B.A. FAYZULLAYEV

NAZARIY FIZIKANING MATEMATIK USULLARI

TOSHKENT

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

B.A.FAYZULLAYEV

NAZARIY FIZIKANING MATEMATIK USULLARI

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 5A140201-Nazariy fizika mutaxassisligi yo'nalishi bo'yicha ta'lim olayotgan magistrantlar uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT – 2016

UO'K: 614.253.52 (075)
KBK 22.311
F-20

F-20 B.A.Fayzullayev. Nazariy fizikaning matematik usullari.
–T.: «Barkamol fayz media», 2016, 272 bet.

ISBN 978–9943–11–386–2

Nazariy fizika 5A140201 mutaxassisligi uchun mo'ljallangan ushbu kitobda vektorlarning analitik nazariyasi, matritsalarning klassifikatsiyasi va ular ustida amallar, differensial tenglamalarning maxsus nuqtalar atrofidagi yechimlarini izlash metodlari, inte-grallarning aismptotikalarini topish metodlari, chekli va uzluksiz gruppalarning nazariyasi va ularning fizikadagi qo'llanishlari ko'rsatilgan.

Darslik universitetlarning fizika fakultetlari magistratura 1-kurs talabalariga mo'ljallangan.

***

В книге, предназначенной для специальности 5A140201 "Теоретическая физика" дана аналитическая теория векторов, классификация матриц и действия над ними, методы поиска решений дифференциальных уравнений в окрестности особых точек, методы вычисления асимптотик интегралов, теория конечных и непрерывных групп и их применения в физике.

Учебник предназначен для магистрантов 1-курса физических факультетов.

***

In this book for speciality 5A140201 "Theoretical physics" are presented following themes: analytical approach to vectors, classification of matrices and operations with them, methods of finding solutions in the neighborhood of singular points of differential equations, methods of calculation of asymptotics of integrals, the theory of finite and continuous groups and their physical applications.

The textbook is intended for first level master-students of physical faculties.

UO'K: 614.253.52 (075)
KBK 22.311

Taqrizchilar:
A.A.Abdumalikov – f.-m.f.d., prof.;
B.J.Axmedov – f.-m.f.d., prof.

ISBN 978–9943–11–386–2

So‘z boshi

Fizika fani tabiat qonunlarini o‘rnatish bilan shug‘ullanuvchi fandir. Nazariy fizika tabiat qonunlarini matematik metodlar bilan o‘rganadi. Ko‘p yillik tajribalar asosida tabiat qonunlari bo‘ysunadigan asosiy prinsiplarni keltirib chiqarish va ularga tayangan holda mavjud tajribalarni tushuntiradigan nazariyalarni yaratish - nazariy fizikaning vazifasidir. Bu vazifani muvaffaqiyatli bajarish uchun esa keng va chuqur matematik bilimlar kerak. Bakalavriatura davomida fizika fakultetlarida o‘qiladigan oliy matematika kurslari buning uchun yetarli emas. Shu sababdan nazariy fizika mutaxassisligini tanlagan magistrantlar uchun birinchi navbatda nazariy fizikaning har xil sohalarida keng ishlatiladigan matematik metodlarni yoritishga bag‘ishlangan maxsus kurs o‘qitiladi. Albatta, matematika - o‘ta keng va chuqur fan, uning sohalari va metodlarini bitta kitob hajmida qamrab bo‘lmaydi. Maxsus kursga ajratilgan soatlar ham cheklangan. Shu sababdan ushbu kitobda bayon qilingan materiallar mavjud "Davlat ta’lim standarti" va "Nazariy fizikaning matematik metodlari" kursining programmasiga muvaffiqlashtirilgan.

Bu kitob o‘z sohasida birinchi tajriba bo‘lib kamchiliklardan holi emas. Masalan, o‘zbek tilidagi atamalar muammolari jiddiy muammodir. Uni hal qilish uchun ko‘p vaqt kerak. Agar o‘quvchi kitobda kamchiliklar topib qolsa muallifga habar qilar deymiz.

Muallif

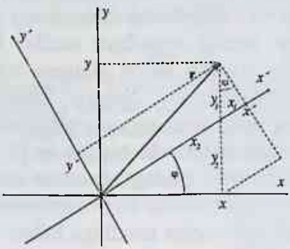
I-BOB.

VEKTORLAR VA MATRITSALAR USTIDA AMALLAR

§1. Vektorlarning ta'rifi

Fandagi ko'pgina umumiy tushunchalar sodda holdagi tushunchalarni umumlashtirish yo'li bilan olinadi.

Ikki o'lchamli fazodagi vektor tushunchasidan boshlaylik. Tekislikda dekart koordinat sistemasi - (x, y)- berilgan bo'lsin. Shu koordinat sistemasini φ burchakka burab yangi (x', y') sistemaga o'taylik. Tekislikda yotgan bir $\mathbf{r}$ vektorini olib qaraylik. Uning eski koordinat sistemasidagi koordinatlari (r_1, r_2) bo'lsin. Shu vektorning yangi (shtrixlangan) sistemadagi koordinatlarini (r'_1, r'_2) deb belgilaylik. Buni (I.1)-rasmda ko'rishimiz mumkin. Masala - mana shu $(x, y) \to (x', y')$ almashtirishda ikki o'lchamli $\mathbf{r}$ vektorimizning komponentalari qanday o'zgarishini topish. Bizning



I.1-rasm: Koordinat o'qlarini φ burchakka burashga oid

maqsadlarimiz uchun $\mathbf{r}$ vektorni vektor-ustun sifatida tasavvur qilish qulaydir [1]:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

[1] Vektorlarni ustun sifatida belgilash ularni matritsalar va tenzorlar bilan birga ko'rishda juda qulaydir.

Shtrixlangan sistemada huddi shu vektorimizni

$$\mathrm{r}' = \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{2}$$

deb belgilaylik. Rasmning geometriyasidan ko'rinib turibdiki:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{y'}{\cos\varphi} + x \operatorname{tg}\varphi; \qquad x' = x_1 + x_2 = y' \operatorname{tg}\varphi + \frac{x}{\cos\varphi}, \tag{3}$$

yoki,

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

Olingan munosabatni

$$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ko'rinishga keltirib olganimiz qulaydir. Bundan ko'rinib turibdiki, agar

$$a^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{6}$$

ko'rinishdagi matritsa kiritilsa (4) va, unga ekvivalent bo'lgan (5) formulalarni

$$r_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}^{(2)} r_j, \qquad i = 1, 2 \tag{7}$$

ko'rinishga keltirib olish mumkin. Darhaqiqat,

$$\begin{aligned} r_1' &= x' = a_{11}r_1 + a_{12}r_2 = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ r_2' &= y' = a_{21}r_1 + a_{22}r_2 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{8}$$

(7)-formula tekislikda yotgan ikki o'lchamli radius-vektorning ta'rifini beradi, bu ta'rifni umuman ikki o'lchamli vektorning ta'rifi sifatida qabul qilaylik: bizga ikkita komponentali kattalik berilgan bo'lsin - A = (A_1, A_2). *Bu kattalik ikki o'lchamli vektor deyiladi qachonki u koordinat sistemasini almashtirganda quyidagi qonun bo'yicha o'zgarsa:*

$$A_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}^{(2)} A_j, \qquad i = 1, 2. \tag{9}$$

Ushbu formulaga kirgan $a^{(2)}$ matritsa yuqorida ta'riflangan.

Odatda shunga o'xshash indeksli ifodalarda bitta soddalashtirish qabul qilingan - ikki marta uchraydigan ixtiyoriy indeks ***soqov indeks*** deyiladi va u bo'yicha yig'indi ko'zda tutiladi ammo yig'indi belgisi tashlab yuboriladi. Bunday qoida Einstein qoidasi deyiladi. Shu qoidani qabul qilib yuqoridagi formulani quyidagicha yozib olamiz:

$$A'_i = a^{(2)}_{ij} A_j, \qquad i, j = 1, 2. \tag{10}$$

Bu formulada o'ng tomondagi j - soqov indeks, u bo'yicha yig'indi ko'zda tutilgan. Ifodaning ikkala tomoniga kirgan i indeks ***ozod*** indeks deyiladi. Ixtiyoriy formula to'g'ri bo'lishining zaruriy sharti - ozod indekslarning soni va belgilanishi formulaning ikkala tomonida bir xil bo'lishi kerak. Soqov indekslarni esa ixtiyoriy belgilayverish mumkin - indekslar adashib ketmasa bo'ldi. Masalan,

$$A'_i = a^{(2)}_{ij} A_j = a^{(2)}_{ik} A_k = a^{(2)}_{il} A_l. \tag{11}$$

Ikki o'lchamli vektorning ta'rifini oldik. Uch o'lchamli vektorlarga o'taylik. Bizga uch o'lchamli radius-vektor berilgan bo'lsin:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Shu vektorni z o'qi atrofida φ burchakka burishni quyidagicha ifoda qilish mumkin:

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Darhaqiqat, bu matrik tenglama quyidagi uchta tenglamaga teng:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{14}$$

Agar endi y o'qi atrofida (demak, (x, z) tekisligida) ψ burchakka buralishga kelsak uni

$$\mathrm{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\psi & 0 & \cos\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\psi & 0 & \sin\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{15}$$

ko'rinishda ifodalashimiz mumkin. Matritsasiz yozsak

$$\begin{aligned} x' &= -z\sin\psi + x\cos\psi, \\ y' &= y, \\ z' &= z\cos\psi + x\sin\psi \end{aligned} \tag{16}$$

tenglamalarga kelamiz. Bu ifodalar koordinat sistemasini o'ng qo'l qoidasi bo'yicha burashga mos keladi. Huddi shunday x o'qi atrofida ϕ burchakka buralishga ((y,z) tekisligida) quyidagi formulalar mos keladi:

$$x' = x, \qquad y' = y\cos\phi + z\sin\phi, \qquad z' = -y\sin\phi + z\cos\phi. \tag{17}$$

Matritsalar tilida buni quyidagicha ifodalashimiz mumkin:

$$\mathrm{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Uch o'lchamli fazodagi ixtiyoriy buralishni avval z o'qi atrofida φ burchakka, keyin y o'qi atrofidagi ψ burchakka va nihoyatda, x o'qi atrofidagi ϕ burchakka buralishlatga keltrishimiz mumkin. Bu degani, uch o'lchamli fazodagi umumiy buralishni

$$a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\psi & 0 & \cos\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\psi & 0 & \sin\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi \\ \cos\varphi\cos\psi\sin\phi - \cos\phi\sin\varphi & \cos\phi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\sin\phi & \sin\phi\sin\psi \\ \cos\phi\cos\varphi\cos\psi + \sin\phi\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\phi + \cos\phi\cos\psi\sin\varphi & \cos\phi\sin\psi \end{pmatrix} \tag{19}$$

matritsa yordamida bajarishimiz mumkin. Bu holda uch o'lchamli ixtiyoriy vektor shunday $\mathbf{A}$ kattalik bo'ladiki, uning uch komponentasi bo'lib $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ ular uch o'lchamli fazodagi koordinat sistemasi buralganda yangi sistemada quyidagicha ifodalanadi:

$$A_i' = a_{ij}^{(3)} A_j, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Bu yerdagi matritsa $a^{(3)}$ - (19)-formula orqali aniqlanadi.

Huddi shuningdek n o'lchamli fazolardagi vektorlarni aniqlashimiz mumkin. Agar bizga n-komponentalik $A = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ kattalik berilgan bo'lsa va u koordinat o'qlarini almashtirishda

$$A'_i = a^{(n)}_{ij} A_j, \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{21}$$

qoida bo'yicha o'zgarsa bunday kattalik n o'lchamli vektor deyiladi. Bu yerdagi $a^{(n)}$ matritsa ko'rilayotgan almashtirishga mos ravishda aniqlangan bo'lishi kerak.

(6)-formula orqali kiritilgan matritsaga qaytaylik. Transponirlangan matritsa tushunchasini kiritaylik (ko'rsatkichidagi (2) indeksini hozircha yozmay turamiz): $a^T_{ij} = a_{ji}$. Ko'rinib turibdiki,

$$a^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Demak, $a^T a = I$ - birlik matritsa. $a^T a = I$ hossaga ega bo'lgan matritsalar ***ortogonal matritsa*** deyiladi. Keyin ko'rsatamizki, umuman ixtiyoriy evklid fazosidagi buralish matritsalari ortogonal matritsa bo'ladi, buning muhim ahamiyati bor - §4.-paragrafning ohirida shuning asosida evklid va psevdoevklid fazolaridagi vaktor va tenzorlarning katta farqi kelib chiqishi ko'rsatilgan.

§2. Aktiv va passiv yondoshish

(4)-, (5)- va (6)-formulalar tekislikdagi (x, y) koordinat o'qlarini φ burchakka soat strelkasiga qarshi yo'nalishda burashga mos keladi - (I.1)-rasmga qarang. Bu formulalardagi (x, y) va (x', y') koordinatlar bitta $\mathbf{r}$ nuqtaning eski va yangi sistemalardagi koordinatlaridir.

Buralish operatsiyasiga boshqacha yondashish ham mumkin. (I.1)-rasmdagi $\mathbf{r}$ vektorni soat strelkasi bo'yicha φ burchakka buraldi deb qarash mumkin. Bu holda

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

ifoda r nuqtaning qo'zg'olmasdan turgan koordinat sistemasidagi yangi va eski koordinatlarini bog'laydi. Agar (5)-formula ***passiv*** almashtirish formulasi deyilsa (22)-formula ***aktiv*** almashtirish formulasi deyiladi. Qaysi bir yondoshishdan foydalanish o'zimizning ixtiyorimizda bo'lib masalaning hususiyatlaridan kelib chiqib tanlaniladi. Kitobning qolgan qismlarida alohida aytib o'tirilmasdan ikkala yondashishdan foydalanid ketilaveradi.

§3. Tenzorlar

Fazo koordinatlarining almashinishida ikkita vektorning ko'paytmasi kabi o'zgaradigan kattalik T_{ij} ikkinchi rang tenzori deyiladi:

$$T'_{ij} = a_{il}a_{jk}T_{lk}, \qquad i,j,k,l = 1,2,3,\ldots,n. \tag{23}$$

Uchta vektorning ko'paytmasi kabi o'zgaradigan kattalik esa:

$$T'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}T_{lmn} \tag{24}$$

uchinchi rang tenzori deyiladi va h.k. Shu nuqtai nazardan vektor - birinchi rang tenzoridir.

Tenzorlar ichida simmetrik va antisimmetriklik hossalariga ega bo'lganlari muhim rol o'ynaydi. Simmetrik tenzor quyidagicha ta'riflanadi:

$$S_{ij} = S_{ji}. \tag{25}$$

Antisimmetrik tenzorning ta'rifi:

$$A_{ij} = -A_{ji}. \tag{26}$$

Quyidagi tasqiq juda keng qo'llaniladi:

$$A_{ij}S_{ij} = 0. \tag{27}$$

Buning isboti sodda bo'lgani uchun uni o'quvchiga havola qilamiz.

Fizikada uchraydigan hamma tenzorlar o'zining indekslari bo'yicha yoki simmetrik, yoki antisimmetrik bo'ladi - bu ko'rilayotgan masalaning erkinlik darajalarining soni bilan bog'liq. Masalan, simmetrik ikkinchi rang tenzorning umuman n^2 komponentasi bor, simmetriklik sharti $(n^2 - n)/2$ ta shartni beradi (diagonaldan yuqoridagi elementlar diagonaldan pastdagi elementlarga teng), demak, simmetrik ikkinchi rang tenzorining mustaqil komponentalarining soni $n^2 - (n^2 - n)/2 = n(n+1)/2$ ga teng. Antisimmetrik ikkinchi rang tenzorining ham komponentalarining umumiy soni n^2, antisimmetriklik sharti esa $n + (n^2 - n)/2 = n(n+1)/2$ ga teng. Bu yerda birinchi n - hamma n ta diagonal elementlarning nolga tengligi sharti, $(n^2 - n)/2$ - diagonaldan yuqoridagi elementlarning diagonaldan pastdagi elementlarga minus ishora bilan tengligini bildiradi. Demak, antisimmetrik tenzorning mustaqil komponentalari soni $n(n-1)/2$ ga teng ekan.

Masalan, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ - elektromagnit maydon tenzori, bu yerda μ, ν indekslar 0, 1, 2, 3 - to'rtta qiymat qabul qiladi. Demak, $F_{\mu\nu}$ ning umuman 16 ta komponentasi bor, ammo o'zining ta'rifi bo'yicha u antisimmetrik tenzor - $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Antisimmetriklik shunga olib keladiki, to'rtta diagonal elementlar o'zining manfiyiga teng bo'lgani uchun nolga teng: $F_{00} = -F_{00} = 0$ va h.k. Yuqoridagi umumiy formula bo'yicha $F_{\mu\nu}$ ning $4(4-1)/2 = 6$ ta mustaqil komponentalari bor, ularga uchta elektr maydon vektori $\mathbf{E}$ komponentalari va uchta magnit maydon bektori $\mathbf{B}$ komponentalari mos kelishi ma'lum.

§4. Vektor va tenzorlarning umumiy ta'rifi

Avvalga paragraflarda vektor va tenzorlarning almashtirish koeffisientlari a_{ij} lar chiziqli almashtirishlarga mos keluvchi tenzorlar edi. Chiziqli fazoning chiziqli almashtirishiga o'zgarmas a_{ij} matritsalar mos keladi. Umumiy holga o'taylik, ya'ni, koordinatlarning umumiy almashtirishini ko'ramiz:

$$x'^i = f^i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{28}$$

Almashtirishning yakobiani noldan farqli bo'lishi kerak, ya'ni, almashtirish o'zaro bir qiymatli va teskarisi mavjud bo'lgan alamshtirish bo'lishi kerak. Bu holda

$$dx'^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j$$

bo'ladi (ikki marta uchragan indeks bo'yicha yig'indi ko'zda tutiladi).

ta'rif: Agar n komponentalik $A^i(x)$ kattalik (28)-almashtirishda

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \tag{29}$$

qonun bo'yicha almashilsa u ***kontravariant vektor*** deyiladi. Bu ta'rif (21)-ta'rifdan a_{ij} koeffisientning o'rniga $\partial x'^i/\partial x^j$ koeffisient paydo bo'lishi bilan farq qiladi. Agar (28)-almashtirish chiziqli bo'lganda ya'na o'sha (21)-ta'rifga qaytamiz.

Endi funksiyaning gradientini qaraylik: $\partial_i \varphi$. Bu yerda $\varphi(x)$ - skalar funksiya: $\varphi'(x') = \varphi(x)$, $\partial_i = \partial/\partial x^i$. (28)-almashtirishda quyidagiga egamiz (hosilaga zanjir qoidasini qo'llaymiz):

$$\partial'_i \varphi' = \frac{\partial \varphi'(x')}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^j}.$$

Ko'rinib turibdiki, skalarning gradienti kontravariant vektorning ta'rifiga mos kelmaydigan formada almashinayapti.

ta'rif: Quyidagi qoida bo'yicha almashinadigan kattalik ***kovariant vektor*** deyiladi:

$$A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j. \tag{30}$$

(29)- va (30)-ta'riflardagi koeffisientlarni matritsa sifatida ko'rsak (ixtiyoriy ikki indeksli kattalikni matritsa sifatida ko'rishimiz mumkin) bu ikkala ta'rifdagi matritsalar ma'lum darajada bir biriga teskaridir.

Ko- va kontravariant tenzorlarni ham shu yo'sinda kiritishimiz mumkin. Masalan, ikkinchi rang kontravariant tenzori:

$$T'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} T^{kl}.$$

Ikkinchi rang kovariant tenzor:

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} T_{kl}.$$

Ikkinchi rang *aralash* tenzor:

$$T'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}T^K_l.$$

Shunday yo'l bilan yuqori tartibli tenzorlarni ham kiritish mumkin: T^i_{jk}, B^{jkl}_{mn} va h.k.

1.1-mashq. Zanjir qoidasi

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x'^k} = \delta^i_k, \tag{31}$$

dan foydalanib ko- va kontravariant vektorlarning skalar ko'paytmasi 28-almashtirishlarga nisbatan invariant kattalik ekanligini isbot qiling:

$$A'^i B'_i = A^i B_i.$$

Shu bilan birga, $A^i B^i$ va $A_i B_i$ ko'paytmalarning invariant emasligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Biror yuqori rang aralash tenzori T^{ij}_{klm} berilgan bo'lsin. Agar uning bitta ko- va bitta kontravariant indekslari bo'yicha yig'indisini olsak uning rangi ikkiga kamayadi:

$$T^{ij}_{kjm} = T^i_{km}.$$

Buni isbot qilish qiyin emas.

Nima uchun yuqorida $n-$ o'lchamli evklid fazosidagi vektorlar haqida gap ketganida biz ularni ko- va kontra-variantlarga ajratmagan edik? Sababi quyidagicha. (29)- ta'rifdagi koeffisientni quyidagicha belgilaylik:

$$a^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}. \tag{32}$$

Ixtiyoriy ikki indeksli kattalikni matritsa sifatida qarashimiz mumkin bo'lgani uchun $a^i_j \Rightarrow a_{ij}$ deb qaraymiz, bunda yuqoridagi - kontravariant - indeks satr nomeri bo'lib xizmat qiladi, quyi - kovariant - indeks esa ustun nomeri bo'ladi.

Теорема I.1 *Agar almashtirish koeffisientlaridan tuzilgan a_{ij} matritsa ortogonal bo'lsa ko- va kontra- variant vektorlar orasidagi farq yo'q bo'ladi.*

Isbot: Zanjir qoidasi (31)-dan kelib chiqadiki ko- va kontra-variant vektorlarning almashtirish qonuni bir-biriga teskari. Ikkinchi tomondan, (30)-formuladagi koeffisientda (29)-qoida nuqtai-nazaridan indekslarning o'rni almashgan, ya'ni, (30)-formulada a^{-1T} matritsa turibdi. Ortogonal matritsa uchun esa $a^{-1T} = a$.

Demak, ortogonal almashtirishlar haqida gap ketganda ko- va kontra- variant vektorlarni ajratmasak ham bo'ladi.

Ikki o'lchamli evklid fazosidagi vektorlarning almshtirish matritsasi (6)-formula orqali kiritilgan. Bu matritsaning $a^T = a^{-1}$ ekanligini, ya'ni, uning ortogonalligini ko'rish qiyin emas. Ortogonallikni tekshirishning Yuqorida ko'rdikki, ikki, uch va h.k. o'lchamli evklid fazolarida chiziqli almashtirishlar ortogonal matritsalar orqali bajariladi, shu sababdan evklid fazolarida ko-va kontra- variant vektorlar ajratilmaydi. Minkovsky fazosi psevdoevklid fazo, undagi chiziqli almashtirishlar psevdoortogonal matritsalar yordamida bajariladi. Bu holda vektorlarning variantligining farqiga bormaslik mumkin emas.

§5. Vektor algebrasining analitik formasi

Quyidagi ikki tenzor kiritaylik: δ_{ij} va ε_{ijk}. Ularning ta'riflari:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{33}$$

bu tenzorning nomi Kronekker deltasi.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk = 123{,}231{,}312 \text{ tartibda;} \\ -1, & ijk = 213{,}132{,}321 \text{ tartibda;} \\ 0, & \text{ixtiyoriy ikki indeks teng bo'lsa.} \end{cases} \tag{34}$$

Bu tenzor Levi-Chivita birlik antisimmetrik (psevdo)tenzori deyiladi. Rostdan ham, uning ixtiyoriy ikki indeksining o'rnini almashtirsak tenzorning ishorasi o'zgaradi. ta'rifdan bevosita ko'rinib turibdiki

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}; \quad \varepsilon_{iik} = \varepsilon_{ijj} = \varepsilon_{iji} = 0. \tag{35}$$

Mana shu ikki tenzor yordamida biz butun tenzor algebrasini qurib chiqamiz. Birinchidan, bu tenzorlarning invariant ekanligini isbot qilaylik.

$$\delta'_{ij} = a_{ik}a_{jl}\delta_{kl} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}. \tag{36}$$

Kronekker deltasi fazo o'qlarini almashtirganda o'zgarmas, ya'ni, invariant ekan.

Skalar ko'paytmadan boshlaylik. Birinchidan, deltaning ta'rifidan oydinki

$$A_i = \delta_{ij}A_j. \tag{37}$$

Bu esa skalar ko'paytma uchun

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_iB_i = A_i\delta_{ij}B_j \tag{38}$$

ni beradi.

ε_{ijk} tenzor yordamida ikki vektorning vektor ko'paytmasini quyidagicha ta'riflashimiz mumkin:

$$[\mathbf{AB}]_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k. \tag{39}$$

Tekshirib ko'raylik. $i = 1$ bo'lsin:

$$[\mathbf{AB}]_1 = [\mathbf{AB}]_x = \varepsilon_{1jk}A_jB_k. \tag{40}$$

O'ng tomondagi ikkita yig'indi ostida soqov indekslar j va k faqatgina 2 va 3 qiymatlarni qabul qilgan hadlargina nolga teng emas:

$$\varepsilon_{1jk}A_jB_k = \varepsilon_{123}A_2B_3 + \varepsilon_{132}A_3B_2 = A_2B_3 - A_3B_2. \tag{41}$$

Olgan natijamizni o'zimizga ma'lum ko'rinishga keltirib olishimiz mumkin:

$$[\mathbf{AB}]_1 = A_2B_3 - A_3B_2 = A_yB_z - A_zB_y. \tag{42}$$

Demak, ε_{ijk} tenzori vektor ko'paytmani kompakt ko'rinishda yozib olishga imkon berar ekan. Agar shu tenzorning quyidagi xossalarini kiritsak:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm} = 2\delta_{km}, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6, \tag{43}$$

vektor algebrasida uchraydigan eng murakkab ifodalarni ham soddalashtirish imkoniyatiga ega bo'lamiz. Bu xossalarning birinchisini to'g'ridan-to'g'ri tekshirib ko'rishgina mumkin. Ikkinchisi esa birinchisidan uni δ_{jl} ga ko'paytirib soqov indekslar bo'yicha yig'indini xisoblab olinadi. Uchinchisi ikkinchisini δ_{km} ga ko'paytirib olinadi.

Kiritilgan formulalarning qanday ishlashini misollarda ko'rib chiqaylik.

1.1-misol. Uch vektorning qo'shma ko'paytmasini toping.

$$\mathbf{A}\cdot[\mathbf{BC}] = A_i[\mathbf{BC}]_i = \varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k. \tag{44}$$

Agar (35) ni eslasak uch vektor qo'shma ko'paytmasining bizga ma'lum bir xossasini olgan bo'lamiz:

$$\mathbf{A}\cdot[\mathbf{BC}] = \mathbf{B}\cdot[\mathbf{CA}] = \mathbf{C}\cdot[\mathbf{AB}]. \tag{45}$$

1.2-misol.

$$\begin{aligned}[\mathbf{AB}]\cdot[\mathbf{CD}] &= [\mathbf{AB}]_i[\mathbf{CD}]_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k\varepsilon_{ilm}C_lD_m = \\ &= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\,A_jB_kC_lD_m = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\end{aligned} \tag{46}$$

1.3-misol. Birlik antisimmetrik tenzorning antisimmetrikligidan foydalanib

$$\mathbf{A}\cdot[\mathbf{AB}] = 0 \tag{47}$$

ekanligini ko'rsating.

Isbot.

$$\mathbf{A}\cdot[\mathbf{AB}] = \varepsilon_{ijk}A_iA_jB_k. \tag{48}$$

Bu ifodada uchta soqov indeks bor - i, j, k, ularning har biri bo'yicha 1 dan 3 gacha yig'indi ko'zda tutilgan. k indeksni olaylik va uning har bir qiymati uchun nolni olishimizni ko'rsataylik. $k = 3$ dan boshlaylik. Unda

$$\varepsilon_{ij3}A_iA_jB_3 = (A_1A_2 - A_2A_1)B_3 = 0 \tag{49}$$

bo'ladi. Shu muloxazani $k = 1$ va $k = 2$ xollar uchun ham qaytarishimiz mumkin, har gal ham nolni olamiz. Umumiy natija ham nolga tengdir.

Uchta vektorning vektor ko'paytmasini ko'raylik:

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]]_i &= \varepsilon_{ijk}A_j[\mathbf{BC}]_k = \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}B_lC_m = \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m = B_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - C_m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}),\end{aligned} \tag{50}$$

yoki, to'liq ravishda vektor ko'rinishga o'tsak:

$$[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}). \tag{51}$$

Asosiy tekstda uchta vektorning vektor ko'paytmasi uchraganda ularda ham huddi (50)-formulasidagi tartib ko'zda tutilgan

- birinchi vektor ikkinchi va uchinchi vektorlarning vektor ko'paytmasiga vektor ravishda ko'paytirilgan.

Maydon operatsiyalariga o'taylik. ta'rif bo'yicha

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 = \partial_i A_i \quad (52)$$

Rostdan ham, divergensiya - bu nabla bilan vektorning skalar ko'paytmasi - $\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A}$. Rotor operatsiyasi nablaning vektor ko'paytmasi orqali aniqlanadi:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A}. \quad (53)$$

Vektor ko'paytmaning umumiy ta'rifi (39)- bo'yicha

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k. \quad (54)$$

Bu ta'rifdan foydalanib quyidagilarni isbot qilaylik:

1.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \partial_i(\operatorname{rot}\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0. \quad (55)$$

Chunki simmetrik tenzor $\partial_i\partial_j$ bilan antisimmetrik tenzor ε_{ijk} larning (i, j bo'yicha) yig'indisi nolga teng ((27)-bo'yicha).

2.

$$(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi = 0, \quad (56)$$

yana huddi o'sha sabab bo'yicha.

1.4-misol. Maxwell tenglamalariga kirgan

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad (57)$$

tenglamaning yechimini toping.

Yechim. (55)-bo'yicha (57)-dan

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \quad (58)$$

ekanligi kelib chiqadi.

1.2-mashq. $\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]$ ni Maxwell tenglamalarini ishlatib toping.

1.3-mashq. $\operatorname{rot}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ ni keltirib chiqaring.

1.4-mashq. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}$ ni keltirib chiqaring.

1.5-mashq. $\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}$ ni keltirib chiqaring.

1.6-mashq. $[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]^2 = A^2B^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$ ni keltirib chiqaring.

§6. Helmholtz teoremasi

Теорема I.2 *Quyidagi munosabatlar orqali aniqlangan* $\mathbf{F}$ *vektor*

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D, \qquad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C}$$

quyidagi ko'rinishga ega:

$$\mathbf{F} = -\nabla u + \nabla \times \mathbf{w}, \tag{59}$$

bunda

$$u(r) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r', \qquad \mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

Bu yerda $D(\mathbf{r})$ *va* $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ *funksiyalar cheksizlikda* $r \to \infty$ *nolga kamida* $1/r^2$ *dek intilishi kerak, undan tashqari o'zaro kelishtirilganlik sharti* $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$ *bajarilishi kerak.*

Isbot: Teoremaning isboti

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad \text{va} \quad \Delta \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

formulalardan kelib chiqadi:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\Delta u = \int D(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3r' = D(\mathbf{r}),$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{w} = -\Delta \mathbf{w} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}),$$

$$-\Delta \mathbf{w} = \mathbf{C}(\mathbf{r}),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{4\pi}\int \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{C}(\mathbf{r}')d^3r' = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\mathbf{C}(\mathbf{r}')d^3r' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{C}(\mathbf{r}')d^3r' = -\frac{1}{4\pi}\int \nabla' \left(\frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r' +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla' \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r}')d^3r' = -\frac{1}{4\pi}\oint d\mathbf{s}' \cdot \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 0,$$

chunki $\mathbf{C} \xrightarrow{r\to\infty} \sim 1/r^2$.

Topilgan formula (59) yagonami yoki unga nimanidir qo'shib qo'yishimiz mumkinmi? Biz $\mathbf{F}$ ga divergensiuasi va rotori nolga teng bo'lgan ixtiyoriy vektorni qo'shib qo'yishimiz mumkin, natija o'zgarmaydi. Ammo, cheksizlikda nolga intiluvchi hamda divergensiuasi va rotori nolga teng bo'lgan vektorning o'zi nolga teng. Shuning uchun (59) formula yagonadir.

Olingan natijani bir joyga yig'ib quyidagi formulani yozib olishimiz mumkin: $r \to \infty$ da $1/r$ dan tezroq nolga intiluvchi ixtiyoriy $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ funksiya uchun quyidagi tasavvur o'rinlidir:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'\right)+\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'\right). \tag{60}$$

Isbot qilingan tasdiq Helmholtz[2] teoremasi deyiladi.

1.5-misol. Elektrostatikada $\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho$, $\nabla\times\mathbf{E} = 0$. Demak,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'\right) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}); \qquad \varphi(\mathbf{r}) = \int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'.$$

1.6-misol. Magnitostatikada $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, $\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$. Demak

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\times\left(\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'\right) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'.$$

§7. Matritsalar

$n\times n$-matritsa deganda biz ma'lum bir qoidalarga bo'ysundirilgan quyidagi jadvalni ko'zda tutamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Matritsani ko'pincha uning matrik indekslarini ko'rsatib belgilaymiz: $(A)_{ij} = a_{ij}$. Matritsalarning ko'paytmasi qoidasi quyidagicha ta'riflanadi:

$$(AB)_{ij} = a_{ik}b_{kj}. \tag{62}$$

[2]Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821 - 1894) - nemis fizigi

Soʻngra indeks k boʻyicha yigʻindi 1 dan n gacha. Bu qoida chap matritsaning satrini oʻng matritsaning ustuniga koʻpaytirishdan hosil boʻladi.

Matritsalarning koʻpaytmasi umumiy holda nokommutativlik xossasiga ega, ya'ni

$$AB \neq BA. \tag{63}$$

1.7-misol. Bizga ikkita matritsa berilgan boʻlsin:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Koʻrinib turibdiki,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \tag{65}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA. \tag{66}$$

Agar ikkita matritsaning koʻpaytmasi ularning tartibiga bogʻliq boʻlmasa

$$AB = BA \tag{67}$$

bunday matritsalar oʻzaro kommutativ deyiladi.

Hamma diagonal elementlari birga, nodiagonal elementlari nolga teng matritsa

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{68}$$

birlik matritsa deyiladi. Uni koʻpincha

$$I_{ij} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{69}$$

koʻrinishda olish mumkin.

§7.1. Matritsalarning turlari

1. *Simmetrik va antisimmetrik matritsalar.*
Simmetrik matritsa

$$S_{ij} = S_{ji} \tag{70}$$

Antisimmetrik matritsa:

$$A_{ij} = -A_{ji}. \tag{71}$$

$n \times n$ matritsaning komponentalarining soni n^2. Matritsa simmetrik yoki antisimmetrik bo'lganda uning mustaqil komponentalari sonini topaylik.

Simmetriklik sharti diagonal komponentalarga aloqasi yo'q, ularning soni n-ta. Diagonaldan tepadagi komponentalar soni $(n^2 - n)/2$, simmetriklik sharti ularning diagonaldan pastki komponentalarga tengligini bildiradi. Demak, mustaqil komponentalar soni: $n + (n^2 - n)/2 = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Antisimmetrik matritsaning diagonal komponentalari nolga teng: $A_{ii} = -A_{ii} = 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Diagonal ustidagi komponentalar diagonal pastidagilarga minus ishora bilan teng, shu bilan antisimmetrik matritsaning mustaqil komponentalarining soni $\frac{1}{2}n(n-1)$ ga teng degan hulosaga kelamiz.

2. ***Ortogonal matritsa.*** Transponirlangan matritsa - satr va ustunlari o'zaro almashgan matritsa:

$$(A^T)_{ij} = A_{ij}. \tag{72}$$

Agar qandaydir haqiqiy A matritsa uchun

$$A^T A = AA^T = I, \quad \text{yoki} \quad A_{ik}A_{jk} = \delta_{ij} \tag{73}$$

bo'lsa matritsa A ortogonal matritsa deyiladi.

1.8-misol. (6)-matritsani olaylik. U ortogonal matritsadir. Birinchidan uning transponirlanganini topayli:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Ko'rinib turibdiki

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

Demak, ikki o'lchamli evklid fazosini φ burchakka burash matritsasi ortogonal matritsa ekan. Buni boshqa so'zlar bilan ham ifodalashimiz mumkin: tekislikdagi koordinatlarni burash almashtirishi ortogonal almashtirish bo'ladi.

Ushbu tasdiq faqat tekislikka emas, ixtiyoriy n-o'lchamli evklid fazosiga taalluqlidir.

n-o'lchamli evklid fazosida chiziqli almashtirish O ni ko'raylik:

$$x'_i = O_{ij}x_j. \tag{75}$$

Ochib yozsak

$$\begin{aligned} x'_1 &= O_{11}x_1 + O_{12}x_2 + \cdots + O_{1n}x_n, \\ x'_2 &= O_{21}x_1 + O_{22}x_2 + \cdots + O_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ x'_n &= O_{n1}x_1 + O_{n2}x_2 + \cdots + O_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{76}$$

Ushbu chiziqli almashtirish vektorning kvadratini saqlasin deb talab qilaylik:

$$\mathbf{x}'^T \cdot \mathbf{x}' = x_k O^T_{ki} O_{ij} x_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}. \tag{77}$$

Bu munosabat bajarilishi uchun

$$O^T_{ki} O_{ij} = O_{ik} O_{ij} = \delta_{kj} \tag{78}$$

bo'lishi kerak. Demak, n-o'lchamli evklid fazosida $n \times n$ o'lchamli ortogonal matritsa yordamida bajarilgan chiziqli almashtirish vektorning kvadratini saqlar ekan. Koordinat o'qlarini biron burchakka burganimizda ham vektorlarning kvadratlari o'zgarmaydi, chunki vektorning kvadrati uning uzunligining kvadratiga teng. Demak, aylanish almashtirishlari ortogonal matritsalar yordamida bajarilar ekan.

(73)-shartning ma'nosi shuki, ortogonal matritsaning ustunlari o'zaro perpendikular va har birining uzunligi birga teng bo'lgan n– komponentali vektorlardan iborat. Huddi shu tasdiq ortogonal matritsaning satrlariga ham tegishli. Buni (6)-matritsa misolida ko'rish mumkin: uning har bir ustuni 2-o'lchamli uzunligi birga teng vektordir,

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix},$$

ularning o'zaro skalar ko'paytmasi nolga teng. Satrlardan tuzilgan vektorlar haqida ham huddi shuni aytishimiz mumkin.

Ortogonal matritsaning determinantini topaylik. Birinchi tomondan

$$\det(O^T O) = \det I = 1. \tag{79}$$

Ikkinchi tomondan

$$\det(O^T O) = (\det O)^2, \tag{80}$$

chunki transponirlash natijasida matritsaning determinanti o'zgarmaydi. Bu yerda matritsalar ko'paytmasining determinanti determinantlar ko'paytmasiga teng ekanligi ishlatib ketildi. Demak,

$$\det O = \pm 1. \tag{81}$$

Odatda ixtiyoriy $n \times n$ ortogonal matritsalar to'plami $O(n)$ deb belgilanadi, shu to'plamga kirgan va determinanti $+1$ ga teng bo'lgan matritsalar to'plami esa $SO(n)$ deb belgilanadi. $SO(n)$ to'plamdagi matritsalar shu bilan ajralib turadiki, ularning ichidagi ixtiyoriy ikkitasining ko'paytmasi yana $SO(n)$ to'plamning elementini beradi. Determinanti -1 bo'lgan matritsalar bunday hossaga ega emas.

3. ***Hermite qo'shma.*** Elementlari kompleks bo'lgan matritsani transponirlab kompleks qo'shmasiga o'taylik. Bunday operatsiya matritsaning hermite qo'shmasiga o'tish deyiladi:

$$A^\dagger = A^{T*}. \tag{82}$$

Bu yerda yulduzcha - kompleks qo'shmaga o'tishni bildiradi. Demak,

$$A^\dagger_{ij} = A^*_{ji}. \tag{83}$$

Agar matritsa o'zining hermite[3] qo'shmasiga teng bo'lsa

$$A^\dagger = A, \tag{84}$$

bunday matritsa hermite matritsa deyiladi.

4. ***Unitar matritsalar.*** Kompleks matritsa unitar deyiladi qachonki u uchun

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \tag{85}$$

[3]Charles Hermite (1822-1901) - fransuz matematigi.

bo'lsa. Ya'ni, unitar matritsaning hermite qo'shmasi uning teskarisiga teng:

$$U^\dagger = U^{-1}. \tag{86}$$

Matritsaning unitarligi shartini

$$u^*_{ki}u_{kj} = \delta_{ij} \qquad \text{yoki} \qquad u_{ik}u^*_{jk} = \delta_{ij} \tag{87}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin. Bu yerdan ko'rinadiki unitar matritsaning har bir ustuni uzunligi birga teng bo'lgan kompleks vektordan iborat, ikkita har xil ustunlarni tashkil qiluvchi "vektorlarning" skalar ko'paytmasi nolga teng. Ya'ni, ustunlar ortonormal sistemani hosil qiluvchi vektorlardan iborat. Huddi shularni satrlar haqida ham aytishimiz mumkin. Bu hossalar unitar va ortogonal matritsalar uchun bir xildir, faqat birinchilari kompleks matritsalardir.

1.7-mashq. Quyidagilarni isbot qiling:

$$(AB)^T = B^T A^T; \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.$$

1.8-mashq. Quyidagilarni isbot qiling:

$$\text{Agar } A \text{ va } B \text{ matritsalar} \begin{pmatrix} \text{ortogonal} \\ \text{unitar} \end{pmatrix} \text{bo'lsa } AB \text{ matritsa ham shunday bo'ladi.} \tag{88}$$

1.9-mashq. Ixtiyoriy A matritsa uchun quyidagilarni isbot qiling:

- $S = A + A^T$ - simmetrik, $B = A - A^T$ - antisimmetrik ekanligini;
- $A + A^\dagger$ va $\frac{1}{i}(A - A^\dagger)$ larning hermite matritsa ekanligini;
- $AA^\dagger$ va $A^\dagger A$ larning hermite matritsa ekanligini.

§7.2. Matritsaning izi

Matritsaning diagonal elementlarining yig'indisi uning izi deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$A_{ii} = \mathrm{Tr}(A) \tag{89}$$

yoki

$$A_{ii} = \mathrm{Sp}(A). \tag{90}$$

1.9-misol. Quyidagilarni isbot qiling:

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA),$$

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB).$$

Birinchisining isboti

$$\mathrm{Tr}(AB) = (AB)_{ii} = A_{ij}B_{ji} = B_{ji}A_{ij} = (BA)_{jj} = \mathrm{Tr}(BA).$$

Ikkinchisining isboti:

$$\mathrm{Tr}(ABC) = A_{ij}B_{jk}C_{ki} = B_{jk}C_{ki}A_{ij} = C_{ki}A_{ij}B_{jk}.$$

1.10-mashq.

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$$

ekanligini isbot qiling. Umumlashgan holda:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}a_{il}a_{jm}a_{kn}.$$

§8. Vektor-ustun va vektor-satr

Vektorlarni bir-necha yo'l bilan tasavvur qilishimiz mumkin. Birinchidan, vektorni ko'pincha biror fazodagi strelka ko'rinishida tasavvur qilinadi, bunda shu strelkaning uzunligi vektorning uzunligiga teng. Bu tasavvur fizik kuchlar va tezliklarning yo'nalishlarini, ular orasidagi burchaklarni ko'z oldiga keltirishda qulaydir.

Ikkinchidan, vektorni huddi avvalgi paragrafdagidek analitik ko'rinishda, ya'ni, indeksli kattalik sifatida tasavvur qilishimiz mumkin. Murakkab ifodalarni soddalashtirish nuqtai-nazaridan ushbu tasavvur eng qulaydir.

Uchinchi yo'l ham bor - chiziqli tenglamalar sistemasini olaylik:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2; \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{array} \tag{91}$$

Ushbu ko'rinishdagi chiziqli sistema uchta kattalik - ikkita n

komponentalik vektor-ustun

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{92}$$

va bitta $n \times n$ matritsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{93}$$

kiritish orqali quyidagi kompakt ko'rinishda yozib olinishi mumkin:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{94}$$

Bu tenglik geometrik nuqtai-nazardan quyidagini bildiradi: $\mathbf{x}$ vektor ustida biz chiziqli almashtirish bajardik, bu almashtirish A matritsa orqali ifodalanadi, bu chiziqli almashtirish natijasida $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{y}$ vektorga aylandi. Vektor-ustun tushunchasi vektorlar va matritsalarni o'z ichiga olgan ifodalarda qulaydir.

Vektorlar haqida gap ketar ekan ularning skalar ko'paytmasi bilan ham ish tutishimiz kerak. Skalar ko'paytmani korrekt ravishda kiritish uchun vektor-ustunni transponirlash natijasida olinadigan vektor-satrni ham kiritishimiz kerak:

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Bu holda ikkita vektorning skalar ko'paytmasi uchun satrni ustunga ko'paytirish qoidasi bo'yicha to'g'ri ifoda olamiz:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Agar ko'rib chiqilayotgan fazo kompleks elementlardan iborat bo'lsa skalar ko'paytma

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\dagger \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k^* y_k$$

ko'rinishda ta'riflanadi. Buning uchun chap tomondagi vektorni transponirlashdan tashqari uning har bir komponentasining kompleks qo'shmasiga o'tishimiz kerak:

$$\mathbf{x}^{\dagger} = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*).$$

Vektorlar va matritsalarni o'z ichiga olgan yana bir skalar ifoda (son) keng uchrayqi:

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\dagger} \cdot A\mathbf{y} = \sum_{i,k=1}^{n} x_i^* A_{ik} y_k.$$

Bunday ifodalarni yozganda yig'indi belgilarini tushurib qoldirish qabul qilingan: $(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = x_i^* A_{ik} y_k$. Ikki matra qaytariladigan indekslar bo'yicha yig'indi ko'zda tutiladi, ammo yozib o'tirilmaydi.

§9. Hususiy vektorlar va hususiy qiymatlar masalasi

Bizga $n \times n$ bo'lgan A matritsa berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik shu matritsa ta'sir qilayotgan n-o'lchamli fazoda shunday $\mathbf{x}$ vektor va λ sonlar topilsinki ular uchun

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{95}$$

munosabat bajarilsin. Bu holda λ son A matritsaning ***hususiy qiymati*** yoki ***soni*** va vektor $\mathbf{x}$ matritsaning shu hususiy songa mos keluvchi ***hususiy vektori*** deyiladi. Ba'zi-bir hollarda λ xarakteristik son ham deyiladi.

Hususiy qiymat va hususiy vektorlarni topishga o'taylik. Buning uchun (95)-formulani quyidagicha yozib olaylik:

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0. \tag{96}$$

λ sonidan keyin paydo bo'lgan I birlik matritsani bildiradi. Cramer[4] teoremasi bo'yicha bu tenglama yechimga ega bo'lishi uchun

$$\det \left| A - \lambda I \right| = 0 \tag{97}$$

[4]Gabriel Cramer (1704 - 1752) - shveytsar matematigi.

bo'lishi kerak. Bu esa bizga λ uchun n-tartibli tenglamani beradi. Algebraning asosiy teoremasi bo'yicha uning n ta yechimi bor. Demak, A matritsaning n ta hususiy qiymatlari bor ekan. Shuni hisobga olib (95)-tenglamani

$$A\mathbf{x}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{x}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{98}$$

ko'rinishda yozib olamiz. $\mathbf{x}^{(i)}$ vektor A matritsaning λ_i hususiy soniga mos keluvchi hususiy vektoridir. Hususiy qiymatlar oddiy va karrali bo'lishi mumkin. Biror hususiy son λ_i ga n_i ta hususiy vektorlar mos kelsa shu hususiy sonning karraligi n_i bo'ladi. Kvant mexanikasida bunday hol n_i karrali aynish deyiladi[5]. Matritsaning hususiy qiymatlari to'plami - $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ - shu matritsaning ***spektri*** deyiladi.

1.10-misol. Agar T - unitar matritsa bo'lsa A va $TAT^\dagger$ larning spektrlari bir hildir. Buning isboti quyidagi sodda munosabatdan kelib chiqadi:

$$\det\left|TAT^{-1} - \lambda I\right| = \det\left|A - \lambda I\right|.$$

Hermite matritsalarning eng muhim hossasiga kelaylik.

Теорема I.3 *Hermite matritsaning hususiy qiymatlari - haqiqiy sonlardir. Har xil hususiy qiymatga mos keluvchi hususiy vektorlar o'zaro ortogonaldir.*

Isbot. i-nchi va j-nchi hususiy qiymatlarga va hususiy vektorlarga mos keluvchi tenglamalarni yozib olaylik:

$$A\mathbf{x}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{x}^{(i)}, \qquad A\mathbf{x}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{x}^{(j)}. \tag{99}$$

Bu yerda $\mathbf{x}^{(i)}$ - λ_i hususiy qiymatga mos keluvchi hususiy vektor, $\mathbf{x}^{(j)}$ esa - λ_j hususiy qiymatga mos keluvchi hususiy vektor. Shu tenglamalardan ikkinchisining hermite qo'shmasiga o'taylik:

$$\mathbf{x}^{(j)\dagger} A^\dagger = \lambda_j^* \mathbf{x}^{(j)\dagger}. \tag{100}$$

Bu tenglamadagi $\mathbf{x}_j^\dagger$ ni qanday ma'noda tushunish kerak? Odatda vektor deyilganda, ayniqsa matritsalar kirgan chiziqli tenglamalar

[5] Hamilton operatorining bitta hususiy qiymati E_i ga n_i ta to'lqin funksiya mos kelishi mumkin, bunday hususiy qiymat n_i karrali aynigan deyiladi.

haqida gap ketganda, vektor-ustun ko'zda tutiladi:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (101)$$

Bu ustunni chap tomondan matritsaga ko'paytirsak ((99)-tenglamadalargidek) yana ustun, demak vektor, olamiz. Ammo ustunni chap tomondan matritsaga ko'paytirib bo'lmaydi, matritsalarning ko'paytirish qoidasiga matritsani chap tomondan satrga ko'paytirish mos keladi. (100)-tenglamada huddi shunday operatsiya ko'zda tutilgan, chunki hermite qo'shmaga transponirlash kiradi - ustunni transponirlasak u satrga aylanadi:

$$\mathrm{x}^\dagger = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*). \qquad (102)$$

Masalan, vektorning o'z-o'ziga skalar ko'paytmasi:

$$(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \mathrm{x}^\dagger \cdot \mathrm{x} = x_1^* x_1 + x_2^* x_2 + \cdots + x_n^* x_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2. \qquad (103)$$

Ya'ni, (99)- va (100)- tenglamalarda chap va o'ng tomonlarda bir xil tabiatli kattaliklar kirgan - (99)-da chap va o'ng tomonlarda ustunlarga egamiz, (100)-da esa ikkala tomonda satrlarga egamiz.

(99)-ning birinchisini chapdan $\mathrm{x}^{(j)\dagger}$ ga ko'paytiraylik, (100) ni esa o'ng tomondan $\mathrm{x}^{(i)}$ ga ko'paytiraylik:

$$\mathrm{x}^{(j)\dagger} A \mathrm{x}^{(i)} = \lambda_i \mathrm{x}^{(j)\dagger} \mathrm{x}^{(i)}, \qquad \mathrm{x}^{(j)\dagger} A^\dagger \mathrm{x}^{(i)} = \lambda_j^* \mathrm{x}^{(j)\dagger} \mathrm{x}^{(i)}$$

Matritsa A hermite bo'lgani uchun $A^\dagger = A$ ikkinchi tenglamaning chap tomoni birinchi tenglamaning chap tomoniga teng bo'ladi -

$$\mathrm{x}^{(j)\dagger} A^\dagger x^{(i)} = \mathrm{x}^{(j)\dagger} A x^{(i)}.$$

Shuni hisobga olib birinchi tenglamadan ikkinchisini ayirib tashlasak

$$(\lambda_i - \lambda_j^*) \mathrm{x}^{(j)\dagger} \mathrm{x}^{(i)} = 0 \qquad (104)$$

tenglikka kelamiz. Bu yerda ikkita variant bor.

Birinchidan, $i \neq j$, bu esa $\lambda_i \neq \lambda_j^*$ degani, demak

$$\mathbf{x}^{(j)\dagger}\mathbf{x}^{(i)} = 0.$$

Ya'ni, ikkita har xil hususiy qiymatlarga mos keluvchi hususiy vektorlar o'zaro ortogonal ekan.

Ikkinchi variant - $i = j$. Bu holda

$$\mathbf{x}^{(i)\dagger}\mathbf{x}^{(i)} = |\mathbf{x}^{(i)}|^2 > 0.$$

(104)-ning chap tomoni nolga teng bo'lishi uchun

$$\lambda_i = \lambda_i^*$$

bo'lishi kerak, ya'ni, hususiy qiymatlar haqiqiy bo'lishi kerak. Teorema isbot qilindi.

1.11-misol. Quyidagi matritsaning hususiy qiymatlari va hususiy vektorlarini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yangi matritsa tuzamiz:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Uning determinantini nolga tenglashtirish kerak:

$$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0.$$

Bu tenglamaning uchta yechimi bor:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0.$$

A matritsaning hususiy qiymatlarini topildi. Hususiy vektorlarga o'taylik.

$\lambda_1 = -1$ *hol.*

Bu holda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tenglamaga egamiz. Komponentalar tilida:

$$x = -y, \qquad y = -x, \qquad z = 0.$$

Demak, birinchi hususiy vektor

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega ekan. Bu vektorning normasini birga tenglashtirishimiz kerak: $\mathbf{x}^{(1)\dagger}\mathbf{x}^{(1)} = 2x^2 = 1$, buning uchun esa $x = 1/\sqrt{2}$ bo'lishi kerak ($x = -1/\sqrt{2}$ holning tahlili misolning ohirida berilgan). Natija:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 1$ *hol.*
Bu holda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tenglamaga kelinadi. Uni ochib yozaylik:

$$x = y, \qquad y = x, \qquad z = 0.$$

Ikkinchi husussiy vektor

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega ekan. Uning normasini birga tenglashtirsak

$$||\mathbf{x}^{(2)}|| = 2x^2 = 1$$

$x = 1/\sqrt{2}$ ekanligini topamiz. Natijaviy ifoda:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_3 = 0$ *hol.*
Bu holda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Algebraik ko'rinishda

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z - \text{ixtiyoriy}.$$

Demak, yechim sifatida

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

olinishi mumkin. Vektorning normasini birga tenglashtirsak $z = 1$ bo'ladi. Natijada $\lambda = 0$ hususiy qiymatga

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektor mos kelishi topdildi.

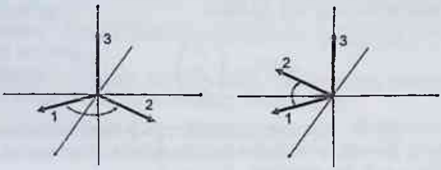
Ko'rinib turibdiki topilgan vektorlar o'zaro ortogonal to'plamni tashkil qiladi:

$$(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0, \qquad (\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}) = 0, \qquad (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(3)}) = 0. \tag{105}$$

Har bir vektorning normasini birga tenglashtirib olganimiz uchun bu ortogonal sistema ortonormal sistemadir:

$$(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{106}$$

Shu bilan uchta o'zaro ortogonal va uzunligi birga teng bo'lgan ortlar topildi. Vektorlarni normaga keltirish jarayonida har gal $\pm$ ishoralardan



I.2-rasm: o'ng-qo'l va chap-qo'l bazis

plyusini tanlab oldik. Ishoraning minusini ham tanlab olishimiz mumkin edi, hosil bo'lgan sistema bari-bir ortonormalligicha qolaverar edi. Masalan, ikkinchi ortni

$$\mathbf{x}^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{107}$$

ko'rinishda olishimiz mumkin, bu ort bari-bir A matritsaning hususiy vektori bo'lib qolaveradi, ammo, hosil bo'lgan ortlar sistemasi o'ng-qo'l sistemasini emas, balki chap-qo'l sistemasini hosil qiladi. Bu vaziyat (I.2)-rasmda ko'rsatilgan. Birinchi va ikkinchi ortlar (x, y) tekisligida joylashgan, uchinchi ort - z o'qi bo'yicha yo'nalgan. Xuddi shunday boshqa ortlarning ishorasini ham o'zgartirishimiz mumkin, bu bazis ortlarning yo'nalishlarini har xil qilib tanlab olishga teng. Qaysi ishorani tanlash yechilyapgan masalaning mohiyatiga mos kelishi nuqtai-nazaridan hal qilinishi kerak.

1.12-misol. Karrali hususiy qiymatga misol.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{108}$$

matritsaning hususiy sonlari:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 1. \tag{109}$$

Hususiy qiymatlar karrali bo'lib chiqdi: $\lambda_2 = \lambda_3$. Agar $\lambda_1 = -1$ ga

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{110}$$

hususiy vektor mos kelsa, $\lambda_{2,3} = 1$ ga bitta

$$\mathbf{x}^{(2,3)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \tag{111}$$

hususiy vektor mos keladi. Masalaning o'zida x va y larni tanlashga imkoniyat beradigan iloj yo'q, demak, qo'shimcha mulohazalardan foydalanishimiz kerak. Birinchi qadamda $x = 0$ deb olamiz:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{112}$$

Ikkinchi variant uchun $y = 0$ holni tanlaymiz:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{113}$$

Olingan vektorlarning hammasi o'zaro ortogonal va uzunligi birga teng. Ya'ni, ma'lum bir ortonormal bazisni tanlab oldik. Boshqa variantlar ham bor edi. Agar (111)-ga qarasak bu vektor shunday tekislik ustida yotibdiki, u tekislik (y, z) o'qlari hosil qilgan to'g'ri burchakning diagonali bo'yicha o'tgan, (y, z) tekisligiga perpendikular va x o'qi uning ustida yotadi. $\mathbf{x}^{(1)}$ vektor esa shu tekislikka perpendikular. (111)-ifodada x va y larning ixtiyoriy tanloviga shu tekislikda yotgan va $\mathbf{x}^{(1)}$ ga ortogonal bo'lgan bir vektor mos keladi, x va y larning boshqa tanloviga shu tekislikda yotgan boshqa vektor mos keladi. Bizning tanlov - mumkin bo'lgan bitta hususiy variant. Biror masala yechilganda shunday vaziyat tug'ilsa o'sha masalaning konkret hususiyatlariga mos keluvchi variantni tanlash kerak.

2 **1.11-mashq.** Pauli matritsalari berilgan bo'lsin:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (114)$$

a) Har bir matritsaning hususiy qiymatlari va hususiy vektorlarini toping. Ularni birlik normaga keltiring;

b) Birlik vektor olamiz $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta.)$ Shu vektor uchun $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ skalar ko'paytmaga mos keluvchi matritsani toping;

c) $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ matritsaning hususiy qiymatlarini toping va uning hususiy vektorlari

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

bo'lishini ko'rsating. Agar $\theta = 0$ va $\phi = 0$ bo'lsa ushbu vektorlar yuqoridagi σ_z ning vektorlari bilan ustma-ust tushushini ko'rsating. $\theta = \pi/2$ va $\phi = 0$ bo'lganda natija σ_x ga mos kelishini ko'rsating. $\theta = \pi/2$ va $\phi = \pi/2$ holda esa σ_y uchun natijalarga kelinishini ko'rsating.

1.12-mashq. Unitar matritsaning determinanti $e^{i\alpha}$; $\alpha-$ haqiqiy son, bo'lishini ko'rsating.

1.13-mashq. Unitar matritsaning hususiy qiymatlari $e^{i\alpha}$, $\alpha-$ haqiqiy son, bo'lishini ko'rsating.

1.14-mashq. Haqiqiy antisimmetrik matritsaning hususiy qiymatlari mavhum yoki nolga tengligini ko'rsating. Misol sifatida

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsani ko'ring.

§10. Matritsani diagonal ko'rinishga keltirish

§10.1. Umumiy muloxazalar

Uch o'lchamli misoldan boshlaylik. Bizga ixtiyoriy hermite matritsa A berilgan bo'lsin. Shunday bir matritsa T tuzaylikki, uning ustunlari A matritsaning hususiy vektorlaridan tashkil topgan bo'lsin:

$$T = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} \end{pmatrix}. \qquad (115)$$

Bu matritsaning hermite qo'shmasi

$$T^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)\dagger} \\ \mathbf{x}^{(2)\dagger} \\ \mathbf{x}^{(3)\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)*} & x_2^{(1)*} & x_3^{(1)*} \\ x_1^{(2)*} & x_2^{(2)*} & x_3^{(2)*} \\ x_1^{(3)*} & x_2^{(3)*} & x_3^{(3)*} \end{pmatrix}. \tag{116}$$

Tekshirish qiyin emaski

$$T^\dagger A T = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)\dagger} \\ \mathbf{x}^{(2)\dagger} \\ \mathbf{x}^{(3)\dagger} \end{pmatrix} A\,(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)\dagger} \\ \mathbf{x}^{(2)\dagger} \\ \mathbf{x}^{(3)\dagger} \end{pmatrix} (\lambda_1 \mathbf{x}^{(1)}, \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)}, \lambda_3 \mathbf{x}^{(3)}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{117}$$

Umumiy holda ixtiyoriy $n \times n$ matritsa A uchun diagonal ko'rinishga keltirishni quyidagicha ta'riflashimiz mumkin. A ning hususiy vektorlaridan

$$T = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \cdots, \mathbf{x}^{(n)}) \tag{118}$$

matritsa va uning hermite qo'shmasi

$$T^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)\dagger} \\ \mathbf{x}^{(2)\dagger} \\ \cdots \\ \mathbf{x}^{(n)\dagger} \end{pmatrix} \tag{119}$$

larni tuzamiz. Ular yordamida A matritsani diagonal ko'rinishga keltiramiz:

$$T^\dagger A T = D_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{120}$$

Ko'rish qiyin emaski

$$T^\dagger T = I, \tag{121}$$

ya'ni, T matritsa unitar matritsa: $T^\dagger = T^{-1}$. Demak, A hermite matritsa unitar almashtirish yordamida diagonal ko'rinishga keltirilar ekan:

$$D_A = T^{-1}AT. \qquad (122)$$

Biz bilamizki

$$\det\left(T^{-1}AT\right) = \det A, \qquad \mathrm{Tr}\left(T^{-1}AT\right) = \mathrm{Tr}\,A. \qquad (123)$$

Bundan ikkita muhim hulosa kelib chiqadi:

1. $\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

2. $\mathrm{Tr}\,A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Birinchi hulosadan yana bitta hulosa keltirib chiqarish mumkin - agar A matritsa aynigan bo'lsa ($\det A = 0$) uning hech bo'lmaganda bitta hususiy qiymati nolga teng bo'lishi kerak.

§10.2. Ikkita matritsani bir vaqtda diagonal ko'rinishga keltirish

Теорема I.4 *Bizga o'zaro kommutativ bo'lgan A va B matritsalar berilgan bo'lsin:*

$$AB = BA. \qquad (124)$$

Bu holda ularning hususiy vektorlari to'plami bir bo'ladi.

Isbot. $\mathbf{x}$ vektor A ning bir hususiy vektori bo'lsin:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \qquad (125)$$

Bu holda

$$A(B\mathbf{x}) = BA\mathbf{x} = \lambda(B\mathbf{x}). \qquad (126)$$

Ya'ni, $B\mathbf{x}$ vektor A matritsaning huddi o'sha λ hususiy qiymatiga mos keluvchi yana bir hususiy vektori ekan, u $\mathbf{x}$ dan faqat o'zining uzunligi bilan farq qilishi mumkin:

$$B\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}. \qquad (127)$$

Demak, A ning hususiy vektori B ning ham hususiy vektori bo'lar ekan va teskarisi. Bundan teoremaning tasdiqi darhol kelib chiqadi.

Теорема I.5 *A va B matritsalarning kommutativligi ularni bir vaqtda diagonal ko'rinishga keltirilishining yetarli va zaruriy shartidir.*

Isbot.

Yetarlilik sharti. A va B matritsalarning hususiy vektorlari to'plami bir xil bo'lgani uchun mana shu hususiy vektorlardan yuqoridagi (115)-qoida bo'yicha bitta T matritsa tuzaylik. Bu matritsa A ni ham, B ni ham bir vaqtda diagonal ko'rinishga keltiradi.

Zaruriylik sharti. Faraz qilaylik

$$D_A = T^{-1}AT, \qquad D_B = T^{-1}BT \tag{128}$$

diagonal matritsalar bo'lsin. Bu yerda T - A (demak, B) matritsaning hususiy vektorlaridan (115)-qoida bo'yicha tuzilgan unitar matritsa. Bu degani

$$\begin{aligned} AB - BA &= TD_AT^{-1}TD_BT^{-1} - TD_BT^{-1}TD_AT^{-1} = \\ &= T(D_AD_B - D_BD_A)T^{-1} = 0, \end{aligned} \tag{129}$$

chunki diagonal matritsalar hamma vaqt kommutativ bo'ladi.

§10.3. Normal matritsalar

O'zining hermite qo'shmasi bilan kommutativ bo'lgan matritsa ***normal matritsa*** deyiladi:

$$NN^\dagger = N^\dagger N. \tag{130}$$

Normal matritsani quyidagi ko'rinishda tasavvur qilishimiz mumkin:

$$N = A + iB, \tag{131}$$

bu yerda A va B matritsalar hermite va kommutataiv bo'lishi kerak. Darhaqiqat,

$$NN^\dagger = (A+iB)(A^\dagger - iB^\dagger) = AA^\dagger + BB^\dagger + i(BA^\dagger - AB^\dagger) \tag{132}$$

va

$$N^\dagger N = (A^\dagger - iB^\dagger)(A+iB) = A^\dagger A + B^\dagger B + i(A^\dagger B - B^\dagger A) \tag{133}$$

ifodalar bir biriga teng bo'lishi uchun $A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$, $AB = BA$ bo'lishi kerak.

Ikkita o'zaro kommutativ matritsani bir vaqtda diagonal ko'rinishga keltirish mumkinligidan quyidagi tasdiq kelib chiqadi:

Теорема I.6 *Normal matritsa diagonal ko'rinishga keltiriladi.*

1.15-mashq. Ixtiyoriy $n \times n$ o'lchamli A matritsa uchun

$$\det e^{A} = e^{\mathrm{Tr}\, A} \tag{134}$$

ayniyatni isbot qiling: a) (123)-formulalardan foydalanib (diagonal ko'rinishga keltiriladi deb faraz qilib); b) umumiy holda.

1.16-mashq. Quyidagi matritsalarning hususiy qiymatlari va hususiy vektorlarini toping, ularni diagonal ko'rinishga keltiring:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§11. Gram-Schmidt metodi

Bizga biror C fazodagi chiziqli bog'liq bo'lmagan funksiyalar to'liq sistemasi berilgan bo'lsin: $\{\varphi_n\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots\}$.

Теорема I.7 *Ixtiyoriy chiziqli bog'liq bo'lmagan to'liq sistema $\{\varphi_n, n = 0, 1, 2, 3, ...\}$ ni ortonormal sistema $\{\psi_n, n = 1, 2, 3, ...\}$ ga aylantirish mumkin. Yangi sistemaga kirgan funksiyalar ψ_n eski funksiya φ_n larning chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.*

Isbot. Ushbu ish qadamma-qadam bajariladi. Birinchi qadamda quyidagi yangi funksiya kiritamiz:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{||\varphi_0||}\varphi_0(x), \qquad ||\varphi_0|| \neq 0. \tag{135}$$

Ko'rinib turibdiki, bu funksiyaning normasi birga teng: $||\psi_0|| = 1$. Ikkinchi qadamda

$$\bar{\psi}_1(x) = \varphi_1(x) - \alpha_{10}\psi_0(x) \tag{136}$$

funksiya kiritamiz. Biz uni ψ_0 ga ortogonal qilib olishimiz kerak, buning uchun

$$(\bar{\psi}_1, \psi_0) = 0 = (\varphi_1, \psi_0) - \alpha_{10} \tag{137}$$

shartdan noma'lum α ni topib olamiz:

$$\alpha_{10} = (\varphi_1, \psi_0). \tag{138}$$

Demak,

$$\tilde{\psi}_1 = \varphi_1(x) - (\varphi_1, \psi_0)\psi_0(x). \tag{139}$$

Topilgan $\tilde{\psi}_1$ aynan nolga teng bo'la olmaydi, bu holda φ_1 funksiya φ_0 funksiya orqali ifodalangan bo'lib qolar edi, bu esa teorema shartlariga zid. Olingan funksiyaning normasini birga tenglashtirish qoldi:

$$\psi_1 = \frac{1}{||\tilde{\psi}_1||}\tilde{\psi}_1. \tag{140}$$

Yangi sistemamaizning ikkita elementini topdik - ψ_0, ψ_1. Ular o'zaro ortogonal va har birining normasi birga teng.

Davom ettiramiz. Yangi to'plamning uchinchi elementini kiritamishni boshlaylik:

$$\tilde{\psi}_2(x) = \varphi_2(x) - \alpha_{20}\psi_0 - \alpha_{21}\psi_1. \tag{141}$$

Bu element topilgan ψ_0, ψ_1 larga ortogonal bo'lishi kerak:

$$(\tilde{\psi}_2, \psi_0) = (\varphi_2, \psi_0) - \alpha_{20} = 0; \qquad (\tilde{\psi}_2, \psi_1) = (\varphi_2, \psi_1) - \alpha_{21} = 0. \tag{142}$$

ushbu ikkita shart bizga ikkita noma'lum alfalarni beradi:

$$\alpha_{20} = (\varphi_2, \psi_0); \qquad \alpha_{21} = (\varphi_2, \psi_1). \tag{143}$$

Demak,

$$\tilde{\psi}_2 = \varphi_2(x) - (\varphi_2, \psi_0)\psi_0 - (\varphi_2, \psi_1)\psi_1. \tag{144}$$

Topilgan elementning normasini birga keltiraylik:

$$\psi_2 = \frac{1}{||\tilde{\psi}_2||}\tilde{\psi}_2. \tag{145}$$

Shu etapda jarayonni umumlashtirishimiz mumkin. Agar $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_{n-1}$ funksiyalar topilgan bo'lsa

$$\tilde{\psi}_n = \varphi_n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk}\psi_k, \qquad \alpha_{nk} = (\varphi_n, \psi_k), \tag{146}$$

formula asosida yangi funksiya olamiz va uning normasini birga tenglashtirib

$$\psi_n(x) = \frac{1}{||\tilde{\psi}_n||}\tilde{\psi}_n \tag{147}$$

yangi sistemaning n-chi elementini ham topamiz. ***Gram-Schmidt*** [6] ***metodi*** deb atalgan bu metod bizga $\{\psi_n, n = 0, 1, 2, ...\}$ koʻrinishdagi ortonormal sistemani beradi:

$$(\psi_n, \psi_m) = \delta_{mn}. \tag{148}$$

Metodni umumlashtirishimiz mumkin. G fazoda skalar koʻpaytma $\rho(x)$ vazn bilan berilgan boʻlsin:

$$(f, g)_\rho = \int_a^b dx\rho(x)f(x)g(x). \tag{149}$$

1.17-mashq. Quyidagi chiziqli bogʻliq boʻlmagan monomlar sistemasi berilgan boʻlsin:

$$\varphi_n(x) = x^n, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{150}$$

Ushbu sistemani yuqoridagi metod boʻyicha

1. $(-1, 1)$ intervalda $\rho = 1$ vazn bilan Legandre polinimlariga keltiring;
2. $(-\infty, \infty)$ intervalda $\rho(x) = \exp(-x^2)$ vazn bilan Hermite polinomlariga keltiring.

[6] Jorgen Pedersen Gram (1850 - 1916) - daniyalik matematik; Erhard Schmidt (1876 - 1959) - nemis matematigi.

II-BOB.

DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING ANALITIK NAZARIYASI

§1. Differensial tenglamaning to‘g‘ri va maxsus nuqtalari

Nazariy fizikada quyidagi ko‘rinishdagi ikkinchi tartibli differensial tenglama ko‘p uchraydi:

$$u''(z) + p(z)u'(z) + q(z)u(z) = 0. \qquad (1)$$

Fizikada uchraydigan funksiyalarning analitik hossalari ko‘rilayapgan masalaning fizikaviy hossalarining aksidir. Yechimning analitik hossasi esa tenglamaning mahsus nuqtalariga bevosita bog‘liq bo‘ladi. ko‘pincha shunday hollar uchrab turadiki, tenglamaning butun tekislikdagi aniq yechimini topish mumkin emas (yoki u kerak emas). Bu holda biz o‘zimizga qiziq bo‘lgan nuqta atrofida yechimni qidirib ko‘rishimiz mumkin. Ushbu bob yuqoridagi tenglamaning yechimini ixtiyoriy nuqta atrofida qidirishga bag‘ishlangan.

Yechimni nuqta atrofida qidirar ekanmiz biz uni qator sifatida qidiramiz. Agar biron-bir $z = a$ nuqtada yechimni yaqinlashuvchi Taylor qatoriga yoya olsak bu nuqta ***oddiy***, yoki, ***to‘gri nuqta*** deyiladi. Buning uchun quyidagi shart bajarilishi kerak. (1)-tenglamadan biz $u''(z)$ ni topa olamiz:

$$u''(z) = -p(z)u'(z) - q(z)u(z). \qquad (2)$$

Taylor qatoriga yoyish uchun bizga $u''(a)$ kerak, buning uchun esa ixtiyoriy $u(a)$ va $u'(a)$ lar uchun (2)-ning o‘ng tomoni mavjud bo‘lishi kerak. Boshqa so‘z bilan $p(a)$ va $q(a)$ lar cheklangan bo‘lishi kerak. Taylor qatorini qurish uchun kerak bo‘lgan yuqori hosila ($u'''(a)$ va h.k.) larni hisoblay boshlasak $p(z)$ va $q(z)$ larning ham yuqori hosilalari mana shu $z = a$ nuqtada mavjud bo‘lishlari kerakligi kelib chiqadi. Demak, $z = a$ nuqta ***to‘g‘ri nuqta*** bo‘lishi uchun $p(z)$ va $q(z)$ funksiyalar shu nuqtada analitik (golomorf) bo'lishi zaruriy ekan. Shu shart bir vaqtda yetarli bo'lishini keyingi paragrafda ko'rsatamiz.

Yuqoridagi muloxazalardan tushunarliki, $p(z)$ va $q(z)$ funksiyalar uchun $z = a$ nuqta maxsus nuqta bo'lib qolsa biz $u(z)$ funksiyamizni Taylor qatoriga yoya olmaymiz. Masalan,

$$u'' + \frac{1}{z}u'(z) + \frac{1}{z^2}u(z) = 0. \qquad (3)$$

Bu misolda $z = 0$ nuqta $p(z)$ va $q(z)$ funksiyalar uchun qutb nuqtadir. Agar $u(0)$ va $u'(0)$ yetarli darajadagi yuqori tartibli nol bo'lmasa $u''(0)$ mavjud bo'lmaydi va yechim uchun $z = 0$ nuqtada Taylor qatorini hosil qila olmaymiz. Demak, bu misolda $z = 0$ nuqta - maxsus nuqta. Bu holda Taylor qatorining o'rniga Laurent qatori paydo bo'lishi aniqdir. Undan tashqari, tenglamaning ikkita yechimining o'rniga bitta yechimgina mavjud bo'lishi mumkin. Quyida mana shu masalalar ko'rib chiqilgan.

Terminologiyaga to'htalib ketaylik. Odatda differensial-lanuvchilik, golomorflik va analitiklik tushunchalarining farqiga borilmaydi, ular aynan tushunchalar deb qaraladi. Rostdan ham, funksiya birqiymatli va u berilgan soha bir bog'lamli bo'lganda bu uchala tushuncha bir-biriga ekvivalentdir. Lekin bu tushunchalarning har birining o'z ta'rifi bor, ularni keltirib ketaylik:

1. Funksiya $f(z)$ o'zining aniqlanish sohasidagi $z = a$ nuqtada ***differensiallanuvchi*** deyiladi qachonki bu funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari shu nuqtada birinchi tartibli hususiy hosilalarga ega bo'lsa va ular Cauchy-Riemann shartlariga bo'ysunsa;

2. Funksiya $f(z)$ o'zining aniqlanish sohasidagi $z = a$ nuqtada ***golomorf*** deyiladi qachonki u shu nuqtada quyidagi qator ko'rinishida tasavvurlansa: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

3. Funksiya $f(z)$ o'zining aniqlanish sohasi G da ***analitik*** deyiladi qachonki shu funksiyaning $z_0 \in G$ nuqtadan $z_1 \in G$ nuqtaga analitik davomi shu nuqtalarni bog'lovchi konturga bog'liq bo'lmasa.

Cauchyning integral teoremasidan kelib chiqadiki sohada differensiallanuvchi funksiya shu sohada cheksiz marta differensiallanuvchi funksiya bo'ladi. Abelning qatorlar haqidagi teoremasidan kelib chiqadiki $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ cheksiz qator o'zining yaqinlashish sohasida tekis yaqinlashadi va bu qator $f(z)$ funksiyasining Taylor qatori bo'ladi: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)(z-a)^n/n!$ Demak, biror sohada berilgan differensiallanuvchi funksiya shu sohada golomorf bo'ladi va teskarisi.

Analitiklik tushunchasi Weierstrass[1] tomonidan kiritilgan. Monodromiya teoremasi bo'yicha golomorf funksiyalarning analitik davomi (ularning bir qiymatli aniqlanish sohasida, va bu soha bir bog'lamli bo'lganda, albatta) faqat boshlang'ich va ohirgi nuqtalarga bog'liq va bu nuqtalarni bo'glovchi konturga bog'liq emas. Demak, golomorf funksiya analitikdir, differensiallanuvchi funksiya golomorf bo'lgani uchun u ham analitik funksiyalar qatoriga mansubdir. Shu sababdan biz ham differensiallanuvchi va golomorf funksiyalarni analitik deb atab ketaveramiz.

Yana bir qaytaramiz, bu tasdiqlar $f(z)$ funksiyaning bir bog'lamli va bir qiymatli sohasiga tegishli.

§2. to'g'ri nuqta atrofidagi yechim

Yechimni tenglamaning to'g'ri nuqtasi atrofida qidirishdan boshlaylik. Agar $z = a$ nuqta atrofida $p(z)$ va $q(z)$ funksiyalar o'zining Taylor qatoriga yoyilsa:

$$\begin{aligned} p(z) &= p_0 + p'(a)(z-a) + \tfrac{1}{2}p''(a)(z-a)^2 + \cdots ; \\ q(z) &= q_0 + q'(a)(z-a) + \tfrac{1}{2}q''(a)(z-a)^2 + \cdots , \end{aligned} \tag{4}$$

ya'ni, ular golomorf funksiyalar bo'lsa, ushbu $z = a$ nuqta (1)-tenglamaning to'g'ri nuqtasi bo'lishini ko'rsataylik. Maqsadimiz, bu holda ushbu nuqta atrofida quyidagi ko'rinishdagi ikkita

[1]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) - nemis matematigi

mustaqil golomorf yechim mavjud bo'lishini ko'rsatish:

$$u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots \qquad (5)$$

Tasdiqni isbot qilish uchun (5)-qatorni bir va ikki marta differensiallab (1)-tenglamaga olib borib qo'yamiz. Birinchi hosila:

$$u'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n n(z-a)^{n-1}=c_1+2c_2(z-a)+3c_3(z-a)^2+\cdots$$

Ikkinchi hosila:

$$u''(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n n(n-1)(z-a)^{n-2}=2c_2+6c_3(z-a)+12c_4(z-a)^2+\cdots$$

Natijalarni (1)-tenglamaga olib borib qo'yaylik:

$$2c_2+6c_3(z-a)+12c_4(z-a)^2+\cdots+$$

$$+(p_0+p'(a)(z-a)+\tfrac{1}{2}p''(a)(z-a)^2+\cdots)(c_1+2c_2(z-a)+$$

$$+3c_3(z-a)^2+\cdots)+(q_0+q'(a)(z-a)+\tfrac{1}{2}q''(a)(z-a)^2+\cdots)\cdot$$

$$\cdot(c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots)=0.$$

Endi $(z-a)$ ning nolinchi, birinchi, ikkinchi va h.k.-nchi darajalari oldidagi koeffisientlarni nolga tenglashtiramiz:

$$2c_2+p_0c_1+q_0c_0=0;$$

$$6c_3+2p_0c_2+p'(a)c_1+q_0c_1+q'(a)c_0=0;$$

$$12c_4+3c_3p(a)+2c_2p'(a)+\tfrac{1}{2}c_1p''(a)+c_2q(a)+c_1q'(a)+\tfrac{1}{2}q''(a)c_0=0;$$

va h.k. Bu munosabatlarni yechib $c_2, c_3, c_4, \cdots$ larni ikkita noma'lum c_0 va c_1 orqali ifodalash mumkin. Natijada yechim - (5)-qator - quyidagi ko'rinishga keladi:

$$u(z)=c_0u_1(z)+c_1u_2(z),$$

bu yerda

$$u_1(z) = 1 - \frac{1}{2}(z-a)^2 q(a) + \frac{1}{6}\left(p(a)q(a) - q'(a)\right)(z-a)^3 + \cdots;$$

$$u_2(z) = (z-a) - \frac{1}{2}p(a)(z-a)^2 + \frac{1}{6}\left(p^2(a) - p'(a) - q(a)\right)(z-a)^3 + \cdots.$$

Ko'rinib turibdiki,

$$u_1(a) = 1, \quad u_2(a) = 0, \quad u_1'(a) = 0, \quad u_2'(a) = 1.$$

Agar Cauchy[2] shartlarini

$$u(a) = A \qquad \text{va} \qquad u'(a) = B \tag{6}$$

deb belgilasak yechim

$$u(z) = Au_1(z) + Bu_2(z) \tag{7}$$

ko'rinishni oladi. $\{u_1, u_2\}$ funksiyalar sistemasi yechimlarning ***fundamental sistemasi*** deyiladi.

2.1-misol.

$$(1-z^2)u'' - 2zu' + \frac{3}{4}u = 0 \tag{8}$$

tenglamaning $z = 0$ nuqta atrofidagi yechimlari asosiy sistemasini toping.

Ko'rinib turibdiki, $z = 0$ nuqta bu tenglama uchun to'g'ri nuqta:

$$\begin{aligned} p(z) &= -2\frac{z}{1-z^2} = -2z - 2z^3 - 2z^5 - \cdots; \\ q(z) &= \frac{3}{4}\frac{1}{1-z^2} = \frac{3}{4}(1 + z^2 + z^4 + \cdots). \end{aligned} \tag{9}$$

Shu sababdan yechimni

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{10}$$

ko'rinishda qidiramiz. Hosilalarni topaylik:

$$u'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_2 z^2 + \cdots; \qquad u''(z) = 2c_2 + 6c_3 z + 12c_4 z^2 + \cdots \tag{11}$$

Topilganlarni tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$(1-z^2)(2c_2 + 6c_3 z + 12c_4 z^2 + 20c_5 z^3 + \cdots) - 2z(c_1 + 2c_2 z + 3c_2 z^2 + \cdots) +$$

$$+\frac{3}{4}(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots) = 0. \tag{12}$$

[2]Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) - fransuz matematigi

z ning bir hil darajalari oldidagi koeffisientlarni nolga tenglashtiramiz:

$$
\begin{aligned}
&2c_2 + \frac{3}{4}c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{3}{8}c_0; \\
&6c_3 - 2c_1 + \frac{3}{4}c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{5}{24}c_1; \\
&12c_4 - 2c_2 - 6c_2 + \frac{3}{4}c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_4 = -\frac{21}{128}c_0; \\
&20c_4 - 6c_3 - 6c_3 + \frac{3}{4}c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_5 = \frac{15}{128}c_1;
\end{aligned} \tag{13}
$$

va h.k. Demak,

$$u_1(z) = 1 - \frac{3}{8}z^2 - \frac{21}{128}z^4 + \cdots; \quad u_2(z) = z + \frac{5}{24}z^3 + \frac{15}{128}z^5 + \cdots \tag{14}$$

2.2-misol.

$$(z-2)(z-3)u'' - (2z-5)u' + 2u = 0$$

tenglamaning $z = 0$ nuqta atrofidagi yechimini toping.

Yechimni

$$u(z) = \sum_{n=0} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 + z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

ko'rinishda qidiramiz. Rekurrent munosabat:

$$c_{n+2} = \frac{5(n-1)}{6(n+2)}c_{n+1} - \frac{(n-1)(n-2)}{6(n+1)(n+2)}c_n.$$

Bu yerdan kelib chiqadiki,

$$c_2 = -\frac{5}{12}c_1 - \frac{1}{6}c_0, \quad c_3 = c_4 = \cdots = 0.$$

Topilgan fundamental yechimlar sistemasi:

$$u_1 = 1 - \frac{1}{6}z^2, \qquad u_2 = z - \frac{5}{12}z^2.$$

2.3-misol.

$$u'' + u' - 2zu = 0$$

tenglamaning $z = 0$ nuqta atrofidagi yechimini toping.

Yechim. Yechimlarning fundamental sistemasi:

$$u_1(z) = 1 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots, \qquad u_2(z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots.$$

2.4-misol.

$$u'' + zu' + 2u = 0$$

tenglamaning $z = 0$ nuqta atrofidagi yechimini toping.

Yechim. Yechimlarning fundamental sistemasi:

$$u_1(z) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{8}z^4 + \cdots, \qquad u_2(z) = z - \frac{1}{3}z^3 + \cdots.$$

2.5-misol.

$$u'' - zu = 0$$

tenglamaning $z = 0$ nuqta atrofidagi yechimlarini toping.

Yechim. Yechimni $u(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ko'rinishda izlaymiz. Koeffisientlar uchun quyidagi rekurrent munosabat topiladi:

$$c_n = \frac{1}{n(n-1)} c_{n-3}.$$

Agar yechimning yoyilmasini tenglamaga qo'yilsa $c_2 = 0$ ekanligi darhol ko'rinadi. Demak, $c_2 = c_5 = c_8 = \cdots = 0$ deb olishimiz kerak. Qolgan koeffisientlar:

$$c_3 = \frac{1}{2\cdot 3}c_0, \; c_4 = \frac{1}{3\cdot 4}c_1, \; c_6 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}c_0, \; c_7 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}c_1, \text{ va h.k.}$$

Yechimlar fundamental sistemasi:

$$u_1 = 1 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{180}z^6 + \cdots, \qquad u_2 = z + \frac{1}{12}z^4 + \frac{1}{504}z^7 + \cdots.$$

2.6-misol.

$$u'' - 2zu' + au = 0$$

tenglamaning $z = 0$ nuqta atrofidagi yechimlarini toping.

Yechim. Yechimni $u(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ko'rinishda izlaymiz. Koeffisientlar uchun quyidagi rekurrent munosabat topiladi:

$$c_{n+2} = \frac{2n - a}{(n+1)(n+2)} c_n.$$

Ikkita yechim topildi:

$$u_1 = 1 + \frac{(-a)}{2}z^2 + \frac{(-a)(4-a)}{2\cdot 3\cdot 4}z^4 + \cdots = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)(4-a)\cdots(4k-a)}{(2k+2)!} z^{2k+2}$$

va

$$u_2 = z + \frac{2-a}{2\cdot 3}z^3 + \frac{(2-a)(6-a)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}z^5 + \cdots =$$

$$= z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-a)(6-a)\cdots(4k+2-a)}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Ikkala qator ham butun kompleks tekisligida yaqinlashuvchidir. Ko'rinib turibdiki, $z \to \infty$ da ikkala qator ham $\sim e^{z^2}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Odatda bu misoldagi tenglama kvant mexanikasida chiziqli ossillator masalasida uchraydi, to'lqin funksiyasi $z \to \infty$ da o'sishi mumkin emas, shuning uchun qatorni cheklashimiz kerak. Buning uchun $a = 2n, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ deb olinsa yetarli. Masalan, $n = 0$ $(a = 0)$ bo'lganda $u_1 = 1$ bo'ladi va u_2 yechim qaralmaydi, $n = 1$ $(a = 2)$ bo'lganda $u_2 = z$ bo'ladi va u_1 yechim qaralmaydi, $n = 2$ $(a = 4)$ bo'lganda $u_1 = 1 - 2z^2$ bo'ladi va u_2 yechim qaralmaydi. Olingan polinomlar sistemasi (mos keluvchi norma tanlab olingandan keyin) Hermite polinomlarini tashkil qiladi.

§3. Maxsus nuqtalar klassifikatsiyasi

Yuqorida ko'rdikki, tenglamaning maxsus nuqtasida yechim analitik funksiya bo'lishi mumkin emas. Yechim ham maxsus nuqtaga ega bo'lishi kerak. Mos kelgan yechimlarni topishdan oldin ikkinchi tartibli tenglamaga ikkita mustaqil yechim mos kelishi shartini aniqlaylik.

Faraz qilaylik, (1)-ning ikkita yechimi u_1 va u_2 mavjud bo'lsin

$$u_1'' + pu_1' + qu_1 = 0, \qquad u_2'' + pu_2' + qu_2 = 0.$$

Bu yerdan

$$p(z) = \frac{u_2u_1'' - u_1u_2''}{u_1u_2' - u_2u_1'}, \qquad q(z) = \frac{u_1'u_2'' - u_2'u_1''}{u_1u_2' - u_2u_1'} \tag{15}$$

larni topamiz. Ikkala mahrajda Wronski[3] determinanti $w(z)$ paydo bo'ldi, u_1 va u_2 larning mavjudligi va mustaqilligi

$$w(z) = u_1u_2' - u_2u_1' \neq 0$$

bo'lishini talab qiladi.

Soddalashtirish maqsadida maxsus nuqtani $z = 0$ deb olaylik. Biz yechimni qator ko'rinishida qidiryapmiz, yechim

$$u \simeq c_1z^s + c_2z^{s+1} + \cdots$$

ko'rinishda izlanadi. Yurutmoqchi bo'lgan muloxazamiz uchun $z = 0$ nuqtaning bevosita atrofida birinchi had asosiy had bo'lgani uchun

$$u_1 \sim z^{s_1}, \qquad u_2 \sim z^{s_2}$$

[3]Josef Maria Hoene-Wronski (1776-1853) - polyak faylasufi va matematigi.

deb olishimiz yetarlidir. Shularni (15)-ga olib borib qo'ysak

$$p(z) \sim (s_1 + s_2 + 1)\frac{1}{z}, \qquad q(z) \sim s_1 s_2 \frac{1}{z^2}$$

formulalarga kelamiz. Bundan kelib chiqadiki, agar $p(z)$ maxsus nuqtada tartibi birinchidan yuqori bo'lmagan qutbga ega bo'lsa va (yoki) $q(z)$ shu nuqtada tartibi ikkinchidan yuqori bo'lmagan qutbga ega bo'lsa tenglamamiz shu nuqtada ikkita mustaqil yechimga ega bo'ladi. Bu - zaruriy shart.

Maxsus nuqta $p(z)$ uchun birinchi tartibdan yuqori bo'lmagan qutb va (yoki) $q(z)$ uchun ikkinchi tartibdan yuqori bo'lmagan qutb bo'lsa u ***regular maxsus nuqta*** deyiladi.

Aks holda maxsus nuqta ***irregular*** deyiladi.

§4. Cheksiz uzoq nuqtaning analizi

Cheksiz $z = \infty$ nuqta quyidagicha tahlil qilinadi. Yangi o'zgaruvchi kiritaylik:

$$\zeta = \frac{1}{z}.$$

(1)-tenglamani shu yangi o'zgaruvchi tiliga o'tkazaylik. Buning uchun hosilalarni yangi o'zgaruvchi orqali ifodalaymiz:

$$\frac{d}{dz} = \frac{d\zeta}{dz}\frac{d}{d\zeta} = -\zeta^2\frac{d}{d\zeta}, \qquad \frac{d^2}{dz^2} = 2\zeta^3\frac{d}{d\zeta} + \zeta^4\frac{d^2}{d\zeta^2}.$$

Natijada tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} + \left(\frac{2}{\zeta} - \frac{p}{\zeta^2}\right)\frac{du}{d\zeta} + \frac{q}{\zeta^4}u = 0. \tag{16}$$

Agar $\zeta = 0$ nuqtada $\left(\frac{2}{\zeta} - \frac{p}{\zeta^2}\right)$ va $\frac{q}{\zeta^4}$ ifodalar analitik bo'lsa $z = \infty$ nuqta tenglamamiz uchun oddiy (to'g'ri) nuqta bo'ladi.

Agar $\zeta = 0$ nuqta $\left(\frac{2}{\zeta} - \frac{p}{\zeta^2}\right)$ uchun oddiy qutb va (yoki) $\frac{q}{\zeta^4}$ uchun ikkinchi tartibdan yuqori bo'lmagan qutb bo'lsa $z = \infty$ nuqta tenglamamiz uchun regular maxsus nuqta bo'ladi.

Aks hollarda $z = \infty$ nuqta irregular maxsus nuqta bo'ladi.

§5. Aniqlovchi tenglama

$z = a$ regular maxsus nuqta bo'lsin:

$$p(z) = \frac{p_{(-1)}}{z-a} + p_0 + p_1(z-a) + p_2(z-a)^2 + \cdots,$$

$$q(z) = \frac{q_{(-2)}}{(z-a)^2} + \frac{q_{(-1)}}{z-a} + q_0 + q_1(z-a) + q_2(z-a)^2 + \cdots. \tag{17}$$

(1)-tenglamaning yechimini

$$u(z) = (z-a)^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+s} = \tag{18}$$

$$= c_0(z-a)^s + c_1(z-a)^{s+1} + c_2(z-a)^{s+2} + \cdots$$

ko'rinishda qidiramiz. Hosilalarni hisoblaylik:

$$u'(z) = c_0 s(z-a)^{s-1} + c_1(s+1)(z-a)^s + c_2(s+2)(z-a)^{s+1} + \cdots,$$

$$u''(z) = c_0 s(s-1)(z-a)^{s-2} + c_1 s(s+1)(z-a)^{s-1} +$$

$$+ c_2(s+2)(s+1)(z-a)^s + \cdots. \tag{19}$$

Tenglamaga oborib qo'yamiz (bir vaqtda tenglamani $(z-a)^2$ ga ko'paytirib yuboramiz - qulaylik uchun):

$$c_0 s(s-1)(z-a)^s + c_1 s(s+1)(z-a)^{s+1} + c_2(s+2)(s+1)\times$$

$$\times(z-a)^{s+2} + \cdots + (p_{(-1)} + p_0(z-a) + p_1(z-a)^2 + \cdots)\times$$

$$\times(c_0 s(z-a)^s + c_1(s+1)(z-a)^{s+1} + \cdots) + (q_{(-2)} + q_{(-1)}(z-a) +$$

$$+ q_0(z-a)^2 + \cdots)(c_0(z-a)^s + c_1(z-a)^{s+1} + \cdots) = 0. \tag{20}$$

Shu ifodada $(z-a)^{s+j}$ ko'rinishdagi har bir monom oldidagi koeffisientlarni yig'ib nolga tenglashtirishimiz kerak. Eng past darajadagi monom $(z-a)^s$ oldidagi koeffisientlar

$$c_0\Big[s(s-1) + sp_{(-1)} + q_{(-2)}\Big] = 0 \tag{21}$$

tenglikka olib keladi. Umumiy holda $c_0 \neq 0$, shuning uchun

$$s^2 + s(p_{(-1)} - 1) + q_{(-2)} = 0 \tag{22}$$

deb olishimiz kerak. Bu tenglamaning nomi - ***aniqlovchi tenglama***, u s ni topish uchun hizmat qiladi. Bu tenglama kvadratik bo'lgani uchun uning ikki yechimi bor - s_1, s_2. Ular ko'pincha (1)-tenglamaning ***daraja ko'rsatkichlari*** deyiladi.

2.7-misol.

$$z^2u'' + zu' - 2u = 0.$$

Bu tenglama uchun

$$p_{-1} = 1, \quad q_{-2} = -2, \qquad s^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad s_1 = +\sqrt{2},\ s_2 = -\sqrt{2}.$$

Rekurrent munosabat mavjud emas:

$$c_n[(n+s)^2 - 2] = 0.$$

$n \neq 0$ holda to'g'ri qavs ichidagi ifoda nolga teng emas, shu sababdan $n \neq 0$ bo'lganda $c_n = 0$ deb olish kerak. Faqat $c_0 \neq 0$. Ikkita topilgan yechim

$$z^{\sqrt{2}}, \quad z^{-\sqrt{2}}.$$

Quyidagi tenglamalarning $z = 0$ nuqtadagi yechimlari topilsin:

2.1-mashq.

$$u'' + \frac{1}{2z}u' + \frac{1}{4z}u = 0.$$

(20)-dan c_n uchun quyidagi umumiy rekurrent munosbatni keltirib chiqarish mumkin:

$$\begin{aligned} c_n\left[(n+s)^2 + (n+s)(p_{(-1)} - 1) + q_{(-2)}\right] = \\ = -\sum_{m=0}^{n-1}\left[p_{n-m-1}(s-m) + q_{n-m-2}\right]c_m. \end{aligned} \tag{23}$$

Bu formuladan quyidagi muhim hulosaga kelamiz: agar $s_1 - s_2 = k$ butun son bo'lsa katta s_1 ga mos keluvchi yechimni topish muammo bo'lmasa ham, kichik s_2 ga mos keluvchi u_2 yechimni (18)-ko'rinishda topa olmaymiz. Bu holda u_2 yechimning $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ koeffisientlarini topa olsak ham c_k koeffisientini aniqlab bo'lmaydi - (23)-ni (22)-bilan solishtirsak ko'rinib turibdiki bu holda c_k oldidagi koeffisient nolga teng bo'lib qoladi. Bunday hollarga tegishli quyidagi Fuchs teoremasi mavjud:

1. Agar aniqlovchi tenglama yechimlarining farqi butunmas son bo'lsa ikkita mustaqil yechimni olish mumkin;
2. Agar aniqlovchi tenglamaning yechimlari teng bo'lsa qatorga yoyish metodi bilan faqat bitta yechimni topish mumkin;
3. Agar aniqlovchi tenglamaning yechimlarining farqi butun son bo'lsa ularning kattasiga mos keluvchi yechimni qatorga yoyish metodi bilan topish mumkin, ikkinchi yechim mavjud bo'lmasligi mumkin.

Ohirgi punktning talqini quyidagicha - agar $s_1 - s_2 = k$ butun son bo'lsa (23)-ning chap tomoni albatta $c_k \cdot 0$ bo'ladi, ammo, (23)-ning o'ng tomoni ham ba'zi-bir hollarda nolga teng bo'lib qolishi mumkin. Bu holda paydo bo'lgan noaniqlik yechilishi mumkin. Quyidagi misol shu holga mos keladi.

Umumiy holda esa ikkinchi yechimni qanday izlash kerakligi keyingi paragrafda i ko'rsatilgan.

2.8-misol.

$$z^2u'' + z^2u' - 2u = 0$$

tenglamaning $z = 0$ nuqta atrofidagi yechimlarini toping.

$z = 0$ nuqta regular maxsus nuqta, bu nuqtada $p_{-1} = 0$, $q_{-2} = -2$. Aniqlovchi tenglama va uning yechimlari:

$$s^2 - s - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 2,\ s_2 = -1, \quad s_1 - s_2 = 3.$$

$u = \sum c_n z^{n+s}$ qatorni tenglamaga qo'ysak

$$c_n = -\frac{n+s-1}{(n+s)(n+s-1)-2}\,c_{n-1}$$

rekurrent munosabat olinadi. $s_1 = 2$ ga mos keluvchi qatorni topish qiyin emas:

$$c_n = -\frac{n+1}{(n+1)(n+2)-2}\,c_{n-1} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{2}c_0,\ c_2 = \frac{3}{20}c_0,\ c_3 = -\frac{1}{30}c_0, \ldots$$

Birinchi yechim:

$$u_1(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{20}z^2 - \frac{1}{30}z^3 + \cdots.$$

$s_2 = -1$ holni qaraylik:

$$c_n = -\frac{n-2}{(n-1)(n-2)-2}\,c_{n-1}.$$

Bu holda $c_1 = -\frac{1}{2}c_0$, $c_2 = 0$ larni topamiz. $n = s_1 - s_2 = 3$ ga teng bo'lganda $0 \cdot c_3 = 0$ munosabatni olamiz. Haqiqatda ushbu holda noaniqlik yo'q, buni ko'rish uchun olingan rekurrent munosabatning o'ng tomoniga unig o'zini yana bir marta qo'yamiz:

$$c_n = \frac{n-2}{(n-1)(n-2)-2}\frac{n-3}{(n-2)(n-3)-2}c_{n-2} = \frac{n-2}{n(n-1)(n-4)}c_{n-2}.$$

Demak, $c_3 = \frac{1}{12}c_0$. Davom ettirib $c_4 = \frac{1}{24}c_0$ ni ham topish mumkin. Shu bilan ikkinchi yechim ham topildi:

$$u_2(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \cdots .$$

Bu misolni keltirishdan maqsad - $s_2 - s_1 = n$ butun son (noldan tashqari) bo'lganda ham ikkinchi yechim ba'zi-bir hollarda qatorga yoyish usuli bilan topilishi mumkin ekanligini ko'rsatish.

§6. $s_1 - s_2 = k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ bo'lganda ikkinchi yechim

Agar $s_1 - s_2 = k$ butun son yoki nol bo'lsa s_2 ga mos keluvchi yechimni umumiy holda (18)-ko'rinishda topa olmaymiz. Bu holda ikkinchi yechimni quyidagicha qidiramiz:

$$u_2(z) = w(z)u_1(z), \quad w(z) = u_1u_2' - u_2u_1 - \text{wronskian}.$$

Hosilalarni topaylik:

$$u_2' = wu_1' + u_1w', \qquad u_1'' = w''u_1 + 2w'u_1' + wu_1''.$$

Topganlarimizni (1)-tenglamaga olib borib qo'yaylik:

$$w''u_1 + 2w'u_1' + u_1''w + p(w'u_1 + u_1'w) + qwu_1 = 0.$$

Bu tenglikdagi uchinchi, beshinchi va oltinchi hadlarning yig'indisi nolga teng (chunki u_1 - yechim). Qolgan hadlar

$$w''u_1 + 2w'u_1' + pw'u_1 = 0$$

ko'rinishni oladi. Buni quyidagi qulay formaga keltiraylik:

$$\frac{w''}{w'} = \frac{d}{dz}\ln w' = -2\frac{d}{dz}\ln u_1 - p.$$

Hosil bo'lgan tenglamani integrallash qiyin emas:

$$\ln w'(z) = -2\ln u_1(z) - \int^{z} dzp(z) = -2\ln u_1(z) - p_{(-1)}\ln(z-a) -$$

$$-p_0(z-a) - \tfrac{1}{2}p_1(z-a)^2 - \cdots$$

yoki,

$$w'(z) = A\exp\Bigg\{ -2\ln u_1(z) - p_{(-1)}\ln(z-a) - p_0(z-a) -$$

$$-\frac{1}{2}p_1(z-a)^2 - \cdots \Bigg\} = \frac{A}{u_1^2(z)(z-a)^{p-1}} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} p_n (z-a)^{n+1} \right\}.$$

Yana bir marta integrallasak

$$w(z) = A\int^{z} d\xi \frac{\exp\left\{ -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} p_n(\xi-a)^{n+1} \right\}}{u_1^2(\zeta)(\xi-a)^{p-1}} + B \qquad (24)$$

formulani olamiz, bu yerda A va B - integrallash doimiylari. Mahrajdagi ifodani alohida ko'rib chiqaylik.

$$u_1 = (z-a)^{s_1} \sum_{n=0} c_n (z-a)^n$$

bo'lgani uchun

$$u_1^2(\xi-a)^{p_1} = (\xi-a)^{2s_1+p_1} \left(\sum_{n=0} c_n (z-a)^n \right)^2 =$$

$$= (\xi-a)^{1+k} \left(\sum_{n=0} c_n (z-a)^n \right)^2$$

ekanligini topamiz, bu yerda $2s_1 + p_1 = 1 + k$ bo'lishini hisobga oldik.

$$\varphi(z) = \frac{1}{\left(\sum\limits_{n=0} c_n(z-a)^n\right)^2} = \frac{1}{(c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots)^2} =$$

$$= \varphi_0 + \varphi_1(z-a) + \varphi_2(z-a)^2 + \cdots$$

funksiya $z = a$ nuqtada analitik ekanligi oydindir. Olingan

$$w(z) = A \int^{z} d\xi \frac{\exp\left\{-\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} p_n(\xi - a)^{n+1}\right\}}{(\xi - a)^{1+k}} \varphi(\xi) + B$$

formulada yana bir analitik strukturani ajratib chiqaraylik:

$$\exp\left\{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} p_n(\xi - a)^{n+1}\right\} \varphi(\xi) =$$
$$= \psi(\xi) = \psi_0 + \psi_1(\xi - a) + \psi_2(\xi - a)^2 + \cdots$$

Demak, topilgan yechim

$$u_2(z) = w(z)u_1(z) = Au_1(z) \int^{z} d\xi \frac{\psi(\xi)}{(\xi - a)^{1+k}} + Bu_1(z)$$

ning analitik strukturasi k ning qiymatiga bo'g'liq ekan. Agar $k = 0$ bo'lsa

$$u_2(z) = Au_1(z) \left(\psi_0 \ln(z-a) + \psi_1(z-a) + \frac{1}{2}\psi_2(z-a)^2 + \cdots\right) +$$
$$+ Bu_1(z)$$

yechimga egamiz. Umuman olganda, k butun son uchun ikkinchi yechim mavjud bo'lmasligi ham mumkin, buni biz bitta regular nuqtali tenglama misolida keyin ko'rsatamiz.

Ammo shunday ham bo'lishi mumkinki, aniqlovchi tenglama yechimlarining farqi butun son bo'lishiga qaramay ikkinchi yechimni ham qatorga yoyish usuli bilan topish mumkin. Buning uchun (23)-tenglamadan keyingi koeffisientni topayotganimizda nafaqat chap tomondagi ifoda, balki o'ng tomon ham tegishli n soni uchun nolga aylansin, bunda l'Hopitale qoidasini qo'llash keyingi koeffisientni topishga imkon beradi. Bunday misol avval keltirilgan - shu bobdagi 8-misolga qarang.

2.9-misol.

$$u'' + \frac{1}{z}u' - u = 0$$

tenglamani $z = 0$ nuqta atrofida yeching.

$z = 0$ nuqta - regular maxsus nuqta. Aniqlovchi tenglama $s^2 = 0$ ko'rinishga ega. Bitta yechimni oson topish mumkin. Tenglama $z \to -z$ almashtirishga nisbatan invariant bo'lgani uchun yechim juft funksiya bo'lishi kerak - $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$. Rekurrent munosabatlar

$$c_n = \frac{1}{n^2}c_{n-2}$$

dan ($n = 2k$ deb olgandan keyin)

$$c_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(k!)^2}c_0$$

ekanligini topamiz. Demak, birinchi yechim

$$u_1 = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^4(2!)^2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Ikkinchi yechim:

$$u_2(z) = u_1(z)\int^z \frac{d\zeta}{u_1^2(\zeta)}\exp\left(-\int^\zeta \frac{d\xi}{\xi}\right) = u_1(z)\int^z \frac{d\zeta}{\zeta}\frac{1}{1+\frac{\zeta^2}{2}+\cdots}$$
$$= u_1(z)\ln z - \frac{1}{4}z^2u_1(z) - \cdots.$$

O'zgarmas sonlarni yozib o'tirmadik.

2.10-misol. 2-misolni davom ettiramiz.

$$(z-2)(z-3)u'' - (2z-5)u' + 2u = 0$$

tenglamaning yechimlarini $z = 0$, $z = 2$ va $z = 3$ nuqtalar atroflarida toping.

$z = 0$ nuqta - oddiy nuqta. Bu nuqtadagi fundamental yechimlar sistemasi darhol topiladi (2-misolga qarang):

$$u_1 = 1 - \frac{1}{6}z^2; \qquad u_2 = z - \frac{5}{12}z^2.$$

$z = 2$ - regular maxsus nuqta. Aniqlovchi tenglama va uning yechimlari:

$$s(s-2) = 0; \qquad s_1 = 2, \quad s_2 = 0.$$

Rekurrent munosabat:

$$c_{n+1} = \frac{(n+s)(n+s-3)+2}{(n+s)^2-1} c_n.$$

$s_1 = 2$ hol uchun

$$c_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)^2-1} c_n$$

munosabatdan $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = \cdots = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $z = 2$ nuqtadagi $s = 2$ ga mos keluvchi yechimni u_3 deb belgilasak $u_3(z) = (z-2)^2$ ekanligini topamiz (c_0 ni yozib o'tirmaymiz).

$s_2 = 0$ holni qaraylik. Bu holda rekurrent munosabat

$$c_{n+1} = \frac{n(n-3)+2}{n^2-1} c_n = \frac{n-2}{n+1} c_n$$

ko'rinishni qabul qiladi. Agar bu munosabatning maxrajida ham huddi suratiga o'xshab $(n-1)$ ko'paytuvchi paydo bo'lmaganda undan c_2 ni topib bo'lmas edi, ikkinchi yechimni faqat yuqorida keltirilgan usul bilangina qidirish mumkin bo'lar edi. Hozir esa quyidagilarni topamiz:

$$c_1 = -2c_0, \quad c_2 = -\frac{1}{2}c_1 = c_0, \quad c_3 = c_4 = \cdots = 0.$$

Bu holga mos keluvchi yechimni $u_4(z)$ deb belgilasak $u_4(z) = (z-3)^2$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $z = 3$ nuqtadagi yechimlarni topaylik. Bu ham regular maxsus nuqta, yuqoridagiga o'xshash analizdan keyin quyidagi natijalarga kelamiz: aniqlovchi tenglamaning yechimlari yana o'sha: $s_1 = 2$, $s_2 = 0$. Rekurrent munosabatning faqat o'ng tomonidagi ishorasi o'zgaradi:

$$c_{n+1} = -\frac{(n+s)(n+s-3)+2}{(n+s)^2-1} c_n.$$

$s = s_1 = 2$ ga $u_4(z) = (z-3)^2$ yechim mos keladi. $s = s_2 = 0$ holda Frobenius metodi yana ishlaydi, yechim $u_3 = (z-2)^2$ bo'ladi.

Ikkinchi yechimni topish uchun yuqorida berilgan usuldan foydalanilsa nima bo'ladi? $z = 2$ nuqta atrofida $s = s_1 = 2$ ga mos keluvchi yecim $u_3 = (z-2)^2$ dan foydalanib $u_5(z) = w(z)u_3$ ni qidirsak $u_5 = 5/2 - z$ ekanligi kelib chiqadi - logarifmik had yo'q. Huddi shunday, $z = 3$ nuqta atrofida ikkinchi yechimni topishga yuqoridagi usul ishlatilsa yana $u_5 = 5/2 - z$ yechim kelib chiqadi. Topilgan beshta yechim quyidagi uchta chiziqli munosabatlarga bo'ysunadi:

$$9u_1 - 6u_2 - u_4 = 0, \quad 5u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0, \quad 2u_5 - u_4 + u_3 = 0.$$

Bu misolni keltirishdan maqsad - "$s_1 - s_2$ butun son bo'lganda ikkinchi yechim mavjud bo'lmasligi mumkin" degan tasdiq albatta mavjud bo'lmaydi degani emasligini ko'rsatish edi.

2.11-misol. Bessel[4] tenglamasi:

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0.$$

Bu tenglamaning ikkita maxsus nuqtasi bor - regular maxsus nuqta $z = 0$ va irregular nuqta $z = \infty$. $z = 0$ nuqta atrofida yechimni $u(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+s}$ ko'rinishda qidiramiz:

$$c_0s(s-1)x^s + c_1s(s+1)x^{s+1} + \cdots + c_0sx^s + c_1(s+1)x^{s+1} + \cdots$$

$$+(x^2 - \nu^2)(c_0x^s + c_1x^{s+1} + \cdots) = 0.$$

$x-$ning darajasi eng past bo'lgan had x^s, uning oldidagi koeffisientlarni yig'amiz:

$$c_0(s^2 - \nu^2) = 0. \tag{25}$$

$x^{s+1}-$monomning oldidagi koeffisientlarni yig'aylik:

$$c_1[(s+1)^2 - \nu^2] = 0. \tag{26}$$

Umumiy ko'rinishda rekurrent munosabatlar quyidagicha ko'rinishga ega:

$$c_n = -\frac{1}{(s+n)^2 - \nu^2}c_{n-2}. \tag{27}$$

(25)-dan quyidagi xulosaga kelamiz:

$$c_0 = 0 \quad \text{yoki} \quad s = \pm\nu. \tag{28}$$

(26)-dan esa

$$c_1 = 0 \quad \text{yoki} \quad s = \pm\nu - 1.$$

$c_0 \neq 0$ bo'lishi kerak deb $s_{1,2} = \pm\nu$ yechimni olamiz. Bu bilan $c_1 = 0$ deb olgan bo'lamiz, aks holda (26)-ni qanoatlantira olmaymiz.

(27)-ga qaralsa $c_1 = 0$ ligidan hamma toq nomerli koeffisientlarning nolga tengligi kelib chiqadi: $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = c_{2k+1} = \cdots = 0$. Noldan farqli koeffisientlar - $c_2, c_4, c_4, \ldots$.

$s_1 = \nu$ da (27)-ning yechimi quyidagicha bo'ladi ($n = 2k$ deb olingandan keyin):

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{\nu!}{2^{2k}k!(k+\nu)!}c_0.$$

Odatda

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!}$$

[4] Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846) - nemis matematigi va astronomi

deb olish qabul qilingan. Topilgan yechim $J_\nu(z)$ deb belgilanadi:

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Aniqlovchi tenglamaning ikkinchi yechimi $s_2 = -\nu$ mustaqil yechimga olib kelmaydi. Buni tushunish qiyin emas - $\nu = n$ butun son bo'lganda $s_1 - s_2 = 2n$ butun son bo'ladi. Ko'rsatish mumkinki [17], ν butun son bo'lganda $J_n(z) = (-)^n J_{-n}(z)$ bo'ladi, ya'ni, $s_2 = -n$ hollarda tenglamaning yechimini qator ko'rinishda izlash mustaqil yechimga olib kelmaydi.

Ikkinchi yechimni hususiy hol $\nu = 0$ da topaylik. $z = 0$ nuqta atrofida:

$$u_2(z) = AJ_0(z)\int^z \frac{d\zeta}{\zeta J_0^2(\zeta)} + B = AJ_0(z)\int^z \frac{d\zeta}{\zeta(1-\zeta+\cdots)^2} + B =$$
$$= AJ_0(z)\ln z + \sum a_n z^n.$$

Umuman esa ikkinchi yechim quyidagicha aniqlanadi:

$$N_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)},$$

bu funksiyaning nomi - Neumann[5] funksiyasi. $\nu = n$ butun son bo'lganda bu funksiya $0/0$ ko'rinishiga keladi, bu noaniqlik l'Hopital qoidasi bo'yicha ochilishi kerak.

2.2-mashq. Quyidagi tenglamaning $z = 0$ nuqtadagi yechimlarini toping:

$$zu'' + 2u' + u = 0.$$

§7. Aniqlovchi bir misol

Ba'zi-bir hollarda ko'rilayotgan nuqta to'g'rimi yoki maxsusmi bo'lishidan qat'iy nazar yechim

$$u(z) = (z-a)^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ko'rinishda qidiriladi. Agar $z = a$ nuqta to'g'ri bo'lsa aniqlovchi tenglamaning ikkita yechimi (ularning farqi butun son bo'ladimi yo'qmidan qat'iy nazar) bizga 1-ning fundamental yechimlar sistemasini beradi. Masalan, kichik tebranishlar tenglamasi:

$$u''(z) + \omega^2 u(z) = 0.$$

[5]Karl Gottfried Neumann (1832-1925) - nemis matematigi.

Bu tenglamaning nechta maxsus nuqtasi bor? z tekisligining chekli qismida uning maxsus nuqtasi yo'q, $z = \infty$ esa irregular maxsus nuqta:

$$\frac{d^2u(\zeta^{-1})}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta}\frac{du(\zeta^{-1})}{d\zeta} + \frac{\omega^2}{\zeta^4}u(\zeta^{-1}) = 0.$$

$z = 0$ nuqta oddiy nuqta bo'lishiga qaramay bu nuqtada yechimni quyidagicha ko'rinishda qidiraylik:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+s}. \tag{29}$$

Maqsad - aniqlovchi tenglama yechimlarining farqi butun son bo'lganda ham $z = 0$ nuqta oddiy nuqta bo'lgani uchun ikkita mustaqil yechim bevosita Frobenius metodi bilan topilashi mumkinligini ko'rsatish. Hosilalarni hisoblab tenglamaga olib borib qo'yamiz.

$$\sum c_n(n+s)(n+s-1)z^{n+s-2} + \sum \omega^2 c_n z^{n+s} = 0.$$

Bu tenglikni ochib yozaylik:

$$c_0 s(s-1)z^{s-2} + c_1 s(s+1)z^{s-1} + [c_2(s+1)(s+2) + \omega^2 c_0]z^s + \cdots = 0.$$

Birinchi va ikkinchi hadlarning oldidagi koeffisientlarni nolga tenglashtirishdan boshlaylik:

$$c_0 s(s-1) = 0, \qquad c_1 s(s+1) = 0.$$

Bularning birinchisi - aniqlovchi tenglama. Ko'rinib turibdiki, yoki $c_0 = 0$, yoki $c_1 = 0$ deb olish kerak, aks holda $s(s-1) = 0$ va $s(s+1) = 0$ bir vaqtda bajarilishi kerak bo'lib chiqadi, bu esa mumkin emas. Bu ikkala tenglikdan biri bajarilishi kerak, shuning uchun $c_1 = 0$ deb olamiz. Bu holda $c_0 \neq 0$, va $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ bo'lishi kerak. Rekurrent munosabat:

$$c_n = -\omega^2 \frac{c_{n-2}}{(n+s)(n+s-1)}.$$

Bunda $s = 0$ deb olsak (qulaylik uchun $n \to n+2$ deb ham olaylik)

$$c_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+2)(n+1)}c_n$$

bo'ladi. Bu yerdan

$$c_2 = -\frac{\omega^2}{2}c_0, \quad c_4 = \frac{(-1)^2(\omega^2)^2}{4!}c_0, \ldots, \qquad c_{2n} = (-1)^n\frac{\omega^{2n}}{(2n)!}c_0$$

kelib chiqadi. Demak,

$$u_1 = c_0\left(1 - \frac{\omega^2}{2}z^2 + \frac{\omega^4}{4!}z^4 + \cdots\right) = c_0\cos\omega z.$$

Endi $s = 1$ holni ko'raylik. Bu holda

$$c_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+3)(n+2)}c_n$$

bo'ladi. Demak,

$$c_2 = -\frac{\omega^2}{2\cdot 3}c_0, \quad c_4 = \frac{(-1)^2(\omega^2)^2}{5!}c_0, \ldots, \qquad c_{2n} = (-1)^n\frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!}c_0.$$

Bu holdagi yechim:

$$u_2 = \frac{c_0}{\omega}\left(z\omega - \frac{\omega^3}{3!}z^3 + \frac{\omega^5}{5!}z^5 - \cdots\right) = \frac{c_0}{\omega}\sin\omega z.$$

Aniqlovchi tenglamaning yechimlari ayirmasi $s_2 - s_1 = 1$ butun son bo'lishiga qaramasdan biz ikkita mustaqil yechimni topdik. Ushbu misoldan kelib chiqib ixtiyoriy holda yechimni 29-ko'rinishda qidirishimiz mumkin degan hulosaga kelamiz, agar $z = a$ nuqta to'g'ri nuqta bo'lsa biz ikkita mustaqil yechimni hamma vaqt topamiz.

§8. Irregular maxsus nuqta va aniqlovchi tenglama

Quyidagi tenglamani ko'raylik:

$$u'' - \frac{6}{z^2}u = 0.$$

$z = 0$ nuqta - regular maxsus nuqta. Yechimni (18)-ko'rinishda qidiramiz:

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+s}.$$

bo'ladi. Bu yerdan

$$c_2 = -\frac{\omega^2}{2}c_0, \quad c_4 = \frac{(-1)^2(\omega^2)^2}{4!}c_0, \ \ldots, \qquad c_{2n} = (-1)^n\frac{\omega^{2n}}{(2n)!}c_0$$

kelib chiqadi. Demak,

$$u_1 = c_0\left(1 - \frac{\omega^2}{2}z^2 + \frac{\omega^4}{4!}z^4 + \cdots\right) = c_0 \cos \omega z.$$

Endi $s = 1$ holni ko'raylik. Bu holda

$$c_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+3)(n+2)}c_n$$

bo'ladi. Demak,

$$c_2 = -\frac{\omega^2}{2\cdot 3}c_0, \quad c_4 = \frac{(-1)^2(\omega^2)^2}{5!}c_0, \ \ldots, \qquad c_{2n} = (-1)^n\frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!}c_0.$$

Bu holdagi yechim:

$$u_2 = \frac{c_0}{\omega}\left(z\omega - \frac{\omega^3}{3!}z^3 + \frac{\omega^5}{5!}z^5 - \cdots\right) = \frac{c_0}{\omega}\sin \omega z.$$

Aniqlovchi tenglamaning yechimlari ayirmasi $s_2 - s_1 = 1$ butun son bo'lishiga qaramasdan biz ikkita mustaqil yechimni topdik. Ushbu misoldan kelib chiqib ixtiyoriy holda yechimni 29-ko'rinishda qidirishimiz mumkin degan hulosaga kelamiz, agar $z = a$ nuqta to'g'ri nuqta bo'lsa biz ikkita mustaqil yechimni hamma vaqt topamiz.

§8. Irregular maxsus nuqta va aniqlovchi tenglama

Quyidagi tenglamani ko'raylik:

$$u'' - \frac{6}{z^2}u = 0.$$

$z = 0$ nuqta - regular maxsus nuqta. Yechimni (18)-ko'rinishda qidiramiz:

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+s}.$$

Rekurrent munosabatlar mavjud emas:

$$c_n\left[(n+s)(n+s-1)-6\right]=0$$

formula har-xil indeksli koeffisientlarni bog'lamaydi. Aniqlovchi tenglama $s(s+1)-6=0$ ning ikkita yechimi bor: $s_1=3$ va $s_2=-2$. Demak, yechimlar cheksiz qator emas, balki birhadlardan iborat: z^3 va z^{-2}.

Endi tenglamani o'zgartiramiz:

$$u''-\frac{6}{z^3}u=0.$$

$z=0$ nuqta irregular maxsus nuqtaga aylandi. Yechimni yana Frobenius metodi bo'yicha qidiramiz, birinchi bir necha hadlarni yozib olaylik:

$$c_0 s(s+1)z^{s-2}+c_1 s(s+1)z^{s_1}+\cdots-6c_0z^{s-3}-6c_1z^{s-2}-\cdots=0.$$

Aniqlovchi tenglama $-6c_0=0$ ko'rinishni oldi, buni qabul qilib bo'lmaydi, chunki undan $c_0=0$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa yechimning yo'qligiga teng.

Yana bir misol ko'raylik:

$$u''+\frac{1}{z}u'-\frac{a^2}{z^2}u=0.$$

Bu tenglama uchun aniqlovchi tenglama $s^2=a^2$, uning yechimlari $s_{1,2}=\pm a$. Rekurrent munosabatlar yana mavjud emas:

$$c_n\left[(n+s)^2-a^2\right]=0.$$

Yechim yana faqat ikkita haddan iborat: z^a, z^{-a}.

Tenglamaning maxsus nuqtasini o'zgartiramiz:

$$u''+\frac{1}{z}u'-\frac{a^2}{z^3}u=0.$$

Endi $z=0$ nuqta irregular nuqtaga aylandi. Aniqlovchi tenglama $-a^2c_0=0$ ko'rinishga ega, bu esa yana yechimni bu metod bilan olib bo'lmasligini ko'rsatadi.

Tenglamani yana bir bor o'zgartiramiz:

$$u''+\frac{1}{z^2}u'-\frac{a^2}{z^2}u=0. \tag{30}$$

$z = 0$ nuqta yana irregular nuqta, ammo vaziyat o'zgardi: aniqlovchi tenglama $s = 0$ ko'rinishga ega. Rekurrent munosabatlar:

$$c_{n+1} = -\frac{n(n-1) - a^2}{n+1} c_n.$$

Ko'rinib turibdiki, yechim yaqinlashuvchi cheksiz qator bo'lmaydi:

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{n(n-1) - a^2}{n+1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Qatorni qandaydir hadda bo'lish kerak, aks holda uning ma'nosi yo'q. Masalan, $a^2 = 2$ bo'lsa qator $n = 2$ had bilan tugaydi: $u(z) = 1+2z+2z^2$ yechim bo'lishini tekshirib chiqish qiyin emas. Umuman, a^2 shunday son bo'lishi kerakki, $n(n-1) - a^2 = 0$ tenglamaning yechimi musbat butun son bo'lsin. Aks holda (30)-tenglamaning yechimini qatorga yoyish usuli bilan topib bo'lmaydi.

Ko'rib turinibdiki, Frobenius metodi irregular nuqtalarda muvaffaqiyatga olib kelmasligi mumkin.

§9. Bitta regular maxsus nuqta

Hususiy hollarga o'taylik. Bitta regular maxsus nuqtali tenglamaning eng umumiy ko'rinishi:

$$u'' + \frac{2}{z-a}u' = 0. \tag{31}$$

Tenglamaning maxsus nuqtasi bitta - $z = a$. $z = \infty$ maxsus nuqta bo'lmasligini tekshirish qiyin emas. Yechimni standart ko'rinishda qidiramiz:

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+s}.$$

Bu galda quyidagi holga kelamiz:

$$\sum c_n(n+s)(n+s+1)(z-a)^{n+s-2} = 0.$$

Aniqlovchi tenglama $s(s+1) = 0$. Uning ikki yechimi: $s_1 = 0$, $s_2 = -1$. $s_1 = 0$ uchun

$$c_n n(n+1) = 0$$

bo'lishi kerak. $n = -1$ bo'lishi mumkin emas, $n = 0$ uchun esa c_0 ixtiyoriy bo'lib chiqadi. Demak, $s_1 = 0$ ga mos kelgan yechim $u_1 = A$ ekan, A - ixtiyoriy konstanta.

Bu misolning umumiy nazariyaga zid bo'lgan joyi bordek ko'rinadi: 23-bo'yicha $s_1 - s_2 = 1$ bo'lgani uchun s_2 ga mos keluvchi yechimni topa olmasligimiz kerak, ammo ikkala yechimni ham osongina topish mumkin:

$$u_2(z) = B + \frac{D}{z-a}.$$

Ikkinchi yechim (§6.)-paragrafda berilgan metod bilan ham huddi shunday ko'rinishda topiladi.

Bu misolning umumiy nazariyaga zid bo'lib ko'ringanligining sababi haqiqatda $u_1 = A$ yechim yechim emasligidadir. Ko'rilyapgan tenglama ikkinchi tartibli bo'lib unga ikkita boshlang'ich shartlar berilgan bo'ladi, $u_1 = A$ funksiya ikkita boshlang'ich shartni qanoatlantira olmaydi - unga bitta noma'lum kirgan.

Agar a nuqtani cheksizlikka ko'chirmoqchi bo'lsak: $a \to \infty$, tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$u'' = 0. \tag{32}$$

Uning yechimi

$$u(\zeta) = A + B\zeta. \tag{33}$$

Bu yechim yuqoridagi ikkinchi yechim $u_2(z)$ ga mos keladi.

§10. Ikkita regular maxsus nuqta

a va b nuqtalar va faqat ular regular maxsus nuqta bo'lishi uchun $p(z)$ funksiya

$$\sim \frac{1}{(z-a)(z-b)} \tag{34}$$

va (yoki) $q(z)$ funksiya

$$\sim \frac{1}{(z-a)^2(z-b)^2} \tag{35}$$

ko'rinishli hadlarga ega bo'lishi kerak. Cheksiz nuqta yangi maxsus nuqtaga aylanmasligi uchun (16)-dan ko'rinib turibdiki

$$\frac{2}{\zeta} - \frac{p}{\zeta^2} \tag{36}$$

kombinatsiya $\zeta = 0$ nuqtada qutbga ega bo'lmasligi kerak. Bunday talabga esa quyidagi funksiyagina javob beradi:

$$p(z) = \frac{2z - c}{(z-a)(z-b)}, \tag{37}$$

bu yerda $c = \text{const}$. Huddi shunday, $z = \infty$ nuqta yangi maxsus nuqtaga aylanmasligi uchun $q(z)$ ning ham ko'rinishi maxsus bo'lishi kerak:

$$q(z) = \frac{\text{const}}{(z-a)^2(z-b)^2}. \tag{38}$$

Ya'ni,

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2z + \text{const}}{(z-a)(z-b)}\frac{du}{dz} + \frac{\text{const}}{(z-a)^2(z-b)^2}u = 0 \tag{39}$$

tenglama ikkita regular maxsus nuqtaga - a va b - ega bo'lgan tenglamaning eng umumiy ko'rinishi. Ammo bu tenglamaga kirgan o'zgarmas sonlarni informativroq bo'lgan ko'rinishga keltirib olishimiz mumkin.

Ikkita regular maxsus nuqtali tenglamaning eng umumiy holi uchun quyidagi ***standart ko'rinish*** qabul qilingan:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2z + b(\lambda+\mu-1) - a(\lambda+\mu+1)}{(z-a)(z-b)}\frac{du}{dz} + \frac{\lambda\mu(a-b)^2}{(z-a)^2(z-b)^2}u = 0. \tag{40}$$

Bu tasavvurning afzalligi shundakim, unda aniqlovchi tenglamaning ikkala yechimi yaqqol berilgan: ular λ va μ. Ikkala maxsus nuqtalar ham yaqqol berilgan - a va b. Tekshiraylik. $z = a$ nuqtada:

$$p_{-1} = \frac{2a + b(\lambda+\mu-1) - a(\lambda+\mu+1)}{a-b} = 1-\lambda-\mu, \qquad q_{-2} = \lambda\mu. \tag{41}$$

Aniqlovchi tenglama va uning yechimlari:

$$s^2 - s(\lambda+\mu) + \lambda\mu = 0, \qquad s_1 = \lambda; \quad s_2 = \mu. \tag{42}$$

$z = b$ nuqtada:

$$p_{-1} = \frac{2b + b(\lambda+\mu-1) - a(\lambda+\mu+1)}{b-a} = 1+\lambda+\mu, \qquad q_{-2} = \lambda\mu. \tag{43}$$

Aniqlovchi tenglama va uning yechimlari:

$$s^2 + s(\lambda+\mu) + \lambda\mu = 0, \qquad s_1 = -\lambda, \quad s_2 = -\mu. \tag{44}$$

Olingan formulalar umumiy yechimni quyidagi ko'rinishda qidirish kerakligini ko'rsatadi:

$$u(z) = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\lambda} \tilde{u}_1(z) + \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\mu} \tilde{u}_2(z). \tag{45}$$

$w = \dfrac{z-a}{z-b}$ almashtirish yordamida (40)-tenglamani

$$\frac{d^2u(w)}{dw^2} + \frac{1-\lambda-\mu}{w}\frac{du(w)}{dw} + \frac{\lambda\mu}{w^2}u(w) = 0 \tag{46}$$

ko'rinishga keltirishimiz mumkin. Yangi o'zgaruvchi tilida 45-yechim

$$u(w) = w^{\lambda}\tilde{u}_1(z) + w^{\mu}\tilde{u}_2(z)$$

ko'rinishni oladi.

2.3-mashq. (46)-tenglamaning yechimini topib $\tilde{u}_1(z)$ va $\tilde{u}_2(z)$ funksiyalar o'zgarmas son ekanligini ko'rsating.

Bu mashqdan kelib chiqadiki ikkita regular maxsus nuqtali holda tenglamaning umumiy yechimi quyidagi sodda ko'rinishga ega:

$$u(z) = A\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\lambda} + B\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\mu}, \qquad A,\ B\ -\ \text{konstantalar}. \tag{47}$$

Hulosa: tenglamada ikkita regular maxsus nuqta bo'lsa uning yechimi elementar funksiyalar orqali ifodalanadi.

2.4-mashq. Agar $\lambda = \mu$ bo'lsa yechim

$$u(z) = A\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\lambda} + B\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\lambda} \ln\frac{z-a}{z-b}$$

bo'lishini ko'rsating.

§11. Uchta regular maxsus nuqta

Uchta regular maxsus nuqtaga mos keluvchi $p(z)$ ning eng umumiy ko'rinishidan boshlaymiz:

$$p(z) = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + \frac{\gamma}{z-c} + \delta. \tag{48}$$

Cheksiz nuqta maxsus nuqta bo'lmasligi uchun

$$\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} p\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

ifoda $\zeta \to 0$ da analitik bo'lishi kerak. Buning uchun esa

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \qquad \text{va} \qquad \delta = 0 \tag{49}$$

bo'lishi kerak.

Uchta regular maxsus nuqtaga mos keluvchi $q(z)$ ning eng umumiy ko'rinishi

$$q(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \left(\frac{d}{z-a} + \frac{e}{z-b} + \frac{f}{z-c} \right) \tag{50}$$

bo'ladi. Yozilgan ifodaning strukturasi shundayki $\zeta = 1/z \to 0$ nuqtada quyidagiga egamiz: $q/\zeta^4 = d + e + f$. Shunday qilib, butun kompleks tekisligida faqatgina uchta a, b, c regular maxsus nuqtaga ega bo'lishimiz uchun $p(z)$ funksiya uchun (48)-ifodadagi parametrlar (49)-shartlarga boysunishi va $q(z)$ uchun (50)-formani olishimiz yetarli va zaruriy ekan.

Uchta regular maxsus nuqtali ikkinchi tartibli differensial tenglamaning ***standart formasi***ni quyidagicha tanlab olishimiz mumkin:

$$u'' - \left[\frac{\lambda + \lambda' - 1}{z-a} + \frac{\mu + \mu' - 1}{z-b} + \frac{\nu + \nu' - 1}{z-c} \right] u' +$$

$$+ \left[\frac{\lambda\lambda'(a-b)(a-c)}{(z-a)^2(z-b)(z-c)} + + \frac{\mu\mu'(b-a)(b-c)}{(z-a)(z-b)^2(z-c)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu\nu'(c-a)(c-b)}{(z-a)(z-b)(z-c)^2} \right] u = 0. \tag{51}$$

Bu tenglama *Papperitz-Riemann*[6] *tenglamasi* deyiladi. Bu holda (49)-shartning birinchisining yangi parametrlar tilidagi ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\lambda + \lambda' + \mu + \mu' + \nu + \nu' = 1.$$

Ushbu tanlovning afzalliklari quyidagicha: yangi parametrlar λ, λ', μ, μ' va ν, ν' (51)-tenglamaning a, b va c regular maxsus nuqtalaridagi aniqlobchi tenglamalarining yechimlaridir.

Masalan, $z = a$ nuqtani olib ko'raylik. Bu nuqtada

$$p_{-1}(a) = 1 - \lambda - \lambda', \quad q_{-2}(a) = \lambda\lambda',$$

aniqlovchi tenglama

$$s^2 - (\lambda + \lambda')s + \lambda\lambda' = 0,$$

uning yechimlari $s_1 = \lambda$ va $s_2 = \lambda'$. Demak, (51)-tenglamaning $z = a$ nuqta atrofidagi yechimi

$$u(z) = (z-a)^{\lambda} \sum a_n (z-a)^n + (z-a)^{\lambda'} \sum b_n (z-a)^n$$

ko'rinishda qidirilishi kerak, a_n va b_n koeffisientlarni rekurrent munosabatlardan topamiz. Huddi shundek, $z = b$ va $z = c$ nuqtalar atrofida yechimlarning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$u(z) = (z-b)^{\mu} \sum c_n (z-b)^n + (z-b)^{\mu'} \sum d_n (z-b)^n,$$

va

$$u(z) = (z-c)^{\nu} \sum e_n (z-c)^n + (z-c)^{\nu'} \sum f_n (z-c)^n.$$

Demak, tenglamani standart ko'rinishga keltirishning o'zi uning yechimlarining asosiy xarakteristikalarini aniqlashga teng ekan. Shu sababdan (51)-tenglamaning yechimlarini

$$u(z) = P\left\{ \begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & z \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{matrix} \right\}$$

simvol orqali ifodalash qabul qilingan. Bu simvolning nomi - ***Riemann simvoli.*** Ushbu simvolning ko'pgina hossalari [2]-kitobda berilgan.

[6]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) - nemis matematigi.

Shu hossalardan bittasini keltiraylik:

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & z \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{matrix}\right\} = P\left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \lambda & \mu & \nu & z_1 \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{matrix}\right\}. \qquad (52)$$

Bu yerda

$$z = \frac{Az_1 + B}{Cz_1 + D} \quad - \qquad (53)$$

kasr-chiziqli almashtirish. Topish osonki

$$z_1 = \frac{Dz - B}{A - Cz}.$$

Shunga yarasha

$$a_1 = \frac{Da - B}{A - Ca}, \qquad b_1 = \frac{Db - B}{A - Cb}, \qquad c_1 = \frac{Dc - B}{A - Cc}.$$

Bu formulalarning ma'nosi nimadan iborat? (53)-almashtirish kompleks tekisligidagi z nuqtani z_1 nuqtaga o'tkazadi. (52)-tenglikdan kelib chiqadiki, bu almashtirish natijasida maxsus nuqtalar a_1, b_1, c_1 ga o'tadi va yechim ko'rsatkichlari λ, μ, ν, λ', μ', ν' lar o'zgarmaydi. Bu degani bizga a, b, c maxsus nuqtalardagi yechimlar berilgan bo'lsa ularni a_1, b_1, c_1 nuqtalarga (52)-orqali o'tkazishimiz mumkin.

Odatda maxsus nuqtalarni $a = 0, b = 1, c = \infty$ nuqtalarda joylashtirish qabul qilingan. Buning uchun (51)-tenglamada

$$w = \frac{z - a}{z - c}\gamma, \qquad \gamma = \frac{b - c}{b - a}$$

almashtirish bajaraylik. Bu almashtirish (53)-almashtirishning hususiy holidir. Ko'rinib turibdiki, bu holda $z = a$ nuqta $w = 0$ nuqtaga o'tadi, $z = b$ nuqta $w = 1$ nuqtaga o'tadi va $z = c$ nuqta $w = \infty$ nuqtaga o'tadi:

$$a \to 0, \qquad b \to 1, \qquad c \to \infty.$$

Klassik matematik fizika tenglamalarida butun kompleks tekisligida beshtadan ortiq regular maxsus nuqtalar uchramaydi. To'rtta va beshta maxsus nuqtali tenglamalar g'oyatda kam uchraganligi uchun biz ularning nazariyasida to'xtab o'tmaymiz.

§12. Gipergeometrik funksiya (Gauss funksiyasi)

§12.1. Tenglama va uning yechimlari

Quyidagi tenglama *gipergeometrik tenglama* deyiladi:

$$z(1-z)u''(z)+(c-(a+b+1)z)u'(z)-abu(z)=0. \qquad (54)$$

Agar uni

$$u''+\left(-\frac{c}{z(z-1)}+\frac{a+b+1}{z-1}\right)u'+\frac{ab}{z(z-1)}u=0$$

ko'rinishda keltirsak uning yechimini

$$u=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{matrix}\right\}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin bo'ladi. Ushbu jadvalning birinchi ustunini tekshiraylik. $z=0$ nuqtada $p_{-1}=c$, $q_{-2}=0$. Shunga yarasha aniqlovchi tenglama va uning yechimlari:

$$s^2+s(c-1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad s_1=0, \quad s_2=1-c.$$

Birinchi ustun tekshirildi. Ikkinchi va uchinchi ustunlar ham shunday tekshiriladi.

$z=0$ nuqta atrofidagi yechimni topaylik. $s_1=0$ ga mos keluvchi yechimdan boshlaymiz:

$$u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots.$$

Uning hosilalarinin hisoblab (54)-tenglamaga olib borib qo'yamiz. z ning bir xil drajaari oldidagi koeffisientlarni tenglashtirsak quyidagi munosabatlarni olamiz:

$$ca_1-aba_0=0 \quad \Rightarrow \quad a_1=\frac{ab}{c}a_0,$$

$$2a_2-(a+b+1)a_1+2ca_2-a_1ab=0 \quad \Rightarrow \quad a_2=\frac{1}{2}\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}a_1,$$

yoki,

$$a_2 = \frac{1}{2}\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}a_0.$$

Shu jarayonni davom ettirib

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)}a_0$$

ekenligini topamiz. Tenglamamiz chiziqi bo'lgani uchun $a_0 = 1$ deb olaylik, bu holda yning yechimi

$$F(a,b;c;z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{55}$$

ga keltiriladi, bu yerda

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

(55)-qator ***gipergeometrik qator*** yoki ***funksiya*** deyiladi. (54)-tenglamaning $z = 0$ nuqtaga eng yaqin maxsus nuqtasi $z = 1$ bo'lgani uchun bu qatorning yaqinlashuv sohasi $|z| < 1$ bo'ladi. Ko'pincha biz aniqlagan gipergeometrik funksiya

$${}_2F_1(a,b;c;z)$$

ko'rinishda belgilanadi, bu belgilash (55)-qator suratida ikkita parametr: a va b, maxrajida esa bitta c parametr borligini bildiradi. Umumlashgan gipergeometrik qatorlar ham bor, ularning suratida va maxrajida bir-nechadan parametrlar bo'lishi mumkin.

$z = 0$ nuqtadagi ikkinchi yechimga o'taylik. Uning ko'rinishi

$$u_2 = z^{1-c}f(z) \tag{56}$$

bo'lishi kerak, bu yerdagi $f(z)$ funksiya $z = 0$ nuqtada analitik bo'lgan funksiyadir. Agar (56)-ni (54)-tenglamaga olib borib qo'ysak $f(z)$ uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$z(1-z)f'' + (2-c-z(a+b+3-2c))f' + \\ + (c(1-c)-(a-c+1)(b-c+1))f = 0.$$

Ko'rinib turibdiki,

$$f = {}_2F_1(b-c+1, a-c+1; 2-c; z).$$

Shu bilan biz (54)-tenglamaning $z = 0$ nuqta atrofidagi umumiy yechimini topdik:

$$u(z) = A\,{}_2F_1(a, b; c; z) + Bz^{1-c}\,{}_2F_1(b-c+1, a-c+1; 2-c; z).$$

§12.2. Integral tasavvur

Gipergeometrik funksiya uchun integral tasavvurlar juda ko'p [5]. Ularning ichida eng ko'p ishlatiladigani quyidagisi:

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt. \qquad (57)$$

$c-b>0$

$c>b>0$

2.5-mashq. $(1-tz)^{-a}$ funksiyani qatorga yoyib shu integral tasavvurdan (55)-qatorni keltirib chiqaring.

§12.3. Hususiy hollar

Quyidagilarni isbot qiling:

1. $(1+z)^n = {}_2F_1(-n, b; b; -z)$.
2. $\ln(1+z) = z\,{}_2F_1(1, 1; 2; -z)$.
3. $\ln\dfrac{1+z}{1-z} = 2z\,{}_2F_1\left(\dfrac{1}{2}, 1; \dfrac{3}{2}; z^2\right)$.

7 4. $\dfrac{1+z}{(1-z)^{2a+1}} = {}_2F_1(2a, a+1; a; z)$.

5. $\arcsin z = z\,{}_2F_1\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}; z^2\right)$. uyda qil

8 6. $\arctan z = z\,{}_2F_1\left(\dfrac{1}{2}, 1; \dfrac{3}{2}; -z^2\right)$.

7. ${}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z)$.

8.

$$\frac{d^n}{dz^n}\,{}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\,{}_2F_1(a+n,b+n;c+n;z).$$

9.

$${}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$
$$c \neq 0,-1,-2,\ldots, \quad \mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}(a+b).$$

10.

$${}_2F_1(a,b;1+a-b;-1) = 2^{-a}\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-b+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)},$$

$\mathrm{Re}(1+a-b) \neq 0,-1,-2,\ldots.$

11.

$${}_2F_1(a,1-a;b;\frac{1}{2}) = 2^{1-b}\frac{\Gamma(b)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}+\frac{b}{2})\Gamma(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2})}$$

12.

$$e^z = \lim_{\beta\to\infty} {}_2F_1(1,\beta;1;z/\beta).$$

13.

$${}_2F_1(a,b+1;c;z) - {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{az}{c}\,{}_2F_1(a+1,b+1;c+1;z).$$

14.

$${}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\,{}_2F_1(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}).$$

15. Avvalgi munosabatni ikki marta qo‘llab va $a \leftrightarrow b$ almashtirishdan foydalanib:

$${}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,c-b;c;z).$$

Misollarning ikkitasini yechaylik.

1.

$$ {}_2F_1(-n, b; b; -z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n+k)}{\Gamma(-n)} \frac{(-z)^k}{k!} = $$

$$ = 1 + \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n)}(-z) + \frac{\Gamma(-n+2)}{\Gamma(-n)} \frac{z^2}{2!} + \cdots $$

Bu yerda

$$ \Gamma(-n+1)/\Gamma(-n) = -n, \text{ chunki } \Gamma(-n+1) = -n\Gamma(-n), $$

$\Gamma(-n+2)/\Gamma(-n) = n(n-1)$, chunki $\Gamma(-n+2) = n(n-1)\Gamma(-n)$ va h.k. Bu qator $k = n$ hadda uziladi, chunki $k = n+1$ uchun $\Gamma(-n+n+1)/\Gamma(-n) = 0$ bo'ladi, k undan katta bo'lsa ham $\Gamma(-n+k)/\Gamma(-n)$ nisbat yana nolga teng bo'ladi. Demak,

$$ {}_2F_1(-n, b; b; -z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n+k)}{\Gamma(-n)} \frac{(-z)^k}{k!} = $$

$$ = 1 + nz + \frac{1}{2}n(n-1)z^2 + \cdots + z^n = (1+z)^n. $$

2.

$$ z\,{}_2F_1(1, 1; 2; -z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n}{(2)_n} \frac{(-z)^n}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}(-z)^{n+1} = $$

$$ = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \cdots = \ln(1+z). $$

§12.4. Legendre funksiyalari

Umumlashgan Legendre tenglamasini yozaylik:

$$ (1-z^2)u'' - 2zu' + (\nu(\nu+1) - \mu^2(1-z^2)^{-1})u = 0. $$

Agar $\nu = n$ butun son bo'lsa bu tenglamaning yechimi umumlashgan Legendre polinomlarini beradi. Ushbu tenglamada

$$ u = (z^2-1)^{\mu/2} v, \qquad z = 1 - 2\xi $$

almashtirishlarni bajarsak

$$\xi(1-\xi)v'' + (\mu+1)(1-2\xi)v' + (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)v = 0$$

tenglamani olamiz. Bu esa $a = \mu - \nu$, $b = \mu + \nu + 1$, $c = \mu + 1$ parametrlik Gauss tenglamasidir. Natijada

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)$$

munosabatga kelamiz.

§13. Irregular maxsus nuqta

$$u'' - k^2 u = 0 \tag{58}$$

tenglamaning bitta maxsus nuqtasi bor - $z = \infty$. U ham bo'lsa irregular nuqta. Buni quyidagicha ko'rishimiz mumkin: $z = 1/\zeta$ almashtirish bajaramiz va natijada

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta}\frac{du}{d\zeta} - \frac{k^2}{\zeta^4}u = 0$$

tenglamani olamiz. Ko'rinib turibdiki, $\zeta = 0$ ($z = \infty$) nuqta irregular maxsus nuqta.

(58)-tenglamada $z = \dfrac{1}{w-a}$ almashtirish bajarib maxsus nuqtani $w = a$ nuqtaga ko'chiramiz:

$$\frac{d^2u}{dw^2} + \frac{2}{w-a}\frac{du}{dw} - \frac{k^2}{(w-a)^4}u = 0. \tag{59}$$

Bu tenglamaning yechimini (58)-tenglamaning yechimidan osongina topamiz:

$$u = Ae^{\frac{k}{w-a}} + Be^{-\frac{k}{w-a}}. \tag{60}$$

Mana shu yechimdan irregular maxsus nuqtaning talqinini olishimiz mumkin: *tenglamaning irregular maxsus nuqtasiga yechimning muxim maxsus nuqtasi to'g'ri keladi.*

Irregular maxsus nuqtaga yana bir tomondan qarash mumkin. Ikkita regular maxsus nuqtali 40-tenglamada maxsus nuqtalarni ustma-ust tushuramiz: $b = a + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$. Undan tashqari $\lambda = -\mu = k/\varepsilon$ deb olish kerak. Bu holda 40-tenglama 59-tenglamaga o'tadi. Demak, ***ikkita regular maxsus nuqtalarning qo'shilishida hosil bo'lgan maxsus nuqta irregular bo'lar ekan.***

Bu natijani yechimlar ustidagi amallar bilan ham tasdiqlash mumkin.

Ikkita regular maxsus nuqtali tenglamaning yechimi (47)-ko'rinishda bo'lishini ko'rsatgan edik:

$$u(z) = A\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\lambda} + B\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\mu}. \tag{61}$$

Ikkita maxsus nuqtalarni birlashtirish uchun yuqorida ko'rsatilgan $b = a + \varepsilon$, $\lambda = -\mu = k/\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$ almashtirishlar bajarish kerak. Bunda quyidagini olamiz:

$$u = A\left(\frac{z-a}{z-a+\varepsilon}\right)^{k/\varepsilon} + B\left(\frac{z-a}{z-a+\varepsilon}\right)^{-k/\varepsilon} = A\left(1 - \frac{\varepsilon}{z-a}\right)^{-k/\varepsilon} +$$

$$+B\left(1 - \frac{\varepsilon}{z-a}\right)^{k/\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} Ae^{\frac{k}{z-a}} + Be^{-\frac{k}{z-a}}.$$

§14. Aynigan gipergeometrik funksiya

§14.1. Tenglama va uning yechimlari

Gaussning (54)-tenglamasida $z \to z/b$ almashtirish bajarib $b \to \infty$ limitga o'tsak

$$zu'' + (c - z)u' - au = 0 \tag{62}$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamaning nomi ***aynigan gipergeometrik tenglama***, yoki, ***Kummer tenglamasi.*** Bu tenglamaning ikkita maxsus nuqtasi bor - $z = 0$ regular maxsus nuqta va $z = \infty$ - irregular maxsus nuqta. Uning yechimini qator sifatida qidirib topishimiz mumkin, ammo osonrog'i (55)-gipergeometrik qatordan $z \to z/b$, $b \to \infty$ almashtirish bajarib keltirib chiqarishimiz mumkin:

$$ {}_1F_1(a;c;z) = 1 + \frac{a}{c}z + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \cdots = $$
$$ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}. \quad (63) $$

Funksiyaning indekslari tushunarlidir - qatorning surati va maxrajida bittadan parametr bor. Bu qatorning yaqinlashuv sohasi $|z| < \infty$, qatorimiz kompleksn tekisligining chekli qismida yaqinlashuvchidir. Topilgan funksiya ***aynigan gipergeometrik funksiya***, yoki, ***Kummer funksiyasi***[7] deyiladi. Ko'pincha Kummer funksiyasi o'zining maxsus belgisi orqali belgilanadi:

$$ {}_1F_1(a;c;z) = \Phi(a;c;z). $$

Gipergeometrik tenglamada uchta regular maxsus nuqta bor edi - $0, 1, \infty$. Bajarilgan $z \to z/b$, $b \to \infty$ almashtirish orqali ikkita regular maxsus nuqtalar $z = 1$ va $z = \infty$ ni birlashtirdik, buning natijasida $z = \infty$ nuqta irregular nuqtaga aylandi, $z = 0$ nuqta regular nuqtaligicha qoldi. $z = 0$ ning regular maxsus nuqtaligi (62)-tenglamadan ochiq-oydin ko'rinib turibdi. (62)-tenglamada $z = 1/\zeta$ almashtirish bajarib

$$ \frac{d^2u}{d\zeta^2} + \left(\frac{2}{\zeta} + \frac{1-c\zeta}{\zeta^2}\right)\frac{du}{d\zeta} - \frac{a}{\zeta^3}u = 0 $$

tenglamani olamiz. Bu tenglamadan yaqqol ko'rinib turibdiki, $\zeta = 0 (z = \infty)$ nuqta irregular nuqtadir.

$z = 0$ nuqta atrofidagi yechimni topaylik. Bu nuqtada aniqlovchi tenglama

$$ s^2 + s(c-1) = 0, $$

uning yechimlari $s_1 = 0$, $s_2 = 1 - c$. Gipergeometrik tenglamaning yechimini topganimizdagi uslubni yana bir qo'llasak

$$ u(z) = A\Phi(a;c;z) + Bz^{1-c}\Phi(a-c+1; 2-c; z) $$

formulani olamiz.

[7]Ernst Kummer (1810 - 1893) - nemis matematigi.

§14.2. Integral tasavvur

Huddi gipergeometrik funksiyaga o'xshash aynigan gipergeometrik funksiya uchun ham integral tasavvurlar juda ko'p [5]. Ularning ichida eng keng ishlatiladigani

$$\Phi(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 dt\, e^{zt} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}.$$

2.6-mashq. Integral ostida e^{zt} ni qatorga yoyib (63)-qatorni keltirib chiqaring.

2.7-mashq. Quyidagini isbot qiling:

$$\frac{d^n}{dz^n}\Phi(a;c;z) = \frac{(a)_n}{(c)_n}\Phi(a+n;c+n;z).$$

2.8-mashq. Quyidagini isbot qiling: $\Phi(a;c;z) = e^z\Phi(c-a;c;-z)$.

2.9-mashq. Quyidagini isbot qiling: $e^z = \Phi(a;a;z)$.

§14.3. Bessel funksiyalari

Bessel tenglamasini eslaylik (uni kompleks tekislikda yozib olaylik):

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0.$$

Bu tenglamaning ikkita maxsus nuqtasi bor: $z = 0$ - regular nuqta va $z = \infty$ - irregular nuqta. Demak, ushbu tenglama aynigan gipergeometrik tenglamaning hususiy holi ekan. Darhaqiqat, Kummer tenglamasida

$$u(z) = z^{-c/2}e^{z/2}w(z), \qquad a = \frac{1}{2} - k + \mu, \quad c = 1 + 2\mu$$

almashtirishlarni bajarsak quyidagi Whittaker tenglamasini olamiz:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2}\right)w = 0.$$

Yana bir almashtirish bajarsak:

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}y(z)$$

quyidagi tenglamani olamiz:

$$z^2y'' - zy' + \left(-\frac{z^2}{4} + (1-\mu^2)\right)y = 0.$$

Bessel funksiyasining normasini hisobga olib natija

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-iz}\Phi\left(\frac{1}{2}+\nu; 1+2\nu; 2iz\right)$$

ko'rinishga keltirilishi mumkin.

III-BOB.

ASIMPTOTIK METODLAR

§1. Asimptotik qator tushunchasi

Ba'zi-bir hollarda biror funksiyani o'rganayotganimizda uning aniq ko'rinishini taqribiy ko'rinishi bilan almashtirishga to'g'ri keladi. Birdan-bir talab - mana shu taqribiy ifoda funksiyamizning asosiy hossalarini ma'lum bir sohada yaxshi akslantirsin. Hususan, $f(z)$ funksiyaning o'rniga uning katta argumentlarida quyidagi ko'rinishdagi

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots \tag{1}$$

qatorni olish maqsadga muvofiq bo'lishi mumkin. Bu qatorning hususiy yig'indisi uchun

$$\lim_{z\to\infty} z^n \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{z^k} \right\} = \lim_{z\to\infty} z^n \left\{ f(z) - s_n \right\} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

ga ega bo'lsak u $f(z)$ funksiyani uning katta argumentida yaxshi yaqinlashtirgan bo'ladi. (1)-qator yaqinlashuvchi bo'lishi shart emas, u faqat $f(z)$ funksiyaning z ning katta qiymatlaridagi asosiy hossalarini aks ettirishi kerak. (2)-shartga bo'ysungan (1)-qator $f(z)$ funksiyasining *asimptotik yoyilmasi* deyiladi. Ushbu ta'rif quyidagicha belgilanadi:

$$f(z) \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots \tag{3}$$

Har bir funksiyaning asimptotik qatori (agar u mavjud bo'lsa) yagonadir. Rostdan ham, quyidagi formulalardan ko'rish mumkinki, (1)-qatordagi har bir koeffisient $f(z)$ funksiya orqali yagona ma'noda aniqlanadi:

$$c_0 = \lim_{z\to\infty} f(z), \quad c_1 = \lim_{z\to\infty} z\{f(z) - c_0\}, \; \cdots,$$
$$c_n = \lim_{z\to\infty} z^n\{f(z) - s_n\}.$$

Lekin bitta asimptotik qator bir necha funksiyaning asimptotik yoyilmasi bo'lishi mumkin. Masalan, e^{-z} va 0 funksiyalarning asimptotik qatorlari bir xildir, chunki $\lim\limits_{z\to\infty} z^n e^{-z} \to 0$.

Asimptotik qatorlarni qo'shish va ko'paytirish mumkin: agar

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{z^k} \quad \text{va} \quad g(z) \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{z^k}$$

bo'lsa

$$f(z)+g(z) \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k + d_k}{z^k}, \; f(z)g(z) \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + \cdots + c_n d_0}{z^k}$$

bo'ladi. Asimptotik qatorni hadlab integrallash mumkin (agar (3)-qator c_2/z^2 had bilan boshlangan bo'lsa):

$$\int\limits_z^\infty dz f(z) \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{c_k}{(k-1)z^{k-1}}.$$

Ammo asimptotik qatorni hadlab differensiallash mumkin emas. Masalan, $f(x) = e^{-x}\sin e^x$ funksiyani olaylik. Ko'rinib turibdiki, $f(x) \sim 0$. Ammo $f'(x) = -e^{-x}\sin e^x + \cos e^x$ funksiya hech qanday limitga ega emas ($x \to \infty$ da).

Ushbu bob asosan qandaydir integral orqali berilgan funksiyalarning asimptotik qatorlarini topishga bag'ishlangan.

§2. $O(\varepsilon)$ va $o(\varepsilon)$ belgilar haqida

Agar shunday A son topilib

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A, \qquad 0 < |A| < \infty$$

bo'lsa, unda

$$f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$$

deb yoziladi. Masalan,

$$\cos\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} O(1), \qquad \sin\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} O(\varepsilon),$$

$$\cos\varepsilon - 1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} O(\varepsilon^2), \qquad \frac{\varepsilon^{3/2}}{\sin\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} O(\varepsilon^{1/2}).$$

Agar $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0$ bo'lsa $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$ deb belgilanadi.

Masalan,

$$\sin\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} o(1), \qquad \sin\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} o(\varepsilon^{1/2}).$$

§3. Bo'laklab integrallash metodi

Bu metodni misollarda o'rganish maqsadga muvofiqdir.

3.1-misol. Quyidagi integral orqali aniqlangan funksiyani olaylik:

$$f(x) = \int\limits_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t}dt. \tag{4}$$

Integral aniq hisoblanmaydi. Ammo uning x katta bo'lgandagi qiymatini $1/x$ bo'yicha qator sifatida topishimiz mumkin. Buning uchun shu integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$u = \frac{1}{t}, \quad du = -\frac{dt}{t^2}, \quad dv = e^{-t}dt, \quad v = -e^{-t}.$$

Natijada

$$\begin{aligned} f(x) &= \left.\frac{e^{x-t}}{t}\right|_x^\infty - \int\limits_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^2}dt = \frac{1}{x} - \left(-\left.\frac{2}{t^2}e^{x-t}\right|_x^\infty - 2\int\limits_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^3}dt \right) = \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}(n-1)! + (-1)^n n! \int\limits_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}dt. \end{aligned} \tag{5}$$

qatorni olamiz. Bu qator x katta bo'lganida (4)-integral orqali aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun asimptotik qator rolini o'ynaydi. Qator yaqinlashuvchi emas, buni n-hadning suratida $(n-1)!$ borligidan tushunishimiz mumkin: qoldiq had uchun

$$n!\int\limits_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}dt = n!\frac{1}{x^{n+1}} - (n+1)!\int\limits_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}dt < \frac{n!}{x^{n+1}}$$

dan ko'rinib turibdiki

$$x^n\left\{f(x)-s_n(x)\right\}<\frac{n!}{x}\to 0,\qquad x\to\infty,$$

ammo, chekli x uchun $n\to\infty$ da $\frac{n!}{x}\to\infty$. Bular shuni ko'rsatadiki,

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}(n-1)!$$

qator x katta bo'lganda (ma'lum bir n uchun) (4)-integral orqali berilgan $f(x)$ funksiyani talab qilingan aniqlikda yaqinlashtirib beradi. Asimptotik deyilgan qatordan talab qilingani shudir.

3.2-misol

$$f(x)=\int_x^\infty dte^{x^2-t^2}=-\frac{1}{2}e^{x^2}\int_x^\infty\frac{1}{t}d\left(e^{-t^2}\right)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2^2}e^{x^2}\int_x^\infty\frac{1}{t^3}d\left(e^{-t^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^3x^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7}+\dots. \tag{6}$$

3.3-misol. Bo'laklab intergallash yo'li bilan asimptotik qatorga o'tishga yana bir misol:

$$f(x)=\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t^2}dt=\left|u=\frac{1}{t^2},\quad dv=e^{-t}dt\right|=\frac{e^{-x}}{x^2}-2\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t^3}dt= \tag{7}$$

$$=e^{-x}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2!}{x^3}+\frac{3!}{x^4}-\dots+\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^{n+1}}+\dots\right).$$

Agar bo'laklab integrallashda birinchi bosqichda adashib $u=e^{-t}$ va $dv=dt/t$ deb olganimizda asimptotik (ya'ni, $1/x$ ning darajalari bo'yicha) qator emas, balki x ning musbat darajalari bo'yicha qatorni olgan bo'lar edik.

Olingan qatorlarning hammasi asimptotik qatorlar. Ular berilgan funksiyani uning argumenti katta bo'lganida kerakli aniqlikda yaqinlashtirib beradi.

Yaqinlashuvchi oddiy qator (masalan, Taylor qatori) haqida gapirganimizda u qatorning qancha ko'proq hadlarini xisobga olsak shuncha yuqoriroq aniqlikka ega bo'lamiz. Asimptotik qator haqida gap ketganda bunday emas. (5)-, (6)- va(7)-formulalardan ko'rinib turibdiki argument x o'zgarmasdan turganda har bir keyingi hadning hissasi oldingi hadning hissasidan katta bo'lib ketishi mumkin - har bir hadning suratiga faktorial kirgan, faktorial juda tez o'suvchi funksiya. Masalan, (5)-formulada n-nchi hadning $(n-1)$-hadga nisbati (absolut qiymati bo'yicha)

$$\frac{n!}{x^{n+1}} \div \frac{(n-1)!}{x^n} = \frac{n}{x}$$

ga teng. Oydinki, n katta bo'lganida bu nisbat birdan katta. Shu sababdan asimptotik qatorning faqatgina bir necha birinchi hadlari qoldiriladi, x katta bo'lganda shuning o'zi yetarlidir.

6-formulaga qaytaylik. $\int\limits_0^x dte^{-t^2}$ integralni ikki xil yo'l bilan hisoblaymiz. Birinchidan

$$\int\limits_0^x dte^{-t^2} = \int\limits_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} + \cdots\right) dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \cdots$$

Bu - yaqinlashuvchi qator. Endi integralni ikkiga bo'lamiz va uning ikkinchi qismi uchun 6-formuladan foydalanamiz:

$$\int\limits_0^x dte^{-t^2} = \int\limits_0^\infty - \int\limits_x^\infty = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \cdots\right).$$

Olingan formulaning ikkinchi qismi - uzoqlashuvchi asimptotik qator, ammo uning faqat chekli sonli hadlarini hisobga olsak $x \to \infty$ da integral o'zining aniq qiymatiga erishadi.

Yana bir necha misolni ko'raylik.

3.4-misol.

$$I(x) = \int\limits_0^\infty dtf(t)e^{-xt} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{x^{k+1}} + O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right), \qquad x \to \infty.$$

Bu integralni hisoblashda $dv = e^{-xt}dt$, $u = f(t)$ deb olish kerak. Albatta, $|f^{(k)}(0)| < \infty$ deb hisoblaymiz.

3.5-misol.

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty dtf(t)e^{i\alpha t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{(-i\alpha)^{k+1}} + O\left(\frac{1}{\alpha^{n+2}}\right), \qquad \alpha \to \infty.$$

3.6-misol.

$$I(x) = \int_a^b dt f(t) e^{xh(t)}.$$

x katta, $h(t)$ va $f(t)$ funksiyalar $a < t < b$ sohada differensiallanuvchi funksiyalar deb hisoblaymiz. Undan tashqari, $[a, b]$ intervalda $h'(t) \neq 0$ bo'lsin. Integralni katta x larda baholash uchun uni quyidagicha bo'laklab integrallaymiz:

$$u = \frac{f(t)}{h'(t)}, \quad dv = e^{xh(t)} h'(t) dt \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{e^{xh(t)}}{x}, \quad du = \left(\frac{f(t)}{h'(t)}\right)' dt.$$

Natijada

$$I(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{f(b)}{h'(b)} e^{xh(b)} - \frac{f(a)}{h'(a)} e^{xh(a)}\right) - \frac{1}{x}\int_a^b dt e^{xh(t)} \left(\frac{f(t)}{h'(t)}\right)' \qquad (8)$$

formulani olamiz. Ikkinchi integralni bo'laklab integrallasak u $1/x^2$ ga proporsional bo'lib chiqadi, shartimiz bo'yicha $[a, b]$ intervalda $h'(t) \neq 0$ edi, bular hulosa shuki,

$$I(x) \sim \frac{1}{x}\left(\frac{f(b)}{h'(b)} e^{xh(b)} - \frac{f(a)}{h'(a)} e^{xh(a)}\right).$$

Agarda $h(a) > h(b)$ bo'lsa

$$I(x) \sim \frac{f(b) e^{xh(b)}}{xh'(b)} \quad \text{bo'ladi,}$$

$h(a) < h(b)$ holda esa

$$I(x) \sim -\frac{f(a) e^{xh(a)}}{xh'(a)} \quad \text{bo'ladi.}$$

3.7-misol. Quyidagi integralning asimptotikasini toping ([7]):

$$F(\lambda) = \int_0^a t^{\beta-1}\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha} dt.$$

Ba'zi-bir hollarda bu integral etalon integral deyiladi.

1. $\alpha + \beta < 0$ bo'lsin. Bu holda

$$F(\lambda, \alpha, \beta) = \int_0^a t^{\beta-1}\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha} dt = \left(\int_0^{\infty} - \int_a^{\infty}\right) t^{\beta-1}\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha} dt = F_1 - F_2.$$

F_1 ni topish qiyin emas:

$$F_1 = \int\limits_0^\infty t^{\beta-1}\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)^\alpha dt = \lambda^{-\alpha-\beta}\int\limits_0^\infty t^{\beta-1}(t+1)^\alpha dt = \lambda^{-\alpha-\beta}B(\beta,-\alpha-\beta).$$

F_2 ning ostidagi funksiyani $1/\lambda$ bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$F_2 = \int\limits_a^\infty dt t^{\beta-1}\sum_{k=0}^\infty C_\alpha^k t^{\alpha-k}\lambda^{-k} = -\sum_{k=0}^\infty C_\alpha^k\lambda^{-k}\frac{a^{\alpha+\beta-k}}{\alpha+\beta-k}.$$

Natija:

$$F(\lambda,\alpha,\beta) = \int\limits_0^a t^{\beta-1}\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)^\alpha dt = \lambda^{-\alpha-\beta}B(\beta,-\alpha-\beta)+\sum_{k=0}^\infty C_\alpha^k\lambda^{-k}\frac{a^{\alpha+\beta-k}}{\alpha+\beta-k}.$$

2. $\alpha+\beta > 0$ bo'lsin. Bu holda $F(\lambda,\alpha,\beta)$ ni $\varepsilon = 1/\lambda$ bo'yicha $N = [\alpha+\beta]+1$ ($[a]$ belgi a sonining eng katta butun qismini bildiradi) marta differensiallasak avvalgi holga kelamiz:

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^N F(\lambda,\alpha,\beta) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-N+1)F(\lambda,\alpha-N,\beta).$$

Buni N marta integrallasak asosiy asimptotika uchun

$$F(\lambda,\alpha,\beta) \sim \text{const}\lambda^{-\alpha+\beta}$$

hadni olamiz.

§4. Laplace metodi

Matematik fizikada ko'pgina hollarda

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b dt\varphi(t)e^{\lambda f(t)} \tag{9}$$

ko'rinishdagi integrallarning asimptotikasini hisoblashga to'g'ri keladi. Asosiy g'oya: *Agar $f(t)$ funksiya $[a,b]$ intervalda bitta keskin maksimumga ega bo'lsa λ ning katta qiymatlarida integralga asosiy hissani mana shu keskin maksimumning atrofi qo'shadi.* Agar keskin maksimumlar bir-nechta bo'lsa ularning hissalarini alohida analiz qilib chiqash kerak, umuman olganda asosiy asimptotikaga ularning eng kattasi hissa qo'shadi, qolgan maksimumlar keyingi hadlarga hissa qo'shadi. Shu g'oyaga asoslangan metod Laplace metodi deyiladi.

Bu metodning tavsifi a) maksimumning qayerda joylashganiga - $[a,b]$ intervalning chegarasidami yoki uning ichidami va b) maksimum nuqtasida $f(t)$ ning nechta hosilasi nolga tengligiga bog'liq.

§4.1. $f(t)$ ning maksimumi intervalning chegarasida

$f'(a) \neq 0$ bo'lgan hol

$t = a$ nuqtada $f(t)$ o'zining maksimumigs erishsin:

max

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \cdots, \qquad f(a) \geq f(t),\ t \in [a,b].$$

Bu yerda $f'(a) < 0$ bo'lishi kerak, aks holda $f(a)$ maksimum nuqta bo'lmaydi. λ katta bo'lganda integralga asosan $t \simeq a$ atrofi hissa qo'shgani uchun integral ostidagi ifodani $t = a$ nuqta atrofida qatorga yoyamiz:

$$F(\lambda) = \int_a^b dt \varphi(t) e^{\lambda f(t)} =$$

$$= \int_a^b dt \left(\varphi(a) + \varphi'(a)(t-a) + \cdots\right) e^{\lambda(f(a)+f'(a)(t-a)+\cdots)}$$

va olingan ifodada faqat asosiy hissa qo'shadigan hadlarni qoldiramiz:

$$F(\lambda) = \int_a^b dt \varphi(t) e^{\lambda f(t)} \simeq \varphi(a) e^{\lambda f(a)} \int_a^b dt e^{\lambda f'(a)(t-a)}.$$

Qolgan integralda $t - a = \tau$ deb belgilaymiz, yuqori chegarani ∞ ga almashtiramiz ($f'(a) < 0$ bo'lgani uchun $t = a$ nuqtadan uzoqlashsak integral osti nolga intilib ketadi):

$$F(\lambda) \sim \varphi(a)e^{\lambda f(a)} \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda|f'(a)|\tau} = \varphi(a)\frac{1}{\lambda|f'(a)|}e^{\lambda f(a)}.$$

?

Bu - asosiy had. Keyingi hadlarni topish uchun $\varphi(t)$ va $f(t)$ funksiyalarning yoyilmalaridagi yuqori tartibli hadlarni ham hisobga olish kerak.

$f'(a) = 0,\ f''(a) \neq 0$ hol

Bu holda

$$f(t) = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(t-a)^2 + \cdots, \qquad f''(a) < 0$$

bo'ladi. Integralga asosiy hissa:

$$F(\lambda) = \int_a^b dt\varphi(t)e^{\lambda f(t)} \simeq \varphi(a)e^{\lambda f(a)} \int_a^b dt e^{-\frac{1}{2}\lambda|f''(a)|(t-a)^2}$$

ko'rinishga ega. $\frac{1}{2}\lambda|f''(a)|(t-a)^2 = \tau$ almashtirish orqali uni

$$F(\lambda) \sim \frac{\varphi(a)}{\sqrt{2\lambda|f''(a)|}}e^{\lambda f(a)} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}e^{-\tau} = \varphi(a)e^{\lambda f(a)}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda|f''(a)|}}$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu - asosiy had.

$f'(a) = f''(a) = 0,\ f'''(a) \neq 0$ hol

Bu holda

$$f(t) = f(a) + \frac{1}{6}f'''(a)(t-a)^3 + \cdots, \qquad f'''(a) < 0$$

bo'ladi. Integral

$$F(\lambda) = \int_a^b dt\varphi(t)e^{\lambda f(t)} \simeq \varphi(a)e^{\lambda f(a)} \int_a^b dt e^{-\frac{1}{6}\lambda|f'''(a)|(t-a)^3}$$

ga keltirildi. $\frac{1}{6}\lambda|f'''(a)|(t-a)^3 = \tau$ almashtirish bajarib bu integralni osongina hisoblaymiz:

$$F(\lambda) \sim \varphi(a)e^{\lambda f(a)}\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\lambda|f'''(a)|}\right)^{1/3}\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{2/3}}e^{-\tau} =$$

$$= \varphi(a)e^{\lambda f(a)}\frac{\Gamma(1/3)}{3}\left(\frac{6}{\lambda|f'''(a)|}\right)^{1/3}.$$

Keyingi hadlarni hisoblash

$f(t)$ funksiyasining bir-necha xil o'zini tutishi uchun integral asimptotikasining asosiy hadlarini topdik. Keyingi hadlarni topishni bitta misolda ko'rsataylik. Formulalarni ortiqcha harflardan ozod qilish maqsadida 9-da integralning quyi chegarasini 0 deb olaylik. $\varphi(t)$ funksiya uchun $t = 0$ nuqta atrofida

$$\varphi(t) = t^\beta(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots) = \sum_{n=0}^\infty c_n t^{n+\beta}$$

yoyilma o'rinli bo'lsin. $f(t)$ funksiya esa $t = 0$ nuqta atrofida $f(t) = -kt^\alpha$ ko'rinishga ega bo'lsin. $\beta > -1$ va $\alpha > 0$ bo'lishi kerak. Bu holda

$$F(\lambda) = \int_0^b dt \sum_{n=0}^\infty c_n t^{n+\beta} e^{-\lambda k t^\alpha}$$

integralda $\lambda k t^\alpha = \tau$ almashtirish bajaramiz:

$$F(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^\infty c_n (\lambda k)^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}} \int_0^\infty d\tau \tau^{\frac{n+\beta+1}{\alpha}-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{\alpha}(\lambda k)^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{n+\beta+1}{\alpha}\right).$$

Avvalgi misollar bu umumiy formulaning hususiy hollari sifatida kelib chiqadi. $n = 0$ had asosiy had bo'ladi. $n = 1, 2, \ldots$ hadlar shu asosiy hadga tuzatmalar bo'ladi.

3.8-misol.

$$F(\lambda) = \int_0^{10} \frac{e^{-\lambda t}}{1+t} dt = \int_0^{10} dt e^{-\lambda t}(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{10/\lambda} dt e^{-t}\left(1 - \frac{t}{\lambda} + \frac{t^2}{\lambda^2} - \frac{t^3}{\lambda^3} + \cdots\right) \sim \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2!}{\lambda^3} - \cdots$$

3.9-misol.

$$\int_0^1 e^{-\lambda t} \ln(1+t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{1/\lambda} dt e^{-t} \ln\left(1 + \frac{t}{\lambda}\right) \sim \frac{1}{\lambda^2} + \cdots$$

3.10-misol.

$$\int_0^1 e^{-\lambda t} \ln(2+t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{1/\lambda} dt e^{-t} \ln\left(2 + \frac{t}{\lambda}\right) \sim \frac{\ln 2}{\lambda} + \cdots$$

§4.2. $f(t)$ ning maksimumi intervalning ichida: $f'(t_0) = 0,\ f''(t_0) \neq 0,\ t_0 \in [a, b]$

Asosiy had

$f(t)$ funksiya $t_0 \in [a, b]$ nuqtada o'zining maksimumiga ega bo'lsin:

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2} f''(t_0)(t - t_0)^2 + \cdots, \qquad f''(t_0) < 0, \qquad f(t_0) \geq f(t).$$

Asimptotikaning asosiy hadini topaylik:

$$F(\lambda) = \int_a^b dt \varphi(t) e^{\lambda f(t)} \simeq e^{\lambda f(t_0)} \int_a^b dt \varphi(t) e^{\frac{1}{2}\lambda f''(t_0)(t-t_0)^2} \simeq$$

$$\simeq e^{\lambda f(t_0)} \varphi(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{1}{2}\lambda |f''(t_0)|(t-t_0)^2} = e^{\lambda f(t_0)} \varphi(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(t_0)|}}. \tag{10}$$

Integral chegaralarini cheksizliklarga almashtirish yuqori tartibli hadlargagina ta'sir qiladi ([6], 5-bob, §3).

3.11-misol. Mavhum argumentli nolinchi tartibli Bessel funksiyasi $I_0(x)$ ning x katta bo'lgandagi asimptotikasini toping:

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta e^{x\sin\theta}.$$

Eksponentadagi funksiya $f(\theta) = \sin\theta$ o'zining o'zgarishi sohasida $\theta_0 = \pi/2$ nuqtada maksimumga erishadi:

$$f(\theta) = \sin\theta, \quad f'(\theta_0) = 0 \quad \to \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad f(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cdots$$

Asosiy asimptotika:

Qaydan

$$I_0(x) \sim \frac{1}{2\pi} e^x \int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{-\frac{1}{2}\theta^2} = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Umumiy formula

Umumiy holda $a < t_0 < b$ nuqtada maksimumga ega bo'lgan funksiya uchun

$$f(t) = f(t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + \cdots + a_n(t - t_0)^n + \cdots$$

deb olaylik, bunda $a_n = f^{(n)}(t_0)/n!$, $a_2 < 0$. Integral ostida yangi o'zgaruvchini quyidagicha kiritamiz: $-\tau^2 = f(t) - f(t_0)$. Boshqacha so'z bilan aytganda

$$\tau = (t - t_0)\sqrt{-a_2 - a_3(t - t_0) - \cdots - a_n(t - t_0)^{n-2} - \cdots} \quad (11)$$

Ushbu formulaning teskarisini topib uni $t = \psi(\tau)$ deb belgilaymiz. Bunda

$$F(\lambda) = e^{\lambda f(t_0)} \int_{-a'}^{b'} \varphi(\psi(\tau))\psi'(\tau) d\tau e^{-\lambda\tau^2}$$

formulaga kelamiz. Bu yerda $a' > 0$ va $b' > 0$ bo'ladi, ularning aniq ta'riflarini 11-dan topish mumkin. Katta λ uchun olingan integralga integral ostidagi funksiyaning nol nuqta atrofi asosiy hissa qo'shadi.

$$\varphi(\psi(\tau))\psi'(\tau) = \sum c_n \tau^n$$

yoyilmani yuqoridagi integralga qo'yamiz va integralni ikki qismga bo'lamiz:

$$\int_{-a'}^{b'} = \int_{0}^{b'} + \int_{-a'}^{0} \text{ (kerakli yaqinlashuvda) } \simeq \int_{0}^{a} + \int_{-c}^{0}.$$

Natijada

$$\int_{-a'}^{b'} \varphi(\psi(\tau))\psi'(\tau)d\tau e^{-\lambda\tau^2} =$$

$$= \int_{0}^{a} \left(\varphi(\psi(\tau))\psi'(\tau) - \varphi(\psi(-\tau))\psi'(-\tau)\right) d\tau e^{-\lambda\tau^2} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \int_{0}^{a} d\tau \tau^{2n} e^{-\lambda\tau^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{\lambda^{n+1/2}} \int_{0}^{\lambda a^2} dx x^{n-1/2} e^{-x}$$

formulaga kelamiz. Katta λ uchun yuqori chegarani ∞ ga almashtirish quyidagini beradi:

$$F(\lambda) \simeq e^{\lambda f(t_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{\lambda^n} \frac{(2n)!}{4^n n!}. \tag{12}$$

Bu yerda quyidagi formula ishlatildi:

$$\int_{0}^{\infty} x^{n-1/2} e^{-x} = \Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{4^n n!}.$$

Agar $c_0 = \varphi(t_0)\psi'(t_0) = \dfrac{\varphi(t_0)}{\sqrt{-a_2}}$ ekanligini hisobga olsak (12)-dan asosiy had sifatida (10)-ni olamiz.

3.12-misol. Gamma-funksiyaning asimptotikasi:

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_{0}^{\infty} dt t^{\lambda} e^{-t}.$$

Integral ostini qulay ko'rinishga keltiraylik:

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1}\int\limits_0^\infty dt\, t^\lambda e^{-\lambda t} = \lambda^{\lambda+1}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t+\lambda\ln t}dt = \lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(t-1-\ln t)}dt.$$

Yuqoridagi formulalar bilan solishtirsak

$$\varphi(t) = 1, \quad f(t) = -(t-1-\ln t), \quad f'(t) = -1+\frac{1}{t}.$$

Integral ostidagi eksponenta $t = 1$ nuqtada o'zining maksimumiga erishar ekan:

$$f(t) \simeq f(1) + \frac{1}{2}f''(1)(t-1)^2 + \cdots = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + \cdots.$$

$\frac{1}{2}\lambda(t-1)^2 = \tau^2$ almashtirish bajaramiz:

$$\Gamma(\lambda+1) \sim \lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau^2} = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda.$$

Bu formulaning nomi - Stirling formulasi.

3.13-misol. Quyidagi nostandart integralning asimptotikasini toping:

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b dt e^{-\frac{1}{t-a} - \lambda(t-a)^2}.$$

Ko'rib chiqilgan usulni qo'llab bo'lmaydi. Quyidagicha yo'l tutamiz.

$$h(t) = -\frac{1}{t-a} - \lambda(t-a)^2, \quad \frac{\partial h(t)}{\partial t} = 0 = \frac{1}{(t_0-a)^2} - 2\lambda(t_0-a).$$

Bu hisob asosida $t = a + \lambda^{-1/3}s$ almashtirish bajaramiz. Unda

$$h(t,\lambda) = -\lambda^{1/3}\left(\frac{1}{s}+s^2\right)$$

va

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{1/3}}\int\limits_0^{\lambda^{1/3}(b-a)} ds e^{-\lambda^{1/3}(s^{-1}+s^2)}$$

bo'ladi. Y yog'iga standart metodga o'tish mumkin. Integral ostidagi eksponentadagi funksiya $s_0 = 2^{-1/3}$ nuqtada minimumga (eksponenta esa maksimumga) erishadi, agar $\lambda^{1/3}(b-a) > 2^{-1/3}$ bo'lsa eksponentadagi funksiyani $s_0 = 2^{-1/3}$ nuqta atrofida qatorga yoyamiz:

$$-\lambda^{1/3}\left(s^{-1}+s^2\right) = -\lambda^{1/3}\left(3\cdot 2^{-2/3} + 3\left(s-2^{-1/3}\right)^2 + \cdots\right).$$

Natija:

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^{1/3}} e^{-3(\lambda/4)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\lambda^{1/3} s^2} ds = \left(\frac{\pi}{3\lambda}\right)^{1/2} e^{-3(\lambda/4)^{1/3}}.$$

3.14-misol. Quyidagi nostandart integralning asimptotikasini toping:

$$F(x) = \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{t^a}{a} - xt\right) dt, \qquad 0 < a < 1.$$

$t = x^{1/(a-1)}\tau$ almashtirish bajaramiz:

$$F(x) = x^{1/(a-1)} \int_0^{\infty} \exp\left(x^{a/(a-1)}\left(\frac{\tau^a}{a} - \tau\right)\right) dt.$$

$\tau^a/a - \tau$ funksiyaning maksimumi $\tau_0 = 1$ nuqtada, shu nuqta atrofida ikkinchi tartibli hadlargacha aniqlikda qatorga yoyamiz:

$$F(x) = x^{1/(a-1)} \exp\left(\frac{1-a}{a} x^{a/(a-1)}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(1-a) x^{a/(a-1)} (\tau - 1)^2\right) \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{2(1-a)}}\, x^{(2-a)/2(a-1)} \exp\left(\frac{1-a}{a} x^{a/(a-1)}\right).$$

3.15-misol.

$$\int_0^x t^\alpha e^{-1/t} dt = \int_0^1 dz z^\alpha e^{-1/(xz)} x^{\alpha+1} = x^{\alpha+1} \int_1^\infty d\zeta \zeta^{-\alpha-2} e^{-\zeta/x} =$$

$$= x^{\alpha+1} e^{-1/x} \int_0^\infty du (1+u)^{-\alpha-2} e^{-u/x} \sim x^{\alpha+2} e^{-1/x}.$$

3.16-misol.

$$\int_1^\infty e^{-\lambda x^2} x^{5/2} \ln(1+x) dx = e^{-\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda(u^2+2u)} (1+u)^{5/2} \ln(2+u) \sim \frac{e^{-\lambda} \ln 2}{2\lambda}.$$

3.17-misol.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} \ln(1+x^2) \sim \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} x^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{3/2}}.$$

3.18-misol.

$$\int_0^1 dt \exp\left(-\frac{\lambda}{t} + t + \lambda\right) = \left| t = \frac{1}{1+\zeta} \right| =$$

$$= \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^2} \exp\left(-\lambda\zeta + 1 - \zeta - \zeta^2 + \cdots\right) \sim \frac{e}{\lambda}.$$

3.19-misol.

$$\int_0^\lambda t^\alpha e^{t^2/2} dt = \int_0^\lambda t^{\alpha-1} e^{t^2/2} d(t^2/2) = \int_0^{\lambda^2/2} (2z)^{(\alpha-1)/2} e^z dz \sim \lambda^{\alpha-1} e^{\lambda^2/2}.$$?

? 3.20-misol.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\lambda + x + x\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{1 + x/\lambda + x/\sqrt{\lambda}} \simeq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^{3/2}} + \cdots$$

3.21-misol.

$$\int_x^\infty \frac{\cos(t-x)}{t} = \int_0^\infty \frac{\cos t}{t+x} dt = \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{\cos t}{1+t/x} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \int_0^\infty t^n \cos t dt;$$

$$\int_0^\infty t^n \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^n \left(e^{it} + e^{-it}\right) = \frac{1}{2} \left[i^{n+1} + (-i)^{n+1}\right] n! =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ (-1)^{k+1}(2k+1)!, & n = 2k+1. \end{cases}$$

$$\int_x^\infty \frac{\cos(t-x)}{t} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{x^{2k+2}} (2k+1)! = \frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} + \cdots$$

§5. Davon oshish metodi

Davon oshish metodi quyidagi ko‘rinishdagi integrallarning asimptotikasini topishda ishlatiladi:

$$F(\lambda) = \int_C dz \varphi(z) e^{\lambda f(z)}, \tag{13}$$

bu yerda $f(z)$ va $\varphi(z)$ funksiyalar integrallash sohasida analitik bo'lgan funksiyalar, C - integrallash konturi, λ - katta parametr. Kontur C ning boshi va ohirini a va b deb belgilaylik.

Metodning asosiy g'oyasi quyidagicha. Cauchy teoremasi bo'yicha integral ostidagi funksiya analitik bo'lgan sohada konturni hohlagancha deformatsiyalashimiz mumkin - integralning qiymati bunda o'zgarmaydi. Shundan foydalanib konturni shunday deformatsiyalaylikki, natijada tanlab olingan yangi kontur bo'yicha harakat qilganimizda $f(z)$ funksiyasining maksimumi shu konturda yotgan bo'lib chiqsin. Bu esa bizga darrov Laplace metodini ko'llashga imkon beradi.

Ammo bitta narsaga ahamiyat beraylik - $f(z)$ funksiya analitik bo'lgani uchun u hech qanday sohada o'zining maksimumi yoki minimumiga erishishi mumkin emas (berk sohaning chegarasidan tashqari). Buni quyidagicha isbot qilishimiz mumkin. $f(z)$ ni haqiqiy va mavhum qismlarga ajrataylik:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{14}$$

$f(z)$ ning analitikligi uning haqiqiy va mavhum qismlari Cauchy-Riemann shartlariga bo'ysunishini bildiradi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{15}$$

Bu esa o'z navbatida u va v funksiyalarning garmonikligini bildiradi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{16}$$

Ohirgi qatordagi formulalarni avvalgi qatordagilardan keltirib chiqarish oson.

Biror bir z_0 nuqtada $f'(z_0) = 0$ bo'lsin. Analitik funksiyaning hosilasini ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha hisoblasak bir xil natijaga kelishimiz kerak. Masalan, uning x va y bo'yicha hosilalari bir biriga teng (Cauchy-Riemann shartlarining ma'nosi shunda). Demak, bir paytning o'zida

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(z)|_{z=z_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + i\frac{\partial}{\partial x} v(x, y)\right)_{x=x_0,\, y=y_0} = 0 \tag{17}$$

va

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(z)|_{z=z_0} = \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) + i \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \right)_{x=x_0,\, y=y_0} = 0 \tag{18}$$

bo'lishi kerak. Bu esa shu munosabatlarga kirgan hamma to'rtala husuisiy hosilalarning nolga tengligini bildiradi:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y} u(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x} v(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y} v(x_0,y_0) = 0. \tag{19}$$

u funksiya x_0, y_0 nuqtada maksimumga ega bo'lishi uchun

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_0,y_0) < 0$$

bo'lishi kerak, ammo (16)-formuladan ko'rinib turibdiki, bu holda

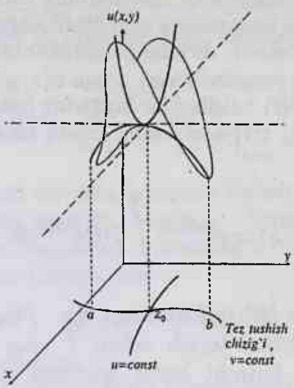
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x_0,y_0) > 0$$

bo'ladi. Demak, z_0 nuqtada biz x yo'nalishida maksimumga ega bo'lsak y yo'nalishida minimumga egamiz va teskarisi (u uchun ham, v uchun ham). Bulardan shunday hulosaga kelamiz: $f'(z_0) = 0$ bo'lgan z_0 nuqta $f(z)$ funksiya uchun ***egar nuqta*** bo'ladi - bu vaziyat (III.1)-rasmda $u(x,y)$ funksiya uchun ko'rsatilgan. Ushbu rasmda Cauchy-Riemann shartlaridan kelib chiqadigan yana bir munosabat hisobga olingan:

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{20}$$

Bu shuni bildiradiki, $u = const$ va $v = const$ ekvipotensial chiziqlar (x,y) tekisligining har bir nuqtasida bir-biriga perpendikular bo'lgan egri chiziqlar sistemasini tashkil qiladi. Ya'ni, $v = const$ chizig'ning ustida harakat qilganimizda u funksiyaning eng tez o'zgarishi yo'nalishida harakat qilgan bo'lamiz va teskarisi - $u = const$ chiziqning ustida harakat qilganimizda v funksiyaning eng tez o'zgarishi yo'nalishida harakat qilgan bo'lamiz.

Bularni aniqlab ***davon oshish usuli***ning asosiy g'oyasiga qaytaylik. Integrallash konturini shunday deformatsiyalaylikki



III.1-rasm: Egar nuqta

- yangi kontur z_0 nuqtadan o'tsin;
- yangi kontur bo'yicha harakat qilganimizda z_0 nuqtada u funksiya o'zining maksimumiga erishsin;
- z_0 nuqtaning yetarlicha yaqin atrofida bu konturning ustida $v = const$ bo'lsin.

Bunday tanlab olingan egri chiziq ***eng tez tushish chizig'i*** deyiladi, unga (III.1)-rasmda ab kontur mos keladi. Shu sababdan davon oshish metodi ko'pincha eng tez tushish metodi ham deyiladi[1].

Integralga qaytib kelib uni

$$F(\lambda) = \int\limits_{\tilde{C}} dz \varphi(z) e^{\lambda f(z)} \simeq e^{\lambda i v(x,y)} \int\limits_a^b \varphi(z(t)) e^{\lambda u(x,y)} z'(t) dt \quad (21)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda $\tilde{C}$ - yangi kontur, $z(t)$ - mana shu yangi konturning parametrik tenglamasi. Integrallash chegaralari sifatida a va b larni belgiladik, Laplace usulining asosiy

[1]Inglizchasi - *the method of steepest descent*

g'oyasi bo'yicha bu chegaraviy nuqtalarning katta ahamiyati yo'q - λ katta bo'lganida integralning asimptotikasiga asosiy hissani z_0 nuqtaning atrofi qo'shadi. Avvalgi paragraflardan ma'lum bo'lgan texnikani qo'llashni yengillashtirish uchun $u(x, y) = u(z(t)) = \tilde{f}(t)$ va $\varphi(z(t))z'(t) = \tilde{\varphi}(t)$ belgilashlar kiritamiz (esdan chiqarmaylik, integrallash jarayoni $z(t)$ konturning ustida ketayapti). Natijada quyidagini olamiz:

$$F(\lambda) \simeq e^{\lambda i v(x,y)} \int_a^b \tilde{\varphi}(t) e^{\lambda \tilde{f}(t)} dt. \tag{22}$$

$z_0 = z(t_0)$ nuqtada $\tilde{f}(t)$ maksimumga ega: $\tilde{f}'(t_0) = 0$, $\tilde{f}''(t_0) < 0$. Asosiy asimptotikani topish uchun $\tilde{f}$ ning Taylor qatorida $\tilde{f}(t_0)$ dan keyingi birinchi hadni qoldirsak yetadi: $\tilde{f}(t) \simeq \tilde{f}(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \tilde{f}''(t_0)$. Shu yaqinlashuvda $\tilde{\varphi}(t) \simeq \tilde{\varphi}(t_0)$ ga almashtiramiz. Integral darhol quyidagi holga keltiriladi (λ katta bo'lgan limitda integrallash chegaralarini cheksizliklarga almashtirishimiz mumkin):

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda f(z_0)} \tilde{\varphi}(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\frac{\lambda}{2}|\tilde{f}''(t_0)|(t-t_0)^2}. \tag{23}$$

Yangi o'zgaruvchi kiritaylik:

$$\tau^2 = \frac{1}{2}|\tilde{f}''(t_0)|(t - t_0)^2, \qquad t = t_0 + \tau\sqrt{\frac{2}{|\tilde{f}''(t_0)|}}. \tag{24}$$

Natijada

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda f(z_0)} \tilde{\varphi}(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\tilde{f}''(t_0)|}} \tag{25}$$

formulani olamiz. Bu yerda $\tilde{\varphi}(t_0) = \varphi(z_0)z'(t_0)$. Undan tashqari,

$$\tilde{f}''(t_0) = \frac{d^2}{dt^2}\tilde{f}(t)\Big|_{t=t_0} \tag{26}$$

Integrallash konturining ustida $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = \text{const}$ bo'lgani uchun bu formulani quyidagicha holga keltirishimiz mumkin:

$$\bar{f}''(t_0) = \frac{d^2}{dt^2}\bar{f}(t)\Big|_{t=t_0} = \frac{d^2}{dt^2}f(t)\Big|_{t=t_0} =$$
$$= \left(f''z'^2 + f'z''\right)_{t=t_0} = f''(z_0)z'^2(t_0). \quad (27)$$

$z(t)$ o'zining ta'rifi bo'yicha kompleks funksiya, demak, $z'(t_0) = ke^{i\theta}$ deb olishimiz mumkin, bunda k - haqiqiy son bo'ladi. θ esa $\tilde{C}$ konturga t_0 nuqtadagi urinmaning x o'qi bilan hosil qilgan burchagi. Shularni hisobga olib

$$\tilde{\varphi}(t_0) = \varphi(z_0)ke^{i\theta}, \quad |\bar{f}''(t_0)| = |f''(z_0)z'^2(t_0)| = |f''(z_0)|k^2 \quad (28)$$

deb yozib olish mumkin.

Natijada integralning asosiy asimptotikasi quyidagidan iborat bo'lib chiqdi:

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda f(z_0)}\varphi(z_0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|f''(z_0)|}}\,e^{i\theta}. \quad (29)$$

3.22-misol. Bessel funksiyasining x ning katta qiymatlari uchun asimptotikasini topaylik:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1} dz\,\frac{e^{x(z-1/z)/2}}{z^{n+1}}.$$

darsdan Shavad (Kitob)

Bu yerda

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^{n+1}}, \quad f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right).$$

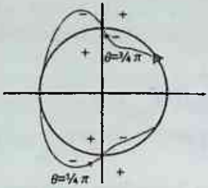
Ekstremum nuqtalari:

$$f'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1, \quad z_{1,2} = \pm i.$$

Bu - egar nuqtalardir. Bu nuqtalarda $\operatorname{Re} f = 0$. $f(z)$ ning haqiqiy va mavhum qismlari:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{x^2 + y^2}\right), \quad v(x, y) = \frac{1}{2}\left(y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

$z = \pm i$ nuqtalarda $u(x, y) = 0$. III.2-rasmda mana shu egar nuqtalarning



III.2-rasm: Bessel funksiyasining asimptotikasini hisoblash uchun kontur

atroflari "+" va "-" belgilar bilan belgilangan. Bunda "+" belgisi $u > 0$ sohaga mos keladi va "-" belgisi $u < 0$ sohaga mos keladi. $|z| = 1$ aylana kontur egar nuqtalar atrofida shunday deformatsiyalanganki, shtrixlangan chiziqlar bo'yicha yurganimizda biz vodiydan vodiyga davon oshib o'tishimiz mumkin - bunday yo'l "-" - "-" sohalarni birlashtiradi. "+" - "+" sohalarni bog'laydigan shtrixlangan yo'lda $u(x, y)$ funksiya o'zining minimumidan o'tadi va maqsadimizga to'g'ri kelmaydi. $u(x, y)$ ning eng tez o'zgaradigan konturi $z = +i$ nuqtada $\theta = 3\pi/4$ burchakli urinmaga ega, $z = -i$ nuqtada esa $\theta = \pi/4$ burchakli urinmaga ega. Ikkala nuqtaning ham beradigan hissasi bir xil tartibli kattalik shuning uchun ikkala hissaning yig'indisini olamiz. Bu nuqtalarda ularni rasmdagi strelkali kontur bo'yicha o'tganimizda quyidagilarga egamiz:

$$\varphi(\pm i) = e^{\mp i\pi(n+1)/2}, \quad f''(\pm i) = e^{\mp 3i\pi/2}, \quad |f''(\pm i)| = 1.$$

Demak

$$J_n(x) \sim \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(e^{x(i-1/i)/2-i\pi(n+1)/2+3i\pi/4} + e^{x(-i+1/i)/2+i\pi(n+1)/2+i\pi/4}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{30}$$

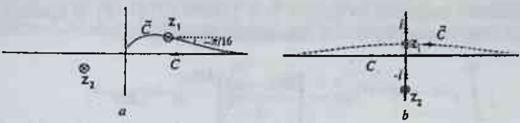
3.23-misol. ([7], [8])

$$\int_0^\infty \exp\left[\lambda(x + ix - x^3)\right] dx \sim e^{-i\pi/16}\left(\frac{\pi}{\lambda\sqrt{3\sqrt{2}}}\right)^{1/2} \exp\left(2^{7/4}3^{-3/2}e^{i3\pi/8}\lambda\right)$$

Bu holda $f(z) = z(1+i) - z^3$, $\quad f'(z) = 1 + i - 3z^2$, $\quad$ egar nuqtalar ikkita:

$$z^2 = (1+i)/3 = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\pi/4} \quad \text{tenglamaning yechimlari} \quad z_{1,2} = \pm 2^{1/4}3^{-1/2}e^{i\pi/8}.$$

Shu ikki nuqtada $f(z)$ ning qiymatlari:



III.3-rasm: Misollarga doir konturlar

$$f(z_1) = z_1\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4} - z_1^2\right) = z_1\frac{2^{3/2}}{3}e^{i\pi/4} = \frac{2^{7/4}}{3^{3/2}}e^{3i\pi/8}, \qquad f(z_2) = -\frac{2^{7/4}}{3^{3/2}}e^{3i\pi/8}.$$

Funksiyaning ikkila egar nuqtalardagi haqiqiy qismlarini solishtiraylik:

$$\mathrm{Re}f(z_1) = \frac{2^{7/4}}{3^{3/2}}\cos\frac{3\pi}{8} \simeq 0.2477 > 0,\ \mathrm{Re}f(z_2) = -\frac{2^{7/4}}{3^{3/2}}\cos\frac{3\pi}{8} \simeq -0.2477 < 0,$$

demak, integralga asosiy hissani z_1 nuqta qo'shadi. Agar faqat asosiy asimptotikani topmoqchi bo'lsak konturni z_1 nuqtadan o'tadigan qilib deformatsiyalash kerak (III.3*a*-rasmga qarang). θ burchakni quyidagicha topamiz: $f''(t_1) = f''(z_1)(z_1)'^2$ haqiqiy son bo'lishi uchun $2\theta + \pi/8 = 0$ bo'lishi kerak. $|f''(z_1)| = 2\sqrt{3\sqrt{2}}$ hisobga olinsa

$$\int_0^\infty \exp\left[\lambda(x + ix - x^3)\right] dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|f''(z_1)|}}e^{-i\pi/16}e^{\lambda f(z_1)} =$$

$$= e^{-i\pi/16}\left(\frac{\pi}{\lambda\sqrt{3\sqrt{2}}}\right)^{1/2}\exp\left(2^{7/4}3^{-3/2}e^{i3\pi/8}\lambda\right)$$

kelib chiqadi.

3.24-misol.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}(1+x^2)^{-\lambda}dx \sim \left[\frac{\pi(1-c)}{\lambda}\right]^{1/2} e^{-\lambda c}(2c)^{-\lambda}, \qquad c = \sqrt{2} - 1.$$

Integralni

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}(1+x^2)^{-\lambda}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \lambda\ln(1+x^2)}dx$$

ko'rinishga keltiramiz. $f(z) = iz - \ln(1+z^2)$ funksiya uchun $z_{1,2} = i(-1 \pm \sqrt{2})$ nuqtalar egar nuqtalardir, ularning joylashishi III.3*b*-rasmda ko'rsatilgan. $z = \pm i$ nuqtalar integral osti funksiya uchun maxsus nuqtalardir, shu sababli z_2 nuqtadagi davon balandroq bo'lishiga qaramay uni hisobga olmaymiz. $z_1 = ic$

nuqtaning hissasini topganda $|f''(z_1)| = (c+1)/c = 2/(1-c)$ ni hisobga olsih kerak ($f''(z_1)$ ning haqiqiyligi $\theta = 0$ ekanligini bildiradi):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \lambda \ln(1+x^2)} dx \sim \left[\frac{\pi(1-c)}{\lambda}\right]^{1/2} e^{-\lambda c}(2c)^{-\lambda}.$$

§6. Statsionar faza metodi

Statsionar faza metodi quyidagi ko'rinishdagi integrallarning asimptotikasini topishga mo'ljallangan:

$$I(\lambda) = \int_a^b dt\, \varphi(t)\, e^{i\lambda f(t)}. \tag{31}$$

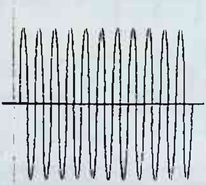
Integralga kirgan $\varphi(t)$ va $f(t)$ funksiyalar haqiqiy bo'lsin.

Riemann-Lebesque lemmasi. Agar $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ bo'lsa

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = o(1).$$

§6.1. $f'(t) \neq 0,\ t \subset [a, b]$ hol

Faraz qilaylik $f'(t) \neq 0$, $t \subset [a, b]$ bo'lsin. Eksponenta ko'rsatgichida mavhum birlikning borligi λ katta bo'lganda integral ostidagi funiksiyaning juda tez tebranishini bildiradi. Natijada ixtiyoriy chekli bir intervalni olib qarasak (III.4)-rasmdagi holni



III.4-rasm: (31)-integral ostining λ katta bo'lgandagi ko'rinishi ko'ramiz - qo'shni sohalardan kiruvchi hissalar bir-birini yeydi - Riemann-Lebesque lemmasining ma'nosi shunda. Agar

$$u = \frac{\varphi}{f'}, \quad dv = e^{i\lambda f} df$$

belgilashlar kiritib integralimizni bo'laklab integrallasak

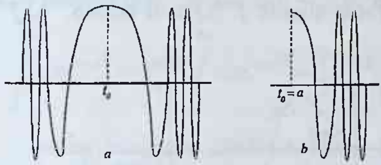
$$I(\lambda) = \frac{1}{i\lambda}\left(\frac{\varphi(b)}{f'(b)}e^{i\lambda f(b)} - \frac{\varphi(a)}{f'(a)}e^{i\lambda f(a)}\right) - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b d\left(\frac{\varphi}{f'}\right) e^{i\lambda f(t)} \tag{32}$$

ko'rinishga keladi. Bo'laklab integrallash amalini bajarish uchun birdan-bir $f'(t) \neq 0,\ t \subset [a,b]$ shartning o'zi yetarli. Bu holda integralning asosiy asimptotikasiga chegaraviy nuqtalargina hissa qo'shadi. Ularning qaysi biri muhimroq - $f(t)$ va $\varphi(t)$ funksiyalarga bog'liq.

Asosiy asimptotika $1/\lambda$ ga proporsional. (32)-ifodadagi qolgan integralni yana bir marta bo'laklab integrallasak undan $1/\lambda^2$ ga proporsional had kelib chiqadi. Bu amalni davom ettirib yuqori tartibli hadlarni ham topish mumkin.

§6.2. $f'(t_0) = 0,\ t_0 \subset [a,b]$ bo'lsin

Bu holda asimptotikaning asosiy hadi avvalgi holga nisbatan kattaroq bo'ladi. Buni tushunish uchun (III.5)-rasmga qaraylik.



III.5-rasm: $f'(t_0) = 0$ holdagi integral ostidagi ifodaga t_0 nuqta atrofida mos keluvchi grafik

Bu rasmda ko'rilayotgan holga (t_0 nuqta integrallash intervali ichida va chegarasida yotgan hollar uchun) tahminan mos keluvchi chizmalar berilgan. t_0 nuqta atrofida integral ostidagi eksponenta sekin o'zgaradi, natijada mana shu sohaning hissasi qo'shni sohalarning hissalari bilan qisqarmaydi va integralga qo'shilgan asosiy hissa bo'lib chiqadi.

$t_0 = a$ **hol - (III.5b-rasmga qarang)**

Rasmdan tushunarliki bu holda integralga asosiy hissa a nuqta atrofidan keladi.

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t - t_0)^2 + \cdots \tag{33}$$

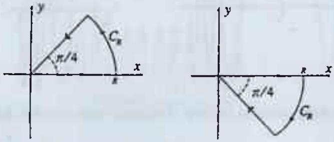
yoyilmani (31)-integralga olib borib qo'yamiz (hamma joyda $t_0 = a$ deb almashtirib)

$$I(\lambda) \simeq \int_a^b dt\, \varphi(t)\, e^{i\lambda f(a) + i\frac{1}{2}\lambda f''(a)(t-a)^2} = e^{i\lambda f(a)} \int_0^{b-a} dt\, \varphi(a+t)\, e^{i\lambda \frac{1}{2} f''(a) t^2} \tag{34}$$

Bizni asosiy hadning o'zi qiziqtirgan holda bu integralni

$$I(\lambda) \sim \varphi(a) e^{i\lambda f(a)} \int_0^\infty dt\, e^{i\frac{1}{2}\lambda f''(a) t^2} \tag{35}$$

ko'rinishga keltirib olamiz. Yuqori chegara $b - a$ ning o'rniga ∞ ga almashtirildi, bunda paydo bo'ladigan qo'shimcha hadlar asosiy yaqinlashuvga ta'sir qilmaydi. Olingan integralni quyidagicha hisoblaymiz. Faraz qilaylik $f''(a) > 0$ bo'lsin. $\frac{1}{2}\lambda f''(a) = \alpha$ deb



III.6-rasm: (35)-integralni hisoblashda ishlatiladigan konturlar

belgilaylik, $\alpha > 0$. Cauchi teoremasi bo'yicha (III.6)-rasmning birinchi qismida ko'rsatilgan yopiq kontur uchun

$$\oint\limits_C dz\, e^{i\alpha z^2} = 0 \tag{36}$$

bo'lishi kerak, chunki ushbu konturning ichida integral osti ifodaning hech qanday maxsus nuqtasi yo'q. Ushbu yopiq kontur uch qismdan iborat: 1)x oqi bo'yicha 0 dan R gacha, 2) R radiusli nimchorak aylanma C_R bo'yicha burchak 0 dan $\pi/4$ gacha, 3) argumenti $\pi/4$ bo'lgan nur bo'yicha R dan 0 gacha. Integralni ochib yozaylik.

1. Haqiyiy o'qning ustida $z = x,\ dz = dx$;
2. C_R konturning ustida $z = Re^{i\varphi},\ dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$;
3. $\pi/4$ burchakli nurning ustida $z = \rho e^{i\pi/4}$, $iz^2 = -\rho^2$, $dz = d\rho e^{i\pi/4}$.

Ya'ni

$$\oint\limits_C dz\, e^{i\alpha z^2} = \int\limits_0^R dx e^{i\alpha x^2} + iR\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi e^{i\alpha R^2 e^{2i\varphi}} + e^{i\pi/4}\int\limits_R^0 d\rho e^{-\alpha\rho^2} = 0. \tag{37}$$

$R \to \infty$ limitda ikkinchi integral nolga intiladi (integral ostidagi eksponentada $\exp(-R^2\sin(2\varphi))$ ifoda bor, $0 \le \varphi \le \pi/4$ bo'lgani uchun $R \to \infty$ limitda $\exp(-R^2\sin(2\varphi)) \to 0$ bo'ladi). Demak,

$$\int\limits_0^\infty dx e^{i\alpha x^2} = e^{i\pi/4}\int\limits_0^\infty d\rho e^{-\alpha\rho^2} = \frac{1}{2}e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{38}$$

Agar $\alpha < 0$ bo'lsa integralni hisoblash uchun (III.6)-rasmning ikkinchi qismida ko'rsatilgan konturdan foydalanish kerak. Bu holda

$$\int\limits_0^\infty dx e^{i\alpha x^2} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{\pi}{|\alpha|}} \tag{39}$$

bo'ladi. Shu natijalarni hisobga olsak (35)-integral uchun quyidagi asimptotik baholashni olamiz:

$f''(a) > 0$ holda:

$$I(\lambda) \sim \varphi(a)e^{i\lambda f(a)} \int\limits_0^\infty dt\, e^{i\frac{1}{2}\lambda f''(a)t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f''(a)}}\varphi(a)e^{i\frac{1}{2}\lambda f(a)+i\pi/4};$$

(40)

$f''(a) < 0$ holda:

$$I(\lambda) \sim \varphi(a)e^{i\lambda f(a)} \int\limits_0^\infty dt\, e^{i\frac{1}{2}\lambda f''(a)t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(a)|}}\varphi(a)e^{i\frac{1}{2}\lambda f(a)-i\pi/4}.$$

(41)

Avvalgi paragrafda ko'rgan edikki, integrallash intervalida $f(t)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lmaganda asosiy asimptotika $1/\lambda$ ga proporsional edi. Integrallash intervalida statsionar nuqta paydo bo'lganligi asosiy asimptotikani $1/\sqrt{\lambda}$ ga proporsional bo'lishiga olib keldi.

$a < t_0 < b$ bo'lgan hol

Bu holda statsionar nuqta integrallash intervalining ichida joylashgan bo'ladi ((III.5a)-rasmga qarang). Eksponentadagi $f(t)$ funksiyani t_0 nuqta atrofida qatorga yoyamiz va, har galdagidek, bos asimptotikanigina ko'zda tutib kvadratik had bilan chegaralanamiz:

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2 + \cdots . \qquad (42)$$

(31)-integralda mana shu almashtirishni bajaramiz:

$$I(\lambda) \simeq \int\limits_a^b dt\, \varphi(t)\, e^{i\lambda f(t_0)+\frac{1}{2}i\lambda f''(t_0)(t-t_0)^2} \qquad (43)$$

λ katta bo'lganida integralga asosiy hissani t_0 nuqta atrofi beradi, shu sababdan birinchidan, integrallash chegaralarini cheksizlikka almashtirishimiz mumkin, ikkinchidan, integral ostidan $\varphi(t_0)$ ni chiqarib olamiz:

$$I(\lambda) \simeq e^{i\lambda f(t_0)}\varphi(t_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\; e^{\frac{1}{2}i\lambda f''(t_0)\tau^2}. \tag{44}$$

(35)-integralni hisoblashda ishlatilgan texnikani yana bir marta qo'llashimiz kerak. Quyidagini hisobga olsak yetarli:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\alpha t^2} = 2\int\limits_{0}^{\infty} dt\, e^{i\alpha t^2}. \tag{45}$$

Natijada

$f''(a) > 0$ bo'lganda:

$$I(\lambda) \sim \varphi(a)e^{i\lambda f(a)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\frac{1}{2}\lambda f''(a)t^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f''(a)}}\varphi(a)e^{i\frac{1}{2}\lambda f(a)+i\pi/4}; \tag{46}$$

$f''(a) < 0$ bo'lganda:

$$I(\lambda) \sim \varphi(a)e^{i\lambda f(a)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\frac{1}{2}\lambda f''(a)t^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|f''(a)|}}\varphi(a)e^{i\frac{1}{2}\lambda f(a)-i\pi/4} \tag{47}$$

ekanligini topamiz.

3.25-misol. Butun indeksli Bessel funksiyasining $x \to \infty$ dagi asimptotikasini toping:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(x\sin t - nt)dt.$$

Bu integralni qulay ko'rinishga keltiraylik:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_0^{\pi}\exp(ix\sin t - int)dt.$$

Bu holda $\varphi(t) = e^{-int}$. $f(t) = \sin t$ funksiya $0 < t < \pi$ intervalda bitta statsionar nuqtaga ega: $t_0 = \pi/2$. Bu nuqtada $f''(\pi/2) = -1$. Demak, misolimiz 47-holga mos keladi:

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}e^{-i\pi n/2}e^{ix}e^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Javobni 30-formula bilan solishtiring.

§7. Qatorlarni yig'ish usullari

§7.1. Qatorlarning asimptotikasi

Agar n juda katta bo'lsa

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)dx + O(f(n+1)) + O(1)$$

deb olish mumkin ([7], 10-bet). Masalan,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln n.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > -1.$$

$$\sum_{k=2}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta} \sim \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}, \quad \alpha > -1.$$

§7.2. Euler usuli

Bizga

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

qator berilgan bo'lsin. U yaqinlashuvchi bo'lmasligi mumkin. Euler bo'yicha bu holda yangi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

qator kiritamiz va

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

deb olamiz. Masalan,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

qator yaqinlashuvchi emas. Ammo $|x| < 1$ bo'lganda

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$

Euler bo'yicha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{2}$$

deb olishimiz mumkin. Shu sababdan $\frac{1}{2}$ son $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ qatorning "***Euler bo'yicha yig'indisi***" deyiladi.

§7.3. Borel bo'yicha yig'indi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

qator berilgan bo'lsin. U yaqinlashuvchi bo'lmasligi mumkin. Borel bo'yicha bu qatorni quyidagi usul bilan yaqinlashtirish mumkin:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} n! = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} dt\, t^n e^{-t} x^n = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} \varphi(xt),$$

bu yerda

$$\varphi(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n x^n}{n!}.$$

Berilgan qatorning yaqinlashish sohasida quyidagi formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} \varphi(xt)$$

aniq formuladir, boshqa sohalarda bu formula berilgan qatorning "***Borel bo'yicha yig'indisi***" deyiladi. Ya'ni, qator uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin, o'ng tomondagi integral yaqinlashuvchi bo'lishi mumkin, bu holda formulaning o'ng tomoni shu qatorning Borel bo'yicha ta'rifi (analitik davomi) bo'ladi.

3.26-misol.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!} = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t+tx} = \frac{1}{1-x}.$$

3.27-misol. Yana $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ qatorga qaytib kelib unga Borel usulini qo'llaylik:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} n! = \int_0^{\infty} dt e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = \int_0^{\infty} dt e^{-2t} = \frac{1}{2}.$$

Yaqinlashmaydigan $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ qatorning Euler bo'yicha ham, Borel bo'yicha ham yig'indisi bir xil chiqdi.

§8. Mashqlar

3.1-mashq. $n \to \infty$ hol uchun quyidagini isbot qiling:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} \qquad (n \to \infty).$$

3.2-mashq. Quyidagi mashqlarda $x \to \infty$.

$$\int_x^{\infty} \frac{dt}{t^2 \ln t} \sim \frac{1}{x \ln x}.$$

3.3-mashq.

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln\ln t} \sim \frac{\ln x}{\ln\ln x}.$$

3.4-mashq.

$$\int_0^x (t^3+t^2)^{1/2}dt \sim \frac{2}{5}x^{5/2}.$$

3.5-mashq.

$$\int_0^1 e^{-xt}\sin t \sim \frac{1}{x^2}.$$

3.6-mashq.

$$\int_x^\infty \frac{\sqrt{t}\,dt}{t^2+1} \sim 2x^{-1/2}$$

3.7-mashq.

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt^n}}{1+t}dt \sim \frac{\Gamma(1/n)}{nx^{1/n}}.$$

3.8-mashq.

$$\int_0^1 e^{-xt^n}\ln(1+t)dt \sim \frac{\Gamma(2/n)}{nx^{2/n}}.$$

3.9-mashq.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^x t dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

3.10-mashq. Quyidagi mashqlarda $\lambda \to \infty$.

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+2x)}(1+x)^{5/2} \sim \frac{1}{2\lambda}.$$

3.11-mashq.

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+2x)}\ln(1+x) \sim \frac{1}{4\lambda^2}.$$

3.12-mashq.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\ln(1+x+x^2)dx \sim \frac{\sqrt{\pi}}{4}\lambda^{-3/2}.$$

3.13-mashq.

$$\int_{x}^{\infty} t^{\alpha}e^{-t^{\beta}}dt \sim \beta^{-1}x^{\alpha-\beta+1}e^{-x^{\beta}}, \qquad \beta>0.$$

3.14-mashq.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x^2}}{\sqrt{x+3x^2}} \sim \frac{e^{-\lambda}}{4\lambda}.$$

3.15-mashq.

$$\int_0^1 e^{i\lambda t^3}dt \sim \frac{\Gamma(1/3)e^{i\pi/6}}{3\lambda^{1/3}}; \qquad \int_0^1 \frac{e^{i\lambda t^3}}{\sqrt{t}}dt \sim \frac{\Gamma(1/6)e^{i\pi/2}}{3\lambda^{1/6}}.$$

3.16-mashq.

$$\int_0^1 e^{i\lambda t^3}\ln(1+t)dt \sim \frac{\Gamma(2/3)e^{i\pi/3}}{3\lambda^{2/3}}.$$

3.17-mashq.

$$\int_0^1 e^{i\lambda t^3}\ln(2+t)dt \sim \frac{\Gamma(1/3)e^{i\pi/6}\ln 2}{3\lambda^{1/3}}.$$

3.18-mashq. Quyidagilarni keltirib chiqaring $(x\to\infty)$:

1.

$$K_0(x)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x};$$

2.

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\sin xt}{\sqrt{t^2-1}}dt \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$$

3.

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\cos xt}{\sqrt{t^2-1}}dt \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$$

4.

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}}dt \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x-\frac{\pi}{4})}.$$

5.

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos n\theta d\theta \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

IV-BOB.

GRUPPALAR NAZARIYASI

§1. Simmetriya va uning matematik ifodasi

Fizik sistemalar uchun simmetriya juda muhim rol o‘ynaydi. Agar fizik sistema biror simmetriyaga ega bo‘lsa harakat tenglamalari ham shu simmetriyaga ega bo‘lishi kerak. Sistema ustida biror almashtirish bajarilganda uning holati o‘zgarmasa uning energiyasi ham o‘zgarmaydi. Schrödinger tenglamasi nuqtai nazaridan

Faraz qilaylik H_2O molekulasidagi vodorod atomlarining o‘rinlarini almashtirdik, natijada molekulaning holati o‘zgargani yo‘q, uning energiyasi ham o‘zgarmadi. Sistemaning gamiltoniani ham huddi shu o‘rinalmashtirish simmetriyasiga ega bo‘lishi kerak.

Simmetriya deganida sistema harakat tenglamalarining ma’lum bir almashtirishlarga nisbatan invariantligi ko‘zda tutiladi. Bu ta‘rifdan muhim bir hulosaga kelish mumkin: agar tenglama A va B almashtirishlarga nisbatan invariant bo‘lsa u ketma-ket bajarilgan $C = AB$ almashtirishga nisbatan ham invariant bo‘ladi.

4.1-misol. Garmonik ossillator uchun Schrödinger tenglamasi:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x) = E\psi(x).$$

Bu tenglamada $x \to -x$ almashtirish bajarsak $\psi(x)$, $\psi(-x)$, $\psi(x) + \psi(-x)$, $\psi(x)-\psi(-x)$ to‘lqin funksiyalarning hammasi o‘sha E energetik satxga mos kelishini ko‘ramiz. Bu misolda biz tenglamani yechmasdan turib uning yechimlarining muhim hossasini topdik.

Almashtirishlarning hammasi ham geometrik ma’noga ega bo‘lishi shart emas.

§2. Gruppaning ta‘rifi

Bizga $\{g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots\}$ elementlardan iborat bo‘lgan G to‘plam berilgan bo‘lsin. Ya’ni, $\{g_i \in G, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. Shu to‘plamning ichida $\circ$ deb belgilanadigan *kompozitsiya* (ko'paytirish) qoidasi kiritilgan bo'lsin. G to'plam elementlari shu kompozitsiya qoidasiga nisbatan quyidagi talablarga bo'ysunsin:

1. Ixtiyoriy $g_i \in G$ va $g_j \in G$ lar uchun $g_i \circ g_j = g_k$, $g_k \in G$ bo'lsin ;
2. Assotsiativlik qoidasi: ixtiyoriy $g_i, g_k, g_k \in G$ lar uchun $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ bajarilsin;
3. Quyidagicha ta'riflangan $g_i \circ e = e \circ g_i = g_i, \forall g_i \in G$ birlik element e mavjud bo'lsin;
4. Teskari element $g_i \circ g_i^{-1} = g_i^{-1} \circ g_i = e$, $g_i^{-1} \in G$ mavjud bo'lsin.

Shu qoidalarga bo'sungan elementlar to'plami G ***gruppa*** deyiladi.

G to'plam elementlari soni chekli yoki cheksizligiga qarab gruppa chekli yoki cheksiz deyiladi. Chekli gruppa elementlarining soni uning ***tartibi*** deyiladi. Agar cheksiz elementli gruppaning elementlarini sanab chiqish mumkin bo'lsa bu gruppa sanoqli cheksiz gruppa deyiladi. Agar gruppa elementlari uzliksiz to'plam hosil qilib bu to'plamda qandaydir topologia kiritilgan bo'lsa bunday gruppa topologik gruppa deyiladi.

Umumiy holda $g_i \circ g_j \neq g_j \circ g_i$ bo'ladi. Agar gruppaning ixtiyoriy ikkita elementi uchun $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$ bo'lsa bunday gruppa ***abel gruppasi*** (yoki ***kommutativ gruppa***) deyiladi

Gruppalarning fizikadagi ahamiyati ularning fizika uchun juda muhim bo'lgan simmetriya tushunchasining matematik ifodasi ekanligi bilan aniqlanadi.

Gruppalarga misollar:

1. Butun sonlar to'plami (nol soni bilan birga) qo'shish operatsiyasiga nisbatan cheksiz gruppani hosil qiladi. Ya'ni, gruppaviy kompozitsiya sifatida qo'shishni qabul qilamiz. Bu gruppada A elementiga teskari element $-A$ bo'ladi, birlik element sifatida 0 qabul qilinishi kerak. Aniqki, bu gruppa abel gruppasidir. Shuni ham aytishimiz kerakki, ixtiyoriy abel gruppasini mana shu butun sonlar to'plami bilan aynan

muvofiqlashtirishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} g_i \circ g_j &\Leftrightarrow g_i + g_j; \\ e &\Leftrightarrow 0; \\ a^{-1} &\Leftrightarrow -a; \\ a^n &\Leftrightarrow na \end{aligned}$$

Misolni davom ettirishimiz mumkin - butun haqiqiy sonlar to'plami R ni qo'shish operatsiyasiga nisbatan gruppa deb elon qilishimiz mumkin.

2. n o'lchamli vektor fazo elementlari - vektorlar vektor qo'shishga nisbatan gruppani hosil qiladi. Gruppaviy kompozitsiya - vektor qo'shma. Darhaqiqat, ikki vektorning vektor yig'indisi yana vektordir. Birlik element sifatida nol-vektorni olish kerak. a vektorga teskari vektor $-\mathbf{a}$.

3. $e, a, a^2, a^3, ..., a^{n-1}$ to'plamni olamiz, $a^n = e$ bo'lsin. Bu to'plam ***siklik gruppa*** deyiladi. U tartibi n bo'lgan abel gruppani hosil qiladi. Bunday gruppani amalda quyidagicha tasavvur qilishimiz mukin: a element sifatida $z-$ o'qi atrofida $2\pi/n$ burchakka buralishni ko'zda tutamiz, bunda a^2 element $z-$o'qi atrofida $2{\cdot}2\pi/n$ burchakka buralishga mos keladi va h.k. a^n element esa $n \cdot 2\pi/n = 2\pi$ burchakka buralishga mos keladi, bu esa boshlang'ich holatga qaytib kelishga ekvivalentdir, shuning uchun $a^n = e$. Ikkita ketma-ket almashtirishni bajaraylik - bir gal $k{\cdot}2\pi/n$ burchakka, keyin $l{\cdot}2\pi/n$ burchakka. Natija $(k+l)\cdot 2\pi/n$ burchakka buralishga mos keladi: $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$. Berilgan to'plamning gruppani hosil qilishi oydindir.

4. Uch o'lchamli fazodagi aylanishlar - ular uzliksiz gruppani tashkil qiladi. Darhaqiqat, ikkita ketma-ket aylanishni (ikkita har xil o'qlar atrofida) uchinchi bir o'q atrofidagi bitta aylanish orqali ifoda qilishimiz mumkin. Bu noabel gruppasidir, chunki a va b aylanishlarning ketma-ketligini almashtirsak boshqa natija olamiz: $ab \neq ba$.

5. Lorentz almashtirishlari gruppani hosil qiladi. Haqiqatan, ikkita Lorentz almashtirishi uchinchi bir Lorentz almashtirishiga teng. Buni ko'rish qiyin emas - Lorentz

almashtirishlari yordamida K sistemadan K' sistemaga o'tamiz, keyin K' sistemadan K'' sistemaga o'tamiz. Oydinki, biz mana shu K'' sistemaga bevosita o'tishni ($K \to K''$) bitta Lorentz almashtirishi yordamida ham bajarishimiz mumkin. Lorentz almashtirishlari to'plami uzluksiz bo'lgan ***Lorentz gruppasini*** hosil qiladi.

§3. Gruppalar nazariyasining asosiy tushunchalari

1. ***Qismgruppa.*** Qismgruppa H gruppa G ning shunday qismto'plamiki, uning ichida gruppaviy aksiomalarning hammasi bajariladi. H G ning qismgruppasi bo'lishi uchun H dagi gruppaviy kompozitsiya qoidasi G bilan bir xil bo'lishi kerak.

2. ***Chekli gruppa G elementining davri.*** G ga kirgan bir element g_i ni olamiz va uni darajalarga ko'tara boshlaymiz: $g_i, g_i^2, g_i^3, \ldots$ G gruppamiz chekli bo'lgani uchun bu qator takrorlana boshlaydi. Qandaydir k_1 va $k_2 > k_1$ butun sonlar uchun

$$g_i^{k_1} = g_i^{k_2} = e$$

bo'lsin. Bu degani

$$g^{k_2-k_1} = e.$$

g_i elementning ***tartibi*** deb shunday eng kichik n soniga aytiladiki uning uchun

$$g_i^n = e$$

bo'lsin. $g_i, g_i^2, g_i^3, \cdots; g_i^n = e$ to'plam g_i ***elementning davri***, yoki, ***cikli*** deyiladi. Oydinki ixtiyoriy elementning davri

a) G gruppasining qismgruppasini tashkil etadi;

b) bu qismgruppa abel gruppasidir.

3. ***Qo'shma sinflar.*** Berilgan: G - n-tartibli gruppa, H– uning k -tartibli qismgruppasi. G ning H ga kirmaydigan bir elementi g_1 ni olaylik: $g_1 \in G$, $g_1 \notin H$. Quyidagi to'plam hosil qilaylik: $g_1H = \{g_1h_1, g_1h_2, \ldots, g_1h_k.\}$ Endi H ga ham va g_1H ga ham kirmaydigan g_2 elementni olamiz va g_2H to'plam hosil qilamiz. Ushbu jarayonni G da na H ga va na biror-bir g_iH ga kirmagan

element qolmaguncha davom ettiramiz. $g_i \neq g_j$ bo'lganda g_iH va g_jH to'plamlarning umumiy elementi bo'lmasligini ko'rsataylik. Faraz qilaylik shunday bo'lmasin, ya'ni, qandaydir $g_{i_1} \neq g_{i_2}$ lar uchun $g_{i_1}h_i = g_{i_2}h_j$ bo'lsin, h_i, $h_j \in H$. Bu degani $g_{i_1} = g_{i_2}h_ih_j = g_{i_2}h_k$, $h_k \in H$. Ya'ni, g_{i_1} element $g_{i_2}H$ to'plamga kiradigan bo'lib chiqdi, bu esa boshlang'ich shartimizga ziddir. Shu bilan biz G gruppasini

$$G = \{H, g_1H, g_2H, \dots, g_{m-1}H\}$$

ko'rinishga ega bo'lgan ***sinflarga*** bo'ldik, bu taqsimot H qismgruppasining ***chap yondosh sinflari***, yoki, ***chap qo'shma majmui*** deyiladi[1]. G gruppasini huddi shunday qilib ***o'ng yondosh sinflar***ga ham yoyib chiqishimiz mumkin:

$$G = \{H, Hg'_1, Hg'_2, \dots, Hg'_{m-1}\}.$$

Ko'rsatganimizdek, bu yoyilmalarga G ning har bir elementi faqatgina bitta yondosh sinfga kiradi. G ning elementlari soni n, H ning elementlari soni k bo'lgani uchun

$$m = \frac{n}{k}$$

bo'lishi kerak (Lagrange). m soni H qismgruppaning ***indeksi*** deyiladi.

Yondosh sinflarga yoyilma faqat H qismgruppaga bog'liqdir, agar H berilgan bo'lsa g_i larni qanday qilib tanlamaylik o'sha yoyilmaning o'zini olamiz. Sababi - hech qaysi yondosh sinflar umumiy elementga ega emas.

Olingan natijadan hulosa: agar gruppaning tartibi ~~oddiy~~ tub son (hech qaysi songa bo'linmaydigan) son bo'lsa bu gruppada qismgruppa bo'lmaydi.

4. ***Qo'shma elementlar va sinf.*** $g \in G$ bo'lsin. $g' = g_igg_i^{-1}$, $g_i \in G$ ni tuzaylik. g va g' lar ***qo'shma*** elementlar deyiladi. g_i sifatida gruppaning hamma n elementlarini olib chiqaylik. Hosil bo'lgan n ta elementli to'plamda k ta har xil elementlar bo'lsin: $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ Ushbu to'plamning ixtiyoriy

[1] Rus tilida - *левые смежные классы, сопряженные совокупности слева.* Inglizchasi - *left cosets*

ikki elementi ham o‘zaro qo‘shmadir:

$$g_1 = g_{i_1} g g_{i_1}^{-1}, \quad g_2 = g_{i_2} g g_{i_2}^{-1} = g_{i_2} g_{i_1}^{-1} g_1 g_{i_1} g_{i_2}^{-1} =$$
$$= \left(g_{i_2} g_{i_1}^{-1}\right) g_1 \left(g_{i_2} g_{i_1}^{-1}\right)^{-1}.$$

Demak, shunday elementlar to‘plami bitta elementning berilishi bilan aniqlanar ekan. Ushbu to‘plam ***sinf*** deyiladi, uning elementlari soni k shu ***sinfning tartibi*** deyiladi.

1. Birlik elementning o‘zi sinfni tashkil qiladi.

2. Birlik elementdan boshqa sinflar qismgruppani tashkil qilmaydi (ularga birlik element kirmaydi).

3. Gruppaning tartibi sinfning tartibiga bo‘linadi.

Har bir cheklangan gruppa G bir necha qo‘shma sinflarga parchalanadi.

5. ***Invariant qismgruppa - normal bo‘luvchi.*** H to‘plam G gruppaning qismgruppasi bo‘lsin. Agar ixtiyoriy g_i uchun $g_i H g_i^{-1} = H, \forall g_i \in G$ bo‘lsa H G ning ***normal bo‘luvchisi***, yoki, ***invariant qismgruppasi*** deyiladi. Agar $g_i \in H$ bo‘lsa g_i ning qo‘shma butun sinfi H ga kiradi. $\forall g_i$, $g_i H g^{-1} = H$ bo‘lgani uchun normal bo‘luvchi uchun chap va o‘ng qo‘shma sinflar bir xildir.

Abel gruppasining hamma qismgruppalari invariant qismgruppalar bo‘ladi.

6. ***Faktorgruppa.*** Gruppani uning invariant qismgruppasi bo‘yicha yondosh sinflarga yoyaylik:

$$G = H + g_1 H + g_2 H + \cdots + g_{m-1} H. \tag{1}$$

Quyidagi ***moslik munosabatlarini*** kiritaylik:

$$h_1 \sim h_2, \quad \text{agar} \quad h_1, h_2 \in H \text{ bo‘lsa;}$$

$$h_1' \sim h_2', \quad \text{agar} \quad h_1', h_2' \in g_1 H \text{ bo‘lsa;}$$

$$h_1'' \sim h_2'', \quad \text{agar} \quad h_1'', h_2'' \in g_2 H \text{ bo‘lsa} \quad \text{va h.k.}$$

Bunday moslik (ekvivalentlik) o‘rnatilgandan keyin 1-yoyilmadagi har bir to‘plamning bitta qandaydir elementi shu to‘plamning vakili bo'ladi, shu elementni bundan keyingi hamma muloxazalarda mana shu to'plamning boshqa elementlaridan farq qilmaymiz. Shu bilan biz G gruppani m ta elementdan iborat boshqa bir gruppaga aylantirdik, uning har bir elementi haqiqatda g_iH to'plamdagi hamma elementlarning bir vakili, shu element sifatida g_iH to'plamdagi ixtiyoriy bir elementni qarashimiz mumkin. Gruppaviy aksiomalarning bajarilishini tekshirib chiqish qiyin emas. Hosil bo'lgan yangi gruppa G ning ***faktor-gruppa***si deyiladi va quyidagicha belgilanadi: G/H.

7. ***Gruppaning markazi.*** G gruppasining o'ziga qo'shma bo'lgan elementlari to'plami shu gruppaning ***markazi*** deyiladigan invariant qismgruppani tashkil qiladi. Element o'ziga qo'shma bo'lishi uchun u gruppaning hamma boshqa elementlari bilan kommutativ bo'lishi kerak. Demak, markaz - abel qismgruppasi ekan.

Gruppaning hamma elementlari bilan kommutative bo'lgan elementlar to'plami qismgruppani hosil qilishini ko'rsataylik. Bunday to'plam elementlarini Z_i deb belgilasak $(i = 1, 2, ..., l)$ (albatta, bu to'plamga birlik element ham kiradi, uni, masalan, $Z_1 = E$ deb olaylik) ta'rif bo'yicha

$$Z_i g = g Z_i, \qquad Z_j g = g Z_j, \qquad \forall g \in G$$

bo'ladi. Bundan $Z_j Z_i g = Z_j g Z_i = g Z_j Z_i$ kelib chiqadi. Demak, $Z_i Z_j$ element ham mana shu to'plamga kirar ekan, ya'ni, gruppaning hamma elementlari bilan kommutative bo'lgan elementlar to'plami gruppani tashkil qilar ekan. Bu gruppa G ning qismgruppasidir.

7. ***Gruppalarning akslantirishlari.*** Ikkita gruppa G va g' berilgan bo'lsin. Bu gruppalarning elementlari orasida shunday o'zaro bir qiymatli munosabat $g_i \leftrightarrow g'_i$ o'rnatilgan bo'lsinki

$$\begin{matrix} g_i \leftrightarrow g'_i \\ g_j \leftrightarrow g'_j \end{matrix} \quad \text{dan} \quad g_i g_j \leftrightarrow g'_i g'_j \quad \text{kelib chiqsin.}$$

Bunday munosabat ***izomorf akslantirish***, yoki ***izomorfizm*** deyiladi. Izomorf gruppalar ko'pincha $G \sim g'$ deb belgilanadi.

Gomomorf akslantirish - katta gruppa G ning bir necha elementini undan kichikroq gruppa g' ning bitta elementiga akslantirish. Bunda gruppaviy ko'paytirish qoidalari saqlanib qolishi kerak. Akslantirishni $\varphi : G \to g'$ deb belgilasak gruppaviy kompozitsiyaning saqlanishi $g_1g_2 = g_3$, $g_i \in G$ dan $\varphi(g_i)\varphi(g_j) = \varphi(g_k)$, $\varphi(g_i) \in g'$ ekanligi kelib chiqadi. g' ning birlik elementi E' ga akslanuvchi elementlar to'plami $g_i \in G$ gomomorfizm φ ning yadrosi deyiladi:

$$\{g_i : \varphi(g_i) = E' \in g'\} = \ker\varphi.$$

Izomorf gruppalar bir-biridan faqr qilmaydi (gruppa sifatida). Agar gomomorf akslantirishda G gruppa o'zidan kichikroq g' gruppaga akslantirilsa g' gruppa G ning asosiy hossalarini saqlab qoladi, ular orasidagi farq nozik masalalardagina namoyon bo'lishi mumkin.

Теорема IV.1 *Faktorgruppa $G/\ker\varphi$ va gruppa g' izomorfdir.*

Bu teoremani isbot qilish uchun quyidagi uch bosqichdan o'tamiz:

- gomomorfizm yadrosi $\ker\varphi$ qismgruppani tashkil qiladi;
- bu qismgruppa invariant qismgruppa bo'ladi;
- faktorgruppa $G/\ker\varphi$ va gruppa g' izomorfdir.

Avtomorfizm: Agar G gruppa o'z-o'ziga gomomorf akslantirilishi mumkin bo'lsa bundan akslantirish ***avtomorfizm*** deyiladi. Avtomorfizm ichki va tashqi bo'lishi mumkin. $\varphi_z(g) = zgz^{-1}$, $g \in G$ avtomorfizm ichki avtomorfizm bo'ladi, bu yerda $z \in G$. Ya'ni, g butun gruppa G ni ketma-ket qabul qilsa $\varphi_z(g)$ qandaydir g' to'plamga teng bo'ladi, tushunarliki, $g' \subset G$. Tashqi avtomorfizmga misol: uch o'lchamli evklid fazosini olaylik, undagi vektorlar vektor yig'indiga nisbatan abel gruppasini tashkil qiladi. Uning elementini x deb belgilaylik. Shu uch o'lchamli fazoda aylanishlar gruppasini olaylik, uning elementlari z deb belgilansa $f_z(x) = zxz^{-1}$ akslantirish ixtiyoriy vektor x ni yana shu fazo vektoriga o'tkazadi.

9. ***Sodda va yarimsodda gruppalar.*** Invariant qismgruppaga ega bo'lmagan gruppalar ***sodda gruppa*** deyiladi.

Invariant qismgruppasi bo'lsa ham u kommutativ bo'lmasa gruppa ***yarimsodda*** deyiladi.

10. ***To'g'ri ko'paytma***. Ikkita G_1 va G_2 gruppalar berilgan bo'lsin. Shu gruppalarning to'g'ri ko'paytmasi $G_1 \otimes G_2$ deb shunday $g = \{g_1, g_2\}$, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ elementlar to'plamiga aytiladiki, undagi $g = \{g_1, g_2\}$ va $g' = \{g'_1, g'_2\}$ elementlarning gruppaviy ko'paytmasi

$$gg' = \{g_1 g'_1, g_2 g'_2\}$$

qoida orqali aniqlanadi. Birlik element sifatida $e = \{e_1, e_2\}$ xizmat qiladi. Agar G_1 ning tartibi n_1 va G_2 ning tartibi n_2 bo'lsa $G_1 \otimes G_2$ ning tartibi $n_1 \times n_2$ ga teng bo'ladi. $g_1 \to \{g_1, e_2\}$ akslantirish G_1 ning $G_1 \otimes G_2$ ga izomorfizmi bo'ladi. Shu ma'noda G_1 gruppa $G_1 \otimes G_2$ ning qismgruppasidir. G_2 haqida ham shuni aytish mumkin. Ikki elementning ko'paytmasi haqida gap ketganda har xil gruppalarning elementlarining o'rnilarini almashtirish mumkin: $g_1 \otimes g_2 = g_2 \otimes g_1$. Demak, G_1 va G_2 gruppalar $G_1 \otimes G_2$ ning invariant qismgruppalaridir. Teskarisi ham to'g'ri: agar biror G gruppaning G_1 va G_2 qismgruppalari bo'lsa, ixtiyoriy $g_1 \in G_1$ va $g_2 \in G_2$ lar uchun $g_1 g_2 = g_2 g_1$ bo'lsaa va hamma $g \in G$ lar uchun $g = g_1 g_2$ bo'lsa $G = G_1 \otimes G_2$ bo'ladi.

§4. Misollar

4.2-misol. Bir elementdan iborat gruppa: To'plam bitta E elementdan iborat bo'lsin: $G : \{E\}$. Uning kvadrati ham shu E ga teng bo'ladi: $E^2 = E$. Bu to'plam gruppani hosil qiladi. Teskari element: $E^{-1} = E$.

4.3-misol. Ikki elementdan iborat gruppa: $G : \{E, A\}$. Bu to'plam gruppani hosil qilishi uchun $A^2 = E$ bo'lishi yetarlidir. Bu holda $A^{-1} = A$ bo'ladi. Bunday gruppa ikkinchi tartibli ciklik gruppa deyiladi va C_2 deb belgilanadi. E element sifatida 1 va A element sifatida -1 ni tasavvur qilishimiz mumkin. Gruppa uchun ko'paytirish jadvali:

C_2	E	A
E	E	A
A	A	E

4.4-misol. Uchta elementdan tuzilgan gruppa: $G : \{E, A, B\}$. ko'paytirish jadvali:

C_3	E	A	B
E	E	A	B
A	A	B	E
B	B	E	A

Jadval bo'yicha $AA = B$, $AB = E$, $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$ va h.k. Uch - sodda son, u xech qanday songa bo'linmaydi, demak, bu gruppa faqat ciklik gruppa bo'lishi mumkin. Uni C_3 deb belgilanadi. Masalan, $A = \exp(i2\pi/3)$ ni olaylik. Unda $B = \exp(i4\pi/3)$ bo'ladi.

4.5-misol. Tort elementdan iborat gruppa: (E, A, B, C). Uni ikki xil yo'l bilan tasavvur qilishimiz mumkin.

Birinchi yo'l: $(E, A, B, C) \Leftrightarrow (1, i, -1, -i)$. Ko'rinib turibdiki, $AB = BA = C$, $BC = CB = A$, $CA = AC = E$, yani bu - abel gruppasi. Undan tashqari $A^{-1} = C$, $B^{-1} = B$. Bu gruppa ciklik gruppa C_4 ning o'zi: $\{1, e^{i\pi/2}, e^{i\pi}, e^{3i\pi/2}\} = \{e^{i(2\pi/4)\cdot k}, k = 1,2,3,4.\}$. Gruppaning ko'paytirish jadvali:

C_4	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A
C	C	E	A	B

Uning bitta qismgruppasi bor - $(E, B) = (1, -1)$. Bu - invariant qismgruppa: $A(E, B)A^{-1} = (E, B)$, $B(E, B)B^{-1} = (E, B)$, $C(E, B)C^{-1} = (E, B)$. Bu gruppaning har bir elementi sinfni tashkil qiladi. A va C elementlarning tartibi to'rtga teng: $A^4 = E$, $C^4 = E$. B ning tartibi esa ikkiga teng: $B^2 = E$.

Ikkinchi yo'l: Hamma elementlarning tartibini ikkiga teng deb olaylik: $A^2 = B^2 = C^2 = E$. Bu holda quyidagi jadvalga kelamiz:

C_{2h}	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

Bu gruppa C_{2h} deb belgilanadi. Ko'paytirish jadvalidan ko'rinib turibdiki bu ham abel gruppasi. C_4 va C_{2h} gruppalar izomorf emas. C_{2h} da uchta qismgruppani kiritishimiz mumkin: $H_1 : \{E, A\}$, $H_2 : \{E, B\}$, $H_3 : \{E, C\}$. Ularning hammasi invariant qismgruppalarni tashkil qiladi, demak, ularning har biri bo'yicha faktorgruppa tashkil qilish mumkin: $\{H_1, BH_1\} = \{(E, A), (B, C)\}$, $\{H_2, AH_2\} = \{(E, B), (A, C)\}$ va $\{H_3, AH_3\} = \{(E, C), (A, B)\}$.

To'rtinchi tartibli gruppani ikkita ikkinchi tartibli gruppalarning to'g'ri ko'paytmasi sifatida tasavvur qilish mumkinmi? Ikkinchi tartibli gruppa - $C_2 : \{E, A\}$, boshqasi yo'q. Ikkita C_2 ning to'g'ri ko'paytmasi:

$$C_2 \otimes C_2 = \{E_1, A_1\} \otimes \{E_2, A_2\} = \{E_1 \otimes E_2, E_1 \otimes A_2, E_2 \otimes A_1, A_1 \otimes A_2\}.$$

Hosil bo'lgan to'rt elementli to'plam elementlarini o'zaro ko'paytirib chiqaylik. Birinchidan, har bir elementning kvadrati birlik elementga teng:

$$
\begin{aligned}
(E_1 \otimes E_2)(E_1 \otimes E_2) = E_1 \otimes E_2; \quad (E_1 \otimes A_2)(E_1 \otimes A_2) = \\
= (E_1 \otimes A_2A_2) = E_1 \otimes E_2; \quad (E_2 \otimes A_1)(E_2 \otimes A_1) = \\
= (E_2 \otimes A_1A_1) = E_1 \otimes E_2; \quad (A_1 \otimes A_2)(A_1 \otimes A_2) = E_1 \otimes E_2.
\end{aligned}
$$

Ikkinchi elementning uchinchisiga ko'paytmasi to'rtinchi elementni, uchinchining to'rtinchiga ko'paytmasi ikkinchini va to'rtinchining ikkinchiga ko'paytmasi uchinchini beradi. Masalan,

$$(E_2 \otimes A_1)(E_1 \otimes A_2) = A_1 \otimes A_2.$$

Natijada C_{2h} gruppasining ko'paytirish jadvalini oldik. Demak, ikkita C_2 ning to'g'ri ko'paytmasi C_4 ga emas, C_{2h} ga izomorf ekan:

$$C_2 \otimes C_2 = C_{2h}.$$

4.6-misol. D_3 gruppasi. Ushbu gruppa oltita elementdan iborat bo'lib uning ko'paytirish jadvali quyidagicha ko'rinishga ega:

ko'paytirish jadvali

E	A	B	K	L	M
A	B	E	M	K	L
B	E	A	L	M	K
K	L	M	E	A	B
L	M	K	B	E	A
M	K	L	A	B	E

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, $K^2 = L^2 = M^2 = E$, $AB = A^3 = B^3 = E$. Topish qiyin emaski, $K^{-1} = K$, $L^{-1} = L$, $B^{-1} = A$ va h.k.

Gruppaning ichida bitta qismgruppa bor: $H := \{E, A, B\}$. Bu - invariant qismgruppa, y'ani, ixtiyoriy $g \in G$ uchun $gHg^{-1} = H$. Masalan, g sifatida K ni olaylik. Bu holda $KH := \{K, L, M\}$, $KHK^{-1} := \{E, A, B\}$. Shu invariant qismgruppa bo'yicha qo'shma to'plamlarga bo'lib chiqishimiz mumkin. Birinchi yo'l: $H + KH$. Buholda gruppamiz ikkita to'plamga bo'linadi: $(E, A, B) + (K, L, M)$. Agar qo'shma to'plamga bo'lish uchun H ga kirmaydigan boshqa elementni olsak, masalan, L, natija yana o'sha bo'ladi: $H + LH = (E, A, B) + (L, M, K)$. H ga kirmaydigan element sifatida M ni olsak yana o'sha natijaga kelamiz.

Gruppa D_3 uchta sinfdan iborat:

$$S_1 := (E),\ S_2 := (A,\ B),\ S_3 := (K,\ L,\ M,).$$

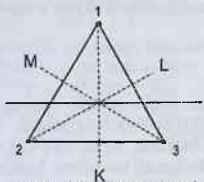
Buni tekshirish qiyin emas. E bitta sinfni tashkil qilishi oydin. A ni olylik, jadvaldan ko'rinib turibdiki,

$$
\begin{aligned}
&EAE = A, \quad BAB^{-1} = A, \quad KAK^{-1} = LK = B, \\
&LAL^{-1} = ML = B, \quad MAM^{-1} = KM = B.
\end{aligned}
$$

Demak, (A, B) bitta sinfni tashkil qilar ekan. Uchinchi sinfni ham huddi shunday tekshirish mumkin.

Quyidagi gruppani kiritaylik $C_2 : \{1, -1\}$ (keyingi misol bilan solishtiring). Agar $(E, A, B) \to 1$ va $(K, L, M) \to -1$ moslik kiritsak yadrosi $\ker\varphi$: (E, A, B) dan iborat $D_3 \to C_2$ gomomorfizm kiritgan bo'lamiz. Agar (E, A, B) elementlarni ekvivalent deb (ya'ni, gruppaviy ko'paytirishlarda ularning faqri yo'q deb) qarasak va huddi shunday, (K, L, M) elementlarni ham ekvivalent deb olsak $\{G/\ker\varphi\}$ faktorgruppaga kelamiz, u C_2 ga izomorf bo'ladi.

Ushbu gruppa to'g'ri burchakli uchburchakni tashkil qiladigan uch atomli molekulaning simmetriyalariga mos keladi. Bu yerda birlik element E hamma atomlarni o'z joyida qoldirishga mos keladi, A element sistemani $2\pi/3 = 120^{\circ}$ burchakka burashga mos keladi, B element molekulamizni $2 \cdot 2\pi/3 = 240^{\circ}$ burchakka burashni ifodalaydi, K, L, M elementlar esa molekulani IV.1-rasmda ko'rsatilgan o'qlar atrofida akslantirishni ifodalaydi. Jadvalga kirgan



IV.1-rasm. Uch atomli molekula

operatsiyalarning hech biri molekulaning holatini o'zgartirmaydi, shuning uchun D_3 gruppasi molekulaning hamma simmetriyalarini ifodalaydigan gruppa hisoblanadi.

4.7-misol. Ciklik gruppa $C_n : \{a, a^2, a^3, ..., a^n = E.\}$ Bu gruppa abel gruppasidir, uning har bir elementi o'ziga qo'shma bo'lib bir sinfni hosil qiladi. Bunday gruppani biror berilgan o'q atrofida diskret burchaklarga buralish gruppasi sifatida tasavvur qilishimiz mumkin. Buning uchun $a = \exp\{i2\pi/n\}$ deb olamiz. Ya'ni, C_n gruppasining a elementi biror o'q (masalan, z o'qi) atrofida $2\pi/n$ burchakka buralish elementi bo'ladi. Darhaqiqat, (x, y) tekisligidagi ixtiyoriy bir nuqtani $z = x + iy$ kompleks son deb qarashimiz mumkin. Shu kompleks sonni eksponensial ko'rinishda $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$ tasavvur qilishimiz mumkin. Bu holda $az = \rho e^{i(\varphi + 2\pi/n)}$ vektor z ni $2\pi/n$ burchakka burilganiga teng. Bunday tasavvurga o'tsak siklik gruppa quyidagi ko'rinishni oladi: $C_n : \{e^{\{i2\pi/n\}}, e^{\{i2\pi/n \cdot 2\}}, ..., e^{\{i2\pi\}} = 1\}$.

Faraz qilaylik, buralish burchaklari diskret emas, uzliksiz to'plamni tashkil qilsin. Bunday holni C_∞ deb belgilaymiz, bunday uzliksiz to'plam $C_\infty : e^{i\varphi}$, $0 < \varphi \leq 2\pi$ cheksiz gruppani hozil qiladi. Bu gruppaning har bir elementi $e^{i\varphi}$ tekislikdagi vektorlarni z - o'qi atrofida φ burchakka buraltiradi.

Shu joyda 6-matritsani eslash o'rinlidir. Bu matritsa tekislikdagi vektorlarni φ burchakka buralishini ta'minlar edi. 6-matritsalar determinanti birga teng ortogonal 2×2 matritsa bo'lib ularning $0 < \varphi \leq 2\pi$ ga mos keluvchi uzliksiz to'plami (x, y) tekislikdagi buralishlar gruppasini tashkil qiladi. Bunday matritsalar to'plami $SO(2)$ deb belgilanadi. Demak, C_∞ va $SO(2)$ gruppalarning har bir elementlari orasida o'zaro bir-qiymatli moslik bor ekan, bu degani, ular izomorf ekan: $C_\infty \sim SO(2)$. Bu ikkita gruppaga izomorf bo'lgan yana bir gruppa bor - $U(1)$, bu gruppa moduli birga teng bo'lgan sonlarning uzliksiz to'plami: $U(1) = e^{i\psi}$, $0 < \psi \leq 2\pi$. Oydinki,

$$C_\infty \approx SO(2) \approx U(1).$$

4.8-misol. Tekisilikdagi

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a; \qquad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + b \tag{2}$$

almashtirishlar koordinat o'qlarini φ burchakka burash va koordinat boshini $\mathbf{d} = (a, b)$ vektorga siljitishga mos keladi. Bu almashtirish natijasida ikki nuqta orasidagi masofa va fazoning orientatsiyasi o'zgarmaydi. Parametrlarning o'zgarish sohasi

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < a < \infty, \quad -\infty < b < \infty.$$

Bu almashtirishlar gruppani hosil qiladi, uning nomi - ***tekislikning harakatlari gruppasi***, u $ISO(2)$ deb belgilanadi. Uning har bir elementi φ va (a, b) parametrlar orqali beriladi, ya'ni, $ISO(2)$ - uch parametrli gruppa. Koordinat o'qlarini φ burchakka burab koordinat boshini (a, b) vektorga siljitish (ko'chirish) operatsiyasini $g(\varphi, a, b)$ deb belgilaylik, $g(\varphi, a, b) \in ISO(2)$. Elementlarning $a = 0, b = 0$ bo'lgan to'plami $SO(2)$ gruppani hosil qiladi, $g(\varphi, 0, 0) \in SO(2)$, aniqki, bu to'plam $ISO(2)$ ning qismgruppasidir. $SO(2)$ - abel gruppasi. $\varphi = 0$ bo'lgan elementlar $g(0, a, b)$ to'plami ham qismgruppani tashkil qiladi - tekislikning ixtiyoriy nuqtasining (a_1, b_1) vektorga va (a_2, b_2) vektorga ixtiyoriy tartibda ketma-ket siljishlari shu nuqtaning bitta $(a_3 = a_1 + a_2, b_3 = b_1 + b_2)$ vektorga siljishiga teng. Bu qismgruppa - tekislikni o'ziga parallel ko'chirishlari gruppasidir, uni $P(a, b)$ deb belgilaylik. U ham abel qismgruppasidir. Ikkala qismgruppa bitta umumiy nuqtaga ega, u ham bo'lsa birlik elementdir (ya'ni, koordinat boshi va o'qlarini o'z joyida qoldiruvchi element $g(0, 0, 0)$). Demak, $ISO(2)$ ning ikkala qismgruppasi ham abel gruppasini tashkil etadi, ammo $ISO(2)$ ning o'zi abel gruppasi emas, chunki $g(\varphi_1, a_1, b_1)g(\varphi_2, a_2, b_2) \neq g(\varphi_2, a_2, b_2)g(\varphi_1, a_1, b_1)$.

$P(a, b)$ qismgruppa $ISO(2)$ ning invariant qismgruppasi (tekislikdagi ixtiyoriy vektorni avval biror burchakka buraymiz, qandaydir vektorga ko'chiramiz, keyin shu amallarni teskari tartibda bajaramiz, natijada yana o'sha vektor kelib chiqadi). $ISO(2)/P(a, b)$ faktor-gruppani ko'raylik. Faktor-gruppa nuqtai-nazaridan $P(a, b)$ ning elementlari ekvivalent, ya'ni, $(0, 0)$ vektorga ko'chish ham, ixtiyoriy (a, b) vektorga ko'chish ham ekvivalent bo'lib bitta elementdek ko'riladi. Demak, $g(\varphi, a_1, b_1)$ va $g(\varphi, a_2, b_2)$ elementlar faktor-gruppa nuqtai-nazaridan farq qilmaydi va ular $g(\varphi, 0, 0)$ ga ekvivalent.

Demak, $ISO(2)/P$ faktor gruppa $SO(2)$ ga izomorf ekan: $ISO(2)/P \approx SO(2)$.

$ISO(2)$ gruppasi ikkita qismgruppadan tashkil topganini oshkora ifodalash maqsadida uning elementlarini $g(a(\varphi), \mathbf{r})$ deb belgilash qulaydir, bunda tekislikdagi φ burchakka burash matritsasi $a(\varphi)$ 6-formulada berilgan (u yerda u $a^{(2)}$ deyilgan), $\mathbf{r} = (a, b)$ - ko'chirish vektoridir.

$ISO(2)$ gruppasidagi gruppaviy kompozitsiya (ko'paytirish) qoidasini keltirib chiqarish uchun uning elementlarini quyidagi matritsa yordamida tasavvur qilamiz:

$$T(g) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & a \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Bu holda tekislik nuqtalarini ham uch o'lchamli vektor-ustun sifatida tasavvur qilishimiz kerak:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bunday tasavvur 2-almashtirish qoidasiga mos keladi. Ko'rinib turibdiki

$$T(g_1)T(g_2) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \sin(\varphi_1+\varphi_2) & a_2\cos\varphi_1 + b_2\sin\varphi_1 + a_1 \\ -\sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) & -a_2\sin\varphi_1 + b_2\cos\varphi_1 + b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demak

$$\varphi_3 = \varphi_1+\varphi_2, \quad a_3 = a_2\cos\varphi_1+b_2\sin\varphi_1+a_1, \quad b_3 = -a_2\sin\varphi_1+b_2\cos\varphi_1+b_1. \qquad (4)$$

Vektor belgilashlar kiritaylik: $\mathbf{r}_1 = (a_1, b_1)$, $\mathbf{r}_2 = (a_2, b_2)$. Agar tekislikdagi φ burchakka burash matritsasini 6-formula asosida $a(\varphi)$ deb belgilasak 4-dagi $\mathbf{r}_3 = (a_3, b_3)$ vektorini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mathbf{r}_3 = a(\varphi_1)\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1.$$

Shu bilan $ISO(2)$ gruppasidagi ko'paytirish qoidasi topildi:

$$g_3 = g_1 g_2 = g(a(\varphi_1+\varphi_2),\, a(\varphi_1)\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1).$$

Ixtiyoriy fazodagi harakatlar haqida gapirganimizda shunday ko'paytirish qoidasi uchraydi, bunday ko'paytirish qoidasi *yarim-to'g'ri ko'paytirish* deyiladi. Odatda yarim-to'g'ri ko'paytma gruppani uning avtomorfizmlari gruppasiga ko'paytirishini ta'riflashda ishlatiladi. Tekislikning harakatlari haqida gap ketayotganida $SO(2)$ gruppasi P gruppasining avtomorfizmlarini tashkil qiladi, chunki tekislikdagi ixtiyoriy buralish shu tekislikdagi ixtiyoriy vektorni yana shu tekislikda qoldiradi. Poincare gruppasi - Minkovskiy fazosining harakatlari gruppasi - haqida gapirganimizda ham yana yarim-to'g'ri ko'paytmaga kelamiz.

Ky

§5. Gruppalarning tasavvurlari

Gruppa elementlari ozining ta'siri orqali aniqlanadi. Bu ta'sirni abstrakt korinishda - ko'paytirish jadvali sifatida - aniqlashimiz mumkin. Fizik kattaliklar haqida gap ketar ekan ular matematik nuqtai nazardan odatda mos keluvchi chiziqli fazolardagi vektorlar va tenzorlar sifatida namoyon bo'ladi. Vazifa - gruppa elementlarining mana shu fazo elementlariga ta'sirini aniqlash.

§5.1. Asosiy ta'riflar

Chiziqli fazo L berilgan bo'lsin. Ushbu fazo elementlari ma'lum bir fizik sistemaning holatlarini bildirsin. Bizga ma'lum bir simmetriya operatsiyalari - ya'ni, ma'lum bir gruppa G - berilgan bo'lsin. Shu gruppaning ta'siri natijasida L fazo elementlari qanday o'zgaradi? Maqsadimiz mana shu savolga javob berish.

Elementlari matritsalardan iborat va gruppaviy kompozitsiya qoidasi matrik ko'paytma bo'lgan gruppa matritsalar gruppasi deyiladi. Mana shu L fazoda ta'sir qiladigan matritsalar to'plami Γ ni topaylik - $\Gamma : \{D_1, D_2, ...\}$. Shu to'plam elementlari matrik gruppani tashkil qilsin. G gruppa elementlari va Γ gruppa elementlari orasdida ma'lum bir moslik o'rnatilgan bo'lsin: $g_i \leftrightarrow D_i$, shuning uchun $D_i = D(g_i)$ deb belgilaymiz.

ta'rif: *Agar G gruppa mana shu matrik gruppaga gomomorf akslantirilsa*

$$G \to \Gamma, \qquad g_i \to D(g_i)$$

va har qanday $g_1 \in G$ va $g_2 \in G$ lar uchun $g_1 g_2 = g_3$, $g_3 \in G$ bo'lganda

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_3), \qquad D(g_i) \in \Gamma,\ i = 1, 2, 3$$

to'g'ri kelsa topilgan matrik gruppa Γ G ning L fazodagi tasavvuri deyiladi.

Agar L fazoning o'lchamligi n bo'lsa topilgan tasavvur Γ ***n-o'lchamli tasavvur*** deyiladi. L fazo ***tasavvurlar fazosi*** deyiladi. Teskari elementlarning mavjudligi sharti D matritsalarning aynimagan bo'lishi kerakligini bildiradi:

$$D(g_i^{-1}) = D^{-1}(g_i), \qquad \forall g_i. \tag{5}$$

Undan tashqari, $D(e) = I$ bolishi kerak, bu yerda I - $n \times n$ o'lchamli birlik matritsa. Agar $\Gamma \approx G$ bo'lsa (ikkala gruppa izomorf) Γ tasavvur aniq deyiladi. Bu holda G ning har bir elementiga Γ ning bir elementi mos keladi va teskarisi. Agar G ning bir necha elementi bitta D matritsa orqali tasavvur qilinayotgan bo'lsa bunday tasavvur noaniq tasavvur deyiladi.

Ikkita tasavvur Γ_1 va Γ_2 ekvivalent deyiladi, qachonki ularni hosil qiluvchi matritsalar o'xshash almashtirish A orqali bog'langan bo'lsa:

$$D_1 = AD_2A^{-1}. \tag{6}$$

Bu yerda A matritsa Γ_1 tasavvurlar fazosi L ni Γ_2 tasavvurlar fazosi L_2 ga akslantiradigan matritsa. Ekvivalent tasavvurlar bir hil o'lchamlikka ega bo'lishi aniqdir. Agar ikkita ekvivalent tasavvurlar bitta fazoda aniqlangan bo'lsa A matritsa shu fazodagi bazisni almashtirish matritsasi bo'lib chiqadi.

Tasavvurlar ***keltiriluvchan*** va ***keltirib bo'lmaydigan*** bo'lishi mumkin. L fazoda shunday qismfazo L_1 bo'lsinki ($L_1 \subset L$) uning elementlari Γ tasavvur matritsalari ta'sirida yana shu qismfazo L_1 elementlariga o'tsin. Bunday qismfazo L_1 invariant qismfazo deyiladi. Agar L da hech bo'lmasa bitta invariant qismfazo L_1 bo'lsa bunday tasavvur ***keltiriluvchan*** tasavvur deyiladi. Agar L_1 butun L bilan mos tushsa bunday tasavvur Γ ***keltirilib bo'lmaydigan*** deyiladi.

Agar L ni ikkita invariant qismfazolarning yig'indisiga ajratish mumkin bo'lsa: $L = L_1 \oplus L_2$, va har bir qismfazoning vektorlari Γ tasavvur ta'sirida o'z qismfazolarida qoladigan bo'lsa bunday tasavvur ***to'liq keltiriluvchan*** deyiladi. Bu holda tasavvur matritsalari quti-diagonal ko'rinishga keltirilіladi:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Bu yerda D - $n \times n$ matritsa, u n -o'lchamli L fazoda ta'sir qiladi, $D^{(1)}$ - $n_1 \times n_1$ matritsa, u n_1 -o'lchamli L_1 fazoda ta'sir qiladi va $D^{(2)}$ - $n_2 \times n_2$ matritsa, u n_2 -o'lchamli L_2 fazoda ta'sir qiladi, $n_1 + n_2 = n$. Bunday tasavvur ***tasavvurlarning to'g'ri yig'indisi*** deyiladi va $D(g) = D^{(1)} \oplus D^{(2)}$ ko'rinishda belgilanadi.

$\chi(g) = \mathrm{Tr}D(g)$ kattalik ***tasavvur xarakteri*** deyiladi. Oydinki,

- ekvivalent tasavvurlar uchun $\mathrm{Tr}D_1 = \mathrm{Tr}D_2$;
- bitta klass elementlariga mos keluvchi matritsalar xarakterlari tengdir.

Tasavvur $D(g)$ aniq deyiladi qachonki $g_1 \neq g_2$ bo'lganda $D(g_1) \neq D(g_2)$ bo'lsa.

Unitar tasavvurlar.

Kvant mexanikasida quyidagi ko'rinishdagi skalar ko'paytmalar ishlatiladi:

$$(x, y) = \sum_{i=1} x_i^* y_i. \tag{8}$$

Bir bazisdan ikkinchi bazisga o'tish almashtirishini ko'raylik:

$$x' = Ux, \qquad y' = Uy.$$

Skalar ko'paytmaning saqlanishi uchun almashtirish matritsasi U unitar matritsa bo'lishi kerak - $U^\dagger = U^{-1}$:

$$(x', y') = (Ux, Uy) = (x, U^\dagger U y) = (x, y). \tag{9}$$

Fizik sistemaning simmetriyasi haqida gap ketar ekan unga mos keluvchi almashtirishlarda sistemaning holatida o'zgarish bo'lmasligi kerak. Shu sababdan tasavvur matritsalarining unitar matritsa bo'lishi muhimdir.

Теорема IV.2 *Cheklangan gruppaning ixtiyoriy ~~keltirilmaydigan~~ tasavvuri unitar tasavvurga ekvivalentdir.*

Isbot: $D(g_i), i = 1, 2, ..., k$ matritsalar G gruppaning n o'lchamli L fazodagi keltirilmaydigan tasavvurini tashkil qilsin. Quyidagi matritsani tuzaylik:

$$\Delta = \sum_i D^\dagger(g_i) D(g_i).$$

Ko'rinib turibdiki Δ - ermit matritsa: $\Delta^\dagger = \sum_i D^\dagger(g_i) D(g_i) = \Delta$. Demak, uni biror unitar matritsa $S^\dagger = S^{-1}$ yordamida diagonal ko'rinishga keltirish mumkin:

$$d = S\Delta S^{-1} = \sum_i SD^\dagger(g_i)S^{-1}SD(g_i)S^{-1} = \sum_i \bar{D}^\dagger(g_i)\bar{D}(g_i),$$

bu yerda $\bar{D} = SDS^{-1}$. Bu diagonal matritsaning diagonal elementlari musbat aniqlangan:

$$d_{\alpha\alpha} = \sum_{i,\beta} \bar{D}^{\dagger}_{\alpha\beta}(g_i)\bar{D}_{\beta\alpha}(g_i) = \sum_{i,\beta} \bar{D}^{*}_{\beta\alpha}(g_i)\bar{D}_{\beta\alpha}(g_i) =$$
$$= \sum_{i,\beta} |\bar{D}_{\beta\alpha}(g_i)|^2 > 0.$$

Bu matritsaning diagonal elementlaridan ildiz chiqarib $d^{1/2}_{\alpha\alpha}$ ulardan tuzilgan diagonal matritsani $d^{1/2}$ deb belgilaymiz. Olingan matritsa ermitdir: $d^{1/2\dagger} = d^{1/2}$. Agar shu matritsa yordamida $D(g_i)$ ga ekvivalent bo'lgan yangi $U(g_i) = d^{1/2}\bar{D}(g_i)d^{-1/2}$ matritsa kiritsak u unitar bo'lib chiqadi. Buni ko'rsataylik:

$$U^{\dagger}(g_i)U(g_i) = d^{-1/2\dagger}\bar{D}^{\dagger}(g_i)d^{1/2\dagger}d^{1/2}\bar{D}(g_i)d^{-1/2} =$$
$$= d^{-1/2\dagger}\bar{D}^{\dagger}(g_i)d\bar{D}(g_i)d^{-1/2}.$$

Ammo $\bar{D}^{\dagger}(g_i)d\bar{D}(g_i) = d$, demak,

$$U^{\dagger}(g_i)U(g_i) = d^{-1/2\dagger}dd^{-1/2} = I.$$

Demak, ixtiyoriy keltirilmaydigan tasavvurni unitarga aylantirishimiz mumkin:

$$U(g_i) = d^{1/2}SD(g_i)S^{-1}d^{-1/2}, \qquad U^{\dagger} = U^{-1}.$$

Kompleks qo'shma tasavvur Agar Γ tasavvurga kirgan hamma matritsalarni ularning kompleks qo'shmasiga almashtirib chiqsak yangi tasavvurni olamiz:

$$D(g_i) \to D^{*}(g_i).$$

Hosil bo'lgan tasavvur umumiy holda boshlang'ich tasavvurga ekvivalent bo'lmaydi.

Regular tasavvur. Quyidagi matritsalarni kiritaylik:

$$D_{ij}(g_k) = \begin{cases} 1, & g_k g_j = g_i \text{ bo'lsa;} \\ 0, & \text{aks holda.} \end{cases} \tag{10}$$

Bu matritsalar $n \times n$ o'lchamli tasavvurni hosil qiladi. Isboti: bir tomondan

$$D_{ij}(g_k)D_{jl}(g_m) = \begin{cases} 1, & g_k g_j = g_i \text{ va } g_m g_l = g_j, \text{ yoki, } g_k g_m g_l = g_i \text{ bo'lsa;} \\ 0, & \text{aks holda.} \end{cases}$$

ikkinchi tomondan

$$D_{il}(g_k g_m) = \begin{cases} 1, & g_k g_m g_l = g_i \text{ bo'lsa;} \\ 0, & \text{aks holda.} \end{cases}$$

Demak,

$$D(g_k)D(g_m) = D(g_k g_m).$$

§5.2. Schur lemmalari

Schurning 1-lemmasi

Lemma: *Keltirilmaydigan tasavvur matritsalari $D(g_i)$ ning hammasi bilan kommutativ bo'lgan matritsa A birlik matritsaga proportsionaldir: $A = \lambda I$, bu yerda λ - son.*

Isbot: Shart bo'yicha

$$AD(g_i) = D(g_i)A, \qquad \forall g_i \in G. \tag{11}$$

Demak

$$D^{\dagger}(g_i)A^{\dagger} = A^{\dagger}D^{\dagger}(g_i), \qquad \forall g_i \in G.$$

Ammo $D^{\dagger}(g) = D^{-1}(g) = D(g^{-1})$. Ushbu munosabat ixtiyoriy g_i uchun o'rinli bo'lgani uchun ohirgi tenglikni

$$D(g_i)A^{\dagger} = A^{\dagger}D(g_i), \qquad \forall g_i \in G, \tag{12}$$

deb yozib olishimiz mumkin. Agar $H = A + A^{\dagger}$ va $J = i(A - A^{\dagger})$ ko'rinishdagi ermit matritsalarni kiritsak 11 va 12 formulalarni darhol quyidagi ko'rinishka keltiramiz:

$$D(g_i)H = HD(g_i), \qquad D(g_i)J = JD(g_i), \qquad \forall g_i \in G. \tag{13}$$

H va J matritsalar ermit bo'lgani uchun ularni diagonal ko'rinishga keltirish mumkin:

$$SHS^{-1} = h, \qquad TJT^{-1} = j. \tag{14}$$

Natijada 13 formulalar

$$SDS^{-1}SHS^{-1} = SHS^{-1}SDS^{-1} \quad \text{yoki,} \quad SDS^{-1}h = hSDS^{-1} \tag{15}$$

va

$$TDT^{-1}TJT^{-1} = TJT^{-1}TDT^{-1} \quad \text{yoki,} \quad TDT^{-1}j = jTDT^{-1} \tag{16}$$

ko'rinishlarga keltiriladi. Shularning birinchisining (ij)-matrik elementlarini olaylik:

$$(SDS^{-1})_{ik}h_{kj} = h_{ik}(SDS^{-1})_{kj}. \tag{17}$$

$h_{kl} = h_k\delta_{kl}$ ekanligini hisobga olib olingan formulani darhol

$$(SDS^{-1})_{ij}(h_i - h_j) = 0 \tag{18}$$

ko'rinishga keltiramiz. Oydinki, $i \neq j$ bo'lganda yoki $h_i = h_j$, yoki $(SDS^{-1})_{ij} = 0$ bo'lishi kerak. Ikkinchi imkoniyat tasavvurning keltirilmaydiganligiga ziddir, shu sababdan birinchi imkoniatni olish kerak:

$$h_i = h_j, \quad \text{ixtiyoriy } i \text{ va } j \text{ uchun.} \tag{19}$$

Shu bilan h matritsaning birlik matritsaga proportsionalligini isbot qildik. Agar $h_i = \alpha$ deb belgilasak $h = \alpha I$ ko'rinishga ega bo'lamiz. Bu degani esa

$$H = A + A^\dagger = \alpha I$$

ga teng. Huddi shunday mulohazalar asosida

$$J = i(A - A^\dagger) = \beta I$$

ekanligini isbot qilishimiz mumkin. Demak,

$$A = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)I = \lambda I. \tag{20}$$

Schurning ikkinchi lemmasi

Lemma. $D^{(i)}$ va $D^{(j)}$ matritsalar G gruppasining ikkita keltirilmaydigan tasavvurlari bo'lsin. Ularning o'lchamliklari mos ravishda $n_i \times n_i$ va $n_j \times n_j$ bo'lsin. Agar $n_i \times n_j$ o'lchamli A matritsa

$$D^{(i)}(g)A = AD^{(j)}(g), \qquad \forall g \in G, \tag{21}$$

munosabatga bo'ysunsa 1) har xil o'lchamli keltirilmaydigan tasavvurlar uchun A nolga teng; 2) bir xil o'lchamli noekvivalent tasavvurlar uchun ham $A = 0$; 3) bir xil o'lchamli ekvivalent tasavvurlar uchun A - aynimagan matritsa ($\det A \neq 0$).

Isbot.

Avvalgi paragrafda 11- dan 12-ga o'tganimizdagi mulohazalarni qaytarib 21-dan

$$A^{\dagger}D^{(i)}(g) = D^{(j)}(g)A^{\dagger}, \qquad \forall g \in G \tag{22}$$

kelib chiqishini topamiz. 21-ni chap tomondan $A^{\dagger}$ ga va 22-ni o'ng tomondan A ga ko'paytirsak

$$A^{\dagger}D^{(i)}(g)A = A^{\dagger}AD^{(j)}(g), \qquad A^{\dagger}D^{(i)}(g)A = D^{(j)}(g)A^{\dagger}A$$

larni olamiz. Bulardan

$$A^{\dagger}AD^{(j)}(g) = D^{(j)}(g)A^{\dagger}A, \qquad \forall g \in G \tag{23}$$

ekanligi kelib chiqadi. 21-ni o'ng tomondan $A^{\dagger}$ ga va 22-ni chap tomondan A ga ko'paytirib

$$AA^{\dagger}D^{(i)}(g) = D^{(i)}(g)AA^{\dagger}, \qquad \forall g \in G \tag{24}$$

ekanligini ham topamiz. Schurning birinchi lemmasi bo'yicha $n_j \times n_j$ o'lchamli kvadrat matritsa $A^{\dagger}A$ birlik matritsaga ekvivalent: $A^{\dagger}A = \mu I$, huddi shunday $n_i \times n_i$ o'lchamli kvadrat matritsa $AA^{\dagger}$ ham birlik matritsaga ekvivalent: $AA^{\dagger} = \lambda I$, bu yerda μ va λ - sonlar. Demak, $\det A^{\dagger}A = \mu^{n_j}$ va $\det AA^{\dagger} = \lambda^{n_i}$.

$n_i = n_j$ bo'lsin. Bu holda A matritsa kvadrat matritsa bo'ladi va $\det A^{\dagger}A = |\det A|^2 = \det A^{\dagger}A$ bo'lishi kerak uchun $\lambda = \mu$ bo'ladi. Agar $\lambda = \mu \neq 0$ bo'lsa A ning teskarisi mavjud, demak, 21-ni

$$D^{(i)}(g) = AD^{(j)}(g)A^{-1}, \qquad \forall g \in G \tag{25}$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Hulosa: bu holda $D^{(i)}$ va $D^{(j)}$ tasavvurlar ekvivalent. Lemmaning uchinchi qismi isbotlandi.

Agar $\lambda = \mu = 0$ bo'lsa A aynigan matritsa bo'ladi, 25-ko'rinishdagi munosabatni yoza olmaymiz, $D^{(i)}$ va $D^{(j)}$ tasavvurlar noekvivalent bo'ladi. Lemmaning ikkinchi qismi isbotlandi.

$n_i \neq n_j$ bo'lsin, aniqlik uchun $n_i > n_j$ deb olaylik. Bu holda A matritsani nollardan iborat bo'lgan ustunlar bilan to'ldirib kvadrat ko'rinishga keltiramiz, yangi matritsani B deb belgilaylik. B matritsalar uchun huddi A matritsalar uchundek 23- va 24-formulalar o'rinli bo'ladi, demak, $B^\dagger B$ matritsa diagonalida bir xil son turgan matritsa bo'lishi kerak. Ammo uning diagonalining ohirgi elementlari nolga teng, demak, ularning hammasi nolga teng. Bundan kelib chiqadi A ham nolga teng. Lemmaning birinchi qismi isbotlandi.

Schur lemmalaridan muhim hulosalarga kelamiz: agar birlik bo'lmagan matritsa qandaydir tasavvur matritsalari bilan kommutativ bo'lsa bu tasavvur keltiriladigan bo'ladi. Har xil keltirilmaydigan tasavvurlar bir-biri bilan bog'langan bo'lishi mumkin emas.

§5.3. Misollar

4.9-misol. Abel gruppalarining hamma keltirilmaydigan tasavvurlari bir o'lchamlidir.

Isbot. Kommutativ gruppalarning ta'rifi bo'yicha $D(g_i)D(g_j) = D(g_j)D(g_i)$ ixtiyoriy tasavvur matritsalari uchun. Shularning birini, faraz qilaylik $D(g_j)$ ni, yuqoridagi A matritsa deb qarasak uning birlik matritsaga proportsional ekanligini topamiz: $D(g_j) = \mu I$, μ - son. Ammo, ta'rif bo'yicha $D(g_j)$ - keltirilmaydigan tasavvur matritsasi, u diagonaldagi elementlari noldan farqli, diagonaldan tashqari elementlari esa nol bo'lgan matritsa bo'lishi mumkin emas. Demak, u bir o'lchamli matritsa, ya'ni, oddiy funksiyadir.

4.10-misol. Abel gruppalarining keltirilmaydigan tasavvurlarini toping.

Abel gruppalari uchun kompozitsiya qonuni qo'shishga tengligini hisobga olib

$$D(\alpha_1)D(\alpha_2) = D(\alpha_1 + \alpha_2)$$

deb yozsak, uni α_1 bo'yicha differensiallasak va $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha$ deb olsak

$$D'(0)D(\alpha) = \frac{dD(\alpha)}{d\alpha}$$

munosabatga kelamiz. $D'(0) = \kappa$ deb belgilasak bu tenglamaning yechimini darhol topamiz:

$$D(\alpha) = c\exp(\kappa\alpha), \qquad c = \mathrm{const}. \tag{26}$$

Tasavvur unitar bo'lsin desak $\kappa = ik$ deb olishimiz kerak:

$$D(\alpha) = c\exp(ik\alpha). \tag{27}$$

4.11-misol. Ciklik gruppa C_n ning keltirilmaydigan tasavvurlarini toping.

Yechim. C_n gruppa ciklik bo'lib $\{E, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$ elementlardan iborat. Bunda $a^n = E$ bo'ladi. Oydinki a-nchi elementning tasavvuri sifatida

$$D(a) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$$

deb olishimiz kerak. Shunga yarasha

$$a^k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$$

bo'ladi. Ko'rininb turibdiki, $a^{k_1}a^{k_2} = a^{k_1+k_2}$.

4.12-misol. Tekislikdagi buralish gruppasi C_∞ ning keltirilmaydigan tasavvurlarini toping.

Yechim. Ixtiyoriy φ burchakka buralish elementini $g(\varphi)$ deb belgilasak unga

$$g(\varphi) \Rightarrow D^{(1)}(\varphi) = \exp(i\varphi)$$

tasavvur mos keladi. Tasavvurlar uchun asosiy bo'lgan

$$D^{(1)}(\varphi_1)D^{(1)}(\varphi_2) = D^{(1)}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

hossani tekshirish qiyin emas. Bu tasavvurning bazisi sifatida bir o'lchamli kompleks sonlar fazosini olishimiz kerak. Rostdan ham, $z = x + iy = \rho e^{i\psi}$ kompleks sonni olaylik. Unga $D(\varphi)$ tasavvur bilan ta'sir qilaylik:

$$D^{(1)}(\varphi)z = \rho\exp(i(\psi + \varphi)) = z'.$$

Yangi hosil bo'lgan kompleks vektor z' uzunligi o'sha ρ ga teng bo'lgan, ammo yo'nalishi φ burchakka buralgan vektordir.

Demak, bir o'lchamli keltirilmaydigan $D^{(1)}(\varphi)$ tasavvur bir o'lchamli kompleks vektorlar fazosida ta'sir qilar ekan.

4.13-misol. To'g'ri chiziq R^1 deb belgilanadi. Uning nuqtalari qo'shishga nisbatan abel gruppasini tashkil qiladi. Bu gruppaning keltirilmaydigan tasavvurlari bir o'lchamlidir.

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in R^1$$

matritsa shu gruppaning keltiriladigan tasavvurini hosil qilishini ko'raylik:

$$D(\alpha_1)D(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Tasavvur keltiriluvchan, ammo, to'liq keltiriluvchan emas. Bu 2×2 tasavvur 2-o'lchamli fazoda ta'sir qiladigan matritsa, ikki o'lchamli fazo elementini $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$ deb belgilab uning invariant qismfazolarini topamiz:

$$D(\alpha)\zeta = \lambda(\alpha)\zeta \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 + \alpha\zeta_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \lambda(\alpha)\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Bu munosabatlarning yechimlari $\lambda = 1, \zeta_2 = 0$. Demak, $\bar{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektorlar invariant qismfazoni tashkil qiladi. Ammo $\bar{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$ vektorlar invariant qismfazoni tashkil qilmaydi. Demak, umumiy ikki o'lchamli fazo ikkita invariant qismfazoga parchalanmaydi. Shuning uchun $D(\alpha)$ matritsa blok-diagonal ko'rinishga keltirilmaydi.

4.14-misol.

$$D^{(2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{28}$$

matritsa tekislikda buralish gruppasi C_∞ ning to'liq keltiriluvchan tasavvuri ekenligini ko'rsating.

Yechim. Ikki komponentali haqiqiy vektorlar fazosini kiritaylik:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Bu - yana o'sha tekislikdagi vektor, tekislikning ixtiyoriy nuqtasiga yoki haqiqiy ikki komponentalik vektorlarni, yoki bir komponentalik kompleks son $z = x+iy$ larni mos keltirishimiz mumkin. Ko'rinib turibdiki,

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Bu esa tekislikdagi (x, y) koordinatali radius-vektorni φ burchakka burash formulasi.

Endi $D^{(2)}$ tasavvurning keltiriladigan tasavvur ekanligini isbot qilamiz. Buning uchun uning ustida

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

unitar matritsa yordamida o'xshash almashtirish bajaramiz:

$$AD^{(2)}A^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Demak, $D^{(2)}$ tasavvurimiz ikkita bir o'lchamli keltirilmaydigan tasavvur $D^{(1)}$ larning to'g'ri yig'indisigaga keltirilar ekan:

$$D^{(2)} = D^{(1)} \oplus D^{(1)*},$$

yoki,

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 \\ 0 & D^{(1)*} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Keyin ko'ramizki, 28-ko'rinishdagi matritsalarning o'zi alohida bir gruppani tashkil qiladi, bu gruppa $SO(2)$ gruppasi deyiladi.

4.15-misol. D_3 gruppasining tasavvurlarini toping.

Agar har bir elementning tasavvuri sifatida birga teng sonni oladigan bo'lsak gruppaning ***trivial*** tasavvurini topgan bo'lamiz. Bu tasavvurning hech qizig'i yo'q, ammo quyida keltirib chiqarilgan juda muhim ortogonallik munosabatlarida uning ham o'z o'rni bor. Shunday qilib, tasavvurlarning birinchisi sifatida quyidagi jadvalni olishimiz mumkin:

	E	A	B	K	L	M
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1

Gruppaning ko'paytma jadvali bajarilganligi shubhasiz.

Ikkinchi tasavvur sifatida quyidagini olaylik:

	E	A	B	K	L	M
$D^{(2)}$	1	1	1	-1	-1	-i

Bu gal ham gruppaning ko'paytma jadvali bajarilganini ko'ramiz. Bunday tasavvur D_3 ning sinflarga parchalanishiga mos keladi. Shu bilan bir o'lchamli tasavvurlar tugaydi.

Ikki o'lchamli tasavvurga o'taylik. Bu tasavvurning bazisini quyidagi vektor-ustunlar tashkil qiladi:

$$\mathbf{r}_1 = a\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}_2 = -\frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}_3 = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Ko'rinib turibdiki, bu vektorlar 1-, 2- va 3- atomlarning tekislikdagi koordinatlari. Simmetriya operatsiyalari atomlarning o'rinlarini ma'lum tartiblarda almashtirishi kerak.

Birlik elementning tasavvurini topish oson:

$$D^{(3)}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A element uchburchak bo'lib joylashgan atomlarni (x, y) tekisligida 120° burchakka burash operatsiyasi edi. i- atomning koordinatlarini (x_i, y_i) deb belgilasak bu atom buralish natijasida

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \tag{35}$$

koordinatlarga ega boladi. Demak, A elementning ikki o'lchamli fazodagi tasavvuri sifatida

$$D^{(3)}(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

matritsani olishimiz kerak. B element 240° burchakka buralishga mos keladi, uning tasavvuri sifatida

$$D^{(3)}(B) = \begin{pmatrix} \cos 240^\circ & -\sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

matritsani olamiz. ko'paytirish jadvali bo'yicha $A^2 = B$, olingan matritsalar shunga mos kelishini ko'rish qiyin emas:

$$D^{(3)}(A)D^{(3)}(A) = D^{(3)}(B).$$

K elementga kelsak u 2-nchi va 3-nchi atomlarning o'rnini almashtirish operatori edi, bunda 2- va 3- atomlarning koordinatalari uchun

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_i \\ y_i \end{pmatrix} \tag{36}$$

ni olamiz, birinchi atomning esa koordinatalari o'zgarmaydi. Ammo uning x-koordinatasi nolga tengligini hisobga olsak 1-atom uchun ham 36-formulani ishlatishimiz mumkin. Demak, K elementning tasavvuri sifatida quyidagi matritsani olishimiz kerak:

$$D^{(3)}(K) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qolgan matritsalarni ko'paytirish jadvalidan foydalanib topishimiz mumkin. Masalan,

$$D^{(3)}(L) = D^{(3)}(K)D^{(3)}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$D^{(3)}(M) = D^{(3)}(K)D^{(3)}(B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Natijani bir jadvalga yig'aylik:

	E	A	B
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

	K	L	M
$D^{(3)}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

4.16-misol. 8-misoldagi $ISO(2)$ gruppasi. (3)-matritsalar shu gruppaning 3×3 o'lchamli tasavvurlarini tashkil qiladi. Bu matritsalar $ISO(2)$ gruppasining aniq tasavvurini beradi, chunki $g_1 \neq g_2$ bo'lganda $T(g_1) \neq T(g_2)$ bo'ladi.

$ISO(2)$ gruppasining kompleks 2×2 matritsalar orqali beriladigan tasavvurini ham topish mumkin. Buning uchun har bir $g(\varphi, a, b)$ harakatga

$$O(g) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

matritsani mos keltiramiz, bu yerda $q = a + ib$. Tekislikdagi ixtiyoriy $\mathbf{r} = (x, y)$ nuqtani ham ikkki komponentalik kompleks ustun sifatida tasavvur qilamiz:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z = x + iy.$$

Shu bilan (3)- va (37)-matritsalar $ISO(2)$ gruppasining 3×3 va 2×2 o'lchamli tasavvurlarini beradi.

§6. Tasavvur bazisi

§6.1. Tasavvurning bazisga ta'siri

Ma'lumki ((21)-ga qarang) n o'lchamli fazoda chiziqli almashtirish bajarilganida vektorning komponentalari

$$A'_j = a_{ij} A_j, \qquad i, j = 1, 2, ..., n,$$

qoida bo'yicha o'zgaradi, bu yerda a - almashtirish matritsasi. Gruppaning n o'lchamli tasavvurlari ham n o'lchamli fazolarda almashtirish matritsalari rolini o'ynaydi. Gruppaning g elementiga chiziqli fazoda T_g operator mos qo'yiladi. Uning ta'siri quyidagicha ta'riflanadi:

$$T_g \mathbf{e}_i = \sum_j D_{ji}(g) \mathbf{e}_j. \tag{38}$$

Bu ta'rif yuqoridagi ta'rifga mos kelishini ko'rish qiyin emas:

$$T_g \mathbf{A} = T_g \sum_i A_i \mathbf{e}_i = \sum_i A_i T_g \mathbf{e}_i = \sum_{i,j} A_i D_{ji}(g) \mathbf{e}_j =$$

$$= \sum_j \left(\sum_i D_{ji}(g) A_i \right) \mathbf{e}_j = \sum_j A'_j \mathbf{e}_j = \mathbf{A}'.$$

O'zining ta'rifi bo'yicha $D_{kl}(g)$ matritsa T_g operatorning $\mathbf{e}_k$ va $\mathbf{e}_l$ vektorlar orasidagi matrik elementidir, 38-ta'rif shunga ham mos kelishini ko'rish qiyin emas:

$$(e_k, T_g e_i) = (T_g)_{ki} = \sum_j D_{ji}(g)(e_k, e_j) = \sum_j D_{ji}(g)\delta_{kj} = D_{ki}(g).$$

Asosiy maqsadimiz kvant sistemalar bo'lgani uchun bazis vektorlar sifatida funksional fazolarning elementlari - funksiyalarni qaraymiz.

Bizga biror fizik sistema berilgan bo'lsin, shu sistemaning to'lqin funksiyasini $\psi(\mathbf{r})$ deb belgilaylik. Bu to'lqin funksiya k-o'lchamli L fazoning elementi bo'lsin. Fizik sistema ustida g almashtirish bajaraylik. Sistemaga kirgan vektorlar $\mathbf{r}' = g\mathbf{r}$ ko'rinishda o'zgaradi. $g \in G$ bo'lsin, ya'ni, bajarilgan almashtirish simmetriya operatsiyasi bo'lsin. Birinchi bob §2.-paragrafdagi terminologiya bo'yicha bu - aktiv almashtirish, ya'ni, koordinat o'qlari o'z joyida turibdi, $\mathbf{r}$ vektor almashinayapti.

L fazoda ortonormal bazis $\{\psi_i(\mathbf{r}), i = 1, 2, ..., k\}$ berilgan bo'lsin. Shu fazoda G gruppasining $k \times k$ o'lchamli matritsalardan iborat $\Gamma : \{D(g_i), i = 1, 2, ..., n\}$ tasavvuri ta'sir qilayotgan bo'lsin. Agar G gruppasining g elementiga mos keluvchi operatsiyani T_g deb belgilasak uning L fazosidagi ixtiyoriy funksiyaga ta'sirini quyidagicha belgilashimiz mumkin:

$$T_g\psi(\mathbf{r}) \rightarrow (T_g\psi)(\mathbf{r}). \tag{39}$$

Biz bu bilan T_g operator L fazoning elementi ψ ga ta'sir qilayotganini ko'rsatmoqchimiz, bunda g element yuqorida aytganimizdek radius-vektor $\mathbf{r}$ ga ta'sir qiladi: $\mathbf{r}' = g\mathbf{r}$.

L fazodagi chiziqli almashtirishning ta'rifi bo'yicha

$$(T_g\psi)_i(\mathbf{r}) = \psi_i'(\mathbf{r}) = \psi_i(g^{-1}\mathbf{r}) = \sum_\beta D_{ji}(g)\psi_j(\mathbf{r}). \tag{40}$$

g almashtirish L fazoda $D_{ji}(g)$ matritsa orqali tasavvurlandi. ta'rifning birinchi qismi quyidagi ma'noga ega. $(T_g\psi)(\mathbf{r}')$ funksiya almashtirilgan $\mathbf{r}'$ nuqtaga mos keluvchi almashtirilgan $(T_g\psi)$ funksiyadir, ikkinchi tomondan u eski $\mathbf{r}$ nuqtadagi eski ψ funksiyaning o'zidir:

$$(T_g\psi)_i(\mathbf{r}') = \psi_i'(\mathbf{r}') = \psi_i(\mathbf{r}) = \psi_i(g^{-1}\mathbf{r}'). \tag{41}$$

Agar ψ_i funksiyalar (40)-formulaga bo'ysunsa ular G gruppasining L fazodagi Γ tasavvurini amalga oshiradi deyiladi.

(40)-formula haqiqatan ham tasavvurlarning ta'rifiga mos kelishini ko'rsataylik. Tasavvurning ta'rifi bo'yicha

$$D_{ij}(g_1)D_{jk}(g_2) = D_{ik}(g_1 g_2).$$

Tekshiraylik:

$$T_{g_1}T_{g_2}\psi_i(\mathbf{r}) = T_{g_1}\sum_j D_{ji}(g_2)\psi_j(\mathbf{r}) = \sum_{j,k} D_{ji}(g_2)D_{kj}(g_1)\psi_k(\mathbf{r}) =$$

$$= \sum_k D_{ki}(g_1 g_2)\psi(\mathbf{r}) = \psi_i((g_1 g_2)^{-1}\mathbf{r}) = T_{g_1 g_2}\psi_i(\mathbf{r}).$$

§6.2. Hamiltonianning invariantligi

Nomeri Z bo'lgan atomning hamiltoniani (spinlarni hisoba olmay turganda) quyidagi ko'rinishga ega:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{Ze^2}{r_i} + \sum_{i<j}\frac{e^2}{r_{ij}}.$$

Albatta, $n = Z$ bo'ladi. r_i - i - nchi elektronning radiusi, r_{ij}– i–nchi va j–nchi elektronlar orasidagi masofa. Koordinat o'qlarini ixtiyoriy burchakka buraylik ((19)-formula bo'yicha) - $x \to x'$, $y \to y'$, $z \to z'$. Laplace operatori bu $O(3)$ gruppasining almashtirishlariga nisbatan o'zgarmasdan qoladi, hamiltoniandagi ikkinchi va uchinchi hadlarga kirgan masofalar ham aylanish almashtirishlariga nisbatan invariant bo'ladi. Yangi hamiltonian eski hamiltonianga teng bo'lib chiqdi:

$$H' = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{n}\Delta'_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{Ze^2}{r'_i} + \sum_{i<j}\frac{e^2}{r'_{ij}} =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{Ze^2}{r_i} + \sum_{i<j}\frac{e^2}{r_{ij}} = H.$$

Bunday hol ***hamiltonianning invariantligi*** deyiladi. Schrödinger tenglamasiga kelaylik:

$$H\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z). \tag{42}$$

Yuqoridagi almashtirishda Schrödinger tenglamasi quyidagicha o'zgaradi:

$$H'\psi'(x',y',z') = E\psi'(x',y',z'). \tag{43}$$

Hamiltonianning invariantligi $H' = H$ ni hisobga olib uni

$$H\psi'(x',y',z') = E\psi'(x',y',z') \tag{44}$$

ko'rinishga keltiramiz. (42)- va (43)-tenglamalardan hulosa: hamiltonian biror almashtirishlarga nisbatan invariant bo'lgan holda energetik satxlar aynigan bo'ladi, bitta energiyaga bir nechta to'lqin funksiya mos keladi.

Hamiltonianning invariantligini operator formaga keltiramiz. (42)- tenglamags T_g operator bilan ta'sir qilamiz:

$$T_g H T_g^{-1} T_g \psi = E T_g \psi.$$

(43)-tenglamaga kelish uchun $T_g\psi = \psi'$ va $T_g H T_g^{-1} = H'$ deyish kerak. Hamiltonianning invariantligi $H' = H$ edi, demak,

$$T_g H T_g^{-1} = H \quad \Rightarrow \quad T_g H - H T_g = [T_g, H] = 0.$$

Energetik satxning aynish karraligini n deb olaylik. Asosiy tasdiqqa o'tamiz: agar H hamiltonian G gruppa almashtirishlariga nisbatan invariant bo'lsa, bitta energetik satxga tegishli $\{L : \psi_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ to'lqin funksiyalar to'plami G ning ma'lum bir keltirilmaydigan tasavvurining bazisini tashkil etadi.

Buni isbot qilish qiyin emas. Bir tomondan ixtiyoriy $\psi_{i_1} \in L$ va $\psi_{i_2} \in L$ lar uchun uchun

$$c_1\psi_{i_1} + c_2\psi_{i_2} \in L,$$

ya'ni, L to'plam chiziqli fazoni tashkil qiladi. Ikkinchidan bu chiziqli fazo invariant fazodir chunki ixtiyoriy $g_k \in G$ uchun $T_{g_k}\psi_i \in L$:

$$HT_{g_k}\psi_i = H\sum_j D_{ji}(g_k)\psi_j = \sum_j D_{ji}(g_k)H\psi_j = E\sum_j D_{ji}(g_k)\psi_j.$$

dan ixtiyoriy g_k uchun $\sum_j D_{ji}(g_k)\psi_j$ ham $\{L : \psi_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ to'plamga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak, $D_{ji}(g_k)$ keltirilmaydigan tasavvur matritsalari ekan.

Sistemani tashqi maydonga kiritaylik. Tashqi maydonga mos keluvchi g'alayonlanish operatori V qandaydir simmetriyaga ega bo'lsin. Yangi hamiltonian $H + V$ ning energetik satxlari haqida nima deyish mumkin? Agar V ning simmetriyasi H ning simmetriyasidan yuqori bo'lsa sistemaning to'liq simmetriyasi H ning simmetriyasiga teng bo'ladi, energetik satxlarning aynish darajasi o'zgarmaydi. Agar V ning simmetriyasi H ning simmetriyasidan past bo'lsa sistemadagi aynigan satxlarning bir qismi parchalanishi mumkin. Masalan, vodorod atomini z-o'qi bo'yicha yo'nalgan tashqi magnit maydon $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ga kiritaylik. Bu holda $V = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} = -\mu_z B = -\beta m B$ bo'ladi (β - Bohr magnetoni), $O(3)$ gruppasiga nisbatan simmetriya qolmadi, ammo $z-$ o'qi atrofida aylanish (unga $O(2)$ gruppasi mos keladi) simmetriya operatsiyasiligicha qoladi. Natijada sistemaning simmetriyasi $O(3) \to O(2)$ gacha pasaydi. Har bir l ga mos keluvchi aynigan $m = -l, -l+1, ..., l-1, l$ satxlar parchalanadi, chunki ularning har biri o'zining energiyasiga ega bo'ladi. $O(2)$ gruppasi abel gruppasidir, uning keltirilmaydigan tasavvurlari bir o'lchamli, natijada vodorod atomining to'lqin funksiyalari hosil qilgan keltiriladigan tasavvur bir o'lchamli keltirilmaydigan tasavvurlarning to'g'ri yig'indisiga aylanadi.

4.17-misol. (kerakli joyga qo'yish kerak) Vodorod atomining energetik satxlari:

$$E_n = -\frac{\text{Ry}}{n^2}, \quad \text{Ry} = \frac{me^4}{2\hbar^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

n - bosh kvant soni, orbital kvant soni $l = 0, 1, 2, ..., n-1$ qiymatlarni qabul qiladi. Vodorod atomining to'lqin funksiyalari

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Radial funksiya $R_{nl}(r)$ Laguerre polinomlari orqali ifodalanadi, burchaklarga bog'liqlik sferik polinomlar $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ orqali ifodalanadi. Coulumb maydonida harakat sferik simmetriyaga ega. Sferik simmetriya $SO(3)$ gruppasi orqali ifodalanadi. Bu gruppaning keltirilmaydigan tasavvurlari D^l §12.-paragrafda topilgan. Ulardan kelib chiqadiki, bir l ga tegishli $2l + 1$ ta to'lqin funksiyalar mana shu keltirilmaydigan tasavvur bazisini tashkil qiladi. $l = 0, 1, 2, ..., n-1$ ekanligi shuni bildiradiki, ma'lum bir n ga mos keluvchi E_n

satx $\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2$ ta qismlarga parchalanadi, ular $D^{n-1}, D^{n-2}, ..., D^0$ keltirilmaydigan tasavvurlar bo'yicha almashinadigan bazislarga mos keladi. Ya'ni, E_n ga mos keluvchi to'lqin funksiyalar to'plami keltiriladigan tasavvur bazisini tashkil qiladi, bu bazisga asoslangan fazo har biri ma'lum bir D^l bo'yicha almashinadigan $\frac{1}{2}n(n-1)$ ta invariant qismfazolarga parchalanadi.

4.18-misol. Bir o'lchamli garmonik ossillator.

Bir o'lchamli garmonik ossillatorning hamiltoniani

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \tag{45}$$

ustida quyidagi almashtirish bajaraylik:

$$p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a), \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{46}$$

Natijada hamiltonian maqsadimizga qulay quyidagi ko'rinishga keladi:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a). \tag{47}$$

Ko'rinib turibdiki, hamiltronianimiz

$$a \to a' = ae^{i\alpha}, \qquad a^\dagger \to a'^\dagger = a^\dagger e^{-i\alpha} \tag{48}$$

almashtirishlarga nisbatan invariantlik hossasiga ega:

$$H' = \frac{\hbar\omega}{2}(a'a'^\dagger + a'^\dagger a') = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) = H. \tag{49}$$

Bu almashtirishlar $U(1)$ gruppasini tashkil etadi, demak, hamiltonianimizning har bir energetik satxiga mos keluvchi to'lqin funksiyalar to'plami shu gruppaning keltirilmaydigan tasavvurlari bazisini tashkil qiladi. Ammo $U(1)$ gruppa - abel gruppasi, uning keltirilmaydigan tasavvurlari bir o'lchamlidir. Demak, bir o'lchamli garmonik ossilatorning har bir energetik satxiga bitta to'lqin funksiya mos kelar ekan. Boshqa so'z bilan aytganda, ossilatorimizning energetik satxlari aynigan emas ekan.

§7. Ortogonallik munosabatlari

Bizga n-nchi tartibli G gruppasining ikkita $D^{(i)}(g)$ va $D^{(j)}(g)$ keltirilmaydigan tasavvurlari berilgan bo'lsin, ularning o'lchamliklari mos ravishda $n_i \times n_i$ va $n_j \times n_j$ bo'lsin. Bu holda

$$\sum_g D^{(i)*}_{\alpha\gamma}(g) D^{(j)}_{\sigma\beta}(g) = \frac{n}{n_i}\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\sigma} \tag{50}$$

ekanligini ko'rsataylik.

Quyidagi matritsani tuzamiz:

$$M^{(ij)} = \sum_g D^{(i)}(g^{-1})BD^{(j)}(g), \tag{51}$$

bu yerda i, j matritsa indekslari emas, matritsa nomeridir. B matritsaga kelganimizda u ixtiyoriy $n_i \times n_j$ o'lchamli matritsa bo'lsin. Ko'rinib turibdiki,

$$M^{(ij)}D^{(j)}(g_1) = \sum_g D^{(i)}(g^{-1})BD^{(j)}(g)D^{(j)}(g_1) =$$
$$= \sum_g D^{(i)}(g^{-1})BD^{(j)}(gg_1) = D^{(i)}(g_1)\sum_g D^{(i)}(g_1^{-1})D^{(i)}(g^{-1})\times$$
$$\times BD^{(j)}(gg_1) = D^{(i)}(g_1)\sum_h D^{(i)}(h^{-1})BD^{(j)}(h) = D^{(i)}(g_1)M^{(ij)}.$$

Olingan natija

$$M^{(ij)}D^{(j)}(g_1) = D^{(i)}(g_1)M^{(ij)}$$

ga Schurning ikkinchi lemmasini qo'llasak

$$i \neq j \text{ bo'lganda } M^{(ij)} = 0, \tag{52}$$

$i = j$ bo'lganda esa $M^{(ii)}$ birlik matritsaga proportsionalligini topamiz:

$$M^{(ii)} = bI.$$

B matritsa sifatida faqatgina $\gamma\sigma$ elementi birga teng, boshqa hamma elementlari nolga teng matritsani olaylik: $B_{\gamma\sigma} = 1$. Bu holda

$$\sum_g D^{(i)}_{\alpha\gamma}(g^{-1})D^{(j)}_{\sigma\beta}(g) = b_{\gamma\sigma}\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \tag{53}$$

munosabatga kelamiz. Bu munosabatda $i = j$ deb $\alpha\beta$ bo'yicha yig'indini olamiz:

$$\sum_g D^{(i)}_{\sigma\alpha}(g)D^{(i)}_{\alpha\gamma}(g^{-1}) = b_{\gamma\sigma}n_i = n\delta_{\gamma\sigma}. \tag{54}$$

Bu tengliklarning birinchisi $D^{(i)}_{\sigma\alpha}$ matritsaning o'lchamligi $n_i \times n_i$ ekanligidan kelib chiqadi, ikkinchisi esa $D^{(i)}_{\sigma\alpha}(g)D^{(i)}_{\alpha\gamma}(g^{-1}) = \delta_{\sigma\gamma}$ dan va gruppa G ning tartibi n ga tengligidan kelib chiqadi. Shu bilan

$$b_{\gamma\sigma} = \frac{n}{n_i}\delta_{\gamma\sigma}$$

ekanligini topdik. Agar keltirilmaydigan tasavvur uchun

$$D_{\gamma\alpha}(g^{-1}) = D^{-1}_{\gamma\alpha}(g) = D^{\dagger}_{\gamma\alpha}(g) = D^{*}_{\alpha\gamma}(g)$$

ekanligini eslasak (50)-formulaning isboti tugaydi.

Ortogonallik munosabati (50) xarakterlar uchun muhim bo'lgan natijaga olib keladi. (50)-da $(\alpha\gamma)$ va $(\sigma\beta)$ indekslar bo'yicha yig'indilarni olaylik:

$$\sum_g \chi^{(i)*}(g)\chi^{(j)}(g) = n\delta_{ij}. \tag{55}$$

Bu munosabat keltirilmaydigan tasavvurlar xarakterlarining ortogonalligini bildiruvchi munosabatdir, uni ochib yozaylik:

$$\chi^{(i)*}(g_1)\chi^{(j)}(g_1) + \chi^{(i)*}(g_2)\chi^{(j)}(g_2) + \cdots + \chi^{(i)*}(g_n)\chi^{(j)}(g_n) = n\delta_{ij}, \tag{56}$$

undan keltirilmaydigan tasavvur xarakterlarining ma'lum bir n o'lchamli fazoda ortogonal vektorlar sistemasi $\{\chi^{(i)}, i = 1, 2, ..., n_i\}$ ni tashkil etishi kelib chiqadi.

Eslataylik, bir sinfning ichidagi elementlarga mos keluvchi tasavvurlar harakterlari bir-biriga teng, agar gruppada s ta sinf bo'lsa, har-hil xarakterlarning soni ham s ta bo'ladi. Shu sababdan yuqoridagi qatorni haqiqatda quyidagicha yozib olishimiz to'g'riroqdir:

$$r_1\chi^{(i)*}(g_1)\chi^{(j)}(g_1) + r_2\chi^{(i)*}(g_2)\chi^{(j)}(g_2) + \cdots + r_s\chi^{(i)*}(g_s)\chi^{(j)}(g_s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} r_k\chi^{(i)*}(g_k)\chi^{(j)}(g_k) = n\delta_{ij}, \tag{57}$$

bu yerda r_k - k-nchi sinfdagi elementlar soni, g_k - k-nchi sinfga tegishli bir element.

Yuqoridagi munosabatning $i = j$ dagi hususiy holi:

$$\sum_{g} |\chi^{(i)}(g)|^2 = \sum_{k=1}^{s} r_k |\chi^{(i)}(g_k)|^2 = n. \tag{58}$$

Demak, quyidagi $s \times s$ jadvalning

$$\begin{array}{cccc}
\sqrt{\frac{r_1}{n}}\chi^{(1)}(g_1), & \sqrt{\frac{r_2}{n}}\chi^{(1)}(g_2), & \ldots, & \sqrt{\frac{r_s}{n}}\chi^{(1)}(g_s); \\
\sqrt{\frac{r_1}{n}}\chi^{(2)}(g_1), & \sqrt{\frac{r_2}{n}}\chi^{(2)}(g_2), & \ldots, & \sqrt{\frac{r_s}{n}}\chi^{(2)}(g_s); \\
\ldots, & \ldots, & & \ldots; \\
\sqrt{\frac{r_1}{n}}\chi^{(s)}(g_1), & \sqrt{\frac{r_2}{n}}\chi^{(s)}(g_2), & \ldots, & \sqrt{\frac{r_s}{n}}\chi^{(s)}(g_s);
\end{array}$$

har bir satri uzunligi birga teng vektorni beradi, ixtiyoriy ikki satrdagi vektorlar o'zaro ortogonaldir.

Bizga bir keltiriladigan tasavvur berilgan bo'lsin. Uning xarakterini $\chi(g)$ deb belgilaylik. Shu tasavvur keltirilmaydigan tasavvurlarga yoyilsin:

$$D(g) = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus \cdots \oplus D^{(k)}. \tag{59}$$

Bu yoyilmada bazi bir keltirilmaydigan tasavvurlar bir necha marta uchrashi mumkin, umumiy holda i-keltirilmaydigan tasavvur m_i marta uchrashi mumkin bo'lsin. Buni biz i-nchi tasavvurning karraligi m_i ga teng deymiz. Xarakterlarga o'taylik:

$$\chi(g) = \sum_{i} m_i \chi^{(i)}(g). \tag{60}$$

(55)-formuladan quyidagini topish mumkin:

$$m_i = \frac{1}{n} \sum_{g} \chi^{(i)*}(g)\chi(g). \tag{61}$$

Yana bir munosabat:

$$\sum_g \chi^*(g)\chi(g) = \sum_{i,j} m_i m_j \sum_g \chi^{(i)*}(g)\chi^{(j)} = n\sum_i m_i^2, \qquad (62)$$

yoki,

$$\sum_i m_i^2 = \frac{1}{n}\sum_g \chi^*(g)\chi(g). \qquad (63)$$

Bu munosabatdan bir muhim hulosa chiqaramiz: xarakteri $\chi(g)$ bo'lgan tasavvur keltirilmaydigan bo'lishi uchun

$$\frac{1}{n}\sum_g \chi^*(g)\chi(g) = 1 \qquad (64)$$

bo'lishi kerak, chunki bu holda faqat bittagina m_i birga teng, qolganlari esa nolga teng bo'ladi.

Regular tasavvurga o'taylik. Regular tasavvur uchun $\chi(E) = n$, qolgan hamma elementlar uchun $\chi(g) = 0$ bo'ladi, demak, (63)-formula

$$\sum_i m_i^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_k^2 = n \qquad (65)$$

ko'rinishga keladi. Ikkinchi tomondan regular tasavvur uchun

$$n = \sum_i m_i n_i \qquad (66)$$

bo'lishi kerak, bu yerda n_i - i-nchi tasavvurning o'lchamligi. Shu formulalarni solishtirsak regular tasavvurning keltirilmaydigan tasavvurlarga yoyganimizda har bir keltirilmaydigan tasavvur o'zining o'lchamligiga teng bo'lgan karralik bilan kirishini topamiz:

$$m_i = n_i. \qquad (67)$$

65-formuladan yana bir muhim natija kelib chiqadi: abel gruppalari uchun har bir $m_i = 1$, chunki ularda har bir element alohida sinfni tashkil qiladi, ya'ni, ular uchun $k = n$. Bu degani, abel gruppalari uchun keltirilmaydigan tasavvurlar o'lchamligi hamma vaqt birga teng. Biz buni yuqorida Schur lemmasidan ham keltirib chiqargan edik.

4.19-misol. D_3 gruppasining 15-misolda topilgan tasavvurlariga ortogonallik munosabatlarini qo'llaylik. Buning uchun xarakterlar jadvalini tuzamiz:

	E	A	B	K	L	M
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	-1	0	0	0

Bu gruppada uchta sinf bor edi (124-betga qarang), har bir sinf elementlari bitta xarakterga egaligini hisobga olib jadvalimizni qayta tuzamiz:

	C_1	C_2	C_3
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	0

Tasavvurlarning hammasi haqiqiy bo'lib chiqdi. Topilgan tasavvurlarning hammasi ham keltirilmaydigan ekanligini isbotlash uchun (64)-formulaga murojaat qilamiz. Ko'rinib turibdiki, uchala tasavvur uchun ham

$$\frac{1}{6}\sum_{g}\chi^{(i)}(g)\chi^{(i)}(g) = 1, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{68}$$

yani, ularning hammasi keltirilmaydigan tasavvurlardir. D_3 uchun sinflarning soni uchga teng edi, keltirilmaydigan tasavvurlarning soni esa sinflarning soniga teng bo'lishi kerak. Bu degani, agar D_3 gruppa uchun yana boshqa tasavvurlar topilsa ular keltiriladigan bo'lib chiqadi.

Masalan, regular tasavvurni topaylik. Birlik element uchun regular tasavvur 6×6 o'lchamli birlik matritsa bo'ladi:

$$D^R(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{69}$$

A element uchun regular tasavvurni qurish uchun 10-ta'rifdan va 124-betdagi ko'paytirihs jadvalidan foydalanish yetarlidir. Bu jadval bo'yicha gruppa elementlarining tartib nomerlari mos ravishda

$$E \to 1,\ A \to 2,\ B \to 3,\ K \to 4,\ L \to 5,\ M \to 6.$$

Demak, $D^R_{ij}(k)$ matritsani tuzganda $k = 2$ deb olsak A element uchun regular tasavvurni topgan bo'lamiz. Noldan farqli matrik lelementlar quyidagi jadvalda berilgan:

$k{\times}j \to i:$ $2{\times}1 \to 2;$ $2{\times}2 \to 3;$ $2{\times}3 \to 1;$ $2{\times}4 \to 6;$ $2{\times}5 \to 4;$ $2{\times}6 \to 5.$

Bu jadval 124-betdagi jadvalning ikkinchi qatoriga mos keladi, masalan, 2-elementning 1-elementga ko'paytmasi 2-elementga teng, 2-elementning 2-elementga ko'paytmasi 3-elementga teng va h.k. Demak,

$$D^R(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (70)$$

Huddi shunday yo'l bilan

$$D^R(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (71)$$

ekenligini topamiz. ko'paytirish jadvali bo'yicha $AB = BA = E$, topilgan matritsalar uchun ham $D^R(A)D^R(B) = D^R(B)D^R(A) = D^R(E)$.

Shu yo'l bilan regular tasavvur matritsalarining hammasini topishimiz mumkin.

Ammo, biz bilamizki, hamma keltirilmaydigan tasavvurlarni topganmiz, regular tasavvur ularning ichiga kirmaydi. Buning isbotini (64)-formuladan ham ko'rishimiz mumkin: regular tasavvur uchun

$$\chi^R(E) = 6, \ \chi^R(A) = \chi^R(B) = \chi^R(K) = \chi^R(L) = \chi^R(M) = 0.$$

Ko'rinib turibdiki, keltirilmaydiganlik sharti bajarilmayapti

$$\frac{1}{6}\sum_g \chi^R(g)\chi^R(g) = 6 \neq 1.$$

Demak, regular tasavvurimiz keltiriladigan tasavvur, uni keltirilmaydigan tasavvurlar bo'yicha qatorga yoyishimiz mumkin. Yoyilma koeffisientlarini 63-formula bo'yicha topamiz:

$$m_1 = \frac{1}{6}\sum_g \chi^{(1)}(g)\chi^R(g) = \frac{1}{6}(6 \cdot 1 + 0) = 1,$$

$$m_2 = \frac{1}{6}\sum_g \chi^{(2)}(g)\chi^R(g) = \frac{1}{6}(6 \cdot 1 + 0) = 1, \qquad (72)$$

$$m_3 = \frac{1}{6}\sum_g \chi^{(3)}(g)\chi^R(g) = \frac{1}{6}(6 \cdot 2 + 0) = 2.$$

Topilgan natijani

$$D^R = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus 2D^{(3)}, \tag{73}$$

yoki, matritsa ko'rinishida

$$D^R = \begin{pmatrix} \boxed{D^{(1)}} & 0 & 0\;\;0 & 0\;\;0 \\ 0 & \boxed{D^{(2)}} & 0\;\;0 & 0\;\;0 \\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{D^{(3)}} & \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix} & \boxed{D^{(3)}} \end{pmatrix} \tag{74}$$

deb ifodalashimiz mumkin. So'z bilan aytsak, regular tasavvurning ichida bir o'lchamli $D^{(1)}$ tasavvur bir marta, bir o'lchamli $D^{(2)}$ tasavvur bir marta, ikki o'lchamli $D^{(3)}$ tasavvur esa ikki marta uchrar ekan. Regular tasavvur to'liq keltiriladigan bo'lib chiqdi.

4.20-misol. D_3 gruppasining yana bir tasavvuri. Uchta jismlarni ixtiyoriy ravishda o'rinalmashtirish operatsiyalariga mos keluvchi S_3 simmetrik gruppani olib qaraylik. Masalan,

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

element 2- va 3- jismlarni o'zaro almashtirib qo'yadi. Huddi shunday,

$$P_{312} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

element uchala jismlarni ciklik ravishda almashtirib chiqadi. Bu elementni R deb belgilaylik, 2- va 3-jismlarning o'rnini almashtiradigan elementni P deb belgilaylik: $P = P_{23}$. Birlik elementni esa quyidagicha belgilaymiz:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bu gruppadagi elementlar soni 6 ga teng. Ular quyidagilardir: $\{E, R, R^2, P, PR, PR^2\}$. Bu to'plam uch jism sistemasidagi hamma o'zaro o'rinalmashtirishlarni o'z ichiga olishini ko'rish qiyin emas. Boshlang'ich holat $(1, 2, 3)$ yuqoridagi operatsiyalar natijasida quyidagi ketma-ketliklarga o'tadi: $\{(1,2,3), (3,1,2), (2,3,1), (1,3,2), (3,2,1), (1,3,2).\}$

D_3 va S_3 gruppalarning izomorfligiga ishonch hosil qilish qiyin emas: $D_3 \sim S_3$. Ushbu izomorfizm quyidagicha o'rnatilishi mumkin:

$$E \leftrightarrow E, \quad A \leftrightarrow R, \quad B \leftrightarrow R^2, \quad K \leftrightarrow P, \quad L \leftrightarrow PR, \quad M \leftrightarrow PR^2.$$

Olingan natija muhim bo'lgan ***Caley teoremasi***ning hususiy holidir: Har qanday chekli gruppa mos keluvchi tartibli simmetrik gruppa S_n ning qismgruppasidir. Bu teoremaning to'liq isbotini keltirib o'tirmaymiz, uning to'g'riligiga har gal konkret cheklangan gruppani ko'rganimizda ishonch hosil qilishimiz mukin.

S_3 gruppa uchta bir hil jismli sistemaning simmetriyalarini o'z ichiga olgan. S_3 gruppa D_3 gruppaga izomorf ekan D_3 ning shu paytgacha topilgan hamma tasavvurlari S_3 ning ham tasavvurlari bo'lib hizmat qiladi. Ammo S_3 ning yana bir tasavvurini topishimiz mumkin. Buning uchun quyidagicha vektor-ustun kiritamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{75}$$

6-misolda ko'rsatgan edikki, D_3 gruppasi uch atomli molekulaning simmetriyalarini ifodalaydi, IV.1-rasmda bu molekula ko'rsatilgan. Kiritilgan vektor-ustun shu molekuladagi atomlarning boshlang'ich holatini bildirsin. Bu holda birlik element E ga 3×3 birlik matritsa mos keladi (hamma atomlar o'z boshlang'ich holatida qoladi):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

R elementini esa quyidagicha tasavvurlash munkin:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bu almashtirish molekulani $2\pi/3$ burchakka burashga mos keladi, atomlar quyidagicha o'rinalmashdi: $3 \to 1, 2 \to 3, 1 \to 2$. Topilgan ikkita matritsa S_3 gruppasining ikkita elementining 3×3 o'lchamli tasavvurlaridir, yangi tasavvurni $D^{(4)}(g)$ deb belgilasak topilgan matritsalarni quyidagicha ifodalashimiz mumkin:

$$D^{(4)}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D^{(4)}(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Huddi shu yo'sinda qolgan tasavvur matritsalarini ham topishimiz mumkin:

$$D^{(4)}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad D^{(4)}(PR) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D^{(4)}(R^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad D^{(4)}(PR^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Topilgan har bir matritsa bajarayotgan almashtirishlarni tekshirishni o'quvchiga qoldiramiz.

S_3 gruppasi ham uch sinfga bo'linadi - C_1 : (E), C_2 : (R, R^2), C_3 : (P, PR, PR^2). Xarakterlarni topaylik:

	E	R	R^2	P	PR	PR^2
$\chi^{(4)}$	3	0	0	1	1	1

Sinflar bo'yicha:

	C_1	C_2	C_3
$\chi^{(4)}$	3	0	1

Topilgan $D^{(4)}$ tasavvur keltirilmaydiganmi? Yo'q:

$$\frac{1}{6}\sum_g \chi^{(4)}(g)\chi^{(4)}(g) = \frac{1}{6}(9+3) = 2 \neq 1.$$

Buni oldindan ham bilishimiz mumkin edi: gruppadagi sinflarning soni uchta, uchta keltirilmaydigan tasavvurlar topib bo'lingan. Demak, uni keltirilmaydigan tasavvurlar bo'yicha to'g'ri yig'indiga yoyishimiz mumkin. Shu ishni bajaraylik.

Umumiy formula bo'yicha

$$m_i = \frac{1}{6}\sum_g \chi^{(4)}(g)\chi^{(i)}(g).$$

Oddiy hisoblash natijasida $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $m_3 = 1$ ekanligini topamiz. Natija quyidagidan iborat:

$$D^{(4)} = D^{(1)} \oplus D^{(3)},$$

yoki,

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} \boxed{D^{(1)}} & 0 \quad 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{D^{(3)}} \end{pmatrix}.$$

§8. Tasavvurlarning to'g'ri ko'paytmasi

Gruppalarning to'g'ri ko'paytmasini -betda kiritdik. Tasavvurlarning to'g'ri ko'paytmasiga o'taylik. Tasavvurlar - matritsalardir, shuning uchun matritsalardan boshlaylik. Bizga ikkita 2×2 matritsa berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \qquad (76)$$

Ularning *to'g'ri*, yoki, *tenzor* ko'paytmasi deb quyidagi 4×4 matritsa aytiladi:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (77)$$

$A \otimes B$ matritsaning matrik elementlari $a_{ij}b_{kl}$ elementlardan iborat, buni

$$(A \otimes B)_{ik,jl} = a_{ij}b_{kl} \quad (78)$$

ko'rinishda belgilanadi. Ikkala matritsamizning o'lchamliklari bir xil bo'lsa - $n \times n$, ularning to'g'ri ko'paytmasining o'lchamligi $n^2 \times n^2$ bo'ladi. Agar A ning o'lchamligi $n \times n$, B ning o'lchamligi $m \times m$ bo'lsa, $A \otimes B$ ning o'lchamligi $nm \times nm$ bo'ladi.

(78)-ta'rifning to'g'ri ishlashini ko'rstaylik. Bizga $n \times n$ tartibli ikkita A_1 va A_2 va $m \times m$ tartibli ikkita B_1 va B_2 matritsalar berilgan bo'lsin. Bu holda

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = A_1A_2 \otimes B_1B_2 \quad (79)$$

bo'lishini ko'rsataylik ($\otimes$ ko'rsatilmagan joylarda oddiy matrik ko'paytma ko'zda tutilgan).

$$\Big[(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)\Big]_{ik,jl} = (A_1 \otimes B_1)_{ik,pr}(A_2 \otimes B_2)_{pr,jl} =$$

$$= (A_1)_{ip}(B_1)_{kr}(A_2)_{pj}(B_2)_{rl} = (A_1A_2)_{ij}(B_1B_2)_{kl},$$

bu esa (79)-ning o'zi.

(78)-ta'rif quyidagiga ham olib keladi: agar A va B matritsalar unitar bo'lsa $A \otimes B$ ham unitar bo'ladi: $(A \otimes B)^\dagger = (A \otimes B)^{-1}$. Tekshiraylik:

$$\left(A^\dagger\right)_{ij}\left(B^\dagger\right)_{kl} = a^*_{ji}b^*_{lk} = (A \otimes B)^*_{jl,ik} = (A \otimes B)^\dagger_{ik,jl},$$

dan kelib chiqadiki

$$\left[(A \otimes B)^\dagger \cdot (A \otimes B)\right]_{ij,kl} = (A \otimes B)^\dagger_{ik,mn}(A \otimes B)_{mn,jl} =$$

$$= A^\dagger_{im}B^\dagger_{kn}A_{mj}B_{nl} = (A^\dagger A)_{ij}(B^\dagger B)_{kl} = \delta_{ij}\delta_{kl} = I_{ik,jl}.$$

Huddi shunday isbot qilishimiz mumkinki, ermit matritsalarning to'g'ri ko'paytmasi yana ermit matritsa bo'ladi.

Biror-bir gruppaning ikkita keltirilmaydigan tasavvurlari $D^{(\alpha)}$ va $D^{(\beta)}$ berilgan bo'lsin. Ularning to'g'ri ko'paytmasini quyidagicha ta'riflaymiz. ψ^{α} funksiyalar n_{α} o'lchamli L^{α} fazodagi $D^{(\alpha)}$ tasavvurning bazisni tashkil qilsin - $\{\psi_i^{\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n_{\alpha}\}$. Shunga o'xshab, ψ^{β} funksiyalar n_{β} o'lchamli L^{β} fazodagi $D^{(\beta)}$ tasavvurning bazisini tashkil qilsin - $\{\psi_i^{\beta}, i = 1, 2, \ldots, n_{\beta}\}$. Ularning ko'paytmasi $\{\psi_{ij}^{\alpha\beta} = \psi_i^{\alpha}\psi_j^{\beta}, i = 1, \ldots, n_{\alpha}; j = 1, \ldots, n_{\beta}\}$ $n_{\alpha} \times n_{\beta}$ o'lchamli fazodagi bazisni tashkil qiladi. Bu fazoni $L^{\alpha} \otimes L^{\beta}$ deb belgilaylik. Kelib chiqqan fazo L^{α} va L^{β} fazolarning to'g'ri ko'paytmasi deyiladi.

$D^{(\alpha)}$ va $D^{(\beta)}$ tasavvurlarning to'g'ri ko'paytmasiga mos keluvchi $n_{\alpha}n_{\beta} \times n_{\alpha}n_{\beta}$ o'lchamli matritsa

$$D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}$$

bazisi mana shu $\{\psi_i^{\alpha}\psi_j^{\beta}\}$ bo'lgan tasavvurni hosil qiladi:

$$D^{(\alpha\beta)} = D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}.$$

Hosil bo'lgan matritsa $D^{(\alpha\beta)}$ tasavvur matritsasi ekanligini tekshiraylik, buning uchun bizga 79-formula yetarlidir. $g_1 g_2 = g_3$ bo'lsin, matritsalar uchun ham shu qoida o'rinli ekanligini tekshiraylik:

$$\begin{aligned} D^{(\alpha\beta)}(g_1)D^{(\alpha\beta)}(g_2) &= \left(D^{(\alpha)}(g_1) \otimes D^{(\beta)}(g_1)\right)\left(D^{(\alpha)}(g_2) \otimes D^{(\beta)}(g_2)\right) \\ &= \left(D^{(\alpha)}(g_1)D^{(\alpha)}(g_2)\right) \otimes \left(D^{(\beta)}(g_1)D^{(\beta)}(g_2)\right) = \\ &= D^{(\alpha)}(g_3) \otimes D^{(\beta)}(g_3) = D^{(\alpha\beta)}(g_3). \end{aligned}$$

$L^{\alpha} \otimes L^{\beta}$ fazoda gruppamizning g elementiga mos keluvchi operatorini T_g deb belgilaylik. Uning ta'sirini quyidagicha aniqlashimiz mumkin;

$$\begin{aligned} T_g\psi_{ij}^{\alpha\beta} &= D_{kl,ij}^{(\alpha\beta)}(g)\psi_{kl}^{\alpha\beta} = D_{ki}^{(\alpha)}(g)D_{lj}^{(\beta)}(g)\psi_k^{\alpha}\psi_l^{\beta} = \\ &= \left(D_{ki}^{(\alpha)}(g)\psi_k^{\alpha}\right)\left(D_{lj}^{(\beta)}(g)\psi_l^{\beta}\right) = T_g\psi_i^{\alpha}T_g\psi_j^{\beta}. \end{aligned} \tag{80}$$

Agar

$$\psi^{\alpha\beta} = \psi^{\alpha} \otimes \psi^{\beta}$$

belgilash kiritsak ohirgi natijani

$$T_g\psi^{\alpha\beta} = T_g\psi^{\alpha} \otimes T_g\psi^{\beta}$$

ko'rinishda ham belgilashimiz mumkin.

Keltirilmaydigan tasavvurlarning to'g'ri ko'paytmasiga mos keluvchi tasavvurni keltirilmaydigan tasavvurlarning to'g'ri yig'indisiga yoyish tasavvurlar nazariyasining ikkinchi asosiy masalasidir. Ikkita tasavvlar $D^{(\alpha)}$ va $D^{(\beta)}$ keltirilmaydigan bo'lgan holdaham ularning to'g'ri ko'paytmasi keltirilmaydigan bo'lmasligi mumkin. Odatga, bu ko'paytma keltiriladigan tasavvur bo'lib uni keltirilmaydigan tasavvurlarning ***to'g'ri yig'indisiga*** yoyish masalasi muhim masaladir:

$$D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)} = \sum_{\gamma}^{\oplus} \lambda_{\alpha\beta\gamma} D^{(\gamma)} \tag{81}$$

Bunday qator ***Clebsch-Gordon qatori*** deyildi, $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ koeffisientlar esa Clebsch-Gordon koeffisientlari deyiladi. Ta'kidlab ketaylik, o'ng tomondagi qator - tasavvur matritsalarining to'g'ri yig'indisidir.

Xarakterlarga kelsak 78-dan ko'rinib turibdiki, to'g'ri ko'paytmaning xarakteri xarakterlarning ko'paytmasiga teng:

$$\chi^{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\left(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\right) = \chi^{\alpha}\chi^{\beta}. \tag{82}$$

Clebsch-Gordon qatori uchun bundan quyidagini olamiz:

$$\chi^{\alpha\beta} = \chi^{\alpha}\chi^{\beta} = \sum_{\gamma} \lambda_{\alpha\beta\gamma}\chi^{\gamma}. \tag{83}$$

§9. Tanlash qoidalari

Bizga biror fizik kattalik F_α berilgan bo'lsin, unga mos keluvchi operatorni $\hat{F}_\alpha$ deb belgilaylik. Kvant mexanikasida odatda

$$F_{\alpha ij} = (\psi_i, \hat{F}_\alpha\psi_j) \tag{84}$$

ko‘rinishdagi matrik elementni hisoblash masalasi qo‘yiladi. Agar fizik sistema qandaydir simmetriyaga ega bo‘lsa yuqoridagi matrik elementning qanday hollarda noldan farqli va qanday hollarda aynan nolga tengligini gruppalar nazariyasi aniqlab berishi mumkin. Bu ish ortogonallik munosabatlari asosida qilinadi.

Ko‘rilayotgan fizik sistema qandaydir simmetriyaga ega bo‘lsin, unga G gruppa mos kelsin (masalan, translatsion simmetriya, gruppa G - o‘zgarmas **a** vektorlarga siljish operatorlari $g(\mathbf{a}) = \exp(i\mathbf{ap})$ dan iborat). Operator $\hat{F}_\alpha$ shu gruppaning ma’lum bir tasavvuri orqali almashinadigan bo‘lsin:

$$\hat{F}_\alpha \quad \to \quad T_g \hat{F}_\alpha T_g^{-1} = \sum_\beta D^F_{\beta\alpha}(g) \hat{F}_\beta.$$

$\psi^{(1)}$ va $\psi^{(2)}$ holatlar ham mos keluvchi tasavvurlar bo‘yicha almashinsin:

$$T_g \psi_i^{(1)} = \sum_k D^{(1)}_{ki}(g) \psi_k^{(1)}, \qquad T_g \psi_j^{(2)} = \sum_l D^{(2)}_{lj}(g) \psi_l^{(2)}.$$

(84)-dagi skalar ko‘paytma unitar almashtirishlarga nisbatan invariantdir. Har bir ψ ning ma’lum bir tasavvurga bo‘ysunishini hisobga olib (84)-ni mos ravishda o‘zgartiramiz:

$$\begin{aligned} F_{\alpha ij} &= (\psi_i^{(1)}, \hat{F}_\alpha \psi_j^{(2)}) = (T_g \psi_i^{(1)}, T_g \hat{F}_\alpha \psi_j^{(2)}) = \\ &= (T_g \psi_i^{(1)}, T_g \hat{F}_\alpha T_g^{-1} T_g \psi_j^{(2)}) = \sum_{\beta,kl} D^{(1)*}_{ki}(g) D^F_{\beta\alpha}(g) \times \\ &\times D^{(2)}_{lj}(g) (\psi_k^{(1)}, \hat{F}_\beta \psi_l^{(2)}) = \sum_{\beta,kl} D^{(1)*}_{ki}(g) D^F_{\beta\alpha}(g) D^{(2)}_{lj}(g) F_{\beta kl}. \end{aligned}$$

Bu munosabatning chap tomoniga g kirmagani uchun uning o‘ng tomonida g bo‘yicha yig‘indiga o‘tamiz (natijani gruppa G ning tartibi n ga bo‘lish kerak, albatta):

$$F_{\alpha ij} = \frac{1}{n} \sum_g \sum_{\beta,kl} D^{(1)*}_{ki}(g) D^F_{\beta\alpha}(g) D^{(2)}_{lj}(g) F_{\beta kl}.$$

Yig‘indi ostidagi ifoda to‘g‘ri ko‘paytmadir:

$$D^{(1)*}(g) \otimes D^F(g) \otimes D^{(2)}(g).$$

Ortogonallik munosabati (50)-dan kelib chiqadiki

$$\frac{1}{n}\sum_{g} D^{(1)*}_{ki}(g)D^{F}_{\beta\alpha}(g)D^{(2)}_{lj}(g)$$

yig'indi shunda noldan farq qiladi qachonki $D^F \otimes D^{(2)}$ to'g'ri ko'paytmada $D^{(1)}$ tasavvur uchrasa. Aks holda bu yig'indi nolga teng. Mana shu tasdiq ***tanlash qoidasi*** deyiladi. Chunki, yig'indi nolga teng bo'lsa (84)-matrik element ham nolga teng bo'ladi, ya'ni, bunday jarayonning amplitudasi nolga teng bo'ladi. Amplitudasi nolga teng jarayon taqiqlangan jarayon deyiladi. Tanlash qoidasi matrik elementning hisoblash yo'lini ko'rsatmaydi, u faqat qanday jarayonlar taqiqlanganligini ko'rsatadi.

4.21-misol. Simmetriyasi uch o'lchamli aylanish gruppasi $SO(3)$ ga mos keluvchi atom sistema berilgan bo'lsin. Sistema dipol momentga ega bo'lsin. Dipol momentining tashqi elektr maydondagi energiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$V = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{E} = -\sum_a e_a\mathbf{r}_a\cdot\mathbf{E}. \tag{85}$$

Shu o'zaro ta'sirga mos keluvchi operator $\hat{V}$ ta'siridagi o'tishlarning qaysi birlari taqiqlangan va qaysi birlariga ruxsat bor?

§12.-paragrafda ko'rsatilganki, $SO(3)$ gruppasining keltirilmaydigan tasavvurlari j son bilan aniqlanadi. j son butun va yarim butun sonlardan iborat, j - chi tasavvurni amalga oshiradigan funksiyalar $2j+1$ o'lchamli fazodagi bazisni aniqlaydi. $j=1$ hol uch o'lchamli fazo vektoriga mos keladi, shunga yarasha $\mathbf{r}_a$ vektorlar $D^{(1)}$ tasavvur bo'yicha o'zgaradi. Atom sistema ham qandaydir $D^{(j)}$ tasavvurga bo'ysunsin ($j = l + 1/2$, bu yerda l - orbital moment). Atom sistemasining (85)-operator ta'sirida $j_1 \to j_2$ o'tishlarining qaysi birlariga ruxsat bor va qaysi birlari ta'qiqlangan?

Umumiy mulohazalarga asosan

$$(j_2, \hat{V} j_1) \sim (j_2, \hat{\mathbf{r}}_a j_1) \sim D^{(j_2)*} \otimes D^{(1)} \otimes D^{(j_1)}.$$

Ma'lumki

$$D^{(1)} \otimes D^{(j_1)} = D^{(j_1+1)} \oplus D^{(j_1)} \oplus D^{(j_1-1)}.$$

Demak, faqatgina $j_2 = j_1+1,\ j_1,\ j_1-1$ bo'lganda $j_1 \to j_2$ o'tish ta'qiqlanmagan bo'ladi. Buni $\Delta j = 0, \pm 1$ qoida deyiladi. Bu qoidadan bitta istisno bor. Boshlang'ich holat $j_1 = 0$ bo'lsin, unda $D^{(1)} \otimes D^{(0)} = D^{(1)}$, demak, faqatgina $j_2 = 1$ holatga o'tish mumkin, $0 \to 0$ o'tishlar taqiqlangan.

§10. Uzluksiz gruppalar

Shu paytgachan cheklisonli, ya'ni, diskret elementlardan iborat bo'lgan gruppalarni o'rgandik. Elementlari to'plami uzliksiz fazoni tashkil qiladigan gruppalarga o'taylik.

4.22-misol. R^1 - qo'shish operasiyasiga nisbatan uzliksiz additiv gruppa. Bu - nokompakt gruppa, chunki gruppa elmentlari nokompakt to'plamni tashkil qiladi.

4.23-misol. To'liq chiziqli gruppa $GL(n, C)$ - kompleks elementlardan iborat aynimagan $n \times n$ matritsalar to'plami:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}. \tag{86}$$

Agar har bir element g_{ij} qandaydir parametrga uzliksiz bog'liq bo'lsa $\{g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1n}, g_{21}, \dots, g_{nn}\}$ vektorni n^2 o'lchamli uzliksiz C^{n^2} kompleks fazo nuqtasi deb qarashimiz mumkin.

4.24-misol. $GL(n, R)$ - $GL(n, C)$ gruppasining qismgruppasi:

$$GL(n, R) = \{g : g \in GL(n, C), \operatorname{Im} g_{ij} = 0, \; i, j = 1, \dots, n\}.$$

Uning hamma elementlari haqiqiy sonlardir.

4.25-misol. $SL(n, C) \subset GL(n, C)$. Determinanti birga teng matritsalar to'plami:

$$SL(n, C) = \{g : g \in GL(n, C), \det g = 1.\}$$

Bu ham nokompakt gruppa. Buni quyidagicha hususiy misolda ko'ramiz.

$SL(2, C)$ gruppasini qaraylik. Bu gruppa giperbolik aylanishlarni o'z ichiga oladi.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matritsa $SL(2, C)$ ga tegishli bo'lishi uchun uning determinanti birga teng bo'lishi kerak:

$$ad - bc = 1.$$

Bu tenglamaning yechimlaridan biri:

$$a = d = \operatorname{ch}\tau, \quad b = c = \operatorname{sh}\tau.$$

Parametr τ ning o'zgarish sohasi cheklanmagan: $-\infty < \tau < \infty$. Demak, $SL(2, C)$ ning gruppaviy fazosi to'g'ri chiziqqa gomomorf ekan, shuning uchun u nokompakt gruppa. Uning elementlari sifatida

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau & \operatorname{sh}\tau \\ \operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau \end{pmatrix}$$

matritsalarni ko'rishimiz mumkin.

Agar x_0, x_1 lar ikki o'lchamli psevdoevklid fazodagi koordinatlar bo'lsa

$$x_0' = x_0 \operatorname{ch}\tau + x_1 \operatorname{sh}\tau, \qquad x_1' = x_0 \operatorname{sh}\tau + x_1 \operatorname{ch}\tau \tag{87}$$

almashtirish shu fazodagi interval kvadratini o'zgartirmaydi:

$$x_0'^2 - x_1'^2 = x_0^2 - x_1^2.$$

87 - almashtirishlar *Lorentz almashtirishlari* deyiladi. Fizik kattaliklarga

$$\operatorname{ch}\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

orqali o'tishimiz mumkin.

4.26-misol. Unitar $n \times n$ matritsalar to'plamini olaylik. U gruppani hosil qiladi, chunki ikkita unitar matritsalarning ko'paytmasi yana unitar matritsadir:

$$U_1^\dagger U_1 = I \text{ va } U_2^\dagger U_2 = I \quad \text{bo'lsa} \quad (U_1U_2)^\dagger U_1U_2 = U_2^\dagger U_1^\dagger U_1 U_2 = I$$

bo'ladi. Oydinki

$$U(n) = \{g : g \in GL(n, C),\ g^\dagger g = 1\}.$$

Unitar matritsalar ichida determinanti birga tenglari $SU(n)$ deb belgilanadi, ular ham gruppani tashkil qiladi:

$$SU(n) = \{g : g \in GL(n, C),\ g^\dagger g = 1,\ \det g = 1\}, \quad SU(n) \subset U(n).$$

$SU(n)$ - unitar unimodular matritsalar gruppasi deyiladi.

$U(n)$ gruppasini kompleks chiziqli fazodagi skalar ko'paytmani saqlaydigan matritsalar to'plami sifatida aniqlashimiz ham mumkin:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

skalar ko'paytma berilgan bo'lsa unitar almashtirish natijasida $x' = Ux$, $y' = Uy$ skalar ko'paytma o'zgarmaydi:

$$(Ux,\, Uy) = (x,\, U^{\dagger} U y) = (x,\, y).$$

Unitar gruppalar kompakt gruppadir.

4.27-misol. n o'lchamli fazodagi ortogonal matritsalar to'plami $O(n)$ gruppani hosil qiladi: ikkita ortogonal matritsa $O_1(n)$ va $O_2(n)$ larning ko'paytmasi yana ortogonal matritsa:

$$(O_1 O_2)^T (O_1 O_2) = O_2^T O_1^T O_1 O_2 = I.$$

Ortogonal matritsalar haqiqiy n o'lchamli fazodagi skalar ko'paytmalarni saqlaydi:

$$(Ox,\, Oy) = (x,\, y).$$

Ortogonal gruppalar kompakt gruppalarga kiradi.

Juda muhim teorema: ***Ixtiyoriy kompakt uzliksiz gruppa yoki $U(n)$, yoki $O(n)$ ning qismgruppasi bo'ladi.***

4.28-misol. Psevdoortogonal gruppa $O(p, q)$ o'lchamligi $p + q$ bo'lgan haqiqiy fazodagi quyidagi formani saqlaydigan almashtirishlar sifatida ta'riflanadi:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - x_{p+2} y_{p+2} - \cdots - x_{p+q} y_{p+q}.$$

Bu gruppalar nokompakt gruppalarga kiradi. Bu gruppaga kirgan matritsalarning determinanti birga teng bo'lganlarini $SO(p,\, q)$ deb belgilanadi. Lorentz almashtirishlari $SO(3,\, 1)$ gruppasini hosil qilishini tushunish qiyin emas.

4.29-misol. Psevdounitar gruppa $U(p, q)$ o'lchamligi $p + q$ bo'lgan kompleks fazodagi quyidagi formani saqlaydigan almashtirishlar sifatida ta'riflanadi:

$$(x, y) = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \cdots x_p^* y_p - x_{p+1}^* y_{p+1} - x_{p+2}^* y_{p+2} - \cdots - x_{p+q}^* y_{p+q}.$$

Bu gruppalar nokompakt gruppalarga kiradi. Determinanti birga teng psevdounitar matritsalar $SU(p, q)$ deb belgilanadi.

4.30-misol. Simplektik gruppa $Sp(n, C)$. Bu gruppaga kirgan almashtirishlar $2n$ o'lchamli fazoda quyidagi formani saqlaydi:

$$(x, y) = x_1 y_{2n} + x_2 y_{2n-1} + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n-1} - x_{n+2} y_{n-2} - \cdots - x_{2n} y_1.$$

Bu formaning nomi - simplektik forma. $Sp(n, C)$ nokompakt gruppani tashkil etadi. Hamilton dinamikasi ushbu gruppa almashtirishlariga nisbatan invariantdir. Buni quyidagicha ko'rish mumkin. Poisson qavsini olaylik:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Agar $\{x_i = p_1, p_2, \cdots, p_n, q_n, q_{n-1}, \cdots, q_1\}$ va

$$I^{(2n)} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} bundayemas$$

belgilashlar kiritsak (I_n - n - o'lchamli birlik matritsa) Poisson qavslarini

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} I_{ij}^{(2n)}$$

ko'rinishga keltirib olamiz. Poisson qavslari yuqoridagi simplektik forma ko'rinishini oldi.

§11. Uch o'lchamli fazodagi aylanishlar gruppasi

Uch o'lchamli fazoda bir $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektorni olib qaraylik. Yangi shtixlangan koordinat sistemasiga o'taylik, u eski sistemani biron burchakka burash orqali olingan bo'lsin. Bu sistemada vektorimizning komponentalari $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ bo'ladi. Buralish - chiziqli almashtirish bo'lib eski va yangi koordinatalar quyidagicha chiziqli bog'langan bo'ladi:

$$\begin{aligned} x'_1 &= g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + g_{13}x_3, \\ x'_2 &= g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + g_{23}x_3 \\ x'_3 &= g_{31}x_1 + g_{32}x_2 + g_{33}x_3. \end{aligned} \tag{88}$$

Matrik belgilashlarga o'tsak bu almashtirishni

$$x'_i = g_{ij} x_j \tag{89}$$

ko'rinishga keltirishimiz mumkin.

Demak, uch o'lchamli fazodagi chiziqli alamshtirish 3×3 matritsa

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

orqali ifodalanar ekan. (88) - almashtirish aynan aylanish bo'lishi uchun g matritsa ma'lum bir hossalarga ega bo'lishi kerak. Ularni keltirib chiqarish uchun aylanishda vektorning uzunligi o'zgarmasligi kerakligini ishlatamiz:

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = \mathbf{x}'^2.$$

Ammo

$$\sum_{i=1}^{3} x_i'^2 = \sum_{i,j,k=1}^{3} x_j g_{ij} g_{ik} x_k,$$

bu ifoda $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2$ ga teng bo'lishi uchun

$$\sum_{i=1}^{3} g_{ij} g_{ik} = \delta_{jk}$$

bo'lishi kerak. Demak, uch o'lchamli fazodagi buralishlar matritsalari g ortogonal matritsa bo'lishi kerak:

$$g^T g = I.$$

Uch o'lchamli ortogonal matritsalar to'plami $O(3)$ deb belgilanadi. Demak, $g \in O(3)$. Ortogonallik sharti $g^T = g^{-1}$ dan

$$(\det g)^2 = 1, \qquad \text{yoki,} \qquad \det g = \pm 1$$

ekanligi kelib chiqadi. Determimnanti -1 bo'lgan matritsalar gruppani tashkil qilmaydi (haqiqatan ham, ikkita $\det g = -1$ bo'lgan matritsalar ko'paytmasining determinanti +1 bo'ladi),

$\det g = +1$ matritsalar esa - tashkil qiladi. Demak, $\det g = +1$ matritsalar $O(3)$ gruppasining qismgruppasini tashkil qilar ekan, uni odatda $SO(3)$ deb belgilanadi (so'z bilan aytganda - ortogonal unimodular matritsalar).

§12. $SU(2)$-gruppasi

Unitar unimodular matritsalar gruppani tashkil qiladi. $SU(2)$ bilan $SO(3)$ ni bog'laylik. Buning uchun fazoning har bir nuqtasi (x_1, x_2, x_3) bilan

$$\hat{x} = x_i\sigma_i = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

matritsani bog'laymiz, bu yerda σ_i - Pauli matritsalari. I-bobdagi (114)-formula Pauli matritsalarini aniqlaydi. Ular uchun quyidagi kommutatsiya va ko'paytirish qoidalari o'rinlidir:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{90}$$

Pauli matritsalarining harbirining izi nolga teng, ammo yuqoridagi formulaning ikkinchi qismidan

$$\mathrm{Tr}\ (\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij} \tag{91}$$

ekanligini topish mumin.

$\hat{x}$ matritsa ermit va uning izi nolga teng:

$$\hat{x}^\dagger = \hat{x}, \ \mathrm{Tr}\,\hat{x} = 0.$$

(91)-formuladan foydalanib

$$x_i = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\hat{x}\sigma_i)$$

ekanligini topish mumkin.

Agar unitar va unimodular bo'lgan 2×2 o'lchamli U matritsa yordamida yangi

$$\hat{x}' = U\hat{x}U^{-1} \tag{92}$$

matritsa tuzsak u ham ermit va izsiz matritsa bo'ladi:

$$\hat{x}' = \begin{pmatrix} x'_3 & x'_1 - ix'_2 \\ x'_1 + ix'_2 & -x'_3 \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Bu tasdiqning isboti qiyin emas:

1. $\left(U\hat{x}U^{-1}\right)^{\dagger} = (U^{-1})^{\dagger}\hat{x}^{\dagger}U^{\dagger} = U\hat{x}U^{-1}$;

2. $\mathrm{Tr}\hat{x}' = \mathrm{Tr}\left(U\hat{x}U^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\hat{x} = 0.$

(93) - formula mana shu ikki munosabatning natijasidir. (92) - dan kelib chiqadiki,

$$\det\hat{x}' = \det\hat{x}.$$

Ikkinchi tomondan

$$\det\hat{x} = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -\mathbf{x}^2 \quad \text{va} \quad \det\hat{x}' = -x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = -\mathbf{x}'^2.$$

Demak, unitar va unimodular bo'lgan 2×2 o'lchamli U matritsa yordamida bajarilgan (92) - almashtirish vektorning uzunligini saqlaydigan almashtirish, ya'ni, fazodagi burilish ekan.

Shunday ekanligiga quyidagi hususiy hol misolida ishonch hosil qilishimiz mumkin:

$$U_z = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}. \tag{94}$$

Hisoblaymiz:

$$U_z\hat{x}U_z^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_3 & (x_1 - ix_2)e^{-i\alpha} \\ (x_1 + ix_2)e^{i\alpha} & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3' & x_1' - ix_2' \\ x_1' + ix_2' & -x_3' \end{pmatrix},$$

yoki,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha; \\ x_2' &= -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha; \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Demak, (94) - matritsa z - o'qi atrofida α burchakka buralishni ifodalar ekan.

4.1-mashq.

$$U_y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \tag{95}$$

matritsa y o'qi atrofida β burchakka buralishni ifodalashini isbot qiling.

(92)- formulani $\hat{x}' = x_i'\sigma_i = U\sigma_i U^{-1}x_i$ ko'rinishda yozib olib unga (91)- formulani qo'llab va (89)-formulani eslasak $g \in SO(3)$

va $U \in SU(2)$ matritsalar quyidagicha bog'langanligini ko'rsatish mumkin:

$$g_{ij}(U) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(U\sigma_j U^{-1}\sigma_i\right) \tag{96}$$

Ko'rinib turibdiki, $g(U) = g(-U)$. Demak, $+U \in SU(2)$ va $-U \in SU(2)$ matritsalarga bitta $g \in SO(3)$ mos keladi. Bundan kelib chiqadiki, $SU(2)$ va $SO(3)$ gruppalari orasida ikki qiymatli gomomorfizm bor ekan:

$$SU(2) \Rightarrow SO(3)$$
$$\text{ker f} = Z_2 = \{E, -E\}.$$

$SO(3)$ gruppasi $SU(2)$ gruppasining Z_2 invariant qismgruppasi bo'yicha faktor gruppasini beradi.

§12.1. Generatorlar

$SU(2)$ gruppasining generatorlarini topaylik. Gruppa elementi g va generatori A orasida quyidagi bog'lanish bor (α - gruppaviy parametr):

$$g(\alpha) = e^{i\alpha_i A_i}. \tag{97}$$

g matritsa unitar $g^\dagger = g^{-1}$ bo'lishi uchun generator ermit bo'lishi kerak:

$$A_i^\dagger = A_i. \tag{98}$$

g ning unimodularligini ishlatish uchun (I.134) - ayniyatdan foydalanamiz:

$$\det g = \exp\left(i\alpha_i \mathrm{Tr}\, A_i\right) = 1 \quad \rightarrow \mathrm{Tr}\, A_i = 0. \tag{99}$$

Demak, A_i matritsalar *ermit* va *izsiz* 2×2 matritsalar ekan. Bunday matritsalar sistemasi bizga ma'lum - bu Pauli matritsalari:

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Qisqacha aytganda, $A_i = \frac{1}{2}\sigma_i$. Pauli matritsalari quyidagi kommutatsion munosabatlarga bo'ysunadi:

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k. \tag{100}$$

4.31-misol. (94) - formula orqali aniqlangan U_z matritsa z - o'qi atrofida α burchakka buralish matritsasi ekanligini isbot qilgan edik. Hozirgina keltirilgan muloxazalar shunday matritsa sifatida

$$g_z(\alpha) = \exp\left(\frac{i}{2}\alpha\sigma_z\right)$$

ni qarashimiz kerakligini bildiradi. Ularning tengligini isbot qilaylik.

$$g_z(\alpha) = \exp(\alpha\sigma_z) = I + \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\alpha & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2}\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} \left(\frac{i}{2}\right)^2\alpha^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{i}{2}\right)^2\alpha^2 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{2}\alpha\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i}{2}\alpha\right) \end{pmatrix} = U_z. \tag{101}$$

§12.2. $SO(3)$ gruppasining generatorlari

z o'qi atrofidagi φ burchakka buralish matritsasini yozamiz:

$$g_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{102}$$

Generatorning ta'rifi bo'yicha

$$J_z = \frac{1}{i}\frac{dg_z}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=0},$$

hisoblashni bajarsak

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{103}$$

Ishonch hosil qilish qiyin emaski,

$$g_z(\varphi) = \exp(i\varphi J_z).$$

Huddi shunday yo'l bilan, x va y o'qlari atrofida buralish matritsalari

$$g_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad g_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

dan kelib chiqib x va y o'qlari atrofida buralish generatorlarini topishimiz mumkin:

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{104}$$

Tekshirish qiyin emaski

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k. \tag{105}$$

Undan tashqari

$$J_i^\dagger = J_i. \tag{106}$$

Bu formulani (100) - formula bilan solishtirsak $SU(2)$ va $SO(3)$ gruppalarining generatorlari bir hil kommutatsion munosabatlarga bo'ysunar ekan. Generatorlar uchun kommutatsion munosabatlar ***gruppaning algebrasini*** tashkil etadi deyiladi. $SU(2)$ va $SO(3)$ gruppalarining algebralari bir xil ekan. Bu - yuqorida aytilgan $SU(2)$ va $SO(3)$ orasidagi gomomorflikning aksidir. Ikkala gruppaning generatorlari bir xil algebraga bo'ysunar ekan ularning orasidagi farqqa bormaymiz, $\{J_i, i = 1, 2, 3\}$ deganda ikkala gruppaning ham generatorlarini tushunamiz.

Generatorlarning kvadratlarining yig'indisini kiritaylik:

$$\mathbf{J}^2 = J_i J_i = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2. \tag{107}$$

Uning ixtiyoriy generator bilan kommutatori nolga teng:

$$[\mathbf{J}^2, J_i] = 0. \tag{108}$$

Demak, $\mathbf{J}^2$ ixtiyoriy J_i bilan bir hususiy funksiyalar sistemasiga ega ekan. Ammo, J_i lar o'zaro kommutativ emas, shuning uchun gruppaning tasavvurlari klassifikatsiyasi maqsadi uchun $\mathbf{J}^2$ bilan bir vaqtda faqatgina bitta J_i ni tanlab olish mumkin. Bunday generator sifatida odatda $J_3 = J_z$ olinadi. Demak, tanlab olingan bazisni tashkil qilgan funksiyalar $\mathbf{J}^2$ va J_3 ning hususiy funksiyalari bo'ladi.

§13. $SU(2)$ $(SO(3))$ gruppasining tasavvurlari

Tasavvurlarni qurish uchun

$$J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2$$

operatorlarni kiritamiz.

4.2-mashq. Quyidagi munosabatlarni keltirib chiqaring:

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_z, \quad \mathbf{J}^2 = J_+J_- + J_z^2 - J_z = J_-J_+ + J_z^2 + J_z. \tag{109}$$

Izlayapgan tasavvur matritsalari qandaydir bir n o'lchamli fazoda ta'sir qilayapgan bo'lsin, bu fazodagi bazis elementlarini f_m, $m = 1, 2, ..., n$ deb belgilaymiz. Tanlovimiz bo'yicha

$$J_z f_m = m f_m. \tag{110}$$

Bazisni ortonormal deb olamiz. Hozircha ularning indeksida faqatgina J_z ning hususiy qiymatini aks ettiramiz, $\mathbf{J}^2$ ning hususiy qiymatini uni topgandan keyin kiritamiz.

Yuqoridagi kommutatsion munosabatlarni ishlatib

$$J_z J_\pm f_m = (J_\pm J_z \pm J_\pm) f_m = (m \pm 1) J_\pm f_m \tag{111}$$

ekanligini topish mumkin. Demak, $(J_\pm f_m)$ funksiya J_z matritsaning $(m \pm 1)$ hususiy qiymatli hususiy funksiyalari ekan. Ya'ni, J_+ operatori J_z ning husisiy qiymatini bittaga oshirib hususiy funksiyani $f_m \to f_{m+1}$ tarzda o'zgartirar ekan, J_- operatori esa J_z ning husisiy qiymatini bittaga kamaytirib hususiy funksiyani $f_m \to f_{m-1}$ tarzda o'zgartirar ekan. Shu sababli J_+ operator "ko'taruvchi" operator va J_- operator esa "pasaytiruvchi" operator deyiladi. Fazomiz chekli o'lchamli bo'lgan ekan m ning shunday maksimal qiymati (uni j harfi bilan belgilaylik) borki

$$J_+ f_j = 0$$

bo'lishi kerak. Agar

$$J_\pm f_m = \rho_m^\pm f_{m\pm1}$$

belgilash kiritsak

$$[J_+, J_-] f_m = 2J_z f_m = 2m f_m = (\rho_m^- \rho_{m-1}^+ - \rho_m^+ \rho_{m+1}^-) f_m,$$

yoki,
$$\rho_m^-\rho_{m-1}^+ - \rho_m^+\rho_{m+1}^- = 2m \tag{112}$$
munosabatga kelamiz. $J_\pm$ ning matrik elementlarini hisoblaylik:
$$< m|J_+|m' >= (J_+)_{mm'} =< m|\rho_{m'}^+|m'+1 >= \rho_{m'}^+\delta_{m,m'+1};$$
$$< m'|J_-|m >= (J_-)_{m'm} =< m'|\rho_m^-|m-1 >= \rho_m^-\delta_{m',m-1}.$$
Bu munosabatlarni faqat noldan farqli matrik elementlar kirgan quyidagi ko'rinishda ham olish qulay:
$$< m|J_+|m-1 >= \rho_{m-1}^+, \qquad < m-1|J_-|m >= \rho_m^-.$$
$J_\pm$ larning boshqa elementlari nolga teng. (106) - munosabatdan kelib chiqadiki
$$(J_+)_{mm'} = (J_-^\dagger)_{mm'} = (J_-^*)_{m'm},$$
yoki,
$$\rho_m^+ = \rho_{m+1}^{-*}.$$
Matrik elementlar tilida
$$< m|J_+|m-1 >=< m-1|J_-|m >^* .$$
Natijada (112) - formula
$$|\rho_{m-1}^+|^2 = 2m + |\rho_m^+|^2$$
ko'rinishga keltiriladi.

4.3-mashq.

1. Yuqoridagi munosabatda galma-galdan $m = j$, $m = j-1, \ldots$ qiymatlarni olib
$$\rho_{j-m}^+ = \sqrt{(2j-m+1)m}$$
ekanligini ko'rsating;

2.
$$\rho_m^+ = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}, \qquad \rho_m^- = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}$$
ekanligini ko'rsating;

3. $J_\pm$ larning noldan farqli elementlari uchun
$$< m|J_+|m-1 >=< m-1|J_-|m >= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}$$
ekanligini ko'rsating.

4. $J_1 = (J_+ + J_-)/2$ va $J_2 = (J_+ - J_-)/(2i)$ lardan foydalanib $j = 1/2$ holda

$$J_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \qquad J_2 = \frac{1}{2}\sigma_2, \qquad J_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 \tag{113}$$

ekanligini ko'rsating.

5. $j = 1/2$ holda

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{114}$$

ekanligiga ishonch hosil qiling.

$\mathbf{J}^2$ ning hususiy qiymatini hozircha C_{J^2} deb belgilab uni quyidagicha topamiz. Bir tomondan

$$< m_1|J_+J_-|m_2 >=< m_1|\mathbf{J}^2 - J_z(J_z-1)|m_2 >=$$
$$= (C_{J^2} - m_2(m_2-1))\delta_{m_1m_2},$$

ikkinchi tomondan

$$< m_1|J_+J_-|m_2 >= \sum_{m_3} < m_1|J_+|m_3 >< m_3|J_-|m_2 >=$$
$$= \sum_{m_3} \delta_{m_1,m_3+1}\sqrt{j(j+1) - m_3(m_3+1)}\delta_{m_3,m_2-1}\times$$
$$\times \sqrt{j(j+1) - m_2(m_2-1)} = \delta_{m_1,m_2}\left(j(j+1) - m_1(m_1-1)\right).$$

Demak,

$$\mathbf{J}^2 f_m = j(j+1)f_m. \tag{115}$$

f_m bazis $\mathbf{J}^2$ va J_z larning hususiy funksiyalaridan tashkil topganligini bilamiz, ammo shu paytgacha bazis funksiyalarimizning indeksi faqatgina J_z ning hususiy qiymatlarini aks ettirgan edi, endi biz $\mathbf{J}^2$ ning ham hususiy qiymatlarini topdik va uni ham f ning indeksida aks ettirishimiz kerak: f_m^j.

j soni m ning maksimal qiymati edi, uning minimal qiymatini topaylik. Hozircha shu minimal qiymatni j' deb belgilaylik. o'zining ta'rifi bo'yicha

$$J_- f_{j'}^j = 0.$$

Shundan kelib chiqib

$$J_+J_-f_{j'}^j = (\mathbf{J}^2 - J_z(J_z-1))f_{j'}^j = (j(j+1) - j'(j'-1))f_{j'}^j = 0,$$

yoki,

$$j' = -j$$

ekanligini topamiz. Demak, J_z ning hususiy qiymati m

$$-j \leq m \leq j \tag{116}$$

qiymatlarni qabul qilar ekan. Boshqacha so'z bilan aytganda tasavvur matritsalari ta'sir qilayapgan bazis soni $(2j+1)$ - ta bo'lgan

$$f^j_{-j}, f^j_{-j+1}, f^j_{-j+2}, \ldots, f^j_{j-1}, f^j_j \tag{117}$$

funksiyalardan iborat ekan. Bu bazis ***kanonik bazis*** deyiladi.

Olingan natijalarning asosiylarini qulaylik uchun bir joyga yig'aylik:

$SU(2)$ $(SO(3))$ gruppasining tasavvurlar fazosida $\{f^j_m, -j \leq m \leq j\}$ funksiyalardan iborat to'plam ortonormal bazisni tashkil qiladi. Bu bazisda $\mathbf{J}^2$, J_z, J_+, J_- larning matrik elementlari 3-mashqdagi formulalar va (110)-, (115)-formulalar orqali aniqlanadi. Fazoning o'lchamligi n $\mathbf{J}^2$ ning hususiy qiymati j bilan aniqlanadi: $n = 2j+1$. Fazoning o'lchamligi butun son bo'lganligi uchun j quyidagi yarimbutun qiymatlarni qabul qilishi mumkin:

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \ldots$$

$j = 0$ hol trivial tasavvur deyiladi, $j = 0$ ga bir o'lchamli fazo mos keladi, bir o'lchamli fazo skalar funksiyalardan tashkil topgan fazodir.

$j = \frac{1}{2}$ bo'lganda $n = 2$ ga teng, bu tasavvur ikki o'lchamli fazoda ta'sir qilishi kerak. Ikki o'lchamli fazo vektorini

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Odatda bunday kompleks vektorlar ***spinor*** deyiladi. Yuqoridagi (116)- va (117)-formulalarga qaytsak f_1 komponenta $j = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ holga va f_2 komponenta $j = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$ holga mos kelishini ko'ramiz. Ya'ni, spinorni

$$\begin{pmatrix} f^{1/2}_{1/2} \\ \\ f^{1/2}_{-1/2} \end{pmatrix} \tag{118}$$

4. $J_1 = (J_+ + J_-)/2$ va $J_2 = (J_+ - J_-)/(2i)$ lardan foydalanib $j = 1/2$ holda

$$J_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \qquad J_2 = \frac{1}{2}\sigma_2, \qquad J_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 \tag{113}$$

ekanligini ko'rsating.

5. $j = 1/2$ holda

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{114}$$

ekanligiga ishonch hosil qiling.

$\mathbf{J}^2$ ning hususiy qiymatini hozircha C_{J^2} deb belgilab uni quyidagicha topamiz. Bir tomondan

$$< m_1|J_+J_-|m_2 > = < m_1|\mathbf{J}^2 - J_z(J_z - 1)|m_2 > = \\ = (C_{J^2} - m_2(m_2 - 1))\delta_{m_1 m_2},$$

ikkinchi tomondan

$$< m_1|J_+J_-|m_2 > = \sum_{m_3} < m_1|J_+|m_3 >< m_3|J_-|m_2 > = \\ = \sum_{m_3} \delta_{m_1,m_3+1}\sqrt{j(j+1) - m_3(m_3+1)}\delta_{m_3,m_2-1} \times \\ \times \sqrt{j(j+1) - m_2(m_2 - 1)} = \delta_{m_1,m_2}\left(j(j+1) - m_1(m_1 - 1)\right).$$

Demak,

$$\mathbf{J}^2 f_m = j(j+1) f_m. \tag{115}$$

f_m bazis $\mathbf{J}^2$ va J_z larning hususiy funksiyalaridan tashkil topganligini bilamiz, ammo shu paytgacha bazis funksiyalarimizning indeksi faqatgina J_z ning hususiy qiymatlarini aks ettirgan edi, endi biz $\mathbf{J}^2$ ning ham hususiy qiymatlarini topdik va uni ham f ning indeksida aks ettirishimiz kerak: f^j_m.

j soni m ning maksimal qiymati edi, uning minimal qiymatini topaylik. Hozircha shu minimal qiymatni j' deb belgilaylik. o'zining ta'rifi bo'yicha

$$J_- f^j_{j'} = 0.$$

Shundan kelib chiqib

$$J_+J_- f^j_{j'} = (\mathbf{J}^2 - J_z(J_z - 1)) f^j_{j'} = (j(j+1) - j'(j'-1)) f^j_{j'} = 0,$$

yoki,

$$j' = -j$$

ekanligini topamiz. Demak, J_z ning hususiy qiymati m

$$-j \leq m \leq j \tag{116}$$

qiymatlarni qabul qilar ekan. Boshqacha so'z bilan aytganda tasavvur matritsalari ta'sir qilayapgan bazis soni $(2j+1)$ - ta bo'lgan

$$f^j_{-j},\ f^j_{-j+1},\ f^j_{-j+2},\ \dots,\ f^j_{j-1},\ f^j_j \tag{117}$$

funksiyalardan iborat ekan. Bu bazis ***kanonik bazis*** deyiladi.

Olingan natijalarning asosiylarini qulaylik uchun bir joyga yig'aylik:

$SU(2)$ $(SO(3))$ gruppasining tasavvurlar fazosida $\{f^j_m,\ -j \leq m \leq j\}$ funksiyalardan iborat to'plam ortonormal bazisni tashkil qiladi. Bu bazisda $\mathbf{J}^2$, J_z, J_+, J_- larning matrik elementlari 3-mashqdagi formulalar va (110)-, (115)-formulalar orqali aniqlanadi. Fazoning o'lchamligi n $\mathbf{J}^2$ ning hususiy qiymati j bilan aniqlanadi: $n = 2j+1$. Fazoning o'lchamligi butun son bo'lganligi uchun j quyidagi yarimbutun qiymatlarni qabul qilishi mumkin:

$$j = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ \dots$$

$j = 0$ hol trivial tasavvur deyiladi, $j = 0$ ga bir o'lchamli fazo mos keladi, bir o'lchamli fazo skalar funksiyalardan tashkil topgan fazodir.

$j = \frac{1}{2}$ bo'lganda $n = 2$ ga teng, bu tasavvur ikki o'lchamli fazoda ta'sir qilishi kerak. Ikki o'lchamli fazo vektorini

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Odatda bunday kompleks vektorlar ***spinor*** deyiladi. Yuqoridagi (116)- va (117)-formulalarga qaytsak f_1 komponenta $j = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ holga va f_2 komponenta $j = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$ holga mos kelishini ko'ramiz. Ya'ni, spinorni

$$\begin{pmatrix} f^{1/2}_{1/2} \\ \\ f^{1/2}_{-1/2} \end{pmatrix} \tag{118}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin. Kvant mexanikasi nuqtai nazaridan ushbu spinor spini 1/2 ga teng bo'lgan zarrachaning to'lqin funksiyasini ifodalaydi. (113) - formula bo'yicha ushbu spinor $\mathbf{J}^2$ ning 3/4 ga teng hususiy qiymatiga mos keluvchi vektor, J_3 ning esa $\pm 1/2$ hususiy qiymatlariga mos keladi:

$$J_3 \begin{pmatrix} f^{1/2}_{1/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^{1/2}_{1/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f^{1/2}_{1/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{119}$$

$$J_3 \begin{pmatrix} 0 \\ f^{1/2}_{-1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f^{1/2}_{-1/2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ f^{1/2}_{-1/2} \end{pmatrix}. \tag{120}$$

Ko'taruvchi va pasaytiruvchi operatorlarga kelsak (114)-formuladan

$$J_+ \begin{pmatrix} 0 \\ f^{1/2}_{-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{1/2}_{-1/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad J_+ \begin{pmatrix} f^{1/2}_{1/2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

va

$$J_- \begin{pmatrix} f^{1/2}_{1/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f^{1/2}_{-1/2} \end{pmatrix}, \qquad J_- \begin{pmatrix} 0 \\ f^{1/2}_{-1/2} \end{pmatrix} = 0$$

ekanligini ko'rish mumkin.

Ikki komponentalik spinorlar aylanish gruppasining spinor tasavvurini tashkil qiladi. $j = 1$ bo'lgan holdagi tasavvur ***vektor tasavvur*** deyiladi, bu tasavvur bo'yicha almashinadigan uch komponentalik kattaliklar $SU(2)(SO(3))$ gruppasining vektori deyiladi. Agar ularni ustun sifatida olsak

$$\begin{pmatrix} f^1_1 \\ f^1_0 \\ f^1_{-1} \end{pmatrix}$$

ko'rinishga kelamiz. Bu - oddiy uch o'lchamli fazoning vektorlari, faqat ular kanonik bazisda olingan. Bu bazisni o'zimizga tanish bo'lgan uch o'lchamli dekart bazisi vektorlari bilan bog'lash qiyin emas.

$f^1_{\pm1}$ va f^1_0 lar qandaydir uchvektor $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ bilan bog'liq. Buni quyidagicha ham ko'rish mumkin: z o'qi atrofida φ burchakka bursak ixtiyoriy uchvektor uchun

$$a'_x \pm ia'_y = e^{\pm i\varphi}(a_x \pm ia_y) \tag{121}$$

bo'ladi ((I.14)-bilan solishtiring), huddi shu operatsiyada $f'^1_{\pm1} = g_z(\varphi)f^1_{\pm1} = e^{\pm i\varphi}f^1_{\pm1}$ bo'ladi ((102)- va (110)-lar bilan solishtiring). Undan tashqari, $g_z(\varphi)f^1_0 = f^1_0$ va $g_z(\varphi)a_z = a_z$. Demak, $f^1_1 \sim a_x + ia_y$, $f^1_{-1} \sim a_x - ia_y$ va $f^1_0 \sim a_z$ ekan. Odatda

$$f^1_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y), \qquad f^1_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y), \qquad f^1_0 = a_z$$

tanlab olinadi. Bu muhokamani (§17.)-paragrafdagi misolda davom ettiramiz.

$\mathbf{J}^2$ odatda ***Casimir operatori*** deyiladi (§22.4.-paragraf bilan solishtiring). Casimir operatorlarining hususiy qiymatlari gruppaning tasavvurlarini klassifikatsiya qilish uchun ishlatiladi. $SU(2)$ gruppasi uchun $\mathbf{J}^2 = j(j+1)$, hozirgina ko'rdikki, j ning har xil qiymatlariga har xil o'lchamli tasavvurlar mos keladi.

§14. 2 × 2 unitar va unimodular matritsaning umumiy ko'rinishi

Ixtiyoriy unitar va unimodular matritsaning eng umumiy ko'rinishini topaylik. Quyidagi kompleks 2 × 2 matritsani olaylik:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}. \tag{122}$$

Uning unimodularligi quyidagini beradi:

$$\det U = ad - bc = 1. \tag{123}$$

Teskari matritsa

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{124}$$

ta'rif bo'yicha $U^\dagger$ ga teng. Demak,

$$a^* = d, \quad b^* = -c, \tag{125}$$

yoki,

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad U^\dagger = U^{-1} = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}. \tag{126}$$

Determinantning birligidan esa

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{127}$$

kelib chiqadi. Bu tenglamaning yechimi sifatida

$$a = e^{-i\delta}\cos\gamma, \qquad b = -e^{-i\lambda}\sin\gamma \tag{128}$$

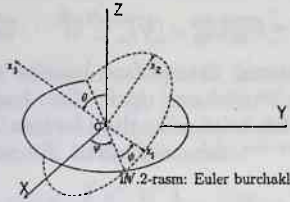
larni olishimiz mumkin. b ning oldidagi minus ishorasi aylanish matritsalari bilan moslik uchun olingan. Shu bilan biz 2×2 o'lchamli unitar unimodular matritsaning eng umumiy ko'rinishini topdik:

$$U = \begin{pmatrix} e^{-i\delta}\cos\gamma & -e^{-i\lambda}\sin\gamma \\ e^{i\lambda}\sin\gamma & e^{i\delta}\cos\gamma \end{pmatrix}. \tag{129}$$

Bu formulada $\gamma = 0$ deb olsak z - o'qi atrofida 2δ burchakka buralish matritsasini olamiz - (94)-formula bilan solishtiring. Agar $\delta = \lambda = 0$ va $\gamma = \beta/2$ deb olsak y o'qi atrofida β burchakka buralish matritsasi kelib chiqadi (95 - formula bo'yicha).

Buralish burchaklari sifatida Euler burchaklarini olamiz. Bu holda buralish jarayoni uch etapdan iborat bo'ladi - birinchi navbatda eski z o'qi atrofida φ burchakka, ikkinchi navbatda yangi y o'qi (tugunlar chizigi deyiladigan ON o'qi) atrofida θ burchakka va nihoyat yangi z o'qi atrofida ψ burchakka buralish (IV.2-rasmga qarang). Bu uchta ketma-ket bajariladigan operatsiyalarga quyidagi uchta matritsalarning ko'paytmasi mos keladi:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{130}$$



IV.2-rasm: Euler burchaklari

Ixtiyoriy 2×2 o'lchamli kompleks matritsani 8 ta son aniqlaydi, unimodularlik (123)- va unitarlik (125)-shartlari beshta shartdir. Demak, 2×2 o'lchamli unitar va unimodular martitsani 8-5=3 ta mustaqil son orqali aniqlash mumkin. Ular sifatida uch o'lchamli fazodagi aylanishlarni aniqlaydigan uchta burchaklarni olish mumkin. Ohirgi formulada mana shu uchta burchakka bog'liqlik oshkora ko'rinishda aniqlangan.

§15. Spinorlar

$j = 1/2$ holni alohida ko'raylik. (113)-, (119)- va (120)-formulalardan ma'lumki bu holda ikki komponentalik

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$$

kompleks vektorlar $SU(2)(SO(3))$ gruppasining eng kichik vaznli spinor tasavvurini tashkil qiladi. Bu tasavvur keltirilmaydigan tasavvurdir. $SU(2)$ ning elementini U deb belgilasak aylanishga nisbatan ξ quyidagicha almashinishi kerak:

$$\xi'^{\alpha} = U^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2. \tag{131}$$

Bu yerda

$$U^1_1 = a, \quad U^1_2 = b, \quad U^2_1 = c = -b^*, \quad U^2_2 = d = a^*.$$

Yuqoridagi formulani ochib yozsak

$$\xi'^1 = a\xi^1 + b\xi^2, \qquad \xi'^2 = c\xi^1 + d\xi^2 \tag{132}$$

bo'ladi. Shunday ikki komponentali spinorlardan m tasini olib ulardan $\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_m^{\alpha_m}$ ko'paytmani tuzamiz. Oydinki

$$\xi_1^{\prime\alpha_1}\xi_2^{\prime\alpha_2}\cdots\xi_m^{\prime\alpha_m} = U_{\beta_1}^{\alpha_1}U_{\beta_2}^{\alpha_2}\cdots U_{\beta_m}^{\alpha_m}\xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}\cdots\xi_m^{\beta_m}.$$

Agar ξ^α vektor ikki o'lchamli chiziqli fazo bazisini tashkil qilsa $\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_m^{\alpha_m}$ ko'paytma 2^m o'lchamli chiziqli fazo bazisini tashkil etadi. Ushbu fazoni L_m deb belgilaylik. Hosil bo'lgan L_m fazoning ixtiyoriy elementini $\xi^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$ deb belgilaylik. Bu vektor uchun almashinish qoidasi

$$\xi^{\prime\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m} = U_{\beta_1}^{\alpha_1}U_{\beta_2}^{\alpha_2}\cdots U_{\beta_m}^{\alpha_m}\xi^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} \qquad (133)$$

bo'ladi. Demak, $\xi^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$ elementlar $SU(2)$ ning L_m fazodagi tasavvurining bazisini tashkil qilar ekan. $\xi^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$ kattaliklar $m-$rang spinori deyiladi, mos keluvchi tasavvur esa ***m-chi rang spinor tasavvuri*** deyiladi. Bu tasavvur keltirilmaydigan emas. Buni quyidagicha ko'rish mumkin. Hamma indekslari bo'yicha simmetrik bo'lgan spinorlar to'plamini S_m deb belgilaylik, bu to'plam L_m ning qismfazosidir. S_m invariant qismfazo bo'ladi. (133)-dan ko'rinib turibdiki, simmetrik bo'lgan $\xi^{\prime\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$ spinorning indekslarining o'rinlarini qandaydir qilib o'zgartirganda o'ng tomondagi U matritsalarning va $\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$ indekslarning o'rinlarini ham mos kelgan holda o'zgartirsak formula o'zgarmaydi. Demak, simmetrik spinorlar L_m ning invariant qismfazosini tashkil qiladi. Bu degani, simmetrik spinorlar keltirilmaydigan tasavvurni tashkil qiladi. S_m ning o'lchamligini topaylik. $\xi^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$ simmetrik bo'lgani uchun uning 1 va 2 indekslari qaysi tartibda joylashganining ahamiyati yo'q, shu sababdan quyidagi $m+1$ ta spinorlar S_m fazodagi mustaqil bazisni tashkil qiladi:

$$\xi^{11\cdots1}, \quad \xi^{11\cdots2}, \ldots, \xi^{1\cdots12\cdots2}, \quad \xi^{22\cdots2}.$$

Demak, S_m ning o'lchamligi $m+1$ ga teng. Bunday simmetrik m-chi rang spinor aylanish gruppasining $j = m/2$ vaznli tasavvurini tashkil qiladi.

Shu paytgacha o'rganilgan spinorlar kontravariant spinorlar deyiladi. Ular U matritsalar yordamida (131)-qoida bo'yicha almashinadi. Kompleks qo'shma tasavvur $U^\dagger$ orqali almashinadigan va kovariant spinor deyiladigan

$$\xi'_\alpha = \xi_\beta \left(U^\dagger\right)^\beta_\alpha \tag{134}$$

kattaliklarni kiritaylik. Unitarlik sharti natijasida $U^\dagger$ tasavvur mustaqil emas, u U^{-1} ga teng. Kovariant spinorni vektor-satr $\xi_\alpha = (\xi_1,\, \xi_2)$ sifatida ko'rish kerak, shunda yuqoridagi almashinish qoidasi tushunarli ko'rinishga keladi:

$$(\xi'_1,\, \xi'_2) = (\xi_1,\, \xi_2)\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = (a^*\xi_1 + b^*\xi_2,\, c^*\xi_1 + d^*\xi_2). \tag{135}$$

Norelativistik kvant mexanikada ξ_α kompleks qo'shma spinor ψ^* ga mos keladi, $\psi^*\psi = |\psi|^2$ ko'paytma esa zarrachani fazoning ma'lum bir nuqtasida topish extimolligini beradigan kattalik sifatida skalar, ya'ni, invariant kattalik bo'lishi kerak. U matritsaning unitarligi $U^\dagger U = 1$ bu talabning bajarilishini ta'minlaydi. Demak, ixtiyoriy ko- va kontravariant spinorlarning skalar ko'paytmasi invariant ekan:

$$\chi'_\alpha \xi'^\alpha = \chi_\alpha U^\dagger U \xi^\alpha = \chi_\alpha \xi^\alpha. \tag{136}$$

(132)-qoida bo'yicha almashinadigan ikkita kontravariant spinor ξ va χ lardan

$$\chi^2\xi^1 - \chi^1\xi^2$$

kombinatsiyani tashkil qilaylik. $\det U = ad - bc = 1$ bo'lgani uchun bu kombinatsiya invariant bo'ladi:

$$\chi'^2\xi'^1 - \chi'^1\xi'^2 = \chi^2\xi^1 - \chi^1\xi^2.$$

(136)-bilan moslik bo'lishi uchun

$$\chi_1 = \chi^2, \qquad \chi_2 = -\chi^1 \tag{137}$$

deb qabul qilish kerak. Ya'ni, $SU(2)$ holida ko- va kontravariant spinorlar haqiqatda bir-biriga keltiriladi.

Kovariant spinorlar kiritilgani uchun ixtiyoriy rangli aralash spinorlarni ham kiritish mumkin. Masalan, ξ^α_β spinor almashtirishlarda o'zini bitta kontra- va bitta kovariant spinorlarning ko'paytmasidek tutadi, buni $\xi^\alpha_\beta \sim \xi^\alpha\chi_\beta$ deb belgilash mumkin. $\xi^{\alpha\beta}_{\gamma\sigma\lambda}$ esa ikkita kontravariant va uchta kovariant indekslarga ega bo'lgan 5-rang spinoridir.

$SU(2)$ gruppasining tenzorlari bilan ishni osonlashtirish maqsadida

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_{\alpha\beta} = -g_{\beta\alpha}$$

ko'rinishga ega bo'lgan kovariant "metrik tenzor" kiritamiz. Bu holda (137)-qoida

$$\chi_\alpha = g_{\alpha\beta}\chi^\beta$$

ko'rinishni qabul qiladi. Agar $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ munosabat orqali kontravariant metrik tenzor

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{138}$$

kiritsak $\chi^\alpha = g^{\alpha\beta}\chi_\beta$ formulani ham olamiz. Umuman

$$\chi_\alpha{}^\beta = g_{\alpha\gamma}\chi^{\gamma\beta}, \quad \chi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\sigma}\chi^{\gamma\sigma}, \quad \chi^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}\chi_\gamma{}^\beta \quad \text{va h.k.}$$

Kiritilgan metrik tenzorlar orqali spinorlar fazosidagi invariant skalar ko'paytmalarni sodda ko'rinishda ifodalab olishimiz mumkin:

$$\chi_\alpha\xi^\alpha = g_{\alpha\beta}\chi^\beta\xi^\alpha.$$

Bunday kiritilgan skalar ko'paytma quyidagi hossaga egaligini tekshirish qiyin emas:

$$\chi_\alpha\xi^\alpha = -\chi^\alpha\xi_\alpha. \tag{139}$$

Buning sababi metrik tenzorning antisimmetrikligi: $g_{\alpha\beta} = -g_{\beta\alpha}$.

Kiritilgan metrik tenzor m-chi rang spinorini ixtiyoriy ikki indeks bo'yicha soddalashtirib $(m-2)$-chi rang spinorini olishga imkoniyat beradi. Masalan,

$$g_{\alpha_1\alpha_2}\xi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \xi^{\alpha_3}.$$

(139)-dan ko'rinib turibdiki

$$g_{\alpha\beta}\chi^\alpha\chi^\beta = \chi^\alpha\chi_\alpha = 0.$$

Bu natijalardan hulosa shuki simmetrik spinorlar keltirilmaydigan tasavvurni tashkil qiladi. Bir simmetrik spinor olaylik: $\xi^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$, agar uni ixtiyoriy α_i va α_k indekslari bo'yicha soddalashtirsak nolni olamiz:

$$g_{\alpha_i\alpha_k}\xi^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\cdots\alpha_k\cdots\alpha_m} = 0.$$

Demak, simmetrik spinorlar o'zidan soddaroq spinorlarga keltirilmas ekan.

Ixtiyoriy ikkinchi rang antisimmetrik spinor metrik tenzor $g_{\alpha\beta}$ ga keltiriladi:

$$\chi_{\alpha\beta} = -\chi_{\beta\alpha} = a g_{\alpha\beta}, \tag{140}$$

bu yerda a - skalar. Ko'rish qiyin emaski, boshqa xech qanday imkoniyat yo'q.

Yuqoridagi qoidalar formal matematik talablardan keltirib chiqarildi. Haqiqatda ular kvant mexanikasidagi fizik talablarning natijasidir. Kvant mexanikasidan ma'lumki, spini $\frac{1}{2}\hbar$ ga teng zarracha (masalan, elektronning) spinining tanlangan yo'nalishga (masalan, z-o'qiga) bo'lgan proeksiyasi faqat $+\frac{1}{2}\hbar$ va $-\frac{1}{2}\hbar$ qiymatlarni qabul qiladi. Spinning proeksiyasi $+\frac{1}{2}\hbar$ bo'lgan holatga

$$\psi^1 = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

spinor mos keladi, proeksiya $-\frac{1}{2}\hbar$ ga teng holga esa

$$\psi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

spinor mos keladi. Bularni tekshirish qiyin emas: spinning z-komponentasi operatori $s_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$ uchun

$$s_z\psi^1 = \frac{1}{2}\hbar\psi^1, \qquad s_z\psi^2 = -\frac{1}{2}\hbar\psi^2.$$

Zarrachaning biror nuqtada topish zichligi $\rho = \psi^{*1}\psi^1 + \psi^{*2}\psi^2$ skalar kattalik bo'lib u aylanish operatsiyasida o'zgarmaydi:

$$\psi'^{*1}\psi'^1 + \psi'^{*2}\psi'^2 = \psi^{*1}\psi^1 + \psi^{*2}\psi^2. \tag{141}$$

Agar ψ^1, ψ^2 spinorlar (132)-qoidasi bo'yicha o'zgarsa va shunga yarasha ψ^* lar uchun

$$\psi'^{*1} = a^*\psi^1 + b^*\psi^2, \qquad \psi'^{*2} = c^*\psi^1 + d^*\psi^2$$

ga ega bo'lsak (141)- bajarilishi uchun (125)- va (127)- bo'lishi kerakligini keltirib chiqarish qiyin emas (bu - o'quvchiga mashq). Bu o'z navbatida (131)-dagi almashtirish matritsasi U ning unitar va unimodular bo'lishi kerakligini bildradi.

§16. Aylanish matritsalari

(117)-formulaga qaytaylik. Elementar ikki komponentalik kontravariant spinorning komponentalarini $\xi^1 = \zeta$, $\xi^2 = \eta$ deb belgilab $\{f^j_m, -j \le m \le j\}$ funksiyalar sifatida ulardan tuzilgan quyidagi simmetrik bazisni olamiz:

$$f^j_m(\zeta,\eta) = \frac{\zeta^{j-m}\eta^{j+m}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}}. \tag{142}$$

$-j \le m \le j$ intervalda o'zgarganda quyidagi ko'rinishdagi $2j+1$ ta birhadlar sistemasini olamiz:

$$\zeta^{2j},\quad \zeta^{2j-1}\eta,\quad \zeta^{2j-2}\eta^2,\quad \ldots,\quad \zeta\eta^{2j-1},\quad \eta^{2j}.$$

(40)-bo'yicha ((126)-ni hisobga olganda)

$$f'(\xi) = f(U^{-1}\xi) = f(a^*\zeta - b\eta, b^*\zeta + a\eta)$$

bo'ladi. Tasavvur matritsalarini $D^j_{mm'}$ deb belgilasak

$$f^j_m(a^*\zeta - b\eta, b^*\zeta + a\eta) = \sum_{m'} D^j_{m'm} f^j_{m'}(\zeta,\eta)$$

formulaga kelamiz.

$$(a^*\zeta - b\eta)^{j-m} = \sum_{l=0}^{j-m} C^l_{j-m}(a^*\zeta)^{j-m-l}(-b\eta)^l,$$

$$(b^*\zeta + a\eta)^{j+m} = \sum_{k=0}^{j+m} C^k_{j+m}(b^*\zeta)^{j+m-k}(a\eta)^k$$

formulalarda binomial koeffisientlar $C^l_k = k!/(l!(l-k)!)$ ni ishlatib, (130)-formuladan a va b larni qo'yib aylanish matritsalari $D^j_{mm'}$

uchun Euler burchaklari orqali quyidagi ifodani topamiz:

$$D^j_{mm'}(\varphi,\theta,\psi) =$$
$$= \sum_{n=0}^{j+m}(-1)^{n+m-m'}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{n!(j-m-n)!(j+m'-n)!(n+m-m')}\times$$
$$\times\, e^{im\varphi}e^{-im'\psi}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m'-m-2n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2n+m-m'}.$$

Bu formulani

$$D^j_{mm'}(\varphi,\theta,\psi) = e^{im\varphi}d^j_{mm'}(\theta)e^{-im'\psi} \tag{143}$$

ko'rinishda ishlatish qulayroqdir. Eng muhim bo'lgan ikkita hususiy holni keltiraylik:

$$d^{1/2}_{mm'}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix};$$

$$d^1_{mm'}(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\theta}{2} & \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \dfrac{1-\cos\theta}{2} \\ -\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1-\cos\theta}{2} & -\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \dfrac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

(IV.2)-rasmda keltirilgan Euler burchaklarining ta'rifidan ko'rinib turibdiki φ va ψ burchaklar bilan $\varphi+2\pi$ va $\psi+2\pi$ burchaklar fizik nuqtai nazardan farq qilishi mumkin emas, shuning uchun $D^j_{mm'}(0,\theta,\psi) = D^j_{mm'}(2\pi,\theta,\psi)$ va $D^j_{mm'}(\varphi,\theta,0) = D^j_{mm'}(\varphi,\theta,2\pi)$ bo'lishi kerak. Buni ***birqiymatlilik sharti*** deylik. Ammo (143)-formuladan quyidagilarni olamiz:

$$D^j_{mm'}(2\pi,\theta,\psi) = e^{i2\pi m}D^j_{mm'}(0,\theta,\psi);$$

$$D^j_{mm'}(\varphi,\theta,2\pi) = e^{-i2\pi m'}D^j_{mm'}(\varphi,\theta,0).$$

m va m' sonlar j bilan bir vaqtda butun yoki yarimbutun bo'ladi. Shuning uchun, agar j soni butun bo'lsa birqiymatlilik sharti bajariladi, agar j yarimbutun son bo'lsa (spinor tasavvur) tasavvur ikkiqiymatli deyiladi. Bunda $D^j_{mm'}(2\pi, \theta, \psi) = -D^j_{mm'}(0, \theta, \psi)$ va $D^j_{mm'}(\varphi, \theta, 2\pi) = -D^j_{mm'}(\varphi, \theta, 0)$ bo'ladi. Kvant mexanikasida elektronning to'lqin funksiyasi $j = 1/2$ ga mos keluvchi spinordir, olingan formuladan kelib chiqadiki, bu to'lqin funksiya 2π burchakka burilganda (-1) ga ko'payadi.

§17. Clebsch-Gordon qatori

Keltirilmaydigan tasavvurlarning to'g'ri ko'paytmasini keltirilmaydigan tasavvurlarning to'g'ri yig'indisiga yoyish masalasi eng muhim masalalardandir:

$$D^{j_1} \otimes D^{j_2} = \sum_{j_3} \oplus \gamma^{j_1 j_2}_{j_3} D^{j_3}. \tag{144}$$

Umumiy holda bu masala og'ir masala hisoblanadi. $SU(2)$ gruppasi uchun uning yechimi quyidagicha.

Bir sinfga tegishli elementlarning xarakterlari bir xil. Har xil o'qlar atrofida bir xil burchakka buralishlar bitta sinfga tegishlidir. Buni quyidagicha ko'rish mumkin: birinchi o'q atrofida φ burchakka buralishni $g_1(\varphi)$ va ikkinchi ixtiyoriy o'q atrofidagi φ burchakka buralishni $g_2(\varphi)$ deb belgilayli. Birinchi o'qni ikkinchi o'qqa burab o'tkazadigan elementni g_0 deb belgilaylik. Unda $g_1(\varphi) = g_0 g_2(\varphi) g_0^{-1}$ bo'ladi. Demak, z-o'qi atrofidagi φ burchakka buralish tasavvurining xarakterini topsak ixtiyoriy o'q atrofidagi φ burchakka buralishga mos keluvchi tasavvurning xarakterini topgan bo'lamiz.

$$D^j_{mm'}(\varphi, 0, 0) = e^{im\varphi} \delta_{mm'}$$

dan foydalanib quyidagini olamiz:

$$\chi^j(\varphi) = \sum D^j_{mm}(\varphi, 0, 0) = \sum_{m=-j}^{j} e^{im\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}(2j+1)\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

(144)-ning chap tomonining izini hisoblaymiz:

$$\chi^{j_1}(\varphi)\chi^{j_2}(\varphi) = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} e^{im_1\varphi} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{im_2\varphi} = \sum_{m=|j_1-j_2|}^{m=j_1+j_2} \chi^m(\varphi).$$

Tasavvurlar tilida quyidagi ***Clebsch-Gordon qatori***ni olamiz:

$$D^{j_1} \otimes D^{j_2} = D^{j_1+j_2} \oplus D^{j_1+j_2-1} \oplus \cdots \oplus D^{|j_1-j_2|}. \qquad (145)$$

D^j matritsa $2j+1$ o'lchamli fazoda keltirilmaydigan tasavvurni ifodalaydi. Chap tomonda $(2j_1+1)(2j_2+1)$ o'lchamli fazoda ta'sir qiluvchi tasavvur matritsasi berilgan, o'ng tomonning ma'nosi shuki, bu fazo o'lchamliklari $|j_1 - j_2|$ dan $j_1 + j_2$ gacha bo'lgan invariant qismfazolarning yig'indisiga parchalandi. Bu qismfazolarning har biriga tegishli funksiyalar uch o'lchamli x, y, z fazoning buralishlarida faqat shu qismfazoga tegishli funksiyalar orqaligina ifodalanadi.

4.32-misol.

$$D^{1/2} \otimes D^{1/2} = D^1 \oplus D^0. \qquad (146)$$

Har bir $D^{1/2}$ ikki o'lchamli bo'lib ikki komponentalik spinorlarning almashtirish matritsasidir. Ikkita fundamental ikki o'lchamli tasavvurlarning ko'paytmasiga mos keluvhci to'rt o'lchamli fazo tikkita keltirilmaydigan fazolarning to'g'ri yig'indisiga parchalanar ekan. Clebsh-Gordon qatori ko'pincha tasavvur matritsalarini yozib o'tirmay shu tasavvurlarning o'lchamliklari orqali ifodalanadi:

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}.$$

Ya'ni, ikkita spinorning ko'paytmasi bitta uch o'lchamli vektor va bitta skalarga parchalanar ekan. Shu joyda (121)-formulaning muhokamasiga qaytish ayni muddao. $D^{1/2} \otimes D^{1/2}$ tasavvur bo'yicha o'zgaradigan kattalik $\psi^{\alpha\beta}$. Uni simmetrik va antisimmetrik qismlarga bo'laylik:

$$\psi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\psi^{\alpha\beta} + \psi^{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(\psi^{\alpha\beta} - \psi^{\beta\alpha}) = \psi^{\{\alpha\beta\}} + \psi^{[\alpha\beta]}.$$

Mana shu parchalanish (146)-ga mos kelishini ko'rsataylik. Antisimmetrik qism aylanishga nisbatan $\psi'^{[\alpha\beta]} = \psi^{[\alpha\beta]}$ ekanligini topish qiyin emas - (140)-formula bo'yicha bu spinor skalarga ekvivalent, demak, u D^0 bo'yicha almashinadigan skalar bo'lar ekan. Ikkinchi rang spinorining simmetrik qismi bilamizki keltirilmaydigan tasavvurga bo'ysunadi. (142)-formula bilan solishtirib ikkinchi rang spinorning simmetrik qismini quyidagi uch komponentalik vektor

$$f_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{11}, \qquad f_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{22}, \qquad f_0^1 = \frac{1}{2}(\psi^{12} + \psi^{21})$$

ko'rinishida yozib olishimiz mumkin.

4.33-misol.

$$D^1 \otimes D^{1/2} = D^{3/2} \oplus D^{1/2}.$$

Buni esa

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{2}$$

deb ifodalaymiz. Ya'ni, birinchi rang tenzori (uch komponentalik vektor) va yariminchi rang tenzori (ikki komponentalik spinor) ning ko'paytmasi to'rt komponentalik (rangi 3/2 ga teng) va ikki komponentalik (rangi 1/2 ga teng) tenzorlarning to'g'ri yig'indisiga parchalanar ekan.

4.34-misol. Ikkinchi rang tenzorini soddalashtirish.

Clebsh-Gordon qatorini ikkita vektorning ko'paytmasiga qo'llaylik:

$$D^1 \otimes D^1 = D^2 \oplus D^1 \oplus D^0, \qquad \text{yoki} \qquad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}. \tag{147}$$

Ikkinchi rang tenzori o'zining ta'rifi bo'yicha ikkita vektorning ko'paytmasi kabi almashinishi kerak, shu nuqtai nazardan chap tomonda qandaydir ikkinchi rang tenzori turibdi. Bunday tenzorning 9-ta komponentalari bor, ular 9-o'lchamli fazoni tashkil qiladi. (147)-formulaning o'ng tomoni bo'yicha bu fazo uchta keltirilmaydigan invariant qismfazolarga parchalanadi. Ularning o'lchamliklari - 5, 3 va 1.

Shu masalani boshqacha yo'l bilan ham yechaylik.

Bizga ixtiyiriy ikkinchi rang tenzori berilgan bo'lsin: T_{ij}. Uni simmetrik va antisimmetrik qismlarga bo'lib olishimiz mumkin:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij}. \tag{148}$$

Ko'rinib turibdiki,

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = S_{ji}, \quad A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = -A_{ji}. \tag{149}$$

Uch o'lchamli fazodagi ikkinchi rang tenzorining komponentalarining soni $3 \times 3 = 9$ ga teng. Tenzorning mustaqil komponentalari soni masalasiga kelaylik. Bu masalani hal qilish uchun ixtiyoriy ikkinchi rang tenzorini matritsa sifatida tasavvur qila olishimiz mumkinligidan foydalananamiz:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Antisimmetrik tenzorning mustaqil komponentalari soni nechta? Uning diagonalidagi hamma komponentalari nolga teng:

$$A_{ii} = -A_{ii} \Rightarrow A_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Diagonali tagidagi 3-ta komponentalar diagonal ustidagi 3-ta komponentalariga minus ishora bilan teng. Demak, antisimmetrik tenzorning mustaqil komponentalari soni 3 ga teng:

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Simmetrik tenzorning mustaqil komponentalarining soni esa 6 ga teng - diagonaldagi 3-ta komponentalar o'z-o'ziga teng, diagonal tagidagi 3-ta komponentalar diagonal ustidagi 3-ta komponentalariga teng:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix}.$$

Tenzorning simmetrik va antisimmetrik qismlari koordinat o'qlarini almashtirishda faqat o'zi orqaligina ifodalanadi:

$$S'_{ji} = a_{jk}a_{il}S_{kl} = a_{il}a_{jk}S_{kl} = a_{ik}a_{jl}S_{lk} = a_{ik}a_{jl}S_{kl} = S'_{ij};$$

$$A'_{ji} = a_{jk}a_{il}A_{kl} = a_{il}a_{jk}A_{kl} = a_{ik}a_{jl}A_{lk} = -a_{ik}a_{jl}A_{kl} = -A'_{ij}.$$

Bu yerda biz ikkinchi tenglikdan keyin a koeffisientlarning o'rnini almashtirdik, uchinchi tenglikdan keyin $k \leftrightarrow l$ almashtirish bajardik, to'rtinchi tenglikdan keyin esa (149)-dan foydalandik.

Simmetrik tenzor o'z navbatida ikki qismga bo'linishi mumkin:

$$S_{ij} = \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}T,$$

bu yerda $T = \sum\limits_i T_{ii} = \sum\limits_i S_{ii}$ - tenzor T ning izi (diagonal elementlarining yig'indisi). T-ning izi uning simmetrik qismi S-ning iziga teng. Yangi kiritilgan $\bar{S}_{ij}$ ning izi nolga teng: $\sum\limits_i \bar{S}_{ii} = 0$. Navbatdagi bu bo'lishning ma'nosi yana o'sha - tenzor ustida almashtirish bajarganimizda $\bar{S}_{ij}$ va T yana faqat o'zi orqali ifodalanadi:

$$\bar{S}'_{ij} = a_{ik}a_{jl}\bar{S}_{kl}, \quad \sum_i \bar{S}'_{ii} = \sum_i a_{ik}a_{il}\bar{S}_{kl} = \delta_{kl}\bar{S}_{kl} = \sum_k \bar{S}_{kk} = 0,$$

$$T' = \sum_k S'_{kk} = \sum_i a_{ik}a_{il}S_{kl} = \delta_{kl}S_{kl} = \sum_k S_{kk} = T.$$

Uchinchi tenglik belgisidan oldin almashinish matritsasi a_{ij} ortogonal ekanligidan foydalandik. Shu bilan ixtiyoriy ikkinchi rang tenzori uchta invariant qismlarga bo'lindi:

$$T_{ij} = A_{ij} + \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}T = A_{ij} + \left(S_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}T\right) + \frac{1}{3}\delta_{ij}T.$$

Bu taqsimot shu ma'noda invariantki, antisimmetrik tenzorlar, izi nolga teng simmetrik tenzorlar va tenzorning izi faqat o'zi orqali almashinadigan kattaliklarni tashkil qiladi. Tasavvurlar nazariyasi tilida ularning har biriga mos keluvchi fazolar umumiy 9-o'lchamli fazoning invariant qismfazolaridir. Bajarilgan ish (147)-formulani keltirib chiqarishga ekvivalentdir.

4.35-misol.

$$D^1 \otimes D^1 \otimes D^1 = D^3 \oplus 2D^2 \oplus 3D^1 \oplus D^0,$$

yoki,

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{7} \oplus 2 \cdot \mathbf{5} \oplus 3 \cdot \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$$

bo'ladi. Ya'ni, 27 o'lchamli fazo bitta 7 o'lchamli, ikkita 5 o'lchamli, uchta 3 o'lchamli va bitta bir o'lchamli invariant qismfazolarga parchalanar ekan.

4.36-misol.

$$D^{1/2} \otimes D^1 \otimes D^1 = D^{5/2} \oplus 2D^{3/2} \oplus 2D^{1/2}$$

bo'ladi.

§18. Momentlarni qo'shish

Momentlarni qo'shish masalasi Clebsch-Gordon qatori bilan uzviy bog'langan. Matematik nuqtai-nazardan spin va orbital momentlarning farqi yo'q, shu sababdan bundan keyin "moment" deyilganda ularning ixtiyoriysi ko'zda tutiladi.

Clebsch-Gordon qatorini fizik nuqtai-nazardan quyidagicha tasavvur qilish mumkin. Momentlari j_1 va j_2 bo'lgan ikkita sistema berilgan bo'lsin. To'liq sistemaning momenti qanday qiymatlarni qabul qiladi? Sistemalar $2j_1$ va $2j_2$ rangli ikkita spinorlar orqali ifodalanadi, to'liq sistemaga

$$\psi^{\overbrace{\alpha_1\alpha_2\cdots}^{2j_1}}\psi^{\overbrace{\beta_1\beta_2\cdots}^{2j_2}}$$

spinor mos keladi, uni hamma indekslar bo'yicha simmetriklashtirib $j_1 + j_2$ momentga mos keluvchi $2(j_1 + j_2)$ rangli simmetrik spinor olinadi. Olingan spinorda birinchi guruh indekslar va ikkinchi guruh indekslardan bittadan olib ular bo'yicha soddalashtirilsa $2(j_1 + j_2) - 2$ rangli spinor olinadi, u $j_1 + j_2 - 1$ momentga mos keladi. Shu ishni yana bir marta bajarsak $j_1 + j_2 - 2$ momentga mos keladigan spinor olinadi va h.k. Jarayonni davom ettirib $|j_1 - j_2|$ momentga mos keluvchi spinorgacha yetib kelinadi. Olingan qator Clebsch-Gordon qatori (145)-ning o'zidir.

Quyidagi masalani ko'rib chiqaylik: alohida olib qaraganimizda momentlari j_1 va j_2, ularning z-o'qiga proeksiyalari m_1 va m_2 bo'lgan zarrachalardan tuzilgan sistemaning to'liq momenti va uning proeksiyasi qanday qiymatlarni qabul qilishi mumkin? Bunday masala momentlarni qo'shish masalasi deyiladi.

Momentlarni qo'shish masalasi aniqroq quyidagicha ifodalanadi: ikkita sistema (yoki zarracha, matematik nuqtai-nazardan farqi yo'q) berilgan bo'lsin, ularning momentlari $\mathbf{j}_1$ va $\mathbf{j}_2$ bo'lsin, shu momentlarning z-o'qiga proeksiyalari mos ravishda m_1 va m_2 bo'lsin. Agar har bir sistemani alohida ko'rsak har bir m_i mos ravishda $2j_i + 1$ ta qiymatlarni qabul qilishi mumkin va har bir sistemaning to'lqin funksiyasi $\mathbf{j}_i^2$ va j_{iz} ning hususiy funksiyalari bo'ladi - (110)- va (115)-formulalarga qarang. Kvant mexanikasiga yaqinroq bo'lishni ko'zda tutib bunday hususiy to'lqin bunksiyani $|j_i, m_i\rangle$ deb belgilaymis. Demak,

$$\mathbf{j}_1^2|j_1, m_1\rangle = j_1(j_1+1)|j_1, m_1\rangle, \quad j_{1z}|j_1, m_1\rangle = m_1|j_1, m_1\rangle,$$

$$\mathbf{j}_2^2|j_2, m_2\rangle = j_2(j_2+1)|j_2, m_2\rangle, \quad j_{2z}|j_2, m_2\rangle = m_2|j_2, m_2\rangle.$$

Butun sistemaning to'liq momenti $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ bo'ladi. Ko'rish qiyin emaski, $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ to'lqin funksiya $j_z = j_{1z} + j_{2z}$ operatorning hususiy funksiyasi ($\mathbf{j}_1$ va $\mathbf{j}_2$ va ularning komponentalari har xil o'zgaruvchilarga ta'sir qiluvchi operatorlar bo'lgani uchun ular o'zaro kommutativ bo'ladi):

$$j_z\left[|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle\right] = (j_{1z} + j_{2z})\left[|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle\right] =$$
$$= (m_1 + m_2)|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle.$$

Ammo $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ to'lqin funksiya $\mathbf{j}^2$ ning hususiy funksiyasi bo'lmasligi mumkin:

$$\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}_1^2 + \mathbf{j}_2^2 + 2\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2$$

ifodadagi ohirgi had bunga to'sqinlik qiladi. Shularni hisobga olib momentlarni qo'shish masalasi quyidagicha qo'yiladi: $2(j_1 + j_2)$ rangli spinor bo'lgan $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ funksiyani $\mathbf{j}^2$ va j_z ning hususiy funksiyasi bo'lgan $|j,m\rangle$ bo'yicha qatorga yoying:

$$|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle=\sum_j G^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}|j,m\rangle. \tag{150}$$

Bu yerda o'ng tomondagi m chap tomondagi m_1 va m_2 larning yig'indisiga teng: $m=m_1+m_2$. Huddi shu masalani teskarisiga ham qo'yish mumkin: $|j,m\rangle$ ni $|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle$ bo'yicha shunday qatorga yoyish kerakki, unda m_1 va m_2 larning $m_1+m_2=m$ shartga bo'ysungan hamma kombinatsiyalari ishtirok etsin

$$|j,m\rangle=\sum_{m_1}\widetilde{C}^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle. \tag{151}$$

O'ng tomonda m_2 bo'yicha yig'indi yo'q, chunki uning qiymati $m_1+m_2=m$ shartdan topiladi.

Matematik nuqtai-nazardan (150)- va (151)-formulalar bitta ortonormal bazisdan ikkinchisiga o'tish formulalaridir, shuning uchun ularga kirgan koeffisientlar o'zaro teskari bo'lgan unitar matritsalarni tashkil qilishi kerak. Buni boshqacha ham ko'rsatishimiz mumkin.

Umumiy qoida bo'yicha

$$\widetilde{G}^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}=\langle j,m|\left(|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle\right);$$

$$C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}=\left(\langle j_1,m_1|\langle j_2,m_2|\right)|j,m\rangle.$$

Ikkinchi tomondan $\langle\psi_1|\psi_2\rangle=\langle\psi_2|\psi_1\rangle^*$ bo'lishi kerak, demak, $\widetilde{G}^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}=C^{jm*}_{j_1m_1j_2m_2}$. Keyin ko'ramizki, bu koefficientlar haqiqiy son bo'ladi, shuning uchun $\widetilde{G}^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}=C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}$.

(150)- va (151)-almashtirishlarning unitarligidan $C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}$ koeffisientlar uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\sum_j C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}C^{jm}_{j_1m_1'j_2m_2'}=\delta_{m_1,m_1'};\qquad \sum_{m_1} C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}C^{j'm}_{j_1m_1j_2m_2}=\delta_{jj'}.$$

$C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}$ koeffisientlar Clebsch-Gordon koeffisientlari deyiladi. Ularni aniqlash uchun (110) - (116)-formulalarda qo'llanilgan metoddan foydalanamiz. Bu formulalarning ichida ko'rilayapgan masala uchun eng muhimlarini hozirgi belgilashlarda yozib olaylik:

$$\mathrm{j}_\pm|j,m\rangle = \rho^\pm(j,m)|j,m\pm1\rangle,\ \rho^\pm(j,m) = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}.$$

(151)-formulaning o'ng tomonida $m_1 = j_1$ va $m_2 = j_2$ bo'lsin, ya'ni, momentning proeksiyalari o'zining maksimal qiymatiga ega bo'lsin. Bu holda chap tomonda $j = j_1 + j_1$ va $m = j_1 + j_2$ bo'ladi va qatordan bittagina had qoladi:

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = C^{j_1+j_2 j_1+j_2}_{j_1 j_1 j_2 j_2}|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle.$$

To'lqin funksiyalarining hammasining normasi birga teng qilib tanlab olingan deyilsa $|C^{j_1+j_2,j_1+j_2}_{j_1 j_1 j_2 j_2}|^2 = 1$ bo'lishi kerak, $C^{j_1+j_2 j_1+j_2}_{j_1 j_1 j_2 j_2} = 1$ deb tanlab olamiz. Bu tanlov bilan biz hamma $C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$ larning umumiy ishorasini aniqladik. Endi ohirgi formulaning ikkala tomoniga pasaytiruvchi operator bilan ta'sir qilish kerak:

$$j_-|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = (j_{1-} + j_{2-})|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle =$$

$$= \rho^-(j_1, j_1)|j_1, j_1 - 1\rangle|j_2, j_2\rangle + \rho^-(j_2, j_2)|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2 - 1\rangle.$$

$\rho^-(j,j) = \sqrt{2j}$ bo'lgani uchun

$$\sqrt{2(j_1 + j_2)}|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle =$$

$$= \sqrt{2j_1}|j_1, j_1 - 1\rangle|j_2, j_2\rangle + \sqrt{2j_2}|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2 - 1\rangle.$$

Olingan formulani (151)-bilan solishtirish Clebsch-Gordon koeffisientlarining ikkitasini beradi:

$$C^{j_1+j_2,j_1+j_2-1}_{j_1,j_1-1,j_2,j_2} = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}, \qquad C^{j_1+j_2,j_1+j_2-1}_{j_1,j_1,j_2,j_2-1} = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}.$$

Ikkala koeffisient oldida musbat ishora olindi, keyingi topiladigan to'lqin funksiyalarining ishoralarini shunday tanlab olish kerakki, ular bu funksiyaga ortogonal bo'lib chiqsin. Jarayonni davom ettirib $|j_1 + j_2, -j_1 - j_2\rangle$ holatgacha yetib borish qiyin emas.

Ko'rinib turibdiki, Clebsch-Gordon koeffisientlarining haqiqiyligining yuqorida vada qilingan isboti $\rho^-(j,m)$ larning haqiqiyligidan kelib chiqadi.

$j = j_1 + j_2 - 1$ holatga o'taylik. Bu holatga mos keluvchi eng yuqori vektor uchun $m = j_1 + j_2 - 1$ bo'lishi kerak. U esa faqatgina $|j_1, j_1 - 1\rangle|j_2, j_2\rangle$ va $|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2 - 1\rangle$ holatlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'lishi mumkin. Demak

$$|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = a|j_1, j_1 - 1\rangle|j_2, j_2\rangle + b|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2 - 1\rangle.$$

Bu holat j_+ ta'sirida nolga tenglashishi kerak:

$$j_+ (a|j_1, j_1 - 1\rangle|j_2, j_2\rangle + b|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2 - 1\rangle) =$$
$$= a j_{1+}|j_1, j_1 - 1\rangle|j_2, j_2\rangle + b|j_1, j_1\rangle j_{2+}|j_2, j_2 - 1\rangle =$$
$$= (a\sqrt{2j_1} + b\sqrt{2j_2})|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle = 0.$$

Demak, $a = -b\sqrt{j_2/j_1}$. Buni hisobga olib $m = j_1 + j_2 - 1$ holatni quyidagicha tanlab olamiz:

$$\sqrt{2(j_1 + j_2)}|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle =$$
$$= \sqrt{2j_2}|j_1, j_1 - 1\rangle|j_2, j_2\rangle - \sqrt{2j_1}|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2 - 1\rangle.$$

Bu tanlov holat normasining birga tengligini ta'minlaydi. O'ng tomondagi ishoralar shartlidir, ya'ni, birinchi had oldida minus va ikkinchi had oldida plus olishimiz mumkin edi. Muhimi - ikkala had oldidagi ishoralarning har xilligi. Topilgan $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$ asosida yuqoridagi usul bilan hamma $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2\rangle$, $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 3\rangle, \ldots, |j_1 + j_2 - 1, -j_1 - j_2\rangle$ larni topish mumkin.

Clebsch-Gordon koeffisientlarining quyidagilari topildi:

$$C^{j_1+j_2-1, j_1+j_2-1}_{j_1, j_1-1, j_2, j_2} = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}, \qquad C^{j_1+j_2-1, j_1+j_2-1}_{j_1, j_1, j_2, j_2-1} = -\sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}.$$

Keyingi holatlarni topishda ham huddi shunday usul bilan harakat qilish kerak.

4.37-misol. $j_1 = 1/2$, $j_2 = 1$ bo'lsin.

j ni m dan farq qilish uchun m ning oldiga uning ishorasini qo'yib ishlatamiz. Ikkala zarracha momentining z - o'qiga proeksiyasi maksimal bo'lsin, bunda:

$$\left|\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle|1, +1\rangle.$$

Proeksiya +1/2 bo'lgan holga o'tish uchun ikkala tomonga $j_- = j_{1-} + j_{2-}$ bilan ta'sir qilamiz:

$$\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{2}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle|1,0\rangle + \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle|1,+1\rangle.$$

Endi spin proeksiyasi -1/2 bo'lgan holatni topaylik. Buning uchun yana bir marta $j_- = j_{1-} + j_{2-}$ bilan ta'sir qilamiz:

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle|1,-1\rangle.$$

Yana bir marta pasaytiruvchi operator bilan ta'sir qilinsa to'liq moment 3/2 uning z-o'qiga proeksiyasi -3/2 bo'lgan holatga o'tiladi:

$$\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle|1,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle|1,-1\rangle =$$
$$= \sqrt{3}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle|1,-1\rangle.$$

Albatta, bu munosabatni oldindan ham yozib qo'yish mumkin edi, ammo biz yo'l-yo'lakay hamma hisoblarimizni tekshirib chiqish imkoniyatini boy bermaslikka qaror qildik.

To'liq spin 1/2 bo'lgan holga o'taylik. Yuqoridagi nazariya bo'yicha

$$\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle = a\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle|1,+1\rangle + b\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle|1,0\rangle.$$

kombinatsiyaga ko'taruvchi operator j_+ bilan ta'sir qilamiz, natija nolga teng bo'lishi uchun $a + b\sqrt{2} = 0$ bo'lishi kerak. To'liq to'lqin funksiyaning normasi birga teng bo'lishi kerakligi shartidan quyidagini olamiz (a ning ishorasini musbat deb tanladik):

$$\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle|1,+1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle|1,0\rangle.$$

Pasaytiruvchi operator bilan ta'sir qilamiz:

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle|1,0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle|1,-1\rangle.$$

Boshqa holatlar yo'q, hamma topilgan holatlarning o'zaro ortogonalligini tekshirib chiqish qiyin emas.

§19. $SU(3)$-gruppasi

O'lchamligi 3×3 bo'lgan unitar va unimodular matritsalar to'plami $SU(3)$ gruppasini tashkil qiladi. $g \subset SU(3)$ bo'lgan ixtiyoriy matritsani

$$g = \exp\left(i\alpha_i \lambda^i\right)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu yerda α_i - haqiqiy parametrlar, λ^i - 3×3 matritsalar. g ning unitarligi $g^\dagger = g^{-1}$ dan λ^i matritsalarning o'ziga qo'shma ekanligi $\lambda^{i\dagger} = \lambda^i$ va g ning unimodularligi $\det g = 1$ dan λ^i matritsalarning izsizligi $\mathrm{Tr}(\lambda^i) = 0$ kelib chiqadi. Ixtiyoriy aynimagan $n \times n$ unitar matritsa n-o'lchamli kompleks fazoda quyidagi kvadratik formani saqlaydi:

$$(x', y') = \sum_{i=1}^{n} x_i'^* y_i' = (Ux, Uy) = (x, U^\dagger U y) = (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i.$$

Ixtiyoriy unitar matritsa uchun $U(n) = U(1) \times SU(n)$ bo'ladi, bu yerda $U(1)$ - $U(n)$ ning abel qismgruppasi, $SU(n)$ esa sodda gruppadir (Qachon gruppa sodda yoki yarimsodda deyiladi va bu nimaga olib keladi §22.-paragrafda tushuntirilgan). $SU(n)$ gruppalar kompakt gruppalardir, demak, ularning hamma keltirilmaydigan tasavvurlari unitar bo'lishi kerak. Demak, hermit qo'shma $D^\dagger$ tasavvur bo'yicha almashinadigan kattaliklar teskari D^{-1} tasavvur bo'yicha almashinishi kerak. $SU(3)$ uchun buni quyidagicha ifodalaymiz. Uch komponentali kompleks kontravariant vektor kiritaylik:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}.$$

Bu kattalik $SU(3)$ gruppasining biror keltirilmaydigan tasavvuri U^i_j bo'yicha almashinsin:

$$\psi'^i = U^i_j \psi^j, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Hermite qo'shma tasavvur bo'yicha almashinadigan kattalik kovariant vektor sifatida qaraladi:

$$\psi'_i = \left(U^{-1}\right)^j_i \psi_j, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Kiritilgan kattaliklar $SU(3)$ gruppasining birinchi rang tenzorlari bo'ladi. Gruppaning p-marta kontravariant va q-marta kovariant tenzori:

$$\psi'^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = U^{i_1}_{i'_1} U^{i_2}_{i'_2} \cdots U^{i_p}_{i'_p} \left(U^{-1}\right)^{j'_1}_{j_1} \left(U^{-1}\right)^{j'_2}_{j_2} \cdots \left(U^{-1}\right)^{j'_q}_{j_q} \psi^{i'_1 i'_2 \cdots i'_p}_{j'_1 j'_2 \cdots j'_q}. \tag{152}$$

Bir marta ko- va bir marta kontravariant aralash tenzor ψ^i_j berilgan bo'lsin. U uchun

$$\psi'^i_j = U^i_{i'} \left(U^{-1}\right)^{j'}_j \psi^{i'}_{j'}.$$

Agar bu ifoda i va j indekslar bo'yicha soddalashtirilsa va $\psi^i_i = \psi$ belgilash kiritilsa $\psi' = \psi$ bo'ladi. Ikkinchi rang aralash tenzorini soddalashtirib rangi nolga teng bo'lgan skalar kattalik oldik. Huddi shunday ixtiyoriy rang aralash tenzorini bitta ko- va bitta kontravariant indekslari bo'yicha soddalashtirib rangi ikkitaga kam bo'lgan tenzor olinadi.

Soddalashtirish masalalarida invariant tenzorlar yordam beradi, $SU(3)$ gruppasida uchta invariant tenzor bor: δ^i_j, ε^{ijk} va ε_{ijk}. Ularning birinchisi - Kronecker deltasi, ikkita qolgani - birlik antisimmetrik tenzorlar. Ularning invariant ekanligini ko'rsatish qiyin emas:

$$\delta'^i_j = U^i_{i'} \left(U^{-1}\right)^{j'}_j \delta^{i'}_{j'} = U^i_{i'} \left(U^{-1}\right)^{i'}_j = \delta^i_j;$$

$$\varepsilon'^{ijk} = U^i_l U^j_m U^k_n \varepsilon^{lmn} = (\det U) \cdot \varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{ijk};$$

$$\varepsilon'_{ijk} = \left(U^{-1}\right)^l_i \left(U^{-1}\right)^m_j \left(U^{-1}\right)^n_k \varepsilon_{lmn} = \det\left(U^{-1}\right) \cdot \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}.$$

Ohirgi ikki munosabatni olishda birinchi bobdagi 10-mashq natijalari ishlatildi.

(152)-qoida bo'yicha almashinadigan tenzor keltirilmaydigan tenzor emas, uning ikkita biri ko- va biri kontravariant indekslari bo'yicha soddalashtirilsa rangi ikkitaga past bo'lgan tenzor kelib chiqadi. Shuning uchun keltirilmaydigan tenzorlarni quyidagicha ta'riflaylik:

1. Tenzor o'zining yuqori va quyi indekslari bo'yicha (har biri bo'yicha alohida) simmetriklashtirilgan bo'lishi kerak;

2. Ixtiyoriy ikkita biri yuqori va biri quyi indekslar bo'yicha soddalashtirilganda u nolga teng bo'lishi kerak.

Birinchi rang kontravariant tenzor ψ^i keltirilmaydigan tasavvur $D(1,0)$ bo'yicha almashinadi deyiladi, birinchi rang kovariant tenzor ψ_j bo'lsa keltirilmaydigan tasavvur $D(0,1)$ bo'yicha almashinadi deyiladi. Shunga yarasha

$$\psi^i\psi_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\psi^k\psi_k$$

ikkinchi rang keltirilmaydigan aralash tenzor bo'lib, u keltirilmaydigan $D(1,1)$ tasavvur bo'yicha almashinadigan tenzor bo'ladi. $D(p,q)$ esa p marta kontravariant va q marta kovariant keltirilmaydigan tenzorni ifodalaydi.

Birinchi rang tenzorining o'lchamligi 3 ga teng, ikkinchi rang aralash tenzorning o'lchamligi $3 \times 3 = 9$ ga teng, keltirilmaydigan ikkinchi rang aralash tenzorning o'lchamligi $3 \times 3 - 1 = 8$ ga teng (izining nolligi shartini hisobga olish kerak). Ikkinchi rang kontravariant keltirilmaydigan tenzorning oltita komponentasi bor: $\psi^{\{11\}}$, $\psi^{\{22\}}$, $\psi^{\{33\}}$, $\psi^{\{12\}}$, $\psi^{\{13\}}$, $\psi^{\{23\}}$. Bu yerdagi $\{\}$ simvollar ularning ichidagi indekslarning simmetriklashtirilganligini bildiradi, shu sababdan ikkinchi rang kontravariant keltirilmaydigan tenzorni $\psi^{\{ij\}}$ deb belgilash mumkin. Ikkinchi rang kovariant keltirilmaydigan tenzor esa $\psi_{\{ij\}}$ deb belgilanadi. $\psi^{\{ij\}}$ tenzor $D(2,0)$ tasavvur bo'yicha, $\psi_{\{ij\}}$ esa $D(0,2)$ bo'yicha almashinadi.

$D(p,q)$ tasavvurning o'lchamligini topaylik. $1, 2, 3$ qiymatlarni qabul qiladigan p ta sonlardan 3^p ta har-xil variantlar tuzish mumkin. Ularning ichida simmetrik variantlar $11...1, 22...2, 33...3$ ko'rinishga ega bo'lishi kerak. Bu kombinatsiyalarning soni vergul belgisini necha hil yo'l bilan tanlab olishga teng, bu tanlashlarning soni $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ ga teng. Huddi shunday quyi indekslar bo'yicha ham simmetrik variantlar soni $\frac{1}{2}(q+1)(q+2)$, ularning ko'paytmasi $\frac{1}{4}(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)$. Har bir yuqori-quyi juftlar bo'yicha soddalashtirishda nol olinishi kerak, bunday shartlarning soni $\frac{1}{4}p(p+1)q(q+1)$. Natijada $D(p,q)$ tasavvurning o'lchamligi uchun

$$\frac{1}{4}\left[(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)-p(p+1)q(q+1)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$$

son olinadi.

Yuqorida olingan hususiy qiymatlar bilan solishtirish mumkin: $D(1,0)$ ning o'lchamligi 3 ga teng, $D(2,0)$ ning o'lchamligi 6 ga teng, $D(1,1)$ ning o'lchamligi 8 ga teng, $D(3,0)$ ning o'lchamligi 10 ga teng.

Keltirilmaydigan tasavvurlarni ko'paytirish (Clebsch-Gordon qatorini topish) masalasiga kelaylik. $D(1,0)$ va $D(0,1)$ larning to'g'ri ko'paytmasidan boshlaymiz. $D(1,0)$ bo'yicha ψ^i almashinadi, $D(0,1)$ bo'yicha ψ_i. $\psi^i\psi_j$ ko'paytma ikki qismga ajratiladi: skalar $\psi^i\psi_i$, u $D(0,0)$ bo'yicha almashinadi, va izsiz tenzor $\psi^i\psi_j-\frac{1}{3}\delta^i_j\psi^k\psi_k$, u $D(1,1)$ bo'yicha almashinadi. Demak,

$$D(1,0)\otimes D(0,1)=D(0,0)\oplus D(1,1).$$

O'lchamliklarini tekshiraylik: $\mathbf{3}\times\overline{\mathbf{3}}=\mathbf{1}+\mathbf{8}$. Ohirgi yozuvda $\overline{\mathbf{3}}$ belgi orqali $D(0,1)$ ning kompleks qo'shma tasavvur ekanligi ifodalandi.

Odatda $D(0,0)$ bo'yicha almashinadigan skalar ***singlet***, $D(1,0)$ va $D(0,1)$ bo'yicha almashinadigan kattalik ***triplet***, $D(1,1)$ bo'yicha almashinadigan kattalik ***oktuplet*** deyiladi.

4.38-misol. ψ^{ij} va ψ_{ij} larni keltirilmaydigan qismlarga parchalang.

Ikkinchi rang tenzorini simmetrik va antisimmetrik qismlarga parchalashni bilamiz:

$$\psi^{ij}=\psi^{(ij)}+\psi^{[ij]},\qquad \psi^{(ij)}=\frac{1}{2}\left(\psi^{ij}+\psi^{ji}\right),\qquad \psi^{[ij]}=\frac{1}{2}\left(\psi^{ij}-\psi^{ji}\right).$$

$\psi^{(ij)}$ simmetrik tenzor sifatida $D(2,0)$ bo'yicha o'zgaradi, $\psi^{[ij]}$ esa $D(0,1)$ bo'yicha almashinadigan birinchi rang kovariant tenzoriga proporsional: $\psi_i=\varepsilon_{ijk}\psi^{[ij]}$. Demak,

$$D(1,0)\otimes D(1,0)=D(0,1)\oplus D(2,0),\qquad \text{yoki}\qquad \mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\overline{\mathbf{3}}\oplus\mathbf{6}.$$

ψ_{ij} ga kelsak

$$D(0,1)\otimes D(0,1)=D(1,0)\oplus D(0,2),\qquad \text{yoki}\qquad \overline{\mathbf{3}}\otimes\overline{\mathbf{3}}=\mathbf{3}\oplus\overline{\mathbf{6}}$$

bo'ladi.

4.39-misol. ψ^i_{jk} ni keltirilmaydigan qismlarga parchalang.

ψ^i_{ik} va ψ^i_{ki} lar $D(0,1)$ bo'yicha almashinadigan birinchi rang kovariant tenzorlar, izi nolga teng bo'lgan quyi indekslari bo'yicha simmetrik va antisimmetrik tenzorlar:

$$\psi^i_{\{jk\}} - \frac{1}{4}\left(\delta^i_j \psi^l_{\{lk\}} + \delta^i_k \psi^l_{\{lj\}}\right) \Rightarrow D(1,2);$$

$$\psi^i_{[jk]} - \frac{1}{2}\left(\delta^i_j \psi^l_{[lk]} - \delta^i_k \psi^l_{[lj]}\right) \Rightarrow D(2,0).$$

Demak,

$$D(1,0) \otimes D(0,1) \otimes D(0,1) = D(0,1) \oplus D(0,1) \oplus D(2,0) \oplus D(1,2),$$

yoki, $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}} \otimes \overline{\mathbf{3}} = \overline{\mathbf{3}} \oplus \overline{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6} \oplus \mathbf{15}$.

4.40-misol. $D(1,1) \otimes D(1,1)$ ni toping.

Birinchi $D(1,1)$ ga mos keluvchi bazisni ψ^i_j deb belgilaymiz, ikkinchi $D(1,1)$ ga mos keluvchi bazisni ϕ^i_j deb belgilaymiz, ularning izlari nolga teng.

1. Birinchidan, ψ^i_j va ϕ^i_j lardan singlet hosil qilish mumkin: $\psi^i_j \phi^j_i$. Bu - singlet, u $D(0,0)$ bo'yicha o'zgaradi.
2. Ikkita indeksli izi nolga teng kombinatsiyalar hosil qilish mumkin:

$$\psi^i_j \phi^j_k - \frac{1}{3}\delta^i_k \psi^l_j \phi^j_l, \qquad \psi^i_k \phi^k_j - \frac{1}{3}\delta^i_k \psi^l_j \phi^j_l.$$

Bular $D(1,1)$ bo'yicha o'zgaradigan ikkita oktuplet;

3. $\varepsilon^{ijk} \psi^l_j \phi^m_k$ kombinatsiyani (i,l,m) indekslar bo'yicha simmetriklashtirib chiqish kerak, natijada ***dekuplet*** deyiladigan $D(3,0)$ tenzor hosil bo'ladi;
4. $\varepsilon_{ijk} \psi^j_l \phi^k_m$ kombinatsiyani (i,l,m) indekslar bo'yicha simmetriklashtirib chiqish kerak, natijada $D(0,3)$ tenzor hosil bo'ladi, u ham dekuplet;
5. $\psi^{i_1}_{j_1} \phi^{i_2}_{j_2}$ ko'paytmani (i_1, i_2) va (j_1, j_2) indekslar bo'yicha simmetriklashtirib chiqib izlarini ayirib tashlash kerak. To'liq simmetrik kombinatsiya:

$$\chi^{1 i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \psi^{i_1}_{j_1}\phi^{i_2}_{j_2} + \psi^{i_1}_{j_2}\phi^{i_2}_{j_1} + \psi^{i_2}_{j_1}\phi^{i_1}_{j_2} + \psi^{i_2}_{j_2}\phi^{i_1}_{j_1}.$$

Undan ayirilishi kerak hadlar:

$$\chi^{2 i_1 i_2}_{j_1 j_2} = -\frac{1}{5}\delta^{i_1}_{j_1}\left(\psi^{i_2}_k \phi^k_{j_2} + \psi^k_{j_2}\phi^{i_2}_k\right) - \frac{1}{5}\delta^{i_1}_{j_2}\left(\psi^{i_2}_k \phi^k_{j_1} + \psi^k_{j_1}\phi^{i_2}_k\right) - \frac{1}{5}\delta^{i_2}_{j_1} \times$$
$$\times \left(\psi^{i_1}_k \phi^k_{j_2} + \psi^k_{j_2}\phi^{i_1}_k\right) - \frac{1}{5}\delta^{i_2}_{j_2}\left(\psi^{i_1}_k \phi^k_{j_1} + \psi^k_{j_1}\phi^{i_1}_k\right) + \frac{1}{10}\left(\delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2} + \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1}\right)\psi^l_m \phi^m_l.$$

Mana shu ikkala ifodalarning yig'indisi $\chi^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \chi^{1 i_1 i_2}_{j_1 j_2} + \chi^{2 i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ ikkala yuqori va ikkala quyi indekslari bo'yicha simmetrik va ixtiyoriy bitta yuqori va bitta quyi indekslari bo'yicha soddalashtirilganda nolga teng bo'ladigan keltirilmaydigan $D(2,2)$ tenzorni beradi.

Olingan natijani quyidagi ko'rinishga keltirish maqsadga muvofiqdir:

$D(1,1)\otimes D(1,1) = D(0,0)\oplus D(1,1)\oplus D(1,1)\oplus D(3,0)\oplus D(0,3)\oplus D(2,2).$

Tenzorlarning o'lchamliklari orqali:

$$\mathbf{8}\otimes\mathbf{8} = \mathbf{1}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{10}\oplus\overline{\mathbf{10}}\oplus\mathbf{27}.$$

Chap va o'ng tomonlarda bir xil son turibdi - 64.

Keltirilmaydigan qismlarga parchalash elementar zarrachalar nazariyasida katta ahamiyat kasb etadi. Kvant xromodinamikasida kvarklar uch xil rangga (algebraik rang emas, qizil, sariq va yashil ranglar) ega bo'lib $SU(3)$ gruppasining fundamental tasavvurini tashkil qiladi - kvarklar $D(1,0)$ va antikvarklar $D(0,1)$ tasavvurlarga tegishli. Mezonlar bitta kvark va bitta antikvarkdan tashkil topgan, demak, ular $\mathbf{3}\times\overline{\mathbf{3}} = \mathbf{1}+\mathbf{8}$ tasavvurga tegishli bitta sibglet va bitta oktetdan iborat nonetni tashkil qilishi kerak. Fizikada har bir oktet, nonet, dekuplet va h.k.lar ***multiplet*** deyiladi. Barionlar, giperonlar uchta kvarkdan tuzilgan bo'lib ular ham tegishli multipletlarga parchalanadi.

$SU(3)$ gruppasining 8-ta generatori bor (paragrafning ohirida $SU(n)$ gruppasi uchun generatorlarning soni hisoblangan, bu son n^2-1 ga tengligi ko'rsatilgan). $SU(3)$ ning generatorlari fundamental tasavvurda odatda quyidagicha tanlab olinadi $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$, $a = 1,2,...,8$. Bu yerda λ_a lar Gell-Mann matritsalari deyiladi, ularning ko'rinishi quyidagicha:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ko'rinib turibdiki, generatorlarning ikkitasi, λ_3 va λ_8, bir vaqtda diagonal ko'rinishga ega. Bu degani §23.-paragrafda keltirilgan klassifikatsiya bo'yicha $SU(3)$ gruppasi ikkinchi rang gruppadir.

λ_3 va λ_8 generatorlarga mos keluvchi kvant sonlar saqlanuvchi kattaliklar bo'ladi. Elementar zarrachalar fizikasida bu sonlar sifatida giperzaryad va izotopspinning uchinchi komponentasi qabul qilinadi. λ_a larning hammasi izsiz ermit matritsalardir. λ_1, λ_2 va λ_3 larga ahamiyat berilsa ular Pauli matritsalarini o'z ichiga oladi, bu bilan $SU(2)$ gruppasi $SU(3)$ gruppasining qismgruppasi ekanligi ta'kidlanmoqda. Generatorlar quyidagi kommutatsion munosabatlarga bo'ysunadi:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = if_{abc}\frac{\lambda_c}{2}.$$

$SU(3)$ gruppasining hossalarini bilish uchun yuqoridagi generatorlar algebrasiga kirgan struktura doimiylari f_{abc} larni bilish yetarli, bu haqida §23.-paragrafda gapirilgan. Generatorlarning yuqorida keltirilgan realizatsiyasi uch o'lchamli $D(1,0)$ tasavvurga mos keladi, ixtiyoriy $D(p,q)$ tasavvurda generatorlarning realizatsiyasini quyidagicha topish mumkin. Cheksiz kichik α_i parametrlar uchun $U^i_j \simeq \delta^i_j + i\frac{1}{2}\alpha_a\left(\lambda_a\right)^i_j$ deb olib (152)-formulada cheksiz kichik almashtirishlarga o'tamiz

$$\psi'^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \simeq \left(1 + i\frac{1}{2}\alpha_a\lambda_a\right)^{i_1}_{i'_1}\left(1 + i\frac{1}{2}\alpha_b\lambda_b\right)^{i_2}_{i'_2}\cdots\left(1 + i\frac{1}{2}\alpha_c\lambda_c\right)^{i_p}_{i'_p}\cdot$$

$$\cdot\left(1 - i\frac{1}{2}\alpha_d\lambda_d\right)^{j'_1}_{j_1}\left(1 - i\frac{1}{2}\alpha_e\lambda_e\right)^{j'_2}_{j_2}\cdots\left(1 - i\frac{1}{2}\alpha_f\lambda_f\right)^{j'_q}_{j_q}\psi^{i'_1 i'_2 \cdots i'_p}_{j'_1 j'_2 \cdots j'_q}.$$

$\psi' \simeq \psi + \delta\psi$ belgilash kiritilsa

$$\delta\psi^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = i\frac{1}{2}\alpha_a\left[\sum_{l=1}^{p}\left(\lambda_a\right)^{i_l}_{i'_l}\psi^{i_1 \cdots i'_l \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} - \sum_{l=1}^{q}\left(\lambda_a\right)^{j'_l}_{j_l}\psi^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j'_l \cdots j_q}\right]$$

bo'ladi. Masalan,

$$\delta\psi^i_j = i\frac{1}{2}\alpha_a\left[\left(\lambda_a\right)^i_{i'}\psi^{i'}_j - \left(\lambda_a\right)^{j'}_j\psi^i_{j'}\right] = i\frac{1}{2}\alpha_a\left[\left(\lambda_a\right)^i_{i'}\delta^{j'}_j - \left(\lambda_a\right)^{j'}_j\delta^i_{i'}\right]\psi^{i'}_{j'}.$$

To'g'ri qavslarning ichidagi matritsa aralash tenzor ψ^i_j ning tasavvuridagi generator bo'ladi, bu generatorlarning o'lchamligi

9×9. Boshqa tasavvurlarga mos keluvchi generatorlarni ham shu yo'l bilan topish mumkin.

Paragrafning ohirida $SU(n)$ gruppasi uchun bir necha muhim munosabatlarni keltirib chiqaraylik.

$SU(n)$ gruppasining generatorlari sonini topaylik. Generatorlar izi nolga teng ermit bo'lgan $n \times n$ matritsalardan iborat. Kompleks $n \times n$ matritsaning umumiy elementlari soni $2n^2$ ga teng, ermitlik shartlari soni $2\frac{1}{2}(n^2-n)+n$ ga teng, izsizlik sharti 1 ta, shu bilan, izi nolga teng ermit bo'lgan $n \times n$ mustaqil matritsalarning soni $2n^2 - n^2 - 1 = n^2 - 1$ ga teng. Demak, $SU(n)$ gruppasining generatorlari $n^2 - 1$ ta bo'ladi (masalan, $SU(3)$ gruppasida 8 ta generator bor). Ularni T_a, $a = 1, 2, ..., n^2 - 1$ deb belgilaylik. Generatorlarning kommutatori

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c.$$

Bu yerda f_{abc} hamma indekslari bo'yicha to'liq ravishda antisimmetrik tenzor - $SU(n)$ gruppasining struktura doimiylari (Lie gruppalari algebrasining §22.3.-paragrafdagi hossalariga qarang). Elementar zarrachalar nazariyasida ko'p ishlatiladigan bir necha formulalarni keltirib chiqaraylik.

Generatorlar quyidagi shartlarga bo'ysunadi:

$$\mathrm{Tr}(T_a) = 0, \qquad \mathrm{Tr}\,(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}.$$

Birinchi shart - generatorlarning izsizligi sharti, ikkinchi shart - ixtiyoriy yarimsodda gruppalari uchun kiritilishi mumkin (§22.3.-paragrafdagi Cartan formasining muhokamasiga qarang). Ikkinchi shartda 1/2 ning o'rniga ixtiyoriy son olish mumkin, ammo biz yuqoridagini tanlaymiz. Bu munosabatlardan ko'rinib turibdiki

$$f_{abc} = \frac{2}{i}\mathrm{Tr}\left([T_a, T_b]T_c\right).$$

Feynman diagrammalarida quyidagi munosabat keng qo'llaniladi:

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} (T_a)^i_j (T_a)^k_l = \frac{1}{2}\left(\delta^i_l \delta^k_j - \frac{1}{n}\delta^i_j \delta^k_l\right). \qquad (153)$$

4.4-mashq. (153)-formulani keltirib chiqaring.

4.5-mashq. (153)-formuladan foydalanib quyidagi munosabatlarni keltirib chiqaring:

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} T_a T_a = C_2(R) I, \quad \sum_{c=1}^{n^2-1} T_c T_a T_c = \left(C_2(R) - \frac{1}{2} C_2(G) \right) T_a, \quad \sum_{c,d=1}^{n^2-1} f_{acd} f_{bcd} = C_2(G),$$

$$\sum_{b,c=1}^{n^2-1} f_{abc} T_b T_c = \frac{i}{2} C_2(G) T_a, \qquad C_2(R) = \frac{n^2-1}{2n}, \qquad C_2(G) = n.$$

Bu mashqda paydo bo‘lgan $C_2(R)$ va $C_2(G)$ belgilar $SU(n)$ gruppasining kvadratik Casimir operatorlarining hususiy qiymatlari, $C_2(R)$ - fundamental (n o‘lchamli) tasavvurga mos keladi, $C_2(G)$ esa biriktirilgan (n^2-1 o‘lchamli) tasavvurga mos keladi. Kvant xromodinamikasida $C_2(R)$ kvarklar bilan bog‘langan, chunki kvarklar fundamental tasavvurga tegishli, $C_2(G)$ esa gluonlar bilan bog‘langan, chunki gluonlar biriktirilgan tasavvurga tegishli.

§20. Lorentz gruppasi

§20.1. Lorentz gruppasining ta‘rifi va umumiy hossalari

Minkowsky fazosida (4-o‘lchamli fazo-vaqtda) ikkita cheksiz yaqin hodisalar orasidagi interval quyidagicha aniqlanadi:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Bu formani invariant qoldiradigan almashtirishlar

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu, \qquad ds'^2 = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2 \quad (154)$$

Lorentz almashtirishlari deyiladi. Lorentz almashtirishlari bir inersial sanoq sistemasidan unga nisbatan qandaydir tezlik bilan harakat qilayotgan ikkinchi inersial sanoq sistemasiga o‘tishga mos kelar edi. Ikkita ketma-ket bajarilgan Lorentz almashtirishlari yana Lorentz almashtirishini beradi:

$$dx''^\mu = \Lambda^\mu_{1\nu} dx'^\nu = \Lambda^\mu_{1\nu} \Lambda^\nu_{2\sigma} dx^\sigma = \Lambda^\mu_{3\sigma} dx^\sigma$$

formuladan ko‘rinib turibdiki, K sistemadan K' sistemaga Λ_1 yordamida, undan keyin esa K' dan K'' sistemaga Λ_2 yordamida o‘tish K dan bevosita K'' ga bitta $\Lambda_3 = \Lambda_1 \Lambda_2$ Lorentz almashtirishi yordamida o'tishga teng ekan. Bu degani, Lorentz almashtirishlari gruppani tashkil qiladi.

Lorentz almashtirishlari ta'rifini ochib yozaylik:

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\Lambda^{\nu}{}_{\lambda}dx^{\sigma}dx^{\lambda} = g_{\sigma\lambda}dx^{\sigma}dx^{\lambda}.$$

Bundan ko'rinib turibdiki

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\Lambda^{\nu}{}_{\lambda} = g_{\sigma\lambda}. \tag{155}$$

Bu munosabatni matritsa ko'rinishida yozib olish mumkin:

$$\Lambda^T g\Lambda = g.$$

Bu holda

$$\det g = -1 = \det g(\det\Lambda)^2,$$

yoki,

$$\det\Lambda = \pm 1$$

ekanligini topamiz. (155)-formulada $\sigma = \lambda = 0$ deb quyidagini topish mumkin:

$$g_{00} = 1 = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - (\Lambda^{1}{}_{0})^2 - (\Lambda^{2}{}_{0})^2 - (\Lambda^{3}{}_{0})^2. \tag{156}$$

Demak,

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^2 \geq 1.$$

Ikkita hol bo'lishi mumkin ekan:

$$\Lambda^{0}{}_{0} \geq +1, \qquad \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1.$$

Determinantning ham ishorasini hisobga olsak Lorentz almashtirishlarini to'rt qismga bo'lish mumkinligini ko'ramiz:

1. $L^{\uparrow}_{+}: \quad \Lambda^{0}{}_{0} \geq +1, \quad \det\Lambda = 1;$
2. $L^{\uparrow}_{-}: \quad \Lambda^{0}{}_{0} \geq +1, \quad \det\Lambda = -1;$
3. $L^{\downarrow}_{+}: \quad \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1, \quad \det\Lambda = 1;$
4. $L^{\downarrow}_{-}: \quad \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1, \quad \det\Lambda = -1.$

$\det\Lambda = +1$ bo'lgan almashtirishlar ***hususiy*** deyiladi, $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ almashtirishlar esa ***ortoxron*** deyiladi. Ro'yxatdagi birinchi hol hususiy ortoxron almashtirishlar deyilib ulargina qismgruppani tashkil qiladi. Buni tushunish qiyin emas - birinchidan, ikkita determinanti manfiy matritsalarning ko'paytmasi determinanti musbat matritsa bo'ladi. Ikkinchidan, $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ almashtirish vaqt o'qini teskariga yo'naltiradigan almashtirishdir, uni ikki marta qo'llasak vaqt o'qi yana o'zining boshlang'ich yo'nalishiga qaytib keladi, ya'ni, ikkita ketma-ket bunday almashtirishning natijasi bitta $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ almashtirishga tengdir. Ya'ni. $L^\uparrow_-$, $L^\downarrow_+$ va $L^\downarrow_-$ to'plamlar qismgruppani tashkil qila olmaydi. Bundan tashqari, birlik element $L^\uparrow_+$ ga kiradi. Hamma Lorentz almashtirishlari ***umumiy Lorentz gruppasi***ni tashkil qiladi, determinanti $+1$ ga teng almashtirishlar to'plami $L^\uparrow_+ + L^\downarrow_+$ ***hususiy Lorentz gruppasi*** deyiladi. §10.-paragrafdagi klassifikatsiya bo'yicha Lorentz gruppasi psevdoortogonal $SO(3,1)$ gruppaga mos keladi. Bundan keyin Lorentz gruppasining tasavvurlari haqida gap ketganda hususiy Lorentz gruppasining tasavvurlari ko'zda tutiladi.

Quyidagi almashtirish matritsalarini ko'raylik:

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Birinchi matritsa ta'sirida vaqt koordinatasi o'z ishorasini o'zgartiradi: $x^0 \to -x^0$, ikkinchi almashtirish esa fazoviy koordinatalarning ishorasini o'zgartiradi: $x^1 \to -x^1$, $x^2 \to -x^2$, $x^3 \to -x^3$:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}.$$

Bu ikkala almashtirish ham Lorentz almashtirishlariga tegishli chunki ular intervalning kvadratini saqlaydi. Ular uchun $\Lambda_T \in L_-^{\downarrow}$ va $\Lambda_P \in L_-^{\uparrow}$, undan tashqari $\Lambda_T \Lambda_P \in L_+^{\downarrow}$. Odatda Λ_T matritsa orqali ifodalangan operatsiyani T–almashtirish, Λ_P matritsa orqali ifodalangan operatsiyani esa P–almashtirish deyiladi. Ular ***diskret*** Lorentz almashtirishlariga tegishli.

§20.2. Lorentz gruppasining generatorlari

Lorentz gruppasining generatorlarini topishdan oldin uch o'lchamli fazodagi aylanishlar ham Lorentz gruppasiga kirishini ko'rsataylik. Quyidagi matritsa

$$g_{12}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1\cos\varphi + x^2\sin\varphi \\ -x^1\sin\varphi + x^2\cos\varphi \\ x^3 \end{pmatrix}$$

almashtirish bajaradi, bu almashtirish $x^\mu x_\mu$ ning bir qismi bo'lgan $x^i x^i$ ni invariant qoldiradi, demak $x^\mu x_\mu$ ni ham . Demak, z o'qi atrofidagi aylanish Lorentz gruppasiga taalluqli ekan. Huddi shunday ko'rsatish mumkinki, y va x o'qlari atrofidagi aylanishlar ham Lorentz gruppasiga kiradi. Ya'ni, $SO(3)$ ***gruppasi Lorentz*** *gruppasining qismgruppasidir.* x va y o'qlari atrofidagi aylanishlarga quyidagi matritsalar mos keladi:

$$g_{23}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$g_{31}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Endi hususiy Lorent almashtirishlariga o'tamiz. Faraz qilaylik Lorentz almashtirishlari faqat 0-nchi va 1-nchi o'qlarga tegishli bo'lsin, bu holda (156)-formuladan

$$({\Lambda^0}_0)^2 - ({\Lambda^1}_0)^2 = 1$$

ga kelamiz. Bu tenglamaning (hususiy va ortoxron holga mos keluvchi) yechimi

$${\Lambda^0}_0 = \operatorname{ch}\tau, \qquad {\Lambda^1}_0 = \operatorname{sh}\tau, \qquad -\infty < \tau < \infty.$$

Matritsa ko'rinishida:

$$g_{01}(\tau) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau & \operatorname{sh}\tau & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\tau & \operatorname{ch}\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ushbu elementga mos keluvchi generator:

$$a_{01} = \frac{d}{id\tau} g_{01}(\tau)\bigg|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(t, y) va (t, z) tekisliklarida bajarilgan Lorentz almashtirishlariga quyidagi matritsalar mos keladi:

$$g_{02}(\tau) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau & 0 & \operatorname{sh}\tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\tau & 0 & \operatorname{ch}\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_{03}(\tau) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau & 0 & 0 & \operatorname{sh}\tau \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\tau & 0 & 0 & \operatorname{ch}\tau \end{pmatrix}.$$

Ularga mos keluvchi generatorlar:

$$a_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsalar hermite matritsa emas.

g_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ elementlarga mos keluvchi generatorlar quyidagicha bo'ladi:

$$b_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ushbu matritsalar yuqoridagilardan qat'iy o'larog hermitdir.

Shu bilan oltita generatorlar topildi. Rostdan ham, to'rt o'lchamli fazo-vaqtdagi to'rtta koordinat o'qlari oltita buralish orqali almashinishi mumkin: uchta hususiy Lorentz almashtirishlari+uchta x, y, z o'qlari orasidagi buralishlar.

Topilgan generatorlarning algebrasini aniqlaylik. Quyidagi belgilashlar kiritaylik:

$$a_{01} = A_1, \; a_{02} = A_2, \; a_{03} = A_3, \; b_{23} = B_1, \; b_{31} = B_2, \; b_{12} = B_3.$$

Bu belgilashlarda Lorentz gruppasining algebrasi quyidagicha bo'ladi:

$$[A_i, A_j] = -i\varepsilon_{ijk}B_k, \qquad [B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk}B_k, \qquad [A_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k. \tag{157}$$

Bu munosabatlarni tekshirib chiqishni o'quvchiga havola qilamiz.

A_i va B_i matritsalarning ta'riflaridan ko'rinib turibdiki

$$A_i^\dagger = -A_i, \qquad B_i^\dagger = B_i.$$

Ularning o'rniga

$$L_i = \frac{1}{2}(B_i + iA_i) \qquad \text{va} \qquad K_i = \frac{1}{2}(B_i - iA_i)$$

matritsalarni kiritaylik. Ko'rinib turibdiki ular hermitlik hossasiga ega:

$$L_i^\dagger = L_i, \qquad K_i^\dagger = K_i. \tag{158}$$

(157)-dan quyidagilarni keltirib chiqarish mumkin:

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k, \qquad [L_i, K_j] = 0, \qquad [K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k. \tag{159}$$

Demak, L_i va K_i generatorlarning algebrasi $SU(2)SO(3)$ gruppaslari generatorlari algebrasi (100)- va (105) bilan bir xil. Bundan kelib chiqadiki $\mathbf{L}^2$ operatorining xususiy qiymatlari $\mathbf{L}^2 = l(l+1)$ va $\mathbf{K}^2$ operatorining xususiy qiymatlari $\mathbf{K}^2 = k(k+1)$ munosabatlarga bo'ysunadi va, shunga yarasha, Lorentz gruppasi bo'yicha almashinadigan kattaliklar ikkita son bilan xarakterlanadi - (l, k). l va k sonlar $0, 1/2, 1, 3/2, ...$ qatorga tegishli qiymatlarni qabul qiladi.

§20.3. Lorentz va $SL(2, C)$ gruppalari orasidagi bog'lanish

$SL(2, C)$ gruppasi determinanti birga teng kompleks 2×2 matritsalardan iborat:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \det A = \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{160}$$

Kompleks 2×2 matritsa 4 ta kompleks son bilan aniqlanadi, bu esa 8 ta haqiqiy son berilishi kerak degani. Determinantning birga tengligi kompleks songa qo'yilgan ikkita shartdir, demak, A matritsa oltita haqiqiy parametr bilan aniqlanar ekan. A ning teskarisini topish qiyin emas:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

2×2 matritsalar sohasida Pauli matritsalari bazisni tashkil qiladi. Ularga birlik matritsani qo'shsak quyidagi to'rtta matritsani olamiz:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Shu matritsalar yordamida fazo-vaqtning x nuqtasiga mos keluvchi

$$\hat{x} = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

matritsani kiritamiz. Ko'rinib turibdiki

$$\det \hat{x} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x_\mu x^\mu = x^2.$$

Pauli matritsalari uchun $\mathrm{Tr}\,(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$ bo'lgani uchun

$$x^\mu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\,(\sigma_\mu \hat{x})$$

ekanligi kelib chiqadi. (160)-matritsa yordamida quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\hat{x}' = A\hat{x}A^\dagger = x'^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & x'^0 - x'^3 \end{pmatrix}. \qquad (161)$$

$\det A = 1$ shart (undan $\det A^\dagger = 1$ ligi ham kelib chiqadi) interval kvadratining invariantligini ta'minlaydi:

$$\det \hat{x}' = \det \hat{x}, \qquad \text{yoki} \qquad x'_\mu x'^\mu = x_\mu x^\mu.$$

Demak, (160)-matritsalar $A \in SL(2, C)$ yordamida bajarilgan (161)-almashtirish Lorentz almashtirishlariga ekvivalent ekan. Bu moslikning tasodifiy emasligini shu ham ko'rsatadiki, Lorentz gruppasi oltita parametrli gruppa, $SL(2, C)$ ham oltita parametr bilan aniqlanadigan gruppa. (154)-dagi $\Lambda^\mu{}_\nu$ va $A \in SL(2, C)$ matritsalar orasidagi bog'lanishni topaylik:

$$\det \hat{x}' = x'^\mu \sigma_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu = A\hat{x}A^\dagger = A\sigma_\nu A^\dagger x^\nu,$$

bundan

$$\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu = A\sigma_\nu A^\dagger.$$

Demak,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(\sigma^\mu A \sigma_\nu A^\dagger\right).$$

Bu formuladan ko'rinib turibdiki, $+A$ va $-A$ matritsalarga bitta $\Lambda^\mu{}_\nu$ mos keladi. Demak, $SL(2,C)$ gruppasi Lorentz gruppasiga gomomorf ravishda akslantirilar ekan.

Ixtiyoriy 2×2 matritsani $A = A^\mu\sigma_\mu$ desak uning unimodularlik, ya'ni $A \in SL(2,C)$ lik sharti

$$\det A = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2 = 1$$

ni quyidagicha yechish mumkin:

$$A^0 = \mathrm{ch}\frac{\theta}{2}, \quad A^i = n^i \mathrm{sh}\frac{\theta}{2}, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

Bu holda

$$A = \sigma_0 \mathrm{ch}\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{sh}\frac{\theta}{2} = e^{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\frac{\theta}{2}}. \qquad (162)$$

Yarim argument $\theta/2$ ning paydo bo'lishini quyidagi misol tushuntiradi:

4.41-misol. x^μ vektorning almashinish qoidasi (161)-bo'yicha

$$\hat{x}' = A\hat{x}A^\dagger = e^{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\frac{\theta}{2}}\hat{x}e^{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\frac{\theta}{2}}$$

dan vektor x^μ ning komponentalari uchun quyidagilarni olamiz:

$$x'^0 = x^0\mathrm{ch}\,\theta + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathrm{sh}\,\theta, \quad (\mathbf{x}'\cdot\mathbf{n}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathrm{ch}\,\theta + x^0\mathrm{sh}\,\theta.$$

Bu - Lorentz almashtirishlari, ularning fizik kitoblarda berilgan formasiga o'tish uchun $\mathrm{th}\,\theta = v/c$ deb olish kerak.

$SU(2)$ gruppasi ham 2×2 matritsalardan tuzilgan, ular unimodularlikdan tashqari unitarlik shartiga bo'ysunishi kerak. Demak, $SU(2)$ gruppasi $SL(2,C)$ gruppasining qismgruppasidir: $SU(2) \subset SL(2,C)$. Bu qismgruppaga mos keluvchi (162)-matritsalar unitarlik shartiga bo'ysunishi kerak: $A^\dagger = A^{-1}$. Bu holda A matritsa

$$A = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\frac{\omega}{2}} = \sigma_0\cos\frac{\omega}{2} + i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\sin\frac{\omega}{2}$$

ko'rinishga ega bo'ladi ((97)- va (98)- lar bilan solishtiring).

4.42-misol. $\mathbf{n} = (0,0,1)$ vektor uchun (aylanish yo'nalishi - z -o'qi)

$$\sigma_0\cos\frac{\omega}{2} + i\sigma_3\sin\frac{\omega}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2} + i\sin\frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\omega}{2} - i\sin\frac{\omega}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega}{2}}\end{pmatrix}.$$

Buni (101)-bilan solishtiring.

§20.4. Relativistik spinorlar

$SL(2,C)$ gruppasining to'rt-vektorlarga ta'siri Lorentz almashtirishlariga ekvivalent ekanligini ko'rdik. Ikki o'lchamli matritsalar sifatida (160) - matritsalar ikki qatorli kompleks vektorlarga ham ta'sir qilishi kerak. Lorentz almashtirishlarida

$$\xi'^{\alpha} = A^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{163}$$

qoida bo'yicha o'zgaradigan

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$$

kattaliklar relativistik spinorlar deyiladi. (163)-formulani ochib yozaylik:

$$\xi'^1 = \alpha\xi^1 + \beta\xi^2, \qquad \xi'^2 = \gamma\xi^1 + \delta\xi^2, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{164}$$

Spinorlar ikki o'lchamli kompleks fazo vektorlari sifatida qaralishi mumkin.

Ikkita ξ va η spinorlar uchun

$$\xi'^1\eta'^2 - \xi'^2\eta'^1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1) = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 \tag{165}$$

bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki $\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1$ kombinatsiya Lorentz-invariant (bir hisobot sistemasidan ikkinchisiga o'tganimizda o'zgarmaydigan) kombinatsiya ekan. Bunday invariantlarni tabiiy ko'rinishda yozish uchun quyidagicha antisimmetrik "metrik tenzor" kiritiladi:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_{\alpha\beta} = -g_{\beta\alpha}.$$

Ushbu metrik tenzor yordamida quyi indeksli spinorlarni kiritishimiz mumkin:

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\beta, \quad \text{ya'ni,} \quad \xi_1 = \xi^2, \quad \xi_2 = -\xi^1.$$

Bu holda (165)-invariant

$$\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 = \xi^1\eta_1 + \xi^2\eta_2 = \xi^\alpha\eta_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\beta = -\xi_\alpha\eta^\beta$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Kontravariant metrik tenzor $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$ qoida bo'yicha kiritiladi:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demak, yana bir marta yuqoridagi $\xi^1 = -\xi_2, \xi^2 = \xi_1$ munosabatlarga kelamiz.

Norelativistik kvant mexanikasida $\rho = |\psi|^2 = \psi^{*1}\psi^1 + \psi^{*2}\psi^2$ kattalik elektronning zichligi bo'lib hizmat qiladi, zichlik invariant (skalar) kattalik bo'lishi kerak bo'lgani uchun norelativistik spinorlarning almashtirish matritsasi unitarlik hossasiga ega bo'lishi kerak edi, shu sababdan u holda $SU(2)$ gruppasi paydo bo'lgan edi. Relativizmda zichlik $\rho = |\psi|^2$ skalar emas, u 4-vektorning nolinchi komponentasi. Shuning uchun zichlikning invariantligi sharti kiritilmaydi. Bu o'z navbatida almashtirish matritsasining unitarligini talab qilmaslikka ekvivalentdir. Uch o'lchamli spinorlar haqida gap ketganida aylanish matritsalarining unitarligi kovariant spinorlar uchun (136)-qoidaga olib kelgan edi: kovariant spinor $SU(2)$ gruppasining kompleks qo'shma tasavvuri bo'yicha almashinar ekan. Ya'ni, kovariant spinorning almashinish qoidasi kontravariant spinorning kompleks qo'shmasi bilan bir hil edi: $\chi_\alpha \sim (\chi^\alpha)^*$.

To'rt o'lchamli holda esa kompleks qo'shmatasavvur bo'yicha almashinadigan spinor

$$\zeta'^{*\alpha} = A^{*\alpha}_{\beta}\zeta^{*\beta}$$

alohida kattalikdir, chunki A^* matritsa A ga chiziqli almashtirish yo'li bilan keltirilmaydi. Bunday spinor uchun alohida belgilash qabul qilingan: $\chi^{\dot\alpha}$. Bunday spinorlar ***punktirli spinorlar*** deyiladi. Almashtirish qoidasini to'g'ri yozish uchun A^* matritsaning indekslarini ham punktirli qilib olamiz:

$$\chi^{\dot\alpha} = A^{*\dot\alpha}_{\dot\beta}\chi^{\dot\beta}, \qquad \chi'^{\dot1} = \alpha^*\chi^{\dot1} + \beta^*\chi^{\dot2}, \quad \chi'^{\dot2} = \gamma^*\chi^{\dot1} + \delta^*\chi^{\dot2}. \quad (166)$$

Albatta, $\dot1$ indeks spinning z - o'qiga proeksiyasi +1/2 ga mos keladi, $\dot2$ indeks esa spinning z - o'qiga proeksiyasi -1/2 ga mos keladi. Punktirli spinorlar bilan ishlash uchun punktirli indeksli metrik tenzor kiritiladi:

$$g_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -g_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}.$$

Bu metrik tenzor punktirsiz metrik tenzordek indekslarni tushurishi va ikkita punktirli yuqori indekslar bo'yicha soddalashtirishi mumkin. Agar $g^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} g_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\gamma}}$ formula orqali punktirli kontravariant metrik tenzor kiritilsa u yordamida kovariant punktirli indekslarni ko'tarish va soddalashtirish mumkin. Kontravariant metrik tenzor uchun:

$$g^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Shu joyda (159)-formulalar va ulardan kelib chiqqan hulosalarni eslash o'rinlidir. U yerda ma'lum bo'lgan ediki, Lorentz gruppasiga bo'ysunadigan kattaliklar ikkita mustaqil sonlar (k, l) bilan aniqlanadi, ikkala songa tegishli kattaliklar o'zaro kompleks qo'shma tasavvurlar bo'yicha almashinadi. Shu indekslarning birini oddiy spinor indeks bilan bog'laymiz, ikkinchisini esa punktirli spinorlar bilan bog'laymiz. Masalan, $(1/2, 0)$ tasavvurga ζ^{α} spinor, $(0, 1/2)$ tasavvurga esa $\chi^{\dot{\beta}}$ spinor mos keladi. $(1/2, 1/2)$ tasavvurga $\chi^{\alpha\dot{\beta}}$ aralash spinor mos keladi. (k, l) tasavvurga esa

$$\zeta^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\cdots\dot{\beta}_l}$$

spinor mos keladi. Uning komponentalarining soni $(2k+1)(2l+1)$ ga teng.

Punktirli va punktirsiz indekslar bo'yicha soddalashtirishning ma'nosi yo'q, hosil bo'lgan kattalik invariant xarakterga ega bo'lmaydi. Soddalashtirish faqat punktirsiz indekslarning ichida alohida va punktirli indekslarning ichida alohida bajarilishi kerak. Indekslar bo'yicha soddalashtiruvchi metrik tenzorlar $g_{\alpha\beta}$ va $g_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ antisimmetrik bo'lgani uchun har bir gruppa indekslar bo'yicha simmetrik spinor keltirilmaydigan tasavvurni amalga oshiradi. $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ larning ichida simmetrik kombinatsiyalarning soni $(k+1)$ ga teng, huddi shunday, $\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\cdots\dot{\beta}_l$ larning ichida simmetrik kombinatsiyalarning soni $(l+1)$ ga teng. Demak, (k, l) spinor ikkala xilga ham tegishli indekslari bo'yicha simmetrik bo'lsa u amalga oshirayotgan keltirilmaydigan tasavvurning o'lchamligi $(k+1)(l+1)$ ga teng. Mana shu keltirilmaydigan $(k+1)(l+1)$ o'lchamli tasavvur matritsasini $\mathcal{D}^{(k,l)}$ deb belgilaylik. Undan tashqari $\mathcal{D}^{(k,0)} = \mathcal{D}^k$ va $\mathcal{D}^{(0,l)} = \mathcal{D}^{l*}$ deb belgilaymiz.

Ikkita (k_1, l_1) va (k_2, l_2) indeksli spinorlarning ko'paytmasi $(k_1 + k_2, l_1 + l_2)$ indeksli spinorni beradi. Masalan, $\xi^{\alpha}_{\dot\beta}\psi^{\gamma\dot\nu} = \varphi^{\alpha\gamma\dot\nu}_{\dot\beta}$ bo'ladi. Ikkita indeks bo'yicha soddalashtirish natijasida rangi ikkitaga kam spinor hosil bo'ladi. Masalan, $g_{\alpha_1\alpha_3}\xi^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\gamma\dot\beta} = \xi^{\alpha_2}_{\gamma\dot\beta}$, $g^{\dot\alpha\dot\beta}\zeta_{\dot\alpha\dot\beta} = \zeta$ - skalar va h.k. Albatta, soddalashtirilayotgan indekslar bo'yicha spinor simmetrik bo'lmasligi kerak, aks holda nolni olamiz.

Ikkala xil indekslari bo'yicha simmetrik spinorga misol sifatida birinchi rang spinorlarining ko'paytmasini olish mumkin:

$$\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\cdots\xi_{\alpha_k}\xi_{\dot\beta_1}\xi_{\dot\beta_2}\cdots\xi_{\dot\beta_l}.$$

(161)-formula bo'yicha to'rt-vektor x^μ ni ikkinchi rang aralash spinori sifatida ko'rish kerak: $\hat{x}' = A\hat{x}A^\dagger$ formulani indekslar bilan yozsak

$$\hat{x}'^{\alpha\dot\beta} = A^{\alpha}_{\gamma}\hat{x}^{\gamma\dot\sigma}A^{\dagger\dot\beta}_{\dot\sigma}$$

bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki Pauli matritsalarini spinor hisobning elementlari sifatida qaraganda ularni $(\sigma_\mu)^{\alpha\dot\beta}$ ko'rinishda olish kerak.

§20.5. Lorentz gruppasining tasavvurlari

Tasavvur ta'sir qiladigan fazoning bazisini tashkil qiluvchi funksiyalar sifatida quyidagi monomlar olinadi:

$$f^{\sigma\dot\rho}(j_1, j_2) = \frac{\xi_{1/2}^{j_1+\sigma}\xi_{-1/2}^{j_1-\sigma}\eta_{1/2}^{j_2+\dot\rho}\eta_{-1/2}^{j_2-\dot\rho}}{\sqrt{(j_1+\sigma)!(j_1-\sigma)!(j_2+\dot\rho)!(j_2-\dot\rho)!}},$$

bu yerda $-j_1 \le \sigma \le j_1$, $-j_2 \le \dot\rho \le j_2$. Fazoning o'lchamligi $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ ga teng. Tasavvur matritsasi $\mathcal{D}^{(j_1,j_2)}(A)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$f'^{\sigma\dot\rho}(j_1, j_2) = \left(\mathcal{D}^{(j_1,j_2)}(A)\right)^{\sigma\dot\rho}_{\lambda\dot\tau} f^{\lambda\dot\tau}(j_1, j_2).$$

$\mathcal{D}^{(j_1,j_2)}(A)$ matritsa A matritsa orqali aniqlanadi. Bu formulaning o'ng tomonida (164)- va (166)-formulalar ishlatiladi, keyin $(A\xi)^{j_1+\sigma}$ ga o'xshagan darajalar ochiladi va $f^{\lambda\tau}$ polinom qayta yig'ilib $\mathcal{D}^{(j_1,j_2)}(A)$ matritsa topiladi. Bu ishda to'xtalib o'tirmay $\mathcal{D}^{(j_1,j_2)}(A)$ matritsaning asosiy hossalarini qayd qilib ketaylik.

$f^{\sigma\dot{\rho}}(j_1,j_2)$ va $f^{\sigma\dot{\rho}}(k_1,k_2)$ funksiyalar keltirilmaydigan tasavvurlarni amalga oshiradi, $f^{\sigma\dot{\rho}}(j_1,j_2)f^{\sigma\dot{\rho}}(k_1,k_2)$ ko'paytma ham Lorentz gruppasining qandaydir tasavvurini amalga oshiradi, ammo bu tasavvur keltirilmaydigan tasavvurlarning to'g'ri ko'paytmasiga bo'lib keltiriladigan tasavvurga mos keladi. Keltirilmaydigan tasavvurlarning to'g'ri ko'paytmasi keltirilmaydigan tasavvurlar bo'yicha qatorga yoyiladi:

$$\mathcal{D}^{(j_1,k_1)} \otimes \mathcal{D}^{(j_2,k_2)} = \sum_{\oplus} \mathcal{D}^{(j,k)},$$

bu yerda $j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, j_1 + j_2$ va $k = |k_1 - k_2|, |k_1 - k_2| + 1, \ldots, k_1 + k_2$ qiymatlarni qabul qiladi. Hususan

$$\mathcal{D}^{(j_1,j_2)}(A) = \mathcal{D}^{(j_1,0)}(A) \otimes \mathcal{D}^{(0,j_2)}(A)$$

bo'ladi. Undan tashqari

$$\mathcal{D}^{(0,j)}(A) = \mathcal{D}^{(j,0)}(A^*)$$

bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki

$$\mathcal{D}^{(j_1,j_2)}(A) = \left(\mathcal{D}^{(j_2,j_1)}(A)\right)^*.$$

$\mathcal{D}^{(j_1,j_2)}(A)$ matritsalar unitar tasaavurni tashkil qilmaydi. (IV.2)-teorema faqat chekli va kompakt gruppalarga tegishli, Lorentz gruppasi nokompakt gruppa bo'lib uning cheklangan tasavvurlari unitar bo'lmaydi.

Agar $2j_1$ va $2j_2$ larning juftligi bir hil bo'lsa bunday tasavvur bir qiymatli, yoki, tenzor tasavvur deyiladi, har xil bo'lsa ikki qiymatli, yoki, spinor tasavvur deyiladi. Masalan, $(0,0)$ tasavvurga skalar mos keladi, $(1/2,1/2)$ tasavvurga vektor mos keladi. Izi nolga teng iikinchi rang simmetrik tenzorga $(1,1)$ tasavvur mos keladi. Ikkinchi rang antisimmetrik tenzorga $(1,0)$ yoki $(0,1)$

tasavvurlar mos keladi. Punktirsiz spinor $\mathcal{D}^{(1/2,0)}$ tasavvurni amalga oshiradi, punktirli spinor esa $\mathcal{D}^{(0,1/2)}$ tasavvurni. Dirac bispinoriga ikkita keltirilmaydigan tasavvurlarning to'g'ri yig'indisi mos keladi: $\mathcal{D}^{(1/2,0)} \oplus \mathcal{D}^{(0,1/2)}$.

§21. Poincare gruppasi

§21.1. Poincare gruppasining algebrasi

Relativistik kvant fizikasida quyidagi ko'rinishdagi birjinslimas Lorentz almashtirishlari muhim rol o'ynaydi:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}. \tag{167}$$

Bu yerda Λ^{μ}_{ν} - Lorentz almashtirishlari matritsasi, a^{μ} - to'rt o'lchamli Minkowsky fazosidagi o'zgarmas vektor. Bunday birjinslimas Lorentz almashtirishlari hosil qilgan gruppani ***Poincare gruppasi*** ham deyiladi. Matematik nuqtai nazardan bu - to'rt o'lchamli fazoda koordinat o'qlarini ma'lum bir burchakka burash va a^{μ} vektorga ko'chirishga teng[2].

Poincare gruppasining elementini (167)-formuladan kelib chiqib (a,Λ) deb belgilash mumkin. (167)-formulani ikki marta qo'llab Poincare gruppasidagi kompozitsiya qonunini keltirib chiqarish mumkin:

$$(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2).$$

Bu ko'paytirish qoidasi quyidagicha besh o'lchamli matritsa kiritish yo'li bilan ham aniqlanishi mumkin:

$$(a, \Lambda) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Olingan tasavvur Poincare gruppasining chekli o'lchamli unitarmas tasavvuridir.

Poincare gruppasi uchun kompozitsiya qonunining hususiy xoli: $(a,1)(0,\Lambda) = (a,\Lambda)$.

Kvant mexanikasida impuls quyidagicha tariflanadi:

$$P^{\mu} = i\hbar\partial^{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad P^0 = i\hbar\partial^0 = i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}, \quad \mathbf{P} = -i\hbar\nabla$$

[2] Bunday ta'rif *passiv* qarashga taalluqli, *aktiv* qarash bo'yicha koordinat o'qlari o'z joyida qoladi, fizik sistema (jism) ko'chiriladi.

Bu ta'rifdan foydalanib fazodagi siljish operatorini kiritish mumkin:

$$\exp\left(iP_\mu a^\mu/\hbar\right) f(x) = \exp\left(-a^0\partial_0 - \mathbf{a}\cdot\nabla\right) f(x) = f(x-a).$$

Impulsning koordinata $x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ bilan kommutatori

$$[x^\mu, P^\nu] = -i\hbar g^{\mu\nu} \tag{168}$$

ekanligini keltirib chiqarish qiyin emas. Oydinki

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \tag{169}$$

Puancare gruppasiga to'rtta siljish operatoridan tashqari oltita buralish operatorlari ham kiradi, klassik kanonik formalizm va ayniqsa kvant mexanikasidan ma'lumki buralish operatorlari sifatida impuls momenti komponentalarini ishlatish kerak. Relativistik impuls momenti operatorini kiritaylik:

$$M^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu, \qquad M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}.$$

Uning oltita mustaqil komponentalari bor, ular to'rt o'lchamli fazodagi oltita aylanishlarni ifodalaydi. (168)-dan foydalanib tekshirish qiyin emaski

$$\begin{aligned}[M^{\mu\nu}, x^\lambda] &= [x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu, x^\lambda] = \\ &= x^\mu[P^\nu, x^\lambda] - x^\nu[P^\mu, x^\lambda] = i\hbar(g^{\nu\lambda}x^\mu - g^{\mu\lambda}x^\nu)\end{aligned} \tag{170}$$

va

$$[M^{\mu\nu}, P^\lambda] = [x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu, P^\lambda] = i\hbar(g^{\nu\lambda}P^\mu - g^{\mu\lambda}P^\nu) \tag{171}$$

bo'ladi. Huddi shu yo'sinda quyidagi kommutatorni ham tekshirib chiqish mumkin:

$$\begin{aligned}&[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = [M^{\mu\nu}, x^\rho P^\sigma - x^\sigma P^\rho] = \\ &= [M^{\mu\nu}, x^\rho]P^\sigma + x^\rho[M^{\mu\nu}, P^\sigma] - [M^{\mu\nu}, x^\sigma]P^\rho - x^\sigma[M^{\mu\nu}, P^\rho] = \\ &= i\hbar\left[g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\rho\mu} - g^{\mu\sigma}M^{\rho\nu}\right].\end{aligned} \tag{172}$$

Bu natijani keltirib chiqarishda quyidagi formuladan foydalandik:

$$[A, BC] = ABC - BCA =$$
$$= ABC - BAC + BAC - BCA = [A, B]C + B[A, C].$$

(169), (171) va (172)-nchi formulalar ***Poincare gruppasining algebrasini*** tashkil etadi. Bu algebra yuqorida kiritilgan o'nta generatorlarga asoslangan: to'rtta P_μ va oltita $M_{\mu\nu}$.

Buralish operatorlari $M^{\mu\nu}$ larni ikki qismga bo'lib ularni yangicha belgilaylik:

$$M^{0i} = N^i, \quad M^{12} = M^3, \quad M^{23} = M^1, \quad M^{31} = M^2.$$

o'zining kiritilishi bo'yicha N^i operatorlar $(0, i)$ tekislikdagi buralish sifatida Lorentz almashtirishlariga mos keladi, M^{ij} operatorlar esa (i, j) tekisligidagi buralishga mos keladi. Masalan, $M^{12} = M^3$ operatori (x, y) tekisligida, boshqa so'z bilan aytganda z o'qi atrofida biron burchakka aylanishga mos keladi.

4.6-mashq. (172) - munosabatlardan quyidagilarni keltirib chiqaring:

$$[N^i, N^j] = -i\varepsilon^{ijk}M^k, \quad [M^i, M^j] = i\varepsilon^{ijk}M^k, \quad [N^i, M^j] = i\varepsilon^{ijk}N^k. \quad (173)$$

4.43-misol. Yuqoridagi munosabatlarning ohirgisini keltirib chiqarishni ko'rsataylik:

$$[N^i, M^j] = \frac{1}{2}\varepsilon^{jkl}[M^{0i}, M^{kl}] =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{jkl}\left(g^{ik}M^{0l} + g^{il}M^{k0}\right) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{jil}N^l + \frac{1}{2}\varepsilon^{jki}N^k = i\varepsilon^{ijk}N^k.$$

Agar yangi

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}(\mathbf{M} + i\mathbf{N}), \qquad \mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{M} - i\mathbf{N})$$

generatorlar kiritsak (173)-formulalar

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon^{ijk}J_k, \qquad [J_i, K_j] = 0, \qquad [K_i, K_j] = i\varepsilon^{ijk}K_k$$

ko'rinishga keltiriladi. (159)-formulalarga yana keldik, u yerdagi Lorentz gruppasiga tegishli hulosalarni yana qaytarishimiz mumkin.

§21.2. Poincare gruppasining tasavvurlari

Poincare gruppasining tasavvurlari quyidagicha klassifikatsiya qilinadi. M^2 ning o'zidan biror aniq fizik ma'noga ega bo'lgan kattalik kelib chiqmaydi. To'rt-vektor(psevdo) kiritamiz:

$$w_\rho = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}P^\lambda M^{\mu\nu}.$$

Bu yerda $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ - to'liq antisimmetrik psevdotenzor: $\varepsilon_{0123} = 1$, juft almashtirishlar natijasida yana birga teng, toq almashtirishlardan keyin -1 ga teng, indekslarning biror ikkitasi bir-biriga teng bo'lsa nolga teng. Oydinki $w_\mu P^\mu = 0$.

4.7-mashq. Quyidagilarni isbot qiling:

$$[w_\mu, P_\nu] = 0, \quad [M_{\lambda\mu}, w_\nu] = i(g_{\mu\nu}w_\lambda - g_{\lambda\nu}w_\mu), \quad [w_\mu, w_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}w^\lambda P^\sigma.$$

Poincare algebrasining ikkita Casimir operatori bor: $P^2 = P_0^2 - \mathbf{P}^2$ va w^2. Bu ikkala kattalikning P_μ bilan kommutativligini tekshirish qiyin emas, ularning $M_{\mu\nu}$ bilan kommutativligi ularning skalarligidan kelib chiqadi (chunki $M_{\mu\nu}$ - aylanish operatori).

w^2 ni hisoblashga o'taylik. Buning uchun birlik antisimmetrik tenzorning quyidagi hossasi kerak bo'ladi ([16], §6):

$$\varepsilon^{\nu\lambda\sigma\mu}\varepsilon_{\tau\rho\pi\mu} = \delta^\nu_\tau\delta^\lambda_\rho\delta^\sigma_\pi + \delta^\sigma_\tau\delta^\lambda_\pi\delta^\nu_\rho + \delta^\nu_\pi\delta^\lambda_\tau\delta^\sigma_\rho - \delta^\nu_\pi\delta^\lambda_\rho\delta^\sigma_\tau - \delta^\nu_\rho\delta^\lambda_\tau\delta^\sigma_\pi - \delta^\nu_\tau\delta^\lambda_\pi\delta^\sigma_\rho.$$

4.8-mashq. Yuqoridagi formuladan foydalanib

$$w^2 = \frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}P_\sigma P^\sigma - P^\mu P_\nu M_{\mu\sigma}M^{\nu\sigma}$$

ekanligini ko'rsating.

4.9-mashq. P^2 va w^2 larning hamma P^μ lar va $M^{\mu\nu}$ lar bilan kommutatorlari nolga teng ekanligini ko'rsating.

Yuqorida topilgan ikkita Casimir operatorlari Poincare gruppasining tasavvurlarini klassifikatsiya qilishda ishlatiladi. Casimit operatorlari gruppa algebrasining hamma tashkil qiluvchilari bilan kommutativ ekan ixtiyoriy keltirilmaydigan tasavvur matritsalari bilan ham kommutativ bo'ladi. Bu holda Schur lemmasi bo'yicha ular birlik matritsaga karrali bo'lishi kerak. Fizik o'lchamlik nuqtai nazaridan $P^2 = m^2$ deb olish kerak, bu yerda m - massa birligiga ega konstanta. w^2 ning hususiy qiymatini topish uchun uning skalarligidan foydalanib uni $\mathbf{P} = 0$ sistemasida hisoblaymiz

(Lorentz invariant kattalikni ixtiyoriy sistemada hisoblash mumkin, uning kattaligi hamma sistemalarda bir xildir). Bu holda

$$w^2 = \frac{1}{2}P^2 M_{ij} M^{ij} = m^2 \mathbf{M}^2$$

bo'ladi. Zarracha qo'zg'olmay turgan sistemada $\mathbf{M}$ - uning hususiy momenti, ya'ni, spinidir. Demak, $\mathbf{M}^2 = j(j+1)$, bu yerda j - zarrachaning spinining son qiymati: $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, ...$

Shu bilan muhim hulosaga keldik: Poincare gruppasining ikkita invarianti bor ekan, ular - massaning kvadrati va spinning kvadrati:

$$P^2 = m^2, \qquad w^2 = m^2 j(j+1).$$

Casimir operatorining kelib chiqishidan m^2 ning ishorasini aniqlab bo'lmaydi, ammo biz elementar zarrachalar uchun $m^2 \geq 0$ deb olamiz. Elementar zarrachalarga ta'rif berish mumkin bo'lib chiqayapti - elementar zarracha Poincare gruppasining ma'lum bir massali va spinli keltirilmaydigan tasavvurini tashkil qilishi kerak. Spini nol va butun bo'lgan $j = 0, 1, 2, ...$ zarrachalar bozonlar deyiladi, spini yarim butun bo'lgan $j = 1/2, 3/2, ...$ zarrachalar esa fermionlar deyiladi.

$P^2 \geq 0$ bo'lgani uchun P_0 ning ishorasi ham ahamiyat topadi, uni $\varepsilon = P_0/|P_0|$ deb belgilaylik. Natijada quyidagi manzaraga kelamiz:

1. $P^2 = m^2 > 0$, $\varepsilon = +1$ (ya'ni $P_0 > 0$). Bu - massasi m bo'lgan haqiqiy zarrachalarga mos keladi..

2. $P^2 = m^2 > 0$, $\varepsilon = -1$ (ya'ni $P_0 < 0$). Oldingi punktdagi tasavvurga kompleks qo'shma tasavvur.

3. $P^2 = 0$, $\varepsilon = +1$. Massasi nolga teng bo'lgan zarrachalarga mos keladi. Masalan, fotonga.

4. $P^2 = 0$, $\varepsilon = -1$. Avvalgi tasavvurga kompleks qo'shma tasavvur.

5. $P^2 = 0$, $P_\mu = 0$. Bu tasavvur vakuumga to'g'ri keladi deb hisoblanadi.

204-betdagi Lorentz gruppasining klassifikatsiyasini Poincare gruppasiga bevosita ko'chiriladi. Ya'ni, Poincare gruppasi ham to'rtta parchaga bo'linadi: $P_+^\uparrow$, $P_-^\uparrow$, $P_+^\downarrow$, $P_-^\downarrow$. Bu parchalarning talqini 204-betdagi talqinga mos - biror element $P_+^\uparrow$ ga tegishli deyiladi qachonki unga mos keluvchi $\Lambda \in \Lambda_+^\uparrow$ bo'lsa, va h.k.

§22. Lie gruppalarining umumiy hossalari

§22.1. ta'rif

Shu paytgacha bir necha konkret uzliksiz gruppalarni ko'rib chiqdik. $U(1)$ va unga izomorf bo'lgan $SO(2)$ va C_∞ lar bitta parametr φ ga bog'liq edi, u ham burchak bo'lib $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ sohada uzliksiz o'zgarar edi. Mana shu $(0, 2\pi)$ soha $U(1)$ gruppasining gruppaviy fazosini tashkil etadi. $(0, 2\pi)$ soha kompakt soha, shunga yarasha gruppa ham kompakt gruppa deyiladi. Uch o'lchamli fazoda aylanishlar gruppasi $SO(3)$ uchta parametrga bog'liq - Euler burchaklariorqali ifodalanganda ular $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \psi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$ to'plamni tashkil qiladi. Bu ham kompakt to'plam, shunga yarasha $SO(3)$ (va unga gomomorf akslantiriladigan $SU(2)$) kompakt gruppa deyiladi. $SL(2, C)$ gruppasining gruppaviy fazosi uzliksiz $-\infty < \tau < \infty$ to'plam bo'lib nokompakt to'plamni tashkil qiladi, shunga yarasha gruppa nokompakt deyiladi.

Umuman olganda har bir uzliksiz gruppaning gruppaviy fazosi qandaydir r o'lchamli fazoni tashkil qiladi. Bu fazoning elementlari gruppaviy aksiomalarga bo'ysunishi kerak, ya'ni, G to'plamning ixtiyoriy ikki a va b elementlariga uning uchinchi elementi c mos qo'yilgan bo'lishi kerak: $c = \varphi(a, b)$. Bu - a va b elementlarning gruppaviy ko'paytmasi, agar b element berilgan bo'lib a element o'zgarsa ko'paytma ham o'zgaradi. Uzliksiz deganda shuni ko'zda tutamizki, a element cheksiz kam o'zgarsa $c = \varphi(a, b)$ ham cheksiz kam o'garadi. G to'plam odatda manifold strukturasiga ega deb olinadi, ya'ni, uning har bir nuqtasining atrofi r-o'lchamli evklid fazosining hossalariga ega bo'ladi. Shu sababdan uni G_r deb belgilaylik. Bu degani, G_r ning har bir nuqtasining atrofi uzliksiz va o'zaro bir qiymatli ravishda r-o'lchamli evklid fazosining biron bir nuqtasining atrofiga akslantirilishi mumkin. Ya'ni, G_r da r o'lchamli koordinatalar sistemasi kiritilgan deb qaraladi. Bu koordinatalar sistemasi uch marta differensiallanuvchi deb qaraladi, Lie gruppalarining nazariyasi uchun shu yetarlidir. Ammo ko'rsatish mumkinki, haqiqatda bu sistema analitik bo'ladi. Gruppaning birlik elementiga koordinata boshi to'g'ri keladi. Quyida ko'p uchraydigan $a = (a^1, a^2, ..., a^r)$ belgilashda gruppaning elementi $a \in G$ ning shu r o'lchamli differensiallanuvchi koordinat sistemasidagi ifodasi ko'zda tutiladi. Gruppaviy operatsiya natijasida xosil bo'lgan almashtirish (φ funksiya) lar ham differensiallanuvchi va hatto analitik ekanligini ko'rsatish mumkin ([12], 7-bob).

Kiritilishi bo'yicha G_r ning har bir elementi a r komponentali kattalik: $a = (a^1, a^2, ..., a^r)$. Shu sababdan gruppamiz r ***parametrik gruppa*** ham deyiladi. Masalan, yuqoridagi uch o'lchamli fazodagi aylanish gruppasining elementlari uch komponentali kattaliklar edi: $g = (g_x, g_y, g_z)$, shunga yarasha uch o'lchamli fazodagi aylanishlar gruppasi uch parametrli gruppa bo'ladi.

§22.2. Struktura konstantalari

Yuqorida ta'riflangan gruppaviy ko'paytmani yana bir marta yozaylik:

$$c^i = \varphi^i(a, b) = \varphi^i(a^1, a^2, ..., a^r, b^1, b^2, ..., b^r), \quad i = 1, \ldots, r. \tag{174}$$

ta'rif bo'yicha birlik elementga koordinat boshi mos keladi, demak:

$$a = \varphi(a, e) \Leftrightarrow a^i = \varphi^i(a, 0), \qquad b = \varphi(e, b) \Leftrightarrow b^i = \varphi(0, b).$$

a ni kichik deb qarab bu formulalarning birinchisini qatorga yoyamiz:

$$a^i = \varphi^i(0,0) + a^k \frac{\partial \varphi^i}{\partial a^k}\bigg|_{a=0} + \frac{1}{2} a^k a^l \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial a^k \partial a^l}\bigg|_{a=0} + \cdots$$

Hulosa:

$$\varphi^i(0,0)=0,\quad \left.\frac{\partial\varphi^i(a,0)}{\partial a^k}\right|_{a=0}=\delta^i_k,\quad \left.\frac{\partial^n\varphi^i(a,0)}{\partial a^k\partial a^l\cdots\partial a^p}\right|_{a=0}=0,\ n\geq 2. \tag{175}$$

Huddi shunday ish tutib quyidagini ham olish mumkin:

$$\left.\frac{\partial\varphi^i(0,b)}{\partial b^k}\right|_{b=0}=\delta^i_k,\qquad \left.\frac{\partial^n\varphi^i(0,b)}{\partial b^k\partial b^l\cdots\partial b^p}\right|_{b=0}=0,\quad n\geq 2. \tag{176}$$

Teskari elementning mavjudligidan quyidagini olamiz:

$$\varphi^i(a^{-1},a)=\varphi^i(a,a^{-1})=0,\qquad i=1,2,...,r. \tag{177}$$

Gruppaning assotsiativlik hossasi quyidagini beradi:

$$\varphi(a,\varphi(b,c))=\varphi(\varphi(a,b),c). \tag{178}$$

Agar mana shu funksional munosabatlarni hal qilsak gruppaning hamma hossalarini o'z ichiga olgan φ funksiyani topgan bo'lar edik. Ammo bu qiyin masala. ***Sophus Lie***ning ixtorosi shundan iborat bo'lganki u ixtiyoriy chekli a, b va c lar uchun o'rinli bo'lgan funksional munosabatlarning o'rniga gruppaviy to'plamning koordinat boshi atrofidagi differensial munosabatlarni o'rganish yetarli ekanini isbot qilgan. Biz ham shu yo'ldan ketamiz.

(175)- va (176)-larga kirgan quyidagi formulalarni alohida yozib olaylik:

$$\left.\frac{\partial\varphi^i(a,0)}{\partial a^k}\right|_{a=0}=\left.\frac{\partial\varphi^i(0,b)}{\partial b^k}\right|_{b=0}=\delta^i_k.$$

Bu munosabatlardan kelib chiqadiki, (174)- munosabat birlik element e atrofida yechimga ega.

(174)-formulada a va b elementlarni kichik deb (boshqacha so'z bilan aytganda, ularni birlik element e atrofida yotibdi deb qarab) va (175)- hamda (176)-larni hisobga olib quyidagi yoyilmani olish mumkin:

$$c^i=\varphi^i(a,b)=a^i+b^i+g^i_{jk}a^jb^k+h^i_{jkl}a^ja^kb^l+p^i_{jkl}a^jb^kb^l+\cdots \tag{179}$$

Yuqorida aytilgan edi koordinatlarni uch marta differensiallanuvchi deb qarash yetarli, ohirgi formula shunga mos keladi. Keyingi hamma mulohazalarimizda ham (179)-yoyilmaning yuqori hadlari kerak bo'lmaydi.

(179)-yoyilmani assotsiativlik sharti (178)-ga qo'llaymiz. (178)-ning o'ng tomoni:

$$\varphi^i(\varphi(a,b),c) = \varphi^i(a,b) + c^i + g^i_{kl}\varphi^k(a,b)c^l + h^i_{jkl}\varphi^j(a,b)\varphi^k(a,b)c^l +$$

$$+p^i{}_{jkl}\varphi^j(a,b)c^kc^l = a^i+b^i+c^i+g^i{}_{kl}a^kb^l+g^i{}_{kl}a^kc^l+g^i{}_{kl}b^kc^l+h^i{}_{jkl}a^ja^kb^l+$$

$$+p^i{}_{jkl}a^jb^kb^l+g^j{}_{kl}g^k{}_{mn}a^mb^nc^l+h^i{}_{klm}(a^k+b^k)(a^l+b^l)c^m+p^i{}_{klm}(a^k+b^k)c^lc^m$$

(178)-ning chap tomoni uchun ham uchinchi tartibli hadlar aniqligida yoyilma yozilsa va yuqoridagi ifoda bilan solishtirilsa quyidagilar topiladi:

a) chap va o'ng tomondagi birinchi tartibli hadlar aynan bir xil:

$$a^i + b^i + c^i = a^i + b^i + c^i;$$

b) chap va o'ng tomondagi ikkinchi tartibli hadlar aynan bir xil:

$$g^i_{kl}a^kb^l + g^i_{kl}a^kc^l + g^i_{kl}b^kc^l = g^i_{kl}a^kb^l + g^i_{kl}a^kc^l + g^i_{kl}b^kc^l;$$

c) uchinchi tartibli hadlar ikki qismga bo'linadi: a, b, c larning ixtiyoriy biri ikki marta uchraydigan hadlar ham aynan bir xil, abc hadning oldidagi koeffisientlar esa quyidagi munosabatga olib keladi:

$$g^i_{kl}g^k_{mn} - g^i_{mk}g^k_{nl} = p^i_{mnl} + p^i_{mln} - h^i_{mnl} - h^i_{nml}. \tag{180}$$

Quyidagicha kattalik kiritaylik:

$$c^i_{jk} = g^i_{jk} - g^i_{kj} = -c^i_{kj}. \tag{181}$$

Kommutativ gruppa uchun albatta $g^i_{jk} = g^i_{kj}$, shunga yarasha bunday gruppalar uchun $c^i_{jk} = 0$.

4.10-mashq. (180)-formulani (l,m,n) indekslarning o'rnini har xil yo'l bilan almashtirib yana besh marta yozib chiqing. Indekslar juft tartibda o'zgartirilgan uchta formulani musbat ishora bilan, toq tartibda o'zgartirilgan uchta formulani manfiy ishora bilan olinsa natijaviy formulada h^i_{jkl} va p^i_{jkl} lar ishtirok etmaydi. (181)-ta'rifdan foydalanib faqat g^i_{kl} larning ko'paytmalari ishtirok etgan qolgan hadlar

$$c^i_{jm}c^m_{kl} + c^i_{lm}c^m_{jk} + c^i_{km}c^m_{lj} = 0 \tag{182}$$

ko'rinishga keltirilishini ko'rsating.

4.11-mashq. Teskari elementni a^{-1} uchun $\varphi^i(a, a^{-1}) = 0$ bo'lishidan

$$(a^{-1})^i = -a^i + g^i_{jk}a^j a^k + \cdots$$

ekanligini ko'rsating.

4.12-mashq. $q = ab(ba)^{-1}$ kattalik Lie gruppasida *kommutator* deyiladi. Yuqoridagi mashqdan foydalanib

$$\varphi^i((ba)^{-1}) = -b^i - a^i + g^i_{jk}\left(b^j b^k + a^j b^k + a^j a^k\right) + \cdots$$

ekanligini ko'rsating. Bundan foydalanib

$$q^i = c^i_{jk}a^j b^k + \text{yuqori tartibli hadlar.} \tag{183}$$

ekanligini isbot qiling.

4.13-mashq. $q = 1$ bo'lganda $ab = ba$ ekanligini ko'rsating. Ya'ni, biror-bir Lie gruppasida hamma elementlarning kommutatorlari birga teng bo'lsa bu gruppa kommutativ (abel) gruppa bo'ladi.

(181)- ta'rif orqali kiritilgan c^i_{jk} kattaliklar ***Lie gruppasining struktura doimiylari*** deyiladi. Ular o'zining quyi indekslari bo'yicha antisimmetrik tenzorlardir. O'zinig ta'rifi bo'yicha ular sonlardir (gruppa elementlarining funksiyasi emas ma'nosida), ammo gruppaviy fazodagi koordinat almashtirishlariga nisbatan ular bir marta kontravariant, ikki marta kovariant uchinchi rang tenzorini tashkil qiladi. (182)-munosabat ***Jacobi ayniyati*** deyiladi.

S.Lie isbot qilgani bo'yicha struktura konstantalari berilgan bo'lsa uzliksiz gruppani tiklab chiqishimiz mumkin, ya'ni, berilgan c^i_{jk} lar bo'yicha $\varphi(a, b)$ funksiya to'liq ravishda topiladi.

§22.3. Lie gruppasining algebrasi. Generatorlar

Algebra

Quyidagicha tuzilgan r-o'lchamli vektor fazo R^r berilgan bo'lsin:

1) U haqiqiy yoki kompleks sonlar maydoni K ustida aniqlangan bo'lsin;

2) Undagi vektorlar uchun quyidagicha ***kommutator*** deyiladigan kompozitsiya qonuni aniqlangan bo'lsin: ixtyoriy $a \in R^r$ va $b \in R^r$ vektorlarning kommutatori yana shu fazodagi vektorni beradi - $c = [a, b]$, $c \in R^r$.

3) Kommutatorlar quyidagi qoidalarga bo'ysunsin:

$$[\alpha a + \alpha' a', b] = \alpha[a, b] + \alpha'[a', b], \qquad \alpha, \alpha' \in K; \tag{184}$$

$$[a, b] = -[b, a]; \tag{185}$$

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0. \tag{186}$$

Shunday tuzilgan vektor fazo R^r K maydon ustida aniqlangan ***Lie algebrasi*** deyiladi. Agar K to'plam haqiqiy sonlardan iborat bo'lsa mos keluvchi algebra ***haqiqiy Lie algebrasi*** deyiladi, agar K to'plam kompleks sonlar to'plami bo'lsa mos keluvchi fazo ***kompleks Lie algebrasi*** deyiladi. Lie gruppasining algebrasi hamma vaqt haqiqiydir ([12], 10-bobga qarang) , shuning uchun bundan keyin Lie gruppasining algebrasi haqida gapirilganda uni oddiygina qilib ***Lie algebrasi*** deb ketaveramiz.

Kommutator bo'ysunishi kerak bo'lgan birinchi ikki qoida chiziqli bo'lgani uchun kommutator operatsiyasini koordinat formada quyidagicha yozib olish mumkin:

$$c^i = [a, b]^i = c^{*i}_{kl} a^k b^l.$$

Paydo bo'lgan c^{*i}_{kl} sonlar Lie algebrasining struktura doimiylari deyiladi. Kommutatorlarning (185)- va (186)- qoidalaridan quyidagilar kelib chiqadi:

$$c^{*i}_{kl} = -c^{*i}_{lk}, \qquad c^{*i}_{kl} c^{*l}_{jm} + c^{*i}_{jl} c^{*l}_{mk} + c^{*i}_{ml} c^{*l}_{kj} = 0.$$

Bular Lie gruppasining struktura doimiylari bo'ysunishi kerak bo'lgan (181)- va (182)- formulalarning o'zidir. Bu tasodif emas, biz hozir ko'rsatamizki, Lie gruppasining va Lie algebrasining struktura doimiylari bir-biriga teng.

Lie gruppasi G berilgan bo'lsin. Unda differensiallanuvchi koordinatalar kiritilgan bo'lgani uchun ixtiyoriy differensiallanuvchi egri chiziq $\{a^i(t), i = 1, 2, 3, ..., r\}$ uchun urinma vektor maydon

$$X^i = \left.\frac{da^i}{dt}\right|_{t=0}, \qquad i = 1, 2, 3, ..., r \tag{187}$$

kiritish mumkin. $a(t) \in G, t \geq 0-$ biron-bir parametr. $t = 0$ nuqta G dagi koordinat boshiga mos kelsin, ya'ni, $a(0) = e$. Shunga mos kelib $\{X^i, i = 1, 2, 3, ..., r\}$ vektorlar G ning birlik elementi atrofida kiritilgan urinma vektorlar fazosini hosil qiladi. Bundan keyin X^i vektorlar to'plami shunday kiritilganki, ular urinma fazodagi ba'zisni tashkil qiladi deb qaraymiz. Bu fazoda ixtiyoriy X va Y elementlarning kommutatorini yuqoridagicha kiritamiz: $C = [X, Y]$, ya'ni, urinmalar fazosini Lie algebrasiga aylantiramiz.

Ikkita egri chiziq $a(t)$ va $b(t)$ berilgan bo'lsin, ularga koordinat boshidagi urinmalarni X va Y deb belgilaymiz. Koordinatalar boshi atrofida

$$\begin{aligned} a^i(t) &= a^i(0) + X^i t + \cdots = X^i t + \cdots , \\ b^i(t) &= b^i(0) + Y^i t + \cdots = Y^i t + \cdots . \end{aligned} \tag{188}$$

$a(t)$ va $b(t)$ larning kommutatorini kiritaylik (12-mashqqa qarang):

$$q(t) = a(t)b(t)a^{-1}(t)b^{-1}(t).$$

12-mashqqa binoan koordinatalar boshi atrofida

$$q^i(t) = c^i_{kl} a^k(t) b^l(t) + \text{yuqori hadlar} = c^i_{kl} X^k Y^l t^2 + \text{yuqori hadlar}.$$

Ikkinchi tomondan (183)-formulani hisobga olsak

$$C^i = [X, Y]^i = c^{*i}_{kl} X^k Y^l = \lim_{t \to 0} \frac{q^i(t)}{t^2} = c^i_{kl} X^k Y^l. \tag{189}$$

Demak, Lie gruppasining va Lie algebrasining struktura doimiylari bir-biriga tengdir:

$$c^{*i}_{kl} = c^i_{kl}.$$

Har bir Lie algebrasiga qandaydir (lokal, koordinat boshi atrofida aniqlangan) Lie gruppasi mos keladi. Bitta Lie algebrasiga bir necha global gruppalar mos kelishi mumkin, ular izomorf bo'lishi shart emas. Bunga §12.-paragrafda ko'rilgan $SO(3)$ va unga gomomorf bo'lgan $SU(2)$ gruppalarining algebralari misol bo'ladi. $SO(3, 1)$ Lorentz gruppasi va unga gomomorf akslantiriladigan $SL(2, C)$ gruppasining algebralari ham bir xil edi - §20.-paragrafni qarang.

Odatda Lie gruppasiga mos keluvchi algebra haqida gap ketayotganida uni belgilash uchun o'sha gruppa uchun ishlatilgan xarflarning kichiklari ishlatiladi. Masalan, $SU(n)$ gruppasining algebrasini $su(n)$ deb, $SL(n, C)$ gruppasining algebrasini $sl(n, C)$ deb belgilanadi va h.k.

Lie algebrasini tashkil qilgan r- o'lchamli urinma vektorlar fazosi koordinat boshida kiritilgan edi, bu bilan shu urinma vektorlar fazosi gruppaning birlik elementiga bog'lanib qolgan bo'lmaydi. Lie gruppasida bir koordinat sistemasidan ikkinchisiga o'tish mumkin. Almashtirish formulalari analitik funksiyalar bo'lishini isbot qilish mumkin. Mana shu almashtirishlar yordamida koordinat boshidagi vektorlarni ixtiyoriy boshqa nuqtaga ko'chirish mumkin.

Lie algebrasiga tegishli bir-necha muhim ta'riflar bor, ularni keltirib ketamiz.

K maydon ustida aniqlangan Lie algebrasi R berilgan bo'lsin. R ning qismfazosi bo'lgan S to'plam R ning ***qismalgebrasi*** deyiladi qachonki a) S fazo R ning qismfazosidir, ya'ni, ixtiyoriy a, $b \in S$ vektorlar uchun $\alpha a + \beta b$ ham S ning elementi bo'lsin, bu yerda α, $\beta \in K$; b) ixtiyoriy a, $b \in S$ vektorlarning kommutatori ham S ga kirsin: $[a, b] \in S$. Agar ixtiyoriy $a \in R$ va $b \in S$ lar uchun $[a, b] \in S$ bo'lsa S R ning ***ideali*** deyiladi. R ning o'ziga yoki bo'sh to'plam $\{0\}$ ga mos kelgan ideallardan boshqa idealga ega bo'lmagan Lie algebrasi R sodda deyiladi. Agar ixtiyoriy $a \in R$ va $b \in S$ lar uchun $[a, b] = 0$ bo'lsa S markaziy ideal deyiladi. Bu ta'rifga bo'ysunadigan hamma b larning to'plami R ning ***markazi*** deyiladi.

G gruppa berilgan bo'lsin, R - uning algebrasi bo'lsin, H - uning qismgruppasi bo'lsin. H dan o'tgan egri chiziqlarga urinmalarning to'plamini S deb belgilaylik. Bu holda S to'plam R ning qismalgebrasi bo'ladi. Agar H G ning invariant qismgruppasi (normal bo'luvchisi) bo'lsa S R ning ideali bo'ladi. Agar H G ning markaziy normal bo'luvchisi bo'lsa S R ning markaziy ideali bo'ladi.

R algebra o'zining S va T qismalgebralarining to'g'ri yig'indisiga parchalanadi $R = S \oplus T$ deyiladi qachonki S va T lar R ning ideallari bo'lsa va R vektor fazo sifatida S va T ning to'g'ri yig'indisi bo'lsa. Bu holda R algebraning har bir elementi $x \in R$

yagona ravishda $x = y + z$, $y \in S$, $z \in T$ ko'rinishda yoziladi va $[y, z] = 0$ bo'ladi. Agar G gruppa o'zining normal qismgruppalari H va K larning to'g'ri ko'paytmasiga parchalansa: $G = H \otimes K$, G ning algebrasi R, H ning algebrasi S va K ning algebrasi T bo'lsa R algebra S va T larning to'g'ri yig'indisiga parchalanadi: $R = S \oplus T$. Bu tasdiqlarning isbotini [12] ning 10-bobida topish mumkin.

4.44-misol. Uch o'lchamli evklid fazosi R^3 ni olaylik. Agar uning elementlari bo'lgan har qanday ikki **a** va **b** vektorlarning vektor ko'paytmasi [**ab**] shu vektorlarning kommutatori sifatida olsak: $[\mathbf{ab}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ R^3 fazo algebraga aylanadi, chunki (184)-(186)-qoidalar darhol bajariladi. R^3 ning qismalgebralari faqat bir o'lchamli bo'lishi mumkin, masalan, faqat $x-$komponentaga ega bo'lgan vektorlar, yoki, faqat $y-$ komponentaga ega bo'lgan vektorlar, yoki faqat $z-$ komponentaga ega bo'lgan vektorlar. R^3 da ikki o'lchamli qismalgebra bo'lishi mumkin emas, tekislikda yotgan ixtiyoriy ikkita vektorning vektor ko'paytmasi shu tekislikka perpendikular bo'ladi.

R^3 sodda algebradir, bunga quyidagicha ishonch hosil qilish mumkin - faqat $x-$komponentali vektorlar fazosini X deb belgilaylik, oydinki, X ga tegishli vektor bilan X ga tegishli emas ixtiyoriy vektorning vektor ko'paytmasi yana X ga tegishli bo'lmaydi. Demak, R^3 ning ideallari yo'q.

Generatorlar

a elementga ixtiyoriy kichik δa element bilan ta'sir qilaylik, natijada olingan element $\tilde{a}$ boshlang'ich a dan kam farq qilishi kerak:

$$\tilde{a} = \varphi(a, \delta a) \quad \Rightarrow \quad a^i + da^i = a^i + g^i_{jk} a^j \delta a^k + \cdots$$

Buni quyidagicha tushunish kerak: $\tilde{a} = a \circ \delta a$, ya'ni, avval kichik δa ta'sir qiladi, keyin a element ta'sir qiladi. Ikkinchi tomondan

$$\tilde{a}^i = \varphi^i(a, \delta a) = \varphi^i(a, 0) + \left.\frac{\partial \varphi^i(a, b)}{\partial b^k}\right|_{b=0} \delta a^k + \cdots = a^i + \mu^i_k(a) \delta a^k + \cdots$$

Bu yerda kiritilgan $\mu(a)$ tenzorning ta'rifi va asosiy hadlarini keltiraylik:

$$\mu^i_k(a) = \left.\frac{\partial \varphi^i(a, b)}{\partial b^k}\right|_{b=0} = \delta^i_k + g^i_{lk} a^l + \cdots. \tag{190}$$

Demak,

$$da^i = \mu^i_k(a)\delta a^k.$$

Agar

$$\lambda^j_i(a)\mu^i_k(a) = \delta^j_k \tag{191}$$

formula otqali $\mu^i_k(a)$ ga teskari matritsa kiritilsa

$$\delta a^k = \lambda^k_j(a)da^j$$

munosabat kelib chiqadi.

Gruppada aniqlangan ixtiyoriy $F(a)$ funksiya uchun quyidagini yozib olish mumkin:

$$F(a+da) - F(a) = \frac{\partial F}{\partial a^i}da^i = \mu^i_k(a)\delta a^k\frac{\partial F}{\partial a^i} = \delta a^k X_k F(a),$$

bu yerda

$$X_k = \mu^i_k(a)\frac{\partial}{\partial a^i}, \qquad k = 1, \dots, r. \tag{192}$$

Kiritilgan kattaliklar $\{X_k, k = 1, \dots, r\}$ ***Lie gruppasining generatorlari*** deyiladi. Ularning yana bir nomi - ***gruppaning infinitezimal operatorlari***. Lie gruppasining generatorlari gruppaning algebrasini tashkil qilishini isbot qilaylik.

Generatorlarning kommutatorini topish qiyin emas:

$$[X_i, X_j] = \left[\mu^k_i(a)\frac{\partial}{\partial a^k}, \mu^l_j(a)\frac{\partial}{\partial a^l}\right] = \left(\mu^l_i\frac{\partial\mu^k_j}{\partial a^l} - \mu^l_j\frac{\partial\mu^k_i}{\partial a^l}\right)\frac{\partial}{\partial a^k}. \tag{193}$$

$c = \varphi(a, b)$ bo'lsin. Bu holda

$$c^i + dc^i = \varphi^i(a, b+db) = \varphi(a, \varphi(b, \delta b)) = \varphi(\varphi(a, b), \delta b) = \varphi(c, \delta b)$$

ketma-ketlikdan $\delta c^i = \delta b^i = \lambda^i_k(b)db^k$ ekanligi kelib chiqadi. Demak

$$dc^i = \mu^i_j(c)\delta c^j = \mu^i_j(c)\lambda^j_k(b)db^k,$$

yoki,

$$\frac{\partial c^i}{\partial b^k} = \mu^i_j(c)\lambda^j_k(b).$$

Topilgan differensial tenglamani qulayroq ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{\partial \varphi^i(a,b)}{\partial b^k} = \mu^i_j(\varphi(a,b))\lambda^j_k(b). \qquad (194)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^i(a,b)}{\partial b^l \partial b^k} = \frac{\partial^2 \varphi^i(a,b)}{\partial b^k \partial b^l}$$

bo'lishi kerak bo'lgani uchun

$$\frac{\partial}{\partial b^l}\left(\mu^i_j(\varphi(a,b))\lambda^j_k(b)\right) = \frac{\partial}{\partial b^k}\left(\mu^i_j(\varphi(a,b))\lambda^j_l(b)\right)$$

munosabatga kelinadi. Chap va o'ng tomonlardagi hosilalarni hisoblaymiz, $\lambda(b)$ larning hosilalarini (191)-formuladan foydalanib $\mu(b)$ larning hosilalariga aylantiramiz, hosil bo'lgan formulani bir marta chap tomondan $\lambda(c)$ ga ko'paytiramiz (tegishli indekslar bo'yicha yig'indi hosil qilib (191)-dan foydalanib $\mu(c)$ larni yo'qotish uchun), o'ng tomondan esa formulani tegishli indeksli $\mu(b)\mu(b)$ ga ko'paytiramiz (yana kerakli indekslar bo'yicha yig'indi hosil qilib (191)-dan foydalanib $\lambda(b)$ larni yo'qotish uchun). Ohirida $c = \varphi(a,b)$ larni o'z ichiga olgan hadlarni chapga, b larni o'z ichiga olgan hadlarni o'ngga yig'amiz:

$$\lambda^m_k(c)\left[\mu^l_i(c)\frac{\partial \mu^k_j(c)}{\partial c^l} - \mu^l_j(c)\frac{\partial \mu^k_i(c)}{\partial c^l}\right] =$$
$$= \lambda^m_k(b)\left[\mu^l_i(b)\frac{\partial \mu^k_j(b)}{\partial b^l} - \mu^l_j(b)\frac{\partial \mu^k_i(b)}{\partial b^l}\right].$$

Chap tomon faqat c ning funksiyasi, o'ng tomon faqat b ning funksiyasi: o'zgaruvchilar ajraldi. Demak, yuqoridagi tenglikning ikkala tomoni ham o'zgarmas son ekan:

$$\lambda^m_k(b)\left[\mu^l_i(b)\frac{\partial \mu^k_j(b)}{\partial b^l} - \mu^l_j(b)\frac{\partial \mu^k_i(b)}{\partial b^l}\right] = c^m_{ij}. \qquad (195)$$

O'ng tomon konstanta bo'lgani uchun chap tomonni b ning ixtiyoriy qiymatida hisoblash mumkin. $b^i = 0$ deb olib (191)- va (190)-dan

$$\lambda^i_j(0) = \mu^i_j(0) = \delta^i_j, \qquad \left.\frac{\partial \mu^k_j(b)}{\partial b^l}\right|_{b=0} = g^k_{lj}$$

ekanligi kelib chiqishidan foydalanib (195)-dagi $\bar{c}_{ij}^m$ lar haqiqatda gruppaning struktura doimiylari ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin:

$$\bar{c}_{ij}^m = g_{ij}^m - g_{ji}^m = c_{ij}^m.$$

Yana bir marta (191)-formuladan foydalanib (195)-ni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\mu_i^l \frac{\partial \mu_j^k}{\partial a^l} - \mu_j^l \frac{\partial \mu_i^k}{\partial a^l} = c_{ij}^l \mu_l^k. \tag{196}$$

Buni (193)-formulaga qo'ysak quyidagi fundamental munosabatga kelamiz:

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^l X_l. \tag{197}$$

4.14-mashq. (182)-ni hisobga olib quyidagi ***Jacobi ayniyati***ning bajarilishini tekshiring:

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0. \tag{198}$$

Lie gruppasining struktura doimiylari ma'lum bo'lsa ular asosida butun gruppani tiklash mumkin, bu tasdiqning isbotini [12] kitobning 10-bobida topish mumkin. Gruppani tiklash degani berilgan c_{kj}^i lar orqali $\varphi(a, b)$ funksiyasini topish degani. Bu tasdiqning to'liq isboti qiyin masala, ammo uning asosiy g'oyasi oson: c_{kj}^i lar berilgan bo'lsa (196)-differensial tenglamaning yechimini topish mumkin ($\mu_j^i(0) = \delta_j^i$ boshlang'ich shart bilan), $\mu_j^i(a)$ topilgandan keyin (194)-tenglamani integrallash qoladi.

Topilgan ikkita formula (197) va (198) shuni bildiradiki, (192)-***formula orqali kiritilgan*** X_i ***generatorlar Lie gruppasining algebrasini tashkil qiladi.*** Lie gruppasining algebrasi (187)-formula orqali urunmalardan tashkil topgan vektorlar fazosi sifatida kiritilgan edi. Shu ikkala tushunchalarni bog'laylik.

Bir parametrli qismgruppa

Lie gruppasi G ning birlik elementi e atrofini U harfi bilan belgilaylik, $U \subset G$. Haqiqiy sonlarning additiv gruppasi bo'lgan R gruppani olaylik. R gruppaning G gruppaga lokal gomomorfizmi

$a(t)$ mavjud bo'lsin: shunday kichik $\alpha > 0$ soni mavjud bo'lsinki, $|s| < \alpha$, $|t| < \alpha$, $|s+t| < \alpha$ bo'lganda $a(t) \in U$, $a(s) \in U$, $a(s+t) \in U$ lar mavjud bo'lsin va

$$a(t+s) = a(t)a(s) \in U \tag{199}$$

bajarilsin. $R \xrightarrow{g} G$ gomomorfizm G ning bir parametrli qismgruppasi deyiladi. $|t| < \alpha$ soha bir parametrli gruppaning mavjudlik sohasi deyiladi.

Boshqacha so'z bilan aytganda G to'plamda egri chiziq $a(t)$ berilgan bo'lsin, $t > 0$ - bir haqiqiy parametr, $a(0) = e$ - G ning birlik elementi. Bu egri chiziqdagi ikkita parametr t va s larga $a(t) \in G$ va $a(s) \in G$ elementlar mos kelsin, agar $t+s$ parametrga $a(t+s) \in G$ element mos kelsa $a(t)a(s) = a(t+s)$ bo'ladi. Ya'ni, mana shu egri chiziqdagi ikkita nuqtalarning gruppaviy kompozitsiyasiga shu chiziqning ustidagi uchinchi bir nuqta mos keladi. Ixtiyoriy Lie gruppasida bir parametrli qismgruppani kiritish mumkin [12]. Bu - notrivial natija, (199)-ga gruppaviy fazodagi ko'paytirish qoidasini qo'llasak

$$a^i(t+s) = \varphi^i(a(t), a(s)) = a^i(t) + a^i(s) + g^i_{jk}a^j(t)a^k(s) + \cdots$$

(199)-formulaning haqiqatda sodda emasligi tushunarli bo'ladi.

Boshida berilgan ta'rif lokal xarakterga ega edi, ammo ixtiyoriy lokal Lie gruppasi haqiqatda global gruppa bo'ladi, shunga yarasha bir parametrli qismgruppa ham butun gruppaviy fazoda mavjuddir.

Koordinat boshida (gruppaning birlik elementi atrofida) $a(t)$ egri chiziqqa urinma kiritamiz:

$$\frac{da^i(0)}{dt} = X^i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Bu formula (187)-formulaning o'zi, bu yerda bizning maqsad (199)-funksional munosabatdan differensial tenglamaga o'tish, uni yechish va $a(t)$ bilan X larni bog'lash. Buning uchun (199)-dan t bo'yicha hosila olamiz va $t = 0$ deymiz (ohirida $s \to t$ almashtirish bajaramiz):

$$\frac{da(t)}{dt} = a'(0)a(t) = Xa(t).$$

Bu tenglamaning yechimi:

$$a(t) = e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + \cdots . \tag{200}$$

Yechimni tekshirish qiyin emas - buning uchun undan t bo'yicha hosila olish yetarli. Formulada birlik elementni 1 deb ketdik, koordinatalarga o'tganda unga koordinat boshi mos kelishini unutmang.

Koordinat boshida boshlangan ikkita $a(t)$ va $b(t)$ egri chiziqlarni olaylik, ularga urunmalarni X va Y deb belgilaylik:

$$\frac{da(0)}{dt} = X, \qquad \frac{db(0)}{dt} = Y.$$

Bu holda

$$a(t) = e^{tX} \quad \text{va} \quad b(t) = e^{tY}$$

bo'ladi. a va b larning kommutatorini topamiz:

$$q(t) = a(t)b(t)a^{-1}(t)b^{-1}(t) = \left(1 + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + \cdots\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + \cdots\right)\left(1 - tX + \frac{t^2}{2}X^2 + \cdots\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 - tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + \cdots\right) = 1 + t^2(XY - YX) + \cdots .$$

(189)-bilan solishtirish shuni ko'rsatadiki Lie algebrasidagi kompozitsiya qonuni sifatida kommutatorni qabul qilish kerak:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

(200)-formula Lie gruppalaridagi gruppa elementi a va gruppa algebrasi orasidagi bog'lanishni beradi. Unimodular gruppalar uchun $\det a = 1$ dan $\mathrm{Tr}\,(X) = 0$ ekanligi kelib chiqadi ((I.134)-formulani ishlating). Unitar gruppalar uchun $a^\dagger = a^{-1}$ dan X ning antiermitligi $X^\dagger = -X$ kelib chiqadi. Bu holda odatda $X \to iX$ almashtirish orqali ermit matritsalar $X^\dagger = X$ ga o'tiladi. Ortogonal gruppalar uchun $a^T = a^{-1}$, demak, ularning generatorlari antisimmetrik bo'lishi kerak: $X^T = -X$.

(200)-formulani olganimizda konkret bir egri chiziq va unga urunma haqida gap ketgan edi. Bu formulani umuman gruppa elementi $g \in G$ uchun umumlashtirish mumkin. Buning uchun urunmalar fazosidagi ixtiyoriy vektor X ni urunmalari X^i, $i = 1, 2, 3, ..., r$ orqali ifodalash kerak va eksponentadagi tX ni quyidagi skalar ko'paytmaga almshtirish kerak (g ni unitar k'orinishga o'tkazish qulay, shuning uchun mavhum birlik i ni ham kiritamiz):

$$tX \Rightarrow i\sum_{i=1}^{r}\alpha_i X^i = i\alpha X.$$

Bu holda ixtiyoriy element $g \in G$ uchun

$$g(\alpha) = e^{i\alpha X} \tag{201}$$

tasavvurga kelamiz. Algebra birinchi navbatda chiziqli fazo, unda bazisni har xil yo'l bilan tanlab olish mumkin. Shuning uchun gruppaning algebrasini tashkil qiluvchi $\{X^i\}$ generatorlar to'plami - algebraning bazisi - bir qiymatli aniqlangan emas. Ammo, faraz qilaylik, ma'lum bir bazis $\{X^i, i = 1, 2, 3, ..., r\}$ tanlandi. Bu holda hamma element g lar uchun bu to'plam bir xildir, element g ni aniqlash uchun esa r komponentali parametr $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_r\}$ ishlatiladi, ya'ni, α berilgan bo'lsa g berilgan bo'ladi - (201)-formulada shuning uchun α parametr g ning argumentiga kiritilgan. Gruppaviy elementning bunday tasavvuridan shu paytgacha ko'p foydalanganmiz - aylanish gruppasi, $SU(n)$ gruppasi, Lorentz gruppalarini o'rganganda.

4.45-misol.

$$X_1 = -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = -i\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

operatorlarni kiritaylik. Unda

$$[X_1, X_2] = 0, \qquad [X_3, X_1] = iX_2, \qquad [X_2, X_3] = iX_1$$

munosabatlar bajariladi. Demak, $\{X_1, X_2, X_3\}$ to'plam Lie algebrasini tashkil qilar ekan. Bu algebra 8-misolda keltirilgan $ISO(2)$ gruppasining algebrasining bazisidir. Buni ko'rish qiyin emas. Ixtiyoriy a o'zgarmas soni uchun $g_x(a) = \exp(iaX_1)$ element tekislikning ixtiyoriy vektorining x komponentasini $x + a$ ga o'zgartiradi:

$$g_x(a)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp(iaX_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp\left(a\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y \end{pmatrix}.$$

Xuddi shunday, $g_y(b) = \exp(ibX_2)$ element tekislikning ixtiyoriy vektorining y komponentasini $y + b$ ga o'zgartiradi:

$$g_y(b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp(ibX_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp\left(b\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+b \end{pmatrix}.$$

X_1 va X_2 kommutativ bo'lgani uchun $g_x(a)g_y(b) = \exp(iaX_1 + ibX_2)$ bo'ladi, va bu element tekislikdagi ixtiyoriy $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektorini $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vektorga siljitib beradi:

$$g_x(a)g_y(b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} = \mathbf{r} + \mathbf{d}.$$

Agar tekislikda qutb koordinat sistemasiga o'tsak X_3 generatorning ma'nosi aniqlanadi, qutb sistemasida u $X_3 = -i\partial/\partial\varphi$ ko'rinishga ega. Demak, X_3 generatori tekislikdagi vektorlarni koordinat boshi atrofida ma'lum burchakka aylantirishga mos keladi. Buni tekislik nuqtalarining kompleks $z = x + iy = \rho\exp(i\varphi)$ tasavvurida ko'rish osonroq:

$$z' = g_3(\theta)z = \exp(i\theta X_3)\rho\exp(i\varphi) = \rho\exp(i(\varphi + \theta)).$$

Umuman olganda $X = aX_1 + bX_2 + cX_3$ ko'rinishdagi operator $ISO(2)$ gruppasining algebrasiga tegishli bir elementidir, bu element $\{X_1, X_2, X_3\}$ bazisda aniqlangan.

Yuqoridagi natijalarni olganimizda gruppaviy to'plamda kiritilgan koordinat sistemasi tushunchasidan foydalandik ammo bu koordinatalarni yaqqol ko'rinishda ishlatganimiz yo'q. Demak, Lie gruppasining hossalari koordinat sistemasining konkret ko'rinishiga bog'liq emas, yuqoridagi munosabatlarni boshqa koordinat sistemasiga o'tkazsak ular o'zgarmaydi. Bunday hossa Lie gruppalarining koordinat invariantligi deyiladi. Lie gruppasidagi har xil koordinat sistemalari analitik bo'lgan o'zaro almashtirish formulalari bilan bog'liqligini yana bir eslatib ketamiz.

Struktura doimiylari uchun (182)-nchi munosabatni (ularning antisimmetrikligi $c^i_{jk} = -c^i_{kj}$ dan foydalanib) quyidagi ko'rinishda yozib olaylik :

$$(c_j)^i_m(c_k)^m_l - (c_k)^i_m(c_j)^m_l = c^m_{jk}(c_m)^i_l.$$

Demak, struktura doimiylari ularni $(c_j)^i_m$ matrik elementli r ta o'lchamligi $r \times r$ bo'lgan c_j matritsa sifatida ko'rganda gruppaning bir tasavvurini hosil qilar ekan, bu tasavvur ***biriktirilgan***

tasavvur[3] deyiladi. Masalan, $SU(2)$ va $SO(3)$ gruppalari uchun bu tasavvurni 3×3 bo'lgan (103)- va (104)-matritsalar ifodalaydi.

4.46-misol. $GL(n,R)$ gruppasining struktura doimiylarini toping.

$GL(n,R)$ gruppa aynimagan $n\times n$ o'lchamli haqiqiy matritsalar gruppasidir. Gruppaviy kompozitsiya qonuni - matrik ko'paytma: $c^{ij}=a^{ik}b^{kj}$. (179)-bo'yicha

$$g^{ij}_{kl,mn}=\frac{\partial^2 c^{ij}}{\partial a^{kl}\partial b^{mn}}=\delta^i_k\delta^p_l\delta^p_m\delta^j_n=\delta^i_k\delta_{lm}\delta^j_n.$$

Struktura doimiylari topildi:

$$c^{ij}_{kl,mn}=g^{ij}_{kl,mn}-g^{ij}_{mn,kl}=\delta^i_k\delta_{lm}\delta^j_n-\delta^i_m\delta_{nk}\delta^j_l. \qquad (202)$$

4.47-misol. $SU(2)$ gruppasining algebrasi Pauli matritsalari σ_i, $i=1,2,3$ orqali ifodalanadi:

$$\left[\frac{\sigma_i}{2},\frac{\sigma_j}{2}\right]=i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}.$$

Agar generatorlarning boshqa bazisiga o'tsak: $\sigma_i=2ie_i$, yangi bazisda $[e_i,e_j]=\varepsilon_{ijk}e_k$ ni olamiz. Demak, $SU(2)$ gruppasining struktura doimiylari uchinchi rang birlik antisimmetrik tensorga teng ekan: $c_{ijk}=\varepsilon_{ijk}$. (Struktura doimiysining yuqori indeksini tushurib yozish mumkinligi (208)-formuladan keyin tushuntirilgan.)

Ado teoremasi deyiladigan tasdiq mavjud: ixtiyoriy Lie algebrasi $gl(n,C)$ matrik algebraning qandaydir qismalgebrasiga izomorfdir ([13], X-bobning ohirida), shuning uchun Lie algebralarini o'rganish $gl(n,C)$ matrik algebralarni o'rganishga keltirilishi mumkin. Albatta, haqiqiy algebralar haqida gap ketganda $gl(n,R)$ matrik algebralarni ko'zda tutamiz.

Shu nuqtai nazardan kelib chiqib $gl(n,R)$ matrik algebrada quyidagi ***Weyl bazisi*** deyiladigan bazis kiritamiz: o'lchamligi $n\times n$ bo'lgan e_{ij}, $i,j=1,2,3,...n$ matritsalar, ularning matrik elementlari $(e_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl}$. Masalan, e_{13} degan matritsaning birinchi satrining uchinchi elementi 1 ga teng, uning qolgan hamma elementlari nolga teng. Tekshirib chiqish qiyin emaski bu holda

$$[e_{ij},e_{kl}]=\delta_{jk}e_{il}-\delta_{il}e_{kj}.$$

Bu formuladan $gl(n,R)$ algebrasining struktura doimiylari uchun yana (202)-formula kelib chiqadi.

Kompleks algebralarga quyidagicha o'tish mumkin: Weil bazisi e_{11}, ie_{11}, e_{12}, ie_{12}, ..., e_{nn}, ie_{nn} ko'rinishda tanlab olinadi.

[3]Inglizchasi *adjoint representation* , ruschasi *присоединенное представление*

4.48-misol. $o(n)$ algebrasida Weil bazisini kiriting va uning struktura doimiylarini toping.

$O(n)$ gruppasi elementlari uchun $g^T = g^{-1}$ bo'lishi kerak bo'lgani uchun uning generatorlari (algebrasi elementlari) antisimmetrik matritsalardan iborat bo'lishi kerak: $X^T = -X$. Demak, bazisni $\bar{e}_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$ ko'rinishda olish kerak. Bu holda

$$[\bar{e}_{ij}, \bar{e}_{kl}] = \delta_{jk}\bar{e}_{il} - \delta_{ik}\bar{e}_{jl} + \delta_{il}\bar{e}_{jk} - \delta_{jl}\bar{e}_{ik}$$

bo'ladi. Buni $[\bar{e}_{ij}, \bar{e}_{kl}] = c^{mn}_{ij,kl}\bar{e}_{mn}$ ko'rinishga keltirish uchun

$$c^{mn}_{ij,kl} = \delta^m_i\delta^n_l\delta_{jk} - \delta^m_j\delta^n_l\delta_{ik} + \delta^m_j\delta^n_k\delta_{il} - \delta^m_i\delta^n_k\delta_{jl}$$

bo'lishi kerak.

§22.4. Metrika. Killing-Cartan formasi. Casimir operatorlari.

Bizga Lie algebrasi R (K sonlar maydoni ustida) berilgan bo'lsin. R fazoda ixtiyoriy $x, y \in R$ larga quyidagicha ta'sir qiladigan

$$D[x,y] = [Dx, y] + [x, Dy]$$

operatorlar to'plamini R_D deb belgilaylik.

Теорема IV.3 *R_D to'plam Lie algebrasini tashkil qiladi, ya'ni, 1) agar $D_1 \in R_D$ va $D_2 \in R_D$ berilgan bo'lsa unda ixtiyoriy sonlar $\alpha, \beta \in K$ uchun $\alpha D_1 + \beta D_2 \in R_D$ bo'ladi; 2) undan tashqari, $[D_1, D_2]$ ham R_D ga tegishli bo'ladi.*

Isbot. Teoremaning birinchi qismi bevosita tekshiriladi. Ikkinchi qismiga o'tamiz. Quyidagilarni topamiz:

$$D_1D_2[x,y] = D_1([D_2x, y] + [x, D_2y]) =$$
$$= [D_1D_2x, y] + [D_2x, D_1y] + [D_1x, D_2y] + [x, D_1D_2y],$$

va

$$D_2D_1[x,y] = D_2([D_1x, y] + [x, D_1y]) =$$
$$= [D_2D_1x, y] + [D_1x, D_2y] + [D_2x, D_1y] + [x, D_2D_1y].$$

$[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ bol'gani uchun

$$[D_1, D_2][x,y] = [[D_1, D_2]x, y] + [x, [D_1, D_2]y]$$

kelib chiqadi.

R_D algebra ***Lie algebrasining differensiallanishlari algebrasi*** deyiladi. R algebraning har bir $a \in R$ elementi uchun shu algebrani o'z-'oziga akslantiradigan

$$p_a(x) = [a, x]$$

operatsiya kiritaylik, $x \in R$. p_a larning to'plamini P deb belgilaylik. P to'plam ham Lie algebrasini tashkil qiladi, ya'ni, $p_a \in P$ va $p_b \in P$ bo'lsa $\alpha p_a + \beta p_b \in P$, $\alpha, \beta \in K$ va $[p_a, p_b] = p_{[a,b]}$ bo'ladi[4]. Bu algebra R ga ***biriktirilgan algebra*** deyiladi.

Tasdiqning birinchi qismi oson tekshiriladi. Ikkinchi qismining isboti quyidagicha:

$$\begin{aligned} [p_a, p_b]x &= (p_a p_b - p_b p_a)x = [a, [b, x]] - [b, [a, x]] = \\ &= (ab - ba)x - x(ab - ba) = [[a, b], x] = p_{[a,b]}x. \end{aligned} \tag{203}$$

Bu algebra R_D ning ideali bo'ladi. Buni isbot qilish uchun birinchidan $P \subset R_D$ ekanligidan boshlaymiz:

$$p_a[x, y] = [a, [x, y]] = [[a, x], y] + [x, [a, y]] = [p_a x, y] + [x, p_a y].$$

Bu - P algebra R_D ning qismalgebrasi ekanligini isbot qiladi. P qismalgebra R_D ning ideali ekanligi quyidagi formuladan kelib chiqadi:

$$[p_a, D]x = p_a Dx - Dp_a x = [a, Dx] - D[a, x] = [a, Dx] - [Da, x] -$$
$$-[a, Dx] = aDx - Dx \cdot a - Da \cdot x + xDa - aDx + Dx \cdot a = xDa - Da \cdot x.$$

Agarda $Da = d(a) \in R_D$ belgilash kiritsak

$$[D, p_a]x = [d(a), x] = p_{d(a)}x$$

ekanligi kelib chiqadi. Shu bilan P R_D ning ideali ekanligi isbotlandi.

p_a ning ta'rifidan $(p_a(x))^i = [a, x]^i = c^i_{jk} a^j x^k$ ekanligi kelib chiqadi. Boshqa so'z bilan $(p_a)^i_j = c^i_{kj} a^k$ ekan.

R algebrani evklid fazosiga aylantiradigan skalar ko'paytma kiritish maqsadga muvofiq. Ixtiyoriy $a, b \in R$ elementlar uchun skalar ko'paytma

$$(a, b) = \mathrm{Tr}\,(p_a p_b) = c^i_{jk} c^k_{li} a^j b^l \tag{204}$$

[4]Ko'p hollarda p_a ning o'rniga ada belgilash ishlatiladi.

orqali ta'riflanadi. Bunday kiritilgan skalar ko'paytmaning hossalari quyidagicha:

$$(x,y)=(y,x), \quad x\in R,\ y\in R;$$

$$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z),\ z\in R,\ x\in R,\ y\in R;\ \alpha,\beta\in K;$$

$$([a,x],y)+(x,[a,y])=0, \qquad a\in R,\ x\in R,\ y\in R.$$

Birinchi va ikkinchi hossalar ravshandir. Uchinchi hossani

$$(p_a(x),y)+(x,p_a(y))=0 \tag{205}$$

ko'rinishda ifoda qilish mumkin va uni (203)-formula yordamida tekshirish mumkin. Birinchi had:

$$(p_a(x),y)=\mathrm{Tr}\,(p_{p_a x}p_y)=\mathrm{Tr}\,([p_a,p_x]p_y)=\mathrm{Tr}\,(p_a p_x p_y-p_x p_a p_y)\,;$$

Ikkinchi had:

$$(x,p_a(y))=\mathrm{Tr}\,(p_x[p_a,p_y])=\mathrm{Tr}\,(p_x p_a p_y-p_x p_y p_a)\,.$$

Ikkala hadning yig'indisi nolga tengligi Tr ning I-bobdagi 9-misolda keltirilgan hossasidsan kelib chiqadi. (205)-dan kelib chiqadiki, tegishli bazisda p_a operatorga mos keluvchi matritsa antisimmetrik ekan: $p_a^T=-p_a$. Birinchi bobdagi 14-mashqdan ma'lumki, bunday matritsalarning hususiy qiymatlari mavhum son bo'ladi. (205)-hossaga ega bo'lgan skalar ko'paytma kiritish mumkin bo'lgan algebra ***kompakt algebra*** deyiladi[5]. (205)-hossaga ega bo'lgan skalar ko'paytmaning mavjudligi algebraning kompaktligining zaruriy va yetarli shartidir.

Struktura doimiylarini $c^i_{jk}=c_{ijk}$ deb olib (205)-formulani koordinat bazisida yozamiz:

$$\begin{aligned}(p_a(x))^i y^i+x^i(p_a(y))^i &=\\ &=c^i_{jk}a^j x^k y^i+x^i c^i_{jk}a^j y^k=a^j x^k y^i\,(c_{ijk}+c_{kji})=0.\end{aligned}$$

Demak, $c_{ijk}=-c_{kji}$. Bu formula bilan (181)-formulani solishtirsak struktura doimiylari uchun quyidagilar kelib chiqadi:

$$c_{ijk}=c_{jki}=c_{kij}=-c_{jik}=-c_{ikj}=-c_{kji}.$$

[5]Bu terminning topologiyadagi kompaktlik tushunchasiga aloqasi yo'q.

Skalar ko'paytmani ta'riflagan (204)-formulaga qaytamiz:

$$(a, b) = \mathrm{Tr}\,(p_a p_b) = c^i_{jk} c^k_{li} a^j b^l = -c_{ikj} c_{ikl} a^j b^l.$$

Kiritilgan skalar ko'paytma R algebrani quyidagi metrikali evklid fazosiga aylantirar ekan:

$$(a, b) = g_{ij} a^i b^j, \qquad g_{ij} = -c_{kli} c_{klj}.$$

R fazoda ***metrik tenzor*** g_{ij} kiritildi. $p(a)$ operatorning antisimmetrikligidan kelib chiqadiki c_{ijk} sonlar sof mavhum sonlar bo'ladi (kompakt algebralar uchun, har holda), shuning uchun $c_{ijk} = if_{ijk}$ deb olinsa bo'ladi, bu yerda f_{ijk} - haqiqiy sonlar. Kiritilgan skalar ko'paytmada ixtiyoriy $a \in R$ ning kvadrati musbat son bo'ladi:

$$(a, a) = f_{ikj} f_{ikl} a^j a^l = \left(f_{ikj} a^j\right)^2 > 0. \tag{206}$$

Bundan bitta istisno bor - agar R ning markazi R_0 mavjud bo'lsa va $a \in R_0$ bo'lsa ixtiyoriy $x \in R$ uchun $p_a(x) = [a, x] = 0$, yoki, $(p_a(x))^i = [a, x]^i = c_{ijk} a^j x^k = 0$. x ixtiyoriy bo'lgani uchun $c_{ijk} a^j = 0$ bo'lishi kerak. Demak, $a \in R_0$ uchun $(a, a) = 0$. Agar R ning markazi faqat 0 dan iborat bo'lsa (206)-dan ko'rinib turibdiki (204)-formula orqali kiritilgan kvadratik forma musbat aniqlangan bo'ladi. Demak, algebraning markaziy ideali bo'lmasa unda musbat aniqlangan kvadratik forma kiritish mumkin ekan.

(204)-formula orqali kiritilgan forma ***Killing formasi*** va g_{ij} tenzor Lie algebrasining ***Killing-Cartan metrikasi*** deyiladi.

Eslatib ketamiz, Lie gruppasi sodda deyiladi qachonki uning qismgruppasi bo'lmasa. Lie gruppasi yarimsodda deyiladi qachonki uning invariant abel qismgruppasi bo'lmasa (diskret qismgruppadan tashqari). Bu holda uning algebrasi markaziy idealga ega bo'lmaydi. Yuqorida isbot qilingani bo'yicha (bu natija Cartanga tegishli)

$$\det g_{ij} \neq 0 \tag{207}$$

shart gruppaning yarimsodda bo'lishi uchun yetarli va zaruriydir.

Shu joyda ikkita fikrni aytib ketish o'rinlidir. Birinchidan, $\{X^i\}$ bazisni almashtirsak c^i_{jk} sonlar ham o'zgaradi, bu almashtirishga nisbatan ular uchinchi rang tenzorini tashkil qiladi, bir marta kontravariant va ikki marta kovariant. c^i_{jk} sonlarning bazisga bog'liqligini 47-misolda ham ko'rish mumkin. Ikkinchidan, bundan keyin struktura doimiylari haqida gap ketganda ularning qaysi biri ishlatilgan - c_{ijk} mi, yoki f_{ijk} mi - kontekstdan ma'lum bo'ladi deb o'ylaymiz.

Nima uchun yarim sodda gruppalarga alohida ahamiyat beriladi? Gap shundaki, ixtiyoriy Lie gruppasi bir yarimsodda gruppa bilan qandaydir abel gruppasining ko'paytmasi bo'lib chiqar ekan ([12], [?]). Shu sababdan abel gruppalarini va yarim sodda gruppalarni alohida o'rganish Lie gruppalarini o'rganishda muhim ahamiyatga ega.

4.15-mashq. (46)-misolning natijasidan foydalanib $gl(n, C)$ algebra uchun Killing-Cartan metrikasini toping. Bu holda

$$g_{kl,pr} = 2\left(n\delta_{kr}\delta_{pl} - \delta_{pr}\delta_{kl}\right)$$

bo'lishini ko'rsating.

$gl(n, C)$ algebrasini aynimagan $n \times n$ matritsalar tashkil qiladi. Ularning ikkita ixtiyoriysini X va Y deb belgilab va yuqoridagi formuladan foydalanib ularning Killing-Cartan formasini aniqlash mumkin:

$$\begin{aligned}(X, Y) &= g_{kl,pr}X_{kl}Y_{pr} = \\ &= 2nX_{kl}Y_{lk} - 2X_{kk}Y_{ll} = 2n\mathrm{Tr}(XY) - 2\mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(Y).\end{aligned}$$

$sl(n, C)$ to'plam $gl(n, C)$ ning izi nolga teng matritsalaridan iborat, ular uchun $\mathrm{Tr}(X) = 0$, shuning uchun

$$(X, Y)\Big|_{sl(n,C)} = 2n\mathrm{Tr}(XY), \qquad X, Y \in sl(n, C).$$

Shu bilan $sl(n, C)$ algebrasi uchun ham Killing-Cartan formasi aniqlandi.

4.16-mashq. (48)-misolning natijasidan foydalanib $o(n)$ algebra uchun Killing-Cartan metrikasini toping. Bu holda

$$g_{ij,pr} = 2(n-2)(\delta_{jp}\delta_{ir} - \delta_{ip}\delta_{jr})$$

bo'lishini ko'rsating.

Ikkita $X, Y \in o(n)$ uchun Killing-Cartan formasini topaylik:

$$\begin{aligned}(X, Y) &= g_{ij,pr}X_{ij}Y_{pr} = \\ &= 2(n-2)\left[\mathrm{Tr}(XY) - \mathrm{Tr}(XY^T)\right] = 4(n-2)\mathrm{Tr}(XY),\end{aligned}$$

chunki $o(n)$ ga tegishli matritsalar uchun $Y^T = -Y$. Shu yerda abel gruppalarining algebralari uchun struktura konstantalari nolga teng bo'lgani uchun ularga mos keluvchi Killing-Cartan formasi ham nolga tengligini eslash o'rinlidir - $O(2)$ gruppasi abel gruppasi ekanligini bilamiz, shunga yarasha $n = 2$ holda yuqoridagi metrika ham nolga teng.

4.17-mashq. (47)-misolning natijasidan foydalanib $su(2)$ algebra uchun Killing-Cartan metrikasini toping. Bu holda

$$g_{ij} = 2\delta_{ij}$$

bo'lishini ko'rsating.

(207)-shart bajarilgan holda g_{ij} ga teskari bo'lgan g^{ij} tenzorni ham kiritish mumkin:

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k.$$

Yana bir narsani isbot qilish mumkin: yarimsodda va kompakt Lie gruppalari uchun hamma vaqt

$$g_{ij} = \delta_{ij} \tag{208}$$

deb tanlab olish mumkin (shu sababdan struktura doimiylarining yuqori indeksini tushurib yozish mumkin: $c^i_{jk} = c_{ijk}$).

Quyidagi ko'rinishdagi ***Casimir operatori*** deyilgan kattalikni kiritaylik:

$$C = g_{ij} X^i X^j.$$

4.18-mashq. Casimir operatorining gruppaning hamma generatorlari bilan kommutativligini ko'rsating:

$$[C, X^i] = 0.$$

Agar gruppamiz kompakt va yarimsodda bo'lsa (208)-bajariladi va Casimir operatori

$$C = \sum_i X^i X^i$$

ko'rinishga keltiriladi. Casimir operatori algebraning hamma elementlari bilan kommutativ ekan unga mos keluvchi operator ixtiyoriy bazisda diagonal ko'rinishga keltiriladi (Schur lemmasi bo'yicha). Demak, Casimir operatorining hususiy qiymatlari saqlanuvchi fizik kattaliklarga mos kelar ekan.

§23. Ildizlar bo'yicha klassifikatsiya

§23.1. Ildizlar sistemasi

Markaziy maydondagi harakat masalasini eslaylik. Bu holda (energiyadan tashqari) quyidagi saqlanuvchi kattalikka egamiz - harakat miqdori momenti $\mathbf{J}$. Uning uchala komponentalari J_i, $i = 1,2,3$ ham saqlanadi, ammo ulardan faqat bittasinigina (odatda J_z ni) $\mathbf{J}^2$ bilan bir vaqtda saqlanuvchi kattalik deb qarash mumkin (chunki J_z ning J_x va J_y bilan Poisson qavslari nolga teng emas). Kvant mexanikasida bu quyidagicha ifodalanadi: Momentning komponentalari o'zaro kommutativ emas - $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$, ammo ularning har biri $\mathbf{J}^2$ bilan kommutativdir: $[\mathbf{J}^2, J_i] = 0$. Bu munosabatlar bilan tanishmiz: (105)- bilan (107)-larga qarang. $\mathbf{J}^2$ bilan bir vaqtda saqlanuvchi kattalik sifatida J_z olinadi, bu esa, J_z va $\mathbf{J}^2$ lar umumiy hususiy funksiyalar sistemasiga ega va shu funksiyalar bazisida biq vaqtda diagonal ko'rinishga keltiriladi degani.

Harakat miqdoti momenti va spin algebralari $SO(3)$ va $SU(2)$ larning algebrasi bilan bir xil. Yuqorida $SO(3)$ va $SU(2)$ larning tasavvurlarini qurishda va ularni klassifikatsiya qilishda $\mathbf{J}^2$ va J_z larning umumiy hususiy funksiyalari bazisidan foydalandik. Mana shu metodni boshqa gruppalarga qo'llash uchun (105)-(111) formulalarni umumlashtirish kerak.

Algebrani aniqlash uchun struktura doimiylarini aniqlash kerak. Struktura doimiylari aniqlansa algebralarni, demak, gruppalarni klassifikatsiya qilib chiqish mumkin. Quyida struktura doimiylarini aniqlashning bir yo'li keltiriladi.

Algebraga kirgan N ta X_α generatorlarni ikki qismga bo'lamiz: diagonal ko'rinishdagilarini H_i, $i = 1,2,...,l$ deb belgilaymiz va qolganlarini E_α, $\alpha = 1,2,...,N-l$ deb belgilaymiz. Diagonal generatorlar uchun

$$[H_i, H_j] = 0, \quad i,j = 1,2,...,l \tag{209}$$

bo'lishi kerak. Diagonal elementlarning soni l gruppaning "*rangi*" deyiladi. Agar biror operator gamiltonian bilan bir paytda diagonal ko'rinishga (qandaydir bazisda) keltirilgan bo'lsa u saqlanuvchi kattalikka to'g'ri keladi, demak, ko'rilayotgan gruppa ko'rilayotgan masaladagi simmetriyaga mos kelsa shu masalada l ta saqlanuvchi kattaliklar - harakat integrallari - mavjud ekan. Ya'ni, har bir H_i bevosita fizik ma'noga ega.

E_α generatorlar huddi $SU(2)$ gruppasidagi $J_\pm$ lardek "ko'taruvchi" va "pasaytiruvchi" qoida bo'yicha tuzilgan deb olamiz, shunga yarasha ularni E_α, $\alpha = \pm 1, \pm 2, ..., \pm(N-l)/2$ deb tasavvur qilamiz. Masalan, E_{+1} ta'sirida H_i ning hususiy qiymati bir pog'ona ko'tariladi, E_{-2} ta'sirida esa ikki pog'ona kamayadi. H va E orasidagi kommutatorni topish uchun Jacobi ayniyatidan foydalanamiz:

$$[H_i, [H_j, E_\alpha]] + [H_j, [E_\alpha, H_i]] + [E_\alpha, [H_i, H_j]] = 0.$$

Bu munosabatning ohirgi hadi nolga teng, qolgan ikki hadni

$$[H_i, [H_j, E_\alpha]] = [H_j, [H_i, E_\alpha]]$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Olingan tenglamaning yechimi

$$[H_i, E_\alpha] = r_i(\alpha) E_\alpha \tag{210}$$

bo'lishigina mumkin. i indeks 1 dan l gacha o'zgargani uchun $r_i(\alpha)$ har bir α uchun l komponentali vektor $\mathbf{r}(\alpha)$ ni hosil qiladi. U "***ildiz vektori***" deyiladi. Olingan formulani (109)-bilan solishtiring. U yerda $\alpha = \pm$ va $r_i(\pm) = \pm 1$. Har bir gruppa uchun mana shu ildiz vektorlar sistemasini topish kerak.

Yarimsodda algebraning ildizi ***musbat*** deyiladi va kerak bo'lganda $\mathbf{r}(\alpha) > 0$ deb belgilanadi qachonki uning birinchi noldan farqli bo'lgan komponentasi musbat bo'lsa. Ildiz ***sodda*** deyiladi qachonki u musbat bo'lib ikkita boshqa musbat ildizlarning yig'indisiga keltirilmasa.. Rangi l bo'lgan yarimsodda algebrada l ta sodda chiziqli mustaqil bo'lgan ildizlar mavjud. Sodda ildizlar algebraning ildizlar fazosining bazisini tashkil qiladi: ixtiyoriy ildiz sodda ildizlarning chiziqli kombinatsiyasiga yoyiladi.

Kiritilgan E_α generatorlar rostdan ham "ko'tarish" va "tushurish" operatorlari ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Buning uchun generatorlar ta'sir qilayotgan ma'lum bir tasavvurlar fazosidagi bir element f_i ni olamiz, u H_i ning hususiy vektori bo'lsin: $H_i f_i = h_i f_i$. h_i - saqlanuvchi kattalik, harakat integrali. Bu holda (210)-dan

$$H_i (E_\alpha f_i) = (h_i + r_i(\alpha)) (E_\alpha f_i)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu formula (111)-ga o'xshash ma'noga ega. Ya'ni, E_α operator h_i ning qiymatini $r_i(\alpha)$ ga o'zgartirdi. Agar h_i ning maksimal qiymatini h_i^m deb belgilasak uning minimal qiymati $-h_i^m$ bo'ladi, ularga f_i^m va f_i^{-m} vektorlar mos kelsin. E_α operator har bir ta'sir qilganda h_i ning qiymatini $r_i(\alpha)$ ga oshirsa, $E_{-\alpha}$ operator har bir ta'sir qilganda h_i ning qiymatini $r_i(-\alpha) = -r_i(\alpha)$ ga kamaytiradi. Demak, f_i^{-m} vektor E_α ning yetarli darajadagi ta'siridan keyin f_i^m gacha "ko'tariladi".

$[E_\alpha, E_\beta]$ ni topish uchun yana bir marta Jacobi ayniyatidan foydalanamiz:

$$[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] + [E_\alpha, [E_\beta, H_i]] + [E_\beta, [H_i, E_\alpha]] = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad [H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = (r_i(\alpha) + r_i(\beta))\,[E_\alpha, E_\beta]\,. \qquad (211)$$

Uch xil variant bo'lishi mumkin:

1. $r_i(\alpha)+r_i(\beta) \neq 0$ va ildiz bo'lsin, bu holda $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$;
2. $r_i(\alpha) + r_i(\beta) = 0$, bu holda $\alpha = -\beta$ va $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = r^i(\alpha)H_i$;
3. $r_i(\alpha) + r_i(\beta)$ ildiz emas, bu holda $[E_\alpha, E_\beta] = 0$.

Olingan munosabatlarni bir joyga yig'aylik:

$$\begin{aligned} &[H_i, H_j] = 0; \qquad [H_i, E_\alpha] = r_i(\alpha)E_\alpha; \\ &[E_\alpha, E_{-\alpha}] = r^i(\alpha)H_i; \qquad [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \qquad (212)$$

Ohirgi formulada agar $r_i(\alpha) + r_i(\beta)$ ildiz bo'lsa $N_{\alpha\beta} \neq 0$, aks holda $N_{\alpha\beta} = 0$. Agar $\mathbf{r}(\alpha)$ vektor ildiz bo'lsa $2\mathbf{r}(\alpha)$ ildiz bo'lmaydi, chunki $[E_\alpha, E_\alpha] = 0$.

Olingan (212)-munosabatlar (197)-kommutatsion munosabatlarning ***kanonik*** ko'rinishi deyiladi. Lie algebrasining ixtiyoriy elementi mana shu H_i, E_α lar bo'yicha yoyilishi mumkin, ular bazisni tashkil qiladi. Kiritilgan bazis Lie algebrasining ***kanonik bazisi*** deyiladi.

(212)-ning to'rtinchisidan kelib chiqadiki, agar $\mathbf{r}(\alpha)$ va $\mathbf{r}(\beta)$ ildizlar bo'lsa va $k\mathbf{r}(\alpha) + \mathbf{r}(\beta)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ yana ildiz bo'lsa

$$\overbrace{[E_\alpha, [E_\alpha, \ldots [E_\alpha, E_\beta]]]}^{k} \sim E_{k\alpha+\beta}$$

bo'ladi. Faraz qilaylik, p va q shunday butun musbat sonlar bo'lsinki

$$r_i(\beta) + pr_i(\alpha) = h_i^m \quad (H_i \text{ ning maksimal hususiy qiymati}),$$
$$r_i(\beta) - qr_i(\alpha) = -h_i^m \quad (H_i \text{ ning minimal hususiy qiymati})$$

bo'lsin. Ikkala formula qo'shilsa

$$(p - q)r_i(\alpha) + 2r_i(\beta) = 0$$

bo'lib chiqadi. Bu munosabatning ikkala tomonini $r_i(\alpha)$ ga ko'paytirib i bo'yicha yig'indiga o'tilsa

$$-p + q = 2\frac{\mathbf{r}(\alpha) \cdot \mathbf{r}(\beta)}{\mathbf{r}(\alpha) \cdot \mathbf{r}(\alpha)} \tag{213}$$

formula kelib chiqadi. Bu formulani keltirib chiqarishda α va β lar qaysi tartibda kelishining ahamiyati yo'q edi, $\alpha \leftrightarrow \beta$ almashtirish bajarsak huddi shunday formulaning o'zi kelib chiqadi, faqat $p - q$ boshqa butun sonlar bo'ladi.

Agar $r_i(\alpha)$ va $r_i(\beta)$ sodda ildizlar bo'lsa $q = 0$ bo'lishi kerak. Buning isboti quyidagicha: $\mathbf{r}(\alpha) - \mathbf{r}(\beta) = \mathbf{r}(\gamma)$ ayirma ildiz bo'la olmaydi, aks holda a) agar $\mathbf{r}(\gamma) > 0$ bo'lsa $r_i(\alpha)$ sodda bo'lmaydi, b) agar $\mathbf{r}(\gamma) < 0$ bo'lsa $r_i(\beta)$ sodda bo'lmaydi. Demak, sodda ildizlar uchun

$$2\frac{\mathbf{r}(\alpha) \cdot \mathbf{r}(\beta)}{\mathbf{r}(\alpha) \cdot \mathbf{r}(\alpha)} = -p < 0.$$

Shu bilan biz quyidagi teoremani isbot qildik:

Теорема IV.4 *Agar* $\mathbf{r}(\alpha)$ *hamda* $\mathbf{r}(\beta)$ *ikkita sodda ildiz bo'lsa*

$$2\frac{\mathbf{r}(\alpha) \cdot \mathbf{r}(\beta)}{\mathbf{r}(\alpha) \cdot \mathbf{r}(\alpha)} = m, \qquad 2\frac{\mathbf{r}(\alpha) \cdot \mathbf{r}(\beta)}{\mathbf{r}(\beta) \cdot \mathbf{r}(\beta)} = n \tag{214}$$

butun sonlar bo'ladi. Undan tashqari, $m, n \leq 0$ *(ikkita sodda vektor orasidagi buchak o'tkir bo'la olmaydi).*

Teoremaga qo'shimcha qilib quyidagini aytish kerak: $\mathbf{r}(\alpha)$ va $\mathbf{r}(\beta)$ ildizlar bo'lsa

$$\mathbf{r}(\beta) - 2\mathbf{r}(\alpha)\frac{\mathbf{r}(\alpha) \cdot \mathbf{r}(\beta)}{\mathbf{r}(\alpha) \cdot \mathbf{r}(\alpha)} = \mathbf{r}(\beta) + (p - q)\mathbf{r}(\alpha)$$

ham ildiz bo'ladi (uni (213)-formulaga qo'yib tekshirib ko'ring). Geometrik nuqtai nazardan bu vektor $\mathbf{r}(\beta)$ ni $\mathbf{r}(\alpha)$ ga perpendikular bo'lgan tekislikka nisbatan akslantirib olinadi. Masalan, bu operatsiyada $\mathbf{r}(\beta)$ ning o'rniga $\mathbf{r}(\alpha)$ olinsa yuqorida ta'kidlangan natijani olamiz: $-\mathbf{r}(\alpha)$ vektor ham ildiz bo'lib chiqadi.

$\mathbf{r}(\alpha)$ va $\mathbf{r}(\beta)$ vektorlar orasidagi burchakni φ deb belgilasak yuqoridagilardan

$$\left[\frac{\mathbf{r}(\alpha)\cdot\mathbf{r}(\beta)}{\sqrt{|\mathbf{r}(\alpha)|^2|\mathbf{r}(\beta)|^2}}\right]^2 = \cos^2\varphi = \frac{1}{4}mn \tag{215}$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, butun sonlar m va n larning ko'paytmasi 4 dan katta bo'la olmas ekan. (214)-formulalarni

$$\mathbf{r}(\alpha)\cdot\mathbf{r}(\beta) = \frac{1}{2}m\mathbf{r}^2(\alpha) = \frac{1}{2}n\mathbf{r}^2(\beta)$$

formada olsak $\mathbf{r}(\alpha)$ va $\mathbf{r}(\beta)$ vektorlarning kvadratlarining nisbati quyidagiga tengligi kelib chiqadi:

$$k = \frac{\mathbf{r}^2(\alpha)}{\mathbf{r}^2(\beta)} = \frac{n}{m}.$$

Aniqlik uchun $\mathbf{r}^2(\alpha) \geq \mathbf{r}^2(\beta)$ deb qabul qilamiz, boshqa so'z bilan $|n| \geq |m|$. (210)-masalani kiritganda H_i va E_α operatorlarning normalarini muhokama qilmaganmiz, normalarni shunday tanlab olaylikki

$$\sum_\alpha r_i(\alpha)r_j(\alpha) = \delta_{ij}, \qquad \text{yoki} \qquad \sum_\alpha \mathbf{r}^2(\alpha) = l \quad \text{bo'lsin.} \tag{216}$$

§23.2. Ildizlarning to'liq sistemasini topish

Ildizlar sistemasini to'liq ravishda aniqlash uchun (212)-formulalar sistemasidagi $N_{\alpha\beta}$ koeffisientlarni topish kerak. Avvalam bor oydinki $N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha}$. Undan tashqari, agar (211)-ni (212)-ning ohirgisi bilan solishtirsak $\mathbf{r}(\alpha+\beta) = \mathbf{r}(\alpha) + \mathbf{r}(\beta)$ ni topamiz. $\mathbf{r}(\alpha)$, $\mathbf{r}(\beta)$ va $\mathbf{r}(\gamma)$ lar shunday noldan farqli ildizlar bo'lsinki ular uchun $\mathbf{r}(\alpha)+\mathbf{r}(\beta)+\mathbf{r}(\gamma) = 0$ bo'lsin. Bu holda

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} \tag{217}$$

bo'ladi.

4.19-mashq. $[E_\alpha,[E_\beta,E_\gamma]]$ uchun Jacobi ayniyatidan foydalanib (ildizlar yig'indisining nolga tengligini ishlatgan holda)

$$N_{\alpha\beta}\mathbf{r}(\gamma)+N_{\beta\gamma}\mathbf{r}(\alpha)+N_{\gamma\alpha}\mathbf{r}(\beta)=0$$

ekanligini ko'rsating. Ildizlarning har birining noldan farqliligi (217)-ga olib kelishini ko'rsating.

$N_{\alpha\beta}$ larning hamma hossalarini bir joyga yig'aylik:

$$N_{\alpha\beta}=-N_{\beta\alpha}=N_{\beta,-\alpha-\beta}=N_{-\alpha-\beta,\alpha}. \tag{218}$$

Bularning birinchisi $N_{\alpha\beta}$ ning ta'rifidan, ikkinchi va uchinchisi (217)-dan kelib chiqadi. Undan tashqari $N_{\alpha\beta}=-N_{-\alpha,-\beta}$ deb olish mumkin.

Faraz qilaylik $\mathbf{r}(\alpha)$ va $\mathbf{r}(\beta)\neq\pm\mathbf{r}(\alpha)$ ikkita ildiz bo'lsin va $\mathbf{r}(\beta)+p\mathbf{r}(\alpha)-\mathbf{r}(\beta)-q\mathbf{r}(\alpha),\ldots,\mathbf{r}(\beta)-\mathbf{r}(\alpha),\mathbf{r}(\beta),\mathbf{r}(\beta)+\mathbf{r}(\alpha),\ldots,\mathbf{r}(\beta)+p\mathbf{r}(\alpha)$ ildizlar sistemasini tashkil qilsin. Bunda $\mathbf{r}(\beta)-(q+1)\mathbf{r}(\alpha)$ va $\mathbf{r}(\beta)+(p+1)\mathbf{r}(\alpha)$ lar ildiz bo'lmaydi. Quyidagi Jacobi ayniyatidan

$$[E_{-\alpha},[E_\alpha,E_\beta]]+[E_\alpha,[E_\beta,E_{-\alpha}]]+[E_\beta,[E_{-\alpha},E_\alpha]]=0$$

avval

$$N_{\alpha\beta}[E_{-\alpha},E_{\alpha+\beta}]+N_{\beta,-\alpha}[E_\alpha,E_{\beta-\alpha}]+r_i(\alpha)[E_\beta,H_i]=0,$$

keyin

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}+N_{\beta,-\alpha}N_{\alpha,\beta-\alpha}-\mathbf{r}(\alpha)\cdot\mathbf{r}(\beta)=0$$

kelib chiqadi.

4.20-mashq.

$$\sum_{j=-q}^{p}\left[\mathbf{r}(\alpha)\cdot(\mathbf{r}(\beta)+j\mathbf{r}(\alpha))-N_{\alpha,\beta+j\alpha}N_{-\alpha,\beta+(j+1)\alpha}+N_{-\alpha,\beta+j\alpha}N_{\alpha,\beta+(j-1)\alpha}\right]=0$$

munosabatdan (213)-formulani qayta keltirib chiqaring. Quyidagilar kerak bo'ladi: $\sum\limits_{j=-q}^{p}1=1+p+q$, $\sum\limits_{j=-q}^{p}j=\frac{1}{2}(1+p+q)(p-q)$.

Mashqdagi qatorni boshqa chegaralarda hisoblaylik:

$$\sum_{j=-q}^{0}\left[\mathbf{r}(\alpha)\cdot(\mathbf{r}(\beta)+j\mathbf{r}(\alpha))-\right.$$
$$\left.-N_{\alpha,\beta+j\alpha}N_{-\alpha,\beta+(j+1)\alpha}+N_{-\alpha,\beta+j\alpha}N_{\alpha,\beta+(j-1)\alpha}\right]=0$$

$\sum\limits_{j=-q}^{0} 1 = 1 + q$ va $\sum\limits_{j=-q}^{0} j = -\frac{1}{2}q(1+q)$ formulalardan va $\mathbf{r}(\beta) - (q+1)\mathbf{r}(\alpha)$ ildiz emasligidan $N_{\alpha,\beta-(q+1)\alpha} = 0$ kelib chiqishidan foydalanib quyidagini topamiz:

$$N^2_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}p(1+q)\mathbf{r}^2(\alpha), \quad \text{yoki,} \quad N_{\alpha\beta} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}p(1+q)\mathbf{r}^2(\alpha)}. \tag{219}$$

Ishoralarni shunday olish kerakki, (218)-hossalar buzilmasin. §23.4.-paragrafda bu formulalar yordamida $SU(3)$ gruppasining struktura doimiylari topilgan.

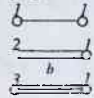
§23.3. Dynkin sxemalari

Lie gruppalarini to'liq klassifikatsiya qilish uchun Dynkin sxemalari ishlatiladi. (215)-formulaga qaytib kelamiz. Quyidagi variantlar bo'lishi mumkin:

$$n = 0, m = 0; n = -1, m = -1; n = -2, m = -1; n = -3, m = -1.$$

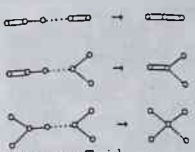
$m = n = \pm 2$ hol ko'rilmaydi chunki bu holda $\mathbf{r}(\alpha)$ va $\mathbf{r}(\beta)$ vektorlar kollinear bo'lib chiqadi (ya'ni, ular bitta vektor). $n = 0, m = 0$ holda ildiz vektorlari uzunliklarining nisbatini aniqlab bo'lmaydi, ammo ular o'zaro perpendikular: $\varphi = 90°$. Qolgan hollarda esa $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ bo'ladi. Demak, $\cos\varphi$ quyidagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin: 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Bu qiymatlarga o'z navbatida $90°$, $120°$, $135°$, $150°$ burchaklar mos keladi.

Ikkita sodda ildiz vektorini olaylik. Agar har bir ildiz vektorini bir doiracha qilib ko'rsatsak va bir doirachadan qo'shni doiracha(vektor)ga shu ikkala vektorlar orasidagi burchakka bog'liq bo'lgan va soni k teng bo'lgan chiziqlar o'tkazsak (IV.3)-rasmda ko'rsatilgan uchta sxema paydo bo'ladi. Bu rasmda ko'rsatilgan sxemalar ikkinchi tartibli Dynkin sxemalari deyiladi. Har bir doirachaning ustidagi son quyidagicha aniqlangan: chap tomondagi doiracha $\mathbf{r}(\alpha)$ ildiz vektoriga va o'ng tomondagi doiracha $\mathbf{r}(\beta)$ vektorga mos keladi, shu ikkita vektorlar kvadratlarining nisbati ga



IV.3-rasm: Ikkinchi tartibli Dynkin sxemalari teng, doiracha ustidagi sonlar mana shu nisbatni belgilaydi. Yani, ikkala doirachaning ustida bir xil son turgan bo'lsa ularning uzunliklari teng. Bir doiracha ustida 2 soni, ikkinchisi ustida 1 soni turgan bo'lsa birinchi doiracha ifodalaydigan ildiz kvadratining ikkinchi doirachaga mos keluvchi ildizning kvadratiga nisbati ikkiga teng bo'ladi. Sonlar 3 va 1 bo'lsa katta ildiz kvadratining kichik ildiz kvadratiga nisbati uchga teng bo'ladi. Boshqa variantlar yo'q. $k = 0$ xol ildiz vektorlarining perpendikularligiga to'g'ri keladi, bu holda mos keluvchi doirachalar orasida chiziq bo'lmaydi. Dynkin sxemasida ikkita ortogonal vektorlar yonma-yon tura olmaydi, ular orasida bog'lanish bo'lmagani uchun bunday sxema ikkita bog'lanmagan sxemalarga parchalangan bo'ladi.

Quyidagi shartlarga bo'ysungan Dynkin sxemalari *yo'l qo'yilgan* sxema deyiladi (bu tasdiqlarning isbotlarini [13], X-bob, §10 da topish mumkin):



IV 4-rasm. Taqiqlangan sxemalar

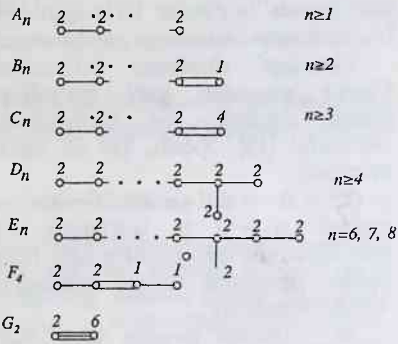
1. n - chi tartibli Dynkin sxemasida $n-1$ ta bog'langan juft doirachalar bo'lishi mumkin (aks holda sodda ildizlarning chiziqli mustaqilligi o'rinli bo'lmaydi);

2. Dynkin sxemasi yopiq zanjir ko'rinishida bo'lmaydi (aks holda bu zanjirga kirgan vektorlarning xech bo'lmaganda bittasining kvadrati manfiy bo'lib chiqadi);

3. Xech qaysi doirachadan uchdan ortiq chiziq chiqmaydi;

4. $n \geq 3$ holda hech qanday ikki nuqta uchta chiziq bilan bog'lanishi mumkin emas, faqat $n = 2$ holdagina bu mumkin ((IV.3)-rasmga qarang); Yo'l qo'yilgan Dynkin sxemasida ba'zi-bir doirachalarni (va ulardan chiqqan chiziqlarni) o'chirib tashlasak yana yo'l qo'yilgan Dynkin sxemasi hosil bo'ladi.

(IV.4)-rasmda ko'rsatilgan sxemalar yo'l qo'yilmagan - taqiqlangan - sxemalardir chunki ulardagi ba'zi-bir chiziqlarni o'chirsak 3-chi punktga zid holga kelamiz - ba'zi-bir doirachalardan to'rtta chiziq chiqa boshlaydi. [13]-kitobning X-bob, §10 da (IV.5)-rasmda ko'rsatilgan sxemalardan boshqa Dynkin sxemalari bo'lishi mumkin emasligining isboti keltirilgan. O'z paytida (XIX-asrning ohirida) buyuk fransuz matematigi E.Cartan yarimsodda gruppalarning (algebralarning) klassifikatsiyasini yaratgan. Uning ko'rsatishi bo'yicha bu gruppalar $A_n\,(n \geq 1)$, $B_n\,(n \geq 2)$, $C_n\,(n \geq 3), D_n\,(n \geq 4)$ cheksiz seriyalarga (n - butun sonlar) va alohida deyiladigan beshta E_6, E_7, E_8, F_4 va G_2 gruppalarga bo'linadi. Dynkin sxemalaridan kelib chiqqan va (IV.5)-rasmda ko'rsatilgan klassifikatsiya mana shu Cartan seriyalari va alohida gruppapalariga mos keladi. Rasmda bu moslik ko'rsatilgan. Olingan har bir sxemani tahlil qilaylik. Bu tahlildan oldin §10.-paragrafdagi klassifikatsiyani yana bir marta ko'rib chiqqan yaxshi.



IV.5-rasm: Mumkin bo'lgan sxemalar

237-betda keltirilgan Ado teoremasi bo'yicha har bir Lie gruppasi $GL(n, C)$ matrik gruppaning bir qismgruppasi bo'ladi, shunga yarasha har bir Lie algebrasi $gl(n, C)$ matrik algebraning bir qismalgebrasi bo'ladi. Eslatib ketamiz, $GL(n, C)$ matritsalar aynimagan matritsalardir. Matritsalar chiziqli fazodagi chiziqli almashtirishlarni ifodalaydi. Gruppalar fizik sistemaning simmetriyasini ifodalaydi, shu sababdan bu chiziqli almashtirishlar shu fazoda berilgan skalar ko'paytmani saqlashi kerak. Bu quyidagicha ifodalanadi:

$$(g\phi, g\psi) = (\phi, \psi),$$

bu yerda $g \in G$ gruppa elementi. Generatorlarga o'tish uchun $g = g(t)$ deb olamiz:

$$(g(t)\phi, g(t)\psi) = (\phi, \psi).$$

Bu ifodadan t bo'yicha hosila olib $t = 0$ ga o'tamiz ((200)-ga qarang):

$$(X\phi, \psi) + (\phi, X\psi) = 0. \qquad (220)$$

Olingan munosabatga bo'ysunivchi X matritsalar Lie algebrasini tashkil qilishini ko'rish qiyin emas.

4.21-mashq. (220)-formulaga bo'ysunuvchi X va Y matritsalar uchun

$$([X, Y]\phi, \psi) + (\phi, [X, Y]\psi) = 0$$

bo'lishini ko"rsating.

Bu mashqdan kelib chiqadiki, (220)-formulaga bo'ysunuvchi (aynimagan) matritsalar to'plami Lie algebrasini tashkil qiladi. Bu matritsalar quyidagi klassik deyiladigan seriyalarga parchalanadi.

A_n seriya ($n \geq 1$)

$gl(n, C)$ to'plamdan izi nolga teng bo'lgan matritsalarni ajratib olamiz, ular qismto'plamni tashkil qiladi. Ular bilan, odatda, kvadratik formalar bog'lanmaydi. A_n deyiladigan seriyaga $sl(n+1, C)$ algebra mos keladi, bu algebra izi nolga teng bo'lgan $(n+1) \times (n+1)$ o'lchamli kompleks matritsalardan iborat. $SL(n, C)$ gruppasi $GL(n, C)$ ning determinanti birga teng qismto'plami edi, (I.134)-ayniyat bo'yicha bu gruppaning algebrasi izi nolga teng matritsalardan iborat bo'lishi kerak.

Masalan, $sl(2, C)$ algebra izi nolga teng 2×2 matritsalardan iborat. Lorentz gruppasini o'rganganda $SL(2, C)$ gruppasi $SO(3, 1)$ gruppasiga gomomorf ekanligini ko'rdik, ularning algebralari izomorf bo'ladi: $sl(2, C) \approx so(3, 1)$.

$sl(n+1, C)$ ning qismalgebralari sifatida $su(n)$, $sl(n, R)$, $su(p, q), p + q = n$ larni ko'rish mumkin.

$sl(n+1, C)$ ning o'lchamligini topaylik. $(n+1) \times (n+1)$ matritsaning o'lchamligi $(n+1)^2$ ga teng, uning izining nolga tengligi bitta shart, demak, $sl(n+1, C)$ ning mustaqil komponentalarining soni $(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$ ga teng ekan. Bu - algebradagi bazis elementlarining soni, bazisning o'lchamligi N = rang l + ildizlar soni edi. $sl(n+1, C)$ ning rangi n ga teng, demak, uning ildizlari soni $n^2 + 2n - n = n(n+1)$ ga teng.

B_n va D_n seriyalar.

Kvadratik forma (ϕ,ψ) haqiqiy va simmetrik bo'lsin: $(\phi,\psi) = \sum_i \phi_i\psi_i$. Qaralyapgan gruppa mana shu formani saqlaydi. Agar fazoning o'lchamligi $2n+1$ bo'lsa hosil bo'lgan algebra $so(2n+1,C)$ deb belgilanadi, uning boshqa nomi - B_n seriya. Agar fazoning o'lchamligi juft bo'lsa $so(2n,C)$ algebra hosil bo'ladi, u D_n seriya deyiladi. Bu algebralar ***ortogonal algebra*** deyiladi.

B_n ning o'lchamligi $2n^2+n$, D_n ning o'lchamligi $2n^2-n$. Bular quyidagicha topiladi. m o'lchamli matritsaning komponentalari soni m^2 ga teng, ortogonallaik shartlari $C_m^2+m=\frac{1}{2}m(m-1)+m=\frac{1}{2}m(m+1)$ ga teng. Demak, bunday matritsaning mustaqil komponentalari soni $m^2-\frac{1}{2}m(m+1)=\frac{1}{2}m(m-1)$ ga teng. $m=2n+1$ deyilsa $2n^2+n$ kelib chiqadi, $m=2n$ holida esa $2n^2-n$ ni olamiz. B_n ning ildizlari soni $2n^2$ ga teng, D_n ning ildizlari soni $2n^2-2n$ ga teng.

A_n va B_n lar qachon izomorf bo'lishi mumkin? Buning uchun $n^2+2n=2n^2+n$ bo'lishi kerak, bu esa faqat $n=0$ va $n=1$ dagina mumkin. Demak, $A_1 \approx B_1$. A_n va D_n lar izomorf bo'lishi uchun $n^2+2n=2n^2-n$, yoki, $n=3$ bo'lishi kerak. Demak, $A_3 \approx D_3$. B_n va D_n lar izomorf bo'lishi mumkin emas: $2n^2+n=2n^2-n$ tenglama faqat $n=0$ da bajariladi.

C_n seriya.

(ϕ,ψ) forma egrisimmetrik forma bo'lsin. Toq o'lchamlikli egrisimmetrik formaga aynigan matritsalar mos keladi, shuning uchun bu yerda faqat juft o'lchamli formalar ko'riladi. Masalan,

$$(\phi,\psi)=\phi_1^*\psi_{n+1}+\phi_2^*\psi_{n+2}+\cdots+\phi_n^*\psi_{2n}-\phi_{n+1}^*\psi_1-\cdots-\phi_{2n}^*\psi_n.$$

Bunday formalarni saqlaydigan algebralar C_n seriyaga taalluqlidir, odatda ular $sp(2n,C)$ deb belgilanadi. Bu formani matrik ko'rinishga keltirish uchun quyidagi ko'rinishdagi $2n\times 2n$ matritsa kiritiladi:

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsadagi har bir birlik matritsa I $n \times n$ matritsadir. Saqlanuvchi forma

$$(\phi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i^* J_{ij} \psi_j$$

yuqorida keltirilgan ko'rinishga ega. Bu holda $Sp(2n, C)$ gruppalar shunday P matritsalardan iboratki

$$(P\phi, P\psi) = (\phi, \psi)$$

bo'lsin. Y'ani, $P^T J P = J$ bo'lishi kerak.

C_n ning o'lchamligi $2n^2 + n$. A_n va C_n lar $n = 1$ dagina izomorf bo'lishi mumkin $A_1 \approx C_1$, C_n va D_n lar izomorf bo'la olmaydi. $A_1 \approx C_1$ va $A_1 \approx B_1$ dan $B_1 \approx C_1$ ekanligi kelib chiqadi. Ammo $n \geq 2$ bo'lganda B_n va C_n lar izomorf bo'la olmaydi. Buni quyidagicha tushunish mumkin. B_n va C_n larning ildizlar sistemasi ikki xil uzunlikdagi ildizlardan iborat, kalta vektorlarning soni B_n uchun $2n$ ga teng, C_n uchun esa u $2n^2 - 2$ ga teng. Bu sonlar $n > 2$ da teng bo'la olmaydi.

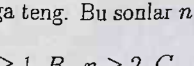
Bu izomorfizmlarni hisobga olib $A_n, n \geq 1$, $B_n, n \geq 2$, $C_n, n \geq 3$ va $D_n, n \geq 4$ deb yoziladi. D_2 ga kelsak u sodda algebraga tegishli emas, Dynkin sxemasidan ko'rinib turibdiki (IV.7-rasmga qarang), $D_2 \approx A_1 \oplus A_1$.

Shu yerda quyidagi tasdiqqa to'xtalib ketish joizdir: Lie algebrasi shunda sodda bo'ladiki qachonki uning Dynkin sxemasi o'zaro bog'lanmagan qismlarga parchalanmasa ([?], §95).

Maxsus (alohida) gruppalarning o'lchamliklari quyidagicha: G_2 - 14, F_4 - 52, E_6 - 78, E_7 - 133, E_8 - 248. Ularning nazariyasi o'ta murakkab.

§23.4. Birinchi va ikkinchi rang gruppalari

$SU(2)$ yoki $SO(3)$ gruppalarini eslaylik. Ular izomorf bo'lib uchta generatorga ega: J_1, J_2, J_3. Bu generatorlar orasidagi kommutatsion munosabatlar (105)-formulada berilgan: $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$, $i, j, k = 1, 2, 3$. Generatorlarning



IV.6-rasm: $SU(2)$ ($SO(3)$) gruppasining ildiz diagrammasi soni uchta, demak, $su(2)$ algebrasining tartibi ham uchga teng. (110)-bazisda J_3 operator diagonal ko'rinishga ega, demak, algebraning rangi birga teng, $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ operatorlar esa "ko'taruvchi" va "pasaytiruvchi" operatorlar rolini o'ynaydi: $[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$. J_i bazis ***unitar bazis*** deyiladi ($J_i^\dagger = J_i$ bo'lgai uchun bu bazisda gruppa elementi $g = \exp(iJ_i\alpha_i)$ unitar bo'ladi). Quyidagi ko'rinishga ega bo'lgan ***kanonik bazis***ga o'taylik:

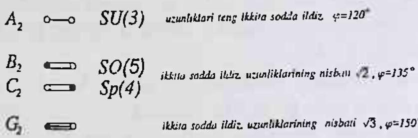
$$J_3 = H, \qquad E_{\pm 1} = \frac{J_1 \pm iJ_2}{\sqrt{2}}.$$

Bu bazisda

$$[H, E_{\pm 1}] = \pm E_{\pm 1}.$$

Demak, $r(+1) = +1, r(-1) = -1$. (IV.6)-rasmda bu ildizlar sistemasi ko'rsatilgan. Algebraning o'lchamligi uchga teng - ikkita ildiz + bitta rang. Shu ildizlardan bittasi - $r(+1) = +1$ - sodda ildiz, ikkinchisi - $r(-1) = -1$ - sodda emas.

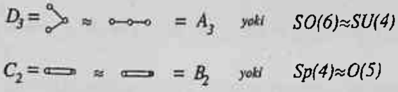
$l = 2$ holga - ikkinchi rang gruppalariga - o'taylik. IV.7-

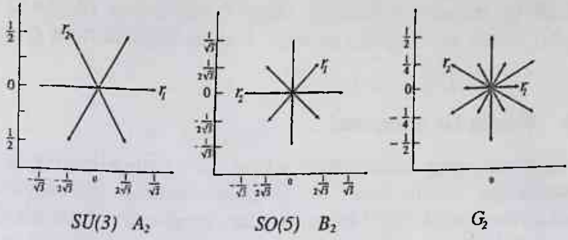


IV.7-rasm: Ikkinchi rang gruppalari yarim-sodda, $D_2 \approx A_1 \oplus A_1$

rasmda ikkinchi rang gruppalarining ildiz sistemalari haqida umumiy ma'lumotlar berilgan, algebralar uchun $D_2 = A_1 \bigoplus A_1$ munosabatni gruppalar tiliga o'tkazsak $SO(4) = SU(2) \bigotimes SU(2)$ bo'ladi. IV.8-rasmda D_3 va A_3, C_2 va B_2 algebralarining izomorfligi va ulardan kelib chiqadigan mos keluvchi gruppalarning izomorfligi ko'rsatilgan. Ikkinchi rang gruppalari uchun (IV.9)-rasmdagi diagrammalarni olamiz. Bu diagrammalarda to'liq ildizlar sistemasi berilgan, ularning ichida $\mathbf{r}_1$ va $\mathbf{r}_2$ deb belgilanganlari sodda ildizlarga mos keladi. birinchisi $\varphi = 120°$ ga, ikkinchisi

IV.8-rasm: Bazi-bir izomorf algebralar va ularga mos keluvchi gruppalar





IV.9-rasm: Ikkinchi rang gruppalarining ildiz diagrammalari

$\varphi = 135°$ va uchinchisi $\varphi = 150°$ ga to'g'ri keladi. Har bir ildiz diagrammasi tagida uning qaysi gruppaga mos kelishi ko'rsatilgan, yonida uning algebrasining belgisi ham keltirilgan.

(IV.9)-rasmning birinchi qismini olib qaraylik, unda $SU(3)$ gruppasining ildiz sistemasi ko'rsatilgan. Ildizlarni quyidagicha belgilaymiz: $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(2)$, $\mathbf{r}(3)$, $\mathbf{r}(-1) = -\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(-2) = -\mathbf{r}(2)$, $\mathbf{r}(-3) = -\mathbf{r}(3)$. Rasmdagi sodda ildizlarga $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(1)$ va $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(3)$ mos keladi. Ildizlar quyidagicha aniqlangan:

$$\mathbf{r}(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \quad \mathbf{r}(2) = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{r}(3) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right).$$

Har bir ildizning kvadrati $1/3$ ga teng. $\mathbf{r}(1)+\mathbf{r}(3)$ ham ildiz, $\mathbf{r}(1)+2\mathbf{r}(3)$ va $\mathbf{r}(1)-\mathbf{r}(3)$ lar esa ildiz emas. Demak, $p = 1$ va $q = 0$. Bu yerdan quyidagi kelib chiqadi:

$$N_{13} = -N_{31} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

(IV.9)-rasmdan va (218)-formulalardan foydalanib qolgan noldan farqli $N_{\alpha\beta}$ larni ham topish mumkin:

$$N_{-3,-1} = N_{3,-2} = N_{-2,1} = N_{2,-3} = N_{-1,2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Gruppadagi parametrlar soni ildiz vektorlari soni + rangga teng, $SU(3)$ uchun u 6+2=8 ga teng, $SO(5)$ uchun 10+2=12 ga teng, G_2 uchun esa 8+2=10 ga teng. Boshqa ikkinchi rang gruppa yo'q.

§23.5. Klassik Lie gruppalari

Lie algebralarining klassifikatsiyasidan Lie gruppalarining klassifikatsiyasiga o'tish lozim. Gruppa elementi va algebrasi orasidagi bog'lanish (201)-formula bilan aniqlanadi. Agar algebra izsiz matritsalardan iborat bo'lsa unga mos keluvchi element unimodular matritsa bo'ladi, ya'ni, $sl(n,C)$ algebraga $SL(n,C)$ gruppa mos keladi. Umuman olganda yarimsodda gruppalarning hammasi unimodular bo'ladi ([15], 3-bob). Fizikada eng ko'p qo'llaniladigan gruppalarnigina ko'rib chiqaylik.

A_{n-1} algebralarga quyidagi gruppalar mos keladi: $SL(n,C)$ va uning hususiy hollari: $SL(n,R)$, $SU(n)$, $SU(p,q)$, $p+q=n$. Bu gruppalarning ta'riflari §10.-paragrafda berilgan.

B_n algebralarga quyidagi ortogonal va psevdoortogonal gruppalar mos keladi: $SO(2n+1)$, $SO(p,q), p+q=2n+1$.

C_n algebralarga quyidagi simplektik gruppalar mos keladi: $Sp(n,C)$, $Sp(p,q), p+q=n$.

D_n algebralarga quyidagi ortogonal va psevdoortogonal gruppalar mos keladi: $SO(2n)$, $SO(p,q)$, $p+q=2n$.

Boshqa yarimsodda gruppalar ham bor, ammo ular tadbiqlarda kam uchraydi.

Mashqlarga ko'rsatmalar va ularning yechimlari

Ko'pgina mashqlarda ularning javoblari berilgan, shuning uchun bu yerda faqat qiyinchilik tug'dirishi mumkin bo'lgan mashqlarning yechimlari ko'rsatilgan.

1.1-mashq.

$$A'^i B'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A^j B_k = \delta^k_j A^j B_k = A^j B_j.$$

1.2-mashq. Maxwellning

$$\text{rot}\,\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{c\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \qquad \text{va} \qquad \text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{c\partial t}$$

tenglamalaridan foydalanib

$$\frac{c}{4\pi}\text{div}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right) - \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin. O'ng tomondagi birinchi had - elektromagnit maydon energiya zichligidan vaqt bo'yicha hosila, ikkinchi had - maydonning bir sekundda zaryadlar ustida bajargan ishi.

1.3-mashq.

$$(\text{rot}\,[\mathbf{A}\times\mathbf{B}])_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j(A_l B_m) =$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(B_m\partial_j A_l + A_l\partial_j B_m) =$$

$$= (\mathbf{B}\cdot\nabla)A_i - (\mathbf{A}\cdot\nabla)B_i + A_i\,\text{div}\,\mathbf{B} - B_i\,\text{div}\,\mathbf{A}.$$

1.4-mashq.

$$(\text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j[\text{rot}\,\mathbf{A}]_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m =$$

$$= \partial_i\,\text{div}\,\mathbf{A} - \Delta A_i.$$

1.5-mashq.

$$\partial_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \partial_i(A_j B_j) = B_j\partial_i A_j + A_j\partial_i B_j = B_j(\partial_i A_j - \partial_j A_i) + A_j(\partial_i B_j - \partial_j B_i) +$$

$$+ B_j\partial_j A_i + A_j\partial_j B_i = [(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\text{rot}\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\text{rot}\mathbf{B}]_i$$

1.6-mashq.

$$[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]^2 = (\varepsilon_{ijk}A_j B_k)^2 = \varepsilon_{ijk}A_j B_k\varepsilon_{ilm}A_l B_m =$$

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})A_j B_k A_l B_m = \mathbf{A}^2\,\mathbf{B}^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2.$$

1.7-mashq.

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = A_{jk}B_{ki} = A^T_{kj}B^T_{ik} = \left(B^T A^T\right)_{ij};$$

$AB(AB)^{-1} = (AB)^{-1}AB = I$ bo'lishi uchun $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ bo'lishi kerak;

$$\left((AB)^\dagger\right)_{ij} = \left((AB)^*\right)_{ji} = A^*_{jk}B^*_{ki} = B^\dagger_{ik}A^\dagger_{kj} = \left(B^\dagger A^\dagger\right)_{ij}.$$

1.11-mashq.

a) Pauli matritsalarining hammasining hususiy qiymatlari $\lambda = \pm 1$ ga teng. Mos keluvchi hususiy vektorlar:

$$\sigma_1 \text{ uchun} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_2 \text{ uchun} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix};$$

$$\sigma_3 \text{ uchun} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

matritsaning hususiy qiymatlari ± 1 ga tengligini va hususiy vektorlari mashqning shartida ko'rsatilganlarga tengligini topish qiyin emas.

1.12-mashq. $U^\dagger U = I$ dan $|\det U|^2 = 1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\det U = e^{i\alpha}$, α- haqiqiy son.

1.13-mashq. Unitar matritsa uchun $Ux = \lambda x$ dan $x^\dagger U^\dagger = x^\dagger U^{-1} = \lambda^* x^\dagger$ kelib chiqadi. Ohirgi tenglikni o'ng tomondan U ga ko'paytiramiz: $x^\dagger = \lambda^* x^\dagger U$, demak, $x^\dagger x = |\lambda|^2 x^\dagger x$, yoki, $\lambda = e^{i\alpha}$, $\alpha-$ haqiqiy son.

1.14-mashq. Haqiqiy antisimmetrik $A^\dagger = A^T = -A$ matritsa uchun $Ax = \lambda x$ dan $-x^\dagger A = \lambda^* x^\dagger$ kelib chiqadi. Birinchi tenglamani chapdan $x^\dagger$ ga, ikkinchini esa o'ngdan x ga ko'paytirib ikkalasini qo'shsak $||x||^2 = (x,x) \neq 0$ uchun $\lambda + \lambda^* = 0$ ekanligini topamiz. Demak, λ - mavhum son (yoki nol). Misol sifatida berilgan matritsaning hususiy qiymatlari quyidagicha: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i\sqrt{2}$, $\lambda_3 = -i\sqrt{2}$.

1.15-mashq.

$$\det e^A = \det \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{A}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \det\left(1 + \frac{A}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\det\left(1 + \frac{A}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\mathrm{Tr}A + O(1/n^2)\right)^n = e^{\mathrm{Tr}A}.$$

1.16-mashq.

a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$. Ularga quyidagi vektorlar mos keladi:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. Ularga quyidagi vektorlar mos keladi:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

c) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Ularga quyidagi vektorlar mos keladi:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad x_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Hususiy vektorlarni quyidagicha tanlash mumkin:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad x_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.1-mashq. Bu tenglama uchun rekurrent munosabat quyidagicha bo'ladi:

$$c_n \left\{ (n+s)^2 - (n+s)(\lambda + \mu) + \lambda\mu \right\} = 0.$$

$c_0 \neq 0$ bo'lishi kerak bo'lgani uchun $n = 0$ holda $s_1 = \lambda$, $s_2 = \mu$ kelib chiqadi. $n \neq 0$ bo'lganda bu tenglamaning birdan-bir yechimi $c_n = 0$ bo'lishi kerak. demak,to'liq yechim

$$u(w) = Aw^\lambda + Bw^\mu,$$

bo'lishi kerak, bu yerda A va B - noma'lum o'zgarmaslar.

2.2-mashq. Bu holda $s_1 = s_2 = \lambda$. Demak, $u_1 = w^\lambda$. Ikkinchi yechim

$$u_2 = u_1 \int \frac{d\zeta}{\zeta^{2\lambda}} \exp\left\{ -(1 - 2\lambda) \int^\zeta \frac{d\xi}{\xi} \right\} = w^\lambda \ln w.$$

2.3-mashq. Binomial qator

$$(1 - tz)^{-a} = \sum_{k=0} (-1)^k \frac{(-a)!}{(-a-k)!k!} (tz)^k = 1 - \frac{(-a)!}{(-a-1)!} tz + \frac{(-a)!}{(-a-2)!2!} t^2 z^2 - \cdots =$$

$$= 1 + atz + \frac{1}{2} a(a+1) t^2 z^2 + \cdots$$

dan foydalanish kerak.

2.4-2.7-mashqlar bevosita hisob orqali yechiladi.

3.1-mashq.

$$\int_{-1}^{1} dx(1-x^2)^n = \int_{-1}^{1} dx e^{n\ln(1-x^2)}.$$

$f(x)=\ln(1-x^2)$, $f'(x)=-2x/(1-x^2)$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-2$. Demak,

$$\int_{-1}^{1} dx e^{n\ln(1-x^2)} \approx \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

3.2-mashq.

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t^2\ln t} = -\frac{1}{t\ln t}\Big|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{dt}{t^2\ln^2 t} \approx \frac{1}{x\ln x} + O(1/x\ln^2 x).$$

3.3-mashq.

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln\ln t} = \int_2^x \frac{d(\ln t)}{\ln(\ln t)} = \frac{\ln t}{\ln\ln t}\Big|_2^x - \int_2^x \frac{dt}{t\ln^2\ln t} \sim \frac{\ln x}{\ln\ln x}.$$

3.4-mashq.

$$\int_0^x (t^2+t^3)^{1/2}dt = \int_0^x t(1+t)^{1/2}dt = \frac{2}{3}t(1+t)^{3/2}\Big|_0^x - \frac{2}{3}\int_0^x (1+t)^{3/2}dt =$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + \frac{5}{3} \sim \frac{2}{5}x^{5/2}.$$

3.5-mashq. Integralga asosiy hissani $t=0$ soha qo'shadi:

$$\int_0^1 dte^{-xt}\sin t \sim \int_0^\infty dte^{-xt}t = \frac{1}{x^2}.$$

3.6-mashq.

$$\int_x^\infty dt\frac{\sqrt{t}}{1+t^2} = x^{3/2}\int_1^\infty dz\frac{\sqrt{z}}{1+x^2z^2} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\int_1^\infty dz z^{-3/2} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

3.7-mashq.

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt^n}dt}{1+t} = \frac{1}{nx^{1/n}}\int_0^x \frac{e^{-z}}{1+(z/x)^{1/n}}z^{1/n-1}dz \sim \frac{1}{nx^{1/n}}\int_0^\infty e^{-z}z^{1/n-1}dz = \frac{\Gamma(1/n)}{nx^{1/n}}.$$

3.9-mashq. $\sin^x t = e^{x \ln \sin t}$ deb belgilaymiz. Integralga asosiy hissani $t = \pi/2$ nuqta atrofi qo'shadi, bu nuqta atrofida

$$\ln \sin t \simeq -\frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cdots$$

Demak,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^x t dt \simeq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{1}{2}x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2} dt \sim \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

3.10-mashq. Eksponentadagi $f(x) = -x^2 - 2x$ funksiya $x = 0$ nuqtada maksimumga ega (integrallash sohasida). Demak, $\lambda \to \infty$ da integralga asosiy hissani $x = 0$ soha qo'shadi:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda(x^2+2x)}(1+x)^{5/2} dx \simeq \int_0^{\infty} e^{-2\lambda x}\left(1 + \frac{5}{2}x\right) dx \sim \frac{1}{2\lambda}.$$

3.11-mashq.

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda(x^2+2x)} \ln(1+x) dx \simeq \int_0^{\infty} e^{-2\lambda x} x dx \sim \frac{1}{4\lambda^2}.$$

3.12-mashq. Eksponentadagi funksiyaning maksimumi $x = 0$ nuqtaga to'g'ri keladi, shuning uchun $\ln(1+x+x^2)$ funksiyani ham $x = 0$ nuqta atrofida qatorga yoyamiz va birinchi noldan farqli hadni qoldiramiz:

$$\ln(1 + x + x^2) \simeq x + x^2 - \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + \cdots = x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots .$$

Natijada

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \ln(1 + x + x^2) dx \sim \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\lambda^{-3/2}.$$

3.13-mashq. Ikkinchi tenglik belgisidan keyin paydo bo'lgan integralga $x \to \infty$ da asosiy hissa qo'shadigan soha $t = 1$ nuqta atrofi.

$$\int_x^{\infty} t^{\alpha} e^{-t^{\beta}} dt = x^{\alpha+1}\int_1^{\infty} dz z^{\alpha} e^{-x^{\beta} z^{\beta}} = \frac{1}{\beta}x^{\alpha+1}\int_1^{\infty} dt t^{-1+(\alpha+1)/\beta} e^{-x^{\beta} t} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{\beta}x^{\alpha+1}\int_1^{\infty} dt \left(1 + (t-1)(-1 + (\alpha+1)/\beta)\right) e^{-x^{\beta}[(t-1)+1]} \sim \frac{1}{\beta}x^{\alpha+1-\beta} e^{-x^{\beta}}.$$

3.14-mashq. $x = y + 1$ almashtirish bajaramiz:

$$\int_1^\infty dx \frac{e^{-\lambda x^2}}{\sqrt{x+3x^2}} = e^{-\lambda} \int_0^\infty dy \frac{e^{-2\lambda y - \lambda y^2}}{\sqrt{4+7y+3y^2}} \sim \frac{1}{2} e^{-\lambda} \int_0^\infty dy e^{-2\lambda y} = \frac{e^{-\lambda}}{4\lambda}.$$

3.15-mashq.

$$\int_0^1 dt e^{i\lambda t^3} = \int_0^1 d\rho e^{i\pi/6} e^{-\lambda\rho^3} + i \int_0^{\pi/6} d\varphi e^{i\varphi} e^{i\lambda e^{3i\varphi}}.$$

$\lambda \to \infty$ da ikkinchi integral nolga intiladi, birinchisi esa kerakli natijani beradi:

$$\int_0^1 dt e^{i\lambda t^3} \sim \int_0^\infty d\rho e^{i\pi/6} e^{-\lambda\rho^3} = e^{i\pi/6} \frac{1}{3\lambda^{1/3}} \int_0^\infty dy y^{-2/3} e^{-y} = \frac{e^{i\pi/6}\Gamma(1/3)}{3\lambda^{1/3}}.$$

3.16-3.17-mashqlar huddi shunday yechiladi.

3.18-mashq. 1. $t = z + 1$ almashtirishdan boshlaymiz va hosil bo'lgan integralga $z \simeq 0$ soha asosiy hissa qo'shishini hisobga olamiz:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} dt = e^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{\sqrt{2z+z^2}} dz \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{\sqrt{z}} dz =$$

$$= \sqrt{2} e^{-x} \int_0^\infty dt e^{-xt^2} = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

4. Ikkinchi va uchinchi misollar shu misolning hususiy holidir. Integralga katta x larda asosiy hissa qo'shadigan soha - $t = 1$ atrofi. Shuning uchun $t = y + 1$ almashtirish bajaramiz:

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{2e^{ix}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ixy}}{\sqrt{-2y-y^2}} dy \simeq -\frac{\sqrt{2}e^{ix}}{i\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ixy}}{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \frac{i2\sqrt{2}e^{ix}}{i\pi} \int_0^\infty e^{ixt^2} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x-\pi/4)}.$$

5. Asosiy hissani $\theta = 0$ soha qo'shadi:

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x\cos\theta} \cos(n\theta) d\theta \simeq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x(1-\theta^2/2)} \left(1 - \frac{1}{2} n^2 \theta^2\right) d\theta \simeq$$

$$\simeq \frac{e^x}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\theta^2/2}d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x.$$

4.1-mashq.

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_3\cos\beta - x_1\sin\beta & x_1\cos\beta + x_3\sin\beta - ix_2 \\ x_1\cos\beta + x_3\sin\beta + ix_2 & -x_3\cos\beta + x_1\sin\beta \end{pmatrix},$$

yoki,

$$x_1' = x_1\cos\beta + x_3\sin\beta, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = -x_1\sin\beta + x_3\cos\beta.$$

4.2- va 4.3-mashqlar bevosita hisoblanadi.

4.4-mashq. Umumiy holda

$$(T_a)^i_j(T_a)^k_l = a\delta^i_j\delta^k_l + b\delta^i_l\delta^k_j.$$

Bundan boshqa strukturani tuzib bo'lmaydi. i va j indekslar bo'yicha yig'indi olinsa (yoki k va l indekslar bo'yicha) T_a larning izsizligidan $a = -\frac{1}{n}b$ ekanligi topiladi. Endi j va k bo'yicha soddalashtiramiz, undan keyin i va l bo'yicha. $\mathrm{Tr}(T_a^2) = \frac{1}{2}(n^2-1)$ ligidan (a bo'yicha yig'indi bor) foydalanilsa (153)-formula kelib chiqadi.

Huddi shu munosabatni quyidagi yo'l bilan ham keltirib chiqarish mumkin. $su(n)$ algebrasining ixtiyoriy elementi A ni T_a lar bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$A = c_0 I + \sum_{a=1}^{n^2-1} c_a T_a.$$

A ning izini hisoblaymiz: $\mathrm{Tr}A = c_0 n$. Demak, $c_0 = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}A$. Endi $T_a A$ ning izini hisoblaymiz:

$$\mathrm{Tr}(T_a A) = \frac{1}{2}c_a \qquad \Rightarrow \qquad c_a = 2\mathrm{Tr}(T_a A).$$

Demak,

$$A^i_j = \frac{1}{n}A^k_k\delta^i_j + 2\sum_{a=1}^{n^2-1}(T_a)^k_l A^l_k (T_a)^i_j = \left(\frac{1}{n}\delta^i_j\delta^l_k + 2\sum_{a=1}^{n^2-1}(T_a)^l_k(T_a)^i_j\right)A^k_l.$$

Bu formulaning chap va o'ng tomonlari teng bo'lishi uchun (153)-formula o'rinli bo'lishi kerak.

4.5-mashq.

$$\sum_{a=1}^{n^2-1}(T_aT_a)^i_j = \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{n}\right)\delta^i_j = C_2(R)\delta^i_j;$$

$$\sum_c (T_cT_aT_c)^i_l = \sum_c (T_c)^i_j(T_a)^j_k(T_c)^k_l = \frac{1}{2}(T_a)^j_k\left(\delta^i_l\delta^k_j - \frac{1}{n}\delta^i_j\delta^k_l\right) = -\frac{1}{2n}(T_a)^i_l;$$

$$\sum_{c,d} f_{acd}f_{bcd} = -4\sum_{c,d}[T_a,T_c]^i_j(T_d)^j_i[T_b,T_c]^k_l(T_d)^l_k =$$

$$= -2\sum_c [T_a,T_c]^i_j[T_b,T_c]^k_l\left(\delta^j_k\delta^l_i - \frac{1}{n}\delta^j_i\delta^l_k\right) = -2\sum_c [T_a,T_c]^i_j[T_b,T_c]^j_i =$$

$$= 2\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{n}T_aT_b + C_2(R)T_aT_b\right] = n\delta_{ab};$$

$$\sum_{b,c} f_{abc}(T_bT_c)^i_l = -2i\sum_{b,c}[T_a,T_b]^j_k(T_c)^k_j(T_b)^i_m(T_c)^m_l =$$

$$= -i\sum_b\left(\delta^k_l\delta^m_j - \frac{1}{n}\delta^k_j\delta^m_l\right)[T_a,T_b]^j_k(T_b)^i_m = -i[T_a,T_b]^j_l(T_b)^i_j =$$

$$= i(T_b[T_a,T_b])^i_l = i\left(C_2(R) + \frac{1}{2n}\right)(T_a)^i_l = i\frac{n}{2}(T_a)^i_l.$$

4.6-mashq undan keyingi misolda ko'rsatilgandek yechiladi.
4.7-mashq.

$$[w_\mu, P_\nu] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}[P^\lambda M^{\rho\sigma}, P_\nu] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}P^\lambda[M^{\rho\sigma}, P_\nu] =$$

$$= \frac{i\hbar}{2}\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}P^\lambda\left(P^\rho\delta^\sigma_\nu - P^\sigma\delta^\rho_\nu\right) = 0,$$

chunki bu ifodadagi ikkala had ham simmetrik va antisimmetrik indekslarning yig'indisi bo'lib chiqdi.

$$[M_{\lambda\mu}, w_\nu] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\nu}[M_{\lambda\mu}, P^\alpha M^{\beta\sigma}] = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\nu}\left([M_{\lambda\mu}, P^\alpha]M^{\beta\sigma} + P^\alpha[M_{\lambda\mu}, M^{\beta\sigma}]\right),$$

(171)- va (172)-formulalarni qo'llash qoldi.
4.8-mashq.

$$w^2 = \frac{1}{4}\varepsilon^{\nu\lambda\sigma\mu}\varepsilon_{\tau\rho\pi\mu}P_\nu M_{\lambda\sigma}P^\tau M^{\rho\pi} = \frac{1}{2}\left[P_\nu M_{\lambda\sigma}P^\nu M^{\lambda\sigma} + P_\nu M_{\lambda\sigma}P^\sigma M^{\nu\lambda} +\right.$$

$$\left.+P_\nu M_{\lambda\sigma}P^\lambda M^{\sigma\nu}\right] = \frac{1}{2}P_\nu\left([M_{\lambda\sigma}, P^\nu] + P^\nu M_{\lambda\sigma}\right)M^{\lambda\sigma} + \frac{1}{2}P_\nu\left(3i\hbar P_\lambda + P^\sigma M_{\lambda\sigma}\right)M^{\nu\lambda}$$

$$+\frac{1}{2}P_\nu\left(-3i\hbar P_\sigma + P^\lambda M_{\lambda\sigma}\right)M^{\sigma\nu} = \frac{1}{2}P^2M^2 - P_\nu P^\sigma M_{\sigma\lambda}M^{\nu\lambda}.$$

4.9-mashq. Bittasini ko'rsataylik:

$$[P_\mu, w^2] = \frac{1}{2}P^2[P_\mu, M^2] - P_\nu P^\sigma[P_\mu, M_{\sigma\lambda}M^{\nu\lambda}].$$

Bu ifodaga quyidagilarni qo'yamiz:

$$[P_\mu, M_{\lambda\sigma}M^{\lambda\sigma}] = 2i\hbar(P^\nu M_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}P^\nu);$$

$$P_\nu P^\sigma[P_\mu, M_{\sigma\lambda}M^{\nu\lambda}] = -2i\hbar P^2 P^\nu M_{\nu\mu} - 3\hbar^2 P_\mu P^2.$$

Natijada

$$[P_\mu, w^2] = i\hbar P^2(M_{\mu\nu}P^\nu + P^\nu M_{\nu\mu}) + 3\hbar^2 P_\mu P^2 = i\hbar P^2[M_{\mu\nu}, P^\nu] + 3\hbar^2 P_\mu P^2 = 0.$$

4.10-mashq. Mashqda berilgan ko'rsatmalarga rioya qiling.

4.11-mashq.

$$\varphi^i(a, a^{-1}) = 0 = a^i + (a^{-1})^i + g^i_{jk}a^j(a^{-1})^k + \cdots$$

dan quyidagi kelib chiqadi:

$$(a^{-1})^i = -a^i - g^i_{jk}a^j(a^{-1})^k + \cdots = -a^i + g^i_{jk}a^j a^k + \cdots.$$

4.12-mashq. Yuqori tartibli hadlarni yozib o'tirmaymiz:

$$\varphi^i((ba)^{-1}) = -(ba)^i + g^i_{jk}(ba)^j(ba)^k = -a^i - b^i - g^i_{jk}b^j a^k + g^i_{jk}(ba)^j(ba)^k =$$

$$= -a^i - b^i + g^i_{jk}\left[-b^j a^k + (ba)^j(ba)^k\right] = -a^i - b^i + g^i_{jk}(b^j b^k + a^j b^k + a^j a^k).$$

Kommutator:

$$q^i = \varphi^i(ab, (ba)^{-1}) = (ab)^i + ((ba)^{-1})^i + g^i_{jk}(ab)^j((ba)^{-1})^k =$$

$$= g^i_{jk}(a^j b^k - b^j a^k) = (g^i_{jk} - g^i_{kj})a^j b^k = c^i_{jk}a^j b^k.$$

4.13-mashq. $q = 1$ degani koordinatalar tilida $q^i = 0$ deganiga teng, bu holda $c^i_{jk} = 0$ bo'lishi kerak.

4.14-mashq. (198)-formula ochib chiqilsa u bilan (182)-formula ekvivalent ekanligi darhol ko'rinadi.

4.15-mashq.

$$g_{kl,pr} = c^{ij}_{kl,mn}c^{mn}_{pr,ij} = (\delta^i_k\delta_{lm}\delta^j_n - \delta^i_m\delta_{nk}\delta^j_l)(\delta^m_p\delta_{ri}\delta^n_j - \delta^m_i\delta_{jp}\delta^n_r) = 2(n\delta_{kr}\delta_{pl} - \delta_{kl}\delta_{pr}).$$

4.16-mashq.

$$g_{ij,pr} = c^{mn}_{ij,kl}c^{kl}_{pr,mn} = \left[\delta^n_l(\delta^m_i\delta_{jk} - \delta^m_j\delta_{ik}) - \delta^n_k(\delta^m_i\delta_{jl} - \delta^m_j\delta_{il})\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\delta^l_n(\delta^k_p\delta_{rm} - \delta^k_r\delta_{pm}) - \delta^l_m(\delta^k_p\delta_{rn} - \delta^k_r\delta_{pn})\right] = (2n-4)(\delta_{jp}\delta_{ir} - \delta_{ip}\delta_{jr}).$$

4.17-mashq. Birinchi bobdagi (43)-formulaning ikkinchi qismidan foydalaning (i ni ham hisobga oling).

4.18-mashq. Hamma indekslarni quyi deb olamiz:

$$[C, X_i] = g_{kl}[X_k X_l, X_i] = -c_{kmn}c_{lmn}(X_k X_l X_i - X_i X_k X_l) =$$

$$= -c_{kmn}c_{lmn}\left(c_{kis}X_sX_l + c_{lis}X_kX_s\right) = -c_{kmn}(c_{lmn}c_{kis} + c_{smn}c_{kil})X_sX_l =$$
$$= (g_{kl}c_{kis} + g_{ks}c_{kil})X_sX_l = \mathrm{const}(c_{lis} + c_{sil})X_sX_l = 0.$$

4.19-mashq. Yacobi ayniyatidan birinchi bosqichda quyidagi kelib chiqadi:

$$N_{\beta\gamma}[E_\alpha, E_{\beta+\gamma}] + N_{\gamma\alpha}[E_\beta, E_{\gamma+\alpha}] + N_{\alpha\beta}[E_\gamma, E_{\alpha+\beta}] = 0.$$

Uchala vektorning yig'indisi nolga tengligini hisobga olsaylik:

$$N_{\beta\gamma}\mathbf{r}(\alpha)\cdot\mathbf{H} + N_{\gamma\alpha}\mathbf{r}(\beta)\cdot\mathbf{H} + N_{\alpha\beta}\mathbf{r}(\gamma)\cdot\mathbf{H} = 0.$$

Uchala vektorning noldan farqliligi va $\mathbf{r}(\alpha) + \mathbf{r}(\beta) + \mathbf{r}(\gamma) = 0$ munosabatning ham bajarilishi kerakligi $N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta}$ ekanligini bildiradi.

4.20-mashq. Ikkita N larning ko'paytmasilik hadlarning yig'indisi nolga teng, qolgani: $\mathbf{r}(\alpha)\cdot\mathbf{r}(\beta)(1+p+q) + \frac{1}{2}\mathbf{r}^2(\alpha)(1+p+q)(p-q) = 0$. Bu yerdan (213)-formula darhol kelib chiqadi.

4.21-mashq. X va Y uchun (220)-bajarilsa va Lie ko'paytmasi $[X, Y] = XY - YX$ ko'rinishga ega bo'lsa

$$([X,Y]\phi,\psi) = ((XY - YX)\phi,\psi) = (XY\phi,\psi) - (YX\phi,\psi) =$$
$$= (\phi, YX\psi) - (\phi, XY\psi) = -(\phi, [X,Y]\psi)$$

bo'ladi.

Adabiyotlar

[1] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., Наука (1969).

[2] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа, тт.1, 2. Москва, Физматгиз (1963)

[3] Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., ИЛ (1959)

[4] Сокольников И.С. , Тензорный анализ. М., Наука (1971).

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.1, М., Наука (1973)

[6] Лаврентьев М.А., Шабад Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, М., Наука (1973)

[7] Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды, М: Наука, (1987)

[8] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции, М: Мир (1990)

[9] Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений, М: Мир (1978)

[10] Вигнер Ю. Теория групп, М., Физматгиз (1961).

[11] Петрашень М.И., Трифонов Е.А. Применение теории групп в квантовой механике. М., Наука (1967)

[12] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы, М., Наука (1973).

[13] Наймарк М.А. Теория представлений групп, М., Наука (1976).

[14] Гюрши Ф. Лекции по теории групп. Сб.статей "Теория групп и элементарные частицы", М,. Мир (1967).

[15] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. М., Мир, т1, т2. (1980)

[16] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, М., Наука, 1986.

[17] Fayzullayev B.A., Rahmatov A.S. Matematik fizika metodlari. T, "Universitet", (2014).

MUNDARIJA

IV GRUPPALAR NAZARIYASI

Петрашин Трефилова

Fayzullayev Biruniy Amanullaevich

NAZARIY FIZIKANING MATEMATIK USULLARI

Toshkent – «Barkamol fayz media» – 2016

Muharrir: A.Eshov
Tex. muharrir: M.Xolmuhamedov
Musavvir: D.Azizov
Musahhih: D.Bohidova
Kompyuterda sahifalovchi: Sh.Mirqosimova

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Tel: 245-57-63, 245-61-61.
Nashr.lits. AI№284, 12.08.16. Bosishga ruxsat etildi: 22.12.2016.
Bichimi 60x84 1/16. «Time Uz» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi. Shartli bosma tabog'i 16,75.
Nashriyot bosma tabog'i 17,0. Tiraji 300. Buyurtma №273.

«Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi»da chop etildi.
100066, Toshkent sh., Olmazor ko'chasi, 171-uy.