат биринчи тур кесим бўлишин кўрсатамиз. Одатда бу хосса ҳақиқий сонлар тўплами R нинг *тў лиқлик хоссаси* дейилади. Даставвал, R да бажарилган кесим тушунчаси билан танишайлик.

8-таъриф. Ҳақиқий сонлар тўплами R шундай E ва E' тўпламларга ажратилсаки, унда

$$
\begin{aligned}
&1)\ E \neq \varnothing,\ E' \neq \varnothing,\\
&2)\ E \cup E' = R,\\
&3)\ \forall x \in E,\ \forall x' \in E' \Rightarrow x < x'
\end{aligned}
$$

шартлар бажарилса, E ва E' тўпламлар R *тўпламда кесим бажаради* дейилади ва $(E,\ E')$ каби белгиланади (5-таърифга қаранг).

Аввалгидек, E тўплам кесимнинг *қуйи синфи*, E' тўплам эса кесимнинг *юқори синфи* дейилади.

Мисоллар. 1. Бирор $x_0 \in R$ сонни олиб, x_0 сон ва ундан кичик бўлган барча ҳақиқий сонлар тўпламини $E: E = \{x\colon x \in R,\ x \leqslant x_0\}$, x сондан катта бўлган барча ҳақиқий сонлар тўпламини E': $E' = \{x\colon x \in R$ $x > x_0\}$ деб олайлик. Натижада R тўплами E ва E' тўпламларг ажралади. E ва E' тўпламларнинг тузилишидан улар учун 8-таъриф шартларининг бажарилишини кўриш қийин эмас. Демак, E ва E тўпламлар R тўпламда кесим бажаради. Бу $(E,\ E')$ кесимда унин қуйи синфи — E тўплам элементлари орасида энг катта элемент мавжуд бўлиб, у x_0 га тенгдир. Аммо бу ҳолда кесимнинг юқори синфи E' элементлари орасида энг кичик элемент мавжуд эмас. (Б тасдиқни 3-§ нинг 4-мисолидаги каби исботлаш мумкин.) Одатда бундай кесимда E тўплам ёпиқ синф, ундаги энг катта элемент ёпувчи элемент, E' тўплам эса очиқ синф дейилади.

2. Ушбу $x_0 \in R$ сондан кичик бўлган барча ҳақиқий сонлар тўплами E: $E = \{x\colon x \in R,\ x < x_0\}$, x_0 сон ва ундан катта бўлган барч ҳақиқий сонлар тўплами $E': E' = \{x\colon x \in R,\ x \geqslant x_0\}$ бўлсин. Бу E ва E' тўпламлар R да $(E,\ E')$ кесим бажариши равшандир. E ва E тўпламларнинг тузилишидан қуйи синф E элементлари орасида эн катта элемент мавжуд эмас, юқори синф E' элементлари орасида эс энг кичик элемент мавжуд (у x_0 га тенг) бўлиши кўринади. Бу ҳолда E тўплам очиқ синф, E' тўплам эса ёпиқ синф, ундаги энг кичик элемент ёпувчи элемент дейилади.

3. Ҳақиқий сонлар тўплами R да қуйи синф — E тўпламнин элементлари орасида энг катта, юқори синф — E' тўпламнинг элементлари орасида энг кичик элемент бор бўлган $(E,\ E')$ кесим мавжуд эмас. Буни исботлайлик.

$(E,\ E')$ кесим R да бажарилган кесим бўлиб, унда E нинг эн катта элементи x_0 ва E' нинг энг кичик элементи y_0 бўлсин. Кеси таърифига кўра, $x_0 < y_0$ бўлади. R тўпламнинг зичлик хоссасига би ноан шундай $u \in R$ сон мавжудки, $x_0 < u < y_0$ бўлади. Кейинги тенгсизликлардан кўринадики, u сон E га тегишли эмас, чунки x_0 со E да энг катта элемент ва $x_0 < u$. Шунингдек, $u < y_0$ ва y_0 сон E тўпламнинг энг кичик элементи эканидан u сонинг E' га тегишл эмаслиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $u \in R$ сон E ва E' тўплам ларнинг бирортасига ҳам тегишли бўлмайди. Бундан E ва E' тўпламлар R да кесим бажармаслиги келиб чиқади. Бу эса юқоридаги фаразга зид. Тасдиқ исботланди.

Демак, R тўпламда бир вақтда қуйи ҳамда юқори синфлари ёпиқ бўлган кесим мавжуд эмас.

2-теорема (Дедекинд теоремаси). *Ҳақиқий сонлар тўплами R да бажарилган ҳар қандай (E, E') кесим учун фақат қуйидаги икки ҳолдан бири бўлиши мумкин:*

а) *кесимнинг қуйи синфи — E да энг катта элемент мавжуд, юқори синф — E' да эса энг кичик элемент мавжуд эмас;*

б) *кесимнинг қуйи синфи — E да энг катта элемент мавжуд эмас, юқори синфи — E' да эса энг кичик элемент мавжуд.*

Исбот. Фараз қилайлик, R да бирор (E, E') кесим бажарилган бўлсин. Демак, E ва E' тўпламлар учун 8-таърифнинг шартлари бажарилади.

E тўпламнинг барча рационал сонлари тўпламини A тўплам, E' тўпламнинг барча рационал сонлари тўпламини A' тўплам дейлик. Равшанки, $A\subset E$, $A'\subset E'$. Бу тузилган A ва A' тўпламлар рационал сонлар тўплами Q да (A, A') кесим бажаришини кўрсатамиз. Аввало A ва A' тўпламларнинг бўш эмаслигини исботлайлик. $E\neq\varnothing$ бўлгани учун $\exists x_0\in R$, $x_0\in E$. Агар x_0 рационал сон бўлса, $x_0\in A$ бўлиб, $A\neq\varnothing$ бўлади. Агар x_0 иррационал сон бўлса, таърифига кўра у Q тўпламдаги иккинчи тур кесим билан аниқланади. Демак, $x_0=(A_0, B_0)$. Бунда $A_0\neq\varnothing$ бўлгани сабабли, $\exists r_0\in Q$, $r_0\in A_0$ бўлади. Аммо $r_0<x_0$ ва $x_0\in E$ бўлганидан эса, $r_0\in A$ экани келиб чиқади. Демак, $A\neq\varnothing$. Худди шунингдек, $A'\neq\varnothing$ экани ҳам кўрсатилади. $R=E\cup E'$ дан ва A, A' тўпламларнинг тузилишига кўра $A\cup A'=Q$ бўлади.

(E, E') кесим R да бажарилган кесимлигидан ва $A\subset E$, $A'\subset E'$ дан мос равишда A ва A' тўпламларга тегишли a ва a' элементлар учун $a<a'$ тенгсизлик ўринли. Шундай қилиб, Q тўпламда (A, A') кесим бажарилганлиги кўрсатилди. Бу кесим бирор ҳақиқий α сонни (рационал ёки иррационал сонни) аниқлайди: $\alpha=(A, A')$. Демак, $\alpha\in R$. Кесимнинг 2) шартига кўра α сон ёки E тўпламга, ёки E' тўпламга тегишли бўлади. $\alpha\in E$ бўлсин. Энди α сон E тўплам элементлари орасида энг каттаси эканини исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни α сон E тўплам элементлари орасида энг каттаси бўлмасин. Унда $\exists x\in E$, $\alpha<x$ бўлади. Ҳақиқий сонлар тўпламининг зичлигига кўра шундай r рационал сон мавжудки, $\alpha<r<x$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Ушбу $x\in E$ ва $r<x$ муносабатлардан $r\in E$ ва демак, $r\in A$ келиб чиқади. Аммо $\alpha=(A, A')$ кесимнинг қуйи синфи — A тўпламдаги r сон бу (A, A') кесим аниқлаган сондан катта бўлиши мумкин эмас. Бу зиддиятлик. Демак, α сон E тўплам элементлари орасида энг каттаси бўлади.

Шунга ўхшаш мулоҳаза билан $\alpha\in E'$ бўлганда α сон E' тўплам элементлари орасида энг кичиги экани кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

Дедекинд теоремасига кўра ҳақиқий сонлар тўплами R да бажарилган ҳар қандай (E, E') кесим учун икки ҳол бўлади. Бунда E

ёки E' синфларнинг ёпувчи элементларини биридан иккинчисига ўтказиш йўли билан битта ҳолга, кесимни бир тур кесимга келтириш мумкин. Биз R да бажарилган ҳар қандай кесим (E, E') да кесимнинг қуйи синфи E да энг катта элемент йўқ, юқори синф E' да эса энг кичик элемент бор бўлган кесим деб қараймиз. Бу эса Дедекинд теоремасини қуйидагича ҳам ифодалаш мумкинлигини кўрсатади.

3-теорема. *R да бажарилган ҳар қандай (E, E') кесим ягона ҳақиқий сонни аниқлайди.*

$\forall\ \alpha\in R$ сон ёрдамида ҳар доим R да $\alpha=(E, E')$ кесим бажариш мумкинки, бунда ҳақиқий сон α кесимнинг юқори синфи E' га тегишли бўлиб, унинг энг кичик элементи бўлади. Аксинча, R да (E, E') кесим бажарилган бўлсин. 2-теоремага ва юқоридаги келишувимизга кўра бу кесимнинг юқори синфи E' да энг кичик элемент мавжуд бўлиб, кесим шу сонни ифодалайди.

Демак, ҳақиқий сонлар тўплами R шу тўпламда бажарилган кесимлар тўплами билан ўзаро бир қийматли мосликда бўлади.

6-§. Сонли тўпламларнинг чегаралари

1. Сонли тўпламлар. Биз аввалги параграфларда ҳақиқий сонлар тўплами R ни ва унинг хоссаларини ўргандик. Одатда элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган тўплам *сонли тўплам* дейилади ва у кўпинча $E=\{x\}$ каби белгиланади. Математик анализ курсида асосан сонли тўпламлар қаралади. Сонли тўпламларга юқорида бир қанча мисоллар келтирган эдик. Яна бир қанча мисоллар келтирамиз:

1. $F_1=\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \ldots\right\}$,
2. $F_2=\{x:\ x\in R,\quad x^3-x=0\}$,
3. $F_3=\{x:\ x\in R,\quad 1\leqslant x\leqslant 2\}$
4. $F_4=\{x:\ x\in R,\quad 0<x<1\}\cup\{x:\ x\in R,\ x\geqslant 3\}$.

Курс давомида ҳар доим учраб турадиган сонли тўпламларни келтирамиз.

Икки $a\in R$, $b\in R$ сон берилган бўлиб, $a<b$ бўлсин. Ушбу

$$\{x:\ x\in R,\quad a\leqslant x\leqslant b\}$$

тўплам *сегмент* деб аталади ва у $[a, b]$ каби белгиланади:

$$[a, b]=\{x:\ x\in R,\quad a\leqslant x\leqslant b\}.$$

Бунда a ва b сонлар $[a, b]$ сегментнинг *чегаравий нуқталари* ёки *чегаралари* дейилади.

Ушбу

$$\{x:\ x\in R,\quad a<x<b\}$$

тўплам *интервал* дейилади ва у (a, b) каби белгиланади:

$$(a, b)=\{x:\ x\in R,\quad a<x<b\}.$$

Қуйидаги

$$\{x:\ x\in R,\ a\leqslant x<b\},\ \{x:\ x\in R,\ a<x\leqslant b\}$$

тўпламлар *ярим сегмент* дейилади ва улар мос равишда $[a,\ b)$ ва $(a,\ b]$ каби белгиланади:

$$[a,\ b)=\{x:\ x\in R,\ a\leqslant x<b\},\ (a,\ b]=\{x:\ x\in R,\ a<x\leqslant b\}.$$

Кейинги мулоҳазаларда асосан сонли тўпламлар билан иш кўрилади. Шунинг учун бундан кейин «сонли тўплам» дейиш ўрнига қисқача «тўплам» сўзини ишлатамиз.

2. Тўпламнинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари. Бирор E тўплам берилган бўлсин.

9-таъриф. Агар шундай M сон мавжуд бўлсаки, $\forall x\in E$ учун $x\leqslant M$ тенгсизлик бажарилса, E тўплам *юқоридан чегараланган* дейилади, M сон эса E нинг *юқори чегараси* дейилади.

10-таъриф. Агар ихтиёрий M сони олинганда ҳам шундай $x_0\in E$ топилсаки, $x_0>M$ бўлса, E тўплам *юқоридан чегараланмаган* деб аталади.

11-таъриф. Агар шундай m сон мавжуд бўлсаки, $\forall x\in E$ учун $x\geqslant m$ тенгсизлик бажарилса, E тўплам *қуйидан чегараланган* дейилади, m сон эса E нинг *қуйи чегараси* дейилади.

12-таъриф. Агар ихтиёрий m сони олинганда ҳам шундай $x_0\in E$ топилсаки, $x_0<m$ бўлса, E тўплам *қуйидан чегараланмаган* дейилади.

13-таъриф. Агар E тўплам ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегаланган бўлса, E тўплам *чегараланган* дейилади.

Мисоллар. 1. $E=\left\{\frac{1}{n}:\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\right\}$ тўплам юқоридан чегараланган, чунки бу тўпламнинг ҳар бир элементи 1 дан катта эмас.

2. $N=\{n:\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ тўплам юқоридан чегараланмаган, аммо у қуйидан 1 билан чегараланган: $\forall\ n\in N$ учун $n\geqslant 1$.

3. E_1 — барча тўғри касрлар ва 2, 4, 6 сонлардан иборат тўплам бўлсин. Бу тўплам юқоридан чегараланган, чунки унинг ҳар бир элементи 6 дан катта эмас.

4. $E_2=\{x:\ x<0\}$ тўплам қуйидан чегараланмаган.

5. Ушбу $E_3=\{x:\ x\in R,\ 2<x<4\}$ тўплам чегараланган тўпламдир.

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан кўринадики, агар E тўплам юқоридан чегараланган бўлса, унинг юқори чегараси чексиз кўп бўлади. Бу тасдиқ M сондан катта бўлган ҳар қандай ҳақиқий сон E тўпламнинг юқори чегараси бўла олишидан келиб чиқади.

Шунингдек, агар E тўплам қуйидан чегараланган бўлса, унинг қуйи чегараси ҳам чексиз кўп бўлади. Бу эса m сондан кичик бўлган ҳар қандай ҳақиқий сон E тўпламнинг қуйи чегараси бўла олишидан келиб чиқади.

Юқоридан чегараланган тўплам учун унинг юқори чегаралари орасида энг кичигини, шунингдек, қуйидан чегараланган тўплам учун унинг қуйи чегаралари орасида энг каттасини топиш муҳимдир.

4-теорема. *Ҳар қандай юқоридан чегараланган тўплам учу унинг юқори чегаралари орасида энг кичиги мавжуд.*

Исбот. E тўплам юқоридан чегараланган бўлсин, яъни шунда ҳақиқий M сон мавжудки, $\forall x \in E$ учун $x \leqslant M$ тенгсизлик ўринли

E нинг элементлари орасида энг каттаси мавжуд бўлсин. Уни x деб олайлик. Демак, $\forall x \in E$ учун $x \leqslant x_0$ бўлиб, бу эса x_0 сон нинг юқори чегаралари қаторида бўлишини кўрсатади. Аммо E тўпламнинг юқори чегараси бўлмиш ҳар қандай M сон x_0 сондан кичи бўлмайди, яъни $x_0 \leqslant M$, чунки $x_0 \in E$. Бу эса x_0 сон E нинг юқор чегаралари орасида энг кичиги эканлигини билдиради. Бу ҳолда теорема исбот бўлди.

Энди E тўплам элементлари орасида энг каттаси мавжуд бўлмаган ҳолни қараймиз. E нинг юқори чегараларидан иборат тўплам F бўлсин. Бу F' тўпламга тегишли бўлмаган барча ҳақиқий сонларда иборат тўпламни F дейлик. Равшанки, $E \subset F$. F ва F' тўпламлар да (F, F') кесим бажаради: $E \subset F$ ва E — юқоридан чегараланганлигидан $F \neq \varnothing$, $F' \neq \varnothing$ экани келиб чиқади, шунингдек, F ва F' ларнинг тузилишидан эса $F \cup F' = R$ ва $\forall x \in F$, $\forall x' \in F' \Rightarrow x < x'$ бўлади. Дедекинд теоремасига кўра бу (F, F') кесим бирор α ҳақиқи сонни аниқлайди: $\alpha = (F, F')$. Бу α сон табиийки, F тўпламнинг в демак, $E \subset F$ бўлганидан E тўпламнинг ҳам юқори чегарасидир, яън $\alpha \in F'$. Шу билан бирга у F' тўпламнинг элементлари орасида эн кичиги. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

14-таъриф. Юқоридан чегараланган E тўпламнинг юқори чегараларининг энг кичиги E нинг *аниқ юқори чегараси* деб аталади У $\sup E$ каби белгиланади.

5-теорема. *Ҳар қандай қуйидан чегараланган тўплам учу унинг қуйи чегаралари орасида энг каттаси мавжуд.*

Бу теорема юқоридаги 4-теорема каби исботланади. Унинг исботини ўқувчига ҳавола қиламиз.

15-таъриф. Қуйидан чегараланган E тўпламнинг қуйи чегараларининг энг каттаси E нинг *аниқ қуйи чегараси* деб аталади У $\inf E$ каби белгиланади.

Натижа. Ҳар қандай чегараланган E тўпламнинг аниқ юқор ва аниқ қуйи чегаралари мавжуд ва

$$\inf E \leqslant \sup E.$$

Мисоллар. Юқорида келтирилган мисолларда ифодаланган тўпламларнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларини аниқлаймиз

1. $\sup E = 1$, $\quad \inf E = 0$,
2. $\inf N = 1$,
3. $\sup E_1 = 6$, $\quad \inf E_1 = 0$,
4. $\sup E_2 = 0$,
5. $\sup E_3 = 4$, $\quad \inf E_3 = 2$.

Юқоридаги тўпламлар учун $\sup N$, $\inf E_2$ ларни кейинроқ келтирамиз.

Келтирилган мисоллардан тўпламнинг аниқ юқори ҳамда ани қуйи чегаралари тўпламга тегишли бўлиши ҳам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин эканлиги кўринади.

3. **Тўпламнинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегараларининг хоссалари.** 1°. Агар E тўплам юқоридан чегараланган бўлиб, $E_1 \subset E$ бўлса, унда $\sup E_1 \leqslant \sup E$ бўлади.

Исбот. 4-теоремага кўра E нинг аниқ юқори чегараси мавжуд: $\sup E = \alpha$. $E_1 \subset E$ бўлишидан E_1 тўпламнинг ҳам юқоридан чегараланганлиги келиб чиқади. $\sup E_1 = \alpha_1$ бўлсин. Энди $\alpha_1 \leqslant \alpha$ бўлишини исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $\alpha_1 > \alpha$ бўлсин. У ҳолда шундай рационал a сонни топиш мумкинки, $\alpha_1 > a > \alpha$ бўлади. $\alpha_1 = \sup E_1$ бўлгани учун аниқ юқори чегаранинг таърифига кўра шундай α_1^* мавжудки, $\alpha_1^* > a$ бўлади (акс ҳолда $\sup E_1 \leqslant a$ бўлар эди). Демак, $\alpha_1^* > \alpha$. Аммо, иккинчи томондан, $E_1 \subset E$ ва $\alpha = \sup E$ бўлгани учун $\alpha_1^* \leqslant \alpha$ тенгсизлик ҳам ўринли. Натижада зиддиятга келамиз. Шундай қилиб $\alpha_1 \leqslant \alpha$, яъни

$$\sup E_1 \leqslant \sup E$$

бўлади.

2°. Агар E тўплам қуйидан чегараланган бўлиб, $E_1 \subset E$ бўлса,

$$\inf E_1 \geqslant \inf E$$

бўлади. Бу хосса 1°-хосса каби исботланади.

3°. Агар E тўплам чегараланган бўлиб, $E_1 \subset E$ бўлса, у ҳолда

$$\inf E \leqslant \inf E_1 \leqslant \sup E_1 \leqslant \sup E$$

бўлади.

Исбот. 1°- ва 2°-хоссаларга асосан $\sup E_1 \leqslant \sup E$ ва $\inf E_1 \geqslant \inf E$ бўлиб, $\inf E_1 \leqslant \sup E_1$ бўлгани учун изланган

$$\inf E \leqslant \inf E_1 \leqslant \sup E_1 \leqslant \sup E$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

4°. Агар $\forall x \in E$ учун $x \leqslant \alpha$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\sup E \leqslant \alpha$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. E тўпламнинг барча элементлари ва α сондан E^* тўпламни тузамиз: $E^* = E \cup \{\alpha\}$.

Бундан $E \subset E^*$ ва демак, 1°-хоссага кўра $\sup E \leqslant \sup E^*$ тенгсизлик ўринли. Ундан $\sup E^* = \alpha$ бўлганидан $\sup E \leqslant \alpha$ тенгсизлик келиб чиқади.

5°. Агар $\forall x \in E$ учун $x \geqslant \beta$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\inf E \geqslant \beta$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу хосса юқоридаги 4°-хосса каби исботланади.

6°. Агар E тўплам юқоридан чегараланган ва $a = \sup E$ бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $x' \in E$ мавжудки, $x' > a - \varepsilon$ бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик. Яъни шундай $\varepsilon > 0$ мавжуд бўлсинки, $\forall x \in E$ учун $x \leqslant a - \varepsilon$ бўлсин. У ҳолда 4°-хоссага биноан

$$\sup E \leqslant a - \varepsilon,$$

яъни $a \leqslant a - \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Бу зиддият айтилган тасдиқни исботлайди.

7°. Агар E тўплам қуйидан чегараланган ва $b = \inf E$ бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $x' \in E$ мавжудки, $x' < b + \varepsilon$ бўлади.

Бу хосса 6°- хосса каби исботланади.

Ҳақиқий сонлар тўплами R таркибига $-\infty$ ва $+\infty$ символларни $\forall x \in R$ учун $x > -\infty$ ва $x < +\infty$ хусусият билан қўшиб, $\overline{R}$ тўпламни ҳосил қиламиз:

$$\overline{R} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Бу символларнинг киритилиши чегараланмаган тўпламларнинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегараларини киритиш имконини беради.

Агар E юқоридан чегараланмаган бўлса, $\sup E = +\infty$, қуйидан чегараланмаган бўлса, $\inf E = -\infty$ деб олинади. Демак, шу келишувимизга кўра N ва E_2 тўпламлар учун аниқ чегаралар $\sup N = +\infty$, $\inf E_2 = -\infty$ бўлади.

7-§. Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар ва уларнинг хоссалари

1. Ҳақиқий сонлар йиғиндиси. Икки α ва β ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Бу сонлар рационал сонлар тўплами Q да бажарилган ушбу $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ кесимлар билан аниқлансин. Кесимларнинг қуйи синфлари A ва B тўпламлардан мос равишда a ва b сонларни олиб, уларнинг йиғиндиси $c = a + b$ ни тузамиз. Бундай йиғиндилардан иборат тўпламни C билан: $C = \{c: c = a + b, a \in A, b \in B\}$, сўнг $Q \setminus C$ тўпламни эса C' билан ($C' = Q \setminus C$) белгилаймиз. Тузилишига кўра $Q = C \cup C'$.

Энди C ва C' тўпламлар Q да (C, C') кесим бажаришини кўрсатамиз. $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ лар Q да бажарилган кесимлар бўлгани учун

$$A \neq \varnothing, \; A' \neq \varnothing, \; A \cup A' = Q; \; a \in A, \; a' \in A' \Rightarrow a < a',$$

шунингдек,

$$B \neq \varnothing, \; B' \neq \varnothing, \; B \cup B' = Q; \; b \in B, \; b' \in B' \Rightarrow b < b'$$

бўлиб, ундан аввало $C \neq \varnothing$ экани келиб чиқади. Сўнгра ҳар доим $a + b < a' + b'$ бўлгани учун C тўплам юқоридан чегараланган бўлиб, $\sup C = \gamma$ мавжуддир. Аммо A ва B тўплам элементлари орасида энг каттаси мавжуд бўлмагани учун $a + b < \gamma$ ($a \in A$, $b \in B$) бўлади. Унда $a' + b' \geqslant \gamma$ ($a' \in A'$, $b' \in B'$) бўлиб, $a' + b' \overline{\in} C$. Бундан $a' + b' \in Q \setminus C = C'$. Демак, $C' \neq \varnothing$. Шунингдек, $c = a + b \in C$ ва $c < c' = a' + b' \in Q \setminus C$ эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, C ва C' тўпламлар Q да (C, C') кесим бажаради.

16-таъриф. (C, C') кесим билан аниқланадиган γ ҳақиқий сон α ва β ҳақиқий сонларнинг *йиғиндиси* деб аталади. Йиғинди $\alpha + \beta$ каби белгиланади.

Энди ҳақиқий сонларни қўшиш амалининг хоссаларини келтирамиз. Фараз қилайлик, $\alpha\in R$, $\beta\in R$, $\delta\in R$ бўлсин. Қуйидаги тенгликлар ўринли:

1°. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

2°. $(\alpha+\beta)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)$;

3°. Ноль сони учун

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha.$$

Бу хоссалар осон исботланади. Биз улардан бирининг, масалан, 3°-нинг исботини келтирамиз.

Маълумки, 0 сони Q тўпламда $(Q_-,\ Q_+)$ кесим билан аниқланади:

$$Q_-=\{r:\ r\in Q,\ r<0\},\ Q_+=\{r:\ r\in Q,\ r\geqslant 0\},$$

$$0=(Q_-,\ Q_+).$$

$\alpha\in R$ сон эса $\alpha=(A,\ A')$ кесим билан аниқлансин. Таърифга кўра $\alpha+0=(C,\ C')$ бўлиб, бунда

$$C=\{a+r:\ a\in A,\ r\in Q_-\}.$$

Аммо $a\in A$, $r\in Q_-$ бўлганда $a+r<a$ муносабат ўринли. Шунинг учун $C\subset A$ бўлади. Бундан

$$\alpha+0\leqslant\alpha \tag{2.5}$$

экани келиб чиқади.

A тўпламдан ихтиёрий a сонни оламиз. A да энг катта элемент мавжуд бўлмагани учун $a<a_1$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $a_1\in A$ сон мавжуд. Унда $a=a_1+(a-a_1)$ тенгликдан $r=a-a_1<0$ бўлишини ҳисобга олиб, A тўпламнинг ҳар бир элементини $a+r$ ($a\in A$, $r\in Q_-$) кўринишда ёзиш мумкинлигини аниқлаймиз. Бу эса

$$A\subset\{a+r:\ a\in A,\ r\in Q_-\}=C,$$

яъни $A\subset C$ эканини кўрсатади. Демак,

$$\alpha\leqslant\alpha+0. \tag{2.6}$$

Энди (2.5) ва (2.6) муносабатлардан $\alpha+0=\alpha$ тенгликка эга бўламиз, 3°- хосса исбот бўлди.

Йиғиндининг кейинги хоссасини келтиришдан аввал $\alpha\in R$ сонга қарама-қарши бўлган сонни аниқлаймиз.

$\alpha\in R$ сони Q тўпламда $(A,\ A')$ кесим билан аниқлансин: $\alpha=(A,\ A')$. Рационал сонларнинг қуйидаги

$$-A'=\{-a':\ a'\in A'\},\ -A=\{-a:\ a\in A\}$$

тўпламларини қараймиз. Равшанки $-A'$ ва $-A$ тўпламлар Q тўпламда $(-A',\ -A)$ кесим бажаради.

17- таъриф. $(-A',\ -A)$ кесим билан аниқланадиган ҳақиқий сон α ҳақиқий сонга *қарама-қарши сон* деб аталади ва у $-\alpha$ каби белгиланади;

$$-\alpha=(-A',\ -A).$$

4°. $\forall\alpha\in R$ *учун* $\alpha+(-\alpha)=0$ *тенглик ўринли.*

Исбот. $\alpha=(A, A')$ бўлсин. Унда $-\alpha$ сон $(-A', -A)$ кесим билан аниқланади Йиғинди таърифига кўра $\alpha+(-\alpha)=(C, C')$, бунда

$$C=\{c=a+(-a'):\ a\in A,\ -a'\in -A'\},\ C'=Q\setminus C.$$

Аммо $a<a'$ тенгсизлик ўринли бўлгани сабабли $c=a+(-a')=$ $=a-a'<0$ бўлиб, C тўпламни ташкил этган рационал сонлар манфий рационал сонлардан иборат эканини аниқлаймиз. Демак, $C\subset Q_-$. Бундан эса

$$\alpha+(-\alpha)\leqslant 0 \tag{2.7}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди $c\in Q_-$ сонни олайлик. Унда, равшанки, $-c>0$ бўлади. Биз уни r билан белгилайлик: $r=-c$.

(A, A') кесимнинг қуйи ва юқори синфларидан олинган $a\in A$- $a'\in A'$ сонлар учун $a'-a=r$, яъни

$$c=a+(-a') \tag{2.8}$$

тенглик ўринли бўлишини кўрсатамиз. $a_0\in A$, $a_0'\in A'$ учун $a_0'-a_0>0$ бўлади. Архимед аксиомасига кўра шундай натурал $n\in N$ сон мавжудки, бу сон учун $n\cdot r>a_0'-a_0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Аммо $a_0+n\cdot r>a_0'$ тенгсизликка кўра $a_0+n\cdot r\in A'$ эканини топамиз. Модомики, $a_0\in A$, $a_0+n\cdot r\in A'$ экан, унда натурал сон n ни шундай олиш мумкинки,

$$a_0+(n-1)\ r\in A,\quad a_0+n\cdot r\in A'$$

бўлади. Агар

$$a=a_0+(n-1)\cdot r,\quad a'=a_0+n\cdot r$$

деб олсак, унда $a'-a=r$, яъни $c=a+(-a')$ экани келиб чиқади.

Демак, Q_- тўпламнинг ҳар бир элементи (2.8) кўринишда ифодаланади. Бу эса $Q_-\subset C$ эканини англатади. Бундан

$$0\leqslant\alpha+(-\alpha) \tag{2.9}$$

экани келиб чиқади. Ниҳоят (2.7) ва (2.9) муносабатлардан $\alpha+$ $+(-\alpha)=0$ тенгликнинг ўринли эканига ишонч ҳосил қиламиз. 4°- хосса исбот бўлди.

5°. Агар $\alpha\in R$, $\beta\in R$ бўлиб, $\alpha>\beta$ тенгсизлик ўринли бўлса, унда $\alpha+\delta>\beta+\delta$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

Бу хоссанинг исботини ўқувчига ҳавола қиламиз.

Берилган ҳақиқий сонга қарама-қарши соннинг аниқланиши икки ҳақиқий сон айирмаси тушунчасини киритиш имконини беради.

18-таъриф. α ҳақиқий сондан β ҳақиқий соннинг *айирмаси* деб $\alpha+(-\beta)$ сонга айтилади. Айирма $\alpha-\beta$ каби белгиланади:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

Энди ҳақиқий соннинг абсолют қиймати тушунчасини келтирамиз.

Бирор $\alpha\in R$ сонни $(\alpha\neq 0)$ олайлик. Бунда α, $-\alpha$ сонлардан бири албатта мусбат бўлади. Бу мусбат сон α соннинг **абсолют қиймати** деб аталади ва у $|\alpha|$ каби белгиланади. Ноль сонининг абсолют қиймати деб 0 сонининг ўзи олинади. Демак,

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \text{агар } \alpha\geqslant 0 \text{ бўлса},\\ -\alpha, & \text{агар } \alpha<0 \text{ бўлса},\end{cases}$$

2. **Ҳақиқий сонлар кўпайтмаси.** Икки $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ ҳақиқий сон Q тўпламда бажарилган (A, A') ва (B, B') кесимлар ёрдамида аниқланган бўлсин: $\alpha=(A, A')$, $\beta=(B, B')$. A ва B тўпламларнинг манфий бўлмаган $a\in A$, $a\geqslant 0$; $b\in B$, $b\geqslant 0$ элементларидан ушбу

$$\{a\cdot b:\ a\in A,\ a\geqslant 0,\ b\in B,\ b\geqslant 0\}$$

тўпламни тузамиз. Сўнгра рационал сонларнинг қуйидаги

$$C=Q_-\cup\{a\cdot b:\ a\in A,\ a\geqslant 0,\ b\in B,\ b\geqslant 0\},$$
$$C'=Q\setminus C$$

тўпламларини қараймиз. Бу C ва C' тўпламлар Q да (C, C') кесим бажаришини аввалги бандларда кўрсатилгандек исботлаш мумкин.

19-таъриф. (C, C') кесим билан аниқланган сон α ва β *ҳақиқий сонлар кўпайтмаси* дейилади. Кўпайтма $\alpha\cdot\beta$ каби белгиланади: $\alpha\cdot\beta=(C, C')$.

Ихтиёрий α ва β ҳақиқий сонлар учун бу сонлар кўпайтмаси қуйидагича таърифланади:

$$\alpha\cdot\beta=\begin{cases}-(|\alpha|\cdot|\beta|), & \text{агар } \alpha \text{ ва } \beta \text{ турли ишорали бўлса},\\ |\alpha|\cdot|\beta|, & \text{агар } \alpha \text{ ва } \beta \text{ бир хил ишорали бўлса}.\end{cases}$$

Энди ҳақиқий сонларни кўпайтириш амалининг хоссаларини келтирамиз. Фараз қилайлик, $\alpha\in R$, $\beta\in R$, $\delta\in R$ бўлсин.

1°. $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$;

2°. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)$;

3° $\alpha\cdot 1=\alpha$.

Бу хоссаларнинг исботи қийин эмас. Биз уларнинг бирортасини, масалан, 3°-хоссани исботлаймиз $0<\alpha\in R$ сон Q тўпламда бажарилган $\alpha=(A, A')$ кесим, 1 сон эса (B, B') кесим билан аниқланган бўлсин. Таърифга асосан $\alpha\cdot 1=(C, C')$ бўлиб, бунда $C=\{c:\ c=a\cdot b,\ a\in A,\ b\in B\}$. Аммо $b<1$ бўлгани учун $a\cdot b<a$ бўлиб, ундан $c=a\cdot b\in A$ эканини топамиз. Демак, $\forall c\in C\Rightarrow c\in A$. Бу эса $C\subset A$ эканини кўрсатади. Демак,

$$\alpha\cdot 1\leqslant\alpha. \tag{2.10}$$

Энди $a\in A$ бўлсин. A тўпламда энг катта элемент мавжуд бўлмагани сабабли унда $a<a_1$ тенгсизликни қаноатлантирадиган a_1 эле-

мент мавжуд. Агар $a=a_1\cdot\frac{a}{a_1}$ деб қарасак, $a_1\in A$, $\frac{a}{a_1}\in B$ (чунки $\frac{a}{a_1}<1$) эканини топамиз. Демак, $A\subset C$. Бундан

$$\alpha\leqslant\alpha\cdot 1 \tag{2.11}$$

тенгсизликнинг ўринли экани келиб чиқади. (2.10) ва (2.11) муносабатлардан $\alpha\cdot 1=\alpha$ тенгликнинг ўринли эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Ҳақиқий сонлар кўпайтмасининг кейинги хоссасини келтиришдан аввал $\alpha\in R$ сонга тескари бўлган сонни аниқлаймиз.

$0<\alpha\in R$ сон Q тўпламда бажарилган (A, A') кесим билан аниқланган бўлсин. Рационал сонларнинг қуйидаги

$$C=Q_-\cup\{0\}\cup\left\{\frac{1}{a'}:\ a'\in A'\right\},$$

$$C'=Q\setminus C$$

тўпламларини қарайлик. Бу C ва C' тўпламлар Q да (C, C') кесим бажаради. (Буни исботлаш ўқувчига тавсия қилинади.)

20-таъриф. (C, C') кесим билан аниқланган сон $0<\alpha=(A, A')$ ҳақиқий сонга нисбатан *тескари сон* деб аталади. У $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}=(C, C')\right)$ каби белгиланади.

Агар $\alpha<0$ бўлса, у ҳолда бу сонга тескари бўлган $\frac{1}{\alpha}$ сон қуйидагича таърифланади:

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{|\alpha|}.$$

4°. Нолдан фарқли $\forall\alpha\in R$ сон учун унга тескари сон мавжуд ва $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$ тенглик ўринли.

$0<\alpha$ сон (A, A'), $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}$ сон (C, C') ҳамда 1 сон (B, B') кесим билан аниқланган бўлсин:

$$\alpha=(A, A'),\ \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=(C,\ C'),\ 1=(B, B').$$

Фараз қилайлик, $c\in C$ бўлсин. У ҳолда $c=a\cdot\frac{1}{a'}<1$ $(a\in A,\ a'\in A')$ бўлиб, бундан $c\in B$ экани келиб чиқади. Демак, $C\subset B$, бинобарин,

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\leqslant 1 \tag{2.12}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди B тўпламдан мусбат b сонни олайлик: $b\in B$, $b>0$. Агар

$\varepsilon = \frac{1}{b} - 1$ деб қарайдиган бўлсак, ундан $0 < b < 1$ тенгсизликка кўра $\varepsilon > 0$ эканини топамиз.

$A \neq \varnothing$, $A' \neq \varnothing$ бўлгани учун ушбу $a_0 \in A$, $a'_0 \in A'$ сонлар мавжуддир. Бунда $a_0 < a'_0$. Энди қуйидаги a_0, $a_0(1+\varepsilon)$, $a_0(1+\varepsilon)^2, \ldots,$ $a_0(1+\varepsilon)^{n-1}$, $a_0(1+\varepsilon)^n, \ldots$ геометрик прогрессияни кўрамиз. Унда шундай иккита $a = a_0(1+\varepsilon)^n$, $a' = a_0(1+\varepsilon)^{n+1}$ ҳади топиладики, $a = a_0(1+\varepsilon)^n \in A$, $a' = a_0(1+\varepsilon)^{n+1} \in A'$ бўлади. У ҳолда $\frac{a'}{a} = 1 + \varepsilon = \frac{1}{b}$, яъни $b = \frac{a}{a'} = a \cdot \frac{1}{a'}$ бўлади. Демак, $b \in C$. Шундай қилиб, $B \subset C$. Бундан

$$1 \leqslant \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \tag{2.13}$$

тенгсизлик келиб чиқади. (2.12) ва (2.13) муносабатлардан изланган $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ тенгликка эга бўламиз.

$\alpha < 0$ бўлган ҳолда ҳам юқоридагидек

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$$

бўлиши кўрсатилади.

6-теорема. *Агар икки* $\alpha \in R$, $\beta \in R$ *ҳақиқий сон берилган бўлиб,* $\alpha \neq 0$ *бўлса, у ҳолда*

$$\alpha \cdot x = \beta \tag{2.14}$$

тенгламани қаноатлантирувчи ягона ҳақиқий сон x *мавжуд.*

Исбот. $\alpha \neq 0$ бўлгани учун ҳар доим унга тескари бўлган $\frac{1}{\alpha}$ ҳақиқий сон мавжуд бўлади. Бу $\frac{1}{\alpha}$ ва β сонларнинг кўпайтмасидан тузилган $\beta \cdot \frac{1}{\alpha}$ сонни қараймиз. Унда

$$\alpha \cdot \left(\beta \cdot \frac{1}{\alpha}\right) = \beta \cdot \left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\right) = \beta \cdot 1 = \beta$$

алмаштиришларга кўра $\beta \cdot \frac{1}{\alpha}$ сон (2.14) тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, $x = \beta \frac{1}{\alpha}$. Энди (2.14) тенгламани қаноатлантирувчи бундай соннинг ягоналигини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни (2.14) тенгламани қаноатлантирадиган сон иккита: x ва y бўлсин: $\alpha \cdot x = \beta$, $\alpha \cdot y = \beta$. У ҳолда $\alpha \cdot x - \alpha \cdot y = 0$ ёки $\alpha(x - y) = 0$ бўлиб, $\alpha \neq 0$ бўлгани учун $x - y = 0$ бўлади. Демак, $x = y$. Теорема исбот бўлди.

21-таъриф. Берилган α ва β *ҳақиқий сонлар нисбати* деб, $\beta \frac{1}{\alpha}$ сонга айтилади. У $\frac{\beta}{\alpha}$ каби белгиланади.

5°. $\alpha\in R$, $\beta\in R$, $\gamma\in R$ сонлар учун хар доим

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$$

тенглик ўринли

6°. Агар $\alpha\in R$, $\beta\in R$, $\gamma\in R$ сонлар берилган бўлиб, $\gamma>0$ ва $\alpha>\beta$ тенгсизлик ўринли бўлса, унда $\alpha\cdot\gamma>\beta\gamma$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

3. Ҳақиқий соннинг даражаси. Аввало қуйидаги иккита леммани келтирамиз.

1-лемма. (A, A') Q тўпламда ихтиёрий кесим бўлсин. $\forall\varepsilon>0$ рационал сон берилганда ҳам, шундай $a\in A$, $a'\in A'$ рационал сонлар мавжудки, бу сонлар ушбу $a'-a<\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Исбот. A ва A' тўпламлар Q да (A, A') кесим бажарсин. Демак, $A\neq\varnothing$. A тўпламда бирор a_0 рационал сонни олиб, сўнгра қуйидаги

$$a_0,\ a_0+\varepsilon,\ a_0+2\varepsilon,\ \ldots,\ a_0+n\varepsilon,\ \ldots,\ n\in N,$$

арифметик прогрессияни қараймиз. Архимед аксиомасига биноан шундай $n\in N$ топиладики, $a_0+n\varepsilon\in A$, $a_0+(n+1)\varepsilon\in A'$ бўлади. Агар A тўпламнинг $a_0+n\varepsilon$ дан катта бўлган эламентини a ва $a_0+(n+1)\varepsilon=a'$ деб олсак.

$$a'-a<a_0+(n+1)\varepsilon-(a_0+n\varepsilon)=\varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак, $a'-a<\varepsilon$, $a\in A$, $a'\in A'$.

Лемма исбот бўлди.

2-лемма. Иккита $\alpha\in R$, $\beta\in R$ ҳақиқий сон берилган бўлсин. $\forall\varepsilon>0$ рационал сон берилганда ҳам шундай $a\in Q$, $a'\in Q$, $a<a'$ сонлар топилсаки, улар учун ушбу

$$\begin{aligned}&a\leqslant\alpha\leqslant a',\\&a\leqslant\beta\leqslant a',\\&a'-a<\varepsilon\end{aligned}\tag{2.15}$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, у ҳолда $\alpha=\beta$ бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни (2.15) тенгсизликлар $\forall\varepsilon>0$ рационал сон учун ўринли бўлса ҳам $\alpha\neq\beta$ бўлсин. Масалан, $\alpha>\beta$ дейлик. У ҳолда шундай $r\in Q$, $r'\in Q$ сонлар мавжуд бўладики, улар учун $\alpha>r'>r>\beta$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Натижада қуйидаги $a'>r'>r>a$ тенгсизликларга келамиз. Бундан $a'-a>r'-r>0$ тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса $a'-a<\varepsilon$ тенгсизликнинг $r'-r$ дан кичик бўлган ε лар учун бажарилмаслигини кўрсатади. Агар $\alpha<\beta$ бўлса ҳам шунга ўхшаш мулоҳазалар ёрдамида зиддиятликка келинади. Лемма исбот бўлди.

а) Ҳақиқий соннинг бутун даражаси. Биз аввалги бандда икки α ва β ҳақиқий сон кўпайтмасининг таърифини келтирдик. n та α_1, α_2, α_3, $\ldots$, α_n ҳақиқий сонлар кўпайтмаси $\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n$ ҳам худди ўша йўл билан таърифланади. Агар $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=$

$=\alpha_n = \alpha$ бўлса, у ҳолда $\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha}_{n\text{ та}}$ сон α соннинг *n- даражаси* деб аталади ва α^n каби белгиланади:

$$\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha}_{n\text{ та}} = \alpha^n$$

Бу келтирилган таърифдан ҳамда ҳақиқий сонлар устида амалларнинг хоссаларидан қуйидагилар келиб чиқади. $\alpha\in R$, $\beta\in R$ бўлиб, n ва m лар натурал сон бўлсин.

1) Қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\alpha^n\cdot\alpha^m = \alpha^{n+m},$$

$$\alpha^n\cdot\beta^n = (\alpha\cdot\beta)^n,$$

$$(\alpha^n)^m = \alpha^{nm},$$

$$\frac{\alpha^n}{\alpha^m} = \alpha^{n-m}\,(n>m);$$

2) $n>m$ ва $\alpha>1$ бўлганда $\alpha^n>\alpha^m$ бўлиб, $0<\alpha<1$ бўлганда эса $\alpha^n<\alpha^m$ бўлади;

3) агар $\alpha>\beta>0$ бўлса, у ҳолда $\alpha^n>\beta^n$ бўлади.

Маълумки, $\forall\,\alpha\in R$ $(\alpha\neq 0)$ учун ҳар доим унга тескари бўлган $\frac{1}{\alpha}$ ҳақиқий сон мавжуд. Ушбу $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}\ldots\frac{1}{\alpha}$ сон α соннинг $-n$-даражаси деб аталади ва у α^{-n} каби белгиланади:

$$\alpha^{-n} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n.$$

Ҳар қандай $\alpha\neq 0$ ҳақиқий соннинг нолинчи даражаси 1 га тенг деб олинади: $\alpha^0 = 1$.

6) Ҳақиқий сондан олинган илдиз. Бизга $0<\alpha\in R$ ва тайинланган $n\in N$ сонлар берилган бўлсин.

22- таъриф. Ушбу

$$\xi^n = \alpha \tag{2.16}$$

тенгликни қаноатлантирадиган мусбат ξ сон α сондан олинган *n-даражали илдиз* деб аталади ва у $\sqrt[n]{\alpha}$ каби белгиланади.

Келтирилган таърифнинг равон мазмунли (коррект) эканлигини, яъни (2.16) тенгликни қаноатлантирадиган ξ сон мавжудлигини ҳамда ягоналигини кўрсатамиз.

Бунинг учун Q тўпламни қуйидаги

$$A_n = Q_-\cup\{0\}\cup\{r:\ r\in Q,\ r>0, r^n<\alpha\},$$

$$A'_n = \{r':\ r'\in Q,\ r'>0,\ r'^n>\alpha\}$$

тўпламлар ёрдамида $(Q = A_n\cup A'_n)$ ёзамиз. Бундай тузилган A_n ва

A'_n тўпламлар Q да (A_n, A'_n) кесим бажариши равшандир. Бу кесим аниқлаган сонни ξ деб олайлик: $\xi = (A_n, A'_n)$.

Юқоридаги 1- леммага асосан $\forall \varepsilon > 0$ рационал сон учун шундай $r \in A_n$, $r' \in A'_n$ сонлар мавжудки, $r' - r < \varepsilon$ бўлади. Бу сонларнинг олинишидан, равшанки,

$$0 < r < \xi < r'$$

ва, демак,

$$r^n < \xi^n < r'^n$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

A'_n тўпламда r' дан катта бўлган тайин r_0 сонни (бундай сон ҳар доим топилади) олсак $(0 < r < r' < r_0)$

$$r'^n - r^n = (r' - r)(r'^{n-1} + r \cdot r'^{n-2} + \ldots +$$
$$+ r^{n-2} \cdot r' + r^{n-1}) < (r' - r) \cdot n r_0^{n-1} < \varepsilon \cdot n \cdot r_0^{n-1}$$

бўлади. Бундан кўринадики, $\forall \varepsilon > 0$ рационал сон учун $\left(\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n r_0^{n-1}} \right.$ га кўра$\left. \right)$ шундай $r \in A_n$, $r' \in A'_n$ лар мавжудки,

$$r^n < \xi^n < r'^n$$

ва

$$r'^n - r^n < \varepsilon$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Иккинчи томондан, (A_n, A'_n) кесимнинг тузилишига биноан

$$r^n < \alpha < r'^n$$

бўлади. Шундай қилиб, 2- леммадаги барча шартлар бажарилишини кўрсатдик. Шу лемма тасдиқига биноан

$$\xi^n = \alpha$$

га эга бўламиз.

Шундай қилиб, (A_n, A'_n) кесим билан аниқланган ξ сон (2.16) тенгликни қаноатлантиради. (2.16) тенгликни қаноатлантирувчи ξ сон ягона бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар ξ_1 ва ξ_2 сонлар (2.16) тенгликни қаноатлантирса, яъни

$$\xi_1^n = \alpha, \quad \xi_2^n = \alpha$$

тенгликлар ўринли бўлса, унда ушбу

$$\xi_1^n - \xi_2^n = (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1^{n-1} + \xi_2 \cdot \xi_1^{n-2} + \ldots + \xi_2^{n-2} \cdot \xi_1 + \xi_2^{n-1}) = 0$$

муносабатдан $\xi_1 - \xi_2 = 0$, яъни $\xi_1 = \xi_2$ экани келиб чиқади.

в) **Ҳақиқий соннинг рационал даражаси.** Биз аввалдаги бандларда $\alpha \in R$ соннинг бутун даражаси, шунингдек, $\alpha > 0$ сондан олинган n- даражали илдиз таърифларини келтирдик. Энди $\alpha > 0$

соннинг рационал даражаси тушунчасини келтирамиз. Маълумки, ҳар қандай рационал сон қисқармайдиган $r = \frac{m}{n}$ $(m \in Z,\ n \in N)$ каср кўринишида ифодаланади. $\alpha \in R_+$ ҳақиқий соннинг r- даражаси α^r қуйидагича аниқланади:

$$\alpha^r = \alpha^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^m.$$

Фараз қилайлик, $\alpha \in R_+$, $\beta \in R_+$, $r_1 \in Q$, $r_2 \in Q$ бўлсин. Қуйидаги содда хоссалар ўринлидир:

1) $\alpha^{r_1} \cdot \alpha^{r_2} = \alpha^{r_1 + r_2}$;

2) $(\alpha^{r_1})^{r_2} = \alpha^{r_1 \cdot r_2}$;

3) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r}$ $(r \in Q)$;

4) $\alpha^{r_1} : \alpha^{r_2} = \alpha^{r_1 - r_2}$;

5) $(\alpha \cdot \beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r$;

6) $\alpha > 1$ бўлганда $r_1 < r_2 \Rightarrow \alpha^{r_1} < \alpha^{r_2}$;

7) $0 < \alpha < 1$ бўлганда $r_1 < r_2 \Rightarrow \alpha^{r_1} > \alpha^{r_2}$.

Юқорида айтилганлардан кўринадики, $\alpha = 1$ сонининг ихтиёрий рационал даражаси 1 га тенг бўлади: $1^r = 1$.

Муайян узвийликни сақлаш маъносида, $\alpha = 1$ сонининг ихтиёрий ҳақиқий даражаси ҳам 1 га тенг деб олинади:

$$1^\beta = 1.$$

г) Ҳақиқий соннинг ҳақиқий даражаси. Бирдан катта $(\alpha > 1)$, $\alpha \in R$ сонни олайлик. $\beta \in R_+$ сон эса Q тўпламда бажарилган $(B, B)'$ кесим билан аниқланган мусбат сон бўлсин:

$$\beta = (B, B')',\ \beta > 0.$$

Барча манфий ҳақиқий сонлар, ноль ҳамда α^b $(b \in B)$ кўринишидаги мусбат ҳақиқий сонлардан иборат тўпламни E билан, $R \setminus E$ тўпламни E' $(E' = R \setminus E)$ билан белгилайлик. Натижада R тўплам $R = E \cup E'$ кўринишда ёзилиши мумкин.

Юқорида киритилган E ва E' тўпламлар R тўпламда (E, E') кесим бажаришини кўрсатиш қийин эмас. E тўпламнинг тузилишидан унинг бўш эмаслиги кўринади: $E \neq \varnothing$. Сўнгра ҳар доим $\alpha^b < \alpha^{b'}$ $(b \in B,\ b' \in B')$ бўлгани E тўпламнинг юқоридан чегараланганлигини билдиради. Демак, $\sup E = \gamma$ мавжуд. B тўплам элементлари орасида энг каттаси мавжуд бўлмаганлиги учун $\alpha^b < \gamma$ бўлади. У ҳолда $\gamma \leqslant \alpha^{b'}$ ва $\alpha^{b'} \overline{\in} E$ бўлади. Бундан $\alpha^{b'} \in E'$. Демак, $E' \neq \varnothing$. E ва E' тўпламларнинг тузилишидан E нинг ҳар бир элементи E' нинг исталган элементидан кичик бўлиши равшандир. Шундай қилиб, E ва E' тўпламлар R да (E, E') кесим бажаради. Қуйидаги таърифда E ва E' тўпламлар юқоридагича тузилган деб қаралади.

23-таъриф. (E, E') кесим билан аниқланадиган сон α соннинг β-*даражаси* деб аталади ва α^β каби белгиланади:

$$\alpha^\beta = (E, E').$$

Агар β манфий сон бўлса, унда $\alpha^\beta = \frac{1}{\alpha^{-\beta}}$ деб қараймиз ва у юқоридагидек таърифланади.

Агар $0 < \alpha < 1$ бўлса, унда $\alpha^\beta = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}$ деб олиниши натижасида яна биз юқоридаги ҳолга келамиз. Мусбат ҳақиқий соннинг ҳақиқий даражаси тушунчасидан фойдаланиб қуйидаги теоремани келтирамиз.

7-теорема. *Ҳар қандай $\alpha \neq 1$ ва γ мусбат ҳақиқий сонлар учун*

$$\alpha^\beta = \gamma$$

тенгламани қаноатлантирадиган ягона β ҳақиқий сон мавжуд.

Бу теореманинг исботи (2.16) тенглама ечимининг мавжудлиги ҳамда ягоналигини исботлашга ўхшаш.

24-таъриф. Берилган $\alpha \neq 1$ ва γ мусбат ҳақиқий сонлар учун ушбу

$$\alpha^\beta = \gamma$$

тенгламани қаноатлантирувчи β сон γ соннинг α асосга кўра (α асосли) *логарифми* деб аталади ва у $\log_\alpha \gamma$ каби белгиланади:

$$\beta = \log_\alpha \gamma.$$

8-§. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати ва унинг хоссалари

Юқорида ҳақиқий соннинг абсолют қиймати тушунчаси билан танишган эдик. Маълумки, $x \in R$ соннинг абсолют қиймати қуйидагича аниқланади:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса}, \\ -x, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса}. \end{cases} \tag{*}$$

Энди ҳақиқий соннинг абсолют қиймати хоссаларини келтирамиз.

1°. $x \in R$ сон учун

$$|x| \geqslant 0, \ |x| = |-x|, \ x \leqslant |x|, \ -x \leqslant |x|$$

муносабатлар ўринли. Бу муносабатлар соннинг абсолют қиймати таърифидан келиб чиқади.

2°. Агар $x \in R$ сонлар

$$|x| < a \quad (a > 0) \tag{2.17}$$

тенгсизликни қаноатлантирса, бундай x сонлар

$$-a < x < a \tag{2.18}$$

тенгсизликларни ҳам қаноатлантиради ва аксинча. Бошқача қилиб айтганда (2.17) ва (2.18) тенгсизликлар эквивалент тенгсизликлардир:

$$|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a.$$

Исбот. (2.17) тенгсизлик ўринли бўлсин: $x \in R$, $|x| < a$. 1°- хоссага кўра $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ бўлишидан ҳамда $-a < -|x|$ тенгсизликдан топамиз: $-a < -|x| \leqslant x \leqslant |x| < a$. Бундан эса $-a < x < a$ экани келиб чиқади.

Энди (2.18) тенгсизликлар ўринли бўлсин: $x \in R$, $-a < x < a$.

Агар $x \geqslant 0$ бўлса, $|x| = x$ бўлиб, $|x| < a$ бўлади. Агар $x < 0$ бўлса, $|x| = -x$ бўлиб, $-x < a$ бўлганидан эса $|x| < a$ эканини топамиз. Демак, $-a < x < a$ бўлганда ҳар доим $|x| < a$ бўлади.

Бу хосса қуйидаги $\{x: x \in R, |x| < a\}$ ва $\{x: x \in R, -a < x < a\}$ ҳақиқий сонлар тўпламларининг бир-бирига тенглигини ифодалайди.

3° Агар $x \in R$ сонлар $|x| \leqslant a \, (a > 0)$ тенгсизликни қаноатлантирса, бундай x сонлар $-a \leqslant x \leqslant a$ тенгсизликларни ҳам қаноатлантиради ва аксинча, яъни

$$|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

Бу хосса 2°- хосса каби исботланади.

4°. Икки $x \in R$ ва $y \in R$ ҳақиқий сон йиғиндисининг абсолют қиймати бу сонлар абсолют қийматларининг йиғиндисидан катта эмас, яъни

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Исбот. Агар $x + y \geqslant 0$ бўлса, $x + y = |x + y|$ бўлиб, $x \leqslant |x|$, $y \leqslant |y|$ тенгсизликларни ҳисобга олган ҳолда

$$|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y|$$

бўлишини топамиз. Агар $x + y < 0$ бўлса, унда $|x + y| = -(x+y) = -x + (-y) \leqslant |x| + |y|$ бўлади.

Бу муносабат қўшилувчилар сони иккитадан катта бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлади:

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

5°. $x \in R$, $y \in R$ сонлар учун

$$|x - y| \geqslant |x| - |y|$$

тенгсизлик ўринли.

Исбот. Равшанки, $x = (x - y) + y$. Унда 4°-хоссага биноан $|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|$ бўлиб, бу тенгсизликдан $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ бўлиши келиб чиқади.

6°. $x \in R$, $y \in R$ сонлар учун

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

тенглик ўринли.

Бу тенглик соннинг абсолют қиймати таърифидан келиб чиқади.

7°. $x \in R$, $y \in R$, $y \neq 0$ сонлар учун

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

тенглик ўринли.

Исбот. $\frac{x}{y} = z$ деб олайлик. Бундан $x = z \cdot y$ бўлишини топамиз. Аммо 6°-хоссага кўра $|x| = |z \cdot y| = |z| \cdot |y|$ ва бундан $|z| = \frac{|x|}{|y|}$ тенглик келиб чиқади.

Барча манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўпламини R_+ билан белгилайлик. Равшанки, $R_+ \subset R$. Энди R тўпламдан олинган ҳар бир x ҳақиқий сонга унинг абсолют қиймати $|x|$ ни мос қўйайлик. Натижада биз

$$f: R \to R_+ \text{ ёки } f: x \to |x|$$

акслантиришга эга бўламиз.

Демак, ҳақиқий соннинг абсолют қийматини R тўпламни R_+ тўпламга (*) қоида бўйича акслантириш деб қараш мумкин.

9- §. Иррационал сонни тақрибий ҳисоблаш. Иррационал сонни чексиз даврий бўлмаган ўнли каср орқали ифодалаш

1. Иррационал сонни тақрибий ҳисоблаш. Бирор α иррационал сон берилган бўлиб, у Q тўпламда бажарилган (A, A') кесим билан аниқланган бўлсин: $\alpha = (A, A')$. Бутун сонлар тўплами Z рационал сонлар тўпламининг қисми (яъни $Z \subset Q$) бўлганлигидан кетма-кет келган a_0 ва $a_0 + 1$ бутун сонлар топиладики, ушбу $a_0 < \alpha < a_0 + 1$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу ҳолда $r_0 = a_0$ сон α иррационал сонни «ками» билан, $r_0' = a_0 + 1$ эса «ортиғи» билан тақрибий ифодалайди.

Энди

$$a_0,\ a_0 + \frac{1}{10},\ a_0 + \frac{2}{10},\ \ldots,\ a_0 + \frac{9}{10},\ a_0 + 1$$

сонларни оламиз. $a_0 < a < a_0 + 1$ бўлгани учун бу сонлар орасида кетма-кет келган шундай иккита

$$a_0 + \frac{a_1}{10},\ a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$$

сон топиладики, ушбу

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади, бунда a_1 сон 0, 1, 2, . . . , 9 сонлардан биридир. Қуйидаги

$$r_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} = a_0, a_1;$$

$$r_1' = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} = a_0, a_1 + \frac{1}{10}$$

сонлар α сонни мос равишда «ками» ҳамда «ортиғи» билан $\frac{1}{10} = 0,1$ аниқликда тақрибий ифодалайди. Сўнгра

$$a_0+\frac{a_1}{10},\quad a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10^2},\quad a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{2}{10^2},\ \ldots,$$

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{9}{10^2},\quad a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}$$

сонларни оламиз. Агар ушбу

$$a_0+\frac{a_1}{10}<\alpha<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}$$

тенгсизликлар ўринли эканини эътиборга олсак, у холда юқоридаги сонлар орасида шундай кетма-кет келган иккита

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2},\quad a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}$$

сон топиладики, улар учун ушбу

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}<\alpha<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади, бунда a_2 сон 0, 1, 2, . . . , 9 сонлардан биридир. Қуйидаги

$$r_2=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}=a_0,\ a_1a_2;$$

$$r_2'=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{1}{10^2}=a_0,\ a_1a_2+\frac{1}{10^2}$$

сонлар α сонни мос равишда «ками» ҳамда «ортиги» билан $\frac{1}{10^2}=0{,}01$ аниқликда тақрибий ифодалайди.

Бу жараённи давом эттира бориб n та қадамдан кейин шундай иккита

$$a_0,\ a_1a_2\ldots a_n=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n};$$

$$a_0,\ a_1a_2\ldots a_n+\frac{1}{10^n}=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n+1}{10^n}$$

сон топиладики, улар учун ушбу

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}<\alpha<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n+1}{10^n}\tag{2.19}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади, бунда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонларнинг ҳар бири 0, 1, 2, . . . , 9 сонлардан бирига тенгдир.

Қуйидаги

$$r_n=a_0,\ a_1a_2\ldots a_n;$$

$$r'_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}$$

сонларнинг ҳар бири α иррационал сонни $\frac{1}{10^n}$ аниқликда тақрибий ифодалайди.

Шундай қилиб, (2.19) муносабатдан кўринадики, n ни етарлича катта қилиб олиш ҳисобига α сонни исталганча аниқликда r_n ва r'_n рационал сонлар (ўнли касрлар) ёрдамида тақрибий ҳисоблаш мумкин: $\alpha \approx r_n$, $\alpha \approx r'_n$. Юқоридаги r_n ва r'_n рационал сонларни мос равишда «ками» ҳамда «ортиғи» билан α сонининг *ўнли яқинлашувчилари* деб аталади.

2. **Иррационал сонни чексиз даврий бўлмаган каср орқали ифодалаш.** Маълумки, ҳар қандай рационал сон чекли ўнли каср ёки чексиз даврий ўнли каср кўринишида ифодаланади ва аксинча, юқорида айтилган касрлар рационал сонни ифодалайди. Шу сабабли иррационал сон α учун $\alpha \neq a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ муносабат ўринли ва бу иррационал сон чексиз, даврий бўлмаган ўнли каср кўринишида ифодаланади. Албатта, бу айтилган тасдиқ математик жиҳатдан жиддий асосланиши лозим. Биз қуйида тегишли тасдиқнинг асосланиши билан шуғулланамиз.

α — иррационал сон бўлсин. Бу сон юқоридаги 1- бандда кўрсатилганидек «ками» билан $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ кўринишдаги ўнли каср, «ортиғи» билан $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}$ кўринишдаги ўнли каср орқали ифодаланади. Бу ўнли касрлар айирмаси n ўсганда камаяди.

Иррационал сон α ни тақрибий ифодаланиш жараёнини чексиз давом эттириш натижасида ушбу

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \tag{2.20}$$

чексиз ўнли касрни ҳосил қиламиз. Бу (2.20) сонни иррационал сон α нинг ўнли каср кўринишидаги ифодаси деб қараймиз. Унда (2.19) тенгсизликлардан $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n, \ldots$ чексиз ўнли каср даврий ўнли каср эмаслиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар (2.20) чексиз даврий ўнли каср, яъни рационал r сон бўлса, унда $\forall n \in N$ учун

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} < r < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots +$$
$$+ \frac{a_n + 1}{10^n}$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, бу ва (2.19) тенгсизликлардан

$$|\alpha - r| < \frac{1}{10^n} \quad (\forall n \in N) \tag{2.21}$$

тенгсизлик келиб чиқади. У ҳолда 2- леммага кўра $\alpha = r$ бўлиб, бу α иррационал сон деб олинишига зид.

Демак, иррационал сон α ни ифодаловчи (2.20) сон чексиз, даврий бўлмаган ўнли касрдан иборат.

Энди бирор чексиз, даврий бўлмаган ўнли каср $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ берилган бўлсин. Ҳар бир натурал сон n учун ушбу

$$p_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n;$$

$$q_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$$

чекли ўнли касрларни — рационал сонларни олиб, сўнгра қуйидаги

$$A = \{r : r \in Q, \ \forall n \text{ учун } r < q_n\},$$

$$A' = \{r : r \in Q, \ \forall n \text{ учун } p_n < r\}$$

тўпламларни тузамиз. A ва A' тўпламлар Q да (A, A') кесим бажаради. Бу кесим эса бирор α ҳақиқий сонни аниқлайди. Келтирилган (A, A') кесимнинг тузилишидан ва $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ чексиз ўнли каср даврий эмаслигидан ихтиёрий натурал n сон учун

$$p_n < \alpha < q_n \tag{2.22}$$

тенгсизликлар ўринли эканлиги келиб чиқади. (2.22) тенгсизликлардан ҳамда (2.21) тенгсизликни келтириб чиқаришдаги мулоҳазани қайтаришдан $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ чексиз, даврий бўлмаган ўнли каср α сонни ифодалаши ва иррационал сон эканлиги келиб чиқади.

Демак, ҳар қандай иррационал сон α га чексиз, даврий бўлмаган ўнли каср $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ ва аксинча ҳар қандай чексиз даврий бўлмаган ўнли касрга иррационал сон мос келиши кўрсатилди.

Энди чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар тўпламида касрларнинг тенглик тушунчасини киритиб, юқоридаги мосликнинг ўзаро бир қийматли эканлигини кўрсатамиз.

Икки

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

$$b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

ўнли каср берилган бўлсин.

Агар $a_0 = b_0$ ва барча натурал n сонлар учун $a_n = b_n$ бўлса, у ҳолда бу касрлар *тенг* дейилади ва

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

каби белгиланади.

Фараз қилайлик, α ва β — иррационал сонлар учун

$$\left.\begin{matrix} \alpha \to a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \\ \beta \to b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots \end{matrix}\right\} \tag{2.23}$$

мослик ўринли бўлиб, $\alpha \neq \beta$ бўлсин. У ҳолда

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \neq b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

бўлса, $a_0 = b_0$ ва $\forall n \in N$ учун $a_n = b_n$ бўлиб, $\forall n \in N$ учун ушбу

$$a, a_1a_2 \ldots a_n < \alpha < a_0, a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n},$$

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_n < \beta < a_0, a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади. Натижада $\forall n \in N$ лар учун

$$|\alpha - \beta| < \frac{1}{10^n}$$

тенгсизликка келамиз. Бундан 2-леммага кўра $\alpha = \beta$ келиб чиқади. Бу эса $\alpha \neq \beta$ га зид. Шундай қилиб, (2.23) мосликлардан ва $\alpha \neq \beta$ бўлишидан

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots \neq b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$$

экани келиб чиқади.

Шунингдек, агар α сонга иккита $a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ ҳамда $b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$ чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар мос қўйилса, у ҳолда

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots = b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$$

тенглик ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни (2.23) мослик ўринли бўлиб, $a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots \neq b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$ бўлсин. У ҳолда шундай n $(n \in N)$ топиладики, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_{n-1} = b_{n-1}$ бўлиб, $a_n \neq b_n$ бўлади. Айтайлик, $a_n < b_n$ бўлсин. Унда

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n + \frac{1}{10^n} \leqslant a_0, a_1a_2 \ldots a_{n-1}b_n \qquad (2.24)$$

бўлади. Аммо (2.23) муносабатга кўра

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_{n-1}b_n < \alpha < a_0, a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n},$$

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n + \frac{1}{10^n} < \alpha < a_0, a_1a_2 \ldots a_{n-1}b_n + \frac{1}{10^n}$$

бўлиб, ундан α сон, бир томондан, $a_0, a_1a_2 \ldots a_{n-1}b_n$ дан катта, иккинчи томондан, $a_0, a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n + \frac{1}{10^n}$ дан кичик бўлишини топамиз. Бу эса (2.24) муносабатга зид.

Шундай қилиб, (2.23) мосликдан $a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots = b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$ тенглик келиб чиқади. Демак,

$$\alpha \to a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots \quad .$$

мослик ўзаро бир қийматли мослик бўлади. Бу эса

$$\alpha = a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$$

деб олинишини асослайди.

10-§. Ҳақиқий сонларни геометрик тасвирлаш

Биз 2-§ да ҳар бир рационал сонга сонлар ўқида битта нуқта (рационал нуқта) мос келишини кўрсатган эдик. Шу билан бирга сонлар ўқида рационал бўлмаган нуқталар ҳам (масалан $\sqrt{2}$ сонга мос келадиган нуқта) борлиги аниқланди.

Энди ҳар бир ҳақиқий сонга ҳам сонлар ўқида битта нуқта мос келишини кўрсатамиз. Бунинг учун ҳар бир иррационал сонга сонлар ўқида битта нуқта мос келишини кўрсатиш етарлидир.

Мазкур бобнинг 5-§ ида ҳақиқий сонлар тўплами R тўлиқлик (узлуксизлик) хоссасига эга эканлиги кўрсатилган эди. Бинобарин, тўғри чизиқ нуқталаридан иборат тўплам ҳам тўлиқлик хоссасига эга бўлади. Уни келтиришдан аввал тўғри чизиқ нуқталари тўпламида бажарилган кесимни таърифлаймиз.

25-таъриф. Тўғри чизиқнинг барча нуқталари тўплами l ни шундай иккита $\mathscr{M}$ ва $\mathscr{P}$ тўпламларга ажратилсаки, унда

1) $\mathscr{M} \neq \varnothing$, $\mathscr{P} \neq \varnothing$,

2) $\mathscr{M} \cup \mathscr{P} = l$,

3) $\forall\, M \in \mathscr{M}$, $\forall\, P \in \mathscr{P}$ бўлса, M нуқта P нуқтадан чапда жойлашган шартлар бажарилса, у ҳолда $\mathscr{M}$ ва $\mathscr{P}$ тўпламлар l тўпламда кесим бажаради дейилади ва $(\mathscr{M}, \mathscr{P})$ каби белгиланади.

Тўғри чизиқнинг узлуксизлик хоссаси. Тўғри чизиқ нуқталари тўплами l да бажарилган ҳар қандай $(\mathscr{M}, \mathscr{P})$ кесим ягона M нуқтани аниқлаб, бу нуқта ёки $\mathscr{M}$ тўпламнинг энг ўнг нуқтаси ёки $\mathscr{P}$ тўпламнинг энг чап нуқтаси бўлади.

1. Иррационал сонларни геометрик тасвирлаш. Бирор иррационал сон α берилган бўлиб, бу сон Q тўпламда бажарилган $(A; A')$ кесим билан аниқланган бўлсин: $\alpha = (A, A')$. Бунда A тўпламда энг катта, A' тўпламда эса энг кичик элемент йўқ. l тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқдаги A ва A' тўпламларни ташкил этган рационал нуқталарни олайлик. Бу рационал нуқталардан тузилган тўпламларни мос равишда $\breve{A}$ ва $\breve{A}'$ каби белгилайлик.

Равшанки, бу ҳолда $\breve{A}$ тўпламнинг нуқталари орасида энг ўнг нуқта йўқ. Шунингдек $\breve{A}'$ тўпламнинг нуқталари орасида энг чап нуқта йўқ. l тўғри чизиқнинг шундай P нуқталарини қараймизки, бу нуқталардан ўнгда $\breve{A}$ тўпламнинг камида битта нуқтаси бўлсин. Бундай P нуқталардан иборат тўпламни C билан белгилайлик. Тўғри чизиқнинг C тўпламга тегишли бўлмаган нуқталари тўпламини C' билан белгилаймиз. Демак, $C' = l \setminus C$. Бу C ва C' нуқталар тўпламлари l да кесим бажаришини кўрсатамиз.

Аввало $A \neq \varnothing$ бўлгани учун $a \in A$ рационал сон бор. Бу соннинг геометрик тасвири бўлган P_a нуқта $\breve{A}$ тўпламга тегишли бўлади. Демак, $P_a \in C$. Бу эса $C \neq \varnothing$ эканини билдиради. Худди шунга ўхшаш $C' \neq \varnothing$ экани кўрсатилади.

C ва C' тўпламларнинг тузилишидан $C \cup C' = l$ ва C тўпламдаги ҳар бир нуқта C' тўпламдаги исталган нуқтадан чапда жойлашганлиги келиб чиқади. Демак, C ва C' тўпламлар l да (C, C') кесим бажаради. Тўғри чизиқнинг хоссасига кўра (C, C') кесим ягона нуқтани аниқлайди. Бу нуқтани P_α каби белгилаймиз. $\tilde{A}$ тўпламда энг ўнг нуқта бўлмагани учун $P_\alpha \notin \tilde{A}$, шунингдек, $\tilde{A}'$ тўпламда энг чап нуқта бўлмагани учун $P_\alpha \notin \tilde{A}'$ бўлади. Демак, $P_\alpha \notin \tilde{A} \cup \tilde{A}'$ бўлиб, бу нуқта рационал нуқта бўлмайди. Иррационал сон α га худди шу P_α нуқтани мос қўямиз.

2. Ҳақиқий сонлар тўплами R билан тўғри чизиқ нуқталари тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик. Биз юқорида ҳар бир $\alpha \in R$ сонга l тўғри чизиқда битта нуқта P_α нинг мос қўйилишини кўрган эдик. Энди аксинча, l тўғри чизиқдаги ҳар бир нуқтага битта ҳақиқий сон мос келишини кўрсатамиз.

Сонлар ўқида бирор P нуқта олайлик. Бу нуқта, айтайлик, O нуқтадан ўнгда ётсин. Равшанки, P нуқта сонлар ўқида OP кесмани ҳосил қилади. Масштаб кесмаси OE ни OP кесма бўйлаб жойлаштирамиз. Бунда қуйидаги икки ҳол юз беради:

1_1) OP кесмада OE кесма бутун сон a_0 марта тўлиқ жойлашади. Бу ҳолда OP кесманинг ўнг учини ифодаловчи P нуқтага худди шу a_0 сон мос қўйилади. a_0 сон P нуқтанинг координатаси (абсциссаси) деб ҳам аталади. Демак, бу ҳолда P нуқтага a_0 бутун сон мос келади.

2_1) OP кесмада OE кесма бутун сон a_0 марта жойлашиб, OP кесмадан SP кесма ортиб қолиши ёки OP кесмада OE кесма $a_0 + 1$ марта жойлашганда OP кесмага PQ кесма етмасдан қолиши мумкин. Бу ҳолда OP кесманинг ўнг учини ифодаловчи P нуқтага a_0 сонни «ками» билан $a_0 + 1$ сонни эса «ортиғи» билан мос қўйиш мумкин. Бу ҳолда P нуқтага мос келадиган ҳақиқий сонни топиш мақсадида масштаб кесмаси OE нинг $\frac{1}{10}$ қисмини олиб, уни SP кесма бўйлаб жойлаштирамиз. Бунда яна қуйидаги икки ҳол юз беради:

1_2) SP кесмада OE кесманинг $\frac{1}{10}$ қисми бутун сон a_1 марта тўлиқ жойлашади. Бунда a_1 сон 0, 1, 2, . . ., 9 сонларнинг биридир. Бу ҳолда P нуқтага $a_0 + \frac{a_1}{10}$ сон мос қўйилади.

2_2) SP кесмада OE кесманинг $\frac{1}{10}$ қисми бутун сон a_1 марта жойлашиб, SP кесмадан S_1P кесма ортиб қолиши ёки PA кесмада OE кесманинг $\frac{1}{10}$ қисми $a_1 + 1$ марта жойлашганда PA кесмага AQ_1 кесма етмасдан қолиши мумкин. Бу ҳолда P нуқтага $a_0, a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$ сонни «ками» билан, $a_0, a_1 + \frac{1}{10} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$ сонни эса «ортиғи» билан мос қўйиш мумкин.

2_2) ҳолда P нуқтага мос келадиган ҳақиқий сонни топиш жараёни давом эттирилади. Бу жараённи n-марта такрорлаганда яна икки ҳол юз беради:

1_n) OP кесмада масштаб кесмаси OE бутун сон a_0 марта, масштаб кесманинг $\frac{1}{10}$ қисми a_1 марта, масштаб кесмасининг $\frac{1}{10^2}$ қисми a_2 марта ва ҳ.к., масштаб кесмасининг $\frac{1}{10^n}$ қисми эса a_n марта тўлиқ жойлашади. Бу ҳолда P нуқтага

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$$

сон мос қўйилади.

2_n) P нуқтага мос келадиган сонни топиш жараёни якунланмайди. Бу ҳолда P нуқтага

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \qquad (*)$$

сонни ками билан,

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n+1}{10^n} \qquad (**)$$

сонни «ортиғи» билан мос қўйиш мумкин.

Жараён чексиз давом этсин. Бу ҳолда P нуқтага мос келадиган ҳақиқий сонни топиш учун юқоридаги (*) ва (**) сонлардан ушбу ($\forall n \in N$ учун)

$$C = \left\{r\colon r \in Q,\ r < a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n+1}{10^n}\right\},$$

$$C' = \left\{r\colon r \in Q,\ r > a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right\}$$

тўпламларни тузамиз. Бу C ва C' тўпламлар Q да (C, C') кесим бажаради ва у бирор α ҳақиқий (иррационал) сонни аниқлайди. P нуқтага худди шу α сонни мос қўямиз. Юқоридагидек тўғри чизиқда P нуқта O нуқтадан чапда жойлашганда ҳам унга мос келадиган сон топилади. Бу сон манфий бўлади.

Шундай қилиб, тўғри чизиқда олинган ҳар бир нуқтага битта ҳақиқий сон мос қўйилиши кўрсатилди.

Демак, тўғри чизиқда олинган ҳар бир нуқтага битта ҳақиқий сон, аксинча, ҳар бир ҳақиқий сонга тўғри чизиқда битта нуқта мос келади, яъни $P_\alpha \to \alpha$, $\alpha \to P_\alpha$ $(\alpha \in R,\ P_\alpha \in l)$.

Энди турли ҳақиқий сонларга тўғри чизиқда турли нуқталар мос келишини, яъни

$$[\alpha \to P_\alpha,\ \beta \to P_\beta$$

бўлиб, $\alpha \neq \beta$ бўлганда P_α ва P_β нуқталар ҳам турлича бўлишини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $\alpha \in R$, $\beta \in R$ бўлиб, $\alpha \neq \beta$ бўлсин. Аниқлик учун $\alpha < \beta$ деб олайлик. Учта ҳол бўлиши мумкин:

а) α ва β — рационал сонлар,

б) α ва β — сонларнинг бири рационал, иккинчиси иррационал,

в) α ва β — иррационал сонлар.

а) ҳолни қарайлик, яъни $\alpha \in Q$, $\beta \in Q$ бўлсин. Унда $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ бўлиб, α сон A тўпламнинг энг катта, β сон эса B тўпламнинг энг катта элементи бўлади.

$\alpha < \beta$ бўлганидан $\alpha \in B$ бўлади.

P_β нуқта B тўпламнинг барча нуқталаридан ўнгда, демак, P_α нуқтадан ҳам ўнгда жойлашган. Бу эса P_α ва P_β нуқталарнинг турли эканлигини билдиради.

б) ҳол ҳам юқоридаги а) ҳол каби исботланади.

Энди в) ҳолни қарайлик: $\alpha \in R \setminus Q$, $\beta \in R \setminus Q$ бўлсин. Унда $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ бўлиб, $\alpha < \beta$ бўлгани учун $A \subset B$ бўлади. Демак, шундай рационал сон r топиладики, $r \in B$, $r \bar{\in} A$. Унда $r \in A'$ бўлади. Бу рационал сонга P_r рационал нуқта мос келади.

P_α нуқта A' тўпламнинг барча нуқталаридан чапда, жумладан, P_r нуқтадан ҳам чапда жойлашган.

P_β нуқта B тўпламнинг барча нуқталаридан ўнгда жойлашганлигидан бу нуқта P_r нуқтадан ҳам ўнгда бўлади. Демак, P_β нуқта P_α нуқтадан ўнгда жойлашган.

Шундай қилиб, ҳақиқий сонлар тўплами R билан тўғри чизиқ нуқталари тўплами l орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилди.

3. Тўғри чизиқда масофа тушунчаси. Масофа тушунчаси математикада муҳим тушунчалардандир. Уни киритишдан аввал ораліқнинг узунлигини киритайлик. Ҳар бир $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ кўринишдаги ораліқнинг узунлиги деб $b - a$ миқдорга айтилади. Энди масофа тушунчасини киритамиз. $x \in R$, $y \in R$ бўлсин.

26-таъриф. Ушбу $|x - y|$ миқдор x ва y нуқталар орасидаги *масофа* дейилади ва $\rho(x, y)$ каби белгиланади: $\rho(x, y) = |x - y|$.

Масофа қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $\rho(x, y) \geqslant 0$ бўлиб, $\rho(x, y) = 0$ тенглик фақат ва фақат $x = y$ бўлганда ўринли бўлади. Бу хосса масофа таърифидан бевосита келиб чиқади.

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (масофанинг симметриклиги).

Ҳақиқатан ҳам,

$$\rho(x, y) = |x - y| = |(-1)\ (y - x)| = |y - x| = \rho(y, x).$$

3°. Ихтиёрий $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$ нуқталар учун $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (учбурчак тенгсизлиги) тенгсизлик ўринли.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\rho(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leqslant |x - z| + |z - y| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

3-БОБ

СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИ УЧУН ЛИМИТЛАР НАЗАРИЯСИ

Математик анализ курсида ўрганиладиган дастлабки тушунча лимит тушунчасидир. Айни пайтда у кейинроқ киритиладиган асосий тушунчалар учун замин бўлиб хизмат қилади. Бу тушунча, қуйида кўрамизки, ўзининг киритилиши ва мазмуни бўйича ҳақиқий сонлар устидаги биз ҳозиргача кўрган амаллардан тубдан фарқ қилади. Ушбу бобда лимитлар назариясини содда ҳол — сонлар кетма-кетлиги учун қурамиз.

1-§. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар

Биз табиатни кузатиш ва ўрганиш жараёнида узунлик, юз, ҳажм, вақт, температура, масса каби миқдорларга дуч келамиз. Конкрет шароитда бу миқдорлар баъзан турли қийматларни қабул қилса, баъзан бир хил қийматга тенг бўлади. Масалан, агар аудиториядаги талабаларга айлана чизиш таклиф этилса, унда талаба турли катталикдаги радиус билан айлана чизганини кўрамиз. Бунда айлана радиуси турли қийматларни қабул қилгани учун *ўзгарувчи миқдор* бўлади.

Маълумки, ҳар қандай айлана узунлиги s нинг унинг диаметри $2r$ га нисбати $\frac{s}{2r}$ ўзгармас сон $\pi = 3,14\ldots$ га тенгдир.

Шундай қилиб, икки хил — ўзгарувчи ҳамда ўзгармас миқдорлар бўлади. Одатда ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар x, y, r, a, b, c ва ҳ. к. ҳарфлар орқали белгиланади. Ўзгарувчи миқдор турли қийматлар қабул қилиши мумкин. Масалан, айлана радиусининг ўзгарувчи миқдор сифатида қабул қиладиган қийматларидан иборат тўплам

$$A = \{r:\ r \in R,\ 0 \leqslant r < \infty\}$$

бўлади.

Агар ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматларидан тузилган тўплам маълум бўлса, ўзгарувчи *берилган* деб ҳисобланади. Ўзгармас миқдорни ҳам ўзгарувчи деб қараш мумкин. Бунда ўзгарувчининг қабул қиладиган қийматларидан ташкил топган тўплам биттагина элементдан иборат бўлади.

Математикада бир неча ўзгарувчи миқдорлар ҳамда бу ўзгарувчи миқдорлар орасидаги боғланишлар ўрганилади. Айлана радиуси r ҳам, айлана узунлиги s ҳам ўзгарувчи миқдор бўлиб, $s = 2\pi r$ муносабат бу ўзгарувчилар орасидаги боғланишни ифодалайди. Бу ерда r — эркли ($r \in A$) равишда ўзгарадиган ўзгарувчи бўлиб, s эса унга боғлиқ, эрксиз ўзгарувчидир. Айлана радиуси $A = \{r \in R:\ 0 \leqslant r < \infty\}$ тўпламдаги қийматларни қабул қилса, айлана узунлиги s нинг қийматлари r га боғлиқ бўлган ҳолда $R_+ = \{s \in R:\ 0 \leqslant s < \infty\}$ тўпламни ташкил этади.

Шундай қилиб икки хил: *эркли* ҳамда *эрксиз ўзгарувчилар* бўлар экан.

2-§. Сонлар кетма-кетлигининг лимити

1. **Сонлар кетма-кетлиги.** N ва R тўпламлар берилган бўлиб, f — ҳар бир натурал n ($n \in N$) сонга бирор ҳақиқий x_n ($x_n \in R$) сонни мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f: N \to R \text{ ёки } f: n \to x_n.$$

Бу ҳолда у $x_n = f(n)$ каби ҳам ёзилади.

f акслантиришни қуйидагича тасвирлаш ҳам мумкин:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \ \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_n \ \ldots \end{array}$$

1-таъриф. $f(n)$ ўзгарувчининг қийматларидан тузилган

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (3.1)$$

тўплам *сонлар кетма-кетлиги деб аталади.*

Бу кетма-кетликни ташкил этган x_n ($n = 1, 2, 3 \ldots$) сонлар унинг ҳадлари (элементлари) деб аталади. Одатда (3.1) сонлар кетма-кетлиги унинг умумий ҳади орқали $\{x_n\}$ каби белгиланади. Сонлар кетма-кетлигига мисоллар келтирайлик.

1) $x_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

2) $x_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$;

3) $x_n = n!$: $1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots$;

4) $x_n = \sin n^\circ$: $\sin 1^\circ, \sin 2^\circ, \sin 3^\circ, \ldots, \sin n^\circ, \ldots$;

5) $x_n = n^{(-1)^n}$: $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \ldots, n^{(-1)^n}, \ldots$;

6) $x_n = 1$: $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$;

7) $0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ \ldots\ \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n \text{ та}}\ \ldots$;

8) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$;

9) $3, 1, 4, \ldots$.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, баъзи кетма-кетликларнинг умумий ҳадлари формулалар орқали ифодаланиб, уларнинг барча ҳадларини шу формулалар ёрдамида топилса, баъзи кетма-кетликлар ҳадларини маълум қоидалар ёрдамида топиш мумкин бўлар экан. Масалан, 8-мисолда келтирилган кетма-кетликнинг ҳадлари ушбу

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_n = x_{n-2} + x_{n-1},\ n \geqslant 3 \qquad (3.2)$$

қоида билан топилади.

Кетма-кетликнинг дастлабки ҳадлари берилган ҳолда кейинги ҳадларини олдинги ҳадлари орқали топишни ифодалайдиган қоида *рекуррент қоида* деб аталади. (3.2) формулалар шундай қоидани ифодалайди. Бу (3.2) қоида билан топилган 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 21, . . . сонлар *Фибоначчи сонлари* дейилади.

9-мисолда келтирилган кетма-кетлик ҳадлари π сонининг, мос равишда, биринчи, иккинчи, . . . рақамларидир. Маълумки, π иррационал сон бўлиб, у чексиз, даврий бўлмаган ўнли касрдан иборат бўлади, бинобарин, рақамларнинг келишида бирор муайян қонуният мавжуд бўлмайди.

Шуни таъкидлаш лозимки, $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг $(n = 1, 2, 3, \ldots\}$ ҳадлари сони чексиз бўлган ҳолда бу кетма-кетликнинг барча ҳадларидан тузилган тўплам чексиз ёки чекли тўплам бўлиши мумкин. Масалан, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ кетма-кетлик ҳадларидан тузилган $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ тўплам чексиз, $1, -1, 1 -1, \ldots$ кетма-кетликнинг ҳадларидан тузилган $\{-1, 1\}$ тўплам эса чекли тўпламдир.

Энди сонлар кетма-кетлигининг чегараланганлиги тушунчалари билан танишамиз.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас M сон мавжуд бўлсаки, $\forall n \in N$ учун $x_n \leqslant M$ тенгсизлик ўринли бўлса, кетма-кетлик *юқоридан чегараланган* деб аталади.

Масалан,

$$\sin 1°, \sin 2°, \sin 3°, \ldots, \sin n°, \ldots,$$

$$0, -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$$

кетма-кетликлар юқоридан чегараланган, чунки биринчи кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади 1 дан, иккинчи кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади эса 0 дан катта эмас.

3-таъриф. Агар ихтиёрий мусбат M сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилсаки, $x_{n_0} > M$ бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *юқоридан чегараланмаган* деб аталади.

Масалан,

$$1, 2, 3, \ldots$$

кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган кетма-кетлик бўлади.

4-таъриф. Агар шундай ўзгармас m сон мавжуд бўлсаки, $\forall n \in N$ учун $x_n \geqslant m$ тенгсизлик ўринли бўлса, бу кетма-кетлик *қуйидан чегараланган* деб аталади.

Масалан,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots,$$

$$1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots$$

кетма-кетликлар қуйидан чегараланган, чунки $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади 0 дан, $\{n!\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади эса 1 дан кичик эмас.

5-таъриф. Агар ихтиёрий мусбат m сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилсаки, $x_{n_0} < -m$ бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *қуйидан чегараланмаган* деб аталади.

Масалан,

$$-1, -2, -3, \ldots$$

кетма-кетлик қуйидан чегараланмаган кетма-кетлик бўлади.

6-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, у *чегараланган* деб аталади.

Масалан,

$$\sin 1°, \sin 2°, \ldots, \sin n°, \ldots,$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

кетма-кетликлар чегараланган кетма-кетликлардир.

$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин:

7-таъриф. Агар шундай мусбат p сон мавжуд бўлсаки, $\forall n \in N$ учун $|x_n| \leqslant p$ тенгсизлик ўринли бўлса, кетма-кетлик *чегараланган* деб аталади.

Келтирилган 4, 5, 6, 7-таърифлар 2-бобдаги мос таърифларнинг кетма-кетликка нисбатан айтилишидир.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳадларидан тузилган тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *аниқ юқори чегараси* деб аталади ва у $\sup \{x_n\}$ каби белгиланади.

Шунингдек, $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳадларидан тузилган тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *аниқ қуйи чегараси* деб аталади ва у $\inf \{x_n\}$ каби белгиланади.

Масалан, ушбу

$$\left\{3 - \frac{1}{n}\right\}, \{2n+2\}$$

кетма-кетликларнинг аниқ юқори ва қуйи чегараларини ёзамиз:

$$\sup \left\{3 - \frac{1}{n}\right\} = 3, \quad \inf \left\{3 - \frac{1}{n}\right\} = 2,$$

$$\sup \{2n+2\} = +\infty, \quad \inf \{2n+2\} = 4.$$

2. Нуқтанинг атрофи тушунчаси. Бизга $a \in R$ сон ҳамда ихтиёрий мусбат ε сон берилган бўлсин.

8-таъриф. Қуйидаги

$$U_\varepsilon(a) = \{x: x \in R, \ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

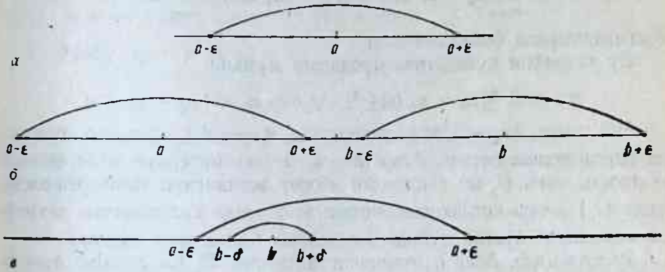
тўплам a нуқтанинг *атрофи* (*ε-атрофи*) деб аталади, ε сон эса атрофининг радиуси дейилади.

Таърифга кўра a нуқтанинг ε-атрофи a нуқтани ўз ичига олган $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ интервалдан иборат (18-*а* чизма). Демак, нуқтанинг атрофи маълум нуқталар тўпламидир. Нуқтанинг атрофи қуйидаги асосий хоссаларга эга:

1°. Агар a нуқтанинг $U_\sigma(a)$ ва $U_\delta(a)$ атрофлари берилган бўлса, бу атрофларнинг ҳар бирига қисм бўлган $U_\varepsilon(a)$ атроф ҳам мавжуд бўлади.

Исбот. $U_\sigma(a)$ ва $U_\delta(a)$ тўпламлар a нуқтанинг атрофлари бўлсин:

$$U_\sigma(a) = \{x\colon x \in R,\ a-\sigma < x < a+\sigma\},$$
$$U_\delta(a) = \{x\colon x \in R,\ a-\delta < x < a+\delta\}.$$



18- чизма.

Агар σ ва δ мусбат сонлардан кичик бўлган ε сонни олиб, a нуқтанинг ушбу

$$U_\varepsilon(a) = \{x\colon x \in R,\ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$$

атрофини қарасак, унда

$$U_\varepsilon(a) \subset U_\sigma(a),\ U_\varepsilon(a) \subset U_\delta(a)$$

муносабатлар бажарилишини кўрамиз.

2°. Агар $a \in R$, $b \in R$ ва $a \neq b$ бўлса, a ва b нуқталарнинг шундай $U_\varepsilon(a)$, $U_\varepsilon(b)$ атрофлари мавжудки, улар умумий нуқтага эга бўлмайди, яъни $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ (18-*б* чизма).

3°. Агар b нуқта a нуқтанинг $U_\varepsilon(a)$ атрофига тегишли бўлса (яъни $b \in U_\varepsilon(a)$), у ҳолда b нинг шундай δ-атрофи $U_\delta(b)$ мавжудки, $U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a)$ бўлади (18-*в* чизма).

2°- ва 3°-хоссалар 1°-хоссага ўхшаш исботланади.

Маълумки, ҳақиқий сонлар тўплами R таркибига $+\infty$ ва $-\infty$ символларни қўшиб, кенгайтирилган сонлар тўплами $\overline{R}$ ҳосил қилинган эди. $\overline{R}$ да $+\infty$ ва $-\infty$ «нуқта» ларнинг атрофи тушунча қуйидагича киритилади:

$$U(+\infty)=\{x\colon x\in R,\ c\in R,\ c<x<+\infty\},$$
$$U(-\infty)=\{x\colon x\in R,\ c_1\in R,\ -\infty<x<c_1\}.$$

3. Сонлар кетма-кетлигининг лимити. Бирор x_1, $x_3, \ldots, x_n, \ldots$ кетма-кетлик ҳамда бирор a сон берилган бўлсин

9-таъриф. Агар $\forall\varepsilon>0$ олинганида ҳам шундай натурал с $n_0\in N$ мавжуд бўлсаки, $n>n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бар натурал сонлар учун

$$|x_n-a|<\varepsilon \qquad (3.$$

тенгсизлик бажарилса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимити* де аталади. Лимит учун

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a, \text{ ёки } \lim x_n=a, \text{ ёки } x_n\to a$$

белгилашлардан фойдаланилади.

Бу таърифни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N\colon\ \forall n>n_0\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon.$$

Маълумки, $|x_n-a|<\varepsilon$ тенгсизлик $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ тенгсиз ликларга эквивалентдир. Агар $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ интервал a нуқтанин ε-атрофи, яъни $U_\varepsilon(a)$ тўпламдан иборат эканлигини эътиборга олсак унда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимитига юқорида келтирилган таърифга эквивалент бўлган қуйидагича таъриф бериш ҳам мумкин.

10-таъриф. Агар a нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$-атрофи олинганида ҳам $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a сон $\{x_n\}$ *кетма-кетликнинг лимити* деб аталади.

Шуни таъкидлаш лозимки, кетма-кетлик лимити таърифидаги ε ихтиёрий мусбат сон бўлиб, натурал сон n_0 эса шу ε га ва қаралаётган кетма-кетликка боғлиқ равишда топилади.

11-таъриф. Чекли лимитга эга бўлган кетма-кетлик *яқинлашувчи кетма-кетлик* деб аталади.

Бирор $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

12-таъриф. Агар ихтиёрий a сон ва ихтиёрий натурал n_0 сон олинганда ҳам шундай мусбат ε_0 сони ва шундай натурал $n>n_0$ сон топилсаки,

$$|x_n-a|\geqslant\varepsilon_0$$

бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *лимитга эга эмас* деб аталади. Бу таърифни қисқача қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\forall n_0\in N,\ \exists\varepsilon_0,\ \exists n\in N\colon\ n>n_0\Rightarrow|x_n-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

13-таъриф. Агар кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса, у *узоқлашувчи кетма-кетлик* дейилади.

Мисоллар. 1. $x_n = \frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ кетма-кетликнинг лимити 0 га тенг бўлишини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат ε сонни олайлик. Шу ε га кўра $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ни топамиз. У ҳолда барча $n > n_0$ сонлар учун

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon$$

муносабат ўринли. Демак, таърифга кўра $\lim \frac{1}{n} = 0$. Бу мисолда $\varepsilon = 0{,}01$ деб олайлик. Унда $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = 101$ экани кўринади. Агар $\varepsilon = 0{,}001$ бўлса, $n_0 = 1001$, шунингдек, $\varepsilon = 0{,}015$ бўлса, $n_0 = 67$ эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

2. Ушбу $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 1)$:

$$a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \ldots, \sqrt[n]{a}, \ldots$$

кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг бўлишини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат ε сонни оламиз. Олинган ε сонга кўра натурал n_0 сонни

$$n_0 = \left[\frac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\right] + 1$$

бўлсин деб қарайлик. Бу ҳолда $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал n сонлар учун

$$|x_n - 1| = |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < a^{\frac{1}{n_0}} - 1 < a^{\frac{\lg(1+\varepsilon)}{\lg a}} - 1 = \varepsilon$$

муносабатлар ўринли бўлади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг бўлишини кўрсатади.

3. Ушбу $x_n = (-1)^n: -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслигини кўрсатинг. Тескарисини фараз қилайлик, яъни берилган кетма-кетлик лимитга эга ва унинг лимити a га тенг бўлсин. Унда таърифга кўра ихтиёрий мусбат ε сон учун шундай натурал сон n_0 мавжудки, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун $|(-1)^n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бунда n жуфт бўлганда $|1 - a| < \varepsilon$, n тоқ бўлганда эса $|(-1) - a| < \varepsilon$ ёки $|1 + a| < \varepsilon$ тенгсизликка эга бўламиз. Шу тенгсизликларга кўра

$$2 = |(1 - a) + (1 + a)| \leqslant |1 - a| + |1 + a| < 2\varepsilon,$$

яъни $2 < 2\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Аммо бу тенгсизлик $\varepsilon > 1$ бўлгандагина ўринли. Бу натижа $\varepsilon > 0$ сонннинг ихтиёрийлигига зид. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

4. Ушбу

$$x_n=\frac{n}{n+1}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

кетма-кетлик учун $a=0$ сон лимит эмаслигини кўрсатинг.

Ихтиёрий натурал n_0 сонни олайлик. Унда $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ ва натур $n>n_0$ сон учун

$$|x_n-a|=\left|\frac{n}{n+1}-0\right|=\frac{n}{n+1}>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

бўлади. Демак, $a=0$ сон берилган кетма-кетликнинг лимити эма Худди шундай усул билан $a=2$, $a=3$, $a=-1$, $a=-2$ ларнин берилган кетма-кетликнинг лимити эмаслиги кўрсатилади.

5. Ушбу 0,3; 0,33; 0,333; . . ., $\underbrace{0,33\dots3}_{n\text{ та}}$, . . . кетма-кетликнин лимити $\frac{1}{3}$ га тенг бўлишини кўрсатинг.

$\forall\varepsilon>0$ сон олиб $\left|\underbrace{0,33\dots3}_{n\text{ та}}-\frac{1}{3}\right|$ ни қараймиз. Равшанки,

$$\underbrace{0,33\dots3}_{n\text{ та}}-\frac{1}{3}=\frac{\overbrace{33\dots3}^{n\text{ та}}}{1\underbrace{00\dots0}_{n\text{ та}}}-\frac{1}{3}=\frac{\overbrace{99\dots9}^{n\text{ та}}-10^n}{3\cdot10^n}=$$

$$=\frac{-1}{3\cdot10^n};\ \left|\underbrace{0,33\dots3}_{n\text{ та}}-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3\cdot10^n}.$$

Энди $\varepsilon>0$ га кўра шундай $n_0\in N$ сон топиш керакки, натижада $n>n_0$ лар учун $\frac{1}{3\cdot10^n}<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Кейинги тенгсизлик $n>-\lg3\varepsilon$ бўлганда ўринли бўлиши равшан. Демак, би n_0 сифатида $[-\lg3\varepsilon]$ сонни олишимиз етарли. Бу эса қаралаётган кетма-кетлик лимитининг $\frac{1}{3}$ га тенг бўлишини кўрсатади.

4. Чексиз кичик миқдорлар.

14-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити нолга тенг бўлса, x_n ўзгарувчи *чексиз кичик миқдор* деб аталади, тегишли $\{x_n\}$ эса *чексиз кичик кетма-кетлик* дейилади.

Кетма-кетлик лимити таърифида $a=0$ деб олинадиган бўлса, унда барча натурал $n>n_0$ сонлар учун (3.3) тенгсизлик $|x_n-a|=|x_n|<\varepsilon$ тенгсизликка келади. Демак, чексиз кичик миқдор ўзгарувчи миқдор бўлиб, у ўзгариш жараёнида абсолют қиймати бўйича аввалдан берилган ҳар қандай кичик мусбат ε сондан кичик бўлади.

Мисоллар. 1. $x_n=\frac{1}{n}$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдордир, чунки $\lim x_n=\lim\frac{1}{n}=0$.

2. Ушбу $x_n = q^n$ ($|q| < 1$) ўзгарувчи хам чексиз кичик миқдор.

Буни кўрсатиш учун $\lim q^n = 0$ ($q \neq 0$, $|q| < 1$) лимитнинг ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Аввал, $|q| < 1$ тенгсизликдан $\frac{1}{|q|} > 1$ тенгсизлик келиб чиқади. Уни $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$ ($\alpha > 0$) деб ва демак, $\frac{1}{|q|^n} = (1 + \alpha)^n$, $n \in N$ деб қараш мумкин. Қуйидаги

$$(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha, \quad \forall n \in N$$

Бернулли тенгсизлигидан* фойдаланиб, $\alpha > 0$ бўлган ҳолда топамиз:

$$|q|^n \leqslant \frac{1}{1 + n\alpha}.$$

Энди ихтиёрий мусбат ε сонни олиб, унга боғлиқ n_0 натурал сон

$$n_0 = \left[\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}\right] + 1$$

бўлсин деб қарайлик. У ҳолда $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал n сонлар учун

$$||q|^n - 0| = |q|^n \leqslant \frac{1}{1 + n\alpha} < \frac{1}{1 + n_0\alpha} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\left[\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}\right] + 1\right)\alpha} < \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}\,\alpha} = \varepsilon,$$

яъни $|q|^n < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли. Демак, $\lim q^n = 0$ ($q \neq 0$, $|q| < 1$) лимит ўринли. Бу эса $x_n = q^n$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдор эканини англатади.

Агар $x_n = q^n$ ўзгарувчи учун $q = 0$ бўлса, $\forall n \in N$ да $x_n = 0$ бўлади. Бу эса, яна $x_n = 0$ ўзгарувчининг чексиз кичик миқдор эканини кўрсатади.

---

* Ихтиёрий $n \in N$ ҳамда $\alpha > -1$ ($\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$) сонлар учун ушбу

$$(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \tag{*}$$

тенгсизлик ўринли. Буни математик индукция усули билан осон исботлаш мумкин. Ҳақиқатан, $n = 2$ да $(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 > 1 + 2\alpha$ бўлиб, (*) бажарилади. У ҳолда (*) n ($n > 2$) учун тўғри, яъни $(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ деб, $n + 1$ учун тўғрилигини кўрсатамиз:

$$(1 + \alpha)^{n+1} = (1 + \alpha)^n (1 + \alpha) \geqslant (1 + n\alpha)(1 + \alpha) = 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 \geqslant$$

$$\geqslant 1 + (n + 1)\alpha.$$

Одатда (*) *Бернулли тенгсизлиги* дейилади.

5. **Чексиз кичик миқдорлар билан кетма-кетлик лимити орасидаги боғланиш.** Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимити a бўлсин: $\lim x_n = a$. Лимит таърифига кўра, $\forall\, \varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 \in N$ топиш мумкинки, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча натурал сонлар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Агар $x_n - a = \alpha_n$ деб олинса, $|\alpha_n| < \varepsilon$ бўлиб, бу α_n ўзгарувчининг чексиз кичик миқдор эканлигини билдиради. Шундай қилиб, $\lim x_n = a$ бўлса, $\alpha_n = x_n - a$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдор бўлади.

Энди $\{x_n\}$ кетма-кетлик, a сон берилган бўлиб, $\alpha_n = x_n - a$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдор бўлсин. Унда $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$ бўлиб, $\lim x_n = a$ бўлади. Натижада қуйидаги содда теоремага келамиз.

1-теорема. *$\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли a лимитга эга бўлиши учун $\alpha_n = x_n - a$ ўзгарувчи чексиз кичик миқдор бўлиши зарур ва етарли.*

Юқоридаги (4-мисол) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ кетма-кетликни

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

кўринишда ёзиб олсак ва $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$ нинг чексиз кичик миқдор эканлигини эътиборга олсак, 1-теоремадан

$$\lim x_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1$$

эканлигини топамиз.

Умуман, кетма-кетлик берилган бўлса, бирор a сони унинг лимитими ёки йўқми деган саволга таърифга асосланиб жавоб бериш мумкин. Аммо бу йўл билан кетма-кетликнинг лимитини топиш мушкул ишдир, чунки текширилиши керак бўлган a сонлар чексиз кўп бўлади. Берилган кетма-кетликнинг яқинлашувчилигини аниқлаш ва унинг лимитини топиш ишларини осонлаштириш учун, одатда, бундай кетма-кетликларнинг турли-туман хоссалари, баъзи хусусий синфлари ўрганилади.

3-§. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссалари

Яқинлашувчи кетма-кетликлар қатор хоссаларга эга.

1°. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва $\lim x_n = a$ бўлиб, $a > p$ $(a < q)$ бўлса, у ҳолда кетма-кетликнинг бирор ҳадидан кейинги барча ҳадлари ҳам p сондан катта (q сондан кичик) бўлади.*

Исбот. $x_n \to a$ бўлиб, $a > p$ бўлсин, $\varepsilon > 0$ сонни, унинг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, $\varepsilon < a - p$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб олайлик.

Кетма-кетликнинг чекли a лимитга эга эканлигидан $\forall\varepsilon > 0$ сон учун, жумладан $0 < \varepsilon < a - p$ учун, шундай $n_0 \in N$ сон топиш мумкинки, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ бўлади. Натижада $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун $-\varepsilon < x_n - a$ ва $\varepsilon < a - p$ тенгсизликлардан $x_n > p$ бўлиши келиб чиқади. ($a < q$ ҳол учун ҳам хосса худди юқоридагидек исбот этилади.)

Бу хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1-натижа. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва $\lim x_n = a$ бўлиб, $a > 0$ ($a < 0$) бўлса, у ҳолда кетма-кетликнинг бирор ҳадидан кейинги барча ҳадлари мусбат (манфий) бўлади.

2°. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегараланган бўлади.*

Исбот. $\lim x_n = a$ бўлсин. Таърифга кўра $\forall\varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ бўлади, яъни $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $(n_0 + 1)$-ҳадидан кейинги барча ҳадлари учун $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тенгсизликлар бажарилади. Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ошиб борса $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ ҳадлари $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тенгсизликларни қаноатлантирмаслиги мумкин. Агар

$$|a - \varepsilon|, \ |a + \varepsilon|, \ |x_1|, \ |x_2|, \ \ldots, \ |x_{n_0}|$$

сонларнинг энг каттасини M деб олсак, у ҳолда берилган кетма-кетликнинг барча ҳадлари

$$|x_n| \leqslant M, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Бу эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини билдиради.

1-эслатма. Сонлар кетма-кетлигининг чегараланганлигидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, $x_n = (-1)^n$; $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ кетма-кетлик чегараланган. Айни вақтда унинг лимити мавжуд эмаслиги юқорида кўрсатилган эди.

3°. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унинг лимити ягонадир.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити камида иккита бўлсин. Уларни a ва b дейлик, яъни

$$\lim x_n = a, \quad \lim x_n = b, \quad a \neq b.$$

Модомики, $a \neq b$ экан, унда a ва b нуқталарнинг мос равишда шундай

$$U_\varepsilon(a) = \{x\colon \ x \in R, \quad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\},$$
$$U_\varepsilon(b) = \{x\colon \ x \in R, \quad b - \varepsilon < x < b + \varepsilon\}$$

атрофлари мавжудки, улар умумий нуқтага эга бўлмайди: $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$.

Энди $\lim x_n = a$ эканлигидан, $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам (жумладан юқоридаги ε учун) шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ ёки $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Худди шунингдек, $\lim x_n = b$ бўлганлигидан, $\forall \varepsilon > 0$ берилганида ҳам (жумладан, юқоридаги ε учун) шундай $n_0' \in N$ сон топиладики, $n > n_0'$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун $|x_n - b| < \varepsilon$ ёки $b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Энди n_0 ва n_0' натурал сонлардан каттасини $\overline{n}_0$ деб олсак: $\overline{n}_0 = \sup\{n_0, n_0'\}$, $n > \overline{n}_0$ бўлганда бир вақтда

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ ва } |x_n - b| < \varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади. Натижада $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг x_n, $n > \overline{n}_0$, ҳадлари бир вақтда $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ ва $(b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$ интервалларга тегишли бўлади. Бундай ҳол $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ муносабатга зиддир. Хосса исбот бўлди.

4-§. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида арифметик амаллар

1. Сонлар кетма-кетликлари устида амаллар. $\{x_n\}$: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ҳамда $\{y_n\}$: $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. Қуйидаги

$$x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n,\ \ldots;$$

$$x_1 - y_1,\ x_2 - y_2,\ \ldots,\ x_n - y_n,\ \ldots;$$

$$x_1 \cdot y_1,\ x_2 \cdot y_2,\ \ldots,\ x_n \cdot y_n,\ \ldots;$$

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \ldots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \ldots\ (y_k \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots)$$

кетма-кетликлар мос равишда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг *йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси* ва *нисбати* деб аталади ва улар $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ каби белгиланади:

$$\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\},$$

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\},$$

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

Масалан, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{n-1}{n}$ бўлса,

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} + \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \{1\},\quad \left\{\frac{1}{n}\right\} - \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{\frac{2}{n} - 1\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \cdot \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{\frac{n-1}{n^2}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{n}\right\} : \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{n-1}\right\} \quad (n \neq 1)$$

бўлади. Агар икки кетма-кетлик кўпайтмаси таърифида $y_n = C = \text{const}$ бўлса, $C \cdot \{x_n\} = \{C x_n\}$ экани келиб чиқади.

Сонлар кетма-кетликлари устида бажарилган арифметик амалларга нисбатан ушбу хоссалар ўринли бўлади:

1°. Коммутативлик:

$$\{x_n + y_n\} = \{y_n + x_n\}, \quad \{x_n \cdot y_n\} = \{y_n \cdot x_n\};$$

2°. Ассоциативлик:

$$\{x_n + y_n\} + \{z_n\} = \{x_n\} + \{y_n + z_n\}, \quad \{x_n \cdot y_n\} \cdot \{z_n\} = \{x_n\} \cdot \{y_n \cdot z_n\}.$$

3°. Дистрибутивлик:

$$\{x_n + y_n\} \cdot \{z_n\} = \{x_n \cdot z_n\} + \{y_n \cdot z_n\}.$$

2. Чексиз кичик миқдорлар ҳақида леммалар. Чексиз кичик миқдорлар ҳақидаги қуйидаги икки леммадан биз келгуси баёнимизда фойдаланиб борамиз.

1-лемма. Чекли сондаги чексиз кичик миқдорлар йиғиндиси чексиз кичик миқдор бўлади.

Исбот. α_n ва β_n чексиз кичик миқдорлар бўлсин: $\lim \alpha_n = 0$, $\lim \beta_n = 0$. Лимит таърифига биноан $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Шунингдек, $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n_0' \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0'$ лар учун $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Энди n_0 ва n_0' натурал сонлардан каттасини $\overline{n_0}$ деб олсак: $\overline{n_0} = \sup\{n_0, n_0'\}$, унда барча $n > \overline{n_0}$ лар учун бир вақтда $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Шунинг учун $n > \overline{n_0}$ бўлганда $|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ бўлиб, ундан $\lim(\alpha_n + \beta_n) = 0$ келиб чиқади. Энди α_n, β_n ва γ_n лар чексиз кичик миқдорлар бўлсин. Юқорида исбот этилганига кўра $\alpha_n + \beta_n$ чексиз кичик миқдор бўлади. Худди шунингдек, $(\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n$ ҳам чексиз кичик миқдорлар йиғиндиси сифатида яна чексиз кичик миқдор бўлади. Демак, $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ — чексиз кичик миқдор. Мана шу усул билан чекли сондаги чексиз кичик миқдорлар йиғиндиси чексиз кичик миқдор бўлиши кўрсатилади. 1-лемма исбот бўлди.

2-лемма. Чегараланган кетма-кетлик билан чексиз кичик миқдор кўпайтмаси чексиз кичик миқдор бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ — чегараланган кетма-кетлик бўлсин. Шунга кўра шундай ўзгармас сон $M > 0$ мавжудки, $\forall n \in N$ лар учун $|x_n| \leqslant M$

бўлади. Энди α_n — чексиз кичик миқдор бўлсин. Таърифга асосан $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{M}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ бўлади. Натижада барча $n > n_0$ лар учун

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ ўзгарувчининг чексиз кичик миқдор эканлигини кўрсатади. 2- лемма исбот бўлди.

2- натижа. Икки чексиз кичик миқдор кўпайтмаси яна чексиз кичик миқдор бўлади.

3. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида арифметик амаллар.

2-теорема. *Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, $\{x_n \pm y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва*

$$\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ бўлсин. 1-теоремага мувофиқ $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ бўлади, бунда α_n, β_n лар чексиз кичик миқдорлар. У ҳолда $x_n \pm y_n$ учун қуйидаги

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n) = a \pm b + \gamma_n$$

тенгликка келамиз, бунда $\gamma_n = \alpha_n \pm \beta_n$ — чексиз кичик миқдор. Бундан эса, яна ўша 1- теоремага мувофиқ

$$\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim x_n \pm \lim y_n$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема икки яқинлашувчи кетма-кетлик йиғиндисининг лимити бу кетма-кетликлар лимитларининг йиғиндисига тенг деган қоидани ифодалайди.

Исбот этилган теорема қўшилувчиларнинг сони иккитадан ортиқ (чекли) бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

3-теорема. *Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва*

$$\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ бўлсин. У ҳолда $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, α_n ва β_n лар чексиз кичик миқдорлар. Унда

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = a \cdot b + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Чексиз кичик миқдорлар ҳақидаги 1- ва 2- леммаларга асосан $\delta_n =$

$= a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ кетма-кетлик чексиз кичик миқдор бўлади. Демак,

$$x_n y_n = a\cdot b + \delta_n$$

бўлиб, бундан

$$\lim(x_n\cdot y_n) = a\cdot b = \lim x_n \cdot \lim y_n$$

экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема иккита яқинлашувчи кетма-кетлик кўпайтмасининг лимити бу кетма-кетликлар лимитларининг кўпайтмасига тенг бўлишини ифодалайди.

Хусусан, агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унда $\lim x_n^2 = (\lim x_n)^2$ бўлади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унда $C = \text{const}$ учун $\{Cx_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва $\lim(Cx_n) = C\lim x_n$ формула ўринли бўлади.

4-теорема. *Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\forall n \in N$ учун $y_n \neq 0$ ва $\lim y_n \neq 0$ бўлса, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ҳамда*

$$\lim\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, $b \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, бунда α_n, β_n — чексиз кичик миқдорлар. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+\beta_n)}\cdot(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Чексиз кичик миқдорлар ҳақидаги 1- ва 2- леммаларга асосан $b\alpha_n - a\beta_n$ чексиз кичик миқдор бўлиб, $\frac{1}{b(b+\beta_n)}$ эса чегараланган (чунки b — чекли, $\beta_n \to 0$) миқдор бўлгани учун $\gamma_n = \frac{1}{b(b+\beta_n)}(b\cdot\alpha_n - a\cdot\beta_n)$ чексиз кичик миқдор бўлади. Демак,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \gamma_n.$$

Бундан

$$\lim\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

муносабатлар ўринли экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, яқинлашувчи кетма-кетликлар нисбатининг лимити уларнинг лимитлари нисбатига тенг (бунда махраж нолдан фарқли бўлиши лозим).

2-эслатма. Икки $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг йиғиндиси айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатидан иборат бўлган кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлишидан бу $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи, чунки $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = 0$, аммо $\{\sqrt{n+1}\}$ ва $\{\sqrt{n-1}\}$ кетма-кетликларнинг яқинлашувчи эмаслиги равшан.

Равшанки, $\left\{\frac{1}{n}\cdot n\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи (унинг лимити 1 га тенг). Лекин $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи, $\{n\}$ кетма-кетлик эса яқинлашувчи эмас.

4. Яқинлашувчи кетма-кетликлар фазоси. Барча яқинлашувчи кетма-кетликлардан тузилган тўпламни қарайлик. Бу тўпламни c билан белгилайди.

Юқоридаги мулоҳазалардан $\{x_n\}\in c$, $\{y_n\}\in c$ бўлганда $\{x_n \pm y_n\}\in c$, $\{x_n\cdot y_n\}\in c$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}\in c$ ($\forall n\in N$ учун $y_n\neq 0$ ва $\lim y_n \neq 0$ бўлганда) муносабатларнинг ўринли бўлиши келиб чиқади. Демак, c тўпламда ҳам ҳақиқий сонлар тўплами R даги каби қўшиш, айириш, кўпайтириш ҳамда бўлиш амалларини бажариш мумкин.

Маълумки (2-бобнинг 10-§ ига қаранг), R тўпламда унинг исталган икки x ва y элементи орасидаги масофа $\rho(x, y) = |x-y|$ каби аниқланиб, унинг бир қанча хоссалари келтирилган эди. c тўпламда ҳам унинг исталган икки элементи орасида «масофа» тушунчасини киритиш мумкин.

Фараз қилайлик, $\{x_n\}\in c$, $\{y_n\}\in c$ бўлсин. Бу элементлар орасидаги «масофа» деб қуйидаги

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n| = \sup\{|x_1 - y_1|,$$

$$|x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|, \ldots\}$$

миқдорга айтамиз.

Энди киритилган «масофа» хоссаларини ўрганайлик.

Аввало $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) \geqslant 0$ бўлиши равшандир. Агар $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n| = 0$ бўлса, ундан $\forall n\in N$ учун $x_n = y_n$ келиб чиқади. Аксинча, агар $\forall n\in N$ учун $x_n = y_n$ бўлса, ундан $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n| = 0$ экани келиб чиқади. Демак,

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0 \Leftrightarrow \forall n\in N \text{ учун } x_n = y_n.$$

Иккинчидан, $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \rho(\{y_n\}, \{x_n\})$, чунки

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n| = \sup_n |y_n - x_n| = \rho(\{y_n\}, \{x_n\}).$$

Энди $\{x_n\} \in c$, $\{y_n\} \in c$ ва $\{z_n\} \in c$ бўлсин. Абсолют қиймат хоссасига кўра ушбу

$$|x_n - z_n| \leqslant |x_n - y_n| + |y_n - z_n|$$

тенгсизлик ўринли бўлиши равшан. Бундан эса

$$|x_n - z_n| \leqslant \sup_n |x_n - y_n| + \sup_n |y_n - z_n|$$

эканлиги келиб чиқади. Аниқ юқори чегара хоссасига кўра

$$\sup_n |x_n - z_n| \leqslant \sup_n |x_n - y_n| + \sup_n |y_n - z_n|.$$

Демак,

$$\rho(\{x_n\}, \{z_n\}) \leqslant \rho(\{x_n\}, \{y_n\}) + \rho(\{y_n\}, \{x_n\}).$$

Одатда бу c тўплам c фазо ёки яқинлашувчи кетма-кетликлар фазоси деб аталади.

5. *Тенглик ҳамда тенгсизликларда лимитга ўтиш.* Кетма-кетликлар лимитининг мавжудлигини кўрсатиш ва лимитларни топиш каби масалаларни ҳал қилишда тенглик ҳамда тенгсизликларда лимитга ўтиш қоидалари тез-тез қўлланиб туради. Биз уларни келтирамиз.

1°. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ бўлсин. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n = y_n$ бўлса, у ҳолда $a = b$ бўлади.

Бу қоида яқинлашувчи кетма-кетлик лимитининг ягоналигидан келиб чиқади.

2°. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ бўлсин. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n \leqslant y_n$ $(x_n \geqslant y_n)$ бўлса, у ҳолда $a \leqslant b$ $(a \geqslant b)$ бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни келтирилган шартлар бажарилса ҳам $a > b$ бўлсин. Маълумки, $a > c > b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ҳақиқий c сон мавжуд. Демак, $\lim x_n = a$ ва $a > c$. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг 1°-хоссасига (шу бобнинг 3-§ ига қаранг) кўра шундай $n_0 \in N$ мавжудки, барча $n > n_0$ лар учун $x_n > c$ бўлади. Шунингдек, $\lim y_n = b$, $b < c$. Яна ўша хоссага мувофиқ шундай $n_0' \in N$ мавжудки, барча $n > n_0'$ лар учун $y_n < c$ бўлади. Агар $\bar{n}_0 = \sup\{n_0, n_0'\}$ дейилса, унда барча $n > \bar{n}_0$ лар учун бир вақтда $x_n > c$ ҳамда $c > y_n$ тенгсизликлар ўринли бўлиб, ундан $x_n > y_n$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $x_n \leqslant y_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ тенгсизликка зиддир. Демак, $a \leqslant b$ бўлади.

Худди шунга ўхшаш, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ ҳамда $\forall n \in N$ учун $x_n \geqslant y_n$ бўлишидан $a \geqslant b$ тенгсизлик келиб чиқиши кўрсатилади.

3-эслатма. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ бўлсин.

Барча $n = 1, 2, 3, \ldots$ лар учун $x_n < y_n$ тенгсизликнинг бажарилишидан $a < b$ тенгсизлик ҳамма вақт келиб чиқавермайди.

Масалан, $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи. Бу кетма-кетликларда $\forall n \in N$ учун $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ бўлса ҳам $\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim\frac{1}{n} = 0$ бўлади.

3-натижа. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, $\forall n \in N$ учун $x_n \geqslant c$ $(x_n \leqslant c)$ бўлса, у ҳолда $\lim x_n \geqslant c$ $(\lim x_n \leqslant c)$ бўлади (бунда c — ўзгармас сон).

Бу натижанинг исботи юқоридаги 2°-хоссада $y_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$ деб олинишидан келиб чиқади

3°. $\{x_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim x_n = \lim z_n = a$ бўлсин. Агар $\forall n \in N$ учун $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ бўлса, у ҳолда $\{y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва $\lim y_n = a$ бўлади.

Исбот. Кетма-кетликнинг лимити таърифига асосан $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ ёки $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Шунингдек, ўша $\varepsilon > 0$ олинганида ҳам шундай $n_0' \in N$ топиладики, барча $n > n_0'$ лар учун $|z_n - a| < \varepsilon$ ёки $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Энди $\overline{n}_0 = \sup\{n_0, n_0'\}$ дейлик. Унда $n > \overline{n}_0$ бўлганда бир вақтда $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Аммо шартга кўра $\forall n \in N$ учун $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ тенгсизликлар ўринли. Шунинг учун $n > \overline{n}_0$ бўлганда $a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon$, яъни $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчилигини ва $\lim y_n = a$ эканлигини кўрсатади.

Мисол. Ушбу $\{x_n\} = \{\sqrt[n]{n}\} : 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Равшанки, барча $n \geqslant 2$ да

$$\sqrt[2n]{n} > 1$$

бўлади.

Энди $\alpha_n = \sqrt[2n]{n} - 1$ деб олиб, сўнг Бернулли тенгсизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\sqrt{n} = (1 + \alpha_n)^n > 1 + n \cdot \alpha_n > n \cdot \alpha_n,$$

бундан $\alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ва $n \geqslant 2$ бўлганда $1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ тенгсизликлар келиб чиқади. Агар

$$\lim\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=1$$

эканини ҳисобга олсак, у ҳолда кейинги тенгсизликларда лимитга ўтиб (3°-қоидага асосланган ҳолда), изланган лимитни топамиз:

$$\lim\sqrt[n]{n}=1.$$

Изоҳ. Юқорида биз тенглик ҳамда тенгсизликларда лимитга ўтиш қоидаларини кўрдик. Бу қоидалар $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳадлари орасидаги муносабатлар бирор тайин m-ҳаддан бошлаб ўринли бўлганда ҳам тўғри бўлади.

5-§. Чексиз катта миқдорлар. Чексиз кичик ҳамда чексиз катта миқдорлар орасида боғланиш

Математик анализ курсида чексиз кичик миқдорлар билан бир қаторда чексиз катта миқдорлар ҳам қаралади.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

15-таъриф. Агар ҳар қандай мусбат M сон берилганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топилсаки, барча $n>n_0$ лар учун

$$|x_n|>M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, x_n ўзгарувчи *чексиз катта миқдор* деб аталади, тегишли $\{x_n\}$ эса *чексиз катта кетма-кетлик* дейилади.

Демак, чексиз катта миқдор ўзгарувчи миқдор бўлиб, у ўзгариш жараёнида абсолют қиймати бўйича аввалдан берилган ҳар қандай мусбат сондан катта бўлади.

Равшанки, чексиз катта миқдорлар чекли лимитга эга эмас.

Қулайлик нуқтаи назаридан чексиз катта миқдорларнинг лимити чексиз ёки чексиз катта миқдорлар чексизга интилади деб олинади ва

$$\lim x_n=\infty \quad \text{ёки} \quad x_n\to\infty$$

каби ёзилади.

Агар $\forall M>0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топилсаки барча $n>n_0$ лар учун $x_n>M$ $(x_n<-M)$ бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ $(-\infty)$ деб олинади ва $\lim x_n=+\infty$ $(\lim x_n=-\infty)$ каби ёзилади.

Агар кетма-кетликнинг лимити чексиз бўлса, уни узоқлашувчи кетма-кетлик деб қараймиз.

Мисоллар. 1. Ушбу $\{(-1)^n\cdot n\}$: $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \ldots,$ $(-1)^n\cdot n,\ \ldots$ кетма-кетлик чексиз катта бўлади. Ҳақиқатан, $|(-1)^n\times$ $\times n|=n$ бўлиб, ҳар қандай мусбат M сон олинганда ҳам $n\in N$ сонни шундай танлаб олиш мумкинки, $|(-1)^n\cdot n|=n>M$ бўлади.

2. Ушбу $\{-n\}$, $\{n\}$ кетма-кетликларнинг чексиз катта бўлиши равшан. Уларнинг лимити мос равишда $-\infty$ ва $+\infty$ бўлади.

4-эслатма. Ҳар қандай чексиз катта кетма-кетлик чегараланмаган кетма-кетликдир. Аммо ҳар қандай чегараланмаган кетма-кетлик чексиз катта бўлиши шарт эмас. Масалан,

$$1,\ 1^2,\ 1,\ 2^2,\ 1,\ 3^2,\ \ldots\ 1,\ n^2,\ 1,\ \ldots$$

кетма-кетлик чегараланмаган бўлиб, у чексиз катта эмас.

Энди чексиз катта ҳамда чексиз кичик миқдорлар орасидаги боғланишни ифодалайдиган содда теоремаларни келтирамиз.

5-теорема. *Агар* $\forall n \in N$ *учун* $x_n \neq 0$ *бўлиб,* $\{x_n\}$ *кетма-кетлик чексиз катта бўлса,* $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ *кетма-кетлик чексиз кичик бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонни олайлик. $\{x_n\}$ кетма-кетлик чексиз катта бўлгани учун $M = \frac{1}{\varepsilon}$ деб олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон мавжудки, барча $n > n_0$ лар учун $|x_n| > M$ бўлади. Демак, барча $n > n_0$ лар учун $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ бўлиб, ундан $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичик эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема ҳам исботланади.

6-теорема. *Агар* $\forall n \in N$ *учун* $x_n \neq 0$ *бўлиб,* $\{x_n\}$ *кетма-кетлик чексиз кичик бўлса,* $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ *кетма-кетлик чексиз катта бўлади.*

6-§. Аниқмас ифодалар

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. Бу кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлган ҳолда $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, $(y_n \neq 0,$ $n = 1, 2, \ldots, \lim y_n \neq 0)$ кетма-кетликларнинг яқинлашувчи бўлишини шу бобнинг 4-§ ида батафсил қараб ўтдик. Бунда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг лимитларига нисбатан қуйидаги икки шарт бажарилган деб қаралган эди:

1) $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг лимитлари чекли;

2) $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ $(y_n \neq 0,\ n = 1,\ 2,\ \ldots)$ кетма-кетликнинг лимитига оид мулоҳазада $\lim y_n \neq 0$.

Энди бу шартлар бажарилмаган ҳолда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\{x_n \pm y_n\}$ кетма-кетликларнинг характерини ўрганамиз.

1°. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик. $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = 0$ бўлсин. $\lim y_n = 0$ бўлгани учун $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ нинг лимитига, яъни $\lim \frac{x_n}{y_n}$ лимитга 4-теоремани татбиқ қилиб бўлмайди.

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлардан тузилган $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликнинг характери $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлардан ҳар бирининг нолга қандай интилишига қараб турлича бўлиши мумкин. Буни қуйидаги мисолларда кўрайлик.

1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ва $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ кетма-кетликларнинг лимитлари нолга тенг экани равшан. Энди $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликни тузайлик: $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \{n\}$. Демак, $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

2) $\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ ва $\{y_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг лимити нолга тенг. Бу кетма-кетликлардан тузилган $\left\{\frac{(-1)^n}{2}\right\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

3) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ва $\{y_n\} = \left\{\frac{5}{n^2}\right\}$ кетма-кетликлардан ҳар бирининг лимити нолга тенг бўлиб, бу кетма-кетликлардан тузилган $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{5}\right\}$ кетма-кетлик учун $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{5}$ бўлади.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ бўлишинигина билган ҳолда, бу кетма-кетликлардан тузилган $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликнинг лимити тўғрисида тайин хулосага келиб бўлмайди. Шунинг учун $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ бўлганда, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетлик $\frac{0}{0}$ кўринишдаги *аниқмас ифода* ёки *аниқмаслик* дейилади.

$x_n \to 0$ ва $y_n \to 0$ да $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликнинг характерини аниқлаш *аниқмасликни очиш* дейилади. Биз юқорида кўрган мисолларда аслида тегишли аниқмасликларни очиб бердик.

2°. $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлардан ҳар бирининг лимитлари чексиз бўлсин: $\lim x_n = \infty$, $\lim y_n = \infty$. Бу ҳолда ҳам $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликнинг характери қандай бўлишини юқоридагидек олдиндан айтиб бўлмайди. Мисоллар қарайлик.

1) $\{x_n\} = \{n^2\}$, $\{y_n\} = \{n\}$ кетма-кетликлардан ҳар бирининг лимити чексиз бўлади:

$$\lim n^2 = +\infty, \quad \lim n = +\infty.$$

Бу кетма-кетликлардан тузилган $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \{n\}$ кетма-кетликнинг лимити ҳам чексиздир: $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

2) $\{x_n\} = \{n^2 + n + 1\}$ ва $\{y_n\} = \{n^2 + 1\}$ кетма-кетликлардан ҳар бирининг лимити чексиз. Бу кетма-кетликлардан тузилган $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетлик лимити

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

3) $\{x_n\} = \{(-1)^n \cdot n\}$ ва $\{y_n\} = \{n\}$ кетма-кетликлардан ҳар бирининг лимити чексиз бўлиб, бу кетма-кетликлардан тузилган $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \{(-1)^n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Бу мисоллардан кўринадики, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлардан ҳар бирининг лимити чексиз бўлган ҳолда, бу кетма-кетликлар нисбатидан тузилган $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликнинг лимити тўғрисида тайин хулосага келиб бўлмайди. Шунинг учун $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ да $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетлик $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги *аниқмас ифода* ёки *аниқмаслик* дейилади. Бу ҳолда ҳам $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ да $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ нинг характерини аниқлаш аниқмасликни очиш дейилади. Кўрилган мисолларда тегишли аниқмасликлар очиб берилди.

3°. $0 \cdot \infty$ кўринишдаги аниқмаслик. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлиб, $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = \infty$ бўлсин. Бу ҳолда ҳам $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетликнинг лимитини характерлайдиган мисоллар кўрайлик.

1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\{y_n\} = \{n^2\}$ кетма-кетликларнинг лимити мос равишда 0 да ∞ дир. Бу кетма-кетликлар кўпайтмасидан тузилган $\{x_n \cdot y_n\} = \{n\}$ кетма-кетликнинг лимити ∞ бўлади.

2) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $\{y_n\} = \{n^2 + n + 1\}$ кетма-кетликларнинг лимити мос равишда 0 ва ∞ бўлгани ҳолда, $\{x_n \cdot y_n\} = \left\{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right\}$ кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг.

3) $\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, $\{y_n\} = \{n\}$ бўлсин. Уларнинг лимити мос ра-

вишда 0 ва ∞. Бу кетма-кетликлар кўпайтмасидан тузилган $\{x_n\cdot y_n\}=$ $=\{(-1)^n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Демак, $x_n\to0$, $y_n\to\infty$ бўлган ҳолда $\{x_n\cdot y_n\}$ кетма-кетликнинг характери турлича бўлади. Шунинг учун $x_n\to0$, $y_n\to\infty$ бўлишинигина билган ҳолда $\{x_n\cdot y_n\}$ нинг лимити ҳақида аниқ хулосага келиб бўлмайди. Шу сабабдан $x_n\to0$, $y_n\to\infty$ да $\{x_n\cdot y_n\}$ кетма-кетлик $0\cdot\infty$ кўринишдаги *аниқмас ифода* ёки *аниқмаслик* дейилади.

4°. $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмаслик. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлиб, улар турли ишорали чексизга интилсин, масалан, $\lim x_n=+\infty$, $\lim y_n=-\infty$ дейлик. Бу кетма-кетликлар йиғиндисидан тузилган $\{x_n+y_n\}$ кетма-кетликнинг характери ҳам турлича бўлиши мумкин. Мисоллар кўрайлик.

1) $\{x_n\}=\{2n\}$, $\{y_n\}=\{-n\}$ кетма-кетликлар учун $x_n\to+\infty$, $y_n\to-\infty$ бўлиб, $x_n+y_n=n\to+\infty$ бўлади.

2) $\{x_n\}=\left\{n+\frac{1}{n}\right\}$, $\{y_n\}=\{-n\}$ бўлсин. Уларнинг лимити

$$\lim x_n=+\infty,\quad \lim y_n=-\infty$$

бўлган ҳолда, $\{x_n+y_n\}$ кетма-кетликнинг лимити нолга тенг бўлади $\left(x_n+y_n=\frac{1}{n}\to0\right)$.

3) $\{x_n\}=\{n+(-1)^{n+1}\}$ ва $y_n=\{-n\}$ кетма-кетликлар учун $x_n\to+\infty$ ва $y_n\to-\infty$ бўлиб, бу кетма-кетликлар йиғиндисидан тузилган $\{x_n+y_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас. Юқоридаги каби, бу ҳолда ҳам $x_n\to+\infty$, $y_n\to-\infty$ да $\{x_n+y_n\}$ кетма-кетлик аниқмасликни ифодалайди. Бу аниқмаслик $\infty-\infty$ *кўринишдаги аниқмас ифода* ёки *аниқмаслик* дейилади. Шундай қилиб, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ ва $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмасликларни кўриб ўтдик. Қайд қилиб ўтамизки, 0^0, ∞^0; 1^∞ кўринишдаги аниқмасликлар ҳам мавжуд.

Юқорида биз аниқмаслик вазиятини намойиш қилиш учун ниҳоятда содда мисоллар келтириш билан чегараландик. Аслида, кўпинча, аниқмасликларнинг берилиши мураккаб бўлиб, уларнинг турини аниқлаш, сўнгра уларни очиш, умуман айтганда, енгил масала бўлмасдан, берилган $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг қанчалик содда ёки мураккаблигига боғлиқ ва ўқувчидан маълум кўникма ва маҳорат талаб қилади.

Мисоллар. 1. Ушбу $\{x_n\}=\{n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\}$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Биз $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз.

Берилган кетма-кетликнинг умумий ҳади x_n ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x_n = n - \sqrt[3]{n^3-n^2} = \frac{(n-\sqrt[3]{n^3-n^2})\,(n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2})}{n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}}.$$

Бундан эса

$$\lim x_n = \lim\,(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}) = \lim \frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{3}$$

келиб чиқади.

2. Қуйидаги

$$\lim \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$$

лимитни ҳисобланг.

Бунда $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз.

Арифметик прогрессия ҳадлари йиғиндиси формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2,\ 1+2+3+\ldots+n=\frac{n\,(n+1)}{2},$$

у ҳолда

$$\lim \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n} = \lim \frac{n^2}{\frac{n\,(n+1)}{2}} = 2.$$

7-§. Монотон кетма-кетликлар ва уларнинг лимитлари

Биз яқинлашувчи кетма-кетликларнинг қатор хоссаларини кўриб ўтдик. Бу хоссалар кетма-кетликнинг чекли лимитга эга бўлиши билан боғлиқдир. Кетма-кетликнинг қачон чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги масала лимитлар назариясининг муҳим масалаларидан бири. Аслида-ку, берилган кетма-кетликнинг лимити мавжудлигини лимит таърифи бўйича кўрсатиш лозим. Аммо бу ҳамма вақт ҳам осон бўлавермайди. Шунинг учун лимити мавжудлигини аниқлашимиз енгил бўлган кетма-кетликлар синфларини ажратиш, умуман лимит мавжудлигини кўрсатадиган бошқа шартларни топиш муаммолари пайдо бўлади. Қуйида биз монотон кетма-кетликлар синфини киритамиз ва бундай кетма-кетликлар учун лимит мавжудлиги ва уни ҳисоблаш масалалари билан шуғулланамиз.

1. Монотон кетма-кетликлар. Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

16-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликда $\forall n \in N$ сон учун $x_n \leqslant$

$\leqslant x_{n+1}$ тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *ўсувчи кетма-кетлик* деб аталади.

Агар $\forall n \in N$ сон учун $x_n < x_{n+1}$ тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *қатъий ўсувчи* кетма-кетлик деб аталади.

Масалан, $1, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots, \underbrace{n, n, \ldots, n}_{n \text{ та}}, \ldots$ кетма-кетлик ўсувчи, $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$ кетма-кетлик эса қатъий ўсувчи кетма-кетликдир.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлса, у қуйидан чегараланган бўлади. Ҳақиқатан, бу ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг исталган ҳади учун $x_1 \leqslant x_n$ тенгсизлик ўринли. Бу эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қуйидан x_1 сон билан чегараланганлигини билдиради.

17-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликда $\forall n \in N$ сон учун $x_n \geqslant x_{n+1}$ тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *камаювчи кетма-кетлик* деб аталади.

Агар $\forall n \in N$ сон учун $x_n > x_{n+1}$ тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *қатъий камаювчи кетма-кетлик* дейилади.

Масалан, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n \text{ та}}, \ldots$ кетма-кетлик камаювчи. Ушбу

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

кетма-кетлик эса қатъий камаювчи кетма-кетлик. Ҳақиқатан, $\forall n \ni \in N$ учун

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{-1}{n\,(n+1)} < 0$$

бўлиб, ундан $x_n > x_{n+1}$ бўлиши келиб чиқади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлса, у юқоридан чегараланган бўлади. Ҳақиқатан, бу ҳолда $\forall n \in N$ учун $x_1 \geqslant x_n$ тенгсизлик ўринли. Бу эса кетма-кетликнинг юқоридан чегараланганлигини кўрсатади.

Ўсувчи ва камаювчи кетма-кетликлар умумий ном билан *монотон кетма-кетликлар* деб аталади.

Монотон кетма-кетликнинг чегараланганлигини аниқлаш учун, агар у ўсувчи кетма-кетлик бўлса, унинг юқоридан, камаювчи бўлса, унинг қуйидан чегараланганлигини аниқлаш етарли бўлади.

2. Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақида теоремалар.

7-теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса, у чекли лимитга эга; агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ бўлади.*

Исбот. Аввало, $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва юқоридан чегараланган ҳолни қараймиз. Кетма-кетлик юқоридан чегараланганлиги учун шундай ўзгармас M сон мавжудки, $\forall n \in N$ сон учун $x_n < M$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса кетма-кетликнинг барча ҳадларидан тузилган $\{x_n\}$ тўпламнинг юқоридан чегараланганлигини ифодалайди. Унда тўпламнинг аниқ юқори чегараси ҳақидаги 3-теоремага асосан бу тўплам учун $\sup \{x_n\}$ мавжуд бўлади. Биз уни a билан белгилайлик: $\sup \{x_n\} = a$. Энди a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлишини кўрсатамиз.

Аниқ юқори чегаранинг таърифига кўра, биринчидан, $\{x_n\}$ тўпламнинг ҳар бир элементи учун $x_n \leqslant a$ тенгсизлик ўринли бўлса, иккинчидан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам катма-кетликнинг шундай x_{n_0} ҳади топиладики, бу ҳад учун $x_{n_0} > a - \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак,

$$\sup \{x_n\} = a \Rightarrow \begin{cases} a - x_n \geqslant 0, & \forall n \in N, \\ a - x_{n_0} < \varepsilon. \end{cases}$$

Қаралаётган $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлгани учун $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча натурал сонлар учун $x_n \geqslant x_{n_0}$ тенгсизлик ўринли. Шу сабабли $n > n_0$ бўлганда $0 \leqslant a - x_n \leqslant a - x_{n_0} < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Шундай қилиб, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $n > n_0$ бўлганда $|a - x_n| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити эканини кўрсатади: $\lim x_n = a$.

Энди $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланмаган бўлсин. Унда ҳар қандай катта мусбат A сон олинганда ҳам $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг шундай $x_{n_0'}$ ҳади топиладики, бу ҳад $x_{n_0'} > A$ бўлади. Аммо барча $n > n_0'$ лар учун $x_n \geqslant x_{n_0'}$ тенгсизлик ўринли бўлгани сабабли $x_n > A$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Бу эса $\lim x_n = +\infty$ бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Қуйидаги теорема ҳам худди юқоридаги теоремага ўхшаш исботланади

8-теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қуйидан чегараланган бўлса, у чекли лимитга эга; агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик қуйидан чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $-\infty$ бўлади.*

Исбот этилган теоремалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

4-натижа. Ўсувчи кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун унинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Ҳақиқатан, агар ўсувчи кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, яқинлашувчи кетма-кетликларнинг чегараланган бўлишидан, унинг юқоридан чегараланганлиги келиб чиқади. Агар ўсувчи кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлса, у исбот этилган 7-теоремага асосан яқинлашувчи бўлади.

5-натижа. Камаювчи кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун унинг қуйидан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Мисоллар. 1. Ушбу $\{x_n\} = \left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Аввало, бу кетма-кетлик лимитининг мавжудлигини кўрсатамиз. Равшанки,

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Бундан барча $n \geqslant 1$ лар учун $x_{n+1} < x_n$ тенгсизликнинг ўринли экани келиб чиқади. Бу эса берилган кетма-кетлик камаювчи эканини кўрсатади. Кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади мусбат, $x_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Демак, у қуйидан чегараланган. Шундай қилиб, $\{x_n\} = \left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$ кетма-кетлик камаювчи ва қуйидан чегараланган. 8-теоремага кўра бу кетма-кетлик чекли лимитга эга. Биз уни a билан белгилайлик:

$$\lim \frac{n!}{n^n} = a.$$

Равшанки, $a \geqslant 0$. Ушбу $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n$ $(\alpha > -1)$. Бернулли тенгсизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + n\,\frac{1}{n} = 2.$$

Бундан эса $(n+1)^n \geqslant 2 \cdot n^n$ келиб чиқади. У ҳолда

$$x_n - x_{n+1} = x_n - x_n \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \left[\frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n}\right] \geqslant$$

$$\geqslant x_n \frac{2 \cdot n^n - n^n}{(n+1)^n} = \frac{x_n \cdot n^n}{(n+1)^n} = x_{n+1}$$

бўлиб, натижада қуйидаги $x_n \geqslant 2x_{n+1}$ тенгсизликка келамиз. Бу тенгсизликда лимитга ўтамиз: $\lim x_n \geqslant 2 \lim x_{n+1}$. Ундан $a \geqslant 2a$ ва $a \geqslant 0$ ни ҳисобга олсак, $a = 0$ экани келиб чиқади. Демак,

$$\lim \frac{n}{n^n} = 0.$$

2. Қуйидаги

$$\sqrt{a},\ \sqrt{a+\sqrt{a}},\ \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}}_{n \text{ та илдиз}},\ \ldots$$

$(a > 0)$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Бу кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлади:

$$x_n < \sqrt{a} + 1 \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (*)$$

Шуни кўрсатамиз. Равшанки,

$$x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1.$$

(*) муносабат $n = k$ учун ўринли бўлсин:

$$x_k < \sqrt{a} + 1$$

деб $n = k + 1$ учун ўринли бўлишини кўрсатамиз:

$$x_{k+1} = \sqrt{a + x_k} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \\ = \sqrt{a} + 1.$$

Демак, математик индукция усулига биноан, $\forall n \in N$ учун

$$x_n < \sqrt{a} + 1$$

бўлади.

Равшанки,

$$x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} = x_2.$$

Энди k номер учун $x_{k-1} < x_k$ тенгсизлик бажарилсин дейилса, $x_k < x_{k+1}$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$x_k = \sqrt{a + x_{k-1}} < \sqrt{a + x_k} = x_{k+1}.$$

Демак, $\forall n \in N$ учун $x_n < x_{n+1}$ бўлади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг ўсувчи эканлигини билдиради. Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги 7-теоремага кўра берилган кетма-кетлик чекли лимитга эга. Биз уни y билан белгилайлик: $\lim x_n = y$. Сўнгра $x_n^2 = a + x_{n-1}$ тенгликда ҳадлаб лимитга ўтиш амалини бажариб топамиз: $\lim x_n^2 = \lim a + \lim x_{n-1}$ ёки $y^2 = a + y$. Натижада y ни топиш учун ушбу $y^2 - y - a = 0$ квадрат тенгламага келамиз. Бу квадрат тенгламанинг илдизларини ёзамиз:

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad y_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

Кетма-кетликнинг ҳадлари мусбат бўлгани учун $y_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ сон кетма-кетликнинг лимити бўлади. Демак,

$$\lim x_n = \lim \left(\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ та илдиз}} \right) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Хусусан, ушбу

$$\sqrt{3},\ \sqrt{3+\sqrt{3}},\ \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}},\ \ldots,$$
$$\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}},\ \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи ва унинг лимити $\frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2,29$ га тенг.

8-§. Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремаларнинг татбиқлари

Ушбу параграфда биз монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремаларнинг математик анализ курсида қараладиган баъзи масалаларга татбиқ этилишини қараб ўтамиз.

1. e сони.

а) e сонининг таърифи.

Қуйидаги $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots \qquad (3.7)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик лимитининг мавжудлигини кўрсатамиз. Берилган (3.7) кетма-кетлик билан бирга ушбу

$$\{y_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

кетма-кетликни ҳам қараймиз. Бу кетма-кетлик камаювчи. Ҳақиқатан,

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2} \frac{n}{n+1} = \left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2} \frac{n}{n+1}.$$

Бернулли тенгсизлигига асосан

$$\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2} \geqslant 1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)} = 1+\frac{1}{n}$$

бўлишини ҳисобга олсак, натижада

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1, \text{ яъни } y_n \geqslant y_{n+1} \ (\forall\, n \in N)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг камаювчи эканини англатади. Иккинчи томондан, $\{y_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади мусбат бўлгани учун у қуйидан чегаралангандир. Шундай қилиб $\{y_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ кетма-кетлик камаювчи ва қуйидан чегаралангандир. 8-теоремага кўра бу $\{y_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга.

Агар

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=x_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

тенгликдан $x_n=y_n\dfrac{n}{n+1}$ тенгликнинг келиб чиқишини ва $\lim\dfrac{n}{n+1}=1$ эканини эътиборга олсак, унда $\lim x_n=\lim y_n$ га эга бўламиз. Бу эса (3.7) кетма-кетлик лимитининг мавжудлигини кўрсатади.

18-таъриф. Берилган $\{x_n\}=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетликнинг лимити *e* **сони** деб аталади:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Бунда *e* лотинча exponentis — «кўрсатиш, кўрсатгич, намойиш қилиш» сўзининг дастлабки ҳарфини ифодалайди.

б) ***e* сонини тақрибий ҳисоблаш.** *e* сонини тақрибий ҳисоблаш мақсадида $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ифодани Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\,\frac{1}{n}+\frac{n-1}{1\cdot2}\,\frac{1}{n}+\frac{(n-1)\,(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\,\frac{1}{n^2}+\ldots+$$

$$+\frac{(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}\cdot\frac{1}{n^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{n^n}=$$

$$=2+\frac{1}{1\cdot2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Агар

$$S_1=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),\ 1<k<n,$$

$$S_2=\frac{1}{(k+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

деб олсак:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=S_1+S_2.$$

$\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик учун $x_1 = 2$. Қолаверса, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ нинг ёйилмасидан, $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$, $k \in N$ тенгсизликка кўра, $x_n < 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$. Шунга асосан e сони $2 < e < 3$ тенгсизликни қаноатлантиради. Бу сонни янада аниқроқ ҳисоблаш учун қуйидаги мулоҳазаларни юритамиз.

Юқоридаги S_2 йиғиндини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$S_2 = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left[\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)+\ldots+$$

$$\left.+\frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right].$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида турган йиғиндининг ҳар бир ҳадида қатнашган $\left(1-\frac{i}{n}\right)$, $i = k,\ k+1, \ldots, n-1$ кўринишдаги кўпайтувчиларни ундан катта бўлган 1 билан ва

$$\frac{1}{(k+1)\ (k+2)\ \ldots\ (k+j)},\quad j = 1, 2, 3, \ldots, n-k$$

кўринишдаги кўпайтувчиларни эса ундан катта бўлган $\frac{1}{(k+1)^j}$ билан алмаштириб, S_2 йиғинди учун ушбу

$$S_2 < \frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^{n-k}}\right]$$

тенгсизликка келамиз. Чексиз камайиб борувчи геометрик прогрессия барча ҳадлари йиғиндиси формуласидан фойдаланиб (бунда биринчи ҳад $\frac{1}{k+1}$, махражи ҳам $\frac{1}{k+1}$ бўлади) топамиз:

$$S_2 < \frac{1}{k!}\,\frac{1}{(k+1)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)} = \frac{1}{k!k}.$$

Шундай қилиб,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = S_1 + S_2 < 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\frac{1}{k!\,k}$$

ва ундан

$$0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left[2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right] < \frac{1}{k!k}$$

тенгсизликларга эга бўламиз, $n\to\infty$ да бу тенгсизликларда лимитга ўтиб топамиз:

$$0\leqslant e-\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right)\leqslant\frac{1}{k!\,k}. \qquad (3.8)$$

Бу муносабат e сонини тақрибий ҳисоблаш имконини беради. Демак,

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}$$

бўлиб, бу тақрибий формуланинг хатоси $\frac{1}{k!\,k}$ дан ошмайди. Масалан, $k=10$ да

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{10!}\approx 2{,}718281$$

бўлиб, хатолик эса

$$\frac{1}{10!\,10}<0{,}000\,000\,1$$

бўлади. e сонининг янада аниқроқ қиймати: $e=2{,}7182818459045\ldots$

в) e сонининг иррационаллиги.

9-теорема. *e иррационал сондир.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик: e сони рационал сон бўлсин, яъни у қисқармайдиган

$$e=\frac{p}{q},\quad p\in N,\quad q\in N,\quad q>1$$

каср кўринишида ёзилсин дейлик.

Юқорида исбот этилган (3.8) тенгсизликларда $k=q$ деб олайлик. Натижада

$$0\leqslant e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right)\leqslant\frac{1}{q!\,q}$$

ёки

$$q\left[eq!-q!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right)\right]\leqslant 1 \qquad (3.9)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Равшанки, $eq!=\frac{p}{q}\,q!=p\,(q-1)!$ сон бутун мусбат, шунингдек,

$$q!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right)$$

сон ҳам бутун мусбат. Шуни ҳисобга олсак, (3.9) тенгсизликнинг чап томонидаги ифода бутун мусбат сон бўлишини топамиз. Аммо бу сон $q>1$ тенгсизликка кўра 1 дан катта бўлади. Зиддиятлик ҳосил бўлди. Демак, e сони иррационалдир. Теорема исбот бўлди.

2. Ичма-ич жойлашган сегментлар принципи.

10-теорема. *Иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар*

1) $\{x_n\}$ *ўсувчи,* $\{y_n\}$ *камаювчи кетма-кетлик,*

2) $\forall\, n \in N$ *лар учун* $x_n < y_n$,

3) $\lim (y_n - x_n) = 0$ *бўлса,* $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ *кетма-кетликлар яқинлашувчи ва* $\lim x_n = \lim y_n$ *тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи, $\{y_n\}$ кетма-кетлик эса камаювчи ҳамда ҳар бир $n \in N$ учун $x_n < y_n$ тенгсизлик ўринли бўлганидан, $\forall\, n \in N$ учун $x_n \leqslant y_1$, $y_n \geqslant x_1$ тенгсизликлар бажарилади. Бу эса $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан, $\{y_n\}$ кетма-кетлик эса қуйидан чегараланганлигини билдиради. Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремаларга асосан $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлади. Демак, $\lim x_n$ ва $\lim y_n$ лар мавжуд. Шунинг учун

$$\lim (y_n - x_n) = \lim y_n - \lim x_n$$

бўлиб, теореманинг учинчи шартидан эса

$$\lim y_n - \lim x_n = 0, \quad \lim y_n = \lim x_n$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Исбот этилган теоремадан муҳим натижа келиб чиқади. Бу натижани келтиришдан аввал ичма-ич жойлашган сегментлар кетма-кетлиги тушунчаси билан танишамиз.

Маълумки, $\{x\colon x \in R,\ a \leqslant x \leqslant b\}$ тўплам $[a, b]$ сегмент деб аталар эди. Агар $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ бўлса, $[a_1, b_1]$ сегмент $[a, b]$ сегментнинг ичига жойлашган дейилади.

Агар $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ сегментлар кетма-кетлиги қуйидаги

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

муносабатда бўлса, бу сегментлар *ичма-ич жойлашган сегментлар кетма-кетлиги* дейилади.

6-натижа. Агар ичма-ич жойлашган

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

сегментлар кетма-кетлиги учун $\lim (b_n - a_n) = 0$ бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар битта лимитга эга ҳамда бу лимит барча сегментларга тегишли бўлган ягона нуқта бўлади.

Исбот. $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n] \ldots$ ичма-ич жойлашган сегментлар кетма-кетлиги бўлиб,

$$\lim (b_n - a_n) = 0$$

бўлсин. Бунда $\{a_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи, $\{b_n\}$ эса камаювчи кетма-кетликлардир ва барча $n \in N$ лар учун $a_n < b_n$ бўлади. Демак, $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар 10-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради, бу теоремага кўра $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи ва

$$\lim a_n = \lim b_n$$

бўлади.

Энди $\lim a_n = \lim b_n = c$ деб белгилаб, c нуқта барча $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ сегментларга тегишли бўлган ягона нуқта эканини кўрсатамиз. $\{a_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва $\lim a_n = c$ бўлганидан $a_n \leqslant \leqslant c$, $(n = 1, 2, \ldots)$, шунингдек, $\{b_n\}$ кетма-кетлик камаювчи ва $\lim b_n = c$ бўлганидан эса $b_n \geqslant c$ $(n = 1, 2, \ldots)$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, $n = 1, 2, \ldots$ бўлиб, c нуқта барча сегментларга тегишли: $c \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Агар шу c нуқтадан фарқли ва сегментларнинг барчасига тегишли c', $c' \in [a_n, b_n]$ $(n = = 1, 2, \ldots)$ нуқта ҳам мавжуд деб қараладиган бўлса, унда

$$b_n - a_n \geqslant |c - c'| > 0$$

бўлиб, бу муносабат $\lim (b_n - a_n) = 0$ шартга зид бўлади. Демак, $c = c'$.

Келтирилган натижа *ичма-ич жойлашган сегментлар принципи* деб юритилади.

5-эслатма. Юқоридаги сингари ичма-ич жойлашган интерваллар (ёки ярим интерваллар) кетма-кетлиги тушунчасини киритишимиз мумкин. Аммо уларга нисбатан 6-натижа тасдиқи, умуман айтганда, ўринли бўлмайди. Масалан, ушбу

$$(0, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{3}\right), \ldots, \left(0, \frac{1}{n}\right) \ldots$$

ичма-ич жойлашган интерваллар кетма-кетлигини қарайлик. $n \to \infty$ да бу интерваллар узунлиги нолга интилса ҳам барча интерваллар учун умумий бўлган ягона нуқта мавжуд эмас (бундай ягона умумий нуқта 0 бўлиши мумкин эди, аммо 0 нуқта бу интервалларга тегишли эмас).

3. Саноқли бўлмаган чексиз тўпламнинг мавжудлиги. Маълумки, натурал сонлар тўпламига эквивалент бўлган ҳар қандай тўплам саноқли тўплам деб аталар эди. Равшанки, саноқли тўпламлар чексиз тўпламлардир. Энди саноқли бўлмаган чексиз тўпламларнинг мавжудлигини кўрсатамиз. Бунинг учун аввало саноқли тўпламлар билан кетма-кетликлар орасида боғланиш борлигини кўрсатамиз.

Агар бирор E $(E \subset R)$ тўпламнинг барча элементларини

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

кетма-кетлик кўринишида ифодалаш мумкин бўлса, E саноқли тўплам бўлади. Ҳақиқатан, бунда ҳар бир x_n га унинг индекси n ни мос қўйиб $(x_n \to n)$, E тўпламнинг элементлари билан N тўпламнинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин.

Аксинча, агар E $(E \subset R)$ саноқли тўплам бўлса, унда n $(n \in N)$ номерга мос келадиган E тўпламнинг элементини x_n билан белгилаб, E нинг элементлари

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

этма-кетлик кўринишида бўлишини аниқлаймиз.

Шундай қилиб, E $(E \subset R)$ тўплам саноқли тўплам бўлиши учун ни ташкил этган элементлар

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

етма-кетлик ҳосил қилиши зарур ва етарли эканини қайд қилиб тамиз.

11-теорема. *Ушбу* $E = \{x:\ x \in R,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ *тўплам саноқли ўлмаган чексиз тўпламдир.*

Исбот. Бу E тўплам саноқли тўплам бўлсин деб фараз қилай- ик. Унда E нинг элементлари юқоридаги мулоҳазага кўра

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

етма-кетлик ташкил этади. Демак, E тўпламнинг ҳар бир элемен- и $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг тегишли ҳадидан иборат.

Энди $E = [0, 1]$ сегментни $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ нуқталар ёрдамида учта $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ сегментчага ажратамиз. $x_1 \in E = [0, 1]$ ни олайлик. Бу x_1 юқоридаги учта сегментчанинг ҳеч бўлмаганда биттасига те- ишли бўлмайди. Бу сегментчани E_1 орқали белгилайлик (бу E_1 тўплами ё $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, ё $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, ёки $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ бўлиши мумкин). Агар бор- ди-ю x_1 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ сегментчалардан иккитасига тегиш- ли бўлмаса (унда x_1 албатта учинчисига тегишли бўлади), унда E_1 деб улардан бирини, масалан чап томонда турганини оламиз. Рав- шанки, $E_1 \subset E$ ва E_1 сегментнинг узунлиги $\frac{1}{3}$ га тенг бўлади.

Энди E_1 ни ҳам учта тенг сегментчага ажратамиз ва юқоридаги хшаш $x_2 \in E$ элемент тегишли бўлмаган сегментчани E_2 билан бел- илаймиз. Бунда $E_2 \subset E_1$ ва E_2 сегментнинг узунлиги $\frac{1}{3^2}$ га тенг бў- лади. Сўнг E_2 сегментчани ҳам учта тенг сегментчага ажратиб, улар чида $x_3 \in E$ элемент тегишли бўлмаганини E_3 орқали белгилаймиз. Бу жараённи давом эттириб натижада ушбу

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$$

сегментлар кетма-кетлигини хосил қиламиз. Бунда барча n лар учун $x_n \in E_n$ бўлиб, E_n сегментнинг узунлиги $\frac{1}{3^n}$ га тенг бўлади. Бу сег- ментлар кетма-кетлиги учун

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

уносабатлар ўринли бўлиб, ушбу $\lim \frac{1}{3^n} = 0$ лимитга эгамиз. У ҳолда ичма-ич жойлашган сегментлар принципига асосан барча сегментларга тегишли бўлган ягона a нуқта мавжуд: $a \in E_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Аммо $x_n \bar{\in} E_n$ бўлгани сабабли $a \neq x_n$. Бу ҳол a нинг $E = [0, 1]$ сегментга тегишли бўла туриб, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирорта ҳадига тенг бўлмаслигини кўрсатади. Бунга сабаб, E нинг саноқли деб олинишидир. Демак, $E = [0, 1]$ саноқли тўплам бўла олмайди. Теорема исбот бўлди.

19-таъриф. Ушбу

$$E = \{x: \ x \in R, \ 0 \leqslant x \leqslant 1\} = [0, \ 1]$$

тўпламга эквивалент бўлган ҳар қандай тўплам *континуум қувватли тўплам* деб аталади.

Қуйидаги

$$A = \{x: \ x \in R, \ a \leqslant x \leqslant b\} = [a, \ b] \ \ (a < b)$$

тўплам континуум қувватли тўпламдир.

Дарҳақиқат, ушбу

$$y = a + (b - a) x \quad (x \in E, \ y \in A)$$

муносабат E ва A тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади. Демак, бу тўпламлар эквивалент тўпламлар бўлиб, A — континуум қувватли тўпламдир.

9-§. Қисмий кетма-кетликлар. Больцано — Вейерштрасс леммаси

Бирор $\{x_n\}$: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг бирор n_1 номерли x_{n_1} ҳадини оламиз. Сўнгра номери n_1 дан катта бўлган n_2 номерли x_{n_2} ҳадини оламиз. Шу усул билан x_{n_3}, x_{n_4} ва ҳоказо ҳадларни олиш мумкин. Натижада номерлари $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган ҳадлар танланган бўлади. Бу ҳадлар ушбу

$$x_{n_1}, \ x_{n_2}, \ \ldots, \ x_{n_k}, \ \ldots (n_1 < n_2 < \ \ldots < n_k < \ \ldots) \qquad (3.10)$$

кетма-кетликни ташкил этади.

Одатда (3.10) кетма-кетлик $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *қисмий кетма-кетлиги* деб аталади ва $\{x_{n_k}\}$ каби белгиланади. Баъзида $\{x_n\}$ кетма-кетликдан $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетлик ажратилган дейилади.

Қисмий кетма-кетликнинг тузилишидан равшанки, $k \to \infty$ да n_k ҳам чексизликка интилади: $\lim\limits_{k \to \infty} n_k = +\infty$.

Мисоллар. 1. Қуйидаги

$$\begin{gathered} 1, \ 3, \ 5, \ 7, \ \ldots, \ 2n-1, \ \ldots \\ 2, \ 4, \ 6, \ 8, \ \ldots, \ 2n, \ \ldots \\ 1, \ 4, \ 9, \ 16, \ \ldots, \ n^2, \ \ldots \end{gathered}$$

кетма-кетликлар натурал сонлар кетма-кетлиги $1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ n, \ \ldots$ нинг қисмий кетма-кетликлари бўлади.

2. Ушбу

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$$

кетма-кетлик

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлигидир.

3. Қуйидаги

$$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$$

кетма-кетликдан, масалан, ушбу

$$\begin{array}{l} 1, \quad 1, \quad 1, \ldots, \quad 1, \ldots \\ -1, -1, -1, \ldots, -1, \ldots \end{array}$$

қисмий кетма-кетликларни ажратиш мумкин.

Келтирилган тушунча ва мисоллардан равшанки, битта кетма-кетликдан турли қисмий кетма-кетликлар ажратиш мумкин. Ҳар бир қисмий кетма-кетлик ўзи, умуман айтганда, мустақил, янги кетма-кетлик бўлиб, унинг учун ҳам яқинлашувчилик ёки узоқлашувчилик масаласи ўрганилиши мумкин.

Кетма-кетлик лимити билан унинг қисмий кетма-кетликлари лимити орасидаги муносабатни қуйидаги теорема ифодалайди.

12-теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга (чекли, ёки* $+\infty$, ёки $-\infty$) *эга бўлса, унинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги ҳам шу лимитга эга бўлади.*

Исбот. $\lim x_n = a$ бўлсин, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор

$$\{x_{n_k}\}: x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, x_{n_4}, x_{n_k}, \ldots$$

қисмий кетма-кетлигини олайлик.

Лимит таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ олинганида ҳам, шундай $n_0 \in N$ сон мавжудки, барча $n > n_0$ лар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ бўлади. $k \to \infty$ да $n_k \to \infty$ бўлишидан шундай $m \in N$ сон топиладики, $n_m > n_0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, барча $k > m$ лар учун $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса $\lim x^{n}_{k} = a$ лимитнинг ўринли эканини ифодалайди. Худди шунингдек, $\lim x_n = +\infty\ (-\infty)$ бўлганида ҳам $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги $+\infty\ (-\infty)$ га интилиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

6-эслатма. Кетма-кетлик қисмий кетма-кетликларининг лимити мавжуд бўлишидан берилган кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан;

$$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$$

кетма-кетликнинг ушбу

$$\begin{array}{l} 1, \quad 1, \quad 1, \ldots, \quad 1, \ldots \\ -1, -1, -1, \ldots, -1, \ldots \end{array}$$

B. Elyorbek.

қисмий кетма-кетликлари лимитга эга (улар мос равишда 1 ва -1 ларга тенг). Аммо берилган $\{(-1)^{n+1}\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса ҳам унинг қисмий кетма-кетликлари лимитга эга бўлиши мумкин экан.

20-таъриф. $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги лимити берилган кетма-кетликнинг *қисмий лимити* деб аталади.

3-лемма (Больцано—Вейерштрасс леммаси). Агар $\{x_n\}$ чегараланган бўлса, бу кетма-кетликдан шундай қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкинки, у яқинлашувчи бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлсин. Демак, кетма-кетликнинг барча ҳадлари бирор $[a, b]$ сегментга тегишли бўлади. $[a, b]$ сегментни тенг икки қисмга ажратиб, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ва $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ сегментларни ҳосил қиламиз. Берилган кетма-кетликнинг барча ҳадлари $[a, b]$ да бўлгани сабабли, унинг чексиз кўп сондаги ҳадлари $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ва $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ сегментларнинг камида биттасига тегишли бўлади. Энди $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кўп сондаги ҳадлари бўлган сегментни, яъни $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ёки $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ ни (агар иккаласида ҳам кетма-кетликнинг чексиз кўп сондаги ҳадлари бўлса, улардан ихтиёрий бирини) $[a_1, b_1]$ деб белгилаймиз. Равшанки, $[a_1, b_1]$ нинг узунлиги $\frac{b-a}{2}$ бўлади. Юқоридагига ўхшаш, $[a_1, b_1]$ сегментни тенг икки қисмга ажратиб, $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ ва $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ сегментларни ҳосил қиламиз ва бу сегментлардан $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз сондаги ҳадлари бўлганини $[a_2, b_2]$ деб оламиз. Равшанки, $[a_2, b_2]$ сегментнинг узунлиги $\frac{b-a}{2^2}$ бўлади. Бу жараённи давом эттириш натижасида ушбу

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_k, b_k],\ \ldots$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Тузилишига кўра ҳар бир $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ сегментда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кўп сондаги ҳадлари бўлади.

Равшанки,

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots$$

$[a_k, b_k]$ сегментнинг узунлиги $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ бўлиб, $k \to \infty$ да нолга интилади. Ичма-ич жойлашган сегментлар принципига кўра $\{a_k\}$ ва $\{b_k\}$ кетма-кетликлар умумий (битта) чекли лимитга эга:

$$\lim a_k = \lim b_k = c.$$

Энди $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $[a_1, b_1]$ даги бирорта ҳадини олайлик. У n_1-ҳад бўлсин: $x_{n_1}\in[a_1, b_1]$. Сўнгра, $\{x_n\}$ нинг $[a_2, b_2]$ даги бирорта ҳадини олайлик. У n_2-ҳад бўлсин: $x_{n_2}\in[a_2, b_2]$. Қаралаётган сегментларнинг ҳар бирида кетма-кетликнинг чексиз кўп ҳадлари бўлганлиги учун, равшанки, $n_2 > n_1$ қилиб олишимиз мумкин.

Худди шунингдек, $\{x_n\}$ нинг $[a_3, b_3]$ даги x_{n_1}, x_{n_2} ҳадларидан кейин келадиган бирорта x_{n_3} ҳадини $(n_1 < n_2 < n_3)$ оламиз. Бу жараённи давом эттириб, k-қадамда, $[a_k, b_k]$ сегментдаги $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг x_{n_1}, x_{n_2}, ..., $x_{n_{k-1}}$ лардан кейин келадиган ҳадларидан бири x_{n_k} ни оламиз ва ҳ. к. Натижада $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳадларидан ташкил топган ушбу

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots \; (n_1 < n_2 < \dots < x_{n_k} < \dots)$$

қисмий кетма-кетлик ҳосил бўлади. Қисмий $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари учун

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб, ундан $k \to \infty$ да

$$\lim x_{n_k} = c$$

бўлиши келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

7-эслатма. Келтирилган леммада кетма-кетликнинг чегараланган бўлиши муҳим шартдир. Шу шарт бажарилмаса, лемманинг хулосаси ўринли бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, чегараланмаган ушбу

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

натурал сонлар кетма-кетлигининг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги ҳам $+\infty$ га интилади.

10-§. Коши теоремаси (яқинлашиш мезони)

Кетма-кетликнинг қачон чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги масала, юқорида таъкидлаганимиздек (7-§ га қаранг) лимитлар назариясининг муҳим масалаларидан биридир. Бу масала 7-§ да монотон кетма-кетликлар учун ҳал қилинган. Табиийки, ихтиёрий кетма-кетлик қандай шартда яқинлашувчи бўлади деган савол туғилади. Бу саволга жавоб беришдан аввал фундаментал кетма-кетлик тушунчаси билан танишамиз.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

21-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон мавжуд бўлсаки, барча $n > n_0$ ва барча $m > n_0$ лар учун

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \tag{3.11}$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *фундаментал кетма-кетлик* деб аталади.

Демак, фундаментал кетма-кетлик шундай кетма-кетликки, унинг бирор $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ҳадидан бошлаб ҳар қандай иккита ҳади орасидаги масофа аввалдан берилган ихтиёрий $\varepsilon > 0$ дан кичик бўлади.

Биз ушбу параграфда кетма-кетликнинг фундаментал бўлиши билан унинг яқинлашувчи бўлиши эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Аввало фундаментал бўлган ҳамда бўлмаган кетма-кетликларга мисоллар келтирайлик.

Мисоллар. 1. $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$. Бу кетма-кетлик учун (3.11) шартнинг бажарилишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| < \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра натурал n_0 сонни

$$n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$$

деб олсак, у ҳолда барча $n > n_0$ ва барча $m > n_0$ лар учун

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган кетма-кетлик фундаменталдир.

2. $\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^3}\right\}$.

Бу ҳолда ($n > m$ да)

$$|x_n - x_m| = \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

бўлиб, бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчига ушбу

$$\frac{1}{p^2} < \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

тенгсизликни қўллаииб топамиз:

$$|x_n - x_m| < \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}.$$

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ деб олинса, унда $n > m > n_0$ бўлганда

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

бўлади. Бу берилган кетма-кетликнинг фундаментал эканини билдиради.

3. Энди фундаментал бўлмаган кетма-кетликка мисол келтирамиз. Қуйидаги

$$\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right\}:$$

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \ldots$$

кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетлик учун ҳар қандай $m>1$ олганимизда ҳам

$$|x_{2m}-x_m|=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m}>m\cdot\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу ҳол берилган кетма-кетликнинг фундаментал эмаслигини кўрсатади.

13-теорема (Коши теоремаси). *Кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун у фундаментал бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, $\lim x_n=a$ бўлсин. Лимит таърифига мувофиқ, $\forall\varepsilon>0$ берилганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $n_0\in N$ сон топиладики, барча $n>n_0$ сонлар учун $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, ихтиёрий $n>n_0$ ва $m>n_0$ сонлар учун

$$|x_n-x_m|=|x_n-a+a-x_m|\leqslant|x_n-a|+|x_m-a|<\varepsilon.$$

Бу эса $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик эканини кўрсатади.

Етарлилиги. $\{x_n\}$ — фундаментал кетма-кетлик бўлсин. Демак, $\forall\varepsilon>0$ учун шундай $n_0\in N$ сон топиладики, $n>n_0$, $m>n_0$ лар учун $|x_n-x_m|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли. Бу тенгсизликда n сон (n_0 дан катта) ихтиёрий бўлишини қолдириб, m натурал соннинг n_0 дан катта бирор тайин қийматини олиб, юқоридаги тенгсизликни қуйидаги

$$x_m-\varepsilon<x_n<x_m+\varepsilon$$

кўринишда ёзиб оламиз. Демак, $n>n_0$ да $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг x_n ҳадлари $(x_m-\varepsilon,\ x_m+\varepsilon)$ интервалга тегишли бўлиб, ундан кетма-кетликнинг чегараланганлиги келиб чиқади. Больцано — Вейерштрасс леммасига кўра $\{x_n\}$ кетма-кетликдан чекли сонга интилувчи $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин. Бу қисмий кетма-кетлик лимитини a билан белгилайлик: $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. Энди a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити эканини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, бир томондан $x_{n_k}\to a$ бўлгани учун $\forall\varepsilon>0$ га кўра шундай $k_0\in N$ сон топиладики, $k>k_0$ лар учун $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

Иккинчи томондан, $m=n_k$ бўлганда $|x_n-x_{n_k}|<\varepsilon$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Юқоридаги тенгсизликларга кўра

$$|x_n-a|=|x_n-x_{n_k}+x_{n_k}-a|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|<2\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\lim x_n=a$ эканини кўрсатади. Теорема исбот бўлди.

Исбот этилган теорема Коши теоремаси ёки яқинлашиш мезони (критерийси) деб юритилади. Бу теорема муҳим назарий аҳамиятга эга.

11-§. Кетма-кетликнинг юқори ва қуйи лимитлари

Бизга $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, $\{x_{n_k}\}$ эса унинг бирор қисмий кетма-кетлиги бўлсин.

Маълумки, кетма-кетлик лимитга эга бўлмаган ҳолда ҳам у қисмий лимитларга эга бўлиши мумкин. Бу қисмий лимитларнинг энг каттаси ҳамда энг кичигининг мавжудлиги масаласини қараймиз.

22-таъриф. $\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг каттаси (энг кичиги) берилган кетма-кетликнинг *юқори (қуйи) лимити* деб аталади ва

$$\overline{\lim}\, x_n \,(\underline{\lim}\, x_n)$$

каби белгиланади.

Ҳар қандай кетма-кетлик юқори ва қуйи лимитларга эга бўлишини исботлаймиз.

Аввало юқоридан чегараланмаган ҳамда юқоридан чегараланган кетма-кетликлар учун ҳар доим юқори лимитнинг мавжуд бўлишини кўрсатайлик.

1. $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган. Ўсувчи ҳамда $+\infty$ га интилувчи

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots$$

кетма-кетликни олайлик $(a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots,\ a_k \to +\infty)$. Модомики, $\{x_n\}$ юқоридан чегараланмаган экан, унда кетма-кетликнинг шундай x_{n_1} ҳади топиладики, $x_{n_1} > a_1$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Худди шунга ўхшаш кетма-кетликнинг x_{n_1} ҳадидан кейин келадиган x_{n_2} ҳади $(n_1 < n_2)$ топиладики, $x_{n_2} > a_2$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу жараённи давом эттириб, k-қадамда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_{k-1}}$ ҳадларидан кейин келадиган шундай x_{n_k} ҳадини топамизки, бу ҳад учун

$$x_{n_k} > a_k\ (n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < n_k)$$

тенгсизлик ўринли бўлади ва ҳ. к.

Натижада $\{x_n\}$ кетма-кетликдан ушбу

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots$$

қисмий кетма-кетлик ажратилиб, бунда барча $k \in N$ лар учун $x_{n_k} > a_k$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шартга кўра $\lim a_k = +\infty$. Бундан юқоридаги тенгсизликка кўра $\lim x_{n_k} = +\infty$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, унинг юқори лимити мавжуд ва $+\infty$ га тенг бўлади: $\overline{\lim} x_n = +\infty$.

2. $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган. Бу ҳолда шундай ўзгармас M сон мавжуд бўладики, барча $n \in N$ лар учун $x_n \leqslant M$ бўлади.

$\{x_n\}$ нинг ҳадлари ёрдамида қуйидаги кетма-кетликларни тузамиз:

$$\{x_n\}_1 : x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$
$$\{x_n\}_2 : x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\{x_n\}_k : x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots$$

Бунда $\{x_n\}_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ лар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликларидир. Агар $\{x_n\}_k$ белгининг ўзи билан $\{x_n\}_k$ кетма-кетлик ҳадларидан тузилган тўпламни белгиласак, унда бир томондан, $\{x_n\}_1$, $\{x_n\}_2$, $\ldots$ тўпламларнинг юқоридан чегараланганлиги, иккинчи томондан эса, бу тўпламлар орасида

$$\{x_n\}_1 \supset \{x_n\}_2 \supset \ldots \supset \{x_n\}_k \supset \ldots$$

муносабатлар борлигини кўрамиз. Бу тўпламларнинг аниқ юқори чегаралари мавжуд. Биз уларни мос равишда $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ орқали белгилаймиз:

$$\sup\{x_n\}_1 = \sup_{n>1}\{x_n\} = M_1,$$
$$\sup\{x_n\}_2 = \sup_{n>2}\{x_n\} = M_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sup\{x_n\}_k = \sup_{n>k}\{x_n\} = M_k.$$

Аниқ юқори чегаранинг хоссасига асосан

$$M_{k+1} \leqslant M_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

бўлади. Демак, $\{M_k\}$ — камаювчи кетма-кетлик. У ҳолда

$$\lim M_k = \lim \sup_{n>k}\{x_n\}$$

лимит мавжуд ва у чекли ёки $-\infty$ бўлади.

Фараз қилайлик, $\lim M_k = -\infty$ бўлсин. У ҳолда ҳар қандай мусбат A сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $M_{n_0} < -A$ бўлади. Аммо $n > n_0$ лар учун

$$x_n \leqslant M_{n_0} = \sup\{x_{n_0+1},\ x_{n_0+2},\ \ldots\}$$

бўлиб, ундан эса

$$x_n < -A$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса $\lim x_n = -\infty$ эканини кўрсатади.

$\{M_k\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлсин. Биз уни M_0 билан белгилайлик: $\lim M_k = M_0$.

Нолга интилувчи $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ кетма-кетликни оламиз. Модомики,

$$M_k = \sup_{n>k}\{x_n\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

экан, унда аниқ юқори чегаранинг хоссасига кўра, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг шундай x_{n_k}, $k = 1, 2, 3, \ldots$ ҳадлари мавжудки,

$$M_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leqslant M_k$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Кейинги тенгсизликларда $k \to \infty$ да лимитга ўтиб,

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = M_0$$

бўлишини топамиз. Демак, M_0 берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий лимити. Энди M_0 ни $\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг каттаси эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, лимит таърифига асосан $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $k > n_0$ $(k \in N)$ лар учун $M_0 - \varepsilon < M_k < M_0 + \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Яна $M_k = \sup\limits_{n>k}\{x_n\}$ ни эътиборга олиб, барча $n > n_0$ лар учун $x_n < M_0 + \varepsilon$ эканини топамиз. Бундан эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар қандай қисмий лимити $M_0 + \varepsilon$ дан катта бўла олмаслиги кўринади. Олинган ε соннинг ихтиёрийлигидан эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий лимити M_0 дан катта бўла олмаслиги келиб чиқади. Демак, M_0 сон $\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг каттасидир, яъни

$$\overline{\lim}\, x_n = M_0.$$

Худди шунга ўхшаш қуйидан чегараланмаган ҳамда қуйидан чегараланган кетма-кетликлар учун ҳар доим уларнинг қуйи лимитлари мавжуд бўлиши кўрсатилади. Кетма-кетлик қуйидан чегараланган ҳолда, унинг қуйи лимити

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim m_k$$

бўлиб, бунда $m_k = \inf\limits_{n>k}\{x_n\}$.

Шундай қилиб қуйидаги теоремага келамиз.

14-теорема. *Ҳар қандай кетма-кетликнинг қуйи ҳамда юқори лимитлари мавжуд.*

7-натижа. Агар кетма-кетлик чегараланган бўлса, унинг қуйи ҳамда юқори лимитлари чекли бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\right\}$$

кетма-кетликнинг қуйи ҳамда юқори лимитларини топинг.

Бу кетма-кетлик учун

$$M_1 = \sup_{n \geq 1}\{x_n\} = \frac{3}{2}, \quad m_1 = \inf_{n \geq 1}\{x_n\} = -\frac{4}{3},$$

$$M_2 = \sup_{n \geq 2}\{x_n\} = \frac{5}{4}, \quad m_2 = \inf_{n \geq 2}\{x_n\} = -\frac{4}{3},$$

. . . .

$$M_{2k} = M_{2k+1} = \frac{2k+3}{2k+2}, \quad m_{2k-1} = m_{2k} = -\frac{2k+2}{2k+1}$$

. . . .

бўлади. У холда

$$\lim M_k = 1, \quad \lim m_k = -1.$$

Демак,

$$\overline{\lim}\left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\right\} = 1, \ \underline{\lim}\left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\right\} = -1.$$

Энди юқори ва қуйи лимитларнинг хоссаларини келтирамиз. Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\overline{\lim}\, x_n = a$$

бўлсин. У холда $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам:

1°. Шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун

$$x_n < a + \varepsilon,$$

2°. $\forall n_1 \in N$ сон учун ε ва n_1 ларга боғлиқ шундай натурал сон $n' > n_1$ топиладики,

$$x_{n'} > a - \varepsilon$$

бўлади.

Юқори лимитнинг бу хоссалари қуйидаги маънони англатади: $\forall \varepsilon > 0$ сон тайин олинганда, биринчи хосса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фақатгина чекли сондаги ҳадларигина

$$x_n > a + \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантиришини, иккинчи хосса эса бу кетма-кетликнинг

$$x_n > a - \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ҳадлари сони чексиз кўп бўлишини ифодалайди.

Ҳақиқатан, агар $\{x_n\}$ нинг чексиз кўп сондаги ҳадлари $a + \varepsilon$ дан катта бўлса, у холда $a + \varepsilon$ сондан кичик бўлмаган $b\,(b \geqslant a + \varepsilon)$ га интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги мавжуд, бу $a = \overline{\lim}\, x_n$ га зид бўлади. Демак, $a + \varepsilon$ дан ўнгда кетма-кетликнинг кўпи билан чекли сондаги ҳадлари ётади. Бу 1°-хоссани исботлайди:

Модомики, $\lim x_n = a$ экан, унда $\{x_n\}$ нинг қисмий лимитларидан бири a га тенг: $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. Лимит таърифидан эса бу $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетликнинг, демак $\{x_n\}$ нинг ҳам, чексиз кўп сондаги ҳадлари $a-\varepsilon$ дан катта бўлади. Демак, 2°-хосса ҳам исбот бўлди. Аксинча, бирор a сон юқоридаги икки шартни қаноатлантирса, у $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг юқори лимити бўлади.

Равшанки, 1°- ва 2°-шартларни қаноатлантирувчи a сон учун

$$a=\lim_{k\to\infty}\sup_{n>k}\{x_n\}$$

бўлиб, бундай ифодаланган a $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг юқори лимити бўлади. Демак, $a=\overline{\lim}\, x_n$.

Фараз қилайлик, бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$b=\underline{\lim}\, x_n$$

бўлсин. У ҳолда $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам:

1°. Шундай $n_0\in N$ сон топиладики, барча $n>n_0$ лар учун

$$x_n>b-\varepsilon,$$

2°. $\forall n_1\in N$ сон учун ε ва n_1 ларга боғлиқ натурал сон $n'>n_1$ топиладики,

$$x_{n'}<b+\varepsilon$$

бўлади.

Кетма-кетлик қуйи лимитининг бу хоссалари юқоридагидек исботланади.

15-теорема. *$\{x_n\}$ кетма-кетлик c лимитга эга бўлиши учун*

$$\underline{\lim}\, x_n=\overline{\lim}\, x_n=c \qquad (3.12)$$

тенгликларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $\lim x_n=c$ бўлсин. Кетма-кетлик лимитга эга бўлган ҳолда унинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги ҳам шу лимитга эга бўлишидан (3.12) тенгликларнинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $\{x_n\}$ кетма-кетлиги учун (3.12) тенгликлар ўринли бўлсин. Қуйи лимит хоссасига кўра, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топиладики, $n>n_0$ лар учун $x_n>c-\varepsilon$ бўлади. Шунингдек, юқори лимит хоссасига асосан, ўша $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $n_1\in N$ сон топиладики, барча $n>n_1$ лар учун $x_n<c+\varepsilon$ бўлади.

Энди n_0 ва n_1 сонларнинг каттасини $\bar{n}$ деб олсак, унда $n>\bar{n}$ лар учун

$$c-\varepsilon<x_n<c+\varepsilon$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу эса $\lim x_n=c$ эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

4- БОБ

ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1- §. Функция тушунчаси

Биз 1- бобда ихтиёрий E ва F тўпламлар берилган ҳолда E нинг элементларини F тўпламнинг элементларига ўтказувчи

$$f: E \rightarrow F$$

f акслантиришларни қараб ўтган эдик.

Хусусан, $E = N$, $F = R$ бўлганда натурал сонлар тўплами N нинг элементларини ҳақиқий сонлар тўплами R нинг элементларига ўтказувчи

$$f: N \rightarrow R \quad (f: n \rightarrow x_n)$$

акслантиришлар сонлар кетма-кетлиги тушунчасига олиб келди ва улар 3- бобда батафсил ўрганилди.

Энди $E = R$, $F = R$ бўлганда $x\,(x \in R)$ ўзгарувчи билан $y\,(y \in R)$ ўзгарувчи орасидаги боғланишни, яъни

$$f: R \rightarrow R \quad (f: x \rightarrow y)$$

акслантиришни ўрганамиз. Бу бизни функция тушунчасига олиб келади.

1. Функция таърифи. X ва Y лар ҳақиқий сонларнинг бирор тўпламлари ($X \subset R$, $Y \subset R$) бўлиб, x ва y ўзгарувчилар мос равишда шу тўпламларда ўзгарсин: $x \in X$, $y \in Y$.

1-таъриф. Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор f қоидага кўра Y тўпламдан битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда *функция берилган* деб аталади.

Баъзан функция X тўпламда берилган дейиш ўрнига функция X тўпламда аниқланган деб ҳам юритилади. Функция

$$f: x \rightarrow y \quad \text{ёки} \quad y = f(x)$$

каби белгиланади.

Бунда X функциянинг *аниқланиш тўплами (соҳаси)*, Y эса функциянинг *ўзгариш тўплами (соҳаси)* деб аталади. x *эркли ўзгарувчи* ёки *функциянинг аргументи*, y *эрксиз ўзгарувчи* ёки x ўзгарувчининг *функцияси* дейилади.

Мисоллар 1. $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$ бўлсин, f қоида сифатида

$$f: x \rightarrow y = x^2 + 1$$

ни олайлик. Бу ҳолда, равшанки, ҳар бир $x \in X$ учун битта $x^2 + 1$ топилади ва $x^2 + 1 \in Y$ бўлади. Демак, X да $y = x^2 + 1$ функция аниқланган.

2. $X = R$, $Y = Z$ ва f — ҳар бир ҳақиқий x сонга унинг бутун қисми $[x]$ ни мос қўювчи қоида бўлсин. Демак,

$$f: x \rightarrow [x] \quad \text{ёки} \quad y = [x]$$

функцияга эга бўламиз.

3. Ҳар бир рационал сонга 1 ни, ҳар бир иррационал сонга 0 ни мос қўйиш натижасида функция берилган бўлади. Бу функция *Дирихле функцияси* дейилади ва $D(x)$ каби белгиланади:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Юқорида келтирилган таърифда x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига y ўзгарувчининг битта қийматини мос қўядиган муайян қоида ёки қонуннинг берилиши муҳимдир. Кўпинча, амалиётда функциянинг аниқланиш соҳаси X ҳам шу қоидага кўра, яъни функционал боғланишнинг характерига кўра топилади.

Масалан, ушбу

$$y = \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$$

функциянинг аниқланиш соҳаси, табиийки, $x = 2$, $x = 3$ нуқталарни ўз ичига олмаслиги керак.

Таърифда функциянинг ўзгариш соҳаси Y берилган бўлиши тақозо этилади, аммо шу Y тўпламнинг ҳар бир элементи бирор $x \in X$ га, функционал боғланишни аниқловчи қоидага кўра, мос қўйилган бўлиши шарт эмас. Ушбу

$$\{f(x) : x \in X\}$$

тўплам функциянинг *қийматлари тўплами* дейилади ва Y_f каби белгиланади:

$$Y_f = \{f(x) : x \in X\}.$$

Равшанки,

$$Y_f \subset Y.$$

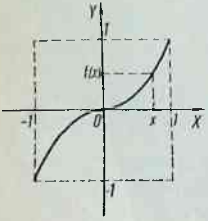
Келтирилган 1- мисолда $Y_f = [1, +\infty]$, 2- мисолда $Y_f = Z$, 3- мисолда эса $Y_D = \{0, 1\}$ бўлади.

Бирор X тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган бўлсин. $x_0 \in X$ га мос келувчи y_0 миқдор $y = f(x)$ функциянинг $x = x_0$ нуқтадаги *хусусий қиймати* деб аталади ва у $f(x_0) = y_0$ каби белгиланади.

Текисликда Декарт координаталар системасини оламиз. Текисликнинг $(x, f(x))$ нуқталаридан иборат ушбу

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in X, \quad f(x) \in Y\}$$

тўплам $y = f(x)$ функциянинг *графиги* деб аталади. Равшанки, $\{(x, f(x))\} \subset X \times Y$ бўлади. Масалан, $y = x^3$ функцияни $X = [-1, 1]$ тўпламда қарайлик. Бу функциянинг графиги 19- чизмада ифодаланган. Бунда $X \times Y$ тўплам штрихлар билан кўрсатилган квадратни билдиради.



19- чизма.

2. **Функциянинг берилиш усуллари.** Функция таърифидаги ҳар бир x га битта y ни мос қўядиган қоида ёки

қонун турли усулда берилиши мумкин. Биз уларни қисқача қараб ўтамиз.

Кўпинча x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш формулалар ёрдамида ифодаланади. Бунда аргумент x нинг ҳар бир қийматига мос келадиган y функциянинг қийматини x устида аналитик амаллар — қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, илдиз чиқариш, логарифмлаш ва ҳ. к. амалларни бажариш натижасида топилади. Одатда бундай усул функциянинг *аналитик усулда берилиши* дейилади.

Мисоллар: 1. x ва y ўзгарувчилар ушбу

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

формула ёрдамида боғланган бўлсин. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $X=\{x:\ x\in R,\ -1\leqslant x\leqslant 1\}=[-1,\ 1]$ тўпламдан иборат. Бунда ҳар бир x га мос келадиган y нинг қиймати аввало x ни квадратга кўтариш, сўнгра уни 1 дан айириш ва бу айирмадан квадрат илдиз чиқариш каби амалларни бажариш натижасида топилади.

2. x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш қуйидаги формулалар ёрдамида берилган бўлсин:

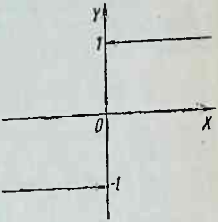
$$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{агар } x>0,\\ -1, & \text{агар } x<0.\end{cases}$$

Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $X=R\setminus\{0\}$ бўлиб, унинг қийматлари соҳаси $Y=\{-1,\ 1\}$ тўпламдан иборат. Одатда бу функция

$$y=\operatorname{sign} x$$

каби белгиланади. Бунда sign — лотинча signum сўзидан олинган бўлиб, «белги», «ишора» деган маънони англатади.

Бу $y=\operatorname{sign} x$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги қийматини нолга тенг деб қабул қилсак, у R тўпламда аниқланган бўлади (20-чизма).

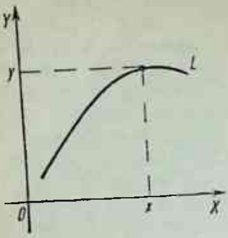


20- чизма.

Баъзи ҳолларда $x\,(x\in X)$ ва $y\,(y\in Y)$ ўзгарувчилар орасидаги боғланиш формулалар ёрдамида берилмасдан жадвал орқали берилган бўлиши мумкин. Масалан, кун давомида ҳаво ҳароратини кузатганимизда, t_1 вақтда ҳаво ҳарорати T_1, t_2 вақтда ҳаво ҳарорати T_2 ва ҳ. к. бўлсин. Натижада қуйидаги жадвалга келамиз:

вақт, t	t_1	t_2	t_3	. . .	t_k
ҳарорат, T	T_1	T_2	T_3	. . .	T_k

Бу жадвал t вақт билан ҳаво ҳарорати T орасидаги функционал боғланишни ифодалайди, бунда t — аргумент, T эса функция бўлади. Боғланишнинг бундай берилиши, функциянинг *жадвал усулида берилиши* деб аталади.



21- чизма.

XOY текислигида шундай L чизиқ берилган бўлсинки, OX ўқида жойлашган нуқталардан шу ўққа ўтказилган перпендикуляр бу L чизиқни фақат битта нуқтада кесиб ўтсин.

OX ўқидаги бундай нуқталардан иборат тўпламни X орқали белгилайлик. X тўпламдан ихтиёрий x ни олиб, бу нуқтадан OX ўқига перпендикуляр ўтказамиз. Бу перпендикулярнинг L чизиқ билан кесишган нуқтасининг ординатасини y билан белгилаймиз ва олинган x га бу y ни мос қўямиз. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га юқорида кўрсатилган қоидага кўра битта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Бунда x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш L чизиқ ёрдамида берилган бўлади (21- чизма). Одатда f нинг бундай берилиши унинг *график усулда берилиши* деб аталади.

Шундай қилиб, биз функциянинг аналитик, жадвал, график усулларда берилишини кўриб ўтдик. x ва y ўзгарувчилар орасидаги функционал боғланиш юқоридаги учта усул билангина берилиб қолмасдан, бошқача, фақатгина иборалар билан ҳам берилиши мумкин. Масалан, ҳар бир натурал n сонга унинг бўлувчилари сонини мос қўяйлик. Бу мосликни φ орқали белгилаймиз. Хусусан,

$$\varphi(1)=1,\ \varphi(2)=2,\ \varphi(3)=2,\ \varphi(4)=3,\ \varphi(5)=2,\ \ldots,\ \varphi(12)=6,\ \ldots$$

Одатда бу функция *Эйлер функцияси* дейилади.

Эйлер функцияси учун аналитик формула мавжуд эмас, уни жадвал усулида ҳам, график усулда ҳам бериб бўлмайди. Маълумки, ихтиёрий туб p сони учун $\varphi(p)=2$ бўлади. Етарли катта туб сонлар мавжудлигидан бу функциянинг табиати мураккаблиги кўринади.

Математик анализ курсида асосан аналитик усулда берилган функциялар ўрганилади.

X тўпламда $y=f(x)$ функция аниқланган бўлсин. Агар бу функция қийматларидан тузилган

$$Y_f=\{f(x):\ x\in X\}$$

тўплам юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда *юқоридан (қуйидан) чегараланган* деб аталади, акс ҳолда эса функция *юқоридан (қуйидан) чегараланмаган* дейилади. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, функция шу тўпламда *чегараланган* дейилади.

Масалан, ушбу

$$y=\frac{1}{x}$$

ункция $X = (0,1)$ тўпламда қуйидан чегараланган, аммо юқоридан гараланмаган.

X тўпламда аниқланган икки $f(x)$ ҳамда $\varphi(x)$ функцияларни райлик. Агар $\forall x \in X$ да $f(x) = \varphi(x)$ бўлса, бу функциялар X тўп-мда *бир-бирига тенг функциялар* дейилади.

X тўпламда аниқланган $F(x) = f(x) + \varphi(x)$ функция $f(x)$ ва $\varphi(x)$ нкцияларнинг йиғиндисидан иборат. Икки функция айирмаси, кў-йтмаси ва нисбати ҳам шунга ўхшаш таърифланади.

3. Жуфт ва тоқ функциялар. Жуфт ҳамда тоқ функция-ар билан танишишдан аввал, O нуқтага нисбатан симметрик бўл-ан сонлар тўпламини таърифлаймиз.

Агар $\forall x \in X$ учун $-x \in X$ бўлса, X тўплам O нуқтага нисбатан *иметрик тўплам* дейилади.

Энди O нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўпламда $y = f(x)$ ункция аниқланган бўлсин. Агар $\forall x \in X$ учун

$$f(-x) = f(x)$$

ўлса, $f(x)$ — *жуфт функция* деб аталади. Агар $\forall x \in X$ учун

$$f(-x) = -f(x)$$

ўлса, $f(x)$ — *тоқ функция* деб аталади. Масалан,

$$y = \cos x, \quad y = |x|$$

ункциялар учун

$$\cos(-x) = \cos x, \quad |-x| = |x|$$

ўлгани сабабли улар жуфт функциялардир.

Ушбу

$$y = \sin x, \quad y = x^3$$

ункциялар учун

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad (-x)^3 = -x^3$$

лгани сабабли улар тоқ функциялардир. Икки жуфт (тоқ) функ-ия йиғиндиси, айирмаси, яна жуфт (тоқ) функциялар бўлиши рав-ндир.

Шуни таъкидлаш лозимки, функция ҳар доим жуфт ёки тоқ ункция бўлавермайди. Бундай функцияларга $f(x) = x^2 - x$, $\varphi(x) =$ $\sin x - \cos x$ лар мисол бўла олади. Бу функциялар жуфт ҳам, оқ ҳам эмас. Бироқ қуйидаги теорема ўринлидир.

1-теорема. *O нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўп-мда аниқланган ҳар қандай $f(x)$ функция жуфт ва тоқ функ-иялар йиғиндиси кўринишида ифодаланади.*

Исбот. Берилган $f(x)$ функция ёрдамида қуйидаги

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$$\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

ункцияларни тузамиз. Бу функциялар учун

$$\varphi(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\varphi(x),$$

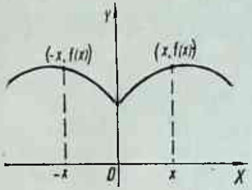
$$\psi(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-\psi(x)$$

бўлиб, ундан $\varphi(x)$ жуфт, $\psi(x)$ эса тоқ функция эканлиги кўринади. Шу билан бирга ушбу

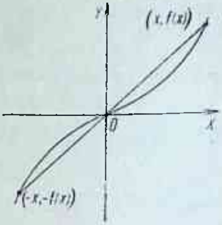
$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x)$$

тенглик ҳам ўринли экани равшан. Бу эса теоремани исботлайди.

Жуфт функциянинг графиги ордината ўқига нисбатан симметрик жойлашгандир. Ҳақиқатан, бундай функциялар учун $(x, f(x))$ нуқта функция графигида ётган бўлса, $(-x, f(x))$ нуқта ҳам шу графикда жойлашган бўлади (22- чизма).



22- чизма.



23- чизма.

Тоқ функциянинг графиги координата бошига нисбатан симметрик жойлашади. Ҳақиқатан, бу функция графигида $(x; f(x))$ нуқта билан бирга ҳар доим $(-x, -f(x))$ нуқта ётади (23-чизма).

4. Даврий ва давриймас функциялар.

2- таъриф. $f(x)$ функция X тўпламда $(X \subset R)$ берилган бўлсин. Агар шундай ўзгармас $T (T \neq 0)$ сони мавжуд бўлсаки, $\forall x \in X$ учун

1) $x-T$ ва $x+T$ сонлар функциянинг берилиш соҳаси X га тегишли бўлса ва

2) $f(x+T)=f(x)$ (4.1)

бўлса, $f(x)$ функция *даврий функция* деб аталади.

Агар $f(x)$ даврий функция бўлмаса, у *давриймас функция* дейилади.

Бу таърифдаги T сони $(T \neq 0)$ $f(x)$ функциянинг *даври* дейилади.

Айтайлик, X тўпламда берилган $f(x)$ функция даврий функция бўлсин. Таърифга кўра, шундай $T (T \neq 0)$ сон топиладики, $\forall x \in X$ учун $x-T \in X$, $x+T \in X$ бўлади ва (4.1) тенглик бажарилади. Бу ҳолда, равшанки, $kT (k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ кўринишдаги сонларнинг ҳар бири учун ва $\forall x \in X$ учун $x+kT \in X$ ва $f(x+kT)=f(x)$ бўлади.

Шундай қилиб, агар бирор $T \neq 0$ ва $\forall x \in X$ учун (4.1) муноса-

зи ўринли бўлса, бу муносабат ихтиёрий $kT (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$
чун ҳам ўринли бўлар экан.
Демак, $\pm T$, $\pm 2T$, ... лар ҳам $f(x)$ функциянинг даврлари бў-
зди. $f(x)$ функциянинг мусбат даврлари тўпламини M деб белгилай-
ик. Агар

$$T_0 = \inf M$$

зи $f(x)$ функциянинг даври бўлса, яъни $T_0 \in M$ бўлса, у *энг кичик*
усбат давр (асосий давр) дейилади. Энг кичик мусбат давр мав-
уд бўлиши ҳам мумкин, мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин.
Мисоллар. 1. $f(x) = \sin x$ функция даврий функция. Унинг
зврлари тўплами $\{2k\pi : k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ бўлиб, энг кичик мус-
зг даври $T_0 = 2\pi$ бўлади.
2. $f(x) = \{x\}$ функцияни қарайлик, бунда $\{x\}$ — x сонининг каср
қсми. Бу даврий функциядир. Унинг даврлари тўплами $\{m: m =$
$= \pm 1, \pm 2, \dots\}$ бўлиб, энг кичик мусбат даври $T_0 = 1$ бўлади.
3. $f(x) = C$ бўлсин, бунда $C = \text{const}$. Бу даврий функциядир.
ктиёрий $T (T \neq 0)$ сон берилган функциянинг даври, яъни унинг
зврлари тўплами $R \setminus \{0\}$ дан иборат. Бу ҳолда энг кичик мусбат
зр мавжуд эмас.
4. Дирихле функцияси

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

и қарайлик. Айтайлик, T — бирор рационал сон $(T \neq 0)$ бўлсин.
ҳолда

$$+T = \begin{cases} \text{рационал сон, агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ \text{иррационал сон, агар } x \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

лади. Демак,

$$D(x + T) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

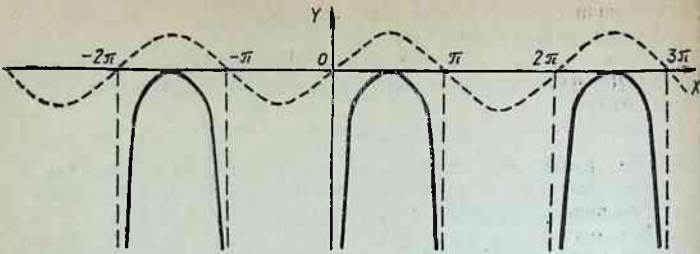
ундай қилиб, $\forall x$ учун T — рационал сон бўлганда

$$D(x + T) = D(x) \tag{4.2}$$

лади. Демак, Дирихле функцияси даврий функция, ихтиёрий $T \neq 0$
ционал сон бу функциянинг даври экан.
Энди бирор T иррационал сонни олайлик. Унда $\forall x$ учун (4.2)
носабат ўринли бўлмайди, чунки x рационал сон бўлганда $x + T$
рационал сон бўлиб, $D(x) = 1$, $D(x + T) = 0$, яъни $D(x + T) \neq$
$D(x)$ бўлади. Шундай қилиб, иррационал сонлар Дирихле функ-
яси учун давр эмас.
Бинобарин, Дирихле функциясининг даврлари тўплами $Q \setminus \{0\}$
н иборат. Энг кичик мусбат давр эса мавжуд эмас — барча мус-
т рационал сонлар тўпламининг инфимуми ноль бўлиб, у $Q \setminus \{0\}$
тегишли эмас.
5. Ушбу

$$f(x) = \ln \sin x$$

нкцияни қарайлик. Бу функция $\{x: x \in (2\pi k, (2k + 1)\pi), k = 0,$



24-чизма.

$\pm 1, \pm 2, \ldots\}$ тўпламда берилган. У даврий функция, даврлари тўплами эса $\{2k\pi: k = \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ бўлади. Энг кичик мусбат даври 2π га тенг (24-чизма)

6. $f(x) = x^2$ нинг давриймас функция эканлиги равшандир. Чунки $\forall x$ ва бирор $T (T \neq 0)$ сони учун (4.1) муносабат ўринли бўлмайди. Чунки $\forall x$ учун $(x + T)^2 = x^2$ тенглик фақат $T = 0$ бўлгандагина тўғри бўлади, яъни бирор $T\ (T \neq 0)$ учун ҳам юқоридаги тенглик $\forall x$ учун бажарилмайди.

7. Қуйидаги

$$f_1(x) = \sqrt{x(1-x)}, \quad f_3(x) = e^{-x^2},$$
$$f_2(x) = 2x - \cos x, \quad f_4(x) = 2x\cos(x^2)$$

функциялар давриймас функциялар бўлади. Уларнинг давриймас функциялар бўлишини кейинроқ кўрсатамиз.

Даврий функцияларнинг хоссалари. Даврий функция таърифидан бевосита қуйидаги хоссалар келиб чиқади.

1°. Агар X тўпламда берилган $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири даврий функциялар бўлиб, $T \neq 0$ уларнинг даври бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ ва $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ функциялар ҳам даврий функциялар бўлади ва T уларнинг ҳам даври бўлади.

2°. X тўпламда берилган $f(x)$ функция даврий функция, $T \neq 0$ унинг даври бўлсин. g эса $f(x)$ нинг қийматлари тўплами $\{f(x): x \in X\}$ да берилган ихтиёрий функция бўлсин. У ҳолда $g(f(x))$ мураккаб функция ҳам даврий функция бўлади ва T унинг ҳам даври бўлади.

Юқорида келтирилган хоссалардан фойдаланиб, бизга маълум бўлган содда даврий функциялар воситасида исталганча мураккабликка эга бўлган даврий функцияларни тузиш мумкин.

Мисол. Ушбу

$$\varphi_1(x) = \sin^3 2x, \quad \varphi_2(x) = \arcsin(\cos x),$$

$$\varphi_3(x) = \ln \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

нкциялар даврий функциялар бўлади. Уларнинг даврийлиги $\sin x$, x, $\operatorname{tg} x$ функцияларнинг даврийлигидан ҳамда 1°-ва 2°-хоссалар- келиб чиқади.

Қуйидаги хоссалар даврий функциялар синфини характерловчи салар бўлиб, бирор функциянинг даврийлигини ва, аксинча, риймаслигини текширишда қўлланилади.

$f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин.

3°. $f(x)$ даврий функция, $T \neq 0$ сони унинг даври бўлсин. Агар нуқта бу функциянинг берилиш соҳасига тегишли, яъни $x_0 \in X$ са, у ҳолда барча $x_0 + kT$ кўринишдаги $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ қталар ҳам шу соҳага тегишли бўлади:

$$x_0 + kT \in X \, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Агар x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг берилиш соҳасига тегишли бўл- са ($x_0 \overline{\in} X$), у ҳолда барча $x_0 + kT$ кўринишдаги $(k = 0, \pm 1,$ $2, \ldots)$ нуқталар ҳам шу соҳага тегишли бўлмайди ($x_0 + kT \overline{\in} X$). Шундай қилиб, бу хосса даврий функциянинг берилиш соҳаси ълум структурага эга бўлиши кераклигини кўрсатади.

Бу хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1-натижа. Даврий функциянинг берилиш соҳасида абсолют ймати бўйича исталганча катта бўлган мусбат ва манфий сонлар лади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln \sin x$$

нкцияни қарайлик. Бу функция

$$A = \{x : x \in (2k\pi, \ (2k + 1)\pi), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

пламда берилган. Қаралаётган функциянинг даврийлиги юқорида- 2°-хоссадан ҳам келиб чиқади.

$\forall x_0 \in A$ нуқтани олайлик. A тўпламнинг тузилишига кўра барча $+ 2k\pi \, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ кўринишдаги нуқталар шу A тўп- мга тегишли бўлишини пайқаш қийин эмас. Агар $x_1 \overline{\in} A$ бўлса, у лда барча $x_1 + 2k\pi \, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ кўринишдаги нуқта- р ҳам A тўпламга тегишли бўлмайди.

Қуйидаги

$$f(x) = \sqrt{x(1 - x)}$$

нкция даврий эмас функциядир, чунки унинг берилиш соҳаси $X =$ $[0, 1]$ сегментдангина иборат.

4°. Агар $f(x)$ даврий функция бўлса, бу функция ўзининг ҳар р қийматини x аргументнинг чексиз кўп қийматларида (бу қий- тлар орасида абсолют қиймати бўйича ҳар қанча катта бўлганлари бор) қабул қилади.

Бу хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

2-натижа. Агар $f(x)$ даврий функция бўлса, у берилиш соҳа- да монотон функция бўлмайди.

Мисол: $f(x) = \sin x$ даврий функция. Унинг $X = (-\infty, +\infty)$ монотон эмаслиги равшан.

Қуйидаги

$$f_2(x) = 2x - \cos x, \quad f_3(x) = e^{-x^2}$$

функциялар даврийmас функциялар бўлади, чунки $f_2(x) = 2x - \cos x$ функция $(-\infty, +\infty)$ да ўсувчи, $(f_2'(x) = 2 + \sin x > 0)$, $f_3(x) = e^{-x^2}$ функция эса 1 қийматни x аргументнинг фақат битта $x = 0$ қийматидагина қабул қилади.

Юқорида келтирилган 4°- хоссани қуйидагича айтса ҳам бўлади.

3- натижа. Агар $f(x)$ даврий функция бўлса, у ҳолда $\forall a \in R$ учун $f(x) = a$ тенглама ёки ечимга эга бўлмайди, ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Мисол. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ даврийmас функция бўлади. Чунки $\forall a \in R$ учун жумладан $a = 0$ да $f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$ тенглама иккитагина ечимга эга.

5°. $f(x)$ даврий функция бўлсин. Агарда

$$f(x + T) = f(x) \tag{4.1}$$

T га нисбатан тенглама сифатида қаралса (x ни эса параметр дейилса), у ҳолда (4.1) тенглама x параметрнинг барча қийматлари учун умумий бўлган нолдан фарқли камида битта $T = T_1$ ечимга эга бўлади.

Бу хоссага кўра $f(x)$ функциянинг даврийmаслигини кўрсатиш учун x нинг иккита $x = x_0$, $x = x_1$ қийматларида T га нисбатан ушбу

$$f(x_0 + T) = f(x_0), \ f(x_1 + T) = f(x_1)$$

тенгламаларнинг нолдан фарқли умумий ечимга эга эмаслигини кўрсатиш етарлидир.

Мисол. Ушбу $(-\infty, +\infty)$ да берилган

$$f(x) = \{x\} + \sin x$$

функцияни қарайлик, бунда $\{x\}$ — x сонининг каср қисми.

Фараз қилайлик, бу даврий функция бўлсин. $T \neq 0$ сони унинг даври бўлсин, У ҳолда $\forall x \in R$ учун

$$\{x + T\} + \sin(x + T) = \{x\} + \sin x$$

бўлади. Хусусан,

$$\begin{cases} x = 0 \text{ бўлганда } \{T\} + \sin T = 0, \\ x = -T \text{ бўлганда } \{-T\} + \sin(-T) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

бўлади. Бу тенгликлардан

$$\{T\} + \{-T\} = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Агар ҳар қандай x $(x \in R)$ сонининг каср қисми $\{x\}$ манфий бўлмаслигини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик фақат $\{T\} = \{-T\} = 0$ бўлганда, яъни T бутун бўлгандагина ўринли бўлишини топамиз.

Иккинчи томондан, агар $\{T\} = 0$ бўлса, (4.3) тенгликдан $\sin T = 0$, яъни $T = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ бўлиши келиб чиқади.

$k\pi$ кўринишдаги сонлар орасида фақат 0 сонигина бутун бўла-
Демак,

$$\{T\} + \sin T = 0, \ \{-T\} - \sin T = 0$$

гламалар ягона $T = 0$ умумий ечимга эга. Бундан эса, юқори-
н 5°-хоссага кўра берилган функциянинг давриймас эканлиги
иб чиқади.

6°. $f(x)$ даврий функция бўлиб, $T \neq 0$ унинг даври бўлсин. Агар
нлиги T га тенг бўлган бирор $[\alpha, \alpha + T]$ оралиқда

$$|f(x)| \leqslant M \quad (x \in [\alpha, \alpha + T])$$

са, аргумент x нинг ихтиёрий қийматида ҳам шу тенгсизлик
нли бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f_4(x) = 2x \cos(x^2)$$

кциянни қарайлик. Фараз қилайлик, бу даврий функция бўлиб,
$\neq 0$ сон униинг даври бўлсин. Равшанки, $\forall x \in [0, T]$ учун

$$|2x\cos(x^2)| \leqslant 2|x| \leqslant 2T$$

ади. 6°-хоссага кўра бу тенгсизлик $\forall x \in R$ учун ҳам ўринли
иши керак. Бироқ, $x = \sqrt{2k\pi}$ бўлганда $\left(k > \frac{T^2}{2\pi}\right)$ бу тенгсизлик
арилмайди. Демак, $f_4(x) = 2x\cos(x^2)$ давриймас функция.

Юқоридаги хоссалар, албатта, функциянинг даври сифатида
нг энг кичик мусбат даври (агар у мавжуд бўлса) олинганда
ўринлидир. Келгусида биз ушбу китобда энг кичик мусбат
ри мавжуд функцияларнигина қараймиз ва функция даври деган-
шу энг кичик мусбат даврни тушунамиз.

**4. Монотон функция. Тескари функция. Мураккаб
нкция.** Математик анализ курсида ўрганиладиган функциялар
ида монотон функциялар диққатга сазовордир. Биз бундай функ-
лар билан танишамиз.

(x) функция X тўпламда берилган бўлсин.

3-таъриф. Агар аргумент x нинг X тўпламдан олинган ихтиё-
x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
$) < f(x_2))$ тенгсизлик келиб чиқса, $f(x)$ функция X тўпламда
чи (қатъий ўсувчи) деб аталади.

4-таъриф. Агар аргумент x нинг X тўпламдаги ихтиёрий x_1
$_2$ қийматлари учун $x_1 < x_2$ бўлишидан $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$
сизлик келиб чиқса, $f(x)$ функция X тўпламда *камаювчи (қатъий
аювчи)* деб аталади.

Ўсувчи ҳамда камаювчи функциялар *монотон функциялар* деб
ади.

Мисол. $f(x) = x^3$ функция $X = R$ да қатъий ўсувчи. Дарҳақи-
$\forall x_1 \in R$, $\forall x_2 \in R$ нуқталар олиб, $x_1 < x_2$ бўлсин деб қарайлик.
олда

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) =$$
$$= (x_2 - x_1)\left[\left(x_2 + \frac{1}{2} x_1\right)^2 + \frac{3}{4} x_1^2\right] > 0.$$

Демак, $x_1 < x_2$ тенгсизлик бажарилганда $f(x_1) < f(x_2)$ тенгсизлик ҳам бажарилади.

1-бобда акслантириш ва унга тескари бўлган акслантириш билан танишган эдик. Функция ҳам акслантириш эканлигини билсак-да, курс давомида ўқувчи бевосита функциялар билан шуғулланишини эътиборга олган ҳолда, биз бу ерда тескари функция тушунчасини келтиришни лозим топдик.

X тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган бўлиб, Y_f эса функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин, яъни $Y_f = \{f(x) : x \in X\}$. Энди Y_f тўпламдан олинган ҳар бир y га X тўпламда фақат битта ($f(x) = y$ бўлган) x ни мос қўйиш мумкин бўлсин.

Бу ҳолда Y_f тўпламдан олинган ҳар бир y га X тўпламда битта x мос қўйилишини ифодалайдиган функцияга келамиз. Одатда, бу функция $y = f(x)$ га нисбатан *тескари функция* дейилади ва у $x = f^{-1}(y)$ каби белгиланади. Демак, $x = f^{-1}(y)$ шундай функцияки, $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ бўлади.

Агар $x = f^{-1}(y)$ функция $y = f(x)$ га нисбатан тескари функция бўлса, $y = f(x)$ функция $x = f^{-}(y)$ га нисбатан тескари бўлади. Шунинг учун ҳам $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ функциялар *ўзаро тескари функциялар* дейилади.

Равшанки, қуйидаги

$$f(f^{-1}(y) = y, \ f^{-1}(f(x)) = x$$

хоссалар ўринли.

Мисол. $y = f(x) = 2x + 1$ функцияни $[0, 1]$ оралиқда қарайлик. Бу функциянинг қийматлари $[1, 3]$ оралиқни ташкил этади. $[1, 3]$ оралиқда аниқланган $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ функция берилган $y = 2x + 1$ функцияга нисбатан тескари функция бўлади.

Энди мураккаб функция тушунчаси билан танишамиз.

$y = f(x)$ функция X соҳада аниқланган бўлиб, Y_f эса функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин, яъни $Y_f = \{f(x): x \in X\}$. Сўнгра Y_f тўпламда ўз навбатида бирор $z = \varphi(y)$ функция берилган бўлсин. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га Y тўпламда битта y (f: $x \to y$) сон ва Y тўпламдан олинган бундай y сонга битта z (φ: $y \to z$) сон мос қўйилади:

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi} z.$$

Демак, X тўпламдан олинган ҳар бир x га битта z сон мос қўйилади.

Одатда, бундай ҳолда f ва φ функцияларнинг *мураккаб функцияси берилган* дейилади ва у $z = \varphi(f(x))$ каби белгиланади.

Масалан, $z = \sqrt{x+1}$ функцияни қарайлик. Бу функция $z = \sqrt{y}$,

$=x+1$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган. $y=x+1$ функция $=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган бўлиб, $z=\sqrt{y}$ функция эса $y\geqslant 0$, ыни $x+1\geqslant 0$ да мавжуд бўлади. Демак, $z=\sqrt{x+1}$ мураккаб ункция ушбу $(X=\{x: x\in R,\ x\geqslant -1\})$ тўпламда аниқланган.

2- §. Элементар функциялар

Маълумки, ўрта мактаб математика курсида элементар функция-ар ва уларнинг баъзи бир хоссалари ўрганилади.

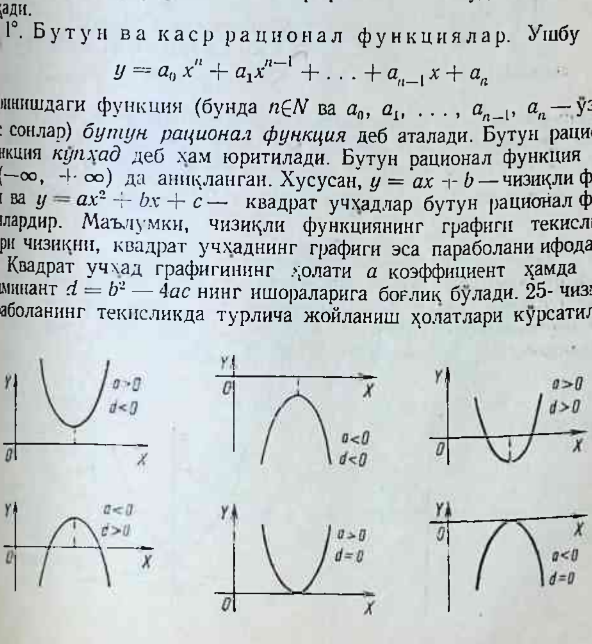
Функция — математик анализ курсида ўрганиладиган асосий объ-кт бўлгани учун биз ушбу параграфда элементар функцияларга ўхталамиз.

Элементар функциялар синфи асосан эркли ўзгарувчи $x\,(x\in R)$ амда ўзгармас сонлар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, аражага кўтариш ҳамда логарифмлаш амалларини бажариш нати-касида ҳосил бўлади. Бу ҳосил бўлган ифодаларнинг мавжудлиги -бобда батафсил қараб ўтилган ҳақиқий сонларнинг йиғиндиси, ирмаси, кўпайтмаси, нисбати, шунингдек, ҳақиқий соннинг ҳақи-ий даражаси, ҳақиқий сон логарифмининг мавжудлигидан келиб иқади.

1°. **Бутун ва каср рационал функциялар.** Ушбу

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

ўринишдаги функция (бунда $n\in N$ ва $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — ўзгар-ас сонлар) *бутун рационал функция* деб аталади. Бутун рационал ункция *кўпҳад* деб ҳам юритилади. Бутун рационал функция $R=$ $=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган. Хусусан, $y=ax+b$ — чизиқли функ-ия ва $y=ax^2+bx+c$ — квадрат учҳадлар бутун рационал функ-иялардир. Маълумки, чизиқли функциянинг графиги текисликда ўғри чизиқни, квадрат учҳаднинг графиги эса параболани ифодалай-и. Квадрат учҳад графигининг ҳолати a коэффициент ҳамда дис-иминант $d=b^2-4ac$ нинг ишораларига боғлиқ бўлади. 25- чизмада араболанинг текисликда турлича жойланиш ҳолатлари кўрсатилган.



25- чизма.

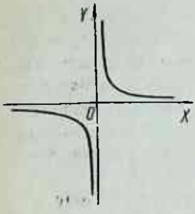
Икки бутун рационал функциянинг нисбатидан тузилган

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

функция *каср рационал функция* деб аталади. Каср рационал функция

$$X = R \setminus \{x\colon x \in R,\ b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m = 0\}$$

тўпламда, яъни махражни нолга айлантирувчи нуқталардан фарқли бўлган барча ҳақиқий сонлардан иборат тўпламда аниқланган.



26- чизма.

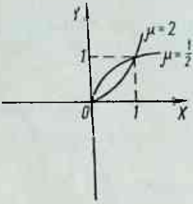
Хусусан, $y = \frac{1}{x}$ ва $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ лар каср рационал функциялар бўлади.

Маълумки, $y = \frac{1}{x}$ функция графиги тенг ёнли гиперболадан иборат (26- чизма). Бу графикни билган ҳолда $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ функция графигини ясаш мумкин.

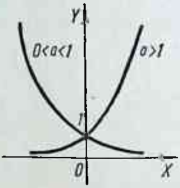
2°. Даражали функция. Ушбу

$$y = x^{\mu}$$

кўринишдаги функция *даражали функция* деб аталади, бунда μ ихтиёрий ўзгармас ҳақиқий сон. Даражали функциянинг аниқланиш соҳаси μ га боғлиқ. μ бутун сон бўлганда рационал функцияга эга бўламиз. Агар μ рационал, масалан $\mu = \frac{1}{m} > 0$ бўлса, m жуфт бўлганда $x^{\mu} = x^{\frac{1}{m}}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $x = [0, +\infty)$, m тоқ бўлганда эса функциянинг аниқланиш соҳаси $R = (-\infty, +\infty)$ оралиқдан иборат бўлади. μ иррационал бўлганда $x > 0$ деб олинади. Даражали функциянинг графиги $\mu > 0$ бўлганда ҳар доим текисликнинг $(0, 0)$ ҳамда $(1,1)$ нуқталаридан ўтади (27- чизма)



27- чизма.



28- чизма.

Даражали функция $y = x^{\mu}$ ушбу (0, ∞) оралиқда $\mu > 0$ бўлган-а ўсувчи, $\mu < 0$ бўлганда эса камаювчи бўлади.

3°. Кўрсаткичли функция. Ушбу

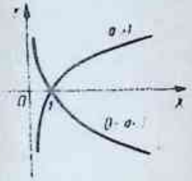
$$y = a^x$$

ўринишдаги функция *кўрсаткичли функция* деб аталади, бунда a ақиқий сон, $a > 0$ ва $a \neq 1$. Кўрсаткичли функциянинг аниқланиш оҳаси R тўпламдан иборат бўлиб, функция қийматлари эса ҳар доим усбат бўлади. Бу функциянинг графиги OX ўқидан юқорида ойлашган ва доим текисликнинг (0,1) нуқтасидан ўтади (28- чизма).

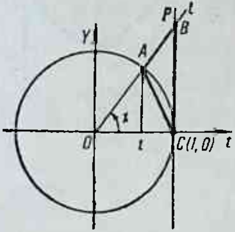
4°. Логарифмик функция. Ушбу

$$y = \log_a x$$

ўринишдаги функция *логарифмик функция* деб аталади, бунда $a > 0$ а $a \neq 1$. Логарифмик функция $X = (0, +\infty)$ интервалда аниқланган. у функциянинг графиги OY ўқнинг ўнг томонида жойлашган ва оим текисликнинг (1,0) нуқтасидан ўтади (29- чизма).



29- чизма.



30- чизма.

5°. Тригонометрик функциялар. tOy текисликда, марка-зи координаталар бошида, радиуси 1 га тенг бўлган $t^2 + y^2 = 1$ айланани олайлик (30- чизма). Бу айлананинг $C(1,0)$ нуқтасидан ун-га CP уринма ўтказамиз. Координата бошидан чиққан ва Ot ўқ би-лан x бурчак ташкил этган Ol нур айланани A нуқтада, CP урин-мани B нуқтада кесади. Бу A ва B нуқталарнинг координаталари ос равишда (t, y_1), $(1, y_2)$ бўлсин. Равшанки, A ва B нуқталарнинг рни x бурчакка боғлиқ. Демак, ҳар бир $x \in R$ сон учун Ot ўқ би-ан x бурчак ташкил этадиган Ol нур ўтказилса, бу нурнинг айла-а ва уринмалар билан кесишган нуқталарининг координаталари t, y_1, y_2 лар x га боғлиқ бўлиб, ҳар бир x га шу координаталарни ос қўйилик

$$f : x \to t,$$

$$\varphi : x \to y_1,$$

$$\psi : x \to y_2.$$

Одатда $\varphi: x \to y_1$ га $\sin x$, $f: x \to t$ га $\cos x$, $\psi: x \to y_2$ га $\mathrm{tg}\, x$ *функция* деб аталади:

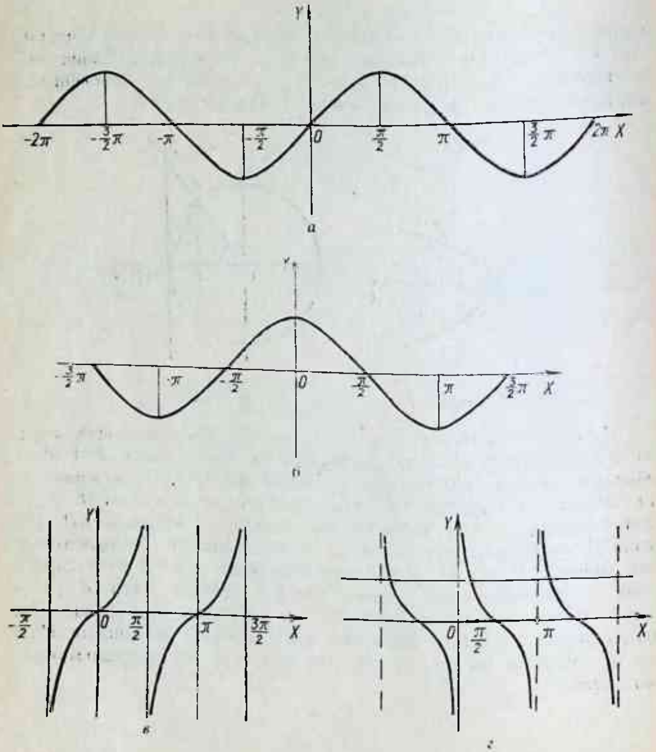
$$y_1 = \sin x,\ \ y_2 = \mathrm{tg}\, x,\ \ t = \cos x.$$

Бунда $y_1 = \sin x$, $t = \cos x$ функциялар R да аниқланган 2π даврли функциялар бўлиб, улар учун $\forall\, x \in R$ да

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

$y_2 = \mathrm{tg}\, x$ функция $X = R \setminus \{x:\ x \in R;\ x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k = 0, \pm 1, \ldots\}$ тўпламда аниқланган.



а

б

в

31- чизма.

$\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ функциялар $\sin x$, $\cos x$ ва $\operatorname{tg} x$ функциялар орқали қуйидагича аниқланади:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Ушбу $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функцияларнинг графиклари 31- *а*, *б*, *в*, *г* чизмаларда тасвирланган.

6°. Гиперболик функциялар. Ушбу $y = e^x$ кўрсаткичли функция ёрдамида тузилган қуйидаги

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

функциялар *гиперболик* (мос равишда *гиперболик синус*, *гиперболик косинус*, *гиперболик тангенс*, *гиперболик котангенс*) *функциялар* деб аталади ва улар $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ каби белгиланади:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ функциялар R да, $\operatorname{cth} x$ функция эса $x = R \setminus \{0\}$ тўпламда аниқланган.

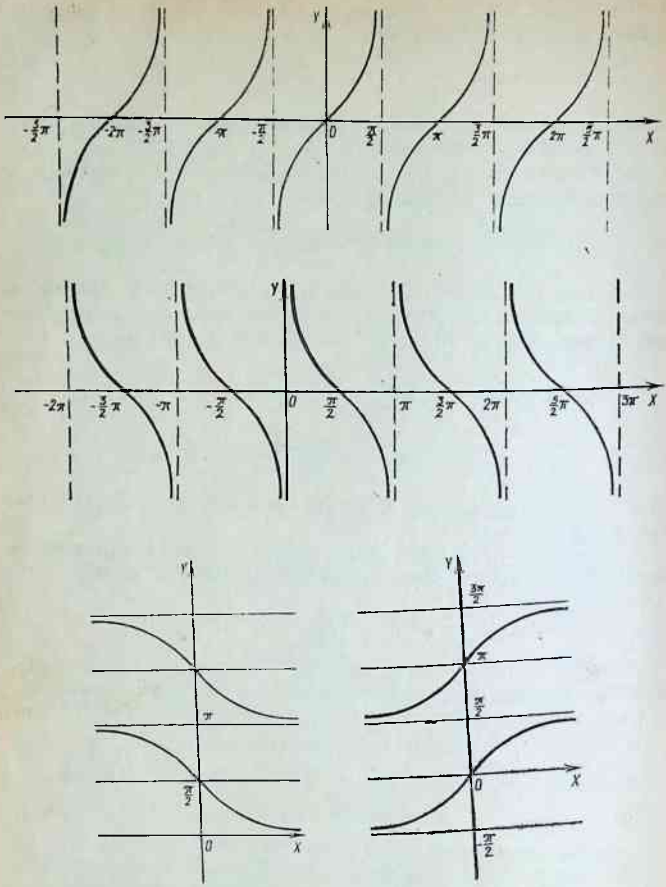
Гиперболик функциялар орасида ҳам тригонометрик функциялар орасидаги боғланишга ўхшаш муносабатлар мавжуд. Масалан,

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$$

7°. Тескари тригонометрик функциялар. Маълумки, $y = \sin x$ функция R да аниқланган бўлиб, унинг қийматлари $\{y \in R: -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ тўпламни ташкил этади. Агар биз аргумент x нинг $x \in X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ сегментдаги қийматларини қарасак, $y = \sin x$ функциянинг қийматлари ҳам $Y = [-1, +1]$ сегментда ўзгариб, бунда $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ тўпламнинг элементлари $Y = [-1, +1]$ тўпламнинг элементлари билан ўзаро бир қийматли мосликда бўлади. Бу ҳол $y = \sin x$ функцияга нисбатан тескари функцияни қараш имконини беради. $y = \sin x$ функцияга тескари функция $y = \arcsin x$ каби белгиланади. Демак, $y = \arcsin x$ функция $X = [-1, +1]$ тўпламда аниқланган бўлиб, ўзгариш соҳаси $Y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ тўпламни ташкил этади.

Худди шунга ўхшаш, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функцияларга нисбатан тескари бўлган функциялар ҳам *тескари тригонометрик функциялар* дейилиб, улар мос равишда $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ каби белгиланади.

$y = \arccos x$ функция $X = [-1, +1]$ да аниқланган бўлиб,



32- чизма.

унинг қийматлари $Y = [0, \pi]$ тўпламдан иборат. $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ функциялар R да аниқланган. Бу функцияларнинг ўзгариш соҳалари мос равишда $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ва $(0, \pi)$ тўпламлардан иборат.

32- чизмаларда тескари тригонометрик функцияларнинг графиклари тасвирланган.

3- §. Функция лимити

Биз 3- бобда натурал аргументли функция — сонлар кетма-кет-лиги ва унинг лимитини ўргандик. Энди аргументи ҳақиқий сон бўлган функция лимитини қараймиз. Аввало сонлар тўпламининг лимит нуқтаси тушунчаси билан танишамиз.

1. Тўпламнинг лимит нуқтаси. Маълумки,

$$U_\varepsilon(a) = \{x\colon x \in R,\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

тўплам a нуқтанинг атрофи (ε- атрофи) деб аталар эди. Шунга ўх-шаш, ушбу

$$U_\varepsilon^+(a) = \{x\colon x \in R,\ a < x < a + \varepsilon\} \qquad (4.4)$$

тўплам a нуқтанинг ўнг атрофи,

$$U_\varepsilon^-(a) = \{x\colon x \in R,\ a - \varepsilon < x < a\} \qquad (4.5)$$

тўплам a нуқтанинг чап атрофи,

$$U_c(\infty) = \{x\colon x \in R,\ |x| > c\}, \qquad (4.6)$$

$$U_c(+\infty) = \{x\colon x \in R,\ x > c\}, \qquad (4.7)$$

$$U_c(-\infty) = \{x\colon x \in R,\ x < -c\} \qquad (4.8)$$

тўпламлар эса мос равишда ∞, $+\infty$ ва $-\infty$ «нуқта» ларнинг *ат-рофи* деб аталади. (4.4) — (4.8) ларда ε ва c лар ихтиёрий мусбат ҳақиқий сонлар.

X — бирор ҳақиқий сонлар тўплами, a — бирор нуқта бўлсин.

5-таъриф. Агар a нуқтанинг ҳар бир атрофида X тўпламнинг a дан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, a нуқта X тўпламнинг *имит нуқтаси* деб аталади.

Демак, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун

$$\{U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}\} \cap X \neq \varnothing$$

уносабат ўринли бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу $[0,\ 1] = \{x\colon x \in R,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ тўпламнинг ар бир нуқтаси шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.

2. Ушбу $N = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ тўплам лимит нуқтага эга эмас.

3. Ушбу $(0, 1) = \{x\colon x \in R,\ 0 < x < 1\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқта- и шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади ва яна $x = 0$, $x = 1$ уқталар ҳам $(0, 1)$ учун лимит нуқталардир.

4. F — $[0,\ 1]$ сегмент ҳамда 2 сонидан иборат тўплам бўлсин, ьни $F = [0,\ 1] \cup \{2\}$. Бу тўплам учун $x = 2$ нуқта лимит нуқта мас.

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан қуйидаги натижа- ар чиқади:

1°. X тўпламнинг лимит нуқтаси шу тўпламга тегишли бўлиши ам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин.

2°. Агар a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, a нуқтанинг ҳар бир атрофида X тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бўлади. Буни исботлайлик. Тескарисини фараз қиламиз. a нуқтанинг бирор $U_\sigma(a)$ атрофига X тўпламнинг чекли сондаги $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ нуқталари тегишли бўлсин. У ҳолда $|a-\alpha_1|$, $|a-\alpha_2|, \ldots, |a-\alpha_k|$ ва σ сонларнинг энг кичигини δ деб олинса, a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофида X тўпламнинг a дан фарқли битта ҳам нуқтаси бўлмайди. Бу эса a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси эканига зиддир.

3°. Агар a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, X тўплам нуқталаридан a га интилувчи $\{x_n\}$, ($x_n \in X$, $x_n \neq a$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) кетма-кетлик тузиш мумкин. Шуни кўрсатайлик.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\{\delta_n\}$ ни олиб, a нуқтанинг

$$U_{\delta_n}(a) = \{x\colon x \in R,\ a-\delta_n < x < a+\delta_n\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

атрофларини қарайлик. a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси эканидан ҳар бир $U_{\delta_n}(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ атрофда X тўпламнинг a дан фарқли x_n нуқтаси топилади: $x_n \in U_{\delta_n}(a)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Юқоридаги 2°-хоссага биноан, бу x_n нуқтани $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ лардан фарқли қилиб олишимиз мумкин. Шундай қилиб, ҳар бир $n = 1, 2, 3, \ldots$ учун $|x_n - a| < \delta_n$ бўлади. $n \to \infty$ да $\delta_n \to 0$ эканлигидан $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ да $\delta_n < \varepsilon$ бўлади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса $\lim x_n = a$ демакдир.

Бу келтирилган мулоҳазалардан кўринадики, бунда кетма-кетликларни кўплаб тузиш мумкин.

6-таъриф. Агар a нуқтанинг ҳар бир ўнг (чап) атрофида X тўпламнинг a дан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, a нуқта X нинг *ўнг (чап) лимит нуқтаси* деб аталади.

7-таъриф. Агар ҳар бир $U_\varepsilon(\infty)$ атрофда X тўпламнинг камида битта нуқтаси бўлса, ∞ «нуқта» X тўпламнинг *лимит нуқтаси* дейилади.

$+\infty$, $-\infty$ «нуқта» ларнинг лимит нуқта бўлиши ҳам юқоридаги сингари таърифланади.

Масалан, $+\infty$ «нуқта» $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.

2. Функция лимитининг таърифлари. $X = \{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, a нуқта унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция аниқланган дейлик. Модомики, a нуқта X нинг лимит нуқтаси экан, X тўпламнинг нуқталаридан a га интилувчи турли $\{x_n\}$ $(x_n \neq a,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ кетма-кетликлар тузиш мумкин: $\lim x_n = a$. Равшанки, $x_n \in X$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$. Шунинг учун бу нуқталарда ҳам $f(x)$ функция аниқланган. Натижада $\{x_n)$ кетма-кетлик билан бирга $\{f(x_n)\}$:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

онлар кетма-кетлигига ҳам эга бўламиз.

8-таъриф. Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га нтилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$, $(x_n \neq a,\ n = 1,2,\ \ldots)$ кетма-кетлик оланимизда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b (чекли ки чексиз) лимитга интилса, шу b га $f(x)$ функциянинг *a нуқтааги лимити* деб аталади. Функция лимити $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ каби белланади.

Функция лимитига берилган бу таъриф Гейне таърифи деб атаади.

Баъзан b ни $f(x)$ нинг $x \to a$ даги лимити дейилади ва

$$x \to a \text{ да } f(x) \to b$$

аби белгиланади.

Келтирилган таърифнинг ушбу муҳим томонига ўқувчининг эътиорини жалб қилайлик: a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$, $(x_n \neq a,\ n = 1,\ 2,\ \ldots)$ кетма-кетлик учун $x_n \to a$ да $\{f(x_n)\}$ кетма-кетликнинг имити олинган $\{x_n\}$ кетма-кетликка боғлиқ бўлмаслиги керак.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

ункциянинг $x \to 0$ даги лимити 1 га тенг эканини кўрсатинг.

Ҳар бир ҳади нолдан фарқли бўлган ва нолга интилувчи ихтирий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик: $\lim x_n = 0\ (x_n \neq 0,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. У ҳолда ушбу

$$\{f(x_n)\} = \left\{\frac{1}{1+x_n^2}\right\}$$

етма-кетликни ҳосил қиламиз. Равшанки, $x_n \to 0$ да

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{1+x_n^2} = 1.$$

емак, таърифга кўра

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

2. Қуйидаги

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

ункциянинг $x \to 0$ даги лимити мавжуд эмас. Ҳақиқатан, нолга инлувчи иккита турли $\{x'_n\} = \left\{\dfrac{2}{(4n-1)\pi}\right\}$, $\{x''_n\} = \left\{\dfrac{2}{(4n+1)\pi}\right\}$ кетматликни олайлик. Бунда

$$f(x'_n)=\sin\frac{4n-1}{2}\pi=-1,\ f(x''_n)=\sin\frac{4n+1}{2}\pi=1$$

бўлиб,

$$\lim f(x'_n)=-1,\ \lim f(x''_n)=1.$$

Бу эса $\sin\frac{1}{x}$ функциянинг $x\to 0$ да лимити мавжуд эмаслигини кўрсатади.

Энди функция лимити таърифидаги X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бир ҳади $x_n (n=1, 2, \ldots)$ ни a га тенг бўлмасин, деб айтилган шартга изоҳ берамиз. Агар таърифдаги бу шарт олиб ташланса, у ҳолда лимитга эга бўлган функциялар синфи бирмунча «тораяди». Хусусан, биз юқорида келтирган 1- мисолдаги функция ҳам лимитга эга бўлмай қолади. Ҳақиқатан, нолга интилувчи кетма-кетлик сифатида

$$\{x'_n\}:\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots$$

кетма-кетлик олинса, $f(x)$ нинг қийматларидан ташкил топган мос $\{f(x'_n)\}$ кетма-кетликнинг лимити нолга тенг бўлиб, натижада

$$x_n\to 0\ (x_n\neq 0,\ n=1, 2, \ldots)\ \text{да}\ f(x_n)\to 1,$$

$$x'_n\to 0,\ (x'_n=0,\ n=1,\ 2,\ \ldots)\ \text{да}\ f(x'_n)\to 0$$

муносабатларга эга бўламиз. Бу эса $x\to 0$ да $f(x)$ функция лимитга эга эмаслигини билдиради.

Функция лимитини бошқача ҳам таърифлаш мумкин.

9-таъриф. Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг *a нуқтадаги лимити* деб аталади.

10-таъриф. Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x)|\geqslant\varepsilon$ $(f(x)>\varepsilon,\ f(x)<-\varepsilon)$ бўлса, $f(x)$ функциянинг *a нуқтадаги лимити* ∞ $(+\infty;\ -\infty)$ дейилади.

Функция лимитига берилган бу таъриф **Коши таърифи** деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу $f(x)=\frac{x-5}{x^2-25}$ функциянинг $x\to 5$ даги лимити $\frac{1}{10}$ бўлишини исбот этинг.

$\forall\ \varepsilon>0$ сон олайлик. Бу ε га кўра δ ни $\delta=\frac{10\varepsilon}{1+\varepsilon}$ деб олсак, у ҳолда $0<|x-5|<\delta$ бўлганда

$$\left|\frac{x-5}{x^2-25}-\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\leqslant\frac{|x-5|}{10(10-|x-5|)}\leqslant\frac{\delta}{10-\delta}=\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан таърифга кўра

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{1}{10}$$

келиб чиқади.

2. Ушбу $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ функция учун $x\to 1$ да $f(x)\to\infty$ бўлишини кўрсатинг.

$\forall\varepsilon>0$ сон учун $\delta=\dfrac{1}{\varepsilon}$ деб олинса, у ҳолда $0<|x-1|<\delta$ тенгсизликнинг бажарилишидан

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x-1}\right|>\varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

Функция лимити таърифидаги $0<|x-a|<\delta$ тенгсизлик $a-\delta<$ $<x<a+\delta$, $x\neq a$ тенгсизликларга эквивалент бўлиб, функция аргументининг бу тенгсизликларни қаноатлантириши уларнинг a нуқтанинг $\dot{U}_\delta(a)$ атрофига тегишли бўлишини ифодалайди. Бунда

$$\dot{U}_\delta(a)=\{x:\ x\in R;\ a-\delta<x<a+\delta;\ x\neq a\}.$$

Шунга ўхшаш $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизликнинг бажарилиши $x\in\dot{U}_\delta(a)$ да $f(x)$ функциянинг қийматлари b нуқтанинг $U_\varepsilon(b)$ атрофида бўлишини билдиради.

Шундай қилиб, функция лимитининг икки хил — Гейне ҳамда Коши таърифлари келтирилди. Энди бу таърифларнинг эквивалентлигини кўрсатамиз.

а) $f(x)$ функция $x=a$ нуқтада Коши таърифига кўра лимитга га бўлсин, яъни $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топиладики, $<|x-a|<\delta$ тенгсизлик бажарилганда $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, ҳар бир ҳади a дан фарқи бўлган ва a га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик:

$$\lim x_n=a\ \ (x_n\neq a,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

онлар кетма-кетлиги лимитининг таърифига кўра, юқоридаги $\delta>0$ чун шундай $n_0\in N$ сон топиладики, барча $n>n_0$ лар учун $|x_n-$ $-a|<\delta$ тенгсизлик ўринли бўлади. Натижада $x_n\neq a$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ уносабатга кўра $0<|x_n-a|<\delta$ тенгсизликлар келиб чиқади. Бу енгсизликнинг ўринли бўлишидан

$$|f(x_n)-b|<\varepsilon$$

енгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Демак, $x_n\to a$ да $f(x_n)\to b$ ўлади.

б) $f(x)$ функция $x=a$ нуқтада Гейне таърифига кўра лимитга га бўлсин, яъни X тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ $(x_n\neq a,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ кетма-кетлик олганимизда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b лимитга интилсин.

Биз b сон $f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтада Коши таърифига кўра ҳам лимити бўлишини кўрсатишимиз керак.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни $f(x)$ функция $x=a$ нуқтада Гейне таърифига кўра b лимитга эга бўлса ҳам функция шу нуқтада Коши таърифига асосан b лимитга эга бўлмасин. Унда бирор $\varepsilon_0>0$ сон учун ихтиёрий кичик мусбат δ сон олинганида ҳам аргумент x нинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи бирор x' қийматида

$$|f(x')-b|\geqslant\varepsilon_0$$

бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\{\delta_n\}$ ни олайлик. У ҳолда юқоридагига кўра ҳар бир $\delta_n>0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ учун аргумент x нинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи шундай $x=x_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ қиймати топиладики, $0<|x_n-a|<\delta_n$ ва $|f(x_n)-b|\geqslant\varepsilon_0$ бўлади. Аммо $\delta_n\to 0$ дан $x_n\to a$. Бу ҳолда Гейне таърифига асосан $f(x_n)\to b$ бўлиши лозим. Юқоридаги муносабат эса бунга зиддир. Демак, $f(x)$ функция $x=a$ нуқтада Гейне таърифига кўра b лимитга эга бўлишидан унинг шу нуқтада Коши таърифига кўра ҳам b лимитга эга бўлиши келиб чиқади.

3. Функциянинг бир томонли лимитлари. X бирор ҳақиқий сонлар тўплами бўлиб, a унинг ўнг (чап) лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $y=f(x)$ функция аниқланган дейлик.

11-таъриф. (Гейне). Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва ҳар бир ҳади a дан катта (кичик) бўлиб, a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олганимизда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b га интилса, шу b ни $f(x)$ функциянинг *a нуқтадаги ўнг (чап) лимити* деб аталади.

12-таъриф (Коши). Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг *a нуқтадаги ўнг (чап) лимити* деб аталади.

Функциянинг ўнг (чап) лимити қуйидагича белгиланади:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ ёки $f(a+0)=b$ $(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ ёки $f(a-0)=b)$.

Агар $a=0$ бўлса, $x\to 0+0$ $(x\to 0-0)$ ўрнига $x\to+0$ $(x\to-0)$ деб ёзилади.

Функциянинг ўнг ва чап лимитлари, унинг бир томонли лимитлари дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\quad (x\neq 0)$$

функцияни қарайлик.

Ҳар бири нолга интилувчи иккита

$$\{x_n'\}: x_n' \to 0 \ (x_n' > 0,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$
$$\{x_n''\}: x_n'' \to 0 \ (x_n'' < 0,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

кетма-кетликни олайлик. Бу кетма-кетликлар учун

$$f(x_n') = \frac{x_n'}{x_n'} = 1 \to 1, \quad f(x_n'') = \frac{x_n''}{-x_n''} = -1 \to -1$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{x}{|x|} = -1.$$

Функциянинг бирор нуқтада бир томонли лимитлари мавжуд бўлишидан унинг шу нуқтада лимитга эга бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Бироқ қуйидаги содда теорема ўринлидир. a нуқта бир вақтнинг ўзида X тўплам учун ўнг ва чап лимит нуқта бўлиб, бу тўпламда $y=f(x)$ функция аниқланган бўлсин.

2-теорема. *$f(x)$ функция a нуқтада b лимитга эга бўлиши учун унинг шу нуқтада ўнг ва чап лимитлари мавжуд бўлиб,*

$$f(a+0) = f(a-0) = b$$

тенгликлар ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Бу теореманинг исботи юқорида келтирилган таърифлардан осонгина келиб чиқади.

Энди $x \to \infty$ да функция лимити тушунчасини келтирамиз.

X тўплам берилган бўлиб, ∞ ($+\infty$; $-\infty$) унинг лимит «нуқта»си бўлсин. Бу тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган дейлик.

13-таъриф (Гейне). Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар қандай чексиз катта (мусбат чексиз катта; манфий чексиз катта) $\{x_n\}$ кетма-кетлик олганимизда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b га интилса, шу b ни $f(x)$ функциянинг $x \to \infty$ ($x \to +\infty$, $x \to -\infty$) *даги лимити* деб аталади.

14-таъриф (Коши). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $|x| > \delta$ ($x > \delta$; $x < -\delta$) тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг $x \to \infty$ ($x \to +\infty$; $x \to -\infty$) *даги лимити* деб аталади. Функция лимити

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \ \left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = b; \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\right)$$

каби белгиланади.

Ушбу параграфнинг охирида функция лимитининг умумий таърифини келтирамиз.

X бирор тўплам бўлиб, a (чекли ёки чексиз) унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган.

15-таъриф. Агар b (чекли ёки чексиз) нинг ҳар қандай $U(b)$ атрофи олинганда ҳам a нинг шундай $U(a)$ атрофи мавжуд бўлсаки, $\forall x \in U(a)$ учун $f(x) \in U(b)$ бўлса, b ни $f(x)$ функциянинг $x \to a$ *даги лимити* деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{4.9}$$

тенгликни исботланг.

Аввало $0 < x < \frac{\pi}{2}$ интервалдан олинган барча x лар учун

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

тенгсизликлар ўринли. Бу мактаб математикасидан маълум. $\sin x > 0$ бўлгани учун бу тенгсизликларни

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Ундан

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \tag{4.10}$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

Биз (4.10) тенгсизликларни ихтиёрий $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ учун исбот қилдик. $\frac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$ ва $\cos x$ функцияларнинг жуфтлигидан бу тенгсизликларнинг барча $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ учун тўғрилигини топамиз. Шу билан бирга $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ да $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leqslant 2 \frac{|x|}{2} = |x|$ тенгсизликнинг ўринли бўлишини эътиборга олсак, юқоридаги (4.10) тенгсизликлар қуйидаги

$$0 < \left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < |x|$$

кўринишга келишини топамиз.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон берилганда ҳам $\delta > 0$ деб ε ва $\frac{\pi}{2}$ сонларнинг кичиги олинса, аргумент x нинг $0 < |x| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| = \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса функция лимитининг Коши таърифига кўра (4.9) лимитнинг тўғрилигини англатади.

2. Қуйидаги

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{4.11}$$

тенгликни исботланг (бунда $e = 2{,}71\ldots$).

Бунинг учун $+\infty$ га интилувчи ихтиёрий $\{x_k\}$ кетма-кетликни олайлик. Бу ҳолда барча $k = 1, 2, 3, \ldots$ лар учун $x_k > 1$ деб қараш мумкин. Ҳар бир x_k нинг бутун қисмини n_k орқали белгилаб, ушбу $[x_k]=n_k$ $(k=1, 2, 3, \dots)+\infty$ га интилувчи $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ натурал сонлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз.

Маълумки,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Бу муносабатдан

$$\lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e$$

экани келиб чиқади.

Энди ушбу

$$[x_k]=n_k\Rightarrow n_k\leqslant x_k<n_k+1\Rightarrow\frac{1}{n_k+1}<$$

$$<\frac{1}{x_k}\leqslant\frac{1}{n_k}\Rightarrow 1+\frac{1}{n_k+1}<1+\frac{1}{x_k}\leqslant 1+\frac{1}{n_k}$$

муносабатлар ўринли бўлишини эътиборга олиб, топамиз:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \qquad (4.12)$$

Бироқ

$$\lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=$$

$$=\lim_{n_k\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1}\right]=e,$$

$$\lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{n_k\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\right]=e$$

лимитлар ўринли бўлгани учун (4.12) тенгсизликларда (бунда $x_k\to+\infty$) лимитга ўтсак, изланган (4.11) лимит ҳосил бўлади.

Энди $-\infty$ га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетликни олайлик. Бунда $x_k<-1$ $(k=1, 2, \dots)$ деб қараш мумкин. Агар $y_k=-x_k$ деб белгиласак, унда $y_k\to+\infty$ ва $y_k>1$ $(k=1, 2, \dots)$ бўлади. Равшанки,

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k}=\left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k}=\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k}.$$

Ундан

$$\lim_{x_k\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\lim_{y_k\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)\right]=e.$$

Шундай қилиб, $-\infty$ га интилувчи ҳар қандай $\{x_k\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ функция қийматларидан тузилган

$$\{f(x_k)\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k}\right\}$$

кетма-кетлик ҳамма вақт e лимитга эга экани исботланди. Функция лимитининг Гейне таърифига кўра

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

лимит ҳам ўринли бўлади.

4- §. Чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари

Чекли лимитга эга бўлган функциялар ҳам яқинлашувчи кетма-кетликлар сингари қатор хоссаларга эга. Уларнинг аксариятининг исботлари ҳам яқинлашувчи кетма-кетликларнинг мос хоссалари исботлари кабидир. Чунки, юқорида кўрдикки, функция лимити тушунчаси сонлар кетма-кетлигининг лимити тушунчасига таянган ҳолда таърифланди (Гейне таърифи). Шуни эътиборга олиб, қуйида келтириладиган хоссаларнинг баъзиларинигина исботлаймиз, қолган хоссаларни исботлаш ўқувчига тавсия этилади.

1. Тенгсизлик белгиси билан ифодаланадиган хоссалар. X тўплам берилган бўлиб, a эса унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция аниқланган.

1°. Агар ушбу $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ лимит мавжуд бўлиб, $b > p$ $(b < q)$ бўлса, a нинг етарли кичик атрофидан олинган $x\,(x \neq a)$ нинг қийматларида $f(x) > p$ $(f(x) < q)$ бўлади.

Агар ушбу $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ лимит мавжуд бўлиб, $b > 0$ $(b < 0)$ бўлса, a нинг етарли кичик атрофидан олинган $x\,(x \neq a)$ нинг қийматларида $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ бўлади.

2°. Агар ушбу $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ лимит мавжуд бўлса, a нинг етарли кичик атрофидан олинган x $(x \neq a)$ нинг қийматларида $f(x)$ функция чегараланган бўлади.

Исбот. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ бўлсин. Функция лимити таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики,

$$x \in \dot{U}_\delta(a) \quad \text{учун} \quad f(x) \in U_\varepsilon(b)$$

бўлади. Демак, аргумент x нинг барча $x \in \dot{U}_\delta(a)$ қийматларида функциянинг мос қийматлари $(b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$ оралиқда бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг a нуқтанинг $\dot{U}_\delta(a)$ атрофида чегараланганлигини кўрсатади.

1-эслатма. Функция чегараланганлигидан унинг чекли лимитга эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функция чегараланган, аммо $x \to 0$ да бу функция лимитга эга эмас.

X тўпламда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар аниқланган бўлиб, a эса X нинг лимит нуқтаси бўлсин.

3°. Агар аргумент x нинг a нуқтанинг бирор $\dot{U}_\delta(a)$ атрофидан олинган барча қийматларида

$$f_1(x) \leqslant f_2(x)$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to a} f_1(x) \leqslant \lim_{x\to a} f_2(x)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

4°. Агар аргумент x нинг a нуқтанинг бирор $\dot{U}_\delta(a)$ атрофидан олинган барча қийматларида

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x) \tag{4.13}$$

тенгсизлик ўринли бўлса ва $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ лимитлар мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = b$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \tag{4.13'}$$

бўлади.

4° нинг исботи. Шартга кўра $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b$ лимит мавжуд. Демак, $\forall\varepsilon > 0$ сон учун a нуқтанинг шундай $\dot{U}_{\delta_1}(a)$ атрофи мавжудки, x нинг барча $x \in \dot{U}_{\delta_1}(a)$ қийматларида $f_1(x) \in U_\varepsilon(b)$ бўлади. Шунга ўхшаш, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b$ лимит мавжуд бўлгани учун ўша $\forall\varepsilon > 0$ сон учун a нуқтанинг шундай $U_{\delta_2}(a)$ атрофи мавжудки, x нинг барча $x \in \dot{U}_{\delta_2}(a)$ қийматларида $f_2(x) \in \dot{U}_\varepsilon(b)$ бўлади.

Агар $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ сонларнинг кичигини δ деб, a нуқтанинг $\dot{U}_\delta(a)$ атрофи олинса, унда

$$\dot{U}_\delta(a) \subset \dot{U}_{\delta_1}(a), \quad \dot{U}_\delta(a) \subset \dot{U}_{\delta_2}(a)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Натижада ҳар бир $x \in \dot{U}_\delta(a)$ учун бир вақтда

$$f_1(x) \in U_\varepsilon(b), \quad f_2(x) \in U_\varepsilon(b)$$

бўлиб, (4.13) муносабатга биноан $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ ҳам келиб чиқади.

Демак, ҳар бир $x \in \dot{U}_\delta(a)$ учун $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ ўринли. Бу эса $x \to a$ да $f(x)$ функция лимитга эга ва $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ бўлишини кўрсатади. Шундай қилиб, (4.13′) исботланди.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\cos\frac{1}{x}\quad (x\neq 0)$$

лимитни топинг.

Равшанки, бир томондан $x\cdot\cos\frac{1}{x}$ функция учун $-|x|\leqslant x\cos\frac{1}{x}\leqslant$ $\leqslant|x|$ тенгсизликлар бажарилади, иккинчи томондан,

$$\lim_{x\to 0}(-|x|)=\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

Демак, юқоридаги 4°-хоссага кўра $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\frac{1}{x}=0$.

2. Чекли лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амаллар. X тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланган.

1°. Агар $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, $f(x)\pm g(x)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

тенглик ўринли.

2°. Агар $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, $f(x)\cdot g(x)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

тенглик ўринли.

1-натижа. Агар $x\to a$ да $f(x)$ функция лимитга эга бўлса, унда $k\cdot f(x)$ $(k=\text{const})$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a}[k\cdot f(x)]=k\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

тенглик ўринли.

3°. Агар $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар лимитга эга бўлиб, $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ бўлса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

тенглик ўринли.

2-эслатма. 1) Юқорида келтирилган 1°- ва 2°-хоссалар қўшилувчилар, кўпайтувчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам ўринли.

2) $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва нисбатидан иборат бўлган функцияларнинг лимитга эга бўлишидан бу функцияларнинг ҳар бирининг лимитга эга бўлиши доим келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x)=1-\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ функциялар

йиғиндиси $f(x)+g(x)=1$ бўлиб, $x\to 0$ да $f(x)+g(x)\to 1$ бўлади. Аммо $x\to 0$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири лимитга эга эмас.

3. Мураккаб функциянинг лимити. Кўпчилик ҳолларда мураккаб функциянинг лимитини ҳисоблашга тўғри келади. Шунинг учун биз қуйида мураккаб функция лимитини ҳисоблаш имконини берадиган теоремани келтирамиз.

Фараз қилайлик, бирор X тўпламда $t=\varphi(x)$ функция аниқланган ва бу функция қийматларидан иборат T тўпламда $y=f(t)$ функция аниқланган бўлиб, улар ёрдамида мураккаб функция $y=f(\varphi(x))$ ҳосил қилинган бўлсин. Бу мураккаб функция X тўпламда аниқланган. Шу билан бирга a сон X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

3-теорема. *Агар* 1) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$ *лимит ўринли бўлиб, a нуқтанинг шундай $U_\delta(a)$ атрофи мавжуд бўлсаки, барча $x\in \dot{U}_\delta(a)$ лар учун $\varphi(x)\neq c$ бўлса,* 2) *c нуқта T тўпламнинг лимит нуқтаси бўлиб, $\lim\limits_{t\to c} f(t)=b$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $x\to a$ да мураккаб функция $y=f(\varphi(x))$ ҳам лимитга эга ва*

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=b$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $\lim\limits_{t\to c} f(t)=b$ мавжуд. Лимит таърифига кўра, $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\sigma>0$ сон топиладики, барча $t\in\dot{U}_\sigma(c)$ лар учун $f(t)\in U_\varepsilon(b)$ бўлади.

Энди шартга кўра $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$ лимит ўринли, шу билан бирга a нуқтанинг шундай $\dot{U}_\delta(a)$ атрофи мавжудки, барча $x\in \dot{U}_\delta(a)$ лар учун $\varphi(x)\neq c$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда яна лимит таърифига кўра, юқоридаги $\sigma>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топиладики, барча $x\in\dot{U}_\delta(a)$ лар учун $\varphi(x)\in\dot{U}_\sigma(c)$ бўлади. Шундай қилиб, $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топиладики

$$x\in\dot{U}_\delta(a)\Rightarrow t=\varphi(x)\in\dot{U}_\sigma(c)\Rightarrow f(t)\in U_\varepsilon(b)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Бу эса

$$\lim_{t\to c} f(t)=\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=b$$

бўлишини ифодалайди. Теорема исбот бўлди.

3-эслатма. Теоремадаги a нуқтанинг $\dot{U}_\delta(a)$ атрофида $\varphi(x)\neq c$ бўлсин деган шартни $f(t)$ функция $t=c$ нуқтада аниқланган ва

$$\lim_{t\to c} f(t)=f(c)=b$$

тенгликлар ўринли бўлсин деган шарт билан алмаштириш мумкин. Дарҳақиқат, агар $x\in\dot{U}_\delta(a)$ лар учун $\varphi(x)\neq c$ бўлса, теореманинг исботи равшан: агар $\varphi(x)=c$ бўлса, у ҳолда $f(\varphi(x))=f(c)=b$ бўлиб, $|f(\varphi(x)) - b| = 0$ бўлади. Шундай қилиб, барча $x \in \dot{U}_\delta(a)$ лар учун $f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(b)$ бўлади.

Худди шунга ўхшаш, a, c ҳамда b ларнинг бири чекли, иккинчиси чексиз ёки барчаси чексиз бўлганда ҳам теореманинг ўринли бўлиши исботланади.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{1+8\,\mathrm{tg}^2 x}}$$

лимитни ҳисобланг.

Бу ҳолда

$$y = \sqrt{\frac{1}{1+8t^2}}, \quad t = \varphi(x) = \mathrm{tg}\, x.$$

Шунинг учун

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \varphi(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\, x = 1 \quad \text{ва} \quad \lim_{t\to1} \sqrt{\frac{1}{1+8t^2}} = \frac{1}{3}$$

лимитлардан теоремага асосан

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{1+8\,\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{1}{3}$$

келиб чиқади.

4. **Аниқмас ифодалар.** Биз юқорида чекли лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амалларни кўриб ўтдик. Агар $x \to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бирининг лимити чексиз ёки $f(x)/g(x)$ функция лимити қаралганда $g(x) \to 0$ бўлиб қолса, бу ҳолда 3-бобнинг 6-§ ида батафсил ўрганилган аниқмасликлар каби турли аниқмас ифодаларга келамиз.

X тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланган. Агар $x \to a$ да

1) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ бўлса, уларнинг $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбати $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди;

2) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ бўлса, уларнинг $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбати $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлади;

3) $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ бўлса, уларнинг $f(x) \cdot g(x)$ кўпайтмаси $0 \cdot \infty$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди;

4) $f(x) \to +\infty\,(-\infty)$, $g(x) \to -\infty\,(+\infty)$ бўлса, яъни $f(x)$ ҳамда $g(x)$ функциялар турли ишорали чексизга интилса, $f(x) + g(x)$ ифода $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлади.

Бу ҳолларда $x \to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ўз лимитларига интилиш хусусиятига қараб, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (1, 2-ҳолларда) $f(x) \cdot g(x)$

3-ҳолда), $f(x)+g(x)$ (4-ҳолда) ифодаларнинг характерини аниқлаш ниқмасликни очиш деб юритилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cdot\sin 2x)}{x^2}$$

лимитни ҳисобланг. Равшанки, бу ифода $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликдир. $x\to 0$ да $x\cdot\sin 2x\to 0$ ни ҳисобга олиб топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cdot\sin 2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cdot\sin 2x)\cdot\sin 2x\cdot 2}{x\cdot\sin 2x\cdot 2x}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cdot\sin 2x)}{x\cdot\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2.$$

2. Қуйидаги

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$$

лимитни ҳисобланг.

Бу ҳолда $x\to 1$ да $\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$ ифода $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликдир. Содда алмаштиришлар ёрдамида топамиз:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)]}{x-1}=$$

$$=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Демак,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

5-§. Монотон функциянинг лимити

Биз чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссаларини ўргандик. Энди функция лимитининг мавжудлиги масаласи билан шуғулланамиз. Дастлаб бу масалани хусусий ҳолда — монотон функцияларга нисбатан ҳал қиламиз.

X тўплам берилган бўлиб, a (чекли ёки $+\infty$) эса шу тўпламнинг лимит нуқтаси ва барча $x\in X$ лар учун $x\leqslant a$ бўлсин. X тўпламда $f(x)$ функция аниқланган.

4-теорема. *$f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи бўлсин. Функция юқоридан чегараланган бўлса, a нуқтада чекли лимитга эга, юқоридан чегараланмаган бўлса, унинг лимити $+\infty$ бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи ва юқоридан чегараланган бўлсин. Бу ҳолда $\{f(x)\}=\{f(x):x\in X\}$ тўпламнинг чекли аниқ юқори чегараси мавжуд бўлади. Биз буни b билан белгилайлик: $\sup\{f(x)\} = b$. Аниқ юқори чегаранинг хоссасига кўра $\forall x \in X$ учун $f(x) \leqslant b$ бўлиб, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $x' \in X$ топиладики, $f(x') > b - \varepsilon$ бўлади. Қаралаётган функция ўсувчи бўлганидан $x > x'$ тенгсизлик бажарилганда $f(x) \geqslant f(x')$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Демак, барча $x > x'$ $(x \in X)$ лар учун $f(x) > b - \varepsilon$. Натижада ушбу $b - \varepsilon < f(x) \leqslant b < b + \varepsilon$ тенгсизликларга келамиз. Бу эса b сон $f(x)$ функциянинг лимити эканини ифодалайди. Юқоридаги исбот жараёнида a чекли бўлганда $x' = a - \delta \, (\delta = a - x')$, a чексиз бўлганда эса $x' > P > 0$ деб олиниши лозим.

Энди $f(x)$ функция X да ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланмаган бўлсин. Демак, ҳар қандай $P > 0$ сон олинганда ҳам шундай $x' \in X$ сон топиладики, $f(x') > P$ бўлади. Энди $x \in X$ ва $x > x'$ тенгсизлик бажарилганда $f(x) \geqslant f(x')$ тенгсизлик ўринли бўлганидан барча $x > x'$ $(x \in X)$ лар учун $f(x) > P$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $x \to a$ да $f(x) \to +\infty$ эканини билдиради. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

X тўплам берилган бўлиб, a (чекли ёки $-\infty$) эса шу тўпламнинг лимит нуқтаси ва барча $x \in X$ лар учун $x \geqslant a$ бўлсин. X тўпламда $f(x)$ функция аниқланган.

5-теорема. *Агар $f(x)$ функция X тўпламда камаювчи бўлиб, у қуйидан чегараланган бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга, қуйидан чегараланмаган бўлса, унинг лимити $-\infty$ бўлади.*

Бу теорема юқоридаги теорема каби исботланади.

6-§. Коши теоремаси

Энди функция лимитининг мавжудлиги ҳақидаги умумий теоремани келтирамиз.

X тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция берилган.

16-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' $(x' \in X,\ x'' \in X)$ қийматларида

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция учун a нуқтада *Коши шарти* бажарилади дейилади.

Мисол. Ушбу $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ функция учун $x = 0$ нуқтада Коши шартининг бажарилишини кўрсатинг. Ҳақиқатан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, δ ни $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ деб қаралса, у ҳолда x нинг

$$0 < |x' - 0| = |x'| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < |x'' - 0| = |x''| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x', x'' қийматлари учун қуйидагига эга бўламиз: $|f(x'') - f(x')| = \left| x'' \cdot \sin \frac{1}{x''} - x' \cdot \sin \frac{1}{x'} \right| \leqslant$

$$\leqslant \left| x'' \cdot \sin \frac{1}{x''} \right| + \left| x' \cdot \sin \frac{1}{x'} \right| \leqslant |x''| + |x'| < \varepsilon.$$

Бу берилган функция учун $x = 0$ нуқтада Коши шарти бажарилишини кўрсатади.

$f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шартининг бажарилмаслиги қуйидагини англатади:

$\forall \delta > 0$ сон олганимизда ҳам шундай $\varepsilon > 0$ ва $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x', x'' $(x' \in X$, $x'' \in X)$ қийматлар топиладики,

$$|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$$

бўлади.

Мисол. Қуйидаги

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}$$

функция учун $x = 0$ нуқтада Коши шарти бажарилмайди. Ҳақиқатан, $\forall \delta > 0$ олганимизда ҳам $\varepsilon = 1$ ва

$$x' = \frac{1}{2k\pi}, \quad x'' = \frac{1}{(2k+1)\pi}$$

нуқталар учун $\left(k > \left[\frac{1}{2\pi\delta}\right]\right.$ бўлганда $|x'| < \delta$, $|x''| < \delta$ бўлиши равшан,

$$|f(x') - f(x'')| = |\cos(2k+1)\pi - \cos 2k\pi| = 2 > 1$$

бўлади.

6-теорема (**Коши**). *$f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун бу функция учун a нуқтада Коши шартининг бажарилиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. $x \to a$ да $f(x)$ функция чекли лимитга эга бўлиб, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ бўлсин. Функция лимити таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ га асосан шундай $\delta > 0$ сон топиладики, аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи қийматларида

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Хусусан, ушбу

$$0 < |x' - a| < \delta \Rightarrow |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 < |x'' - a| < \delta \Rightarrow |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

муносабатлар ўринли. Бундан

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-b|+|f(x'')-b|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажарилишини кўрсатади.

Етарлилиги. $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажарилсин, яъни $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топиладики, x нинг $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x', x'' қийматларида $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли. Бу ҳолда $f(x)$ функция $x\to a$ да чекли лимитга эга бўлишини кўрсатамиз.

a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси. Шунинг учун X тўпламнинг нуқталаридан $\{x_n\}$ $(x_n\neq 0,\ n=1,\ 2,\ \dots)$ кетма-кетлик тузиш мумкинки, $\lim x_n=a$ бўлади. Кетма-кетлик лимити таърифига кўра, юқорида олинган $\delta>0$ сон учун шундай $n_0\in N$ сон топиладики, барча $n>n_0$ лар учун $0<|x_n-a|<\delta$ ва $0<|x_{n+m}-a|<\delta\ (m=1,\ 2,\ \dots)$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу тенгсизликларнинг бажарилишидан эса, шартга кўра

$$|f(x_{n+m})-f(x_n)|<\varepsilon$$

бўлади. Демак, $\{f(x_n)\}$ — фундаментал кетма-кетлик. У яқинлашувчи. Биз $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик лимитини b билан белгилайлик, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$. Энди X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва a га интилувчи ихтиёрий $\{x'_n\}$ кетма-кетлик $x'_n\to a$, $x'_n\neq a$ $(n=1,\ 2,\ \dots)$, олинганда ҳам $f(x)$ функция қийматларидан тузилган мос $\{f(x'_n)\}$ кетма-кетлик ҳам ўша b га интилишини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, $x'_n\to a$ $(x'_n\neq a,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ да $f(x'_n)\to b'$ бўлсин. $\{x_n\}$ ва $\{x'_n\}$ кетма-кетликлар ҳадларидан ушбу

$$x_1,\ x'_1,\ x_2,\ x'_2,\ \dots,\ x_n,\ x'_n,\ \dots$$

кетма-кетликни тузайлик. Равшанки, бу кетма-кетлик a га интилади. У ҳолда

$$f(x_1),\ f(x'_1),\ f(x_2),\ f(x'_2),\ \dots,\ f(x_n),\ f(x'_n),\ \dots \tag{4.14}$$

кетма-кетлик фундаментал бўлиб, чекли лимитга эга. Бу лимитни b^* билан белгилайлик. Агар $\{f(x_n)\}$ ва $\{f(x'_n)\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири (4.14) кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари эканини эътиборга олсак, у ҳолда $f(x''_n)\to b^*$, $f(x'_n)\to b^*$ бўлишини топамиз. Демак,

$$b^*=b=b'.$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажарилишидан X тўплам нуқталаридан тузилган ва a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ $(x_n\neq a,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик битта сонга интилишини топдик. Бу эса функция лимитининг Гейне таърифига кўра $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

4-эслатма. Коши шарти ва Коши теоремаси $x \to a+0$, $x \to a-0$; $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ бўлган ҳолларда ҳам юқоридагига ўхшаш ифодаланади ва исбот этилади.

7- §. Чексиз катта ва чексиз кичик функциялар

Бизга X тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $\alpha(x)$, $\beta(x)$ функциялар аниқланган.

17-таъриф. Агар $x \to a$ да $\alpha(x)$ функциянинг лимити нолга тенг бўлса, $\alpha(x)$ функция $x \to a$ да *чексиз кичик функция* деб аталади.

Мисол. $f(x) = \sin x$ функция $x \to 0$ чексиз кичик функция, чунки $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

Агар X тўпламда аниқланган $f(x)$ функция $x \to a$ да чекли b лимитга эга бўлса (яъни $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$), у ҳолда $\alpha(x) = f(x) - b$ функция $x \to a$ да чексиз кичик функция бўлади. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - b] = \lim_{x \to a} f(x) - b = 0.$$

Демак, бу ҳолда $f(x)$ функцияни $x \to a$ да чексиз кичик функция бўлган $\alpha(x)$ ёрдамида қуйидаги

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

18-таъриф. Агар $x \to a$ да $\beta(x)$ функциянинг лимити ∞ бўлса, $\beta(x)$ функция $x \to a$ да *чексиз катта функция* деб аталади.

Мисол. $f(x) = \frac{1}{x}$ функция $x \to 0$ да чексиз катта функция бўлади.

Чексиз кичик ҳамда чексиз катта функциялар ҳам 3-бобда ўрганилган чексиз кичик ва чексиз катта кетма-кетликларнинг хоссаларига ўхшаш хоссаларга эга. Қуйида биз шу хоссаларни келтирамиз.

1°. *Чекли сондаги чексиз кичик функциялар йиғиндиси чексиз кичик функция бўлади.*

2°. *Чегараланган функциянинг чексиз кичик функция билан кўпайтмаси чексиз кичик функция бўлади.*

3°. *Агар $\alpha(x)$ $(\alpha(x) \neq 0)$ чексиз кичик функция бўлса, $\frac{1}{\alpha(x)}$ чексиз катта функция бўлади.*

4°. *Агар $\beta(x)$ чексиз катта функция бўлса, $\frac{1}{\beta(x)}$ чексиз кичик функция бўлади.*

Бу хоссаларнинг исботи бевосита 3-бобнинг 4- ва 5- § ларидаги хоссалардан ҳамда функция лимитининг таърифларидан келиб чиқади.

8-§. Функцияларни таққослаш

X тўпламда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланган бўлсин. Бирор a нуқтанинг $U_\delta(a) \subset X$ атрофида $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни таққослаш масаласини қараймиз.

1. «O», «o», «$\sim$» белгилар.

19-таъриф. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун шундай ўзгармас $\delta > 0$ ва $C > 0$ сонлар топилсаки, барча $x \in U_\delta(a)$ лар учун

$$|f(x)| \leqslant C \cdot |g(x)| \qquad (4.15)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $x \to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан *чегараланган* дейилади ва $f(x) = O(g(x))$ каби белгиланади.

Шуни таъкидлаш лозимки, бу таърифдаги $x \to a$ белги қаралаётган (4.15) муносабатнинг a нуқтанинг бирор атрофида ўринли бўлишини ифодалаб, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг $x \to a$ даги лимитининг мавжуд бўлиши ёки бўлмаслигига боғлиқ эмас.

Масалан, $x \to 0$ да $x^2 = O(x)$ бўлади. Ҳақиқатан, ихтиёрий $x \in U_1(0)$ лар учун, яъни $x \in (-1, +1)$ лар учун, $|x^2| \leqslant |x|$ тенгсизлик бажарилади.

Агар $f(x)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида чегараланган бўлса, у $x \to a$ да $f(x) = O(1)$ каби ёзилади. Масалан, $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ функция $x = 0$ нуқта атрофида чегараланган (чунки $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$). Шунинг учун $(1+x)^{\frac{1}{x}} = O(1)$ деб ёзиш мумкин.

20-таъриф. Агар $x \to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун $f(x) = O(g(x))$ ва $g(x) = O(f(x))$ муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда $x \to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар *бир хил тартибли функциялар* деб аталади.

Масалан, $f(x) = x$, $g(x) = 2x + x\sin x$ бўлсин. Равшанки, $x \to 0$ да

$$|x| \leqslant |2x + x \cdot \sin x| \leqslant 3|x|$$

тенгсизликлар ўринли. Бу эса

$$x = O((2x + x \cdot \sin x)), \quad 2x + x \cdot \sin x = O(x)$$

бўлишини билдиради. Демак, $x \to 0$ да $f(x) = x$, $g(x) = 2x + x\sin x$ функциялар бир хил тартибли функциялар бўлади.

Юқорида келтирилган таърифлардан, $x \to a$ да

$$f_1(x) = O(f_2(x)),\ f_2(x) = O(f_3(x)) \Rightarrow f_1(x) = O(f_3(x)),$$

$$f_1(x) = O(f_2(x)),\ f_3(x) = O(f_4(x)) \Rightarrow f_1(x) \cdot f_3(x) = O(f_2(x) \cdot f_4(x)),$$

$$f_1(x) = O(f(x)),\ f_2(x) = O(f(x)) \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) = O(f(x))$$

каби муносабатларнинг ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

7-теорема. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ ($x \neq a$ да $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$) функциялар учун ушбу*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

лимит мавжуд ва $0 < |c| < \infty$ бўлса, $x \to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ бир хил тартибли функциялар бўлади.

Исбот. Ушбу

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

лимит мавжуд ва $0 < |x| < \infty$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c + \gamma_1(x), \quad \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{c} + \gamma_2(x)$$

бўлиб, бунда $\gamma_1(x)$ ва $\gamma_2(x)$ функциялар чексиз кичик функцияларни ифодалайди. $\lim\limits_{x \to a} \gamma_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \gamma_2(x) = 0$, демак, a нуқтанинг етарли кичик атрофи $U_\delta(a)$ да $\gamma_1(x)$ ва $\gamma_2(x)$ функциялар чегараланган бўлади. У ҳолда барча $x \in U_\delta(a)$ лар учун

$$|\gamma_1(x)| < k, \quad |\gamma_2(x)| < k \quad (k = \text{const})$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ва $\frac{g(x)}{f(x)}$ функциялар учун

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant |c| + k, \quad \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \leqslant \frac{1}{|c|} + k$$

тенгсизликларга келамиз. Демак,

$$|f(x)| \leqslant (|c| + k) \cdot |g(x)|,$$

$$|g(x)| \leqslant \left(\frac{1}{|c|} + k\right) \cdot |f(x)|.$$

Бу эса

$$f(x) = O(g(x)), \quad g(x) = O(f(x))$$

эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

21-таъриф. Агар $x \to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ($x \neq a$ да $g(x) \neq 0$) учун

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

бўлса, у ҳолда $x \to a$ $f(x)$ ва $g(x)$ лар *эквивалент функциялар* деб аталади. Эквивалент функциялар

$$f(x) \sim g(x)$$

каби белгиланади.

Масалан, $x \to 0$ да $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ функциялар эквивалент функциялар: $x \sim \sin x$.

Агар $x \to a$ да $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim s(x)$ бўлса, у ҳолда $x \to a$ да $f(x) \sim s(x)$ бўлади. Дарҳақиқат, $x \to a$ да $f(x) \sim g(x)$, бундан

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, $x\to a$ да $g(x)\sim s(x)$, бундан $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{s(x)}=1$ келиб чиқади, улардан

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{s(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{s(x)}=1$$

лимитга эга бўламиз. Демак, $f(x)\sim s(x)$.

22- таъриф. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ чексиз кичик функциялар учун

$$f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$$

тенглик ўринли бўлиб, бунда $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ га нисбатан *юқори тартибли чексиз кичик функция* деб аталади. У

$$f(x)=o(g(x))$$

каби белгиланади.

Агар $f(x)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида чексиз кичик функция (яъни $x\to a$ да $f(x)\to 0$) бўлса, у $f(x)=o(1)$ каби ёзилади.

Равшанки, агар $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун $f(x)=o(g(x))$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу функциялар учун $f(x)=O(g(x))$ тенглик ҳам ўринли бўлади.

Юқорида келтирилган таърифлардан фойдаланиб «катта O» ва «кичик o» орасидаги боғланишларни ифодалайдиган қуйидаги муносабатларни келтириб чиқариш мумкин.

$$f_1(x)=O(f_2(x)),\ f_2(x)=o(f_3(x))\Rightarrow f_1(x)=o(f_3(x)),$$

$$f_1(x)=o(f_2(x)),\ f_2(x)=O(f_3(x))\Rightarrow f_1(x)=o(f_3(x)),$$

$$f_1(x)=O(f(x)),\ f_2(x)=o(g(x))\Rightarrow f_1(x)\cdot f_2(x)=o(f(x)\cdot g(x)).$$

«Катта O» ва «кичик o» иштирок этган тенгликларнинг оддий маънодаги тенгликлар эмаслигини таъкидлаймиз.

Масалан, $x\to a$ да $f_1(x)=o(g(x))$, $f_2(x)=o(g(x))$ муносабатлардан $f_1(x)=f_2(x)$ деб хулоса чиқариш хато бўлади.

Энди «кичик o» ва эквивалентлик $\sim$ белгилари билан боғланган функциялар орасидаги муносабатларни ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

8-теорема. *$x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ($x\neq a$ да $f(x)\neq 0$; $g(x)\neq 0$) эквивалент ($f(x)\sim g(x)$) бўлиши учун*

$$g(x)-f(x)=o(g(x))$$

ёки

$$g(x)-f(x)=o(f(x))$$

тенгликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар эквивалент бўлсин: $f(x)\sim g(x)$. У ҳолда таърифга кўра $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ бўлиб, ундан

$$\lim_{x\to a}\left(1-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-f(x)}{g(x)}=0$$

келиб чиқади. Демак, $g(x)-f(x)=o(g(x))$.

Етарлилиги. $x\to a$ да $g(x)-f(x)=o(g(x))$ бўлсин. У холда $x\to a$ да

$$1-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{g(x)}=\frac{o(g(x))}{g(x)}$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{x\to a}\left(1-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\frac{o(g(x))}{g(x)}=0$$

келиб чиқади. Бу эса $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, яъни $f(x)\sim g(x)$ эканини кўрсатади. Теорема исбот бўлди.

2-натижа. Агар, $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=c\neq 0,\ c=\text{const}$$

бўлса, у ҳолда ушбу

$$g(x)\sim c\cdot f(x)$$

ва

$$g(x)=c\cdot f(x)+o(f(x))$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Исбот. Шартга кўра

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=c\neq 0,\ c=\text{const},$$

бундан

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{c\cdot f(x)}=1$$

келиб чиқади. Демак, $g(x)\sim c\cdot f(x)$.

Юқорида исбот этилган 8-теоремага асосан $c\cdot f(x)-g(x)=o(c\cdot f(x))=o(f(x))$ кўринишда ёзиш мумкин, ундан

$$g(x)=c\cdot f(x)+o(f(x))$$

экани келиб чиқади.

Энди функцияларнинг эквивалентлигига асосланган ҳамда функцияларнинг лимитини ҳисоблашда тез-тез фойдаланиб туриладиган теоремани келтирамиз.

9-теорема. *Агар $x\to a$ да $f(x)\sim f_1(x)$ ва $g(x)\sim g_1(x)$ бўлиб, ушбу*

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *лимит ҳам мавжуд ва*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Шартга кўра $x \to a$ да $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$. У ҳолда ушбу

$$f(x) = f_1(x) + o(f_1(x)),$$
$$g(x) = g_1(x) + o(g_1(x))$$

тенгликлар ўринли бўлади. Натижада

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)\left[1 + \frac{o(f_1(x))}{f_1(x)}\right]}{g_1(x)\left[1 + \frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{1 + \frac{o(f_1(x))}{f_1(x)}}{1 + \frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Функцияларни уларга эквивалент функциялар билан алмаштириш натижасида кўпгина функцияларнинг лимитлари содда ҳисобланади.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$$

лимитни ҳисобланг. Равшанки,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x^2}.$$

Энди $x \to 0$ да

$$\sin \frac{3x}{2} = \frac{3x}{2} + o(x), \quad \sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x)$$

муносабатларни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{3}{2}x + o(x)\right)\left(\frac{1}{2}x + o(x)\right)}{x^2} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

Демак,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

5-эслатма. Биз 1-бандда «O», «o» ва «$\sim$» белгилар билан боғланган функцияларни ўргандик. Бунда a чекли деб қаралди. $a = \infty$ бўлган ҳолда ҳам юқоридагидек тушунча ва теоремалар таърифланади ва ўрганилади.

5-БОБ

ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

Функциянинг узлуксизлиги математик анализ курсининг муҳим тушунчаларидан бўлиб, у функция лимити тушунчаси билан бевосита боғланган.

$X\subset R$ тўпламда $f(x)$ функция аниқланган, $a\in X$ эса X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. $x\to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити тўғрисида қуйидагилардан бирини айтиш мумкин:

1°. $x\to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд, чекли ва

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a);$$

2°. $x\to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд, чекли ва

$$\lim_{x\to a} f(x)=b\neq f(a);$$

3°. $x\to a$ да $f(b)$ функциянинг лимити мавжуд ва

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty\ \ (+\infty,\ -\infty);$$

4°. $x\to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд эмас.

Агар бирор $f(x)$ функция учун 1°-ҳол ўринли бўлса, бу функция муҳим функциялардан хисобланади ва қатор хоссаларга эга бўлади. Қуйида бундай функциялар узлуксиз функция деб аталган.

Биз ушбу бобда асосан узлуксиз функциялар ва уларнинг хоссаларини ўрганамиз.

1-§. Функция узлуксизлиги таърифлари

1. Функциянинг нуқтада узлуксизлиги. $X\subset R$ тўпламда $f(x)$ аниқланган бўлиб, $a\in X$ эса X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1-таъриф. Агар $x\to a$ да $f(x)$ функция лимити мавжуд ва

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \tag{5.1}$$

бўлса, $f(x)$ функция *a нуқтада узлуксиз* деб аталади.

Мисоллар. 1. $f(x)=x^2+x+1$ функция $\forall a\in R$ нуқтада узлуксиз, чунки $x\to a$ да

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(x^2+x+1)=a^2+a+1=f(a).$$

2. $f(x)=(\operatorname{sign} x)^2$ функцияни қарайлик. Равшанки, бу функция

$$f(x)=(\operatorname{sign} x)^2=\begin{cases}1, & \text{агар } x\neq 0,\\ 0, & \text{агар } x=0\end{cases}$$

ўринишда бўлиб, $\forall a\in R$ учун

$$\lim_{x\to a} f(x)=1$$

ўлади. Аммо $f(0)=0$ бўлгани учун

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0).$$

Демак, $f(x) = (\operatorname{sing} x)^2$ функция $a = 0$ нуқтада узлуксиз эмас, бошқа ҳамма $a \neq 0$ нуқталарда эса узлуксиздир.

Биз 4-бобда функция лимитининг бир-бирига эквивалент бўлган Гейне ва Коши таърифларини келтирган эдик. Бу таърифлардан фойдаланиб, функциянинг a нуқтада узлуксизлигини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

2-таъриф (Гейне). Агар $X = \{x\}$ тўпламнинг элементларидан тузилган ва a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам функция қийматларидан тузилган мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт $f(a)$ га интилса, $f(x)$ функция *a нуқтада узлуксиз* деб аталади.

3-таъриф (Коши). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, функция аргументи x нинг $|x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция *a нуқтада узлуксиз* деб аталади.

Мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt{x+4}$ функциянинг $x = 5$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, бу ε сонга кўра $\delta > 0$ сонни $\delta = 3\varepsilon$ деб қаралса, у ҳолда $|x - 5| < \delta$ бўлганда

$$|f(x) - f(5)| = |\sqrt{x+4} - 3| = \frac{|x-5|}{\sqrt{x+4}+3} < \frac{|x-5|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

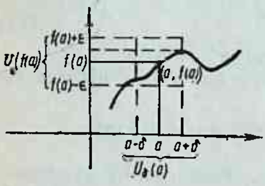
бўлади. Бу эса юқоридаги таърифга кўра, $f(x) = \sqrt{x+4}$ функциянинг $x = 5$ нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради.

Коши таърифидаги $|x - a| < \delta$ ва $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ тенгсизликлар мос равишда

$$x \in U_\delta(a) \text{ ва } f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

кўринишда ҳам ёзилиши мумкин эканлигини ҳисобга олсак, атроф тушунчаси ёрдамида функциянинг узлуксизлигини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

4-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг барча $x \in U_\delta(a)$ қийматларида функциянинг мос қийматлари учун $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ бўлса, $f(x)$ функция *a нуқтада узлуксиз* деб аталади (33-чизма).



33-чизма.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функция $x=0$ нуқтада узлуксиз. Ҳақиқатан, $\forall\ \varepsilon>0$ сон учун $\delta>0$ онни $\delta=\varepsilon$ деб олинса, у ҳолда $\forall\ x\in U_\delta(0)$ лар учун $f(x)\in U_\varepsilon(0)$ келиб чиқади.

Равшанки, (5.1) ўринли бўлса, ушбу $\lim\limits_{x-a\to 0}[f(x)-f(a)]=0$ лимит ҳам ўринли бўлади. Одатда $x-a$ айирма *аргумент орттирмаси*, $f(x)-f(a)$ айирма эса *a нуқтадаги* функциянинг *орттирмаси* дейилади. Улар мос равишда Δx ва Δy (ёки Δf) каби белгиланади:

$$\Delta x=x-a,\ \Delta y=\Delta f=f(x)-f(a).$$

Бу тенгликлардан фойдаланиб ёзамиз:

$$x=a+\Delta x,\quad \Delta y=\Delta f=f(a+\Delta x)-f(a).$$

Натижада (5.1) муносабат

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0]$$

кўринишга эга бўлади. Демак, $f(x)$ функциянинг a нуқтада узлуксизлиги, бу нуқтада аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг ҳам чексиз кичик орттирмаси мос келиши сифатида ҳам таърифланиши мумкин.

Мисол. $y=\sin x$ ва $y=\cos x$ функцияларнинг $\forall\ a\in R$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. $\forall\ a\in R$ нуқта олиб, унга Δx орттирма берайлик. Натижада $y=\sin x$ функция ҳам ушбу

$$\Delta y=\sin(a+\Delta x)-\sin a$$

рттирмага эга бўлиб, $-\pi<\Delta x<\pi$ бўлганда

$$|\Delta y|=|\sin(a+\Delta x)-\sin a|=\left|2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x|$$

енгсизликка эга бўламиз. Бундан $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $y=\sin x$ функция $a\in R$ нуқтада узлуксиз. Худди шунга ўхшаш $y=\cos x$ функциянинг ҳам $a\in R$ да узлуксиз бўлиши ўрсатилади.

2. **Функциянинг бир томонли узлуксизлиги.** Энди функциянинг a нуқтада бир томондан (ўнгдан ёки чапдан) узлуксиз ўлиши таърифларини келтирамиз.

$X\subset R$ тўпламда $f(x)$ функция аниқланган бўлиб, $a\in X$ эса X ўпламнинг ўнг (чап) лимит нуқтаси бўлсин.

5-таъриф. Агар $x\to a+0$ $(x\to a-0)$ да $f(x)$ функциянинг нг (чап) лимити мавжуд ва

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)\quad \left(\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a)\right) \tag{5.2}$$

бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада ўнгдан (чапдан) узлуксиз дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/x}}, & \text{агар } x \neq 0, \\ 0, & \text{агар } x = 0 \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция учун

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{1}{1+2^{1/x}} = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{1}{1+2^{1/x}} = 1 \neq f(0)$$

бўлганлиги сабабли, берилган функция $x = 0$ нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлиб, чапдан эса узлуксиз эмас. Функциянинг ўнг (чап) лимитларининг Гейне ва Коши таърифларидан (4-боб, 3-§) фойдаланиб, унинг a нуқтада ўнгдан (чапдан) узлуксизлигининг Гейне ва Коши таърифларини келтириш қийин эмас. Биз ўқувчига, машқ тариқасида, бундай таърифларни баён этишни тавсия этамиз.

Юқорида келтирилган таърифлардан кўринадики, агар $f(x)$ функция a нуқтада ҳам ўнгдан, ҳам чапдан бир вақтда узлуксиз бўлса, функция шу *нуқтада узлуксиз* бўлади.

6-таъриф. Агар $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция X *тўпламда узлуксиз* деб аталади.

Масалан, $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу *интервалда узлуксиз* деб аталади

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган бўлсин. Агар бу функция (a, b) да узлуксиз бўлса ҳамда a нуқтада ўнгдан, b нуқтада чапдан узлуксиз бўлса, функция $[a, b]$ *сегментда узлуксиз* деб аталади.

Мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциянинг R тўпламда узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

Аввал $\forall a \in R \setminus \{0\}$ нуқтада берилган функциянинг узлуксизлигини кўрсатамиз. $\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, бу сонга кўра $\delta > 0$ сонни $\delta = \frac{3}{4}\sqrt[3]{a}\cdot\varepsilon$ деб қарайлик. Натижада $|x - a| < \delta$ бўлганда

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}| = \frac{|x-a|}{|\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}|} =$$

$$= \frac{|x-a|}{\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{a}\right)^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}} \leqslant \frac{|x-a|}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}} < \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, функция $\forall a \in R\ (a \neq 0)$ нуқтада узлуксиз.

Энди $a = 0$ бўлган ҳолда, $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta > 0$ сонни $\delta = \varepsilon^3$ деб олиб, $|x - a| = |x| < \delta$ бўлганда

$$|f(x) - f(0)| = |\sqrt[3]{x}| < \sqrt[3]{\delta} = \varepsilon$$

енгсизликка эга бўламиз. Бу эса берилган функциянинг $a = 0$ нуқ- ада узлуксиз бўлишини ифодалайди. Демак, берилган функция R ўпламда узлуксиз.

2-§. Функциянинг узилиши. Узилишнинг турлари

Мазкур бобнинг бошида $x \to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити учун ҳол юз беришини таъкидлаб, 1-§ да 1°-ҳолни ўргандик. Бунда из узлуксиз функцияларга эга бўлдик. Энди 2° — 4°-ҳолларни ҳам рганамиз.

$f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган бўлиб, $a \in X$ нуқта X ўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

7-таъриф. Агар $x \to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд, екли бўлиб, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq f(a)$ ёки $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ $(+\infty, -\infty)$ ўлса ёки функциянинг лимити мавжуд бўлмаса, унда $f(x)$ функ- ия *a нуқтада узилишга эга* дейилади.

Функциянинг a нуқтада узилишга эга бўладиган ҳолларини ало- ида қараб ўтамиз.

1°. $x \to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд, чекли бўлиб, у (a) га тенг бўлмасин:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \neq f(a) \quad (b \text{ — чекли сон}).$$

Бу ҳолда, равшанки, X да аниқланган ушбу

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ b, & x = a \end{cases}$$

функция a нуқтада узлуксиз бўлади:

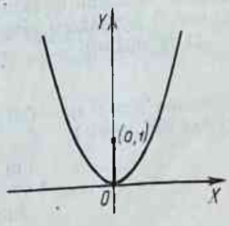
$$\lim_{x \to a} f^*(x) = \lim_{x \to a} f(x) = b = f^*(a).$$

Шундай қилиб, берилган функциямизнинг битта a нуқтадаги қий- матини ўзгартириб ($f(a)$ ўрнига b олиб) a нуқтада узлуксиз функ- цияга эга бўламиз. Шунинг учун, бу ҳолда $f(x)$ функция *бартараф қилиш мумкин бўлган узилишга эга* дейилади.

Масалан, ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0)'$ му- носабат ўринли. Демак, бу функция $x = 0$ нуқтада бартараф қилиш мумкин бўлган узилишга эга (34-чизма).



34-чизма.

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x}, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, \quad \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$. Агар бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги қиймати $f(0)=0$ деб олинса, функция бу нуқтада узлуксиз бўлиб қолади.

2°. Энди $x\to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд эмас дейлик.

Бу ҳолат, аввало, $x\to a$ да $f(x)$ функциянинг ўнг ва чап лимитлари мавжуд ва чекли бўлиб, $f(a-0)\neq f(a+0)$ бўлганда рўй беради. Шу ҳолда функция a нуқтада *биринчи тур узилишга эга* дейилади ва $f(a+0)-f(a-0)$ айирма унинг a нуқтадаги *сакраши* дейилади.

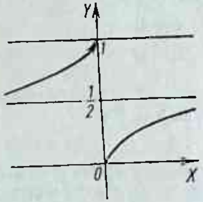
$x\to a$ да $f(x)$ нинг лимити мавжуд бўлмайдиган бошқа ҳамма ҳолларда функция a нуқтада *иккинчи тур узилишга эга* дейилади.

Масалан, 1) ушбу

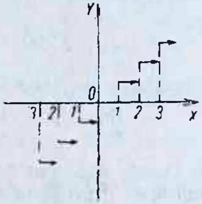
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функция учун

$$\lim_{x\to+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to-0} f(x)=1.$$



35- чизма.



36- чизма.

Демак, берилган функция $x=0$ нуқтада биринчи тур узилишга эга. Унинг 0 нуқтадаги сакраши — 1 га тенг (35- чизма).

2) Қуйидаги

$$f(x)=[x]$$

функция $x=p$ (p — бутун сон) нуқтада биринчи тур узилишга эга, чунки (36- чизма):

$$\lim_{x\to p-0} f(x)=\lim_{x\to p-0}[x]=p-1,$$

$$\lim_{x\to p+0} f(x)=\lim_{x\to p+0}[x]=p.$$

3) Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, \text{ агар } x > 0, \\ -x, \text{ агар } x \leqslant 0 \end{cases}$$

функция $x = 0$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга, чунки $x \to +0$ да $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ функциянинг лимити мавжуд эмас.

4) Дирихле функцияси

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, \text{ агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x \text{ — рационал бўлса} \end{cases}$$

R тўпламнинг ҳар бир a нуқтасида иккинчи тур узилишга эга, чунки $x \to a$ да $\chi(x)$ функциянинг ўнг лимити ҳам, чап лимити ҳам мавжуд эмас.

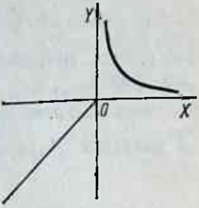
5) Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ x, \text{ агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун

$$\lim_{x \to +0} f(x) = +\infty, \lim_{x \to -0} f(x) = 0$$

бўлиб, бу функция $x = 0$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга бўлади (37-чизма).



37- чизма.

6) Ушбу $f(x) = \operatorname{tg} x$ функциянинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg}(x) = +\infty$$

бўлади. Демак, $f(x) = \operatorname{tg} x$ функция $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга.

3°. Энди $x \to a$ да

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad (+\infty, -\infty)$$

бўлсин. Унда функциянинг ўнг ва чап лимитлари ҳам ∞ $(+\infty, -\infty)$ бўлади. Бу ҳолда ҳам $f(x)$ функция a нуқтада *иккинчи тур узилишга* эга дейилади.

Масалан, ушбу

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0), \; f(0) = 0$$

функциянинг $x \to 0$ даги лимити $+\infty$ дир $\Bigl($бу ҳолда

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \lim_{x \to -0} \frac{1}{x^2} = +\infty\Bigr).$$

Демак, берилган функция $x = 0$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга. Шундай қилиб, $f(x)$ функция $a \in X$ нуқтада

1) узлуксиз бўлади ёки

2) бартараф қилиш мумкин бўлган узилишга эга бўлади, ёки

3) биринчи тур узилишга эга бўлади, ёки

4) иккинчи тур узилишга эга бўлади.

1-эслатма. Агар $a \in X$ нуқта X тўпламнинг бир томонли (яъни ўнг ёки чап) лимит нуқтаси бўлса, юқоридагидек функциянинг бу нуқтада узилиши (ўнгдан ёки чапдан узилиши) таърифи келтирилади.

2-эслатма. $f(x)$ функция X тўпламда аниқланган, узлуксиз бўлиб, $a \bar{\in} X$ нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда функциянинг a нуқтадаги қиймати аниқланмаган бўлса ҳам $x \to a$ да $f(x)$ нинг лимити мавжуд ва чекли, яъни $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (b — чекли сон) бўлиши мумкин. Бу лимит муносабатдан фойдаланиб $X \cup \{a\}$ тўпламда узлуксиз бўлган функция тузиш мумкин. Ҳақиқатан, агар

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{агар } x \in X \text{ бўлса}, \\ b, & \text{агар } x = a \text{ бўлса} \end{cases}$$

деб олинса, натижада $X \cup \{a\}$ тўпламда узлуксиз $f^*(x)$ функция ҳосил бўлади.

Масалан, $y = \frac{\sin x}{x}$ функция $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ да аниқланган ва узлуксиз. Маълумки,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Бу муносабатдан фойдаланиб тузилган ушбу

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x \neq 0, \\ 1, & \text{агар } x = 0 \end{cases}$$

функция R да узлуксиз бўлади.

3-§. Монотон функциянинг узлуксизлиги ва узилиши

Биз юқорида X тўпламда берилган ихтиёрий $f(x)$ функциянинг $a \in X$ нуқтадаги лимити учун 4 та ҳолдан бири бўлиши мумкинлигини кўрдик. Қуйидаги теорема монотон функциялар учун бу ҳолларнинг фақат иккитаси бўлиши мумкинлигини кўрсатади.

$f(x)$ функция X оралиқда аниқланган бўлсин.

1-теорема. *Агар $f(x)$ функция X оралиқда монотон функция бўлса, у шу оралиқнинг исталган нуқтасида ё узлуксиз бўлади, ёки фақат биринчи тур узилишга эга бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция X оралиқда ўсувчи бўлсин. X нинг шундай a нуқтасини олайликки, бирор $\delta > 0$ учун $(a - \delta,\ a + \delta) \subset X$ бўлсин. Шартга кўра $\forall x \in (a - \delta,\ a)$ учун $f(x) \not\geq f(a)$ ва $\forall x \in (a,$

$a+\delta)$ учун $f(x) \geqslant f(a)$ бўлади. Демак, $f(x)$ функция $(a-\delta,\ a)$ да юқоридан, $(a,\ a+\delta)$ да қуйидан чегаралангандир. Монотон функция лимити ҳақидаги теоремага асосан

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) \leqslant f(a), \tag{5.3}$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \geqslant f(a) \tag{5.4}$$

бўлади. Агар $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$ бўлса, функция a нуқтада узлуксиз бўлади. Агар $f(a-0) < f(a+0)$ бўлса, шу нуқтада функция биринчи тур узилишга эга бўлади.

Агар a нуқта X оралиқнинг четки нуқтаси бўлса, юқоридаги келишувимизга кўра, бу нуқтадаги бир томонли лимитнинг мавжудлигини кўрсатиш кифоя.

Равшанки, $f(x)$ функция X оралиқда камаювчи бўлган холда ҳам мулоҳазаларимиз худди юқоридагидек бўлади. Теорема исботланди.

Энди монотон функциянинг узлуксиз бўлиши ҳақидаги теоремани келтирамиз.

2-теорема. *Агар $f(x)$ функция X оралиқда монотон бўлиб, унинг қийматлари тўплами $Y_f = \{f(x)\colon x \in X\}$ бирор оралиқдан иборат бўлса, у ҳолда бу функция X да узлуксиз бўлади.*

Исбот. Аниқлик учун $f(x)$ функция X да ўсувчи бўлсин. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция теореманинг шартларини қаноатлантирса ҳам, у бирор $a \in X$ нуқтада узлуксиз бўлмасин. У ҳолда 1-теоремага кўра у биринчи тур узилишга эга бўлади. Яъни

$$f(a-0) < f(a+0)$$

бўлади (агар a нуқта X оралиқнинг четки нуқтаси бўлса, (5.3) ёки (5.4) тенгсизлик ўринли бўлади). Натижада

$$x < a \text{ бўлса, } f(x) \leqslant f(a-0)$$

$$x > a \text{ бўлса, } f(x) \geqslant f(a+0)$$

бўлиб, $f(x)$ функция $(f(a-0),\ f(a+0))$ интервалдаги $f(a)$ дан бошқа қийматларни ҳеч бир $x \in X$ да қабул қила олмайди. Бу эса $f(x)$ нинг қийматлари тўплами Y_f бирор оралиқдан иборат эканлигига зиддир. Демак, функция a нуқтада биринчи тур узилишга эга бўла олмайди. Теорема исбот бўлди.

4-§. Узлуксиз функциялар устида арифметик амаллар

Энди узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатини узлуксизликка текширамиз.

3-теорема. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X \subset R$ тўпламда аниқланган бўлиб, уларнинг ҳар бири $a \in X$ нуқтада узлуксиз бўлса,*

$$f(x) \pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x) \neq 0,\ \forall\, x \in X)$$

функциялар ҳам шу нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. Бу теореманинг исботи лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амаллар ҳақидаги теоремалардан бевосита келиб чиқади. Масалан, иккита узлуксиз функция кўпайтмаси яна узлуксиз функция бўлишини кўрсатайлик. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтада узлуксиз бўлсин:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

У ҳолда

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = f(a)\cdot g(a)$$

бўлиб, ундан $f(x)\cdot g(x)$ функциянинг a нуқтада узлуксиз бўлиши келиб чиқади.

3-эслатма. Иккита функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати узлуксиз бўлишидан бу функцияларнинг ҳар бирининг узлуксиз бўлиши келиб чиқавермайди.

Мисол. Қуйидаги $f(x) = x$ ва

$$g(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциялар кўпайтмасидан тузилган $\varphi(x) = x\cdot\cos\frac{1}{x}$ функция R да узлуксиз бўлган ҳолда $g(x)$ функция $x = 0$ нуқтада узлуксиз эмас.

Юқорида келтирилган теорема қўшилувчилар ҳамда кўпайтувчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Энди теореманинг қўлланилишига мисоллар келтирайлик.

Мисоллар. 1. $y = ax^n$, $a = \text{const}$, $n \in N$ функция R да узлуксиз.

Равшанки, $f(x) = x$ функцияи R да узлуксиз. Агар берилган функцияни

$$y = a\cdot x^n = a\cdot \underbrace{x\cdot x\ \dots\ x}_{n \text{ та}}$$

кўринишда ифодалаш мумкинлигини эътиборга олсак, 3-теоремага кўра $y = ax^n$ функциянинг R да узлуксизлиги келиб чиқади.

Келтирилган мисол ва 3-теоремадан бутун ва каср рационал функциялар

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$Q(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

($a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$ — ўзгармас сонлар, $n \in N$, $m \in N$) ўз аниқланиш тўпламларида узлуксиз бўлиши келиб чиқади.

2. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ функциялар ўз аниқланиш соҳаларида узлуксиз. Ҳақиқатан, бу функциялар узлуксиз функцияларнинг нисбати орқали ифодаланади.

5- §. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги

$y = f(x)$ функция X тўпламда, $z = \varphi(y)$ функция эса Y тўпламда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида $z = \varphi(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин (4-бобнинг 1- § ига қаранг).

4-теорема *Агар $y = f(x)$ функция $a \in X$ нуқтада, $z = \varphi(y)$ функция эса a нуқтага мос келган $y_a = f(a)$ нуқтада узлуксиз бўлса, $z = \varphi(f(x))$ мураккаб функция a нуқтада узлуксиз бўлада.*

Исбот. $y = f(x)$ функция $a \in X$ нуқтада, $z = \varphi(y)$ функция эса мос $y_a = f(a)$ нуқтада узлуксиз бўлсин. Функция узлуксизлиги таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\sigma > 0$ сон топиладики, $|y - y_a| < \sigma$ тенгсизлик бажарилса, $|\varphi(y) - \varphi(y_a)| < \varepsilon$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Шунингдек, олинган $\sigma > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $|x - a| < \delta$ тенгсизлик бажарилганда $|f(x) - f(a)| < \sigma$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $|x - a| < \delta$ тенгсизлик бажарилганда

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(f(a))| < \varepsilon$$

тенгсизлик ҳам бажарилади. Бу эса $z = \varphi(f(x))$ функциянинг a нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. $y = a^x$ $(a > 1)$ R тўпламда ўсувчи функция. Ҳар бир $y > 0$ да $x = \log_a y$ нинг мавжуд бўлишидан берилган функциянинг қийматлари $y = \{a^x : x \in R\} = (0, +\infty)$ оралиқни ташкил этиши келиб чиқади. Демак, $y = a^x$ функция R да узлуксиз.

2. $y = \log_a x$ $(a > 1)$. Бу функция $X = (0, +\infty)$ оралиқда ўсувчи. Унинг қийматлари $Y = \{\log_a x : x \in (0, +\infty)\} = R$ ни тўлдиради, чунки ҳар бир $y \in R$ учун $x = a^y$ мавжуд. Демак, $y = \log_a x$ $(a > 1)$ функция, $(0, +\infty)$ да узлуксиз.

Юқорида келтирилган кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг $0 < a < 1$ бўлганда узлуксиз эканлиги ҳам 2- теоремадан келиб чиқади.

3. $y = x^\mu$ $(x > 0)$ даражали функцияни қарайлик. Бу функцияни

$$y = x^\mu = a^{\mu \log_a x} \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Агар $\mu \log_a x$ функция $(0, +\infty)$ да, a^x функция эса R да узлуксиз эканини эътиборга олсак, у ҳолда мураккаб функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага асосланиб $y = x^\mu$ функциянинг $(0, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлишини топамиз.

6-§. Лимитларни ҳисоблашда функциянинг узлуксизлигидан фойдаланиш

Маълумки, функцияларнинг лимитларини ҳисоблаш муҳим, шу билан бирга анчагина машаққатли ишдир.

Функцияларнинг узлуксиз бўлиши эса, уларнинг лимитини топишда қўл келади.

$y=f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда аниқланган бўлиб, a нуқта X нинг лимит нуқтаси бўлсин. $z=\varphi(y)$ функция эса $Y\subset R$ тўпламда аниқланган. Бу функциялар ёрдамида $z=\varphi(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар $\lim\limits_{x\to a}f(x)=y_a$ мавжуд бўлиб, $z=\varphi(y)$ функция y_a нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a}\varphi(f(x))$ мавжуд ва

$$\lim_{x\to a}\varphi(f(x))=\varphi(y_a)$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатан, $x\to a$ да $f(x)\to y_a$ ва $\varphi(y)$ функция y_a нуқтада узлуксиз, яъни $y\to y_a$ да $\varphi(y)\to\varphi(y_a)$. У ҳолда мураккаб функциянинг лимити ҳақидаги теоремага асосан $x\to a$ да $\varphi(f(x))$ функция лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a}\varphi(f(x))=\lim_{y\to y_a}\varphi(y)=\varphi(y_a)$$

тенгликлар ўринли. Бу тенгликлардан узлуксиз функциялар учун функция ишораси остида лимитга ўтиш қоидаси келиб чиқади:

$$\lim_{x\to a}\varphi(f(x))=\varphi(\lim_{x\to a}f(x)).$$

Хусусан, $f(x)=x$ бўлса,

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(\lim_{x\to a}x)=\varphi(a).$$

Мисоллар. 1. Қуйидаги

$$\lim_{x\to 0}(1+\mu x)^{\frac{1}{x}},\quad 0\neq\mu\in R$$

лимитни ҳисобланг. Биз буни $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mu x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\mu x)^{\frac{1}{\mu x}}]^{\mu}$ кўринишда ёзиб оламиз. Равшанки, $x\to 0$ да $y=\mu x\to 0$ бўлади. Бундан қуйидагини топамиз:

$$\lim_{x\to 0}[(1+\mu x)^{\frac{1}{\mu x}}]^{\mu}=[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}]^{\mu}=e^{\mu}.$$

Шу мисолдан фойдаланиб $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$ лимитни ҳам ҳисоблаш мумкин. Унда $0\neq x\in R$. Равшанки, $\frac{x}{n}\in R$ да ва $n\to\infty$ да $\frac{x}{n}=y\to 0$. Шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{y\to 0}[(1+y)^{\frac{1}{y}}]^x=[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}]^x=e^x.$$

2. Қуйидаги лимитларни ҳисобланг.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ (биринчи муҳим лимит, $a>0,\ a\neq 1$);

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (иккинчи муҳим лимит, $a>0,\ a=1$);

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ (учинчи муҳим лимит).

Бу муносабатларни исботлашда логарифмик, кўрсаткичли ва даражали функцияларнинг узлуксизлигидан фойдаланамиз. Дарҳақиқат,

а) ҳолда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\log_a e;$$

б) ҳолда эса $a^x-1=t$ деб, $x\to 0$ да $t\to 0$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\frac{1}{\log_a[\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}]}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a;$$

Ниҳоят, в) ҳолда $(1+x)^\alpha-1=t$ деб, сўнгра $\alpha=\frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}$ ва $x\to 0$ да $t\to 0$ бўлишини ҳисобга олсак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{t}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\alpha$$

келиб чиқади.

3. Иккита $f(x)$ ва $g(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда аниқланган. a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар

$$\lim_{x\to a}f(x)=b\ \ (b>0),\ \lim_{x\to a}g(x)=c$$

лимитлар ўринли бўлса, ушбу

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=b^c$$

лимит ҳам ўринли бўлади.

Ҳақиқатан, $[f(x)]^{g(x)}$ функцияни

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

кўринишда ифодалаб, сўнгра кўрсаткичли ҳамда логарифмик функцияларнинг узлуксизлигидан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln[\lim\limits_{x\to a} f(x)]} =$$

$$= e^{c\ln b} = e^{\ln b^c} = b^c.$$

Одатда $[f(x)]^{g(x)}$ функция *даражали-кўрсаткичли функция* деб аталади.

Даражали-кўрсаткичли $[f(x)]^{g(x)}$ функция қуйидаги

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty;$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0;$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

ҳолларда аввал қараб ўтганимизга ўхшаш, аниқмасликларни ифодалайди. $x\to a$ да $[f(x)]^{g)x)}$ функция 1) ҳолда 1^∞, 2) ҳолда 0^0, 3) ҳолда ∞^0 кўринишдаги аниқмасликлар дейилади.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a>0, \ b>0)$$

лимитни ҳисобланг.

$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ ифода $x\to 0$ да 1^∞ кўринишдаги аниқмасликдан иборат. Уни очиш учун лимит ишораси остидаги функцияни қулай кўринишда ёзиб олиб, кейин лимитга ўтамиз:

$$\lim_{x\to +0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +0}\left[\frac{(a^x-1)+(b^x-1)}{2}+1\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to +0}\left\{\left[1+\frac{(a^x-1)+(b^x-1)}{2}\right]^{\frac{2}{(a^x-1)+(b^x-1)}}\right\}^{\frac{a^x-1+b^x-1}{2x}} =$$

$$= \left\{\lim_{x\to +0}\left[1+\frac{(a^x-1)+(b^x-1)}{2}\right]^{\frac{2}{a^x-1+b^x-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{a^x-1+b^x-1}{2x}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} = \sqrt{ab}.$$

Демак, $x\to 0$ да берилган функциянинг лимити $\sqrt{ab}$ га тенг.

7-§. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари

Биз ушбу параграфда нуқтада ҳамда оралиқда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини ўрганамиз.

1. Нуқтада узлуксиз бўлган функциянинг хоссалари (локал хоссалар). $f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин. X дан бирор x_0 нуқта олиб, бу нуқтанинг шу тўпламга тегишли бўлган етарли кичик атрофини қарайлик.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция қаралаётган x_0 нуқтада узлуксиз бўлсин. Бу ҳолда таърифга кўра $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ўринли, яъни $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли лимитга эга бўлади. Чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссаларидан (3-бобнинг 4-ига қаралсин) фойдаланиб, x_0 нуқтада узлуксиз бўлган функцияларнинг ҳам қуйидаги ҳоссаларини айта оламиз.

1°. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида функция чегараланган бўлади.

2° Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз ва $f(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган барча x нуқталарда функция қийматларининг ишораси $f(x_0)$нинг ишораси каби бўлади.

1-натижа. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, бу нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган x нуқталарда унинг қийматлари мусбат ҳам манфий ишорали бўлаверса, функциянинг x_0 нуқтадаги қиймати нолга тенг бўлади.

3°. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ учун x_0 нуқтанинг шундай етарли кичик атрофи топиладики, бу атрофдан олинган ихтиёрий x', x'' нуқталар учун $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ бўлади.

Ҳақиқатан, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлганлигидан $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $|x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик бажарилади. x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган x', x'' нуқталар учун ҳам

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

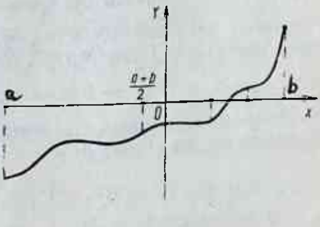
тенгсизликлар ўринли бўлиб, ундан $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади.

Функциянинг нуқта атрофидаги хоссалари унинг *локал хоссалари* дейилади.

1. Сегментда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари (глобал хоссалар). Энди X тўплам сифатида $[a, b]$ сегментни, яъни

$$X = \{x\colon x \in R,\ a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b]$$

тўпламни олиб, бу тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини ўрганамиз.



38- чизма.

5-теорема. (Больцано—Кошининг биринчи теоремаси). *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб сег-*

ментнинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда шундай c ($a < c < b$) нуқта топиладики, у нуқтада функция нолга айланади: $f(c)=0$.

Бу теорема геометрик нуқтаи назардан, узлуксиз эгри чизиқ OX ўқнинг бир томонидан иккинчи томонига ўтишда уни албатта кесиб ўтишини ифодалайди (38-чизма).

Исбот. $f(x)$ функция ёпиқ $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ бўлсин, ($f(a) > 0$, $f(b) < 0$ бўлган ҳол ҳам шунга ўхшаш қаралиши мумкин.). $[a, b]$ сегментнинг $\frac{a+b}{2}$ нуқтасини олиб, бу нуқтада $f(x)$ функциянинг қийматини қараймиз. Агар $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ бўлса, $c=\frac{a+b}{2}$ деб олиниб, унда $f(c)=0$ ва демак, теорема исбот этилган бўлади. Агар $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$ бўлса, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ сегментлардан четки нуқталарида $f(x)$ функция турли ишорали қийматга эга бўладиганини олиб, уни $[a_1, b_1]$ орқали белгилаймиз. Демак, $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ бўлиб, $[a_1, b_1]$ сегментнинг узунлиги эса $b_1-a_1=$ $=\frac{b-a}{2}$ бўлади. Сўнг $[a_1, b_1]$ сегментнинг $\frac{a_1+b_1}{2}$ нуқтасини олиб, бу нуқтада $f(x)$ нинг қийматини қараймиз. Агар $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$ бўлса, $c=\frac{a_1+b_1}{2}$ деб олиниб, унда $f(c)=0$ ва бу ҳолда теорема исбот бўлади. Агар $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$ бўлса, $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ сегментлардан четки нуқталарида $f(x)$ функция турли ишорали қийматга эга бўладиганини олиб, уни $[a_2, b_2]$ деймиз. Бу ҳолда $f(a_2)<0$; $f(b_2)>0$ ва $[a_2, b_2]$ сегментнинг узунлиги $b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$ бўлади. Бу жараённи давом эттиравераміз. Натижада ё чекли сондаги қадамдан кейин сегментларнинг ўрталарини ифодаловчи нуқта сифатида шундай c нуқтага келамизки, у нуқтада функция нолга айланади, демак теорема исбот бўлади, ёки жараён чексиз давом этиб, ичма-ич жойлашган

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликнинг умумий ҳади $[a_n, b_n]$ да $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$ бўлиб, $[a_n, b_n]$ нинг узунлиги $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ ($n\to\infty$ да) бўлади.

Ичма-ич жойлашган сегментлар принципига асосан шундай c нуқта мавжудки (3-боб, 8-§).

$$\lim a_n = \lim b_n = c \quad (c\in(a, b)).$$

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да узлуксиз бўлишидан фойдаланиб, топамиз:

$$a_n \to c \Rightarrow f(a_n) \to f(c) \text{ ва } f(a_n) < 0 \Rightarrow f(c) \leqslant 0,$$
$$b_n \to c \Rightarrow f(b_n) \to f(c) \text{ ва } f(b_n) > 0 \Rightarrow f(c) \geqslant 0.$$

Кейинги тенгсизликлардан эса $f(c)=0$ бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Исбот этилган теорема кўпгина татбиқларга эга, жумладан у айрим тенгламалар ечимининг мавжудлигини кўрсатиш ва уларни тақрибий ечиш имконини беради. Масалан,

$$\sin x - x + 1 = 0 \tag{5.5}$$

тенгламани қарайлик. Равшанки, $f(x) = \sin x - x + 1$ R да узлуксиз. Жумладан, бу функция $[0, \pi]$ сегментда ҳам узлуксиз бўлиб, сегментнинг четки нуқталарида: $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -\pi + 1 < 0$.

5-теоремага асосан $f(x)$ функция $[0, \pi]$ оралиқнинг ҳеч бўлмаганда битта нуқтасида нолга айланади, яъни берилган (5.5) тенгламанинг $[0, \pi]$ оралиқда ечими мавжуд. $[0, \pi]$ сегментни $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ва $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ сегментларга ажратиб, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ нинг четки нуқталарида $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$, $f(\pi) < 0$ бўлишини топамиз. Демак, (5.5) тенгламанинг ечими $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ оралиқда ётади. Бу жараённи давом эттираверишнатижасида $\sin x - x + 1 = 0$ тенгламанинг тақрибий ечими керакли аниқликда топилиши мумкин.

6-теорема (Больцано—Кошининг иккинчи теоремаси). *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг четки нуқталарида $f(a) = A$, $f(b) = B$ қийматларга эга ва $A \neq B$ бўлса, A ва B орасида ҳар қандай C сон олинганда ҳам a билан b орасида шундай c нуқта топиладики,*

$$f(c) = C$$

бўлади.

Исбот. Аниқлик учун $A < B$ бўлсин, ихтиёрий $C \in (A, B)$ олайлик. Ёрдамчи $\varphi(x) = f(x) - C$ функция тузамиз. Равшанки, бу функция сегментда узлуксиз ва бу сегментнинг четки нуқталарида $\varphi(a) = A - C < 0$, $\varphi(b) = B - C > 0$ қийматларни қабул қилади. У ҳолда Больцано—Кошининг биринчи теоремасига кўра a билан b орасида шундай c нуқта топиладики, $\varphi(c) = 0$, яъни $f(c) = C$ бўлади. Бу эса теоремани исботлайди.

2-натижа. Агар $f(x)$ функция бирор X оралиқда (ёпиқ ёки очиқ, чекли ёки чексиз) аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда функциянинг барча қийматлари тўплами бирор Y оралиқдан иборат бўлади.

Исбот. $Y = \{f(x): x \in X\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси m, аниқ юқори чегараси M бўлсин:

$$m = \inf_{x \in X} Y, \quad M = \sup_{x \in X} Y.$$

Бунда m ва M лар чекли сон ёки ∞ бўлиши мумкин. Аниқ чегараларнинг таърифига биноан, $\forall x \in X$ учун $m \leqslant f(x) \leqslant M$ бўлади. Энди $f(x)$ функция қийматлари тўплами (m, M) интервални ташкил этишини кўрсатамиз. Бу интервалда ихтиёрий C сонни олайлик: $m < C < M$. У ҳолда шундай A ва B сонлар топиладики,

$$m \leqslant A < C < B \leqslant M$$

бўлади. Бу A ва B сонларни $A = f(a)$, $B = f(b)$ деб қараш мумкин ($a \in X$, $b \in X$). Исботланган теоремага асосан a билан b орасида шундай c сон мавжудки, $f(c) = C$ бўлади. Олинган C сон (m, M) интервалдаги ихтиёрий сон бўлганидан, бу интервалдаги барча қийматларни $f(x)$ функция қабул қилиши келиб чиқади.

7-теорема. (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси). *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда чегараланган бўлади.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $[a, b]$ да узлуксиз бўлган $f(x)$ функция унда чегараланмаган бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ да шундай x_n нуқта топиладики, шу нуқта учун $|f(x_n)| > n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ тенгсизлик ўринли бўлади. $\{x_n\}$ кетма-кетликдан Больцано — Вейерштрасс леммасига асосан яқинлашувчи қисмий $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин: $x_{n_k} \to x_0$; $x_0 \in [a, b]$. Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлганидан $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ бўлади. Бу эса $|f(x_n)| > n$, яъни $f(x_n) \to \infty$ деб қилган фаразимизга зиддир. Демак, функция $[a, b]$ да чегараланган. Теорема исбот бўлди.

4-эслатма. Келтирилгин теорема шартидаги оралиқнинг сегмент бўлиши муҳимдир. Бу шарт бажарилмаса, теорема ўринли бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, $f(x) = \frac{1}{x}$ функция $(0, 1)$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлса ҳам, у шу оралиқда чегараланмаган.

5-эслатма. Функциянинг бирор оралиқда чегараланган бўлишидан, унинг шу оралиқда узлуксиз бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, Дирихле фунцияси $\chi(x)$ чегараланган бўлса ҳам у узлуксиз эмас.

8-теорема (Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси). *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади, яъни $[a, b]$ да шундай x_1 ва x_2 нуқталар топиладики,*

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a,\, b]} \{f(x)\}, \quad f(x_2) = \inf_{x \in [a,\, b]} \{f(x)\}$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Исбот. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган. Модомики, $\{f(x) \colon x \in [a, b]\}$ тўплам чегараланган экан, унда бу тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегаралари мавжуд. Биз уларни

$$\sup_{x\in[a,\,b]} \{ f(x) \} = M, \quad \inf_{x\in[a,\,b]} \{ f(x) \} = m$$

орқали белгилайлик.

Энди $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функция M ва m қийматларни қабул қиладиган нуқталар мавжудлигини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзининг аниқ юқори чегараси M га эришмасин. У холда $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) < M$ тенгсизлик ўринли бўлади. Қуйидаги

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

функцияни қарайлик. Равшанки, бу функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига кўра $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган. Демак, $\forall x \in [a, b]$ лар учун ушбу

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant \alpha \quad (\alpha = \mathrm{const}, \ \ \alpha > 0)$$

тенгсизлик ўринли. Бундан

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{\alpha}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $M = \sup \{ f(x) \}$ эканига зид. Демак, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзининг аниқ юқори чегарасига эришади, яъни $[a, b]$ да шундай x_1 нуқта мавжудки,

$$f(x_1) = \sup_{x\in[a,\,b]} \{ f(x) \}$$

бўлади. Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзининг аниқ қуйи чегарасига эришиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

6-эслатма. Агар $f(x)$ функция очиқ (a, b) оралиқда (интервалда) аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу оралиқда ўзининг аниқ чегараларига эришмаслиги мумкин. Масалан, $f(x) = x^2$ функция (0, 1) интервалда узлуксиз. Бу функция учун $\sup x^2 = 1$, $\inf x^2 = 0$ бўлади. Аммо функция ўзининг sup ва inf қийматларига (0, 1) интервалда эришмайди.

Одатда функциянинг бирор оралиқдаги хоссалари унинг *глобал хоссалари* деб аталади.

9-теорема (тескари функциянинг мавжудлиги). *Агар $f(x)$ функция X оралиқда аниқланган, узлуксиз ва қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) бўлса, бу функция қийматларидан иборат $Y = \{ f(x)\colon x \in X \}$ оралиқда тескари $f^{-1}(y)$ функция мавжуд бўлиб, у узлуксиз ва қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция X оралиқда узлуксиз бўлгани учун унинг қийматлари Y оралиқни туташ тўлдиради. Демак, ҳар бир $y_0 \in Y$ учун X да шундай x_0 топиладики, $f(x_0) = y_0$ бўлади. Бундай $y_0 \in Y$ га мос келадиган x_0 нуқта X да ягона бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар X оралиқда x_0 дан катта ёки кичик бўлган x' нуқта олинадиган бўлса, $f(x)$ функция ўсувчи бўлгани учун $f(x') = y'$ ҳам y_0 дан катта ёки кичик бўлади. Шундай қилиб Y оралиқдан олинган ҳар бир

y га X да унга мос келадиган ягона шундай x топиладики $f(x) = y$ бўлади. Демак, Y оралиқда тескари $x = f^{-1}(y)$ функция мавжуд. Энди $x = f^{-1}(y)$ функциянинг Y да қатъий ўсувчи бўлишини, яъни $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$ бўлганда $x_1 < x_2$ тенгсизлик ўринли ($x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$) бўлишини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қилайлик: $y_1 < y_2$ бўлганда $x_1 > x_2$ бўлсин. У ҳолда $y = f(x)$ функция X да қатъий ўсувчилигидан $f(x_1) > f(x_2)$, яъни $y_1 > y_2$ бўлади. Бу эса $y_1 < y_2$ деб олинишига зиддир. Демак, $x = f^{-1}(y)$ функция Y да қатъий ўсувчи.

Ниҳоят, монотон функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага кўра, $x = f^{-1}(y)$ функция Y оралиқда узлуксиз бўлади.

$y = f(x)$ функция X да камаювчи бўлганда ҳам теорема юқоридагидек исботланади. Теорема исбот бўлди.

8-§. Функциянинг текис узлуксизлиги. Кантор теоремаси

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқтада узлуксиз бўлсин. Функция узлуксизлиги таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta_0 > 0$ сон топиладики, $|x - x_0| < \delta_0$ тенгсизлик ўринли бўлишдан $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ тенгсизликнинг ҳам ўринли бўлиши келиб чиқади. Бу таърифдаги $\delta_0 > 0$ сон аввал таъкидлаб ўтганимиздек ε га боғлиқ: $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$. Энди $f(x)$ функция X нинг x_1 ($x_1 \neq x_0$) нуқтасида ҳам узлуксиз бўлсин. Яна таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики, $|x - x_1| < \delta_1$ дан $|f(x) - f(x)_1| < \varepsilon$ келиб чиқади.

$f(x)$ функциянинг $x = x_0$, $x = x_1$ нуқталарда узлуксизлиги таърифидаги $\varepsilon > 0$ сон бир хил бўлган ҳолда ҳам унга мос келадиган δ_0 ва δ_1 сонлар, умуман, турлича бўлади, яъни функция бир нечта нуқталарда узлуксиз бўлганда, узлуксизлик таърифидаги $\delta > 0$ сон фақат $\varepsilon > 0$ гагина боғлиқ бўлмасдан, қаралаётган нуқтага ҳам боғлиқ бўлади. Шуни ҳам айтиш керакки, агар $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$ деб олинса, бу $\delta > 0$ сон x_0 ва x_1 нуқталарга баравар ярайверади, чунки $|x - x_0| < \delta$ дан $|x - x_0| < \delta_0$ ва $|x - x_1| < \delta$ дан $|x - x_1| < \delta_1$ келиб чиқади. Мисоллар қарайлик:

1) $f(x) = x^2$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз, жумладан $a \in [0, 1]$ нуқтада узлуксиздир. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\delta = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$ деб олинса, $|x - a| < \delta$ бўлганда

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x - a + 2a| < \delta(\delta + 2a) =$$
$$= \left(\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a\right)^2 + \left(\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a\right) \cdot 2a = \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\delta = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$ бўлиб, $\varepsilon > 0$ билан бирга қаралаётган $a \in [0, 1]$ нуқтага ҳам боғлиқ экан. Бироқ,

$$\bar{\delta} = \min_{a \in [a, 1]} \delta = \min_{a \in [0, 1]} \left(\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a\right) = \min_{a \in [0, 1]} \frac{\varepsilon}{\sqrt{a^2 + \varepsilon} + a} = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}$$

деб олинса, $|x - a| < \bar{\delta}$ дан $|x - a| < \delta$ келиб чиқади. Шу сабабли бу $\bar{\delta} > 0$ сон $[0, 1]$ сегментнинг барча нуқталарига тўғри келади.

Шундай қилиб, $f(x)=x^2$ функция $[0, 1]$ сегментнинг нуқталарида узлуксиз бўлиши таърифидаги $\delta>0$ сон $\varepsilon>0$ сон билан бирга қаралаётган нуқталарга боғлиқ бўлса ҳам, шундай $\bar{\delta}>0$ топиладики, у $[0, 1]$ сегментнинг барча нуқталарига ярайди, бошқача қилиб айтганда, шу $\bar{\delta}>0$ сон фақат ε гагина боғлиқ бўлиб, қаралаётган нуқталарга боғлиқ эмас.

2) $f(x)=\frac{1}{x}$ функция $(0, 1]$ оралиқда узлуксиз, жумладан $a\in(0, 1]$ нуқтада узлуксиздир. Таърифга кўра, $\forall\varepsilon>0$ сон учун $\delta=\frac{\varepsilon a^2}{1+a\varepsilon}$ деб олинса, $|x-a|<\delta$ бўлганда

$$|f(x)-f(a)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|x-a|}{ax}<\frac{1}{a}\cdot\frac{\varepsilon a^2}{1+a\varepsilon}\cdot\frac{1}{a-\frac{\varepsilon a^2}{1+a\varepsilon}}=\varepsilon$$

бўлади. Демак, δ нинг танланиши $\varepsilon>0$ билан бирга $a\in(0, 1]$ нуқтага боғлиқ. Бироқ, бу ҳолда δ нинг $a\in(0, 1]$ бўйича минимуми

$$\bar{\delta}=\min_{a\in(0,1]}\delta=\min_{a\in(0,1]}\frac{\varepsilon a^2}{1+a\varepsilon}=0.$$

Бу эса $f(x)=\frac{1}{x}$ функция $(0,1]$ оралиқнинг нуқталарида узлуксиз бўлиши таърифидаги $\delta>0$ сон $\varepsilon>0$ сон билан бирга қаралаётган нуқталарга боғлиқ ва $(0, 1]$ оралиқнинг барча нуқталарига ярайдиган $\delta>0$ сон мавжуд эмаслигини кўрсатади.

8-таъриф. Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки, X тўпламнинг $|x'-x''|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x'\in X$, $x''\in X$) нуқталарида

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X *тўпламда текис узлуксиз* деб аталади.

$f(x)$ функциянинг текис узлуксизлик таърифидаги $\delta>0$ сон $\varepsilon>0$ сонгагина боғлиқ бўлиб, қаралаётган нуқталарга боғлиқ эмас.

$f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлса, у шу тўпламда узлуксиз бўлишини исботлаш қийин эмас.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

функциянинг $X=[1, 2]$ сегментда текис узлуксизлигини кўрсатинг. $\forall\varepsilon>0$ учун $\delta>0$ сонни $\delta=3\varepsilon$ деб олсак, у ҳолда $\forall x'\in[1, 2]$, $\forall x''\in[1, 2]$ лар учун $|x''-x'|<\delta$ тенгсизлик бажарилганда

$$|\sqrt[3]{x''}-\sqrt[3]{x'}|=\frac{|x''-x'|}{\sqrt[3]{x''^2}+\sqrt[3]{x''x'}+\sqrt[3]{x'^2}}\leqslant\frac{|x''-x'|}{3}<\frac{\delta}{3}=\varepsilon$$

бўлади. Демак, $y=\sqrt[3]{x}$ функция $[1, 2]$ оралиқда текис узлуксиз.

2. Қуйидаги

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

функция $X=(0,\ 1)$ интервалда текис узлуксиз эмас. Ҳақиқатан ҳам, $\varepsilon>0$ сонни, масалан, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ деб олиб, x' $x''\in(0,\ 1)$ нуқталар сифатида

$$x'=\frac{1}{n\pi},\quad x''=\frac{2}{(2n+1)\pi}\ (n\in N)\ \text{лар}$$

қаралса, у ҳолда $|x''-x'|$ айирма учун

$$|x''-x'|=\frac{1}{n\pi(2n+1)}$$

ни топамиз. Энди δ ни (n ни катта қилиб олиш ҳисобига) ҳар қанча кичик қилиб олиш мумкин бўлса ҳам

$$|f(x'')-f(x')|=\left|\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}-\sin n\pi\right|=1>\varepsilon=\frac{1}{2}$$

бўлади. Демак, берилган функция $(0,\ 1)$ да текис узлуксиз эмас.

Бу мисолдан функциянинг бирор оралиқда узлуксиз бўлишидан унинг шу оралиқда текис узлуксиз бўлиши келиб чиқавермаслиги кўринади. Аммо қуйидаги теорема ўринли.

10-теорема (**Кантор теоремаси**). *Агар $f(x)$ функция $[a,\ b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда текис узлуксиз бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция $[a,\ b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. Фараз қилайлик, функция шу сегментда текис узлуксиз бўлмасин. Демак, бу ҳолда бирор $\varepsilon>0$ сон ва ихтиёрий кичик $\delta>0$ сон учун $[a,\ b]$ сегментда шундай x' ва x'' нуқталар топиладики, $|x''-x'|<\delta$ тенгсизлик бажарилса ҳам

$$|f(x'')-f(x')|\geqslant\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлигини $\{\delta_n\}$: δ_1, δ_2, $\ldots$, δ_n, $\ldots$ олайлик ($\delta_n\to0$, $\delta_n>0$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$). Фаразимизга кўра, юқоридаги $\varepsilon>0$ сон ва ихтиёрий $\delta_n>0\ (n=1,\ 2,\ \ldots)$ сон учун $[a,\ b]$ сегментда шундай x'_n ва x''_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ нуқталар топиладики, улар учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$|x''_1-x'_1|<\delta_1\Rightarrow|f(x''_1)-f(x'_1)|\geqslant\varepsilon,$$
$$|x''_2-x'_2|<\delta_2\Rightarrow|f(x''_2)-f(x'_2)|\geqslant\varepsilon,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|x''_n-x'_n|<\delta_n\Rightarrow|f(x''_n)-f(x'_n)|\geqslant\varepsilon$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\{x''_n\}$ кетма-кетлик чегараланган. Бу кетма-кетликдан Больцано—Вейерштрасс леммасига кўра (3-бобдаги 3-леммага қаранг) чекли сонга интилувчи қисмий $\{x''_{n_k}\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин:

$$x''_{n_k} \to x_0 \text{ ва } x_0 \in [a, b].$$

У ҳолда

$$|x''_n - x'_n| < \delta_n, \quad \delta_n \to 0$$

бўлганидан $\{x'_{n_k}\}$ кетма-кетлик ҳам x_0 га интилади: $x'_{n_k} \to x_0$. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да узлуксиз бўлишидан:

$$f(x''_{n_k}) \to f(x_0),$$

$$f(x'_{n_k}) \to f(x_0).$$

Улардан эса

$$f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \to 0$$

келиб чиқади. Бу эса $\forall\, n \in N$ учун $|f(x''_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon$ дейилган юқоридаги тасдиққа зид. Бу зиддият теоремани исботлайди.

$f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

9-таъриф. Қуйидаги

$$\sup_{x \in X} \{f(x)\} - \inf_{x \in X} \{f(x)\}$$

айирма $f(x)$ функциянинг X тўпламдаги *тебраниши* деб айтилади ва ω орқали белгиланади:

$$\omega = \omega(f\colon X) = \sup_{x \in X} \{f(x)\} - \inf_{x \in X} \{f(x)\}.$$

$f(x)$ функциянинг X тўпламдаги тебраниши қуйидаги

$$\omega = \sup_{x',\, x'' \in X} \{|f(x'') - f(x')|\}$$

кўринишда ҳам таърифланиши мумкин.

Кантор теоремасидан муҳим натижа келиб чиқади.

3-натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall\, \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ сегментни узунликлари δ дан кичик бўлакларга ажратилганда, ҳар бир бўлакдаги функциянинг тебраниши ε дан кичик бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. Кантор теоремасига кўра бу функция $[a, b]$ да текис узлуксиз бўлади.

Текис узлуксизлик таърифига кўра $\forall\, \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x' - x''| < \delta$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x' \in [a, b]$, $x'' \in [a, b]$ лар учун $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ бўлади. Энди шу δ ни олиб, $[a, b]$ сегментни диаметри δ бўлган ихтиёрий $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ бўлаклашни оламиз. У ҳолда, равшанки, $\forall\, x' \in [x_k, x_{k+1}]$, $\forall\, x'' \in [x_k, x_{k+1}]$ нуқталар учун $|x'' - x'| < \delta$ ва, демак, $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ бўлади. Бундан, ихтиёрий бўлакча $[x_k, x_{k+1}]$ учун

$$\omega = \sup_{x',\, x'' \in [x_k,\, x_{k+1}]} |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon$$

бўлади. Натижа исботланди.

9-§. Функциянинг узлуксизлик модули

Биз ушбу параграфда функциянинг текис узлуксизлиги билан боғлиқ бўлган, шунингдек, функцияларни синфлаш имконини берадиган тушунча — функциянинг узлуксизлик модули тушунчаси билан танишамиз.

$f(x)$ функция X тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $\forall \delta > 0$ сон олиб. X тўпламнинг $|x'' - x'| \leqslant \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x' ва x'' нуқталарида ушбу

$$|f(x'') - f(x')| \tag{5.6}$$

айирмани қарайлик.

10-таъриф. (5.6) айирманинг аниқ юқори чегараси

$$\sup\{|f(x'') - f(x')|\}, \text{ (бунда } x' \in X,\ x'' \in X,\ |x'' - x'| \leqslant \delta)$$

функциянинг X тўпламдаги *узлуксизлик модули* деб аталади ва $\omega(\delta)$ ёки $\omega(f;\ \delta)$ каби белгиланади:

$$\omega(\delta) = \omega(f;\ \delta) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta}\{|f(x'') - f(x')|\},\ x' \in X,\ x'' \in X.$$

Бу таърифдан функциянинг $\omega(\delta)$ узлуксизлик модули $\delta\ (\delta > 0)$ нинг манфий бўлмаган функцияси экани кўринади.

Энди узлуксизлик модулининг баъзи бир хоссаларини келтирамиз.

1°. Функциянинг узлуксизлик модули $\omega(\delta)$ ўзгарувчи δ нинг ўсувчи функцияси бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ ва $\delta_1 > \delta_2$ бўлсин. У ҳолда ушбу

$$A_1 = \{x' \in X,\ x'' \in X : |x'' - x'| \leqslant \delta_1\},$$

$$A_2 = \{x' \in X,\ x'' \in X : |x'' - x'| \leqslant \delta_2\}$$

тўпламлар учун $A_2 \subset A_1$ бўлиб, ундан $\sup\limits_{A_2}\{|f(x'') - f(x')|\} \leqslant \sup\limits_{A_1}\{|f(x'') - f(x')|\}$ бўлади, демак,

$$\omega(\delta_2) \leqslant \omega(\delta_1).$$

Шундай қилиб, $\delta_1 > \delta_2$ тенгсизлик бажарилганда $\omega(\delta_1) \geqslant \omega(\delta_2)$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Демак, $\omega(\delta)$ ўсувчи функция.

2°. Функциянинг узлуксизлик модули учун ушбу

$$\omega(\lambda\delta) \leqslant (1 + \lambda)\,\omega(\delta) \tag{5.7}$$

муносабат ўринли, бунда λ — мусбат сон.

а) $\lambda = n$, $n \in N$ бўлсин. Бу ҳолда (5.7) тенгсизлик ушбу

$$\omega(n\delta) \leqslant n\omega(\delta) \tag{5.8}$$

кўринишга эга бўлишини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, бирор $[x,\ y]$ сегмент берилган бўлиб, $|x - y| \leqslant n\delta$ бўлсин. Бу сегментни $\alpha_i = x + \frac{i}{n}(y - x)\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ нуқталар ёрдамида n та тенг қисмга ажратамиз. У холда бу $[x,\ y]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функция учун

$$f(y)-f(x)=[f(\alpha_1)-f(\alpha_0)]+[f(\alpha_2)-f(\alpha_1)]+$$
$$+\ldots+[f(\alpha_n)-f(\alpha_{n-1})]\,(\alpha_0=x,\ \alpha_n=y)$$

бўлади.

Иккинчи томондан, $|\alpha_{i+1}-\alpha_i|\leqslant\delta\,(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ бўлиб,

$$|f(\alpha_{i+1})-f(\alpha_i)|\leqslant\omega(\delta)$$

ва

$$|f(y)-f(x)|\leqslant n\omega(\delta)$$

бўлади. Демак, $\sup|f(y)-f(x)|\leqslant n\omega(\delta)$ бўлиб, ундан

$$\omega(n\cdot\delta)\leqslant n\cdot\omega(\delta)$$

бўлиши келиб чиқади.

б) λ — ихтиёрий мусбат сон бўлсин. Бу ҳолда (5.6) тенгсизликни исботлаймиз.

λ соннинг бутун қисмини n орқали белгиласак, λ учун $n\leqslant\lambda<$ $<n+1$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Узлуксизлик модули $\omega(\delta)$ ўсувчи функция бўлганидан ҳамда а) ҳолни эътиборга олиб, қуйидаги

$$\omega(\lambda\delta)\leqslant\omega[(n+1)\cdot\delta]\leqslant(n+1)\,\omega(\delta)\leqslant(1+\lambda)\,\omega(\delta)$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу $f(x)=ax+b\,(a,\ b=\mathrm{const})$ функциянинг $X=[\alpha,\ \beta]$ сегментдаги узлуксизлик модулини топинг.

Узлуксизлик модули таърифига кўра $x'\in X$, $x''\in X$ ва $|x'-$ $-x''|\leqslant\delta$ бўлганда топамиз:

$$\omega(\delta)=\sup_{|x'-x''|<\delta}|(ax'+b)-(ab''+b)|=\sup_{|x'-x''|<\delta}|a(x'-x'')=|a|\cdot\delta.$$

Демак, $f(x)=ax+b$ функциянинг $X=[\alpha,\ \beta]$ сегментдаги узлуксизлик модули $\omega(\delta)=|a|\cdot\delta$ бўлади.

2. $f(x)=x^2+1$ функциянинг $X=[0,\ 1]$ сегментдаги узлуксизлик модулини топинг.

$X=[0,\ 1]$ тўпламда ихтиёрий x' нуқта олиб, x'' нуқтани эса $x''=x'-\delta$ деб қарайлик $(0<\delta<1)$. У ҳолда $2\delta-\delta^2>0$ эканини эътиборга олиб ёзамиз:

$$|f(x')-f(x'')|=|(x'^2+1)-(x''^2+1)|=|2x'\delta-\delta^2|\leqslant2\delta-\delta^2.$$

Шунинг учун

$$\omega(\delta)=\sup_{|x'-x''|<\delta}|f(x')-f(x'')|\leqslant2\delta-\delta^2$$

бўлади.

Аммо $x'=1$, $x''=1-\delta$ нуқталар учун $|x'-x''|=\delta$ ва

$$|f(x')-f(x'')|=|(x'^2+1)-(x''^2+1)|=|2\delta-\delta^2|=2\delta-\delta^2$$

бўлгани сабабли $\omega(\delta)=2\delta-\delta^2$ бўлади.

Энди $f(x)$ функциянинг текис узлуксизлиги билан унинг узлуксизлик модули орасидаги боғланишни ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

11-теорема. *$f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлиши учун $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0$ лимит ўринли бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлсин. Таърифга кўра $\forall\,\varepsilon>0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ сон учун шундай $\delta_\varepsilon>0$ сон топиладики, $\forall\, x'\in X$, $\forall\, x''\in X$ нуқталарда

$$|x'-x''|<\delta_\varepsilon \text{ дан } |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$$

келиб чиқади. У ҳолда $0<\delta<\delta_\varepsilon$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий δ учун

$$\sup_{|x'-x''|<\delta}\{|f(x')-f(x'')|\}\leqslant\sup_{|x'-x''|<\delta_\varepsilon}\{|f(x')-f(x'')|\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

бўлиб, ундан $\omega(\delta)<\varepsilon$, яъни $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0$ келиб чиқади.

Етарлилиги. Ушбу $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0$ лимит ўринли бўлсин. Демак, $\delta\to+0$ да

$$\omega(\delta)=\sup_{|x'-x''|<\delta}\{|f(x')-f(x'')|\}\to0.$$

У ҳолда $\forall\, x'\in X$, $\forall\, x''\in X$ лар учун

$$|x'-x''|\leqslant\delta<\delta_\varepsilon \text{ дан } |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди

Функцияларнинг узлуксизлик модулларига қараб уларни синфларга ажратиш мумкин.

1) Узлуксизлик модули ушбу

$$\omega(\delta)\leqslant M\,\delta^\alpha$$

(бунда $M=\text{const}$, $0<\alpha\leqslant1$) муносабатларни қаноатлантирувчи функциялар тўплами α *тартибли Липшиц синфи* деб аталади ва $\mathrm{Lip}_M\,\alpha$ каби белгиланади.

2) Узлуксизлик модули қуйидаги

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)\cdot\ln\frac{1}{\delta}=0$$

муносабатни қаноатлантирувчи узлуксиз функциялар тўплами *Дини — Липшиц синфи* деб аталади.

Агар $f(x)\in\mathrm{Lip}_M\,\alpha$ бўлса, у ҳолда бу функция Дини — Липшиц синфига ҳам тегишли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $f(x)\in\mathrm{Lip}_M\,\alpha$ дан $\omega(\delta)\leqslant M\cdot\delta^\alpha$, $(0<\alpha<1)$ келиб чиқади ва $\lim\limits_{\delta\to+0}M\delta^\alpha\cdot\ln\frac{1}{\delta}=0$ лимит ўринли бўлганидан, ушбу $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(\delta)\cdot\ln\frac{1}{\delta}=0$ тенгликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

10-§. Компакт тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари

Биз мазкур бобнинг 7-§ ида $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини, жумладан, функциянинг чегараланган бўлиши (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси), функциянинг аниқ чегараларга эришиши (Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси) ва функциянинг текис узлуксиз бўлиши (Кантор теоремаси) каби хоссаларни қараб ўтдик. Бу хоссаларни ўрганишда функция узлуксиз бўлган оралиқ $[a, b]$ сегментдан иборат бўлиши муҳим эканлигини кўрдик ва хоссаларни исботлаш жараёнида эса Больцано — Вейерштрасс леммасидан бевосита фойдалана бордик.

Энди сегмент тушунчасидан умумийроқ бўлган компакт тўплам тушунчаси ва унда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини ўрганамиз.

1. Очиқ ва ёпиқ тўпламлар. $X \subset R$ тўплам берилган бўлиб, $a \in X$ бўлсин.

11-таъриф. Агар $a \in X$ нуқтанинг шундай

$$U_\delta(a) = \{x\colon x \in R,\ a - \delta < x < a + \delta\}\ (\delta > 0)$$

атрофи мавжуд бўлсаки, $U_\delta(a) \subset X$ бўлса, a нуқта X тўпламнинг *ички нуқтаси* дейилади.

Масалан, $x = \frac{1}{2}$ нуқта $X = [0, 1]$ тўпламнинг ички нуқтаси, $x = 0$, $x = 1$ нуқталар $X = [0, 1]$ тўпламнинг ички нуқталари эмас.

12-таъриф. Агар X тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, X тўплам *очиқ тўплам* деб аталади.

Масалан, 1) $X = (0, 1)$ интервал очиқ тўплам.

2) $X = (0, 1) \cup (2, 4) \cup (6, 8)$ тўплам ҳам очиқ тўпламдир.

13-таъриф. Агар X тўпламнинг барча лимит нуқталари ўзига тегишли бўлса, X тўплам *ёпиқ тўплам* деб аталади.

Масалан, $X = [0, 1]$ сегмент ёпиқ тўплам бўлади.

7-эслатма. Лимит нуқтага эга бўлмаган тўплам ёпиқ тўплам деб қаралади.

Масалан, чекли тўплам ёпиқ тўплам деб олинади.

2. Компакт тўплам. X — ҳақиқий сонларнинг бирор тўплами бўлсин.

14-таъриф. Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар қандай $\{x_n\}$ $(x_n \in X,\ n = 1, 2, \ldots)$ кетма-кетликдан шу тўпламнинг нуқтасига яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, X тўплам *компакт тўплам* деб аталади.

Мисоллар. 1. $X = [a, b]$ сегментнинг компакт тўплам бўлиши Больцано — Вейерштрасс леммасидан келиб чиқади.

2. $X = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_n, b_n]$ тўплам компакт тўплам бўлади.

3. $X = (0, 1)$ интервал компакт тўплам бўлмайди, чунки $x_n = \frac{1}{n+1} \in (0, 1)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ кетма-кетликнинг лимити 0 га тенг, яъни $\lim x_n = \lim \frac{1}{n+1} = 0$. Аммо 0 сон (0, 1) тўпламга тегишли эмас.

Энди тўпламнинг компакт бўлиши шартини ифодаловчи теоремани келтирамиз.

12-теорема. *X компакт тўплам бўлиши учун унинг чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. X — компакт тўплам бўлсин. Аввало бу тўпламнинг чегараланганлигини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни X — компакт тўплам бўлса ҳам у чегараланмаган бўлсин. У ҳолда шундай $x_1 \in X$ нуқта мавжудки, $|x_1| > 1$, шундай $x_2 \in X$ нуқта мавжудки, $|x_2| > 2$ ва ҳ. к. Натижада $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳосил бўлиб, $|x_n| > n$ ($x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$) бўлади. Бу $\{x_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиб бўлмайди. Бу эса X нинг компакт тўпламлигига зид. Демак, X — чегараланган тўплам.

Энди X нинг ёпиқ тўплам бўлишини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда X да a га интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик топилади. Равшанки, бу $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар қандай $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлиги учун $\lim x_{n_k} = a$ лимит ўринли бўлади. X компакт тўплам бўлгани сабабли $a \in X$ бўлади. Демак, X тўпламнинг лимит нуқтаси ўзига тегишли бўлади. Бу эса X нинг ёпиқ тўплам эканини билдиради.

Етарлилиги. X — чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлсин. Бу ҳолда Больцано — Вейерштрасс леммасига кўра ҳар қандай $\{x_n\}$ $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$) кетма-кетликдан a га яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин: $x_{n_k} \to a$. Равшанки, бу a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади. X ёпиқ тўплам бўлгани учун $a \in X$ бўлади. Демак, X компакт тўплам. Теорема исбот бўлди.

Энди компакт тўпламнинг муҳим хоссасини келтирамиз.

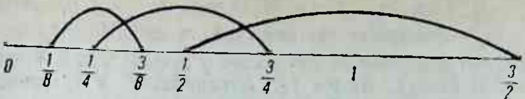
$X \subset R$ — бирор тўплам бўлсин. Ҳар бир элементи интервалдан иборат $S = \{\sigma\}$ интерваллар системасини олайлик.

15-таъриф. Агар X тўпламнинг ҳар бир a нуқтаси учун $S = \{\sigma\}$ системада шу нуқтани ўз ичига оладиган σ интервал топилса, $S = \{\sigma\}$ система X тўпламни *қоплайди* дейилади.

Масалан, $X = (0, 1)$ бўлсин. Қуйидаги

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \ldots, \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), \ldots$$

интерваллар системасини олайлик. Равшанки, $X = (0, 1)$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси бу интерваллар системасининг камида битта интервалида жойлашган бўлади. Демак, $S = \left\{\left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), n = 1, 2, \ldots\right\}$ система $X = (0, 1)$ тўпламни қоплайди (39-чизма).



39- чизма.

Шуни хам айтиш керакки, агар бу $S = \left\{\left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), n = 1, 2, \ldots\right\}$ системадан бирорта $\left(\frac{1}{2^{n_0}}, \frac{3}{2^{n_0}}\right)$ интервал чиқариб ташланса, қолган интервallardan иборат

$$S_0 = S \setminus \left\{\left(\frac{1}{2^{n_0}}, \frac{3}{2^{n_0}}\right)\right\}$$

система $X = (0, 1)$ тўпламни қоплай олмайди.

Қуйида Гейне — Борель леммасини исботсиз келтирамиз.

Гейне — Борель леммаси. Агар чегараланган ёпиқ X тўплам чексиз интерваллар системаси $\{\sigma\}$ билан қопланган бўлса, у ҳолда $\{\sigma\}$ системадан X тўпламни қопловчи чекли $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ система ажратиш мумкин.

Энди компакт тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг баъзи бир хоссаларини келтирамиз.

1°. *Агар $f(x)$ функция X компакт тўпламда узлуксиз бўлса, у чегараланган бўлади.*

2°. *Агар $f(x)$ функция X компакт тўпламда узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда ўзининг аниқ чегараларига эришади, яъни шундай $x_0 \in X$, $x_1 \in X$ нуқталар мавжудки,*

$$f(x_0) = \sup_{x \in X} \{f(x)\}, \quad f(x_1) = \inf_{x \in X} \{f(x)\}$$

бўлади.

3°. *Агар $f(x)$ функция X компакт тўпламда узлуксиз бўлса, функция X да текис узлуксиз бўлади.*

4°. *Агар $f(x)$ функция X компакт тўпламда узлуксиз бўлса, шу X тўпламнинг акси (образи) $\{f(x)\}$ компакт тўплам бўлади.*

Биз бу хоссаларнинг бирини, масалан 1°- хоссани исботлаймиз.

1°-хоссанинг исботи. X—компакт тўплам бўлиб, бу тўпламда $f(x)$ функция узлуксиз бўлсин. Нуқтада узлуксиз бўлган функциянинг хоссасига кўра (7- §) $\forall x \in X$ нинг шундай етарли кичик атрофи $U(x)$ мавжудки, бу атрофда $f(x)$ функция чегараланган бўлади. Бундай нуқта атрофлари $U(x)$ интерваллардан $(x \in X)$ S система тузамиз: $S = \{U(x) : x \in X\}$. Равшанки, S система X тўпламни қоплайди. X компакт тўплам бўлгани сабабли, Гейне — Борель леммасига асосан бу системадан X тўпламни қопловчи чекли $S^* = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ системани ажратиш мумкин. Ҳар бир U_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ атрофда $f(x)$ функция чегараланган, яъни шундай m_k, M_k $(m_k, M_k = \text{const}, k = 1, 2, \ldots, n)$ сонлар топиладики,

$\forall x \in U_k$ лар учун $m_k < f(x) < M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Агар $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — сонларнинг энг кичигини m деб $M_1, M_2, \ldots, M_n$ сонларнинг энг каттасини M деб олсак, у ҳолда $\forall x \in X$ лар учун $m < f(x) < M$ бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг X тўпламда чегараланганлигини билдиради. 1°-хосса исбот бўлди.

11-§. Узлуксиз функциялар фазоси

16-таъриф. X тўпламда узлуксиз бўлган функциялардан иборат тўплам *узлуксиз функциялар фазоси* деб аталади ва у $C(X)$ орқали белгиланади.

Биз X тўпламда узлуксиз бўлган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати яна узлуксиз функция, яъни $f(x) \in C(X)$, $g(x) \in C(X)$ дан

$$f(x) \pm g(x) \in C(X),$$

$$f(x) \cdot g(x) \in C(X),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in C(X) \text{ (бунда } g(x) \neq 0, \ x \in X)$$

келиб чиқишини кўриб ўтдик.

Демак, $C(X)$ тўпламда ҳақиқий сонлар тўплами R, яқинлашувчи кетма-кетликлар тўплами c даги сингари қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амалларини бажариш мумкин.

$X \subset R$ компакт тўплам бўлиб, $C(X)$ эса шу тўпламда узлуксиз функциялар фазоси бўлсин. $C(X)$ фазода унинг исталган икки элементи орасидаги «масофа» тушунчасини киритиш мумкин.

Фараз қилайлик, $f(x) \in C(X)$, $g(x) \in C(X)$ бўлсин. Бу элементлар (функциялар) орасидаги «масофа» деб қуйидаги

$$\rho(f(x), g(x)) = \rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

сонга айтамиз.

13-теорема. $\forall f(x) \in C(X)$, $\forall g(x) \in C(X)$ *функциялар учун шундай* $x_0 \in X$ *нуқта топиладики,*

$$\rho(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$$

бўлади.

Исбот. Модомики, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X да узлуксиз экан, унда $f(x) - g(x)$ функция хам X тўпламда узлуксиз бўлади. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага кўра $\varphi(x) = |f(x) - g(x)|$ функция ҳам X тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлади. Узлуксиз функциянинг хоссасига асосан (7-§) шундай $x_0 \in X$ нуқта топиладики, $\varphi(x_0) = \sup_{x \in X} \varphi(x)$ бўлади. Демак,

$$\rho(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|.$$

Энди $\rho(f, g)$ нинг хоссаларини келтирамиз.

1°. $\forall f(x) \in C(X)$, $\forall g(x) \in C(X)$ учун $\rho(f, g) \geqslant 0$ ва $\rho(f, g) = 0$ дан $f(x) \equiv g(x)$ келиб чиқади ва аксинча.

Исбот. $\rho(f, g)$ нинг таърифидан бевосита унинг манфий эмаслиги ($\rho(f, g) \geqslant 0$) кўринади. $\rho(f, g)=0$ бўлса, бундан $f(x) \equiv g(x)$ бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар бирор $x_1 \in X$ нуқтада $f(x_1) \neq g(x_1)$ бўлса, унда $|f(x_1)-g(x_1)|>0$ бўлиб,

$$\sup |f(x)-g(x)| \geqslant |f(x_1)-g(x_1)|>0, \text{ яъни } \rho(f, g)>0$$

бўлади. Демак, $\rho(f, g)=0$ дан $f(x) \equiv g(x)$ келиб чиқади.

Равшанки, агар $f(x) \equiv g(x)$ бўлса, унда $\rho(f, g)=0$ бўлади.

2°. $\forall\, f(x) \in C(X)$, $\forall\, g(x) \in C(X)$ учун

$$\rho(f, g)=\rho(g, f)$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall\, f(x) \in C(X)$, $\forall\, g(x) \in C(X)$ функциялар учун

$$\rho(f, g)=\sup_{x \in X}|f(x)-g(x)|=\sup_{x \in X}|g(x)-f(x)|=\rho(g, f)$$

бўлади.

3°. $\forall\, f(x) \in C(X)$, $\forall\, g(x) \in C(X)$ ва $\forall\, h(x) \in C(X)$ функциялар учун

$$\rho(f, g) \leqslant \rho(f, h)+\rho(h, g) \tag{5.9}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Ушбу

$$f(x)-g(x)=[f(x)-h(x)]+[h(x)-g(x)]$$

тенгликдан

$$|f(x)-g(x)| \leqslant |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$$

тенгсизликнинг ўринли эканини, унга кўра ушбу

$$\sup_{x \in X}|f(x)-g(x)| \leqslant \sup_{x \in X}\{|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in X}|f(x)-h(x)|+\sup_{x \in X}|h(x)-g(x)|$$

тенгсизликнинг ўринли эканини топамиз. Демак, (5.9) тенгсизлик исбот этилди.

Бу (5.7) тенгсизлик одатда *учбурчак тенгсизлиги* деб юритилади.

6-БОБ

ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

Функциянинг ҳосиласи ва дифференциали тушунчалари математик анализ курсининг фундаментал тушунчаларидандир.

Биз ушбу бобда функция ҳосиласи ва дифференциали тушунчалари билан танишамиз, функцияларнинг ҳосиласи ва дифференциалини ҳисоблашни, шунингдек, дифференциал ҳисобнинг асосий теоремаларини ўрганамиз.

1-§. Функциянинг ҳосиласи

1. Функция ҳосиласининг таърифлари. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлсин. Бу интервалда x_0 нуқта олиб, унга шундай $\Delta x\,(\Delta x \gtrless 0)$ орттирма берайликки, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ бўлсин. Натижада $f(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

орттирмага эга бўлади.

Ушбу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0)$$

нисбатни қараймиз. Равшанки, бу нисбат Δx нинг функцияси бўлиб, у Δx нинг нолдан фарқли қийматларида, жумладан ноль нуқтанинг етарли кичик

$$\dot{U}_\delta(0) = \{\Delta x \in R : -\delta < \Delta x < \delta,\ \Delta x \neq 0\}$$

$(\delta > 0)$ атрофида аниқланган. $\Delta x = 0$ нуқта $\dot{U}_\delta(0)$ тўпламнинг лимит нуқтаси. Энди $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимитини қараймиз, бу лимит функциянинг ҳосиласи тушунчасига олиб келади.

1-таъриф. Агар $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимити

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x_0 *нуқтадаги ҳосиласи* деб аталади. Функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи, одатда,

$$f'(x_0), \text{ ёки } y'_{x=x_0}, \text{ ёки } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

белгилар ёрдамида ёзилади.

Демак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (6.1)$$

Бунда $x_0 + \Delta x = x$ деб олайлик. Унда $\Delta x = x - x_0$ ва $\Delta x \to 0$ да $x \to x_0$ бўлиб, натижада

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

бўлади. Демак, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $x\to x_0$ да

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

нисбатнинг лимити сифатида ҳам таърифланиши мумкин:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \qquad (6.1')$$

Агар $f(x)$ функция (a,b) интервалнинг ҳар бир x нуқтасида ҳосилага эга бўлса, бу ҳосила x ўзгарувчининг функцияси бўлади. ▷

Мисоллар. 1. $f(x)=C=\text{const}$ бўлсин. Равшанки, бу функциянинг $\forall x\in R$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$$

бўлиб, ундан

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

келиб чиқади. Демак, ўзгармас соннинг ҳосиласи нолга тенг.

2. $y=f(x)=x$ бўлсин. Бу функция учун

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1$$

бўлиб, ундан $f(x)=x$ функциянинг ихтиёрий x нуқтадаги ҳосиласи $y'=1$ бўлишини топамиз.

3. $f(x)=|x|$ бўлсин. Бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги орттирмаси $\Delta y=|\Delta x|$ бўлади, аммо $\Delta x\to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нинг лимити мавжуд бўлмайди, чунки $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$. Демак, $f(x)=|x|$ функция $x=0$ нуқтада ҳосилага эга эмас.

4. $f(x)=e^x$ функциянинг $x=1$ нуқтадаги ҳосиласини топинг. Функция ҳосиласининг (6.1′) таърифидан фойдаланиб, топамиз:

$$y'|_{x=1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t+1}-e}{t}=e\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=$$

$$=e\cdot\ln e=e.$$

Демак, $(e^x)'|_{x=1}=e$.

5. $f(x)=\ln x\,(x>0)$ функциянинг ихтиёрий $x>0$ нуқтадаги ҳосиласини ҳисобланг. Берилган функциянинг $x>0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

бўлади. Агар ушбу

$$\lim_{\Delta x\to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = 1$$

маълум лимитни (қаранг 134- бет) эътиборга олсак, унда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$ лимит ўринли бўлади. Демак, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

6. $f(x)=\cos x$ функциянинг ихтиёрий $x\in R$ нуқтадаги ҳосиласини ҳисобланг. Бу функция учун

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

бўлади. Демак, $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall\, x\in R$.

7. $f(x)=\sqrt{x}$ $(x>0)$ функциянинг $\forall x\in(0;+\infty)$ нуқтадаги ҳосиласини топинг. Бу функциянинг ҳосиласи x ўзгарувчининг ушбу

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

функцияси бўлади.

2- таъриф. Агар $\Delta x\to+0$ $(\Delta x\to-0)$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимити

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *ўнг (чап) ҳосиласи* деб аталади. Функциянинг x_0 нуқтадаги ўнг (чап) ҳосиласи $f'(x_0+0)\,(f'(x_0-0))$ каби белгиланади.

Одатда функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари *бир томонли ҳосилалар* деб аталади.

Мисол. $f(x)=|x|$ ни қарайлик. Бу функцияни мазкур банднинг 3- мисолида кўрганмиз. Маълумки, $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ $=-1$. Демак, $f(x)=|x|$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи 1 га, чап ҳосиласи -1 га тенг.

Функция ҳосиласи ҳақидаги 1- ва 2- таърифлардан ҳамда функция лимити ҳақидаги (4- боб, 3- § га қаранг) теоремалардан қуйидагилар келиб чиқади:

а) агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, функция шу нуқтада бир томонли $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга ҳам эга бўлиб,

$$f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=f'(x_0)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

б) агар бирор $U_\delta(x_0)$ атрофда узлуксиз $f(x)$ функция x_0 нуқтада бир томонли $f'(x_0+0)$ ва $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга эга бўлиб,

$$f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$$

тенглик ўринли бўлса, функция шу нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга ва

$$f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$$

бўлади.

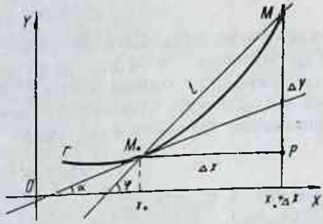
1-эслатма. Агар $\Delta x\to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимити аниқ ишорали чексиз бўлса, уни ҳам $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб юритилади. Бундай ҳолда $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $+\infty$ (ёки $-\infty$) га тенг дейилади.

2. Ҳосиланинг геометрик ва механик маънолари.

а) *Ҳосиланинг геометрик маъноси.* $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $x_0\in(a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра $(x_0+\Delta x\in(a, b))$,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлади. $f(x)$ функциянинг графиги бирор Γ чизиқни ифодаласин дейлик (40- чизма).



40- чизма.

Энди Γ чизиққа унинг $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтасида уринма ўтказиш масаласини қарайлик.

Γ чизиқда M_0 нуқтадан фарқли $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ нуқтани олиб, бу нуқталар орқали l кесувчи ўтказамиз. l кесувчи Ox ўқи билан ташкил этган бурчакни φ билан белгилайлик. Равшанки, φ бурчак Δx га боғлиқ бўлади: $\varphi=\varphi(\Delta x)$.

Агар l кесувчининг M нуқта Γ чизиқ бўйлаб M_0 га интилгандаги (яъни $\Delta x\to 0$ даги) лимит ҳолати мавжуд бўлса, кесувчининг бу лимит ҳолати Γ чизиққа M_0 нуқтада ўтказилган *уринма* деб аталади. Уринма — тўғри чизиқдан иборат.

Маълумки, M_0 нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ M_0 нуқтанинг координаталари ҳамда бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти орқали тўлиқ аниқланади.

$f(x)$ функция графигига M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг мавжуд бўлиши учун

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

лимитнинг мавжудлигини кўрсатиш етарли, бунда α — уринманинг Ox ўқ билан ташкил этган бурчаги.

$\triangle MM_0P$ дан:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ундан эса

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлишини топамиз. $u = \operatorname{arc\,tg} t$ функциянинг узлуксизлигидан фойдалансак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] = \operatorname{arctg} f'(x_0)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$ мавжуд ва

$$\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arc\,tg} f'(x_0).$$

Кейинги тенгликдан

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

бўлишини топамиз. Шундай қилиб, $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ хосилага эга бўлса, бу функция графигига $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма мавжуд. Функциянинг x_0 нуқтадаги хосиласи $f'(x_0)$ эса бу уринманинг бурчак коэффициентини ифодалайди. Уринманинг тенгламаси эса ушбу

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

кўринишида бўлади.

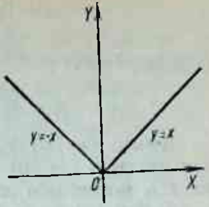
Масалан, $f(x) = x^2$ параболага $x = 1$ нуқтада ўтказилган уринма $(y'_{x=1} = 2)$ $y = 1 + 2(x - 1)$, яъни

$$y = 2x - 1$$

тенглама билан ифодаланади.

Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада бир-бирига тенг бўлмаган $f'(x_0 + 0)$, $f'(x_0 - 0)$ бир томонли хосилаларга эга бўлса, шу $f(x)$ функция графигига $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтада бир томонли уринмалар ўтказиш мумкин ва бу уринмалар устма-уст тушмайди. Бу ҳолда $f(x)$ функция графиги $(x_0, f(x_0))$ нуқтада «синади» дейиш мумкин.

Масалан, маълумки, $f(x) = |x|$ функциянинг $x = 0$ нуқтадаги бир томонли хосилалари $f'(+0) = 1$, $f'(-0) = -1$ бўлади. Бу функция графигига (0, 0) нуқтада ўтказилган бир томонли уринмалар $y = x$ ва $y = -x$ бўлиб, функция графиги $x = 0$ нуқтада «синади» (41- чизма).



41- чизма.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $+\infty$, яъни $f'(x_0) = +\infty$ бўлсин. Энди

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

эканини эътиборга олиб, топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arc\,tg}(f'(x_0)) = \operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

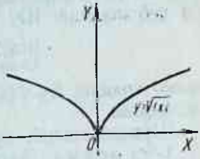
Бу эса $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма Ox ўқи билан $\frac{\pi}{2}$ га тенг бурчак ташкил этишини кўрсатади. Демак, $f'(x_0) = +\infty$ бўлганда $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма Ox ўқига перпендикуляр бўлади.

Худди шунингдек, $f'(x_0) = -\infty$ бўлганда $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма ҳам Ox ўқига перпендикуляр бўлади.

Масалан, $f(x) = \sqrt{|x|}$ функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи

$$f'(+0) = \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{|x|}}{x - 0} = \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

шунга ўхшаш, $x = 0$ нуқтадаги чап ҳосила учун $f'(-0) = -\infty$ га эгамиз. Демак, берилган функция графигига (0,0) нуқтада ўтказилган бир томонли уринмалар Oy ўқидан иборатдир (42- чизма).



42- чизма.

б) *Ҳосиланинг механик маъноси.* Моддий нуқтанинг ҳаракати $s = f(t)$ қонда билан ифодаланган бўлсин, бунда t — вақт, s — шу вақт ичида ўтилган йўл (масофа). Бу қонун бўйича ҳаракат қилаётган нуқтанинг t_0 моментдаги оний тезлигини топиш масаласини қарайлик. t вақтнинг t_0 қиймати билан бирга $t_0 + \Delta t$ $(\Delta t > 0)$ қийматини ҳам олиб, бу нуқталарда $s = f(t)$ нинг қийматларини топамиз. Моддий нуқта Δt вақт ичида

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

масофани ўтади ва унинг $[t_0, t_0 + \Delta t]$ сегментдаги ўртача тезлиги

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

бўлади. $\Delta t \to 0$ да $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбатнинг лимити моддий нуқтанинг t_0 моментдаги оний тезлиги v ни ифодалайди:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Ҳосила таърифига кўра

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Демак, $s = f(t)$ функциянинг t_0 нуқтадаги ҳосиласи механик нуқтаи назардан $s = f(t)$ қонун билан ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг t_0 моментдаги оний тезлигини билдиради.

3. Функциянинг узлуксиз бўлиши билан унинг ҳосилага эга бўлиши орасидаги боғланиш. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

яъни $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

Энди

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \tag{6.2}$$

деб белгилаймиз. Равшанки, α ўзгарувчи миқдор бўлиб, у Δx га боғлиқ ва $\Delta x \to 0$ да нолга интилади.

(6.2) тенгликдан топамиз:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \tag{6.3}$$

Одатда (6.3) формула функция орттирмасининг формуласи деб аталади. Шу формулага кўра

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x] = 0$$

келиб чиқади. Бу $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз эканини билдиради.

Шундай қилиб, қуйидаги теоремага келамиз:

1-теорема. *Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.*

2-эслатма. Функциянинг бирор нуқтада узлуксизлигидан унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, $y = |x|$ функция $x = 0$ нуқтада узлуксиз, аммо у шу нуқтада ҳосилага эга эмас.

2-§. Тескари функциянинг ҳосиласи. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

1. Тескари функциянинг ҳосиласи. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, бу функция тескари функциянинг мавжудлиги ҳақидаги 5-бобдаги 9-теореманинг барча шартларини қаноатлантирсин.

2-теорема. *$f(x)$ функция (a, b) да аниқланган, узлуксиз ва қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) бўлсин. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0) \neq 0$ ҳосилага эга бўлса, бу функцияга тескари $x = f^{-1}(y)$ функция x_0 нуқтага мос бўлган $y_0 (y_0 = f(x_0))$ нуқтада ҳосилага эга ва*

$$[f^{-1}(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

тенглик ўринли.

Исбот. $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0) \neq 0$ ҳосилага эга бўлсин. (6.3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$f(t) - f(x_0) = f'(x_0)(t - x_0) + \alpha (t - x_0), \; t \in (a, b), \tag{6.4}$$

бунда $t \to x_0$ да $\alpha = \alpha(t) \to 0$. Энди $f(x)$ функциянинг t нуқтадаги қийматини $f(t) = z$ деб белгилаймиз. Унда $t = f^{-1}(z)$, шунингдек, $x_0 = f^{-1}(y_0)$ бўлади. Натижада (6.4) тенглик ушбу

$$z - y_0 = f'(x_0)[f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)] + \alpha(f^{-1}(z))[f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)] =$$
$$= [f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)][f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))]$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликдан эса

$$\frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))}$$

келиб чиқади. $z \to y_0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{z \to y_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = \lim_{z \to y_0} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha f^{-1}(z))} =$$
$$= \frac{1}{f'(x_0) + \lim\limits_{z \to y_0} \alpha(f^{-1}(z))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Демак,

$$\lim_{z \to y_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{t - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ҳосила таърифига кўра

$$\lim_{z \to y_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = [f^{-1}(y)]'_{y=y_0}$$

бўлиб, бундан

$$[f^{-1}(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

тенгликнинг ўринли экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

2. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. $u = f(x)$ функция (a, b) интервалда, $y = F(u)$ функция эса (c, d) интервалда аниқланган бўлиб, бу функциялар ёрдамида $y = F(f(x)) = \Phi(x)$ мураккаб функция тузилган бўлсин (бунда, албатта, $x \in (a, b)$ да $u = f(x) \in (c, d)$ бўлиши талаб қилинади).

3-теорема. *Агар $u = f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб, $y = F(u)$ функция эса x_0 нуқтага мос $u_0 (u_0 =$*

$= f(x_0))$ нуқтада $F'(u_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда мураккаб функция $\Phi(x) = F(f(x))$ ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга ва

$$\Phi'(x_0) = [F(f(x))]'_{x=x_0} = F'(u_0)\cdot f'(x_0) \qquad (6.5)$$

формула ўринли.

Исбот. $u = f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада, $y = F(u)$ функция эса мос $u_0 (u_0 = f(x_0))$ нуқтада ҳосилага эга бўлсин. (6.3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$f(t) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(t - x_0) + \alpha(t)\cdot(t - x_0). \qquad (6.6)$$

$$F(s) - F(u_0) = F'(u_0)\cdot(s - u_0) + \beta(s)\cdot(s - u_0). \qquad (6.7)$$

бунда

$$\lim_{t\to x_0}\alpha(t) = 0, \ \lim_{s\to u_0}\beta(s) = 0.$$

Мураккаб функция $\Phi(x) = F(f(x))$ нинг x_0 нуқтадаги орттирмаси $\Phi(t) - \Phi(x_0)$ ни юқоридаги (6.6) ва (6.7) муносабатлардан фойдаланиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Phi(t) - \Phi(x_0) = F(f(t)) - F(f(x_0)) = F'(u_0)\cdot[f'(x_0)\cdot(t - x_0) +$$
$$+ \alpha(t)\cdot(t - x_0)] + \beta(f(t))\cdot[f(t) - f(x_0)] = F'(u_0)\cdot f'(x_0)\cdot(t - x_0) +$$
$$+ F'(u_0)\,\alpha(t)\,(t - x_0) + \beta(f(t))\cdot[f(t) - f(x_0)].$$

Энди бу тенгликнинг ҳар икки томонини $t - x_0$ га бўлиб, сўнгра $t \to x_0$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{t\to x_0}\frac{[\Phi(t) - \Phi(x_0)}{t - x_0} = F'(u_0)\cdot f'(x_0) + F'(u_0)\cdot\lim_{t\to x_0}\alpha(t) +$$
$$+ \lim_{t\to x_0}\beta(f(t))\cdot\lim_{t\to x_0}\frac{[f(t) - f(x_0)}{t - x_0}.$$

Бундан $t \to x_0$ да $\alpha(t) \to 0$, $\beta(f(t)) \to 0$ эканини эътиборга олсак, (6.5) формула келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

3-§. Ҳосила ҳисоблашнинг содда қоидалари. Элементар функцияларнинг ҳосилалари

Биз ушбу параграфда икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатининг ҳосилаларини топиш қоидаларини келтирамиз. Сўнгра элементар функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда аниқланган бўлсин.

1. **Икки функция йиғиндиси ҳамда айирмасининг ҳосиласи.** Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам x нуқтада ҳосилага эга ва

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \qquad (6.8)$$

формула ўринли.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Таърифга кўра $(t \in (a, b),\ t \neq x)$:

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Энди $F(x) = f(x) \pm g(x)$ деб белгилаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \pm \frac{g(t) - g(x)}{t - x}.$$

Бу тенгликда $t \to x$ да лимит ўтсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$F'(x) = \lim_{t\to x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \pm \lim_{t\to x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} =$$

$= f'(x) \pm g'(x)$. Бу эса (6.8) формулани исботлайди.

2. Икки функция кўпайтмасининг ҳосиласи. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам x нуқтада ҳосилага эга ва

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{6.9}$$

формула ўринли.

$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ деб белгилаб, $\frac{\Phi(t) - \Phi(x)}{t - x}$ нисбатни қуйидаги

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot g(x) + \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot f(t)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгликда $t \to x$ да лимитга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$\Phi'(x) = \lim_{t\to x} \frac{\Phi(t) - \Phi(x)}{t - x} = \lim_{t\to x} \left[\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot g(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot f(t) \right] = g(x) \cdot \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} +$$

$$+ \lim_{t\to x} f(t) \cdot \lim_{t\to x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Бу эса (6.9) формулани исботлайди.

3. Икки функция нисбатининг ҳосиласи. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $g(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам x нуқтада ҳосилага эга ва

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{6.10}$$

формула ўринли.

(6.10) формулани исботлашдан аввал функция ҳосиласи таърифидан фойдаланиб $\frac{1}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ функциянинг $x \in (a, b)$ нуқтадаги ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = \lim_{t\to x}\frac{\dfrac{1}{g(t)}-\dfrac{1}{g(x)}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\dfrac{g(x)-g(t)}{g(t)\cdot g(x)}}{t-x} =$$

$$= \frac{-1}{g(x)}\cdot\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\cdot\lim_{t\to x}\frac{1}{g(t)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Демак,

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}\ \ (g(x)\neq 0). \qquad (6.11)$$

Энди (6.9) ва (6.11) формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left[\frac{1}{g(x)}\right]' =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Бу (6.10) формуланинг ўринли эканини исботлайди.

1-натижа. 1) Юқорида келтирилган (6.8) ва (6.9) формулалар ёрдамида қўшилувчилар ҳамда кўпаювчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам тегишли формулаларни исботлаш мумкин.

2) (6.9) формуладан $g(x) = c$, $c = \text{const}$ бўлганда

$$[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x)$$

формула келиб чиқади. Бундан ўзгармас сонни ҳосила ишорасидан ташқарига чиқариш мумкинлиги келиб чиқади.

3-эслатма. Икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатидан иборат бўлган функциянинг ҳосилага эга бўлишидан бу функциялардан ҳар бирининг ҳосилага эга бўлиши доим келиб чиқавермайди. Бунга мисоллар топишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

4. Элементар функцияларнинг ҳосилалари. Функция ҳосиласи таърифидан фойдаланиб, элементар функцияларнинг ҳосилаларини топамиз.

1°. $y = x^{\mu}$ $(x > 0)$ даражали функциянинг ҳосиласи. Бу функция учун қуйидагига эгамиз:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu} = x^{\mu}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1\right]$$

ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^{\mu}\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1\right]}{\Delta x} = x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}}.$$

5-боб, 6-§ да келтирилган лимитдан фойдаланиб, топамиз:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}} = x^{\mu-1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \mu\cdot x^{\mu-1}.$$

Демак, $(x^{\mu})' = \mu \cdot x^{\mu-1}$. Умуман, бу формула $y = x^{\mu}$ функциянинг аниқланиш соҳасидаги ихтиёрий x учун ўринлидир. Хусусан $\mu = -1$ бўлганда

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \; x \neq 0.$$

2°. $y = a^x$ $(a > 0, \; a \neq 1)$ **кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи.** Бу функция учун қуйидагига эгамиз:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$

ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

5-бобнинг 6-§ да келтирилган лимитдан фойдаланиб топамиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \, \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Демак,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Хусусан, $(e^x)' = e^x$.

3°. $y = \log_a x$ $(a > 0, \; a \neq 1, \; x > 0)$ **логарифмик функциянинг ҳосиласи.** Бу функция учун қуйидагига эгамиз:

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

5-бобнинг 6-§ да келтирилган лимитдан фойдаланиб топамиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Демак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

Хусусан,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

4°. **Тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари.** Ушбу $y = \sin x$ функция учун қуйидагига эгамиз:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

ва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Охирги тенгликда $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

Демак,

$$(\sin x)'=\cos x.$$

Шунга ўхшаш (6- бобнинг 1- § га қаранг) $(\cos x)'=-\sin x$ формула ҳам исботланади.

Энди $y=\operatorname{tg} x$ функциянинг ҳосиласини $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ нисбатнинг ҳосиласи формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$y'=(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Демак,

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Худди шунга ўхшаш қуйидаги формулалар ҳам исботланади:

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\quad(\sec x)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x},\quad(\operatorname{cosec} x)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

5°. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари. Тескари функциянинг ҳосиласини топиш қоидасидан фойдаланиб, тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз. Ушбу $y=\arcsin x$ функцияни олайлик. Бу функция $x=\sin y$ функцияга тескари бўлиб, уни $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ интервалда қарасак,

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

келиб чиқади. Демак,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1).$$

Худди шунга ўхшаш қуйидаги формулалар ҳам исботланади:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6°. ерболик функцияларнинг ҳосилалари. Энди гипербо функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз. Бунда ҳосила ҳисодаги содда қоидалардан ва кўрсаткичли функция ҳосиласи фоласидан фойдаланамиз. Содда ҳисоблашлар ёрдамида $y = \operatorname{sh} x$ топамиз:

$$= (\operatorname{sh} x)' = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]' = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x.$$

Шунга аш қуйидаги формулалар ҳам исботланади:

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0).$$

4. Ҳилалар жадвали. Биз ушбу бандда элементар функциялар илалари учун топилган формулаларни жамлаб, уларни жадвал атида келтирамиз:

1°. $= \mu \cdot x^{\mu-1} \qquad (x > 0);$

2°. $= a^x \cdot \ln a \qquad (a > 0,\ a \neq 1);$

3°. $x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \qquad (x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1).$

Хусн, $(\ln x)' = \frac{1}{x} \ (x > 0);$

4°. $x)' = \cos x;$

5°. $(x)' = -\sin x;$

6°. $)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k = 0,\ \pm 1, \ldots\right);$

7°. $(x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \ (x \neq k\pi;\ k = 0,\ \pm 1, \ldots);$

8°. $\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1);$

9°. $\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1);$

10°. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

11° $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

12°. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

13° $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

14°. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

15°. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $(x \neq 0)$.

5. Мисоллар. Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

1) $y = \ln \sin x$, $x \in (0, \pi)$ бўлсин. Бу функцияни $y = \ln u$, $u = \sin x$ деб қараш мумкин. (6.5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

2) $y = [u(x)]^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ бўлиб, $u(x)$ ва $v(x)$ функция $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Бу ифодани логарифмлаб топамиз:

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x).$$

Энди мураккаб функциянинг ҳосиласи ((6.5) формулага қаранг) ва кўпайтманинг ҳосиласи ((6.9) формулага қаранг) учун тегишли формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x).$$

Бундан

$$y' = y\left[v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)\right] = [u(x)^{v(x)} \cdot \{v'(x) \cdot \ln u + \\ + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)\Big]$$

келиб чиқади. Демак,

$$([u(x)]^{v(x)})' = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)\right]$$

4-§. Функциянинг дифференциали

1. Функциянинг дифференциалланувчи бўлиши тушунчаси. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлсин. $x \in (a, b)$ нуқтани олиб, унга шундай Δx $(\Delta x \gtrless 0)$ орттирма берайликки, $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$ бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ орттирмага эга бўлади. Равшанки, Δy орттирма Δx га боғлиқ бўлиб, кўпчилик ҳолларда Δx билан Δy орасидаги боғланиш мураккаб бўлади. Табиийки, бунда Δx га кўра Δy ни аниқ ёки тақрибий ҳисоблаш қийинлашади. Натижада орттир-

маси Δx орттирма билан соддароқ боғланишда бўлган функцияларни ўрганиш масаласи юзага келади.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функциянинг $x_0 \in (a, b)$ нуқтадаги орттирмаси Δy ни

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x \qquad (6.12)$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(x)$ функция x_0 *нуқтада дифференциалланувчи* деб аталади, бунда A — Δx боғлиқ бўлмаган ўзгармас, α эса Δx га боғлиқ ва $\Delta x \to 0$ да $\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$.

Агар

$$\alpha\cdot\Delta x = \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x = o(\Delta x)$$

эканини эътиборга олсак, у холда юқоридаги (6.12) ифода ушбу

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x) \qquad (6.13)$$

кўринишни олади. Функция орттирмаси учун (6.12) формулада $A\cdot\Delta x$ ифода орттирманинг бош қисми деб юритилади.

Функциянинг бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлиши билан унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши орасидаги боғланишни қуйидаги теорема кўрсатади.

4-теорема. *$f(x)$ функциянинг $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Таърифга кўра, $f(x)$ функциянинг $x \in (a, b)$ нуқтадаги орттирмасини (6.13) кўринишда ёзиш мумкин. Шу (6.13) дан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

тенгликни ёзиш мумкин. Ундан эса

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right] = A,$$

яъни $x \in (a, b)$ нуқтада ҳосиланинг мавжудлиги ва

$$f'(x) = A$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

бўлади. Агар

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$$

деб олсак, ундан

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$$

эканини топамиз. Бу тенгликдаги α миқдор Δx га боғлиқ ва $\Delta x \to 0$ да $\alpha \to 0$. Демак, $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $A = f'(x)$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Исбот этилган теорема $f(x)$ функциянинг $x \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиши билан унинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши эквивалент эканини кўрсатади.

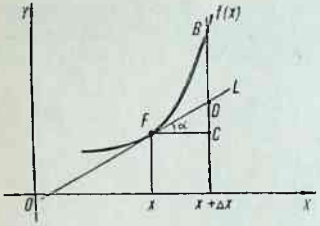
2. **Функция дифференциали ва унинг геометрик маъноси.** $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Демак, функциянинг x нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

кўринишда ёзилиши мумкин, бунда $A = f'(x)$ бўлади. Бу тенгликда функция орттирмаси Δy икки қўшилувчи: аргумент орттирмаси Δx га нисбатан чизиқли $A \cdot \Delta x$ ҳамда Δx га нисбатан юқори тартибли ($\Delta x \to 0$ да) чексиз кичик миқдор $o(\Delta x)$ лар йиғиндисидан иборат экани кўринади.

4-таъриф. $f(x)$ функция орттирмаси Δy нинг Δx га нисбатан чизиқли бош қисми $A\Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ берилган $f(x)$ функциянинг x *нуқтадаги дифференциали* деб аталади. Функциянинг дифференциали dy ёки $df(x)$ каби белгиланади:

$$dy = df(x) = A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x.$$



43- чизма.

Таърифга кўра $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги дифференциали Δx нинг чизиқли функцияси бўлиб, у функция орттирмаси Δy дан $o(\Delta x)$ га фарқ қилади.

Энди $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлган $f(x)$ функциянинг графиги 43-чизмада кўрсатилган чизиқни ифодаласин дейлик. Бу чизиқнинг $(x, f(x))$, $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ нуқталарини мос равишда F ва B билан белгилайлик. Унда $FC = \Delta x$, $BC = \Delta y$ бўлади. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлгани учун у x нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга. Демак, $f(x)$ функция графигига унинг $F(x, f(x))$ нуқтасида ўтказилган FL уринма мавжуд ва бу уринманинг бурчак коэффициенти $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(x)$. Шу FL уринманинг BC билан кесишган нуқтасини D билан белгилайлик. Равшанки, $\triangle FDC$ дан $\frac{DC}{FC} = \mathrm{tg}\,\alpha$ ва ундан $DC = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot FC = f'(x) \cdot \Delta x$ экани келиб чиқади.

Демак, $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги дифференциали $dy = f'(x)\,\Delta x$ функция графигига $F(x, f(x))$ нуқтада ўтказилган уринма орттирмаси DC ни ($DC = dy$) ифодалайди. Хусусан, $f(x) = x$ бўлганда бу функциянинг дифференциали

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x = \Delta x$$

бўлиб,

$$dy = dx = \Delta x$$

бўлади. Бу ҳол эркли ўзгарувчи x нинг эркли орттирмаси Δx ни унинг дифференциали dx билан алмаштирилиши мумкинлигини кўрсатади. Бу $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги дифференциалини қуйидаги

$$dy = f'(x)\cdot dx = y'dx \qquad (6.14)$$

кўринишда ифодалаш мумкин эканини англатади.

4-эслатма. Биз $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласини $\frac{dy}{dx}$ символ тариқасида белгилаган эдик. (6.14) муносабатдан эса $\frac{dy}{dx}$ нисбат функция дифференциали dy нинг аргумент дифференциали dx га нисбатидан иборат эканини кўринади. Шуни таъкидлаш лозимки, дифференциалланувчи функциялар учун dy билан dx лар пропорционал ўзгариб, $f'(x)$ пропорционаллик коэффициентини ифодалайди.

Энди функция дифференциалининг (6.14) ифодасидан фойдаланиб, элементар функцияларнинг дифференциаллари жадвалини келтирамиз:

1°. $d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}\cdot dx \ (x > 0)$;

2°. $d(a^x) = a^x \ln a\cdot dx \ (a > 0,\ a \neq 1)$;

3°. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e\cdot dx \ (x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$; $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$;

4°. $d(\sin x) = \cos x\cdot dx$;

5°. $d(\cos x) = -\sin x\cdot dx$;

6°. $d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot dx \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k = 0,\ \pm 1,\ \ldots\right)$;

7°. $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot dx \ (x \neq k\pi;\ k = 0,\ \pm 1,\ \ldots)$;

8°. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\cdot dx \ (-1 < x < 1)$;

9°. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\cdot dx \ (-1 < x < 1)$;

10°. $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}\cdot dx$;

11°. $d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1 + x^2}\cdot dx$;

12°. $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x\cdot dx$;

13°. $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x\cdot dx$;

14°. $d(\text{th}\,x) = \frac{1}{\text{ch}^2 x}\cdot dx;$

15°. $d(\text{cth}\,x) = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}\cdot dx \quad (x \neq 0).$

3. **Дифференциаллашнинг содда қоидалари. Мураккаб функциянинг дифференциали.** $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x \in (a, b)$ нуқтада уларнинг дифференциаллари $df(x)$, $dg(x)$ мавжуд бўлсин. У ҳолда $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ ва $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ функцияларнинг ҳам шу $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциаллари мавжуд ва улар учун қуйидаги

$$
\begin{aligned}
&d\,[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x),\\
&d\,[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot dg(x) + g(x)\cdot df(x),\\
&d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\cdot df(x) - f(x)\cdot dg(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

формулалар ўринли.

Ҳақиқатан ҳам, функция дифференциалининг (6.14) кўринишда ифодаланишидан ва функциянинг ҳосилаларини топиш қоидаларидан фойдаланиб топамиз:

$$
\begin{aligned}
d\,[f(x) \pm g(x)] &= (f(x) \pm g(x))'\cdot dx = f'(x)\,dx \pm g'(x)\,dx =\\
&= df(x) \pm dg(x),\\
d\,[f(x)\cdot g(x)] &= (f(x)\cdot g(x))'\,dx = g(x)\cdot f'(x)\,dx +\\
&+ f(x)\cdot g'(x)\,dx = g(x)\cdot df(x) + f(x)\cdot dg(x),\\
d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' dx = \frac{g(x)\cdot f'(x)\,dx - f(x)\,g'(x)\,dx}{g^2(x)} =\\
&= \frac{g(x)\cdot df(x) - f(x)\cdot dg(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}
$$

Хусусан, $d(c\cdot f(x)) = c\cdot df(x)$ $(c = \text{const})$.

2-натижа. Юқорида келтирилган формулалардан фойдаланиб, қўшилувчилар ҳамда кўпайтувчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам тегишли формулалар ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

Энди мураккаб функциянинг дифференциалини топамиз.

Фараз қилайлик, $u = f(x)$ функция (a, b) интервалда, $y = F(u)$ функциялар эса (c, d) интервалда аниқланган бўлиб, бу функциялар ёрдамида $y = F(f(x)) = \Phi(x)$ мураккаб функция тузилган бўлсин (бунда, албатта, $x \in (a, b)$ да $u = f(x) \in (c, d)$ бўлиши талаб қилинади).

Мураккаб функциянинг ҳосиласи учун топилган (6.5) формуладан фойдаланиб, шу мураккаб функциянинг дифференциалини топамиз:

$$d\Phi(x) = d\,[F(f(x))] = [F(f(x))]'\,dx = F'(u)\cdot f'(x)\,dx = F'(u)\,du.$$

Шуни таъкидлаш лозимки, бу ҳолда du миқдор аргумент u нинг эркли орттирмаси эмас, у x ўзгарувчининг функциясидир.

4. Функция дифференциали ва тақрибий формулалар. Назарий ва айниқса амалий масалаларни ечишда тегишли функцияларнинг нуқтадаги қийматларини хисоблаш зарурияти туғилади. Кўпинча, бундай функциялар мураккаб бўлиб, уларнинг нуқтадаги қийматларини топиш анча қийин бўлади. Бу ҳол функциянинг нуқтадаги қийматини тақрибий ҳисоблаш (уларни хисоблаш учун тақрибий формулалар топиш) масаласини юзага келтиради. Функциянинг дифференциали эса тақрибий формулаларни топиш имконини беради.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0) \neq 0$ ҳосилага эга бўлсин. Бу ҳолда функция орттирмасининг формуласини ((6.3) ва (6.13) формулаларга қаранг)

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу формулани ҳамда функция дифференциали учун $dy = f'(x_0)\, \Delta x$ формулани эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)}{f'(x_0) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[1 + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right] = 1.$$

Шундай қилиб, $\Delta y \sim dy$. Натижада қуйидаги

$$\Delta y \approx dy,$$

яъни

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{6.16}$$

тақрибий тенгликка келамиз. Равшанки, $\Delta y - dy = o(\Delta x)$. Шунинг учун $\Delta x \to 0$ да (6.16) тақрибий тенгликнинг нисбий хатоси нолга интилади, яъни $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \to 0$.

(6.16) формула $x_0 \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δy ни унинг шу нуқтадаги дифференциали dy билан алмаштириш мумкинлигини кўрсатади. Бу алмаштиришнинг қулайлиги, функция орттирмаси Δy аргумент орттирмаси Δx нинг, умуман айтганда, мураккаб функцияси бўлган ҳолда, функция дифференциали dy эса Δx нинг чизиқли функцияси бўлишидадир. Агар $\Delta x = x - x_0$ эканини эътиборга олсак, унда $x_0 + \Delta x = x$ бўлиб, (6.16) формула қуйидаги

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{6.17}$$

кўринишга келади. Бунда $x_0 \in (a, b)$ нуқта $x \in (a, b)$ нуқтадан катта фарқ қилмайдиган, аммо $f(x_0)$ қулайроқ ҳисобланадиган нуқтадир.

Масалан, $f(x) = \sin x$ бўлиб, $\sin 29°$ ни ҳисоблаш талаб этилган бўлсин. Бу ҳолда $x_0 = 30°$ дейиш қулай. (6.17) формулага кўра

$$\sin 29° \approx \sin 30° + \cos 30° \cdot (29° - 30°) \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = 0{,}5 -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360} \approx 0{,}4848.$$

Бунда 1° нинг радиан ўлчовини ёзиш зарур, чунки бошқа ҳадлар радианларда берилган. Демак, $\sin 29° = 0{,}4848$ (10^{-4} аниқликда).

Юқоридаги (6.17) формула $x_0 = 0$ бўлганда ушбу

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x \tag{6.18}$$

кўриниши олади.

Маълумки, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси қуйидаги

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

кўринишда ёзилади. Бундан кўринадики, (6.17) тақрибий формула геометрик нуқтаи назардан, $f(x)$ функция ифодалаган эгри чизиқни x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида шу функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма билан алмаштирилишини билдиради.

Мисоллар. $f(x)$ функция сифатида $(1+x)^\mu$, $\sqrt{1+x}$, e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ функцияларни олиб, уларга (6.18) формулани қўллаш натижасида қуйидаги тақрибий формулаларни топамиз:

$$(1+x)^\mu \approx 1 + \mu x,$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2} x,$$

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\ln(1+x) \approx x,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$\operatorname{tg} x \approx x.$$

5-§. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар

1. Функциянинг юқори тартибли ҳосилалари. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, унинг ҳар бир x нуқтасида $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Равшанки, $f'(x)$ ҳосила x ўзгарувчининг функцияси бўлади. Бу $f'(x)$ ҳосила ҳам ўз навбатида бирор $x_0 \in (a, b)$ да ҳосилага эга бўлиши мумкин.

5-таъриф. Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир $x \in (a, b)$ нуқтасида $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу $f'(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, у $f(x)$ функциянинг x_0 *нуқтадаги иккинчи тартибли ҳосиласи* деб аталади. Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $y''_{x=x_0}$, $f''(x_0)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}$ белгиларнинг бири орқали ёзилади.

$f(x)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳ.к. тартибдаги ҳосилалари худди шунга ўхшаш таърифланади. Умуман, $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир $x \in (a, b)$ нуқтасида $(n-1)$-тартибли $f^{(n-1)}(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f^{(n-1)}(x)$ функциянинг $x_0 \in (a, b)$ нуқтадаги ҳосиласи (агар у мавжуд бўлса) $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *n-тартибли ҳосиласи* деб аталади ва у $y^{(n)}_{x=x_0}$, $f^{(n)}(x_0)$, $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=x_0}$ ларнинг бири орқали белгиланади. Одатда $f(x)$ функциянинг $f''(x)$, $f'''(x)$, . . . ҳосилалари унинг *юқори тартибли ҳосилалари* дейилади.

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг $x\in(a, b)$ да n-тартибли ҳосиласининг мавжудлиги бу функциянинг шу нуқта атрофида 1-, 2-, . . . , $(n-1)$-тартибли ҳосилалари мавжудлигини тақозо этади. Аммо бу ҳосилаларнинг мавжудлигидан n-тартибли ҳосила мавжудлиги, умуман айтганда, келиб чиқавермайди. Масалан, $y=\frac{x\,|x|}{2}$ функциянинг ҳосиласи $y'=|x|$ бўлиб, бу функция $x=0$ да ҳосилага эга эмас, яъни берилган функциянинг $x=0$ да биринчи тартибли ҳосиласи мавжуд, иккинчи тартибли ҳосиласи эса мавжуд эмас.

Мазкур бобнинг 1-параграфида бир томонли ҳосила тушунчаси киритилган эди. Бу ерда ҳам мос равишда юқори тартибли ўнг ва чап ҳосила тушунчаларини киритиш мумкин.

Функциянинг юқори тартибли, масалан, n-тартибли $(n>2)$ ҳосилаларини топиш учун, умуман айтганда, унинг ҳамма олдинги тартибли ҳосилаларини ҳисоблаш керак. Айрим функцияларнинг юқори тартибли ҳосилаларини бир йўла топиш мумкин. Мисол тариқасида баъзи бир элементар функцияларнинг n-тартибли ҳосилаларини топамиз.

1) $y=x^{\mu}$ бўлсин ($x>0$ ва $\mu\in R$). Бу функциянинг ҳосилаларини кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$y'=\mu\, x^{\mu-1},$$

$$y''=(y')'=(\mu\, x^{\mu-1})'=\mu\ (\mu-1)\cdot x^{\mu-2},$$

$$y'''=(y'')'=[\mu\ (\mu-1)\ x^{\mu-2}]'=\mu\ (\mu-1)\ (\mu-2)\ x^{\mu-3}.$$

Берилган функциянинг n-тартибли ҳосиласи учун ушбу

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu\ (\mu-1)\ (\mu-2)\ \dots\ (\mu-n+1)\ x^{\mu-n} \tag{6.19}$$

формуланинг ўринли бўлишини математик индукция усули ёрдамида кўрсатиш қийин эмас. Маълумки, $n=1$ да

$$y'=\mu\cdot x^{\mu-1}$$

бўлади. Энди (6.19) формула $n=k$ да ўринли, яъни]

$$y^{(k)}=\mu\ (\mu-1)\ \dots\ (\mu-k+1)\ x^{\mu-k}$$

бўлсин деб, унинг $n=k+1$ да ўринли бўлишини кўрсатамиз. Таърифга кўра $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'$. Шунинг учун

$$y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(\mu\cdot(\mu-1)\ (\mu-2)\ \dots\ (\mu-k+1)\cdot x^{\mu-k})'=$$
$$=\mu\ (\mu-1)\ \dots\ (\mu-k+1)\cdot(\mu-k)\cdot x^{\mu-k-1}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (6.19) формуланинг $n=k+1$ да ҳам ўринли бўлишини билдиради. Демак, (6.19) формула ихтиёрий $n\in N$ учун ўринли.

(6.19) да μ — ихтиёрий ҳақиқий сон. Хусусан, $\mu=-1$ бўлсин. Унда $y=\frac{1}{x}$ функциянинг n-тартибли ҳосиласи

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)\cdot(-2)\ldots(-n)\,x^{-1-n} = \frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}} \qquad (6.20)$$

бўлади.

2) $y = \ln x$ $(x > 0)$ функциянинг n-тартибли ҳосиласини топамиз. Бу функциянинг биринчи ҳосиласи $y' = \frac{1}{x}$ бўлишидан ҳамда (6.20) формуладан фойдалансак,

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}$$

формула келиб чиқади. Демак,

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}, \quad x > 0. \qquad (6.21)$$

3) $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ бўлсин. Бу функциянинг ҳосилаларини кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$y' = a^x \cdot \ln a,$$
$$y'' = (a^x \cdot \ln a)' = a^x \ln^2 a,$$
$$y''' = (a^x \cdot \ln^2 a)' = a^x \cdot \ln^3 a.$$

Бу муносабатларга қараб $y = a^x$ функциянинг n-тартибли ҳосиласи учун ушбу

$$y^{(n)} = a^x \ \ln^n a$$

формулани ёзамиз. Унинг тўғрилиги яна математик индукция усули ёрдамида осонгина исботланади. Демак,

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

Хусусан, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

4) $y = \sin x$ бўлсин. Маълумки, бу функция учун $y' = \cos x$. Биз уни қуйидаги

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Сўнгра $y = \sin x$ функциянинг кейинги тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(\mathrm{IV})} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Бу ифодалардан эса $y = \sin x$ функциянинг n-тартибли ҳосиласи учун

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

формула келиб чиқади. Унинг тўғрилиги яна математик индукция усули билан исботланади. Демак,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{6.22}$$

Худди шунга ўхшаш

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{6.23}$$

2. **Содда қоидалар. Лейбниц формуласи.** $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, улар $x \in (a, b)$ нуқтада n-тартибли $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ хосилаларга эга бўлсин. Буни қуйидагича тушуниш лозим: $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x нуқтани ўз ичига олган $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ интервалда $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ хамда $g', g'', \ldots, g^{(n-1)}$ хосилаларга эга бўлиб, x нуқтада эса $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ хосилаларга эга. У холда

1) $[c \cdot f(x)]^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x)$, $c = \text{const}$; (6.24)

2) $[f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$; (6.25)

3) $$[f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) + \\ + C_n^2 f^{(n-2)}(x) \cdot g''(x) + \ldots + C_n^k f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x) + \ldots + \\ + f(x)\, g^{(n)}(x), \tag{6.26}$$

бунда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Юқорида келтирилган (6.24), (6.25) формулалар содда исботланади. Биз (6.26) формуланинг ўринли эканини исботлаймиз.

Маълумки, ((6.9) формулага қаранг):

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Бу эса $n = 1$ бўлганда (6.26) формуланинг тўғрилигини кўрсатади.

Энди (6.26) формула $n = k$ учун тўғри, яъни

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(k)} = f^{(k)}(x) \cdot g(x) + C_k^1 f^{(k-1)}(x) \cdot g'(x) + \\ + C_k^2 f^{(k-2)}(x) \cdot g''(x) + \ldots + f(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

формула ўринли деб, унинг $n = k + 1$ учун тўғрилигини кўрсатамиз. Хақиқатан ҳам, таърифга кўра

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(k+1)} = ([f(x) \cdot g(x)]^{(k)})'$$

бўлиб, ундан

$$[f(x) \cdot g(x)]^{(k+1)} = [f^{(k)}(x) \cdot g(x) + C_k^1 f^{(k-1)}(x) \cdot g'(x) + \\ + C_k^2 f^{(k-2)}(x) \cdot g''(x) + \ldots + C_k^i f^{(k-i)}(x)\, g^{(i)}(x) + \ldots +$$

$$+ f(x)\cdot g^{(k)}(x)]' = f^{(k+1)}(x)\cdot g(x) + f^{(k)}(x)\cdot g'(x) + C_k^1 \cdot f^{(k)}(x)\cdot g'(x) + C_k^1 f^{(k-1)}(x)\cdot g''(x) + \ldots + C_k^i f^{(k-i+1)}(x)\cdot g^{(i)}(x) + C_k^i f^{(k-i)}(x)\, g^{(i+1)}(x) + \ldots + f'(x)\cdot g^{(k)}(x) + f(x)\, g^{(k+1)}(x) = f^{(k+1)}(x)\cdot g(x) + (C_k^0 + C_k^1) f^{(k)}(x)\cdot g'(x) + \ldots + (C_k^i + C_k^{i-1})\cdot f^{(k-i+1)}(x)\cdot g^{(i)}(x) + \ldots + f(x)\cdot g^{(k+1)}(x)$$

бўлиши келиб чиқади ($C_k^0 = 1$).

Агар $C_k^i + C_k^{i-1} = \frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{i!} + \frac{k(k-1)\ldots(k-i+2)}{(i-1)!} = \frac{k(k-1)\ldots(k-i+2)(k-i+1)+k(k-1)\ldots(k-i+2)\,i}{i!} = \frac{k(k-1)\ldots(k-i+2)[(k-i+1)-i]}{i!} = \frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-i+2}{i!} = C_{k+1}^i$

тенгликни эътиборга олсак, у ҳолда ушбу

$$[f(x)\cdot g(x)]^{(k+1)} = f^{(k+1)}(x)\cdot g(x) + C_{k+1}^1 f^{(k)}(x)\cdot g'(x) + \ldots + C_{k+1}^i f^{(k-i+1)}(x)\cdot g^{(i)}(x) + \ldots + f(x)\cdot g^{(k+1)}(x)$$

формулага эга бўламиз. Бу эса (6.26) формула $n = k + 1$ бўлганда тўғри эканини кўрсатади.

Шундай қилиб, (6.26) формула барча n лар учун тўғридир. Исбот этилган (6.26) формула Лейбниц формуласи деб аталади.

Мисол. $y = e^x \sin x$ функциянинг 100-тартибли ҳосиласини ҳисобланг.

Лейбниц формуласидан фойдаланамиз:

$$y^{(100)} = (e^x \sin x)^{(100)} = e^x \sin x + C_{100}^1 e^x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + C_{100}^2 e^x \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \ldots + C_{100}^{100} e^x \sin\left(x + 100\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= e^x\left[\sin x + C_{100}^1 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + C_{100}^2 \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \ldots + C_{100}^{100} \sin\left(x + 100\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right] = e^x \sin x\left[1 + C_{100}^4 + C_{100}^8 + \ldots + C_{100}^{100}\right] + e^x \cos x\,[C_{100}^1 + C_{100}^5 + C_{100}^9 + \ldots + C_{100}^{97}] - e^x \sin x\,[C_{100}^2 + C_{100}^6 + \ldots + C_{100}^{98}] - e^x \cos x\,[C_{100}^3 + C_{100}^7 + \ldots + C_{100}^{99}] =$$

$$= e^x \sin x\,[1 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + C_{100}^8 - \ldots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100}] + e^x \cos x\,[C_{100}^1 - C_{100}^3 + C_{100}^5 - C_{100}^7 + \ldots + C_{100}^{97} -$$

$$-C_{100}^{99}] = 2e^x \sin x [1 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \ldots +$$
$$+ C_{100}^{48} - \frac{1}{2} C_{100}^{50}].$$

3. Мураккаб функциянинг юқори тартибли ҳосилалари. $u = f(x)$ функция (a, b) интервалда, $y = F(u)$ функция эса (c, d) интервалда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида $y = F(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин (бунда, албатта, $x \in (a, b)$ да $u = f(x) \in (c, d)$ бўлиши талаб қилинади). $u = f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада иккинчи тартибли $f''(x)$, $y = F(u)$ функция эса мос $u (u = f(x))$ нуқтада иккинчи тартибли $F''(u)$ ҳосилага эга бўлсин. Иккинчи тартибли ҳосила таърифига кўра

$$y'' = [F(f(x))]'' = [(F(f(x)))']'$$

бўлади. Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш формуласи (6.5) дан ҳамда кўпайтманинг ҳосиласини ҳисоблаш формуласи (6.9) дан фойдаланиб, топамиз:

$$[(F(f(x)))']' = [F'(f(x)) \cdot f'(x)]' = [F'(f(x))]' \cdot f'(x) +$$
$$+ F'(f(x))(f'(x))' = F''(f(x)) f'(x) \cdot f'(x) + F'(f(x)) \cdot f''(x) =$$
$$= F''(x) \cdot f'^2(x) + F'(f(x)) \cdot f''(x)$$

Демак,

$$y'' = [F(f(x))]'' = F''(f(x)) \cdot f'^2(x) + F'(f(x)) \cdot f''(x).$$

Худди шунга ўхшаш $u = f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада $f'''(x)$ ва $y = F(u)$ функция эса мос $u (u = f(x))$ нуқтада $F'''(u)$ ҳосилага эга бўлса, мураккаб $y = F(f(x))$ функция ҳам $x \in (a, b)$ нуқтада 3-тартибли ҳосилага эга бўлади. Бу хосила қуйидагича ҳисобланади:

$$y''' = [F(f(x))]''' = [(F(f(x))'']' = [F''(f(x)) \cdot f'^2(x) +$$
$$+ F'(f(x)) \cdot f''(x)]' = F'''(f(x)) \cdot f'^3(x) +$$
$$+ F''(f(x)) \cdot 2 \cdot f'(x) \cdot f''(x) + F''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f''(x) + F'(f(x)) \cdot f'''(x) =$$
$$= F'''(f(x)) \cdot f'^3(x) + 3 F''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f''(x) + F'(f(x)) \cdot f''(x).$$

Шу йўл билан мураккаб функция $y = F(f(x))$ нинг исталган тартибли ҳосилалари ҳам ҳисобланиши мумкин.

4. Функциянинг юқори тартибли дифференциаллари. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, функциянинг дифференциали ушбу, $dy = f'(x) dx = y'dx$ формула билан ҳисобланишини кўрдик ((6.14) га қаранг). Демак, функциянинг дифференциали x ва dx ларга боғлиқдир.

Шуни таъкидлаймизки, dx миқдор $f(x)$ функция аргументи x нинг ихтиёрий орттирмаси Δx ни ифодалаб, dy миқдорни x ўзгарувчи бўйича дифференциаллаш жараёнида уни ўзгармас кўпайтувчи сифатида қаралади.

Фараз қилайлик, юқорида қаралаётган $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

6-таъриф. $f(x)$ функция дифференциали dy нинг $x \in (a, b)$ нуқздаги дифференциали функциянинг *иккинчи тартибли дифференциали* деб аталади. Функциянинг иккинчи тартибли дифференциали $^2f(x)$ ёки d^2y каби белгиланади, яъни

$$d^2y = d(dy) \quad \text{ёки} \quad d^2f(x) = d(df(x)).$$

Энди дифференциаллаш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = dx\cdot d(y') = dx(y')'dx = y''(dx)^2.$$

Шундай қилиб, функциянинг иккинчи тартибли дифференциали унинг иккинчи тартибли ҳосиласи орқали қуйидагича ёзилади:

$$d^2y = y''\cdot dx^2, \tag{6.27}$$

бунда ушбу

$$dx^2 = dx\cdot dx = (dx)^2$$

белгилашни келишиб оламиз.

$f(x)$ функция $x\in(a, b)$ нуқтада 3-тартибли $f'''(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

Худди юқоридагига ўхшаш, $x\in(a, b)$ нуқтада функциянинг 3-тартибли дифференциали таърифланади: $d^3y = d(d^2y)$. Шунга кўра $f(x)$ функциянинг 3-тартибли дифференцияли учун ушбу

$$d^3y = d(d^2y) = d(y''dx^2) = dx^2d(y'')' = dx^2(y'')'\cdot dx = y'''\cdot dx^3$$

формула келиб чиқади, бунда $dx^3 = (dx)^3$.

Шу йўл билан функциянинг юқори тартибли дифференциаллари таърифланади. Умумий ҳолни қарайлик. $f(x)$ функция $x\in(a, b)$ нуқтада n-тартибли $f^{(n)}(x)$ хосилага эга бўлсин. Функциянинг $(n-1)$-тартибли дифференциали $d^{(n-1)}y$ дан олинган дифференциал $f(x)$ функциянинг $x\in(a, b)$ нуқтадаги *n-тартибли дифференциали* деб аталади ва у d^ny ёки $d^nf(x)$ каби белгиланади, яъни

$$d^ny = d(d^{n-1}y) \quad \text{ёки} \quad d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)).$$

Бу ҳолда ҳам функциянинг n-тартибли дифференциали унинг n-тартибли ҳосиласи орқали қуйидаги

$$d^ny = y^{(n)}\cdot dx^n \tag{6.28}$$

кўринишда ифодаланади. Унинг тўғрилигини математик индукция усули ёрдамида исботлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $n = 1$ ва $n = 2$ бўлганда (6.28) формуланинг тўғрилиги юқорида кўрсатилди. Бу (6.28) формула $n = k$ да ўринли, яъни $d^ky = y^{(k)}dx^k$ бўлсин деб, унинг $n = k + 1$ да тўғрилигини исботлаймиз. Функциянинг n-тартибли дифференциали таърифига кўра $d^{(k+1)}y = d(d^ky)$ бўлиб, ундан

$$d^{k+1}y = d(d^ky) = d(y^{(k)}\cdot dx^k) = dx^k\cdot d(y^{(k)}) = y^{(k+1)}\cdot dx^{k+1}$$

экани келиб чиқади, яъни ушбу

$$d^{k+1}y = y^{(k+1)}\cdot dx^{k+1}$$

формула ўринли. Демак, (6.28) формула ихтиёрий $n \in N$ учун тўғри.

Маълумки, n-тартибли ҳосила (5-§ нинг 1-б га каранг) ушбу $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ кўринишда белгиланган эди. (6.28) эса функциянинг n-тартибли ҳосиласини $\frac{d^n y}{dx^n}$ деб белгиланган символни каср сифатида қараш мумкинлигини билдиради.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, улар $x \in (a, b)$ нуқтада n-тартибли дифференциалга эга бўлсин. У ҳолда ушбу

1) $d^n [c \cdot f(x)] = c \cdot d^n f(x), \quad c = \text{const};$

2) $d^n [f(x)] \pm g(x) = d^n f(x) \pm d^n g(x);$

3) $d^n [f(x) \cdot g(x)] = d^n f(x) \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot dg(x) + \ldots +$
$+ C_n^k d^{n-k} f(x) \cdot d^k g(x) + \ldots + f(x) d^n g(x)$

формулалар ўринли бўлади. Юқори тартибли дифференциалларнинг бу қоидалари (6.24) — (6.26) формулалар билан ифодаланган содда қоидалар ҳамда (6.28) формуладан бевосита келиб чиқади.

Энди мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциалларини қараймиз.

$u = f(x)$ функция (a, b) интервалда, $y = F(u)$ функция эса (c, d) интервалда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида $y = F(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин (бунда, албатта $x \in (a, b)$ да $u = f(x) \in (c, d)$ бўлиши талаб қилинади). Сўнгра $u = f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нуқтада $f'(x)$, $F(u)$ функция эса мос $u (u = f(x))$ нуқтада $F'(u)$ ҳосилаларга эга деб, $y = F(f(x))$ функциянинг дифференциалини ҳисоблаймиз.

Маълумки, ушбу $y = F(f(x)) = \Phi(x)$ мураккаб функциянинг дифференциали ((6.15) га қаранг) қуйидаги

$$dy = \Phi'(x)\,dx = [F(f(x))]'\,dx$$

ва

$$[F(f(x))]' = F'(f(x)) \cdot f'(x)$$

формулаларни эътиборга олинса,

$$dy = d\,[f(x))] = F'(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = F'(f(x)) \cdot df(x) \qquad (6.29)$$

кўринишга эга бўлади.

Демак, функция мураккаб бўлган ҳолда ҳам функция дифференциали функция ҳосиласи $F'(f(x))$ билан (бу ҳолда аргумент $f(x)$ бўлади) аргумент $f(x)$ нинг дифференциали $df(x)$ кўпайтмасидан иборат эканлигини кўрамиз.

Шундай қилиб, қаралаётган функциялар $f(x)$ (x — эркли ўзгарувчи) кўринишда бўлганда ҳам, мураккаб $y = F(f(x))$ кўринишда бўлганда ҳам, бу функцияларнинг дифференциаллари бир хил формага эга бўлади (яъни дифференциал формаси сақланади). Одатда бу хоссани дифференциал формасининг *инвариантлиги* дейилади. Бунда

(6.14) формуладаги dx аргумент x нинг ихтиёрий орттирмаси Δx ($dx = \Delta x$) билдиради, (6.29) формуладаги $df(x)$ эса x ўзгарувч боғлиқ бўлади.

Энди $y = F(f(x))$ мураккаб функциянинг иккинчи тартибли ди ференциалини ҳисоблаймиз. Таърифга кўра

$$d^2y = d^2[F(f(x))] = d[d(F(f(x)))]$$

бўлади. Дифференциаллаш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$d^2y = d^2[F(f(x))] = d[F'(f(x)) \cdot df(x)] = d[F'(f(x))] \cdot df(x) + $$
$$+ F'(f(x)) \cdot d[df(x)] = F''(f(x)) \cdot df^2(x) + F'(f(x)) \cdot d^2f(x),$$

бунда $df^2(x) = df(x) \cdot df(x) = (df(x))^2$.

Демак,

$$d^2y = d^2[F(f(x))] = F''(f(x)) \cdot df^2(x) + F'(f(x)) \cdot d^2f(x). \qquad (6.3$$

Бу (6.30) формула билан (6.27) формулани таққослаб, иккин тартибли дифференциаллар дифференциал формасининг инвариантли хоссасига эга эмаслигини кўрамиз.

$y = F(f(x))$ функциянинг учинчи ва ҳоказо тартибли диффере циаллари юқоридагидек бирин-кетин ҳисобланади.

6-§. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари

Ушбу параграфда дифференциал ҳисобнинг асосий теоремаларин келтирамиз. Бу теоремалар келгусида, айниқса функцияларни те ширишда, муҳим роль ўйнайди.

5-теорема (**Ферма теоремаси**). *$f(x)$ функция бирор оралиқда аниқланган ва бу оралиқнинг ички c нуқтасида ўзинин энг катта (энг кичик) қийматига эришсин. Агар бу нуқтад функция чекли $f'(c)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда*

$$f'(c) = 0$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция c нуқтада энг катта қиймат- га эга, яъни $\forall x \in X$ да $f(x) \leqslant f(c)$ тенгсизлик ўринли, шу била бирга бу c нуқтада чекли $f'(c)$ ҳосила мавжуд. Равшанки,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Аммо $x > c$ бўлганда

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \Rightarrow \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

ва $x < c$ бўлганда

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

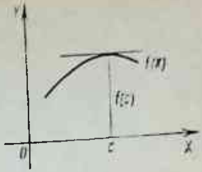
бўлишидан

$$f'(c) = 0$$

экани келиб чиқади.

Шунга ўхшаш, функция c нуқтада энг кичик қийматга эга ва бу нуқтада чекли $f'(c)$ хосилага эга бўлганда ҳам $f'(c)=0$ бўлиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

Ферма теоремаси содда геометрик маънога эга. У $f(x)$ функция графигига $(c, f(c))$ нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўқига параллел бўлишини ифодалайди (44- чизма).



44- чизма.

5- эслатма. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган бўлиб, бу сегментнинг четки ($x=a$ ёки $x=b$) нуқтасида ўзининг энг катта ёки энг кичик қийматига эришсин дейлик. Бу нуқтада функция ҳосилага (равшанки, бу ҳолда бир томонлама $f'(a+0)$, $f'(b-0)$ ҳосилалар тушунилади) эга бўлса, функциянинг ҳосиласи нолга тенг бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, $f(x)=x$ функция $[0,1]$ сегментнинг $x=0$, $x=1$ нуқталарида ўзининг энг кичик ҳамда энг катта қийматларига эришса ҳам унинг бу нуқталардаги ҳосиласи 1 га тенг.

6- теорема (Ролль теоремаси). *$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва $f(a)=f(b)$ бўлсин. Агар бу функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай c $(a<c<b)$ нуқта топиладики,*

$$f'(c)=0$$

бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз. Демак, Вейерштрасснинг биринчи теоремасига (5- боб, 7- §) кўра бу оралиқда функция ўзининг энг катта қиймати M ва энг кичик қиймати m га эришади.

1) $m=M$ бўлсин. Бунда $f(x)=\text{const}$, $x\in[a, b]$ бўлади. Равшанки, бу ҳолда $\forall c\in(a, b)$ учун $f'(c)=0$ бўлади.

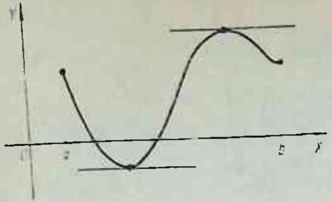
2) $m\neq M$ бўлсин. Бу ҳолда $f(a)=f(b)$ бўлгани учун $f(x)$ функция ўзининг энг катта қиймати M, энг кичик қиймати m ларнинг камида биттасига $[a, b]$ сегментнинг ички c $(a<c<b)$ нуқтасида эришади. Ферма теоремасига асосан бу нуқтада

$$f'(c)=0$$

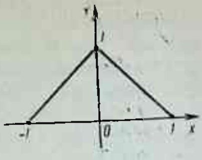
бўлади. Теорема исбот бўлди.

$f(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантирсин. У ҳолда бу функция тасвирлаган эгри чизиқда шундай $(c, f(c))$ нуқта топиладики, эгри чизиққа унинг бу нуқтасида ўтказилган уринма Ox ўқига параллел бўлади (45- чизма).

6- эслатма. Ролль теоремасининг барча шартлари муҳим. Агар келтирилган шартларнинг бирортаси бажарилмаса, теореманинг хулосаси ўринли бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, 1) $f(x)=1-|x|$ функция $[-1, +1]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу функция учун $f(-1)=f(+1)=0$ бўлади. Аммо бу функциянинг ҳосиласи $(-1, +1)$ интервалнинг бирорта нуқтасида ҳам нолга айланмайди. Бунга сабаб қаралаётган функциянинг $(-1, +1)$ интервалнинг ҳамма нуқ-



45- чизма.



46- чизма.

таларида ҳам ҳосилага эга эмаслигидир. Аниқроги, $f(x) = 1 - |x|$ функция $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмас (46- чизма).

2) $f(x) = x$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлиб, $(0,1)$ интервалда чекли ҳосилага эга ва $(0,1)$ интервалнинг барча нуқталарида $f'(x) = 1$. Бу функция учун Ролль теоремаси хулосасининг ўринли бўлмаслиги $f(x) = x$ функция учун $f(a) = f(b)$ шартнинг бажарилмаслигидандир.

7-теорема (Лагранж теоремаси). $f(x)$ *функция* $[a, b]$ *сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция* (a, b) *интервалда чекли* $f'(x)$ *ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай* $c\,(a < c < b)$ *нуқта топиладики, бу нуқтада*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{6.31}$$

бўлади.

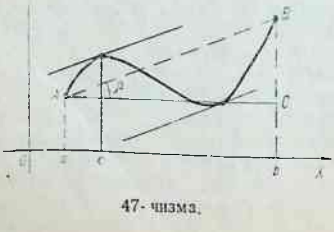
Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, унинг ички нуқталарида чекли $f'(x)$ ҳосилага эга. Бу функция ёрдамида қуйидаги

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

функцияни тузайлик. Равшанки, бу $F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, (a, b) интервалда эса

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ҳосилага эга. $F(x)$ функциянинг $x = a$ ва $x = b$ нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз: $F(a) = F(b) = 0$. Демак, $F(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. У ҳолда a ва b орасида шундай $c\,(a < c < b)$ нуқта топиладики, $F'(c) = 0$ бўлади. Шундай қилиб,



47- чизма.

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ва бундан (6.31) формула келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Энди Лагранж теоремасининг геометрик маъносига тўхталамиз. $f(x)$ функция Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантирсин дейлик (47-чизма). Функция графигининг $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ нуқталарини тўғри чизиқ билан бирлаштирамиз. Унда AB кесувчининг бурчак коэффициенти

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

бўлади.

Маълумки, $f'(x)$ — бу $f(x)$ функция графигига унинг $(x, f(x))$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти: $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Шундай қилиб, Лагранж теоремаси (a, b) интервалда шундай $c\ (a < c < b)$ нуқта мавжудлигини кўрсатадики (бундай нуқталар бир нечта бўлиши ҳам мумкин), $f(x)$ функция графигига $(c, f(c))$ нуқтада ўтказилган уринма AB тўғри чизиққа параллел бўлади.

Юқорида келтирилган (6.31) формулани бошқача ҳам ёзиш мумкин. Бунинг учун $a < c < b$ тенгсизликларини эътиборга олиб,

$$\frac{c - a}{b - a} = \theta \quad (0 < \theta < 1)$$

деб белгиласак, унда

$$c = a + (b - a)\theta \quad (0 < \theta < 1)$$

бўлади. Натижада (6.31) формула ушбу

$$f(b) - f(a) = f'[a + (b - a)\theta]\cdot(b - a) \qquad (6.32)$$

кўринишга келади. Кейинги формулада $\Delta x > 0$ да $a = x$, $b = x + \Delta x$, $\Delta x < 0$ да эса $a = x + \Delta x$, $b = x$ деб, топамиз:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x. \qquad (6.33)$$

Бу (6.33) формула *чекли орттирмалар формуласи* деб аталади.

Агар (6.31) формулада $f(a) = f(b)$ деб олинса, у ҳолда $f'(c) = 0$ $(a < c < b)$ бўлиб, Лагранж теоремасидан Ролль теоремасининг келиб чиқишини кўрамиз.

8-теорема (Коши теоремаси). *$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функциялар (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ учун $g'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда шундай $c\ (a < c < b)$ нуқта топиладики,*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (6.34)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. (6.34) тенглик маънога эга бўлиши учун $g(b) \neq g(a)$ бўлиши керак. Бу эса теоремадаги $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ шартдан келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар $g(b) = g(a)$ бўлиб қоладиган бўлса, у ҳолда $g(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантириб, бирор $c\in(a, b)$ нуқтада (бундай нуқта Ролль теоремасига кўра топилади) $g'(c)=0$ бўлиб қолади. Бу эса $\forall x\in(a, b)$ да $g'(x)\neq0$ шартга зиддир. Демак, $g(b)\neq g(a)$.

Энди $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ёрдамида қуйидаги

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot[g(x)-g(a)]$$

функцияни тузайлик. Бу функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, (a, b) интервалда

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

ҳосилага эга. Сўнгра $F(x)$ функциянинг $x=a$, $x=b$ нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз: $F(a)=F(b)=0$. Демак, $F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун a ва b лар орасида шундай $c\,(a<c<b)$ топиладики, $F'(c)=0$ бўлади. Шундай қилиб,

$$0=F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)$$

ва ундан (6.34) тенгликнинг ўринли экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Хусусан, $g(x)=x$ бўлганда Коши теоремасидан Лагранж теоремаси келиб чиқади.

7- §. Тейлор формуласи

1. Функцияни яқинлаштириш ҳақида. Маълумки, функция математик анализ курсида ўрганиладиган асосий тушунча. Кўпгина масалалар эса функцияни ҳисоблаш (берилган нуқтада қийматини топиш) билан боғлиқ. Функциянинг мураккаб бўлиши бундай ҳисоблашларда катта қийинчиликлар туғдиради. Натижада ноқулай ва мураккаб функцияни ўзига қараганда содда ва ҳисоблашга қулай бўлган функция билан яқинлаштириш — тақрибий ифодалаш масаласи юзага келади.

Берилган $f(x)$ функцияни бирор $g(x)$ функция билан яқинлаштиришда қуйидаги икки момент муҳимдир:

1) $f(x)$ функцияга яқинлашадиган $g(x)$ функциянинг танлаб олиниши ва унинг тузилиши (соддалиги ва ҳисоблаш учун қулайлиги).

2) $f(x)$ функцияга $g(x)$ функциянинг яқинлашишидаги хатоликни аниқлаш ва уни баҳолаш.

Одатда яқинлашадиган функция сифатида бутун рационал функция — кўпҳад олинади:

$$g(x)=P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+$$
$$+\ldots+a_n(x-x_0)^n, \tag{6.35}$$

бунда a_0. a_1, a_2, . . . , a_n ва x_0 лар ўзгармас ҳақиқий сонлар, $n\in N$.

Равшанки, кўпҳад содда ва ҳисоблаш учун қулай функция.

1885 йилда машҳур немис математиги К. Вейерштрасс томонидан $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган $f(x)$ функцияни $P_n(x)$ кўпҳад билан яқинлаштириш мумкинлиги, бошқача айтганда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $P_n(x)$ кўпҳад мавжудки, унда $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлиши кўрсатилди. Биз Вейерштрасс теоремаси ҳақида математик анализ курсининг «Функционал кетма-кетлик ва қаторлар» бобида батафсил гапирамиз.

Гарчи Вейерштрасс теоремаси $f(x)$ функцияни $P_n(x)$ кўпҳад билан яқинлаштириш мумкинлигини ифодаласа ҳам яқинлашиш хатолигини, яъни ушбу

$$R_n(f) = f(x) - P_n(x)$$

айирмани баҳолаш имконини ва унинг нолга интилиш тартибини аниқлаб бермайди. Кейинги ўрганишлар $R_n(f)$ нинг нолга интилиш тартиби яқинлаштириладиган $f(x)$ функциянинг ҳосилаларга эга бўлишига боғлиқ эканлигини кўрсатади. Одатда ҳосилага эга бўлган функция *силлиқ функция* деб аталади.

Модомики, силлиқ функцияларни кўпҳад билан қулай яқинлаштириш мумкин экан, бирор x_0 нуқтанинг атрофида $f(x)$ функциянинг қатор юқори тартибли ҳосилалари мавжуд бўлган ҳолда бу ҳосилалардан фойдаланиб, аввало $P_n(x)$ кўпҳадни тузиш ва $f(x)$ функцияни бу кўпҳад билан яқинлаштириш масаласини қараш мумкин. Бу масалани ҳал қилишда Тейлор формуласидан фойдаланилади.

Шуни айтиш керакки, хусусий ҳолда бундай масала билан функция орттирмаси Δy ни унинг дифференциали dy билан тақрибий ифодалаш ($\Delta y \approx dy$) жараёнида танишган эдик ((6.17) га қаранг). Маълумки, $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ да дифференциалланувчи бўлса, уни қуйидаги

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу эса x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги x нуқталарда $f(x)$ функция ушбу

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

чизиқли функция (биринчи даражали кўпҳад) билан тақрибий ифодаланишини кўрсатади.

2. Кўпҳад учун Тейлор формуласи. Ушбу

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + a_n(x - x_0)^n \tag{6.35}$$

(бунда $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ва x_0 ўзгармас ҳақиқий сонлар, $n \in N$) кўпҳадни қарайлик. Бу кўпҳадни кетма-кет n марта дифференциаллаб топамиз:

$$P_n'(x) = a_1 + 2\cdot a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1},$$
$$P_n''(x) = 2\cdot a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$
$$P_n'''(x) = 3\cdot 2\cdot a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 2\cdot a_n. \qquad (6.36)$$

Бу (6.35) ва (6.36) тенгликларда $x = x_0$ деб олинса, унда берилган $P_n(x)$ кўпҳад ва унинг ҳосилалари $P_n^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ нинг x_0 нуқтадаги қийматлари топилади:

$$P_n(x_0) = a_0,$$
$$P_n'(x_0) = 1!\ a_1,$$
$$P_n''(x_0) = 2!\ a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n^{(n)}(x_0) = n!\ a_n.$$

Улардан

$$a_0 = P_n(x_0),$$
$$a_1 = \frac{P_n'(x_0)}{1!},$$
$$a_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!}, \qquad (6.37)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, $P_n(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари кўпҳад ва унинг ҳосилаларининг x_0 нуқтадаги қийматлари орқали ифодаланди. Коэффициентларнинг бу қийматларини (6.35) га қўйсак, унда

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (6.38)$$

бўлади. Бу кўпҳад (6.35) кўпҳаддан коэффициентларининг ёзилиши билангина фарқ қилади.

(6.38) формула *кўпҳад учун Тейлор формуласи* деб аталади.

3. Ихтиёрий функция учун Тейлор формуласи. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, у $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ ҳосилаларга эга бўлсин. Функциянинг нуқтадаги ҳосилаларидан фойдаланиб, қуйидаги

$$P_n(f; x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

кўпҳадни тузайлик.

Агар қаралаётган $f(x)$ функция n-даражали кўпҳад бўлса, унда юқорида (2-бандда) айтилганга кўра

$$f(x) \equiv P_n(f;\ x),$$

яъни

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

бўлади.

Агар $f(x)$ функция кўпҳад бўлмаса, равшанки,

$$f(x) \not\equiv P_n(f;\ x)$$

бўлиб, улар орасида фарқ юзага келади. Биз уни $R_n(x)$ орқали белгилайлик:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(f;\ x). \qquad (6.39)$$

Натижада ушбу

$$f(x) = P_n(f;\ x) + R_n(x),$$

яъни

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \qquad (6.40)$$

формулага келамиз. Бу (6.40) формула $f(x)$ *функция учун Тейлор формуласи* деб аталади. $R_n(x)$ эса Тейлор формуласининг *қолдиқ ҳади* дейилади.

Қолдиқ ҳад $R_n(x)$ нинг (6.39) формула орқали ифодаланишини билиш $P_n(x)$ нинг $f(x)$ га яқинлашиши ҳақида хулоса чиқаришга имкон бермайди. Агар $R_n(x)$ ни n ва x ларнинг қийматлари бўйича баҳолай олсак ва унинг нолга интилишини кўрсата олсақ, у ҳолда $f(x)$ функцияни $P_n(f;\ x)$ кўпҳад билан алмаштириш мумкин эканлигини асослаган бўламиз. Демак, масала $R_n(x)$ ни баҳолашдан иборат. Бу масалани ҳал қилиш учун $f(x)$ функцияга «оғирроқ» шарт қўйишга тўғри келади.

$f(x)$ функция $(a,\ b)$ интервалда аниқланган бўлиб, у шу интервалда узлуксиз $f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Ундан ташқари, $(a,\ b)$ интервалда бу функциянинг $(n+1)$-тартибли $f^{(n+1)}(x)$ ҳосиласи ҳам мавжуд бўлсин. $(a,\ b)$ интервалда аргумент x нинг ихтиёрий қийматини *тайинлаб*, қуйидаги

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n \qquad (6.41)$$

ёрдамчи функцияни тузамиз ва уни $[x_0,\ x] \subset (a,\ b)$ (ёки $[x,\ x_0] \subset (a,\ b)$) сегментда қараймиз. $F(t)$ функциянинг (6.41) ифодасидан унинг $[x_0,\ x]$ сегментда узлуксиз бўлишини кўриш қийин эмас. Бу функция $(x_0,\ x)$ интервалда ҳосилага ҳам эга. Ҳақиқатан ҳам,

$$F'(t) = -f'(t) - \left[\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - f'(t)\right] - \left[\frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 - \right.$$

$$-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\Big]-\dots-\Big[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-$$

$$-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\Big]=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n .$$

Демак,

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n . \tag{6.42}$$

Энди $[x_0, x]$ сегментда узлуксиз ва (x_0, x) интервалда чекли ҳосилага (нолга тенг бўлмаган) эга бўлган бирор $\Phi(t)$ функцияни олайлик. $F(t)$ ва $\Phi(t)$ функцияларга $[x_0, x]$ сегментда Коши теоремасини қўлланиб топамиз:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\Phi(x)-\Phi(x_0)}=\frac{F'(c)}{\Phi'(c)}, \tag{6.43}$$

бунда

$$x_0 < c < x\,(c = x_0+\theta(x-x_0), \quad 0<\theta<1).$$

Юқоридаги (6.41) функция учун

$$F(x)=0,\ F(x_0)=R_n(x)$$

тенгликларга эгамиз. Энди (6.42) тенгликдан $t=c$ да

$$F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (6.43) тенгликдан

$$R_n(x)=\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{\Phi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{6.44}$$

$(c=x_0+\theta(x-x_0))$ формула келиб чиқади.

Шундай қилиб, Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади учун (6.44) формула топилади. Бу ҳолда $f(x)$ функциянинг Тейлор формуласи қуйидаги

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{\Phi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c_0)^n \tag{6.45}$$

$$(c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1)$$

кўринишда ёзилади.

Тейлор формуласидан кенгроқ фойдаланиш мақсадида, унинг қолдиқ ҳадининг турли кўринишларини келтирамиз.

1°. Коши кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи. Юқорида қаралган $\Phi(t)$ функция сифатида $\Phi(t)=x-t$ функцияни олайлик. Равшанки, бу функция $[x_0, x]\subset(a, b)$ сегментда узлуксиз, (x_0, x) интервалда эса чекли $\Phi'(t)=-1$ ҳосилага эга. Бу функция учун $\Phi(x)=0$, $\Phi(x_0)=x-x_0$ бўлади. Натижада (6.44) формула қуйидаги

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}[x-x_0-\theta(x-$$
$$-x_0)]^n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{(n+1)}(1-\theta)^n$$
$$(0<\theta<1)$$

кўринишни олади. Қолдиқ ҳадининг бу ифодасини (6.45) га қўйиб, топамиз:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1} \cdot (1-\theta)^n. \qquad (6.46)$$

Бу (6.46) формула $f(x)$ функциянинг *Коши кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи* деб аталади.

2°. Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи. Энди $\Phi(t) = (x-t)^{n+1}$ функцияни олайлик. Бу функция ҳам $[x_0, x] \subset (a, b)$ сегментда узлуксиз. (x_0, x) интервалда эса чекли $\Phi'(t) = -(n+1)\cdot(x-t)^n$ ҳосилага эга. Бу функция учун

$$\Phi(x) = 0, \quad \Phi(x_0) = (x-x_0)^{n+1},$$
$$\Phi'(c) = -(n+1)(x-c)^n\,(c = x_0 + \theta(x-x_0); \quad 0<\theta<1)$$

бўлади. У ҳолда юқоридаги (6.44) формула ушбу

$$R_n(x) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\,\frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

кўринишни олади. Қолдиқ ҳадининг бу ифодасини (6.45) га қўйиб, топамиз:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (6.47)$$

Бу формула $f(x)$ функциянинг *Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи* деб аталади.

Тейлор формуласи қолдиқ ҳадининг бу кўриниши содда бўлиб, у (6.47) формуладаги навбатда келадиган ҳадни эслатади. Фақат бунда функциянинг $(n+1)$- тартибли ҳосиласининг x_0 нуқтадаги қиймати ўрнига бу ҳосиланинг $c(c = x_0+\theta(x-x_0))$ нуқтадаги қиймати олинади.

3°. Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи. $f(x)$ функция Тейлор формуласининг Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадини чиқаришда $f(x)$ функцияга нисбатан қўйилган шартни «енгиллаштириш» мумкин.

$f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг бирор $U_\delta(x_0) \subset (a, b)$ атрофида $f'(x)$, $f''(x)$, . . . , $f^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $f^{(n)}(x)$ ҳосила эса x_0 нуқтада узлуксиз бўлсин. Бу функция учун $x \in U_\delta(x_0)$ да ушбу

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (6.48)$$

(бунда c сон x_0 билан x орасида) формула ўринли.

Ҳақиқатан ҳам, юқоридаги (6.47) формулада n ни $n-1$ га алмаштирсак, у ҳолда (6.47) формуладан (6.48) келиб чиқади.

Равшанки, $x\to x_0$ да $c\to x_0$ бўлади. $f^{(n)}(x)$ эса x_0 нуқтада узлуксиз. Демак,

$$\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(c)=\lim_{c\to x_0} f^{(n)}(c)=f^{(n)}(x_0).$$

У ҳолда

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)$$

тенглик ўринли бўлиб, $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ бўлади.

Агар $x\to x_0$ да $\alpha(x)\cdot(x-x_0)^n=o((x-x_0)^n)$ бўлишини эътиборга олсак, натижада (6.48) формуланинг қолдиқ ҳади учун ушбу

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \qquad (6.49)$$

формулани топамиз. Энди (6.48) ва (6.49) формулалардан

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \qquad (6.50)$$

формулага келиб чиқади. Бу формула $f(x)$ функциянинг *Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи* деб аталади.

Демак, $x\to x_0$ да (6.50) формуланинг қолдиқ ҳади нолга интилиб, у (6.50) формулада ўзидан олдин келадиган ҳар бир ҳадга қараганда юқори тартибли чексиз кичик миқдор бўлади.

Шундай қилиб, биз юқорида $f(x)$ функция Тейлор формуласи қолдиқ ҳадининг турли кўринишларини келтирдик. Ечилаётган масаланинг талабига қараб у ёки бу кўринишдаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласидан фойдаланилади. Масалан, бирор x_0 нуқта атрофидаги $x(x\neq x_0)$ нуқталарда $f(x)$ функциянинг қийматларини тақрибий ҳисоблаш керак бўлса, Коши ёки Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формулаларидан фойдаланган маъқул, $x\to x_0$ да қолдиқ ҳади нолга интилиш тартибинигина билиш лозим бўлса ёки x_0 нуқта атрофида функциянинг бош қисмини ажратиш керак бўлса, у ҳолда Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади.

Одатда Коши ёки Лагранж кўринишидаги Тейлор формулалари кўпроқ амалий аҳамиятга, Пеано кўринишидаги Тейлор формуласи эса кўпроқ назарий аҳамиятга эга бўлади.

4°. **Тейлор формуласининг бошқача ёзилишлари.** $f(x)$ функциянинг Тейлор формуласини орттирмалар ҳамда дифференциаллар формасида ҳам ёзиш мумкин. 3°-бандда келтирилган (6.46), (6.47) ва (6.50) Тейлор формулаларида $x - x_0 = \Delta x$ деб (бу ҳолда $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ бўлади), $f(x)$ функция Тейлор формулаларини орттирмалар формасидаги кўринишларини топамиз:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n + R_n(x). \quad (6.51)$$

Бунда қолдиқ ҳад $R_n(x)$ қуйидаги

а) Коши кўринишида: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \Delta x^{n+1} (1 - \theta)^n$,

б) Лагранж кўринишида: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Delta x^{n+1}$,

в) Пеано кўринишида: $R_n(x) = o(\Delta x^n)$

$(0 < \theta < 1, \ c = x_0 + \theta \cdot \Delta x)$ ёзилиши мумкин.

(6.51) формулада қолдиқ ҳадни Лагранж кўринишида олиб, сўнгра $n = 0$ дейилса, у ҳолда

$$\Delta f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x$$

формулага эга бўламиз. Бу эса чекли орттирмалар формуласидир. ((6.33) га қаранг). Маълумки,

$$f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0)\, dx = df(x_0),$$
$$f''(x_0) \cdot (\Delta x)^2 = f''(x_0)\, dx^2 = d^2 f(x_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x_0) \cdot (\Delta x)^n = f^{(n)}(x_0) dx^n = d^n f(x_0).$$

Буларни эътиборга олсак, $f(x)$ функциянинг (6.46), (6.47), (6.50) Тейлор формулаларини қуйидагича дифференциаллар формасида ҳам ифодалаш мумкин бўлади:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0) + R_n(x). \quad (6.52)$$

Бунда қолдиқ ҳад $R_n(x)$ эса қуйидаги

а) Коши кўринишида: $R_n(x) = \frac{1}{n!} d^{n+1} f(c) \cdot (1 - \theta)^n$,

б) Лагранж кўринишида: $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(c)$,

в) Пеано кўринишида: $R_n(x) = o(dx^n)$

$(0 < \theta < 1, \ c = x_0 + \theta \Delta x)$ ёзилиши мумкин.

5. **Маклорен формуласи.** $f(x)$ функциянинг (6.40) Тейлор формуласида $x_0 = 0$ деб олинса, ушбу

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!} x^n + r_n(x) \quad (6.53)$$

формула ҳосил бўлади. Бу ҳолда қолдиқ ҳад $r_n(x)$ қуйидагича:

а) Коши кўринишида: $r_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x)$,

б) Лагранж кўринишида: $r_n(x)= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$,

в) Пеано кўринишида: $r_n(x) = o(x^n)$

$< \theta < 1)$ ёзилиши мумкин.

Юқоридаги (6.53) формула $f(x)$ функциянинг *Маклорен форму- и* деб аталади.

Ушбу

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (6.54)$$

$< \theta < 1)$ Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Маклорен форму- ини қарайлик. Бу формуланинг қолдиқ ҳадини баҳолаймиз.

Фараз қилайлик, шундай ўзгармас M сон мавжуд бўлсинки, ар- мент x нинг $x_0 = 0$ нуқта атрофидаги қийматларида ҳамда $n \in N$ иг барча қийматларида

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M \quad (6.55)$$

гсизлик бажарилсин. У ҳолда ушбу

$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqslant M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

гсизликка эга бўламиз. x нинг ҳар бир тайин қийматида

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

мит ўринли бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда n нинг етарли тта қийматларида $r_n(x)$ етарли кичик бўлишини кўрамиз. Демак, $= 0$ нуқта атрофида $f(x)$ функцияни

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

пҳад билан алмаштириш мумкин. Натижада ушбу

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (6.56)$$

қрибий формула келиб чиқади.

6. Элементар функциялар учун Маклорен форму- аси. 1°. $f(x) = e^x$ бўлсин. Бу функция учун $f^{(n)}(x)=e^x$ ва $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = 1$ $(n = 1, 2, \dots)$. У ҳолда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

ўлиб, унинг қолдиқ ҳади эса Лагранж кўринишида қуйидагича зилади:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

Ҳар бир $x \in [-a, a]$ $(a > 0)$ да $|e^{\theta x}| < e^{a}$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|r_n(x)| < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^{a}$$

тенгсизлик келиб чиқади ва $n \to \infty$ да $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^{a}$ ифода ва демак, $r_n(x)$ ҳам нолга интилади. Натижада $f(x) = e^{x}$ функция учун қуйидаги

$$e^{x} \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

тақрибий формулага эга бўламиз. Бу формуладан, хусусан, $x = 1$ бўлганда, e сонини тақрибий ҳисоблаш имконини берадиган ушбу

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

формула ҳосил бўлади. Бу ҳолда $|r_n(1)| \leqslant \frac{3}{(n+1)!}$.

2°. $f(x) = \sin x$ бўлсин. Маълумки, бу функциянинг n-тартибли ҳосиласи учун $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ формула ўринли ((6.22) га қаранг). Равшанки, $f(0) = 0$ ва

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ агар } n \text{ — жуфт бўлса,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \text{ агар } n \text{ — тоқ бўлса.} \end{cases}$$

$f(x) = \sin x$ функциянинг Маклорен формуласи n — тоқ сон бўлганда.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

кўринишда ёзилади. Бу формуланинг қолдиқ ҳади Лагранж кўринишида қуйидагича ёзилади:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \sin\left(\theta x + n \cdot \frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

Равшанки, $\forall x \in [-a, a]$ $(a > 0)$ да

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{a^{n-2}}{(n+2)!}$$

бўлиб, $n \to \infty$ да $\frac{a^{n+2}}{(n+2)!}$ ифода ва демак, $r_n(x)$ ҳам нолга интилади. Шундай қилиб, n — тоқ сон бўлганда ушбу

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

тақрибий ҳисоблаш формуласига эгамиз.

3°. $f(x) = \cos x$ бўлсин. Бу функциянинг n-тартибли ҳосиласи учун $f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ формулага эгамиз, ((6.23) га қаранг). Равшанки, $f(0) = 1$ ва

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{агар } n \text{ — тоқ сон бўлса,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{агар } n \text{—жуфт сон бўлса} \end{cases}$$

$f(x) = \cos x$ функциянинг Маклорен формуласи қуйидагича ёзилади:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n} + r_n(x)$$

(бунда n — жуфт сон), унинг қолдиқ ҳади Лагранж кўринишида қуйидагича ёзилади:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos\left(\theta x + n\cdot\frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

Демак,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!}.$$

4°. $f(x) = \ln(1 + x)$ бўлсин. Маълумки, бу функциянинг n-тартибли ҳосиласи учун ушбу ((6.21) га қаранг)

$$f^{(n)}(x) = [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

формула ўринли. Равшанки, $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)}\cdot(n-1)!$ Шуни эътиборга олиб, берилган функциянинг Маклорен формуласини ёзамиз:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + r_n(x). \quad (6.57)$$

Бу формуланинг қолдиқ ҳади $r_n(x)$ ни баҳолашда унинг Лагранж ҳамда Коши кўринишларидан фойдаланамиз.

а) $0 \leqslant x \leqslant 1$ *бўлсин*. Бу ҳолда (6.57) формуланинг Лагранж кўринишидаги

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n\cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

қолдиқ ҳадини олиб, унинг учун қуйидаги

$$|r_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n\cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

баҳога эга бўламиз.

б) $-a \leqslant x \leqslant 0$ $(0 < a < 1)$ *бўлсин*. Бу ҳолда (6.57) формуланинг Коши кўринишидаги

$$r_n(x) = (-1)^n\cdot x^{n+1}\cdot\frac{(1-\theta_1)^n}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \quad (0 < \theta_1 < 1) \qquad (6.58)$$

қолдиқ ҳадини оламиз. (6.58) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$r_n(x) = (-1)^n \cdot \left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x} \right)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x}.$$

Ўзгарувчи x нинг $-a \leqslant x \leqslant 0$ $(0 < a < 1)$ қийматларида

$$\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x} < 1$$

тенгсизлик ўринли бўлишини ҳисобга олиб, топамиз:

$$|r_n(x)| = \left| (-1)^n \cdot \left(\frac{1-\theta_1 x}{1+\theta_1 x} \right)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x} \right| < \left| \frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x} \right| < \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Демак, $\ln(1+x)$ функция учун қуйидаги

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

тақрибий ҳисоблаш формуласи ҳосил бўлади.

5°. $f(x) = (1+x)^\alpha$ бўлсин, бунда $\alpha \in R$. Бу функциянинг n-тартибли ҳосиласи учун $f^{(n)}(x) = [(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ формулага эгамиз. Равшанки, $f\,0) = 1$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n+1)$. $f(x) = (1+x)^\alpha$ функциянинг Маклорен формуласи қуйидагича ёзилади:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x),$$

қолдиқ ҳад $r_n(x)$ эса ушбу

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1} \cdot (1-\theta)^n x^{n+1}$$

Коши кўринишида ёзилади. Энди $|x| < 1$ бўлганда

$$|r_n(x)| = \left| \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \right| \cdot (1+\theta x)^{\alpha-1} \times$$
$$\times \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n \cdot |x|^{n+1} \leqslant \left| \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \ldots \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \right| (1+\theta x)^{\alpha-1} |x|^{n+1}$$

бўлиб, $n \to \infty$ да нолга интилади.

Хусусан, $\alpha = n$ бўлса, у ҳолда $r_n(x) = 0$ бўлиб, ушбу

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n$$

Ньютон биноми формуласига келамиз.

Шундай қилиб, бу ҳолда ушбу

7-БОБ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ БАЪЗИ БИР ТАТБИҚЛАРИ

Ушбу бобда функциянинг ҳосилалари ёрдамида унинг ўзгариш характери (оралиқда ўзгармас қийматни сақлаши, ўсувчи ёки камаювчи бўлиши, максимум ва минимум қийматлари), шунингдек функция графигини текшириш (функция графигининг қавариқ ёки ботиқлиги, бурилиш нуқталарини аниқлаш) каби масалалар ўрганилади.

1-§. Функциянинг ўзгариб бориши

1. Функциянинг ўзгармас қийматни сақлаши. $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлсин.

1-теорема. *$f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функция (a, b) интервалда ўзгармас бўлиши учун шу интервалда*

$$f'(x) = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) интервалда ўзгармас, яъни $f(x) \equiv C$, $C = \text{const}$. Равшанки, бу ҳолда (a, b) интервалда $f'(x) \equiv 0$ бўлади.

Етарлилиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга ва $f'(x) = 0$. Энди (a, b) интервалда исталган x ва тайинланган x_0 нуқталарни олиб, $[x_0, x]$ ёки $[x, x_0]$ сегментни қарайлик. Бу сегментлар (a, b) интервалда бутунлай жойлашган, яъни $[x_0, x] \subset (a, b)$, $[x, x_0] \subset (a, b)$. Демак, $f(x)$ функция $[x_0, x]$ сегментда узлуксиз (функциянинг узлуксиз бўлиши, унинг (a, b) ла чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлишидан келиб чиқади) хамда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга. Лагранж теоремасига (6-бобдаги 7-теоремага қаранг) кўра x_0 билан x нуқталар орасида шундай c $(c \in (x_0\, x))$ нуқта мавжудки,

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \qquad . \tag{7.1}$$

тенглик ўринли бўлади. (a, b) да $f'(x) \equiv 0$ бўлганидан $f'(c) = 0$ бўлиб, (7.1) тенгликдан эса $f(x) = f(x_0)$ тенглик келиб чиқади. Агар c нуқта (x, x_0) интервалдан олинган бўлса ҳам $f'(c) = 0$ дан $f(x) = f(x_0)$ келиб чиқади. Энди $C = f(x_0)$ десак, (a, b) интервалда $f(x)$ функция учун $f(x) = C$, $C = \text{const}$ муносабатга эгамиз. Бу $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалда ўзгармас эканини англатади. Теорема исбот бўлди.

1-натижа. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, шу интервалда

$$f'(x) \equiv g'(x)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ билан $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади:

$$f(x) \equiv g(x) + C, \ C = \text{const}.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$F(x) = f(x) - g(x) \tag{7.2}$$

деб, (a, b) да

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) \equiv 0$$

бўлишини топамиз. Исбот этилган теоремага кўра $F(x) \equiv C$, $C = \mathrm{const}$ бўлади. (7.2) муносабатдан $f(x) \equiv g(x) + C$ экани келиб чиқади.

2. **Функциянинг монотон бўлиши.** Биз 4-бобда функциянинг монотонлиги, яъни ўсувчи (қатъий ўсувчи), камаювчи (қатъий камаювчи) бўлиши таърифларини келтирган эдик. Энди функция ҳосиласи ёрдамида функциянинг монотонлигини аниқлаш мумкинлигини кўрсатамиз.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлсин.

2-теорема. *$f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функция шу интервалда ўсувчи (камаювчи) бўлиши учун (a, b) интервалда*

$$f'(x) \geqslant 0 \quad (f'(x) \leqslant 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, у (a, b) интервалда ўсувчи (камаювчи). $\forall x \in (a, b)$ нуқтани олиб, у билан бирга $x + \Delta x \in (a, b)$ нуқтани ҳам қараймиз. У ҳолда

$$\Delta x > 0 \text{ да } f(x) \leqslant f(x + \Delta x) \quad (f(x) \geqslant f(x + \Delta x)),$$
$$\Delta x < 0 \text{ да эса } f(x) \geqslant f(x + \Delta x) \quad (f(x) \leqslant f(x + \Delta x))$$

муносабатлар ўринли бўлади ва бу муносабатлардан ҳар доим

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0 \quad \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leqslant 0\right) \tag{7.3}$$

тенгсизлик келиб чиқади. $f(x)$ функция (a, b) да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлгани учун ушбу

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд ва чекли бўлиб,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \tag{7.4}$$

ўринли. (7.3) ва (7.4) муносабатлардан (4-бобнинг 4-§ ига қаранг) (a, b) интервалнинг барча нуқталарида

$$f'(x) \geqslant 0 \quad (f'(x) \leqslant 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлишини топамиз.

Етарлилиги. Шартга кўра $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, шу интервалда $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ тенгсизлик ўринли.

Энди (a, b) интервалда ихтиёрий $x (x \in (a, b))$ ва $x + \Delta x ((x + \Delta x) \in (a, b);\ \Delta x > 0)$ нуқталарни олайлик. Равшанки, бу ҳолда $[x, x + \Delta x] \subset (a, b)$ бўлиб, $[x, x + \Delta x]$ сегментда $f(x)$ функция Лагранж теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Лагранж теоремасига (6- бобдаги 7- теоремага қаранг) мувофиқ x ва $x + \Delta x$ нуқталар орасида шундай $c (x < c < x + \Delta x)$ нуқта мавжудки, ушбу

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c) \cdot \Delta x \qquad (7.5)$$

тенглик ўринли бўлади. (7.5) тенгликдан $\Delta x > 0$ ва $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ бўлгани учун

$$f(x + \Delta x) - f(x) \geqslant 0 \quad (f(x + \Delta x) - f(x) \leqslant 0)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $x < x + \Delta x$ бўлганда $f(x) \leqslant f(x + \Delta x)$ $(x < x + \Delta x \Rightarrow f(x) \geqslant f(x + \Delta x))$ тенгсизлик ҳам ўринли. Бу $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалда ўсувчи (камаювчи) бўлишини ифодалайди. Теорема исбот бўлди.

2-натижа. Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, шу интервалда $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция (a, b) интервалда қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (7.5) тенгликдан $\Delta x > 0$ ва $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ бўлишини эътиборга олиб, қуйидагини топамиз:

$$f(x + \Delta x) - f(x) > 0 \quad (f(x + \Delta x) - f(x) < 0).$$

Демак, бу ҳолда $x < x + \Delta x$ бўлганда $f(x) < f(x + \Delta x)$ $(x < x + \Delta x \Rightarrow f(x) > f(x + \Delta x))$ тенгсизлик ҳам ўринли. Бу $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалда қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) эканини кўрсатади.

1-эслатма. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу функциянинг (a, b) да қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) бўлишидан, $f'(x)$ нинг $\forall x \in (a, b)$ да мусбат (манфий) бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x) = x^3$ функцияни қарайлик. Бу функциянинг R да қатъий ўсувчи бўлиши 4- бобнинг 1- § да кўрсатилган эди. Бу функция учун $f'(x) = 3x^3$ бўлиб, $x = 0$ нуқтада $f'(0) = 0$.

Мисол. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ бўлсин. Бу функция учун $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ бўлади. Равшанки, $|x| < 1$ бўлганда $f'(x) < 0$, $|x| > 1$ бўлганда $f'(x) > 0$.

Демак, берилган $f(x)$ функция $(-\infty, -1)$ интервалда қатъий ўсувчи, $(-1; +1)$ интервалда қатъий камаювчи ва ниҳоят, $(1, +\infty)$ интервалда қатъий ўсувчи бўлади.

Шундай қилиб, (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлган $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалда монотон бўлиши билан шу интервалда функция ҳосиласи $f'(x)$ нинг ишораси орасида қуйидагича боғланиш мавжуд: (a, b) интервалда

$f'(x) \geqslant 0 \Rightarrow f(x)$ функция ўсувчи $\Rightarrow f'(x) \geqslant 0$,
$f'(x) \leqslant 0 \Rightarrow f(x)$ функция камаювчи $\Rightarrow f'(x) \leqslant 0$,
$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ функция қатъий ўсувчи $\Rightarrow f'(x) \geqslant 0$,
$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ функция қатъий камаювчи $\Rightarrow f'(x) \leqslant 0$.

2-§. Функциянинг экстремум қийматлари

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ бўлсин.

1-таъриф. Агар $x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг шундай атрофи

$$U_\delta(x_0)\{x: x \in R,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta;\ \delta > 0\} \subset (a, b)$$

мавжуд бўлсаки, $\forall\, x \in U_\delta(x_0)$ учун

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0))$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада *максимумга* (*минимумга*) эга дейилади, $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ функциянинг $U_\delta(x_0)$ даги *максимуми* (*минимуми*) дейилади.

2-таъриф. Агар $x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг шундай атрофи $U_\delta(x_0) \subset$ $\subset (a, b)$ мавжуд бўлсаки, $\forall\, x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \dot{U}_\delta(x_0)$ учун

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 *нуқтада қатъий максимумга* (*қатъий минимумга*) эга дейилади, $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ функциянинг $U_\delta(x_0)$ даги *қатъий максимуми* (*минимуми*) дейилади.

Юқоридаги таърифлардаги x_0 нуқта $f(x)$ функцияга мос равишда максимум (минимум), қатъий максимум (қатъий минимум) қиймат берадиган нуқта деб аталади.

Функциянинг $U_\delta(x_0)$ даги максимум (минимум) қийматлари

$$f(x) = \max_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \quad (f(x_0) = \min_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\})$$

каби белгиланади. Бунда max (min) лотинча maximum (minimum) сўзидан олинган бўлиб, энг катта (энг кичик) деган маънони англатади.

Функциянинг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг экстремуми деб аталади.

Мисол. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ бўлсин. Бу функция $x = 0$ нуқтада максимумга эришади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall\, x \in U_\delta(0) \subset (-1, +1)\ (\delta > 0)$ учун $f(x) < f(0)$, яъни

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} < f(0) = 1$$

бўлади.

2-эслатма. Юқоридаги таърифларда $f(x)$ функциянинг $x_0 \in (a, b)$ даги $f(x_0)$ қиймати унинг шу нуқта $U_\delta(x_0)$ атрофидан олинган нуқталардаги қийматлари билангина таққосланди. Шунинг учун функциянинг экстремумини (максимум ёки минимумини) локал экстремум (локал максимум ёки локал минимум) деб юритилади.

3-эслатма. $f(x)$ функция (a, b) интервалда бир қанча максимум ва минимумларга эга бўлиши мумкин.

Масалан, $f(x) = \sin x$ функцияни $(0, 4\pi)$ интервалда қарайлик. Бу функция $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтада максимум, $x = \frac{3\pi}{2}$ нуқтада минимум, $\frac{5}{2}\pi$

нуқтада максимум, $\frac{7}{2}\pi$ нуқтада минимумга эга эканини аниқлаш қийин эмас. Демак, бу функция $(0, 4\pi)$ интервалда иккита максимум, иккита минимумга эга бўлиб, максимум ва минимумлар навбатма-навбат келади.

Функция ҳосилалари ёрдамида унинг экстремумлари ҳамда функцияга экстремум қиймат берадиган нуқталар топилади.

1. **Экстремумнинг зарурий шарти.** $f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада максимум (минимум) га эришсин. Демак, таърифга кўра x_0 нуқтанинг шундай $U_\delta(x_0) \subset (a, b)$ атрофи топиладики, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ да $f(x_0) \geqslant f(x)$ $(f(x_0) \leqslant f(x))$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи ҳақида, умуман айтганда, қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) $f'(x_0)$ мавжуд ва чекли,

2) $f'(x_0)$ мавжуд ва чексиз.

3) ҳосила мавжуд эмас.

Биринчи ҳолда Ферма теоремасига кўра $f'(x_0) = 0$ бўлади. Натижада қуйидаги муҳим теоремага келамиз.

3-теорема. *Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб, бу нуқтада $f(x)$ функция экстремумга эришса, у ҳолда*

$$f'(x_0) = 0$$

бўлади.

Бироқ $f(x)$ функция учун бирор $x^* \in (a, b)$ нуқтада чекли ҳосила мавжуд ва $f'(x^*) = 0$ бўлишидан унинг x^* нуқтада экстремумга эга бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x) = x^3$ функция учун $f'(x) = 3x^2$ ва $x = 0$ нуқтада $f'(0) = 0$ бўлса ҳам у $x = 0$ нуқтада экстремумга эга эмас (бу функция қатъий ўсувчи эканлиги бизга маълум).

Демак, юқоридаги теорема функция экстремумга эришишининг зарурий шартини ифодалайди.

Одатда функция ҳосиласини нолга айлантирадиган нуқталар функциянинг *стационар* (*турғун, критик*) *нуқталари* деб ҳам аталади.

Иккинчи ҳолнинг эса бўлиши мумкин эмаслигини кўрсатайлик. Агарда $f'(x_0) = +\infty$ $(-\infty)$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг атрофида ўсувчи (камаювчи) бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

муносабатдан $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, $0 < x - x_0 < \delta$ бўлган x лар учун $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{1}{\varepsilon}$, яъни $f(x) > f(x_0)$ тенгсизлик келиб чиқади. Худди шунингдек,

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

тдан $-\delta < x - x_0 < 0$ бўлган x лар учун $f(x) < f(x_0)$
ик келиб чиқади.

дай қилиб, бу ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга
мумкин эмас экан.

учинчи ҳол ҳақида.

$f(x) = |x|$ функциянинг $x = 0$ нуқтада (6-боб, 1-§) ҳосила-
уд эмаслигини кўрган эдик. Бу функция $x = 0$ нуқтада ми-
эга бўлиши равшандир (41-чизмага қаранг). Демак, функ-
илага эга бўлмаган нуқталарда ҳам экстремумга эришиши

дай қилиб, $f(x)$ функцияга экстремум қиймат берадиган
ни:
циянинг стационар нуқталари;
цияниг ҳосиласи мавжуд бўлмаган нуқталари орасидан
ерак экан. Одатда бундай нуқта функция экстремумга *си-*
н нуқта деб аталади.

кстремумнинг етарли шартлари. Энди функция-
стремумга эга бўлишининг етарли шартларини қараймиз.
гидек қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$\dot{U}_\delta^-(x_0) = \{x\colon x \in R,\ x_0 - \delta < x < x_0\} \ (\delta > 0),$$

$$\dot{U}_\delta^+(x_0) = \{x\colon x \in R,\ x_0 < x < x_0 + \delta\} \ (\delta > 0).$$

Функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, унинг

$$\dot{U}_\delta(x_0) = \{x\colon x \in R,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\ x \neq x_0\}$$

а чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.
гар

$$\forall\, x \in \dot{U}_\delta^-(x_0) \text{ учун } f'(x) > 0,$$

$$\forall\, x \in \dot{U}_\delta^+(x_0) \text{ учун } f'(x) < 0$$

нклар ўринли бўлса, яъни $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтадан ўтишда
расини «+» дан «—» га ўзгартирса, у ҳолда $f(x)$ функция
ада максимумга эга бўлади.

қатан ҳам, $\forall\, x \in \dot{U}_\delta^-(x_0)$ учун $f'(x) > 0$ бўлишидан $f(x)$
нинг $\dot{U}_\delta^-(x_0)$ да қатъий ўсувчилиги келиб чиқади. Сўнгра
кциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлишидан $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$
келиб чиқади. Демак, $\forall\, x \in \dot{U}_\delta^-(x_0)$ учун

$$f(x) < f(x_0) \tag{7.6}$$

нк ўринли бўлади. $\forall\, x \in \dot{U}_\delta^+(x_0)$ учун $f'(x) < 0$ бў-
$f(x)$ функциянинг $\dot{U}_\delta^+(x_0)$ да қатъий камаювчилиги келиб

чиқади. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлигидан $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ тенглик келиб чиқади.

Демак, $\forall\ x \in \dot{U}_\delta^+\ (x_0)$ учун яна (7.6) тенгсизлик бажарилади. Бундан $\forall\ x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ учун $f(x) < f\ (x_0)$ бўлиб, у $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга бўлишини билдиради.

б) Агар

$$\forall\ x \in \dot{U}_\delta^-\ (x_0)\ \text{учун}\ f'\ (x) < 0,$$

$$\forall\ x \in \dot{U}_\delta^+\ (x_0)\ \text{учун}\ f'\ (x) > 0$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, яъни $f'\ (x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартирса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлади.

Ҳақиқатан, $\forall\ x \in \dot{U}_\delta^-\ (x_0)$ учун $f'\ (x) < 0$ бўлишидан $f(x)$ функциянинг $\dot{U}_\delta^-\ (x_0)$ да қатъий камаювчилиги, $\forall\ x \in \dot{U}_\delta^+\ (x_0)$ учун $f'\ (x) > 0$ бўлишидан эса $f(x)$ функциянинг $\dot{U}_\delta^+\ (x_0)$ да қатъий ўсувчилиги келиб чиқади. Сўнгра $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз эканлигини эътиборга олиб, $\forall\ x \in \dot{U}_\delta(x)$ учун $f\ (x) > f\ (x_0)$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса $f\ (x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлишини билдиради.

в) Агар

$$\forall\ x \in \dot{U}_\delta^-\ (x_0)\ \text{учун}\ f'\ (x) > 0,$$

$$\forall\ x \in \dot{U}_\delta^+\ (x_0)\ \text{учун}\ f'\ (x) > 0$$

(ёки

$$\forall\ x \in \dot{U}_\delta^-\ (x_0)\ \text{учун}\ f'\ (x) < 0,$$

$$\forall\ x \in \dot{U}_\delta^+\ (x_0)\ \text{учун}\ f'\ (x) < 0)$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, яъни $f'\ (x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда $f\ (x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди, $f\ (x)$ функция x_0 нуқтанинг $\dot{U}_\delta(x_0)$ атрофида қатъий ўсувчи (ёки қатъий камаювчи) бўлади.

Шундай қилиб экстремумга синалаётган нуқтани ўтишда функция ҳосиласи ишорасининг ўзгариши унинг экстремумга эришишининг етарли шартидир.

4-эслатма. Юқоридаги мулоҳазаларда $f\ (x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши муҳим. Масалан, ушбу

$$f\ (x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар}\ x \neq 0\ \text{бўлса}, \\ 1, & \text{агар}\ x = 0\ \text{бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция учун $f'\ (x) = 2x$ бўлиб, ҳосила $x = 0$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартирса ҳам, берилган функция $x = 0$ нуқтада минимумга эга эмас. Бунга сабаб, функциянинг $x = 0$ нуқтада узлуксиз эмаслигидир.

Мисол. $f(x) = (x+3)^2 \sqrt[3]{(x-1)^2}$ бўлсин. Бу функциянинг экстремумини топинг.

Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$f'(x) = \frac{8x(x+3)}{3\sqrt[3]{x-1}}. \qquad (7.7)$$

Равшанки, ҳосила $x = 0$, $x = -3$ нуқталарда нолга айланади, $x = 1$ нуқтада эса чекли ҳосила мавжуд эмас. Демак, функцияга экстремум берадиган нуқталарни $x = 0$, $x = -3$, $x = 1$ нуқталар орасидан излаш керак.

Аввал $x = 0$ нуқтани олайлик. Бу нуқтанинг $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ атрофини олиб, ҳосила учун (7.7) ифодани эътиборга олсак,

$$\forall\, x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ учун } f'(x) > 0,$$

$$\forall\, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ учун } f'(x) < 0$$

бўлишини топамиз. Демак, $f'(x)$ ҳосила $x = 0$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «+» дан «—» га ўзгартиради. Равшанки, берилган функция $x = 0$ нуқтада узлуксиз. Демак, берилган функция $x = 0$ нуқтада максимумга эга ва унинг максимум қиймати $f(0) = 9$.

Энди $x = -3$ нуқтани қарайлик. Бу нуқтанинг $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ атрофини олиб, (7.7) дан фойдалансак,

$$\forall\, x \in \left(-\frac{7}{2}, -3\right) \text{ учун } f'(x) < 0,$$

$$\forall\, \in x \left(-3, -\frac{5}{2}\right) \text{ учун } f'(x) > 0$$

бўлишини топамиз. Демак, $f'(x)$ ҳосила $x = -3$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартиради. Берилган функция $x = -3$ нуқтада узлуксиз, демак, у $x = -3$ нуқтада минимумга эга ва унинг минимум қиймати $f(-3) = 0$. Ниҳоят, $x = 1$ нуқтада берилган функция минимумга эга бўлиши юқоридагидек кўрсатилади.

3. **Функция экстремумини топишда унинг юқори тартибли ҳосилаларидан фойдаланиш.** Юқорида келтирилган экстремумнинг етарли шарти синалаётган нуқтанинг ўнг ва чап томонидаги нуқталарда функция ҳосиласи $f'(x)$ нинг ишорасини аниқлаш билан ифодаланади. Кўпинча, x_0 нуқтанинг атрофида $f'(x)$ нинг ишорасини аниқлаш қийин бўлади. Қаралаётган $f(x)$ функция x_0 нуқтада юқори тартибли ҳосилаларга эга бўлса, ҳосилаларнинг x_0 нуқтадаги қийматларининг ишорасига қараб функциянинг экстремумини текшириш мумкин.

$f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f', f'', \dots, f^{(n)}$ хосилаларга эга бўлиб, бирор $n \geqslant 2$ сон учун

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \qquad (7.8)$$

бўлсин.

а) Агар n — жуфт сон, яъни $n = 2m$ $(m \in N)$ бўлиб,

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) < 0$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга,

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) > 0$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция учун ушбу

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

Тейлор формуласидан юқоридаги (7.8) шартларни эътиборга олиб топамиз:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n,$$

бунда $x \to x_0$ да $\alpha(x) \to 0$. Кейинги тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (7.$$

Энди $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ва $x \to x_0$ да $\alpha(x) \to 0$ бўлгани сабабли x нинг га етарли яқин қийматларида ($x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ лар учун) $f^{(n)}(x_0) + \alpha($ нинг ишораси $f^{(n)}(x_0)$ нинг ишораси каби бўлади.

Равшанки, $n = 2m$ бўлганда $(x - x_0)^n = (x - x_0)^{2m} > 0$ бўл $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ да $f(x) - f(x_0)$ айирманинг ишораси $f^{(n)}(x_0)$ нинг ишора билан бир хил бўлади. Демак, $f^{(n)}(x_0) < 0$ бўлганда $\forall x \in U_\delta ($ учун $f(x) - f(x_0) < 0$, яъни $f(x) < f(x_0)$ бўлиб, $f(x)$ функция нуқтада максимумга эга бўлади. $f^{(n)}(x_0) > 0$ бўлганда эса $\forall x \in U_\delta$ учун $f(x) - f(x_0) > 0$, яъни $f(x) > f(x_0)$ бўлиб, $f(x)$ функция нуқтада минимумга эга бўлади.

б) Агар n — тоқ сон, яъни $n = 2m + 1$ $(m \in N)$ бўлса, функция x_0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди. Ҳақиқатан,

$$\forall\, x \in \dot{U}_\delta^{+}(x_0) \text{ учун } (x - x_0)^n > 0,$$

$$\forall\, x \in \dot{U}_\delta^{-}(x_0) \text{ учун } (x - x_0)^n < 0$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб, x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида $(x-x_0)^n$ нинг ишораси сақланмайди. Бу ҳолда (7.9) дан кўринадики, $f^{(n)}(x_0)$ нинг ишораси ҳар қандай бўлганда ҳам $f(x)-f(x_0)$ айирманинг ишораси ўзгаради. Бу эса x_0 нуқтада экстремум йўқлигини англатади.

Мисол. $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ функцияни экстремумга текширинг.

Бу функция учун $f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$ бўлиб, у $x=0$ нуқтада нолга айланади. Демак, $x=0$ стационар нуқта. Берилган функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини топиб, уларнинг $x=0$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x,\ f''(0)=0,$$
$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x,\ f'''(0)=0,$$
$$f^{(\mathrm{IV})}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x,\ f^{(\mathrm{IV})}(0)=4.$$

Жуфт тартибли ҳосила $x=0$ нуқтада нолдан фарқли бўлиб, у мусбат бўлгани учун берилган функция $x=0$ нуқтада минимумга эга бўлади. Шу нуқтада функция қийматини ҳисоблаймиз: $f(0)=4$.

Юқорида келтирилган қоидадан, хусусан, $n=2$ бўлганда қуйидаги натижа келиб чиқади.

3-натижа. Агар x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси бўлиб, $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли $f''(x_0)\neq 0$ ҳосилага эга бўлса, $f''(x_0)<0$ бўлганда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга, $f''(x_0)>$ >0 бўлганда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга бўлади.

4. **Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари.** Биз аввалги бандларда функциянинг экстремумларини ўргандик ва функция бирор оралиқда бир нечта максимум ва минимумларга эга бўлиши мумкинлигини айтиб ўтдик.

Энди функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш масаласини қараймиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра (5-бобдаги 8-теоремага қаранг) функциянинг $[a, b]$ да энг катта ҳамда энг кичик қийматлари мавжуд бўлади ва бу қийматларга $[a, b]$ сегментнинг нуқталарида эришилади. Функциянинг энг катта қиймати қуйидагича топилади:

1) $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалдаги максимум қийматлари топилади. Функциянинг ҳамма максимум қийматларидан иборат тўплам $\{\max f(x)\}$ бўлсин.

2) Функциянинг $[a, b]$ сегментнинг чегараларидаги, яъни $x=a$, $x=b$ нуқталардаги $f(a)$ ва $f(b)$ қийматлари ҳисобланади. Сўнгра $\{\max f(x)\}$ тўпламнинг барча элементлари билан $f(a)$ ва $f(b)$ лар таққосланади. Бу қийматлар ичида энг каттаси $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги энг катта қиймати бўлади.

Шунга ўхшаш функциянинг энг кичик қиймати топилади:

1') $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалдаги барча минимум қийматлари топилиб, улардан $\{\min f(x)\}$ тўплам тузилади.

2') $[a, b]$ сегментнинг чегаралари $x = a$, $x = b$ нуқталарда $f(x)$ функциянинг $f(a)$, $f(b)$ қийматлари ҳисобланади.

$\{\min f(x)\}$ тўпламнинг барча элементлари ҳамда $f(a)$, $f(b)$ қийматлари ичида энг кичиги $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги энг кичик қиймати бўлади.

Мисол. Ушбу $f(x) = \sin(x^2)$ функциянинг $\left[-\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{5\pi}\right]$ сегментда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Функция ҳосиласини нолга тенглаб, яъни

$$f'(x) = 2x\cos(x^2) = 0$$

тенгламани қараб, ундан $x = 0$, $x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ лар стационар нуқта эканини топамиз. Энди берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ёзамиз:

$$f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2).$$

Бу ҳосиланинг стационар нуқталардаги қийматларини топамиз:

$$f''(0) = 2 > 0,\ f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -2\pi < 0,$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -2\pi < 0.$$

Бундан $f(x) = \sin(x^2)$ функция $x = 0$ нуқтада минимумга, $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ва $x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ нуқталарда эса максимумга эришиши келиб чиқади.

Функциянинг стационар нуқталардаги қийматлари

$$f(0) = 0,\ f\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1,\ f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1$$

бўлиб, унинг $\left[-\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{5\pi}\right]$ сегментнинг чегараларидаги қийматлари

$$f(-\sqrt{\pi}) = 0,\ f\left(\frac{1}{2}\sqrt{5\pi}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

бўлади. Бу қийматларни таққослаб, $f(x) = \sin(x^2)$ функциянинг $\left[-\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{5\pi}\right]$ сегментдаги энг катта қиймати 1 га, энг кичик қиймати эса $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг бўлишини топамиз.

3-§. Функциянинг қавариқлиги ва ботиқлиги

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, бу интервалдан олинган $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$ нуқталар учун $x_1 < x_2$ бўлсин. Равшанки, $(x_1, x_2) \subset (a, b)$.

Энди $f(x)$ функция графигида $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ нуқталарни олайлик. Маълумки, бу $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, (f(x_2))$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қуйидаги

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

кўринишга эга бўлади. Уни

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

каби ёзиб олиб, қулайлик учун бу тенгламанинг ўнг томонини $l(x)$ орқали белгилайлик:

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \qquad (7.10)$$

Шу белгилашга кўра $y = l(x)$ тенглама $A(x_1, f(x_1))$ ва $B(x_2, f(x_2))$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқни ифодалайди. (7.10) муносабатдан $l(x_1) = f(x_1)$, $l(x_2) = f(x_2)$ тенгликлар келиб чиқади.

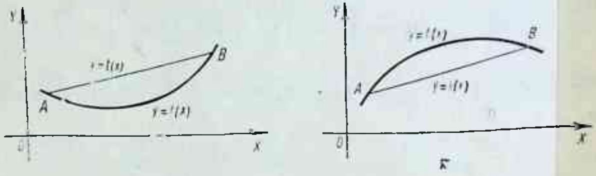
2-таъриф. Агар ҳар қандай $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ олинганда ҳам $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун

$$f(x) \leqslant l(x) \quad (f(x) < l(x)) \qquad (7.11)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция (a, b) интервалда *ботиқ (қатъий ботиқ) функция* деб аталади.

Ботиқ функция графиги (48-*а* чизма) A ва B нуқталардан ўтувчи $l(x)$ ватардан пастда жойлашган бўлади.

3-таъриф. Агар ҳар қандай $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ олинганда ҳам $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун



48-чизма.

$$f(x) \geqslant l(x) \quad (f(x) > l(x)) \qquad (7.12)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция (a, b) интервалда *қавариқ (қатъий қавариқ) функция* деб аталади.

Қавариқ функция графиги (48-*б* чизма) A ва B нуқталардан ўтувчи $l(x)$ ватардан юқорида жойлашган бўлади.

Агар

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \ (\alpha_1 \geqslant 0, \ \alpha_2 \geqslant 0)$$

деб белгиласак, унда

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = x$$

тенгликлар ўринли бўлиб, (7.10) тенглик қуйидагича ифодаланади:

$$l\ (x) = \alpha_1\ f\ (x_1) + \alpha_2 \cdot f\ (x_2).$$

Натижада (7.11) ва (7.12) муносабатлар ушбу

$$f\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1\ f\ (x_1) + \alpha_2\ f\ (x_2) \ \ (f\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < < \alpha_1\ f\ (x_1) + \alpha_2\ f\ (x_2)), \tag{7.13}$$

$$f\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1\ f\ (x_1) + \alpha_2\ f\ (x_2) \ \ (f\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > > \alpha_1\ f\ (x_1) + \alpha_2\ f\ (x_2)) \tag{7.14}$$

кўринишга келади.

Шундай қилиб, (a, b) да ботиқ функция учун $\forall x_1 \in (a, b)$, $\forall x_2 \in (a, b)$ лар учун

$$f\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1\ f\ (x_1) + \alpha_2 f\ (x_2)$$

тенгсизлик бажарилади; бу ерда $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$ ва $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Бу хосса ҳам функция ботиқлиги таърифи сифатида олиниши мумкин. Демак, функциянинг ботиқлиги (қатъий ботиқлиги) (7.13) тенгсизлик билан ҳамда қавариқлиги (қатъий қавариқлиги) эса (7.14) тенгсизлик билан таърифланиши мумкин.

Функциянинг ҳосиласи ёрдамида унинг ботиқлиги ҳамда қавариқлигини текшириш мумкин.

$f\ (x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, бу интервалда чекли $f'\ (x)$ ҳосилага эга бўлсин.

4-теорема. *$f\ (x)$ функция (a, b) интервалда ботиқ (қатъий ботиқ) бўлиши учун унинг $f'\ (x)$ ҳосиласининг (a, b) да ўсувчи (қатъий ўсувчи) бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. $f\ (x)$ функция (a, b) да ботиқ бўлсин. Демак, $\forall x_1 \in (a, b)$, $\forall x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ бўлганда $\forall x \in (x_1, x_2)$ лар учун

$$f\ (x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\ f\ (x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\ f\ (x_2)$$

бўлади. Бундан

$$(x_2 - x)\ f\ (x_1) + (x_1 - x_2)\ f\ (x) + (x - x_1)\ f\ (x_2) \geqslant 0$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгсизликда $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$ деб қуйидагини топамиз:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{7.15}$$

Шу (7.15) тенгсизликда аввал $x \to x_1$ да, сўнг $x \to x_2$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geqslant \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

бўлиб, натижада қуйидаги

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2)$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Демак, $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. Шундай қилиб, $x_1 < x_2$ бўлганда $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$ бўлади. Бу эса (a, b) интервалда $f'(x)$ нинг ўсувчи эканини билдиради. Энди $f(x)$ функция (a, b) интервалда қатъий ботиқ бўлсин. Бу ҳолда (7.15) тенгсизлик ушбу

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{7.16}$$

кўринишда бўлади.

Лагранж теоремасига (6-бобдаги 7-теоремага қаранг) кўра

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad x_1 < \xi_1 < x,$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2), \quad x < \xi_2 < x_2$$

бўлади. Сўнгра

$$x_1 < \xi_1 \text{ бўлганда } f'(x_1) \leqslant f'(\xi_1),$$

$$\xi_2 < x_2 \text{ бўлганда } f'(\xi_2) \leqslant f'(x_2)$$

тенгсизлик ўринли бўлишини ҳамда (7.16) тенгсизликни эътиборга олиб, топамиз:

$$f'(x_2) \geqslant f'(\xi_2) > f'(\xi_1) \geqslant f'(x_1).$$

Демак, $f'(x_1) < f'(x_2)$. Шундай қилиб, $x_1 < x_2$ бўлганда $f'(x_1) < f'(x_2)$ бўлади. Бу $f(x)$ функциянинг қатъий ўсувчилигини англатади.

Етарлилиги. $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, у ўсувчи (қатъий ўсувчи) бўлсин. Демак, $\forall x_1 \in (a, b)$, $\forall x_2 \in (a, b)$ учун $x_1 < x_2$ бўлганда $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$ $(f'(x_1) < f'(x_2))$ тенгсизлик ўринли. Яна Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \quad (x_1 < \xi_1 < x), \tag{7.17}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2) \quad (x < \xi_2 < x_2), \tag{7.18}$$

бунда

$$x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2. \tag{7.19}$$

Демак, $\xi_1 < \xi_2$ бўлганда $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$ $(f'(\xi_1) > f'(\xi_2))$ тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда (7.17) ва (7.18) муносабатлардан

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad \left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right)$$

бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, $\forall x_1 \in (a, b)$, $\forall x_2 \in (a, b)$ ва $x_1 < x_2$ бўлганда (бу ҳолда (7.19) га кўра $\xi_1 < \xi_2$ бўлади)

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad (x_1 < x < x_2),$$

$$\left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right) \quad (x_1 < x < x_2)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Натижада (7.10), (7.11) ва (7.15) муносабатларни эътиборга олиб, $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалда ботиқ (қатъий ботиқ) эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Теорема исбот бўлди.

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема ҳам исботланади.

5-теорема. *$f(x)$ функция (a, b) интервалда қавариқ (қатъий қавариқ) бўлиши учун унинг $f'(x)$ ҳосиласининг (a, b) да камаювчи (қатъий камаювчи) бўлиши зарур ва етарли.*

Функциянинг ботиқлиги ҳамда қавариқлигини унинг иккинчи тартибли ҳосиласидан (агар у мавжуд бўлса) фойдаланиб текшириш мумкин.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, шу интервалда у иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бундан ташқари, (a, b) интервалнинг ҳар қандай (α, β) $((\alpha, \beta) \subset (a, b),\ \alpha \neq \beta)$ қисмида $f''(x)$ айнан нолга тенг бўлмасин.

6-теорема. *$f(x)$ функция (a, b) интервалда ботиқ (қавариқ) бўлиши учун шу интервалда*

$$f''(x) \geqslant 0 \quad (f''(x) \leqslant 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция (a, b) интервалда ботиқ (қавариқ) бўлсин. У ҳолда юқорида келтирилган теоремаларга кўра, функциянинг $f'(x)$ ҳосиласи (a, b) интервалда ўсувчи (камаювчи) бўлади. Функциянинг монотон бўлиши ҳақидаги 2-теоремага кўра $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$ бўлишини топамиз.

Етарлилиги. Энди (a, b) интервалда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи учун ушбу $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$ тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда яна функциянинг монотонлиги ҳақидаги 2-теоремага кўра $f'(x)$ ҳосила (a, b) интервалда ўсувчи (камаювчи) бўлади. Бундан 4-теоремага (5-теоремага) асосан $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалда ботиқ (қавариқ) бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$ бўлсин. Бу функция учун $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ бўлиб, $f''(x) < 0$ бўлади. Демак, $f(x) = \ln x$ функция $(0, +\infty)$ интервалда қатъий қавариқдир. Шунга ўхшаш, $f(x) = -\ln x$, $x > 0$ функция $(0, +\infty)$ интервалда ботиқ бўлади. Ушбу $f(x) = \ln x$ функциянинг қавариқлигидан битта тенгсизликни келтириб чиқарамиз. Функциянинг ботиқлиги таърифидан $x_1 \in (0, +\infty)$, x $+\infty)$ лар учун $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ бўлганда қуйидаги

$$\alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 \leqslant \ln\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Кейинги тенгсизликни қуйидаги

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

кўринишда ёзиш мумкин. Хусусий ҳолда, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ бўлса, дан бизга маълум бўлган

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leqslant \frac{x_1 + x_2}{2}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

2. **Функциянинг эгилиш нуқталари.** Функция ҳоси ёрдамида унинг эгилиш нуқталарини топиш мумкин. $f(x)$ функ x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида аниқланган бўлсин.

4-таъриф. Агар $f(x)$ функция $U_\delta^-(x_0)$ оралиқда ботиқ (қавар бўлиб, $U_\delta^+(x_0)$ оралиқда эса қавариқ (ботиқ) бўлса, у ҳолда x_0 та *функциянинг (функция графигининг) эгилиш нуқтаси* деб лади.

$f(x)$ функция $U_\delta(x_0)$ да иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага бўлсин. Агар

$$\forall\, x \in U_\delta^-(x_0) \text{ учун } f''(x) \geqslant 0 \quad (f''(x) \leqslant 0),$$

$$\forall\, x \in U_\delta^+(x_0) \text{ учун } f''(x) \leqslant 0 \quad (f''(x) \geqslant 0)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $U_\delta^-(x_0)$ да $f'(x)$ ўсувчи (ювчи), $U_\delta^+(x_0)$ да $f'(x)$ камаювчи (ўсувчи) бўлиб, $f'(x)$ функция x тада экстремумга эришади. У ҳолда x_0 нуқтада $f''(x_0) = 0$ бў

Демак, $f(x)$ функциянинг эгилиш нуқтасида иккинчи тар ҳосила $f''(x)$ нолга тенг бўлади.

Мисол. $f(x) = e^{-x^2}$ бўлсин. Бу функциянинг иккинчи тар ҳосиласи

$$f''(x) = 2e^{-x^2}\ (2x^2 - 1)$$

бўлиб, у фақат $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ нуқталарда нолга айланади:

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,\ f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Равшанки, бу функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ ва $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ интервалда $f''(x) > 0$; $\Big[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big]$ ментда эса $f''(x) \leqslant 0$. Демак, $f(x) = e^{-x^2}$ функция $\Big(-\infty,$

интервалда қавариқ, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ сегментда ботиқ ва $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ интервалда яна қавариқ бўлади. Функция графигининг $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ нуқталари унинг эгилиш нуқталаридир.

3. **Функция графигининг асимптоталари.** $f(x)$ функция $a \in R$ нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин.

5-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x \to a+0} f(x), \ \lim_{x \to a-0} f(x)$$

лимитлардан бири ёки иккаласи чексиз бўлса, у ҳолда $x = a$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг *вертикал асимптотаси* деб аталади.

Масалан, $y = \frac{1}{x}$ функция графиги учун $x = 0$ тўғри чизиқ вертикал асимптота бўлади.

Энди $y = f(x)$ функция (a, ∞) $((-\infty, a))$ оралиқда аниқланган бўлсин.

6-таъриф. Агар шундай ўзгармас k ва b сонлар мавжуд бўлсаки, $x \to +\infty$ да $f(x)$ функция ушбу

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

кўринишда ифодаланса (бунда $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$), у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг *оғма асимптотаси* деб аталади.

Масалан,

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$$

бўлсин. Бу функцияни

$$f(x) = x - 4 + \frac{2}{x + 1}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Демак, $x \to +\infty$ да $\alpha(x) = \frac{2}{x+1} \to 0$ бўлиб, берилган функция $f(x) = x - 4 + \alpha(x)$ кўринишда ифодаланади. Бундан эса $y = x - 4$ тўғри чизиқ функция графигининг оғма асимптотаси экани келиб чиқади.

7-теорема. *$f(x)$ функция графиги $y = kx + b$ оғма асимптотага эга бўлиши учун*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b$$

лимитларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция графиги $y = kx + b$ оғма асимптотага эга бўлсин. Оғма асимптота таърифига кўра

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

бўлиб, бунда $x \to +\infty$ да $\alpha(x) \to 0$ бўлади. У ҳолда қуйидагиларга эгамиз:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

Етарлилиги. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b$$

лимитлар ўринли бўлсин. У ҳолда,

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b \text{ дан } f(x) - kx - b = \alpha(x) \to 0$$

келиб чиқади. Демак, $x \to +\infty$ да

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

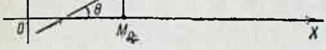
бўлиб, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ бўлади. Бу эса $y = kx + b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ функция берилган бўлсин. Бу функция учун

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1, \text{ демак, } k = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right] = 2, \text{ демак, } b = 2.$$

Шундай қилиб, берилган функция графигининг оғма асимптотаси $y = x + 2$ тўғри чизиқдан иборат.



49- чизма.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция графиги 49- чизмада тасвирланган эгри чизиқ бўлиб, $M(x, f(x))$ эгри чизиқдаги бирор нуқта бўлсин.

Бу нуқтанинг Ox ўқига проекциясини M_0 билан белгилайлик. $y = kx + b$ эса $f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси бўлиб, бу асимптота Ox ўқи билан ташкил этган бурчак $\theta \left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ бўлсин. MP — M нуқтадан асимптотага туширилган перпендикуляр кесмаси, Q — MM_0 тўғри чизиқ кесмасининг асимптота билан кесишган нуқтаси. Равшанки,

$$MM_0 = f(x),$$

$$QM_0 = kx + b,$$
$$MQ = f(x) - (kx + b),$$
$$MP = MQ \cdot \cos\theta.$$

Ушбу $y = kx + b$ чизиқ функция графигининг оғма асимптотаси бўлгани учун $x \to +\infty$ да $MQ = f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$ функция нолга интилади. У ҳолда $x \to +\infty$ да MP ҳам нолга интилади.

Демак, функция графигидан $y = kx + b$ тўғри чизиққача бўлган MP масофа $M(x, f(x))$ нуқта график бўйича «чексиз интилганда» ($x \to +\infty$ да) нолгача камаяди. (Буни функция графигининг асимптотаси таърифи сифатида ҳам олиш мумкин.)

4- §. Функцияларни текшириш. Графикларни ясаш

Биз ушбу бобнинг ўтган параграфларида функцияларнинг ўзгариш характерини ҳосилалар ёрдамида ўргандик. Бу ҳол функцияларни яққол тасаввур этишда, шунингдек, функция графигини аниқроқ ясашда қўл келади.

Функцияларни текшириш ва уларнинг графикларини ясашни қуйидаги схема бўйича олиб бориш мақсадга мувофиқдир:

1°. Функциянинг аниқланиш сохасини топиш;

2°. Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нуқталарини топиш;

3°. Функциянинг жуфт, тоқ ҳамда даврийлигини аниқлаш;

4°. Функцияни монотонликка текшириш;

5°. Функцияни экстремумга текшириш;

6°. Функция графигининг қавариқ ҳамда ботиқлигини аниқлаш, эгилиш нуқталарини топиш;

7°. Функция графигининг асимптоталарини топиш;

8°. Функциянинг ҳақиқий илдизларини (агар улар мавжуд бўлса), шунингдек аргумент x нинг бир нечта характерли қийматларида функциянинг қийматларини ясаш.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

функцияни текширинг ва графигини ясанг.

Берилган функция $R = (-\infty, +\infty)$ интервалда аниқланган ва узлуксиз. Бу функция учун $f(-x) = f(x)$ тенглик ўринли. Демак, $f(x)$ жуфт функция (унинг графиги Oy ўқига нисбатан симметрик бўлади), уни $[0, +\infty)$ оралиқда текшириш етарли.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи $[0, +\infty)$ оралиқда мавжуд ва $x = 0$ нуқтада нолга айланади. Шу $x = 0$ нуқтада иккинчи тартибли ҳосилани ҳисоблаймиз. $f''(0) = 4 > 0$. Бундан берилган $f(x)$

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

бўлиб, бунда $x \to +\infty$ да $\alpha(x) \to 0$ бўлади. У ҳолда қуйидагиларга эгамиз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{kx+b+\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to+\infty}[b+\alpha(x)] = b.$$

Етарлилиги. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = b$$

лимитлар ўринли бўлсин. У ҳолда,

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = b \text{ дан } f(x) - kx - b = \alpha(x) \to 0$$

келиб чиқади. Демак, $x \to +\infty$ да

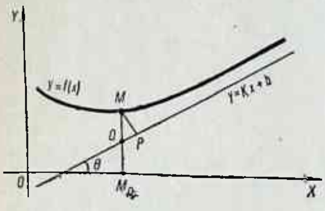
$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

бўлиб, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x) = 0$ бўлади. Бу эса $y = kx + b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ функция берилган бўлсин. Бу функция учун

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1, \text{ демак, } k = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right] = 2, \text{ демак, } b = 2.$$



49- чизма.

Шундай қилиб, берилган функция графигининг оғма асимптотаси $y = x + 2$ тўғри чизиқдан иборат.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция графиги 49-чизмада тасвирланган эгри чизиқ бўлиб, $M(x, f(x))$ эгри чизиқдаги бирор нуқта бўлсин.

Бу нуқтанинг Ox ўқига проекциясини M_0 билан белгилайлик. $y = kx + b$ эса $f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси бўлиб, бу асимптота Ox ўқи билан ташкил этган бурчак $\theta \left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ бўлсин. MP — M нуқтадан асимптотага туширилган перпендикуляр кесмаси, Q — MM_0 тўғри чизиқ кесмасининг асимптота билан кесишган нуқтаси. Равшанки,

$$MM_0 = f(x),$$

$$QM_0 = kx + b,$$
$$MQ = f(x) - (kx + b),$$
$$MP = MQ \cdot \cos\theta.$$

Ушбу $y = kx + b$ чизиқ функция графигининг оғма асимптотаси бўлгани учун $x \to +\infty$ да $MQ = f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$ функция нолга интилади. У ҳолда $x \to +\infty$ да MP ҳам нолга интилади.

Демак, функция графигидан $y = kx + b$ тўғри чизиққача бўлган MP масофа $M(x, f(x))$ нуқта график бўйича «чексиз интилганда» ($x \to +\infty$ да) нолгача камаяди. (Буни функция графигининг асимптотаси таърифи сифатида ҳам олиш мумкин.)

4- §. Функцияларни текшириш. Графикларни ясаш

Биз ушбу бобнинг ўтган параграфларида функцияларнинг ўзгариш характерини ҳосилалар ёрдамида ўргандик. Бу ҳол функцияларни яққол тасаввур этишда, шунингдек, функция графигини аниқроқ ясашда қўл келади.

Функцияларни текшириш ва уларнинг графикларини ясашни қуйидаги схема бўйича олиб бориш мақсадга мувофиқдир:

1°. Функциянинг аниқланиш соҳасини топиш;

2°. Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нуқталарини топиш;

3°. Функциянинг жуфт, тоқ ҳамда даврийлигини аниқлаш;

4°. Функцияни монотонликка текшириш;

5°. Функцияни экстремумга текшириш;

6°. Функция графигининг қавариқ ҳамда ботиқлигини аниқлаш, эгилиш нуқталарини топиш;

7°. Функция графигининг асимптоталарини топиш;

8°. Функциянинг ҳақиқий илдизларини (агар улар мавжуд бўлса), шунингдек аргумент x нинг бир нечта характерли қийматларида функциянинг қийматларини ясаш.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

функцияни текширинг ва графигини ясанг.

Берилган функция $R = (-\infty, +\infty)$ интервалда аниқланган ва узлуксиз. Бу функция учун $f(-x) = f(x)$ тенглик ўринли. Демак, $f(x)$ жуфт функция (унинг графиги Oy ўқига нисбатан симметрик бўлади), уни $[0, +\infty)$ оралиқда текшириш етарли.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи $[0, +\infty)$ оралиқда мавжуд ва $x = 0$ нуқтада нолга айланади. Шу $x = 0$ нуқтада иккинчи тартибли ҳосилани ҳисоблаймиз. $f''(0) = 4 > 0$. Бундан берилган $f(x)$

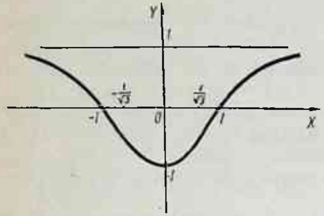
функция $x=0$ да минимумга эга ва $[0, +\infty)$ да $\min f(x) = -1$ бўлади. Энди $x > 0$ да $f'(x) > 0$ бўлганидан берилган функциянинг $[0, +\infty)$ оралиқда ўсувчилигини топамиз. Сўнгра ушбу

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

лимитларга кўра $y = 1$ горизонтал тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг асимптотаси эканига ва

$$f(x) - 1 = \frac{x^2-1}{x^2+1} - 1 = \frac{-2}{x^2+1} < 0$$



50- чизма.

тенгсизликка кўра функция графиги асимптотадан пастда жойлашган бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $[0, +\infty)$ оралиқнинг $x = \frac{1}{\sqrt3}$ нуқтасида нолга айланади. Равшанки, $0 < x < \frac{1}{\sqrt3}$ да $f''(x) > 0$, $\frac{1}{\sqrt3} < x < +\infty$ да $f''(x) < 0$. Демак, $f(x)$ функция $\left(0, \frac{1}{\sqrt3}\right)$ интервалда ботиқ, $\left(\frac{1}{\sqrt3}, +\infty\right)$ интервалда қавариқ бўлади. $x = +\frac{1}{\sqrt3}$ нуқта функция графигининг эгилиш нуқтасидан иборат. Берилган функциянинг графиги 50- чизмада тасвирланган.

5-§. Аниқмасликларни очиш. Лопиталь қоидалари

Биз функцияларнинг лимитини ўрганиш жараёнида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ кўринишдаги аниқмасликларни очиш билан шуғулланган эдик. Тегишли функцияларнинг ҳосилалари мавжуд бўлганда, берилган аниқмасликларни очиш масаласи енгиллашади. Одатда ҳосилалардан фойдаланиб аниқмасликларни очиш *Лопиталь қоидалари* деб аталади. Биз қуйида Лопиталь қоидаларининг муфассал баёни билан шуғулланамиз.

1°. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик. Маълумки, $x \to a$ да $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ бўлса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбат $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Кўпинча $x \to a$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг лимитини топишга қараганда $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ нисбатнинг лимитини топиш осон бўлади. Бу нисбатлар лимитларининг тенглигини қуйидаги теорема кўрсатади.

8-теорема. *(a, b) интервалда аниқланган, узлуксиз $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун ушбу шартлар бажарилган бўлсин:*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0;$

2) *(a, b) да чекли $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x)\neq 0;$*

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ *(k — чекли ёки чексиз).*

У ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ ҳамда $g(x)$ функцияларнинг $x=a$ нуқтада қийматлари нолга тенг, яъни

$$f(a)=0,\ g(a)=0 \tag{7.20}$$

деб олсак, натижада

$$\lim_{x\to a} f(x)=0=f(a),\quad \lim_{x\to a} g(x)=0=g(a)$$

тенгликлар ўринли бўлиб, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b)$ оралиқда узлуксиз бўлади. $\forall x\in(a, b)$ нуқта олиб, $[a, x]$ сегментда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни қараймиз. Бу сегментда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар Коши теоремасининг (8-теоремага қаранг) шартларини қаноатлантиради. У ҳолда Коши теоремасига кўра a билан x орасида шундай c $(a<c<x)$ нуқта топиладики, ушбу

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликдан эса (7.20) га кўра

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлиши келиб чиқади. Равшанки, $x\to a$ да $c\to a$. Демак,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=k.$$

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\ln(x+e)}{\arcsin x}$$

лимитни ҳисобланг.

Бу ҳолда

$$f(x)=e^{2x}-\ln(x+e),\ g(x)=\arcsin x$$

бўлиб, улар учун 8- теореманинг барча шартлари бажарилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$1)\ \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}(e^{2x} - \ln(x+e)) = 0,\ \lim_{x\to0} g(x) =$$

$$= \lim_{x\to0}\arcsin x = 0;$$

$$2)\ f'(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{x+e},\quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1;$$

$$3)\ \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to0}\frac{2e^{2x} - \frac{1}{x+e}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 2 - \frac{1}{e}$$

бўлади. У холда 8- теоремага кўра

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to0}\frac{e^{2x} - \ln(x+e)}{\arcsin x} = 2 - \frac{1}{e}.$$

Шу 8- теоремадан, яъни Лопиталь қоидасидан фойдаланиб, 134- бетдаги муҳим (4.1) лимитни осонлик билан исботлаш мумкин. Ҳақиқатан,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

5- эслатма. Юқорида келтирилган 8- теореманинг 3- шарти бажарилмаганда, яъни $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳосилалари мавжуд бўлиб, $x\to a$ да $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ нисбатнинг лимити мавжуд бўлмаганда ҳам

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

мавжуд бўлиши мумкин. Масалан, $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$, $g(x) = \ln(1+x)$ бўлсин. Бу функциялар учун $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ бўлиб, $x\to0$ да

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}}$$

нисбат лимитга эга эмас. Бироқ

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)^{1/x}} = 0$$

бўлади.

9- теорема. $(c, +\infty)$ *интервалда аниқланган* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функция учун ушбу шартлар бажарилган бўлсин:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0;$

2) $(c,\ +\infty)$ *да чекли* $f'(x)$ *ва* $g'(x)$ *ҳосилалар мавжуд ва* $g'(x)\neq 0;$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ *(k — чекли ёки чексиз). У ҳолда*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Умумийликни сақлаган ҳолда, теоремадаги c сонни мусбат деб олиш мумкин. x ўзгарувчини ушбу $x=\frac{1}{t}$ формула ёрдамида t ўзгарувчига алмаштирамиз. У ҳолда $x\to+\infty$ да $t\to+0$. Натижада $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар t ўзгарувчининг $f\left(\frac{1}{t}\right)$ ва $g\left(\frac{1}{t}\right)$ функциялари бўлиб, улар $\left(0,\ \frac{1}{c}\right)$ интервалда аниқланган.

Теореманинг 1) шарти қуйидаги

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{t\to+0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0$$

кўринишни олади.

$\left(0,\ \frac{1}{c}\right)$ интервалда $f\left(\frac{1}{t}\right)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$ функциялар хосилаларга эга. Ҳақиқатан ҳам, 6-бобдаги мураккаб функция ҳосиласи ҳақидаги 3-теоремага кўра ((6.5) формулага қаранг) топамиз:

$$\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\right]'_t=\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\right]'_x\cdot x'_t=-f'_x\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2},$$

$$\left[g\left(\frac{1}{t}\right)\right]'_t=\left[g\left(\frac{1}{t}\right)\right]'_x\cdot x'_t=-g'_x\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}.$$

Бу муносабатлардан $f'_t\left(\frac{1}{t}\right)$, $g'_t\left(\frac{1}{t}\right)$ ҳосилаларнинг мавжудлиги келиб чиқади. Сўнгра

$$\lim_{t\to+0}\frac{f'_t\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_t\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{-f'_x\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}}{-g_x\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'_x(x)}{g'_x(x)}=k$$

бўлишидан эса $\lim\limits_{t\to+0}\frac{f'_t\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_t\left(\frac{1}{t}\right)}$ нинг мавжудлиги ва $\lim\limits_{t\to+0}\frac{f'_t\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_t\left(\frac{1}{t}\right)}=k$ эканини топамиз.

Шундай қилиб, $\left(0,\ \frac{1}{c}\right)$ интервалда аниқланган $f\left(\frac{1}{t}\right)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$

функциялар учун қуйидагига эгамиз:

1) $\lim\limits_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right)=0,\ \lim\limits_{t\to+0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0;$

2) $\left(0,\ \frac{1}{c}\right)$ интервалда $f'_t\left(\frac{1}{t}\right)$, $g'_t\left(\frac{1}{t}\right)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'_t\left(\frac{1}{t}\right)\neq 0;$

3) $$\lim_{t\to+0}\frac{f'_t\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_t\left(\frac{1}{t}\right)}=k.$$

У ҳолда юқорида исбот этилган 8- теоремага кўра

$$\lim_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=k$$

бўлади. Кейинги тенгликдан эса

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arc\,tg}x^2-\pi}$$

лимитни ҳисобланг.

Бу ерда $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}-1$, $g(x)=2\operatorname{arc\,tg}x^2-\pi$ бўлиб, улар учун 9- теореманинг барча шартлари бажарилади, жумладан

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}},\quad g'(x)=\frac{4x}{1+x^4}$$

бўлиб,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1+x^4}{4x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^4}{2x^4}=-\frac{1}{2}$$

бўлади. 9- теоремага кўра

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arc\,tg}x^2-\pi}=-\frac{1}{2}.$$

2°. $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик. Маълумки, $x\to a$ да

$f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ бўлса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбат $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Бундай аниқмасликни очишда ҳам $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳосилаларидан фойдаланиш мумкин.

10-теорема. *(a, b) интервалда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун ушбу шартлар бажарилган бўлсин:*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

2) *(a, b) интервалда чекли $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x)\neq 0$;*

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ *(k — чекли ёки чексиз). У ҳолда*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. k нинг чекли ҳамда чексиз бўлган ҳолларини алоҳида-алоҳида қараб ўтамиз.

а) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$

бўлиб, k — чекли бўлсин. Лимит таърифига кўра, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta>0$ сон топиладики, $a<x<a+\delta$ тенгсизликлар бажарилганда

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{7.21}$$

тенгсизлик ҳам бажарилади. Ушбу $a<x<x_0<a+\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x ва тайинланган x_0 нуқталарни олиб, $[x, x_0]$ сегментда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларга Коши теоремасини (8-теоремага қаранг) қўлланамиз. У ҳолда

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{7.22}$$

тенглик ўринли бўлиб, бунда $x<c<x_0$ бўлади. Равшанки, бу c нуқта x га боғлиқдир.

Теореманинг $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ бўлиши шартига асосланиб $f(x)\neq 0$ $g(x)\neq 0$, $\frac{f(x_0)}{f(x)}\neq 1$ деб олсак бўлади.

Энди (7.22) тенгликнинг чап томонида турган

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

нисбатни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f(x)\left[1-\frac{f(x_0)}{f(x)}\right]}{g(x)\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}.$$

У ҳолда (7.22) муносабат ушбу

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\quad \text{яъни}\quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} \qquad (7.23)$$

($x<c<x_0$ кўринишга келади.

(7.23) тенгликнинг ўнг томонидаги $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ нисбат $c\to a$ ($a<x<$ $<c<x_0<a+\delta$) да k га интилади:

$$\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=k. \qquad (7.24)$$

Энди

$$\alpha=\frac{f'(c)}{g'(c)}-k \qquad (7.25)$$

деб белгилайлик. Равшанки, α миқдор c га ва у орқали x ва x_0 нуқталарга боғлиқ бўлиб, $a<x<x_0<c<a+\delta$ бўлганда (7.21) муносабатга кўра

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (7.26)$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

(7.23) тенгликдаги

$$\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right):\left(1-\frac{f(x_0)}{f(x)}\right)$$

нисбат, x_0 нуқта тайинланган ҳолда, $x\to a$ да 1 га интилади, яъни

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}=1.$$

Энди

$$\beta=\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}-1 \qquad (7.27)$$

деб белгиласак, у ҳолда

$$\lim_{x\to a}\beta=0$$

бўлади. Демак, ўша $\forall\,\varepsilon>0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2(|k|+\varepsilon)}$ га кўра шундай $\delta_1>0$ сон топиладики, $a<x<a+\delta_1$ бўлганда

$$|\beta|<\frac{\varepsilon}{2(|k|+\varepsilon)} \qquad (7.28)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди (7.23), (7.25), (7.27) муносабатлардан топамиз:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (k+\alpha)(1+\beta) = k + [\alpha + (k+\alpha)\cdot\beta].$$

Агар $\delta > 0$ ва $\delta_1 > 0$ сонларнинг кичигини δ^* деб олсак, унда $a < x < a + \delta^*$ учун (7.26) ва (7.28) тенгсизликлар бир вақтда ўринли бўлиб,

$$|\alpha + (k+\alpha)\beta| \leqslant |\alpha| + (|k| + |\alpha|)\cdot|\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \left(|k| + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{(2(|k|+\varepsilon)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Демак, $\forall\,\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta^* > 0$ сон топиладики, $a<x<a+\delta^*$ бўлганда

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

бўлишини билдиради.

б) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ бўлсин. Функция лимити таърифига кўра $\forall\, M > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $a< x<a+\delta$ бўлганда

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| > M \tag{7.29}$$

бўлади.

Юқоридаги а) ҳолидагидек $a<x<x_0<a+\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x ва тайин x_0 нуқталарни олиб, $[x, x_0]$ сегментда (7.22) тенгликка эга бўламиз. Бунда $a < x<c<x_0<a+\delta$ ва демак, $a<c<a+\delta$ тенгсизликларга кўра (7.22) тенгликдан

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| > M \tag{7.30}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Иккинчи томондан,

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = 1$$

бўлганидан $\forall\,\varepsilon > 0$, жумладан, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ учун шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики, $a < x < a + \delta_1$ бўлганда

$$\left|1-\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}\right|<\frac{1}{2}$$

бўлади. Кейинги тенгсизликдан эса

$$\left|\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}\right|>\frac{1}{2} \tag{7.31}$$

бўлиши келиб чиқади.

(7.22) тенгликдан топамиз:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}\cdot\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Энди $\delta^*=\min\{\delta,\ \delta_1\}$ деб олсак, у ҳолда $a<x<a+\delta^*$ бўлганда (7.30) ва (7.31) тенгсизликлар бараварига ўринли бўлади. Натижада $a<x<a+\delta^*$ бўлганда

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\left|\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}\right|\cdot\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|>\frac{1}{2}M$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

11-теорема. *$(c,+\infty)$ интервалда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун ушбу шартлар бажарилган бўлсин:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\infty;$

2) *$(c,+\infty)$ интервалда чекли $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва* $g'(x)\neq0;$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ *(k — чекли ёки чексиз).*

У ҳолда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

бўлади.

Бу теорема юқорида келтирилган теоремага ўхшаш исботланади.

3°. **Бошқа кўринишдаги аниқмасликлар.** Маълумки,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ бўлганда $f(x)\cdot g(x)$ ифода $0\cdot\infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, уни қуйидаги

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

каби ёзиш орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шунингдак, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ бўлганда $f(x) - g(x)$ ифода $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, уни ҳам қуйидаги

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

каби ўзгартириш натижасида $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шундай қилиб, функция ҳосилалари ёрдамида $0\cdot\infty$ ҳамда $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликларни очишда, уларни $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтирилиб, сўнг юқоридаги теоремалар қўлланилади.

Маълумки, $x\to a$ да $f(x)$ функция 1, 0 ва ∞ га, $g(x)$ функция эса мос равишда ∞, 0 ва 0 га интилганда

$$[f(x)]^{g(x)}$$

даражали-кўрсаткичли ифода 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} кўринишдаги аниқмасликлар эди. Бу кўринишдаги аниқмасликларни очиш учун аввал $y = [f(x)]^{g(x)}$ логарифмланади: $\ln y = g(x)\cdot\ln f(x)\cdot x\to a$ да $g(x)\ln f(x)$ ифода $0\cdot\infty$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди.

Фараз қилайлик, $x\to a$ да $g(x)\ln f(x)$ аниқмас ифодани ўзгартириб, юқоридаги теоремалардан бирини (Лопиталь қоидасини) қўллаб,

$$\lim_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)] = b$$

(b — чекли ёки чексиз) бўлишини топдик, дейлик. Унда

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{b}$$

бўлади.

6-эслатма. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалари ҳам $f(x)$ ва $g(x)$ лар сингари юқорида келтирилган теоремаларнинг барча шартларини қаноатлантирса, у ҳолда

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

тенгликлар ўринли бўлади, яъни бу ҳолда Лопиталь қоидасини такрор қўлланиш мумкин бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$$

лимитни ҳисобланг. Равшанки, $x\to0$ да $y=\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$ ифода 1^∞ кўринишдаги аниқмаслик. Содда ҳисоблашлар ёрдамида топамиз:

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x}\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{(x\cdot\cos x-\sin x)'}{(x^3)'}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

Демак,

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

8- БОБ

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

Маълумки, ҳаракатдаги нуқтанинг тезлигини топиш, шунингдек, эгри чизиққа уринма ўтказиш каби масалалар (6- бобнинг 1- § ига қаранг) функцияни дифференциаллаш тушунчасига олиб келган эди.

Нуқтанинг ҳар бир вақт моментидаги тезлиги маълум бўлганда унинг ҳаракат қонунини топиш, эгри чизиқни унинг ҳар бир нуқталаридаги уринмаларига кўра аниқлаш каби масалалар ҳам кўп учрайди. Бундай масалалар юқорида эслатиб ўтилган масалаларга тескари бўлиб, улар функцияни интеграллаш тушунчасига олиб келади.

1- §. Аниқмас интеграл тушунчаси

1. Аниқмас интеграл таърифи. $f(x)$ функция бирор (a, b) (чекли ёки чексиз) интервалда аниқланган бўлсин.

1- таъриф. Агар (a, b) да $f(x)$ функция шу интервалда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг ҳосиласига тенг, яъни

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b))$$

бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ функциянинг *бошланғич функцияси* дейилади.

Бу таърифни функция дифференциали орқали ҳам айтиш мумкин.

2- таъриф. Агар (a, b) да $f(x)\,dx$ ифода шу интервалда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг дифференциалига тенг, яъни

$$dF(x) = f(x)\,dx$$

бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ функциянинг *бошланғич функцияси* деб аталади.

Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган бўлсин.

3- таъриф. Агар (a, b) да $f(x)$ функция шу оралиқда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг ҳосиласига тенг, яъни

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b))$$

бўлиб, a ва b нуқталарда эса

$$F'(a+0) = f(a), \quad F'(b-0) = f(b)$$

тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функциянинг *бошланғич функцияси* деб аталади.

Мисоллар. 1. $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ бўлсин. Бу функциянинг $(-1, 1)$ интервалда бошланғич функцияси $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ бўлади, чунки $(-1, 1)$ да

$$F'(x) = (\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

2. $f(x) = x^2$ функциянинг $(-\infty, +\infty)$ интервалда бошланғич функцияси $F(x) = \frac{x^3}{3}$ бўлиши равшан.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, (a, b) интервалда узлуксиз бўлган ҳар қандай функция шу интервалда бошланғич функцияга эга бўлади. Бунинг исботи 9-бобда келтирилади.

$F(x)$ ва $\Phi(x)$ функцияларнинг ҳар бири (a, b) интервалда битта $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўлса, бу $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар (a, b) интервалда бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади. Ҳақиқатан ҳам, бошланғич функция таърифига кўра (a, b) да

$$F'(x) = f(x), \quad \Phi'(x) = f(x)$$

бўлади. Демак, $F'(x) = \Phi'(x)$. Бундан 7-бобдаги 1-натижага кўра

$$F(x) = \Phi(x) + C \quad (C = \text{const})$$

тенглик келиб чиқади.

Модомики, (a, b) интервалда берилган $f(x)$ функциянинг барча бошланғич функциялари бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилар экан, бу функциянинг шу интервалда бирор бошланғич функцияси $F(x)$ ёрдамида унинг исталган бошланғич функцияси ушбу кўринишда ифодаланади.

$$F(x) + C \quad (C = \text{const}).$$

1-эслатма. Функциянинг аниқланиш соҳаси оралиқ бўлиши муҳим. Агар функциянинг аниқланиш соҳаси оралиқ бўлмаса, унинг бошланғич функциялари фарқи ўзгармас бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, $f(x) = x$ функцияни $E = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ тўпламда қарайлик. Бу функция учун

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \; (x \in E)$$

ва

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & \text{агар } x \in (1, +\infty), \\ \dfrac{x^2}{2} + 1, & \text{агар } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

функцияларнинг ҳар бири бошланғич функция бўлиши равшан. Ушбу $\Phi(x) - F(x)$ айирма учун қуйидагига эгамиз:

$$\Phi(x) - F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \in (1, +\infty), \\ 1, & \text{агар } x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Шундай қилиб, бу айирма E тўпламда константа эмас.

4-таъриф. (a, b) интервалда берилган $f(x)$ функция бошланғич функцияларининг умумий ифодаси $F(x) + C$, $C = \text{const}$, шу $f(x)$ функциянинг *аниқмас интеграли* деб аталади ва

$$\int f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Бунда $\int$ — интеграл белгиси, $f(x)$ интеграл остидаги функция, $f(x)\,dx$ эса интеграл остидаги ифода дейилади. Демак,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C = \text{const}). \tag{8.1}$$

Мисол. Ушбу

$$\int 2^x\,dx$$

аниқмас интеграл (қисқача, интеграл) ни топинг. Таърифга кўра $\int 2^x\,dx$ интеграл шундай функцияки, унинг ҳосиласи 2^x (дифференциали $2^x\,dx$) га тенг. Қуйидаги

$$F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$$

функция учун

$$F'(x)=\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)'=2^x$$

бўлади. Демак,

$$\int 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C.$$

2-эслатма. $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўладиган оралиқ кўрсатилмаган ҳолда бундай оралиқ сифатида $f(x)$ функциянинг аниқланиш оралиғи тушунилади.

2. **Аниқмас интегралнинг содда хоссалари.** Аниқмас интегралнинг таърифидан бевосита унинг қуйидаги содда хоссалари келиб чиқади.

1°. $f(x)$ функция аниқмас интеграли $\int f(x)\,dx$ нинг дифференциали $f(x)\,dx$ га тенг, яъни

$$d\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x)\,dx. \qquad (8.2)$$

Ҳақиқатан ҳам, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин: $F'(x)=f(x)$. У ҳолда

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

бўлади. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$d\left[\int f(x)\,dx\right] \quad d\,[F(x)+C]=d\,F(x)=F'(x)\,dx=f(x)\,dx.$$

Бу хосса аввал дифференциал белгиси d, сўнгра интеграл белгиси $\int$ келиб, улар ёнма-ён турганда ўзаро бир-бирини йўқотишини кўрсатади.

2°. Функция дифференциалининг аниқмас интеграли шу функция билан ўзгармас сон йиғиндисига тенг, яъни

$$\int d\,F(x)=F(x)+C \quad (C=\mathrm{const}). \qquad (8.3)$$

$F(x)$ функция $f(x)$ нинг бирор бошланғич функцияси бўлсин: $F'(x)=f(x)$. У ҳолда

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

тенглик ўринли бўлади. Иккинчи томондан,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int d\,F(x).$$

Охирги икки тенглик 2°- хоссани исбот этади.

Шундай қилиб, (8.2) ва (8.3) формулалар, дифференциаллаш амали аниқмас интегрални топиш амалига нисбатан ўзгармас қўшилувчи аниқлигида ўзаро тескари эканлигини кўрсатади.

3. Интеграллашнинг содда қоидалари. 1°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар бошланғич функцияларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)+g(x)$ ҳам бошланғич функцияга эга ва

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad (8.4)$$

формула ўринли.

Исбот. $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)$, $g(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $\Phi(x)$ бўлсин. У ҳолда таърифга кўра

$$F'(x) = f(x),\ \Phi'(x) = g(x)$$

бўлиб,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1 \ \ (C_1 = \text{const}),$$

$$\int g(x)\,dx = \Phi(x) + C_2 \quad (C_2 = \text{const})$$

бўлади ва демак,

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + \Phi(x) + C_1 + C_2. \qquad (8.5)$$

Агар $\Psi(x) = F(x) + \Phi(x)$ деб олсак, унда

$$\Psi'(x) = F'(x) + \Phi'(x) = f(x) + g(x)$$

бўлади. Бу эса, $\Psi(x)$ функция $f(x)+g(x)$ функциянинг бошланғич функцияси эканлигини билдиради. Демак,

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \Psi(x) + C = F(x) + \Phi(x) + C. \qquad (8.6)$$

Энди (8.5) ва (8.6) муносабатлардан $\int f(x)dx + \int g(x)\,dx$ интеграл $F(x)+\Phi(x)+C_1+C_2$ кўринишда, $\int [f(x)+g(x)]\,dx$ интеграл эса $F(x)+\Phi(x)+C$ кўринишда ёзилиши мумкин эканини кўрамиз. Бу муносабатлардаги C, C_1 ва C_2 ўзгармас сонларнинг ихтиёрийлигидан эса $F(x)+\Phi(x)+C$ ҳамда $F(x)+\Phi(x)+C_1+C_2$ ифодаларнинг бирбирига тенг бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, (8.4) формула исботланди. Одатда, интегралнинг бу (8.4) формула билан ифодаланган хоссаси унинг *аддитивлик хоссаси* деб аталади.

2°. Агар $f(x)$ функция бошланғич функцияга эга бўлса, у ҳолда $k\cdot f(x)$ (k — ўзгармас сон) ҳам бошланғич функцияга эга ва $k \neq 0$ да

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad (8.7)$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)$ бўлсин. У ҳолда $F'(x) = f(x)$ ва $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ бўлиб,

$$k\int f(x)\,dx = k[F(x)+C] = kF(x)+k\cdot C \tag{8.8}$$

бўлади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон. Ушбу

$$[k\cdot F(x)]' = kF'(x) = kf(x)$$

тенглик ўринли бўлишидан $kf(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $kF(x)$ эканини топамиз. Демак,

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot F(x)+C_1, \tag{8.9}$$

бунда C_1 — ихтиёрий ўзгармас сон. Энди (8.8) ва (8.9) муносабатлардан C ва C_1 ўзгармас сонларнинг ихтиёрийлиги ҳамда $k\neq 0$ бўлишидан (8.7) формуланинг ўринли экани келиб чиқади.

3-эслатма. Юқорида келтирилган (8.4) ва (8.7) тенгликларни ҳамда келгусида учрайдиган шунга ўхшаш тенгликларни ўнг ва чап томонларидаги ифодалар орасидаги айирма ўзгармас сонга баробарлиги маъносида (ўзгармас сон аниқлигида) тенгликлар деб қаралади.

4. Элементар функцияларнинг аниқмас интеграллари. Бошланғич функция таърифидан ҳамда элементар функциялар ҳосилалари жадвалидан (6-бобнинг 3-§ ига қаранг) фойдаланиб элементар функциялар аниқмас интеграллари жадвалини келтирамиз (ҳар бир формула интеграл остидаги функциянинг аниқланиш соҳасида қаралади):

1°. $\int 0\cdot dx = C,\ C = \text{const};$

2°. $\int 1\cdot dx = \int dx = x + C;$

3°. $\int x^{\mu}\,dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$

4°. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$

5°. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$

6°. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

7°. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

8°. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

9°. $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

10°. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

11°. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

12°. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$;

13°. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$;

14°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

15°. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

Бу 1° — 15° - интеграллар қисқача *жадвал интеграллари* деб ҳам айтилади.

Юқоридаги 4°- формуланинг тўғрилигини текширишда $x > 0$ ва $x < 0$ бўлган ҳолларни алоҳида-алоҳида кўриш лозим. $x > 0$ бўлганда $\ln|x| = \ln x$ бўлиб, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ бўлади. $x < 0$ бўлганда $\ln|x| = \ln(-x)$ бўлиб, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ бўлади. 4°- формула эса бу икки ҳолни бирлаштиради.

Келтирилган жадвал ва (8.4), (8.7) формулалар билан ифодаланган қоидалар турли функцияларни интеграллаш имконини беради.

Мисол. Ушбу $\int(1+\sqrt{x})^2 dx$ интегрални ҳисобланг.

Бу интегрални ҳисоблаш учун аввал (8.4), (8.7) формулаларни, сўнгра жадвални қўлланамиз:

$$\int(1+\sqrt{x})^2 dx = \int(1+2\sqrt{x}+x)\,dx = \int 1\,dx + 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x\,dx = x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C.$$

Интегралларни ҳисоблаш учун (8.4) ва (8.7) формулалар билан ифодаланган қоидаларнинг ўзи етарли эмас. Биз келгусида баъзи интеграллаш усуллари билан танишамиз.

2- §. Интеграллаш усуллари

Ушбу параграфда ўзгарувчиларни алмаштириб интеграллаш ва бўлаклаб интеграллаш усуллари билан танишамиз.

1. Ўзгарувчиларни алмаштириб интеграллаш усули. Функцияларнинг интегралларини ҳисоблашда ўзгарувчиларни алмаштириб интеграллаш усули кенг қўлланилади.

Ушбу $\int f(x)\,dx$ аниқмас интегрални ҳисоблаш талаб этилган бўлсин. Бунда $f(x)$ функция бирор $X = (a, b)$ интервалда аниқланган ва

$$f(x) = \varphi(g(x))g'(x) \tag{8.10}$$

кўринишда ёзилиши мумкин дейлик.

Агар $\varphi(t)$ функция $T = (t_1, t_2)$ интервалда бошланғич функция $\Phi(t)$ га эга бўлиб, $g(x)$ функция $X = (a, b)$ интервалда (бунда $g(x) \subset T$) дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(g(x))\,g'(x)\,dx = \Phi(g(x)) + C \qquad (8.11)$$

формула ўринли.

Бу тасдиқни исботлаш учун $\Phi(g(x))$ функция $\varphi(g(x))\,g'(x)$ функция учун бошланғич эканини кўрсатиш етарли Ҳақиқатан, $\Phi(g(x))' = \Phi'(g(x))g'(x) = \varphi(g(x))\,g'(x)$. Тасдиқ исбот бўлди. Бу тасдиқдан кўринадики, $\int f(x)\,dx$ ни ҳисоблаш $t = g(x)$ алмаштириш ёрдамида $\int \varphi(t)dt$ ни ҳисоблашга келтирилади.

Одатда интегрални бундай усул билан ҳисоблаш ўзгарувчини алмаштириш усули билан интеграллаш деб аталади.

Ўзгарувчиларни алмаштириш усулининг муҳим томони ўзгарувчиларни жуда кўп усул билан алмаштириш имконияти бўлган ҳолда улар ичидан интегрални содда ва ҳисоблаш учун қулай ҳолга келтирадиганини танлаб олишдан иборат.

Мисоллар. 1. $\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$ ($a = \text{const}$) ни ҳисобланг. Берилган интегралда ўзгарувчи x ни $x^2 + a^2 = t$ каби алмаштирамиз. Бунда $2xdx = dt$ бўлиб, ((8.10) ва (8.11 ларга қаранг)

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C \text{ бўлади.}$$

2. $\int e^{\cos x}\cdot \sin xdx$ ни ҳисобланг. Бу интегралда $\cos x = t$ алмаштириш бажарамиз. Натижада $-\sin xdx = dt$ бўлиб,

$$\int e^{\cos x}\cdot \sin xdx = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C \text{ бўлади.}$$

2. **Бўлаклаб интеграллаш усули.** Икки $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функция (a, b) интервалда узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Маълумки, (6-бобнинг 4-§ га қаранг)

$$d[u(x)\cdot v(x)] = u(x)\,dv(x) + v(x)\cdot du(x).$$

Бу тенгликдан

$$u(x)\,dv(x) = d[u(x)\cdot v(x)] - v(x)\cdot du(x). \qquad (8.12)$$

Энди (8.12) тенгликни интеграллаб топамиз:

$$\int u(x)\,dv(x) = \int [d(u(x)\cdot v(x)) - v(x)\cdot du(x)] = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\,du(x).$$

Шундай қилиб, қуйидаги

$$\int u(x)\,dv = u(x)v(x) - \int v(x)du \qquad (8.13)$$

формулага келамиз. Бу (8.13) формула *бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади. У $u(x)\,dv$ ни интеграллашни $v(x)\,du$ ни интеграллашга олиб келади.

Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиш учун интеграл остидаги ифодани $u(x)$ ҳамда dv лар кўпайтмаси кўринишида ёзиб олинади, бунда албатта dv ҳамда $v(x)\,du$ ифодаларнинг интегралларини осон ҳисоблана олинишини лозимлигини эътиборда тутиш керак.

Мисоллар. 1. $\int xe^x dx$ ни ҳисобланг.

Бу интегралда $u = x$, $dv = e^x dx$ деб оламиз. У ҳолда $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$ бўлиб, (8.13) формулага мувофиқ

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx.$$

Демак,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C.$$

2. $\int \ln x dx$ ни ҳисобланг.

Интеграл остидаги $\ln x dx$ ифодани $u = \ln x$, $dv = dx$ лар кўпайтмаси деб оламиз. У ҳолда $du = \frac{1}{x} dx$, $v = x$ бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C = x \ln \frac{x}{e} + C.$$

3. Ушбу

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx$$

интегрални қарайлик, бунда a, b лар ўзгармас сонлар ва $a^2 + b^2 \neq 0$. Бу интегралда $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx dx$ деб олсак, унда

$$du = ae^{ax} dx, \quad v = \int \cos bx dx = \frac{\sin bx}{b}$$

бўлади ва бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдалансак,

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx \qquad (8.14)$$

экани келиб чиқади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални яна бўлаклаб интеграллаймиз: $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx dx$ деб олсак, у ҳолда $du = ae^{ax} dx$, $v = -\frac{1}{b} \cos bx$ бўлади. (8.13) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int e^{ax} \sin bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx. \qquad (8.15)$$

(8.14) ва (8.15) тенгликлардан

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx dx$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган $I = \int e^{ax} \cos bx dx$ ни топиш учун қуйидаги

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I + C'$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламадан эса

$$I = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C,\ C = \frac{b^2}{a^2+b^2}C'$$

бўлади. Демак,

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C.$$

4. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots,\ a = \text{const})$ ни ҳисобланг. Бу интегралда $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $dv = dx$ деб олсак, унда

$$du = -\frac{2nx\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},\ v = x$$

бўлади. (8.13) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx. \qquad (8.16)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx$ ни

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

кўринишда ёзсак, унда (8.16) муносабат ушбу

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot I_n - 2\,na^2\, I_{n+1}$$

кўринишни олади. Кейинги тенгликдан эса қуйидаги

$$I_{n+1} = \frac{1}{2\,na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot I_n \qquad (8.17)$$

рекуррент формула келиб чиқади.

Равшанки, $n = 1$ бўлганда

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

бўлади.

$n \geqslant 2$ бўлганда мос I_n интеграллар (8.17) рекуррент формула ёрдамида топилади. Масалан:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\,I_1 =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$

3- §. Рационал функцияларни интеграллаш

Ушбу параграфда рационал функцияларни интеграллаш билан шуғулланамиз. Бунинг учун аввал алгебра курсидан биз учун зарур бўлган маълумотларни келтирамиз.

1. Кўпҳад ва унинг илдизлари ҳақида. Бирор

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \qquad (8.18)$$

кўпҳад берилган бўлсин, бунда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $a_n \neq 0$, $n \in N$ эса кўпҳаднинг даражаси.

Маълумки, бирор $\alpha \in R$ сон учун $P(\alpha) = 0$ бўлса, α сон $P(x)$ кўпҳаднинг илдизи деб аталади. У ҳолда Безу теоремасига кўра $P(x)$ кўпҳад $x - \alpha$ га қолдиқсиз бўлиниб, у қуйидаги

$$P(x) = (x - \alpha)\, Q(x)$$

кўринишда ифодаланади, бунда $Q(x)$ — $(n-1)$- даражали кўпҳад.

Агар (8.18) кўпҳад $(x-\alpha)^k$ $(k \in N)$ га қолдиқсиз бўлинса, α сон (8.18) кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлади. Бу ҳолда $P(x)$ кўпҳадни ушбу

$$P(x) = (x - \alpha)^k R(x)$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бунда $R(x)$ — $(n-k)$- даражали кўпҳад.

Агар $h = \alpha + i\beta$ комплекс сон $P(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $\overline{h} = \alpha - i\beta$ комплекс сон ҳам бу кўпҳаднинг илдизи бўлади. Шунингдек, $h = \alpha + i\beta$ сон $P(x)$ нинг k каррали илдизи бўлса, $\overline{h} = \alpha - i\beta$ сон ҳам бу кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлади.

Демак, $P(x)$ кўпҳад $h = \alpha + i\beta$ комплекс илдизга эга бўлганда унинг ифодасида $(x - h)$ кўпайтувчи билан бирга $x - \overline{h}$ кўпайтувчи ҳам қатнашади. Бундай ҳолда $P(x)$ кўпҳаднинг ифодасида қуйидаги

$$(x-h)(x-\overline{h}) = [x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)] =$$
$$= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q \quad (p = -2\alpha,\ q = \alpha^2 + \beta^2)$$

квадрат учҳад кўпайтувчи бўлиб қолади.

Фараз қилайлик,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

кўпҳад берилган бўлиб, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ лар унинг мос равишда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ каррали ҳақиқий илдизлари, $h_1, h_2, \dots, h_s$ $(h_j = \delta_j + i\tau_j,$ $j = 1, 2, \dots, s)$ лар эса кўпҳаднинг мос равишда $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ каррали комплекс илдизлари бўлсин. Бу кўпҳадни унинг илдизларига кўра кўпайтувчиларга ажратиш ҳақидаги ушбу теоремани исботсиз келтирамиз.

1- теорема. *Ҳар қандай n- даражали*

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

кўпҳад ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ *— ўзгармас ҳақиқий сонлар,* $a_n \neq 0$), *ушбу*

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\dots(x-\alpha_k)^{\lambda_k}(x^2+p_1x+$$
$$+q_1)^{\gamma_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\gamma_2}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\gamma_s}$$

кўринишда ифодаланади, бунда

$$\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_k+2(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_s)=n$$

бўлиб, $x^2+p_jx+q_j=0$ ($j=1, 2, \dots, s$) *тенгламалар ҳақиқий илдизга эга эмас.*

2. Содда касрлар. Тўғри касрларни содда касрлар орқали ифодалаш. Ушбу

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}, \quad m=1, 2, \dots \tag{8.19}$$

кўринишдаги касрлар *содда касрлар* деб аталади, бунда A, B, C ҳамда a, p, q лар ўзгармас сонлар, x^2+px+q квадрат учҳад эса ҳақиқий илдизга эга эмас.

Маълумки, қуйидаги

$$P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

ва

$$Q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_\nu x^\nu$$

кўпҳадларнинг ($a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_\nu$ — ўзгармас сонлар, $n\in N$, $\nu \in N$) нисбати

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_n x^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_\nu x^\nu}$$

каср рационал функция дейилади, $n<\nu$ бўлганда эса у тўғри каср деб аталади.

Ҳар қандай тўғри каср (8.19) содда касрлар орқали ифодаланади. Буни исботлашдан аввал иккита леммани келтирамиз.

1-лемма. Агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри каср махражидаги $Q(x)$ кўпҳад ушбу

$$Q(x) = (x-\alpha)^m Q_1(x) \quad (m\in N)$$

кўринишда бўлиб, $Q_1(x)$ кўпҳад эса $x-\alpha$ га бўлинмаса, у ҳолда берилган тўғри каср қуйидаги

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

кўринишда ифодаланиши мумкин, бунда $A_1, A_2, \dots, A_m$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $P_1(x)$ — кўпҳад.

Исбот. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри касрни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-\alpha)^m\,Q_1(x)}=\frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+\frac{P(x)-A_m\cdot Q_1(x)}{(x-\alpha)^m\cdot Q_1(x)}. \qquad (8.20)$$

Равшанки, (8.20) муносабатдаги $R(x)-A_m\cdot Q_1(x)$ айирма A_m сонга боғлиқ. Бу сонни шундай танлаб оламизки, натижада $P(x)-A_m\cdot Q_1(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ га бўлинсин. Бунинг учун

$$P(\alpha)-A_m\cdot Q_1(\alpha)=0$$

тенглик ўринли бўлиши керак. Демак,

$$A_m=\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

деб олинса, у ҳолда $P(x)-A_m\cdot Q_1(x)$ кўпхад $x-\alpha$ га бўлинади. Шундай қилиб,

$$P(x)-A_m\cdot Q_1(x)=(x-a)\cdot P_m(x) \qquad (8.21)$$

бўлади, бунда $P_m(x)$ — кўпҳад.

Натижада (8.20) муносабат қуйидаги

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+\frac{P_m(x)}{(x-\alpha)^{m-1}\cdot Q_1(x)} \qquad (8.22)$$

кўринишга келади, бунда A_m сон юқоридагидек аниқланган.

Энди

$$\frac{P_m(x)}{(x-\alpha)^{m-1}\,Q_1(x)}=\frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}}+\frac{P_m(x)-A_{m-1}\cdot Q_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1}\cdot Q_1(x)}$$

тенгликнинг ўнг томонидаги A_{m-1} сонни шундай танлаб оламизки, $P_m(x)-A_{m-1}\cdot Q_1(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ га бўлинсин. Бунинг учун

$$P_m(\alpha)-A_{m-1}\cdot Q_1(\alpha)=0$$

тенглик ўринли бўлиши керак. Демак,

$$A_{m-1}=\frac{P_m(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

деб олинса, у ҳолда $P_m(x)-A_{m-1}Q_1(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ га бўлинади. Шундай қилиб,

$$P_m(x)-A_{m-1}\cdot Q_1(x)=(x-\alpha)\,P_{m-1}(x) \qquad (8.23)$$

бўлади, бунда $P_{m-1}(x)$ — кўпҳад.

(8.22) ва (8.23) муносабатлардан топамиз:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}}+\frac{P_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^{m-2}\,Q_1(x)}. \qquad (8.24)$$

Худди шунга ўхшаш ҳар гал $\frac{P(x)}{Q(x)}$ касрни ифодаловчи тенгликнинг ўнг томонидаги охирги ҳадидан, юқоридагидек $\frac{A_i}{(x-\alpha)^i}$ қисмини ажратиб топамиз:

$$\frac{P_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^{m-2}Q_1(x)}=\frac{A_{m-2}}{(x-\alpha)^{m-2}}+\frac{P_{m-2}(x)}{(x-\alpha)^{m-3}Q_1(x)} \qquad (8.25)$$

ва ҳ. к.

$$\frac{P_2(x)}{(x-\alpha)Q_1(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}. \qquad (8.26)$$

(8.24), (8.25), (8.26) тенгликлардан

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

бўлиши келиб чиқади. 1-лемма исбот бўлди.

2-лемма. Агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри каср махражидаги $Q(x)$ кўпҳад

$$Q(x)=(x^2+px+q)^n\cdot Q_1(x)$$

кўринишга эга бўлиб (x^2+px+q квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас), $Q_1(x)$ кўпҳад x^2+px+q га бўлинмаса, у ҳолда берилган тўғри каср қуйидаги кўринишда ифодаланиши мумкин:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}+\frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots+$$
$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

бунда $B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$ — ўзгармас сонлар, $P_1(x)$ — кўпҳад.

Исбот. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри касрни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^nQ_1(x)}=\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}+\frac{P(x)-(B_nx+C_n)\cdot Q_1(x)}{(x^2+px+q)^n\cdot Q_1(x)}.$$

Бу тенгликдаги

$$P(x)-(B_nx+C_n)\cdot Q_1(x) \qquad (8.27)$$

кўпҳад B_n ва C_n сонларга боғлиқ. Энди B_n ва C_n сонларни шундай танлаб олиш мумкинлигини кўрсатамизки, натижада (8.27) кўпҳад x^2+px+q га бўлинсин.

Аввало $P(x)$ ва $Q_1(x)$ кўпҳадларнинг ҳар бирини x^2+px+q квадрат учҳадга бўлиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned}\frac{P(x)}{x^2+px+q}&=R(x)+\frac{a_1x+b_1}{x^2+px+q},\\ \frac{Q_1(x)}{x^2+px+q}&=S(x)+\frac{a_2x+b_2}{x^2+px+q},\end{aligned}\right\} \qquad (8.28)$$

бунда $R(x)$ ва $S(x)$ — кўпҳадлар.

У ҳолда

$$\frac{P(x)-(B_n x+C_n)Q_1(x)}{x^2+px+q}=\frac{P(x)}{x^2+px+q}-(B_n x+C_n)\frac{Q(x)}{x^2+px+q}=$$

$$=R(x)-(B_n x+C_n)S(x)+\frac{a_1 x+b_1-(B_n x+C_n)(a_2 x+b_2)}{x^2+px+q}=$$

$$=R(x)-(B_n x+C_n)S(x)+B_n\cdot a_2+$$

$$+\frac{(a_1+B_n p a_2+C_n a_2-B_n b_2)x+B_n q\cdot a_2+b_1-C_n b_2}{x^2+px+q}$$

бўлади. Бу тенгликдан кўринадики, $P(x)-(B_n x+C_n)\cdot Q_1(x)$ ҳад $x+px+q$ га бўлиниши учун x нинг барча қийматларида

$$(a_1+B_n p\cdot a_2-C_n a_2-B_n b_2)x+B_n\cdot q\cdot a_2+b_1-C_n b_2=0,$$

яъни

$$\begin{cases} B_n\cdot(a_2 p-b_2)-C_n a_2+a_1=0, \\ B_n\cdot q a_2-C_n b_2+b_1=0 \end{cases} \tag{8.29}$$

бўлиши керак.

B_n ва C_n ларга нисбатан (8.29) системанинг детерминанти

$$D=\begin{vmatrix} a_2 p-b_2 & -a_2 \\ a_2 q & -b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

бўлади. Буни исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни

$$D=-b_2(a_2 p-b_2)+a_2^2\cdot q=0 \tag{8.30}$$

бўлсин. Агар $a_2=0$ бўлса, унда $b_2=0$ бўлиб, натижада (8.28) дан $Q_1(x)$ кўпҳад x^2+px+q га бўлиниши келиб чиқади. Бу эса $Q_1(x)$ кўпҳад x^2+px+q га бўлинмайди деб олинишига зиддир. Демак, $a_2\neq 0$. Бу ҳолда (8.30) тенглама ушбу

$$\left(-\frac{b_2}{a_2}\right)^2+p\cdot\left(-\frac{b_2}{a_2}\right)+q=0$$

кўринишга эга бўлиб, $-\frac{b_2}{a_2}$ ҳақиқий сон $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизи бўлишини кўрамиз. Бу эса x^2+px+q квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга бўлмасин деб олинишига зиддир. Демак, (8.29) системанинг детерминанти нолдан фарқли.

Модомики, (8.29) системанинг детерминанти нолдан фарқли экан, у ҳолда бу системадан ягона B_n ва C_n сонлар топилади. Бу сонларни (8.27) га қўйсак, натижада $P(x)-(B_n x+C_n)Q_1(x)$ кўпҳад x^2+px+q га бўлиниб, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ каср эса ушбу

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^n Q_1(x)}=\frac{B_n x+C_n}{(x^2+px+q)^n}+$$

$$+\frac{P_n(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}\cdot Q_1(x)} \qquad (8.31)$$

кўринишга келади, бунда $P_n(x)$ — кўпҳад.

Худди шу йўл билан

$$\frac{P_n(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}\cdot Q_1(x)}=\frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}}+$$
$$+\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2+px+q)^{n-2}\cdot Q_1(x)}, \qquad (8.32)$$

$$\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2+px+q)^{n-2}\cdot Q_1(x)}=\frac{B_{n-2}x+C_{n-2}}{(x^2+px+q)^{n-2}}+$$
$$+\frac{P_{n-2}(x)}{(x^2+px+q)^{n-3}\cdot Q_1(x)} \qquad (8.33)$$

ва ҳ. к.

$$\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)\,Q_1(x)}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \qquad (8.34)$$

бўлиши топилади.

(8.31), (8.32), (8.33), (8.34) тенгликлардан эса

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_n x+C_n}{(x^2+px+q)^n}+\frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}}+$$
$$+\dots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

бўлиши келиб чиқади. 2-лемма исбот бўлди.

2-теорема. *Ҳар қандай тўғри каср содда касрлар йиғиндиси орқали ифодаланади.*

Исбот. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри каср бўлсин. $Q(x)$ эса n-даражали кўпҳад бўлиб,

$$Q(x)=(x-\alpha_1)^{n_1}\cdot(x-\alpha_2)^{n_2}\dots(x-\alpha_k)^{n_k}\cdot(x^2+p_1x+$$
$$+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}$$

бўлсин, бунда

$$n_1+n_2+\dots+n_k+2(m_1+m_2+\dots+m_l)=n$$

бўлиб, $x^2+p_jx+q_j$ $(j=1, 2, \dots, l)$ квадрат учҳадлар ҳақиқий илдизга эга эмас.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри касрни қуйидаги $\frac{P(x)}{Q(x)}=$

$$=\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}\cdot(x-\alpha_2)^{n_2}\dots(x-\alpha_k)^{n_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}}$$

кўринишда ёзиб, бу тенгликнинг ўнг томонига 1-леммани бир неча марта ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ марта) қўлланиб топамиз:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{n_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{n_1}} + \frac{A_{n_1-1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} +$$

$$+ \frac{A_{n_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{n_2}} + \frac{A_{n_2-1}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{n_2-1}} + \ldots + \frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_{n_k}^{(k)}}{(x-\alpha_k)^{n_k}} + \frac{A_{n_k-1}^{(k)}}{(x-\alpha_k)^{n_k-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_1^{(k)}}{x-\alpha_k} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{8.35}$$

бунда

$$Q_1(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \ldots (x^2 + p_ix + q_i)^{m_i}\ .$$

Бу муносабатдаги ўзгармас $A_1^{(1)} \ldots A_{n_k}^{(k)}$ сонлар 1-леммани исботлаш жараёнида унда қатнашган ўзгармасларни ҳисоблаганимиздек топилади.

Энди $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ касрга 2-леммани бир неча марта қўлланиб топамиз:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2} \ldots (x^2+p_i\,x+q_i\,)^{m_i}} =$$

$$= \frac{B_{m_1}^{(1)}x + C_{m_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \frac{B_{m_1-1}^{(1)}x + C_{m_1-1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}} + \ldots + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+ \frac{B_{m_2}^{(2)}x + C_{m_2}^{(2)}}{(x+p_2x+q_2)^{m_2}} + \frac{B_{m_2-1}^{(2)}x + C_{m_2-1}^{(2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m-m_2-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{x^2+p_2x+q_2} + \ldots + \frac{B_{m_i}^{(i)}\,x + C_{m_i}^{(i)}}{(x^2+p_i\,x+q_i\,)^{m_i}} +$$

$$+ \frac{B_{m_i\,-1}^{(i)}x + C_{m_i\,-1}^{(i)}}{(x^2+p_i\,x+q_i\,)^{m_i-1}} + \ldots + \frac{B_1^{(i)}x + C_1^{(i)}}{x^2+p_i\,x+q_i}\,. \tag{8.36}$$

Бу тенгликдаги ўзгармас $B_1^{(1)}$, $C_1^{(1)}$, $\ldots$, $B_{m_i}^{(i)}$, $C_{m_i}^{(i)}$ сонлар 2-леммани исботлаш жараёнида ўзгармасларни ҳисоблаганимиздек топилади.

(8.35) ва (8.36) муносабатлардан теореманинг исботи келиб чиқади.

Юқорида исботланган теоремадаги ўзгармас сонларни бошқача — номаълум коэффициентлар усули деб аталган усул билан ҳам топиш мумкин. Бунда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри каср номаълум коэффициентлари бўлган содда касрларга ёйилиб, сўнг тенгликнинг ўнг томонидаги содда касрлар йиғиндиси умумий махражга келтирилади.

Натижада

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{Q(x)}$$

тенглик ҳосил бўлади ва ундан барча x лар учун ўринли бўлган

$$P(x)=R(x)$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонидаги x нинг бир хил даражалари олдида турган коэффициентларни тенглаштириб, номаълум коэффициентларни топиш учун тенгламалар системаси ҳосил қилинади.

Мисол. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ тўғри касрни содда касрларга ажратинг.

Бу касрнинг махражи $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ бўлгани учун теоремага кўра

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

бўлади. Уни

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

кўринишда ёзиб, ушбу

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3) \quad \text{ёки} \quad 2x-1=(A+B)x-(2A+3B)$$

тенгликка келамиз. Икки кўпҳаднинг тенглигидан фойдаланиб, A ва B ларга нисбатан ушбу

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A+3B=1 \end{cases} \tag{8.37}$$

системага келамиз. (8.37) дан $A=5$, $B=-3$ бўлади. Шундай қилиб, берилган тўғри каср содда касрлар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}+\frac{-3}{x-2}.$$

3. **Содда касрларни интеграллаш.** Содда касрларнинг аниқмас интегралларини ҳисоблаймиз.

1°. $\frac{A}{x-a}$ содда касрнинг аниқмас интеграли:

$$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$$

2°. $\frac{A}{(x-a)^m}$ $(m>1)$ содда касрнинг аниқмас интеграли ҳам тез ҳисобланади:

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}\,dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a)^m}=A\int(x-a)^{-m}\,d(x-a)=$$

$$= \frac{A}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

3°. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ содда касрнинг интеграли $I = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx$ ни ҳисоблаш учун аввал касрнинг махражида турган x^2+px+q квадрат учҳадни ушбу

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

кўринишда ёзиб оламиз. У ҳолда

$$I = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}\,dx$$

бўлади, бунда $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Бу интегралда $x+\frac{p}{x} = t$ алмаштириш бажарамиз:

$$I = B\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{B}{2}\int \frac{d\,(t^2+a^2)}{t^2+a^2} +$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{B}{2}\ln\left[t^2+a^2\right] +$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a} + C_* = \frac{B}{2}\ln\left[x^2+px+q\right] +$$

$$+\frac{2\,C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_*.$$

Демак,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx = \frac{B}{2}\ln\left[x^2+px+q\right] +$$

$$+\frac{(2\,C-Bp)}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_*,$$

бунда C_* — ихтиёрий ўзгармас.

4°. $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$ $(m>1)$ содда касрнинг интеграли $I_m = \int \frac{(Bx+C)\,dx}{(x^2+px+q)^m}$ ни ҳисоблаш учун 3°-ҳолдагидек ўзгарувчини алмаштирамиз: $x+\frac{p}{2}=t$. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$I_m = \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \int \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^m}\,dx =$$

$$= \int \frac{Bt+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}\,dt = \frac{B}{2}\int \frac{d\,(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$$= \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Бу муносабатдаги $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ интеграл ушбу бобнинг 2-§ ида келтирилган интеграл бўлиб, у рекуррент формула орқали ҳисобланади.

4. **Рационал функцияларни интеграллаш.** $f(x)$ рационал функция бўлиб, унинг интегралини ҳисоблаш талаб этилсин.

Маълумки, рационал функция иккита $P(x)$ ва $Q(x)$ — бутун рационал функциялар нисбатидан иборат, яъни

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ нотўғри каср (суратидаги кўпҳаднинг даражаси махраждаги кўпҳаднинг даражасидан катта) бўлса, унинг бутун қисмини ажратиб, бутун рационал функция ҳамда тўғри каср йиғиндиси кўринишида қуйидагича ифодалаб олинади:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

У ҳолда

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int R(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx \qquad (8.38)$$

бўлади.

(8.38) муносабатдаги $\int R(x)\,dx$ интеграл бутун рационал функция (кўпҳад) нинг интеграли бўлиб, у осон ҳисобланади.

Демак, нотўғри касрни интеграллаш тўғри касрни интеграллашга келади. Тўғри касрни интеграллаш учун аввал бу касрни юқорида исбот этилган теоремадан фойдаланиб содда касрлар орқали ифодалаб олинади, сўнгра уларни 3-бандда кўрсатилганидек интегралланади.

Мисол. $\int \frac{dx}{x^4-1}$ ни ҳисобланг.

Интеграл остидаги $\frac{1}{x^4-1}$ касрни содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Бу тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}.$$

У ҳолда

$$1=A(x+1)\cdot(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1),$$

яъни

$$1=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+$$
$$+(A-B-D)$$

бўлади. Натижада A, B, C, D ларни топиш учун

$$\begin{cases}A+B+C=0,\\A-B+D=0,\\A+B-C=0,\\A-B-D=1\end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб,

$$A=\frac{1}{4},\quad B=-\frac{1}{4},\ C=0,\ D=-\frac{1}{2}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

бўлиб,

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

4-§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш

Ушбу параграфда баъзи бир иррационал функцияларни интеграллаш билан шуғулланамиз. Аввало икки ўзгарувчининг рационал функцияси тушунчаси билан танишамиз.

Икки u ва v ўзгарувчи берилган бўлиб, бу ўзгарувчилар ёрдамида

$$u^i v^j \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

кўпайтмаларни тузамиз. Бу кўпайтмалардан тузилган ушбу

$$P(u,\ v)=a_{00}+a_{10}u+a_{01}v+a_{20}u^2+a_{11}uv+a_{02}v^2+$$
$$+\ \ldots+a_{n0}u^n+a_{(n-1)\,1}u^{n-1}\cdot v+\ \ldots+a_{1\,(n-1)}uv^{n-1}+a_{0n}v^n$$

функция u ва v *ўзгарувчиларнинг кўпҳади* деб аталади, бунда a_{00}, a_{10}, a_{01}, ..., a_{n0}, ..., a_{0n} — ўзгармас ҳақиқий сонлар (коэффициентлар).

$P(u,\ v)$ ҳамда $Q(u,\ v)$ лар u ва v ўзгарувчиларнинг кўпҳадлари бўлсин. Ушбу $\frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ $(Q(u, v) \neq 0)$ нисбат u ва v ўзгарувчиларнинг рационал функцияси деб аталади ва у $R(u, v)$ орқали белгиланади:

$$R(u, v) = \frac{R(u, v)}{Q(u, v)}, \quad Q(u, v) \neq 0.$$

Энди u ва v ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида битта x ўзгарувчининг

$$u = \varphi(x),$$
$$v = \psi(x)$$

функциялари бўлсин. У ҳолда $R(u, v)$ функция $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларнинг рационал функцияси бўлади. Масалан, ушбу

$$f(x) = \frac{x - 2\sqrt[3]{x^2 - 1} + 1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

функция $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ ларнинг рационал функциясидир, чунки,

$$R(u, v) = \frac{u^2 - 2v + 1}{u + v}.$$

Хусусан, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ларнинг ҳар бири x ўзгарувчининг рационал функциялари бўлса, у ҳолда ушбу

$$R(u, v) = R(\varphi(x), \psi(x)) = \overline{R}(x)$$

функция шу x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлади. Ҳақиқатан, x ўзгарувчининг рационал функцияларидан иборат $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ лар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш ҳамда бўлиш амаллари бажарилса, натижада x нинг яна рационал функцияси ҳосил бўлади.

1. $R(x, y(x))$ **кўринишдаги функцияларни интеграллаш.** Ушбу

$$\int R(x, y(x))\,dx \tag{8.39}$$

интегрални қарайлик, бунда $R(x, y(x))$ функция x ва $y(x)$ ларнинг рационал функциясидир.

Агар $y(x)$ функция x нинг рационал функцияси бўлса, у ҳолда $R(x, y(x))$ ҳам x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлади ва ушбу

$$\int R(x, y(x))\,dx$$

интеграл рационал функциянинг интеграли бўлади. Бундай интеграллар 3-§ да батафсил ўрганилди.

Агар $y(x)$ функция x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлмаса, у ҳолда равшанки, $R(x, y(x))$ ҳам x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлмайди. Бу ҳолда x ўзгарувчини алмаштириш ёрдамида $R(x, y(x))$ ни рационал функцияга келтириш масаласи келиб чиқади. Агар биз шундай $x = \varphi(t)$ алмаштириш топсакки, натижада $x = \varphi(t)$, $y(x) = y(\varphi(t))$ лар t нинг рационал функциялари бўлса, (бунда $x' = \varphi'(t)$ ҳам рационал функция бўлади), у ҳолда

$$\int R(x,\ y(x))\,dx = \int R(\varphi(t),\ y(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

бўлиб, $\int R(x,\ y(x))\,dx$ интегрални ҳисоблаш ушбу

$$\int R(\varphi(t),\ y(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга келтирилади.

Энди $y(x)$ функциянинг баъзи бир конкрет кўринишга эга бўлган ҳолларини қараймиз:

1°. (8.39) интегралда

$$y(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

бўлсин, бунда a, b, c, d — ўзгармас сонлар, $n \in N$. Бу ҳолда (8.39) интеграл қуйидаги

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \tag{8.40}$$

кўринишни олади. Энди a, b, c, d сонлардан тузилган детерминант нолдан фарқли, яъни

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

деб қараймиз. Агар

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

бўлса, a ва b сонлар, c, d сонларга пропорционал бўлиб, $\frac{ax+b}{cx+d}$ нисбат x га боғлиқ бўлмайди ва $R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ функция x ўзгарувчининг рационал функцияси бўлиб қолади. Бу ҳолда (8.40) интеграл 3-§ да ўрганилган интегралга келади. Шундай қилиб, кейинги мулоҳазаларда $\Delta \neq 0$ деймиз.

(8.40) интегралда

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} = \varphi(t),$$

$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{(ad-bc)\cdot n\cdot t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt$$

бўлиб, (8.40) интеграл ушбу

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R(\varphi(t),\ t)\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n},\ t\right) \cdot \frac{(ad - bc)\, nt^{n-1}}{(a - ct^n)^2}\, dt$$

кўринишни олади.

Демак, қаралаётган

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

интегрални ҳисоблаш ушбу $R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n},\ t\right) \cdot \frac{(ad - bc)\, nt^{n-1}}{(a - ct^n)^2}$ рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$$

интегрални қарайлик. Бу интегрални ҳисоблаш учун

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

деб оламиз. У ҳолда

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4\, tdt}{(t^2 + 1)^2}$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1}$$

бўлади. Натижада берилган интеграл учун топамиз:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} = 2 \int \frac{t^2}{t^2 + 1}\, dt = 2t - 2 \operatorname{arc\,tg} t + C =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

4-эслатма. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ўзгарувчилар берилган бўлсин. Юқоридагига ўхшаш бу ўзгарувчиларнинг рационал функцияси $R(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ тушунчаси киритилади. Фараз қилайлик,

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)$$

функция

$$x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}$$

ларнинг рационал функцияси бўлсин, бунда $r_1, r_2, \ldots, r_n$ рационал сонлар бўлиб, a, b, c, d — ўзгармас сонлар ва $ad - cb \neq 0$. Қуйидаги

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx \qquad (8.41)$$

интегрални қарайлик. Агар $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — рационал сонларни умумий m махражга келтириб, (8.41) интегралда

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

алмаштириш бажарилса, натижада (8.41) интегрални ҳисоблаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

интегрални ҳисобланг. Бу интегралда $t = \sqrt[6]{x}$ алмаштириш бажарамиз. Натижада

$$x = t^6, \quad dx = 6\,t^5 dt$$

бўлиб, берилган интеграл учун топамиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \left[(t^2 - t + 1) - \frac{1}{t+1} \right] dt =$$

$$= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C = 6 \left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| \right) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} -$$

$$- 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C.$$

2°. (8.39) интегралда $y = y(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ бўлсин, бунда a, b, c — ўзгармас сонлар бўлиб, $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад тенг илдизларга эга эмас. (8.39) интеграл қуйидаги

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \quad (a \neq 0) \tag{8.42}$$

кўринишни олади.

Қуйида келтириладиган учта алмаштириш ёрдамида (8.42) интеграл рационал функция интегралига келтирилади.

а) $a > 0$ бўлсин. Бу ҳолда (8.42) интегралда

$$t = \sqrt{a}\,x + \sqrt{ax^2 + bx + c} \tag{8.43}$$

$$(\text{ёки } t = -\sqrt{a}\,x + \sqrt{ax^2+bx+c})$$

алмаштириш бажарамиз. (8.43) тенгликни квадратга кўтарсак,

$$ax^2 + bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\,xt + ax^2$$

бўлиб, ундан

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\,t + b}, \quad dx = \frac{2(\sqrt{a}\,t^2 + bt + c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}\,t + b)^2}\,dt$$

бўлади. Агар

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}\,t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t + b}$$

эканини эътиборга олсак, у ҳолда (8.42) интеграл ушбу

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)\frac{2(\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt$$

кўринишни олади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл остида турган функция t ўзгарувчининг рационал функцияси экани равшандир.

Шундай қилиб, (8.42) интегрални ҳисоблаш $a>0$ бўлганда (8.43) алмаштириш ёрдамида рационал функцияни интеграллашга келтирилади.

б) $c>0$ бўлсин. Бу ҳолда (8.42) интегралда

$$t = \frac{1}{x}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}\right] \tag{8.44}$$

$$\left(\text{ёки } t = \frac{1}{x}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}\right]\right)$$

алмаштириш бажарамиз. (8.44) тенгликни квадратга кўтариб,

$$ax^2+bx+c = x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c,$$

ундан

$$x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}, \quad dx = \frac{2(\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{(a-t^2)^2}\,dt$$

ни топамиз, шунингдек

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}.$$

Натижада (8.42) интеграл қуйидагича ёзилади:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R\left(\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\cdot\frac{2(\sqrt{c}\,t^2+bt+\sqrt{c}\,a}{(a-t^2)^2}\,dt.$$

Равшанки,

$$R\left(\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}\cdot\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\cdot\frac{2(\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}\,a)}{(a-t^2)^2}$$

функция t ўзгарувчининг рационал функциясидир. Демак, бу ҳолда ҳам

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

интегрални ҳисоблаш (8.44) алмаштириш натижасида рационал функцияни интеграллашга келтирилади.

5-эслатма. Юқорида қаралган а) ва б) ҳоллар $x=\frac{1}{z}$ алмаштириш билан бири иккинчисига келади. Ҳақиқатан ҳам, $a>0$, $c>0$ бўлганда (8.43) алмаштириш формуласида $x=\frac{1}{z}$ деб олсак, унда

$$\sqrt{a\frac{1}{z^2}+b\frac{1}{z}+c}=t-\sqrt{a}\cdot\frac{1}{z}$$

бўлиб, кейинги тенгликдан (8.44) алмаштириш формуласи

$$\sqrt{cz^2+bz+a}=tz-\sqrt{a}$$

келиб чиқади.

в) ax^2+bx+c квадрат учҳад ҳар хил x_1 ва x_2 ҳақиқий илдизларга эга бўлсин. Маълумки, x_1 ва x_2 илдизлар орқали ax^2+bx+c квадрат учҳадни

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу ҳолда (8.42) интегралда ушбу

$$t=\frac{1}{x-x_1}\sqrt{ax^2+bx+c} \qquad (8.45)$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t\,(x-x_1)$ ва уни квадратга ошириб, $a(x-x_1)(x-x_2)=t^2(x-x_1)^2$ бўлишини топамиз. Демак,

$$x=\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}\,t,$$

$$dx=\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}\,dt$$

бўлади. У ҳолда (8.42) интеграл ушбу

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=$$

$$=\int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\ \frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}\,t\right)\cdot\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}\,dt$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл остидаги функция t ўзгарувчининг рационал функциясидир.

Шундай қилиб, бу ҳолда (8.45) алмаштириш натижасида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ интегрални ҳисоблаш рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга келади.

Одатда (8.43), (8.44) ва (8.45) алмаштиришлар *Эйлер алмаштиришлари* деб аталади.

Мисол. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ интегрални ҳисобланг.

Бу интеграл учун ($a=1$) Эйлернинг биринчи алмаштиришини ((8.43) га қаранг) бажарамиз:

$$t=x+\sqrt{x^2+x+1}.$$

У ҳолда

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t},\ \sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2+t+1}{1+2t},\ dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,dt$$

бўлиб, берилган интеграл учун

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}\,dt$$

бўлади. Энди

$$2\,\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}=\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}$$

бўлишини эътиборга олиб, топамиз:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+2t}+C=$$

$$=2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}|-\frac{3}{2}\ln|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}|+$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

2. Биномиал дифференциалларни интеграллаш. Ушбу

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

дифференциал ифода *биномиал дифференциал* деб аталади, бунда a, b — ўзгармас сонлар, m, n, p — рационал сонлар.

Биномиал дифференциалларнинг

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \qquad (8.46)$$

интегралини қараймиз.

Равшанки, бу интегрални ҳисоблаш m, n, p — рационал сонларга боғлиқ. Машҳур рус математиги П. Л. Чебишев кўрсатганки, (8.46) интеграл қуйидаги учта

1) p — бутун сон,

2) $\frac{m+1}{n}$ — бутун сон,

3) $\frac{m+1}{n}+p$ — бутун сон

ҳолдагина рационал функцияларнинг интеграли орқали ифодаланади.

1) *p — бутун сон бўлсин.* Бу ҳолда m ва n рационал сонлар (яъни касрлар) махражининг энг кичик умумий бўлувчисини σ орқали белгилаб, (8.46) интегралда $x=t^\sigma$ алмаштириш бажарилса, интеграл остидаги функция рационал функцияга айланиб, (8.46) интеграл рационал функциянинг интегралига келтирилади.

2) *$\frac{m+1}{n}$ — бутун сон бўлсин.* Аввал (8.46) интегралда

$$x=t^{\frac{1}{n}}$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада (8.46) интеграл қуйидаги

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p\, t^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt \qquad (8.47)$$

кўринишни олади. Қисқалик учун

$$q = \frac{m+1}{n} - 1$$

деб белгилаймиз. Бу ҳолда p — каср соннинг махражини s билан белгилаб, (8.47) интегралда

$$z = (a+bt)^{\frac{1}{s}} = (a+bx^n)^{\frac{1}{s}}$$

алмаштириш бажарилса, натижада интеграл остидаги ифода рационал функцияга айланиб, яна (8.46) интеграл рационал функция интегралини ҳисоблашга келтирилади.

3) *$p+q$ — бутун сон бўлсин.* Юқоридаги (8.47) интегрални қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\int (a+bt)^p\, t^q\,dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p \cdot t^{p+q}\,dt.$$

Агар кейинги интегралда

$$z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}$$

алмаштириш бажарилса, (8.46) интеграл рационал функциянинг интегралига келади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$$

интегрални қарайлик. Бу интегрални (8.46) интеграл билан таққослаб, $p = -2$ (бутун сон) эканлигини аниқлаймиз. Юқорида қаралган 1) ҳолга кўра $x = t^6$ $(t = \sqrt[6]{x})$ алмаштириш бажариб топамиз:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл остидаги функцияни

$$\frac{t^8}{(1+t^2)^2} = t^4 - 2t^2 + 3 - 4\cdot\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{(t^2+1)^2}$$

кўринишда ёзиш мумкин эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^3}{3} + 3t - 4\,\mathrm{arctg}\,t + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

бўлади. Охирги интеграл шу бобнинг 2-§ ида келтирилган (8.17) рекуррент муносабат ёрдамида осонгина ҳисобланади:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 3t - \frac{7}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} + C.$$

Демак, $t = \sqrt[6]{x}$ эканини эътиборга олиб, узил-кесил ёзамиз:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} - 21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} +$$

$$+ 3\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ интегрални ҳисобланг.

Бу интегрални $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}\,dx$ кўринишда ёзиб, $m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{2}$ бўлишини топамиз. Бу ҳолда $\frac{m+1}{n}=3$ бўлиб,

$$t = (1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$1+x^{\frac{2}{3}} = t^2,\ x = (t^2-1)^{\frac{3}{2}} \text{ ва } dx = \frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t\,dt$$

бўлиб, берилган интеграл учун ушбу

$$\int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}\,dx = 3\int (t^2-1)^2 t^2\,dt = 3\frac{t^7}{7} - 6\frac{t^5}{5} +$$

$$+ t^3 + C,\ t = \sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$$

ифода топилади.

5-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш

Ушбу параграфда тригонометрик функцияларни интеграллаш билан шуғулланамиз.

Юқоридагидек, $R(\sin x, \cos x)$ орқали $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг рационал функциясини белгилайлик. Бундай ифоданинг

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx \qquad (8.48)$$

интегралини қарайлик.

Агар (8.48) интегралда

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\ (-\pi < x < \pi) \qquad (8.49)$$

алмаштириш бажарилса, у ҳолда (8.48) интеграл остидаги $R(\sin x, \cos x)\,dx$ ифода t ўзгарувчининг рационал функциясига айланиб, (8.48) интегрални ҳисоблаш рационал функция интегралини ҳисоблашга келади.

Дарҳақиқат, қуйидаги

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

муносабатларни эътиборга олсак, у ҳолда (8.48) интеграл қуйидаги

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

кўринишга келади. Равшанки,

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}$$

функция t ўзгарувчининг рационал функцияси. Демак, (8.48) интегрални ҳисоблаш рационал функция интегралини ҳисоблашга келади.

Мисол. $\int\frac{dx}{3+\sin x}$ интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ алмаштириш бажарамиз. Натижада топамиз:

$$\int\frac{dx}{3+\sin x} = \int\frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int\frac{dt}{3t^2+2t+3},$$

$$2\int\frac{dt}{3t^2+2t+1} = \frac{2}{3}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} 3\cdot\frac{t+\frac{1}{3}}{2\sqrt{2}} + C.$$

емак,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} + C.$$

Шуни таъкидлаш лозимки, $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$ интегралда $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ алмаштириш универсал алмаштириш бўлиб, у (8.48) интегрални ҳар доим рационал функция интегралига келтирса-да, кўпинча бу алмаштириш мураккаб ҳисоблашларга олиб келади.

Айрим ҳолларда тригонометрик функцияларни интеграллашда $t = \operatorname{tg} x$, $t = \sin x$, $t = \cos x$ алмаштиришлар қулай бўлади.

Мисоллар. 1. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ интегрални қарайлик. Агар бу интегралда $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ универсал алмаштириш бажарилса, у ҳолда

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = 2 \int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4} dt$$

бўлади. Бироқ қаралаётган интегралда $t = \operatorname{tg} x$ алмаштириш бажарилса, у ҳолда

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + t^2)\, dt$$

бўлиб, ундан

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

бўлишини топамиз.

2. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^5 x}$ интегралда $t = \sin x$ алмаштириш бажариб топамиз:

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\, d \sin x}{\sin^5 x} = \int \frac{(1-t^2)}{t^5} dt =$$

$$= \frac{t^{-4}}{-4} - \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} + C.$$

9-БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

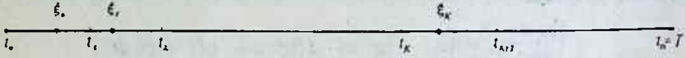
1-§. Масалалар

Ушбу параграфда аниқ интеграл тушунчасига олиб келадиган масалалардан баъзи бирларини келтирамиз.

1. Ўтилган йўл ҳақидаги масала. Бирор моддий нуқта тўғри чизиқ бўйича $[t_0, T]$ вақт оралиғида $v = v(t)$ тезлик билан ($t \in [t_0, T]$) ҳаракат қилаётган бўлса, унинг босиб ўтган йўли S ни топиш талаб этилсин. Равшанки, агар нуқта тезлиги ўзгармас (текис ҳаракат) бўлса, яъни $v(t) = v_0 = \text{const}$, у ҳолда $s = v_0(T - t_0)$ бўлади. Энди $v(t)$ — ихтиёрий функция бўлсин. Бу ҳолда масалани ҳал этиш учун $[t_0, T]$ вақт оралиғини

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-1},\ t_n = T \quad (t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n)$$

нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўламиз ва ҳар бир $[t_k, t_{k+1}]$ бўлакда (сегментда) ихтиёрий ξ_k ($\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$) нуқта оламиз (51-чизма).



51-чизма.

Агар ҳар бир $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) сегментда нуқтанинг тезлиги $v = v(t)$ ўзгармас ва $v(\xi_k)$ га тенг деб олинса, у ҳолда нуқтанинг $[t_k, t_{k+1}]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўли ушбу

$$v(\xi_k)(t_{k+1} - t_k)$$

миқдор билан, унинг $[t_0\ T]$ вақт оралиғида босиб ўтган йўли s эса

$$s \approx v(\xi_0)(t_1 - t_0) + v(\xi_1)(t_2 - t_1) + \ldots + v(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) + \\ + \ldots + v(\xi_{n-1})(t_n - t_{n-1}) \tag{9.1}$$

миқдор билан аниқланади. Бунда $t_{k+1} - t_k = \Delta t_k$ ($k = 0, 1, \ldots, n - 1$) деб белгиласак, юқоридаги (9.1) ифодани қисқача, йиғинди белгиси Σ (сигма) ёрдамида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$s \approx \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\, \Delta t_k. \tag{9.1$'$}$$

Нуқтанинг $[t_0, T]$ да босиб ўтган йўлини ифодаловчи (9.1′) формула тақрибийдир. Ҳақиқатан, биз нуқтанинг тезлиги $v = v(t)$ вақтнинг функцияси бўлса ҳам, уни ҳар бир $[t_k, t_{k+1}]$ вақт оралиғида ўзгармас $v(\xi_k)$ деб ҳисобладик.

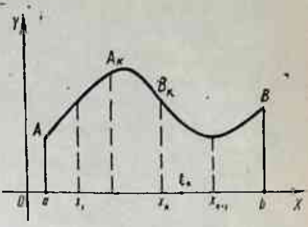
Энди $[t_0, T]$ оралиқнинг бўлаклари сонини шундай орттира борайликки, бунда ҳар бир оралиқ узунлиги Δt_k нолга интила борсин. У ҳолда

$$\sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\cdot\Delta t_k$$

миқдор биз излаётган йўл миқдорини тобора аниқроқ ифодалай боради, деб ҳисоблаш табиийдир.

2. Эгри чизиқли трапециянинг юзи. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ҳамда $\forall\, x \in [a, b]$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал чизиқлар ҳамда пастдан Ox — абсцисса ўқи билан чегараланган шаклни қарайлик (52-чизма).



52- чизма.

Одатда, бундай шакл эгри чизиқли трапеция деб аталади. $aABb$— эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш талаб этилсин.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгармас, яъни

$$f(x) = C = \text{const}$$

бўлса, у ҳолда $aABb$ шакл тўғри тўртбурчак бўлиб, унинг юзи

$$S = C\cdot(b-a)$$

формула билан аниқланади.

Агар $f(x)$ функция учун $[a, b]$ сегментда $f(x) \neq C = \text{const}$ бўлиб, у x нинг ихтиёрий узлуксиз функцияси бўлса, у ҳолда $aABb$ шаклнинг юзини топиш учун $[a, b]$ сегментни

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b\ (x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$$

нуқталар билан n та бўлакка бўламиз ва ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ сегментда ихтиёрий ξ_k $(\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$ нуқта оламиз. Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ сегментда $f(x)$ функцияни ўзгармас ва уни $f(\xi_k)$ га тенг қилиб олсак, у ҳолда $x_k\ A_k\ B_k\ x_{k+1}$ эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$f(\xi_k)\ (x_{k+1} - x_k)$$

га тенг бўлиб, $aABb$ шаклнинг юзи эса

$$S \approx f(\xi_0)\ (x_1 - x_0) + f(\xi_1)\ (x_2 - x_1) + \ldots +$$
$$+ f(\xi_k)\ (x_{k+1} - x_k) + \ldots + f(\xi_{n-1})\ (x_n - x_{n-1})$$

миқдор билан аниқланади. Демак,

$$S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k, \tag{9.2}$$

бунда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Кўриниб турибдики, $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодаловчи (9.2) формула тақрибий формуладир. Энди $[a, b]$ сегментнинг бўлаклари сонини шундай орттира борайлики, бунда ҳар бир сегмент узунлиги Δx_k нолга интила борсин. У ҳолда $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$ йиғиндининг миқдори ҳам ўзгара боради. Равшанки, бу миқдорлар борган сари $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзини аниқроқ ифодалай боради.

Юқорида келтирилган икки масалани ҳал қилишда ундаги $v(t)$ ҳамда $f(x)$ функциялар устида бир хил тадбирлар амалга оширилди, яъни

а) функция аниқланиш соҳасини (тўпламини) бўлакларга бўлиш;

б) ҳар бир бўлакда ихтиёрий ξ_k нуқтани олиб, бу нуқтада функциянинг қийматини ҳисоблаш;

в) функциянинг ξ_k нуқтадаги қийматини, мос оралиқнинг узунлигига кўпайтириб, улардан йиғинди тузиш ишлари бажарилди.

Сўнг оралиқнинг бўлаклари сони шундай орттира борилдики, бунда ҳар бир оралиқча узунлиги нолга интила борди.

Натижада тузилган йиғиндиларнинг миқдорлари мос равишда ўтилган йўл ёки эгри чизиқли трапеция юзини тобора аниқроқ ифодалай боришини пайқадик. Умуман, жуда кўп масалаларнинг ечими юқоридагига ўхшаш йиғиндиларнинг лимитини (йиғиндининг лимити кейинги параграфда аниқ таърифланади) топиш билан ҳал қилинади. Бундай йиғиндиларнинг лимити математик анализнинг асосий тушунчаларидан бири — аниқ интеграл тушунчасига олиб келади.

2-§. Аниқ интеграл таърифи

Функциянинг аниқ интегралини таърифлашдан аввал баъзи бир тушунчалар, жумладан $[a, b]$ сегментни бўлаклаш, функциянинг интеграл йиғиндиси тушунчалари билан танишамиз.

Ихтиёрий тўпламни бўлаклаш тушунчаси мазкур курснинг 1-бобида келтирилган эди. Бу тушунчанинг қаралаётган мавзумиз учун муҳимлигини эътиборга олиб биз қуйида уни сегмент учун яна бир бор баён этамиз.

1. $[a, b]$ ни бўлаклаш. Бирор $[a, b] \subset R$ сегмент берилган бўлсин. Унинг ушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

муносабатда бўлган чекли сондаги ихтиёрий $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ нуқталари системасини олайлик. Агар $A_1 = [x_0, x_1]$, $A_i = [x_{i-1}, x_i]$ $i = 2, 3, \ldots, n$ деб белгиласак, у ҳолда равшанки,

1°. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = [a, b]$;

2°. $A_k \cap A_j = \varnothing$, $(k \neq j,\ k,\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Мазкур курснинг 1-бобидаги тўпламни бўлаклаш тушунчаси таърифига биноан $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ система $[a, b]$ да бўлаклаш бажарган бўлади. Ва аксинча, агар бизга $[a, b]$ сегментнинг бирор чекли $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ бўлаклаши берилган бўлса, у ушбу

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b$$

муносабатда бўлган чекли сондаги $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m$ нуқталар системасини аниқлайди. Бинобарин, биз тўпламни бўлаклаш таърифига эквивалент бўлган қуйидаги таърифни киритa оламиз.

1-таъриф. $[a, b]$ сегментнинг ушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

муносабатда бўлган ихтиёрий чекли сондаги $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ нуқталари системаси $[a, b]$ сегментда бўлаклаш бажаради дейилади. У

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

каби белгиланади.

Ҳар бир x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ нуқта бўлаклашнинг бўлувчи нуқтаси, $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ сегмент эса P бўлаклашнинг *оралиғи* дейилади.

P бўлаклаш оралиқлари узунлиги $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ $(k = \overline{0, n-1})$ энг каттаси, яъни ушбу

$$\lambda_P = \max\{\Delta x_k\} = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_k, \ldots, \Delta x_{n-1}\}$$

миқдор P бўлаклашнинг *диаметри* деб аталади.

Мисол. $[a, b] = [0, 1]$ бўлсин. Нуқталарнинг қуйидаги

$$0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, \frac{10}{10} = 1;$$

$$0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, \frac{10}{10} = 1;$$

$$0, \frac{1}{10}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10} = 1;$$

$$0, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \ldots, \frac{19}{20}, \frac{20}{20} = 1$$

системалари $[0, 1]$ сегментнинг

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, 1\right\};$$

$$P_2 = \left\{0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 1\right\};$$

$$P_3 = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{9}{10}, 1\right\};$$

$$P_4 = \left\{0, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \ldots, \frac{19}{20}, 1\right\}$$

бўлаклашлари бўлиб, уларнинг диаметрлари мос равишда

$$\lambda_{P_1} = \frac{1}{10},\ \lambda_{P_2} = \frac{1}{5},\ \lambda_{P_3} = \frac{4}{5},\ \lambda_{P_4} = \frac{1}{20}$$

бўлади.

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан кўринадики, $[a, b]$ сегмент берилган ҳолда турли усуллар билан бу сегментни исталган сондаги бўлаклашларни тузиш мумкин экан. Бу бўлаклашлардан иборат тўпламни $\mathcal{P}$ билан белгилаймиз: $\mathcal{P} = \{P\}$.

2. Интеграл йиғинди. $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функция аниқланган бўлсин, $[a, b]$ сегментни

$$P = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_n\} \in \mathcal{P}$$

бўлаклашни ва бу бўлаклашнинг ҳар бир $[x_k,\ x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ оралиқда ихтиёрий ξ_k $(\xi_k \in [x_k,\ x_{k+1}])$ нуқта оламиз. Берилган функциянинг ξ_k нуқтадаги қиймати $f(\xi_k)$ ни $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ га кўпайтириб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_k)\,\Delta x_k + \ldots +$$
$$+ f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

2-таъриф. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k \tag{9.3}$$

йиғинди $f(x)$ функциянинг *интеграл йиғиндиси* деб аталади.

Масалан, 1) $f(x) = x$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги интеграл йиғиндиси

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\,\Delta x_k$$

бўлади, бунда

$$x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

2) Дирихле функцияси

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in [a, b] \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \in [a, b] \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

нинг интеграл йиғиндиси қуйидаги

$$\sum_{k=0}^{n-1} D(\xi_k)\,\Delta x_k = \begin{cases} b - a, & \text{агар барча } \xi_k \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар барча } \xi_k \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

кўринишга эга бўлади.

Равшанки, $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси σ $f(x)$ функцияга, $[a, b]$ сегментни бўлаклаш усулларига ҳамда ҳар бир $[x_k,\ x_{k+1}]$ сегментдан олинган ξ_k нуқталарга боғлиқ бўлади.

3. **Аниқ интеграл таърифи.** $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг шундай

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m, \ldots \qquad (9.4)$$

($P_m \in \mathcal{P}$, $m = 1, 2, \ldots$) бўлакларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \lambda_{P_3}, \ldots, \lambda_{P_m}, \ldots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \to 0$.

Бундай P_m ($m = 1, 2, \ldots$) бўлаклашларга нисбатан $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиларини тузамиз. Натижада $[a, b]$ сегментни (9.4) бўлаклашларга мос $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндилари қийматларидан иборат қуйидаги

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_m, \ldots \qquad (9.5)$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Равшанки, бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади ξ_k нуқталарга боғлиқдир.

3-таъриф. Агар $[a, b]$ сегментни ҳар қандай (9.4) бўлаклашлар кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик ξ_k нуқталарнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I сон σ *йиғиндининг $\lambda_P \to 0$ даги лимити* деб аталади. У

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, \Delta x_k = I \qquad (*)$$

каби белгиланади.

Йиғинди лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

3′-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $[a, b]$ сегментни диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклаш учун тузилган σ йиғинди ихтиёрий ξ_k нуқталарда

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда I сон σ *йиғиндининг $\lambda_P \to 0$ даги лимити* деб аталади. У юқоридагидек ((*) га қаранг) белгиланади. Йиғинди лимитининг бу таърифлари эквивалент таърифлардир.

4-таъриф. Агар $\lambda_P \to 0$ да $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси (9.3) чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда *интегралланувчи* дейилади, σ — йиғиндининг чекли лимити, I эса — $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги *аниқ интеграли* деб аталади. Функциянинг аниқ интеграли

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Бунда a сон интегралнинг қуйи чегараси, b сон эса интегралнинг юқори чегараси, $[a, b]$ сегмент *интеграллаш оралиги* деб аталади.

1-§ да келтирилган масалаларнинг биринчисида s йўл $v(t)$ тезликнинг $[t_0, T]$ сегментдаги аниқ интеграли:

$$s = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt,$$

иккинчисида эса $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг S юзи $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги аниқ интеграли

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

дан иборат.

Агар $\lambda_P \to 0$ да йиғиндининг лимити мавжуд бўлмаса ёки унинг лимити чексиз бўлса, у холда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланмайди дейилади.

Мисоллар. 1. $f(x) = C = \text{const}$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги интегрални хисоблаймиз. $[a, b]$ сегментни ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \ (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

бўлаклашни олиб, $f(x) = C$ функциянинг интеграл йиғиндисини топамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} C\,\Delta x_k = C \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = C\,[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots +$$
$$+ (x_n - x_{n-1})] = C\,(x_n - x_0) = C\,(b - a).$$

Равшанки,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} C\,(b - a) = C\,(b - a).$$

Демак,

$$\int_a^b C \cdot dx = C\,(b - a).$$

Хусусан, $f(x) = 1$ бўлганда қуйидагига эгамиз:

$$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$$

2. Ушбу $f(x) = x$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги интегрални хисоблайлик.

Маълумки, $[a, b]$ сегментда $f(x) = x$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \, \Delta x_k$$

бўлиб, бунда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ва

$$x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}. \qquad (9.6$$

Бу (9.6) тенгсизликни $\Delta x_k > 0$ га кўпайтириб топамиз:

$$x_k \cdot \Delta x_k \leqslant \xi_k \cdot \Delta x_k \leqslant x_{k+1} \cdot \Delta x_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Кейинги тенгсизликлардан эса

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

Демак, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \leqslant \sigma \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k.$ (9.7)

Энди $\sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k$ ва $\sum\limits_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k$ йиғиндиларни қуйидагича ўзгартириб ёзиб оламиз:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 = \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Агар $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + \Delta x_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Демак,

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leqslant \sigma \leqslant \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Бу муносабатдан

$$\left|\sigma - \frac{b^2-a^2}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

тенгсизлик келиб чиқади. Сўнгра $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$ учун

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leq \lambda_P \cdot \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{b-a}{2} \cdot \lambda_P$$

(бунда $\lambda_P = \max\limits_k \{\Delta x_k\}$) бўлишидан $\lambda_P \to 0$ да

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \to 0$$

бўлишини топамиз.

Демак,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Бу эса таърифга кўра

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

эканлигини билдиради.

3. $[a, b]$ сегментда Дирихле функцияси учун аниқ интеграл мавжуд эмаслигини кўрсатамиз.

Дирихле функцияси $D(x)$ учун интеграл йиғинди қуйидагича бўлишини кўрган эдик:

$$\sigma = \begin{cases} b-a, & \text{агар барча } \xi_k \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар барча } \xi_k \text{ — иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Равшанки $\lambda_P \to 0$ да σ йиғинди лимитга эга бўлмайди, чунки $[a, b]$ сегмент учун ихтиёрий бўлаклаш олинганда ҳам ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ сегментда ξ_k нуқтани рационал қилиб олинса, интеграл йиғинди $b-a$ га, ξ_k нуқтани иррационал қилиб олинса, ўша интеграл йиғинди нолга тенг бўлади. Демак, Дирихле функцияси $[a, b]$ сегментда интегралланмайди.

Одатда, юқорида келтирилган аниқ интеграл Риман интеграли, σ интеграл йиғинди Риман йиғиндиси дейилади.

1-эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда чегараланмаган бўлса, у шу сегментда интегралланмайди.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда юқоридан чегараланмаган бўлсин. У ҳолда $\forall P \in \mathcal{P}$ бўлаклаш олинганда ҳам бу бўлаклашнинг бирорта, масалан, $[x_k, x_{k+1}]$ сегментида $f(x)$ функция юқоридан чегараланмаган бўлади. Демак, $\forall M>0$ сон олинганда ҳам шундай $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ нуқта мавжудки,

$$f(\xi_k) > \frac{M}{\Delta x_k}, \text{ яъни } f(\xi_k)\cdot\Delta x_k > M$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди ξ_k нуқтани юқоридагидек олиб, $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_{n-1}$ нуқталарни эса мос равишда $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{k-1}, x_k]$; $[x_{k+1}, x_{k+2}]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ сегментларда танлаб, $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндисини тузсак, бу интеграл йиғиндининг қиймати ҳар қанча катта бўлишини билиш қийин эмас. Равшанки, бу ҳолда интеграл йиғинди чекли лимитга эга бўлмайди. Демак, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланмайди.

Шундай қилиб, $[a, b]$ сегментда интегралланувчи функция шу оралиқда чегараланган бўлиши зарур.

Кейинги мулоҳазаларда $[a, b]$ сегментни $[a, b]$ ёпиқ оралиқ, қисқача $[a, b]$ оралиқ деб ҳам атаймиз.

3-§. Дарбу йиғиндилари. Аниқ интегралнинг бошқача таърифи

1. Дарбу йиғиндилари. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, у шу оралиқда чегараланган бўлсин. Демак, шундай ўзгармас m ва M сонлар мавжудки, $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \tag{9.8}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Энди $[a, b]$ оралиқни бирор

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}$$

$(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ бўлаклашни олайлик. Модомики, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган экан, функция ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ оралиқда ҳам чегараланган бўлиб, бу функциянинг аниқ чегаралари

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \\ M_k &= \sup\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \end{aligned} \tag{9.9}$$

мавжуд бўлади (2-боб, 6-§).

Равшанки, ихтиёрий $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ учун

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k \tag{9.10}$$

тенгсизликлар ҳам ўринли бўлади. Энди m_k ва M_k сонларни $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқнинг узунлиги $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ га кўпайтириб қуйидаги

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + \ldots + m_k \Delta x_k + \ldots + m_{n-1} \Delta x_{n-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k = M_0 \Delta x_0 + M_1 \Delta x_1 + \ldots + M_k \cdot \Delta x_k + \ldots + M_{n-1} \Delta x_{n-1}$$

йиғиндиларни тузамиз.

5-таъриф. Ушбу

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k, \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot x_k \qquad (9.11)$$

йиғиндилар мос равишда *Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари* деб аталади. Бу таърифдаги m_k ва M_k сонлар учун $m_k \leqslant M_k (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ тенгсизлик ўринли бўлганидан

$$s \leqslant S \qquad (9.12)$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлиши келиб чиқади.

Равшанки, (9.11) йиғиндилар $f(x)$ функцияга боғлиқ бўлиши билан бирга $[a, b]$ оралиқни P бўлаклашга ҳам боғлиқ бўлади, яъни

$$s = s_f(P), \quad S = S_f(P).$$

Аммо, биз ҳамма вақт муайян битта функциянинг интеграли тушунчасини ўрганамиз, шуни эътиборга олиб, соддалик учун, Дарбу йиғиндиларини $s(P)$ ва $S(P)$ каби белгилаб борамиз. (9.10) тенгсизликларни Δx_k га кўпайтириб топамиз:

$$m_k \cdot \Delta x_k \leqslant f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leqslant M_k \Delta x_k \ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Кейинги тенгсизликлардан эса

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Демак,

$$s(P) \leqslant \sigma \leqslant S(P). \qquad (9.13)$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси ҳар доим унинг Дарбу йиғиндилари орасида бўлар экан.

(9.10) муносабатдан яна битта хулоса чиқариш мумкин: ξ_k нуқтани танлаб олиш ҳисобига $f(\xi_k)$ ни m_k, шунингдек, M_k қийматларга ҳар қанча яқин келтириш мумкин. Бундан эса Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари берилган бўлаклаш учун интеграл йиғиндининг мос равишда аниқ қуйи ҳамда аниқ юқори чегаралари бўлиши келиб чиқади:

$$s = \inf_{\xi_k} \{\sigma\}, \quad S = \sup_{\xi_k} \{\sigma\}. \qquad (9.14)$$

Энди (9.8) ва (9.9) муносабатларга кўра (функциянинг аниқ чегаралари хоссаларидан фойдаланамиз, 2-бобнинг 6-§ га қаранг):

$$m \leqslant m_k, \ M_k \leqslant M \ (k=0, 1, \ldots, n-1)$$

тенгсизликлар ўринли. Шунинг учун ушбу

$$s(P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k \geqslant m \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = m(b-a),$$

$$S(P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = M(b-a)$$

тенгсизликлар ҳам ўринли. Равшанки,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b-a.$$

Демак, $\forall P \in \mathscr{P}$ учун қуйидаги

$$m \cdot (b-a) \leqslant s(P) \leqslant S(P) \leqslant M(b-a) \qquad (9.15)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу эса Дарбу йиғиндиларининг чегараланганлигини билдиради.

2. **Аниқ интегралнинг бошқача таърифи.** $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, у шу оралиқда чегараланган бўлсин. $[a, b]$ оралиқни бўлаклашлар тўплами $\mathscr{P}=\{P\}$ нинг ҳар бир $P \in \mathscr{P}$ бўлаклашга нисбатан $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари $s(P)$, $S(P)$ ни тузиб,

$$\{s(P)\}, \quad \{S(P)\}$$

тўпламларни қараймиз. Бу тўпламлар (9.15) га кўра чегараланган бўлади.

6-таъриф. $\{s(P)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги *қуйи интеграли* деб аталади. У

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

каби белгиланади.

$\{S(P)\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги *юқори интеграли* деб аталади. У

$$\overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(P)\},$$

$$\overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(P)\}.$$

Шуни таъкидлаш лозимки, $[a, b]$ да чегараланган ҳар қандай функциянинг қуйи ва юқори интеграллари мавжуд бўлади.

7-таъриф. Агар $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги қуйи ҳамда юқори интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда *интегралланувчи* дейилади, уларнинг умумий қиймати

$$I = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги *аниқ интеграли* дейилади. Агар

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланмайди дейилади.

Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Мисоллар. 1. $f(x) = x$ функцияни $[a, b]$ оралиқда қарайлик. Бу $[a, b]$ оралиқни ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

бўлаклашни оламиз. Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ оралиқда

$$m_k = \inf\{f(x)\} = \inf\{x\} = x_k,$$

$$M_k = \sup\{f(x)\} = \sup\{x\} = x_{k+1}.$$

Шу сабабли бу функциянинг Дарбу йиғиндилари учун

$$s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2,$$

$$S(P) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}\Delta x_k = \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

ифодаларни топамиз. Бундан эса қуйидагига эгамиз:

$$\sup\{s(P)\} = \sup\left\{\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2\right\} = \frac{b^2-a^2}{2},$$

$$\inf\{S(P)\} = \inf\left\{\frac{b^2-a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2\right\} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Шундай қилиб,

$$\underline{\int_a^b} xdx = \frac{b^2-a^2}{2}, \quad \overline{\int_a^b} xdx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

ва

$$\underline{\int_a^b} xdx = \overline{\int_a^b} xdx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Демак, $f(x) = x$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи ва

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

2. $[a, b]$ оралиқда Дирихле функцияси $D(x)$ ни қарайлик. $[a, b]$ оралиқни ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

бўлаклашни олиб, унга нисбатан Дарбу йиғиндиларини ёзамиз:

$$S_p(D) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = 0,$$

$$S_p(D) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a.$$

Бундан

$$\sup\{s_p(D)\} = 0, \quad \inf\{S_p(D)\} = b - a$$

экани келиб чиқади. Демак,

$$\underline{\int_a^b} D(x)\,dx = 0, \quad \overline{\int_a^b} D(x)\,dx = b - a.$$

Дирихле функциясининг $[a, b]$ оралиқда қуйи ҳамда юқори интеграллари мавжуд бўлса-да,

$$\underline{\int_a^b} D(x)dx \neq \overline{\int_a^b} D(x)\,dx$$

бўлгани сабабли бу функция $[a, b]$ оралиқда интегралланмайди.

4-§. Аниқ интеграл таърифларининг эквивалентлиги

Биз 2- ва 3-§ да функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интегралига икки хил таъриф бердик. Ушбу параграфда эса улар ўзаро эквивалент таърифлар эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун аввал $[a, b]$ оралиқни бўлаклашларнинг ҳамда Дарбу йиғиндиларининг хоссаларини келтирамиз.

1. $[a, b]$ оралиқни бўлаклашларнинг хоссалари. $\mathscr{P} =$

$=\{ P \}$ тўплам $[a, b]$ оралиқни барча бўлаклашлардан иборат тўплам бўлиб, $P_1 \in \mathscr{P}$, $P_2 \in \mathscr{P}$ бўлсин.

Агар P_1 бўлаклашнинг ҳар бир бўлувчи нуқтаси P_2 бўлаклашнинг ҳам бўлувчи нуқтаси бўлса, P_2 бўлаклаш P_1 ни *эргаштиради* деб аталади ва $P_1 \propto P_2$ каби белгиланади. Масалан, $[a, b] = [0, 1]$ бўлсин. Ушбу

$$P_1 = \left\{ 0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, \frac{10}{10} = 1 \right\},$$

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, \frac{10}{10} = 1 \right\}$$

бўлаклашлар учун $P_1 \propto P_2$ бўлади.

1°. Агар $P_1 \in \mathscr{P}$, $P_2 \in \mathscr{P}$, $P_3 \in \mathscr{P}$ бўлаклашлар учун $P_1 \propto P_2$, $P_2 \propto P_3$ бўлса, у ҳолда $P_1 \propto P_3$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $P_1 \propto P_2$ бўлишидан P_1 бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари P_2 нинг ҳам бўлувчи нуқталари, $P_2 \propto P_3$ бўлишидан эса ўша бўлувчи нуқталар P_3 бўлаклашнинг ҳам бўлувчи нуқталари эканлиги келиб чиқади. Демак, $P_1 \propto P_3$.

2°. $\forall P_1 \in \mathscr{P}$, $\forall P_2 \in \mathscr{P}$ бўлаклашлар учун шундай $P \in \mathscr{P}$ бўлаклаш мавжудки, $P_1 \propto P$, $P_2 \propto P$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$P_1 = \{ x_0', x_1', \ldots, x_n' \} \in \mathscr{P},$$

$$P_2 = \{ x_0'', x_1'', \ldots, x_m'' \} \in \mathscr{P}$$

бўлсин.

Бу бўлаклашларнинг барча бўлувчи нуқталари тўплам элементларини ўсиш тартибида ёзайлик:

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_s = b; \ (s \geqslant m_1, \ s \geqslant n, \ s \leqslant m + n).$$

Равшанки, ушбу

$$P = \{ y_0, y_1, \ldots y_n \}$$

бўлаклаш учун $P_1 \propto P$, $P_2 \propto P$ бўлади.

2. **Дарбу йиғиндиларининг хоссалари.** $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин. $P_1 \in \mathscr{P}$, $P_2 \in \mathscr{P}$ бўлаклашларга нисбатан Дарбу йиғиндиларини тузамиз. Улар мос равишда

$$s(P_1), \ S(P_1)$$

ва

$$s(P_2), \ S(P_2)$$

бўлсин. Дарбу йиғиндилари қуйидаги хоссаларга эга:

1°. *Агар $P_1 \propto P_2$ бўлса, у ҳолда*

$$s(P_1) \leqslant s(P_2)$$

$$S(P_1) \geqslant S(P_2)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Исбот. $[a, b]$ оралиқнинг P_1 бўлаклаши $P_1 = \{ x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n \}$ кўринишда бўлиб, P_2 бўлаклаш эса, $P_1 \propto P_2$ бўлсин. Содалик учун, P_2 бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари P_1 нинг барча $x_0, x_1, \ldots x_n$ бўлувчи нуқталари ҳамда қўшимча битта $x^* \in [a, b]$ нуқтадан иборат бўлсин. Бу x^* нуқта x_k ҳамда x_{k+1} нуқталар орасида жойлашсин:

$$x_k < x^* < x_{k+1}.$$

Демак,

$$P_2 = \{ x_0, x_1, \ldots, x_k, x^*, x_{k+1}, \ldots, x_n \}.$$

P_1 ва P_2 бўлаклашларга нисбатан Дарбунинг юқори йиғиндилари қуйидагича ёзилади:

$$S(P_1) = M_0 \Delta x_0 + M_1 \Delta x_1 + \ldots + M_k \Delta x_k + \ldots + M_{n-1} \Delta x_{n-1},$$

$$S(P_2) = M_0 \Delta x_0 + \ldots + (M_k^{'} \Delta \overline{x}_k^{'} + M_k^{''} \Delta x_k^{''}) + \ldots + M_{n-1} \Delta x_{n-1}, \qquad (9.16)$$

бунда

$$M_k^{'} = \sup \{ f(x),\ x \in [x_k, x^*] \}$$

$$M_k^{''} = \sup \{ f(x),\ x \in [x^*, x_{k+1}] \}$$

ва

$$\Delta \overline{x}_k^{'} = x^* - x_k,\ \Delta x_k^{''} = x_{k+1} - x^*.$$

(9.16) муносабатлардан кўринадики, $S(P_1)$ ва $S(P_2)$ йиғиндиларнинг бир-биридан фарқи қуйидагича: $S(P_1)$ йиғиндида $M_k \cdot \Delta x_k$ қўшилувчи бўлган ҳолда $S(P_2)$ йиғиндининг унга мос қўшилувчисида $M_k^{'} \cdot \Delta \overline{x}_k^{'} = M_k^{''} \Delta x_k^{''}$ ифода бўлади.

Равшанки, $[x_k, x^*] \subset [x_k, x_{k+1}]$, $[x^*, x_{k+1}] \subset [x_k, x_{k+1}]$. Аниқ чегаранинг хоссасига кўра

$$M_k^{'} \leqslant M_k,\ M_k^{''} \leqslant M_k$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$M_k^{'} \Delta \overline{x}_k^{'} + M_k^{''} \Delta x_k^{''} = M_k^{'} (x^* - x_k) + M_k^{''} (x_{k+1} - x^*) \leqslant$$
$$\leqslant M_k [(x^* - x_k) + (x_{k+1} - x^*)] = M_k \cdot \Delta x_k$$

бўлиб, натижада $S(P_1)$ ва $S(P_2)$ йиғиндиларнинг бир-биридан фарқ қилувчи ҳади учун ушбу

$$M_k^{'} \Delta \overline{x}_k^{'} + M_k^{''} \Delta x_k^{''} \leqslant M_k \Delta x_k$$

тенгсизликка келамиз. Демак, $S(P_1) \geqslant S(P_2)$. Худди шунга ўхшаш

$$s(P_1) \leqslant s(P_2)$$

бўлиши исботланади.

Шундай қилиб, $[a, b]$ оралиқда бўлувчи нуқталар сони ошириб борилганда уларга мос бўлган Дарбунинг юқори йиғиндилари ошмайди, қуйи йиғиндилари эса камаймайди.

2°. $\forall P_1\in\mathcal{P}$, $\forall P_2\in\mathcal{P}$ *бўлаклашларга нисбатан Дарбу йиғиндилари учун*

$$s(P_2)\leqslant S(P_1)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. 1-бандда келтирилган бўлаклашнинг 2°-хоссасига кўра шундай бўлаклаш $P\in\mathcal{P}$ мавжудки, $P_1\propto P$, $P_2\propto P$ бўлади. Бу P бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари $s(P)$ ва $S(P)$ бўлсин. У ҳолда 1°-хоссага кўра

$$P_1\propto P \text{ дан } s(P_1)\leqslant s(P),\ S(P_1)\geqslant S(P),$$

$$P_2\propto P \text{ дан } s(P_2)\leqslant s(P),\ S(P_2)\geqslant S(P)$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Бу тенгсизликлардан ҳамда ҳар доим ўринли бўладиган $s(P)\leqslant S(P)$ тенгсизликдан

$$s(P_2)\leqslant s(P)\leqslant S(P)\leqslant S(P_1)$$

экани келиб чиқади. Демак, $s(P_2)\leqslant S(P_1)$.

Бу хосса $[a, b]$ оралиқни бўлаклашларга нисбатан тузилган қуйи йиғиндилар тўплами $\{s(P)\}$ нинг ҳар бир элементи юқори йиғиндилар тўплами $\{S(P)\}$ нинг исталган элементидан катта эмаслигини билдиради.

Дарбу йиғиндиларининг бу хоссаларидан фойдаланиб $f(x)$ функциянинг қуйи ҳамда юқори

$$\underline{I}=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx,\quad \overline{I}=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

интеграллари ҳақидаги иккита леммани исботлаймиз.

1-лемма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлса, у ҳолда

$$\underline{I}\leqslant\overline{I} \tag{9.17}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган бўлсин. Равшанки, бу ҳолда

$$\underline{I}=\sup\{s(P)\},\quad \overline{I}=\inf\{S(P)\}$$

миқдорлар мавжуд бўлади.

Дарбу йиғиндиларининг 2°-хоссаси ҳамда аниқ чегараларнинг хоссаларидан (2-боб, 6-§) фойдаланиб,

$$\underline{I}\leqslant S(P),$$

ундан эса

$$\underline{I}\leqslant\inf\{S(P)\}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\underline{I} \leqslant \bar{I}$$

бўлади. 1-лемма исбот бўлди.

2-лемма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлса, у ҳолда $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган $[a, b]$ оралиқнинг барча P бўлаклашлар учун

$$S(P) < \bar{I} + \varepsilon, \ s(P) > \underline{I} - \varepsilon$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқда $f(x) \geqslant 0$ ва ихтиёрий бўлган ҳолларни алоҳида қараймиз. $f(x) \geqslant 0$ бўлсин. Бу функция $[a, b]$ оралиқда чегараланганлиги сабабли

$$\bar{I} = \inf\{S(P)\}$$

мавжуд бўлади. Аниқ қуйи чегаранинг хоссасига кўра $[a, b]$ оралиқни шундай

$$P_0 = \{x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0\}$$

бўлаклаш мавжуд бўладики,

$$S(P_0) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k^0 \Delta x_k^0 < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади, бунда

$$M_k^0 = \sup\{f(x)\}, \ x \in [x_k^0, x_{k+1}^0]$$

ва $\Delta x_k^0 = x_{k+1}^0 - x_k^0$. Энди $\forall\varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta > 0$ сонни $\delta = \frac{\varepsilon}{4mM}$ деб олайлик, бунда $(m \in N)$

$$M = \sup\{f(x)\}, \ x \in [a, b].$$

Сўнгра $[a, b]$ оралиқни диаметри δ дан кичик бўлган бўлаклашлар тўпламини олиб, уни $\mathscr{P}_\delta$ каби белгилайлик. Демак, $\forall P \in \mathscr{P}_\delta$ учун $\lambda_P < \delta$ бўлади.

Фараз қилайлик, $\forall P \in \mathscr{P}_\delta$ бўлаклаш қуйидагича

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$$

бўлсин. Бу P бўлаклаш ўзининг $x_k (k = 0, 1, \ldots, m-1)$ нуқталари билан $[a, b]$ оралиқни $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакларга ажратади.

Энди юқоридаги P_0 бўлаклашнинг $x_k^0 (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ бўлувчи нуқталарини (ички бўлувчи нуқталар) ўз ичига олган ушбу

$$[x_k^0 - \delta, x_k^0 + \delta] \ (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

оралиқларни тузамиз. Бу оралиқлар билан $P \in \mathscr{P}_\delta$ бўлаклашнинг $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқлари орасида қуйидаги икки ҳол юз бериши мумкин:

а) $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқ бутунлай $[x_k^0 - \delta, x_k^0 + \delta]$ оралиқда жойлашган;

б) $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқ $[x_k^0 - \delta, x_k^0 + \delta]$ оралиқда қисман жойлашган ёки улар битта ҳам умумий нуқтага эга эмас.

У ҳолда $P \in \mathcal{P}_\delta$ бўлаклашга нисбатан $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндиси

$$S(P) = \sum_{k=0}^{m-1} M_k \Delta x_k$$

ҳам мос равишда икки қисмга ажралади:

$$S(P) = S'(P) + S''(P) = \sum{}' M_k \cdot \Delta x_k + \sum{}'' M_k \cdot \Delta x_k. \qquad (9.18)$$

Энди $S'(P)$ йиғиндида $[x_k, x_{k+1}] \subset [x_k^0 - \delta, x_k^0 + \delta]$ бўлганлиги сабабли

$$S'(P) = \sum{}' M_k \Delta x_k \leqslant M \sum{}' \Delta x_k < M \cdot 2\,\delta m < 2M \cdot m \cdot \frac{\varepsilon}{4mM} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (9.19)$$

бўлади. $S''(P)$ йиғиндининг ҳар бир қўшилувчисида

$$M_k \leqslant M_k^0, \quad \Delta x_k \leqslant \Delta x_k^0$$

бўлганидан

$$S''(P) = \sum{}'' M_k \Delta x_k \leqslant \sum{}'' M_k^0 \Delta x_k^0 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k^0 \Delta x_k^0 = S(P_0) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (9.20)$$

экани келиб чиқади. (9.18), (9.19) ва (9.20) муносабатлардан

$$S(P) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлишини топамиз.

Агар $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ ихтиёрий бўлса, у ҳолда ҳар доим шундай ўзгармас мусбат A сон топиладики, $f(x) + A > 0$ бўлади. Бу функцияга нисбатан юқоридаги исбот қайтариладиган бўлса, у ҳолда Дарбу йиғиндиси ва юқори интегралларининг ҳар бири $A \cdot (b - a)$ сонга ортади ва $f(x)$ функция учун ҳам лемманинг тасдиғи ўринли бўлади. Худди шунга ўхшаш

$$s(P) > \underline{I} - \varepsilon$$

бўлиши ҳам исботланади. 2-лемма исбот бўлди.

Бу лемма $f(x)$ функциянинг юқори ҳамда қуйи интеграллари $\lambda_P \to 0$ да мос равишда Дарбунинг юқори ҳамда қуйи йиғиндиларининг лимити эканини кўрсатади:

$$\overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{\lambda_P \to 0} S(P),$$

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{\lambda_P \to 0} s(P).$$

3. Аниқ интеграл таърифларининг эквивалентлиги. Аниқ интеграл 4- ва 7-таърифларининг эквивалентлигини кўрсатамиз.

а) $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функциянинг σ интеграл йиғиндиси $\lambda_P \to 0$ да чекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx = I$$

бўлсин. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашга нисбатан

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

$$I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. У ҳолда (9.14) муносабатдан фойдаланиб, Дарбу йиғиндилари $s(P)$ ҳамда $S(P)$ учун

$$I - \varepsilon \leqslant s(P) \leqslant S(P) \leqslant I + \varepsilon$$

тенгсизликларнинг ўринли бўлишини топамиз. Иккинчи томондан,

$$\overline{I} = \inf\{ S(P) \} \leqslant S(P), \quad \underline{I} = \sup\{ s(P) \} \geqslant s(P)$$

ва 1-леммага кўра $I \leqslant \overline{I}$ бўлгани учун

$$I - \varepsilon \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant I + \varepsilon$$

тенгсизликлар ҳам ўринли бўлади, $\varepsilon > 0$ соннинг ихтиёрийлигидан

$$I = \underline{I} = \overline{I}$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функциянинг юқори ҳамда қуйи интеграллари бир-бирига тенг. Бу 7-таърифга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлишини кўрсатади.

б) $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ фунциянинг юқори ҳамда қуйи интеграллари тенг бўлиб,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (\underline{I} = \overline{I} = I)$$

бўлсин. (9.13) муносабатга кўра

$$s(P) \leqslant \sigma \leqslant S(P)$$

бўлади. Иккинчи томондан, 2-леммага асосан

$$\underline{I} - \varepsilon < \sigma < \overline{I} + \varepsilon$$

бўлиб, $\underline{I} = \overline{I} = I$ тенгликка кўра

$$I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $|\sigma - I| < \varepsilon$. Бу эса 4-таърифга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи эканлигини кўрсатади.

Демак, аниқ интегралнинг 4- ва 7-таърифлари ўзаро эквивалент.

5-§. Аниқ интегралнинг мавжудлиги

Энди функция аниқ интеграли мавжуд бўлишининг зарур ва етарли шартини топиш масаласи билан шуғулланамиз.

Аслида функциянинг интегралланувчи бўлиши ёки бўлмаслигини таъриф бўйича текшириш мумкин. Бироқ кўпчилик ҳолларда интеграл йиғиндининг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатиш, шунингдек, юқори ҳамда қуйи интегралларни топиш жуда қийин бўлади.

Шуни айтиш керакки, аниқ интегралнинг биринчи таърифидаги (4-таърифга қаранг) лимит тушунчаси (интеграл йиғиндининг лимити тушунчаси) янги тушунчадир. У ўтган бобларда ўрганилган кетма-кетликнинг лимити, функциянинг лимити тушунчаларининг айнан ўзи бўлмай, балки ўзига хос мураккаб характерга эга бўлган тушунча.

Аниқ интегралнинг иккинчи таърифи (7-таърифга қаранг) интеграл йиғиндига қараганда бирмунча соддароқ бўлган Дарбу йиғиндиларига асосланади.

Демак, интегралнинг мавжудлиги критерийсини иккинчи таъриф асосида келтириш мақсадга мувофиқ.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин.

1-теорема. *$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиши учун $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилиб, $[a, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари*

$$S(P) - s(P) < \varepsilon \qquad (9.21)$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Таърифга кўра $I = \overline{I} = \underline{I}$ бўлади, бунда

$$\underline{I} = \sup\{s(P)\}, \quad \overline{I} = \inf\{S(P)\},$$

$\forall\varepsilon > 0$ олганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари учун 2-леммага кўра $S(P) - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\underline{I} - s(P) < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлар ўринли бўлиб, ундан $S(P) - s(P) < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади.

Етарлилиги. $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилиб, $[a, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланганлиги учун унинг қуйи ҳамда юқори интеграллари

$$\underline{I} = \sup\{s(P)\}, \; \bar{I} = \inf\{S(P)\}$$

мавжуд ва 1-леммага кўра $\underline{I} \leqslant \bar{I}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Равшанки,

$$s(P) \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant S(P).$$

Бу муносабатдан

$$0 \leqslant \bar{I} - \underline{I} \leqslant S(P) - s(P)$$

бўлишини топамиз. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон учун $0 \leqslant \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon$ бўлиб, ундан $\bar{I} = \underline{I}$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Агар аввалгидек $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ оралиқдаги тебранишини ω_k орқали белгиласак, у ҳолда

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k$$

бўлиб, юқорида келтирилган теорема қуйидагича ифодаланади.

2-теорема. *$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилиб, $[a, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашда*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon \tag{9.21'}$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Равшанки, (9.21′) муносабатни қуйидаги

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0 \tag{9.21''}$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Кўпчилик ҳолларда, теореманинг (9.21″) кўринишдаги шарти ишлатилади.

6-§. Интегралланувчи функциялар синфи

Ушбу параграфда аниқ интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, баъзи функцияларнинг интегралланувчи бўлишини кўрсатамиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлсин.

3-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у шу оралиқда интегралланувчи бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция $[a,\ b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига (5-бобдаги 7-теоремага қаранг) кўра функция $[a,\ b]$ да чегараланган. Иккинчи томондан, Кантор теоремасининг (5-бобдаги 10-теоремага қаранг) 5-бобдаги 3-натижасига кўра $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a,\ b]$ оралиқни узунликлари δ дан кичик бўлган бўлакларга ажратилганда функциянинг ҳар бир бўлакдаги тебраниши учун $\omega_k < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $[a,\ b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашда

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon\,(b-a)$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0$$

келиб чиқади. Демак, (9.21'') га кўра $f(x)$ функция $[a,\ b]$ да интегралланувчи. Теорема исбот бўлди.

4-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a,\ b]$ оралиқда чегараланган ва монотон бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция $[a,\ b]$ да чегараланган ва шу оралиқда, айтайлик, ўсувчи бўлсин. $\forall\ \varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра $\delta > 0$ сонни қуйидагича танлайлик:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} > 0.$$

Сўнгра $[a,\ b]$ оралиқни диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган P бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари $S(P)$ ва $s(P)$ ни тузамиз. У холда

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]\,\Delta x_k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \Big[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) -$$

$$- f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})\Big] = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(x_n) - f(x_0)] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(b) - f(a)] = \varepsilon.$$

Демак,

$$S(P) - s(P) < \varepsilon.$$

Бу эса (9.21) га кўра $f(x)$ функциянинг $[a,\ b]$ оралиқда интегралланувчи эканлигини билдиради.

Чегараланган ҳамда камаювчи функциянинг интегралланувчи бўлиши ҳам худди шунга ўхшаш исботланади. Теорема исбот бўлди.

5-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган ва бу оралиқнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган бўлиб, шу оралиқнинг фақат битта x^* $(x^* \in (a, b))$ нуқтасида узилишга эга, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлсин.

$\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, x^* нуқтанинг

$$U_\varepsilon(x^*) = \{x : x \in R,\ x^* - \varepsilon < x < x^* + \varepsilon\}$$

атрофини тузамиз. Бу атроф $[a, b]$ оралиқни

$$U_\varepsilon(x^*),\ [a, b] \setminus U_\varepsilon(x^*) = [a,\ x^* - \varepsilon] \cup [x^* + \varepsilon,\ b]$$

қисмларга ажратади.

Шартга кўра, $f(x)$ функция $[a, x^* - \varepsilon]$ ва $[x^* + \varepsilon, b]$ оралиқларнинг ҳар бирида узлуксиз. Бу оралиқларнинг ҳар бирига алоҳида Кантор теоремасининг натижасини (5-бобдаги 3-натижани қаранг) қўллаймиз. У ҳолда олинган $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta_1 > 0$ ва $\delta_2 > 0$ сонлар топиладики,

$[a,\ x^* - \varepsilon]$ да $\Delta x_k < \delta_1$ дан $\omega_k < \varepsilon$,

$[x^* + \varepsilon,\ b]$ да $\Delta x_k < \delta_2$ дан $\omega_k < \varepsilon$

тенгсизликлар ўринли экани келиб чиқади. Агар $\min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta$ деб олсак, у ҳолда иккала оралиқ учун бир вақтда

$$\Delta x_k < \delta \text{ дан } \omega_k < \varepsilon \qquad (9.22)$$

тенгсизликнинг ўринли экани келиб чиқади.

Энди юқоридаги $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta > 0$ сонни $\delta < \varepsilon$ деб олайлик.

$[a, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган бўлаклашларга нисбатан $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндиларини тузиб, қуйидаги

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k \qquad (9.23)$$

айирмани қараймиз. (9.23) йиғиндининг ҳар бир ҳадида $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ оралиқнинг узунлиги Δx_k қатнашади. Бу $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқларнинг x^* нуқтанинг $U_\varepsilon(x^*)$ атрофидан ташқарида жойлашганига, яъни $[x_k, x_{k+1}] \cap U_\varepsilon(x^*) = \varnothing$ муносабат ўринли бўладиганига мос келадиган (9.23) йиғиндининг ҳадларидан тузилган йиғинди

$$\sum_k{}' \omega_k \Delta x_k .$$

бўлсин. (9.23) йиғиндининг қолган барча ҳадларидан ташкил топган йиғинди

$$\sum_{k}{}'' \omega_k \Delta x_k$$

бўлсин, бунда $[x_k, x_{k+1}] \subset U_\varepsilon(x^*)$ ёки $[x_k, x_{k+1}] \cap \{x^* - \varepsilon\} \neq \varnothing$, ёки $[x_k, x_{k+1}] \cap \{x^* + \varepsilon\} \neq \varnothing$ бўлади.

Натижада (9.23) йиғинди икки қисмга ажралади:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k}{}' \omega_k \Delta x_k + \sum_{k}{}'' \omega_k \Delta x_k. \tag{9.24}$$

Энди бу йиғиндиларни баҳолаймиз. Юқоридаги (9.22) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\sum_{k}{}' \omega_k \Delta x_k < \sum_{k}{}' \varepsilon \Delta x_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon (b - a). \tag{9.25}$$

Иккинчи йиғинди учун

$$\sum_{k}{}'' \omega_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k}{}'' \Omega \Delta x_k = \Omega \cdot \sum_{k}{}'' \Delta x_k$$

бўлишини топамиз, бунда Ω — $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги тебраниши.

Агар $U_\varepsilon(x^*)$ атрофда бутунлай жойлашган $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқлар узунликларининг йиғиндиси 2ε дан кичиклигини ҳамда $x^* - \varepsilon$ ва $x^* + \varepsilon$ нуқталарни ўз ичига олган $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқлар иккита бўлиб, уларнинг узунликлари йиғиндиси ҳам 2ε (чунки $\delta < \varepsilon$) дан кичик бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\sum_{k}{}'' \Delta x_k < 4\varepsilon \tag{9.26}$$

бўлади. Натижада (9.24), (9.25) ва (9.26) муносабатлардан

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon (b - a) + 4\varepsilon\Omega = \varepsilon[(b - a) + 4\Omega]$$

экани келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0,$$

Бу эса (9.21'') га кўра $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да интегралланувчи бўлишини билдиради.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, унинг $[a, b]$ да интегралланувчи бўлиши юқоридагидек исбот этилади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. $f(x) = \sin x$ функция $(-\infty, +\infty)$ интервалда узлуксиз. Демак, юқоридаги 3-теоремага кўра бу функция ихтиёрий

$[a, b]$ да интегралланувчи бўлади. $\int\limits_a^b \sin x dx$ интегрални ҳисоблайлик.

Модомики, $f(x)=\sin x$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи экан, бу функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича интегралини таърифга кўра ҳисоблашда, $[a, b]$ оралиқни бўлаклашда ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакда ξ_k нуқталарни интеграл йиғинди ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имкониятига эга бўламиз. Шуни эътиборга олиб, $[a, b]$ оралиқни ушбу

$$a,\ a+\alpha_n,\ a+2\alpha_n,\ \ldots,\ a+k\cdot\alpha_n,\ \ldots,\ a+n\cdot\alpha_n=b$$

нуқталар ёрдамида $\left(\text{бунда } \alpha_n=\frac{b-a}{n}\right)$ n та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир $[a+k\alpha_n, a+(k+1)\alpha_n]$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ бўлакда ξ_k нуқтани қуйидагича танлаймиз:

$$\xi_k=a+(k+1)\alpha_n \quad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

У ҳолда функциянинг интеграл йиғиндиси қуйидаги

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} \sin[a+(k+1)\alpha_n]\cdot\alpha_n=\alpha_n\sum_{k=0}^{n-1}\sin[a+(k+1)\alpha_n]$$

кўринишда бўлади. Ушбу

$$\sin[a+(k+1)\alpha_n]=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha_n}{2}}2\sin\frac{\alpha_n}{2}\cdot\sin[a+(k+1)\alpha_n]=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha_n}{2}}\left\{\cos\left[a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_n\right]-\cos\left[a+\left(k+\frac{3}{2}\right)\alpha_n\right]\right\}$$

тенгликдан фойдаланиб, σ учун

$$\sigma=\frac{\alpha_n}{2\sin\frac{\alpha_n}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\cos\left[a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_n\right]-\cos\left[a+\left(k+\frac{3}{2}\right)\alpha_n\right]\right\}=$$

$$=\frac{\frac{\alpha_n}{2}}{\sin\frac{\alpha_n}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}\alpha_n\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}\alpha_n\right)\right]$$

формулани топамиз. Натижада $\Delta x_k=\alpha_n\to 0$ да

$$\lim_{\alpha_n\to 0}\sigma=\lim_{\alpha_n\to 0}\frac{\frac{\alpha_n}{2}}{\sin\frac{\alpha_n}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}\alpha_n\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}\alpha_n\right)\right]=$$

$$= \cos a - \cos b$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b.$$

Хусусан

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx = 0.$$

2-эслатма. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Биз

$$\int_b^a f(x)\, dx = - \int_a^b f(x)\, dx$$

ҳамда

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

тенгликлар ўринли деб келишиб оламиз.

7-§. Аниқ интегралнинг хоссалари

Энди $f(x)$ функция аниқ интегралининг хоссаларини ўрганамиз.

1°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у исталган $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлсин. У ҳолда 1-теоремага кўра $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ бўлаклаш учун

$$S(P) - s(P) < \varepsilon \tag{9.21}$$

тенгсизлик бажарилади.

P бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари $x_0, x_1, \ldots, x_n$ қаторига α ҳамда β нуқталарни қўшиб, $[a, b]$ оралиқни янги P_1 бўлаклашни ҳосил қиламиз. Равшанки, $P \propto P_1$ бўлади. У ҳолда Дарбу йиғиндиларининг хоссасига кўра (ушбу бобнинг 4-§, 2-бандига қаранг)

$$s(P) \leqslant s(P_1), \quad S(P_1) \leqslant S(P) \tag{9.27}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. (9.21) ва (9.27) муносабатлардан

$$S(P_1) - s(P_1) < \varepsilon \tag{9.28}$$

бўлиши келиб чиқади.

$[\alpha, \beta]$ оралиқдаги P_1 бўлаклашнинг бўлувчи нуқталарини $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг бирор P_2 бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари сифатида қараймиз. Бу P_2 бўлаклашга нисбатан $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари $s(P_2)$, $S(P_2)$ бўлсин, у ҳолда

$$S(P_1) - s(P_1) = \sum_{[a,\, b]} (M_k - m_k)\Delta x_k,$$

$$S(P_2) - s(P_2) = \sum_{[\alpha,\, \beta]} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

йиғиндиларни таққослаб,

$$S(P_2) - s(P_2) \leqslant S(P_1) - s(P_1)$$

бўлишини топамиз. Натижада (9.28) муносабатни эътиборга олсак,

$$S(P_2) - s(P_2) < \varepsilon$$

келиб чиқади. Бундан 1-теоремага кўра $f(x)$ функциянинг $[\alpha, \beta]$ оралиқда интегралланувчи экани келиб чиқади.

2°. Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ ҳамда $[c, b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлса, у ҳолда функция $[a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

формула ўринли.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, c]$ ҳамда $[c, b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлсин $(a < c < b)$.

У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики, $[a, c]$ оралиқни диаметри $\lambda_{P_1} < \delta_1$ бўлган ҳар қандай P_1 бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$S(P_1) - s(P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9.29}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунингдек, ўша $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $\delta_2 > 0$ сон топиладики, $[c, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_{P_2} < \delta_2$ бўлган ҳар қандай P_2 бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$S(P_2) - s(P_2) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9.30}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ деб, $[a, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_{P_3} < \delta$ бўлган ихтиёрий P_3 бўлаклашни олайлик. Бу P_3 бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари қаторига $c\,(a < c < b)$ нуқтани ҳам қўшиб, $[a, b]$ оралиқни янги P бўлаклашни ҳосил қиламиз. Бу бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари $S(P)$, $s(P)$ бўлсин. $[a, c]$ оралиқдаги P бўлаклашнинг бўлувчи нуқталарини шу $[a, c]$ оралиқни бирор P_1' бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари ҳамда $[c, b]$ оралиқдаги P бўлаклашнинг бўлувчи нуқталарини $[c, b]$ оралиқни бирор P_2' бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари сифатида қараймиз. Бу бўлаклашларга нисбатан Дарбу йиғиндиларини тузамиз:

$$S(P_1'),\ s(P_1'),\ S(P_2'),\ s(P_2').$$

Равшанки, бу йиғиндилар учун мос равишда юқоридаги (9.29), (9.30) тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$S(P_1') - s(P_1') < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(P_2') - s(P_2') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Иккинчи томондан,

$$S(P) = S(P_1') + S(P_2'),$$

$$s(P) = s(P_1') + s(P_2')$$

бўлиб, натижада

$$S(P) - s(P) = [S(P_1') - s(P_1')] + [S(P_2') - s(P_2')] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ ораликни диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса 1-теоремага кўра $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи эканини кўрсатади.

Юқоридаги P бўлаклашга нисбатан $f(x)$ функциянинг $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ оралиқдаги интеграл йиғиндиларини тузиб, уларни мос равишда қуйидаги

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_k)\,\Delta x_k, \quad \sum_{[a, c]} f(\xi_k)\,\Delta x_k, \quad \sum_{[c, b]} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

кўринишда белгиласак, у ҳолда

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{[a, c]} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_{[c, b]} f(\xi_k)\,\Delta x_k \tag{9.31}$$

бўлади. $f(x)$ функция $[a, c]$, $[c, b]$ ҳамда $[a, b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлгани учун

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{[a, c]} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^c f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{[c, b]} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_c^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{[a, b]} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

тенгликларга эгамиз. (9.31) тенгликдан $\lambda_P \to 0$ да изланган формула келиб чиқади. Шундай қилиб, 2°-хосса исботланди.

Энди c нуқта $[a, b]$ оралиқдан ташқарида ётсин, яъни c нуқта $c < a < b$ ёки $a < b < c$ тенгсизликни қаноатлантирсин. Агар $c <$

$<a<b$ бўлса, у ҳолда $[a, b]\subset[c, b]$ бўлгани учун 1°-хоссага кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлиб, юқорида исбот этилганига асосан

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

формула ўринли бўлади. Бундан эса, 2-эслатмадан фойдаланиб

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

бўлишини топамиз.

Худди шунга ўхшаш, $a<b<c$ бўлганда ҳам $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлиши ва тегишли формуланинг ўринли экани кўрсатилади.

3°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c\ f(x)$ $(c=\text{const})$ ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

формула ўринли.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Демак,

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma = \lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Энди $c\ f(x)$ функциянинг мос интеграл йиғиндисини ёзамиз:

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} c\ f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

У ҳолда

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} c\ f(\xi_k)\,\Delta x_k = c\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = c\cdot\sigma.$$

Бундан $\lambda_P\to 0$ да қуйидаги

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma_1 = \lim_{\lambda_P\to 0} c\,\sigma = c\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

тенглик келиб чиқади. Бу изланган формуланинг ўринли эканини англатади.

4° Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи ва $f(x)\geqslant d>0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{f(x)}$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлсин. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $d^2 \varepsilon$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, $[a, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклаш учун

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\,\Delta x_k < d^2 \varepsilon$$

бўлади. Бунда

$$M_k = \sup\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$m_k = \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}].$$

$f(x) \geqslant d > 0$ бўлганлигини эътиборга олиб, $\frac{1}{f(x)}$ функция учун

$$M_k^* = \sup\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}, \; x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$m_k^* = \inf\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}, \; x \in [x_k, x_{k+1}]$$

мавжуд бўлишини аниқлаймиз. Равшанки,

$$M_k^* = \frac{1}{m_k}, \quad m_k^* = \frac{1}{M_k}$$

бўлади. Натижада

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k^* - m_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{M_k}\right)\Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_k - m_k}{m_k M_k}\,\Delta x_k \leqslant \frac{1}{d^2} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\,\Delta x_k < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $\frac{1}{f(x)}$ функциянинг $[a, b]$ да интегралланувчи эканлигини билдиради.

5° Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у холда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Демак,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma_1 = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma_2 = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Энди $f(x) \pm g(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги мос интеграл йиғиндисини ёзамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k) \pm g(\xi_k)] \Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \pm \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \Delta x_k = \sigma_1 \pm \sigma_2.$$

Бундан $\lambda_p \to 0$ да қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \to 0} \sigma_1 \pm \lim_{\lambda_p \to 0} \sigma_2 = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Бу изланган формуланинг ўринли эканини англатади.

1-натижа. Агар $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда ушбу

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) \quad (c_i = \text{const}, \ i = 1, 2, \ldots, n)$$

функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)] dx =$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\,dx$$

формула ўринли бўлади.

Бу натижанинг исботи юқоридаги 3°- ва 4°- хоссалардан келиб чиқади.

6°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремага кўра

$$\lim_{\lambda_p \to 0} [S_f(P) - s_f(P)] = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = 0, \qquad (9.32)$$

$$\lim_{\lambda_p \to 0} [S({}_g P) - s_g(P^*) = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M'_k - m'_k) \Delta x_k = 0. \qquad (9.33)$$

Аввал барча $x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ деб қарайлик. У ҳолда $\forall\, x \in [x_k, x_{k+1}]$ учун

$$0 \leqslant m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k,$$

$$0 \leqslant m'_k \leqslant g(x) \leqslant M'_k$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб, ундан қуйидаги

$$0 \leqslant m_k \cdot m'_k \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant M_k \cdot M'_k$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Равшанки, $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ оралиқда $f(x)$ функциянинг қуйидаги аниқ чегаралари:

$$m^0_k = \inf \{f(x) \cdot g(x)\},$$
$$M^0_k = \sup \{f(x) \cdot g(x)\}$$

мавжуд бўлиб, улар учун

$$m_k m'_k \leqslant m^0_k \leqslant M^0_k \leqslant M_k M'_k$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. У ҳолда қуйидаги

$$M^0_k - m^0_k \leqslant M_k M'_k - m_k m'_k = M'_k(M_k - m_k) + m_k(M'_k - m'_k),$$
$$M = \sup_{a<x<b} \{f(x)\} \geqslant M_k, \quad M' = \sup_{a<x<b} \{g(x)\} \geqslant M'_k$$

тенгсизликларни эътиборга олиб ($f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ чегараланганлиги учун $M < \infty$, $M' < \infty$ бўлади), топамиз:

$$S_{f \cdot g}(P) - s_{f \cdot g}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M^0_k - m^0_k)\Delta x_k \leqslant$$
$$\leqslant M' \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k + M \sum_{k=0}^{n-1} (M'_k - m'_k)\Delta x_k.$$

Энди (9.32) ва (9.33) муносабатлардан фойдалансак, у ҳолда
йидаги

$$\lim_{\lambda_P \to 0} [S_{f \cdot g}(P) - s_{f \cdot g}(P)] = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M^0_k - m^0_k)\Delta x_k = 0$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $f(x) \cdot g(x)$ функция $[a, b]$ орали
интегралланувчи.

Энди $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ихтиёрий интегралланувчи фу
циялар бўлсин. Бир томондан $\forall\, x \in [a, b]$ лар учун

$$f(x) - \inf \{f(x)\} = f(x) - m \geqslant 0,$$
$$g(x) - \inf \{g(x)\} = g(x) - m' \geqslant 0$$

тенгсизликлар ўринли. Иккинчи томондан,

$$f(x) \cdot g(x) = [f(x) - m][g(x) - m'] + mg(x) + m'f(x) - mm'$$

ёза оламиз. Юқорида исбот этилганига ҳамда 4°- хоссанинг
тижасига (1- натижага қаранг) кўра, $f(x)\,g(x)$ функция $[a, b]$
ликда интегралланувчи бўлади.

4°- ва 5°- хоссалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

2- **натижа.** Агар $f(x)$, $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да интеграл нувчи ва $g(x) \geqslant d > 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлади.

3-натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, $\forall n \in N$ учун $[f(x)]^n$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

7°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0 \quad (a < b)$$

бўлади.

Исбот. Таърифга кўра ушбу

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

лимит мавжуд. Модомики, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geqslant 0$ экан, унда

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \geqslant 0$$

ва

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \geqslant 0$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0.$$

4-натижа. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \leqslant g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да интегралланувчи бўлганидан $g(x) - f(x) \geqslant 0$ функциянинг интегралланувчилиги 4-хоссадан келиб чиқади. 6-хоссага кўра бу ҳолда

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx \geqslant 0$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан изланган тенгсизликка эга бўламиз.

5-натижа. (**Коши—Буняковский тенгсизлиги**). Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда (юқоридаги хоссаларга кўра) ушбу $f(x)-\alpha g(x)$ (α — ихтиёрий ўзгармас) функция ҳам $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлади ва

$$\int_a^b [f(x)-\alpha g(x)]^2\,dx \geqslant 0$$

тенгсизлик ўринли.

Демак, ихтиёрий ўзгармас α сон учун

$$\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx - 2\alpha\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant 0$$

тенгсизлик ўринли. Бу тенгсизликнинг чап томонидаги ифода α га нисбатан квадрат учҳад бўлиб, у α нинг барча ҳақиқий қийматларида манфий эмас. Демак, бу квадрат учҳаднинг дискриминанти мусбат эмас, яъни

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 - \int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant 0.$$

Натижада қуйидаги

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx} \qquad (9.34)$$

тенгсизликка келамиз. Бу тенгсизлик *Коши—Буняковский тенгсизлиги* деб аталади.

2-49 8°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда $\forall\,\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топиладики, $[a, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P<\delta$ бўлган ҳар қандай $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ бўлаклашга нисбатан

$$S(P)-s(P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\,\Delta x_k<\varepsilon$$

бўлади, бунда ω_k — $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқдаги тебраниши.

Равшанки, $\forall x'\in[a, b]$, $\forall x''\in[a, b]$ лар учун қуйидаги

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big| \leqslant |f(x')-f(x'')|$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, ундан

$$\sup\big||f(x')|-|f(x'')|\big| \leqslant \sup|f(x')-f(x'')|$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $\overline{\omega}_k \leqslant \omega_k$, бунда $\overline{\omega}_k - |f(x)|$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ даги тебраниши. Натижада

$$S_{|f|}(P) - s_{|f|}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\omega}_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$$

бўлади. Бундан $|f(x)|$ функциянинг $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиши келиб чиқади.

$f(x)$ ҳамда $|f(x)|$ функцияларнинг $[a, b]$ оралиқдаги интеграл йиғиндиларини ёзамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \Delta x_k.$$

У ҳолда

$$|\sigma| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \Delta x_k = \sigma_1$$

бўлади ва $\lambda_P \to 0$ да лимитга ўтиб изланган тенгсизликнинг ўринли эканига ишонч ҳосил қиламиз.

8- §. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ оралиқда

$$m = \inf\{f(x)\}, \quad M = \sup\{f(x)\}$$

мавжуд ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \tag{9.35}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

6-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ $(m \leqslant \mu \leqslant M)$ сон мавжудки, ушбу*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. (9.35) тенгсизликлардан 3- натижага кўра топамиз:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx.$$

Бундан

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a).$$

Бу тенгсизликларни $b-a>0$ сонга бўламиз:

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\leqslant M.$$

Агар

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

деб олсак, у ҳолда изланган тенглик келиб чиқади.

6- натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу оралиқда шундай $c(c\in[a, b])$ нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a) \tag{9.36}$$

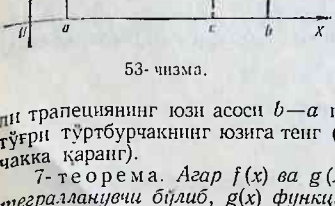
тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи. Демак, 6- теоремага кўра $\int_a^b f(x)\,dx=\mu(b-a)$ тенглик ўринли бўлади (бунда $m\leqslant\mu\leqslant M$).

Больцано—Кошининг иккинчи теоремасига (5- бобдаги 6- теоремага қаранг) асосан $[a, b]$ да шундай c нуқта топиладики,

$$f(c)=\mu$$

бўлади. Бундан (9.36) тенгликнинг ўринли экани келиб чиқади. (9.36) тенглик $[a, b]$ оралиқда $f(x)\geqslant 0$ бўлган ҳолда содда геометрик маънога эга. Маълумки, ушбу $\int_a^b f(x)\,dx$ аниқ интеграл эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодалайди (53- чизмадаги $aABb$ трапецияга қаранг). Энди $f(x)\geqslant 0$ бўлганда шу эгри чизиқли трапециянинг юзи асоси $b-a$ га, баландлиги $f(c)$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзига тенг (53- чизмада $aA'B'b$ тўғри тўртбурчакка қаранг).



53- чизма.

7- теорема. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функция шу оралиқда ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай ўзгармас μ $(m\leqslant\mu\leqslant M)$ сон мавжудки,*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)dx \tag{9.37}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Аниқ интегралнинг 5-хоссасига асосан $f(x)\,g(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлади. Энди $g(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда манфий бўлмасин, яъни $\forall x \in [a, b]$ лар учун $g(x) \geqslant 0$ бўлсин, дейлик. У ҳолда $m \leqslant f(x) \leqslant M$ тенгсизликларни $g(x)$ га кўпайтириб, сўнгра ҳосил бўлган ушбу

$$mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x)$$

тенгсизликларни $[a, b]$ оралиқда интеграллаб топамиз:

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{9.38}$$

Икки ҳолни қарайлик:

а) $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

бўлиб, бунда μ деб $m \leqslant \mu \leqslant M$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий сонни олиш мумкин.

б) $\int_a^b g(x)dx > 0$ бўлсин. Бу ҳолда (9.38) тенгсизликлардан

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

деб олсак, унда

$$\int_a^b f(x)\,g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx$$

бўлади.

$[a, b]$ оралиқда $g(x) \leqslant 0$ бўлганда (9.37) формула худди шунга ўхшаш исботланади. Теорема исбот бўлди.

7-натижа. Агар $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функция узлуксиз, $g(x)$ функция интегралланувчи бўлса, ҳамда шу оралиқда $g(x)$ функция ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай $c\,(c \in [a, b])$ нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу натижанинг исботи (9.37) тенгликка асосланади.

9- §. Чегаралари ўзгарувчи бўлган аниқ интеграллар

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда аниқ интегралнинг 1°- хоссасига кўра $f(x)$ функция исталган $[a, x]\subset\subset[a, b]$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади. Равшанки,

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

интеграл x га боғлиқ. Уни $F(x)$ деб белгилаймиз.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Энди $f(x)$ функцияга кўра $F(x)$ функциянинг хоссаларини (узлуксизлиги, дифференциалланувчи бўлишини) ўрганамиз.

8-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, $F(x)$ функция шу оралиқда узлуксиз бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция интегралланувчи бўлгани учун $\sup|f(x)| = M < \infty$ бўлади. $\forall x\in[a, b]$ нуқта олиб, унга шундай $\Delta x>0$ орттирма берайликки, $x+\Delta x\in[a, b]$ бўлсин. У ҳолда $F(x)$ функциянинг орттирмаси учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Аниқ интегралнинг 7°- хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$|\Delta F(x)| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt \leqslant M\int_x^{x+\Delta x} dt = M\Delta x.$$

Демак,

$$|\Delta F(x)| \leqslant M\,\Delta x.$$

Бундан эса

$$\lim_{\Delta x\to+0}\Delta F(x) = 0$$

лимит келиб чиқади. $\Delta x<0$ бўлганда ҳам худди юқоридагига ўхшаш $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\Delta F(x) = 0$ бўлиши кўрсатилади. Бу эса $F(x)$ функциянинг $x\in[a, b]$ нуқтада узлуксизлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

9-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $x_0\in(a, b)$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Исбот. $F(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси:

$$\Delta F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt \quad (\Delta x > 0)$$

ни олиб, қуйидаги

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)$$

айирмани қараймиз. Аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\left[\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - f(x_0)\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt.$$

Бу муносабатдан

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \left|f(t) - f(x_0)\right| dt \qquad (9.39)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Шартга кўра $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз. Таърифга асосан, $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $|x - x_0| < \delta$ бўлганда $|f(x) - f(x)_0| < \varepsilon$ бўлади. Агар $\Delta x < \delta$ деб олсак, у ҳолда $\forall\, t \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ учун

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Натижада (9.39) тенгсизлик қуйидаги

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt \quad \varepsilon$$

кўринишга келади. Демак,

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Бундан

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0),$$

яъни

$$F'(x_0 + 0) = f(x_0)$$

тенглик келиб чиқади. Юқоридагидек, $\Delta x < 0$ бўлганда

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0),$$

яъни

$$F'(x_0-0)=f(x_0)$$

тенглик ҳам ўринли бўлиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $x=a$ ва $x=b$ нуқталарда узлуксиз (бунда функциянинг $x=a$ да ўнгдан, $x=b$ да эса чапдан узлуксизлиги тушунилади) бўлса, у ҳолда

$$F'(a+0)=f(a+0),\quad F'(b-0)=f(b-0)$$

бўлиши юқоридагига ўхшаш кўрсатилади.

8- натижа. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall\ x\in[a, b]$ учун

$$F'(x)=f(x)$$

бўлади.

Демак, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг $[a, b]$ даги бошланғич функцияси.

Энди қуйи чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интегрални қараймиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда бу функция $[x, b]\subset[a, b]$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ оралиқда ҳам интегралланувчи ва бу интеграл x га боғлиқ бўлади. Уни

$$\Phi(x)=\int_x^b f(t)\,dt$$

деб белгилаймиз. Аниқ интеграл хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^b f(t)\,dt=F(x)+\Phi(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Бундан эса

$$\Phi(x)=\int_a^b f(t)\,dt-F(x)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенглик, $\Phi(x)$ функциянинг хоссаларини $f(x)$ ҳамда $F(x)$ функцияларнинг хоссалари орқали ўрганиш мумкинлигини кўрсатади. Жумладан, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\Phi'(x)=-f(x)$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда $\int_a^b f(t)\,dt$ мавжуд ва у чекли сон, $F(x)$ функция эса юқорида келтирилган теоремага кўра $[a, b]$ да $F'(x)$ ҳосилага эга бўлиб,

$$\Phi'(x)=\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)'=\left(\int_a^b f(t)\,dt-F(x)\right)'=-F'(x)=-f(x)$$

бўлади.

10- §. Аниқ интегралларни ҳисоблаш

Интеграл мавзусининг асосий масалаларидан бири функция интегралининг мавжудлиги бўлса, иккинчиси — функция интегралини ҳисоблашдир.

Биз $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интегралини интеграл йиғиндининг чекли лимити сифатида таърифлаган эдик. Юқорида айтиб ўтганимиздек интеграл йиғиндининг лимити тушунчаси мураккаб характерга эга бўлиб, уни ҳисоблаш, ҳатто содда ҳолларда (шу бобнинг 2- § да келтирилган мисолга қаранг) ҳам анча қийин бўлади.

Тўғри, $f(x)$ функциянинг интегралланувчилиги маълум бўлса, унда интеграл йиғиндининг лимити $[a, b]$ оралиқни бўлаклаш усулига ҳам, ҳар бир бўлакда олинган ξ_k нуқталарга ҳам боғлиқ бўлмай, $\lambda_p \to 0$ да ягона $I\left(I = \int\limits_a^b f(x)\,dx\right)$ сонга интилади. Бу ҳол $[a, b]$ оралиқни бўлаклашни ҳамда ξ_k нуқталарни интеграл йиғинди ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имконини беради. Натижада функция интегралини топиш учун бирорта бўлаклашга нисбатан интеграл йиғиндининг лимитини ҳисоблаш етарли бўлади.

Масалан, $\int\limits_a^b xdx$ интегрални ҳисоблайлик. Бунда $f(x) = x$ бўлиб, у $[a, b]$ оралиқда узлуксиз. Демак, бу функция $[a, b]$ да интегралланувчи. $[a, b]$ оралиқни ушбу

$$P = \{a,\ a + \alpha_n,\ a + 2\alpha_n,\ \ldots,\ a + k\alpha_n,\ \ldots,\ a + n\alpha_n = b\}$$

бўлаклашни олиб, ҳар бир $[a + k\alpha_n,\ a + (k + 1)\alpha_n]$ бўлакда $\xi_k = a + k\alpha_n$ деб қараймиз, бунда $\alpha_n = \frac{b-a}{n}$. У ҳолда

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(a + k\cdot\alpha_n)\alpha_n = \alpha_n\sum_{k=0}^{n-1}(a + k\cdot\alpha_n) =$$

$$= a_n\,[(\,na + \alpha_n(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))] =$$

$$= \alpha_n\left[\,na + \frac{b-a}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{b-a}{2}\,\alpha_n.$$

Бундан

$$\lim_{\alpha_n \to 0}\sigma = \lim_{\alpha_n \to 0}\left[\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{b-a}{2}\,\alpha_n\right] = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Демак,

$$\int\limits_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Умуман, кўп ҳолларда функцияларнинг интегралини таърифга кўра ҳисоблаш қийин бўлади. Шунинг учун интегралларни ҳисоблашнинг амалий жиҳатдан қулай бўлган йўлларини топиш зарурияти туғилади.

1. **Ньютон—Лейбниц формуласи.** Ушбу бандда, функцияларнинг аниқ интегралларини ҳисоблашда кенг қўлланадиган формулани келтирамиз.

Маълумки, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

функция шу оралиқда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади. Бу бир томондан.

Иккинчи томондан, $f(x)$ функциянинг ихтиёрий бошланғич функцияси $\Phi(x)$ берилган бошланғич функция $F(x)$ дан ихтиёрий ўзгармас қўшилувчига фарқ қилади, яъни

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad (C = \text{const})$$

бўлади. Демак,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C.$$

Бу тенгликдан, аввал $x = a$ деб,

$$\Phi(a) = C, \tag{9.40}$$

сўнгра $x = b$ деб,

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\, dt + C \tag{9.41}$$

тенгликларни топамиз. (9.40) ва (9.41) тенгликлардан ихтиёрий бошланғич функция $\Phi(x)$ учун ушбу

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{9.42}$$

формула келиб чиқади. Бу (9.42) формула *Ньютон—Лейбниц формуласи* деб аталади.

Одатда, (9.42) тенгликнинг ўнг томонидаги $\Phi(b) - \Phi(a)$ айирма $\Phi(x)\Big|_a^b$ каби ёзилади:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Демак,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Мисоллар. 1. $\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$

$$2. \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} \, (a > 0, \ b > 0).$$

2. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу ҳолда $f(x)$ функциянинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x)\,dx$ мавжуд бўлади. Кўпинча ўзгарувчини алмаштириш натижасида берилган интеграл ундан соддароқ интегралга келтирилади.

Фараз қилайлик, аниқ интегралда ўзгарувчи x ушбу $x = \varphi(t)$ формула билан алмаштирилган бўлиб, бунда қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:

а) $\varphi(t)$ функция бирор $[\alpha, \beta]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз, t ўзгарувчи $[\alpha, \beta]$ оралиқда ўзгарганда $\varphi(t)$ функциянинг қийматлари $[a, b]$ оралиқдан чиқмайди;

б) $\varphi(\alpha) = a, \ \varphi(\beta) = b$;

в) $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \tag{9.43}$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун шу оралиқда бошланғич функция $\Phi(x)$ га эга бўлиб, (9.42) формула ўринли.

$[\alpha, \beta]$ оралиқда $\Phi(\varphi(t))$ функцияни қарайлик. Бу функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, унинг ҳосиласи (6.5) формулага кўра қуйидагича ёзилади:

$$[\Phi(\varphi(t))]' = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Кейинги тенгликдан $\Phi'(x) = f(x)$ эканини эътиборга олиб топамиз:

$$[\Phi(\varphi(t))]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Бу эса $\Phi(\varphi(t))$ функция $[\alpha, \beta]$ да $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлишини билдиради. Ньютон—Лейбниц формуласига кўра,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)).$$

Буни б) шартдан фойдаланиб ушбу

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{9.44}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шундай қилиб, (9.42) ва (9.44) муносабатлардан (9.43) тенглик келиб чиқади.

Мисол. Қуйидаги

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

интегрални ўзгарувчини алмаштириш усули билан ҳисобланг. Бу интегралда $x=\sin t$ алмаштириш бажарамиз. У ҳолда (9.44) формулага кўра топамиз:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right]dt = \left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

3. **Бўлаклаб интеграллаш усули.** $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = [u(x)\cdot v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x) \qquad (9.45)$$

формула ўринли.

Ҳақиқатан ҳам (6.9) формулага кўра

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Демак, $u(x)\,v(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда $u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлиб, Ньютон — Лейбниц формуласига кўра

$$\int_a^b [u'(x)\,v(x) + u(x)v'(x)]dx = [u(x)\cdot v(x)]\Big|_a^b$$

бўлади. Аниқ интеграл хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx + \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]\Big|_a^b.$$

Бу тенгликдан эса (9.45) формула келиб чиқади.

(9.45) формула $\int_a^b u(x)\,dv(x)$ интегрални ҳисоблашни $\int_a^b v(x)\,du(x)$ интегрални ҳисоблашга олиб келади. Бунда $u(x)$ ҳамда $dv(x)$ ларни шундай танлаш лозимки, $\int_a^b v(x)\,du(x)$ интеграл имконият борича содда ҳисоблансин.

Мисоллар. 1. $\int_1^2 \ln x\,dx$ интегрални ҳисобланг.

Агар $u(x)=\ln x$, $dv(x)=dx$ деб олинса, у ҳолда

$$du = \frac{1}{x}\,dx,\ v(x) = x$$

бўлиб, (9.45) формулага кўра топамиз.

$$\int_1^2 \ln x dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

2. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ интегрални ҳисобланг, бунда $n = 0, 1, 2, \ldots$

Бу интеграл, хусусан $n = 0$, $n = 1$ бўлганда осонгина ҳисобланади:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},\quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$n \geqslant 2$ бўлганда берилган интегрални

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$$

кўринишда ёзиб, унга бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаймиз. Натижада

$$I_n = (-\sin^{n-1} x\cdot\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x dx -$$

$$-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

бўлиб, ундан ушбу

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \tag{9.46}$$

рекуррент формула келиб чиқади. Бу формула ёрдамида берилган интегрални $n = 2, 3, \ldots$ бўлганда кетма-кет ҳисоблаш мумкин. Биз қуйида n — жуфт ва тоқ бўлганда берилган интегралнинг қийматини келтирамиз:

$n = 2m$ — жуфт сон бўлганда

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 =$$

$$= \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,\frac{\pi}{2}, \tag{9.47}$$

$n = 2m + 1$ — тоқ сон бўлганда

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1 =$$

$$= \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \tag{9.48}$$

Бунда $m!!$ символ m дан катта бўлмаган ва у билан бир хил жуфтликка эга бўлган натурал сонларнинг кўпайтмасини билдиради.

Шундай қилиб,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{агар } n=2m \text{ жуфт бўлса,} \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & \text{агар } n=2m+1 \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

Хусусан,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}.$$

4. Валлис формуласи. Юқорида келтирилган 2-мисолдан фойдаланиб, π сонини ифодаловчи формулани келтирамиз. Равшанки, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ бўлганда

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \ (n = 1, 2, \ldots)$$

тенгсизликлар ўринли. Бу тенгсизликларни $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда интеграллаб

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx,$$

сўнгра (9.47), (9.48) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Бундан

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Аммо бу тенгсизликларнинг чеккаларида турган ифодалар айирмаси

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} <$$

$$< \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2n} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n}$$

бўлиб, $n \to \infty$ да нолга интилгани учун ушбу

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}$$

формула ўринли бўлади. Демак,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}. \qquad (9.49)$$

Бу (9.49) формула *Валлис формуласи* дейилади.

11-§. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш

Биз юқорида интеграл остидаги функциянинг бошланғич функцияси маълум бўлса, аниқ интегрални Ньютон — Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисоблаш мумкинлигини кўрдик. Аммо бошланғич функцияни топиш масаласи доим осонгина ҳал бўлавермайди. Агар интеграл остидаги функция мураккаб бўлса, тегишли аниқ интегрални ҳисоблашнинг тақрибий усулларини қўллаш лозим. Бу усуллар интеграл остидаги $f(x)$ функцияни уни тақрибий ифодаловчи кўпҳад билан алмаштиришга ($f(x) \approx P_n(x)$) асосланади. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. 6-бобнинг 7-§ ида эслатиб ўтилган функцияни кўпҳад билан яқинлаштириш ҳақидаги Вейерштрасс теоремасига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{b-a}$ сонга кўра шундай $P_n(x)$ кўпҳад топиладики, $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан $\int_a^b P_n(x)\,dx$ интегралнинг $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралга яқинлашиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f(x) - P_n(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x) - P_n(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Шундай қилиб, қуйидаги

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx \tag{9.50}$$

тақрибий формулага келамиз.

Масалан, $[0, 1]$ ораликда аниқланган ва узлуксиз бўлган функциянинг $\int_0^1 f(x)\,dx$ интегралини тақрибий ифодаловчи формула топиш талаб этилсин.

Ушбу

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

кўпҳадни қарайлик. Одатда, бу кўпҳад *Бернштейн кўпҳади* деб аталади. Ушбу курснинг «Функционал кетма-кетликлар ва қаторлар» бобининг 10-§ ида $n \to \infty$ да Бернштейн кўпҳадининг $[0, 1]$ оралиқда $f(x)$ функцияга текис яқинлашиши, яъни $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\forall\, x \in [0, 1]$ учун

$$|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлиши исботланади.

(9.50) формуладан фойдаланиб топамиз: $\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 B_n(x)\,dx =$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right] dx = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \int_0^1 x^k (1 -$$

$- x)^{n-k}\,dx$.

Энди $I_k = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ интегралларни ҳисоблайлик. Бўлаклаб интеграллаш усули ($u = x^k$, $dv = (1-x)^{n-k}\,dx$) билан ушбу

$$I_k = \frac{k}{n-k+1} I_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

рекуррент муносабатларни ҳосил қиламиз.

Бу муносабатлардан $\forall\, k$ учун

$$C_n^k I_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{k}{n-k+1} I_{k-1} = C_n^{k-1} I_{k-1} = C_n^{k-2} I_{k-2} =$$

$$= \ldots = C_n^1 I_1 = C_n^0 I_0 = \int_0^1 (1-x)^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

келиб чиқади. Буни эътиборга олсак, берилган аниқ интегрални тақрибий ифодаловчи қуйидаги

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

формула ҳосил бўлади.

$\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални тақрибий хисоблаш йўлларидан яна бири интеграллаш оралиғи $[a, b]$ ни n та тенг бўлакка бўлиш ва ҳар бир бўлакда $f(x)$ функцияни

1) C — const;
2) $Ax + B$ (A, B — ўзгармас);
3) $Ax^2 + Bx + C$ (A, B, C — ўзгармас) .

кўринишдаги, яъни нолинчи, биринчи ва иккинчи даражали кўпхадлардан бири билан алмаштиришга асосланган. Биз бу ҳолларни алоҳида қараб, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални тақрибий ифодаловчи тўғри тўртбурчаклар, трапеция ва параболалар (Симпсон) формулаларига келамиз.

1. **Тўғри тўртбурчаклар формуласи.** $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

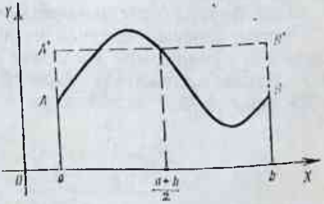
интегралини тақрибий хисоблаш талаб этилсин. Аввало $\forall x \in [a, b]$ учун

$$f(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \text{const}$$

деб олиб, қуйидаги

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \tag{9.51}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу тақрибий формула (54- чизма) $f(x) \geqslant 0$ бўлганда $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзини $aA'B'b$ тўғри тўртбурчак юзи билан алмаштирилишини кўрсатади. (9.51) формуланинг аниқлигини ошириш мақсадида $[a, b]$ оралиқни $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакда (9.51) формула қўлланилади. У ҳолда



54- чизма.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1}-x_k) = \frac{b-a}{n} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

бўлади, бунда

$$x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n},\ \bar{x}_k = \frac{x_k+x_{k+1}}{2} = a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n},$$

$$x_{k+1}-x_k = \frac{b-a}{n} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1).$$

Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_0) + \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_1) + \dots + \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_k) + \dots + \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_{n-1}) = \frac{b-a}{n}[f(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_1) + \dots + f(\bar{x}_{n-1})].$$

Шундай қилиб, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун қуйидаги

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[f(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_1) + \dots + f(\bar{x}_k) + \dots + f(\bar{x}_{n-1})] = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k) \qquad (9.52)$$

формулага келамиз.

(9.52) формула *тўғри тўртбурчаклар формуласи* деб аталади.

Одатда, тақрибий формула чиқарилганда, албатта уни қўлланилганда йўл қўйиладиган хатоликни аниқлаш ёки баҳолаш тақозо этилади. Бунинг натижасида тақрибий формулалар ўзаро таққосланади. (9.52) формуланинг хатолиги ушбу

$$R_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k) \qquad (9.53)$$

айирма билан ифодаланади. Уни баҳолаймиз. Бунинг учун $f(x)$ функция $[a,\ b]$ оралиқда узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин деб қараймиз.

Аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб R_n ни қуйидаги

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\,(\overline{x}_k) = \sum_{n=0}^{k-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,(\overline{x}_k)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(\overline{x}_k)]\,dx.$$

кўринишда ёзиш мумкин. Тейлор формуласи

$$f(x) - f(\overline{x}_k) = f'(\overline{x}_k)(x - \overline{x}_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x - \overline{x}_k)^2$$

дан фойдаланайлик, бунда ξ_k сон x ва $\overline{x}_k$ сонлари орасида бўлади. Натижада

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f'(\overline{x}_k)(x - \overline{x}_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x - \overline{x}_k)^2 \right] dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [f'(\overline{x}_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - \overline{x}_k)\,dx + \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)(x -$$

$$- \overline{x}_k)^2\,dx] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)(x - \overline{x}_k)^2\,dx$$

бўлади.

Ўрта қиймат ҳақидаги 6-теореманинг 5-натижасига кўра

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)(x - \overline{x}_k)^2\,dx = f''(\xi_k^*) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - \overline{x}_k)^2\,dx =$$

$$= \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{12} f''(\xi_k^*) = \frac{(b-a)^3}{12\,n^3} f''(\xi_k^*) \quad (\xi_k^* \in [x_k,\ x_{k+1}])$$

бўлади. Шундай қилиб, R_n учун қуйидаги

$$R_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{12\,n^3} f''(\xi_k^*) = \frac{(b-a)^3}{24\,n^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*)$$

ифодага келамиз. Равшанки, ушбу

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) = \frac{f(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \ldots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

$(\xi_0^* \in [a,\ b],\ \ \xi_1^* \in [a,\ b],\ \ldots,\ \xi_{n-1}^* \in [a,\ b])$ миқдор $f''(x)$ нинг $[a,\ b]$ оралиқдаги энг кичик m'' ҳамда энг катта M'' қийматлари орасида бўлади, яъни

$$m'' \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) \leqslant M''.$$

$f''(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз. Больцано — Кошининг иккинчи теоремасига кўра (5-бобдаги 9-теоремага қаранг), (a, b) интервалда шундай ζ нуқта топиладики,

$$f''(\zeta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) \quad (\zeta \in (a, b))$$

бўлади. Натижада R_n ушбу

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24\, n^2} f''(\zeta) \quad (\zeta \in (a, b))$$

кўринишни олади. Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\overline{x_k}) + \frac{(b-a)^3}{24\, n^2} f''(\zeta). \tag{9.54}$$

Шундай қилиб, $[a, b]$ оралиқда иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлган $f(x)$ функциянинг $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралини (9.52) тўғри тўртбурчаклар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланса, бу тақрибий ҳисоблаш хатолиги қуйидаги

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24\, n^2} f''(\zeta), \quad \zeta \in (a, b)$$

формула билан ифодаланади.

2. Трапециялар формуласи. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $\forall x \in [a, b]$ учун

$$f(x) \approx \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} \tag{9.55}$$

деб олиб, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални тақрибий ифодаловчи ушбу

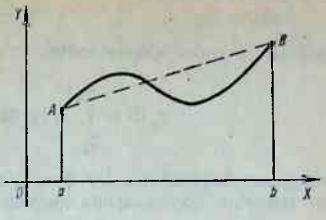
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \left[\frac{f(b) - f(a)}{b-a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} \right] dx =$$

$$= \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a) \tag{9.56}$$

формулани ҳосил қиламиз. (9.55) муносабатдаги

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

ифода $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ нуқтасининг ординатасини ифодалайди. (9.56) тақрибий формула $f(x) \geqslant 0$ $(\forall x \in [a, b])$ бўлганда (55-чизма) $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзини $aABb$ трапеция юзи билан алмаштирилишини ифодалайди. Энди (9.56) формуланинг аниқлигини ошириш мақсадида $[a, b]$ оралиқни $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакда $f(x)$ функциянинг $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ интегралига нисбатан (9.56) формулани қўллланамиз. У ҳолда



55-чизма.

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}(x_{k+1}-x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

бўлиб, натижада ушбу

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0) + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n-x_{n-1}) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{f(x_0)-f(x_n)}{2} +\right.$$

$$\left. + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right]$$

формулага келамиз. Демак,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)-f(x_n)}{2} + f(x_1) +\right.$$

$$\left. + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right]. \tag{9.57}$$

Бу (9.57) формула *трапециялар формуласи* деб аталади.

Энди (9.57) трапециялар формуласининг хатолигини, яъни ушбу

$$\overline{R}_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) +\right.$$

$$\left. + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right]$$

айирмани баҳолаймиз. Бунинг учун $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин деб қараймиз.

Аввало $[x_k, x_k + t]$, $0 < t \leqslant \frac{b-a}{n}$ оралиқ учун юқорида келтирилган тақрибий формуланинг хатолигини, яъни

$$r_k(t) = \int_{x_k}^{x_k+t} f(x)\,dx - \frac{f(x_k) + f(x_k+t)}{2} t \tag{9.58}$$

айирмани баҳолаймиз. Бу функциянинг t бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$r_k'(t) = \left(\int_{x_k}^{x_k+t} f(x)\,dx\right)' - \left(\frac{f(x_k) + f(x_k+t)}{2} \cdot t\right)' = f(x_k + t) -$$

$$- \frac{1}{2}[f(x_k) + f(x_k+t)] - \frac{t}{2} f'(x_k+t) = \frac{1}{2}[f(x_k+t) - f(x_k)] -$$

$$- \frac{t}{2} f'(x_k+t),$$

$$r_k''(t) = \frac{1}{2} f'(x_k+t) - \frac{1}{2} f'(x_k+t) - \frac{t}{2} f''(x_k+t) =$$

$$= -\frac{t}{2} f''(x_k+t).$$

Равшанки, $t = 0$ да

$$r_k(0) = 0, \quad r_k'(0) = 0.$$

Энди

$$r_k''(t) = -\frac{t}{2} f''(x_k+t)$$

тенгликни $[0, t]$ оралиқда интеграллаймиз:

$$\int_0^t r_k''(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^t t f''(x_k+t)\,dt. \tag{9.59}$$

Бир томондан

$$\int_0^t r_k''(t)\,dt = r_k'(t)\Big|_0^t = r_k'(t),$$

иккинчи томондан эса ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб,

$$\int_0^t t f''(x_k+t)\,dt = f''(\xi_k)\int_0^t t\,dt = \frac{t^2}{2} f''(\xi_k) \quad (\xi_k \in [x_k, x_k + t])$$

бўлишини топамиз.

Натижада (9.59) тенглик қуйидаги

$$r'_k(t) = -\frac{t^2}{4} f''(\xi_k)\ (\xi_k \in [x_k,\ x_k + t]) \tag{9.60}$$

кўринишни олади.

Ушбу

$$r'_k(t) = -\frac{t^2}{4} f''(\xi_k)$$

тенгликни $[0,\ t]$ оралиқда интеграллаб

$$\int_0^t r'_k(t)\,dt = -\frac{1}{4}\int_0^t t^2 f''(\xi_k)\,dt \tag{9.61}$$

ни топамиз:

$$\int_0^t r'_k(t)\,dt = r_k(t)\Big|_0^t = r_k(t),$$

$$\int_0^t t^2 f''(\xi_k)\,dt = f''(\xi_k^*)\int_0^t t^2 dt = \frac{t^3}{3} f''(\xi_k^*)\ \ (\xi_k^* \in [x_k,\ x_k + t]).$$

Натижада (9.61) тенглик қуйидаги

$$r_k(t) = -\frac{1}{12} t^3 f''(\xi_k^*)$$

кўринишга келади. У ҳолда, юқоридаги (9.58) муносабатда $t = \frac{b-a}{n} = x_{k+1} - x_k$ деб ҳисоблаб,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\right] - \frac{(b-a)^3}{24\,n^3} f''(\xi_k^*)$$

формулани ҳосил қиламиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{b-a}{2\,n}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{(b-a)^3}{2\,n^3} f''(\xi_0^*) + \frac{b-a}{2\,n}[f(x_1) + f(x_2)] -$$

$$- \frac{(b-a)^3}{12\,n^3} f''(\xi_1^*) + \ldots + \frac{b-a}{2\,n}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] -$$

$$- \frac{(b-a)^3}{12\,n^3} f''(\xi_{n-1}^*) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0) - f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) +\right.$$

$$\left. + \ldots + f(x_{n-1})\right] - \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \cdot \frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \ldots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}.$$

Аввал қараганимиздек

$$\frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \ldots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

иқдор $f''(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги энг кичик ҳамда энг атта қийматлари орасида бўлиб, $f''(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда уз-уксиз бўлганидан эса, шундай $\zeta \in (a, b)$ нуқта топиладики,

$$f''(\zeta)=\frac{f''(\xi_0^*)+f''(\xi_1^*)+\ldots+f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

ўлади. Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right]-$$

$$-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\zeta)\quad(\zeta\in(a, b)). \tag{9.62}$$

Шундай қилиб, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални тақрибий ифодаловчи (9.57) трапециялар формуласининг хатолиги ушбу

$$\overline{R}_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\zeta)$$

формула билан ҳисобланади.

3. Параболалар (Симпсон) формуласи. Бу ҳолда $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз $f(x)$ функциянинг $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун $f(x)$ функцияни $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ҳамда $(b, f(b))$ нуқталардан ўтувчи $y=Ax^2+Bx+C$ парабола нуқтасининг ординатаси билан алмаштирамиз. Берилган $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ва $(b, f(b))$ нуқталар орқали парабола ўтказиш мумкин. Бундай парабола ягона бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $y=Ax^2+Bx+C$ парабола юқорида айтилган нуқталар орқали ўтгани учун ушбу

$$\left.\begin{aligned}&Aa^2+Ba+C=f(a),\\&A\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+B\left(\frac{a+b}{2}\right)+C=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\\&Ab^2+Bb+C=f(b)\end{aligned}\right| \tag{9.63}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бу системанинг коэффициентларидан тузилган

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1\\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & \frac{a+b}{2} & 1\\ b^2 & b & 1\end{vmatrix}=\frac{(a-b)^3}{4}$$

детерминант ҳар доим нолдан фарқли (чунки $a \neq b$). Демак, (9.63) система ягона ечимга эга. Бу ҳол $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ҳамда $(b, f(b))$ нуқталардан ягона $y = Ax^2 + Bx + C$ парабола ўтишини билдиради.

Энди $\int\limits_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx$ интегрални берилган $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг тақрибий қиймати деб қуйидаги

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \int\limits_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу тақрибий формуладаги $\int\limits_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx$ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx = A \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b + B\frac{x^2}{2}\Big|_a^b + Cx\Big|_a^b = A\,\frac{b^3 - a^3}{3} +$$

$$+ B\,\frac{b^2 - a^2}{2} + C(b - a) = \frac{b-a}{6}\,[2A(b^2 + ba + a^2) + 3B(b - a) +$$

$$+ 6C] = \frac{b-a}{6}\left\{(Aa^2 + Ba + C) + 4\left[A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B\left(\frac{a+b}{2}\right) + C\right] +\right.$$

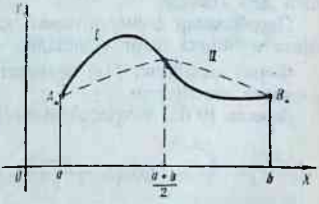
$$\left. + (Ab^2 + Bb + C)\right\} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Шундай қилиб, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун ушбу

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \qquad (9.64)$$

формулага келамиз.

Бу (9.64) формула $f(x) \geqslant 0$ бўлганда 56-чизмада кўрсатилган $aAIBb$ эгри чизиқли трапеция юзини $aAIIBb$ эгри чизиқли трапеция юзи билан алмаштирилишини ифодалайди.



56- чизма.

(9.64) формуланинг аниқлигини ошириш учун $[a, b]$ оралиқни

$$a_0 = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{2k},\ x_{2k+1},\ x_{2k+2},\ \ldots,\ x_{2n-2},\ x_{2n-1},\ x_{2n} = b$$

$$(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < x_{2k+1} < x_{k+2} < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n})$$

нуқталар ёрдамида $2n$ та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир $[x_{2k}, x_{2k+2}]$,

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) оралиқ бўйича олинган интегралга (9.64) формулани қўлланамиз. У ҳолда $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ оралиқ учун

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx \approx \frac{x_{2k+2}-x_{2k}}{6}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right] \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \qquad (9.65)$$

формулага эгамиз.

Натижада аниқ интегралнинг хоссасидан фойдаланиб, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}\left[(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) +\right.$$

$$\left. + \dots + (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))\right] = \frac{b-a}{6n}\left[f(x_0) +\right.$$

$$+ f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) +$$

$$\left. + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))\right].$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг аниқ интегралини тақрибий ифодалайдиган қуйидаги

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots +\right.$$

$$\left. + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_1) + \dots + f(x_{2n-2}))\right] \qquad (9.66)$$

формулага келамиз. Бу формула *параболалар* (ёки *Симпсон*) *формуласи* деб аталади.

Параболалар формуласининг хатолигини топиш учун $f(x)$ функцияга қўшимча шарт қўйилади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $f^{(IV)}(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

Аввало (9.65) тақрибий формуланинг хатолиги ушбу

$$r_k = \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right] \qquad (9.67)$$

айирма билан ифодаланади. Уни баҳолайлик.

Қуйидаги

$$F(t) = r_k(t) - \frac{t^5}{h^5}\, r_k(h) \qquad (9.68)$$

ёрдамчи функцияни қараймиз, бунда

$$r_k(t) = \int\limits_{x_{2k+1}-t}^{x_{2k+1}+t} f(x)\,dx - \frac{t}{3} f(x_{2k+1}-t) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+1}+t)]$$

ва

$$h = \frac{b-a}{2n}.$$

Бу (9.68) функцияни кетма-кет уч марта дифференциаллаб, топамиз:

$$F'(t) = f(x_{2k+1}+t) + f(x_{2k+1}-t) - \frac{1}{3}[f(x_{2k+1}-t) +$$

$$+ 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+1}+t)] - \frac{t}{3}[f'(x_{2k+1}+t) -$$

$$- f'(x_{2k+1}-t)] - \frac{5t^4}{h^5} r_k(h) = \frac{2}{3}[f(x_{2k+1}+t) + f(x_{2k+1}-t) -$$

$$- 2f(x_{2k+1})] - \frac{t}{3}[f'(x_{2k+1}+t) - f'(x_{2k+1}-t)] - \frac{5t^4}{h^5} r_k(h);$$

$$F''(t) = \frac{1}{3}[f'(x_{2k+1}+t) - f'(x_{2k+1}-t)] - \frac{t}{3}[f''(x_{2k+1}+t) +$$

$$+ f''(x_{2k+1}-t)] - \frac{20t^3}{h^5} r_k(h);$$

$$F'''(t) = -\frac{t}{3}[f'''(x_{2k+1}+t) - f'''(x_{2k+1}-t)] - \frac{60t^2}{h^5} r_k(h),$$

бунда $\int\limits_{x_{2k+1}-t}^{x_{2k+1}+t} f(x)\,dx$ интегралнинг t бўйича ҳосиласини ҳисоблашда 8-натижадан фойдаландик. Энди Лагранж теоремасига кўра

$$f'''(x_{2k+1}+t) - f'''(x_{2k+1}-t) = f^{(\mathrm{IV})}(\xi_k)\,2t$$

($\xi_k \in (x_{2k+1}-t,\ x_{2k+1}+t)$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда $F'''(t)$ нинг ифодаси қуйидаги

$$F'''(t) = -\frac{2}{3}t^2\left[f^{(\mathrm{IV})}(\xi_k) + \frac{90}{h^5} r_k(h)\right]$$

кўринишга эга бўлади.

Агар $F(0) = 0$, $F(h) = 0$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда Ролль теоремасига кўра шундай $t_1 (0 < t_1 < h)$ нуқта топиладики, $F'(t_1) = 0$ $(0 < t_1 < h)$ тенглик ўринли бўлади. $F'(0) = 0$, $F'(t_1) = 0$ тенгликларга кўра яна Ролль теоремасига асосан шундай $t_2 (0 < t_2 < t_1)$ нуқта топиладики, $F''(t_2) = 0$ $(0 < t_2 < t_1)$ тенглик ўринли бўлади. Шунга ўхшаш, ушбу $F''(0) = 0$, $F''(t_2) = 0$ тенгликларга кўра юқоридагидек шундай $t_3 (0 < t_3 < t_2)$ нуқта топиладики,

$F'''(t_3) = 0$ $(0 < t_3 < t_2)$ тенглик ўринли бўлади. Натижада $F'''(t)$ функция учун $t = t_3$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз:

$$0 = F'''(t_3) = -\frac{2}{3}t_3\left[f^{(IV)}(\xi_k) + \frac{90}{h^5}r_k(h)\right]$$

ёки

$$r_k(h) = -\frac{h^5}{90}f^{(IV)}(\xi_k).$$

Энди (9.67) ва (9.68) муносабатларни эътиборга олиб, юқоридаги (9.65) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right] -$$

$$-\frac{(b-a)^5}{2880h^5}f^{(IV)}(\xi_k) \quad (k = 0, 1, \dots, (n-1)).$$

Бу тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left[(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) +\right.$$

$$\left. + \dots + (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))\right] - \frac{(b-a)^5}{2880\,h^5}\left[f^{(IV)}(\xi_0) +\right.$$

$$\left. + f^{(IV)}(\xi_1) + \dots + f^{(IV)}(\xi_{n-1})\right].$$

Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\left[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots +\right.$$

$$\left. + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))\right] -$$

$$-\frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}f^{(IV)}(\xi), \tag{9.69}$$

бунда

$$f^{(IV)}(\xi) = \frac{f^{(IV)}(\xi_0) + f^{(IV)}(\xi_1) + \dots + f^{(IV)}(\xi_{n-1})}{n} \quad (\xi \in (a, b)).$$

Шундай қилиб, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегрални тақрибий ифодаловчи (9.66) Симпсон формуласининг хатолиги

$$-\frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}f^{(IV)}(\xi) \quad (\xi \in (a, b))$$

ифода билан аниқланади.

Биз юқорида $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ҳамда Симпсон формулаларини келтирдик. Бу тақрибий формулаларнинг хатоликларини таққослаб, Симпсон формуласининг аниқлик даражаси тўғри тўртбурчаклар ҳамда трапециялар формулаларининг аниқлигига қараганда юқори эканлигини кўрамиз.

Мисол. Ушбу

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

интегрални тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулалари ёрдамида тақрибий ҳисоблаймиз.

[0,1] оралиқни 5 та тенг бўлакка бўламиз. Бўлиниш нуқталари

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}2,\ x_2 = 0{,}4,\ x_3 = 0{,}6,\ x_4 = 0{,}8,\ x_5 = 1{,}0$$

бўлиб, бу нуқталарда $f(x) = e^{-x^2}$ функциянинг қийматлари қуйидагича:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1{,}00000, \\ f(x_1) &= 0{,}96079, \\ f(x_2) &= 0{,}85214, \\ f(x_3) &= 0{,}69768, \\ f(x_4) &= 0{,}52729, \\ f(x_5) &= 0{,}36788. \end{aligned}$$

Ҳар бир бўлакнинг ўртасини ифодаловчи нуқтанинг координаталари $x_{\frac{1}{2}} = 0{,}1$, $x_{\frac{3}{2}} = 0{,}3$, $x_{\frac{5}{2}} = 0{,}5$, $x_{\frac{7}{2}} = 0{,}7$, $x_{\frac{9}{2}} = 0{,}9$ бўлиб, бу нуқталардаги функциянинг қийматлари қуйидагича:

$$\begin{aligned} f(x_{1/2}) &= 0{,}99005, \\ f(x_{3/2}) &= 0{,}91393, \\ f(x_{5/2}) &= 0{,}77680, \\ f(x_{7/2}) &= 0{,}61263, \\ f(x_{9/2}) &= 0{,}44486. \end{aligned}$$

а) *Тўғри тўртбурчаклар формуласи* ((9.52) ва (9.54) ларга қаранг) бўйича $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx \approx \frac{1}{5}$ (0,99005 + 0,91393 + 0,77680 + + 0,61263 + 0,44486) $= \frac{1}{5}$ 3,74027 $\approx$ 0,74805,

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{12\cdot 25} = \frac{1}{300} \approx 0{,}003.$$

б) *Трапециялар формуласи* ((9.57) ва (9.62) ларга қаранг) бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}\left(\frac{1{,}00000+0{,}36788}{2}+0{,}96079+0{,}85214+0{,}69768+\right.$$

$$\left.+0{,}52729\right)=\frac{1}{5}(0{,}68394+3{,}03790)=\frac{1}{5}\cdot 3{,}72184\approx 0{,}74437,$$

$$|\overline{R}_n|\leqslant\frac{1}{6\cdot 25}=\frac{1}{150}\approx 0{,}006.$$

в) *Симпсон формуласи* ((9.66) ва (9.69) ларга қаранг) бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{30}\,[(1{,}00000+0{,}36788)+4\,(0{,}99005+0{,}91393+$$
$$+0{,}77680+0{,}61263+0{,}44486)+2\,(0{,}96079+0{,}85214+0{,}69768+$$
$$+0{,}52729)]=\frac{1}{30}\,(1{,}36788+4\cdot 3{,}74027+2\cdot 3{,}03790)=\frac{1}{30}\,(1{,}36788+$$
$$+6{,}07580+14{,}96108)\approx 0{,}74682.$$

$$|\overline{R}_n|\leqslant\frac{12}{2880\cdot 5^4}=0{,}7\cdot 10^{-5}.$$

Тақрибий формулалар ёрдамида ҳисоблаб топилган $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ интегралнинг қийматини, унинг

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx=0{,}74685\ \ldots$$

қиймати билан таққослаб, Симпсон формуласи ёрдамида топилган интегралнинг тақрибий қиймати аниқроқ эканлигини кўрамиз.

12-§. Функционал ҳақида тушунча

Биз 1-бобда ихтиёрий E ва F тўпламлар берилган ҳолда E тўпламнинг элементларини F тўпламнинг элементларига ўтказувчи f акслантиришни, яъни ушбу $f:E\to F$ акслантиришни таърифлаган эдик. Хусусан, $E=N$, $F=R$ бўлганда

$$f:N\to R\,(f:n\to x_n)$$

акслантириш сонлар кетма-кетлиги тушунчасига, $E=R$, $F=R$ бўлганда $f:R\to R\,(f:x\to y)$ акслантириш функция тушунчасига олиб келди ва улар 3- ва 4-бобларда батафсил ўрганилди. $[a, b]$ оралиқда аниқланган функциялар тўпламини M дейлик. Энди $E=M$, $F=R$ бўлганда $\varphi:M\to R$ акслантиришни қараймиз. Бу акслантириш функционал тушунчасига олиб келади.

8-таъриф. Агар M тўпламдаги ҳар бир $f(x)$ функцияга бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий сон y мос қўйилган бўлса, M тўпламда *функционал берилган* (*аниқланган*) дейилади ва у

$$\Phi : f(x) \to y \quad \text{ёки} \quad y = \Phi(f)$$

каби белгиланади. Бунда M функционалнинг аниқланиш тўплами дейилади.

Мисоллар. 1. Φ — $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган ҳар бир $f(x)$ функцияга унинг шу оралиқдаги максимум қийматини мос қўйювчи қоида бўлсин. Демак, бу ҳолда ушбу

$$\Phi: f(x) \to \max_{a\leq x\leq b}\{f(x)\} \quad \text{ёки} \quad y = \Phi(f) = \max_{a\leq x\leq b}\{f(x)\}$$

функционалга эга бўламиз. Бу функционалнинг аниқланиш тўплами $M = C\,[a, b]$ бўлади.

2. $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи ҳар бир $f(x)$ функцияга унинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x)\,dx$ ни мос қўйиш натижасида қуйидаги

$$\Phi : f(x) \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ёки} \quad \Phi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

функционал ҳосил бўлади. Бу функционалнинг аниқланиш тўплами $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи барча функциялардан иборат тўплам бўлади (одатда бундай тўплам L каби белгиланади).

Энди M — $[a, b]$ оралиқда аниқланган функциялардан иборат тўплам бўлиб, $\forall f(x) \in M$, $\forall \varphi(x) \in M$ учун

$$kf(x) + l\varphi(x) \in M$$

муносабат ўринли бўлсин (бунда k, l — ўзгармас сонлар).

Бу M тўпламда $\Phi(f)$ функционал аниқланган дейлик.

9-таъриф. Агар $\forall f(x) \in M$, $\forall \varphi(x) \in M$ лар учун функционал ушбу

$$\Phi(kf + l\varphi) = k\,\Phi(f) + l\,\Phi(\varphi)$$

тенгликни қаноатлантирса (бунда k ва l — ихтиёрий ўзгармас сон), у ҳолда Φ *чизиқли функционал* деб аталади.

Юқорида келтирилган

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

функционал чизиқли функционал бўлади. Ҳақиқатан ҳам, буни кўрсатиш учун аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиш етарли:

$$\Phi(kf + l\varphi) = \int_a^b [kf(x) + l\varphi(x)]\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx +$$

$$+ l\int_a^b \varphi(x)\,dx = k\,\Phi(f) + l\,\Phi(\varphi).$$

Функционаллар ва уларнинг хоссалари математиканинг функционал анализ бўлимида ўрганилади.

10-БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ БИР ТАТБИҚЛАРИ

Математика, физика, механика ҳамда фан ва техниканинг бошқа соҳаларида учрайдиган кўпгина масалаларни ечиш маълум функцияларнинг интегралларини хисоблашга келтирилади.

Ушбу бобда эгри чизиқ ёйининг узунлиги, эгри чизиқли трапециянинг юзи, ўзгарувчи кучнинг бажарган иши ҳамда массага эга бўлган эгри чизиқнинг инерция моменти аниқ интеграллар орқали хисобланиши кўрсатилади.

1-§. Ёй узунлиги ва унинг аниқ интеграл орқали ифодаланиши

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлсин. Бу функциянинг графиги қуйидаги

$$\{(x,\ f(x)) : x \in [a,\ b]\}$$

нуқталар тўпламидан иборат. Шу графикдаги $(a,\ f(a))$ ва $(b,\ f(b))$ нуқталар орасидаги эгри чизиқ ёйи узунлигининг аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз.

Маълумки, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда ўзгармас, яъни $f(x)=c$, $c=\text{const}$ бўлса, бу функциянинг графиги текисликда $(a,\ c)$, $(b,\ c)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси бўлиб, унинг узунлиги

$$l_1 = b - a \tag{10.1}$$

бўлади.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чизиқли функция, яъни $f(x)=\alpha x+\beta$ (α, β — ўзгармас сонлар) бўлса, у ҳолда бу функциянинг графиги $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси бўлиб, унинг узунлиги

$$l_2 = \sqrt{(b-a)^2 + [f(b) - f(a)]^2} = (b-a)\sqrt{1+\alpha^2} \tag{10.2}$$

бўлади.

57- чизма.

Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, унинг графиги 57-чизмада кўрсатилган чизиқни тасвирласин. Бу чизиқ — чекли сондаги (6 та) тўғри чизиқ кесмаларининг бирин-кетин бирлаштирилишидан иборат. Одатда бундай чизиқ *синиқ чизиқ* деб аталади.

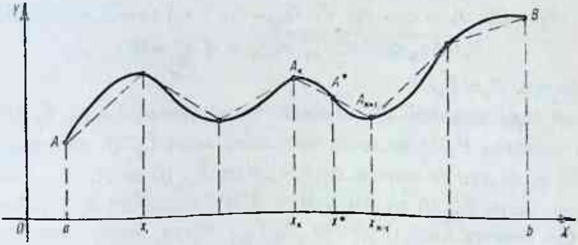
Равшанки, бу ҳолда синиқ чизиқ узунлиги (периметри) уни ташкил этган тўғри чизиқ кесмалари узунликлари йиғиндисига тенг бўлади:

$$l_3 = \sqrt{(x_1 - a)^2 + [f(x_1) - f(a)]^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [f(x_2) - f(x_1)]^2} + \\ + \ldots + \sqrt{(b - x_5)^2 + [f(b) - f(x_5)]^2} = \\ = \sum_{k=0}^{5} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2} \quad (x_0 = a, \quad x_6 = b).$$

Умуман, $[a, b]$ оралиқда аниқланган $f(x)$ функция графиги n та $A_0(x_0, f(x_0))$, $A_1(x_1, f(x_1))$, $\ldots$, $A_n(x_n, f(x_n))$ нуқтани $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ ўзаро тўғри чизиқ кесмаси ёрдамида бирин-кетин бирлаштиришдан ҳосил бўлган синиқ чизиқдан иборат бўлса, бу синиқ чизиқнинг периметри ушбу

$$l_4 = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2} \qquad (10.3)$$

формула билан ҳисобланади $(x_0 = a, \ x_n = b)$.



58-чизма.

Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ихтиёрий узлуксиз функция бўлсин. Бу функция графиги $[a, b]$ оралиқда 58-чизмада кўрсатилган эгри чизиқ ёйини тасвирласин. Уни $\overset{\frown}{AB}$ деб белгилаймиз. $[a, b]$ оралиқни ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

бўлаклашни олиб, бўлувчи x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ нуқталар орқали

Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг $\overset{\smile}{AB}$ ёй билан кесишган нуқталари $A_k(x_k, f(x_k))$ $(k=0, 1, \dots n,$ $A_0=A,\ A_n=B)$ бўлади. $\overset{\smile}{AB}$ ёйдаги бу нуқталарни бир-бири билан тўғри чизиқ кесмалари ёрдамида бирлаштириб $\overline{L}$ синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. $\overline{L}$ синиқ чизиқ $\overset{\smile}{AB}$ ёйга чизилган синиқ чизиқ деб аталади. Бу синиқ чизиқ периметрини L деб белгилайлик.

Равшанки, синиқ чизиқ периметри L қаралаётган $f(x)$ функцияга боғлиқ бўлиши билан бирга $[a, b]$ оралиқни бўлаклашга ҳам боғлиқ бўлади, яъни $L=L_P(f)$.

Агар P_1 ва P_2 лар $[a, b]$ оралиқни иккита бўлаклаш бўлиб, $P_1 \propto P_2$ бўлса, у ҳолда бу бўлаклашларга мос $\overset{\smile}{AB}$ ёйга чизилган синиқ чизиқлар периметрлари учун

$$L_{P_1}(f) \leqslant L_{P_2}(f)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $[a, b]$ оралиқни P_1 бўлаклаш қуйидаги

$$P_1=\{x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_k,\ x_{k+1},\ \dots,\ x_n\}\ (a=x_0<x_1<\dots<x_k<$$
$$<x_{k+1}<\dots<x_n=b)$$

кўринишда бўлиб, P_2 эса P_1 бўлаклашнинг барча бўлувчи нуқталари ҳамда қўшимча битта $x^* \in [a, b]$ нуқтани қўшиш натижасида ҳосил бўлган бўлаклаш бўлсин. Бу x^* нуқта x_k ҳамда x_{k+1} нуқталар орасида жойлашсин: $x_k<x^*<x_{k+1}$. Демак,

$$P_2=\{x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_k,\ x^*,\ x_{k+1},\ \dots,\ x_n\}\ (a=x_0<\dots<$$
$$<x_k<x^*<x_{k+1}<\dots<x_n=b).$$

Равшанки, $P_1 \propto P_2$.

$\overset{\smile}{AB}$ ёйга чизилган P_1 бўлаклашга мос синиқ чизиқ $\overline{L}_{P_1}(f)$ шу ёйга чизилган P_2 бўлаклашга мос синиқ чизиқ $\overline{L}_{P_2}(f)$ дан фақатгина битта бўлаги билангина фарқ қилади: $\overline{L}_{P_1}(f)$ да $A_k\ A_{k+1}$ бўлак бўлган ҳолда, $\overline{L}_{P_2}(f)$ да эса иккита $A_k A^*$ хамда $A^*\ A_{k+1}$ бўлаклар бор (58-чизмага қаранг). Аммо $A_k\ A_{k+1}$ тўғри чизиқ кесмасининг узунлиги $A_k\ A^*$ ҳамда $A^*\ A_{k+1}$ кесмалар узунликларининг йиғиндисидан ҳар доим катта бўлмагани учун (учбурчак бир томонининг узунлиги қолган икки томон узунликларининг йиғиндисидан катта эмас) ушбу $L_{P_1}(f) \leqslant L_{P_2}(f)$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Демак, P бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари сонини орттириб борилса, $\overset{\smile}{AB}$ ёйга чизилган уларга мос синиқ чизиқлар периметрлари ҳам ортиб боради.

P бўлаклашнинг диаметри λ_P нолга интила борганда $\overset{\smile}{AB}$ ёйига чизилган бу бўлаклашга мос синиқ чизиқ шу $\overset{\smile}{AB}$ ёйга борган сари яқинлаша боради, синиқ чизиқ периметри эса $\overset{\smile}{AB}$ ёйнинг узунлигини борган сари аниқроқ ифодалай боради, деб қараш табиийдир.

1-таъриф. Агар $\overset{\smile}{AB}$ ёйга чизилган ($[a, b]$ оралиқни ҳар қандай P бўлаклашга мос) синиқ чизиқ периметри

$$L_P(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}$$

$\lambda_P\to 0$ да чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\overset{\smile}{AB}$ ёй *узунликка эга* деб аталади ва ушбу

$$\lim_{\lambda_P\to 0}L_P(f)=L$$

лимит $\overset{\smile}{AB}$ ёйнинг *узунлиги* дейилади.

Хусусан, $f(x)=C$, $C=\mathrm{const}$ каби бўлса, $\overset{\smile}{AB}$ ёй узунлиги

$$L_P(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(C-C)^2}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=b-a,$$

$$L=\lim_{\lambda_P\to 0}L_P(f)=b-a$$

бўлиб, (10.1) формулага келамиз. Агар $f(x)=\alpha x+\beta$ каби бўлса, $\overset{\smile}{AB}$ ёй узунлиги

$$L_P(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\alpha^2(x_{k+1}-x_k)^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+\alpha^2}\,(x_{k+1}-x_k)=\sqrt{1+\alpha^2}\cdot(b-a)$$

ва

$$L=\lim_{\lambda_P\to 0}L_P(f)=\sqrt{1+\alpha^2}\cdot(b-a)$$

бўлиб, натижада (10.2) фурмула ҳосил бўлади.

Энди ёй узунлигининг аниқ интеграл орқали қандай ифодаланишини кўрсатамиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги графиги $\overset{\smile}{AB}$ ёйни тасвирласин, дейлик. $[a, b]$ оралиқни ихтиёрий P:

$$P=\{x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n\}\quad(a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$$

бўлаклашни олиб, $\overset{\smile}{AB}$ ёйга чизилган унга мос синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқнинг периметрини ёзамиз:

$$L_P(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}.$$

Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда $f(x)$ функцияга Лагранж теоремасини қўлланамиз. У ҳолда шундай τ_k $(\tau_k \in [x_k, x_{k+1}])$ нуқта топиладики,

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\tau_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)\quad(x_k\leqslant\tau_k\leqslant x_{k+1})$$

бўлади. Демак,

$$L_P(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\cdot(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k,$$

бунда $x_k\leqslant\tau_k\leqslant x_{k+1}$. Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди $\sqrt{1+f'^2(x)}$ функциянинг интеграл йиғиндисини эслатади. Унинг интеграл йиғиндидан фарқи шуки, интеграл йиғиндида $\xi_k\in[x_k, x_{k+1}]$ нуқта ихтиёрий бўлган ҳолда, юқоридаги йиғиндида эса τ_k нуқта $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқдаги тайин нуқтадир. Аммо $\sqrt{1+f'^2(x)}$ функция интегралланувчи бўлганлиги (чунки, шартга кўра, $f'(x)$ узлуксиз) сабабли бунинг аҳамияти йўқ. Демак,

$$\lim_{\lambda_P\to0}L_P(f)=\lim_{\lambda_P\to0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

тенглик келиб чиқади. Бу эса $\overset{\frown}{AB}$ ёйга чизилган синиқ чизиқ периметри $\lambda_P\to0$ да чекли лимитга эга бўлишини ва у лимит $\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ интегралга тенг эканини билдиради. Демак $\overset{\frown}{AB}$ ёй узунликка эга ва бу ёй узунлиги қуйидаги

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \tag{10.4}$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Мисол. $[-a, a]$ $(a>0)$ оралиқда ушбу

$$f(x)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

занжир чизиқ ёйининг узунлигини топинг. Аввал $f(x)$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаб, $\sqrt{1+f'^2(x)}$ ни топамиз:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$1+f'^2(x)=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2,$$

$$\sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}).$$

Энди (10.4) формулага кўра занжир чизиқ ёйининг $[-a,\ a]$ оралиқдаги ёйи узунлигини ҳисоблаймиз:

$$L = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})\,dx = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})\Big|_{-a}^{a} = a\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Қуйидаги

$$\begin{cases} x = \varphi\,(t) \\ y = \psi\,(t) \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \qquad (10.5)$$

(тенгламалар системаси орқали ифодаланган эгри чизиқни қараймиз (бу ҳолда эгри чизиқ параметрик ҳолда берилган дейилиб, (10.5 система эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади). Бунда $\varphi\,(t)$, $\psi\,(t)$ лар $[\alpha,\ \beta]$ оралиқда узлуксиз функциялар бўлиб, t ўзгарувчи — параметрнинг $[\alpha,\ \beta]$ оралиқдаги ихтиёрий иккита турли t_1 ва t_2 $(t_1 \neq t_2)$ қийматига мос келадиган (10.5) чизиқдаги $A_1\,(x_1,\ y_1)$, $A_2\,(x_2,\ y_2)$ нуқталар $(x_1 = \varphi\,(t_1),\ y_1 = \psi\,(t_1);\ x_2 = \varphi\,(t_2),\ y_2 = \psi\,(t_2))$ ҳам турлича бўлсин. Бундан ташқари, параметр t нинг t_1 ва t_2 қийматларига мос келадиган (10.5) чизиқдаги $A_1\,(x_1,\ y_1)$, $A_2\,(x_2,\ y_2)$ нуқталарни $t_1 < t_2$ бўлганда, A_2 нуқта A_1 нуқтадан кейин келади деб қаралади. Шу билан эгри чизиқда йўналиш ўрнатилади.

Фараз қилайлик, $t = \alpha$, $t = \beta$ қийматларга (10.5) чизиқда A ва B нуқталар мос келсин. Бу чизиқнинг $\overset{\smile}{AB}$ ёйи узунлиги аниқ интеграл орқали қандай ифодаланишини кўрсатамиз.

Аввал юқоридагидек $\overset{\smile}{AB}$ ёйнинг узунлигини аниқлаймиз. $[\alpha,\ \beta]$ оралиқни ихтиёрий

$$P = \{t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_n\}\ (\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta)$$

бўлаклашни олиб, бу бўлаклашнинг бўлувчи t_k $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ нуқталарига мос келган $\overset{\smile}{AB}$ ёйдаги $A_k = A_k\,(x_k,\ y_k)$ $(x_k = \varphi\,(t_k),\ y_k = \psi\,(t_k))$ нуқталарни бир-бири билан тўғри чизиқ кесмалари ёрдамида бирлаштириб, $\overset{\smile}{AB}$ ёйга чизилган синиқ чизиқни топамиз. Бу синиқ чизиқнинг периметри қуйидаги

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi\,(t_{k+1}) - \varphi\,(t_k)]^2 + [\psi\,(t_{k+1}) - \psi\,(t_k)]^2} \qquad (10.6)$$

формула билан ифодаланади. Равшанки, L $\varphi\,(t)$, $\psi\,(t)$ функцияларга ҳамда $[\alpha,\ \beta]$ оралиқни бўлаклашга боғлиқ, яъни $L = L_P\,(\varphi,\ \psi)$. Юқоридагидек, $\lambda_P \to 0$ да синиқ чизиқ периметри $L_P\,(\varphi,\ \psi)$ чекли лимитга эга, яъни

$$\lim_{\lambda_P \to 0} L_P\,(\varphi,\ \psi) = l$$

бўлса, $\overset{\smile}{AB}$ ёй узунликка эга дейилади, бу лимит l эса $\overset{\smile}{AB}$ ***ёйининг узунлиги*** дейилади.

Энди $\overset{\smile}{AB}$ ёйининг узунликка эга бўлиши ҳамда ёй узунлигини аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатиш мақсадида $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларни $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз $\varphi'(t)$ ва $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга деб қараймиз. Ҳар бир $[t_k, t_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ оралиқда $\varphi(t)$ ҳамда $\psi(t)$ функциялар Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантиради. У ҳолда Лагранж теоремасига кўра (t_k, t_{k+1}) интервалда шундай τ_k нуқта топиладики, ушбу

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) \tag{10.7}$$

тенглик, шунингдек, шу (t_k, t_{k+1}) интервалда шундай θ_k нуқта топиладики,

$$\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = \psi'(\theta_k)\ (t_{k+1} - t_k) \tag{10.8}$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу (10.7), (10.8) муносабатлардан фойдаланиб, (10.6) синиқ чизиқ периметрини қуйидагича ёзамиз:

$$L_P(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\tau_k)\ (t_{k+1} - t_k)^2 + \psi'^2(\theta_k)\ (t_{k+1} - t_k)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)}\ \Delta t_k \quad (\Delta t_k = t_{k+1} - t_k),$$

бунда $\tau_k \in (t_k, t_{k+1})$, $\theta_k \in (t_k, t_{k+1})$. Сўнгра $L_P(\varphi, \psi)$ ни ушбу

$$L_P(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}\ \Delta t_k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)} \right] \Delta t_k \tag{10.9}$$

($\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$ оралиқдаги ихтиёрий нуқта) кўринишда ёзиб, бу тенгликнинг ўнг томонидаги

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)} \right] \Delta t_k$$

йиғиндини баҳолаймиз.

Аввал эслатиб ўтамизки, ихтиёрий a, b, c, d сонлар учун

$$\left| \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2} \right| \leqslant |a-c| + |b-d| \tag{10.10}$$

тенгсизлик ўринли. Ҳақиқатан ҳам,

$$\left| \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2} \right| = \left| \frac{(a^2+b^2) - (c^2+d^2)}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{(a^2-c^2)+(b^2-d^2)}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}} \right| \leqslant |a-c| \, \frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}} +$$

$$+ |b-d| \, \frac{|b+d|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}} \leqslant |a-c| + |b-d|,$$

чунки

$$\frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}} \leqslant 1, \quad \frac{|b+d|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}} \leqslant 1.$$

Агар (10.10) тенгсизликдан фойдалансак, юқоридаги йиғинди учун ушбу

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)} \right] \Delta t_k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)} \right| \cdot \Delta t_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(\tau_k)-\varphi'(\xi_k)| \, \Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1} \psi'(\theta_k)-\psi'(\xi_k) \, | \, \Delta t_k$$

тенгсизликка келамиз.

Шартга кўра $\varphi'(t)$ ҳамда $\psi'(t)$ ҳосилалар $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз. Кантор теоремасининг натижасига мувофиқ $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$ сонга кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[\alpha, \beta]$ оралиқни диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлаклашда

$$|\varphi'(\tau_k)-\varphi'(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$$

тенгсизлик, шунингдек,

$$|\psi'|(\theta_k)-\varphi'(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. У ҳолда қуйидагига эгамиз:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)} \right] \Delta t_k \right| <$$

$$< \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \Delta t_k =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \, 2 \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} (\beta-\alpha) = \varepsilon.$$

Демак,

$$\mathrm{m}_{\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\right]\Delta t_k=0. \quad (10.11)$$

(10.9) тенгликда $\lambda_p\to 0$ да лимитга ўтамиз. (10.11) муносабатни иборга олиб топамиз:

$$\lim_{\lambda_p\to 0}L_p(\varphi,\psi)=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k. \quad (10.12)$$

$\varphi'(t)$ ҳамда $\psi'(t)$ ҳосилаларнинг $[\alpha,\beta]$ оралиқда узлуксизлигига ра $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ функция ҳам $[\alpha,\beta]$ оралиқда узлуксиз бўлади. эмак, у шу оралиқда интегралланувчи. У ҳолда $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ нкциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k$$

$_p\to 0$ да чекли лимитга эга ва бу лимит

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

нтегралга тенг бўлади. Демак,

$$\lim_{\cdot p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \quad (10.13)$$

нди (10.12) ва (10.13) тенгликлардан ушбу

$$\lim_{\lambda_p\to 0}L_p(\varphi,\psi)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

формула келиб чиқади. Бу эса $\overset{\frown}{AB}$ ёйнинг узунликка эга бўлишини ва унинг узунлиги учун

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \quad (10.14)$$

формула ўринли эканини билдиради.

Хусусан, агар (10.5) система ушбу

$$\begin{cases} x=\varphi(t)=t, \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

кўринишда бўлса, бу система $y=\psi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ кўринишни олади. $\overset{\frown}{AB}$ ёйнинг узунлиги учун

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,dx$$

формулага эга бўламиз. Бу (10.4) формуланинг ўзидир.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = r\ \cos\ t, \\ y = r\ \sin\ t \end{cases} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant t \leqslant \beta \leqslant 2\pi) \tag{10.15}$$

чизиқнинг узунлигини топинг.

$[\alpha, \beta]$ оралиқда $x = \varphi(t) = r\cos\ t$, $y = \psi(t) = r\cdot\sin\ t$ $(r > 0)$ функциялар узлуксиз ҳосилаларга эга. (10.15) система маркази координата бошида, радиуси r га тенг бўлган айлана ёйини ифодалайди. Унинг узунлигини (10. 14) формула ёрдамида топамиз:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r\cdot\cos\ t)'^2 + (r\cdot\sin\ t)'^2}\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt =$$

$$= r\int_{\alpha}^{\beta} dt = r\ (\beta - \alpha).$$

Юқоридаги (10.5) система билан ифодаланган $\overset{\frown}{AB}$ ёйни қарайлик. Бу ёйда параметрнинг $t\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ қийматига мос келадиган нуқтани C дейлик. Равшанки, $\overset{\frown}{AC}$ ёйнинг узунлиги t га боғлиқ бўлиб, у (10.19) формулага кўра $[\alpha, t]$ оралиқда

$$S = S\ (t) = \overset{\frown}{AC} = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$$

кўринишда ифодаланади. Бу юқори чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интегралдир. Унинг ҳосиласи (9-бобнинг 9-§ ига қаранг):

$$S'\ (t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}.$$

Кейинги тенгликни квадратга кўтариб, сўнгра ҳар икки томонини dt^2 га кўпайтирсак, натижада

$$S'^2\ (t)\ dt^2 = \varphi'^2\ (t)\ dt^2 + \psi'^2\ (t)\ dt^2,$$

яъни

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \tag{10.16}$$

муносабат ҳосил бўлади. Бу муносабат *ёй дифференциалининг* квадратини ифодалайди.

Энди текисликда қутб координаталарда берилган эгри чизиқ ёйи узунлигининг ҳам аниқ интеграл орқали ифодасини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, эгри чизиқ қутб координата системасида қуйидаги

$$r = \rho\ (\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta) \tag{10.17}$$

функция билан берилган бўлсин, бунда $\rho\ (\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз $\rho'\ (\theta)$ ҳосилага эга бўлсин дейлик. Биз (10.17) кўринишда берилган эгри чизиқ тенгламасини қуйидаги

$$\begin{aligned} x &= \rho\ (\theta)\ \cos\ \theta, \\ y &= \rho\ (\theta)\ \sin\ \theta \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \end{aligned}$$

метрик кўринишда ифодалаб, (10.14) формуладан фойдаланамиз:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho(\theta)\cos\theta]'^2 + [\rho(\theta)\cdot\sin\theta]'^2}\, d\theta =$$

$$\int^\beta \sqrt{[\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(0)\sin\theta]^2 + [\rho'(\theta)\sin\theta + \rho'(\theta)\cos\theta]^2}\, d\theta =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}\, d\theta.$$

мак,

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}\, d\theta. \qquad (10.18)$$

Мисол. Ушбу

$$r = a\cdot\theta \quad (a = \text{const},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha)$$

и чизиқ (Архимед спирали) ёйининг узунлигини топамиз. Юқори-
ги (10.18) формулага кўра ҳисоблаймиз:

$$l = \int_0^\alpha \sqrt{(a\cdot\theta)'^2 + (a\cdot\theta)^2}\, d\theta = a\int_0^\alpha \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta =$$

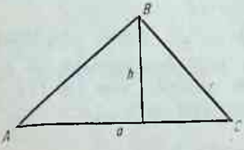
$$= a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\ln|\theta + \sqrt{1+\theta^2}|\right]_0^\alpha =$$

$$= \frac{a}{2}[\alpha\sqrt{1+\alpha^2} + \ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})].$$

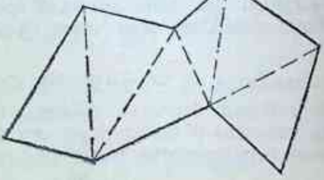
2-§. Текис шаклнинг юзи ва унинг аниқ интеграл орқали ифодаланиши

Биз ушбу параграфда текис шаклнинг юзини топишда аниқ интегралнинг қўлланишини кўрсатамиз.

Маълумки, текисликда берилган ABC учбурчак юзга эга ва нинг юзи учбурчак асоси a билан баландлиги h кўпайтмасининг

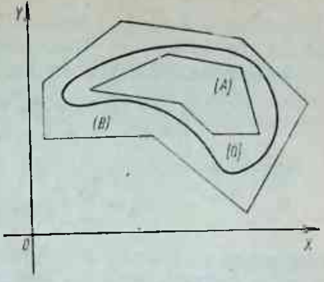


59- чизма.



60- чизма.

ярмига тенг (59-чизма): $S = \frac{1}{2} ah$. Агар текис шакл кўпбурчак, яъни ёпиқ синиқ чизиқ билан чегараланган шакл бўлса, у ҳолда бу кўпбурчак учбурчакларга ажратилиб, кўпбурчакнинг юзи учбурчаклар юзларининг йиғиндиси сифатида топилади (60-чизма).



61-чизма.

Энди текисликда бирор чегараланган (Q) шаклни қарайлик (61-чизма). Бу (Q) шаклнинг ичига (A) кўпбурчаклар, сўнгра (Q) шаклни ўз ичига олган (B) кўпбурчакларни чизамиз. (A) кўпбурчакларнинг юзини S_A билан, (B) кўпбурчакларнинг юзини S_B билан белгилайлик. Натижада (Q) шаклга ички чизилган кўпбурчак юзларидан иборат $\{S_A\}$ тўплам, (Q) шаклни ўз ичига олган кўпбурчак юзларидан иборат $\{S_B\}$ тўпламлар ҳосил бўлади.

$\{S_A\}$ тўплам юқоридан, $\{S_B\}$ тўплам қуйидаги чегараланганлиги сабабли $\{S_A\}$ тўплам аниқ юқори чегарага, $\{S_B\}$ тўплам эса аниқ қуйи чегарага эга бўлади:

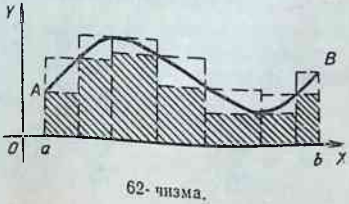
$$\sup\{S_A\} = \underline{Q}, \quad \inf\{S_B\} = \overline{Q}.$$

Равшанки,

$$\underline{Q} \leqslant \overline{Q}.$$

2-таъриф. Агар $\underline{Q} = \overline{Q}$, яъни $\sup\{S_A\} = \inf\{S_B\}$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда (Q) шакл юзга эга дейилади ва $Q = \underline{Q} = \overline{Q}$ миқдор (Q) шаклнинг *юзи* дейилади. Демак, $Q = \sup\{S_A\} = \inf\{S_B\}$. Энди (Q) шакл сифатида $aABb$ эгри чизиқли трапецияни оламиз. Бу эгри чизиқли трапециянинг юзга эга эканини ва юзнинг аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган, узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \geqslant 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал чизиқлар ҳамда пастдан Ox абсцисса ўқи билан чегараланган шаклни, яъни $aABb$ эгри чизиқли трапецияни қарайлик (62-чизма).



62-чизма.

Энди $[a, b]$ оралиқни ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

бўлаклашни оламиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани сабабли, бу функция P бўлаклашнинг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ оралиғида ҳам узлуксиз бўлиб, унда

$$\inf\{f(x)\} = m_k, \ \sup\{f(x)\} = M_k$$
$$(x \in [x_n \ \ x_{k+1}], \ k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Қуйидаги

$$S_A = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad S_B = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

йиғиндиларни тузамиз. Бу йиғиндиларнинг биринчиси $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг ичига чизилган кўпбурчакнинг юзини (62-чизмада бу юз штрихланган), иккинчиси эса $aABb$ эгри чизиқли трапецияни ўз ичига олган кўпбурчакнинг юзини ифодалайди.

Равшанки, бу кўпбурчаклар, демак, уларнинг юзлари ҳам $f(x)$ функцияга ҳамда $[a, b]$ оралиқни бўлаклашга боғлиқ бўлади:

$$S_A = S_A^P(f), \quad S_B = S_B^P(f).$$

$[a, b]$ оралиқни турли бўлаклашлар олинса, уларга нисбатан $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг ичига чизилган ҳамда бу эгри чизиқли трапецияни ўз ичига олган турли кўпбурчаклар ясалади. Натижада бу кўпбурчак юзларидан иборат қуйидаги

$$\{S_A^P(f)\}, \quad \{S_B^P(f)\}$$

тўпламлар ҳосил бўлади. Бунда $\{S_A^P(f)\}$ тўплам юқоридан, $\{S_B^P(f)\}$ тўплам эса қуйидан чегараланган бўлади. Демак, бу тўпламларнинг

$$\sup\{S_A^P(f)\}, \quad \inf\{S_B^P(f)\}$$

аниқ чегаралари мавжуд.

Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига асосан $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда $\frac{\varepsilon}{b-a}$ сонга кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклаш учун ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда функциянинг тебраниши

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади. Унда

$$\inf\{S_B^P(f)\} - \sup\{S_A^P(f)\} \leqslant S_B^P(f) - S_A^P(f) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

Демак, $[a, b]$ оралиқни диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлаклаш олинганда ҳам бу бўлаклашга мос $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг ичига чизилган ҳамда бу трапецияни ўз ичига олган кўп бурчак юзлари учун ҳар доим

$$0 \leqslant \inf\left\{S_B^P(f)\right\} - \sup\left\{S_A^P(f)\right\} < \varepsilon$$

тенсизлик ўринли бўлади. Бундан эса

$$\inf\left\{S_B^P(f)\right\} = \sup\left\{S_A^P(f)\right\} \qquad (10.19)$$

тенглик келиб чиқади.

(10.19) тенглик $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзга эга бўлишини билдиради.

Энди юқорида ўрганилган $S_A^P(f)$, $S_B^P(f)$ йиғиндиларни Дарбу йиғиндилари (9-бобдаги 5-таърифга қаранг) билан таққослаб, $S_A^P(f)$ ҳамда $S_B^P(f)$ йиғиндилар $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқда мос равишда Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари эканини топамиз. Шунинг учун (9-бобдаги 6-таърифга асосан) ушбу

$$\sup\left\{S_A^P(f)\right\},\ \inf\left\{S_B^P(f)\right\}$$

миқдорлар $f(x)$ функциянинг қуйи ҳамда юқори интеграллари бўлади, яъни

$$\sup\left\{S_A^P(f)\right\} = \underline{\int_a^b} f(x)dx,\ \inf\left\{S_B^P(f)\right\} = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \qquad (10.20)$$

Юқорида исботланган (10.19) муносабатга кўра

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

тенглик ўринли экани кўринади. Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Шундай қилиб, бир томондан, $aABb$ эгри чизиқли трапеция юзга эга экани, иккинчи томондан, унинг юзи $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интегралига тенг экани исбот этилди. Демак, $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзи учун ушбу

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (10.21)$$

формула ўринли.

Мисол. Қуйидаги

$$y=0,\ y=\frac{1}{2}x^2,\ x=1,\ x=3$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг (63-чизма).

(10.21) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$Q=\int_1^3\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_1^3=\frac{27}{6}-\frac{1}{6}=\frac{13}{3}(\text{кв. бирлик}).$$

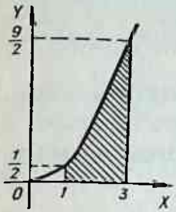
Агар текисликда (Q) шакл қуйидаги

$$y=f_1(x);\quad y=f_2(x),\quad x=a,\ x=b$$

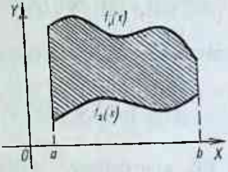
чизиқлар билан чегараланган шаклни ифодаласа (бунда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар $[a,\ b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, бу оралиқда $f_1(x)\geqslant 0$, $f_2(x)\geqslant 0$, $f_1(x)\geqslant f_2(x)$), у ҳолда бу шаклнинг юзи учун ушбу

$$Q=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]\,dx \tag{10.22}$$

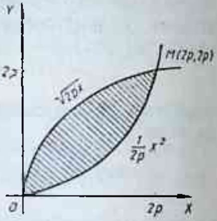
формула ўринли бўлади (64-чизма).



63-чизма.



64-чизма.



65-чизма.

Мисол. Ушбу $f_1(x)=\sqrt{2px}$, $f_2(x)=\frac{1}{2p}x^2$ ($p>0$) чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг (65-чизма).

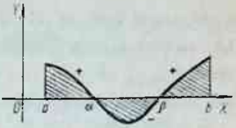
Изланган юз $y=\sqrt{2px}$ ва $y=\frac{1}{2p}x^2$, $p>0$ параболалар билан чегараланган. Шу параболалар (0, 0) ва ($2p$, $2p$) нуқталарда кесишади. Демак, изланган юз $x=0$, $x=2p$ ва $y=\sqrt{2px}$, $y=\frac{1}{2p}x^2$ чизиқлар билан чегараланган. Шунинг учун (10.22) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$Q=\int_0^{2p}\left[\sqrt{2px}-\frac{1}{2p}x^2\right]dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6p}\right]_0^{2p}=\frac{4}{3}p^2.$$

1-эслатма. Юқоридаги (10.21) формула $[a, b]$ оралиқда $f(x) \geqslant 0$ бўлганда $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодалашини кўрдик. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, унда ишора сақламаса, (10.21) формуладаги интеграл эгри чизиқли трапециялар юзларининг йиғиндисидан иборат бўлади. Бунда Ox ўқининг юқорисидаги юз мусбат ишора билан, Ox ўқининг пастидаги юз эса манфий ишора билан олинади.

Масалан, агар $a < \alpha < \beta < b$ бўлиб, $\forall x \in [a, \alpha]$ учун $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ учун $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [\beta, b]$ учун $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функция графиги билан чегараланган шаклнинг юзи $Q = \int\limits_a^\alpha f(x)dx - \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx + \int\limits_\beta^b f(x)\,dx$ кўринишда ёзилади (66-чизма).

Масалан, Ox ўқи ҳамда синусоиданинг $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ораликдаги қисми билан чегараланган шаклнинг юзини топайлик. $0 \leqslant x \leqslant \pi$ оралиқда $\sin x \geqslant 0$, $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ оралиқда эса $\sin x \leqslant 0$ эканини эътиборга олиб изланаётган шаклнинг юзини топамиз:



66-чизма.

$$Q = \int\limits_0^\pi \sin x\,dx + \left(-\int\limits_\pi^{2\pi} \sin x\,dx\right) = (-\cos x)\Big|_0^\pi - (-\cos x)\Big|_\pi^{2\pi} =$$

$$= 4 \text{ (кв. бирлик).}$$

2-эслатма. Текис шаклнинг юзини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

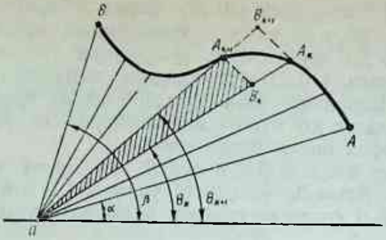
Текисликда (Q) шакл берилган (61-чизмага қаранг). $\{A_n\}$ шу шакл ичига чизилган кўпбурчаклар кетма-кетлиги, $\{B_n\}$ эса (Q) шаклни ўз ичига олган кўпбурчаклар кетма-кетлиги бўлсин. A_n ҳамда B_n кўпбурчаклар юзлари мос равишда S_{A_n} ва S_{B_n} бўлиб, улардан тузилган кетма-кетликлар эса $\{S_{A_n}\}$ ҳамда $\{S_{B_n}\}$ бўлсин. Агар $n \to \infty$ да $\{S_{A_n}\}$ ҳамда $\{S_{B_n}\}$ кетма-кетликлар чекли лимитга эга бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{A_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{B_n}$ тенглик ўринли бўлса, (Q) шакл юзга эга дейилади ҳамда бу юз учун ушбу

$$Q = \lim_{n\to\infty} S_{A_n} = \lim_{n\to\infty} S_{B_n}$$

формула ўринли бўлади. Бунда Q шаклнинг юзи деб аталади.

Қутб координата системасида ушбу $\rho = \rho(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ функция тасвирлаган $\overset{\frown}{AB}$ ёй ҳамда OA ва OB — радиус-векторлар билан чегараланган шакл — эгри чизиқли секторни қарайлик (67-чизма). Бунда $\rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз ҳамда $\forall \theta \in [\lambda, \beta]$ учун $\rho(\theta) \geqslant 0$. Энди $[\alpha, \beta]$ оралиқни ихтёрий

$$P = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n\} \quad (\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \beta)$$



67- чизма.

бўлаклашни оламиз. O нуқтадан ҳар бир қутб бурчаги θ_k га мос OA_k радиус-вектор ўтказамиз. Натижада OAB — эгри чизиқли сектор OA_kA_{k+1} $(k = 0, 1, \ldots, n-1;\ A_0 = A,\ A_n = B)$ эгри чизиқли секторчаларга ажралади.

$\rho = \rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун бу оралиқнинг ҳар бир $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ қисмида

$$m_k = \inf\{\rho(\theta)\} \quad (\theta_k \leqslant \theta \leqslant \theta_{k+1}),$$
$$M_k = \sup\{\rho(\theta)\} \quad (\theta_k \leqslant \theta \leqslant \theta_{k+1})$$

мавжуд.

Энди OA_kA_{k+1} эгри чизиқли сектор ичига ён томони m_k га тенг бўлган тенг ёнли $OA_{k+1}B_k$ учбурчакни, OA_kA_{k+1} ни ўз ичига олган ён томони M_k га тенг бўлган $OB_{k+1}A_k$ учбурчакни чизамиз. Бу учбурчакларнинг юзи мос равишда

$$\frac{1}{2} m_k^2 \sin\Delta\theta_k, \quad \frac{1}{2} M_k^2 \cdot \sin\Delta\theta_k \quad (\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k)$$

формулалар билан аниқланади. Қуйидаги

$$s = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \sin\Delta\theta_k \quad S = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \sin\Delta\theta_k \tag{10.23}$$

йиғиндилар эса, мос равишда OAB эгри чизиқли сектор ичига чизилган кўпбурчак юзини ҳамда OAB ни ўз ичига олган кўпбурчак юзини ифодалайди. Бу s ва S лар $\rho = \rho(\theta)$ функцияга ҳамда $[\alpha, \beta]$ оралиқни бўлаклашларга боғлиқ:

$$s = s^P(\rho), \ S = S^P(\rho).$$

Юқоридаги (10.23) йиғиндиларни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} m_k^2 \Delta\theta_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} m_k^2 \Delta\theta_k \left(\frac{\sin\Delta\theta_k}{\Delta\theta_k} - 1\right), \tag{10.24}$$

$$S=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2\Delta\theta_k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2\Delta\theta_k\left(\frac{\sin\Delta\theta_k}{\Delta\theta_k}-1\right).$$

Бу тенгликларнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчилар $\frac{1}{2}\,{}^2\rho(\theta)$ функциянинг $[\alpha,\beta]$ оралиқдаги Дарбу йиғиндиларидир. 9-бобдаги 2-лемага кўра $\lambda_p\to 0$ да бу йиғиндилар қуйи ҳамда юқори интегралларга интилади:

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2\Delta\theta_k=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)\,d\theta,$$

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2\,\Delta\theta_k=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)d\theta.$$

(10.24) тенгликларнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчилар учун

$$\lambda_p\to 0\text{ да }\frac{\sin\Delta\theta_k}{\Delta\theta_k}-1\to 0,$$

яъни

$$\left|\frac{\sin\Delta\theta_k}{\Delta\theta_k}-1\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2\Delta\theta_k\left(\frac{\sin\Delta\theta_k}{\Delta\theta_k}-1\right)\right|<\varepsilon\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2\Delta\theta_k\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\,\varepsilon M^2(\beta-\alpha)\quad(M=\sup\rho(\theta);\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta).$$

Бундан

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2\Delta\theta_k\left(\frac{\sin\Delta\theta_k}{\Delta\theta_k}-1\right)=0 \qquad (10.25)$$

бўлиши келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2\,\Delta\theta_k\left(\frac{\sin\Delta\theta_k}{\Delta\theta_k}-1\right)=0 \qquad (10.26)$$

бўлади.

Энди $\lambda_p\to 0$ да (10.24) тенгликларда лимитга ўтсак, у ҳолда (10.24) ва (10.25), (10.26) муносабатларга кўра ушбу

$$\lim_{\lambda_p\to 0} s=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)\,d\theta,\quad \lim_{\lambda_p\to 0} S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)d\theta \qquad (10.27)$$

тенгликлар ҳосил бўлади.

$\rho=\rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ функция ҳам шу оралиқда узлуксиз, бинобарин $[\alpha, \beta]$ оралиқда интегралланувчи бўлади. Демак,

$$\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta=\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d(\theta)=\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta.$$

Натижада (10.27) га кўра

$$\lim_{\lambda_P\to 0} s=\lim_{\lambda_P\to 0} S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta$$

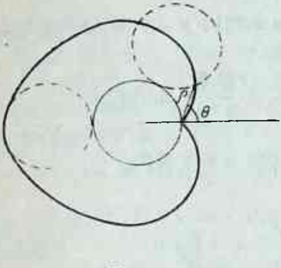
бўлиши келиб чиқади. Бу эса OAB секторнинг юзга эга экани ва унинг юзи учун ушбу

$$Q=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta$$

формула ўринли бўлишини билдиради.

Мисол. Ушбу

$$\rho=\rho(\theta)=a(1-\cos\theta) \quad (a-\text{const}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$



68- чизма.

функция графиги билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Бу функция графиги кардиоидани ифодалайди. Маълумки, кардиоида—радиуси α га тенг бўлган айлананинг шу радиусли иккинчи қўзғалмас айлана бўйлаб ҳаракати (сирғанмасдан думалаши) натижасида биринчи айлана ихтиёрий нуқтасининг чизган чизиғидир (68-чизма). Кардиоида қутб ўқига нисбатан симметрик бўлгани сабабли юқори ярим текисликдаги шаклнинг юзини топиб, сўнгра уни 2 га кўпайтирсак, изланаётган юз келиб чиқади.

θ ўзгарувчи $[0, \pi]$ оралиқда ўзгарганда ρ радиус-вектор кардиоиданинг юқори ярим текисликдаги қисмини чизади. Шунинг учун

$$Q=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \rho^2(\theta)\,d\theta=\int_0^\pi a^2(1-\cos\theta)^2\,d\,\theta=a^2\int_0^\pi\left[\frac{3}{2}-2\cos\theta+\right.$$

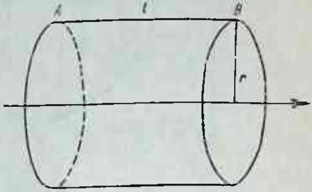
$$\left.+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]d\theta=a^2\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^\pi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

Демак,

$$Q=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

3- §. Айланма сиртнинг юзи ва унинг аниқ интеграл орқали ифодаланиши

Маълумки, l узунликка эга бўлган AB кесмани унга параллел ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт *цилиндрик сирт* деб аталади (69- чизма). Бу сиртнинг юзи (цилиндрнинг ён сирти) $S = 2\pi r l$ формула билан ҳисобланади. Бунда r — цилиндр асосининг радиуси.



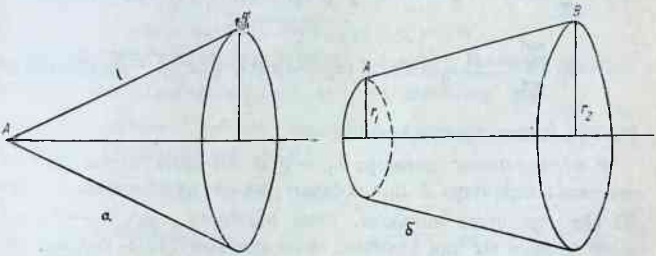
69- чизма.

Ўққа параллел бўлмаган AB кесмани шу ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт *конус (кесик конус) сирт* деб аталади (70- чизмада а) конус сирт, б) кесик конус сирт). Бу конус (кесик конус) сиртнинг юзи (ён сирти)

$$S = \pi r l \qquad \left(S = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} l \right)$$

формула билан ҳисобланади. Бунда r — конус асосининг радиуси (r_1, r_2 — кесик конус асосларининг радиуси).

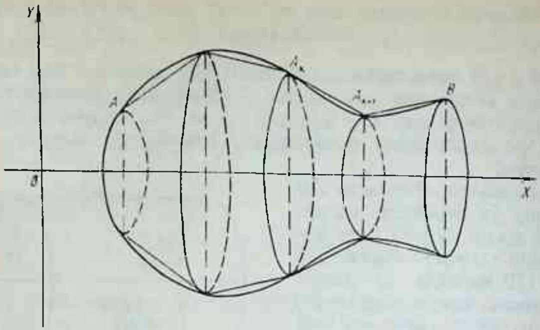
$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \geqslant 0$ бўлсин. Шу функция графигининг $(a, f(a))$ ва $(b, f(b))$ нуқталар орасидаги бўлагини $\overset{\frown}{AB}$ ёй деб юритамиз. Шу $\overset{\frown}{AB}$ ёйни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт *айланма сирт* деб аталади (71- чизма). Бу сиртнинг юзини аниқлаб, унинг аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз. $[a, b]$ оралиқни ихтиёрий



70- чизма.

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

бўлаклашни олайлик. P бўлаклашнинг ҳар бир x_k ($k=0, 1, \ldots, n$) бўлувчи нуқталари орқали Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўт-



71- чизма.

казиб, уларнинг $\overset{\frown}{AB}$ ёйи билан кесишган нуқталарини $A_k(x_k, f(x_k))$ билан белгилайлик. Бу $A_k(x_k, f(x_k))$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, $A_0=A$, $A_n=B$ нуқталарни ўзаро тўғри чизиқ кесмалари билан бирлаштириб, $\overset{\frown}{AB}$ ёйга $\bar{L}$ синиқ чизиқ чизамиз.

$\overset{\frown}{AB}$ ёйини Ox ўқи атрофида айлантириш билан бирга синиқ чизиқни ҳам шу ўқ атрофида айлантирамиз. Натижада кесик конус сиртларидан ташкил топган сирт ҳосил бўлади. Бу сиртнинг юзи ушбу

$$q=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\pi f(x_k)+2\pi f(x_{k+1})}{2}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}=$$

$$=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2} \quad (10.28)$$

формула билан ифодаланади.

P бўлаклашнинг диаметри $\lambda_P\to 0$ да $\overset{\frown}{AB}$ ёйга чизилган $\bar{L}$ синиқ чизиқ периметри L (шу бобнинг 1-§ да кўрсатилганига кўра) $\overset{\frown}{AB}$ ёйи узунлигига интилади. Буни эътиборга олиб, $\lambda_P\to 0$ да $\bar{L}$ синиқ чизиқни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган (кесик конус сиртларидан ташкил топган) сиртнинг юзи — q нинг лимитини, биз излаётган айланма сиртнинг юзи деб қараш табиий. Энди айланма сирт юзини аниқ интеграл орқали ифодалаш мақсадида қаралаётган $f(x)$ функцияни $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин деб қараймиз. Аввал $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда ҳам узлуксиз бўлиб, унда шундай ξ_k нуқта топиладики,

$$\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}=f(\xi_k)\quad \xi_k\in[x_k,\ x_{k+1}]$$

тенглик ўринли бўлади. Бу бир томондан. Иккинчи томондан, Лагранж теоремасига кўра $[x_k,\ x_{k+1}]$ ораликда шундай τ_k нуқта топиладики,

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\tau_k)(x_{k+1}-x_k),\ \tau_k\in[x_k,\ x_{k+1}]$$

тенглик ҳам ўринли бўлади. Натижада (10.28) муносабат ушбу

$$q=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+f'^2(\tau_k)(x_{k+1}-x_k)^2}=$$

$$=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k\quad(\Delta x_k=x_{k+1}-x_k)$$

кўринишни олади. Кейинги тенгликни ушбу

$$q=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\tau_k)\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k+2\pi\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k)-$$

$$-f(\tau_k)]\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k$$

кўринишда ёзиб оламиз ва унинг иккинчи ҳадини баҳолаймиз:

$$\left|2\pi\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k)-f(\tau_k)]\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi M\sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)-f(\tau_k)|\,\Delta x_k,$$

$$M=\max\sqrt{1+f'^2(x)},\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Шартга кўра $f(x)$ $[a, b]$ ораликда узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига асосан, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{2\pi M(b-a)}$ сонга кўра шундай $\delta>0$ сон топиладики, диаметри $\lambda_P<\delta$ бўлган ҳар қандай бўлаклаш учун ушбу

$$|f(\tau_k)-f(\xi_k)|<\frac{\varepsilon}{2\pi M(b-a)}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда юқоридаги тенгсизлик қуйидагича ёзилади:

$$\left|2\pi\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k)-f(\tau_k)]\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2\pi M(b-a)}\,\Delta x_k=\varepsilon.$$

Бундан

$$\lim_{\lambda_p\to 0} 2\pi \sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k)-f(\tau_k)]\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $\lambda_p\to 0$ да (10.28) тенгликда лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\lambda_p\to 0} q = \lim_{\lambda_p\to 0} 2\pi\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k.$$

Демак, айланма сиртнинг юзи учун ушбу

$$Q=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \tag{10.29}$$

формула ўринли.

Мисол. $[0,\ a]$ $(a>0)$ оралиқда

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{10.30}$$

занжир чизиқни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзини топинг.

Аввало (10.30) функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Сўнгра, (10.29) формуладан фойдаланиб, изланаётган айланма сиртнинг юзини топамиз:

$$Q=2\pi\int_0^a \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\int_0^a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=\frac{\pi a}{2}\int_0^a\left[e^{2\frac{x}{a}}+2+e^{-2\frac{x}{a}}\right]dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left[\frac{a}{2}e^{2\frac{x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-2\frac{x}{a}}\right]_0^a=\frac{\pi a^2}{4}\left(e^2-e^{-2}+4\right).$$

4-§. Ўзгарувчи кучнинг бажарган иши ва унинг аниқ интеграл орқали ифодаланиши

Фараз қилайлик, бирор жисм Ox ўқи бўйлаб F куч таъсири остида ҳаракат қилаётган бўлсин. Бунда F куч жисмнинг Ox ўқидаги ҳолатига боғлиқ, яъни $F=F(x)$ ва унинг йўналиши ҳаракат йўналиши билан устма-уст тушсин, дейлик. Бу куч таъсирида жисмни a нуқтадан b нуқтага ўтказиш учун бажарилган ишни топиш масаласи юзага келади. Маълумки, $F=F(x)$ куч $[a, b]$ оралиқда $F(x)=C$, $C=\text{const}$ бўлса, жисмни a нуқтадан b нуқтага ўтказиш учун бажарилган иш $A=C(b-a)$ формула билан ифодаланади.

$F=F(x)$ куч $[a, b]$ оралиқда x ўзгарувчининг ихтиёрий узлуксиз функцияси бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ оралиқни ихтиёрий

$$P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \quad (a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b)$$

бўлаклашни олиб, бу бўлаклашнинг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ оралиғида ихтиёрий ξ_k $(\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k=0, 1, \ldots, n-1)$ нуқта оламиз.

Агар ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1, \ldots, n-1)$ оралиқда жисмга таъсир этаётган $F(x)$ кучни ўзгармас ва $F(\xi_k)$ га тенг деб олсак, у ҳолда $[x_k, x_{k+1}]$ оралиғида бажарилган иш тахминан $F(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$ формула билан, $[a, b]$ оралиқда бажарилган иш эса, тахминан

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\,\Delta x_k \tag{10.31}$$

формула билан ифодаланади.

$F=F(x)$ куч таъсирида жисмни a нуқтадан b нуқтага ўтказиш учун бажарилган ишни ифодаловчи (10.31) формула тақрибийдир.

Равшанки, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\,\Delta x_k$ йиғинди $F=F(x)$ функцияга боғлиқ бўлиши билан бирга у $[a, b]$ оралиқни бўлаклашга ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда олинган ξ_k нуқталарга боғлиқ.

Энди P бўлаклашнинг диаметри λ_P нолга интила борсин. У ҳолда юқоридаги йиғиндининг қиймати биз излаётган иш миқдорини тобора аниқроқ ифодалайди. Демак, $\lambda_P \to 0$ да юқоридаги йиғиндининг чекли лимитини *бажарилган иш* деб айтиш табиийдир.

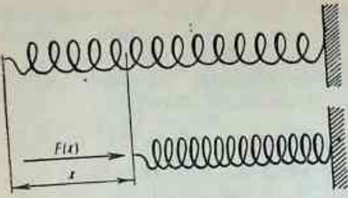
Агар $\lambda_P \to 0$ да (10.31) йиғинди $[a, b]$ оралиқни бўлаклаш усулига ҳамда ξ_k нуқтани танлаб олишга боғлиқ бўлмаган ҳолда чекли A сонга интилса, бу A сон ўзгарувчи $F(x)$ кучнинг $[a, b]$ оралиқдаги бажарган иши деб аталади. Демак,

$$A=\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Юқоридаги (10.31) йиғинди $F(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги интеграл йиғиндиси эканини пайқаш қийин эмас. Қаралаётган $F(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун у шу оралиқда интегралланувчи бўлади. Демак,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\,\Delta x_k=\int_a^b F(x)\,dx.$$

Шундай қилиб, ўзгарувчи $F(x)$ кучнинг $[a, b]$ оралиқдаги бажарган иши



72- чизма.

$$A = \int_a^b F(x)\,dx \qquad (10.32)$$

формула билан ифодаланади.

Мисол. Винтсимон пружинанинг бир учи мустаҳкамланган, иккинчи учига эса $F = F(x)$ куч таъсир этиб, пружина қисилган дейлик (72- чизма). Агар пружинанинг қисилиши унга таъсир этаётган $F(x)$ кучга пропорционал бўлса, пружинани a бирликка қисиш учун $F(x)$ кучнинг бажарган ишини топинг.

Агар $F(x)$ куч таъсирида пружинанинг қисилиш миқдорини x орқали белгиласак, у ҳолда

$$F(x) = kx$$

бўлади, бунда k — пропорционаллик коэффициенти (қисилиш коэффициенти). Юқоридаги формуладан фойдаланиб бажарилган ишни ҳисоблаймиз:

$$A = \int_0^a kx\,dx = k \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{ka^2}{2}.$$

5- §. Инерция моменти

Механикада инерция моменти тушунчаси муҳим бўлиб, у масалалар ечишда кўп қўлланилади.

Текисликда m массага эга бўлган A моддий нуқта берилган бўлиб, бу нуқтадан бирор l ўққача (ёки O нуқтагача) бўлган масофа r га тенг бўлсин.

Маълумки, ушбу $I = mr^2$ миқдор A моддий нуқтанинг l ўққа (O нуқтага) нисбатан *инерция моменти* деб аталади.

Масалан, текисликдаги m массага эга бўлган $A = A(x, y)$ моддий нуқтанинг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментлари мос равишда

$$I_x = mx^2, \quad I_y = my^2, \quad I_0 = m(x^2 + y^2)$$

формулалар билан ифодаланади.

Энди текисликда ҳар бири мос равишда $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ массага эга бўлган $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ моддий нуқталар системаси берилган бўлсин. Бу системанинг бирор l ўққа (O нуқтага) нисбатан инерция ҳар бир нуқтанинг шу l ўққа (O нуқтага) нисбатан инерция моментлари йиғиндиси: $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k r_k^2$ сифатида таърифланади, бунда r_k миқдор A_k нуқтадан l ўққача (O нуқтагача) бўлган масофа.

Масалан, текисликда ҳар бири мос равишда $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ массага эга бўлган $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1), \ldots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ моддий нуқталар системасининг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментлари мос равишда

$$I_x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k x_k^2, \quad I_y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} m_k y_k^2,$$

$$I_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

формулалар билан ифодаланади.

Бирор $y = f(x)$ эгри чизиқ ёйи бўйича масса тарқатилган бўлсин. Бу массали эгри чизиқ ёйининг координата ўқлари ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментини аниқлаймиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функция графиги $\overset{\frown}{AB}$ ёйини тасвирласин, дейлик. $\overset{\frown}{AB}$ ёйи бўйича зичлиги ўзгармас ва 1 га тенг бўлган масса тарқатилган. Равшанки, бу ҳолда масса ёй узунлигига тенг ва (10.4) формулага кўра

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \tag{10.33}$$

бўлади.

$[a, b]$ оралиқни ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \ (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

бўлаклашни олайлик. Бу бўлаклаш $\overset{\frown}{AB}$ ёйни $A_k(x_k, f(x_k))$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1,\ A_0 = A_1,\ A_{n-1} = B)$ нуқталар билан n та $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ бўлакка ажратади. Бунда $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ бўлакнинг массаси (10.38) формулага кўра топилади:

$$m_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан шундай ξ_k $(\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$ нуқта топиладики,

$$m_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\, \Delta x_k \tag{10.34}$$

бўлади, бунда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Юқоридаги муносабатларга мувофиқ $(\xi_k, f(\xi_k))$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ моддий нуқтанинг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментлари мос равишда

$$I'_{xk} = \xi_k^2\, m_k = \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k,$$

$$I'_{yk} = f^2(\xi_k)\, m_k = f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k,$$

$$I'_{0k} = (\xi_k^2 + f^2(\xi_k))\, m_k = (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k$$

формулалар билан, $(\xi_0, f(\xi_0))$, $(\xi_1, f(\xi_1))$, $\ldots$, $(\xi_{n-1}, f(\xi_{n-1}))$ моддий нуқталар системасининг инерция моментлари эса мос равишда

$$I_x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k,$$

$$I_y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k, \qquad (10.35)$$

$$I_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k^2 + f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k$$

формулалар билан ифодаланади.

Энди P бўлаклашнинг диаметри λ_P нолга интила борсин. Унда ҳар бир $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ ёйнинг узунлиги ҳам нолга интила бориб, $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ ёйи эса нуқтага айлана боради. Бу ҳол табиий равишда $\lambda_P \to 0$ да (10.35) формулалар билан ифодаланган $I_x^{(n)}$, $I_y^{(n)}$, $I_0^{(n)}$ йиғиндиларнинг лимитини массага эга бўлган моддий эгри чизиқ ёйининг координата ўқлари ҳамда координата бошига нисбатан инерция моменти деб қарашга олиб келади.

$\lambda_P \to 0$ да $I_x^{(n)}$, $I_y^{(n)}$, $I_0^{(n)}$ йиғиндиларнинг лимити моддий эгри чизиқ ёйининг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моменти деб аталади ва улар мос равишда I_x, I_y, I_0 каби белгиланади.

Демак,

$$I_x = \lim_{\lambda_P \to 0} I_x^{(n)} = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k,$$

$$I_y = \lim_{\lambda_P \to 0} I_y^{(n)} = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k,$$

$$I_0 = \lim_{\lambda_P \to 0} I_0^{(n)} = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} [\xi_k^2 + f^2(\xi_k)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k.$$

(10.35) муносабатдаги йиғиндиларни $[a, b]$ оралиқда мос равишда қуйидаги

$$x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)}, \quad f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}, \quad [x^2 + f^2(x)] \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

функцияларнинг интеграл йиғиндилари эканлигини пайқаш қийин эмас.

Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга. Шунинг учун юқоридаги функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлади. Демак,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\, \Delta x_k = \int_a^b x^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\, \Delta x_k = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} [\xi_k^2+f^2(\xi_k)] \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\, \Delta x_k = \int_a^b [x^2+f^2(x)] \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx.$$

Натижада ушбу

$$I_x = \int_a^b x^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx,$$

$$I_y = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx,$$

$$I_0 = \int_a^b [x^2+f^2(x)] \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

формулаларга эга бўламиз.

11-БОБ

СОНЛИ ҚАТОРЛАР

Маълумки, прогрессиялар математикада алоҳида ўрин тутади. Айниқса, прогрессия ҳадларининг йиғиндиси билан боғлиқ масалалар кўп учрайди.

Одатда, ушбу

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \dots,\ aq^{n-1},\ \dots \tag{11.1}$$

кетма-кетлик $a \neq 0$, $q \neq 0$ бўлганда *геометрик прогрессия* деб аталади (a — прогрессиянинг биринчи ҳади, q — прогрессия махражи, aq^{n-1} — прогрессиянинг умумий ҳади). (11.1) прогрессиянинг биринчи n та ҳадининг йиғиндиси қуйидаги

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a - aq^n}{1-q}, & \text{агар } q \neq 1. \\ na, & \text{агар } q = 1 \end{cases}$$

формула билан ифодаланади. Бу S_n йиғиндига (11.1) прогрессиянинг n-ҳадидан кейинги ҳадларини бирин-кетин қўша борсак, ҳосил бўлган

$$S_{n+1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n\,,$$
$$S_{n+2} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n + aq^{n+1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

йиғиндилар берилган чексиз прогрессиянинг барча ҳадларининг йиғиндисини тобора яқин (аниқ) ифодалай боради дейиш табиийдир. Демак, $n \to \infty$ да S_n нинг лимитини чексиз прогрессиянинг барча ҳадлари йиғиндиси деб киритиш мумкин. Шундай қилиб, ушбу

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

«чексиз йиғинди» ни ўрганиш масаласи юзага келади. Бундай «чексиз йиғинди» сонли қатор тушунчасига олиб келади.

Биз мазкур бобда, сонли қаторларни, аниқроғи, уларнинг яқинлашиши, узоқлашиши, яқинлашиш аломатлари ҳамда яқинлашувчи қаторларнинг хоссаларини ўрганамиз.

1-§. Асосий тушунчалар

Ушбу

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots \tag{11.2}$$

ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

1-таъриф. Қуйидаги

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \tag{11.3}$$

ифода *қатор* (*сонли қатор*) деб аталади.

(11.3) қатор қисқача $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Юқоридаги (11.2) кетма-кетликнинг $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ элементлари *қаторнинг ҳадлари* дейилади. a_n эса *қаторнинг умумий ҳади* дейилади. (11.3) қаторнинг ҳадларидан қуйидаги

$$\begin{gathered} A_1 = a_1, \\ A_2 = a_1 + a_2, \\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

йиғиндиларни тузамиз. Бу йиғиндилар *қаторнинг қисмий йиғиндилари* дейилади.

Демак, (11.3) қатор берилган ҳолда ҳар доим бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат ушбу

$$\{A_n\}: A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

сонлар кетма-кетлигини ҳосил қилиш мумкин.

2-таъриф. Агар $n \to \infty$ да (11.3) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{A_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга, яъни

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A$$

бўлса, у ҳолда қатор *яқинлашувчи* дейилади.

Бу лимитнинг қиймати A сон (11.3) *қаторнинг йиғиндиси* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3-таъриф. Агар $n \to \infty$ да (11.3) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз бўлса ёки бу лимит мавжуд бўлмаса, у ҳолда (11.3) қатор *узоқлашувчи* дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини ҳисоблаб, унинг лимитини топамиз:

$$A_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \\ + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \to \infty} A_n = 2.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси 2 га тенг:

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\ldots=2.$$

2. Қуйидаги

$$1+2+3+\ldots+n+\ldots$$

атор узоқлашувчи, чунки бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\infty.$$

3. Қуйидаги

$$1-1+1-1+\ldots$$

қатор ҳам узоқлашувчи, чунки бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n=1-1+\ldots+(-1)^{n+1}=\begin{cases}0, & \text{агар } n \text{ — жуфт сон бўлса,}\\ 1, & \text{агар } n \text{ — тоқ сон бўлса}\end{cases}$$

бўлиб, $\{A_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

4. Геометрик прогрессия $a, aq, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$ ҳадларидан тузилган

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$$

қаторни қарайлик. Одатда бу қатор *геометрик қатор* дейилади. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини ёзамиз:

$$A_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

Агар $|q|<1$ бўлса,

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\frac{a}{1-q}$$

бўлади. Демак, бу ҳолда геометрик қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $\frac{a}{1-q}$ сонга тенг.

Агар $q>1$ бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\infty$ бўлиб, қатор узоқлашувчи бўлади.

Агар $q=1$ бўлса, $n\to\infty$ да $A_n=na\to\infty$ бўлиб, қатор узоқлашувчи, $q\leqslant -1$ бўлганда эса $\{A_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас. Демак, бу ҳолда ҳам қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, геометрик қатор $|q|<1$ бўлганда яқинлашувчи, $|q|>1$ ва $q=\pm 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

5. Қуйидаги

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (11.4)$$

қаторни олайлик. Бу қатор *гармоник қатор* деб аталади. (Маълумки, агар $0\neq a\in R$ ва $0\neq b\in R$ сонлар учун

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

тенглик ўринли бўлса, c сон a ва b сонларнинг *ўрта гармоник қиймати* дейилади. Берилган (11.4) қаторнинг иккинчи ҳадидан бошлаб, ҳар бир ҳади ўзига бевосита қўшни бўлган икки ҳадининг ўрта гармоник қийматини ташкил этади. (11.4) қаторнинг гармоник деб аталиши ҳам шундан келиб чиққан.) (11.4) қаторнинг биринчи 2^k та ($k \in N$) ҳадидан тузилган

$$A_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k},$$

қисмий йиғиндисини олиб, уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$A_{2^k}=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right).$$

Энди ушбу

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}=8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2^k}=2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}$$

тенгсизликларни эътиборга олсак, унда

$$A_{2^k}>1+k\cdot\frac{1}{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқади. Равшанки, $\{A_{2^k}\}$ кетма-кетлик ўсувчи. Демак, $\lim\limits_{k\to\infty} A_{2^k}=\infty$. Шундай қилиб, гармоник қатор узоқлашувчи.

6. Ушбу

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots \qquad (11.5)$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини ёзамиз:

$$A_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Шу йиғиндининг $n\to\infty$ да лимитини топиш учун (6.57) формулани келтирамиз ($x>-1$ да):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Бунда $0 \leqslant x \leqslant 1$ учун

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

тенгсизлик ўринли (6-боб, 7-§ нинг 6-бандига қаранг). Юқоридаги формулада $x = 1$ деб топамиз:

$$\ln 2 = A_n + r_n(1).$$

Натижада ушбу

$$|A_n - \ln 2| = |r_n(1)| < \frac{1}{n+1}$$

тенгсизликка келамиз. Ундан

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \ln 2$$

тенглик келиб чиқади. Демак, (11.5) қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси ln2 га тенг.

Ушбу параграфнинг охирида қаторнинг қолдиғи тушунчасини келтирамиз. (11.3) қаторнинг биринчи m та ҳадини ташласак, унда

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{11.6}$$

қатор ҳосил бўлади. (11.6) қатор (11.3) қаторнинг (m-ҳадидан кейинги) *қолдиғи* дейилади.

2-§. Яқинлашувчи қаторлар ҳақида теоремалар

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{11.3}$$

қатор берилган бўлсин.

1-теорема. *Агар* (11.3) *қатор яқинлашувчи бўлса, унинг исталган* (11.6) *қолдиғи ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча.* (11.6) *қолдиқ қатор яқинлашувчи бўлса, берилган* (11.3) *қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. (11.3) қатор берилган бўлсин. Бирор m — натурал сонни тайинлаб, (11.6) қаторнинг қисмий йиғиндисини $\overline{A}_k$ билан белгилайлик:

$$\overline{A}_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}.$$

Равшанки,

$$\overline{A}_k = A_{m+k} - A_m, \tag{11.7}$$

$$A_n = A_m + \overline{A}_{n-m} \; (n > m) \tag{11.7'}$$

бўлади, бунда A_m берилган (11.3) қаторнинг қисмий йиғиндиси.

(11.3) қатор яқинлашувчи бўлсин. Таърифга кўра

$$\lim_{k\to\infty} A_{m+k} = A \qquad (A \text{ — чекли сон})$$

бўлади. $k\to\infty$ да (11.7) тенгликда лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{k\to\infty} \overline{A}_k = A - A_m.$$

Бу эса (11.6) қаторнинг яқинлашувчи эканини билдиради.

Энди (11.6) қатор яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра

$$\lim_{k\to\infty} \overline{A}_k = \overline{A} \qquad\qquad (\overline{A} \text{ — чекли сон})$$

бўлади. (11.7′) тенгликда $n\to\infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{A} + A_m$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (11.3) қаторнинг яқинлашувчи эканини билдиради. Теорема исботланди.

Шундай қилиб, қаторнинг дастлабки чекли сондаги ҳадларини ташлаб юбориш ёки қаторнинг бошига чекли сондаги янги ҳадларни қўшиш унинг яқинлашувчилиги характерига таъсир қилмайди.

1-натижа. Агар (11.3) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг қолдиғи

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots$$

$m\to\infty$ да нолга интилади.

Ҳақиқатан ҳам, (11.3) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси A бўлсин, бу ҳолда

$$A = A_m + r_m, \; r_m = A - A_m$$

бўлиб,

$$\lim_{m\to\infty} r_m = A - A = 0$$

бўлади.

2-теорема. *Агар (11.3) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси A га тенг бўлса, у ҳолда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots \tag{11.8}$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси cA га тенг бўлади ($c \neq 0$ — n га боғлиқ бўлмаган ўзгармас сон).

Исбот. (11.8) қаторнинг қисмий йиғиндисини A'_n билан белгиласак, у ҳолда

$$A'_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cA_n$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n\to\infty} A'_n = cA$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (11.8) қаторнинг яқинлашувчи бўлишини ва унинг йиғиндиси cA га тенг эканини билдиради. Теорема исботланди.

Бу теорема яқинлашувчи қаторларда ушбу

$$c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots) = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$$

муносабатнинг ўринли бўлишини ифодалайди.

3-теорема. *Агар*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда A ва B га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots \quad (11.9)$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $A + B$ га тенг бўлади.

Исбот. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар яқинлашувчи. Демак, бу қаторларнинг қисмий йиғиндилари (A_n ва B_n лар) учун $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$ тенгликлар ўринли бўлади. (11.9) қаторнинг қисмий йиғиндисини C_n билан белгилаб топамиз:

$$C_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \\ + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = A_n + B_n.$$

Бундан

$$\lim_{n\to\infty} C_n = A + B.$$

Кейинги тенгликдан теореманинг исботи келиб чиқади.

2-натижа. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + lb_n)$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n + lb_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n + l\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

тенглик ўринли бўлади (бунда c, l — n га боғлиқ бўлмаган ўзгармас сонлар).

4-теорема. *Агар (11.3) қатор яқинлашувчи бўлса, бу қаторнинг умумий ҳади a_n $n \to \infty$ да нолга интилади.*

Исбот. (11.3) қатор яқинлашувчи бўлсин, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (A — чекли сон). Агар

$$a_n = A_n - A_{n-1}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(A_n - A_{n-1}) = A - A = 0$$

бўлишини топамиз. Теорема исботланди.

Теоремадаги тасдиқнинг акси, умуман айтганда, ўринли эмас. Бошқача айтганда бирор қаторнинг умумий ҳади $n \to \infty$ да нолга интилишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, (11.4) гармоник қатор $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ нинг умумий ҳади $a_n = \frac{1}{n}$ бўлиб, у $n \to \infty$ да нолга интилади, аммо бу қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, юқорида келтирилган 4-теорема қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шартини ифодалайди.

Қаторлар тузилишига кўра умуман қуйидагича бўлади:

1) барча ҳадларининг ишоралари манфий бўлмаган қаторлар;

2) бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадларининг ишоралари манфий бўлмаган қаторлар;

3) барча ҳадларининг ишоралари манфий сон ёки бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадларининг ишоралари манфий бўлган қаторлар;

4) чексиз кўп манфий ишорали ва чексиз кўп мусбат ишорали ҳадлари бўлган қаторлар.

2) ва 3) ҳоллардаги қаторларнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилигини ўрганиш юқорида келтирилган 1-теорема ва 2-теоремаларга кўра 1) ҳолдаги қаторларни ўрганишга келади.

3-§. Мусбат қаторлар ва уларнинг яқинлашувчи бўлиши

Қаторлар назариясининг муҳим масалаларидан бири қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилигини аниқлашдан иборат.

Аслида берилган қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилигини таърифга кўра текшириш мумкин. Бироқ кўпчилик ҳолларда қаторнинг қисмий йиғиндиси A_n нинг ифодаси мураккаб бўлиб, $n \to \infty$ да нинг лимитга эга бўлишини (ёки бўлмаслигини) кўрсатиш қийин лади.

Шуни ҳам айтиш керакки, қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини аниқлашда қаторнинг қисмий йиғиндисининг қиймаини, ҳатто қаторнинг йиғиндисини топиш зарурияти бўлмайди.

Натижада шундай усулларни (аломатларни) топиш масаласи юза- келадики, бу усуллар ёрдамида, қатор йиғиндисини ҳисобламай уриб, унинг яқинлашувчилигини аниқлаш мумкин бўлсин.

Аввало ҳадларининг ишоралари манфий бўлмаган қаторларни араймиз.

1. **Мусбат қаторларнинг яқинлашувчи бўлиши арти.** Бирор (11.3) қатор берилган бўлсин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \qquad (11.3)$$

Агар $a_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ бўлса, у холда (11.3) қатор *иусбат ҳадли қатор* ёки қисқача, *мусбат қатор* деб аталади.

5-теорема. *Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. Таърифга кўра, қаторнинг қисмий йиғиндиларидан тузилган $\{A_n\}$ кетма-кетлик $n \to \infty$ да A га интилади: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (A —чекли сон). У ҳолда $\{A_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссасига кўра чегараланган, жумладан, у юқоридан чегараланган бўлади.

Етарлилиги. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги $\{A_n\}$ юқорида чегараланган бўлсин.

Шу қаторнинг ҳар бир ҳади манфий бўлмагани учун

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n$$

тенгсизлик ўринли. Демак, $\{A_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи. Шунинг учун 3-бобдаги 7-теоремага кўра $\{A_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Бу эса $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи эканини билдиради. Теорема исботланди.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots, \quad \alpha > 0. \qquad (11.10)$$

қаторни қарайлик. Одатда (11.10) қатор *умумлашган гармоник қатор* дейилади. Бу қатор $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи эканлигини кўрсатайлик. Унинг

$$A_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$$

қисмий йиғиндиларидан тузилган $\{A_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи экани равшан. Демак, $A_n < A_{2n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Шу билан бирга қуйидагига эгамиз:

$$A_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha}\right) < 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \ldots + \frac{2}{(2n)^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} A_n.$$

Охирги икки муносабатдан ушбу

$$A_n < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} A_n$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан $\alpha > 1$ бўлганда

$$A_n < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (11.11)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу эса $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг юқоридан чегараланганлигини билдиради. 5-теоремага кўра берилган қатор яқинлашувчидир. Демак, умумлашган гармоник қатор $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлади.

Хусусан, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қатор яқинлашувчидир.

3-натижа. Мусбат қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

2. Мусбат қаторларни таққослаш ҳақида теоремалар. Мусбат қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилигини билган ҳолда, ҳадлари бу қатор ҳадлари билан маълум муносабатда бўлган (таққосланган) иккинчи мусбат қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилигини аниқлаш мумкин. Улар қуйидаги теоремалар орқали ифодаланади.

Иккита мусбат $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор берилган бўлсин.

6-теорема. *n нинг бирор n_0 $(n_0 \geqslant 1)$ қийматидан бошлаб барча $n \geqslant n_0$ лар учун*

$$a_n \leqslant b_n \tag{11.12}$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. Агар а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *қатор яқинлашувчи бўлса,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор ҳам яқинлашувчи бўлади,* б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор узоқлашувчи бўлса,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.*

Исбот. Ушбу бобнинг 2- § ида айтиб ўтдикки, қаторнинг яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлишига унинг чекли сондаги дастлабки ҳадларининг таъсири бўлмайди. Шу сабабли (11.12) тенгсизлик $n_0 = 1$ дан бошлаб ўринли бўлсин деб қараш мумкин. Демак, $a_n \leqslant b_n (n = 1, 2, \ldots)$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда берилган қаторларнинг қисмий йиғиндилари

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

учун ушбу

$$A_n \leqslant B_n \ (n = 1, 2, \ldots) \tag{11.13}$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

Аввал $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда 5- теоремага кўра, $\{B_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлади, яъни бирор M учун $B_n \leqslant M$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Бундан (11.13) тенгсизликка асосан $A_n \leqslant M (n = 1, 2, \ldots)$ тенгсизлик ҳам ўринли экани келиб чиқади. Демак, $\{A_n\}$ кетма-кетлик ҳам юқоридан чегараланган. Яна ўша 5- теоремага кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Энди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда $\{A_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган, (11.13) тенгсизликка асосан $\{B_n\}$ кетма-кетлик ҳам юқоридан чегараланмаган бўлади. Бундан эса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади. Теорема исботланди.

Одатда, бирор мусбат қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилигини аниқлашда, бу қатор ҳадлари тенгсизликлар ёрдамида аввалдан яқинлашувчи ёки узоқлашувчилиги маълум қаторнинг ҳадлари билан боғланади, сўнгра исбот этилган теоремадан фойдаланиб берилган қатор ҳақида хулоса чиқарилади.

Мисол. Қуйидаги

$$\sin\frac{\pi}{1^2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{3^2}+\ldots+\sin\frac{\pi}{n^2}+\ldots$$

қатор яқинлашувчилигини текширинг. Бу қатор ҳадлари учун

$$0<\sin\frac{\pi}{n^2}<\frac{\pi}{n^2}(n=1,2,\ldots)$$

тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас. Демак, берилган қаторнинг ҳар бир ҳади яқинлашувчи $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қаторнинг мос ҳадидан кичик. 6-теоремага асосан берилган қатор яқинлашувчи.

7-теорема. *Ушбу*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\quad(0\leqslant k\leqslant\infty)$$

лимит мавжуд бўлсин. Агар: а) $k<\infty$ *ва* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *қатор ҳам яқинлашувчи бўлади;* б) $k>0$ *ва* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.*

Исбот. а) $k<\infty$ бўлиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. Лимит таърифига кўра, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топиладики, барча $n>n_0$ лар учун

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<\varepsilon,$$

яъни

$$(k-\varepsilon)b_n<a_n<(k+\varepsilon)b_n \tag{11.14}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Шартга кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ қатор яқинлашувчи. Шунинг учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k+\varepsilon)b_n$ қатор ҳам яқинлашувчи. У ҳолда (11.14) тенгсизликдан ва 6-теоремадан $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

б) $k>0$ бўлиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ қатор узоқлашувчи бўлсин. Агар $0<k_1<$

$< k$ олсак, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ лимит ўринли эканидан ва $k>k_1$ бўлишидан, шундай $n_0\in N$ сон топиладики, $n>n_0$ бўлганда $\frac{a_n}{b_n}>$ $>k_1$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $n>n_0$ бўлганда $b_n<\frac{1}{k_1}a_n$ тенгсизлик бажарилади. Бундан 6- теоремага асосан $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади. Теорема исботланди.

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

4-натижа. Агар ушбу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$$

лимит ўринли бўлиб, $0<k<\infty$ бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ қаторлар бир вақтда яқинлашувчи, ёки бир вақтда узоқлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

қаторнинг яқинлашувчилигини текширинг. Бу қаторни гармоник қатор $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ билан таққослаймиз. Бу икки қатор умумий ҳадлари нисбатининг лимитини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1.$$

Демак, 4- натижага кўра берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

8-теорема. *$n\in N$ нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб барча $n>n_0$ лар учун*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}\qquad(11.15)$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда, агар а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *қатор яқинла-*

шувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор ҳам яқинлашувчи бўлади; б)* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор узоқлашувчи бўлса,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.*

Исбот. Аввал айтганимиздек (11.15) тенгсизлик $n = 1, 2, \ldots$ қийматларда бажарилади деб ҳисоблаш мумкин. Шундай қилиб,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

тенгсизлик ўринли деб қараймиз. Ундан қуйидаги

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан ушбу

$$a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} b_n \tag{11.16}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, унда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Унда (11.16) тенгсизлик ва 6- теоремага асосан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

(11.15) тенгсизлик ўринли бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчилиги келиб чиқиши шунга ўхшаш исботланади. Теорема исбот бўлди.

3. Мусбат қаторлар учун яқинлашувчилик аломатлари. Биз юқорида мусбат қаторларни таққослаш теоремаларини келтирдик. Гарчи бу теоремалар ёрдамида текшириладиган қатор ҳадларини иккинчи қатор ҳадлари билан таққослаб, қаралаётган қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги масаласи ҳал бўлса ҳам, таққослаш теоремалари маълум ноқулайликларга эга. Бундай ноқулайликлардан бири берилган қатор билан таққосланадиган қаторни танлаб олишнинг умумий қоидаси йўқлигидир.

Берилган қаторни геометрик ҳамда умумлашган гармоник қаторлар билан таққослаб, қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилигини ифодалайдиган аломатларни келтирамиз:

а) Коши аломати. *Мусбат қатор* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *берилган бўлсин. Агар* $n \in N$ *нинг бирор* n_0 $(n_0 \geqslant 1)$ *қийматидан бошлаб барча* $n \geqslant n_0$ *қийматлари учун*

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \left(\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1\right) \qquad (11.17)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.*

Исбот. Аввал $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун $n \geqslant n_0$ бўлганда $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Бу тенгсизлик ушбу $a_n \leqslant q^n$ тенгсизликка эквивалентдир. Демак, берилган қаторнинг ҳар бир ҳади ($n \geqslant n_0$ бўлганда) яқинлашувчи геометрик қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. 6- теоремага кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Агар барча $n \geqslant n_0$ лар учун $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, яъни $a_n \geqslant 1$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда берилган қаторнинг ҳар бир ҳади узоқлашувчи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$ қаторнинг мос ҳадидан кичик эмас. Яна ўша 6- теоремага кўра, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

Амалий масалаларни ҳал қилишда кўпинча, Коши аломатининг қуйидаги лимит кўринишидан фойдаланилади.

Агар ушбу

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор* $k < 1$ *бўлганда яқинлашувчи,* $k > 1$ *бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.*

Исбот. Аввал $k < 1$ бўлсин. Шундай ҳақиқий сон q топиладики, $k < q < 1$ тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда лимитларнинг тегишли хоссасига кўра (3- бобнинг 3- § ига қаранг) шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ тенгсизлик ўринли бўлади. Юқорида исбот этилган Коши аломатига кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи.

Энди $k > 1$ бўлсин. У ҳолда шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $\sqrt[n]{a_n} > 1$ бўлиб, ундан берилган қаторнинг узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Қуйидаги

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қатор учун топамиз:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \frac{n+1}{2n+1}, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Демак, Коши аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи.

1-эслатма. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k = 1$$

лимит ўринли бўлса, қатор яқинлашувчи ҳам узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

Масалан, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ қатор учун $k = 1$, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ берилган қатор яқинлашувчи.

Агар ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots$$

қаторни қарайдиган бўлсак, унинг учун ҳам $k = 1$, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ бўлишини кўрамиз. Аммо бу қатор узоқлашувчидир.

Шундай қилиб, $k=1$ бўлганда Коши аломати қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлаб бера олмайди.

б) Даламбер аломати. *Агар $n \in N$ нинг бирор n_0 $(n_0 \geqslant 1)$ қийматидан бошлаб барча $n \geqslant n_0$ қийматлари учун*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1 \quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1\right) \qquad (11.18)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.*

Исбот. Берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор билан бирга яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots \; (0 < q < 1)$$

геометрик қаторни қарайлик. Аввал $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$ тенгсизликни оламиз. Уни

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

кўринишда ёзиб, сўнгра таққослаш ҳақидаги 8-теоремани қўлланамиз. Шу теоремага кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ қаторнинг яқинлашувчилигидан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ бўлганда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши равшан, Даламбер аломати исбот бўлди.

Даламбер аломатини ҳам лимит кўринишида ифодалаш мумкин. *Агар ушбу*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $d<1$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $d>1$ бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.

Бунинг исботи Коши аломатининг лимит кўринишининг исботига ўхшаш.

Мисол. Ушбу

$$1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \ldots + \frac{n!}{n^n} + \ldots$$

қатор яқинлашувчилигини текширинг. Бу қатор учун қуйидагиларга эгамиз:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}.$$

Даламбер аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи.

2-эслатма. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d = 1$$

лимит ўринли бўлса, у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлиши ҳам, узоқлашувчи бўлиши ҳам мумкин. Демак, бу ҳолда Даламбер аломати қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлаб бера олмайди.

Шундай қилиб, берилган мусбат қаторни геометрик қатор билан таққослаб Коши ва Даламбер аломатларини келтириб чиқардик. Геометрик қатор «тез» яқинлашувчи қаторлардан ҳисобланади. Агар текшириладиган қатор геометрик қатордан «секинроқ» яқинлашувчи бўлса, унда бу қатор тўғрисида Коши ва Даламбер аломатлари орқали бирор хулосага келиб бўлмайди. Бундай қаторларни геометрик қаторлардан «секинроқ» яқинлашувчи қаторлар билан таққослаш лозим бўлади. Шу муносабат билан мусбат қаторни умумлашган гармоник қатор билан таққослаб, қатор яқинлашувчилигининг яна битта аломатини топамиз.

в) **Раабе аломати.** *Ушбу* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *мусбат қатор берилган бўлсин.*

Агар $n \in N$ *нинг бирор* $n_0 (n_0 \geqslant 1)$ *қийматидан бошлаб барча* $n > n_0$ *қийматлар учун*

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant r > 1 \quad \left(n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1\right) \tag{11.19}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.*

Исбот. Аввал $n \geqslant n_0$ лар учун $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant r > 1$ тенгсизлик бажарилсин, дейлик. Бу тенгсизликни қуйидаги

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{r}{n} \tag{11.20}$$

кўринишда ёзиб, сўнг $r > \alpha > 1$ тенгсизликни қаноатлантирадиган α сон оламиз. Муҳим лимитлардан бирини ушбу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}{-\frac{1}{n}} = \alpha$$

кўринишда ёзамиз (5-бобнинг 6-§ ига қаранг). Танланишига кўра $\alpha < r$ бўлгани учун шундай $n_0' \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0'$ лар учун

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}{-\frac{1}{n}} \leqslant r$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Ундан ушбу

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \geqslant 1 - \frac{r}{n} \tag{11.21}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Энди $\max\{n_0, n_0'\} = \overline{n_0}$ деб олсак, барча $n > \overline{n_0}$ лар учун (11.20) ва (11.21) тенгсизликлардан

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \qquad (11.22)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Агар (11.22) тенгсизликни ушбу

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}}$$

кўринишда ёзсак, унда берилган қатор ҳадлари билан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ умумлашган гармоник қатор ҳадлари орасида (11.15) кўринишдаги муносабат борлигини пайқаймиз. Маълумки, $\alpha > 1$ да умумлашган гармоник қатор яқинлашувчи. Демак, 8-теоремага кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.

Энди барча $n \geqslant n_0$ лар учун

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant 1$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. Ундан

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шунинг учун 8-теоремага асосан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоник қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан берилган қаторнинг узоқлашувчи экани келиб чиқади.

Раабе аломати исботланди.

Бу аломатни ҳам қуйидагича лимит кўринишда ифодалаш мумкин.

Агар ушбу

$$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \rho \ (\rho - \text{const})$$

лимит ўринли бўлса, $\rho > 1$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $\rho < 1$ бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.

Мисол. Қуйидаги

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{n} + \ldots$$

қатор яқинлашувчилигини текширинг.

Бу қатор учун қуйидагиларга эгамиз:

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=n\left[1-\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{n}{1}\right]=$$

$$=n\left[1-\frac{2n^2+n}{2n^2+4n+2}\right]=\frac{3n^2+2n}{2n^2+4n+2};$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\frac{3}{2}>1.$$

Демак, Раабе аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи.

г) Интеграл аломат (Кошининг интеграл аломати). Ушбу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор берилган бўлсин. Фараз қилайлик, $[1, +\infty)$ оралиқда аниқланган, узлуксиз, ўсмайдиган ҳамда манфий бўлмаган $f(x)$ функция учун $f(n)=a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ бўлсин. У ҳолда берилган қатор қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

кўринишни олади. Равшанки, $n<x<n+1$, $n\in N$ бўлганда

$$f(n)\geqslant f(x)\geqslant f(n+1),$$

яъни $a_n\geqslant f(x)\geqslant a_{n+1}$ тенгсизликлар ўринли. Кейинги тенгсизликларни $[n, n+1]$ оралиқ бўйича интеграллаб топамиз:

$$a_{n+1}\leqslant\int_n^{n+1} f(x)\,dx\leqslant a_n. \qquad (11.23)$$

Энди берилган қатор билан бирга ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,dx \qquad (11.24)$$

қаторни ҳам қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини ёзамиз:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx=\int_1^{n+1} f(x)\,dx. \qquad (11.25)$$

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда $F(x)$ бошланғич функцияга эга бўлсин $(F'(x)=f(x))$ $[1, +\infty)$ оралиқда $f(x)\geqslant 0$ бўлгани учун $F(x)$ функция шу оралиқда ўсувчи бўлади.

$F(x)$ функцияни юқори чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интеграл кўринишда ёзиш мумкин:

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt,\ F(1)=0.$$

Натижада (11.25) тенглик ушбу

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1} f(x)\,dx = F(n+1)$$

кўринишга келади. Демак, (11.24) қаторнинг қисмий йиғиндиси $F(n+1)$ га тенг.

Агар $n\to\infty$ да $F(n+1)$ чекли сонга интилса, яъни (11.24) қаторнинг қисмий йиғиндиси чекли лимитга эга бўлса, шу қатор яқинлашувчи бўлади. Унда (11.23) тенгсизлик ҳамда 8-теоремага кўра қаралаётган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

$n\to\infty$ да $F(n+1)\to\infty$ бўлса, берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги интеграл аломатга (Коши аломатига) келамиз:

Агар $f(x)$ *функция* $[1, +\infty)$ *оралиқда аниқланган, узлуксиз ва ўсмайдиган бўлиб* $F(x)$ *шу функция учун бошланғич функция ва* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор учун* $f(n)=a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ *бўлса, у ҳолда берилган қатор* $\lim_{x\to+\infty}F(x)=A$ *лимит чекли бўлганда яқинлашувчи, чексиз бўлганда узоқлашувчи бўлади.*

Мисол. Қуйидаги $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ умумлашган гармоник қаторни қарайлик. $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ деб олайлик. Равшанки, бу функция $[1,+\infty)$ да аниқланган, узлуксиз, камаювчи ҳамда шу оралиқда манфий эмас. Шу билан бирга $x=n$ бўлганда $f(n)=\frac{1}{n^{\alpha}}$. Энди $\alpha\neq 1$ бўлганда топамиз:

$$F(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt=\int_{1}^{x}\frac{1}{t^{\alpha}}\,dt=\left.\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_{1}^{x}=\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right],$$

бундан қуйидаги натижа келиб чиқади:

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{агар } \alpha>1 \text{ бўлса,}\\[2mm] \infty, & \text{агар } \alpha<1 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Агар $\alpha=1$ бўлса, $x\to\infty$ да

$$F(x)=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}\,dt=\ln x\to\infty$$

бўлади.

Демак, интеграл аломатга кўра берилган қатор $\alpha>1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\leqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

3-эслатма. Ҳар бир мусбат қаторнинг яқинлашувчилигини таққослаш йўли билан ҳал қилиш (текшириш) учун ярокли бўлган *универсил қатор* мавжуд эмас.

4-§. Ихтиёрий ҳадли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги

Биз аввалги параграфда мусбат қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги масаласи билан шуғулландик. Хусусан, мусбат қаторларни таққослаш теоремаларини келтириб, бу теоремаларга асосланган холда яқинлашиш аломатларини ўргандик. Бу аломатлар ёрдамида мусбат қаторларнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилигини аниқлаш кўпинча осонлик билан ҳал этилишини кўрдик. Энди ихтиёрий ҳадли қаторлар (қисқача ихтиёрий қаторлар) ва уларнинг яқинлашувчилигини ўрганамиз.

1. Ихтиёрий қаторнинг яқинлашувчилиги ҳақида теорема. Бирор ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор берилган бўлсин.

9-теорема. *Ихтиёрий* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун* $\forall\varepsilon>0$ *сон олинганда ҳам шундай* $n_0\in N$ *сон мавжуд бўлиб, барча* $n>n_0$ *ва* $m=1, 2, \ldots$ *лар учун*

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}|<\varepsilon \tag{11.26}$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. Берилган қатор яқилашувчи бўлсин. Таърифга кўра бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан (яъни $A_1=a_1$, $A_2=a_1+a_2, \ldots, A_n=a_1+a_2+\ldots+a_n, \ldots$ лардан) тузилган $\{A_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга. Бу холда Коши теоремасига (3-бобдаги 13-теоремага қаранг) асосан, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топиладики, барча $n>n_0$ ва $m=1, 2, \ldots$ лар учун

$$|A_{n+m}-A_n|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу тенгсизликдан

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}|<\varepsilon.$$

Етарлилиги. Берилган қатор учун $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топиладики, барча $n>n_0$ ва $m=1, 2, \ldots$ лар учун

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{m+n}|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли. Ушбу

$$A_{n+m}-A_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}$$

тенгликка кўра

$$|A_{n+m}-A_n|<\varepsilon$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу эса яна Коши теоремасига кўра $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатади. Демак, қатор яқинлашувчи. Теорема исботланди.

Мисол. Ушбу

$$\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}+\ldots$$

қаторни қарайлик. Бу қатор учун (11. 21) шартнинг бажарилишини текширамиз. Аввало, равшанки,

$$\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+m}}\leqslant\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}.$$

Энди $\forall\varepsilon>0$ сонга кўра, $n_0=[-\log_2\varepsilon]+1$ деб олинса, у ҳолда барча $n>n_0$ ва $m=1,\ 2,\ \ldots$ лар учун

$$\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}}\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Демак, 9- теоремага асосан берилган қатор яқинлашувчи.

2. Қаторларнинг абсолют ва шартли яқинлашувчилиги. Ихтиёрий $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор берилган бўлсин. Бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \qquad (11.27)$$

қаторни тузамиз.

10- теорема. *Агар* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Ушбу теоремадаги тасдиқ юқоридаги 9- теоремадан осонгина келиб чиқади.

4- таъриф. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор *абсолют яқинлашувчи* дейилади.

5-**таъриф.** Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор *шартли яқинлашувчи* дейилади.

4-**эслатма.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots \qquad (11.28)$$

қаторни қарайлик (1- § даги (11.5) қаторни қаранг). Унинг яқинлашувчилиги маълум. Бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

қатор гармоник қатор бўлиб, у узоқлашувчи.

2. Ушбу

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$$

қаторни қарайлик. Бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

қатор яқинлашувчи, чунки у умумлашган гармоник қатор бўлиб, $\alpha=2$. Шунинг учун 10- теоремага кўра берилган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи.

Юқоридаги (11.28) қатор эса шартли яқинлашувчи қаторларга мисолдир.

Бирор ихтиёрий $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор берилган бўлсин.

Қаралаётган қатор ҳадларининг абсолют қийматларини олиб, улардан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторни тузамиз.

Шу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторнинг мусбат қаторлигини эътиборга олиб, қаралаётган қаторнинг абсолют яқинлашувчилигини ифодаловчи аломатлардан бирини—Даламбер аломатини келтирамиз.

Даламбер аломати. *Агар* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор учун*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=l$$

лимит ўринли бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор* $l<1$ *бўлганда абсолют яқинлашувчи бўлади.*

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}\quad (x\neq\pm 1)$$

қаторни қарайлик. Бу қатор учун қуйидагини топамиз:

$$l=\lim_{n\to\infty}\left[\left|\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}\right|:\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|\right]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x-x^{n+1}}{1-x^{n+1}}\right|=$$

$$=\begin{cases}|x|, & \text{агар } |x|<1 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } |x|>1 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Демак, $|x|<1$ да берилган қатор абсолют яқинлашувчи бўлади. $|x|>1$ бўлганда эса қаторнинг характери тўғрисида Даламбер аломати бирор хулоса бермайди. Аммо $|x|>1$ бўлган ҳолда $n\to\infty$ да қаторнинг умумий ҳади нолга интилмаганлиги сабабли (унинг лимити 1 га тенг) қатор узоқлашувчидир.

3. Ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қаторлар. Лейбниц теоремаси. Биз қуйида ихтиёрий қаторларнинг битта муҳим ҳолини қараймиз.

Ушбу

$$c_1-c_2+c_3-c_4+\ldots+(-1)^{n-1}c_n+\ldots \tag{11.29}$$

қаторни қарайлик, бунда $c_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Одатда бундай қатор *ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор* деб аталади.

Қуйидаги

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots,$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

қаторлар ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қаторлардир. (11.29) кўринишдаги қаторларнинг яқинлашишини ифодалайдиган қуйидаги Лейбниц теоремасини келтирамиз.

11-теорема (Лейбниц теоремаси). *Агар (11.29) қаторда*

$$c_{n+1}<c_n\quad (n=1,2,\ldots) \tag{11.30}$$

тенгсизликлар ўринли бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \qquad (11.31)$$

бўлса, (11.29) қатор яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган (11.29) қаторнинг $2m$ ($m\in N$) та ҳадидан иборат ушбу

$$A_{2m} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2m-1} - c_{2m}$$

қисмий йиғиндисини олайлик. Равшанки,

$$A_{2(m+1)} = A_{2m} + (c_{2m+1} - c_{2m+2}).$$

Теореманинг шартига кўра $c_{2m+2} < c_{2m+1}$ бўлиб, натижада

$$A_{2(m+1)} > A_{2m}$$

тенгсизликка келамиз. Бу эса $\{A_{2m}\}$ кетма-кетликнинг ўсувчи эканлигини билдиради.

Энди A_{2m} ни қуйидагича ёзамиз:

$$A_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}.$$

Равшанки, (11.30) га кўра

$$c_2 - c_3 > 0,\ c_4 - c_5 > 0,\ \dots,\ c_{2m-2} - c_{2m-1} > 0.$$

Шунинг учун $A_{2m} < c_1$ тенгсизлик ўринли. Демак, $\{A_{2m}\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган. Шундай қилиб, $\{A_{2m}\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва юқоридан чегараланган. Демак, бу кетма-кетлик чекли лимитга эга:

$$\lim_{m\to\infty} A_{2m} = A \ (A — \text{чекли сон}). \qquad (11.32)$$

Энди (11.29) қаторнинг $2m-1$ ($m\in N$) та тоқ сондаги ҳадидан иборат ушбу

$$A_{2m-1} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2m-1}$$

қисмий йиғиндисини олайлик.

Равшанки,

$$A_{2m-1} = A_{2m} + c_{2m}.$$

Бундан (11.31) ва (11.32) ларга асосан топамиз:

$$\lim_{m\to\infty} A_{2m-1} = \lim_{m\to\infty} (A_{2m} + c_{2m}) = A.$$

Шундай қилиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат кетма-кетлик чекли лимитга эга эканини кўрсатдик. Демак, (11.29) қатор яқинлашувчи. Теорема исботланди.

Мисол. Юқорида кўрилган ушбу

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қатор учун теорема барча шартларининг бажарилишини кўрсатиш қийин эмас. Лейбниц теоремасига кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.

5- §. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари

Биз ушбу параграфда яқинлашувчи қаторларда ҳадларни гуруҳлаш, абсолют яқинлашувчи қаторларда эса ҳадларнинг ўрнини алмаштириш каби хоссаларга тўхталамиз.

1. Гуруҳлаш хоссаси. Бирор $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор берилган бўлсин. Бу қатор ҳадларини гуруҳлаб қуйидаги қаторни тузамиз:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1-1} + a_{n_1-2} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots, \qquad (11.33)$$

бунда $n_1, n_2, \ldots (n_1 < n_2 < \ldots)$ лар натурал сонлар кетма-кетлигининг бирор $\{n_k\}$ қисмий кетма-кетлиги бўлиб, $k \to \infty$ да $n_k \to \infty$.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси A сонга тенг бўлса, у ҳолда бу қаторнинг ҳадларини гуруҳлашдан ҳосил бўлган* (11.33) *қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси ҳам A сонга тенг бўлади.*

Исбот. Таърифга кўра берилган қаторнинг A_n қисмий йиғиндиси учун $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ (A — чекли сон) лимит ўринли. Энди (11.33) қаторнинг қисмий йиғиндисини ёзамиз:

$$A_{n_k} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1-1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k}).$$

Бу қисмий йиғиндилардан тузилган

$$A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3}, \ldots, A_{n_k}, \ldots$$

кетма-кетликни қарайлик. Равшанки, бу $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлигидир. У ҳолда 3- бобдаги 12- теоремага кўра, $\{A_{n_k}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва унинг лимити ҳам A га тенг бўлади.

$$\lim_{k\to\infty} A_{n_k} = A.$$

Бу эса (11.33) қаторнинг яқинлашувчи бўлишини ва унинг йиғиндиси A га тенг эканини билдиради.

Демак, яқинлашувчи қаторларда қатор ҳадларини гуруҳлаш натижасида унинг йиғиндиси ўзгармайди ва яқинлашувчилиги бузилмайди.

5- эслатма. Бу хоссанинг акси ҳар доим ўринли бўлавермайди, яъни ҳадлари гуруҳланган қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан дастлабки қаторнинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу ҳадлари иккитадан гуруҳланган

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$

қаторни қарайлик. Равшанки, бу қатор яқинлашувчидир. Аммо

$$1-1+1-1+\ldots$$

қатор узоқлашувчидир.

2. **Ўрин алмаштириш хоссаси.** Ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор берилган бўлсин. Бу қатор ҳадларининг ўринларини алмаштириб, қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n + \ldots \qquad (11.34)$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бу (11.34) қаторнинг ҳар бир a'_n ҳади $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг тайин бир a_{n_k} ҳадининг айнан ўзидир.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси A сонга тенг бўлса, у ҳолда бу қатор ҳадларининг ўринларини ихтиёрий равишда алмаштиришдан ҳосил бўлган (11.34) қатор яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси ҳам A сонга тенг бўлади.

Исбот. Бу хоссани $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор мусбат ҳамда ихтиёрий ҳадли бўлган ҳоллар учун алоҳида исботлаймиз.

1) Берилган қатор мусбат қатор бўлиб, у яқинлашувчи ва йиғиндиси A сонга тенг бўлсин. Таърифга кўра $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. $\{A_n\}$ — ўсувчи кетма-кетлик бўлганидан $A_n \leqslant A$ тенгсизлик ўринли бўлади. Энди (11.34) қаторнинг

$$A'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k$$

қисмий йиғиндисини қарайлик. Бунда $a'_1 = a_{n_1}$, $a'_2 = a_{n_2}$, $\ldots$, $a'_k = a_{n_k}$. Равшанки, $\{A'_k\}$ — ўсувчи. Агар $n = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ деб олсак, у ҳолда $A'_k \leqslant A_n$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Шунинг учун $A'_k \leqslant A$ тенгсизлик ўринли. Шундай қилиб, $\{A'_k\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва юқоридан чегараланган. Демак, у чекли лимитга эга:

$$\lim_{k\to\infty} A'_k = A' \text{ ва } A' \leqslant A.$$

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторни (11.34) қатор ҳадларининг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган қатор деб қарайдиган бўлсак, унда юқорида келтирилган мулоҳазага асосланиб, (11.34) қаторнинг яқинлашувчи ва йиғиндиси A' сонга тенг бўлишидан берилган қаторнинг ҳам яқинлашувчилиги ва унинг йиғиндиси A учун $A \leqslant A'$ тенгсизлик ўринли бўлишини топамиз. Юқорида $A' \leqslant A$ экани кўрсатилган эди. Шу икки тенгсизликдан $A = A'$ бўлиши келиб чиқади.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ихтиёрий ҳадли қатор бўлиб, у абсолют яқинлашувчи ва йиғиндиси A сонга тенг бўлсин. Шу қатор ҳадларининг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ қаторни қарайлик.

Модомики, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи экан, унда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлади. Бу мусбат қатор бўлганлиги сабабли 1) ҳолда исботланганига кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a'_n|$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ қатор яқинлашувчидир.

Энди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ қатор йиғиндисининг ҳам A сонга тенг эканини кўрсатамиз.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг мусбат ишорали ва нолга тенг бўлган $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ ҳадларидан $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}$ ҳамда манфий ишорали $a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots$ ҳадларининг абсолют қийматларидан $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{s_m}|$ қаторларни тузамиз. Қулайлик учун $a_{i_k} = b_k$, $a_{s_m} = c_m$ деб белгиласак, ушбу

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots, \tag{11.35}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m + \ldots \tag{11.36}$$

қаторлар ҳосил бўлади. Шартга кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи. Демак, бу қаторнинг

$$A_n^* = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

қисмий йиғиндиларидан тузилган $\{A_n^*\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган, яъни $\forall n \in N$ да

$$A_n^* \leqslant A^* \quad (A^* — \text{ўзгармас сон}) \tag{11.37}$$

тенгсизлик ўринли. Энди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг қисмий йиғиндисини A_n билан белгилаб топамиз:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} b_i - \sum_{i=1}^{m} c_i = B_k - C_m, \qquad (11.38)$$

бунда $n = k + m$ бўлиб, $k - A_n$ қисмий йиғиндида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг мусбат ишорали, m эса унинг манфий ишорали ҳадларининг сони. Биз энг муҳим, $n \to \infty$ да $k \to \infty$ ва $m \to \infty$ ҳолни қараш билан чегараланамиз.

Равшанки

$$B_k \leqslant A_n^*, \ C_m \leqslant A_n^*. \qquad (11.39)$$

(11.37) ва (11.39) муносабатлардан $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ қаторларнинг қисмий йиғиндилари B_k ва C_m юқоридан чегараланганлиги келиб чиқади. 8-теоремага кўра $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ қаторлар яқинлашувчи бўлади. Бу қаторларнинг йиғиндиларини мос равишда B ва C билан белгилайлик: $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = B$ (B — чекли сон), $\lim\limits_{m\to\infty} C_m = C$ (C—чекли сон). Энди (11.38) тенгликда лимитга ўтсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (B_k - C_m) = \lim_{k\to\infty} B_k - \lim_{m\to\infty} C_m = B - C.$$

Бу эса $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси A учун $A = B - C$ формула ўринли эканини англатади.

Берилган қатор ҳадларининг ўринлари алмаштирилганда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ва $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ қаторлар ҳадларининг ҳам ўринлари алмашади ва 1) ҳолга асосан бу қаторлар йиғиндилари мос равишда B ва C га тенг бўлиб қолаверади. Демак, $A = B - C$ тенгликка кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ қаторнинг йиғиндиси ҳам A сонга тенг бўлади. Бу ҳолда ҳам хосса исбот бўлди (ўрин алмаштиришда ҳадлар ўз ишоралари билан олинганлиги учун $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ нинг ҳамма ҳадлари яна $\sum b_{n_k}$ га, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ нинг ҳамма ҳадлари яна $\sum c_{m_k}$ га киради).

Бу хоссанинг ўринли бўлишида қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши муҳимдир. Агар қатор шартли яқинлашувчи бўлса, юқоридаги хосса ўринли бўлмай қолиши мумкин. Масалан, қуйидаги

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг шартли яқинлашувчилигини ва йиғиндиси $A=\ln 2$ га тенг эканлигини (1- § га қаранг) кўрсатган эдик. Демак, қаторнинг қисмий йиғиндилари

$$A_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right),\quad A_{2n+1}=A_{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

чекли A лимитга эга:

$$\lim_{n\to\infty}A_{2n}=\lim_{n\to\infty}A_{2n+1}=A.$$

Энди берилган қаторнинг битта мусбат ишорали ҳадидан кейин иккитадан манфий ишорали ҳадини олиш усулида ҳадларини алмаштириб, ушбу

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots \tag{11.40}$$

қаторни ҳосил қилайлик. Кейинги қаторнинг биринчи $3n$ та ҳаддан иборат қисмий йиғиндисини ёзамиз:

$$A'_{3n}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right).$$

Агар

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда A'_{3n} қисмий йиғиндини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A'_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}A_{2n}$$

Демак,

$$\lim_{n\to\infty}A'_{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}A_{2n}=\frac{1}{2}A.$$

Шунингдек,

$$\lim_{n\to\infty} A'_{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(A'_{3n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}A,$$

$$\lim_{n\to\infty} A'_{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(A'_{3n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2}\right) + \frac{1}{2}A$$

бўлади.

Шундай қилиб, (11.40) қаторнинг қисмий йиғиндисининг лимити $\frac{1}{2}A$ сонга тенг. Демак, ҳадларининг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган (11.40) қатор йиғиндиси $\frac{1}{2}A$ сонга тенг. Бу эса берилган қатор ҳадларининг ўринларини алмаштириш натижасида унинг йиғиндиси ўзгаришини кўрсатади.

Умуман, абсолют яқинлашувчи бўлмаган қаторлар ҳадларининг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган қаторлар ҳақида қуйидаги теорема ўринли. Биз бу теоремани исботсиз келтирамиз.

12-**теорема** (Риман теоремаси). *Агар* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор шартли яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ҳар қандай А (чекли ёки чексиз) олинганда ҳам берилган қатор ҳадларининг ўринларини шундай алмаштириш мумкинки, ҳосил бўлган қаторнинг йиғиндиси худди шу А га тенг бўлади.*

АДАБИЁТ

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III.— М., Наука, 1969. (Узбек тилига I—II томлари таржима қилинган.)

2. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. I, II.— М., Наука, 1964. (Узбек тилига таржима қилинган.)

3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. I.— М., Наука, 1971. (Узбек тилига таржима қилинган.)

4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. II.— М., Наука, 1980.

5. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу.— М., Наука, 1977.

6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. I, II.— М., Высшая школа, 1981.

7. Никольский С. М. Курс математического анализа, т. I, II.— М., Наука, 1973.

8. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ.— М., Наука, 1979.

9. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II.— М., Наука, 1970.

10. Рудин У. Основы математического анализа.— М., Мир, 1976.

11. Зорич В. А. Математический анализ, ч. I.— М., Наука, 1981.

12. Романовский В. И. Избранные труды, т., I (Введение в анализ). Изд. АН УзССР, Ташкент, 1959.

МУНДАРИЖА