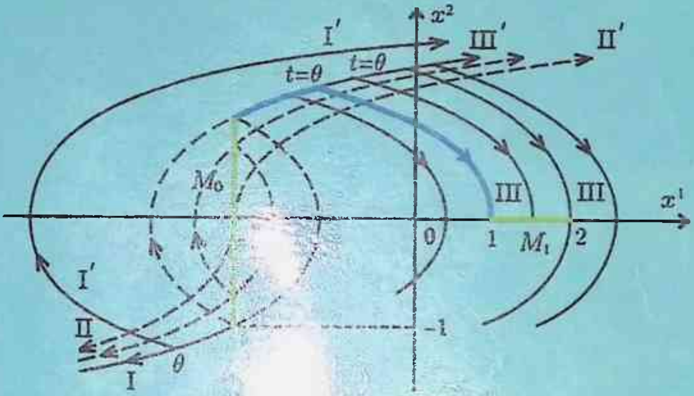
V.I. BLAGODATSKIX

OPTIMAL BOSHQARUVGA KIRISH



TOSHKENT

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

V.I. BLAGODATSKIX

OPTIMAL BOSHQARUVGA KIRISH

(Chiziqli nazariya)

(Darslik)

TOSHKENT – 2019

UO‘K: 517.977.5(042)
KBK 22.18ya7
B 76

B 76 **V.I. Blagodatskix. Optimal boshqaruvga kirish. –T.: «Fan va texnologiya», 2019, 248 bet.**

ISBN 978–9943–11–959–8

Darslik 12 ta ma’ruzadan iborat bo‘lib, zaruriy matematik tushunchalar (qavariq analiz asoslari, tayanch funksiyalar nazariyasi, ko‘p qiymatli akslantirishlar nazariyasidan ma’lumotlar) va optimal tezkorlikning chiziqli masalalari batafsil bayon etilgan. Qo‘shimchada texnik jihatdan o‘ta murakkab natijalarning isbotlari keltirilgan.

Oliy o‘quv yurtlari talabalari, shuningdek, o‘z faoliyatida optimal boshqaruvning matematik nazariyasidan foydalanuvchi aspirantlar va ilmiy xodimlar uchun mo‘ljallangan.

UO‘K: 517.977.5(042)
KBK 22.18ya7

Tarjimonlar:
G‘. M. Mo‘minov, M. To‘xtasinov

Taqrizchilar:
G.N.Yakovlev – fiz.mat. fan. doktori, RFA muxbir a’zosi, prof.;
M.S.Nikolskiy – fiz.mat. fan. doktori, prof.

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Uslubiy kengashining 2018-yil 13-iyuldagi 8-sonli qaroriga asosan chop etildi.

ISBN 978–9943–

MUALLIF HAQIDA

Viktor Ivanovich Blagodatskix 1946 yil 18 mayda oilada to‘qqiz nafar farzand bo‘lgan Udmurt qishlog‘i Syumsining katta oilasida tavallud topdi. O‘quvchilik yillarida u maktabdagi turli tashkil qilingan to‘garaklarda faol ishtirok etuvchi o‘smir bo‘lib, uning ishtirokisiz matematika, kimyo va fizika fanlari bo‘yicha hech bir respublika olimpiadasi o‘tmas edi. Ko‘p hollarda u g‘olib chiqardi. Xuddi shuning uchun u 1963 yilda Moskva shahri bo‘sag‘asida tashkil etilgan yozgi Kolmogorov matematika maktabiga qabul qilindi. Bu esa uning kelgusi taqdiriga ta’sir ko‘rsatdi. U o‘rta maktabni tamomlagandan so‘ng Moskva davlat universitetining mexanika-matematika fakultetiga o‘qishga kirdi.

Talabalik yillari uning uchun eng baxtli yillari bo‘ldi. Hayotga bo‘lgan katta qiziqishi va jo‘shqin matonati mamlakatning eng buyuk oliy o‘quv yurtida o‘qish bilan birga alpinizm, speleologiya, turizm, parashyutdan sakrash, suvga sakrash kabi qiziqarli sport mashg‘ulotlarini uyg‘unlikda olib bordi. Yoshlik yillarida o‘zining eng katta boyligi bo‘lgan ko‘plab do‘stlar orttirdi. U kishilar bilan oson muomalaga kirishib ketar, ularni sevar va shuning uchun u bo‘lgan joyda muhabbat va zavq hamohang edi. O‘sha vaqtdayoq, speleologiya bo‘limida o‘zining muhabbati va taqdirini topdi.

MDUni tamomlagandan so‘ng, jahonga mashxur matematik inson akademik Lev Semenovich Pontryagin o‘quvchilari davrasiga tushish baxtiga muyassar boldi. Bu vaqtda Viktor Ivanovich o‘z hayotining butun davri bo‘lgan optimal boshqaruvning matematik nazariyasi bilan jiddiy shug‘ullanishni boshladi. U V.A.Steklov nomidagi Matematika instituti (FAMI) aspiranturasini tamomladi va hayotining so‘nggi kunigacha shu yerda ishladi.

Uning nomzodlik va doktorlik dissertatsiyalari differensial mansublik usullarini qo‘llab, optimal boshqaruvning matematik nazariyasining rivojlanishiga bag‘ishlangan. Bu tadqiqotlar xalqaro matematika ommasiga yaxshi ma’lum.

Uzoq yillar Viktor Ivanovich akademik L.S.Pontryaginning ko‘p qirrali ilmiy faoliyatida yordamchi bo‘ldi. 1973 yilda MDUning hisoblash matematikasi va kibernetikasi fakulteti tashkil topgandan boshlab L.S.Pontryagin raxbarligida optimal boshqaruv kafedrasi yaratildi, va Viktor Ivanovich o‘quv jarayonini tashkil etishda o‘zining munosib hissasini qo‘shdi. U fakultet talabalari tomonidan muvaffaqiyat bilan foydalanilgan "Optimal boshqaruv" ma'ruzalar kursini ishlab chiqdi va ko'p yillar o'qidi.

Bu ma'ruzalar asosida dastlab uning tomonidan yozilgan "Optimal boshqaruvning chiziqli nazariyasi" (M.: MDU nashriyoti, 1978) va "Differensial mansublik nazariyasi" I-qism (M.: MDU nashriyoti, 1979) o'quv qo'llanmalari optimal boshqaruv moskva matematika maktabi ko'plab mutaxassislari qarashlarining shakllanishida muhum rol o'ynadi. Umuman Viktor Ivanovich ajoyib o'qituvchi edi. Uning o'quvchilari orasida bir necha fizika – matematika fanlari doktorlari va ko'plab nomzodlar bor. O'zining ma'ruzalar matnini o'quvchilariga qoldirdi. Bugungi kunda V.I.Blagodatskix asos solgan bu ma'ruzalar kursi yashab kelmoqda va rivojlanmoqda.

O'quvchilarga taqdim etilayotgan "Optimal boshqaruv nazariyasiga kirish" kitobi professor V.I. Blagodatskixning ko'p yillik pedagogik ishining o'ziga xos natijasidir. Bu kitob muallif tomonidan ham chiziqli, ham nochiziqli hollarda nazariyaning barcha asosiy natijalarini o'zida mujassamlashtirgan predmetga kirishning o'ylangan maxsulidir. Keltirilgan material ikki semestr ma'ruzalari uchun mo'ljallangan.

Viktor Ivanovich o'zining barcha rejalashtirilgan g'oyalarini oxirigacha tamomlamasdan 1998 yil 5 avgustda ellik uch yoshida to'satdan vafot etdi.

U chiziqli nazariyaga mo'ljallangan kitobning faqat birinchi qismini yozishgagina ulgirdi.

Kitob qo'lyozmasini nashrga Viktor Ivanovichning kafedra boyicha hamkasblari tayyorladilar. Qo'lyozmasini nashrga tayyorlashda uning o'quvchisi fiz.-mat. fanlari doktori, prof. Sergey Mironovich Aseev asosiy vazifani bajardi va u tomonidan kitobga qo'shimcha material "Holatning umumiylik sharti" (12-ma'ruza) paragraf kiritildi.

I.V.Blagodatskix

SO‘ZBOSHI

Fundamental fanlar bo‘yicha mutaxassislar tayyorgarlik darajasini va insonning qalb boyligini boyitish asosida insonparvarlik madaniyatini aniqlashda bilimlar sistemasini egallash, tarixan Rossiyada chegaralangan sondagi maktablarning ta’lim to‘g‘risidagi dasturlaridan o‘rin olgan.

Ta’lim to‘g‘risidagi masalani sharhlab, akademik A.N.Krilov shunday degan edi: “Maktab to‘la tugallangan bilimlar sistemasini berishi mumkin emas; maktabning eng asosiy masalasi-umumiy rivojlantirishga yo‘naltirish, zarur malakalarni shakllantirish, bir so‘z bilan aytganda ... maktabning asosiy masalasi-o‘qishni o‘rganish, va maktabda *o‘qishni o‘rganish*, amaliy faoliyatda butun umr kishilarning eng yaxshi maktabi bo‘ladi”.

Vatanimiz maktablarining eng muhim xususiyati, mulohazalarning mazmunan chuqur va sodda bo‘lishi, muayyan ma’lumotlarni bayon etishda, formal tuzilishlarda berishni maqbul bo‘ladigan ko‘rinishlarini doimo uzviy bog‘lashdan iborat ekanligidir. Berilgan g‘oyalarni amaliyotga tadbiq qilishda yuqori malakali mutaxassislar va ijodiy fikrlovchi o‘qituvchilarning mavjudligidir.

Matematik ta’lim va matematik madaniyat ilmiy bilimlarning asosini tashkil qiladi va matematikaning ahamiyati - fundamental tadqiqotlarning doimiy o‘sishi natijasidir.

Bu masalalarni yechish uchun, tadqiqotlarning hozirgi holatini to‘laroq aniqlikda, berilgan fan sohasining dunyoviy prinsiplarini o‘zida qamrab oluvchi darsliklar talab qilinadi. “Oliy matematika” turkumida taqdim etilayotgan matematika bo‘yicha tanlangan darsliklar yuqorida ko‘rsatilgan uslubni amalga oshiradi. Bu darsliklar asosan M.V.Lomonosov nomidagi Moskva davlat universiteti professorlari tomonidan yozilgan.

V.I.Blagodatskixning “Optimal boshqaruv nazariyasiga kirish (chiziqli nazariya)” kitobi muallif tomonidan ko‘p yillar mobaynida M.V.Lomonosov nomidagi Moskva davlat universiteti, hisoblash matematikasi va kibernetika fakultetida o‘qilgan ma’ruzalari kursining o‘quv qo‘llanmasidir. Muallif tomonidan materiallarni bayon etish uslubi, na faqat boshqaruv nazariyasini yetarlicha tugallangan ko‘rinishda qurish imkoniyatini bermasdan, balki kitobni o‘qishga kirishgan boshlovchilar uchun ham qulayligidir. Kitob keng kitobxonlar ommasiga mo‘ljallangan, ammo birinchi navbatda amaliy matematika talabalari, aspirantlar va mutaxassislar, amaliy matematika sohasida tadqiqotlar olib borayotganlarga qaratilgan.

Berilgan turkumda Arxipov G. I., Sadovnichiy V. A., Chubarikov V. N. "Matematik analiz bo'yicha ma'ruzalar", Vinogradov I. M. "Oliy matematika elementlari (Analitik geometriya. Differensial hisob. Sonlar nazariyasi asoslari.)", Privalov I. I. "Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasiga kirish", Sadovnichiy V.A. "Operatorlar nazariyasi", Gashkov S. B., Chubarikov V. N. "Arifmetika. Algoritmlar. Murakkab hisoblashlar", Nechayev V. I. "Kriptografiya elementlari (ma'lumotlarni himoya qilish nazariyasi)", Vinogradova I. A., Olexnik S. A., Sadovnichiy V. A. "Matematik analiz bo'yicha mashq va masalalar" (1-va 2-tomlar), Baxvalov N. S., Lapina A. V., Chijonkova E. V. "Masalalar va mashqlarda sonli usullar", Yablonskiy S. V. "Diskret matematikaga kirish" darslik va o'quv qo'llanmalar chop etilgan.

Ko'rsatilgan kitoblar yuqori darajadagi matematik tayyorgarlik talab qilingan oliy o'quv yurtlari uchun oliy matematika bo'yicha asosiy darsliklarning yangi turkumining boshlanishiga asos bo'ladi deb umid qilaman.

Bu turkumning amaliy ahamiyatidan tashqari rus olimlari va pedagog matematiklarining matematikadan asosiy darsliklar yaratish bo'yicha ikkinchi ming yillikning oxiri va uchinchi ming yillikning boshlanishida qilgan ishlarining qandaydir jamlamasi hamdir. Turkum ko'rsatilgan adabiyotlar bilan tugallanmaydi. Kelgusida yuqorida bayon etilgan talablarga javob beradigan, o'zining yangiligi va dolzarligini yo'qotmagan, talabalar va pedagoglar o'rtasida ommabob va mashhur bo'lgan, foydanalanilayotgan hozirgi zamon va klassik darsliklarni tanlash va nashr qilishni davom ettiriladi.

Rossiya fanlar akademiyasining
Akademigi – V. A. Sadovnichiy

- *Optimal boshqaruv masalasining umumiy ko'rinishda qo'yilishi: obyektning harakat dinamikasi, joiz boshqaruvlar sinfi, obyektning boshlang'ich va so'nggi holati, sifat kriteriyasi.*
- *Optimal boshqaruv matematik nazariyasining asosiy masalalari: boshqaruvchanlik, optimal boshqaruvning mavjudligi, optimallikning zaruriy sharti. Optimallikning yetarli sharti, optimal boshqaruvning yagonaligi.*
- *Chiziqli tezkorlik masalasining qo'yilishi.*

1.1. Optimal boshqaruv masalasining umumiy qo'yilishi

Obyektning harakat dinamikasi. Optimal boshqaruv masalasi uchun vaqt mobaynida harakati o'zgarib turuvchi obyektning mavjudligi xarakterlidir. Faraz qilaylik vaqtning har bir t momentida obyektning holati $x^1(t),...,$ $x^n(t)$parametlarning tanlanishi bilan to'la aniqlansin. Bu parametrlar qandaydir koordinatalar sistemasida obyekt holatining koordinatalari, tezlik koordinatalari va hokazolar bo'lishi mumkin. $x(t)=(x^1(t),...x^n(t))$ vektorga obyektning *holat vektori* deyiladi. Obyekt harakatini boshqarish, y'ani obyektning holati qandaydir rullar vositasida o'zgartirilishi mumkin deb faraz qilamiz. Aytaylik rullarning holati vaqtning har bir t momentida $u^1(t),...,u^m(t)$ parametrlarni tanlanishi bilan xarakterlasin. $u(t)=(u^1(t),...,u^m(t))$ vektorga obyektning *boshqaruv vektori* yoki *boshqaruv* deyiladi. Vaqtning berilgan t momentida obyektning holati $u(t)$ boshqaruv vaqtning t momentigacha qanday qiymatlar qabul qilganligiga bog'liq ammo, boshqaruvning kelgusi holatiga bog'liq emas. Obyektning $x(t)$ holat vektor $u(t)$ boshqaruvning qiymatiga bog'liq tarzda turli xil dinamik obyektlarga qaraladi. Masalan, bu bog'liqlikni

$$\dot{x}=f(t,x,u) \tag{1.1}$$

differensial tenglamalar sistemasi bilan yozish mumkin. Bu holda vaqtning har bir t momentida $u(t)$ boshqaruvning qiymatini bilgan holda

$$\dot{x}=f(t,x,u(t))$$

differensial tenglamani yechib, obyektning $x(t)$ trayektoriyasini aniqlashimiz mumkin.

Qandaydir tarzda obyektning harakat dinamikasi berilgan, ya'ni $u(t)$ boshqaruv vektorining o'zgarishiga bog'liq ravishda $x(t)$ holat vektorning o'zgarish qonuni berilgan deb hisoblaymiz.

Joiz boshqaruvlar sinfi. Muayyan (konkret) fizik obyektlar uchun $u(t)$ boshqaruv ixtiyoriy bo'lmaydi. Bu boshqaruvga boshqaruvning fizik ma'nosidan kelib chiqadigan qandaydir cheklanishlar qo'yiladi. Masalan, agar $u^1(t)$ dvigatelning quvvati bo'lsa, u holda vaqtning har bir momentida u

$$u_{min} \le u^1(t) \le u_{max}$$

cheklanishlarni qanoatlantiradi. Bunda $u^1(t)$ u_{min} va u_{max} chetki qiymatlarni ham qabul qilishi mumkin. Odatda $u(t)$ vektor boshqaruv vaqtning har bir t momentida

$$u(t) \in U \tag{1.2}$$

cheklanishni qanoatlantiradi, bu yerda U qandaydir berilgan to'plam. Qonuniyatga ko'ra muayyan fizik obyektlarda U yopiq to'plamdir. Bu yopiqlik boshqariladigan obyektning holatini umuman klassik variatsion hisob usullari bilan tekshirishga imkoniyat bermaydi. (1.2) ko'rinishdagi cheklanishlardan tashqari $u(t)$ boshqaruvning vaqtga bog'liqligi bo'yicha cheklanishlar qo'yilishi mumkin. Masalan joiz boshqaruvning fizik ma'nosidan bu boshqaruv yoki silliq, yoki uzluksiz, yoki bo' lakli uzluksiz va hokazo bo'lishi mumkin. Qandaydir usulda $u(t)$ *joiz boshqaruvlar sinfi* berilgan deb hisoblaymiz.

Obyektning boshlang'ich va so'ngi holati. Faraz qilaylik vaqtning boshlang'ich momenti t_0 va obyektning *joiz boshlang'ich holatlarining* M_0 *to'plami* berilgan bo'lsin.

Bundan tashqari vaqtning qandaydir so'nggi t_1 momentida obyekt qandaydir *joiz so'nggi holatlarining to'plami* M_1 ga kelib tushsin. Agar $u(t)$ boshqaruvga mos obyektning $x(t)$ holati

$$x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1 \tag{1.3}$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida $u(t)$ joiz boshqaruv joiz boshlang'ich holatlarining M_0 to'plamini joiz so'nggi holatlarining

M_1 to'plamiga olib o'tadi deb aytamiz. Vaqtning har bir so'nggi momenti t_1 umuman aytganda mahkamlangan bo'lib, $x(t)$ vektorning so'nggi M_1 to'plamga tushish shartidan aniqlanadi. Shunday qilib M_0, M_1 joiz to'plamlar berilgan deb hisoblaymiz.

Sifat kriteriyasi. Boshqariladigan obyektni M_0 to'plamdan M_1 to'plamga turli xil usullar bilan o'tkazish mumkin bo'lishi. Amaliyotda bunday o'tishlardan qandaydir ma'noda eng yaxshisini tanlash maqsadga muvofiqdir. Odatda $[t_0, t_1]$ kesmada aniqlangan har bir $u(t)$ joiz boshqaruvga mos obyektning $x(t)$ trayektoriyasiga $u(t)$, $x(t)$ juftlikni baholovchi J soni, ya'ni $J(u(t),x(t))$ funksional, yoki sifat kriteriysi beriladi. Masalan, bu funksional

$$J(u(t),x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(s,x(s),u(s))ds \qquad (1.4)$$

ko'rinishda bo'lishi mumkin.

Endi *optimal boshqaruv masalasi*ni ifodalashimiz mumkin. Bu masala obyektni boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamidan so'nggi holatlarning M_1 to'plamiga tushuruvchi shunday $u^*(t)$ boshqaruv va unga mos $x^*(t)$ trayektoriyani topish lozimki, bunda $J(u(t),x(t))$ funksional o'zining minimal qiymatiga erishsin, ya'ni

$$J(u^*(t), x^*(t)) = \min J(u(t), x(t))$$

tenglik bajarilsin. Bu yerda minimum obyektni boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamidan so'nggi holatlarning M_1 to'plamiga o'tkazuvchi barcha joiz $u(t)$ boshqaruv va unga mos obyektning $x(t)$ trayektoriyalari bo'yicha olinadi.

Optimal boshqaruv masalalaridan misollar keltiramiz.

1-misol. Kosmik kema yer atrofidagi qandaydir doiraviy orbita bo'ylab harakatlansin. Yetarlicha aniqlikda kosmik kema holatini (1.1) ko'rinishdagi differensial tenglamalar sistemasi bilan yozishimiz mumkin. Bunda $x(t)$ holat vektorining koordinatalari yer bilan bog'langan qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan kosmik kemaning holati, vektor tezligining koordinatasi, kema oriyentatsiyasini beruvchi burchaklar, burchak tezliklar va hokazolar bo'lishi mumkin. $u(t)$ vektor boshqaruvning koordinatalari bo'lib reaktiv dvigatel o'qining burish burchagi, birlik vaqt ichida yonilg'i sarfi va hokazolar bo'lishi mumkin. $u(t)$ vector boshqaruv koordinatalarini u yoki bu ko'rinishda tanlab, kosmik kemani $x(t)$ trayektoriyaning biror qismida u yoki bu ko'rinishda harakatlanishiga majbur qilish mumkin.

Faraz qilaylik kosmik kemani yangi orbitaga o'tkazish talab qilinsin, ya'ni $u(t)$ vektor boshqaruvning shunday qiymatini topish talab qilinadiki, kemaning unga mos $x(t)$ trayektoriyasi vaqtning t_0 momentida birinchi doiraviy orbitada boshlanib, vaqtning qandaydir t_1 momentida ikkinchi doiraviy orbitada tugallansin. Bunda boshlang'ich holatlarning M_0 to'plami sifatida kemaning birinchi orbitadagi koordinatalarini, joiz boshlang'ich tezliklarini, va hokazo ya'ni $x(t_0)$ vektorning qiymatlarini olish mumkin. Huddi shu kabi mulohazalarni so'nggi holatlarning M_1 to'plamiga nisbatan ham aytilishi mumkin.

Sifat kriteriysi bo'lib, kemaning birinchi orbitadan ikkinchi orbitaga olib o'tishda sarflanadigan umumiy yonilg'i miqdori bo'lishi mumkin.

Shunday qilib optimal boshqaruv masalasi, shunday $u(t)$ vektor boshqaruvning qiymatini topish talab qilinadiki, unga mos vaqtning t_0 momentida boshlangan $x(t)$ trayektoriyasi birinchi doiraviy orbitada boshlanib, eng oz yonilg'i sarfi bilan vaqtning qandaydir t_1 momentida ikkinchi doiraviy orbitada tugallansin.

2-misol. Muvozanat holatida turgan fizik mayatnikni qaraymiz. Agar y mayatnikning muvozanat holatidan chetlanishi bo'lsa, u holda kichik amplitudalar bo'yicha mayatnikning tebranish tenglamasi

$$\ddot{y} + y = 0$$

ko'rinishga ega. Faraz qilaylik mayatnikka miqdori bir birlik cheklangan $|u(t)| \le 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi tashqi u kuch qo'yish mumkin bo'lsin. U holda boshqariladigan mayatnikning tenglamasi

$$\ddot{y} + y = u$$

ko'rinishga ega. $x^1 = y,\ x^2 = \dot{y}$ belgilashlar bilan bu tenglamani (1.1) sistema ko'rinishiga keltiramiz. U holda

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u \end{cases} \tag{1.5}$$

Bu holda $x=(x^1,x^2)$ holat vektori hammasi bo'lib ikkita: $x^1=y$ - mayatnikning muvozanat holatidan chetlanishi va $x^2=\dot{y}$ - tezlikning chetlanishi. O'chirilgan boshqaruvda, ya'ni $u=0$ bo'lganda muvozanat holati $x^1=0, x^2=0$ shartlar bilan beriladi. Faraz qilaylik, qandaydir tashqi kuchlar ta'siri ostida mayatnik muvozanat holatidan ixtiyoriy $x_0=(x_0{}^1,x_0{}^2)$ holatga chetlangan bo'lsin. Mayatnikning bu holatda bo'lishi fizik nuqtayi nazardan maqsadga muvofiq emas, shuning uchun mos ravishda $u(t)$ tashqi kuchni tanlab mayatnikni muvozanat holatiga qaytarish lozim. Yana bu holda fizik nuqtayi nazardan $u(t)$ boshqaruv bo'lakli uzluksiz bo'lishi talab qilinadi.

Shunday qilib biz quyidagi optimal boshqaruv masalasiga keldik. $|u(t)|\leq 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi shunday bo'lakli uzluksiz $u(t)$ tashqi kuchni tanlash lozimki, mos ravishda mayatnikning $x(t)$ trayektoriyasi, ya'ni (1.5) tenglamaning yechimi boshlang'ich $M_0=\{x_0\}=\{(x_0{}^1,x_0{}^2)\}$ holatdan so'nggi $M_1=\{(0,0)\}$ holatga eng qisqa vaqt ichida o'tsin.

1.2. Optimal boshqaruv matematik nazariyasining asosiy masalalari

Yuqorida biz optimal boshqaruv masalasining umumiy tarzda qo'yilishini hamda ikkita misolni tahlil qildik. Optimal boshqaruv masalalarini matematik tekshirishdan avval *optimal boshqaruvning matematik nazariyasi* qanday masalalarni o'z ichiga olishuini qaraymiz.

Boshqariluvchanlik. Dastlab quyidagicha savol tug'ilishi tabiiy, harakatlanayotgan dinamik obyektni boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamidan so'nggi holatlarning M_1 holatiga olib o'tuvchi hech bo'l-maganda bitta $u(t)$ joiz boshqaruv mavjudmi, ya'ni $x(t)$ holat vektorining trayektoriyasi (1.3) shartni qanoatlantirishi uchun unga mos $u(t)$ joiz boshqaruv mavjudmi? Agar bu masala ijobiy hal etilsa, biz qaralayotgan obyekt M_0 to'plamidan M_1 to'plamga *boshqariluvchan* deb aytamiz. Aks holda optimal boshqaruv masalasining qo'yilishi ma'nosini yo'qotadi.

Optimal boshqaruvning mavjudligi. Agar boshqaruvchanlik masalasi ijobiy hal etilsa, ya'ni dinamik obyektni boshlang'ich M_0 to'plamidan so'nggi M_1 to'plamga olib o'tuvchi qandaydir $u(t)$ joiz boshqaruv mavjud bo'lsa, u holda *optimal boshqaruvning mavjudligini* aniqlash zarurdir.

Muhandislar muayyan masalalarni yechishda bunday masala qo'ymaydilar, imkoniyatlar bo'yicha eng maqbul boshqaruvni tanlaydilar. Matematik nuqtayi nazardan bu masala o'ta muhim bo'lib, agar optimal boshqaruv mavjud bo'lmasa, u holda kelgusida uni izlash ma'noga ega emas. Matematikada biz qandaydir haqiqiy fizik obyektning modeliga ega bo'lamiz va modelda optimal boshqaruvning mavjud emasligi model noto'g'ri tuzilganligidan dalolat beradi.

Optimallikning zaruriy sharti. Agar qaralayotgan masalada optimal boshqaruv mavjud bo'lsa, bu optimal boshqaruvni topishning usullarini rivojlantirishimiz kerak.

Eng sodda masalalarda ham berilgan obyektni boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamidan so'nggi holatlarning M_1 holatiga olib o'tuvchi ko'plab $u(t)$ joiz boshqaruvlar mavjud bo'lishi mumkin. Shuning uchun oddiy tanlash bilan barcha joiz boshqaruvlarni optimallikka tekshirib chiqish qiyin. Optimallikka da'vogar bo'lgan barcha boshqaruvlarni qanday tanlash mumkin mavzusida masala yuzaga keladi. Bu masalani yechishda *optimallikning yetarli sharti* imkoniyat beradi. Shuning uchun optimal boshqaruvni optimallikning zaruriy shartini qanoatlantiruvchi barcha joiz boshqaruvlar orasidan izlash kerak. Bunday optimallikning zaruriy sharti *Pontryagin maksimum prinsipi*dir. Dastlab harakat dinamikasi (1.1) ko'rinishdagi tenglamalar bilan berilgan boshqaruv sistemalari uchun bu birinchi bor 1953 yilda akademik Lev Semenovich Pontryagin tomonidan gipoteza ko'rinishida aytilgan, keyin uning o'quvchilari tomonidan isbotlangan. Mohiyatiga ko'ra optimal boshqaruvning matematik nazariyasi optimallikning zaruriy shartidan boshlangan. Ba'zi masalalarda maksimum prinsipini chekli sondagi boshqaruvlar qanoatlantirganligi sababli ularning orasidan optimalini tanlash qiyin emas. Maksimum prinsipining to'la isboti 1961 yilda L.S.Pontryagin va uning o'quvchilari tomonidan [1] kitobda e'lon qilingan. Maksimum prinsipini qo'llash darhol ko'plab qiziqarli muhandislik masalalarini yechish imkoniyatini hamda ko'plab boshqa masalalarda optimal boshqaruvni topishga yaqinlashtirdi. Shu sababli 1962-yilda bu kitob Davlat mukofoti bilan taqdirlanganligi bejiz emas.

Optimallikning yetarli sharti. Ko'plab masalalarda optimallikning zaruriy sharti optimallikka talabgor bo'lgan boshqaruvlar sinfini qisqartirish imkoniyatini bersada bu sinf yetarlicha keng bo'lib qolaveradi. Bu sinfdagi haqiqiy optimal boshqaruvni tanlash imkoniyatini optimallikning yetarli sharti beradi. Bu sinfdagi qandaydir $u(t)$ boshqaruv optimallikning yetarli shartini qanoatlantirsa, bu bilan uning optimalligi ta'minlanadi. Albatta optimallikning yetarli shartini bir emas bir nechta boshqaruvlar qanoatlantirishi mumkin. Bu bilan boshqaruvlarning hammasi optimaldir, y'ani sifat kriteriyasini ifodalovchi funksional bu boshqaruvlarda bir xil, shu bilan birga minimal qiymat qabul qiladi.

Optimal boshqaruvining yagonaligi. Muhandislar uchun optimal boshqaruvining yagonaligini bilish juda muhumdir. Agar u yagona bo'lsa, u holda muayyan boshqariladigan obyektlarda yagona optimal boshqaruvini qo'llash oson kechadi. Shuning uchun optimal boshqaruvning yagonalik masalasi ham optimal boshqaruv matematik nazariyasining asosiy masalalari qatoriga kiradi.

Albatta biz optimal boshqaruv masalasini yechishda yuzaga keladigan barcha muammolarni sanab chiqmadik faqat asosiylarini keltirdik. Bu muammolarni muayyan boshqaradigan obyekt uchun ko'rsatilgan savollarni ketma-ketlikda tekshirish shart emas. Masalan, dastlab optimal boshqaruvning mavjudligi aniqlangan bo'lsa va biz boshlang'ich holatlarning M_0 to'plamini so'nggi M_1 holatiga olib o'tuvchi va optimallikning zaruriy shartini qanoatlantiruvchi yagona $u(t)$ boshqaruvni topgan bo'lsak, u holda $u(t)$ boshqaruvning optimalligi ta'minlanadi.

Tezkorlikning chiziqli masalasi. Shunday qilib biz optimal boshqaruv masalasining umumiy ko'rinishda qo'yilishini va bu masalani yechishda yuzaga keladigan ba'zi asosiy muammolarni qarab chiqdik. Bu kitobda biz asosan optimal boshqaruv matematik nazariyasining soddaroq masalasi bo'lgan chiziqli tezkorlik masalasini o'rganamiz. Bu obyektning harakat dinamikasi

$$\dot{x} = Ax + u, \tag{1.6}$$

chiziqli differensial tenglamalar sistemasi bilan yoziladi, bu yerda x - obyektning n o'lchamli holat vektori, u - n o'lchamli boshqaruv vektori bo'lib, boshqaruvqa $u(t) \in U$ cheklanish qo'yilgan, A $- n \times n$ o'lchamli o'zgarmas matritsa. Qandaydir $u(t)$ joiz boshqaruvni va obyektning $x(t_0) = x_0\theta$ boshlang'ich holatini bilgan holda, obyektning $x(t)$ holat vektorini (1.6) differensial tenglamalar sistemasining yagona yechimi sifatida hosil qilish mumkin. Joiz boshqaruvlar sinfi, keyinroq yordamchi matematik tushunchalar o'rganilgandan keyin aniqlanadi.

Obyektning boshlang'ich va so'nggi holatlari bo'lgan M_0 va M_1 to'plamlar n o'lchamli vektor fazoning qandaydir bo'sh bo'lmagan kompakt qism to'plamlari sifatida olinadi. Sifat kriteriysi bo'lib, M_0

to'plamdan M_1 to'plamga o'tish uchun sarflangan vaqt, ya'ni $J(u(t), x(t)) = t_1 - t_0$ bo'ladi. Bunday sifat kriteriysi (1.4) sifat kriteriysidan integral ostidagi funksiya

$$f^0(t, x(t), u(t)) \equiv 1$$

bo'lganda hosil bo'ladi.

Shunday qilib, biz *chiziqli tezkorlik masalasi*ning qo'yilishiga keldik. Bu masala obyektni boshlang`ich holatlarning $M_0$ to`plamida holatlarning so'nggi M_1 to'plamiga eng qisqa vaqt ichida olib o`tuvchi $u^*(t)$ joiz boshqaruvni va unga mos (1.6) tenglamaning $x^*(t)$ yechimini topishdan iborat.

Yuqorida keltirilgan 2-misol chiziqli tezkorlik masalasi bo`ladi.

Optimal boshqaruv nazariyasi bilan birinchi tanishish uchun chiziqli tezkorlik masalasining tanlanilishi bejiz emas. Bu masala ko`proq ustunlikka ega.

Birinchidan, (1.6) chiziqli differensial tenglamalar uchun $x(t)$ trayektoriyani $u(t)$ boshqaruvga nisbatan oshkor ko`rinishda yozish mumkin. Bu esa optimal boshqaruv matematik nazariyasining asosiy masalalarini effektiv tekshirish imkoniyatini beradi.

Ikkinchidan, chiziqli tezkorlik masalalarida optimal boshqaruvning umumiy masalasidagi barcha harakterli qiyinchiliklar yaqqol namayon bo`ladi.

Kitobning birinchi qismi (2-5-ma'ruzalar) yordamchi matematik tushunchalarni o'rganishga bag'ishlangan. Tayanch funksiya, ko'p-qiymatli akslantirishlar, ko'pqiymatli akslantirishlarning integrallari va boshqa tushunchalar mukammal ko'rib chiqilgan. Bu tushunchalar matematikaning turli bo'limlarida keng tadbiqlarini topmoqda. Kitobning ikkinchi qismida bu tushunchalar asosida chiziqli tezkorlik misolida optimal boshqarishning matematik nazariyasi o'rganiladi.

2-ma'ruza

- *Asosiy ta'riflar va belgilashlar.*
- R^n *Evklid vektor fazosining barcha bo'sh bo'lmagan kompakt qism to'plamlaridan tashkil topgan* $\Omega(R^n)$ *fazo.*
- $\Omega(R^n)$ *fazoda ikkita elementning yig'indisi va elementni songa ko'paytirish amallari.*

- *Chiziqli almashtirishda to'plamning obrazi.*
- $\Omega(R^n)$ *fazoda masofa tushunchasi.*

2.1. Asosiy tushunchalar

R^n **fazo.** Elementlari $x=(x^1,x^2,...,x^n)$ nuqtalardan iborat n o'lchamli R^n- Evklid fazosini qaraymiz. Xususiy holda R^1 son to'g'ri chizig'i, R^2 esa ikki o'lchovli tekislik va hokazo. Odatda kichik harflar bilan R^n fazoning vektorlarini ya'ni nuqtalarini, katta harflar bilan esa R^n fazoning qism to'plamlarini belgilaymiz. Bunda vektorlarni ba'zan bitta elementdan tashkil topgan to'plamlar deb qaraymiz va bu holda ularni figurali qavslar yordamida yozishga shartlashamiz. Masalan, x - nuqta, $\{x\}$ esa bitta x nuqtadan tashkil topgan to'plamdir. R^n fazo odatdagi ikki vektorni qo'shish va vektorni songa ko'paytirish va $\langle x,y\rangle=x^1y^1+...+x^ny^n$ skalyar ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli vektor fazo bo'ladi. Bu fazo $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ norma bilan normalangan fazo bo'ladi. Kelgusida biz R^n fazoda faqat shu normadan foydalanamiz. Bu norma bilan tabiiy ravishda R^n fazodagi $x,y\in R^n$ nuqtalar orasidagi masofa $\rho(x,y)=\|x-y\|$ tenglik yordamida aniqlansa metrika hosil qiladi, ya'ni R^n metrik fazo bo'ladi.

To'plamlar. R^n fazoda turli ko'rinishdagi to'plamlarni qaraymiz. Bunda to'plamlar uchun odatdagi $\subset$ - mansublik, $=$ - tenglik, $\neq$ - tengsizlik, $\cup$ - birlashma, $\cap$- kesishma va \ - bir to'plamni ikkinchisiga to'ldirishning odatdagi simvollaridan foydalanamiz. Bo'sh to'plamni esa $\varnothing$ simvol bilan belgilaymiz.

Agar f nuqtaning ixtiyoriy atrofida F to'plamning f nuqtadan farqli hech bo'lmaganda bitta nuqtasi mavjud bo'lsa, f nuqtaga F to'plamning limit nuqtasi deyiladi. Agar F to'plam o'zining barcha limit nuqtalarini o'zida saqlasa F to'plamga *yopiq to'plam* deyiladi. F to'plamni o'zida saqlovchi eng kichik yopiq to'plamga F to'plamning yopig'i deyiladi va $\overline{F}$ kabi belgilanadi. Agar F yopiq to'plam bo'lsa u holda $\overline{F}=F$ ekanligi ayon.

1-misol. R^n fazoda

$$P=\{x\in R^n:\|x\|<1\}$$

munosabat bilan berilgan P to'plamni qaraymiz. Bu to'plam yopiq emas, chunki masalan uning $p=(1,0,0,...,0)$ limit nuqtasi P to'plamga tegishli emas. Ammo markazi a nuqtada radiusi r ga teng bo'lgan R^n fazodagi

$$S_r(a)=\{\ x\in R^n : \|x-a\|\le r\ \} \tag{2.1}$$

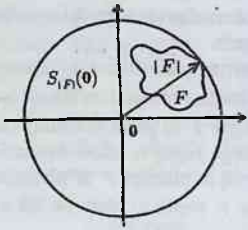
shar yopiq to'plam ekanligi ravshan. Shu bilan birga $S_1(0)$ shar P to'plamning yopig'i , ya'ni $S_1(0)=\overline{P}$.

Agar $F\subset R^n$ to'plam qandaydir chekli radiusli sharda saqlansa, ya'ni qandaydir $r\ge 0$ soni uchun $F\subset S_r(0)$ mansublik o'rinli bo'lsa F to'plamga *chegaralangan to'plam* deyiladi. Agar $F\subset R^n$ to'plam yopiq va chegaralangan bo'lsa bu to'plamga *kompakt to'plam* deyiladi. 1-misoldagi $S_r(a)$ to'plam kompakt , ammo P kompakt to'plam emas, chunki u yopiq to'plam emas. Tekislikdagi to'g'ri chiziq chegaralanmaganligi uchun kompakt to'plam emas.

Agar F kompakt to'plam bo'lsa, u holda F to'plamning $|F|$ *moduli* deb

$$|F|=\max_{f\in F}\|f\| \tag{2.2}$$

soniga aytiladi. F to'plamning kompaktligi va $\|f\|$ normaning uzluksizligidan (2.2) foqmulada maksimum doimo erishiladi. F to'plam modulining geometrik ma'nosi quyidagicha: bu F to'plamni o'zida saqlovchi markazi koordinata boshida bo'lgan eng kichik sharning radiusi (1-chizma) ekanligi quyidagi munosabatdan kelib chiqadi



1-chizma

$$|F|=\max_{f\in F}\|f\|=\min\{r\ge 0:\|f\|\le r, f\in F\}=\min\{r\ge 0:\ F\subset S_r(0)\}.$$

Shunday qilib doimo

$$F \subset S_{|F|}(0) \qquad (2.3)$$

mansublik bajariladi.

Agar qandaydir $\varepsilon > 0$ soni uchun $S_\varepsilon(f) \subset F$ munosabat bajarilsa f nuqta F to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi. Agar F to'plamning ixtiyoriy nuqtasi uning ichki nuqtasi bo'lsa F to'plamga *ochiq to'plam* deyiladi. F to'plamning barcha ichki nuqtalari majmuasiga uning *ichki sohasi* deyiladi va $\operatorname{int} F$ kabi belgilanadi. 1-misolda $\operatorname{int} S_1(0) = P$. $\partial F = \overline{F} \setminus \operatorname{int} F$ to'plamga F to'plamning *chegarasi* deyiladi va ∂F kabi belgilanadi. Agar

$$S = \{\, x \in R^n : \|x\| = 1 \,\}$$

to'plam R^n fazodagi *birlik sfera* bo'lsa, u holda $\partial P = S$.

Agar F to'plam o'zining ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 nuqtalari bilan birgalikda bu nuqtalarni tutashtiruvchi $[x_1, x_2]$ kesmani ham o'zida saqlasa, F to'plamga *qavariq to'plam* deyiladi.

Ikkita $x_1, x_2 \in R^n$ nuqtalarini tutashturuvchi kesma

$$[x_1, x_2] = \{x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : 0 \le \lambda \le 1\}$$

ko'rinishga ega. Shunday qilib, ixtiyoriy $x_1, x_2 \in F$ nuqtalar va ixtiyoriy $0 \le \lambda \le 1$ soni uchun $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in F$ munosabat bajarilsa, F to'plamga qavariq to'plam deyiladi.

$F\sqrt{a^2+b^2}$ to'plamni o'zida saqlovchi eng kichik qavariq to'plamga F to'plamning *qavariq qobig'i* deyiladi va *convF* kabi belgilanadi. Har qanday ixtiyoriy $S_r(a)$ shar qavariq to'plam bo'ladi, ammo S birlik sfera qavariq to'plam emas, shu bilan birga $convS = S_1(0)$. 1-misoldagi P to'plam qavariq to'plamdir. Agar F qavariq to'plam bo'lsa, u holda $convF = F$

2.2. $\Omega(R^n)$ fazo haqida tushuncha

R^n fazoning barcha bo'ch bo'lmagan kompakt qism to'plamlaridan tashkil topgan to'plamlar sistemasini $\Omega(R^n)$ qism fazoni qaraymiz. Xususiy holda R^n fazodagi barcha mumkin bo'lgan $S_r(a)$ sharlar, R^n

fazoning nuqtalari, ya'ni $\{x\}$ to'plamlar $\Omega(R^n)$ fazoning elementlaridir. To'plamlar ustida bajariladigan odatdagi amallardan tashqari $\Omega(R^n)$ fazoda yana ikki amalni: to'plamlarning yig'indisi va to'plamni songa ko'paytirish amallarini ko'rib chiqamiz.

To'plamlarning algebraik yig'indisi. R^n fazodagi bo'sh bo'lmagan F va G to'plamlarning, ya'ni $\Omega(R^n)$ fazoning ikkita $F,G\in\Omega(R^n)$ elementlarning algebraik yig'indisi deb

$$X=F+G=\{x=f+g: f\in F, g\in G\} \tag{2.4}$$

to'plamga aytiladi.Bu holda $X\in\Omega(R^n)$, ya'ni ikkita $F,G\in\Omega(R^n)$ to'plamlarning algebraik yig'indisi $F+G$ to'plam bo'sh bo'lmagan, yopiq chegaralangan,kompakt to'plamdir. Agar F to'plam yagona nuqtadan tashkil topgan bo'lsa, ya'ni $F=\{f\}$ bo'lsa, u holda $\{f\}+G$ to'plam G to'plamni f vektorga parallel ko'chirishdan hosil qilinadi.

$F+G$ to'plamning bo'sh to'plam emasligi, $F,G\in\Omega(R^n)$ to'plamlarning bo'sh to'plam emasligi natijasidir, va demak shuning uchun hech bo'lmaganda bitta $x=f+g$ ko'rinishdagi element mavjud.

Ikkita $F,G\in\Omega(R^n)$ to'plamlarning algebraik yig'indisi yopiq to'plam bo'lishini isbotlaymiz. $x_k\in F+G$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$ bo'lsin $x\in F+G$ ekanligini ko'rsatish talab qilinadi.

$F+G$ algebraik yig'indining ta'rifi (2.4) ga ko'ra $x_k=f_k+g_k$ va $f_k\in F$, $g_k\in G$. $\{f_k\}$ ketma-ketlikning hamma elementlari F kompakt to'plamga tegishli bo'lgani uchun, shunday qism ketma-ketlik mavjudki (biz bu qism ketma-ketlikni yana $\{f_k\}$ bilan belgilaymiz), bunda $\lim\limits_{k\to\infty}f_k=f\in F$.

Xuddi shu kabi $\{g_k\}$ ketma-ketlikdan shunday qism ketma-ketlik ajratish mumkinki, bunda $\lim\limits_{k\to\infty}g_k=g\in G$.

Shu sababli x vector uchun

$$x=\lim_{k\to+\infty}x_k=\lim_{k\to\infty}(f_k+g_k)=\lim_{k\to\infty}f_k+\lim_{k\to\infty}g_k=f+g$$

ya'ni $x\in F+G$ bo'ladi va shu bilan birga algebraik yig'indining yopiqligi isbotlanadi.

$F+G$ to‘plam chegaralangandir. Haqiqatdan ham, (2.3) formulaga ko‘ra $F\subset S_{|F|}(0)$, $G\subset S_{|G|}(0)$ mansubliklarga egamiz, shu bilan birga F va G to‘plamlar chegaralangan bo‘lgani uchun $|F|$ va $|G|$ miqdorlar chekli sonlardir. (2.2) munosabatni e’tiborga olib, ixtiyoriy $f\in F, g\in G$ vektorlar uchun $\|f\|\le|F|$, $\|g\|\le|G|$ tengsizliklarni hosil qilamiz. Algebraik yig‘indining (2.4) ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $x=f+g\in F+G$ vektor uchun

$$\|x\|=\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$$

uchburchak tengsizligi ham bajariladi va demak to‘plamlar uchun ham

$$|F+G|\le|F|+|G|$$

uchburchak tengsizligi bajariladi. Shunday qilib

$$F+G\subset S_{|F+G|}(0)\subset S_{|F|+|G|}(0)$$

mansublik o‘rinli, ya’ni $F+G$ to‘plam chegaralangandir.

Agar F va G to‘plamlar qavariq to‘plamlar bo‘lsa, u holda ularning algebraik yig‘indisi $F+G$ to‘plam ham qavariq to‘plam bo‘ladi. Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $x_1,x_2\in F+G$ vektorlar va $0\le\lambda\le1$ soni berilgan bo‘lsin. $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ vektorni $F+G$ to‘plamga tegishli bo‘lishini ko‘rsatamiz. Yig‘indining (2.4) ta’rifiga ko‘ra

$$x_1=f_1+g_1,\ x_2=f_2+g_2,\ f_1,f_2\in F\ ,\ g_1,g_2\in G$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz va demak

$$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=\lambda f_1+(1-\lambda)f_2+\lambda g_1+(1-\lambda)g_2.$$

F,G to‘plamlarning qavariqligiga ko‘ra

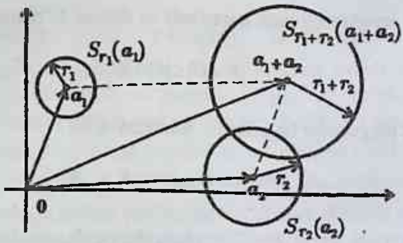
$$f=\lambda f_1+(1-\lambda)f_2\in F,\quad g=\lambda g_1+(1-\lambda)g_2\in G$$

mansubliklar o‘rinli. Yana bir bor to‘plamlar yig‘indisining ta’rifiga ko‘ra $x=f+g\in F+G$, ya’ni $F+G$ qavariq to‘plam.

2-misol. Ikkita ixtiyoriy sharlarning algebraik yig'indisi nimaga teng bo'lishini qaraymiz. Bu holda

$$S_{r_1}(a_1)+S_{r_2}(a_2)=S_{r_1+r_2}(a_1+a_2), \tag{2.5}$$

ya'ni ikki sharni algebraik qo'shishda yana shar hosil bo'lib, uning radiusi bu sharlar radiuslari yig'indisidan, markazi esa bu sharlar markazlari yotgan vektorlar yig'indisiga teng bo'lgan vektordan iborat bo'ladi.



2-chizma

Bu tasdiqni, ya'ni (2.5) tenglikning o'ng va chap qismidagi to'plamlarning ustma-ust tushishini ko'rsatamiz.

Agar $x\in S_{r_1}(a_1)+S_{r_2}(a_2)$ bo'lsa (2.4) algebraik yig'indining ta'rifiga ko'ra $x=f+g$ bo'lib, $f\in S_{r_1}(a_1)$, $g\in S_{r_2}(a_2)$. Bundan sharning (2.1) ta'rifiga ko'ra

$$\|f-a_1\|\le r_1, \quad \|g-a_2\|\le r_2$$

Bu tengsizliklarni e'tiborga olib,

$$\|x-(a_1+a_2)\|=\|f+g-(a_1+a_2)\|\le\|f-a_1\|+\|g-a_2\|\le r_1+r_2,$$

ya'ni $x\in S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Demak (2.5) formulada

$$S_{r_1}(a_1)+S_{r_2}(a_2)\subset S_{r_1+r_2}(a_1+a_2) \tag{2.5a}$$

mansublik o'rinli.

Agar $x\in S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)$ bo'lsa, u holda

$$\lambda=\|x-a_1-a_2\|\le r_1+r_2 .$$

Bundan $\lambda=0$ bo'lganda

$$x=a_1+a_2\in S_{r_1}(a_1)+S_{r_2}(a_2)$$

ekanligi ravshan. Endi $\lambda\neq0$ bo'lsin. Bu holda $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ shartni qanoatlantiruvchi $\lambda_1\le r_1, \lambda_2\le r_2$ musbat sonlar mavjudki, ular uchun

$$f=a_1+\lambda_1\frac{x-a_1-a_2}{\lambda}\in S_{r_1}(a_1),\;\; g=a_2+\lambda_2\frac{x-a_1-a_2}{\lambda}\in S_{r_2}(a_2)$$

bo'lib $x=f+g$ bo'lgani uchun $x=a_1+a_2\in S_{r_1}(a_1)+S_{r_2}(a_2)$ bo'ladi. Demak (2.5) formulada

$$S_{r_1}(a_1)+S_{r_2}(a_2)\supset S_{r_1+r_2}(a_1+a_2) \tag{2.5b}$$

mansublik o'rinli. (2.5a) va (2.5b) mansubliklardan (2.5) formula kelib chiqadi.

Bu formuladan $r_1=r$, $r_2=0$, $a_1=0$, $a_2=a$ bo'lganda

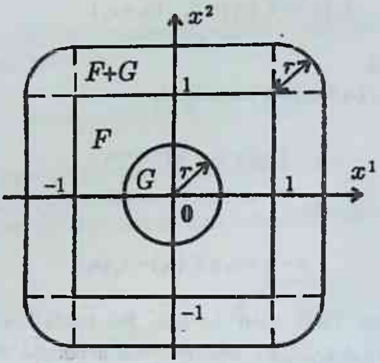
$$S_r(0)+\{a\}=S_r(a) \tag{2.6}$$

tenglikni hosil qilamiz

3-misol. Aytaylik F to'plam R^2 tekislikdagi kvadrat, ya'ni

$$F=\{x\in R^2 : |x^1|\le1,\ |x^2|\le1\}$$

G to'plam markazi koordinatalar boshida radiusi r ga teng bo'lgan shar, ya'ni $G=S_r(0)$ bo'lsin.



3-chizma

Ularning $F+G$ yig'indisi 3-chizmada tasvirlangan.
Ixtiyoriy $F, G, P \in \Omega(R^n)$ to'plamlarning algebraik yig'indi quyidagi:

1) kommutativlik, yani $F+G=G+F$;;
2) assotsiativlik, ya'ni $F+(G+P)=(F+G)+P$;
3) $\Omega(R^n)$ fazoda $\{0\}$ nol elementning mavjudligi, ya'ni $F+\{0\}=F$;

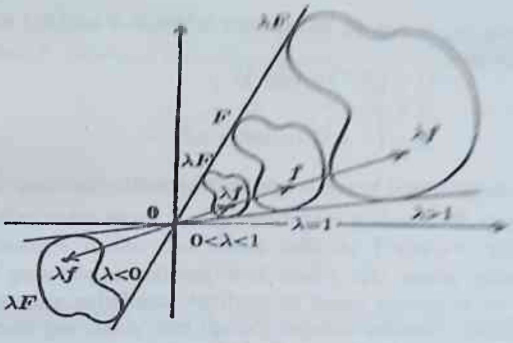
xossalariga ega. Bu xossalarning isboti (2.4) algebraik yig'indining ta'rifi va R^n fazodagi vektorlarning mos xossalaridan kelib chiqadi.

Agar F to'plam bittadan ortiq nuqtalardan tashkil topgan bo'lsa, u holda bu to'plamda kiritilgan to'plamlarning algebraik yig'indisi amaliga nisbatan teskari element mavjud emas, ya'ni $F+(-F)=\{0\}$ tenglikni qanoatlantiruvchi $-F \in \Omega(R^n)$ to'plam mavjud emas.Agarda $F=\{a\}$ bo'lsa, u holda $-F=\{-a\}$ bo'ladi.

To'plamni songa ko'paytirish. λ sonini $F \in \Omega(R^n)$ to'plamga ko'paytmasi deb,

$$C=\lambda F=\{c=\lambda f : f \in F\} \tag{2.7}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi C to'plamga aytiladi (4-chizma).



4-chizma

Ma'lumki bu holda $C \in \Omega(R^n)$, ya'ni ixtiyoriy λ sonini $F \in \Omega(R^n)$ to'plamga ko'paytmasi bo'sh bo'lmagan yopiq, chegaralangan to'plam bo'lib bu amal $\Omega(R^n)$ fazodan chetga chiqmaydi. Keyin, agar F qavariq to'plam bo'lsa $C = \lambda F$ to'plam ham qavariq to'plam bo'ladi. Bu tasdiq ham mos ravishda to'plamlarning algebraik yig'indisi kabi sodda ko'rinishda isbotlanadi (isbotlashni mustaqil bajarish o'quvchilarga havola qilinadi).

4-misol. Ushbu

$$\lambda S_r(0) = S_{|\lambda|r}(0) \tag{2.8}$$

munosabatni orinli ekanligini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham, agar $g \in \lambda S_r(0)$ bo'lsa, u holda $g = \lambda f$, bu yerda $f \in S_r(0)$. Bu holda $\|g\| = \|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\| \le |\lambda| r$, ya'ni $g \in S_{|\lambda|r}(0)$. Teskarisi, agar $g \in S_{|\lambda|r}(0)$ va $\lambda \neq 0$ ($\lambda = 0$ bo'lganda (2.8) formula ayon) bo'lsa, u holda $f = \frac{1}{\lambda} g \in S_r(0)$ va $g = \lambda f$. Shuning uchun $g \in \lambda S_r(0)$ bo'lib (2.8) formula isbotlandi. (2.6) va (2.8) formulalardan ixtiyoriy $S_r(a)$ sharni

$$S_r(a) = \{a\} + r S_1(0)$$

ko'rinishida tasvirlash mumkinligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy α, β sonlari va ixtiyoriy ikkita $F,G \in \Omega(R^n)$ to'plamlar uchun quyidagi:

1) $\alpha(\beta F) = (\alpha\beta)F$;
2) $1 \cdot F = F$;
3) $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$

xossalarni bajarilishini bevosita tekshirib ko'rish qiyin emas. Bu xossalarning isboti R^n fazodagi vektorlarning mos xossalaridan kelib chiqadi.

Har bir $F \in \Omega(R^n)$ to'plam uchun $-F$ teskari element mavjud bo'lmaganligi uchun $\Omega(R^n)$ fazo kiritilgan ikki to'plamning algebraik yig'indisi va to'plamni songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo bo'lmaydi. Bundan tashqari chiziqli fazo uchun eng zarur bo'lgan distributivlik qonuni doimo bajarilmaydi, ya'ni

$$(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F \tag{2.9}$$

tenglik doimo bajarilmaydi.Misol keltiramiz.

5-misol. Aytaylik $F = S_1(0)$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ bo'lsin. U holda (2.8) formula bo'yicha

$$\alpha F = 1 \cdot S_1(0) = S_1(0), \quad \beta F = -1 \cdot S_1(0) = S_1(0),$$

bo'lib, (2.5) formulaga ko'ra $\alpha F + \beta F = S_2(0)$ ni hosil qilamiz. Ammo bo'lgani uchun $\{0\} \neq S_2\{0\}$ bo'lib (2.9) formula noto'g'ri. (2.9) formuladagi tenglik o'rniga faqat bir tomonlama mansublik:

$$(\alpha + \beta)F \subset \alpha F + \beta F \tag{2.10}$$

o'rinli. Haqiqatdan ham, agar $x = (\alpha + \beta)F$ bo'lsa, u holda to'plamni songa ko'paytirish (2.7) amaliga ko'ra shunday $f \in F$ element mavjudki, bunda $x = (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ tenglik o'rinli. Shu bilan birga $\alpha f \in \alpha F$, $\beta f \in \beta F$ bo'lgani uchun $x = \alpha f + \beta f \in \alpha F + \beta F$ boladi va bundan isbotlanishi talab qilingan (2.10) mansublik kelib chiqadi.

Agar $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ va F qavariq to'plam bo'lsa , bu holda (2.9) formula o'rinli bo'lishini isbotlaymiz. Aytaylik $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ bo'lib

$\alpha+\beta\neq 0$ bo'lsin. $\alpha=0$, $\beta=0$ bo'lganda (2.9) formulaning to'g'riligi ayon. Endi F qavariq to'plam ekanligidan

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}F+\frac{\beta}{\alpha+\beta}F\subset F \tag{2.11}$$

mansublik bajariladi. Haqiqatdan ham,

$$x\in\frac{\alpha}{\alpha+\beta}F+\frac{\beta}{\alpha+\beta}F$$

bo'lsa, u holda shunday $f_1, f_2\in F$ vektorlar topiladiki, ular uchun

$$x=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}f_1+\frac{\beta}{\alpha+\beta}f_2$$

tenglik o'rinli. Keyin

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\geq 0,\ \frac{\beta}{\alpha+\beta}\geq 0,\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}=1$$

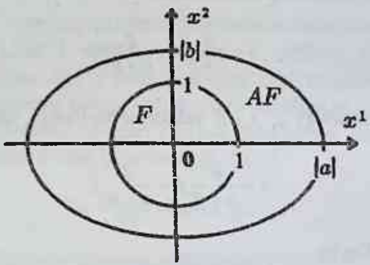
hamda F qavariq to'plam ekanligidan $x\in F$ bo'lib (2.11) mansublik kelib chiqadi. To'plamni songa ko'paytirish amalining 3) xossasiga binoan (2.11) mansublikni $\alpha F+\beta F\subset(\alpha+\beta)F$ ko'rinishda ifodalashimiz mumkin. Bundan va bu mansublikka qarama-qarshi bo'lgan (2.10) mansublikdan (2.9) tenglikni hosil qilamiz.

R^n fazoning barcha bo'ch bo'lmagan qavariq, kompakt qism to'plamlaridan tashkil topgan $\Omega(R^n)$ fazoning $con\Omega(R^n)$ qism fazosini qaraymiz. Yuqorida keltirilgan ikki to'plamning algebraik yig'indisi va to'plamni songa ko'paytirish amallari shuni ko'rsatadiki, agar songa ko'paytirish amalida faqat nomanfiy sonlar qaralsa, u holda $con\Omega(R^n)$ fazo uchun chiziqli fazoning barcha aksiomalari o'rinli va shu bilan birga teskari elementning mavjudligi haqidagi aksioma ham bajariladi. Bu ma'noda $con\Omega(R^n)$ fazo uchi nol nuqtada bo'lgan, ammo butun fazo bilan ustma-ust tushmaydigan qavariq konusni ifodalaydi.

Chiziqli almashtirishda to'plamning obrazi. $F\in\Omega(R^n)$ va R^n fazoda chiziqli almashtirish $n\times n$ o'lchamli A (elementlari haqiqiy) matritsa bilan berilgan bo'lsin. F to'plamning A chiziqli almashtirishdagi obrazi deb

$$G = AF = \{g = Af : f \in F\} \qquad (2.12)$$

to'plamga aytiladi.



5-chizma

$G \in \Omega(R^n)$, ya'ni $F \in \Omega(R^n)$ to'plamning A chiziqli almashtirishdagi obrazi bosh bo'lmagan yopiq chegaralangan to'plam bo'lishini tekshirish qiyin emas. Agar F qavariq to'plam bo'lsa, u holda $G = AF$ to'plam ham qavariq to'plam bo'ladi.

6-misol. $A = \lambda E$, bo'lib, bu yerda λ qandaydir son, E esa $n \times n$ o'lchamli birlik matritsa bo'lsin. U holda ixtiyoriy $f \in R^n$ vektor uchun $Af = \lambda Ef = \lambda f$ tenglikka ega bo'lamiz. Demak $A = \lambda E$ chiziqli almashtirishdagi AF obrazi λF to'plam bo'ladi. Shuning uchun to'plamni songa ko'paytirish chiziqli almashtirishning $A = \lambda E$ bo'lgandagi xususiy holi ekan.

7-misol. $n = 2$, $F = S_1(0)$ va A matritsa

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lsin. Bunday A almashtirishda $S_1(0)$ birlik shar : agar $a \neq 0$, $b \neq 0$ bo'lsa (5-chizma)

$$AF=\left\{x\in R^2:\left(\frac{x^1}{a}\right)^2+\left(\frac{x^2}{b}\right)^2\le 1\right\}$$ ellipsga, agar $a=0,\ b\ne 0$ bo'lsa

$$AF=\left\{x\in R^2:\ x^1=0\ ,\ |x^2|\le|b|\ \right\}$$ kesmaga, agar $a\ne 0,\ b=0$ bo'lsa

$$AF=\left\{x\in R^2:\ x^2=0\ ,\ |x^1|\le|a|\ \right\}$$ kesmaga o'tadi.

Ixtiyoriy A,B matritsalar va ixtiyoriy $F,G\in\Omega(R^n)$ to'plamlar uchun quyidagi:

1) $A(BF)=(AB)F$;

2) $EF=F$;

3) $A(F+G)=AF+AG$;

4) $(A+B)F\subset AF+BF$.

xossalar bajariladi.

1-3 xossalar R^n fazodagi vektorlarning mos xossalarining natijasidir.4-xossa to'plamni songa ko'paytishning (2.10) mansubligiga mos ravishda isbotlanadi.

Xausdorf masofasi. $\Omega(R^n)$ fazoning ikkita $F,G\in\Omega(R^n)$ to'plamlari orasidagi metrikani yoki masofani

$$h(A,B)=\min\left\{\ r\ge 0:\ A\subset B+S_r(0)\ ,\ B\subset A+S_r(0)\ \right\} \qquad (2.13)$$

formula bo'yicha kiritish mumkin.Shunday qilib, ikkita $A,B\in\Omega(R^n)$ to'plamlar orasidagi masofa

$$F\subset G+S_r(0),\ \ G\subset F+S_r(0) \qquad (2.14)$$

tengsizliklarni bir vaqtda bajarilishini ta'minlaydigan eng kichik musbat r sonidan iborat.Bu metrika Xausdorf metrikasi deyiladi.Endi $h(A,B)$-Xausdorf metrikasini hisoblashga doir misollarni keltiramiz.

8-misol. R^n fazoning ikkita $A=\{0\}$ va $B=S_1(0)$ to'plamlari uchun $\{0\}\in S_1(0)+S_r(0)$ bo'lgani uchun (2.14) mansubliklarning birinchisi har qanday $r\ge 0$ soni uchun bajariladi. Ikkinchi mansublik $S_1(0\subset S_r(0))$ esa $r\ge 1$ bo'lganda bajariladi. Shuning uchun (2.14) mansubliklarning har ikkalasi $r=1$ bo'lganda bir vaqtda bajariladi, ya'ni bu misolda $h(A,B)=1$.

9-misol. $h(F,\{0\})=|F|$ ekanligini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham, $h(F,\{0\})$ masofaning ta'rifiga ko'ra bir vaqtning o'zida

$$F \subset \{0\} + S_r(0), \quad \{0\} + S_r(0)$$

mansubliklar eng kichik $r \geq 0$ soni uchun bajariladi. Birinchi mansublikning $r \geq 0$ soni uchun bajarilishi ikkkinchi mansublikni bajarilishini ta'minlaydi.

Birinchi mansublikning qandaydir $r \geq 0$ soni uchun bajarilishi ikkinchi mansublikning bajarilishini ta'minlaydi. Shuning uchun $h(F, \{0\})$ masofa $F \subset S_r(0)$ mansublik bajariladigan eng kichik $r \geq 0$ soni , ya'ni F to'plamning moduli $|F|$ sonidan iborat.

Endi $h(F,G)$ funksiya haqiqatdan ham masofa ekanligini, ya'ni masofaning barcha aksiomalarini qanoatlantirishini isbotlaymiz. Buning uchun ixtiyoriy $F, G, P \in \Omega(R^n)$ to'plamlar uchun quyidagi:

1) $h(F,G) \geq 0$;
2) $h(F,G) = 0$ faqat va faqat $F = G$ bo'lganda;
3) $h(A,B) = h(B,A)$:
4) $h(F,G) \leq h(F,P) + h(P,G)$.

xossalarni bajarilishini isbotlashimiz kerak.

Birinchi uchta aksiomani isbotlash qiyinchilik tug'dirmaydi, shuning uchun faqat 4) xossani isbotlaymiz. $h(F,P) = \alpha$, $h(P,G) = \beta$ bo'lsin. U holda, (2.13) formulaga ko'ra quyidagi:

$$F \subset P + S_\alpha(0), \; P \subset F + S_\alpha(0) \; ,$$
$$P \subset G + S_\beta(0), \; G \subset P + S_\beta(0)$$

mansubliklar bajariladi. Bu mansubliklarni kombinatsiyalab

$$F \subset P + S_\alpha(0) \subset G + S_\beta(0) + S_\alpha(0) \subset G + S_{\alpha+\beta}(0)$$

mansublikni hosil qilamiz. Huddi shu yo'sinda

$$G \subset P + S_\beta(0) \subset F + S_\alpha(0) + S_\beta(0) \subset F + S_{\alpha+\beta}(0)$$

mansublikni hosil n qilamiz. Endi $h(F,G)$- Xausdorf masofasi har ikkala mansublik bajariladigan eng kichik son bo'lgani uchun $h(F,G) \leq \alpha + \beta$ .Shu bilan 4) xossa isbotlandi.

2.3. Masalalar

1. Har qanday $F \in \Omega(R^n)$ to'plam uchun $F+F=2F$ tenglik bajariladimi?

2*. Agar F to'plam: ixtiyoriy ikkita $x_1, x_2 \in F$ nuqtalar uchun bu nuqtalarni tutashtiruvch kesmaning o'rtasi $\frac{x_1+x_2}{2}$ ham F to'plamga tegishli xossasiga ega. U holda F to'plamni qavariqligini isbotlang.

3*. $F \in \Omega(R^n)$ to'plam uchun shunday $0<\lambda<1$ soni mavjudki, uning uchun

$$\lambda F+(1-\lambda)\mathrm{F} \subset \mathrm{F}$$

mansublik bajariladi. F to'plamni qavariqligini isbotlang.

4. $F_1, F_2, G_1, G_2 \in \Omega(R^n)$ to'plamlar

$$F_1 \subset F_2\ ,\ G_1 \subset G_2$$

mansubliklarni qanoatlantiradi. Ixtiyoriy λ soni va ixtiyoriy $n \times n$ o'lchamli A matritsa uchun

1) $F_1+G_1 \subset F_2+G_2$;

2) $\lambda F_1 \subset \lambda F_2$;

3) $AF_1 \subset AF_2$

mansubliklarni isbotlang.

5. A chiziqli almashtirishning quyidagi:

$$1)\ A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix};\ 2)\ A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix};\ 3)\ A=\begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

chiziqli almashtirishlarda

$$F=\left\{x \in R^2 : |x^1| \le 1\ ,\ |x^2| \le 1\ \right\}$$

to'plamning obrazini toping.

6. 1) $F=\left\{x \in R^2 : |x^1| \le 1, |x^2| \le 1\right\}$ va $G=S_r(0)$ to'plamlar orasidagi $h(F,G)$ Xausdorf masofasini hisoblang. r ning qanday qiymatida bu masofa minimal bo'ladi?

2) $F=\{x\in R^2 : |x^1|\le 1,\ |x^2|\le 1\}$ va $G=\{g\}$ to'plamlar orasidagi $h(F,G)$ Xausdorf masofasini hisoblang. Qanday g da bu masofa minimal bo'ladi?

7. Ixtiyoriy ikkita $F = S_r(a_1)$ va $G=S_{r_2}(a_2)$ sharlar orasidagi Xausdorf masofasini hisoblang.

8. $$F=\left\{ x\in R^2 : \left(\frac{x^1}{a}\right)^2+\left(\frac{x^2}{b}\right)^2\le 1 \right\},\ a\ne 0,\ b\ne 0;$$
$$G=\left\{ x\in R^2 : \left(\frac{x^1}{c}\right)^2+\left(\frac{x^2}{d}\right)^2\le 1 \right\},\ c\ne 0,\ d\ne 0.$$

to'plamlar orasidagi $h(F,G)$ Xausdorf masofasini hisoblang.

3-ma'ruza

- *Tayanch funksiya va uning asosiy xossalari.*
- *Tayanch vektor, tayanch to'plam, tayanch gipertekislik.*
- *To'plamning qavariq qobig'i..*

3.1. Tayanch funksiyalar

Qandaydir $F\in\Omega(R^n)$ to'plam berilgan bo'lsin. $\psi\in R^n$ vektor argumentning

$$c(F,\psi)=\max_{f\in F}\langle f,\psi\rangle \tag{3.1}$$

tenglik bilan aniqlangan $c(F,\psi)$ skalyar funksiyasiga F to'plamning *tayanch funksiyasi* deyiladi, bu yerda $\langle f,\psi\rangle$ bilan $f=(f^1,f^2,...,f^n)$ va $\psi=(\psi^1,\psi^2,...,\psi^n)$ vektorlarning

$$\langle f,\psi\rangle=\sum_{i=1}^{n} f^i\psi^i$$

formula bilan berilgan skalyar ko'paytmasi belgilangan. F to'plam ham $c(F,\psi)$ funksiya argumentlaridan biri hisoblanadi. F to'plamni fiksirlaymiz. U holda ψ argumentning $c(F,\psi)$ skalyar funksiyasi R^n fazoni R^1 son o'qiga akslantiradi. Bu ma'lumot simvolik tarzda

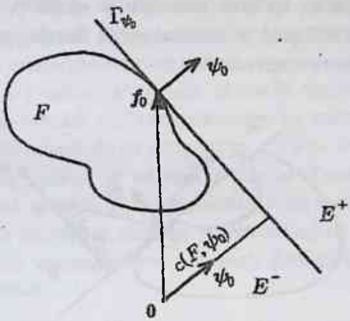
$$c(F,\ .): R^n \to R^1$$

kabi yoziladi.

(f,ψ) skalyar funksiya f bo‘yicha uzluksiz, F kompakt to‘plam bo‘lgani uchun (3.1) tenglikning o‘ng tomonida maksimumga erishiladi. Aytaylik $\psi_0 \in R^n$ qandaydir mahkamlangan vektor , f_0 vektor esa tayanch funksiyaning (3.1) ta’rifida $\psi = \psi_{10}$ bo‘lganda maksimumga erishiladigan F to‘plam vektorlaridan biri bo‘lsin, ya’ni

$$\langle f_0,\psi_0\rangle = \max_{f\in F}\langle f,\psi_0\rangle = c(F,\psi_0) \qquad (3.2)$$

tenglik bajarilsin.



6-chizma

Bu holda $\psi_0 \in R^n$ vektorga F to‘plamga f_0 nuqtadagi *tayanch vector*, (3.2) tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $f_0 \in F$ vektorlarning $U(F,\psi_0)$ to‘plamiga F to‘plamning ψ_0 vektor yo‘nalishdagi *tayanch to‘plami* deyiladi. R^n fazoda

$$\Gamma_{\psi_0} = \{x \in R^m : \langle x,\psi_0\rangle = \langle f_0,\psi_0\rangle\}$$

tenglik bilan aniqlangan Γ_{ψ_0} gipertekislikka F to‘plamga ψ_0 vektor yo‘nalishdagi *tayanch gipertekislik* deyiladi (6-,7-chizmalar).

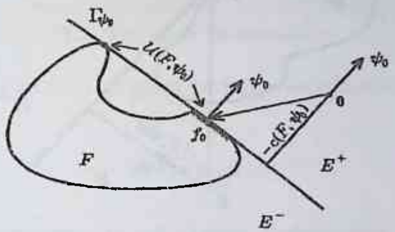
$U(F,\psi_0)$ tayanch to‘plam uchun

$$U(F,\psi_0)=F\cap\Gamma_{\psi_0}$$

Γ_{ψ_0} gipertekislik butun R^n fazoni ikkita R^+ va R^- yarim fazolarga ajratadi. Barcha $f\in F$ nuqtalar uchun

$$\langle f,\psi_0\rangle\le\langle f_0,\psi_0\rangle$$

bo'lgani uchun F to'plam ψ_0 vektorga nisbatan manfiy R^- yarim fazoda yotadi. Agar $\psi_0\in S$, ya'ni ψ_0 uzunligi birga teng birlik vektor bo'lib, agar kooordinata boshi ψ_0 vektorga nisbatan R^- manfiy yarim fazoda yotsa $c(F,\psi_0)=\langle f_0,\psi_0\rangle$ miqdor musbat ishora bilan olingan O koordinata boshidan Γ_{ψ_0} gipertekislikkacha bo'lgan masofani (6-chizma), agar kooordinata boshi ψ_0 vektorga nisbatan R^+ musbat yarim fazoda yotsa (7-chizma) bu masofa manfiy ishora bilan olinadi.



7-chizma

Bu mulohaza tayanch funksiyaning geometrik ma'nosini ko'rsatadi. Tayanch funksiyalarni topishga oid bir nechta misollar keltiramiz.

1-misol. F to'plam yagona nuqtadan iborat , ya'ni $F=\{f\}$ bo'lsin. U holda

$$c(\{f\},\psi)=\langle f,\psi\rangle \tag{3.3}$$

ekanligi ravshan.

2-misol. R^n fazoda markazi koordinata boshida bo'lgan birlik sharning tayanch funksiyasini hisoblaymiz. Agar $F=S_1(0)$ bo'lsa, uchun

(1) tenglikning o‘ng tomonida maksimum $f_0 = \frac{\psi}{\|\psi\|}$ vektorda erishiladi. U holda

$$c(F,\psi) = c(S_1(0),\psi) = (f_0,\psi) = \left(\frac{\psi}{\|\psi\|},\psi\right) = \|\psi\|. \tag{3.4}$$

3-misol. R^2 tekislikda

$$F = \left\{ x \in R^2 : |x^1| \le 1, |x^2| \le 1 \right\}$$

shart bilan berilgan F kvadratning tayanch funksiyasini hisoblaymiz. Agar $\psi = (\psi^1,\psi^2)$ vektor R^2 tekislik birinchi choragida yotsa, ya’ni $\psi^1 \ge 0$, $\psi^2 \ge 0$ bo‘lsa, u holda (3.1) tenglikning o‘ng tomonida maksimum $f_0 = (1,1)$ vektorda erishilishi shuning uchun $c(F,\psi) = \psi^1 + \psi^2$.

Agar $\psi = (\psi^1,\psi^2)$ vektor R^2 tekislik ikkinchi choragida yotsa, ya’ni $\psi^1 \le 0$, $\psi^2 \ge 0$ bo‘lsa, u holda (3.1) tenglikning o‘ng tomonida maksimum $f_0 = (-1,1)$ vektorda erishilishi shuning uchun $c(F,\psi) = -\psi^1 + \psi^2$.

Agar $\psi = (\psi^1,\psi^2)$ vektor R^2 tekislik uchinchi choragida yotsa, ya’ni $\psi^1 \le 0$, $\psi^2 \le 0$ bo‘lsa, u holda (3.1) tenglikning o‘ng tomonida maksimum $f_0 = (-1,-1)$ vektorda erishilishi shuning uchun $c(F,\psi) = -\psi^1 - \psi^2$.

Agar $\psi = (\psi_1,\psi_2)$ vektor R^2 tekislik to‘rtinchi choragida yotsa, ya’ni $\psi^1 \ge 0$, $\psi^2 \le 0$ bo‘lsa, u holda (3.1) tenglikning o‘ng tomonida maksimum $f_0 = (1,-1)$ vektorda erishilishi shuning uchun $c(F,\psi) = \psi^1 - \psi^2$ .Nihoyat bu hollarni barchasini umumlashtirib, tayanch funksiya uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$c(F,\psi) = |\psi^1| + |\psi^2| \tag{3.5}$$

3.2. Tayanch funksiyalarning xossalari

1-xossa. $c(F, : R^n \to R^1)$ *tayanch funksiya musbat bir jinsli, ya'ni ixtiyoriy* $\psi \in R^n$ *vektor va ixtiyoriy* $\lambda \ge 0$ *uchun* $c(F,\lambda\psi) = \lambda c(F,\psi)$ *xususiy holda* $c(F,0) = 0$

Isboti Bu xossaning isboti tayanch funksiyaning (3.1) ta'rifidan va maksimumning xossasidan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham

$$c(F,\lambda\psi) = \max_{f\in F} < f,\lambda\psi > = \lambda \max_{f\in F} < f,\psi > = \lambda c(F,\psi)$$

tenglik o'rinli.

2-xossa. *Ixtiyoriy ikkita* $x^{\psi_1,\psi_2} \in R^n$ *torlar uchun tayanch funksiya*

$$c(F,\psi_1+\psi_2)\leq c(F,\psi_1)+c(F,\psi_2)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isboti. Bu xossaning isboti ham bevosita tayanch funksiyaning ta'rifi va maksimum xossalaridan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham,

$$c(F,\psi_1+\psi_2)=\max_{f\in F}<f,\psi_1+\psi_2>\leq\max_{f\in F}<f,\psi_1>+\max_{f\in F}<f,\psi_2>=c(F,\psi_1)+c(F,\psi_2).$$

Agar ixtiyoriy ikkita $x_1,x_2 \in R^n$ nuqtalar va ixtiyoriy $0\leq\lambda\leq 1$ soni uchun

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

tengsizlik bajarilsa, $f: R^n \to R^1$ funksiyaga qavariq deyiladi.

$$(F;): R^n \to R^1$$

1-va 2-xossalarning natijasi. *Tayanch funksiya qavariq bo'ladi.*
Haqiqatdan ham 2- va 1- xossalardan ixiyoriy ikkita $\psi_1,\psi_2 \in R^n$ vektorlar va ixtiyoriy $0\leq\lambda\leq 1$ soni uchun

$$c(F,\lambda\psi_1+(1-\lambda)\psi_2)\leq c(F,\lambda\psi_1)+c(F,(1-\lambda)\psi_2=\lambda c(F,\psi_1)+(1-\lambda)c(F,\psi_2).$$

3-xossa $F,G\in\Omega(R^n)$ *bo'lsin. U holda* $F+G$ *funksiyaning* $c(F+G,\psi)$ *tayanch funksiya* $c(F,\psi)$ *va* $c(G,\psi)$ *tayanch funksiyalarning yig'indisiga teng, ya'ni*

$$c(F+G,\psi)=c(F,\psi)+c(G,\psi)$$

Isboti. Ikki to'plam yig'indisining ta'rifi (2-ma'ruzaga qarang) bo'yicha

$$F+G=\{x=f+g: f\in F, g\in G\}$$

Endi tayanch funksiyaning (3.1) ta'rifidan foydalanamiz:

$$c(F+G,\psi)=\max_{x\in F+G}<x,\psi>=\max_{f\in F,g\in G}<f+g,\psi>=\max_{f\in F}<f,\psi>+\max_{g\in G}<g,\psi>=$$

$$=c(F,\psi)+c(G,\psi).$$

3-xossaning isboti yakunlandi.

Endi $A-n\times n$ o'lchamli matritsa, $f\in\Omega(R^n)$ bo'lsin. A chiziqli almashtirishda F to'plamning AF aksi (2-ma'ruzaga qarang)

$$AF=\{x\in R^n: x=Af, f\in F\} \tag{3.6}$$

formula bilan aniqlanadi.

Chiziqli almashtirishda F to'plamning aksining tayanch funksiyasi qanday ifodalanishini ko'rib chiqamiz.

4-xossa. *$A-n\times n$ o'lchamli matritsa, $f\in\Omega(R^n)$ bo'lsin. U holda*

$$c(AF,\psi)=c(F,A^*\psi),$$

bu yerda A^*-A matritsaga qo'shma matritsa.

Isboti . Bu xossaning isboti tayanch funksiyaning (3.1) ta'rifidan va to'plam aksi (3.6) dan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham

$$c(AF,\psi)=\max_{x\in AF}<x,\psi>=\max_{f\in F}<Af,\psi>=\max_{f\in F}<f,A^*\psi>=$$

$$=c(F,A^*\psi)$$

5-xossa *$F\in\Omega(R^n)$ va $\lambda-$ ixtiyoriy son bo'lsin. U holda*

$$c(\lambda F,\psi)=c(F,\lambda\psi).$$

Bu xossa 4-xossaning $A=\lambda E$ bo'lgan holdagi xususiy holidir, bu yerda $E-n\times n$ o'lchamli birlik matritsa.

Natija. $c(F,\psi)$ tayanch funksiya birinchi F argumentga nisbatan bir jinsli, ya'ni ixtiyoriy $\lambda\geq 0$ soni uchun

$$c(\lambda F,\psi)=\lambda c(F,\psi).$$

Bu xossani isbotlash uchun 1-xossaning natijasidan foydalanish yetarli.

4-misol. R^n fazodagi ixtiyoriy $S_r(a)$ sharning tayanch funksiyasini hisoblaymiz. 2-ma'ruzada $S_r(a)$ sharni

$$S_r(a)=\{a\}+rS_1(0)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkinligi ko‘rsatilgan. Hamda $\{a\}$ to‘plamning va birlik $S_1(0)$ sharning tayanch funksiyalari hisoblangan edi. ((3.3) va (3.4) formulalarga qarang). 3-xossadan va 5-xossaning natijasidan foydalanib

$$c(S_r(a),\ \psi)=c(\{a\}+rS_1(0),\ \psi)=c(\{a\},\psi)+rc(S_1(0),\ \psi)=$$
$$=\langle a,\psi\rangle+r\|\psi\|$$

tenglikni hosil qilamiz.

5-misol R^2 tekislikda tomonlari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan ixtiyoriy G to‘g‘ri to‘rtburchakning tayanch funksiyasini hisoblaymiz. Bu to‘g‘ri to‘rtburchak

$$G=\{x\in R^2: a^1\le x^1\le a^2,\ b^1\le x^2\le b^2\}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsin.

G to‘g‘ri to‘rtburchakning 3-misolda berilgan

$$F=\{x\in R^2: |x^1|\le 1,\ |x^2|\le 1\}$$

kvadratdan mos parallel ko‘chirish va chiziqli almashtirishdan (cho‘zish) yordamida hosil qilamiz. U holda

$$G=\left\{\left(\frac{b^1+a^1}{2},\frac{b^2+a^2}{2}\right)+\begin{pmatrix}\frac{b^1-a^1}{2} & 0\\ 0 & \frac{b^2+a^2}{2}\end{pmatrix}\right\}F.$$

So‘ng 3- va 4- xossalar va (3.3) va (3.5) formulalarga asosan

$$C(G,\psi)=\frac{b^1+a^1}{2}\psi^1+\frac{b^2+a^2}{2}\psi^2+\frac{b^1-a^1}{2}|\psi^1|+\frac{b^1-a^2}{2}|\psi^2|.$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

6-xossa. $G,F\in\Omega(R^n)$ bo‘lsin. Agar $G\subset F$ mansublik bajarilsa, u holda ixtiyoriy $\psi\in R^n$ vektor uchun

$$c(G,\psi)\le c(F,\psi)$$

tengsizlik o‘rinli.

Isboti Bu xossaning isboti tayanch funksiyaning (3.1) ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatdan ham

$$c(G,\psi)=\max_{g\in G}<g,\psi>\le\max_{f\in F}<f,\psi>=c(F,\psi)$$

Natija. $F\in\Omega(R^n)$ bo'lsin. Agar f nuqta F to'plamga tegishli bo'lsa, ya'ni $f\in F$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\psi\in R^n$ vektor uchun

$$<f,\psi>\le c(F,\psi)$$

tengsizlik bajariladi.

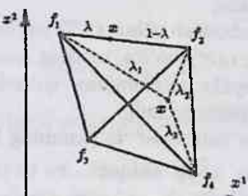
Bu natijani isbotlash uchun $G=\{f_0\}$ deb olish yetarli.

Tayanch funksiyaning kelgusi xossalarini keltirib chiqarish uchun, F to'plam qavariq qobig'i $convF$ ning ba'zi xossalarini bilish zarur.

3.3. To'plamning qavariq qobig'i

Agar ixtiyoriy $x_1,x_2\in F$ nuqtalar bilan birgalikda ularni tutashtiruvchi kesma ham F da saqlansa, yoki analitik tilda , ixtiyoriy $0\le\lambda\le1$ soni uchun $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in F$ mansublik bajarilsa, $F\subset R^n$ to'plam qavariq to'plam deyiladi(2-ma'ruza).

Ixtiyoriy sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi yana qavariq to'plam bo'lishi ravshan.



8-chizma

F to'plamni o'zida saqlovchi eng kichik qavariq to'plamga F to'plamning qavariq qobig'i deyiladi va $convF$ kabi belgilanadi. $convF$

to'plam F to'plamni o'zida saqlovchi barcha qavariq to'plamlarning kesishmasidan iborat ekanligi ravshan. Agar F to'plam bo'lsa, u holda $convF=F$. Agar n R^n fazoning o'lchovi bo'lsa, $F \subset R^n$ to'plamning $convF$ qavariq qobig'i barcha

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{n+1} x_{n+1}, \; x_i \in F, \; \lambda_i \geq 0, \; \lambda_1 + ... + \lambda_{n+1} = 1 \tag{3.7}$$

ko'rinishdagi nuqtalar to'plami bilan ustma-ust tushadi. Bu holda nuqtaga nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi deyiladi. Bu tasdiqning isboti D1 (qo'shimchani qarang) bo'limda keltirilgan. Qavariq analizda bu tasdiq Karateodori teotemasi sifatida ma'lum

6- misol. $n=2$ va $F \subset R^2$ to'plam to'rtta har xil f_1, f_2, f_3, f_4 nuqtalardan tashkil topgan bo'lsin (8- chizma). F to'plamning qavariq qobig'i uchlari f_1, f_2, f_3, f_4 nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakdan iborat.
Agar biz F to'plamni barcha nuqtalarini kesmalar bilan tutashtirsak, to'rtburchakning tomonlari va diagonallarini hosil qilamiz. To'rtburchakning ixtiyoriy ichki nuqtasi F to'plamning faqat uchta

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \tag{3.8}$$

nuqtalarning gavariq kombinatsiyalari ko'rinishida hosil qilinishi mumkin. (3.8) nuqtalarning majmuasi uchlari x_1, x_2, x_3 nuqtalarda bo'lgan uchburchakdan tashkil topgan. To'rtburchakning ixtiyoriy nuqtasini (3.8) ko'rinishida, ya'ni uchlari F to'plamda bo'lgan uchburchakning nuqtalari sifatida tasvirlash mumkin,

Quyidagi tasdiqni isbotlash uchun (3.7) yoyilmadan foydalanamiz.

1-lemma. Agar $F \subset \Omega(R^n)$ bo'lsa, u holda $convF \in \Omega(R^n)$ bo'ladi ya'ni, bo'sh bo'lmagan kompakt to'plamning qavariq qobig'i ham bo'sh bo'lmagan kompakt to'plam bo'ladi.

Isboti. $F \subset \Omega(R^n)$ bo'lsin. $convF$ to'plamning bo'sh to'plam emasligi $F \in convF$ mansublikdan kelib chiqadi. F to'plam chegaralanganligi tufayli, $F \subset S_r(0)$ bo'ladigan va $r \geq 0$ soni mavjud . $S_r(0)$ shar qavariq to'plam bo'lgani uchun, qavariq qobiq ta'rifiga ko'ra $convF \subset S_r(0)$, ya'ni $convF$ chegaralangan to'plam.

$convF$ to'plamning yopiqligini isbotlash qoldi. Buning uchun F to'plamning kompaktligidan foydalanamiz va yaqinlashuvchi qismi ketma-ketlik ajratishning standart usulidan foydalanamiz.

Aytaylik $\{y_k\}$ $y_k \in convF$ ketma-ketlik u nuqtaga yaqinlashsin. Har bir y_k nuqtani

$$y_k = \lambda_1^k x_1^k + ... + \lambda_{n+1}^k x_{n+1}^k, \; x_i^k \in F, \; \lambda_i^k \geq 0, \; \lambda_1^k + ... + \lambda_{n+1}^k = 1 \qquad (3.9)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin. x_1^k nuqta kompakt F to'plamga tegishli $\{x_1^k\}$ ketma-ketlikdan qandaydir $x_1 \in F$ nuqtaga yaqinlashuvchi qismi ketma-ketlik ajratamiz. (3.9) munosabatlardan bu ketma-ketlikka kirmaydigan barcha k indeksli nuqtalarni tashlab юboramiz, $k = 1,2,...$ $0 \leq \lambda_1^k \leq 1$ bo'lgani uchun, $\{\lambda_1^k\}$ ketma-ketlik bilan ham shunday ish bajarish mumkin. Natijada $\lambda_1^k \to \lambda_1$ bo'ladi. Bu jarayonni har bir $i = 1,....,n-1$ lar uchun takrorlab va (13) munosabatda $k \to \infty$ da limitga o'tilsa, u holda u limit nuqta uchun

$$y = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{n+1} x_{n+1}, \; x_i \in F, \; \lambda_i \geq 0, \; \lambda_1 + ... + \lambda_{n+1} = 1$$

ko'rinishni hosil qilamiz. Demak, u nuqta $x_i \in F$, nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi ekan va shuning uchun $y \in convF$. Lemma isbotlandi.

3.4. Tayanch funksiyalarning xossalari (davomi)

$F \in \Omega(R^n)$ bo'lsin. 1-lemmaga asosan, bu holda $convF \in \Omega(R^n)$, ya'ni $convF$ to'plam uchun $c(convF, \psi)$ tayanch funksiyani aniqlash mumkin.

7-xossa. $F \in \Omega(R^n)$ bo'lsin. U holda $convF$ va F to'plamlarning tayanch funksiyalari bir xil, ya'ni

$$c(conv\, F, \psi) = c(F, \psi).$$

Isboti. $F \subset convF$ bo'lgani uchun 6-xossaga ko'ra

$$c(F, \psi) \leq c(convF, \psi),$$

Boshqa tomonga tengsizlikni hosil qilish uchun F to'plamning (3.7) ko'rinishidagi barcha nuqtalarining qavariq qobig'i $convF$ to'plamdan foydalanamiz. U holda

$$c(\mathrm{conv}F,\psi)=\max_{x\in \mathrm{conv}F}<x,\psi>=\max_{\substack{x_i\in F\\ i=1,\dots,n+1}}<\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_{n+1}x_{n+1},\psi>\le\lambda_1\max_{x_1\in F}<x,\psi>+\dots+$$

$$+\lambda_{n+1}\max_{x_{n+1}\in F}<x_{n+1},\psi>=(\lambda_1+\dots+\lambda_{n+1})c(F,\psi)=c(F,\psi).$$

Hosil qilingan tengsizlik 7-xossani isbotlaydi.

Ixtiyoriy $F\in\Omega(R^n)$ to'plam uchun biz $c(F,\psi)$ tayanch funksiyani aniqladik. $c(F,\psi)$ tayanch funksiyani bilgan holda F to'plamni o'zini aniqlash mumkinmi? - degan savol tug'iladi. Ma'lum bo'lishicha $c(F,\psi)$ tayanch funksiyani bilgan holda faqat F to'plamning qavariq qobig'i $\mathrm{conv}F$ ni tiklash mumkin va demak F qavariq to'plam bo'lsa, F to'plamni tiklash mumkin ekan.

8-xossa. $F\in\Omega(R^n)$ to'plam va uning $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasi berilgan bo'lsin. U holda F to'plamning qavariq qobig'i $\mathrm{conv}F$

$$\mathrm{conv}F=\bigcap_{\psi\in S}\{f\in R^n:<f,\psi>\le c(F,\psi)\} \qquad (3.10)$$

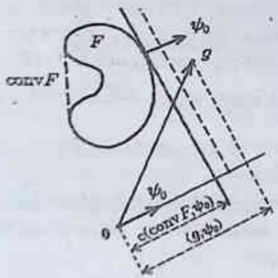
ko'rinishda ifodalanadi. 8-xossaning geometrik ma'nosi $\mathrm{conv}F$ qavariq F to'plamni o'zida saqlovchi yopiq yarim fazolar kesishmasidan iborat. Bu tayanch funksiyaning geometrik ma'nosidan kelib chiqadi.

Isboti: $g\in\mathrm{conv}F$ bo'lsin. U holda 6-xossa natijasidan hamda 7 xossadan ixtiyoriy $\psi\in R^n$ vektor uchun, xususiy holda $\psi\in S$ uchun

$$(g,\psi)\le c(\mathrm{conv}F,\psi)=c(F,\psi)$$

ga egamiz. Demak, g nuqta (3.10)ning o'ng tomoniga tegishli.

Endi $g\notin\mathrm{conv}F$ bo'lsin. $\mathrm{conv}F$ qavariq kompakt va g bu to'plamga tegishli emas. U holda shunday $\psi_0\in S$ vektor topiladiki, (9-chizma) bunda $c(\mathrm{conv}F,\psi_0)<(g,\psi_0)$ qat'iy tengsizlik bajariladi.



9-chizma

Bu holda Γ_{ψ_0} gipertekislik g nuqtani $convF$ to'plamdan qat'iy ajratadi deyiladi.

Oxirgi tengsizlikdan 7-xossaga ko'ra

$$c(F,\psi_0)<(g,\psi_0)$$

Shunday qilib, berilgan $\psi_0 \in S$ vektor uchun unga mos (3.10) munosabatning o'ng tomonida figurali qavs ichida

Joylashgan yarim fazo g nuqtani o'zida saqlamaydi. Shu bilan birga bunday yarim fazolarning kesishmasi ham bu nuqtani o'zida saqlamaydi, ya'ni g nuqta (3.10) munosabatning o'ng tomoniga tegishli emas. 8-xossa isbotlandi.

Kelgusida to'plamlar uchun qandaydir munosabatlarga ega bo'lsak, tayanch funksiyalar uchun mos munosabatlar hosil qilamiz. Teskarisi tayanch funksiyalar uchun keltirilgan munosabatlardan faqat ularning qavariq qobig'lari uchun munosabatlarni hosil qilamiz.

9-xossa. $F \in \Omega(R^n), f \in R^n$ bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$<f,\psi>\le c(F,\psi) \qquad (3.11)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda f nuqta F to'plamning $convF$ qavariq qobig'iga tegishli.

Isboti. Aytaylik (3.11) tengsizlik ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun bajarilsin. U holda f nuqta (3.11) ning o'ng tomonida joylashgan to'plamga tegishli. Shuning uchun 8-xossaga ko'ra $f \in convF$ mansublikka ega bo'lamiz.

Natija. $F \in \Omega(R^n)$ qavariq to'plam bo'lsin. U holda f nuqta F to'plamga tegishli bo'lishi uchun ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun (3.11) tengsizlikni bajarilishi zarur va yetarli.

Bu xossani isbotlash uchun 9-xossa va 6-xossaning natijasidan foydalanish yetarli.

Agar F qavariq to'plam bo'lmasa, u holda (3.11) munosabatning bajarilishidan $f \in F$ kelib chiqmasligini eslatib o'tamiz.

Quyidagi misolni qaraymiz.

7-misol. Aytaylik F to'plam R^n fazodagi birlik sfera bo'lsin, ya'ni $F=S, f=0$. U holda $<f,\psi>=0$, $c(F,\psi)=\|\psi\|$. Shuning uchun (3.11) munosabat bajariladi, chunki $0\le\|\psi\|$, ammo $0 \notin S$.

10-xossa. $G, F \in \Omega(R^n)$ bo'lsin. Agar $\psi \in S$ vektor uchun

$$c(G,\psi) \le c(F,\psi) \tag{3.12}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $G \subset convF$ mansublik o'rinli.

Isboti. Teskaridan faraz qilamiz, ya'ni $G \not\subset convF$ bo'lsin. Bu esa $g \notin convF$ bo'ladigan $g \in G$ nuqta mavjudligini bildiradi. $convF$ qavariq to'plam bo'lgani uchun , 9-xossaning natijasiga ko'ra

$$(g,\psi_0) > c(convF,\psi_0) = c(F,\psi_0)$$

tengsizlik bajariladigan $\psi_0 \in S$ vektor mavjudligini bildiradi.

6-xossaning natijasidan foydalanib, $g \in G$ mansublikdan

$$(g,\psi_0) \le c(G,\psi_0)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Oxirgi ikkita tengsizlikdan (3.12) ga zid

$$c(G,\psi_0) > c(F,\psi_0)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, 10-xossa isbotlandi.

Eslatma. $convF$ qavariq to'plam bo'lgani uchun , $G \subset convF$ mansublikdan $convG \subset convF$ mansublik kelib chiqadi.Shuning uchun , agar har qanday $\psi \in S$ vektor uchun (3.12) tengsizlik bajarilsa, u holda $convG \subset convF$ mansublik o'rinli.

Natija. $G, F \in \Omega(R^n)$ va F qavariq to'plam bo'lsin. U holda $G \subset F$ mansublik bajarilishi uchun, ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun (3.12) tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli. Natijaning isboti 10-va 6-xossalardan kelib chiqadi.

11-xossa. $G, F \in \Omega(R^n)$ bo'lsin. Agar $F = G$ bo'lsa, u holda ularning tayanch funksiyalari ustma-ust tushadi , ya'ni $c(F,\psi) = c(G,\psi)$. Teskarisi, agar $c(F,\psi)$ va $c(G,\psi)$ tayanch funksiyalar ustma-ust tushsa,u holda

$$c(F,\psi) = c(G,\psi).$$

Isboti. Tasdiqning birinchi qismi tayanch funksiyaning (3.1) ta'rifidan, ikkinchi qismi esa 10-xossadan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham $c(F,\psi) = c(G,\psi)$ tenglikni (3.12) ko'rinishdagi ikkita tengsizlikka ajratsak,

$$G \subset convF \text{ va } F \subset convG$$

mansubliklarga ega bo‘lamiz va demak $convF = convG$ tenglikka kelamiz. 11-xossa isbotlandi.

Natija. $F, G \in \Omega(R^n)$ qavariq to‘plamlar teng bo‘lishi uchun ularning tayanch funksiyalari bir xil bo‘lishi zarur va yetarli.

Kelgusida bu natija tayanch funksiyalar bo‘yicha to‘plamni topishda foydalaniladi. Bu esa $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasi bo‘yicha $F \in \Omega(R^n)$ qavariq to‘plamni bir qiymatli aniqlashni ham bildiradi. Bunda qavariq to‘plamlar yoki qavariq to‘plamlar majmuasining ixtiyoriy xossalari uchun tayanch funksiyalarning xuddi shuningdek xossalari mavjud.

Shuning uchun tayanch funksiyani qavariq to‘plamlarni yozish usullaridan biri deb qarash, ko‘p hollarda yengillik yaratadi. Masalan yetarlicha murakkab qavariq kompakt to‘plamni hamma nuqtalarini EHM ga kiritish mumkin emas. Ammo shu vaqtning o‘zida jadval shaklda yetarlicha aniqlikda mos tayanch funksiyalarni kiritish va to‘plam o‘rniga tayanch funksiyalar bilan ish ko‘rish maqsadga muvofiqdir.

Keyin ixtiyoriy $c(\psi): R^n \to R^1$ funksiya ko‘rinishiga qarab, u qandaydir to‘plamning tayanch funksiyasi bo‘lish yoki bo‘lmasligini aniqlash mumkin. Agar bu funksiya cheksiz qiymatlarni qabul qilmasdan 1-va 2-xossalarni qanoatlantirsa, u holda u qandaydir $F \subset conv\Omega(R^n)$ to‘plamning tayanch funksiyasi bo‘lishi mumkin, ya’ni $c(\psi) = c(F,\psi)$. Bunda $c(\psi)$ funksiya bo‘yicha F to‘plamni oson tiklash mumkin. Bu tasdiqdan chiziqli tezkorlik masalalarini tekshirishda foydalanilmaydi, ammo u tayanch funksiyalardan foydalanishni effektivligini ko‘rsatadi va D4 (qo‘shimchaga qarang) bo‘limda toza isbotlangan.

Tayanch funksiya tushunchasi va uning mos xossalarini tekshirishni chegaralanmagan yopiq qavariq to‘plamlar uchun ham kiritish mumkin [2]. Ammo bu qaralayotgan kitobga kirmaydi.

8-misol. $F \in \Omega(R^n)$ qavariq to‘plam

$$c(F,\psi) = 5\psi^1 + 2\psi^2 + 3\|\psi\|$$

tayanch funksiyaga ega. 4-misoldan markazi $a = (5,2)$ nuqtada radiusi $r = 3$ ga teng bo‘lgan $S_r(a)$ shar xuddi shunday tayanch funksiyaga ega. Shuning uchun 11-xossaga ko‘ra F to‘plam bu shar bilan ustma-ust tushadi.

9-misol.Ixtiyoriy ikkita $G, F \in \Omega(R^n)$ to‘plamlar, ixtiyoriy $n \times n$ o‘lchamli A matritsa va ixtiyoriy λ soni uchun

$$conv(F+G) = convF + convG,$$
$$conv(AF) = AconvF,$$
$$conv(\lambda F) = \lambda convF$$

tengliklar bajarilishini isbotlaymiz.

Bu munosabatlarning chap va o‘ng tomonidagi to‘plamlar qavariq bo‘lgani uchun ularning tayanch funksiyalari 7-xossa va mos ravishda 3-4-5-xossalar bo‘yicha ustma-ust tushadi. Demak, 11-xossaning natijasiga ko‘ra bu to‘plamlar ham ustma-ust tushadi.

12-xossa. $G, F \in \Omega(R^n)$ bo‘lsin. Agar F va G to‘plamlar kesishsa, ya’ni $F \cap G \neq \emptyset$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\psi \in R^n$ vektor uchun

$$c(F,\psi) + c(G,-\psi) \geq 0 \tag{3.13}$$

tengsizlik bajariladi. Teskarisi, agar ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun (3.13) munosabat bajarilsa, u holda $convF \cap convG \neq \emptyset$.

Isboti. Dastlab F va G to‘plamlar kesishishi uchun

$$0 \in F + (-1)G \tag{3.14}$$

mansublikning bajarilishi zarur va yetarli ekanligini ko‘rsatamiz. Haqiqatdan ham, $F \cap G \neq \emptyset$ va $x \in F \cap G$ bo‘lsin . U holda $x \in F$ va $x \in G$ ya’ni $-x \in (-1)G$. Shuning uchun $0 = x + (-x) \in F + (-1)G$.

Teskarisi $0 \in F + (-1)G$ bo‘lsin. U holda to‘plamlar yig‘indisiga ko‘ra $0 = f + (-1)g$, bu yerda $f \in F$, $g \in G$. Shuning uchun $f \in F$, $g \in G$ hamda $f = g$ bundan $F \cap G \neq \emptyset$.

Endi $G, F \in \Omega(R^n)$ va $F \cap G \neq \emptyset$ bo‘lsin. (3.13) munosabatga 6-xossaning natijasini qo‘llab

$$0 = (0,\psi) \leq c(F + (-1)G, \psi)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan 3-va 5-xossalarga ko‘ra

$$0 \leq c(F,\psi) + c(G,-\psi)$$

tengsizlik kelib chiqadi, ya’ni (3.13) munosabat bajariladi.

Endi (3.13) munosabat bajarilsin. U holda 3-va 5-xossalarga ko'ra

$$c(F+(-1)G,\psi)=c(F,\psi)+c(G,-\psi)\geq 0$$

Bundan 9-xossadan foydalanib,

$$0\in conv(F+(-1)G)=convF+(-1)convG$$

ni topamiz. Natijada (3.14) formulaga ko'ra $convF\cap convG\neq\emptyset$ munosabatga ega bo'lamiz. Shunday qilib 12-xossa to'la isbotlandi.

Natija. Ixtiyoriy ikkita qavariq $G,F\in\Omega(R^n)$ to'plamlar kesishadi faqat va faqat, ixtiyoriy $\psi\in S$ vektor uchun

$$c(F,\psi)+c(G,-\psi)\geq 0$$

tengsizlik bajarilsa.

13-xossa. Ixtiyoriy ikkita $F,F_0\in\Omega(R^n)$ to'plamlarning tayanch funksiyalari $c(F,\psi)$, $c(F_0,\psi)$ va ixtiyoriy ikkita $\psi,\psi_0\in R^n$ vektorlar uchun

$$|c(F,\psi)-c(F_0,\psi_0)|\leq\|\psi_0\|h(F,F_0)+|F|\cdot\|\psi-\psi_0\|+2h(F,F_0)\|\psi-\psi_0\| \quad (3.15)$$

tengsizlik bajariladi.

Isboti. $F,F_0\in\Omega(R^n)$-ixtiyoriy ikkita to'plamlar, $\psi,\psi_0\in R^n$-ixtiyoriy ikkita vektorlar bo'lsin. Tayanch funksiyalarning 2-xossasidan

$$c(F,\psi)=c(F,\psi-\psi_0+\psi_0)\leq c(F,\psi-\psi_0)+c(F,\psi_0) \quad (3.16)$$

tengsizlik kelib chiqadi. F to'plamning $|F|$ moduli va $h(F,F_0)$ Hausdorf masofaning aniqlanishiga ko'ra (2-ma'ruzaga qarang)

$$F\subset S_{|F|}(0),\quad F\subset F_0+S_{h(F,F_0)}(0)$$

mansubliklar bajariladi. Bu mansubliklarga $\psi-\psi_0$ va ψ_0 vektorlar uchun mos ravishda 6-xossani qo'llab,

$$c(F,\psi-\psi_0)\leq|F|\cdot\|\psi-\psi_0\|,\quad c(F,\psi_0)\leq c(F_0,\psi_0)+h(F,F_0)\|\psi_0\|$$

tengsizliklarni hosil qilamiz.

Bu tengsizliklarni (3.16) tengsizlikka qo'yib va $c(F_0,\psi_0)$ ifodani chap tomoniga o'tkazib

$$c(F,\psi)-c(F_0,\psi_0)\le|F|\cdot\|\psi-\psi_0\|+h(F,F_0)\|\psi_0\|$$

munosabatni hosil qilamiz. F,F_0 to'plamlar va ψ,ψ_0 vektorlar ixtiyoriy bo'lgani uchun, ularni almashtirish bilan hosil qilingan tengsizlik o'zgarmaydi.

Shunday qilib

$$c(F_0,\psi_0)-c(F,\psi)\le|F_0|\cdot\|\psi_0-\psi\|+h(F_0,F)\|\psi\|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Oxirgi ikkita tengsizlikdan

$$|c(F,\psi)-c(F_0,\psi_0)|\le\|\psi-\psi_0\|\cdot\max(|F|,|F_0|)+h(F,F_0)\max(\|\psi\|,\|\psi_0\|)$$

munosabat kelib chiqadi. Bu munosabatdagi $\|\psi\|$ va $|F|$ miqdorlarni quyidagicha baholaymiz :

$$\|\psi\|=\|\psi-\psi_0+\psi_0\|\le\|\psi-\psi_0\|+\|\psi_0\|,$$
$$|F|=h(\mathrm{F},\{0\})\le h(\mathrm{F},\mathrm{F}_0)+h(\mathrm{F},\{0\})=h(\mathrm{F},\mathrm{F}_0)+|F_0|.$$

U holda

$$\max(\|\psi\|,\|\psi_0\|)\le\|\psi_0\|+\|\psi-\psi_0\|,\quad \max(|F|,|F_0|)\le|F_0|+h(F,F_0).$$

tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklarni (3.16) tengsizlikka qo'yib, zarur bo'lgan (3.15) tengsizlikni hosil qilamiz. Shu bilan 13-xossa isbotlandi.

Bu xossadan darhol $c(F,\psi)$ tayanch funksiyaning uzluksizligi kelib chiqadi.

$c(F,\bullet):R^n\to R^1$ tayanch funksiyaning ψ o'zgaruvchi bo'yicha $\psi_0\in R^n$ nuqtada uzluksizligi , ψ nuqta ψ_0 nuqtaga intilganda $c(F,\psi)$ funksiyaning qiymati $c(F,\psi_0)$ ning qiymatiga intilishini ko'rsatadi. Shuning uchun , ixtiyoriy $\varepsilon>0$soni uchun shunday $\delta>0$ soni topiladiki, $\|\psi-\psi_0\|\le\delta$ bo'lganda

$$|c(F,\psi)-c(F,\psi_0)|\le\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

$c(\bullet,\psi):\Omega(R^n)\to R^1$ tayanch funksiyaning F o'zgaruvchi bo'yicha $F_0\in\Omega(R^n)$ nuqtada uzluksizligi , F nuqta F_0 nuqtaga intilsa , u holda $c(F,\psi)$ ning qiymati $c(F_0,\psi)$ ning qiymatiga yaqinlashadi. Shuning uchun , ixtiyoriy $\varepsilon>0$soni uchun shunday $\delta>0$ soni topiladiki, $h(F,F_0)\le\delta$ bo'lganda

$$|c(F,\psi)-c(F_0,\psi)|\le\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

$c(F,\psi)$ tayanch funksiyaning har ikkala F,ψ o'zgaruvchilar majmuasi bo'yicha (F_0,ψ_0) nuqtada uzluksizligi, bir vaqtda F ni F_0 ga ψ ni ψ_0 ga intilganda $c(F,\psi)$ ning qiymati $c(F_0,\psi_0)$ ning qiymatiga intilishini bildiradi. Shuning uchun, ixtiyoriy $\varepsilon>0$soni uchun shunday $\delta>0$soni topiladiki,

$$h(F,F_0)\le\delta\,,\ \ \|\psi-\psi_0\|\le\delta$$

bo'lganda

$$|c(F,\psi)-c(F_0,\psi_0)|\le\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. (3.15) ifodadan, agar berilgan $\varepsilon>0$ soni uchun

$$\|\psi_0\|\delta+|F_0|\delta+2\delta^2\le\varepsilon$$

munosabat bajariladigan $\delta>0$ sonini tanlash mumkin bo'lsa, oxirgi tengsizlik bajariladi. Shunday qilib 13-xossaning quyidagi natijasini isbotladik.

Natija. $c(F,\psi)$ tayanch funksiya F,ψ o'zgaruvchilari bo'yicha ixtiyoriy (F_0,ψ_0) nuqtada uzluksiz va demak har bir F va ψ o'zgaruvchilar bo'yicha alohida uzluksiz bo'ladi.

14-xossa. $F\in\Omega(R^n)$ bo'lsin. Agar f nuqta F to'plamning ichki nuqtasi bo'lsa, ya'ni $f\in\operatorname{int}F$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\psi\in S$ vektor uchun

$$\langle f,\psi\rangle<c(F,\psi) \tag{3.17}$$

tengsizlik bajariladi. Teskarisi agar ixtiyoriy $\psi\in S$ vektor uchun (3.17) munosabat bajarilsa, u holda $f\in\operatorname{int}conv F$ bo'ladi.

Isboti. $f\in\operatorname{int}F$ bo'lsin. U holda $S_\varepsilon(f)\subset F$ bo'ladigan $\varepsilon>0$ soni mavjud. Bundan 6-xossaga ko'ra

$$c(S_\varepsilon(f),\psi) \le c(F,\psi)$$

tengsizlik ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun bajariladi. Hosil bo'lgan tenglikka $S_\varepsilon(f)$ sharning tayanch funksiyasi qo'yilsa,

$$\langle f,\psi\rangle + \varepsilon\|\psi\| \le c(F,\psi)$$

tengsizlikka o'tamiz. Shuning uchun (3.17) munosabat barcha $\psi \in S$ vektorlar uchun o'rinli. Endi (3.17) tengsizlik ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun bajarilsin. $c(F,\psi)$ tayanch funksiya ψ bo'yicha uzluksiz (13-xossaning natijasi) bo'lgani uchun, $c(F,\psi) - \langle f,\psi\rangle$ ψ bo'yicha uzluksiz va barcha $\psi \in S$ vektorlar uchun musbat. Bu uzluksiz funksiyaning S kompakt to'plamdagi minimumi mavjud va musbat. Bu minimumini ε deb belgilaymiz. Shuning uchun

$$c(F,\psi) - (f,\psi) \ge \varepsilon > 0$$

tengsizlik hamma vaqt $\psi \in S$ vektorlar uchun o'rinli, ya'ni

$$(f,\psi) + \varepsilon\|\psi\| \le c(F,\psi).$$

Bu tengsizlikni

$$c(S_\varepsilon(f),\psi) \le c(F,\psi)$$

ko'rinishda yozamiz. 10-xossaga ko'ra bundan $S_\varepsilon(f) \subset F$ mansublik kelib chiqadi va bu f nuqta $convF$ to'plamning ichki nuqtasi ekanligini bildiradi.

Natija. f nuqta qabariq $F \in \Omega(R^n)$ to'plamning ichki sohasiga tegishli bo'lishi uchun ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun (3.17) tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

15-xossa. Ikkita $G, F \in \Omega(R^n)$ to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda

$$h(convF, convG) = \max_{\psi \in S} |c(F,\psi) - c(G,\psi)| \le h(F,G) \qquad (3.18)$$

munosabat o'rinli.

Isboti. Bu munosabatdagi tengsizlik bevosita 13-xossadan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$|c(F,\psi) - c(G,\psi)| \le h(F,G)$$

demak,

$$\max_{\psi \in S} |c(F,\psi) - c(G,\psi)| \le h(F,G)$$

tengsizlik o'rinli. Hausdorf masofasi

$$h(convF, convG) =$$
$$= \min\{r \ge 0 : convF \subset convG + S_r(0), convG \subset convF + S_r(0)\}$$

ifodadan aniqlanadi. $convF, convG$ to'plamlar qavariq va ularning $c(convF,\psi)$ *va* $c(convG,\psi)$ tayanch funksiyalari 7-xossaga ko'ra mos ravishda $c(F,\psi)$ *va* $c(G,\psi)$ tayanch funksiyalar bilan ustma-ust tushadi, shuning uchun figurali qavslardagi mansubliklarni ularga teng kuchli tengsizliklar ko'rinishida yozishimiz mumkin. 10-xossaning natijasiga ko'ra

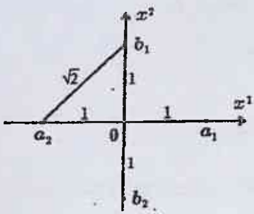
$$h(convF, convG) = \min\{r \ge 0 : c(F,\psi) \le c(G,\psi) + r, c(G,\psi) \le c(F,\psi) + r, \psi \in S\} =$$
$$= \min\{r \ge 0 : |c(F,\psi) - c(G,\psi)| \le r, \psi \in S\} = \max_{\psi \in S} |c(F,\psi) - c(G,\psi)|.$$

Demak, 15-xossa isbotlandi.

Natija. Ixtiyoriy qavariq $G, F \in \Omega(R^n)$ to'plamlar uchun

$$h(G,F) = \max_{\psi \in S} |c(F,\psi) - c(G,\psi)| \tag{3.19}$$

tenglik o'rinli. Agar F va G to'plamlar qavariq bo'lsa, u holda (3.19) formulada qat'iy tengsizlik bo'lishini qayd etamiz.



10-chizma

Misol keltiramiz.

10-misol. $n=2$ bo'lib F to'plam ikkita $a_1 = (1,0)$ va $a_2 = (-1,0)$ nuqtalardan, G to'plam ikkita $b_1 = (0,1)$ va $b_2 = (0,-1)$ nuqtalardan tashkil topgan bo'lsin (10-chizma). U holda bevosita $h(G,F) = \sqrt{2}$ ekanini tekshirish mumkin.

Boshqa tomondan $c(F,\psi) = |\psi^1|$, $c(G,\psi) = |\psi^2|$. Shuning uchun

$$\max_{\psi\in S}|c(F,\psi)-c(G,\psi)|=\max_{\psi\in S}\left\| \psi^1|-|\psi^2|\right\|=1<\sqrt{2}=h(F,G)$$

Navbatdagi misol (3.19) formuladan foydalanib, to'plamlar orasidagi Hausdorf masofani topishni ko'rsatadi.10-chizma.

11-misol. Ixtiyoriy $S_{r_1}(a_1)$ va $S_{r_2}(a_2)$ sharlar orasidagi Xausdorf masofasini topamiz .(3.19) formuladan foydalanib,

$$h(S_{r_1}(a_1),S_{r_2}(a_2))=\max_{\psi\in S}\left|<a_1,\psi>+r_1\|\psi\|-<a_2,\psi>-r_2\|\psi\|\right|=$$
$$=\max_{\psi\in S}|<a_1-a_2,\psi>+r_1-r_2|.$$

Oxirgi ifodada maksimum, $a_1\neq a_2$ bo'lganda $\psi=sign(r_2-r_1)\frac{a_1-a_2}{\|a_2-a_1\|}\in S$ vektorda erishiladi va agar $a_1=a_2$ bo'lsa, $\psi\in S$ vektorda erishadi. Shuning uchun

$$h(S_{r_1}(a_1),S_{r_2}(a_2))=\|a_1-a_2\|+|r_1-r_2|$$

formulaga kelamiz.

3.5. Masalalar

1. n o'lchamli

$$F=\{x\in R^n \quad |x^i|\leq 1,\ i=1,2,...,n\}$$

kubning tayanch funksiyasini toping.

2. Qirralari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan ixtiyoriy n o'lchamli

$$G=\{x\in R^n : a^i\leq x^i\leq b^i\ ,\ i=1,2,...,n\}$$

parallepipedning tayanch funksiyasini toping.

3. Tekislikda

$$P=\{x\in R^2 : |x^1+x^2|\leq 1,\ |x^1-x^2|\leq 1\}$$

Formula bilan berilgan P to'plamning tayanch funksiyasini toping.

4. R^2 tekislikda

$$\left(\frac{x^1}{a}\right)^2+\left(\frac{x^2}{b}\right)^2=1\ ,\quad a,b\neq 0$$

tenglama bilan berilgan ellipsning tayanch to'plamini toping.

5.

$$F=\left\{x\in R^2:\left(\frac{x^1-a}{c}\right)^2+\left(\frac{x^2-b}{d}\right)^2\le 1\right\} c,d\ne 0$$

to‘plamning tayanch funksiyasini toping.

6.

$$F=\{x\in R^2:(Ax,x)\le 1\}$$

to‘plamning tayanch funksiyasini toping, bu yerda A $n\times n$ o‘lchamli musbat aniqlangan simmetrik matritsa.

7*.

$$F=\left\{x\in R^2:\left|\frac{x^1}{a}\right|^p+\left|\frac{x^2}{b}\right|^p\le 1\right\} a,b\ne 0$$

to‘plamning tayanch funksiyasini toping, bu yerda p- qandaydir son bo‘lib, $p>1$.

8. $F=S_2((0,2))\cup S_2((0,-2))$ to‘plamning tayanch funksiyasini toping.

9. n o‘lchamli

$$F=\left\{x\in R^n:\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x^i}{a^i}\right)^2\le 1\right\}$$

ellipisoidning tayanch funksiyasini toping.

10. $c(F,\psi)=|\psi^1-\psi^2|$ tayanch funksiya bo‘yicha $F\in\Omega(R^2)$ to‘plamni tiklang.

11. 12-xossadan foydalanib, ikkita $S_{r_1}(a_1)$ va $S_{r_2}(a_2)$ sharlar kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lmasligining shartini toping.

12. Ikkita to‘plam birlashmasi $F\cup G$ ning tayanch funksiyasini toping.

13. Ikkita to‘plam kesishmasi $F\cap G$ ning tayanch funksiyasini toping.

14*. $F\in\Omega(R^2)$ to‘plamni o‘zida saqlagan minimal chiziqli ko’pchilikning o‘lchamiga F to‘plamning o‘lchami deyiladi. F to‘plamning o‘lchamini uning tayanch funksiyasi $c(F,\psi)$ yordamida toping.

15. $F\in\Omega(R^2)$ to‘plamni o‘zida saqlagan minimal sharning radiusini toping.

16. $F\in\Omega(R^2)$ to‘plamga ichki chizilgan maksimal sharning radiusini toping.

17. $d(F)=\max_{f_1,f_2\in F}\|f_1-f_2\|$ soniga F to‘plamning diametri deyiladi. F

to'plamning diametrini uning $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasi orqali toping.
18. F va G to'plamlar orasidagi Evklid masofasi

$$\rho(F,G)=\min_{f\in F,g\in G}\|f-g\|$$

formula bilan aniqlanadi. $F,G\in\Omega(R^2)$ qavariq to'plamlar orasidagi $\rho(F,G)$ Evklid masofasini ularning tayanch funksiyasi orqali toping.
19. $p\in R^n$ nuqtadan qavariq $F\in\Omega(R^n)$ to'plamgacha bo'lgan $\rho(p,F)$ Evklid masofasini toping.
20. Ixtiyoriy ikkita $p,q\in R^n$ nuqtalar va . ixtiyoriy ikkita $F,G\in\Omega(R^n)$ to'plamlar uchun

$$\rho(p,F)\le\|p-q\|+\rho(q,F),\qquad \rho(p,F)\le\rho(p,G)+h(G,F)$$

tengsizliklar bajarilishini isbotlang.
21.Ixtiyoriy $F\in\Omega(R^n)$ to'plam va ixtiyoriy $\psi\in S$ vektor uchun

$$|\,c(F,\psi)\,|\le|F|\cdot\|\psi\|$$

tengsizlikni isbotlang.
22. F to'plamning $|F|$ modulini $c(F,\psi)$ tayanch funksiya orqali ifodalang.

4-ma'ruza

- *O'lchovli funksiyalar;*
- *Ko'p qiymatli akslantirishlar;*
- *Uzluksiz ko'p qiymatli akslantirishlarning xossalari;*
- *Ko'p qiymatli akslantirishlarning uzluksiz va o'lchovli bir qiymatli shoxchalari.*

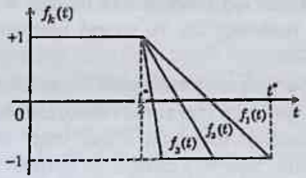
4.1. O'lchovli funksiyalar

Hozirgacha biz faqat uzluksiz funksiyalar sinfi bilan ish ko'rdik. Ammo optimal boshqaruvning matematik nazariyasida kengroq funksiyalar sinfi bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bu qisman uzluksiz funksiyalar fazosining nuqtali yaqinlashishga nisbatan, ya'ni uzluksiz funksiyalar ketma-ketligining nuqtali limiti yana uzluksiz funksiya bo'lmasligi bilan izohlanadi. Aytilganlarni misollarda tushuntiramiz.

1-misol. $[0,t^*]$ kesmada aniqlangan quyidagi

$$f_k(t)=\begin{cases} +1, & agar \quad 0\le t\le \dfrac{t^*}{2}, \\ -\dfrac{2^{k+1}}{t^*}t+2^k+1, & agar \quad \dfrac{t^*}{2}<t\le\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^k}\right)\cdot t^*, \\ -1, & agar \quad \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^k}\right)\cdot t^*<t\le t^*. \end{cases}$$

shartlar bilan berilgan $f_k : R^1 \to R^1$ uzluksiz funksiyalar ketma-ketligini qaraymiz. Bu funksiyalarning grafiklari 11-chizmada tasvirlangan.



11-chizma

Ixtiyoriy $t\in[0,t^*]$ uchun $f_k(t)$ funksiyalar ketma-ketligini qandaydir $f(t)$ qiymatga yaqinlashadi. Bu $f(t)$ limit funksiya uzluksiz emas, u $t=\frac{t^*}{2}$ nuqtada uzilishga ega. $f(t)$ funksiya

$$f(t)=\begin{cases} +1, & agar \quad 0\le t\le \dfrac{t^*}{2}, \\ -1, & agar \quad \dfrac{t^*}{2}<t\le t^* \end{cases} \tag{4.1}$$

munosabat bilan aniqlanadi.

Shunday qilib, uzluksiz funksiyalar ketma-ketligining nuqtali limiti uzilishga ega bo'lgan funksiya bolishi mumkin. Ixtiyoriy funksiyalar ketma-ketligining limiti ham yana shu fazoga tegishli bo'ladigan funksiyalar fazosini kiritish maqsadga muvofiqdir.

Nima uchun optimal boshqaruv nazariyasida faqat uzluksiz funksiyar sinfi bilan cheklanish mumkin emasligini misolda tushuntiramiz. Optimal boshqaruvning sodda masalalarida ham $u(t)$ boshqaruv funksiyasi uzilishga ega bo'lgan funksiya bo'lishi mumkin.

2-misol. A stansiyadan B stansiyaga tomon harakatlanayotgan poezdning harakati

$$\ddot{x} = u,$$

tenglama bilan yozilgan bo'lsin, bu yerda x A stansiyadan poezdgacha bo'lgan masofa; u poezdning tortish kuchi bo'lib, uni boshqarish mumkin, ya'ni vaqtning $u(t)$ funksiyasi sifatida tanlash mumkin. Tortish kuchining kattaligiga $|u(t)| \leq 1$ cheklanish qo'yilgan. A va B stansiyalar orasidagi masofa berilgan. Poezd stansiyalar orasidagi masofani eng qisqa t^* vaqtda bosib o'tadigan $u(t)$ boshqaruvni tanlash talab qilinadi. Bunda poezdning vaqtning boshlang'ich va so'ggi momentdagi tezligi nolga teng, ya'ni $\dot{x}(0) = \dot{x}(t^*) = 0$.

Poezd yo'lning yarimigacha maksimal tezlanish ,ya'ni $u(t) = +1$ bilan, so'ng yolning qolgan yarimini maksimal tormozlanish, ya'ni $u(t) = -1$ bilan o'tsa, stansiyalar orasidagi masofani o'tish vaqti eng qisqa bo'lishini tasavvur qilish mumkin. Shunday qilib, $u^*(t)$ optimal boshqaruv berilgan holda

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, \ agar \ \ 0 \leq t \leq \dfrac{t^*}{2}, \\ -1, \ agar \ \dfrac{t^*}{2} < t \leq t^* \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lib, u uzilishga ega bo'lgan funksiyadir. Bu $u^*(t)$ funksiya 1-misoldagi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligining limiti bo'lgan $f(t)$ funksiya ((4.1) formulani qarang) bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, 2-misoldagi $u^*(t)$ optimal boshqaruv uzluksiz emas, balki uzilishga ega bo'lgan funksiyadir. Funksiyalarning o'ta umumiy sinfi D bo'lakli uzluksiz funksiyalar sinfidir.

Agar $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ining chekli sondagi $\tau_1, ..., \tau_k$ nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalarida uzluksiz, va bu nuqtalarda $f(t)$ funksiyaning ham o'ng, ham chap chekli limiti mavjud bo'lsa, $f : R^1 \to R^n$ funksiyaga $[t_0, t_1]$ kesmada bo'lakli uzluksiz deyiladi. Agar C uzluksiz funksiyalar sinfi bo'lsa, u holda $C \subset D$ ekanligi ravshan.

2-misoldagi $u^*(t)$ optimal boshqaruv vaqtning [0,1] kesmasida faqat bitta $\tau = \frac{1}{2}$ uzilish nuqtasiga ega. Ammo chiziqli tezkorlik masalasida ham (1-ma'ruzani qarang) $u^*(t)$ optimal boshqaruv sanoqli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lishi mumkin. Bundan tashqari uzilish nuqtalari to'plami o'ta murakkab ko'rinishga ega bo'lishi mumkin. Umumiy holda optimal boshqaruv o'lchovli funksiya bo'ladi.

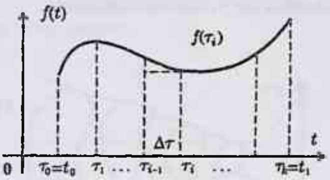
Agar $f: R^1 \to R^n$ funksiya qandaydir uzluksiz $f_k(t)$ funksiyalar ketma-ketligining nuqtali limiti bo'lsa, ya'ni barcha $t \in [t_0, t_1]$ lar uchun

$$f(t) = \lim_{k \to \infty} f_k(t)$$

tenglik bajarilsa , u holda bu funksiya $[t_0, t_1]$ kesmada o'lchovli deyiladi.

Agar L barcha o'lchovli funksiyalar sinfi bo'lsa, u holda $C \subset D \subset L$ mansublik o'rinli.

O'lchovli funksiyaning keltirilgan ta'rifi matematik analizda umumiy tarzda qabul qilinmagan. Odatda bu ta'rif boshqa usulda, o'lchovli to'plam tushunchasiga tayangan holda beriladi. Ta'rif sifatida foydalanilayotgan munosabat o'lchov kriteriysidir. Bu tushuncha bilan qiziquvchi o'quvchilarga *D6* (qo'shimchaga qarang) bo'limni o'qish tavsiya qilinadi, chunki bu yerda optimal boshqaruvning matematik nazariyasini qurish uchun zarur bo'lgan o'lchovli funksiyalarning xossalari keltirilgan. Ammo optimal boshqaruv nazariyasi bilan birinchi bor tanishishda bu bo'limni tushirib qoldirish, va matnda " o'lchovli funksiya" o'rnida bo'lakli uzluksiz funksiyalar bilan ish ko'rilayotibdi deb tasavvur qilish kerak. Bunda hamma teoremalar ham o'rinli bo'lmaydi (mos eslatmalar kitobda berilgan).



12-chizma

Matematik analizda uzluksiz, yoki bo'lakli uzluksiz $f: R^1 \to R^n$ funksiyaning $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ integrali tushunchasi yaxshi ma'lum. Odatda bu integral *Riman integrali* deyiladi va

$$\int_{t_0}^{t} f(t)dt = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)\Delta\tau,$$

ko'rinishda aniqlanadi, bu yerda $\Delta\tau = \frac{t_1 - t_0}{k}$ bo'lib, $\tau_i = t_0 + i\Delta\tau_i$, $i = 0,1,2,...,k$ $[t_0, t_1]$ kesmani k ta teng qismlarga ajratuvchi nuqtalar (12-chizma).

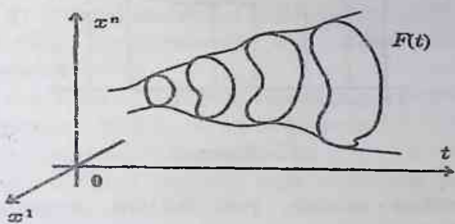
O'lchovli $f(t)$ funksiyalar uchun bunday integral mavjud bo'lmasligi mumkin, ammo integral tushunchasini o'lchovli funksiyalarga ham kiritish mumkin. Bunday integral *Lebeg integrali* deyiladi va boshqa sxema bo'yicha quriladi. Bu integral $D6$ (qo'shimchaga qarang) bo'limda toza qurilgan.

Agar $f(t)$ funksiya bo'lakli uzluksiz bo'lsa uning Lebeg integrali Riman integrali bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun optimal boshqaruv nazariyasi bilan birinchi tanishishda o'lchovli funksiyalarni bo'lakli uzluksiz funksiyalar deb, Lebeg integralini Riman integrali deb tasavvur qilish kerak.

4.2. Ko'p qiymatli akslantirishlar

Argumenti $t \in R^1$ vaqtdan, qiymatlari R^n fazoning bo'sh bo'lmagan barcha kompakt to'plamlardan tashkil topgan qism to'plamlari fazosi $\Omega(R^n)$ dan iborat $F: R^1 \to \Omega(R^n)$ funksiyaga ko'p qiymatli akslantirish deyiladi.

Demak, t vaqtga bog'liq ravishda bo'sh bo'lmagan ko'p qiymatli F(t) akslantirish deformatsiya bo'yicha harakatlanadi (13-chizma).



13-chizma

R^1 va $\Omega(R^m)$ metrik fazolar bo'lgani uchun (2-ma'ruzaga qarang) ko'p qiymatli akslantirishning uzluksizligi haqida mulohazalar yuritish mumkin.

Agar har qanday $\varepsilon>0$ soni uchun $|t-t_0|<\delta$ bo'lganda $h(F(t),F(t_0))\le\varepsilon$ tengsizlik bajariladigan $\delta>0$ soni mavjud bo'lsa, ya'ni, $|t-t_0|\to 0$ da $h(F(t),f(t_0))\to 0$ bo'lsa , F(t) ko'p qiymatli akslantirish t_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Hausdorf masofasining ta'rifiga ko'ra (2-ma'ruzaga qarang) ko'p qiymatli F(t) akslantirishning t_0 nuqtada uzluksizligi, har qanday $\varepsilon>0$ soni uchun $|t-t_0|<\delta$ bo'lganda quyidagi ikkita

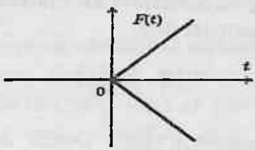
$$F(t)\subset F(t_0)+S_\varepsilon(0),\quad F(t_0)\subset F(t)+S_\varepsilon(0) \tag{4.2}$$

mansubliklarni bir vaqtda bajarilishini ta'minlovchi $\delta>0$ soni mavjudligini bildiradi. Har qanday $t_0\in R^n$ nuqtada uzluksiz bo'lgan ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz deyiladi.

3-misol.

$$F(t)=\begin{cases}0, & agar\ t\le 0\ bo'lsa,\\ t\{-1,1\}, & agar\ \ t>0\ bo'lsa\end{cases}$$

munosabat bilan berilgan $F:R^1\to\Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirishni qaraymiz. Bu akslantirish $t\le 0$ bo'lganda bir qiymatli va $t>0$ bo'lganda $F(t)$ to'plam ikkita $\{-t,\ t\}$ nuqtalardan tashkil topgan. Bu akslantirishning grafigi 14-chizmada tasvirlangan.



14-chizma

$F(t)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz. Haqiqatdan ham, $t\le 0$ bo'lganda $F(t)$ funksiyaning t_0 nuqtada uzluksizligi ravshan. $t>0$ bo'lsin. U holda yetarlicha kichik $|t-t_0|$ uchun $F(t_0)$ va $F(t)$ to'plamlar $F(t_0)=\{-t_0,t_0\}$

va $F(t)=\{-t,t\}$ ko'rinishga ega. Bu to'plamlar orasidagi Hausdorf masofasi $h(F(t),F(t_0))=|t-t_0|$ sonidan iborat. $|t-t_0|\to 0$ da $h(F(t),F(t_0))\to 0$ bo'ladi, ya'ni , ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz.

Ikkita uzluksiz $F(t)$ va $G(t)$ ko'p qiymatli akslantirishlarning algebraik yig'indisi $H(t)=F(t)+G(t)$ uzluksiz $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirish bo'lishini ko'rsatamiz. $\varepsilon>0$ sonini va $t_0\in R^1$ nuqtani mahkamlaymiz. t nuqtani t_0 nuqtadan kichik chetlanishlarida (4.2) formuladagi har ikkala mansublik bajarilishini ko'rsatamiz.

$F(t)$ va $G(t)$ ko'p qiymatli akslantirishlarning uzluksizligidan har qanday $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ mavjudki, $|t-t_0|\le\delta$ bo'lganda,

$F(t)\subset F(t_0)+S_{\varepsilon/2}(0),\ F(t_0)\subset F(t)+S_{\varepsilon/2}(0)$

$G(t)\subset G(t_0)+S_{\varepsilon/2}(0),\ G(t_0)\subset G(t)+S_{\varepsilon/2}(0)$

mansubliklar bajariladi. Bu mansubliklarni hadlab qo'shib, $H(t)=F(t)+G(t)$ akslantirish uchun, $|t-t_0|\le\delta$ bo'lganda,

$$H(t)\subset H(t_0)+S_\varepsilon(0),\ \ H(t_0)\subset H(t)+S_\varepsilon(0)$$

mansubliklarni hosil qilamiz, ya'ni, $H(t)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz.

$F\in\Omega(R^n)$ to'plam va $n\times n$ o'lchamli $A(t)$ matritsa bo'lib, uning barcha $a_{ij}(t)$ elementlari uzluksiz funksiyalar bo'lsin. $F(t)=A(t)F$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksizligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\varepsilon>0$ sonini va $t_0\in R^1$ nuqtani mahkamlaymiz, hamda, t nuqtani t_0 nuqtadan kichik chetlanishlarida $F(t)$ akslantirish uchun (4.2) formuladagi har ikkala mansublik bajarilishini ko'rsatamiz.

A matritsaning normasi deb,

$$\|A\|=\max_{x\in S_1(0)}\|Ax\|$$

miqdor nomlanishini eslatib o'tamiz. Demak doimo $\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$ baho o'rinli. Agar $A(t)$ matritsaning barcha elementlari uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda $A(t)$ matritsaning normasi

$$\|A(t)\|=\max_{x\in S_1(0)}\|A(t)x\|$$

ham uzluksiz funksiyadir.

$|t-t_0|<\delta$ bo'lganda,

$$A(t)F \subset A(t_0)F + S_\varepsilon(0) \qquad (4.3)$$

tengsizlik bajarilishini ko‘rsatamiz.

Ixtiyoriy $x \in A(t)F$ nuqtani olamiz. Bu nuqta $x = A(t)f$ ko‘rinishiga ega, bu yerda $f \in F$. $x_0 = A(t_0)f$ nuqta $A(t_0)F$ to‘plamga tegishli ekanligi ravshan. Agar biz $\|x - x_0\| \le \varepsilon$ tengsizlikni isbotlasak, u holda, (4.3) mansublik bajariladi. Quyidagi munosabatlarga egamiz:

$$\|x - x_0\| = \|A(t)f - A(t_0)f\| = \|[A(t) - A(t_0)]f\| \le \|A(t) - A(t_0)\| \cdot \|f\| \le \|A(t) - A(t_0)\| \cdot |F|.$$

$\|A(t)\|$ normaning uzluksizligidan shunday $\delta > 0$ dan soni mavjudki, $|t - t_0| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha t lar uchun

$$\|A(t) - A(t_0)\| \le \frac{\varepsilon}{|F|}$$

tengsizlik bajariladi va demak, $\|x - x_0\| \le \varepsilon$ bo‘lib, (4.3) mansublik isbotlandi.

Xuddi shu kabi,

$$A(t_0)F \subset A(t)F + S_\varepsilon(0)$$

mansublik ham isbotlanadi. Bu har ikkala mansubliklarning bajarilishi (4.2) ga ko‘ra $A(t)F$ ko‘p qiymatli akslantirishni t_0 nuqtada uzluksizligini anglatadi.

$F : R^1 \to \Omega(R^n)$ ko‘p qiymatli akslantirish berilgan bo‘lsin. $F(t)$ bo‘sh bo‘lmagan kompakt to‘plam bo‘lgani uchun $c(F(t), \psi)$ tayanch funksiyani aniqlashimiz mumkin.

Agar $F(t)$ ko‘p qiymatli akslantirish mahkamlangan bo‘lsa, u holda uning $c(F(t), \psi)$ tayanch funksiyasi ikkita t va ψ argumentlarning funksiyasidan iborat bo‘ladi, ya’ni $c(F(t), \psi): R^1 x R^n \to R^1$.

1-Teorema. $F : R^1 \to \Omega(R^n)$ uzluksiz ko‘p qiymatli akslantirish bo‘lsin.U holda har bir mahkamlangan $\psi \in R^n$ vektorning qiymati uchun $c(F(t), \psi)$ tayanch funksiya t bo‘yicha uzluksiz. Teskarisi agar har bir mahkamlangan $\psi \in R^n$ vector uchun $c(F(t), \psi)$ tayanch funksiya t bo‘yicha uzluksiz bo‘lsa, u holda $conv F(t)$ - ko‘p qiymatli akslantirish uzluksiz.

Isboti. $F : R^1 \to \Omega(R^n)$ - uzluksiz ko‘p qiymatli akslantirish bo‘lsin. $c(F(t), \psi)$ tayanch funksiya t va ψ argumentlar bo‘yicha uzluksizligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham tayanch funksiyalarning 13-xossasiga ko'ra (3-ma'ruzani qarang)

$$|c(F(t),\psi)-c(F(t_0),\psi)|\le\|\psi_0\|\cdot h(F(t),F(t_0))+\|F(t_0)\|\cdot\|\psi-\psi_0\|+2h(F(t),F(t_0)),\|\psi-\psi_0\|$$

munosabatning o'ng qismi $t\to t_0,\psi\to\psi_0$ da nolga intiladi .

Endi agar $c(F(t),\psi)$ teng funksiya t *va* ψ argumentlari bo'yicha uzluksiz bo'lishdan $convF(t)$ ko'p qiymatli akslantirishni uzluksiz bo'lishini ko'rsatamiz. Tayanch funksiyalarning 15-xossasiga asosan

$$h(\text{convF(t)},\text{convF(t}_0))=\max_{\psi\in S}|c(\text{F(t)},\psi)-c(\text{F(t}_0),\psi)|$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglikning o'ng tomoni $t\to t_0$ da no'lga intilishini ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilamiz, y'ani shunday $\varepsilon_0>0$ soni va t_0 nuqtaga intiluvchi $\{t_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi mavjudki,

$$\max_{\psi\in S}|c(F(t),\psi)-c(F(t_0),\psi)|\ge\varepsilon_0$$

bo'lsin, bu esa

$$|c(F(t_k),\psi_k)-c(F(t_0),\psi_k)|\ge\varepsilon_0 \tag{4.4}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\psi_k\in S$ nuqtalar mavjudligini ko'rsatadi. $\{\psi_k\}$ nuqtalar ketma ketlikdan $\psi_0\in S$ nuqtaga yaqinlashuvchi qismi ketma-ketlik ajratamiz va buni yana $\{\psi_k\}$ bilan belgilaymiz. Tayanch funksiyalarning 13-xossasini qo'llab

$$|c(F(t_k),\psi_k)-c(F(t_0),\psi_k)|\le|c(F(t_k),\psi_k)-c(F(t_0),\psi_0)|+$$
$$+|c(F(t_0),\psi_0)-c(F(t_0),\psi_k)|\le|c(F(t_k),\psi_k)-c(F(t_0),\psi_0)|+\|F(t_0)\|\cdot\|\psi_k-\psi_0\|$$

tengsizlikning hosil qilamiz. $c(F(t),\psi)$ funksiyaning t va ψ argumentlar bo'yicha uzluksizligidan bu tengsizliklarning o'ng tomoni $t_k\to t_0,\psi_k\to\psi_0$ da nolga intiladi. Bu esa (4.4) tengsizlikka zid.

Teorema isbotini yakunlash uchun $c(F(t),\psi)$ tayanch funksiyaning t,ψ argumentlari bo'yicha uzluksizligi, har bir mahkamlangan $\psi\in R^n$ vektor uchun t bo'yicha uzluksizligiga teng kuchli ekanligini ko'rsatishgina qoldi. Ixtiyoriy ikki o'zgaruvchili funksiya uchun albatta bu fikr noto'g'ri. $c(F(t),\psi)$ tayanch funksiya t bo'yicha uzluksiz bo'lsin. Tayanch funksiyalarning 13-xossasiga ko'ra

$$\left|c(F(t_k),\psi_k)-c(F(t_0),\psi_0)\right|\le\left|c(F(t_k),\psi_k)-c(F(t_k),\psi_0)\right|+$$
$$+\left|c(F(t_k),\psi_0)-c(F(t_0),\psi_0)\right|\le\left|F(t)\right|\cdot\left\|\psi_k-\psi_0\right\|+\left|c(F(t),\psi_0)-c(F(t_0),\psi_0)\right|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Agar $t_k\to t_0$da $|F(t)|$ miqdorning chegaralanganligi ko'rsatilsa, u holda oxirgi tengsizlikning o'ng tomoni $t_k\to t_0,\psi_k\to\psi_0$ da nolga intilishi va bundan $c(F(t),\psi)$ tayanch funksiyaning t,ψ argumentlari bo'yicha uzluksizligi kelib chiqadi.

Teskaridan faraz qilamiz, ya'ni $t_k\to t_0$ shartni qanoatlantiruvchi (t_k) nuqtalar ketma-ketlikgi mavjudki, bunda $|F(t_k)|\to\infty$ bo'lsin.

F to'plamning $|F|$ moduli ta'rifi (2-maruzani qarang) va tayanch funksiylarning 10-xossasiga ko'ra

$$\begin{aligned}&|F|-\min\{r:F\subset S_r(0)\}=\min\{r:c(F(t),\psi)\le c(S_r(0),\psi)=r,\psi\in S\}=\\&=\max_{\psi\in S}c(F(t),\psi)\end{aligned}\tag{4.5}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.Shuning uchun $\psi_k\in S$ vektor mavjudki

$$|F(t_k)|=c(F(t_k),\psi_k)\tag{4.6}$$

$\{\psi_k\}$ ketma-ketlikdan $\psi_0\in S$ nuqtaga yaqinlashuvchi qismi ketma-ketlik ajratamiz va uni yana $\{\psi_k\}$ bilan belgilaymiz. Tayanch funksiyalarning 13- xossasiga ko'ra

$$\left|c(F(t_k),\psi_k)-c(F(t_k),\psi_0)\right|\le|F(t_k)|\cdot\|\psi_k-\psi_0\|$$

tengsizlik kelib chiqadi, bundan esa (4.6) e'tiborga olinsa

$$|F(t_k)|\cdot(1-\|\psi_k-\psi_0\|)\le c(F(t_k),\psi_0)$$

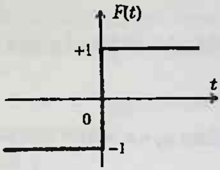
munosabat hosil bo'ladi. $c(F(t),\psi_0)$ funksiyaning t bo'yicha uzluksizligidan bu munosabatdan $|F(t_k)|$ ketma-ketlikning chegaralanganligi kelib chiqadi. Bu esa yuqorida qilingan farazimizga zid. Teorema isbotlandi.

Natija. $F:R^1\to\Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirishda $F(t)$ to'plam barcha $t\in R^1$ lar uchun qavariq bo'lsin. $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun, uning $c(F(t),\psi)$ tayanch funksiyasi har bir mahkamlangan $\psi \in S$ uchun t bo'yicha uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

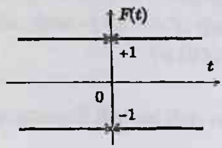
4-misol. $F(t)=\begin{cases} 1, \; agar \; t>0 \quad bo'lsa, \\ [-1,1], \; agar \; t=0 \; bo'lsa \\ -1, \; agar \; t<0 \quad bo'lsa \end{cases}$ shart bilan berilgan

$F:R^1 \to \Omega(R^1)$ko'p qiymatli akslantirishni qaraymiz.

Bu akslantirishning grafigi 15-chizmada keltirilgan.



15-chizma



16-chizma

Barcha $t \neq 0$ nuqtalarda bu akslantirishning uzluksizligi ravshan. Barcha $\psi \in S$ lar uchun $F(t)$ to'plam qavariq va uning tayanch funksiyasi

$$c(F(t),\psi)=\begin{cases} -\psi, \; agar \; t<0 \; bo'lsa, \\ |\psi|, \; agar \; t=0 \; bo'lsa \\ \psi, \; agar \; t>0 \; bo'lsa \end{cases}$$

ko'rinishga ega. Misol uchun $\psi=1$ bo'lsa bu funksiya $t=0$ nuqtada uzilishga ega. Shunig uchun isbotlashgan teoremaning natijasiga ko'ra $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirish $t=0$ nuqtada uzluksiz emas.

5-misol. $F(t)=\begin{cases} [-1,1], \; agar \; t \neq 0 \; bo'lsa, \\ 0, \; agar \; t=0 \; bo'lsa \end{cases}$ shart bilan berilgan $F:R^1 \to \Omega(R^1)$ ko'p qiymatli akslantirishni qaraymiz. Uning grafigi 16-chizmada keltirilgan. Bu akslantirishning barcha $t \neq 0$ nuqtalarda uzluksizligi ravshan. $t \in R^1$ bo'lganda $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirish qavariq bo'lib, uning tayanch funksiyasi

$$c(F(t),\psi)=\begin{cases}|\psi|, & agar\ t\neq 0\ bo'lsa\\ 0, & agar\ t=0\ bo'lsa\end{cases}$$

ko'rinishga ega. $\psi=1$ bo'lsa bu funksiya $t_0=0$ nuqtada uzilishga ega. Isbotlangan teorema natijasiga ko'ra $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirish t_0 nuqtada uzluksiz emas.

Agar barcha $t\in R^1$ lar uchun $f(t)\in F(t)$ mansublik bajarilsa, u holda $f:R^1\to R^n$ funksiya $F:R^1\to\Omega(R^1)$ ko'p qiymatli akslantirishning *bir qiymatli shoxchasi* deyiladi. Barcha $t\in R^1$ lar uchun $F(t)$ bo'sh to'plam bo'lmaganligi uchun doimo uning bir qiymatli $f(t)$ shoxchasi mavjud.

Bizni berilgan $[t_0,t_1]$ kesmada integrallanishi mumkin bo'lgan barcha $f(t)$ shoxchalar , ya'ni $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ integral mavjud bo'lgan shoxchalar qiziqtiradi. Bunda uzluksiz bir qiymatli $f(t)$ shoxchalarni qarash bilan, ya'ni Riman ma'nosidagi integral bilan cheklanish mumkin.

Masalan 3-misolda ikkita

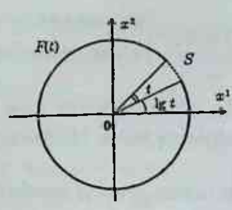
$$f_1(t)=\begin{cases}0, & t\leq 0\\ t, & t>0\end{cases}\qquad\qquad f_2(t)=\begin{cases}0, & t\leq 0\\ -t, & t>0\end{cases}$$

uzluksiz bir qiymatli shoxchalar mavjud. 5-misolda bunday uzluksiz shoxchalar ko'plab mavjud.Masalan , $f(t)=0$, $f(t)=\sin t$ silliq bir qiymatli shoxchalardir. Biroq 4-misoldagi $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning uzluksiz bir qiymatli $f(t)$ shoxcha mavjud emas, chunki uning har qanday bir qiymatli shoxchasi $t=0$ nuqtada uzilishga ega. Ammo bu $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning o'zi uzluksiz emas. $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz bo'lgan hollarda ham uning bir qiymatli shoxchasi mavjud bo'lmasligi mumkin ekanligiga misol keltiramiz.

6-misol.

$$F(t)=\left\{\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\lg t)\\ \sin(\alpha+\lg t)\end{pmatrix}: t\leq\alpha\leq 2\pi\right.$$

munosabat bilan berilgan $F:[0,1]\to\Omega(R^2)$ ko'p qiymatli akslantirishni qaraymiz. $t\neq 0$ bo'lganda $F(t)$ to'plam R^2 tekislikdagi birlik aylana yoyining bir qismidan iborat (17-chizma).



17-chizma

Chunki $F(t)$ to'plamga S to'la aylana uchun t radian bo'yich markaziy burchakka mos yoy yetishmaydi, chunki uning burchakli yoy bilan boshlangan $\lg t$ ga teng qismi chiqarib tashlangan. Shuning uchun $t\to 0$da yoyning chiqarib tashlangan qismi nolga intiladi, ammo uning boshlanishi $-\infty$ga intiladi. Demak $F:[0,1]\to\Omega(R^2)$ ko'p qiymatli akslantirish $[0,1]$ kesmada uzluksiz. $t\to 0$da har qanday $f(t)\in F(t)$ bir qiymatli shoxcha S aylana bo'ylab cheksiz sondagi aylanishlarni amalga oshirishi darkor, aks holda u yoyning tashlab yuborilgan qismini kesishi va shoxcha bo'lmasligi kerak.Ammo bunday $f(t)\in F(t)$ funksiya $t\to 0$da limitga ega emas. Shuning uchun $F:[0,1]\to\Omega(R^2)$ ko'p qiymatli akslantirishda birorta ham uzluksiz bir qiymatli shoxcha mavjud emas. Demak, $F:[0,1]\to\Omega(R^2)$ ko'p qiymatli akslantirishda birorta ham uzluksiz bir qiymatli shoxchasi mavjud emasligi $t>0$ bo'lganda $F(t)$ to'plamning qavariq emasligi bilan izohlanadi. Ammo bunday holat optimal boshqaruv masalalarida tez-tez uchraydi. Keltirilgan mulohazalar bir qiymatli o'lchovli shoxchalarni va ularni Lebeg ma'nosida integrallashni taqozo etadi. Uzluksiz ko'p qiymatli akslantirishda doimo o'lchovli shoxcha mavjud. Bu fikrni quyidagi teorema shaklida ifodalaymiz.

2-teorema. $F:I\to\Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirish $I=[t_0,t_1]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. U holda uning I kesmada o'lchovli $f(t)\in F(t)$ bir qiymatli shoxchasi mavjud. Bundan tashqari, agar $\psi\in S$ ixtiyoriy mahkamlangan vektor bo'lsa, u holda shunday $f(t)$ o'lchovli shoxcha mavjudki, barcha $t\in I$ lar uchun

$$f(t)\in U(F(t),\psi)$$

mansublik bajariladi, ya'ni barcha $t\in I$ lar uchun $f(t)$ o'lchovli shoxcha ixtiyoriy $\psi\in S$ yo'nalishdagi $U(F(t),\psi)$ tayanch to'plamga tegishli.

4.3 Masalalar

1. $F(t)=\begin{cases} S_{r(t)}(a,(t)), & agar \quad t\neq 0 \ bo'lsa, \\ 0, & agar \quad t=0 \ bo'lsa, \end{cases}$

tenglik bilan aniqlangan $F: I\to\Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun $r: R^1\to R^1$ va $a: R^1\to R^1$ funksiyalar uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

2. $F=t\cdot S_{\sin\frac{1}{t}}(0)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz bo'ladimi?

3. Har qanday $K\subset R^1$ kompakt to'plamning $F: R^1\to\Omega(R^n)$uzluksiz ko'p qiymatli akslantirishdagi obrazi, ya'ni

$$F(K)=\bigcup_{t\in K}F(t)$$

to'plam R^n fazoda kompakt bo'lishini isbotlang.

4. Har qanday $P\subset R^n$ ochiq to'plamning $F: R^1\to\Omega(R^n)$ uzluksiz ko'p qiymatli akslantirishdagi aksi, ya'ni

$$\{t\in R^1 : F(t)\subset P\}$$

to'plam R^1 fazoda ochiq bo'lishini isbotlang.

5*. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ sonini topish mumkun bo'lib, barcha $|t-t_0|\leq\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi t lar uchun

$$F(t)\subset F(t_0)+S_\varepsilon(0)$$

mansublik bajarilsa, u holda $F: R^1\to\Omega(R^n)$ uzluksiz ko'p qiymatli akslantirishga t_0 *nuqtada yuqoridan yarim uzluksiz* deyiladi. Ixtiyoriy $K\subset R^1$ kompakt to'plamning yuqoridan yarim uzluksiz akslantirishdagi $F(K)$ aksi, R^n fazoda kompakt bo'lishini isbotlang.

6*. Yuqoridan yarim uzluksiz $F: R^1\to\Omega(R^n)$akslantirishning grafigi, ya'ni

$$\{(t,x)\in R^1\times R^n : t\in R^1\ ,\ x\in F(t)\}$$

to'plam $R^1\times R^n$ fazoda yopiq bo'lishini isbotlang.

7*. $F: I\to\Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz va $F(t)$ to'plam barcha $t\in R^1$ lar uchun qavariq to'plam bo'lsin. $F(t)$ akslantirishning bir qiymatli uzluksiz $f(t)$ shoxchasi mavjudligini isbotlang.

8*. $F: I \to \Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirish uzluksiz va $F(t)$ to'plam barcha $t \in R^1$ lar uchun qavariq to'plam bo'lsin. Keyin $t_0 \in R^1, x_0 \in F(t_0)$ nuqtalar berilgan. $F(t)$ akslantirishning $f(t_0) = x_0$ shartni qanoatlantiruvchi bir qiymatli uzluksiz $f(t)$ shoxchasi mavjudligini isbotlang.

9*. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ sonini topish mumkun bo'lib ,barcha $|t - t_0| \le \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi t lar uchun

$$F(t_0) \subset F(t) + S_\varepsilon(0)$$

mansublik bajarilsa, u holda $F: R^1 \to \Omega(R^n)$ uzluksiz ko'p qiymatli akslantirishga t_0 *nuqtada quyidan yarim uzluksiz* deyiladi. $F: R^1 \to \Omega(R^n)$ quyidan yarim uzluksiz ko'p qiymatli akslantirish va $F(t)$ to'plam barcha $t \in R^1$ lar uchun qavariq to'plam bo'lsa, $F(t)$ akslantirishning bir qiymatli uzluksiz $f(t)$ shoxchasi mavjudligini isbotlang.

5-ma'ruza

- *Ko'p qiymatli akslantirishlarni integrallash;*
- *Lyapunov teoremasi.*

5.1 Ko'p qiymatli akslantirishlarni integrallash

$I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'i va qandaydir $F: I \to \Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirish berilgan bo'lsin.

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt : f(t) \in F(t) \right\}$$

to'plamga $F(t)$ *ko'p qiymatli akslantirishning* $I = [t_0, t_1]$ *kesma bo'yicha integrali* deyiladi.

Tenglikning o'ng qismidagi Lebeg integrali $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning barcha bir qiymatli shoxchalari bo'yicha olinadi, agar u mavjud bo'lsa. Bu yerda G to'plam R^n fazoning qism to'plami bo'lishi ravshan.

1-Teorema. $F: I \to \Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirish $I = [t_0, t_1]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. U holda $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning integrali R^n fazoda bo'sh bo'lmagan qavariq kompakt to'plamdan iborat, ya'ni

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt \in \Omega(R^n)$$

Bundan tashqari G qavariq to'plam.

Isboti. Teorema shartlari bo'yicha G bo'sh to'plam emasligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham 2-teorema (4-ma'ruzaga qarang) boy'icha $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning hech bo'lmaganda bitta o'lchovli bir qiymatli $f(t) \in F(t)$ shoxchasi mavjud. $F(t)$ to'plamning $|F(t)|$ ta'rifiga ko'ra

$$|F(t)| = \max_{\psi \in S} c(F(t), \psi).$$

$F(t)$ uzluksiz akslantirish bo'lgani uchun uning $c(F(t), \psi)$ tayanch funksiyasi t bo'yicha uzluksiz (4-ma'ruza, 1-teorema). U holda bu funksiya $I = [t_0, t_1]$ kesmada chegaralangan, ya'ni barcha $t \in I$ lar uchun $|F(t)| \le K$.

Shuning uchun $f(t)$ o'lchovli bir qiymatli shoxcha uchun

$$\|f(t)\| \le |F(t)| \le K \qquad (5.1)$$

tengsizlik o'rinli. Lebeg integrali 8- xossasiga (qo'shimchadan D6-bo'lim) ko'ra $f(t)$ shoxcha integrallanuvchi va $\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt \in G$, ya'ni G bo'sh to'plam emas.

Endi G to'plamni chegaralanganligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham $g \in G$ bo'lsin, u holda $g = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$, bu yerda $f(t)$ funksiya $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning qandaydir shoxchasi. Lebeg integralining 3-xossasi (qo'shimchadan D6-bo'lim) va (5.1) ga ko'ra

$$\|g\| = \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \right\| \le \int_{t_0}^{t_1} \|f(t)\| dt \le \int_{t_0}^{t_1} k dt = k(t_1 - t_0) = l.$$

Shuning uchun $G \subset S_l(0)$, ya'ni G- chegaralangan to'plam.

Teorema isbotini yakunlash uchun G to'plamni yopiq va qavariqligini ko'rsatish qoldi. Bu tasdiqlarning isboti qo'shimchaning D7-bo'limida keltirilgan. Barcha $t \in I$ lar uchun $F(t)$ to'plam qavariq bo'lgan xususiy holda G to'plamni qavariqligini isbotlaymiz.

$g_1, g_2 \in G$ va $0 \le \lambda \le 1$ soni berilgan bo‘lsin. Integral ta’rifiga ko‘ra shunday o‘lchovli $f_1(t)$ va $f_2(t)$ funksiyalar mavjudki,

$$g_1 = \int_{t_0}^{t_1} f_1(t)dt \ , \ g_2 = \int_{t_0}^{t_1} f_2(t)dt$$

va

$$f_2(t) \in F(t).$$

Lebeg integralining 3- xossasiga ko‘ra (qo‘shimchadan D6-bo‘limga qarang)

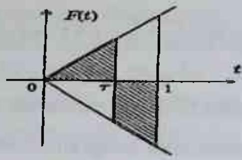
$$\lambda g_1 + (1-\lambda) g_2 = \lambda \int_{t_0}^{t_1} f_1(t)dt + (1-\lambda)\int_{t_0}^{t_1} f_2(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} [\lambda f_1(t) + (1-\lambda) f_2]dt$$

chunki barcha $t \in I$ lar uchun $F(t)$ qavariq to‘plam bo‘lgani uchun $\lambda f_1(t) + (1-\lambda) f_2(t) \in F(t)$. va demak, $\lambda g_1 + (1-\lambda) g_2 \in G$, ya’ni G- qavariq to‘plam. Teorema isbotlandi.

Agar $F(t)$ qavariq, uzluksiz, ko‘p qiymatli akslantirishlar bilangina cheklanilsa, u holda $F(t)$ bo‘yicha olingan integralning yopiqlik sharti, $F(t)$ akslantirishning barcha bir qiymatli $f(t)$ bo‘lakli uzluksiz shoxchalari bo‘yicha Riman ma’nosida integral olinganda bajarilmasligi mumkin. Agar barcha o‘lchovli, bir qiymatli $f(t) \in F(t)$ shoxchalardan Lebeg ma’nosida integral olinsa, G to‘plamning yopiqlik sharti bajariladi.

1-teorema Lyapunovning ma’lum teoremasining xususiy holidir. Bu o‘ta chuqur matematik natija bo‘lib, hozirgi zamon matematikasining ko‘plab sohalarida tatbiqini topgan. Biz ham bu natijadan optimal boshqaruv nazariyasida foydalanamiz. Lyapunov teoremasining to‘la isboti ko‘plab yordamchi mulohazalarga asoslanadi (qo‘shimchadan D4-D6-bo‘limlarga qarang) va uning isboti qo‘shimchaning D7-bo‘limida keltirilgan.

1-misol. $F(t) = t\{-1,1\}$ munosabat bilan aniqlangan $F : [0,1] \to \Omega(R^1)$ ko‘p qiymatli akslantirishni qaraymiz (18-chizma) va $G = \int_0^1 F(t)dt$ integralni hisoblaymiz.



18-chizma

$g \in G$ ning maksimal qiymati $\frac{1}{2}$ ga teng ekanligi ravshan, chunki $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ bo'lib, u $f(t) = t$ uzluksiz bir qiymatli shoxchada erishiladi. Huddi shu kabi $g \in G$ ning minimal qiymati $-\frac{1}{2}$ ga teng bo'lib, bu qiymat $f(t) = -t$ uzluksiz bir qiymatli shoxchada erishadi, chunki $\int_0^1 (-t)dt = -\frac{1}{2}$. $F(t)$ akslantirishning boshqa uzluksiz shoxchada mavjud emas. Shuning uchun $G \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Endi 1-teoremadan foydalansak G qavariq to'plam bo'lgani uchun $G \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ bo'ladi. $t \in I$ bo'lganda $F(t)$ akslantirish qavariq bo'lmaganda ham undan olingan integralning qavariq to'plam bo'lishini 1-teoremadan foydalanmasdan $G \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ kesma misolida isbotlaymiz.

Biz $G \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ekanligini ko'rdik. Endi $g - \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $g \in G$ ekanligini isbotlash uchun F(t) ko'p qiymatli akslantirishda Lebeg integrali g ga teng bo'ladigan $f(t)$ bir qiymatli shoxchasi mavjud bo'lishini ko'rsatishimiz kerak. Bunday shoxcha uzilishga ega bo'lib

$$f(t) = \begin{cases} t, & agar \quad 0 \le t \le \tau, \\ -t, & agar \quad \tau < t \le 1 \end{cases}$$

munosabat bilan berilishi mumkin, bu yerda $\tau = \sqrt{g + \frac{1}{2}}$ (18-chizmaga qarang) .

$f(t)$ funksiya Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekanligi ayon va

$$\int_0^1 F(t)dt = \int_0^{\tau} t dt + \int_{\tau}^1 (-t)dt = \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^2}{2} - \frac{1}{2} = \tau^2 - \frac{1}{2} = \left(\sqrt{g + \frac{1}{2}}\right)^2 - \frac{1}{2} = g$$

Bu esa $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \in G$ ekanligini bildiradi va demak $G = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Ko‘p qiymatli akslantirishni integrallash uchun

$$c(G,\psi) = \max_{g \in G} (g, \psi)$$

tayanch funksiyani aniqlash mumkin.

2- Teorema. Agar $F(t)$ ko‘p qiymatli akslantirish $[t_0, t_1]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$c\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt\ , \psi\right) = \left(\int_{t_0}^{t_1} c\,(F(t), \psi)\,dt\right) \tag{5.2}$$

tenglik o‘rinli.

Isboti. $c(F(t)\ , \psi)$ tayanch funksiya t bo‘yicha uzluksiz bo‘lgani uchun, (5.2) tenglikning o‘ng tomonidagi integral mavjud.

Ixtiyoriy $\psi \in S$ vektorni mahkamlaymiz. $G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt$ bo‘lsin va $c(G\ , \psi)$ tayanch funksiyaning maksimal qiymati $g^* \in G$ vektorda erishilsin, ya’ni $c(G\ , \psi) = (g^*, \psi)$. integral ta’rifiga ko‘ra $g^* = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ tenglikni qanoatlantiruvchi integrallanuvchi bir qiymatli $f(t) \in F(t)$ shoxchasi mavjud. Tayanch funksiyalar 6- xossasining natijasiga ko‘ra $(f(t), \psi) \le c(F(t), \psi)$ tengsizlikni yozamiz. Demak Lebeg integralining 5-xossasiga (qo‘shimchadan D6-bo‘limga qarang) ko‘ra

$$\int_{t_0}^{t_1} (f(t), \psi)dt \le \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi)dt$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Shuning uchun

$$c(G, \psi) = \langle g^*, \psi \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle f(t), \psi \rangle\, dt \le \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi)dt \tag{5.3}$$

tengsizlik o‘rinli. 2-teoremaga (4-ma’ruzani qarang) ko‘ra $U(F,\psi)$ akslantirishning bir qiymatli $f^*(t)$-shoxchasi mavjud. $|U(F(t),\psi)|\le|F(t)|\le k$ baholashga ko‘ra $f^*(t)$- bir qiymatli shoxcha I kesmada integrallanuvchi bo‘ladi, va demak $|U(F(t),\psi)|\le|F(t)|\le k$ baholashga ko‘ra $f^*(t)$- bir qiymatli shoxcha I kesmada integrallanuvchi bo‘ladi, va demak

$$g=\int_{t_0}^{t_1} f^*(t)\,dt\in G \quad \text{va} \quad \langle g,\psi\rangle\le c(G,\psi).$$

Tayanch funksiya ta’rifiga ko‘ra $c(F(t),\psi)=(f^*(t),\psi)$ tenglikka egamiz. Shuning uchun

$$\int_{t_0}^{t_1} c(F(t),\psi)dt=\int_{t_0}^{t_1}(f^*(t),\psi)dt=(g,\psi)\le c(G,\psi). \tag{5.4}$$

tengsizlik o‘rinli. (5.3) va (5.4) tengsizliklardan (5.2) tenglik kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

2-teorema yordamida $F(t)$ ko‘p qiymatli akslantirishning integrali o‘ta oson topiladi , Haqiqatdan ham, buning uchun (5.2) formulaga mos $c(F(t),\psi)$ tayanch funksiya tuziladi, har bir $\psi\in R^n$ vektor uchun t bo‘yicha bir qiymatli $c(F(t),\psi)$ funksiya integrallanadi, keyin esa hosil qilingan $c(G,\psi)$ tayanch funksiya bo‘yicha bo‘sh bo‘lmagan qavariq kompakt G to‘plam tiklanadi. Qavariq G to‘plamni tiklash uchun , uning $c(G,\psi)$ tayanch funksiyasi uchun $c(G,\psi)=c(F,\psi)$ tenglik bajariladigan F to‘plamni tanlash kifoya. U holda tayanch funksiyalarning 2-xossasiga (3-ma’ruzaga qarang) ko‘ra $G=F$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bayon etilganlarni misollarda namoyon qilamiz.

2-misol. Ushbu

$$F(t)=A(t)\{-v,v\} \tag{5.5}$$

tenglik bilan aniqlangan $F:[-\pi,\pi]\to\Omega(R^2)$ ko‘p qiymatli akslantirishning $G=\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt$ integralini topamiz, bu yerda $A(t)$ 2×2 o‘lchamli matritsa, ϑ *esa* R^2 tekislikdagi vektor. Demak $F(t)$ to‘plam $A(t)$ akslantirishdagi ikkita ϑ *va* $-\vartheta$ nuqtalardan tashkil topgan o‘zgarmas $\{-\vartheta,\vartheta\}$ to‘plamning obrazidir. Misol uchun

$$A(t)=\begin{pmatrix}\sin t & tgt\\ \cos t & ctgt\end{pmatrix},\ \vartheta=(1,0)\ \text{bo‘lsin.}$$

G integralni qurish uchun dastlab uning $c(G,\psi)$ tayanch funksiyasini hisoblaymiz. 2-teorema, (5.5) formula va tayanch funksiyaning 4-xossasiga (3- ma'ruzaga qarang) ko'ra

$$c(G,\psi)=c\left(\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt,\psi\right)=\int_{-\pi}^{\pi}c(F(t),\psi)dt=\int_{-\pi}^{\pi}c(A(t)\{-\vartheta,\vartheta\},\psi)dt=\int_{-\pi}^{\pi}c(\{-\vartheta,\vartheta\},A^*(t)\psi)dt$$

bo'lib , $\{-\vartheta,\vartheta\}$ to'plamning tayanch funksiyasi

$$c(\{-\vartheta,\vartheta\},\psi)=|(\vartheta,\psi)|$$

ko'rininishda bo'lishi ravshan.Shuning uchun

$$c(G,\psi)=\int_{-\pi}^{\pi}|(\vartheta,A^*(t)\psi)|dt=\int_{-\pi}^{\pi}|(A(t)\vartheta,\psi)|dt$$

tenglik bajariladi. Bu ifodaga $A(t)$ matritsaning va ϑ vektorning qiymatlarini qo'yib

$$c(G,\psi)=\int_{-\pi}^{\pi}|\psi_1\sin t+\psi_2\cos t|dt$$

tenglikni hosil qilamiz. $\psi\in R^2$ vektorni qutb koordinatalari bo'yicha $\psi_1=\|\psi\|\cos\alpha$, $\psi_2=\|\psi\|\sin\alpha$ ko'rinishda yozilsa bu tenglikdan

$$c(G,\psi)=\int_{-\pi}^{\pi}\|\psi\|\cdot|\sin(t+\alpha)|dt=4\|\psi\|$$

tenglikka kelamiz.

Demak G integralning va $S_4(0)$ sharning tayanch funksiyalari ustma-ust tushadi, ya'ni

$$c(G,\psi)=c(S_4(0),\psi)=4\|\psi\|$$

G integral va $S_4(0)$ sharning qavariq to'plamlar bo'lgani uchun tayanch funksiyalarning 11- xossalariga (3- ma'ruzaga qarang) ko'ra $G=S_4(0)$ bo'ladi.

1-misolda bajarilganidek bevosita 2-misoldagi kabi G integralni qurish mumkin emas. Buning uchun $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning cheksiz sondagi $f(t)$ bir qiymatli shoxchalarini integrallash lozim bo'ladi.

Ammo 2-teoremadan foydalanish maqsadga muvofiqligini misolda ko‘rdik.

3-misol. $F(t)=F$, $F \in \Omega(R^n)$ cheksiz ko‘p qiymatlar qabul qiluvchi $F(t)$ ko‘p qiymatli akslantirishni integrallaylik. (5.2) formuladan foydalanilsa

$$c\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt, \psi\right)=\int_{t_0}^{t_1} c(F(t),\psi)dt=\int_{t_0}^{t_1} c(F,\psi)dt=(t_1-t_0)c(F,\psi)$$

ifoda hosil bo‘ladi. Xuddi shuningdek tayanch funksiyaga $(t_1-t_0)convF$ to‘plam ham ega, chunki tayanch funksiyaning xossalariga ko‘ra

$$c((t_1-t_0)convF,\psi)=(t_1-t_0)c(convF,\psi)=(t_1-t_0)c(F,\psi)$$

Shuning uchun bu qavariq kompakt to‘plamlar ustma-ust tushadi, ya’ni

$$\int_{t_0}^{t_1} Fdt=(t_1-t_0)convF.$$

Endi yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan $F(t)$ ko‘p qiymatli akslantirishning

$$G(\tau,\psi)=\int_{t_0}^{\tau} F(t)dt$$

integralini qaraymiz, bu yerda. 1-teoremaga ko‘ra bu funksiya $I=[t_0,t_1]$ kesmani $\Omega(R^n)$ metrik fazoga akslantiradi.

3-Teorema. $F:I\to\Omega(R^n)$ ko‘p qiymatli akslantirish I kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $G(\tau)=\int_{t_0}^{\tau} F(t)dt$ ko‘p qiymatli akslantirish ham I kesmada uzluksiz bo‘ladi.

Isboti. 2-teoremaga ko‘ra $c(G(\tau),\psi)=\int_{t_0}^{\tau} c(F(t),\psi)dt$.

Demak, har bir mahkamlangan $\psi \in R^n$ vector uchun $c(G(\tau),\psi)$ funksiya τ bo‘yicha uzluksiz. 1-teoremaga ko‘ra $G(\tau)$ qavariq to‘plam. $c(G(\tau),\psi)$ ko‘p qiymatli akslantirishni uzluksizligidan $G(\tau)$ funksiyaning uzluksizligi (4-ma’ruzaga qarang) ravshan. Teorema isbotlandi.

5.2. Masalalar

1. $F:[-2\pi,2\pi]\to\Omega(R^2)$ ko'p qiymatli akslantirish $F(t)=A(t)\{-v,v\}$ ko'rinishda berilgan, bu yerda

$$A(t)=\begin{pmatrix}3\sin t & -\cos t\\ 7\cos t & \sin t\end{pmatrix},\quad v=(0,2).$$

$G=\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}F(t)dt$ integralni hisoblang.

2. Agar $F(t)$ - R^n fazoda markazi $a(t)$ nuqtada, radiusi $r(t)$ ga teng shar, ya'ni $F(t)=S_{r(t)}(a(t))$ bo'lsa, $G=\int\limits_{t_0}^{t_1}F(t)dt$ integralni hisoblang.

3. $F_1,F_2:R^1\to\Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirishlar $I=[t_0,t_1]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Shu bilan birga ixtiyoriy $t\in I$ uchun

$$\int\limits_{t_0}^{t}F_1(t)dt=\int\limits_{t_0}^{t}F_2(t)dt$$

tenglik bajarilsin. Barcha $t\in I$ lar uchun

$$convF_1(t)=convF_2(t)$$

munosabat bajarilishini isbotlang.

4. $|F_i(t)|\le k(t)$ bahoni qanoatlantiruvchi $F_i:R^1\to\Omega(R^n)$ uzluksiz ko'p qiymatli akslantirishlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin, bu yerda $k(t)$ $I=[t_0,t_1]$ kesmada integrallanuvchi funksiya. Har bir $t\in I$ uchun $\lim\limits_{i\to\infty}F_i(t)=F(t)$ tenglik bajarilsin.

$F(t)$ akslantirishni integrallanuvchi va $\lim\limits_{i\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t_1}F_i(t)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}F(t)dt$ tenglik o'rinli ekanligini isbotlang. Bu yerda limitlar Hausdorf metrikasida olinadi.

6-ma'ruza

- *Chiziqli tezkorlik masalasining qo'yilishi;*
- *Eksponensial matritsalar, eksponensialning asosiy xossalari;*
- *Chiziqli differensial tenglamalar;*

- *Koshi formulasi.*

6.1. Chiziqli tezkorlik masalasi

Holati

$$\dot{x} = Ax + u,$$

chiziqli differensial tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyektni qaraymiz, bu yerda n o'lchamli x vektor sistemaning holati, n o'lchamli u vektor boshqaruvni ifodalaydi, A esa $n\times n$ o'lchamli kvadrat matritsa. Bo'sh bo'lmagan U kompakt to'plam , ya'ni $U \in \Omega(R^n)$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar $u(t)$ qandaydir $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida aniqlangan o'lchovli funksiya bo'lib, barcha $t\in[t_0,t_1]$ lar uchun $u(t)\in U$ mansublikni qanoatlantirsa , $u(t)$ funksiyaga *joiz boshqaruv* deyiladi. Kelgusida ixtiyoriy bunday $u(t)$ boshqaruv va ixtiyoriy $x(t_0)$ boshlang'ich holat uchun

$$\dot{x} = Ax + u(t) \tag{6.1}$$

differensial tenglama yagona $x(t)$ yechimga ega bo'lishi ko'rsatiladi.

Bu $x(t)$ yechim $u(t)$ joiz boshqaruv ta'sirida obyekt dinamikasining o'zgarishini ifodalaydi.

R^n holatlar fazosida bo'sh bo'lmagan M_0 va M_1 kompakt to'plamlar, ya'ni $M_0, M_1 \in \Omega(R^n)$ to'plamlar berilgan bo'lsin.

Agar $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida aniqlangan $u(t)$ joiz boshqaruvga mos (6.1) tenglamaning $x(t)$ yechimi $x(t_0)\in M_0,\ x(t_1)\in M_1$ chegaraviy shartlarni qanoatlantirsa, u holda bu joiz boshqaruv M_0 to'plamni so'nggi M_1 to'plamga olib o'tadi deyiladi.

Kelgusida vaqtning t_0 boshlang'ich momenti mahkamlangan deb hisoblanadi, vaqtning so'nggi momenti t_1 esa $x(t)$ yechimning M_1 to'plamga tushish shartidan aniqlanadi. Endi tezkorlik masalasi M_0 to'plamni M_1 to'plamga eng qisqa vaqt oralig'ida olib o'tuvchi $u(t)$ joiz boshqaruvni topishdan iborat. Bu masala uchun 1 ma'ruzada qo'yilgan optimal boshqaruv nazariyasining asosiy matematik masalalari: boshqariluvchanlik, optimal boshqaruvning mavjudligi, optimallikning zaruriy sharti, optimallikning yetarli sharti va optimal boshqaruvning yagonaligini tadqiq qilamiz. Albatta bu masalalarni hal etishda har vaqt obyekt dinamikasiga qo'shimcha talablar qo'yiladi, ammo chiziqli tezkorlik masalasini qo‘yilishida qilingan kelishuvlar doimo bajariladi. Bu shartlar chiziqli tezkorlik masalasining asosiy mohiyatini tashkil qiladi.

6.2. Eksponensial matritsalar

(6.1) differensial tenglamalar sistemasining yechimini topish uchun $n \times n$ o‘lchamli A kvadrat matritsaga erkin ko‘rinishda amallar bajarishga malaka hosil qilish lozim. Algebra kursidan ma’lumki, bunday matritsalarni qo‘shish, ayirish, songa ko‘paytirish va matritsalarni o‘zaro ko‘paytirish mumkin. Ko‘rsatilgan barcha amallardan foydalanamiz. Bundan tashqari, agar o‘zgaruvchiga bog‘liq $A(t)$ matritsa berilgan bo‘lsa, u holda bu matritsani differensiallash yoki integrallash mumkin bo‘lib, bu amallar matritsaning har bir elementi bo‘yicha bajariladi.

A matritsa ustida yana bir amalni qaraymiz. $n \times n$ o‘lchamli A kvadrat matritsaga haqiqiy o‘zgaruvchili t parametrga bog‘liq qandaydir o‘zgaruvchili matritsani mos qo‘yamiz. Bu matritsa A matritsaning eksponensiali deyilib, e^{tA} ko‘rinishda belgilanadi va

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots \tag{6.2}$$

matritsali darajali qator bilan aniqlanadi, bu yerda E bilan $n \times n$ o‘lchamli birlik matritsa. (6.2) matritsali qator ham elementlari bo‘yicha yig‘iladi.

Har qanday mahkamlangan $t \in R^1$ uchun bu qatorni yaqinlashishini ko‘rsatamiz. Agar a_{ij} - A matritsaning ixtiyoriy elementi bo‘lsa, u holda $|a_{ij}| \le \|A\|$ baho o‘rinli, bu yerda A matritsaning $\|A\|$ normasi

$$\|A\| = \max_{x \in S_1(0)} \|Ax\|$$

munosabat bilan aniqlanadi. (6.2) matritsali qatorning ixtiyoriy p elementi qandaydir

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_k + \cdots \tag{6.3}$$

qator ko‘rinishida bo‘ladi, bu yerda p_k bilan $\frac{t^k}{k!}A^k$ matritsaning mos elementi belgilangan. Shuning uchun

$$\|p_k\| \le \left\| \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \le \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k$$

baho o‘rinli va demak (6.3) qator absolyut yaqinlashadi.
e^{tA} eksponensial matritsaning bir nechta foydali xossalarini keltirib chiqaramiz. Ixtiyoriy $t, s \in R^1$ sonlari uchun

$$e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A} \tag{6.4}$$

formula o‘rinli. Haqiqatdan ham (6.2) va

$$e^{sA} = E + sA + \frac{s^2}{2!} A^2 + \frac{s^3}{3!} A^3 + \dots + \frac{s^k}{k!} A^k + \dots$$

qatorlar absolyut yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun, bu qatorlarni ko‘paytirish mumkin. Natijada

$$e^{tA} \cdot e^{sA} = \left(E + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots \right) \cdot \left(E + sA + \frac{s^2}{2!} A^2 + \dots \right) =$$
$$= E + (t+s)A + \frac{1}{2!}\left(t^2 + 2ts + s^2\right)A^2 + \frac{1}{3!}\left(t^3 + 3t^2 s + 3ts^2 + s^3\right)A^3 + \dots = e^{(t+s)A}.$$

tenglikni hosil qilamiz. (6.4) formuladan e^{tA} eksponensial matritsaning xosmas ekanligi bevosita kelib chiqadi va unga teskari matritsa

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$$

ko‘rinishga ega.

(6.2) tenglikning chap va o‘ng tomonlarini transponirlash ya’ni qo‘shmasiga o‘tish natijasida

$$(e^{tA})^* = E^* + tA^* + \frac{t^2}{2!}(A^*)^2 + \frac{t^3}{3!}(A^*)^3 + \dots + \frac{t^k}{k!}(A^*)^k + \dots = e^{tA^*}$$

formulani hosil qilamiz.

(6.2) tenglikda matritsa normasi uchun uchburchak tengsizligini qo‘llab

$$\|e^{tA}\| \le \|E\| + |t|\cdot\|A\| + \frac{|t^2|}{2!}\|A\|^2 + \frac{|t^3|}{3!}\|A\|^3 + \ldots = e^{|t|\|A\|}$$

bahoni olamiz.

Nihoyat (6.2) qator absolyut yaqinlashganligi uchun uni t parametr bo‘yicha hadlab differensiallash mumkin va natijada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= E + \frac{t}{1!}A^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k + \ldots = \\ &= A\left(E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} + \ldots\right) = Ae^{tA} \end{aligned} \tag{6.5}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar (6.2) qatorni yig‘ish mumkin bo‘lsa, u holda matritsaning eksponensialini oson hisoblash mumkin.

1-misol. Agar A nol matritsa bo‘lsa, u holda

$$e^{tA} = E + t\cdot 0 + \frac{t^2}{2!}\cdot 0 + \frac{t^3}{3!}\cdot 0 + \cdots = E$$

formula o‘rinli ekanligi ayon.

2-misol. $n=2$ bo‘lsin. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa uchun e^{tA} eksponensial matritsani topamiz.

Bevosita $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = E$, $A^5 = A$,...

ekanligini tekshirish munkin. Bu matritsalarni (6.2) qatorga qo‘yib

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

natijani olamiz.

Eksponensiallarni hisoblashning yana bir usulini keltiramiz. e^{tA} eksponensial matritsaning ustunlarini $e_1(t), e_2(t), \cdots, e_n(t)$ bilan belgilaymiz. U holda (6.5) formulaga ko‘ra

$$\left(\dot{e}_1(t) \mid \dot{e}_2(t) \mid \cdots \mid \dot{e}_n(t)\right) = A\left(e_1(t) \mid e_2(t) \mid \cdots \mid e_n(t)\right)$$

matritsaviy tenglik o'rinli. Bu tenglik har bir $e_i(t)$ vektor

$$\dot{x} = Ax$$

Bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasining yechimini bildiradi. Boshlang'ich shartlar $e^{tA}\Big|_{t=0} = E$, ya'ni $e_i(0) = e_i \;\; i = 1,2,...,n$ munosabatlar bilan aniqlanadi, bu yerda $e_1, e_2, ..., e_n$ lar R^n fazoning bazis vektorlaridir.

3-misol. $n = 2$ bo'lsin. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning e^{tA} eksponensialini (6.6) differensial tenglamalar sistemasini yechish yordamida hisoblaymiz.
Bu holda sistema

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = 0 \end{cases}$$

ko'rinishga ega. Bu sistemaning umumiy yechimi

$$x(t) = (c_2 t + c_1,\; c_2)$$

formula bilan ifodalanadi. Boshlag'ich shartlar sifatida $e_1(o) = e_1 = (1,0)$, $e_2(0) = e_2 = (0,1)$ bazis vektorlarni olib, e^{tA} eksponensial matritsaning ustunlari bo'lgan sistemaning ikkita $e_1(t) = (1,0)$, $e_2(t) = (t,1)$ yechimlarini hosil qilamiz.

6.3. Chiziqli differensial tenglamalar

$u(t)$ boshqariladigan obyektning $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida berilgan qandaydir joiz boshqaruvi bo'lsin.

$$\dot{x} = Ax + u(t) \qquad (6.1)$$

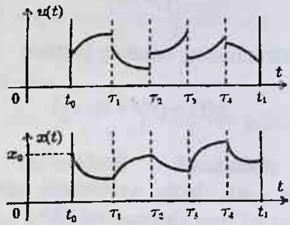
differensial tenglamani qaraymiz. Bu tenglamaning o'ng tomoni $t \in I$ va $x \in R^n$ ning barcha qiymatlarida aniqlangan.

Agar bu tenglamadagi $u(t)$ funksiya $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda oddiy differensial tenglamalar kursidan ma'lumki, har qanday $x(t_0) = x_0$ boshlang'ich shart uchun (6.1) tenglamani qanoatlantiruvchi yagona yechim mavjud bo‘lib, bu yechim ixtiyoriy $t \in [t_0, t_1]$ uchun

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} u(s)\,ds \tag{6.7}$$

Koshi formulasi bilan beriladi, shu bilan birga bu yerda integral Riman ma’nosida bo‘lib, $x(t)$ yechimning o‘zi uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo‘ladi.

Ammo 2-misol (4-ma’ruza) da oddiy chiziqli tezkorlik masalasidagi $u(t)$ optimal boshqaruv ham uzluksiz funksiya bo‘lmasligi ko‘rsatilgan edi. Ko‘rsatilgan misolda $u(t)$ optimal boshqaruv bo‘lakli uzluksiz funksiya edi. $u(t)$ bo‘lakli uzluksiz funksiya uchun (6.7) formuladan $u(t)$ funksiya uzluksizligi saqlangan har bir kesmada foydalanish mumkin. Natijada bo‘lakli silliq $x(t)$ yechimni hosil qilamiz, ya’ni $x(t)$ funksiyaning o‘zi uzluksiz, ammo uning hosilasi $\dot{x}(t)$ bo‘lakli silliq (19-chizma).



19-chizma

Ammo optimal boshqaruv bo‘lakli uzluksiz funksiya bo‘lmasligi mumkin. Shuning uchun optimal boshqaruv nazariyasining chiziqli tezkorlik masalasida joiz bosharuvlar sifatida o‘lchovli funksiyalar qaraladi. Umumiy holda, har qanday $u(t)$ joiz boshqaruv

$$\|u(t)\| \leq |U|$$

bahoni qanoatlantiradi. Lebeg integralining 2-xossasiga ko‘ra (qo‘shimchadan D6 bo‘limni qarang) $u(t)$ funksiya Lebeg ma’nosida integrallanuvchi bo‘ladi.

Agar $x(t)$ funksiyaning $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida deyarli barcha $t\in I$ lar uchun uning Lebeg ma'nosida integrallanuvchi $\dot{x}(t)$ hosilasi mavjud va barcha $t\in I$ lar uchun

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot{x}(s)ds$$

shart bajarilsa, ya'ni $x(t)$ funksiya o'zining $\dot{x}(t)$ hosilasi bilan bir qiymatli tiklansa, $x(t)$ funksiya $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida *absolyut uzluksiz* deyiladi. Har qanday bo'lakli silliq funksiya absolyut uzluksiz funksiya bo'ladi. Har qanday $u(t)$ joiz boshqaruv, ya'ni Lebeg ma'nosida integrallanuvchi $u(t)$ funksiya, va ixtiyoriy $x(t_0)=x_0$ boshlang'ich shart uchun (6.1) differensial tenglamaning $x(t)$ yechimini aniqlash mumkin. Ammo bu holda $x(t)$ yechim uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lmasdan faqatgina absolyut uzluksiz funksiya bo'ladi.

1-teorema. (6.1) differensial tenglamadagi $u(t)$ funksiya $I=[t_0,t_1]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin. U holda har qanday $x(t_0)=x_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi (6.1) tenglamaning yagona absolyut uzluksiz $x(t)$ yechimi mavjud bo'lib, bu yechim ixtiyoriy $t\in[t_0,t_1]$ uchun (6.7) Koshi formulasi bilan aniqlanadi va bu formulada integral Lebeg ma'nosida tushuniladi.

Isboti. Bevosita tekshirish bilan (6.7) formula bilan berilgan $x(t)$ funksiya (6.1) differensial tenglamani qanoatlantirishini ko'rish mumkin. Haqiqatdan ham $t=t_0$ bo'lganda $x(t_0)=x_0$ boshlang'ich shart bajarilishi ravshan. Keyin eksponensialning xossasidan foydalanib, $x(t)$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz.

$$\dot{x}(t)=Ae^{(t-t_0)A}x_0+u(t)+\int_{t_0}^{t}Ae^{(t-s)A}u(s)ds=$$
$$=A\left[e^{(t-t_0)A}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}u(s)ds\right]+u(t)=Ax(t)+u(t)$$

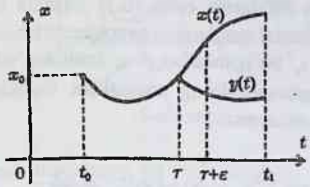
Bu ifoda (6.1) differensial tenglamaning o'ng tomoni bilan ustma-ust tushishi ko'rinib turibdi. Shuning uchun $x(t)$ funksiyani (6.1) differensial tenglamaning o'ng tomoniga qo'yilganda

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \qquad (6.8)$$

tenglikni hosil qilamiz. Hosil qilingan tenglik deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ lar uchun bajariladi, chunki absolyut uzluksiz $x(t)$ funksiyaning $\dot{x}(t)$ hosilasi deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ lar uchun mavjud. Uzluksiz differensiallanuvchi $x(t)$ klassik yechim (6.1) tenglamani barcha t lar uchun ayniyatga aylantiradi. Biroq (6.8) tenglik deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ lar uchun bajarilsa, absolyut uzluksiz $x(t)$ funksiya (6.1) *differensial tenglamaning yechimi* deyiladi.

Agar $u(t)$ joiz boshqaruvni ayrim olingan nuqtalarda yoki o'lchovi nolga teng bo'lgan to'plamda o'zgartirsak, u holda (6.8) tenglik saqlanadi va $x(t)$ funksiya (6.1) differensial tenglamaning yechimi bo'ladi. Umuman (6.8) tenglik saqlanadi, chunki $u(t)$ funksiya (6.7) formulada integral belgisi ostida bo'lganligi uchun, integral belgisi ostidagi funksiyani o'lchovi nolga teng bo'lgan to'plamda o'zgartirish natijasida Lebeg integrali o'zgarmaydi.

$x(t)$ yechimni yagonaligini ko'rsatishimiz qoldi. Teskaridan faraz qilamiz, ya'ni ikkita $x(t)$ va $y(t)$ absolyut uzluksiz yechimlar bir xil $x(t_0) = y(t_0) = x_0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin. τ vaqtning shunday birinchi momentiki, bu nuqtada $x(t)$ va $y(t)$ yechimlar ajralsin (20-chizma).



20-chizma

$\varepsilon\|A\| < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonini tanlaymiz va $[\tau, \tau + \varepsilon]$ vaqt oralig'ida $z(t) = x(t) - y(t)$ funksiyani qaraymiz. $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar (6.8) tenglikni qanoatlantirganligi sababli deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ lar uchun

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t) = Ax(t) - Ay(t) = A(x(t) - y(t)) = Az(t)$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu munosabatni $[\tau, t]$ kesmada integrallab,

$$z(t) = \int_{\tau}^{t} Az(s)ds$$

tenglikni hosil qilamiz, chunki $z(\tau) = 0$.
shu sababli $\tau \le t \le \tau + \varepsilon$ kesmada

$$\|z(t)\| = \left\| \int_{\tau}^{t} Az(s)ds \right\| \le \int_{\tau}^{t} \|Az(s)\| ds \le$$

$$\le \int_{\tau}^{t} \|A\| \cdot \|z(s)\| ds \le \varepsilon \cdot \|A\| \max_{\tau \le t \le \tau+\varepsilon} \|z(t)\| < \max_{\tau \le t \le \tau+\varepsilon} \|z(t)\|$$

munosabat o'rinli. $z(t)$ funksiya $[\tau, \tau+\varepsilon]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun , u bu kesmaning qandaydir $t^* \in [\tau, \tau+\varepsilon]$ nuqtasida o'zining maksimumiga erishadi. Hosil qilingan munosabatda $t = t^*$ deb olsak,

$$\|z(t^*)\| < \|z(t^*)\|$$

ziddiyat hosil bo'ladi. Shu bilan $x(t)$ yechimning yagonaligi o'rnatildi. Teorema isbotlandi.

Eslatma. 1-teoremada (6.1) tenglamaning $x(t)$ yechimi uchun boshlang'ich shart $[t_0, t_1]$, kesmaning chap qismida berilgan bo'lsa, y'ani t_0 nuqtada $x(t_0) = x_0$, bo'lib $x(t)$ yechim (6.7) Koshi formulasi bilan beriladi. Agar boshlang'ich shart $[t_0, t_1]$, kesmaning o'ng qismida berilgan, y'ani t_1 nuqtada $x(t_1) = x_1$, bo'lishi mumkun. Shuning uchun bu holda ham $x(t)$ yechim mavjud va yagona bo'lib, u yana

$$x(t) = e^{(t-t_1)A}x_1 + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}u(s)ds \qquad (6.9)$$

Koshi formulasi bilan beriladi.

Bu mulohaza 1- teorema isbotlanganidek tekshirilishi mumkin (kitobxonga bu narsani mustaqil bajarish ta'vsiya etiladi).

4-misol. $n = 2$ bo'lsin

$$\dot{x} = u(t)$$

tenglamalar sistemasining $[0,2]$ vaqt oralig'ida $x(0) = x_0 = (1,1)$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping, bu yerda $u(t)$ funksiya

$$u(t) = \begin{cases} (1,1), & \text{agar } 0 \le t \le 1, \, bo'lsa \\ (1,-1), & \text{agar } 0 \le t \le 2, \, bo'lsa \end{cases}$$

formula bilan berilgan.

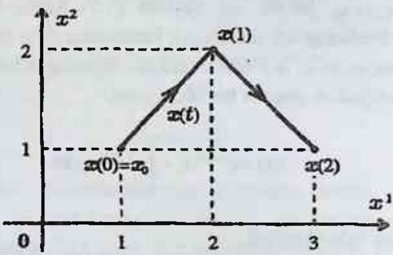
Berilgan holda $A = 0$ bo'lib, $e^{tA} = E$ bo'ladi (1-misolga qarang) va (6.7) Koshi formulasi

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(s)ds$$

ko'rinishni oladi. $u(t)$ funksiyani integrallab,

$$x(t) = \begin{cases} (1+t, 1+t), & agar \ 0 \le t \le 1, \, bo'lsa \\ (1+t, 3-t), & agar \ 1 < t \le 2, \, bo'lsa \end{cases}$$

yechimni hosil qilamiz. Bu yechim bo'lakli silliq bo'lib, uning hosilasi $t = 1$ nuqtada uzilishga ega. Bu yechim $x = (x^1, x^2) \in R^2$ o'zgaruvchining holatlar tekisligida 21-chizmada tasvirlangan.



21-chizma

5-misol. $u(t)$ bo'lakli uzluksiz bo'lib, $[0,\pi]$ vaqt oralig'ida

$$u(t)=(u^1(t),u^2(t))=\begin{cases}(0,1), & agar \ 0\le t\le \dfrac{\pi}{2} \ bo'lsa,\\ (-1,0), & agar \ \dfrac{\pi}{2}<t\le\pi \ bo'lsa\end{cases}$$

shart bilan berilgan ushbu

$$\begin{cases}\dot{x}^1=x^2+u^1(t),\\ \dot{x}^2=-x^1+u^2(t)\end{cases} \tag{6.10}$$

tenglamalar sistemasining $x(0)=(1,0)$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

(6.10) tenglamada $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ ekanligi ravshan. Bu matritsaning eksponensiali 2-misolda hisoblangan bo'lib, u

$$e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

Bu ifodani, $t_0=0$, $x(0)=(1,0)$ boshlang'ich shartlarni va $u(t)$ funksiyani Koshi formulasiga qo'yib, barcha $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ lar uchun

$$x(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}\cos(t-s) & \sin(t-s)\\ -\sin(t-s) & \cos(t-s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}ds=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}\sin(t-s)\\ \cos(t-s)\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Xuddi shu kabi $u(t)$ funksiyani va $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1,0)$ boshlang'ich shartni (6.7) Koshi formulasiga qo'yib, $t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ uchun

$$x(t)=\begin{pmatrix}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\\ -\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\begin{pmatrix}\cos(t-s) & \sin(t-s)\\ -\sin(t-s) & \cos(t-s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}ds=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\\ -\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\begin{pmatrix}-\cos(t-s)\\ \sin(t-s)\end{pmatrix}ds=$$

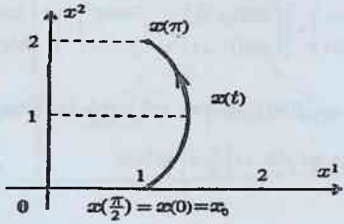
$$=\begin{pmatrix}\sin(t)\\ -\cos(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(t)\\ 1-\sin(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t+\cos t\\ 1-\cos t-\sin t\end{pmatrix}$$

yechimni hosil qilamiz. Nihoyat

$$x(t)=\begin{cases}(1,0), & agar\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}, bo'lsa,\\ (\sin t+\cos t, 1+\cos t-\sin t,)\, agar\,\frac{\pi}{2}<t\le\pi\ bo'lsa\end{cases}$$

yechimga ega bo‘lamiz.

Bu yechim absolyut uzluksiz funksiya bo‘lib , u bo‘lakli silliq ammo uzluksiz differensiallanuvchi funksiya emas. Uning $\dot{x}(t)$ hosilasi $t=\frac{\pi}{2}$ nuqtada uzulishga ega. Yechimning tasviri $(x^1,x^2)\in R^2$ holatlar tekisligida 22-chizmada berilgan.



22-chizma

6-misol $u(t)$ bo'lakli uzluksiz bo'lib,

$$u(t)=(u^1(t),u^2(t))=\begin{cases}(-1,0), & agar\ 0\le t\le 1\ bo'lsa,\\ (0,1), & agar\ 1<t\le 2\ bo'lsa\end{cases}$$

shart bilan berilganda

$$\begin{cases}\dot{x}^1=x^2+u^1,\\ \dot{x}^2=u^2\end{cases}$$

tenglamalar sistemasining $[0,2]$ vaqt oralig'ining o'ng qismida $x(2)=0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

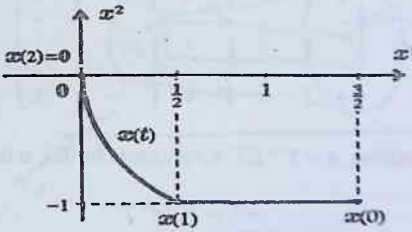
$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ matritsaning eksponensiali 3-misolda hisoblangan bo'lib, u $e^{tA}=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ko'rinishga ega. Bu ifodani va $x(2)=0$ shartni (6.9) formulaga qo'yib,

$$x(t)=\int_0^t\begin{pmatrix}1 & t-s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^1(s)\\ u^2(s)\end{pmatrix}ds$$

ifodani hosil qilamiz. Bu ifodaga $u(t)$ funksiyani qo'yib , integrallashdan so'ng,

$1<t\le 2$ bo'lganda, $x(t)=\left(\frac{t^2}{2}-2t+2,\ t-2\right)$ va $0\le t\le 1$ bo'lganda $x(t)=\left(-t+\frac{3}{2},\ -1\right)$

yechimni hosil qilamiz. $x(t)$ yechimning tasviri $(x^1,x^2)\in R^2$ holatlar tekisligida 23-chizmada berilgan.



23-chizma

6.4 Masalalar

1. A va B ixtiyoriy $n\times n$ o'lchamli matritsalar bo'lsin.

$$e^{A}\cdot e^{B}=e^{A+B}$$

tenglik doimo bajariladimi?

2. Quyidagi A matritsalar uchun e^{tA} eksponensiallarni hisoblang:

$$1)\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix},\quad 2)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad 4)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$5)\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\-&-&-&\cdots&-\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\quad 6)\begin{pmatrix}\lambda&1&0&\cdots&0\\0&\lambda&1&\cdots&0\\-&-&-&\cdots&-\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&\lambda\end{pmatrix}.$$

3. Blok matritsaning eksponensialini hisoblang.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}A_1&0&0&\cdots&0\\\hline 0&A_2&0&\cdots&0\\\hline \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\hline 0&0&0&\cdots&A_n\end{array}\right)$$

4. Agar A matritsa $A=T^{-1}BT$ ko'rinishda bo'lsa, u holda

$$e^{tA}=T^{-1}e^{tB}T$$

ekanligini isbotlang, bu yerda T - xosmas almashtirish.

- *Chiziqli boshqaruv sistemalarda erishish va boshqarilish to'plamlari ularning asosiy xossalari.*

7.1. Erishish to'plami

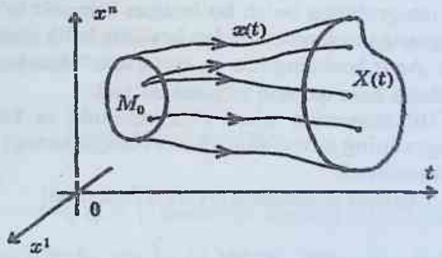
Yana holati

$$\dot{x} = Ax + u \qquad (7.1)$$

chiziqli differensial tenglamalar sistemasi bilan yozilgan boshqariladigan obyektni qaraymiz, bu yerda joiz boshqaruvlar sinfi $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida Lebeg ma'nosida integrallanuvchi barcha $u(t)\in U, U\in\Omega(R^n)$ funksiyalardan va $M_0\in\Omega(R^n)$ boshlang'ich to'plamdan iborat bo'lsin.

Barcha $u(t)$ joiz boshqaruvlar bo'yicha (7.1) tenglamaning yechimlari yordamida nuqtalarning M_0 boshlang'ich to'plamidan $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida erishilishi mumkin bo'lgan R^n fazoning barcha nuqtalari to'plamiga vaqtning t momentidagi *erishish to'plami* deyiladi va $X(t)$ bilan belgilanadi.

Shu sababli, $X(t)$ erishish to'plami barcha $\{x(t)\}$ ko'rinishdagi nuqtalar to'plamidan iborat, bu yerda $x(t)$- (7.1) tenglamaning $u(t)$ joiz boshqaruvlga mos $x(t_0)\in M_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi (24-chizma).



24-chizma

Erishish to'plami albatta A matritsaga, chegaralovchi U to'plamga, holatlarning boshlang'ich M_0 to'plamiga va $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'iga bog'liq. Erishish to'plamining ba'zi xossalarini ko'rib o'tamiz.

1-xossa. $X(t)$ erishish to'plami

$$X(t)=e^{(t-t_0)A}M_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{(t-s)A}Uds \tag{7.2}$$

ko'rinishga ega, bu yerda $e^{(t-t_0)A}M_0$ - M_0 to'plamning $e^{(t-t_0)A}$ chiziqli akslantirishdagi obrazi (2-ma'ruzaga qarang), integral belgisi ostida barcha $s\in[t_0,t]$ lar uchun $e^{(t-s)A}$ chiziqli akslantirishdagi U to'plamning obrazidan iborat ko'p qiymatli akslantirish o'rin olgan.

Isboti. Bu xossaning isboti

$$x(t)=e^{(t-t_0)A}x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}e^{(t-s)A}u(s)ds$$

Koshi formulasidan (6-ma'ruzaga qarang) va erishish to'plami ta'rifi, chiziqli almashtirishda to'plamning obrazi, to'plamlarning algebraik yig'indisi (2-ma'ruzaga qarang), ko'p qiymatli akslantirishlarning Lebeg integrali (5-ma'ruzaga qarang) kabi tushunchalardan bevosita kelib chiqadi.

2-xossa. Erishish to'plami R^n fazoning bo'sh bo'lmagan kompakt qism to'plamidir, ya'ni $X(t)\in\Omega(R^n)$

Isboti. Bu xossaning isboti (7.2) formula va ko'p qiymatli akslantirish integralining bo'sh bo'lmagan kompakt to'plam bo'lishi (5-ma'ruzaga qarang) tushunchalaridan bevosita kelib chiqadi.

3-xossa. Agar boshlang'ich M_0 qavariq to'plam bo'lsa, u holda $X(t)$ erishish to'plami ham qavariq to'plam bo'ladi.

Isboti. Bu xossaning isboti (7.2) formula va ko'p qiymatli akslantirish integralining qavariqligi (5-ma'ruzaga qarang) tushunchalaridan bevosita kelib chiqadi.

4-xossa. Erishish sohasining tayanch funksiyasi

$$c(X(t),\psi)=c(M_0,\ e^{(t-t_0)A^*}\psi)+\int_{t_0}^{t_1}c(U,\ e^{(t-s)A^*}\psi)ds \tag{7.3}$$

ko'rinishga ega.

Isboti. Bu xossaning isboti ham (7.2) formula, tayanch funksiyalarning xossalari va 2-teoremadan (5-ma'ruzaga qarang) bevosita kelib chiqadi.

Haqiqatdan ham, (7.2) tenglikning o'ng va chap qismlaridan tayanch funksiya olib, sanab o'tilgan faktlardan foydalanib (7.3) formulani hosil qilamiz.

5-xossa. $\tau=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ining uzunligi, ya'ni $\tau=t-t_0$ bo'lsin, u holda $X(t)$ erishish to'plami faqat kesma uzunligi τ ga bog'liq bo'lib, u

$$X(t)=e^{\tau A}M_0+\int_0^{\tau}e^{sA}U\,ds \qquad (7.4)$$

ko'rinishga ega.

Isboti. Har qanday muayyan olingan $u(t)\in U$ boshqaruv uchun (7.1) differensial tenglama avtonom emas chunki chegaralovchi U to'plam o'zgarmas bo'lib, boshqariladigan

$$\dot{x} = Ax + u, \quad u \in U$$

Obyekt butunlay avtonom differensial tenglamalar sistemasi ko'rinishiga ega. Bunda eng muhimi vaqtning qandaydir t_0 momentidan harakat boshlanganligidir. $X(t)$ erishish to'plami faqat $\tau=t-s$ vaqt oralig'i uzunligigagina bog'liq. (7.3) formuladagi integralda $t-s=\alpha$ belgilash kiritib

$$\int_{t_0}^{t}c(U,e^{(t-s)A^*}\psi)ds=\int_{t-t_0}^{0}c(U,e^{\alpha A^*}\psi)(-d\alpha)=\int_0^{t-t_0}c(U,e^{\alpha A^*}\psi)d\alpha \qquad (7.5)$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi bu tayanch funksiya bo'yicha qavariq kompakt to'plamni tiklab

$$\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}U\,ds=\int_0^{t-t_0}e^{\alpha A}U\,d\alpha$$

tenglikka kelamiz. $\tau=t-t_0$ va (7.1) formulani hisobga olib (7.4) formulani hosil qilamiz.

6-xossa. $c(X(t),\psi)$ tayanch funksiya $\tau=t-t_0$ kesma uzunligining funksiya sifatida

$$c(X(t),\psi) = c(M_0, e^{\tau A^*}\psi) + \int_0^\tau c(U, e^{sA^*}\psi)ds \qquad (7.6)$$

ko'rinishga ega.

Isboti. Bu formulaning isboti ayon. Buning uchun (7.3) formulaning barchasida o'zgaruvchini almashtirish yoki (7.4) formulaning chap va o'ng qismlaridan tayanch funksiya olish yetarli.

7-xossa. $X(t)$ erishish to'plami t argumentga uzluksiz bog'liq, ya'ni $X(\cdot) I \to \Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirish Xausdorf metrikasi bo'yicha uzluksiz.

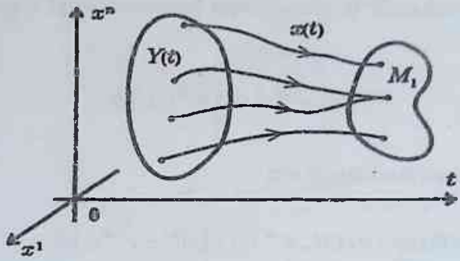
Isboti. (7.4) formulaga ko'ra $X(t)$ erishish to'plami $\tau = t - t_0$ kesma uzunligiga bog'liq emas. Haqiqatdan ham, 3-teoremaga ko'ra (5-ma'ruzaga qarang) ko'p qiymatli akslantirishdan olingan integral integrallashning yuqori chegarasi bo'yicha uzluksiz. $e^{\tau A}M_0$ akslantirish esa $e^{\tau A}$ uzluksiz chiziqli almashtirishdagi M_0 to'plamning obrazi (4-ma'ruzaga qarang) bo'lganligi uchun uzluksizdir. Demak $X(t)$ almashtirish ikkita uzluksiz ko'p qiymatli akslantirishlar yig'indisidan iborat bo'lgani uchun τ ga uzluksiz bog'liq. Agar vaqtning boshlang'ich t_0 mahkamlangan bo'lsa, u holda $X(t)$ erishish to'plami $t = t_0 + \tau$ argumentga uzluksiz bog'liq.

Erishish to'plami optimal boshqaruv nazariyasida fundamental ahamiyatga ega. Kelgusi natijalarning barchasi uning xossalariga asoslangan. Bu xossalar uchun eng ahamiyatlisi shundaki joiz boshqaruvlar sinfi sifatida barcha mumkin bo'lgan $u(t) \in U$ o'lchovli funksiyalar, ya'ni har qanday $[t_0, t_1]$ chekli vaqt oralig'ida Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar tanlanadi. Xuddi shu sinfda ko'p qiymatli akslantirishning integrali, va demak erishish to'plami bo'sh bo'lmagan qavariq, kompakt to'plam bo'ladi.

7.2.Boshqariluvchanlik to'plami

$X(t)$ erishish to'plamidan farqli, yana bir to'plam $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plamini qaraymiz.

Barcha $u(t)$ joiz boshqaruvlar bo'yicha (7.1) tenglamaning yechimlari yordamida $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida nuqtalarning so'nggi M_1 to'plamiga keltirish mumkin bo'lgan R^n fazoning barcha nuqtalari to'plamiga vaqtning t momentidagi *boshqariluvchanli to'plami* deyiladi va $Y(t)$ bilan belgilanadi. Shu sababli, $Y(t)$ boshqariluvchanlik to‘plami barcha $\{x(t)\}$ ko‘rinishdagi nuqtalar to‘plamidan iborat, bu yerda $x(t)$ - (7.1) tenglamaning $u(t)$ joiz boshqaruvlga mos trayektoriyaning o‘ng qismida $x(t_1) \in M_1$ so‘nggi shartni qanoatlantiruvchi yechimi (25-chizma).



25-chizma

Har bir yechim

$$x(t) = e^{(t-t_1)A}x(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}u(s)ds =$$

$$= e^{(t-t_1)A}x(t_1) + \int_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}[-u(s)]ds$$

Koshi formulasi (6-ma’ruzaning (6.9) formulasiga qarang) bilan berilgani uchun $Y(t)$ boshqariluvchanlik to‘plami

$$Y(t) = e^{(t-t_1)A}M_1 + \int_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}[-U]ds \qquad (7.7)$$

ko‘rinishga ega. Agar M_1 qavariq to‘plam bo‘lsa, u holda $Y(t)$ boshqariluvchanlik to‘plami ham t vaqtga nisbatan uzluksiz, bo‘sh bo‘lmagan qavariq kompakt to‘plam bo‘lishi yuqoridagidek isbotlanadi.

$Y(t)$ boshqariluvchanlik to‘plamining tayanch funksiyasi

$$c(Y(t),\psi)=c(M_1,e^{(t-t_1)A^*}\psi)+\int_t^{t_1}c(U,-e^{(t-s)A^*}\psi)ds \tag{7.8}$$

ko'rinishga ega.

$\tau-[t,t_1]$ vaqt oralig'ining uzunligi, ya'ni $\tau=t_1-t$ bo'lsin. U holda $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plami faqat kesma uzunligi τ ga uzluksiz bog'liq va

$$Y(t)=e^{-\tau A}M_1+\int_0^{\tau}e^{-sA}[-U]ds \tag{7.9}$$

uning tayanch funksiyasi esa

$$c(Y(t),\psi)=c(M_1,e^{-\tau A^*}\psi)+\int_0^{\tau}c(U,-e^{-sA^*}\psi)ds \tag{7.10}$$

bo'ladi.

$Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plamining hamma xossalari $X(t)$ erishish to'plamining isbotlangan 1-7 xossalaridek ko'rsatiladi.

Yuqorida sanab o'tilgan $X(t)$ erishish va $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plamlarining xossalari ixtiyoriy A matritsa va ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan kompakt $U,M_0,M_1\in\Omega(R^n)$ to'plamlar uchun, ya'ni ixtiyoriy boshqariladigan (7.1) chiziqli sistemalar uchun o'rinlidir.

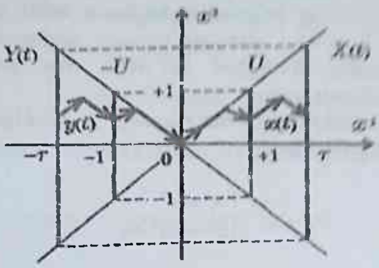
1-misol. $A=0$ matritsa uchun $X(t)$ erishish va $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plamlarini (7.4) va (7.9) formulalar bo'yicha hisoblab mos ravishda quyidagi:

$$X(t)=M_0+\int_0^{\tau}Uds=M_0+\tau convU,$$

$$Y(t)=M_1+\int_0^{\tau}(-U)ds=M_1+\tau conv(-U)$$

ifodalarni hosil qilamiz (5-ma'ruzadagi o'zgarmas to'plamni integrallash haqidagi 3-misolga qarang).

Hususiy holda $n=2$ va U to'plam $(1,1)$, $(1,-1)$ nuqtalardan tashkil topgan bo'lsin (26-chizma)



26-chizma

Agar $M_0=\{0\}$ bo'lsa, u holda $X(t)$ erishish to'plami uzunligi $\tau=t-t_0$ bo'lgan ixtiyoriy $[t_0,t]$ vaqt oralig'ida $X(t)=\{x\in R^2: x^1=\tau, |x^2|\le\tau\}$ kesmadan iborat. Agar $M_1=\{0\}$ deb olsak, u holda $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plami uzunligi $\tau=t_1-t$ bo'lgan $[t,t_1]$ vaqt oralig'ida kesmadan iborat. 26-chizmada shu bilan birga ikkita muayyan trayektoriyalar keltirilgan. $x(t)$ yechim $M_0=\{0\}$ nuqtani kattaligi τ ga teng vaqtda $X(t)$ to'plamning ixtiyoriy nuqtasiga, $u(t)$ yechim esa $M_1=\{0\}$ nuqtani kattaligi τ ga teng vaqtda $Y(t)$ to'plamning qandaydir nuqtasiga o'tkazadi.

Eslatma Boshlang'ich $M_0$to'plamda $\tau=t-t_0$ vaqt oralig'ida $X(t,M_0)$ erishish to'plamini hisoblashda asosiy qiyinchilik $M_0=\{0\}$ kordinata boshidan erishish to'plamini, y'ani

$$X(t,\{0\})=\int_0^\tau e^{sA}Uds \qquad (7.11)$$

to'plamni hisoblashdir ((7.4) formulaga qarang). Ixtiyoriy M_0 boshlang'ich to'plamdan erishish to'plamini $e^{tA}M_0$ qo'shiluvchini qo'shish bilan hosil qilinadi. Masalan, agar M_0 yagona $\{x_0\}$ nuqtadan iborat bo'lsa, u holda har bir τ uchun $X(t,\{0\})$ to'plamni $e^{tA}x_0$ vektorga ko'chirish kerak. Huddi shunday ish $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plami uchun ham bajariladi.

$X(t)$ erishish to'plamini yoki $Y(t)$ boshqariluvchanlik hisoblashda, agar M_0 va M_1 qavariq to'plamlar bo'lsa u holda dastlab (7.6) yoki (7.10) formulalar bo'yicha ularning tayanch funksiyalarning hisoblash so'ng esa tayanch funksiyal bo'yicha $X(t)$ yoki $Y(t)$ qavariq kompaktlarning tiklash lozim.

2-misol. Mayatnikning (1-ma'ruzadagi 2- misolga qarang) holatini ifodalovchi boshqariladigan:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + v \end{cases}$$

sistema uchun boshlang'ich $M_0 = \{0\}$ to'plamdan $0 \le t \le \pi$ bo'lganda $X(t)$ erishish to'plamini toping, bu yerda boshqaruluvchi kuchga $|v(t)| \le 1$ cheklanish qo'yilgan.

Bu sistemani (7.1) standart ko'rinishdagi sistemaga keltirish uchun $u = (u^1, u^2) = (0, v)$ vektor boshqaruvini aniqlaymiz. Bunda U to'plam R^2 holatlar fazosida

$$U = \{u \in R^2 : u^1 = 0, |u^2| \le 1\}$$

kesmadan iborat bo'ladi. Uning tayanch funksiyasi

$$c(U, \psi) = |\psi^2|$$

ko'rinishga ega. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ uchun qaralayotgan sistemaning e^{tA} eksponensiyali 2-misolda (6-ma'ruzani qarang) hisoblangan bo'lib, u

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Endi erishish to'plamining $c(X(t), \psi)$ tayanch funksiyasini hisoblaymiz. (7.6) formulaga M_0, U va e^{tA} larning qiymatlarini qo'yib, sodda hisoblashlardan keyin

$$c(X(t),\psi) = \int_0^{\pi} \left|\psi^1 \sin s + \psi^2 \cos s\right| ds$$

ifodani hosil qilamiz. R^2 tekislikdagi ixtiyoriy $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ vektorni qutb koordinatalarida

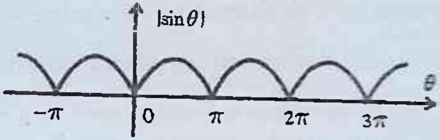
$$\psi^1 = \cos\alpha, \quad \psi^2 = \sin\alpha, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi \tag{7.12}$$

kabi tasvirlash mumkin. Shuning uchun $c(X(t),\psi)$ tayanch funksiya uchun

$$c(X(t),\psi) = \int_0^{\pi} \left|\sin(\alpha + s)\right| ds = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left|\sin\theta\right| d\theta \tag{7.13}$$

ifoda hosil bo'ladi.

Demak, tayanch funksiyani hisoblash uchun $|\sin\theta|$ funksiyani integrallashni bilish lozim (27-chizma).

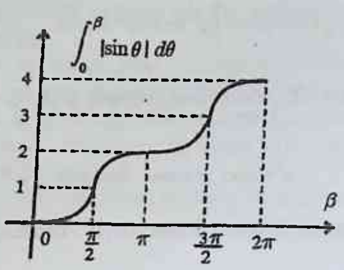


27-chizma

Bu davri π ga teng bo'lgan davriy funksiyadir. $|\sin\theta|$ funksiyani $[0, \beta]$ kesmada integrallash natijasida ham β parametrga bog'liq davri π ga teng bo'lgan funksiya hosil bo'lib, u

$$\int_0^{\beta} \left|\sin\theta\right| d\theta = 2\left[\frac{\beta}{\pi}\right] + 1 - \cos\left(\beta - \left[\frac{\beta}{\pi}\right]\pi\right) \tag{7.14}$$

formula bilan beriladi, bu yerda $\left[\frac{\beta}{\pi}\right]$ bilan $\frac{\beta}{\pi}$ sonining butun qismi belgilangan (28-chizma).



28-chizma

Bu matematik analizning murakkab bo'lmagan masalasi bo'lib, o'quvchilarga mustaqil hal qilish havola qilinadi.

(7.14) formuladan foydalanib, (7.13) tayanch funksiyani hisoblaymiz. Hisoblash $0 \le \alpha \le \pi$ parametrning qiymatlariga bog'liq ravishda to'rtta qismga ajratilishi, aniqroq aytilganda α burchak chizmadagi (29-chizma) to'rta sek-torlardan qaysi biriga tegishli ekanligiga bog'liq tarzda amalga oshirilishi mumkin.

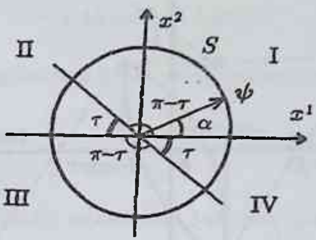
Hisoblashlarni bajarib, tayanch funksiya uchun quyidagi :

$$c(X(t), \psi) = \begin{cases} (1-\cos\tau)\cos\alpha + \sin\tau\sin\alpha, & agar\ \ 0 \le \alpha \le \pi - \tau\ \ bo'lsa, \\ 2 + (1+\cos\tau)\cos\alpha - \sin\tau\sin\alpha, & agar\ \ \pi - \tau < \alpha \le \pi\ \ bo'lsa, \\ (\cos\tau - 1)\cos\alpha - \sin\tau\sin\alpha, & agar\ \ \pi < \alpha \le 2\pi - \tau\ \ bo'lsa, \\ 2 - (1+\cos\tau)\cos\alpha + \sin\tau\sin\alpha, & agar\ \ 2\pi - \tau < \alpha \le 2\pi\ \ bo'lsa \end{cases}$$

ifodani olamiz. Demak,(7.12) formulalar bilan berilgan ψ vektorning qaysi sektorga tushishiga bog'liq ravishda tayanch funksiya uchun turli xil ifodalarni hosil qilamiz. Nihoyat (7.12) formulani va $\|\psi\| = 1$ tenglikni e'tiborga olib,

$$c(X(t), \psi) = \begin{cases} (1-\cos\tau)\psi^1 + \sin\tau\cdot\psi^2, & agar\ \ \psi \in I\ \ bo'lsa, \\ 2\|\psi\| + (1+\cos\tau)\psi^1 - \sin\tau\cdot\psi^2, & agar\ \ \psi \in II\ \ bo'lsa, \\ (\cos\tau - 1)\psi^1 - \sin\tau\cdot\psi^2, & agar\ \ \psi \in III\ bo'lsa, \\ 2\|\psi\| - (1+\cos\tau)\psi^1 + \sin\tau\cdot\psi^2, & agar\ \ \psi \in IV\ bo'lsa. \end{cases} \tag{7.15}$$

ifodani hosil qilamiz.



29-chizma

ψ vektor I va III sektorlarda bo'lsa, u holda tayanch funksiya mos ravishda bittadan

$$(1-\cos\tau, \sin\tau)\ , \quad (-1+\cos\tau,\ -\sin\tau)$$

nuqtalardan iborat to'plamlardan, ψ vektor I va IV sektorlarda bo'lsa, u holda tayanch funksiya mos ravishda

$$S_2(1+\cos\tau,\ -\sin\tau)\ , \qquad S_2(-1-\cos\tau,\ \sin\tau) \tag{7.16}$$

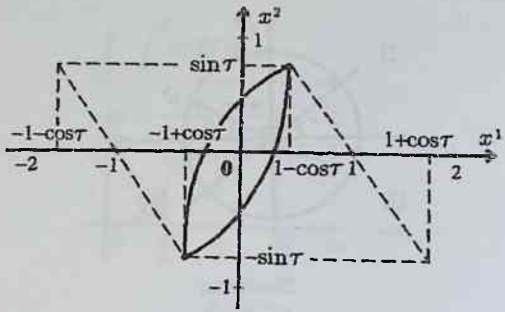
doiralardan iborat. (7.15) tayanch funksiya bilan berilgan $X(t)$ erishish sohasi ikkita (7.16) doiralarning kesishmasidan iborat bo'lib, 30-chizmada tasvirlangan.

$\tau=\pi$ bo'lganda $c(X(t_0+\pi), \psi)$ tayanch funksiya II va IV sektorlarda o'zgarmas $2\|\psi\|$ qiymatni qabul qiladi, I va III sektorlarda buziladi. Shuning uchun

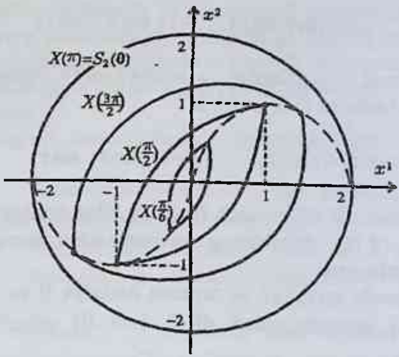
$$X(t_0+\pi)=S_2(0)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

31-chizmada $\tau=t-t_0$ vaqt uzunligining 0 dan π gacha ortishida $X(t)$ erishish sohasining dinamikasi ko'rsatilgan.



30-chizma



31-chizma

3-misol. $\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = v, \quad |v| \le 1 \end{cases}$

boshqariladigan sistema uchun so'nggi $M_1 = \{0\}$ to'plamga boshqariladigan $Y(t)$ to'plamni toping.

Yana $u = (u^1, u^2) = (0, v)$ belgilash kiritib, berilgan sistemani (7.1) ko'rinishdagi standart shaklga keltiramiz. Shuning uchun

$$U = \{u \in R^2 : u^1 = 0, |u^2| \le 1\}$$

to‘plam R^2 fazoning kesmasi bo‘lib, uning tayanch funksiyasi

$$c(U, \psi) = |\psi^2|$$

ko‘rinishga ega.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning esponensiali 3-misolda (6-ma’ruzaga qarang) hisoblangan bo‘lib, u

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga ega. Bu ifodani (7.10) formulaga qo‘yib $\tau = t_1 - t$ kesma uzunligiga bog‘liq bo‘lgan $Y(t)$ boshqaruvchanlik to‘plamining tayanch funksiyasi uchun

$$c(Y(t), \psi) = \int_0^\tau |\psi^1 s - \psi^2| ds \tag{7.17}$$

ifodani hosil qilamiz. (7.17) formulada integral belgisi ostida chiziqli funksiyaning moduli o‘rin olgan. Bu integralni hisoblash to‘rtta holga ajraladi.

1. Agar barcha $0 \le s \le \tau$ lar uchun $\psi^1 s - \psi^2 \ge 0$, tengsizlik bajarilsa, u holda

$$c(Y(t), \psi) = \frac{1}{2}\tau^2\psi^1 - \tau\psi^2 \tag{7.18}$$

ifoda hosil bo‘lishi ayon.

2. Agar barcha $0 \le s \le \tau$ lar uchun $\psi^1 s - \psi^2 \le 0$, tengsizlik bajarilsa, u holda

$$c(Y(t), \psi) = -\frac{1}{2}\tau^2\psi^1 + \tau\psi^2 \tag{7.19}$$

ifoda hosil bo‘lishi ayon.

3. Aytaylik $0 < s^* < \tau$ mavjudki, uning uchun $\psi^1 s^* - \psi^2 = 0$, va $\psi^1 > 0$ bo‘lsin. U holda integral belgisi ostidagi funksiya 32 –chizmada tasvirlangan

grafikka ega bo‘ladi, va (7.17) formuladagi integralni $[0,s^*]$ va $[s^*,\tau]$ kesmalarda alohida hisoblash mumkin. Natijada

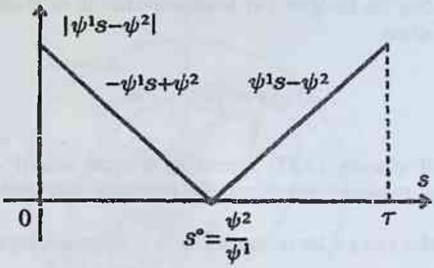
$$c(Y(t),\psi)=\frac{(\psi^2)^2}{\psi^1}+\frac{1}{2}\tau^2\psi^1-\tau\psi^2 \tag{7.20}$$

ifodani hosil qilamiz.

4. Huddi shuningdek $\psi^1<0$ hol uchun

$$c(Y(t),\psi)=-\frac{(\psi^2)^2}{\psi^1}-\frac{1}{2}\tau^2\psi^1+\tau\psi^2 \tag{7.21}$$

ifoda hosil bo‘ladi.

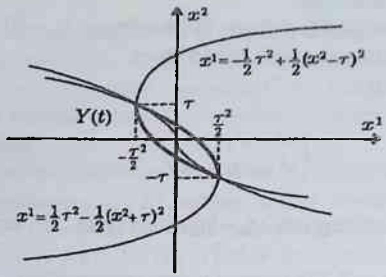


32-chizma

33-chizmada ta’svirlangan $Y(t)$ qavariq kompakt to‘plamning tayanch funksiyasi (7.18)-(7.21) formulalar bilan berilishiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Bu $Y(t)$ to‘plam ikkita

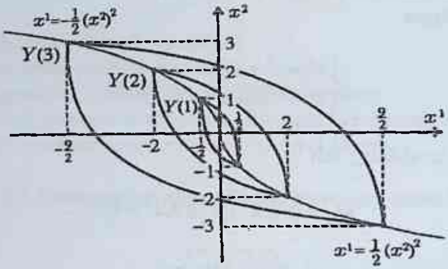
$$x^1=\frac{1}{2}\tau^2-\frac{1}{4}(x^2+\tau)^2,\quad x^1=-\frac{1}{2}\tau^2+\frac{1}{4}(x^2-\tau)^2$$

parabolalar bilan chegaralangan. Kitobxonga mustaqil tekshirib ko‘rish havola qilinadi.



33-chizma

34-chizmada $\tau = t_1 - t$ vaqt uzunligining $Y(t)$ boshqariluvchanlik to‘plamiming dinamikasi ko‘rsatilgan.



34-chizma

7.3.Masalalar

1. Boshqariladigan

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + v, \; |v| \le 1 \end{cases} \tag{7.12}$$

sistema uchun $t \ge \pi$ bo‘lganda boshlang‘ich $M_0 = \{0\}$ to‘plamdan $X(t)$

erishish to'plamini toping.

2. Boshqariladigan (7.22) sistema bilan so'nggi $M_1=\{0\}$ to'plamga $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plamini toping.

3. Boshqariladigan

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = v, 0 \le v \le 1 \end{cases} \tag{7.13}$$

sistema uchun boshlang'ich $M_0=\{0\}$ to'plamdan $X(t)$ erishish to'plamini toping.

4. Boshqariladigan (7.23) sistema uchun boshlang'ich

$$M_0=\{x_0\}=\{(0,1)\}$$

to'plamdan $X(t)$ erishish to'plamini toping.

5. Boshqariladigan (7.23) sistema bilan so'nggi $M_1=\{0\}$ to'plamga $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plamini toping.

6. Boshqariladigan

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, u \in S_1(0) \end{cases} \tag{7.12}$$

sistema uchun boshlang'ich

$$M_0=\{x \in R^2 : |x^1| \le 2, x^2 = 0\}$$

to'plamdan $X(t)$ erishish to'plamini toping.

7. Boshqariladigan

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, u \in \{-v, v\} \end{cases}$$

sistema berilgan bo'lib, bu yerda $v \in R^2$ qandaydir mahkamlangan vektor. $t=\pi$ bo'lganda so'nggi

$$M_1=\{x \in R^2 : x^1 = 0, \ |x^2| \le 1\}$$

to'plamga $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plamini toping.

8. Agar $M_0=\{0\}$ bo'lib, U to'plam simmetrik, y'ani har qanday $u\in U$ bo'lganda $-u\in U$ mansublik bajarilsa, u holda ixtiyoriy (7.1) boshqariladigan sistema uchun $X(t)$ erishish to'plami doimo simmetrik bo'lishini isbotlang.

9. $M_0=\{x_0\}$ hol uchun erishish to'plamining $c(X(t),\psi)$ tayanch funksiyasi ixtiyoriy mahkamlangan $\psi\in R^n$ vektor uchun t vaqt bo'yicha doimo uzluksiz differensiallanuvchi bo'lishini isbotlang.

10. Agar $M_0=\{0\}$ va $0\in U$ bo'lsa, u holda $X(t)$ erishish to'plami t vaqt bo'yicha kengayishini, yani $t'<t''$ bo'lganda $X(t')\subset X(t'')$ mansublik o'rinli ekanligini isbotlang.

11. . Agar $M_0=\{0\}$ va $0\in U$ bo'lsa, u holda $Y(t)$ boshqariluvchanlik sohasi t vaqt bo'yicha qisqarishini, yani $t'<t''$ bo'lganda $Y(t')\supset Y(t'')$ mansublik o'rinli ekanligini isbotlang.

8-ma'ruza

- *Boshqariluvchanlik masalasi.*
- *Boshqariluvchanlik haqidagi teorema.*
- *Integralning ichki nuqtasi haqidagi lemma.*
- *Chiziqli sistemalarning lokal boshqariluvchanligi.*
- *Lokal boshqariluvchanlikning yetarli sharti.*

8.1 Boshqariluvchanlikning umumiy masalasi

$$\dot{x}=Ax+u, \tag{8.1}$$

tenglama bilan yozilgan boshqariladigan obyektni qaraymiz, bu yerda odatdagidek $x\in R^n$ - obyektning holat vektori, $u\in R^n$ - boshqaruv vektori, $A-$ $n\times n$ o'lchamlik kvadrat matritsa. Ixtiyoriy o'lchovli $u(t)\in U$, $U\in\Omega(R^n)$ funksiyalar joiz boshqaruvlar bo'ladi. $M_0, M_1\in\Omega(R^n)$ boshlang'ich va so'nggi to'plamlar berilgan bo'lsin. Boshqariluvchanlik masalasi quyidagi *da'voni o'rinli ekanligini o'rnatishdan* iborat: qandaydir $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida aniqlangan hech bo'lmaganda bitta $u(t)$ joiz boshqaruv mavjud, unga mos (8.1) tenglamaning $x(t)$ yechimi

$$x(t_0) \in M_0 \quad , x(t_1) \in M_1 \tag{8.2}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin. Boshqariluvchanlik masalasida M_0 to‘plamdan M_1 to‘plamga o‘tishda funksionalni baholamasligimizni esga olamiz.

Agar hech bo‘lmaganda bitta $u = u(t)$ boshqaruv funksiyasi mavjud bo‘lib, unga mos (8.1) tenglamaning $x(t)$ yechimi (8.2) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsa, ya’ni $[t_0, t_1]$ vaqt oralig’ida boshlang‘ich M_0 to‘plamdan so‘nggi M_1 to‘plamga o‘tishni amalga oshirsa, obyekt M_0 to‘plamdan M_1 to‘plamga $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig’ida boshqariladigan deyiladi.

Biz $\varphi : R^n \to R^1$ funksiyani quyidagi

$$\varphi(\psi) = c\left(M_0, e^{(t_1-t_0)A^*}\psi\right) + c(M_1, -\psi) + \int_0^{t_1-t_0} c\left(U, e^{sA^*}\psi\right)ds \tag{8.3}$$

munosabat bilan aniqlaymiz.

Bosqariluvchanlik haqidagi teorema. M_0 va M_1 qavariq to‘plamlar bo‘lsin. U holda obyekt M_0 to‘plamdan M_1 to‘plamga $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig’ida boshqariluvchan bo‘lishi uchun, ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun boshqariluvchanlik funksiyasi nomanfiy , ya’ni

$$\varphi(\psi) \geq 0 \tag{8.4}$$

bo‘lishi zarur va yetarli. O‘z navbatida bu shart

$$\varphi_0 = \min_{\psi \in S} \varphi(\psi) \geq 0 \tag{8.5}$$

shartga teng kuchli.

Isboti. Obyekt M_0 to‘plamdan M_1 to‘plamga $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig’ida boshqariluvchan bo‘lishi uchun, $X(t)$ erishish to‘plami uchun

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \varnothing \tag{8.6}$$

munosabatning bajarilishi zarur va yetarli. M_1 qavariq to‘plam va erishish to‘plamining 3-xossasiga ko‘ra (7-ma’ruzaga qarang) $X(t_1)$ to‘plam ham qavariq to‘plam bo‘lgani uchun, u holda tayanch funksiyalarning 12-xossasining natijasiga (12-ma’ruzaga qarang) binoan, (8.6) munosabatning bajarilishi ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$c(X(t_1),\psi)+c(M_1,-\psi)\geq 0$$

munosabatning bajarilishiga teng kuchli. Bu ifodaga $X(\tau)$ erishish to'plamining $\tau=t_1-t_0$ bo'lgandagi (7-ma'ruzaning (7.6) formulasiga qarang) tayanch funksiyasini qo'ysak, bu ifodaga teng kuchli bo'lgan, har qanday $\psi\in R^n$ vektor uchun bajariladigan

$$c\left(M_0, e^{(t_1-t_0)A^*}\psi\right)+\int_0^{t_1-t_0} c\left(U, e^{sA^*}\psi\right)ds + c(M_1,-\psi)\geq 0$$

munosabatga kelamiz. Ammo tayanch funksiyalarning musbat bir jinsliligidan (7- ma'ruzaning 1-xossasi) ko'rsatilgan munosabatni faqat $\psi\in R^n$ vektor uchun bajarilishini tekshirish kifoya, bu esa (8.4) tengsizlikka teng kuchli. (8.3) formuladagi barcha tayanch funksiyalar, tayanch funksiyalar 13-xossasining natijasiga ko'ra (3-ma'ruzani qarang) uzluksiz, $S\subset R^n$ to'plam esa kompakt. Shuning uchun (8.4) shart (8.5) shartga teng kuchli. Teorema isbotlandi.

Boshqariluvchanlik haqidagi teorema isbotida foydalanilgan (8.6) munosabat o'rniga

$$M_0\cap Y(t_0)\neq\varnothing,$$

munosabatdan ham foydalanish mumkin, natijada (8.4) tengsizlikka teng kuchli tengsizlik hosil bo'ladi , bu yerda $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plami.

Agar $M_0, M_1\in\Omega(R^n)$ to'plamlar qavariq bo'lmasa, u holda biz boshqariluvchanlikning to'la belgisini hosil qilmaymiz. Bunda (8.1) obyektni $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida boshqariluvchanligining faqat bir tomonga bajarilishi kelib chiqadi va $\varphi(\psi)$ boshqariluvchanlik funksiyasi (8.4) tengsizlikni qanoatlantiradi.

$\varphi(\psi)$ boshqariluvchanlik funksiyasi faqat $\tau=t_1-t_0$ vaqt uzunligiga bog'liq bo'lishini qayd etamiz. Shuning uchun ixtiyoriy $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ining uzunligi τ bir xil qiymat qabul qiladi.

Bosqariluvchanlik haqidagi teorema obyekt boshqariladigan $I=[t_0,t_1]$ kesmani topish yoki baholash imkoniyatini beradi. Bayon etilganlarni misollarda namoyon qilamiz.

1-misol. (8.1) tenglama

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = -x^2, \\ \dot{x}^2 = x^1 + v, \ |v| \le 1 \end{cases} \tag{8.7}$$

ko'rinishga ega bo'lib, M_0 va M_1 to'plamlar

$$M_0 = \{x \in R^2 : x^1 = -5, \ |x^2| \le 1\}, \ M_1 = \{0\}$$

shartlar bilan berilgan bo'lsin.

Bu holda M_0, M_1 va U to'plamlarning tayanch funksiyalari

$$c(M_0, \psi) = -5\psi^1 + |\psi^2|, \ c(M_1, \psi) = 0, \ c(U, \psi) = |\psi^2|$$

ko'rinishga ega.

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning eksponensiali avval hisoblangan (6-ma'ruza- ning 2-misoliga qarang) bo'lib, u

$$e^{tA^*} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega. Ixtiyoriy $\psi \in S \subset R^2$ vektorni $\psi = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ko'rinishda tanlaymiz. Natijada (8.3) formuladan (8.4) tengsizlik bajarilishi uchun ixtiyoriy $0 \le \alpha \le 2\pi$ parametr uchun $\tau = t_1 - t_0$ bo'lganda

$$\varphi(\psi) = \varphi(\alpha) = -5\cos(\alpha - \tau) + |\sin(\alpha - \tau)| + \int_0^{\tau} |\sin(\alpha - s)| ds \ge 0$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli. $\tau = t_1 - t_0 \ge 3\pi$ bo'lsa, u holda bu tengsizlik ixtiyoriy $0 \le \alpha \le 2\pi$ uchun bajarilishi tushunarli.

Shunday qilib agar $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ining uzunligi τ ga teng bo'lsa u holda (8.7) tenglama bilan yozilgan obyekt bu kesmada boshqariluvchan bo'ladi.

2-misol. Boshlang'ich holati $M_0 = S_\pi((3\pi,0))$ va so'nggi holati $M_1 = S_\pi(0)$ to'plamlardan iborat bo'lgan

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \; u \in S_1(0) \end{cases} \tag{8.8}$$

Boshqariladigan sistemani qaraymiz. (35-chizma). Bu sistemani M_0 to'plamdan M_1 to'plamga boshqarilishining $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ining uzunligini aniqlash talab qilinadi. $\tau = t_1 - t_0$ bo'lsin.

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning eksponensiali

$$e^{tA^*} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega. M_0, M_1 va U to'plamlarning tayanch funksiyalari

$$c(M_0,\psi) = 3\pi\psi^1 + \pi\|\psi\|\,,\; c(M_1,\psi) = \pi\|\psi\|,\; c(U,\psi) = \|\psi\|$$

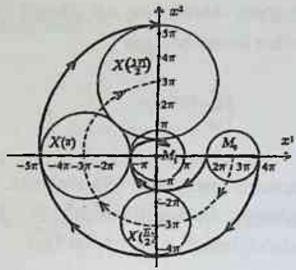
ifodalar bilan beriladi. Bu ifodalarni (8.3) formulaga qo'yib, quyidagi ko'rinishdagi

$$\varphi(\psi) = 3\pi\left(\psi^1\cos\tau - \psi^2\sin\tau\right) + 2\pi\|\psi\| + \tau\|\psi\|$$

boshqariluvchanlik funksiyasini topamiz. Shuning uchun

$$\varphi_0 = \min_{\psi \in S} \varphi(\psi) = \tau - \pi$$

munosabat o'rinli. Demak, (8.8) sistema $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ining uzunligi τ π sonidan katta yoki teng bo'lsa M_0 to'plamdan M_1 to'plamga boshqariluvchan bo'ladi va uzunligi π sonidan katta bo'lgan har qanday $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida boshqariluvchan bo'lmaydi.



35-chizma

Bu hisoblashlarni geometrik nuqtayi nazardan talqin qilamiz. Buning uchun $X(t)$ erishish to'plaminini quramiz. Buning uchun topilgan natijalarni 7-ma'ruzaning (7.6) formulasiga qo'yib, erishish sohasining $\tau = t_1 - t_0$ vaqt uzunligiga bo'g'liq bo'lgan tayanch funksiyasi uchun quyidagi

$$c(X(t),\psi) = 3\pi\cos\tau\cdot\psi^1 - 3\pi\sin\tau\cdot\psi^2 + (\pi+\tau)\|\psi\|$$

ifodani hosil qilamiz. Shunday qilib, $X(t)$ erishish to'plami markazi $a(\tau) = (3\pi\cos\tau, -3\pi\sin\tau)$ nuqtada, radiusi $r(\tau) = \pi + \tau$ ga teng bo'lgan doiradan iborat. Bu to'plam 35-chizmada tasvirlangan. $X(t)$ va M_1 to'p-lamlarning $\tau < \pi$ bo'lsa kesishmasligi, $\tau = \pi$ bo'lsa birinchi bor urinishi, $\tau \geq \pi$ bo'lsa bu to'plamlar doimo kesishishi chizmadan ko'rinib turibdi.

8.2. Integralning ichki nuqtasi haqidagi lemma

Demak boshqaruvchanlikning umumiy masalasi uchun zarur va yetarli shartlar olindi. Amaliyotda boshqaruvchanlikning ko'p uchraydigan xususiy hollardan biri lokal boshqaruvchanlikni qaraymiz. Bu mavzuni o'rganishda quyidagi lemma talab qilinadi.

Integralning ichki nuqtasi haqidagi lemma. $n\times n$ o'lchamli A kvadrat matritsa, R^n fazoning ixtiyoriy v vektori va $\tau > 0$ soni berilgan bo'lsin. U holda

$$0 \in \operatorname{int}\int_0^\tau e^{sA}\{-v, v\}ds \qquad (8.9)$$

mansublik bajarilishi uchun $v, Av, ..., A^{n-1}v$ vektorlarning chiziqli erkli bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. $F = \int_0^{\tau} e^{sA}\{-v, v\} ds$ belgilash kiritamiz. 1-teoremaga asosan (5-ma'ruzani qarang) F to'plam R^n fazoning bo'sh bo'lmagan qavariq kompakt to'plamidir. Shuning uchun tayanch funksiyalarning (3-ma'ruzaga qarang) 14-xossasining natijasiga ko'ra $x = 0$ nuqta F to'plamning ichki nuqtasi bo'lishi uchun ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$c(F, \psi) > 0$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

F to'plamning tayanch funksiyasini topamiz. 2-teoremaga (5-ma'ruzaga qarang) va tayanch funksiyalarning 4-xossasiga ko'ra

$$c(F, \psi) = c\left(\int_0^{\tau} e^{sA}\{-v, v\} ds, \psi\right) = \int_0^{\tau} c(e^{sA}\{-v, v\}, \psi) ds = \int_0^{\tau} c(\{-v, v\}, e^{sA^*}\psi) ds$$

munosabatga ega bo'lamiz. $\{-v, v\}$ to'plamning tayanch funksiyasi ma'lum bo'lib u

$$c(\{-v, v\}, \psi) = |< v, \psi >|$$

ko'rinishga ega. Shuning uchun

$$c(F, \psi) = \int_0^{\tau} |< v, e^{sA^*}\psi >| ds = \int_0^{\tau} |< e^{sA}v, \psi >| ds$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, $0 \in \operatorname{int} F$ mansublikning bajarilishi ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$\int_0^{\tau} |< e^{sA}v, \psi >| ds > 0$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli. Oxirgi tengsizlikda integral belgisi ostidagi funksiya uzluksiz va nomanfiy bo'lganligi uchun, bu tengsizlik ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun $[0, \tau]$ kesmada

$$\langle e^{sA}v, \psi \rangle \neq 0 \qquad (8.10)$$

shartni bajarishiga teng kuchli. Buning uchun $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ vektorlarning chiziqli erkli bo'lishi zarur va yetarli ekanligini ko'rsatamiz.

Zaruriyligini isbotlaymiz. Teskaridan faraz qilamiz, ya'ni (8.10) shart bajarilsin, ammo $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ vektorlar chiziqli erkli bo'lmasin. U holda shunday $\psi \in S$ vektor mavjudki, bunda

$$\langle v, \psi \rangle = \langle Av, \psi \rangle = \cdots = \left\langle A^{n-1}v, \psi \right\rangle = 0 \qquad (8.11)$$

Algebra kursidan (xamilton-Kelli teoremasi) ma'lumki, $n \times n$ o'lchamli A kvadrat matritsa va $p \geq n$ bo'lganda barcha A^p matritsalar $E, A.A^2, \ldots, A^{n-1}$ matritsalarning chiziqli kombinatsiyalaridan iborat. e^{tA} eksponensial matritsaning aniqlanishiga ko'ra (6-ma'ruzaga qarang)

$$e^{tA} = E + tA + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \frac{t^n}{n!}A^{n-1} + \cdots = c_1(t)E + c_2(t)A + \cdots + c_n(t)A^{n-1}$$

tenglikka ega bo'lamiz. (8.11) munosabatga ko'ra bu tenglikdan (8.10) shart bilan qarama-qarshi bo'lgan

$$\left\langle e^{tA}v, \psi \right\rangle = c_1(t)\langle v, \psi \rangle + c_2(t)\langle Av, \psi \rangle + \ldots + c_n(t)\left\langle A^{n-1}v, \psi \right\rangle \equiv 0,$$

tenglikka kelamiz.

Yetarliligini ham teskaridan faraz qilib isbotlaymiz. Aytaylik $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ vektorlar chiziqli erkli bo'lsin, ammo shunday $\psi \in S$ vektor mavjudki, $[0, \tau]$ kesmada

$$\left\langle e^{tA}v, \psi \right\rangle \equiv 0$$

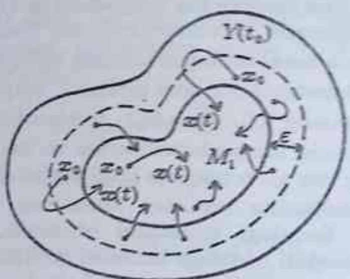
ayniyat o'rinli bo'lsin. $\tau > 0$ musbat bo'lgani uchun bu ayniyatni $n-1$ marta t bo'yicha hadlab differensiallab va barcha hosilani $t = 0$ da hisoblansa

$$\langle v, \psi \rangle = \langle Av, \psi \rangle = \ldots = \left\langle A^{n-1}v, \psi \right\rangle = 0$$

tenglik hosil bo'ladi. $p \neq 0$ vektor bo'lgani uchun bu tenglikdan $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ vektorlar chiziqli bog'liqligi kelib chiqadi. Hosil bo'lgan ziddiyat lemmani isbotlaydi.

8.3. Lokal boshqaruvchanlik

Aytaylik so'nggi $M_1 \in \Omega(E^n)$ to'plam berilgan bo'lib, boshlang'ich to'plam $M_0 = \{x_0\}$ ko'rinishda bo'lsin, bu yerda x_0 nuqta M_1 to'plamning ixtiyoriy atrofidan olingan qandaydir nuqta. (8.1) tenglama bilan yozilgan obyekt uchun barcha joiz $u(t)$ boshqaruvlar bo'yicha M_1 to'plamning qandaydir $S_\varepsilon(M_1)$ atrofidan M_1 to'plamga obyektni olib o'tish mumkinligini tekshiramiz. Agar har qanday $x_0 \in M_1 + S_\varepsilon(0)$ nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ musbat soni topilsaki $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida obyekt boshlang'ich $M_0 = \{x_0\}$ to'plamda so'nggi M_1 to'plamga boshqariladigan bo'lsa u holda (8.1) tenglama bilan yozilgan boshqariladigan obyektni $[t_0, t_1]$ *vaqt oralig'ida M_1 to'plamga lokal boshqariluvchan* deyiladi. Bu esa ixtiyoriy $x_0 \in M_1 + S_\varepsilon(0)$ nuqta uchun shunday joiz $u(t)$ boshqaruv mavjudki, unga mos (8.1) tenglamaning $x(t)$ yechimi $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida x_0 nuqtadan M_1 to'plamning qandaydir nuqtasiga o'tishi mumkinligini bildiradi (36-chizma).



36-chizma

Eslatma. M_1 to'plamga lokal boshqaruvchanlikning berilgan ta'rifi

$$M_1 \subset \operatorname{int} Y(t_0) \tag{8.12}$$

munosabatning bajarilishiga teng kuchli, bu yerda $Y(t_0)$ boshqariluvchanlik. Haqiqatdan ham, agar obyekt M_1 to'plamga lokal boshqariluvchan bo'lsa, u holda shunday $\varepsilon > 0$ musbat soni mavjudki ixtiyoriy $x_0 \in M_1 + Y(t_0)$ nuqta $Y(t_0)$ boshqariluvchanlik to'plamiga tegishli, demak

$$M_1 + S_\varepsilon(0) \subset Y(t_0) \tag{8.13}$$

mansublik o'rinli, bundan esa (8.12) mansublikning o'rinli ekanligi ayon. Ikkinchi tomondan agar (8.12) mansublik bajarilsa, u holda ixtiyori $m \in M_1$ nuqta uchun shunday $\varepsilon(m) > 0$ soni mavjudki, bunda $\tilde{S}_{\varepsilon(m)}(m) \subset Y(t_0)$ munosabat bajariladi. Bu yerda -markazi m nuqtada, radiusi $\varepsilon(m)$ ga teng bo'lgan ochiq shar. $m \in M_1$ bo'lganda barcha $\tilde{S}_{\varepsilon(m)}(m)$ sharlar sistemasi M_1 kompakt to'plamning ochiq qoplamasini tashkil etadi. Matematik analiz kursining teoremalari bo'yicha bu qoplamadan chekli sondagi $\tilde{S}_{\varepsilon(m_1)}(m_1)$, $\tilde{S}_{\varepsilon(m_2)}(m_2), \ldots, \tilde{S}_{\varepsilon(m_r)}(m_r)$ qism qoplamalar ajratish mumkin. $\varepsilon = \min\limits_{1 \le i \le r} \varepsilon(m_i)$, sonini tanlab (8.1) obyektning M_1 to'plamiga lokal boshqarilivchanligiga teng kuchli bo'lgan (8.13) mansublikni hosil qilamiz.

(8.1) tenglamada x o'zgaruvchini $x - x_1$ o'zgaruvchiga almashtirish mumkin. Bu holda ham obyektning tenglamasi (8.1) ko'rinishda qoladi, faqat U to'plam o'zgarmas Ax_1 vektorga siljiydi. Shuning uchun faqat bir holni $x_1 = 0$ bo'lganda lokal boshqaruvchanlik holini qarash yetarli.

Demak, agar shunday $\varepsilon > 0$ soni topilsaki, ixtiyoriy $x_0 \in S_\varepsilon(0)$ nuqta uchun obyekt boshlang'ich $M_0 = \{x_0\}$ to'plamdan so'nggi $M_1 = \{0\}$ to'plamga vaqt oralig'ida boshqariluvchan bo'lsa, bizning obyektimiz $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida $x = 0$ nuqtada lokal boshqariluvchan bo'ladi.

Boshqariluvchanlikning umumiy masalasini yechish uchun biz boshqariluvchanlik haqidagi teoremani isbotladik. Bu teoremani va integralning ichki nuqtasi haqidagi lemmani qo'llab, $x = 0$ nuqtada lokal boshqariluvchanlikning yetarli shartini hosil qilamiz.

Lokal boshqariluvchanlik haqidagi teorema. Quyidagi ikkita:

1) $-v$ va v vektorlar U to'plamga tegishli;

2) $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ vektorlar chiziqli erkli;

Shartlari bajariladigan $v \in R^n$ vektor mavjud bo'lsin. U holda ixtiyoriy $I = [t_0, t_1], \tau = t_1 - t_0 > 0$ vaqt oralig'ida obyekt $x = 0$ nuqtada lokal boshqariluvchan bo'ladi.

Isboti. Lokal boshqariluvchanlik haqidagi teoremaga binoan, agar shunday $\varepsilon > 0$ soni topilsaki, ixtiyoriy $x_0 \in S_\varepsilon(0)$ nuqta va ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$c(x_0, e^{A^*T}\psi) + c(\Theta, -\psi) + \int_0^T c(U, e^{A^*t}\psi)dt \ge 0$$

shart bajarilsa, obyekt $t \in [t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida $x = 0$ nuqtada lokal boshqariluvchan bo'ladi. $\{x_0\}$ va $\{0\}$ to'plamlarning tayanch funksiyalarini hisoblab bu tengsizlikni

$$\int_0^T c(U, e^{A^*t}\psi)dt \ge -(x_0, e^{A^*T}\psi) \qquad (8.14)$$

ko'rinishga keltiramiz. Ixtiyoriy $x_0 \in S_\varepsilon(0)$ nuqta va ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun (8.14) tengsizlik bajariladigan $\varepsilon > 0$ soni topilishini ko'rsatamiz. Buning uchun $\varepsilon > 0$ soniga bog'liq bo'lmagan (8.14) tengsizlikning chap tomoni ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun qandaydir $\alpha > 0$ sonidan katta yoki teng ekanligini, (8.14) tengsizlikning o'ng tomoni esa $\varepsilon > 0$ sonini tanlash bilan yetarlicha kichik qilish mumkinligini ko'rsatamiz.

Teoremaning 1) sharti bo'yicha $[-v, v] \in U$ mansublik bajariladi. Tayanch funksiyalarning 6-xossasiga ko'ra (3-ma'ruzani qarang), ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$c([-v,v],\psi) \le c(U(t),\psi)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Shuning uchun

$$\int_0^T c(U, e^{A^*t}\psi)dt \ge \int_0^T c([-v,v], e^{A^*t}\psi)dt = c\left(\int_0^T e^{At}[-v,v]dt, \psi\right) \qquad (8.15)$$

munosabat o'rinli.

Teoremaning 2) sharti bo'yicha $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ vektorlar chiziqli erkli. Integralning ichki nuqtasi haqidagi lemmaga ko'ra bu

$$0 \in \operatorname{int} \int_0^{\tau} e^{sA}\{-v, v\} ds$$

ekanligini bildiradi. Shuning uchun tayanch funksiyalarning 14-xossasiga ko‘ra (3-ma’ruzani qarang) ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$c\left(\int_0^{\tau} e^{sA}\{-v, v\} ds, \psi\right) > 0$$

qat’iy tengsizlikni olamiz. Ammo tayanch funksiya ψ vektor bo‘yicha uzluksiz, S birlik sfera R^n fazoda kompakt to‘plam bo‘lgani uchun barcha $\psi \in S$ vektorlar uchun shunday $\alpha > 0$ soni mavjudki, bunda

$$c\left(\int_{t_0}^{t} e^{-sA}\{-v, v\} ds, \psi\right) \geq \alpha > 0$$

(8.15) munosabatga ko‘ra ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$\int_0^{\tau} c(U, e^{sA^*}\psi) ds \geq \alpha > 0 \qquad (8.16)$$

bahoga ega bo‘lamiz.

Endi (8.14) tengsizlikning o‘ng tomonini qaraymiz $x_0 \in S_\varepsilon(0)$ bo‘lgani sababli ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$\langle x_0, \psi \rangle \leq c(S_\varepsilon(0), \psi) = \varepsilon \|\psi\|$$

munosabat o‘rinli. Shunday qilib

$$-\left\langle x_0, e^{\tau A^*}\psi \right\rangle = \left\langle x_0, -e^{\tau A^*}\psi \right\rangle \leq \varepsilon \left\| -e^{\tau A^*}\psi \right\| \leq \varepsilon \left\| e^{\tau A^*} \right\| \cdot \|\psi\| \qquad (8.17)$$

bahoni hosil qilamiz. Shuning uchun, agar $\varepsilon \leq \frac{\alpha}{\left\| e^{\tau A^*} \right\|}$ soni tanlansa, u holda

ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$-\left\langle x_0, e^{\varepsilon t^*}\psi\right\rangle \le \alpha$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Hosil qilingan tengsizlikni (8.16) shart bilan taqqoslab, ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun (8.14) munosabat bajariladigan $\varepsilon > 0$ soni mavjud degan xulosaga kelamiz. Bu esa obyekt $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida $x = 0$ nuqtada lokal boshqariluvchan ekanligini bildiradi. Teorema isbotlandi.

Lokal boshqariluvchanlik haqidagi teorema ko'plab obyektlarni lokal boshqariluvchanligining deyarli sodda isbotini keltirishga imkoniyat beradi.

3-misol. Holati

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \left|u^2\right| \le 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyektni ixtiyoriy$[t_0, t_1], t_0 \ne t_1$ vaqt oralig'ida $x = 0$ nuqtada lokal boshqariluvchan ekanligini isbotlaymiz. Bunday obyekt uchun lokal boshqariluvchanlik haqidagi teorema shartlari bajarilishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, agar $v = (0,1)$ bo'lsa, u holda $-v, v$ vektorlar $U = \left\{u \in R^2 : u^1 = 0, \left|u^2\right| \le 1\right\}$ to'plamga tegishli, ya'ni teoremaning birinchi sharti bajariladi. v, Av vektorlar chiziqli erkli ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham,

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektorlar chiziqli erkli. Demak qaralayotgan obyekt $x = 0$ nuqtada lokal boshqariluvchan ekan.

Lokal boshqariluvchanlik haqidagi teorema faqat lokal boshqariluvchanlikning yetarli shartidir, ya'ni obyekt $x = 0$ nuqtada lokal boshqariluvchan bo'lsada teoremaning ko'rsatilgan shartlari bajarilmasligi mumkin. Bu holda lokal boshqariluvchanlikni isbotlash uchun boshqariluvchanlikning umumiy teoremasidan foydalanish kerak. Bayon qilinganlarni misollarda ko'rsatamiz.

4-misol. Holati

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, 0 \le u^2 \le 1 \end{cases} \tag{8.18}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyektni qaraymiz. Bu obyektni $[0,2\pi]$ vaqt oralig'ida $x=0$ nuqtada lokal boshqariluvchan ekanligini ko'rsatamiz. Berilgan obyekt uchun lokal boshqariluvchanlik haqidagi teorema shartlari bajarilmaydi. Haqiqatdan ham, U to'plam

$$U=\left\{u\in R^2 : u^1=0, 0\le u^2\le 1\right\}$$

ko'rinishga ega. Bu to'plam uchun yagona $v=0$ vektor teoremaning birinchi shartini qanoatlantiradi, ammo teoremaning ikkinchi shartini qanoatlantirmaydi.

Lokal boshqariluvchanlikni boshqariluvchanlikning umumiy teoremasidan foydalanish bilan isbotlaymiz. Shunday $\varepsilon>0$ soni mavjud ekanligini ko'rsatamizki, ixtiyoriy $x_0\in S_\varepsilon(0)$ nuqta uchun bu obyektni $[0,2\pi]$ vaqt oralig'ida boshlang'ich $M_0=\{x_0\}$ to'plamdan so'nggi $M_1=\{0\}$ to'plamga boshqarilishi mumkin. Buning uchun ixtiyoriy $\psi\in S$ vektor uchun (8.4) tengsizlikni bajarilishini tekshirish kifoya. Bu holda $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning eksponensiali e^{tA^*}

$$e^{tA^*}=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega. M_0, M_1 va U to'plamlarning tayanch funksiyalari

$$c(M_0,\psi)=\langle x_0,\psi\rangle,\quad c(M_1,\psi)=0,\quad c(U,\psi)=\frac{1}{2}\psi^2+\frac{1}{2}|\psi^2|.$$

ifodalar bilan beriladi. Ixtiyoriy $\psi\in S\subset R^2$ vektorni $\psi=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ ko'rinishda yozib (8.3) formulaga qo'yilsa, boshqaruvchanlik funksiyasi uchun quyidagi

$$\varphi(\psi)=\varphi(\alpha)=\left\langle x_0,\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right\rangle+\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(\alpha+s)+\frac{1}{2}|\sin(\alpha+s)|\right]ds$$

ifodani hosil qilamiz. Barcha $0\le\alpha\le 2\pi$ lar uchun bu ifodadagi integralning qiymati 2 ga teng, demak

$$\varphi_0 = \min_{\psi \in S} \varphi(\psi) = -\|x_0\| + 2.$$

Shunga ko‘ra $\varepsilon = 2$ deb tanlansa, va bunda ixtiyoriy $x_0 \in S_2(0)$ nuqtadan $[0,2\pi]$ vaqt oralig’ida $x=0$ nuqtaga $u(t)$ joiz boshqaruvga mos (8.18) tenglamaning yechimi bo‘yicha kelish mumkin. Shunday qilib, obyekt $[0,2\pi]$ vaqt oralig’ida $x=0$ nuqtaga lokal boshqariluvchan bo‘ladi. 4-misolda lokal boshqariluvchanlik ixtiyoriy $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig’ida bajarilmasligini qayd etamiz. Agar bu kesmaning uzunligi qisqartirilsa, u holda vaqtning qandaydir momentida lokal boshqariluvchanlik yo’qoladi.

5-misol. $0 \in \mathrm{int}U$ bo‘lsin. Bunday obyekt ixtiyoriy $n \times n$ o‘lchamli A matritsa uchun ixtiyoriy nuqtadan farqli vaqt oralig’ida doimo $x=0$ nuqtada lokal boshqariluvchan bo‘ladi.

Lokal boshqariluvchanlik haqidagi teoremani bu yerda doimo qo‘llash mumkin emas, masalan $A=0$ matritsa uchun teorema shartlari bajarilmaydi. Boshqariluvchanlikning umumiy teoremasidan foydalanamiz.

Qilingan faraz bo‘yicha shunday $\delta > 0$ soni mavjudki, $S_\delta(0) \subset U$ bo‘lib, quyidagi

$$c(U,\psi) \geq c(S_\delta(0),\psi) = \delta\|\psi\|$$

tengsizlik o‘rinli. Bu tengsizlikning va

$$c(M_0,\psi) = \langle x_0,\psi\rangle,\ c(M_1,\psi) = 0$$

ifodalarni (8.3) formulaga qo‘yib

$$\varphi(\psi) = \left\langle x_0, e^{\tau A^*}\psi\right\rangle + \int_0^\tau c(U, e^{sA^*}\psi)ds$$

boshqariluvchanlik funksiyasi uchun (8.17) formulani hisobga olib quyidagi:

$$\varphi(\psi) \geq -\varepsilon\left\|e^{\tau A^*}\right\| \cdot \|\psi\| + \delta\int_0^\tau \left\|e^{sA^*}\psi\right\|ds$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Barcha $\psi \in S$ lar uchun uzluksizlikka ko‘ra

$$\int_0^T \left\| e^{xA^*}\psi \right\| ds \geq \alpha > 0$$

tengsizlik o'rinli. Shunday qilib, agar

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\delta\alpha}{\left\| e^{xA^*} \right\|}$$

soni tanlansa u holda barcha $x_0 \in S_\varepsilon(0)$ nuqtalar va ixtiyoriy $\psi \in S$ vektorlar uchun $\varphi(\psi) \geq 0$ tengsizlikni hosil qilamiz. Demak obyekt lokal boshqariluvchan ekan.

Agar lokal boshqariluvchanlikni $x \neq 0$ nuqtada tekshirish zarur bo'lsa, u holda, (8.1) tenglamada x o'zgaruvchini $x - x_1$ o'zgaruvchiga almashtirib yangi boshqariladigan

$$\dot{x} = Ax + u, u \in U' = U + Ax_1 \tag{8.19}$$

obyektni hosil qilamiz. Bu sistemaning $x = 0$ nuqtada boshqariluvchanligi (8.1) tenglamaning $x = x_1$ nuqtada boshqariluvchanligiga teng kuchli.

6-misol Boshqariladigan

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2, \ |u| \leq 1 \end{cases} \tag{8.20}$$

sistemani qaraymiz. Noldan farqli har qanday vaqt orlig'ida bu sistema R^2 tekislik $x^2 = 0$ to'g'ri chiziqning barcha nuqtalarida lokal boshqariluvchan ekanligini ko'rsatamiz.

Bu to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $x_0 = (x^1, 0)$ nuqta olib, U' to'plamni hisoblaymiz.

$$Ax_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bo'lgani uchun U' va U to'plamlar ustma ust tushadi. Shuning uchun, agar (8.20) sistemani 0 nuqtada boshqariluvchanligini isbotlasak, u holda ixtiyoriy $x_0 = (x^1, 0)$ nuqtada lokal boshqariluvchanlik o'rinli.

$v=(0,1)$ vektorni tanlaymiz. Bu vektor uchun lokal boshqariluvchanlik haqidagi teoremaning har ikkala shartlari bajariladi. Haqiqatdan ham, har ikkala $\pm v$ vektorlar $U=\{u\in R^2 : u^1=0, |u^2|\le 1\}$. to'plamga tegishli,

$$v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ va } Av=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

vektorlar esa chiziqli erkli. Shuning uchun (8.20) obyekt ixtiyoriy $(x^1,0)\in R^2$ nuqtada lokal boshqariluvchan.

Eslatma: Ixtiyoriy $M_1\in\Omega(R^n)$ to'plamni qaraymiz. Agar (8.1) tenglama bilan yozilgan obyekt har bir $x_1\in M_1$ nuqta uchun $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida $x=x_1$ nuqtada lokal boshqariluvchan bo'lsa, u holda bu obyekt xuddi shu $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida butun M_1 to'plamda lokal boshqariluvchan bo'ladi. Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $x_1\in M_1$ nuqtada lokal boshqariluvchanlikka ko'ra $x_1\in \operatorname{int} Y(t_0)$ mansublik bajariladi, bu esa M_1 to'plamning kompaktligiga ko'ra bu to'plamda lokal boshqariluvchan bo'ladi (bo'limning boshidagi eslatmaga qarang).

7-misol. Boshqariladigan

$$\dot{x}=u, u\in S_1(0)$$

sistema ixtiyoriy $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida ixtiyoriy chekli $M_1\in\Omega(R^n)$ to'plamda lokal boshqariluvchan bo'lishini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy $x_1\in M_1$ nuqtani tanlaymiz. Bu misolda $A=0$ bo'lgani uchun $U'=U$ ((8.19) formulaga qarang) va $x=0$ nuqtada lokal boshqariluvchanlikdan ixtiyoriy $x_1\in M_1$ nuqtada lokal boshqariluvchanlik kelib chiqadi. Yuqoridagi eslatmaga ko'ra endi obyekt M_1 to'plamda lokal boshqariluvchan bo'ladi.

8.4. Masalalar

1. Ushbu

$$\begin{cases}\dot{x}^1=x^2+u^1,\\ \dot{x}^2=-x^1+u^2, \quad u\in S_1(0)\end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt boshlang'ich $M_0=\{0\}$ to'plamdan so'nggi $M_1=\{x\in R^2 : x^1=0, 10\le x^2\le 12\}$ to'plamga boshqariluvchan bo'ladigan $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ini toping.

2. $[0,3]$ vaqt oralig‘ida

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^2 + u^2, \ |u^1| \le 1, |u^2| \le 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt boshlang‘ich $M_0 = \{(-3,4)\}$ to‘plamdan so‘nggi $M_1 = \{0\}$ to‘plamga boshqariluvchan bo‘ladimi?

3. $[0,4\pi]$ vaqt oralig‘ida

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \quad u \in S_1(0) \subset R^3 \\ \dot{x}^3 = u^3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt boshlang‘ich $M_0 = S_1(0) \subset R^3$ to‘plamdan so‘nggi $M_1 = \{(4,2,2)\}$ to‘plamga boshqariluvchan bo‘ladimi?

4. $[-1,1]$ vaqt oralig‘ida

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = -x^1 - \pi x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = \pi x^1 - x^2 + u^2, \ u \in S_1(0) \subset R^2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt boshlang‘ich

$$M_0 = \{x \in R^2 : |x^1 - 8| \le 1, |x^2| \le 1\}$$

to‘plamdan so‘nggi

$$M_1 = \{x \in R^2 : |x^1| + |x^2 - 1| \le 1\}$$

to‘plamga boshqariluvchan bo‘ladimi?

5. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2, \ |u^2| \le 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt ixtiyoriy noldan farqli vaqt oralig‘ida so‘nggi $M_1 = S_{\frac{1}{2}}(0)$ to‘plamga lokal boshqariluvchan ekanligini isbotlang.

6. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \; u \in S_1((1,0)) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt $x=0$ nuqtada lokal boshqariluvchan ekanligini isbotlang.

7. Agar $0 \notin convU$ bo'lsa, u holda (8.1) tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt yetarlicha kichik $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida lokal boshqariluvchan bo'lmasligini isbotlang.

8*. U qavariq to'plam va $x=0$ nuqta U to'plamning chegarasida yotsin, ya'ni $0 \in \partial U$.

$$K(U) = \{x \in R^n : x = \lambda v, u \in U, \lambda \geq 0\}$$

to'plamni qaraymiz. Agar $K(U)$ to'plam R^n fazoning hech bir to'g'ri chizig'ini o'zida saqlamasa, u holda (8.1) tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt yetarlicha kichik $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida lokal boshqariluvchan bo'lmasligini isbotlang.

9. $0 \in convU$ bo'lsin va (8.1) tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt $[0, \tau]$ vaqt oralig'ida boshlang'ich $M_0 = \{0\}$ to'plamdan so'nggi $M_1 \in \Omega(R^n)$ to'plamga boshqariluvchan. Bu obyekt ixtiyoriy $[0, \tau']$ vaqt oralig'ida boshqariluvchan bo'lishini isbotlang, bu yerda $\tau' > \tau$.

10. (8.1) tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt so'nggi M_1 to'plamga lokal boshqariluvchan bo'lsin. $t' > t$ bo'lganda $Y(t)$ boshqarilivchanlik to'plami uchun

$$Y(t) \subset \operatorname{int} Y(t')$$

mansublik o'rinli bo'lishini isbotlang.

11* (8.1) tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyekt $x=0$ nuqtada lokal boshqariluvchan bo'lsin. Yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonlari uchun bu obyekt so'nggi $M_1 = S_\varepsilon(0)$ to'plamga lokal boshqariluvchan bo'ladimi?

- *Chiziqli tezkorlik masalasida optimal boshqaruvning mavjudligi haqidagi teorema.*
- *Pontryagin maksimum prinsipi, uning geometrik ma'nosi va teng kuchli ifodalari.*
- *Optimallikning zaruriy sharti haqidagi teorema.*

9.1. Optimal boshqaruvning mavjudligi

Oldingi ma'ruzada optimal boshqaruv matematik nazariyasining birinchi asosiy masalasi - boshqaruvchanlik masalasini ko'rdik. Agar boshqaruvchanlik masalasi ijobiy hal etilsa, ya'ni boshlang'ich M_0 to'plamdan so'nggi M_1 to'plamga o'tishni ta'minlovchi hech bo'lmaganda bitta joiz boshqaruv mavjud bo'lsa, u holda ikkinchi asosiy masalaga optimal boshqaruvning mavjudlik masalasiga o'tish lozim.

Chiziqli tezkorlik masalasining qo'yilishini eslatamiz. Obyektning holati

$$\dot{x} = Ax + u, \tag{9.1}$$

Tenglamalar sistemasi bilan yozilgan bo'lsin, bu yerda x – obyektlar fazalar holatini ifodalovchi n o'lchamli vektor, u – n o'lchamli boshqaruv vektori, A – $n\times n$ o'lchamli matritsa. $u(t)\in U$ mansublikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy o'lchovli $u(t)$ funksiyaga joiz boshqaruv deyiladi, bu yerda $U\in\Omega(R^n)$. vaqtning boshlang'ich momenti t_0 mahkamlangan hamda boshlang'ich va so'nggi $M_0, M_1 \in\Omega(R^n)$ to'plamlar berilgan. Tezkorlik masalasi eng qisqa vaqt ichida berilgan obyektni M_0 to'plamdan M_1 to'plamga olib o'tuvchi joiz boshqaruvni topishdan iborat.

Optimal boshqaruvning mavjudligi haqidagi teorema. *Faraz qilaylik berilgan obyekt M_0 to'plamdan M_1 to'plamga qandaydir $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida boshqariluvchan bo'lsin. U holda obyekt M_0 to'plamdan M_1 to'plamga eng qisqa $t^* - t_0$ vaqt ichida olib o'tuvchi $u^*(t), t\in[t_0, t_1]$ optimal boshqaruv mavjud.*

Isboti. Ushbu

$$T = \{t \geq t_0 : X(t)\cap M_1 \neq \varnothing\}$$

to'plamni qaraymiz, bu yerda $X(t)$- boshlang'ich M_0 to'plamdan $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida erishish to'plami. Teorema shartiga ko'ra T bo'sh to'plam emas. $t\in T$ vaqtlarning eng aniq quyi chegarasini t^* bilan belgilaymiz, ya'ni

$$t^* = \inf_{t\in T} t.$$

t^* quyi chegara mavjud, chunki T to'plam quyidan t_0 vaqt momenti bilan chegaralangan. Shuning uchun t^*-t_0dan qat'iy kichik vaqt ichida qandaydir joiz boshqaruv yordamida obyektni M_0 to'plamdan M_1 to'plamga olib o'tish mumkin emas. Endi boshlang'ich t_0 vaqt mahkamlanganligi uchun obyektni t^*-t_0 vaqtda, ya'ni $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida M_0 to'plamdan M_1 to'plamga olib o'tuvchi $u^*(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ joiz boshqaruv mavjudligini isbotlash qoldi.

t^*vaqt momenti $t\in T$ vaqtlarning eng aniq quyi chegarasi bo'lgani uchun, u holda t^*vaqt momentiga yaqinlashuvchi t_k momentlar ketma-ketligi mavjud, yani $k\to\infty$ da $t_k\to t^*$ bo'ladi va bundan tashqari har qanday t_k har qanday

$$X(t_k)\cap M_1 \neq \varnothing$$

shart bajariladi. Har bir k uchun qandaydir x_k nuqta bu kesishmada yotsin, yani

$$x_k \in X(t_k)\cap M_1 \tag{9.2}$$

$x_k\in M_1$ bo'lgani va M_1 to'plam kompaktligidan $\{x_k\}$ ketma-ketlikdan qandaydir

$$x^* \in M_1 \tag{9.3}$$

nuqtaga yaqinlashuvchi qismi ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu qismi ketma-ketlikni yana $\{x_k\}$ bilan belgilaymiz.

Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni berilgan bo'lsin. $\{x_k\}$ qismi ketma-ketlik x^* nuqtaga yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun qandaydir k_1 nomerdan boshlab $\|x^*-x_k\|\le\frac{\varepsilon}{2}$ shart bajariladi. Shuning uchun, (9.2) formulaga ko'ra

$$x^* = (x^* - x_k) + x_k \in S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) + X(t_k) \tag{9.4}$$

munosabatga ega bo‘lamiz.

$X(t)$ erishish to‘plami t vaqtga uzluksiz bog‘liq (7-ma’ruzadan erishish to‘plamining 7-xossasi). Shuning uchun qandaydir k_2 nomerdan boshlab,

$$X(t_k) \subset X(t^*) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$$

mansublik bajariladi (4-ma’ruzadan (4.2) formulani qarang). Bundan (9.4) munosabatga ko‘ra

$$x^* \in X(t^*) + S_\varepsilon(0)$$

mansublikka ega bo‘lamiz. Shunday qilib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$x^* = x_k + y_k, \quad x_k \in X(t^*), \quad y_k \in S_\varepsilon(0)$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz.

$k \to \infty$ da $\{x_k\}$ nuqtalar ketma ketligi x^* nuqtaga yaqinlashadi, chunki

$$\|x^* - x_k\| = \|y_k\| \le \varepsilon \to 0$$

$X(t^*)$ to‘plam kompakt (7-ma’ruzadagi erishish to‘plamining 2-xossa) ekan- ligidan $x^* \in X(t^*)$ mansublik o‘rinli. Nihoyat (9.3) mansublikni etiborga olib

$$X(t^*) \cap M_1 \ne \varnothing$$

shartni hosil qilamiz. Bu esa erishish to‘plamining ta’rifi bo‘yicha obyektni $[t_0, t^*]$ vaqt oraligida M_0 to‘plamdan M_1 to‘plamga olib o‘tuvchi $u^*(t)$ joiz boshqaruv mavjudligini bildiradi. Teorema isbotlandi.

Bu yerda optimal boshqaruv mavjudligi haqidagi teorema ixtiyoriy bosh bo‘lmagan U, M_0, M_1 kompakt to‘plamlar uchun isbotlanganini qayd etamiz.

9.2. Pontryagin maksimum prinsipi

Biz chiziqli tezkorlik masalasida optimal boshqaruv mavjudligi haqidagi savolni aniqlashtirdik. Endi, agar optimal boshqaruv mavjud bo'lsa, uni topishni o'rganishimiz kerak. Buning uchun optimallikning zaruriy shartidan foydalanish qulay. Bu ixtiyoriy optimal boshqaruv qanoatlantiradigan shunday shartni topish lozimki, keyin boshqaruvlar to'plamidan ko'rsatilgan zaruriy shartni qanoatlantiruvchi optimal boshqaruvni izlashni bildiradi.

Bu yerda $x \in R^1$ son o'qida silliq, skalyar $f(x)$ funksiyaning global minimumini izlash masalasi bilan o'xshashlikni keltirish mumkin. Agar silliq $f(x)$ funksiya x^* nuqtada minimumga erishsa, u holda $f'(x^*)=0$ shart bajariladi. Shuning uchun,

$$f'(x)=0 \tag{9.5}$$

tenglik minimumning zaruriy sharti bo'ladi. Bu tenglikni x^* global minimum nuqtalaridan tashqari, barcha lokal minimum nuqtalar hamda $f(x)$ funksiya grafigiga gorizontal urinma o'tadigan barcha egilish nuqtalari qanoatlantiradi.
Ammo muayyan amaliy misollarda (9.5) tenglikni qoidaga ko'ra chekli sondagi nuqtalar qanoatlantiradi va ular orasidan global minimumga erishtiradigan nuqtalarni oddiy sinash usuli bilan topish mumkin.

Qaralayotgan chiziqli tezkorlik masalasida ham skalyar funksiyaning minimumini topish kerak, ya'ni obyektni M_0 to'plamdan M_1 to'plamga t_1-t_0 o'tish vaqtini topish lozim bo'lib, bu funksiyaning argumentlari skalyar miqdorlar emas, balki barcha $u(t)\in U$ joiz boshqaruvlardir. Shu bilan birga chiziqli tezkorlik masalasida juda maqbul (effektiv) optimallikning zaruriy shartini olish mumkin. Bunday optimalikning zaruriy sharti Pontryagin maksimum prinsipidir. Uning ifodasini keltiramiz.

Pontryagin maksimum prinsipi. *Aytaylik $I=[t_0,t_1]$ kesmada qandaydir $u(t)$ joiz boshqaruv berilgan bo'lib, unga mos (9.1) tenglamaning $x(t)$ yechimi obyektni boshlang'ich M_0 to'plamdan so'nggi M_1 to'plamga $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida olib o'tsin, ya'ni $x(t_0)\in M_0$, $x(t_1)\in M_1$ chegaraviy shartlar bajarilsin. Agar yordamchi*

$$\dot{\psi}=-A^*\psi \tag{9.6}$$

differensial tenglamalar sistemasining shunday aynan noldan farqli $\psi(t)$ *yechimi mavjud bo'lib, quyidagi uchta shartlar:*
1) deyarli barcha $t \in I$ *lar uchun*

$$\langle u(t), \psi(t) \rangle = c(U, \psi(t)) \tag{9.7}$$

maksimallik sharti;
2) M_0 *to'plamda*

$$\langle x(t_0), \psi(t_0) \rangle = c(M_0, \psi(t_0)) \tag{9.8}$$

transversallik sharti;
3) M_1 *to'plamda*

$$\langle x(t_1), -\psi(t_1) \rangle = c(M_1, -\psi(t_1)) \tag{9.9}$$

transversallik sharti;
bajarilsa, $u(t)$, $x(t)$ *juftlik* $I = [t_0, t_1]$ *vaqt oralig'ida Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradi deb aytamiz.*

(9.6) differensial tenglamalar sistemasiga qo'shma sistema, uning yechimi $\psi(t)$ funksiyaga qo'shma funksiya deyiladi. Agar $\psi(t) \equiv 0$ bo'lsa, bu yechimga aynan noldan farqli yechim deyiladi.

1-teoremaga asosan (6-ma'ruzaga qarang) (9.6) qo'shma chiziqli differensial tenglamalar sistemasining $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida $\psi(t_0)$ boshlang'ich shatni qanoatlantiruvchi yagona $\psi(t)$ yechimi mavjud bo'lib, u

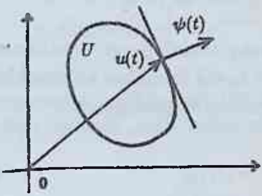
$$\psi(t) = e^{(t_0 - t)A^*} \psi(t_0) \tag{9.10}$$

Koshi formulasi bilan beriladi. Agar $\psi(t_0) \neq 0$ bo'lsa, bu aynan noldan farqli yechim bo'ladi, chunki $e^{(t - t_0)A^*}$ xosmas matritsa. Agar $\psi(t)$ qo'shma funksiya uchun boshlang'ich shart $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ining o'ng tomonida, ya'ni t_1 nuqtada berilsa, u holda (9.6) qo'shma chiziqli differensial tenglamalar sistemasining $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida $\psi(t_1)$ boshlang'ich shatni qanoatlantiruvchi yagona $\psi(t)$ yechimi mavjud bo'lib, u

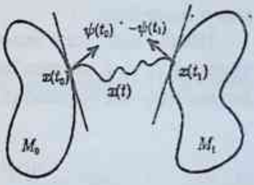
$$\psi(t) = e^{(t_1 - t)A^*} \psi(t_1) \tag{9.11}$$

ko'rinishga ega (6-ma'ruzadan (6.9)formulaga qarang). Agar $\psi(t_1)\neq 0$ bo'lsa, bu aynan noldan farqli yechim bo'ladi, chunki $e^{(t_1-t)A^*}$ xosmas matritsa.

Faraz qilaylik $\psi(t)$ qo'shma funksiya berilgan bo'lsin. Endi (9.7)-(9.9) shartlarning qanday geometrk ma'noga ega ekanligini ko'rib chiqamiz. (9.7) shart $[t_0,t_1]$ kesmaning barcha t momentlari uchun $\psi(t)$ vektor $u(t)$ nuqtada U to'plamning tayanch vektor(3-ma'ruzaga qarang), ya'ni U to'plamdan $u(t)$ vektor $\langle u(t),\psi(t)\rangle$ ckalyar ko'paytma maksimal qiymatga erishiladigan qilib tanlanadi (37-chizma). Xuddi shu kabi M_0 to'plamdagi transversallikning (9.8) sharti $\psi(t_0)$ vektorning $x(t_0)$ nuqtada M_0 to'plamga tayanch vektor bo'lishini bildiradi (38-chizma), M_1 to'plamdagi transversallikning (9.9) sharti $-\psi(t_1)$ vektorning $x(t_1)$ nuqtada M_1 to'plamga tayanch vektor bo'lishini



37-chizma



38-chizma

bildiradi (38-chizma) . Agar M_0 to'plam yagona nuqtadan iborat bo'lsa, ya'ni $M_0=\{x_0\}$ bo'lsa, u holda (9.8) transversallik sharti har qanday $\psi(t)$ qo'shma funksiya funksiya uchun bevosita bajariladi. Xuddi shu kabi mulohaza M_1 to'plam uchun ham o'rinli.

Maksimum prinsipiga teng kuchli bo'lgan ikkita mulohazani keltiramiz.

Pontryagin maksimum prinsipiga teng kuchli bo'lgan mulohazalar haqidagi lemma. *Aytaylik $I=[t_0,t_1]$ kesmada qandaydir $u(t)\in U,\ t\in[t_0,t_1]$ joiz boshqaruv uchun unga mos (9.1) tenglamaning $x(t)$ yechimi $x(t_0)\in M_0$, $x(t_1)\in M_1$ chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin. Keyin $\psi(t)$ (9.6) qo'shma tenglamalar sistemasining qandaydir yechimi bo'lsin. U holda quyidagi uchta mulohazalar teng kuchli:*

1) $u(t)$, $x(t)$ *juftlik* $\psi(t)$ *qo'shma funksiya bilan* $I=[t_0,t_1]$ *vaqt oralig'ida Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradi;*

2) *barcha* $t\in[t_0,t_1]$ *lar uchun* $\psi(t)$*vektor* $x(t)$*nuqtada* $X(t)$*erishish to'plamiga tayanch vektor bo'ladi, ya'ni*

$$\langle x(t),\psi(t)\rangle = c(X(t),\psi(t)) \qquad (9.12)$$

tenglik bajariladi. Bundan tashqari M_1 *to'plamdagi (9.9) transversallik sharti bajariladi.*

3) *barcha* $t\in[t_0,t_1]$ *lar uchun* $-\psi(t)$*vektor* $x(t)$*nuqtada* $Y(t)$ *boshqaruvchanlik to'plamiga tayanch vektor bo'ladi, ya'ni*

$$\langle x(t),-\psi(t)\rangle = c(Y(t),-\psi(t)) \qquad (9.13)$$

tenglik bajariladi. Bundan tashqari M_0 *to'plamdagi (9.8) transversallik sharti bajariladi.*

Isboti. $u(t)$ joiz boshqaruvli (9.1) tenglamaning $x(t)$ yechimini vaqtning t_0 va t_1 momentlaridagi yechimini Koshi formulasi ko'rinishida yozamiz (6- ma'ruzadan (6.7) va (6.9) formulalarni qarang).

$$x(t)=e^{(t-t_0)A}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}u(s)ds \qquad (9.14)$$

$$x(t)=e^{(t-t_1)A}x(t_1)-\int_{t}^{t_1}e^{(t-s)A}u(s)ds \qquad (9.15)$$

Eksponensialning xossalaridan (6-ma'ruzani qarang) foydalanib, (9.10) va (9.14) formulalardan

$$\begin{aligned}\langle x(t),\psi(t)\rangle &= \left\langle e^{(t-t_0)A}x(t_0),e^{(t-t_0)A^*}\psi(t_0)\right\rangle+\int_{t_0}^{t}\left\langle e^{(t-s)A}u(s),e^{(t_0-t)A^*}\psi(t_0)\right\rangle ds=\\ &=\langle x(t_0),\psi(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t}\left\langle u(s),e^{(t_0-s)A^*}\psi(t_0)\right\rangle ds=\langle x(t_0),\psi(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t}\langle u(s),\psi(s)\rangle ds\end{aligned} \qquad (9.16)$$

ifodani hosil qilamiz. Xuddi shu kabi (9.11) va (9.15) formulalardan

$$\langle x(t),-\psi(t)\rangle=\langle x(t_1),-\psi(t_1)\rangle+\int_t^{t_1}\langle u(s),\psi(s)\rangle ds \tag{9.17}$$

ifodani hosil qilamiz. 7-ma'ruzada $X(t)$ erishish va $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plamlari uchun

$$c(X(t),\psi)=c(M_0,e^{(t-t_0)A^*}\psi)+\int_{t_0}^{t}c(U,e^{(t-s)A^*}\psi)ds, \tag{9.18}$$

$$c(Y(t),\psi)=c(M_1,e^{(t-t_1)A^*}\psi)+\int_t^{t_1}c(U,-e^{(t-s)A^*}\psi)ds \tag{9.19}$$

tayanch funksiyalarni hisoblagan edik. Har bir $t\in I$ uchun (9.18) formulada ψ vektor o'rniga (9.10) formula bilan berilgan $\psi(t)$ vektor qo'yilsa

$$\begin{aligned}c(X(t),\psi(t))&=c\left(M_0,e^{(t-t_0)A^*}e^{(t_0-t)A^*}\psi(t_0)\right)+\int_{t_0}^{t}c\left(U,e^{(t-s)A^*}e^{(t_0-t)A^*}\psi(t_0)\right)ds=\\&=c(M_0,\psi(t_0))+\int_{t_0}^{t}c\left(U,e^{(t_0-s)A^*}\psi(t_0)\right)ds=c(M_0,\psi(t_0))+\int_{t_0}^{t}c(U,\psi(s))ds\end{aligned} \tag{9.20}$$

munosabat hosil bo'ladi. Huddi shu kabi (9.19) formulada (9.11) formula bilan berilgan $-\psi(t)$ vektor qo'yilsa

$$c(Y(t),-\psi(t))=c(M_1,-\psi(t_1))+\int_t^{t_1}c(U,\psi(s))ds \tag{9.21}$$

munosabat hosil bo'ladi.

Endi 1) - 3) tasdiqlarni teng kuchli ekanligini isbotlaymiz. $u(t)$, $x(t)$ juftlik $[t_0,t_1]$ kesmada maksimum prinsipini qanoatlantirsin. (9.7) maksimum sharti va M_0 to'plamdagi (9.8) transversallik shartidan (9.16) va (9.20) ifodalarning o'ng tomonlari ustma-ust tushishi kelib chiqadi. Shuning uchun (9.12) tenglik bajariladi. Xuddi shu kabi (9.7) va (9.9) formulalardan (9.17) va (9.21) ifodalarning o'ng tomonlari ustma-ust tushishi kelib chiqadi. Shuning uchun (9.13) tenglik bajariladi. Demak 1) mulohazalardan 2) va 3) mulohazalar kelib chiqadi.

2) shart bajarilsin. $t=t_1$ bo'lganda (9.12) tenglikdan

$$c(X(t_1),\psi(t_1))-\langle x(t_1),\psi(t_1)\rangle=0$$

munosabatni hosil qilamiz. (9.20) va (9.16) formulalardan foydalanib, bu ifodani

$$[c(M_0,\psi(t_0))-\langle x(t_0),\psi(t_0)\rangle]+\int_{t_0}^{t_1}[c(U,\psi(s))-\langle u,(s),\psi(s)\rangle]ds=0 \qquad (9.22)$$

ko'rinishga keltiramiz.

$x(t)\in M_0$ va $u(t)\in U$ mansubliklardan tayanch funksiyalarning xossalariga ko'ra barcha $t\in I$ lar uchun (9.22) formulada birinchi qo'shiluvchi nomanfiyligi, shuningdek integral belgisi ostidagi funksiya ham nomanfiy bo'lganligi uchun integral ham nomanfiy qiymatlar qabul qiladi. Shuning uchun (9.22) tenglikdan quyidagi

$$c(M_0,\psi(t_0))-\langle x(t_0),\psi(t_0)\rangle=0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}[c(U,\psi(s))-\langle u(s),\psi(s)\rangle]ds=0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Birinchi tenglikdan M_0 to'plamdagi (9.8) transversallik sharti kelib chiqadi, ikkinchi tenglikda esa integral belgisi ostidagi funksiyaning nomanfiligi va Lebeg integralining 6-xossasiga ko'ra (qo'shimchaning D6 bo'limi) deyarli barcha $t\in[t_0,t_1]$ lar uchun (9.7) maksimum sharti kelib chiqadi. Demak 2} mulohazadan 1} mulohaza hosil bo'ladi.

Xuddi shu kabi 3) mulohazadan 1) mulohaza kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, (9.13) tenglikda $t=t_0$ bo'lganda

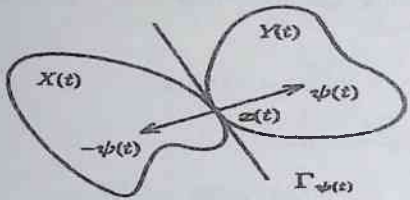
$$c(Y(t_0),-\psi(t_0))-\langle x(t_0),-\psi(t_0)\rangle=0$$

munosabatni hosil qilamiz. (9.21) va (9.17) formulalardan foydalanib bu munosabatni

$$[c(M_1,-\psi(t_1))-\langle x(t_1),-\psi(t_1)\rangle]+\int_{t_0}^{t_1}[c(U,\psi(s))-\langle u(s),\psi(s)\rangle]ds=0 \qquad (9.23)$$

ko'rinishga keltiramiz. $x(t)\in M_0$ va $u(t)\in U$ mansubliklardan (9.23) formuladagi har ikkala qo'shiluvchilarni nomanfiyligini, demak nolga tengligini hosil qilamiz. Birinchi qo'shiluvchi $M_1$to'plamdagi (9.9) transversallik shartini, ikkinchisini esa deyarli barcha $t \in I$ lar uchun (9.7) maksimum shartini beradi. Shunday qilib lemma to'la isbotlandi.

Eslatma. Keltirilgan isbotdan 2} mulohazada $\psi(t)$ vektorni $X(t)$ erishish to'plamiga $x(t)$ nuqtada $t = t_1$ bo'lganda tayanch vektor bo'lishini, yani (9.12) tenglikni faqat vaqtning $t = t_1$ momentida bajarilishini talab qilish yetarli. U holda 1) mulohaza bajariladi va demak (9.12) tenglik deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$
lar uchun bajariladi.



39-chizma

Yuqorida keltirilgan isbotdan lemma Pontryagin maksimum prinsipiga quyidagi geometrik ma'noni beradi. Agar $u(t)$, $x(t)$ juftlik $\psi(t)$ qo'shma funksiya bilan birgalikda $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida maksimum prinsipini qanoatlantirsa, u holda $t \in [t_0, t_1]$ vaqtning har bir momentida $x(t)$ nuqta orqali o'tuvchi $\psi(t)$ normal vektorga ega bo'lgan

$$\Gamma_{\psi(t)} = \{x \in R^n : \langle x, \psi(t) \rangle = \langle x(t), \psi(t) \rangle\}$$

gipertekislik $X(t)$erishish to'plamini $Y(t)$ boshqaruluvchanlik to'plamidan ajratadi (39-chizma).

9.3. Optimallikning zaruriy sharti

Qanday talablar ostida Pontryagin maksimum prinsipi optimallikning zaruriy sharti bo'lishini qarab chiqamiz.

Optimallikning zaruriy sharti haqidagi teorema. Tezkorlik masalasida M_0 va M_1 qavariq to'plamlar bo'lsin. Shu bilan birga $u(t)$

funksiya M_0 to'plamni M_1 to'plamga $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida olib o'tuvchi optimal boshqaruv va $x(t)$ esa (9.1) tenglamaning mos yechimi bo'lsin. U holda $u(t),x(t)$ juftlik $I=[t_0,t_1]$vaqt oralig'ida Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradi.

Isboti. (9.7)-(9.9) shartlar bajariladigan (9.6) qo'shma sistemaning aynan noldan farqli yechimi mavjudligini isbotlashimiz kerak. Teorema sharti bo'yicha boshlang'ich M_0 to'plamni so'nggi M_1 to'plamga $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida olib o'tuvchi $u(t)$funksiya tezkorlik masalasining optimal boshqaruvidir. Demak $X(t)$ erishish to'plami vaqtning istalgan $t<t_1$ momenti uchun

$$X(t_1)\cap M_1\neq\varnothing,\ \ X(t)\cap M_1=\varnothing \tag{9.24}$$

munosabatlarni qanoatlantiradi.

$$\psi(t,\psi)=c(X(t),\psi)+c(M_1,-\psi) \tag{9.25}$$

funksiyani va $t_k=t_1-\dfrac{1}{k}<t_1$nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz. Teorema shartiga ko'ra M_0 va M_1 qavariq to'plamlar va $X(t)$ erishish to'plami erishish to'plamlarining 3-xossasiga ko'ra (7-ma'ruzaga qarang) qavariq. Bu holda tayanch funksiyalar yordamida (9.24) munosabatni unga teng kuchli bo'lgan ko'rinishda yozish mumkin. Tayanch funksiyalarning 12-xossasining natijasidan foydalanib (3-ma'ruzani qarang)quyidagi tasdiqni hosil qilamiz.
Ixtiyoriy $\psi\in S$ vektor uchun

$$\psi(t_1\psi)=c(X(t_1),\psi)+c(M_1,-\psi)\geq 0 \tag{9.26}$$

tengsizlik bajariladi va har qanday $t_k<t_1$ uchun shunday $\psi_k\in S$vektorlar mavjudki, bunda

$$\psi(t_k\psi_k)=c(X(t_k),\psi_k)+c(M_1,-\psi_k)<0 \tag{9.27}$$

qat'iy tengsizlik o'rinli.

ψ_k vektorlar kompakt S to'plamga tegishli bo'lgani uchun $\{\psi_k\}$ vektorlar ketma-ketligidan qandaydir $\overline{\psi}\in S$ vektorga yaqinlashuvchi qismi ketma-ketlikni ajratish mumkin. Bu qismi ketma-ketlikni yana $\{\psi_k\}$ bilan belgilaymiz. $\varphi(t,\psi)$ funksiya ikkita uzluksiz tayanch funksiyalarning yig'indisidan iborat bo'lgani uchun ψ bo'yicha uzluksiz (3-ma'ruzadagi tayanch funksiyalar 13-xossasining natijasiga ko'ra). Bundan tashqari $\varphi(t,\psi)$ funksiya $X(t)$ erishish to'plamining t ga uzluksiz bog'liqligi (7-ma'ruzaning 7-xossasiga qarang) va tayanch funksiyalarning 13-xossasining natijasiga ko'ra $c(X(t),\psi)$ tayanch funksiya t bo'yicha uzluksiz bo'lganligidan t bo'yicha uzluksiz bo'ladi.

Shuning uchun (9.27) tengsizlikda $k\to\infty$ da limitga o'tish mumkin. $t_k\to t_1$ va $\psi_k\to\overline{\psi}$ bo'lgani uchun limitda

$$\varphi(t_1\overline{\psi})\le 0$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan (9.26) tengsizlikni e'tiborga olib,

$$\varphi(t_1,\overline{\psi})=0$$

tenglikka kelamiz. $\varphi(t,\psi)$ funksiyaning aniqlanishiga ko'ra ((26) formulaga qarang) bu har qanday $\psi\in S$ vektor uchun

$$c(X(t_1),\overline{\psi})+c(M_1,-\overline{\psi})=0 \qquad (9.28)$$

munosabat o'rinli ekanligini bildiradi. $x(t_1)$ nuqta $X(t)$ va M_1 to'plamlarning har ikkalasiga tegishli bo'lgani uchun quyidagi:

$$\langle x(t_1),\overline{\psi}\rangle\le c(X(t_1),\overline{\psi}),$$
$$\langle x(t_1),-\overline{\psi}\rangle\le c(M_1,-\overline{\psi}),$$

tengsizliklarga ega bo'lamiz (3-ma'ruza, tayanch funksiyalarning 6-xossasi natijasiga qarang).Agar bu tengsizliklarning hech bo'lmaganda birida qat'iy tengsizlik bajarilsa, ularni qo'shib

$$0<c(X(t_1),\overline{\psi})+c(M_1,-\overline{\psi})$$

qat'iy tengsizlikka kelamiz, bu esa (9.28) ga zid. Shuning uchun ikkita

$$\langle x(t_1),\overline{\psi}\rangle=c(X(t_1),\overline{\psi}), \qquad (9.29)$$

$$\langle x(t_1), -\overline{\psi}\rangle = c(M_1, -\overline{\psi}), \tag{9.30}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. (9.6) qo'shma differensial tenglamalar sistemasining t_1 nuqtada berilgan $\psi(t_1)=\overline{\psi}$ boshlang'ich shart bo'yicha $\psi(t)$ yechimini qaraymiz. Bu qo'shma funksiya (9.11) formula bilan beriladi. $\overline{\psi}\neq 0$ bo'lgani uchun bu xosmas aynimagan yechim ($\overline{\psi}$ vektor S birlik sferaga tegishli) . $\psi(t_1)=\overline{\psi}$ tenglikni e'tiborga olib, (9.30) formuladan M_1 to'plamdagi (9.9) transversallik shartini, (9.29) formuladan $t=t_1$ bo'lganda (9.12) tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, Pontryagin maksimum prinsipining ifodalanishiga teng kuchli bo'lgan lemmaning 2) tasdigi ham o'rinli (yuqoridagi eslatmaga qarang). Lemma bo'yicha $u(t)$, $x(t)$ juftlik $\psi(t)$ qo'shma funksiya bilan birgalikda $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida maksimum prinsipini qanoatlantiradi. Teorema isbotlandi.

10-ma'ruza

- *Pontryagin maksimum ptinsipini chiziqli tezkorlik masalalarini yechishga qo'llash sxemasi.*
- *Misollar.*

10.1. Optimallikning zaruriy shartining tadbiqi

Yana chiziqli tezkorlik masalasini qaraymiz. Bu masala

$$\dot{x} = Ax + u \tag{10.1}$$

tenglama bilan yozilgan obyektni boshlang'ich M_0 to'plamdan so'nggi M_1 to'plamga eng qisqa vaqt ichida olib o'tuvchi $u(t)\in U$ joiz boshqaruvni topishdan iborat. Joiz boshqaruvlar sifatida ixtiyoriy o'lchovli $u(t)\in U$ funksiyalar, $M_0, M_1, U \in R^n$ to'plamlarni bo'sh bo'lmagan kompakt to'plamlar deb faraz qilinadi.

Bu masala uchun oldingi ma'ruzada optimallikning zaruriy sharti haqidagi teorema isbotlangan edi. M_0 va M_1 qavariq to'plamlar bo'lgan holda, bu teorema optimal tezkorlik masalasining yechimi bo'lgan $u(t)$, $x(t)$ juftlik $I=[t_0,t_1]$ kesmada Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantirishi kerak. Ta'riflanishiga ko'ra, agar yordamchi qo'shma

$$\dot{\psi} = -A^{*}\psi \qquad (10.2)$$

differensial tenglamalar sistemasining aynan noldan farqli $\psi(t)$ yechimi uchun, quyidagi uchta:

1) deyarli barcha $t \in I$ lar uchun

$$\langle u(t), \psi(t) \rangle = c(U, \psi(t)) \qquad (10.3)$$

maksimallik sharti;

2) M_0 to'plamda

$$\langle x(t_0), \psi(t_0) \rangle = c(M_0, \psi(t_0)) \qquad (10.4)$$

transversallik sharti;

3) M_1 to'plamda

$$\langle x(t_1), -\psi(t_1) \rangle = c(M_1, -\psi(t_1)) \qquad (10.5)$$

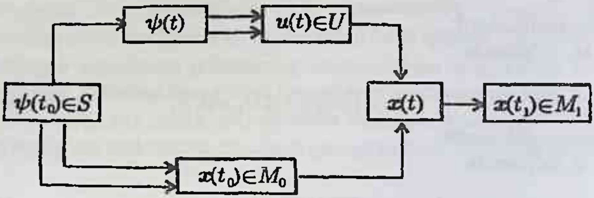
transversallik sharti;

Shartlar bajarilsa, $u(t)$, $x(t)$ juftlik $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradi deb aytilgan edi.

Shuning uchun tezkorlik masalalarini yechishga quyidagicha kirishish mumkin. Dastlab Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradigan hamma boshqaruvlarni topish, keyin bu boshqaruvlar orasidan qandaydir usul bilan haqiqiy optimal boshqaruvni topish lozim. Bu usulning effektivligi shundaki, ko'plab boshqaruvlar maksimum prinsipini qanoatlantiradi. Bu to'plamdan haqiqiy optimal boshqaruvni oson kechadi. Chiziqli tezkorlik masalalarini yechishda Pontryagin maksimum prinsipi eng effektiv usul ekan.

Agar $\psi(t)$ qo'shma funksiya (10.2) chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi bo'lsa va (10.3), (10.5) tengliklarni qanoatlantirsa, u holda $\lambda\psi$ funksiya ham (10.2) tenglamalar sistemasining yechimi bo'lib, bu funksiya ham (10.3), (10.5) tengliklarni qanoatlantiradi, bu yerda λ ixtiyoriy nomanfiy son. Bu tasdiq (10.2) tenglamalar sistemasining bir jinsli, chiziqli va (10.3),(10.5) tengliklardagi tayanch funksiyalar musbat bir jinsli (3-ma'ruzadagi tayanch funksiyalarning 1-xossasiga qarang) ekanligidan kelib chiqadi.shuning uchun Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradigan $\psi(t)$ qo'shma funksiyani vaqtning qandaydir momentida normalashtirilishi mumkin, masalan $t=t_0$, $\|\psi(t_0)\|=1$ bo'lganda, barcha $\psi(t)$ qo'shma funksiyalar boshlang'ich shart bo'yicha $\psi(t_0)\in S$ birlik sferadan tanlanishi mumkin.

Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi barcha boshqaruvlarni qanday qurish mumkinligini ko'rib chiqamiz.buning uchun quyidagi sxemani tavsiya etish mumkin (40-chizma).



40-chizma

Masalamizda vaqtning boshlang'ich momenti t_0 mahkamlangan. $S\subset R^n$ birlik sferadan ixtiyoriy $\psi(t_0)\in S$ boshlang'ich shartni olamiz. Bu $\psi(t_0)\in S$ boshlang'ich shart bo'yicha (10.2) qo'shma sistemaning $\psi(t)$ yechimini topamiz. 1-teoremaga ko'ra (6-ma'ruzaga qarang) bu $\psi(t)$ yechimi ixtiyoriy $[t_0,t_1]$, $t\ge t_0$ kesmada mavjud va yagona. Bu yechimning yagonaligi sxemada bitta strelka bilan tasvirlangan. Keyin qo'shma sistemaning $\psi(t)$ yechimi bo'yicha (10.3) maksimum shartini qanoatlantiruvchi barcha $u(t)\in U$ joiz boshqaruvni topamiz. Bunday $u(t)$ boshqaruvlarni bir nechta bo'lishi sxemada ikkilik strelka bilan tasvirlangan. Kelgusida (12-ma'ruzani qarang) qanday shartlar bajarilganda $\psi(t)$ funksiya bo'yicha bunday $u(t)\in U$ boshqaruvlar bir qiymatli aniqlanishini tekshiramiz. Berilgan $\psi(t_0)\in S$ boshlang'ich shart bo'yicha, boshlang'ich M_0 to'plamda (10.4) transversallik shartlarini qanoatlantiruvchi boshlang'ich M_0 to'plamdan obyekt holatini ifodalovchi $x(t)$ holat vektorining barcha boshlang'ich shartlarini topamiz. Bunday boshlang'ich $x(t_0)$ shartlar bir nechta bo'lishi mumkin. Bu ma'lumot ham sxemada ikkilik strelka bilan tasvirlangan. Kelgusida (12-ma'ruzani qarang) qanday shartlar bajarilganda $x(t_0)$ vektor $\psi(t_0)$

vektor bo'yicha bir qiymatli aniqlanishini tekshiramiz. Endi $u(t)\in U$ joiz boshqaruv va $x(t_0)$ boshlang'ich shart bo'yicha (10.1) tenglamaning yechimini topamiz. Bu $x(t)$ yechim 1-teoremaga (6-ma'ruzaga qarang) asosan $u(t)$ funksiya va $x(t_0)$ boshlang'ich shart bo'yicha bir qiymatli aniqlanadi. $x(t)$ yechim qurilgandan so'ng, bu yechim qandaydir $t_1 \geq t_0$ da M_1 to'plamga yetib kelishi tekshiriladi, agarda vaqtning qandaydir t_1 momentida M_1 to'plamga yetib kelsa, u holda M_1 to'plamdagi (10.5) transversallik shartining bajarilishi tekshiriladi. Agar bu shart bajarilsa, u holda $u(t)$, $x(t)$ juftlik hosil qilingan $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradi; agar bu shart bajarilmasa, u holda $u(t)$, $x(t)$ juftlik maksimum prinsipini qanoatlantirmaydi.

Bu yo'nalishda maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi barcha $u(t)$, $x(t)$ juftliklar faqat $\psi(t_0)\in S$ boshlang'ich shartga bog'liq, va bu bog'liqlik ikki bosqichda bir qiymatli bo'lmasligi mumkinligini eslatamiz. Kelgusida (12-ma'ruzani qarang) tezkorlik masalalari uchun qandaydir qo'shimcha shartlar bajarilganda bu bog'liqlik bir qiymatli bo'lishini ko'rsatamiz. Shu bilan birga agar obyekt boshlang'ich M_0 to'plamdan so'nggi M_1 to'plamga $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida boshqariluvchan bo'lsa, u holda bu sxemada $\psi(t)$ va $x(t)$ yechimlarni faqat shu kesmadagina qurish mumkinligini ham eslatamiz.

Tezkorlik masalalarini yechishning berigan sxemasini muayyan misollarda namoyon qilamiz.

1-misol. Shartli ravishda " Yerdan kosmik stansiyaga raketani uchirish" deb nomlangan masalani qaraymiz. Birlik massaga ega bo'lgan raketa

$$\ddot{x}=f(t)$$

qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakatlansin, bu yerda x – raketaning qandaydir mahkamlangan nuqtadan chetlanishi, $\ddot{x}$ – raketaning tezlanishi, $f(t)$ – vaqtning t momentida raketaga ta'sir etayotgan kuch. $f(t)$ kuchni raketa dvigatelining $|f(t)|\leq 1$ imkoniyatlariga bog'liq tarzda vaqt mobaynida o'zgartirish mumkin deb faraz qilinadi. Vaqtning boshlang'ich $t_0=0$ momentida raketa $x(0)=-\frac{5}{2}$ holatda bo'lsin. Bunda raketaga chegaralangan boshlang'ich $|\dot{x}(0)|\leq 1$ tezlikni ham berish mumkin. Raketani eng qisqa vaqt oralig'ida $1\leq x(t_1)\leq 2$, $\dot{x}(t_1)=0$ holatga, ya'ni vaqtning berilgan momentida ixtiyoriy $1 \le x \le 2$ holatdan nolga teng tezlik bilan kosmik stansiya bilan uchrashtirishni amalga oshirish talab qilinadi.

Berilgan masalani standart ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun $x^1 = x$, $x^2 = \dot{x}$, $u^1 = 0$, $u^2 = f$ yangi o'zgaruvchilar kiritamiz. Shuning uchun obyektning holat vektori $x = (x^1, x^2)$ ikki o'lchovli bo'ladi, harakat tenglamasi esa

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2 \end{cases} \tag{10.6}$$

ko'rinishga ega.

$u = (u^1, u^2)$ boshqaruvga qo'yilgan cheklanish

$$U = \left\{ u \in R^2 : u^1 = 0, \left|u^2\right| \le 1 \right\}$$

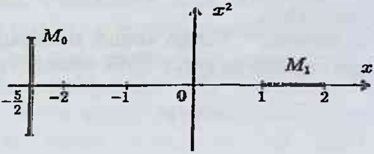
to'plam bilan beriladi. Boshlang'ich to'plam M_0 (41-chizmaga qarang)

$$M_0 = \left\{ x \in R^2 : x^1 = -\frac{5}{2}, \left|x^2\right| \le 1 \right\},$$

so'nggi M_1 to'plam esa

$$M_1 = \left\{ x \in R^2 : 1 \le x^1 \le 2, x^2 = 0 \right\}$$

ko'rinishga ega.



41-chizma

Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi barcha boshqaruvlarni topamiz, buning uchun bu prinsipning berilgan masalaga qo'llaniladigan barcha shartlarini yozamiz. (10.6) tenglama uchun A matritsa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ko'rinishga ega. Demak $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bo'lib, (10.2) qo'shma sistema

$$\begin{cases} \dot{\psi}^1 = 0, \\ \dot{\psi}^2 = -\psi^1 \end{cases} \tag{10.7}$$

ko'rinishni oladi.

U, M_0, M_1 to'plamlarning tayanch funksiyalari bevosita hisoblanadi:

$$c(U,\psi) = |\psi^2|, c(M_0\psi) = -\frac{5}{2}\psi^1 + |\psi^2|, c(M_1,\psi) = \frac{3}{2}\psi^1 + \frac{1}{2}|\psi^1|.$$

(10.3) maksimum shartidan

$$u^2(t)\psi^2(t) = |\psi^2(t)|,$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} u^2(t) &= +1, && agar \quad \psi^2(t) > 0 \ bo'lsa, \\ u^2(t) &= -1, && agar \quad \psi^2(t) < 0 \ bo'lsa, \\ -1 \le u^2(t) &\le 1, && agar \quad \psi^2(t) = 0 \ bo'lsa. \end{aligned} \tag{10.8}$$

M_0 to'plamdagi (10.4) transversallik shartidan

$$-\frac{5}{2}\psi^1(0) + x^2(0)\psi^2(0) = -\frac{5}{2}\psi^1(0) + |\psi^2(0)|,$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz

$$\begin{aligned} x^2(t_0) &= +1, && agar \quad \psi^2(0) > 0 \ bo'lsa, \\ x^2(t_0) &= -1, && agar \quad \psi^2(0) < 0 \ bo'lsa, \\ -1 \le x^2(t_0) &\le +1, && agar \quad \psi^2(0) = 0 \ bo'lsa. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Va nihoyat M_1 to'plamdagi (10.5) transversallik shartidan

$$x^1(t_1)(-\psi^1(t_1)) = -\frac{3}{2}\psi^1(t_1) + \frac{1}{2}|\psi^1(t_1)|,$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} x^1(t_1) &= +1, && agar \quad \psi^1(t_1) > 0 \ bo'lsa, \\ x^1(t_1) &= 2, && agar \quad \psi^1(t_1) < 0 \ bo'lsa, \\ -1 \le x^1(t_1) &\le 2, && agar \quad \psi^1(t_1) = 0 \ bo'lsa. \end{aligned} \tag{10.10}$$

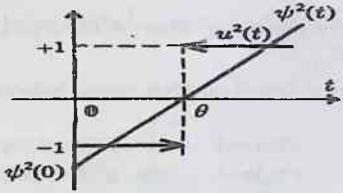
Boshlang'ich sharti $\psi(0)=(\psi^1(0),\psi^2(0))\in S$ bo'lgan (10.7) qo'shma sistemaning yechimini qaraymiz. Bu yechim

$$\psi^1(t)=\psi^1(0),\quad \psi^2(t)=-\psi^1(0)t+\psi^2(0)$$

ko'rinishga ega.

(10.8) maksimum shartida maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi $u^2(t)$ boshqaruv $\psi^2(t)$ funksiyani ishorasiga bog'liqligi kelib chiqadi (42-chizma).

$\psi^2(t)>0$ bo'lgan vaqtning barcha t momentlari uchun boshqaruv $u^2(t)=+1$ ko'rinishga ega. $\psi^2(t)<0$ bo'lgan vaqtning barcha t momentlari uchun boshqaruv $u^2(t)=-1$ ko'rinishga ega. Agar vaqtning qandaydir θ momentida $\psi^2(t)$ funksiya nolga aylansa, vaqtning bu momentida $u^2(\theta)$ boshqaruv maksimum shartidan aniqlanmaydi. U ixtiyoriy $-1\le u^2(\theta)\le +1$ qiymatlarni qabul qilishi mumkin.



42-chizma

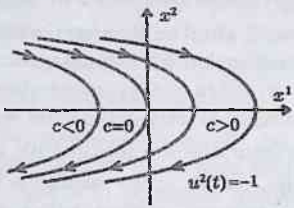
$\|\psi(0)\|=1$ bo'lgani uchun, $\psi^2(t)$ funksiya aynan nolga teng bo'lmagan t vaqtning chiziqli funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun $\psi^2(t)$ funksiya bittadan ortiq nuqtada nolga teng bo'lmaydi. Demak (10.8) maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi $u^2(t)$ boshqaruv funksiyasi bo'lakli o'zgarmas bo'lib, faqat ikkita +1 va -1 qiymatlarni qabul qilishi va bu funksiya o'z ishorasini, vaqtning θ momentida, $\psi^2(\theta)=0$ bo'lganda faqat bir marta almashtiradi (42-chizma). Bitta $t=\theta$ nuqtada $u^2(t)$ boshqaruv funksiyasining ixtiyoriy tanlanishi (10.6) tenglamalar sistemasining $x(t)$

yechimiga hech qanday ta'sir etmaydi. $u^2(t)=+1$ bo'lganda $x=(x^1,x^2)$ holat tekisligida $x(t)$ nuqta qanday trayektoriya bo'yicha harakat qilishini aniqlaymiz. Bu holda (10.6) tenglamaga ko'ra

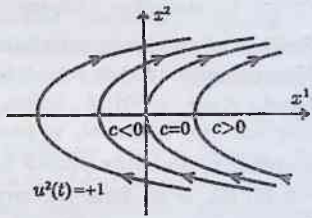
$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = 1 \end{cases} \qquad (10.11)$$

munosabatga kelamiz. Birinchi tenglamani ikkinchi tenglamaga bo'lib va integrallab, $x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2 + c$ tenglikni hosil qilamiz, bu yerda c-integrallash o'zgarmasi bo'lib, boshlang'ich shartdan aniqlanadi. Bunday trayektoriyalar holatlar fazosida 43-chizmada tasvirlangan. Bu trayektoriyalar yo'nalishi strelkalar bilan ko'rsatilgan parabolalar oilasidan iborat. Bu harakat yo'nalishi $\dot{x}=1$ tenglik bilan, ya'ni vaqt ortishi bilan $x^2(t)$ koordinataning o'sishi orqali tushuntiriladi.

Xuddi shu kabi, $u^2(t)=-1$ bo'lgan hol uchun holat trayektoriyalari quriladi.bu trayektoriyalar $x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + c$ tenglamalar bilan beriladi. Bu parabolalar oilasi 44-chizmada tasvirlangan.



43-chizma



44-chizma

Shunday qilib, vaqtning t momentida $u^2(t)=+1$ bo'lganda $x(t)$ nuqtaning harakati 43-chizmada tasvirlangan trayektoriyalar bo'yicha; $u^2(t)=-1$ bo'lganda $x(t)$ nuqtaning harakati 44-chizmada tasvirlangan trayektoriyalar bo'yicha amalga oshadi.

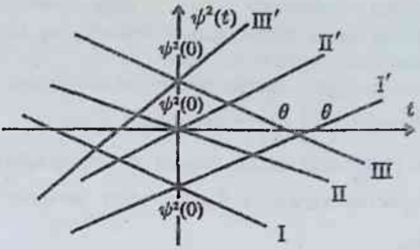
Endi 40-chizmadagi sxema bo'yicha Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi barcha boshqaruvlar va trayektoriyalarni quramiz. Buning uchun

$$\psi^2(t) = -\psi^1(0)t + \psi^2(0)$$

chiziqli funksiyaning holatini tekshiramiz. Barcha mumkin bo'lgan $(\psi^1(0), \psi^2(0)) \in S$ boshlang'ich shartlarni qaraymiz. Uchta holni qaraymiz.

1-hol. Agar $\psi^2(0) < 0$ bo'lsa, u holda M_0 to'plamdagi (10.4) transversallik shartidan trayektoriyaning boshlang'ich nuqtasi $x(0) = (-\frac{5}{2}, -1)$ ko'rinishda ekanligi kelib chiqadi. Bu holda , agar bo'lsa , u holda $\psi^2(t)$ funksiya barcha $t \geq 0$ lar uchun manfiy bo'ladi (45-chizmada I - to'g'ri chiziq), yoki agar $\psi^1(0) < 0$ bo'lsa (45-chizmada I' - to'g'ri chiziq) , u holda vaqtning qandaydir $\theta > 0$ momentidan boshlab musbat bo'ladi. Demak, (10.8) maksimum prinsipiga ko'ra $u^2(t)$ boshqaruv funksiyasi $u^2(t) \equiv -1$, yoki vaqtning qandaydir $\theta > 0$ momentidan boshlab +1 ga almashadi. Har qanday holda ham $x(0) = (-\frac{5}{2}, -1)$ nuqtadan chiqqan $x(t)$ holat trayektoriyasi bunday boshqaruvda M_1 to'plamga yetib kelmaydi. Hosil bo'lgan trayektoriyalar 46- chizmada mos ravishda I va I' rim raqamlari bilan belgilangan.

2-hol. Agar $\psi^2(0) = 0$ bo'lsa, u holda (10.9) munosabatdan boshlang'ich $x(0)$ nuqta M_0 to'plamdagi ixtiyoriy qiymatlarni qabul qilishi mumkin. Bu holda $\psi(0) \in S$ bo'lgani uchun $\psi^1(0) \neq 0$ bo'lib, agar $\psi^1(0) > 0$ bo'lsa, $\psi^2(t)$ funksiya barcha $t > 0$ lar uchun manfiy bo'ladi (45-chizmada - to'g'ri chiziq), yoki agar $\psi^1(0) < 0$ bo'lsa (45-chizmada II' - to'g'ri chiziq), u holda vaqtning qandaydir $\theta > 0$ momentidan boshlab musbat bo'ladi. Bu esa (10.8) shartga ko'ra $u^2(t)$ boshqaruv barcha $t > 0$ lar uchun o'zgarmas bo'lib, $\psi^1(0) > 0$ bo'lganda -1 ga, $\psi^1(0) < 0$ bo'lganda +1 ga teng qiymat qabul qilishini bildiradi. Bunday o'zgarmas boshqaruvli barcha trayektoriyalar 46-chizmada shtrixli chiziqlar bilan tasvirlangan hamda mos ravishda II va II' rim raqamlari bilan belgilangan. Bu trayektoriyalarning hech biri M_1 to'plamga yetib kelmaydi.



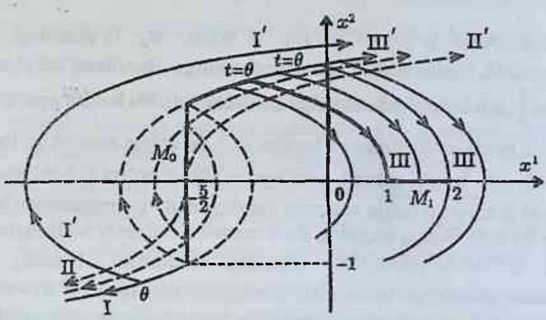
45-chizma

3-hol. Agar $\psi^2(0)>0$ bo'lsa, u holda M_0 to'plamdagi (10.4) transversallik shartidan trayektoriyaning boshlang'ich nuqtasi $x(0)=(-\frac{5}{2},+1)$ ko'rinishda ekanligi kelib chiqadi. Bu holda, agar $\psi^1(0)\leq 0$ bo'lsa, u holda $\psi^2(t)$ funksiya barcha $t\geq 0$ lar uchun musbat bo'ladi (45-chizmada III' - to'g'ri chiziq), yoki agar $\psi^1(0)>0$ bo'lsa (45-chizmada III - to'g'ri chiziq), u holda vaqtning qandaydir $\theta>0$ momentidan boshlab manfiy bo'ladi. Bunda vaqtning $\theta>0$ momenti ixtiyoriy bo'lishi mumkin, chunki u $0=-\psi^1(0)\theta+\psi^2(0)$ shartdan aniqlanadi. Demak, (10.8) maksimum prinsipiga ko'ra $u^2(t)$ boshqaruv funksiyasi $u^2(t)\equiv+1$, yoki vaqtning qandaydir $\theta>0$ momentidan boshlab -1 ga almashadi. Har qanday holda ham $x(0)=(-\frac{5}{2},+1)$ nuqtadan chiqqan $x(t)$ holat trayektoriyasi bunday boshqaruvda M_1 to'plamga yetib kelmaydi. Bunday trayektoriyalar 46- chizmada III' rim raqamlari bilan belgilangan.

Agar $u^2(t)$ boshqaruv funksiyasi dastlab +1 ga, keyin -1 ga teng bo'lsa, u holda qandaydir $\theta>0$ uchun bunday ko'rinishdagi trayektoriyalar M_1 to'plamga yetib kelishi kerak. Bu trayektoriyalar 46-chizmada III rim raqami bilan belgilangan. 46-chizmadan bunday trayektoriyalar ko'p bo'lib, M_1 to'plamning har bir nuqtasiga bu ko'rinishdagi tryektoriyalarning faqat bittasi kelib tushadi. M_1 to'plamdagi (10.10) transversallik shartini tekshiramiz. Bunday ko'rinishdagi trayektoriyalarning barchasi uchun $\psi^1(0)>0$ bo'lgani uchun (10.10) munosabatdan $x(t)$ holat trayektoriyasining so'nggi nuqtasi

$x(t_1)=1$ shartdan aniqlanadi. Bu so‘nggi shartni ko‘rsatilgan trayektoriyalardan faqat bittasi qanoatlantiradi. Bu trayektoriya 46-chizmada quyuq chiziq bilan tasvirlangan.

Maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi bu yagona trayektoriyani topamiz. $x(\theta)$ nuqta $\left(-\frac{5}{2},+1\right)$ nuqta orqali o‘tuvchi I ko‘rinishdagi parabola bilan (1,0) nuqta orqali o‘tuvchi II ko‘rinishdagi parabolaning kesishgan nuqtasida yotadi. I ko‘rinishdagi parabola $x^1=\frac{1}{2}\left(x^2\right)^2-3$ tenglama bilan,



46-chizma

II ko‘rinishdagi parabola $x^1=-\frac{1}{2}(x^2)^2+1$ tenglama bilan beriladi. Ularning kesishgan nuqtasi $x(\theta)=(-1,2)$. Harakat $x(0)=\left(-\frac{5}{2},+1\right)$ nuqtadan $u^2(t)\equiv+1$ boshqaruv bo‘yicha boshlanadi. (10.11) tenglamadan $x(0)=\left(-\frac{5}{2},1\right)$ boshlang‘ich shart bo‘yicha $x(t)$ trayektoriyani topamiz. Natijada

$$x^1(t)=\frac{1}{2}(t+1)^2-3\ ,\ x^2(t)=t+1$$

yechimlarga ega bo‘lamiz. Bunday trayektoriyalar bo‘yicha nuqta vaqtning θ momentigacha harakatlanadi, va bu vaqt $x(t)$ trayektoriyaning (-1,2) nuqtaga tushish shartidan aniqlanadi. U holda $2=\theta+1$ tenglama hosil bo‘lib, bundan $\theta=1$ ni topamiz. Vaqtning bu momentidan boshlab $u^2(t)$ boshqaruv funksiyasi -1 ga teng bo‘ladi. Trayektoriyaning davomini $u^2(t)=-1$ bo‘lganda (10.6) tenglamadan $x(\theta)=(-1,2)$ boshlang‘ich shart bo‘yicha topamiz. Natijada mos ravishda

$$x^1(t)=-\frac{(t-3)^2}{2}+1,\ x^2(t)=-(t-3).$$

Yechimlarga ega bo‘lamiz. Trayektoriyaning so‘nggi (1,0) nuqtaga tushish shartidan vaqtning $t_1=3$ momentini aniqlaymiz. Shunday qilib biz, Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi va [0,3] vaqt oralig‘ida raketani M_0 to‘plamdan M_1 to‘plamga olib o‘tuvchi yagona $u(t)$ boshqaruv mavjudligini ko‘rsatdik.Optimal boshqaruvning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan berilgan masalada optimal boshqaruv mavjud. Optimal boshqaruvning zaruriy sharti haqidagi teoremaga ko‘ra bu boshqaruv maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi kerak. Biz maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi yagona $u(t)$ boshqaruvni topganligimiz uchun, demak bu $u(t)$ optimal boshqaruvdir.

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}^1=x^2, \\ \dot{x}^2=u^2,\ |u^2|\le 1 \end{cases} \tag{10.12}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyektni boshlang‘ich $M_0=\left\{\left(-\frac{1}{2},1\right)\right\}$ to‘plamdan so‘nggi $M_1=\left\{\left(\frac{1}{2},1\right)\right\}$ to‘plamga eng qisqa vaqt oralig‘ida olib o‘tuvchi optimal boshqaruvni topamiz.

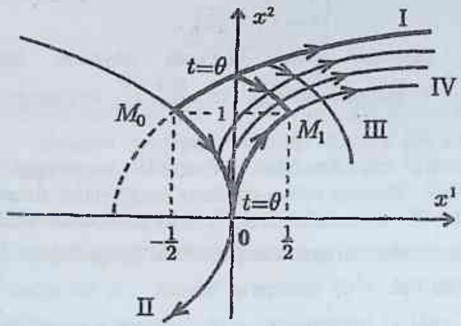
Bu misol avvalgi misoldan faqat boshlang‘ich va so‘nggi to‘plamlari bilan farq qiladi. Shuning uchun qo‘shma tenglamalar sistemasi (10.7) ko‘rinishda bo‘lib, maksimum sharti (10.8) munosabat bilan beriladi. (10.8) maksimum shartini qanoatlantiruvchi $u^2(t)$ boshqaruv uchun faqat quyidagi to‘rtta hol: $u^2(t)$ boshqaruv barcha $t\ge 0$ lar uchun o‘zgarmas bo‘lib, u +1 yoki -1 qiymatlarni; $u^2(t)$ boshqaruv vaqtning qandaydir $\theta>0$ momentida +1 dan -1 ga yoki -1 dan +1 ga almashishi (42 va 43 chizmalarni qarang) hollari bo‘lishi mumkin. $u^2(t)=+1$ bo‘lganda harakat

43-chizmada tasvirlangan parabola bo‘yicha, $u^2(t) = -1$ bo‘lganda harakat 44-chizmada tasvirlangan parabola bo‘yicha amalga oshadi.

Berilgan misolda M_0 va M_1 to‘plamlar yagona nuqtadan tashkil topganligi uchun ixtiyoriy $\psi(t)$ qo‘shma funksiya uchun (10.4) va (10.5) transversiyallik shartlari bevosita bajariladi.Shuning uchun maksimum prinsipi $u^2(t)$ boshqaruv yuqorida keltirilgan to‘rtta hollardan biriga keladi.

40-chizmada tasvirlangan sxema bo‘yicha Pontryagin maksimum prinsipi qanoatlantiruvchi barcha boshqaruvlarni topamiz. Agar $u^2(t)$ boshqaruv barcha $t \geq 0$ lar uchun almashishga ega bo‘lmasdan +1 yoki -1 ga teng bo‘lsa, u holda M_0 to‘plamdan boshlangan $x(t)$ trayektoriya M_1 to‘plamga kelib tushmaydi.

47-chizmada bu trayektoriyalar mos ravishda I va II rim raqamlari bilan belgilangan. Agar vaqtning qandaydir $\theta > 0$ momentida $u^2(t)$ boshqaruv +1 dan -1 ga almashsa, u holda bunday trayektoriya M_1 to‘plamga kelib tushadi. Bu traeyktoriyalar 47-chizmada III rim raqami bilan belgilangan. Agar vaqtning qandaydir $\theta > 0$ momentida $u^2(t)$ boshqaruv -1 dan +1 ga almashsa, u holda bunday trayektoriya M_1 to‘plamga kelib tushadi. Bu traeyktoriyalar 47-chizmada IV rim raqami bilan belgilangan.



47-chizma

Shunday qilib Pontryagin maksimum prinsipi ikkita turli boshqaruvlar qanoatlantiradi. Holat trayektoriyalarini, ya'ni 47-chizmada tasvirlangan parabolalaridan va (10.12) tenglamalar sistemasidan foydalanib bu ikkita boshqaruvni va unga mos $x(t)$ yechimni topish qiyin emas. Ularni ham 1-misoldagidek usul bilan hisoblaymiz.

Birinchi boshqaruv

$$u^2(t)=\begin{cases} +1 \ agar \ 0\le t\le\sqrt{2}-1 \ bo'lsa, \\ -1 \ agar \sqrt{2}-1<t\le 2\sqrt{2}-2 \ bo'lsa, \end{cases}$$

va unga mos yechim

$$x(t)=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2},t+1\right), \ agar \ 0\le t\le\sqrt{2}-1 \ bo'lsa, \\ \left(-\frac{1}{2}t^2+(2\sqrt{2}-1)t+2\sqrt{2}-3\frac{1}{2},-t+2\sqrt{2}-1\right), agar \ \sqrt{2}-1<t\le 2\sqrt{2}-2 \ bo'lsa \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lib, boshlang'ich $M_0=\left\{\left(-\frac{1}{2},1\right)\right\}$ to'plamdan so'nggi $M_1=\left\{\left(\frac{1}{2},1\right)\right\}$ to'plamga $[0,2\sqrt{2}-2]$ vaqt oralig'ida olib o'tadi.

Ikkinchi boshqaruv

$$u^2(t)=\begin{cases} -1 \ agar \ 0\le t\le 1 \ bo'lsa, \\ +1 \ agar 1<t\le 2 \ bo'lsa, \end{cases}$$

va unga mos yechim

$$x(t)=\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2},-t+1\right), agar \ 0\le t\le 1 \ bo'lsa, \\ \left(\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2},t-1\right), agar 1<t\le 2 \ bo'lsa, \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lib, boshlang'ich $M_0=\left\{\left(-\frac{1}{2},1\right)\right\}$ to'plamdan so'nggi $M_1=\left\{\left(\frac{1}{2},1\right)\right\}$ to'plamga $[0,2]$ vaqt oralig'ida olib o'tadi.

Bu boshqaruvlarda M_0 to'plamdan $M_1$to'plamga o'tish vaqtlarini taqqoslasak, $0{,}82\approx 2\sqrt{2}-2<2$ bo'lgani uchun bu boshqaruvlarning birinchisi optimal, ikkinchisi optimal emas.

2- misolda Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi bir necha $u(t),x(t)$ juftliklar bo'lgan holga duch keldik. Bu esa maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi barcha boshqaruvlar ichida haqiqiy optimal boshqaruvni tanlash imkoniyatni beradigan optimallikning yetarli sharti zarurligini ko'rsatadi. Bunday optimallikning yetarli shartlari kelgusi ma'ruzada keltirib chiqariladi.

Pontryagin maksimum prinsipining teng kuchli ifodasi haqidagi lemmadan kelib chiqadigan maksimum prinsipining geometrik ma'nosini tushuntiruvchi yana bir misol keltiramiz (9-ma'ruzaga qarang).

3-misol. Ushbu $u \in U = S_1(0)$ boshqaruvga ega bo'lgan

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \end{cases} \tag{10.13}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyektni boshlang'ich $M_0 = \{0\}$ to'plamdan so'nggi

$$M_1 = \{x \in R^2 : x^1 = 2\pi, |x^2| \le 1\} \tag{10.14}$$

to'plamga eng qisqa vaqt oralig'ida olib o'tuvchi optimal boshqaruvni topamiz.

Bu masalani yechish uchun maksimum prinsipini qo'llaymiz. (10.12) qo'shma tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \dot{\psi}^1 = \psi^2, \\ \dot{\psi}^2 = -\psi^1. \end{cases}$$

ko'rinishni oladi. $t_0 = 0$ bo'lsin. Bu sistemaning $\psi(t)$ yechimini ixtiyoriy

$$\psi(0) = (\cos\alpha, \sin\alpha) \in S \tag{10.15}$$

boshlang'ich shart bo'yicha topamiz.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa uchun e^{tA} eksponensial

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{10.16}$$

ko'rinishga ega (6-ma'ruzaning 2-misoliga qarang). Shuning uchun $\psi(t)$ yechim

$$\psi(t)=e^{-tA^*}\psi(0)=e^{tA}\psi(0)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha-t)\\ \sin(\alpha-t)\end{pmatrix} \qquad (10.17)$$

munosabat bilan beriladi. (10.3) maksimum sharti

$$\langle u(t),\psi(t)\rangle=c(U,\psi(t))=\|\psi(t)\|$$

ko‘rinishni oladi. $\|\psi(t)\|=1$ bo‘lgani uchun bu shart

$$u(t)=\psi(t)=(\cos(\alpha-t),\sin(\alpha-t)). \qquad (10.18)$$

boshqaruv bilan bir qiymatli aniqlanadi.

M_0 to‘plamdagi (10.4) transversallik sharti bevosita bajariladi, chunki M_0 to‘plam faqat bitta $x_0=0$ nuqtadan iborat, M_1 to‘plamdagi (10.5) transversallik sharti (10.14) formulaga ko‘ra

$$-x^1(t_1)\psi^1(t_1)-x^2(t_1)\psi^2(t_1)=-2\pi\psi^1(t_1)+\left|\psi^2(t_1)\right|$$

ko‘rinishga ega. Demak quyidagi munosabatlar

$$\begin{aligned}
x^2(t_1)&=+1, && agar \quad \psi^2(t_1)<0 \ bo'lsa,\\
x^2(t_1)&=-1, && agar \quad \psi^2(t_1)>0 \ bo0'lsa,\\
-1\le x^2(t_1)&\le 1, && agar \quad \psi^2(t_1)=0 \ bo'lsa.
\end{aligned}$$

bajariladi. 40-chizmada keltirilgan sxema bo‘yicha Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi barcha $u(t),x(t)$ juftliklarni topamiz.

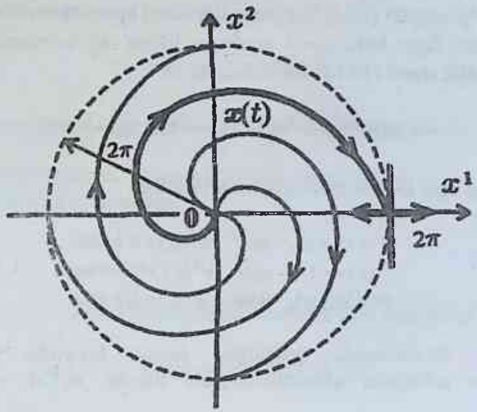
Buning uchun (10.18) formula bilan berilgan $u\,(t)$ boshqaruv bilan $x(0)=0$ boshlang‘ich shartga ega bo‘lgan (10.13) tenglamalar sistemasining yechimini topamiz. $x(t)$ yechimini

$$x(t)=e^{(t-t_0)A}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}u(s)ds$$

Koshi formulasi (6-ma’ruzaga qarang) bo‘yicha yozamiz. Bu formulaga muayyan qiymatlarni qo‘yib, (10.16) ifodani hisobga olib

$$x(t) = (t\cos(\alpha - t),\ t\sin(\alpha - t)) \qquad (10.20)$$

yechimni hosil qilamiz. Shuning uchun (10.20) ifoda (10.3) maksimum shartini va M_0 to'plamdagi (10.4) transversallik shartini qanoatlantiruvchi barcha yechimlarni beradi. Bunda $x(t)$ yechim $\psi(t)$ qo'shma funksiyaning $\psi(0)$ boshlang'ich qiymatiga bog'liq ((10.15) formulaga qarang). (10.20) ifoda bilan berilgan $x(t)$ tryektoriyalar $x = (x^1, x^2)$ holatlar tekisligida spirallardan iborat (48-chizmaga qarang). Vaqtning t momentida $\|x(t)\| = t$ bo'lgani uchun barcha $x(t)$ yechimlar markazi $x = 0$ nuqtada, radiusi t ga teng bo'lgan aylanada yotadi.



48-chizma

Bu yechimlar vaqtning $t_1 = 2\pi$ momentida birinchi bor M_1 to'plamga yetib kelishi tushunarli. Bu 48-chizmada quyuq chiziq bilan tasvirlangan $x(t)$ traektoriya bo'lib, u parametrning $\alpha = 0$ qiymatiga mos keladi, ya'ni

$$x(t) = (t\cos t, -t\sin t), 0 \le t \le 2\pi$$

Faqat M_1 to'plamdagi (10.19) transversallik shartini tekshirish qoldi. $\alpha = 0$ bo'lganda (10.17) formuladan

$$\psi(t) = (\cos t, -\sin t), \qquad (10.21)$$

Qo'shma funksiyani hosil bo'lgani uchun u holda $\psi^2(2\pi) = 0$ bo'ladi, va (10.19) munosabat bajariladi.

Shuning uchun

$$u(t) = (\cos t, -\sin t), \;\; x(t) = (t\cos t, -t\sin t)$$

yagona juftlik M_0 to'plamdan M_1 to'plamga $[0,2\pi]$ vaqt oralig'ida olib o'tishni amalga oshiradi va Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradi. Demak $u(t), x(t)$ juftlik optimal ekan.

Shu misol asosida maksimum prinsipining geometrik ma'nosini namoyon etamiz. Buning uchun $X(t)$ erishish to'plamini va $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plamlarini hisoblaymiz. Ular (7-ma'ruzaga qarang).

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}M_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}U ds,$$

$$Y(t) = e^{(t-t_1)A}M_1 + \int_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}[-U] ds.$$

formulalar bilan beriladi. Bu formulalarga muayyan qiymatlarni qo'yib va (10.16) matritsa soat strelkasi bo'yicha t burchakka burishni amalga oshirishini etiborga olib

$$X(t) = S_t(0), Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & cist \end{pmatrix} M_1 + S_{2\pi - t}(0)$$

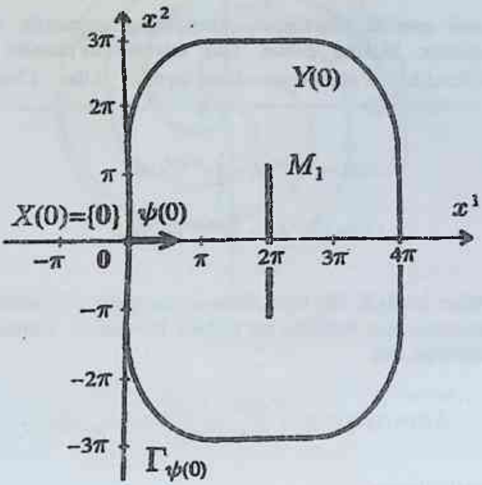
ifodalarni hosil qilamiz.

Shuning uchun $X(t)$ erishish to'plami markasi koordinata boshida bo'lgan t radiyusli doiradan, $Y(t)$ boshqaruvchanlik to'plami esa soat strelkasi bo'yicha t burchakka burilgan M_1 kesma bilan markazi koordinatalar boshida radiusi $2\pi - t$ bo'lgan doira yig'indisidan iborat.

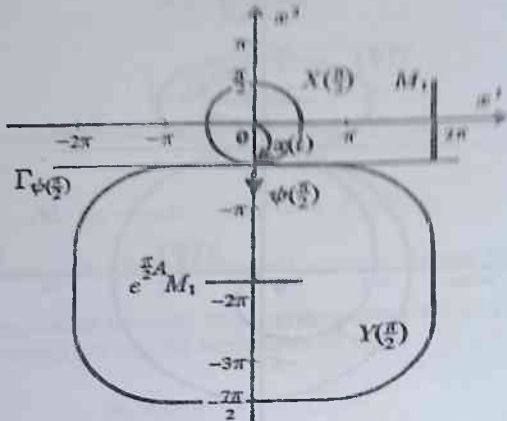
49-53-chizmalarda $X(t)$ erishish va $Y(t)$ boshqariluvchanlik to'plamlarining o'zgarish dinamikasi ko'rsatilgan. Bunda vaqtning barcha $t \in [0,2\pi]$ momentlari uchun (10.21) formula bilan berilgan $\psi(t)$ qo'shma vektor $X(t)$ erishish to'plamiga $x(t)$ nuqtada tayanch vektor bo'ladi. Huddi shu kabi $-\psi(t)$ vektor $Y(t)$ boshqaruvchanlik to'plamiga $x(t)$ nuqtada tayanch vektor bo'ladi.

$$\Gamma_{\psi(t)} = \left\{x \in R^n : \left\langle x - x(t), \psi(t)\right\rangle = 0\right\} .$$

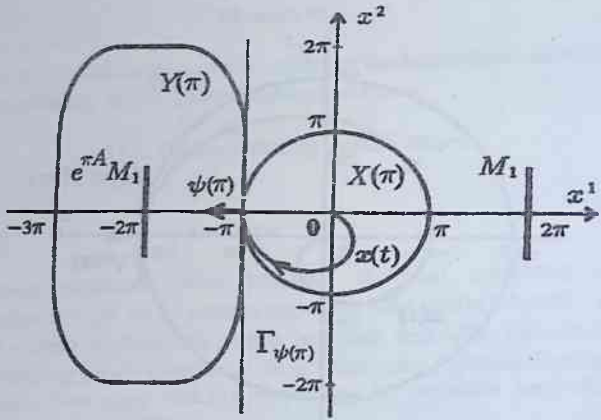
giper tekislik $X(t)$ va $Y(t)$ to'plamlarni ajratadi. Pontryagin maksimum prinsipining geometrik ma'nosi shundan iborat.



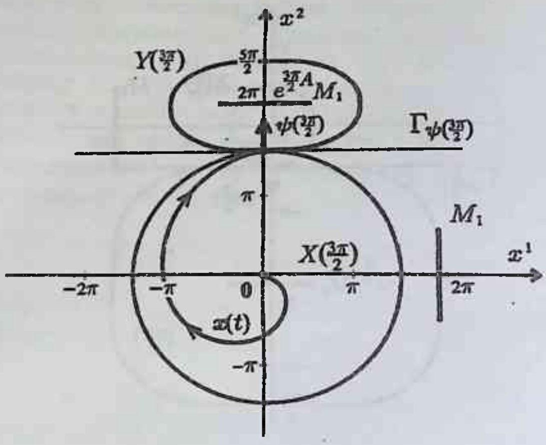
49-chizma



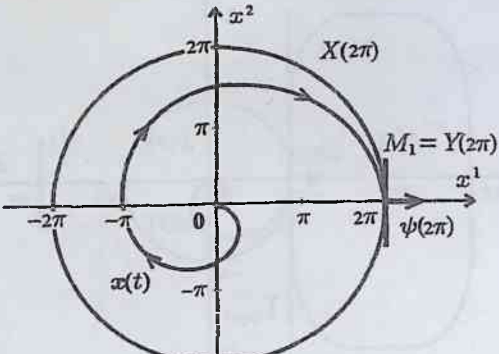
50-chizma



51-chizma



52-chizma



53-chizma

10.2. masalalar

1.Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = v, \quad |v| \le 1 \end{cases} \tag{10.22}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyektni eng qisqa vaqt oralig'ida boshlang'ich

$$M_0 = \{x \in R^2 : -5 \le x^1 \le -4,\ x^2 = 0\}$$

to'plamdan so'nggi $M_1 = \{0\}$ to'plamga olib o'tuvchi optimal boshqaruvni toping.

2. (10.22) tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyektni eng qisqa vaqt oralig'ida boshlang'ich $M_0 = \{0\}$ to'plamdan so'nggi

$$M_1 = \{x \in R^2 : x^1 = 5,\ |x^2| \le 2\}$$

to'plamga olib o'tuvchi optimal boshqaruvni toping.

11-ma'ruza

- *M_0 va M_1 to'plamlarda transversallikning kuchaytirilgan shartlari.*
- *Optimallikning yetarli sharti haqidagi teorema.*

11.1. Optimallikning yetarli sharti

Endi

$$\dot{x} = Ax + u \tag{11.1}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyektni boshlang'ich M_0 to'plamdan so'nggi M_1 to'plamga eng qisqa vaqt oralig'ida olib o'tuvchi $u(t) \in U$ optimal boshqaruvni topish haqidagi tezkorlik masalasi uchun optimallikning yetarli sharti bilan shug'ullanamiz. Optimallikning yetarli sharti ham Pontryagin maksimum prinsipi ko'rinishida beriladi. Ta'rif bo'yicha agar yordamchi

$$\dot{\psi} = -A^* \psi \tag{11.2}$$

differensial tenglamalar sistemasining shunday aynan noldan farqli $\psi(t)$ yechimi mavjud bo'lib, quyidagi uchta shartlar:

1) deyarli barcha $t \in I$ lar uchun

$$\langle u(t), \psi(t)\rangle = c(U, \psi(t)) \tag{11.3}$$

maksimallik sharti;

2) M_0 to'plamda

$$\langle x(t_0), \psi(t_0)\rangle = c(M_0, \psi(t_0)) \tag{11.4}$$

transversallik sharti;

3) M_1 to'plamda

$$\langle x(t_1), -\psi(t_1)\rangle = c(M_1, -\psi(t_1)) \tag{11.5}$$

transversallik sharti;

bajarilsa, $u(t)$, $x(t)$ juftlik $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradi deb aytilgan edi.

Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi $u(t)$, $x(t)$ juftlik optimal bo'lishi uchun $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida yana ikkita qo'shimcha shartlardan birini qanoatlantirishi yetarli. Bu shartlar mos ravishda M_0 va M_1 to'plamlarda kuchaytirilgan transversallik shartlari deyiladi.

Ta'rif. $x(t)$ (11.1) boshqariladigan sistemaning $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'idagi trayektoriyasi bo'lsin. Keyin $\psi(t)$- (11.2) qo'shma sistemaning qandaydir yechimi bo'lsin. Agar barcha $t_0 < t \le t_1$ vaqt momentlari uchun

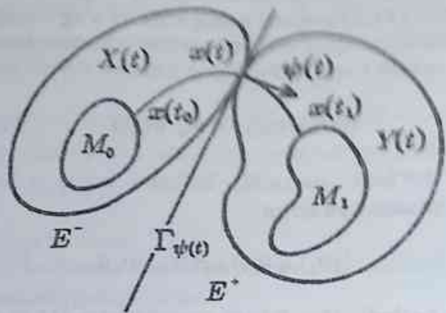
$$\langle x(t), \psi(t\ )\rangle > c(M_0, \psi(t\ )) \tag{11.6}$$

qat'iy tengsizlik bajarilsa, u holda $x(t)$ yechim $\psi(t)$ funksiya bilan M_0 to'plamda kuchaytirilgan transversallik shartini qanoatlantiradi deb aytamiz.

Agar barcha $t_0 \le t < t_1$ vaqt momentlari uchun

$$\langle x(t), -\psi(t\ )\rangle > c(M_1, -\psi(t\ )) \tag{11.7}$$

qat'iy tengsizlik bajarilsa, u holda $x(t)$ yechim $\psi(t)$ funksiya bilan M_1 to'plamda kuchaytirilgan transversallik shartini qanoatlantiradi deb aytamiz.



54-chizma

Kuchaytirilgan transversallik shartlarning geometrik ma'nosini aniqlaymiz.

$x(t)$ nuqta orqali $\psi(t)$ normal vektorga ega bo'lgan $\Gamma_{\psi(t)}$ gipertekislikda (54-chizma). $\Gamma_{\psi(t)}$ gipertekislik butun R^n fazoni $\psi(t)$ vektorga nisbatan ikkita: R^+ - musbat va R^--manfiy yopiq yarim fazolarga ajratadi.Biz bilamizki, agar $u(t)$, $x(t)$ juftlik $\psi(t)$ qo'shma funksiya bilan birgalikda $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantirsa bu holda bu gipertekislik barcha $t_0 \le t \le t_1$ lar uchun $X(t)$ erishish to'plamini $Y(t)$ boshqaruvchanlik to'plamidan ajratadi.

Shuning uchun $X(t)$ erishish to'plami R^--manfiy yarim fazoga, $Y(t)$ boshqaruvchanlik to'plami R^+ - musbat yarim fazoga tegishli. M_0 to'plamda kuchaytirilgan transversallik sharti, ya'ni (11.6) tengsizlik barcha $t_0 \le t < t_1$ uchun M_0 to'plam R^--manfiy yopiq yarim fazo qat'iy ichida yotadi. Xuddi shuningdek, M_1 to'plamda kuchaytirilgan transversallik sharti, ya'ni (11.7) tengsizlik barcha $t_0 < t \le t_1$ lar uchun M_1 to'plam R^+-musbat yopiq yarim fazoning qat'iy ichida yotishni bildiradi (54-chizmaga qarang).

Kelishishga ko'ra $y(t_0) \in M_0$. M_0 to'plamdagi (11.4) transversallik shartiga ko'ra tayanch funksiyalarning xossalari bo'yicha $\xi(t)$ funksiya ((11.18) formulaga qarang) uchun

$$\xi(t_0) = \langle y(t_0), \psi(t_0) \rangle - \langle x(t_0), \psi(t_0) \rangle = \langle y(t_0), \psi(t_0) \rangle - c(M_0, \psi(t_0)) \le 0$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan $I' = [t_0, t_1 - \varepsilon]$ kesmada (11.9) tengsizlikni va Lebeg integralining xossalari e'tiborga olinsa,

$$\xi(t_1 - \varepsilon) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1 - \varepsilon} \dot{\xi}(s) ds \le 0 \qquad (11.11)$$

munosabat kelib chiqadi. Kelishilgan farazga ko'ra $y(t_1 - \varepsilon) \in M_1$ va $\varepsilon > 0$. Demak M_1 to'plamdagi (11.7) kuchaytirilgan transversallik shartidan $t = t_1 - \varepsilon < t_1$ bo'lganda tayanch funksiyalarning xossalariga ko'ra

$$\langle y(t_1 - \varepsilon), -\psi(t_1 - \varepsilon) \rangle \le c(M_1, -\psi(t_1 - \varepsilon) < \langle x(t_1 - \varepsilon), -\psi(t_1 - \varepsilon) \rangle$$

munoabat kelib chiqadi. Bundan $\xi(t)$ funksiya uchun (11.11) tengsizlikka zid bo'lgan

$$\xi(t_1 - \varepsilon) = \langle y(t_1 - \varepsilon), \psi(t_1 - \varepsilon) \rangle - \langle x(t_1 - \varepsilon), \psi(t_1 - \varepsilon), -\psi(t_1 - \varepsilon) \rangle > 0$$

qat'iy tengsizlikni hosil qilamiz. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik $u(t)$ optimal boshqaruv bo'lishini bildiradi.

2. M_0 to'plamdagi kuchaytirilgan transversallik sharti , ya'ni $t_0 < t \le t_1$ uchun (11.6) tengsizlik bajarilsin. Kelishishga ko'ra shunday $v(t) \in U$ joiz boshqaruv mavjudki, unga mos (11.1) tenglamaning $y(t)$ yechimi (11.10) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. $v(t), y(t)$ funksiyalar juftidan t vaqtni $t - \varepsilon$ ga almashtirish natijasida hosil bo'lgan

$$\tilde{v}(t) = v(t - \varepsilon), \qquad \tilde{y}(t) = y(t - \varepsilon)$$

funksiyalar juftligini qaraymiz. Bu funksiyalar endi $[t_0 + \varepsilon, t_1]$ vaqt oralig'ida aniqlangan. $v(t) \in U$ boshqaruv $[t_0 + \varepsilon, t_1]$ vaqt oralig'idagi joiz boshqaruv ekanligi ravshan. Vaqt bo'yicha siljitishda bu funksiya o'lchovliligini saqlaydi va

$$\tilde{v}(t)=v(t-\varepsilon)\in U$$

mansublikni qanoatlantiradi.

$\tilde{y}(t)$ funksiya $\tilde{v}(t)$ boshqaruvga ega bo'lgan (11.1) tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi, chunki deyarli barcha $t\in[t_0+\varepsilon,t_1]$ lar uchun

$$\dot{\tilde{y}}(t)=\frac{dy(t-e)}{dt}=Ay(t-e)+v(t-e)=A\tilde{y}(t)+\tilde{v}(t)$$

tenglik bajariladi. Bundan tashqari $\tilde{y}(t)$ yechim obyektni $[t_0+\varepsilon,t_1]$ vaqt oralig'ida boshlang'ich M_0 to'plamdan so'ggi M_1 to'plamga olib o'tadi, chunki

$$\tilde{y}(t_0+\varepsilon)=y(t_0)\in M_0,\quad \tilde{y}(t_1)=y(t_1-\varepsilon)\in M_1$$

mansubliklar bajariladi ((11.10) formulaga qarang).

Isbotning davomi 1. bo'limdagi birinchi hol uchun keltirilgan isbotga simmetrik tarzda qaytariladi.

$\tilde{y}(t_1)\in M_1$ bo'lgani uchun M_1 to'plamdagi transversallik shartidan $\xi(t)$ funksiya uchun

$$\xi(t_1)=\langle\tilde{y}(t_1),\psi(t_1)\rangle-\langle x(t_1),\psi(t_1)\rangle=-\langle\tilde{y}(t_1),-\psi(t_1)\rangle+c(M_1,-\psi(t_1))\geq 0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan $I=[t_0+\varepsilon,t_1]$ vaqt oralig'ida (11.9) tengsizlikni hisobga olib

$$\xi(t_0+\varepsilon)=\xi(t_1)-\int_{t_0+\varepsilon}^{t_1}\dot{\xi}(s)ds\geq 0 \tag{11.12}$$

munosabatni hosil qilamiz. $\tilde{y}(t_0+\varepsilon)\in M_0$ va $\varepsilon>0$ bo'lgani uchun M_0 to'plamdagi kuchaytirilgan tranversallik shartidan $t=t_0+\varepsilon$ bo'lganda

$$\langle\tilde{y}(t+\varepsilon),\psi(t_0+\varepsilon)\rangle\leq c(M_0,\psi(t_0+\varepsilon))<\langle x(t_0+\varepsilon),\psi(t_0+\varepsilon)\rangle$$

munosabat kelib chiqadi. Shuning ichun $\xi(t)$ funksiya uchun (11.12) tengsizlikka zid bo'lgan

$$\xi(t_0+\varepsilon)=\langle\overline{y}(t_0+\varepsilon),\psi(t_0+\varepsilon)\rangle<0$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Hosil qilingan qarama-qarshilik $u(t)$ boshqaruvni optimal ekanligini bildiradi va shu bilan teorema to'la isbotlandi.

Chiziqli tezkorlik masalalarni yechishda optimalikning yetarli shartlari haqidagi teoremadan qanday foydalanish mumkin? Bu yerda ikki usulni taklif qilish mumkin.

Birinchidan qandaydir $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi barcha $u(t),x(t)$ juftliklar bilan $\psi(t)$ qo'shma funksiyani topish kerak. Masalan bu ishni 10-ma'ruzada berilgan sxema bo'yicha amalga oshirish mumkin. Keyin topilgan $x(t)$ yechimlar uchun M_0 va M_1 to'plamlardagi kuchaytirilgan transversallik shartlarini, ya'ni (11.6) va (11.7) tengsizliklarni tekshirish lozim. Agar hech bo'lmaganda bu shartlardan biri $x(t)$ yechim uchun bajarilsa, u holda $u(t),x(t)$ mos juftlik optimal bo'ladi va shuning uchun optimal tezkorlik masalasi yechilgan bo'ladi.

Ikkinchidan qandaydir fizik yoki geometrik tasavvurlar bo'yicha optimallikka shubhali bo'lgan $u(t)$, $x(t)$ juftliklar tanlanadi. Keyin bu juftliklar uchun (11.2) qo'shma sistema yechimi bo'lgan, (11.3)-(11.5) tengliklarni va (11.6) yoki (11.7) tengsizliklardan birini qanoatlantiruvchi $\psi(t)$ funksiyani qurish kerak. Agar bunday $\psi(t)$ funksiyani qurish amalga oshirilsa, u holda $u(t)$, $x(t)$ juftlik optimal boladi. Bu usul bilan Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi barcha $u(t)$, $x(t)$ juftliklarni izlash kerak emas. Bu o'ta og'ir masala. Ammo yutuqqa erishish izlanuvchining malakasiga va xususiy holda omad kelishiga bog'liq. Biroq yetarlicha sondagi misollarni yechish bilan zarur bo'lgan malakalarga erishish qiyin emas.

Albatt muayyan masalani yechishda $u(t)$, $x(t)$ juftlik optimal bo'lib $\psi(t)$ qo'shma funksiya bilan Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantirishi biroq kuchaytirilgan transversallik shartlaridan hech biri bajarilmasligi mumkin. Bular optimallikning yetarli sharti bilan optimallikning zaruriy sharti (maksimum prinsipi) orasida ma'lum bo'shliq bo'lishi mumkinligini ko'rsatadi. Optimal tezkorlikning bunday masalasini yechish uchun $[t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi barcha $u(t), x(t)$ juftliklarni izlash zarur. Agar bunday juftlik yagona (10-ma'ruzaning 1-, 3- misolarida shunday bo'lgan edi) bo'lsa bu juftlik optimaldir. Agar bunday juftlik bir nechta bo'lsa (xuddi shu ma'ruzaning 2-misoli), u holda uzunligi $t_1 - t_0$ bo'lgan barcha kesmalar orasidan minimal uzunlikka ega bo'lgan kesma tanlanadi. Bunda $u(t)$, $x(t)$ mos juftlik tezkorlik bo'yicha optimal bo'ladi.

Optimallikning yetarli sharti haqidagi teoremada M_0 va M_1 qavariq to'plamlar bo'lmasligi mumkin.

Tezkorlik masalalarini yechishda optimallikning yetarli shartidan qanday foydalanish mumkinligini misollarda ko'rsatamiz.

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u^2, \ |u^2| \le 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilgan obyektni

$$M_0 = \left\{ x \in R^2 : x^1 = -\frac{5}{2}, |x^2| \le 1 \right\},$$

to'plamdan

$$M_1 = \left\{ x \in R^2 : 1 \le x^1 \le 2, x^2 = 0 \right\}$$

to'plamga eng qisqa vaqt orasida olib o'tuvchi optimal boshqaruv masalasini qaraylik. Oldingi ma'ruzada bu masala uchun obyektni M_0 to'plamdan M_1 to'plamga $I = [0, 3]$ vaqt oralig'ida olib o'tuvchi $u(t)$ boshqaruv va $x(t)$ yechim qurilgan edi. Bunda $u(t)$, $x(t)$ juftlik bu vaqt oralig'ida Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradi. $x(t)$ yechim

$$x(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{5}{2}, t + 1 \right), & agar\ 0 \le t \le 1\ bo'lsa, \\ \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t - \frac{7}{2}, -t + 3 \right), & agar\ 0 < t \le 3\ bo'lsa, \end{cases}$$

ko'rinishga ega. Qo'shma sistemaning $\psi(t)$ mos yechimi

$$\psi(t) = (\psi^1(0), -\psi^1(0)t + \psi^2(0))$$

ko'rinishda bo'lib, $(\psi^1(0),\psi^2(0))\in S$ boshlang'ich shartlar $\psi^2(\theta)=0$ shartdan aniqlanadi, bu yerda $\theta=1$. $\psi(t)$ funksiya bu shartni qanoatlantirishini tekshirish qiyin emas va u

$$\psi(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ko'rinishga ega.

Agar biz $x(t)$ yechim $\psi(t)$ qo'shma funksiya bilan [0,3] vaqt oralig'ida optimallikning yetarli sharti haqidagi teoremaga asosan (11.7) transversallikning kuchaytirilgan shartini qanoatlantirsa, u holda $x(t)$ yechim va $u(t)$ boshqaruv optimal bo'ladi. Buni ko'rsatamiz. Berilgan masalada M_1 to'plamning tayanch funksiyasi

$$c(M_1,\psi)=\frac{3}{2}\psi^1+\frac{1}{2}\left|\psi^1\right|$$

shart bilan beriladi. Bu tayanch funksiyani, $x(t)$ yechimni va $\psi(t)$ qo'shma funksiyani (11.7) tengsizlikka qo'yib, sodda hisoblashlardan keyin

$$\frac{\sqrt{2}}{2}t^2-\sqrt{2}t+\frac{5}{2}\sqrt{2}>0,\quad agar\quad 0\le t\le 1$$

ko'rinishdagi tengsizlikni, va

$$\frac{\sqrt{2}}{2}t^2-\sqrt{2}t+\frac{3}{2}\sqrt{2}>0,\quad agar\quad 1<t<3$$

ko'rinishdagi tengsizlikni yozamiz. Agar t mos oraliqlardan qiymatlar qabul qilsa, har ikkala tengsizlik ham bajarilishini tekshirish qiyin emas. Demak $x(t)$ yechim $\psi(t)$ funksiya bilan M_1 to'plamga $I=[0,3]$ vaqt oralig'ida transversallikning kuchaytirilgan shartini qanoatlantirganligi uchun optimal bo'ladi.

Endi chiziqli tezkorlik masalasida so'nggi M_1 to'plam yagona $x_1=0$ nuqtadan iborat, ya'ni $M_1=\{0\}$ bo'lgan xususiy holini qaraymiz. Agar M_1 to'plam yagona $x_1\ne 0$ nuqtadan iborat bo'lsa, u holda o'zgaruvchini

chiziqli almashtirishdan so'ng, bu holat [illegible]
Chiziqli tezkorlik masalasining bu [illegible]
tekshiriladigan optimallikning o'ta [illegible]
mumkin.

Natija. *$u(t)$ qandaydir joiz boshqaruv, [illegible] M_0 to'plamdan so'nggi $M_1 = \{0\}$ to'plamga [illegible] o'tuvchi unga (11.1) tenglamaning mos yechimi [illegible] $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'ida Pontryagin maksimum [illegible] lantiradi deb faraz qilamiz. Keyin (11.1) [illegible] oralig'ida $x = 0$ nuqtada lokal boshqariluvchan [illegible] optimal boshqaruv bo'ladi.*

Isboti. Berilgan shartlarda $x(t)$ yechim [illegible] $x(t)$ juftlikga mos keluvchi $\psi(t)$ funksiya [illegible] transversallikning kuchaytirilgan shartini [illegible] U holda optimal boshqaruvning yetarli sharti [illegible] $u(t)$ optimal boshqaruv bo'ladi.

$M_1 = \{0\}$ to'plam uchun (11.7) munosabat

$$\langle x(t), -\psi(t)\rangle > 0 \qquad (11.33)$$

ko'rinishda bo'ladi va barcha $t_0 \le t < t_1$ lar uchun [illegible] $t_0 \le \tau < t_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qandaydir $t = \tau$ [illegible] mahkamlaymiz. Barcha mumkin bo'lgan $u(t)$ joiz [illegible] tenglamaning yechimi bo'yicha $[\tau, t_1]$ vaqt oralig'ida $x = 0$ [illegible] boshiga keluvchi R^n holatlar fazosi nuqtalarining P to'plamini [illegible] Ixtiyoriy $y \in P$ nuqta uchun

$$\langle y - x(\tau), \psi(\tau)\rangle \ge 0 \qquad (11.34)$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, [illegible]

$$\langle y - x(\tau), \psi(\tau)\rangle < 0 \qquad (11.35)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $y \in R^n$ nuqtani va (11.1) tenglamaning $y(\tau) = y$ boshlang'ich shartini qanoatlantiruvchi [illegible]

$y(t)$ yechimini qaraymiz. U holda optimalikning yetarli sharti haqidagi birinchi teoremaning isbotidagidek quyidagi

$$\langle y(t_1)-x(t_1),\psi(t_1)\rangle=\langle y(\tau)-x(\tau),\psi(\tau)\rangle+\int_{\tau}^{t_1}\dot{\xi}(t)dt<0$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. $x(t_1)=0$ bo'lgani uchun bu tengsizlikdan $\langle y(t_1),\psi(t_1)\rangle<0$ tengsizlik kelib chiqadi, va demak $y(t_1)\neq 0$, ya'ni $y\notin P$. (11.14) tengsizlikka ko'ra

$$c(P,-\psi(\tau))=\max_{y\in P}\langle y,-\psi(\tau)\rangle\leq\langle x(\tau),-\psi(\tau)\rangle \qquad (11.15)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Qilingan farazimizga ko'ra obyekt $[\tau,t_1]$ vaqt oralig'ida $x=0$ nuqtada lokal boshqariluvchan (8-ma'ruzaga qarang) bo'lgani uchun, u holda shunday $\varepsilon>0$ soni mavjudki, bunda $S_\varepsilon(0)\subset P$ mansublik bajariladi. Tayanch funksiyalarining 8-xossasiga ko'ra (3-ma'ruzani qarang) bu ixtiyoriy $\psi\in R^n$ vektor uchun $\varepsilon\|\psi\|\leq c(P,\psi)$ tengsizlikni bajarilishini bildiradi. Koshi formulasidan

$$\psi(\tau)=e^{-(\tau-t_0)A^*}\psi(t_0)$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\|\psi(t_0)\|=1$ bo'lgani uchun $e^{-(\tau-t_0)A^*}$ matritsa xosmas matritsa bo'lgani uchun $\|\psi(\tau)\|\neq 0$. Demak $c(P,-\psi(\tau)\geq\varepsilon\|-\psi(\tau)\|>0$.
(11.15) shartga ko'ra

$$\langle x(\tau),-\psi(\tau)\rangle\geq c(P,-\psi(\tau))>0$$

munosabatni hosil qilamiz. Shunday qilib (11.13) munosabat barcha $t_0\leq t<t_1$ lar uchun bajarilishi isbotlandi, va demak natija isbotlandi.

2-misol Ushbu

$$\ddot{x}+x=f$$

tenglama bilan yozilgan mayatnikni muvozanat holatida to'xtatish masalasini qaraymiz, bu yerda x-mayatnikning muvozanat holatidan chetlanishi, f-mayatnikka qoyilishi mumkin bo'lgan kuch. Bu kuch $|f|\leq 1$

cheklanishni qanoatlantirishi kerak. Mayatnikning x_0 boshlang'ich holati va $\dot{x}_0$ boshlang'ich tezligi berilgan. Eng qisqa vaqt ichida mayatnikni muvozanat holatiga, yani $M_1 = \{(0,0)\}$ to'plamga olib o'tish talab qilinadi. Berilgan masalada $x^1 = x, x^2 = \dot{x}, u^1 = 0, u^2 = f$ almashtirishlar bajarib, bu masalani standart ko'rinishga keltiramiz. Harakat tenglamasi

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u^2, \ |u^2| \le 1 \end{cases} \qquad (11.16)$$

ko'rinishda yoziladi.

(11.16) tenglama bilan yozilgan obyekt ixtiyoriy $I = [t_0, t_1], t_1 > t_0$ vaqt oralig'ida $x = \{0\}$ nuqtada lokal boshqariluvchan bo'ladi. Haqiqatdan ham lokal boshqariluvchan haqidagi teoremani qo'llaymiz (8-ma'ruzaga qarang). $v = (0,1)$ deb olamiz. U holda $-v, v \in U$ bo'lib v, Av vektorlar chiziqli erkli, chunki

$$Av = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Shuning uchun yuqorida berilgan natija va optimallikning zaruriy sharti haqidagi teoremaga ko'ra $u(t)$ boshqaruv bu masalada optimal boshqaruv bo'ladi faqat va faqat, shundaki bu boshqaruv o'ziga mos $x(t)$ yechim bilan birga Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantirsa.

12-ma'ruza

- *Sintez masalasi.*
- *Optimal boshqaruvning yagonaligi.*
- *Holatning umumiylik sharti.*

12.1. Sintez masalasi haqida tushuncha

Optimal boshqaruvning sintez masalasini 11-ma'ruzaning 2-misolida qaraymiz. Mayatnikning holati

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u \end{cases} \qquad (12.1)$$

tenglamalar sistemasi bilan yozilib , bunda boshqaruv $u^1 = 0, |u^2| \leq 1$ ko'rinishga ega. Mayatnikni eng qisqa vaqt oralig'ida muvozanat holatida, ya'ni mayatnikni $M_0 = \{x_0\}$ boshlang'ich holatidan $x = 0$ muvozanat nuqtasiga keltirish talab qilinadi. Bunday masala qandaydir real texnik obyekt bilan yuz berishi mumkin. Bunda x_0 boshlang'ich holat ham noma'lum bo'lishi mumkin. Masalan mayatnik qandaydir noma'lum kuchlar ta'sirida x_0 holatga o'tishi va uni mumkin qadar eng qisqa vaqt ichida muvozanat nuqtasiga qaytarish kerak. Shuning uchun dastlab ixtiyoriy boshlang'ich shart bo'yicha tezkorlik masalasini yechish zarur. Bu masala *optimal boshqaruvning sintez masalasi* deyiladi.

Oldingi ma'ruzada berilgan tezkorlik masalasi uchun (2-misolni qarang)optimallikning yetarli sharti haqidagi birinchi teoremaning natijasini qo'llash mumkinligi ko'rsatilgan va qandaydir boshqaruvning optimal bo'lishi uchun bu boshqaruv va unga mos (12.1) tenglamaning $x(t)$ yechimi Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantirishi zarur va yetarli.

Bu prinsipni qanoatlantiruvchi barcha boshqaruvlarni topamiz. Uni bizning masalamizga qo'llanalidagan ko'rinishda yozamiz. Qo'shma tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \dot{\psi}^1 = \psi^2 \\ \dot{\psi}^2 = -\psi^1 \end{cases} \tag{12.2}$$

ko'rinishda bo'lishi ravshan. $U, M_0, M_1$to'plamlarning tayanch funksiyalarini bevosita hisoblaymiz. Ular:

$$c(U,\psi) = |\psi^2|, \quad c(M_0,\psi) = \langle x_0,\psi\rangle, \quad c(M_1,\psi) = 0$$

Maksimum sharti $u^2(t)\psi^2(t) = |\psi^2(t)|$, ya'ni

$$\begin{gathered} u^2(t) = +1,\ agar\ \psi^2(t) > 0\ bo'lsa, \\ u^2(t) = -1,\ agar\ \psi^2(t) < 0\ bo'lsa, \\ -1 \leq u^2(t) \leq +1,\ agar\ \psi^2(t) = 0\ bo'lsa. \end{gathered} \tag{12.3}$$

ko'rinishga ega.

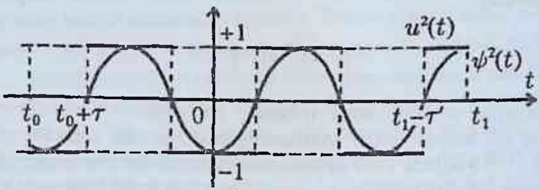
M_0 va $M_1$to'plamlar bittadan nuqtalardan tashkil topganligi uchun $M_0$to'plamda ham, $M_1$to'plamda ham transversallik shartlari trivial ko'rinishda bajariladi. Bular $x(t)$ yechimga $x(t_0)=x_0$,$x(t_1)=x_1$ shartlardan boshqa hech qanday cheklanishlarni qo'ymaydi. Shuning uchun berilgan masalada, agar (12.2)qo'shna sistemaning $\psi(t_0)\in S$ boshlang'ich shartli (12.3)munosabatni qanoatlantiruvchi $\psi(t)$ yechimi mavjud bo'lsa, u holda $u(t),x(t)$ juftlik $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradi.

Ixtiyoriy $\psi(t_0)\in S$ boshlang'ich shart bo'yicha (12.2) qo'shma sistemaning yechimini topamiz. Buning uchun $\psi(t_0)$ boshlang'ich vektorni $\psi(t_0)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ ko'rinishda beramiz, bu yerda α $[0,2\pi]$ oraliqdagi ixtiyoriy son. (12.2) tenglamani bu boshlang'ich shart bo'yicha yechib,

$$\psi^1(t)=\cos(\alpha+t_0-t),\quad \psi^2(t)=\sin(\alpha+t_0-t)$$

yechimlarni topamiz.

(12.3) maksimum shartini qanoatlantiruvchi $u^2(t)$ boshqaruv $\psi^2(t)$ funksiya bilan aniqlanadi. Ixtiyoriy $[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida $\psi^2(t)$ funksiyaning xususiyatlarini qarab chiqamiz. Bu funksiya 55-chizmada tasvirlangan.



55-chizma

Birinchidan $\psi^2(t)$ funksiya har π vaqt oralig'ida o'z ishorasini almashtiradi. Ikkinchidan vaqtning t_0 momentidan keyin $\psi^2(t)$ funksiyaning birinchi ishora almashishi ixtiyoriy $\tau\leq\pi$ vaqt oralig'ida amalga oshishi mumkin. Bunda $[t_0, t_0+\tau]$ vaqt oralig'ida $\psi^2(t)$ funksiya musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin. Bunga $\alpha \in [0,2\pi]$ sonining mos keluvchi qiymatini tanlash bilan erishish mumkin. Va nihoyat $[t_0, t_1]$ kesmaning oxirgi t_1 momentigacha $\psi^2(t)$ funksiyaning so'nggi ishora almashishi ixtiyoriy $\tau' \le \pi$ vaqtda amalga oshishi mumkin. Bunda $[t_1-\tau',\ t_1]$ vaqt oralig'ida $\psi^2(t)$ funksiya musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin va bunga $\alpha \in [0,2\pi]$ sonining mos keluvchi qiymatini tanlash bilan erishish mumkin.

Shunga ko'ra (12.3) maksimum shartini qanoatlantiruvchi $u^2(t)$ boshqaruv $[t_0, t_0+\tau]$, $\tau \le \pi$ yoki +1 ga, yoki -1 ga teng bo'lishi, keyin u o'z ishorasini bir necha bor har π ga teng vaqt oralig'ida almashtirishi, va nihoyat $[t_1-\tau',\ t_1]$, $\tau' \le \pi$ vaqt oralig'ida yoki +1 ga, yoki -1 ga teng bo'lishi mumkin.

R^2 holatlar tekisligida $u^2(t)=+1$ va $u^2(t)=-1$ bo'lganda (12.1) tenglamaning $x(t)$ harakat trayektoriyasi amalga oshadigan egri chiziqlarni chizamiz. Agar $u^2(t)=+1$ bo'lsa, u holda (12.1) tenglama

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1+1 \end{cases} \tag{12.4}$$

ko'rinishni oladi. Birinchi tenglamani ikkinchisiga bo'lib va integrallab, R^2 tekislikda

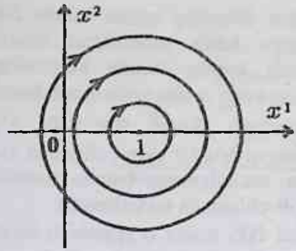
$$(x^1-1)^2+(x^2)^2=c^2$$

egri chiziqlar oilasini hosil qilamiz, bu yerda c- trayektoriyaning boshlang'ich nuqtasi bilan aniqlanadigan o'zgarmas son. Bu chiziqlar markazi (1,0) nuqtada 1-tur aylanalardir. Ular 56-chizmada tasvirlangan.

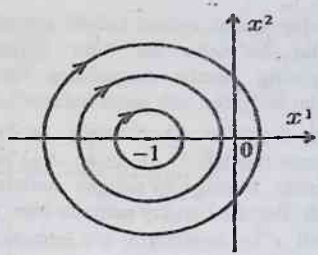
Aylana bo'ylab harakat, o'zgarmas burchak tezlik bilan soat strelkasi bo'yicha amalga oshadi , shu bilan birga aylana bo'ylab to'liq aylanish 2π vaqtda sodir bo'ladi. Bu (12.1) tenglamaning ixtiyoriy $x(t)$ yechimi

$$x(t)=(1+c\cos(\varphi-t),\ \ c\sin(\varphi-t))$$

ko'rinishda bo'lishidan aniqlanadi



56-chizma



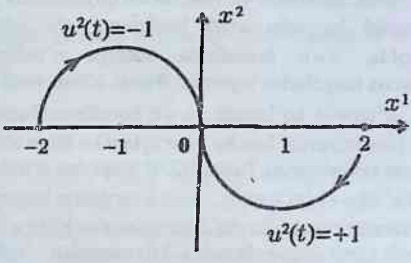
57-chizma

Xuddi shu kabi, $u^2(t)=-1$ bo‘lganda $x(t)$ holat nuqtasining harakati markazi (-1,0) nuqtada harakat 2-tur aylana bo‘lib, u ham o‘zgarmas burchak tezlik bilan soat strelkasi bo‘yicha aylana bo‘ylab amalga oshadi shu bilan birga aylana bo‘ylab to‘liq aylanish 2π vaqtda sodir bo‘ladi,. Shunday qilib, vaqtning t momentlarida $u^2(t)=+1$ bo‘lsa, $x(t)$ holat nuqtasi 56-chizmada tasvirlangan 1-tur aylana bo‘ylab, vaqtning t momentlarida $u^2(t)=-1$ bo‘lsa, $x(t)$ holat nuqtasi 57-chizmada tasvirlangan 2-tur aylana bo‘ylab harakatini amalga oshiradi. Optimal boshqarishning sintez masalasini yechish uchun quyidagicha yo‘l tutamiz. Maksimum prinsipi bo‘yicha $u^2(t)$ boshqaruv o‘z ishorasini o‘zgartirmagan holda, $x=0$ koordinata boshiga o‘tadigan holatlar tekisligining barcha nuqtalarini topamiz. Bunda o‘tish vaqti $T=t_1-t_0$ π dan katta emas. $u^2(t)\equiv+1$ bo‘lganda , $x=0$ koordinata boshiga (0,0) va (2,0) nuqtalarni tutashtiruvchi barcha 1-tur aylanalar bilan o‘tish mumkin. Ular 58-chizmada tasvirlangan. Bunda (2,0) nuqtadan o‘tish vaqti $T=\pi$. Xuddi shu kabi $u^2(t)\equiv-1$ bo‘lganda , $x=0$ koordinata boshiga (0,0) va (-2,0) nuqtalarni tutashtiruvchi barcha 2-tur aylanalar bilan o‘tish mumkin. Ular 58-chizmada tasvirlangan. Bunda (-2,0) nuqtadan o‘tish vaqti $T=\pi$

Maksimum prinsipi bo‘yicha $u^2(t)$ boshqaruv o‘z ishorasini faqat bir marta o‘zgartirish bilan, $x=0$ koordinata boshiga o‘tadigan holatlar tekisligining barcha nuqtalarini topamiz. Agar $u^2(t)$ boshqaruv dastlab -1 ga, keyin +1 ga teng bo‘lsa, u holda $x(t)$ holat trayektoriyasi avval 2-tur aylanalar bo‘yicha, keyin 1-tur aylanalar bo‘yicha amalga oshadi. Ammo koordinata boshiga ishora almashishisiz 58-chizmada tasvirlangan faqat bitta 1-tur yarim aylana kelishi mumkin. Shuning uchun barcha 2-tur aylanalar bo'yicha bu 1-tur aylanaga kelib tushadigan holatlar tekisligining barcha nuqtalarini topish kerak. Bunda ko'rsatilgan aylanalar bo'yicha $x(t)$ nuqta harakatining vaqti π dan katta emas. Barcha bunday nuqtalar 59-chizmada tasvirlangan. Xuddi shu kabi $u^2(t)$ boshqaruv dastlab +1 ga, keyin -1 ga teng qiymatlar qabul qilganda $x=0$ koordinata boshiga o'tadigan holatlar tekisligining barcha nuqtalari quriladi. Barcha bunday nuqtalar ham 59-chizmada tasvirlangan.

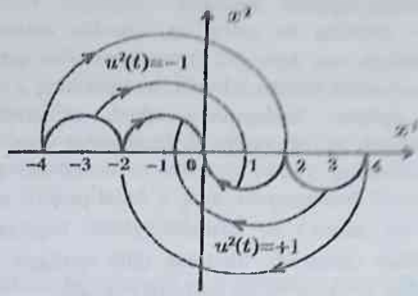
Endi $u^2(t)$ boshqaruv o'z ishorasini ikki marta o'zgartirish bilan , $x=0$ koordinata boshiga o'tadigan holatlar tekisligining barcha nuqtalarini topamiz. Aytaylik $u^2(t)$ boshqaruv dastlab +1 ga, keyin -1 ga, harakatning oxirida yana +1 ga teng qiymatlar qabul qilsin. U holda $u^2(t)=-1$ bo'lganda harakat vaqti π ga teng bo'lishi kerak. Shuning uchun,

58-chizmada tasvirlangan nuqtalar to'plamiga yana $u^2(t)=+1$ boshqaruv bilan 1-tur aylanalar bo'yicha , π ga teng yoki kichik vaqtda, (0,-4) va (0,-2) nuqtalarni tutashtiruvchi yarim aylanaga o'tadigan tekislikning nuqtalarini ham kiritish kerak. Xuddi shu kabi $u^2(t)$ boshqaruv ketma-ket -1,+1,-1 qiymatlar qabul qilganda koordinata boshiga o'tadigan tekislikning nuqtalar to'plamini topamiz.



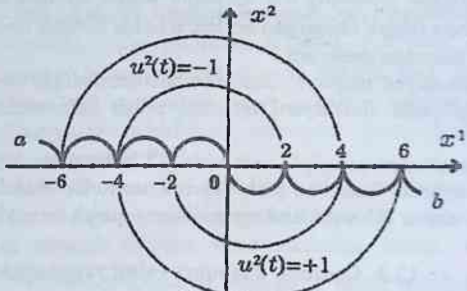
58-chizma

Ikkitadan ortiq bo'lmagan ishora almashishlari bo'yicha koordinata boshiga keltirilishi mumkin bo'lgan tekislikning barcha nuqtalari to'plami 59-chizmada tasvirlangan.



59-chizma

Bu jarayonni davom ettirib holatlar fazosining har bir $x_0 \in R^2$ nuqtasi uchun, $u(t)=(0,u^2(t))$ boshqaruv bilan x_0 nuqtani $x=0$ koordinata boshiga olib o'tuvchi $x(t)$ yechimni quramizki, bunda $u(t)$, $x(t)$ juftlik Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantirsin (60-chizma).



60-chizma

Demak, bunday $u(t)$ boshqaruv optimal boshqaruvdir. $u^2(t)$ optimal boshqaruv birlik radiusga ega bo'lgan yarim aylanalardan tashkil topgan *aob* chiziqda o'z ishorasini o'zgartiradi. Bu chiziqning yuqorisida va uning ao qismida optimal boshqaruv $u^2(t)=-1$ ko'rinishga, aob chiziqning quyi qismida va uning ob qismida optimal boshqaruv $u^2(t)=+1$ ko'rinishga ega. Agar (12.1) tenglama bilan qandaydir texnik obyektning xususiyatlari yozilsa, u holda bu obyektning x holati bo'yicha $u(x)=(0,u^2(x))$ optimal boshqaruvni ishlab chiqaradigan optimal regulyatorni bevosita qurish mumkin. Haqiqatdan ham, agar x holat nuqtasi aob chiziqning yuqori qismida va uning ao qismida yotsa, regulyator $u^2(t)=-1$ boshqaruvni, agar x holat nuqtasi aob chiziqning quyi qismida va uning ob qismida yotsa, regulyator $u^2(t)=+1$ boshqaruvni ishlab chiqaradi. Shunday qilib qurilgan $u(x)=(0,u^2(x))$ funksiyaga *optimal sintez qiluvchi funksiya* deyiladi.

Endi tasodifiy kuchlar ta'sirida mayatnik qanday x_0 boshlang'ich nuqtaga tashlanganligi muhim emas. $u^2(x)$ funksiyani ishlab chiqaruvchi avtomatik regulyator bu nuqtani eng qisqa vaqt oralig'ida muvozanat holatiga olib keladi. Bundan tashqari mayatnikni x_0 boshlang'ich nuqtadan $x=0$ koordinata boshiga olib o'tishda, yana qandaydir tasodifiy kuch uni yangi x_0' nuqtaga tashlasin. Bu holda ham avtomatik regulyator x_0' nuqtani eng qisqa vaqt oralig'ida muvozanat holatiga olib keladi. Agar regulyator berilgan boshlang'ich x_0 nuqta uchun optimal boshqaruvni $u^2(t)$ ko'rinishda ishlab chiqargan bo'lsa, u holda bunday chetlanishlarni hisobga olish mumkin emas edi.

Bundan amaliyot nuqtayi nazaridan boshqariladigan obyekt uchun $u(x)$ sintez qiluvchi funksiyani qurishni bilish juda muhim ekanligi tushunarli.
Pontryagin maksimum prinsipi yordamida (12.1) tenglama bilan yozilgan matematik mayatnik kabi, ko'plab chiziqli tezkorlik masalalari uchun shunday $u(x)$ sintez qiluvchi funksiyani doimo qurish mumkin.

12.2. Optimal boshqaruvning yagonaligi

10- ma'ruzada aniqlashtirilmagan savol: qanday shartlar bajarilganda chiziqli tezkorlik masalasida qo'shma funksiyaning berilgan boshlang'ich $\psi(t_0)\in S$ qiymati uchun Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi yagona $u(t)$, $x(t)$ juftlik mavjud?. 40-chizmada keltirilgan sxema bo'yicha bir qiymatlilikni buzilishi faqat ikki joyda ro'y berishi mumkin. Holat vektorining $x(t_0) \in M_0$ boshlang'ich qiymati M_0 to'plamdagi

$$\langle x(t_0),\ \psi(t_0)\rangle = c(M_0,\ \psi(t_0)) \tag{12.5}$$

transversallik shartidan bir qiymatli aniqlanmasligi mumkin, shuningdek $u(t) \in U$ boshqaruv ham

$$\langle u(t\ ),\ \psi(t\ )\rangle = c(U,\ \psi(t\ )) \tag{12.6}$$

maksimum shartidan bir qiymatli aniqlanmasligi mumkin.

$u(t)$ boshqaruvning yagonaligi, ikkita o'lchovli funksiyalar biror kesmada deyarli ustma-ust tushsa, ular bu kesmada teng ma'nosida tushuniladi.

Bu qadamlarning qaysi birida bir qiymatli moslik mos kelishini, va $\psi(t_0) \in S$ berilgan qiymat bo'yicha maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi yagona $u(t)$, $x(t)$ juftlik mos kelishini ko'rib chiqamiz.

Yagonalikning birinchi teoremasi. *$\psi(t_0) \in S$ boshlang'ich shart bo'yicha qo'shma sistemaning $I = [t_0, t_1]$ vaqt oralig'idagi $\psi(t)$ yechimi berilgan bo'lsin. $c(M_0, \psi)$ tayanch funksiya $\psi(t_0)$ nuqtada ψ bo'yicha differensiallanuvchi, ya'ni bu nuqtada $c(M_0, \cdot): R^n \to R^1$ funksiyaning gradiyenti mavjud bo'lsin. Keyin deyarli barcha $t \in I$ uchun $c(U, \psi)$ tayanch funksiya $\psi(t)$ nuqtada ψ bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsin. U holda Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi mos $u(t)$, $x(t)$ juftlik yagona bo'ladi.*

Isboti. $c(M_0, \psi)$ tayanch funksiya $\psi(t_0)$ nuqtada ψ bo'yicha differensiallanuvchi, geometrik nuqtayi nazardan M_0 to'plam uchun $\psi(t_0)$ yo'nalishdagi tayanch to'plam bitta nuqtadan iborat, va bu nuqta $\dfrac{\partial c(M_0, \psi(t_0))}{\partial \psi}$ vektordan iborat.bu tasdiqning isboti qo'shimchaning D5 bo'limida keltirilgan. Xuddi shu kabi $c(U, \psi)$ tayanch funksiyaning $\psi(t)$ nuqtada ψ bo'yicha differensiallanuvchanligi U to'plam uchun $\psi(t)$ yo'nalishdagi tayanch to'plam bitta nuqtadan iborat, va bu nuqta $\dfrac{\partial c(U, \psi(t))}{\partial \psi}$ vektordan iborat. Demak (12.5) shartdan yagona

$x(t_0)=\dfrac{\partial c(M_0,\psi(t_0))}{\partial\psi}$ vektor, (12.6) shartdan esa, deyarli barcha $t\in I$ uchun yagona $u(t)=\dfrac{\partial c(U,\psi(t))}{\partial\psi}$ vektor aniqlanadi. Teorema isbotlandi.

Agar F to'plam bilan uning ixtyoriy gipertekisligi yagona nuqtada kesishsa, bu to'plamga *qat'iy qavariq to'plam* deyiladi.

Natija. *M_0 qat'iy qavariq to'plam va deyarli barcha $t\in I$ uchun U to'plam ham qat'iy qavariq to'plam bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\psi(t_0)\in S$ boshlang'ich qiymat uchun maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi $u(t)$, $x(t)$ juftlik yagona bo'ladi.*

Bu natijaning *isboti* tayanch funksiya differensiallanuchanligining geometrik ma'nosidan kelib chiqadi.

12.3. Holatning umumiylik sharti

Harakati

$$\dot{x}=Ax+u \tag{12.7}$$

tenglama bilan yozilgan obyekt uchun, tezkorlik masalasini qaraymiz, bu yerda $u(t)$ boshqaruvga cheklanishlar beruvchi U to'plami R^n fazoda qavariq, yopiq chegaralangan *ko'pyoqli.* Bunda boshang'ich holatlaning M_0 to'plami va songgi holatlarning M_1 to'plami xuddi avvalgidek R^n fazoning bo'sh bo'lmagan, qavariq kompakt to'plamlari deb hisoblaymiz.

R^n fazodagi qavariq, yopiq Q ko'pyoqli chekli sondagi yopiq yarim fazolarning kesishmasidan, ya'ni chekli sondagi

$$Q=\{x\in R^n:\langle x,b_j\rangle\le a_j,\ j=1,2,...,s\}$$

chiziqli tengsizliklar bilan beriladi. U to'plam yopiq chegaralangan ko'pyoqli bo'lgan holi qiziqarli bo'lib, amaliyotda ko'p uchraydi. Bu hol yetarlicha umumiydir, chunki R^n fazodagi har qanday U kompaktni Xausdorf metrikasi bo'yicha qavariq, yopiq chegaralangan Q ko'pyoqli bilan istalgan aniqlikda yaqinlashtirish mumkin.

Ixtiyoriy

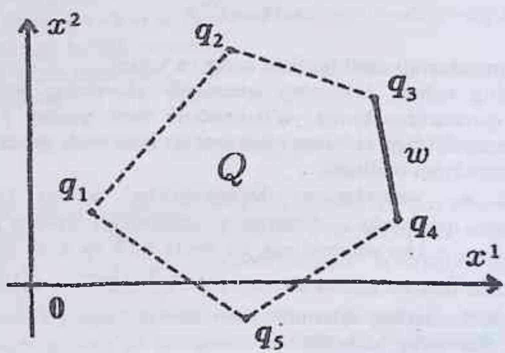
$$\Gamma=\{x\in R^n:\langle x,b\rangle\le a,\ b\ne 0\}$$

gipertekislik

$$\Gamma=\{x\in R^n:\langle x,b\rangle\le a,\langle x,-b\rangle\le -a\}$$

ko'rinishda ifodalanishi mumkin bo'lgani uchun, u holda giperteklislik qavariq, yopiq ko'pyoqli bo'ladi. Bundan qavariq, yopiq Q ko'pyoqlining tayanch to'plami Q' yana qavariq, yopiq ko'pyoqli bo'lishi kelib chiqadi.

Q ko'pyoqlining tayanch to'plami deb uning *yoqlari* deyiladi. Shuning uchun Q ko'pyoqlining ixtiyoriy yog'i Q' bu ko'pyoqlining o'zi bilan ustma-ust tushmasa Q' ko'pyoqlining o'lchami Q ko'pyoqlining o'lchamidan kichik bo'ladi (qo'shimchaning D7 bo'limidagi qavariq to'plamning o'lchami ta'rifiga qarang). Bunda Q' ko'pyoqlining barcha yoqlari ham dastlabki Q ko'pyoqlining yoqlari bo'ladi. Q qavariq ko'pyoqli chegaralangan bo'lsa, u holda bu qavariq ko'pyoqli chekli sondagi nol o'lchamli yoqlarga, ya'ni bitta nuqtadan tashkil topgan yoqlarga ega bo'ladi. Bunday yoqlar Q ko'pyoqlining *uchlari* deyiladi. O'lchami birga teng yoqlarga Q ko'pyoqlining *qirralari* deyiladi. Agar Q ko'pyoqli chegaralangan va $q_1,q_2,...,q_s$ uning uchlari bo'lsa, u holda Q ko'pyoqli o'z uchlarining qavariq qobig'I bilan ustma-ust tushadi, har bir ω qirrasining qandaydir ikkita qo'shni uchlarining qavariq qobig'i, ya'ni kesmadan iborat bo'ladi (61-chizma).



61-chizma.

ω qirra q_i va q_j qirralarning qavariq qobig'i, ya'ni $\omega = conv\{q_i, q_j\}$ bo'lsin. U holda $v = \lambda(q_i - q_j)$ vektorga Q ko'pyoqli ω qirrasining yo'nalishi deb aytamiz, bu yerda $\lambda \neq 0$.

Kelgusida, (12.7) tenglamaning koeffitsiyentlari va yopiq qavariq U ko'pyoqlining R^n fazoda joylashishida *holatning umumiylik sharti* v vektor U ko'pyoqli qirralaridan birining yo'nalishi bilan bir xil yo'nalishga ega bo'lganda,

$$v, Av, ..., A^{n-1}v \tag{12.8}$$

vektorlarning chiziqli erkli bo'lishidan iborat.

Holatning umumiylik shartini geometrik ma'nosini tushuntiramiz. Buning uchun bizga invariant qism fazo tushunchasi zarur.

Agar ixtiyoriy $x \in L$ vektor uchun, Ax vektor ham yana L qism fazoga tegishli bo'lsa, u holda R^n fazoning chiziqli L qism fazosiga A chiziqli almashtirishga nisbatan *invariant* deyiladi. Agar L qism butun R^n fazo bilan ustma-ust tushmasa, va faqat nollardan iborat bo'lmasa L qism fazoga *xos qism fazo* deyiladi. Noldan farqli x vektor A almashtirishga nisbatan invariant L qism fazoning qandaydir xos qism fazosida yotishi uchun

$$x, Ax, ..., A^{n-1}x$$

vektorlarning chiziqli erkli bo'lishi zarur va yetarli.

Shuning uchun, *holatning umumiylik sharti*ning bajarilishi, U ko'pyoqli qirralaridan biriga yo'nalishdosh hech qanday v vektor A chiziqli almashtirishga nisbatan *invariant* bo'lgan hech qanday *xos qism fazo*da yotmasligini bildiradi.

$u_1, u_2, ..., u_m$ vektorlar U ko'pyoqlining uchlari bo'lsin. U ko'pyoqlining qandaydir ω qirrasiga yo'nalishdosh bo'lgan ixtiyoriy v vektor $v = \lambda(u_i - u_j)$ ko'rinishga ega, bu yerda $\lambda \neq 0$ va u_i, u_j- mos qirralar bo'lsa, u holda $i \neq j$ bo'lganda, $u_i - u_j, A(u_i - u_j), ..., A^{n-1}(u_i - u_j)$ ustunlardan tuzilgan matritsalarning diterminantlari noldan farqli bo'lsa, *holatning umumiylik sharti*ning bajarilishi ravshan, uni ko'rish qiyin emas. Agar ixtiyoriy A matritsa va ixtiyoriy qavariq, yopiq chegaralangan U ko'pyoqli uchun doimo A matritsaning a_{ij} elementlarini yetarlicha kichik o'zgartirish bilan barcha bunday diterminantlar noldan farqli bo'ladi va holatning umumiylik sharti bajarilishini ko'rish qiyin emas. Agarda holatning umumiylik sharti bajarilsa, u holda U qavariq ko'pyoqli chekli sondagi qirralarga ega bo'lganligi uchun A matritsaning elementlarini va U ko'pyoqlining uchlarini ixtiyoriy kichik o'zgarish bilan bu shartni buzish mumkin emas.

Shuning uchun holatning umumiylik sharti o'zgaruvchan emas, chunki u faqat kamdan-kam hollarda bajarilmasligi mumkin, uning bajarilishini doimo A matritsaning a_{ij} elementlarini yetarlicha kichik o'zgartirish bilan bajarilishini ta'minlash mumkin. Bundan tashqari, boshqariladigan sistema ((12.7) tenglamaning koeffitsiyentlari va U ko'pyoqli uchlarining koordinatalari) parametlarining bu xossasi kichik chetlanishlarga nisbatan turg'un bo'ladi.

Quyidagi natija: holatning umumiylik shartining bajarilishi, (12.2) qo'shma sistemaning ixtiyoriy aynan noldan farqli $\psi(t)$ yechimi bo'yicha (11.3) maksimum shartini qanoatlantiruvchi $u(t)$ boshqaruvni U ko'pyoqli uchlarida qiymatlar qabul qilivchi, bo'lakli o'zgarmas funksiya sifatida yagona ko'rinishda aniqlash imkoniyatini berishini ko'rsatadi.

Almashishlar sonining chekliligi haqidagi teorema. *Holatning umumiylik sharti bajarilsa va $\psi(t)$ (11.2) qo'shma sistemaning $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'idagi ixtiyoriy yechimi bo'lsin. U holda t vaqtning chekli sondagi momentlaridan tashqari barcha momentlarida (11.3) maksimum sharti $u(t)$ boshqaruvni U ko'pyoqli uchlaridan biri sifatida bir qiymatli aniqlaydi. Bunda berilgan $u(t)$ boshqaruv chekli sondan ortiq bo'lmagan uzulishlarga ega bo'lishi mumkin.*

Isboti Mahkamlangan t uchun $u \in U$ noma'lum vektorga nisbatan tenglama sifatida

$$\langle u,\psi(t)\rangle = c(U,\psi(t)) \tag{12.9}$$

maksimum shartini qaraymiz. U holda skalyar ko'paytmaning chiziqli ekanligiga ko'ra u o'zgaruvchining $\langle u,\psi(t)\rangle$ funksiyasi U o'zgarmas yoki U ko'pyoqli o'lchamiga nisbatan kichik o'lchamli bo'lgan U ko'pyoqlining qandaydir U' yog'ida o'zining maksimal qiymatiga erishadi. Bu hol nol o'lchamli yog'iga, ya'ni uchida, yoki qandaydir o'lchami nolga teng bo'lmagan U' yog'ida bo'lishi mumkin. Keyingi holda $\langle u,\psi(t)\rangle$ funksiya U' da o'zgarmas, va demak U' ko'pyoqlining qandaydir ω qirrasida (o'lchami birga teng bo'lgan yoq) o'zgarmasdir. U' ko'pyoqlining har bir yog'i U ko'pyoqlining ham yog'i bo'lganligi uchun, u holda bu ω qirra U ko‘pyoqlining qirrasi bo‘ladi. Demak $\langle u,\psi(t)\rangle$ funksiyaning maksimumi U ko‘pyoqlining qirrasi bo‘lgan yagona nuqtada, yoki bu ko‘pyoqlining qandaydir ω qirrasining barcha nuqtalarida erishiladi. Holatning umumiylik shartiga ko‘ra bu maksimum qandaydir ω qirrasida faqat chekli sondagi $t$ning qiymatlari uchun erishilishini ko‘rsatamiz.

Haqiqatdan ham, teskaridan faraz qilamiz, y’ani $\langle u,\psi(t)\rangle$ funksiyaning maksimumi U ko‘pyoqlining qirrasida $t$ning cheksiz ko‘p qiymatlarida erishilsin. U holda U ko‘pyoqlining qirralari soni chekli bo‘lganligi uchun, u holda shunday ω qirra topiladiki, bunda maksimum vaqtning sanoqli sondagi $\tau_1,\tau_2,...\in I$ momentlari uchun erishiladi. Bu ω qirra u' va u'' uchlardan tashkil topgan bo‘lsin.U holda

$$\langle u',\psi(\tau_i)\rangle = \langle u'',\psi(\tau_i)\rangle, i=1,2,\ldots$$

Demak ω qirra bilan yo‘nalishdosh bo‘lgan $v=u'-u''$ vektor uchun

$$\langle v,\psi(\tau_i)\rangle = 0 \quad (i=1,2,...).$$

tengliklar hosil bo‘ladi. $\psi(t)$ funksiya (11.2) chiziqli differensiyal tenglamalar yechimi bo‘lgani uchun analitik funksiyadir, bundan esa barcha $t\in I$ nuqtalar uchun $\langle v,\psi(t)\rangle=0$. I kesmaning barcha ichki nuqtalarda $\langle v,\psi(t)\rangle\equiv 0$ ayniyatni ketma ket $n-1$ marta differensiallab va $\psi(t)$ funksiya (11.2) qo‘shma sistemaning yechimi ekanligidan foydalanib I kesmada quyidagi n ta

$$\begin{gathered}\langle v,\psi(t)\rangle\equiv 0 \quad \forall t\in I,\\ \langle Av,\psi(t)\rangle\equiv 0 \ \forall t\in I,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \langle A^{n-1}v,\psi(t)\rangle\equiv 0 \ \forall t\in I,\end{gathered}$$

ayniyatlarni hosil qilamiz. Holatning umumiylik shartiga ko‘ra (12.8) vektorlar chiziqli erkli. Demak I kesmada $\psi(t)\equiv 0$, bu esa $\psi(t)$ funksiyaning aynan nolga teng emasligiga zid.

Demak $\psi(t)$ funksiya (12.9) maksimum shartidan $u(t)$ boshqaruvini t ning chekli sondagi qiymatlardan tashqari U ko‘pyoqlining qandaydir uchi sifatida bir qiymatli aniqlashi isbotlandi. Aytaylik $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_N$ vaqtning shunday momentlariki, bu nuqtalarda $u(t)$ boshqaruv (12.9) maksimum shartidan bir qiymatli aniqlanmasin. Har bir $J_i = (\tau_i, \tau_i + 1) = 1,2,...N-1$ oraliqda $u(t)$ boshqaruv o'zgarmas ekanligini isbotlaymiz. $u_1,...u_m$ nuqtalar U ko'pyoqlining barcha uchlari bo'lsin. $u(t)$ boshqaruvning qiymati u_j uchda bo'ladigan J_i to'plamida bo'lgan nuqtalat majmuasini $M_{i,j} = \{t \in J_i : u(t) = u_i\}$, bilan belgilaymiz, bu yerda $t = 1,...,N-1, j = 1,....,m$. Bunda $M_{i,j}$ to'plamdan ba'zilari bo'sh to'plam bo'lishi mumkin $M_{i,j}$ to'plamlar juft jufti bilan kesishmaydi va $\bigcup_{j=1,...,m} M_{i,j} = J_i$ ekanligi ravshan.

Qandaydir bo'sh bo'lmagan $M_{i,r}$to'plamni tanlaymiz. $\tau - M_{i,r}$ to'plamning qandaydir nuqtasi bo'lsin. (12.9) maksimum shartiga ko'ra va $M_{i,r}$to'plamni aniqlanishiga ko'ra $j \neq r$ bo'lganda $\langle u_r, \psi(\tau)\rangle > \langle u_j, \psi(\tau)\rangle$ tengsizlikka ega bo'lamiz,$\psi(t)$ funksiyaning uzluksizligiga ko'ra shunday $\varepsilon > 0$ soni mavjudki, barcha $t \in \{t \in J_i : |t - \tau| < \varepsilon\}$, $j \neq r$ nuqtalar uchun $\langle u_r, \psi(t)\rangle > \langle u_j, \psi(t)\rangle$ tengsizlik bajariladi. Shuning uchun $M_{i,r}$- ochiq to'plam. Boshqa tomondan $M_{i,r}$to'plam J_i oraliqda yopiq edi. Haqiqatdan ham, τ nuqta J_i oraliqga tegishli $M_{i,r}$ to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bu esa $\tau_k \to \tau$ munosabatni qanoatlantiruvchi $\{\tau_k\} \in M_{i,r}$, $k = 1,2,...,$ nuqtalar ketma ketligining mavjudligini bildiradi. $M_{i,r}$ to'plamning aniqlanishiga ko'ra $\langle u_r, \psi(\tau_k)\rangle = c(U, \psi(\tau_k))$ tenglik bajariladi. Skalyar ko'paytmaning, tayanch funksiyaning va $\psi(t)$ funksiyaning uzluksizligiga ko'ra oxirgi tenglikda $k \to \infty$ limitga o'tilsa $\langle u_r, \psi(\tau)\rangle = c(U, \psi(\tau))$ tenglik hosil bo'ladi. Demak $\tau \in M_{i,r}$. Shuning uchun $M_{i,r}$ to'plam J_i oraliqda yopiq to'plam. $j_i = (\tau_i, \tau_i + 1)$ oraliq bog'liq to'plam, $M_{i,r}$ to'plam bir vaqtning o'zida J_i oraliqda ochiq va yopiq to'plam bo'lgani uchun $M_{i,r} = j_i$ bo'ladi. $j \neq r$ bo'lganda qolgan $M_{i,j}$ to'plamlar esa bo'sh to'plamdir. Demak har bir J_i oraliqda $u(t)$ boshqaruv o'zgarmas bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Boshqaruv qiymatini o'lchovi nolga teng bo'lgan to'plamda o'zgartirish sistema trayektoriyasida hech qanday ta'sir ko'rsatmaganligi uchun u holda berilgan chiziqli tezkorlik masalasida holatning umumiylik sharti bajarilsa, u holda joiz boshqaruvlar sinfi sifatida, bo'lakli o'zgarmas va chapdan uzluksiz boshqaruvlar sinfini qarash mumkin. Bu boshqaruvlar sinfi chekli sondan ko'p bo'lmagan uzulish nuqtalariga (*almashinish nuqtalari* deb nomlangan) ega bo'lgan funksiyalar sinfidan iborat bo'lib, har bir uzluksizlik oralig'ida o'zgarmas va har bir uzulish nuqtasida qiymati chap limitga teng. Haqiqatdan ham agar berilgan masalada holatning umumiylik sharti bajarilsa va sistema M_0 to'plamdan M_1 to'plamga boshqariluvchan bo'lsa, u holda optimal boshqaruvning mavjudligi (9-ma'ruzaga qarang) haqidagi teoremaga asosan o'lchovli boshqaruvlar sinfidan optimal teskorlik boshqaruvi mavjud bo'ladi. Keyin optimal boshqaruv Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiradi. Demak almashishlar soning chekliligi haqidagi teoremaga asosan zarur bo'lsa nol o'lchovli to'plamda optimal boshqaruvini o'zgartirib, uni bo'lakli o'zgarmas va chapdan uzluksiz deb hisoblash mumkin.

Ba'zi muhim hollarda holatning umumiylik sharti Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi boshqaruvni optimalligini, va optimal boshqaruvning yagonaligini ta'minlaydi.

Yagonalikning ikkinchi teoremasi. *Holatning umumiylik sharti bajarilsin va $u_1(t)$ va $u_2(t)$ boshqaruvlar boshqariladigan sistemani x_0 nuqtadan x_1 nuqtaga $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida olib o'tsin. Shu bilan birga bu boshqaruvlarning har biri Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantirsin deb faraz qilamiz. U holda $u_1(t)$ va $u_2(t)$ boshqaruvlar ustma-ust tushadi.*

Isboti. $u_1(t)$ va $u_2(t)$ boshqaruvlarga mos keluvchi trayektoriyalarning boshlang'ich nuqtalari ustma-ust tushganligi sababli, u holda Koshi formulasiga ko'ra (6-ma'ruzaga qarang)

$$x_1 = e^{(t_1-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A}u_1(s)ds = e^{(t_1-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A}u_2(s)ds$$

tenglikga ega bo'lamiz. Demak

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A}(u_1(s)-u_2(s))ds = 0 \qquad (12.10)$$

Pontryagin maksimum prinsipiniga ko'ra $u_1(t)$ boshqaruvga $\psi_1(t)$ qo'shma funksiya mos kelsin. (12.10) tenglikni $\psi_1(t_1)$ vektorga skalyar ko'paytirib

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle u_1(s)-u_2(s),\ e^{(t_1-s)A^*}\psi_1(t_1)\right\rangle ds = 0$$

tenglikni, yoki ((9.11) tenglikni qarang)

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle u_1(s)-u_2(s)\,,\ \psi_1(s)\rangle ds=0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan maksimum shartiga ko‘ra

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(c(U,\psi_1(s))-\langle u_2(s)\,,\ \psi_1(s)\rangle\right)ds=0$$

tenglikka kelamiz. Oxirgi tenglikda integral belgisi ostida turgan ifoda nomanfiy bo‘lmaganligi uchun, u holda deyarli barcha $t\in[t_0,t_1]$ nuqtalarda $u_2(t)$ boshqaruv uchun $\psi_1(t)$ qo‘shma funksiya bilan birgalikda

$$\langle u_2,\psi_1(t)\rangle=c(U,\psi_1(t))$$

maksimum sharti bajariladi. Bundan almashishlar sonining chekliligi haqidagi teoremaga asosan, deyarli barcha $t\in[t_0,t_1]$ nuqtalarda $u_1(t)=u_2(t)$ tenglik bajariladi. Teorema isbotlandi.

Natija. *Holatning umumiylik sharti bajarilsin. U holda agar sistema x_0 nuqtadan x_1 nuqtaga boshqariladigan bo‘lsa, u holda tezkorlik masalasida $u\ (t)$ optimal boshqaruv mavjud va yagona.*

Isboti. Berilgan natijaning isboti optimal boshqaruvning mavjudligi haqidagi teoremadan (9-ma’ruzaga qarang) va yagonalikning ikkinchi teoremasidan bevosita kelib chiqadi. Bu yerda, agarda deyarli barcha $t\in[t_0,t_1]$ nuqtalarda $u_1(t)=u_2(t)$ tenglik bajarilsa, $u_1(t)$ va $u_2(t)$ o‘lchovli boshqaruvlarni ustma-ust tushadi deb hisoblaymiz.

Optimallikning yetarli sharti haqidagi ikkinchi teorema. *Holatning umumiylik sharti bajarilsin. M_0 va M_1 to‘plamlar mos ravishda yagona x_0 va 0 nuqtalardan iborat bo‘lsin, bundan tashqari $0\in U$ va koordinata boshi U ko‘pyoqlining uchi bo‘lmasin. Bunda $u\ (t)$ boshqaruv $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig‘ida Pontryagin maksimum prinsipini qanoatlantirsa, u holda bu boshqaruv optimal boshqaruv va $T=t_1-t_0$ optimal tezkorlik vaqti bo‘ladi.*

Isboti. Teskaridan faraz qilamiz, ya'ni sistemani x_0 nuqtadan koordinata boshiga $I'=[t_0,t_2]$, $t_2<t_1$ vaqt oralig'ida olib o'tuvchi $u_2(t)$ boshqaruv mavjud bo'lsin. Pontryagin maksimum prinsipi bo'yicha $u_1(t)$ boshqaruvga aynan noldan farqli $\psi_1(t)$ qo'shma funksiya mos kelsin. $u_1(t)$ boshqaruv x_0 nuqtani koordinata boshiga $I=[t_0,t_1]$ vaqt oralig'ida olib o'tganligi uchun, Koshi formulasiga ko'ra

$$e^{(t_1-t_0)A}x_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{(t_1-s)A}u_1(s)ds=e^{(t_1-t_2)A}(e^{(t_2-t_0)A}x_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{(t_2-s)A}u_1(s)ds)=0.$$

$e^{(t_1-t_2)A}$ xosmas matritsa bo'lganligi uchun oxirgi tenglikdan

$$e^{(t_2-t_0)A}x_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{(t_2-s)A}u_1(s)ds=0 \tag{12.11}$$

tenglikni hosil qilamiz.

$u_2(t)$ boshqaruv x_0 nuqtani koordinata boshiga o'zining $I'=[t_0,t_2]$, $t_2<t_1$ vaqt oralig'ida olib o'tganligi uchun, Koshi formulasiga ko'ra

$$e^{(t_2-t_0)A}x_0+\int_{t_0}^{t_2}e^{(t_2-s)A}u_2(s)ds=0$$

tenglikni va o'z navbatida (12.11) tenglikka ko'ra

$$\int_{t_0}^{t_2}e^{(t_2-s)A}(u_1(s)-u_2(s))ds+\int_{t_2}^{t_1}e^{(t_2-s)A}u_1(s)ds=0$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni $\psi_1(t_2)$ vektorga skalyar ko'paytirib,

$$\int_{t_0}^{t_2}\langle u_1(s)-u_2(s),\psi_1(s)\rangle ds+\int_{t_2}^{t_1}\langle u_1(s),\psi_1(s)\rangle ds=0 \tag{12.12}$$

tenglikka kelamiz.

Keyin maksimum shartiga ko'ra deyarli barcha $t\in[t_0,t_1]$ nuqtalarda

$$\langle u_1(t),\psi_1(t)\rangle=c(U,\psi_1(t))$$

tenglik bajarilishidan, (12.12) tenglikdagi birinchi qo'shiluvchida integral belgisi ostidagi ifoda nomanfiy, va demak birinchi qo'shiluvchi ham nomanfiy. Demak (12.12) tenglikda ikkinchi qo'shiluvchi musbat emas. Boshqa tomondan $0 \in U$ bo'lgani uchun, deyarli barcha $t \in [t_0, t_1]$ nuqtalarda

$$c(U, \psi_1(t)) \geq 0,$$

va demak deyarli barcha $t \in [t_2, t_1]$ nuqtalarda $\langle u_1(t), \psi_1(t) \rangle \geq 0$ bo'lib, (12.12) tenglikning ikkinchi qo'shiluvchisi ham nomanfiy bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,

$$\int_{t_2}^{t_1} \langle u_1(s), \psi_1(s) \rangle ds = \int_{t_2}^{t_1} c(U, \psi_1(s)) ds = 0 .$$

Bundan $0 \in U$ shartga ko'ra, $[t_2, t_1]$ kesmada $c(U, \psi_1(t)) \equiv 0$ ayniyatni hosil qilamiz. Teorema shartiga ko'ra koordinata boshi U ko'pyoqlining uchi bo'lmaganligi sababli, har bir $t \in [t_2, t_1]$ uchun U ko'pyoqlida shunday qirra topiladiki, bu qirrada $\langle u(t), \psi_1(t) \rangle = 0$ bo'ladi , va demak o'zgarmas. U ko'pyoqlining qirralari soni chekli bo'lgani uchun, uning shunday ω qirrasi topiladiki, bu qirrada $\langle u, \psi_1(t) \rangle$ skalyar ko'paytma $t \in [t_2, t_1]$ vaqtning cheksiz ko'p momentlarida nolga teng bo'ladi. v vektor bu qirra bilan yo'nalishdosh bo'lsin. U holda $\psi_1(t)$ vektorning analitikligiga ko'ra $[t_2, t_1]$ kesmada $\langle v, \psi_1(t) \rangle \equiv 0$. Almashishlar soni chekliligi haqidagi teoremaning isbotidagidek, bu ayniyatni $[t_2, t_1]$ kesmaning ichki sohasida $n-1$ marta ketma-ket differensiallab, holatning umumiyligi shartiga ko'ra $\psi_1(t)$ qo'shma funksiyaning aynan noldan farqli bo'lishiga zid bo'lgan natijaga kelamiz. Teorema isbotlandi.

12.4. Masala

1. Harakati $\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = u^2, \quad |u^2| \leq 1 \end{cases}$ tenglama bilan yozilgan obyektni $x = 0$ koordinata boshiga keltirish optimal tezkorlik masalasining sintezini quring.

QO‘SHIMCHA

Q .1. TO‘PLAMLARNING QAVARIQ QOBIG‘I

Agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in F$ nuqtalar bilan birgalikda ularni tutashtiruvchi kesma ham F da saqlansa, yoki analitik tilda, ixtiyoriy $0 \le \lambda \le 1$ soni uchun $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in F$ mansublik bajarilsa, $F \subset R^n$ to‘plam *qavariq to‘plam* deyiladi.

Ixtiyoriy sondagi qavariq to‘plamlarning kesishmasi yana qavariq to‘plam bo‘lishi ravshan.

Agar $\lambda_i \ge 0$, $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi sonlar mavjud bo‘lib, ular uchun

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m \qquad \text{(Q .I)}$$

tenglik bajarilsa, u holda x nuqta $x_1, ..., x_m \in R^m$ nuqtalar *qavariq kombinatsiyasi* deyiladi.

Bu ma’noda kesmaning har bir nuqtasi chetlarining qavariq kombinatsiyasidan iborat.

1-lemma. *Agar F qavariq to‘plam bo‘lsa, u holda u o‘z nuqtalarining ixtiyoriy qavariq kombinatsiyasini o‘zida saqlaydi.*

Isboti. Ta’rifga ko‘ra qavariq to‘plam o‘zining ixtiyoriy ikkita nuqtasining qavariq kombinatsiyasini o‘zida saqlaydi. Bu holda $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 1 - \lambda$ olish yetarli. Induksiya bo‘yicha F to‘plam o‘zining $m(m \ge 2)$ ta $x_1, ..., x_{m+1} \in F$ nuqtaning

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{m+1} x_{m+1}, \ \lambda_i \ge 0, \ \lambda_1 + ... + \lambda_{m+1} = 1$$

qavariq kombinatsiyasini qaraymiz. Agarda λ_i sonlaridan hech bo‘lmaganda biri nolga teng bo‘lsa, u holda x nuqta $m+1$ tadan kam nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi bo‘lgani uchun, farazga ko‘ra $x \in F$.

Endi hamma $\lambda_i \ge 0$ bo‘lsin, u holda $1 - \lambda_1 > 0$ bo‘lib, x nuqta

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{m+1} x_{m+1} = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)\left[\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} x_2 + ... + \frac{\lambda_{m+1}}{1-\lambda_1} x_{m+1}\right]$$

ko‘rinishdagi tasvirga ega. O‘rta qavs ichida joylashgan nuqta m ta $x_1,...,x_{m+1}$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi bo‘lgani uchun F to‘plamga tegishli. Bundan keyin x nuqta ikki nuqtaning qavariq kombinatsiyasi bo‘lgani uchun F to‘plamga tegishli . Lemma isbotlandi.

$F \subset R^n$ to‘plamni o‘zida saqlovchi eng kichik qavariq to‘plam F to‘plamning *qavariq qobig‘i* deyiladi va $convF$ bilan belgilanadi. Bunday $convF$ to‘plam mavjud bo‘lib, u F to‘plamni o‘zida saqlovchi hamma qavariq to‘plamlarning kesishmasidan iborat. Agar F qavariq to‘plam bo‘lsa, $convF = F$ ekanligi ravshan.

2-lemma. *F to‘plamning qabariq qobig‘i $convF$ F to‘plamdagi hamma nuqtalar qavariq kombinatsiyalarining G majmuasi bilan ustma-ust tushadi.*

Isboti. $F \subset convF$ bo‘lgani uchun, u holda 1-lemmaga ko‘ra $G \subset convF$ mansublik bajariladi. Endi G qabariq to‘plam ekanligi ko‘rsatilsa va $F \subset G$ ni e’tiborga olinsa, $convF \subset G$ mansublikni hosil qilamiz, ya’ni $convF = G$ tenglikka ega bo‘lamiz.

G qavariq to‘plam ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun ikkita $x, y \in G$ nuqtalar va $0 \le \lambda \le 1$ soni uchun $\lambda x + (1-\lambda)y \in G$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$x, y \in G$ nuqtalar quyidagi tasvirlarga ega.

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p\,,\ x_1,....,x_p \in F\,,\ \lambda_i \ge 0\,,\ \lambda_1 + ... + \lambda_p = 1,$$
$$y = \gamma_1 y_1 + ... + \gamma_q y_q\,,\ y_1,....,y_q \in F\,,\ \gamma_q \ge 0,\ \gamma_1 + ... + \gamma_q = 1$$

$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda\lambda_1 x_1 + ... + \lambda\lambda_p x_p + (1-\lambda)\gamma_1 y_1 + ... + (1-\lambda)\gamma_q y_q$ nuqta $x_1,....,x_p$, $y_1,....,y_q \in F$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat, chunki $\lambda\lambda_i$, $(1-\lambda)\gamma_q \ge 0$ va

$$\lambda\lambda_1 + ... + \lambda\lambda_p + (1-\lambda)\gamma_1 + ... + (1-\lambda)\gamma_q = \lambda(\lambda_1 + ... + \lambda_p) + (1-\lambda)(\gamma_1 + ... + \gamma_q) = \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Demak, $\lambda x + (1-\lambda)y \in G$ va G qavariq to‘plam . Lemma isbotlandi.

Biz F to‘plamning qavariq qobig‘i $convF$ $F \subset R^n$ to‘plamdagi nuqtalar qavariq kombinatsiyalari majmuasi bilan ustma- ust tushishini ko‘rsatdik. Shunday qilib har bir $x \in convF$ nuqta qandaydir F ning chekli m ta nuqtasining (D.1) qavariq kombinatsiyasi ko‘rinishida tasvirlanadi. Shu narsa ma’lumki, bu nuqtalar sonini hamma vaqt $n+1$ tadan ortiq bo‘lmagan holda tanlash mumkin.

Karateodori teoremasi. Aytaylik, $F \subset R^n$ bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in convF$ nuqta, F to'plamning $n+1$ ta nuqtasidan ortiq bo'lmagan nuqtalarning qabariq kombinatsiyasidan iborat, bu yerda $n-$ R^n fazoning o'lchami.

Isboti. Aytaylik, $x \in convF$ nuqta

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m$$

tasvirga ega, bu yerda $x_1,...,x_m \in F$ va $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$

Agar $m > n+1$ bo'lsa, (7) yoyilmadagi qo'shiluvchilar sonini hech bo'lmaganda bittaga kamaytirish mumkinligini ko'rsatamiz. $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,...,m$ deb faraz qilamiz, aks holda qo'shiluvchilar soni m dan kam bo'lar edi.

γ_i sonlariga nisbatan m noma'lumli $n+1$ ta algebraik tenglamalar sistemasini ko'ramiz:

$$\gamma_1 x_1 + ... + \gamma_m x_m = 0 \qquad (Q.2)$$

$$\gamma_1 + ... + \gamma_m = 0 \qquad (Q.3)$$

$m > n+1$ bo'lgani uchun bu sistema trivial bo'lmagan $\bar{\gamma}_1,...,\bar{\gamma}_m$ yechimlarga ega chunki $\bar{\gamma}_1 + ... + \bar{\gamma}_m = 0$ bo'lgani uchun $\bar{\gamma}_i$ sonlar orasida hech bo'lmaganda bittasi musbat son bo'ladi. Bu sonlar orasidan $\frac{\bar{\gamma}_i}{\lambda_i}$ kattalikni olamiz. Aniqlik uchun $\frac{\bar{\gamma}_m}{\lambda_m}$ maksimal son bo'lsin. U holda

$$\frac{\bar{\gamma}_m}{\lambda_m} \geq \frac{\bar{\gamma}_i}{\lambda_i} \quad i = 1,...,m-1 \qquad (Q.4)$$

$\lambda_m > 0$ va $\frac{\bar{\gamma}_m}{\lambda_m} > 0$ bo'lgani uchun $\bar{\gamma}_m > 0$ bo'ladi. (Q.2) ga ko'ra:

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m =$$
$$= \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m - \frac{\lambda_m}{\bar{\gamma}_m}(\bar{\gamma}_1 x_1 + ... + \bar{\gamma}_m x) =$$
$$= \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_m}{\bar{\gamma}_m}\bar{\gamma}_1\right)x_1 + ... + \left(\lambda_{m-1} - \frac{\lambda_m}{\bar{\gamma}_m}\bar{\gamma}_{m-1}\right)x_{m-1}.$$

Bu tasvir endi $m-1$ ta nuqtani o'zida saqlaydi va bu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat chunki (Q .3), (Q .4) formulalarga ko'ra

$$\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\overline{\gamma}_m}\overline{\gamma}_i = \frac{\lambda_i\lambda_m}{\overline{\gamma}_m}\left(\frac{\overline{\gamma}_m}{\lambda_m} - \frac{\overline{\gamma}_i}{\lambda_i}\right) \geq 0,$$

$$\lambda_1 - \frac{\lambda_m}{\overline{\gamma}_m}\overline{\gamma}_1 + \ldots + \lambda_{m-1} - \frac{\lambda_m}{\overline{\gamma}_m}\overline{\gamma}_{m-1} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1.$$

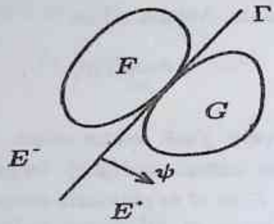
Shunday qilib, ixtiyoriy $x \in convF$ nuqta F to'plamning $n+1$ tadan ortiq bo'lmagan nuqtalarining qavariq kombinatsiyasidan iborat ekanligi isbotlandi ya'ni, F to'plamning qavariq qobig'i $convF$

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n+1}x_{n+1},\ x_i \in F,\ \ \lambda_i \geq 0,\ \ \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$$

ko'rinishdagi nuqtalardan iborat. Teorema isbotlandi.

Q.2. TO'PLAMLARNI AJRATISH

Agar fazoda Γ gippertekislik mavjud bo'lib, F to'plam bu gippernekislik bilan aniqlangan bitta yopiq yarim fazoda, G to'plam esa boshqa yopiq yarim fazoda joylashsa, u holda R^n fazoning F va G to'plamlari *ajraluvchan* to'plamlar deyiladi. (Q.1-chizma)



Q.1.-chizma

R^n fazodagi ixtiyoriy Γ gippertekislik

$$\langle x, \psi \rangle = \alpha$$

tenglama bilan beriladi, bu yerda ψ qandaydir mahkamlangan birlik vektor, α-qandaydir son. ψ vektor Γ gippertekislikga ortogonal. Agar, endi $F,G \subset R^n$ to'plamlar ajraluvchan va Γ gippertekislik F va G to'plamlarni ajratsa u holda aniqlik uchun ψ vektor yo'nalishini shunday tanlaymizki F to'plam ψ vektorga nisbatan manfiy yarim fazoda, G to'plam esa musbat yarim fazoda joylashsin. (Aks holda ψ vektorni - ψ vektor bilan almashtiramiz).

Bu holda ixtiyoriy $f \in F$ vektor uchun $\langle f,\psi\rangle \le \alpha$ tengsizlik, $g \in G$ ixtiyoriy vektor uchun esa $\langle g,\psi\rangle \ge \alpha$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizliklarning biridan ikkinchisini ayirib

$$\langle f,\psi\rangle - \langle g,\psi\rangle \le 0 \qquad \text{(D.5)}$$

munosabatga kelamiz. Shuning uchun, agar F va G to'plamlar ajraluvchan bo'lsa, u holda shunday $\psi \in S$ vektor mavjudki, ixtiyoriy $f \in F, g \in G$ vektorlar uchun (Q.5) tengsizlik bajariladi.

Endi ixtiyoriy $f \in F, g \in G$ vektorlar uchun (Q.5) tengsizlik bajarilsin. U holda

$$\sup_{f \in F}\langle f,\psi\rangle \le \inf_{g \in G}\langle g,\psi\rangle$$

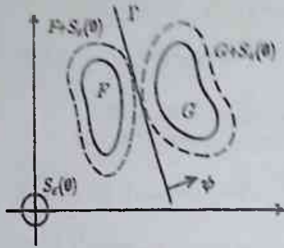
munosabatga ega bo'lamiz. Aniqlik uchun

$$\alpha = \sup_{f \in F}\langle f,\psi\rangle$$

bo'lsin. U holda ixtiyoriy $f \in F$ vektor uchun $\langle f,\psi\rangle \le \alpha$ tengsizlik va ixtiyoriy $g \in G$ vektor uchun $\alpha \le \langle g,\psi\rangle$ tengsizlik bajariladi, ya'ni $\langle x,\psi\rangle = \alpha$ gipertekislik F va G to'plamlarni ajratadi.

Shuning uchun F va G to'plamlar ajraluvchan bo'lishi uchun, ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun (Q.5) munosabatlar bajarilishi zarur va yetarli.

Agar $\varepsilon > 0$ soni mavjud bo'lib, $F' = F + S_\varepsilon(0)$ va $G' = G + S_\varepsilon(0)$ to'plamlar ajraluvchan bo'lsa, u holda F va G to'plamlar *qat'iy ajraluvchan* to'plamlar deyiladi (Q2-chizma).



Q.2.-chizma

Bu ta'rifdan va (Q.5) munosabatdan F va G to'plamlar qat'iy ajraluvchan bo'lishi uchun, shunday $\varepsilon > 0$ soni mavjud bo'lib, ixtiyoriy $\psi \in S$ vektor uchun

$$\langle f', \psi \rangle - \langle g', \psi \rangle \leq 0$$

tengsizlik barcha $f' = F + S_\varepsilon(0), g' = G + S_\varepsilon(0)$ vektorlar uchun bagarilishi zarur va yetarli. To'plamlar yig'indisining ta'rifiga ko'ra f' va g' vektorlarni

$$f' = f + u,\ g' = g + v,\ f \in F,\ g \in G,\ u, v \in S_\varepsilon(0)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lgani uchun, yuqorida ko'rsatilgan tengsizlikning bajarilishi, ixtiyoriy

$$f \in F,\ g \in G,\ u, v \in S_\varepsilon(0)$$

vektorlar uchun

$$\langle f, \psi \rangle - \langle g, \psi \rangle + \langle u, \psi \rangle - \langle v, \psi \rangle \leq 0 \qquad \text{(Q.6)}$$

tengsizlikning bajarilishiga teng kuchli.

Bu tengsizlikning bajarilishi, o'z navbatida ixtiyoriy $f \in F, g \in G$ vektorlar uchun

$$\langle f, \psi \rangle - \langle g, \psi \rangle + 2\varepsilon \leq 0 \qquad \text{(Q.7)}$$

tengsizlikning bajarilishiga teng kuchli.

Haqiqatdan ham, ixtiyoriy

$$f \in F,\ g \in G,\ u,v \in S_\varepsilon(0)$$

vektorlar uchun (Q.6) tengsizlik bajarilsin.

$u = \varepsilon\psi$ va $v = -\varepsilon\psi$ deb olamiz. U holda

$$\langle u,\psi\rangle - \langle v,\psi\rangle = \varepsilon\|\psi\| + \varepsilon\|\psi\| = 2\varepsilon$$

bo‘lib, (Q.6) munosabatdan (Q.7) tengsizlik kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $u \in S_\varepsilon(0), -v \in S_\varepsilon(0)$ va $\psi \in S$ vektorlar uchun

$$\langle u,\psi\rangle \le \|u\|\cdot\|\psi\| \le \varepsilon,\ \langle -v,\psi\rangle \le \|-v\|\cdot\|\psi\| \le \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi, demak $-2\varepsilon \le -\|u,\psi\| + \langle u,\psi\rangle$. Endi (Q.7) tengsizlik bajarilsin. U holda, oxirgi tengsizlikni e’tiborga olib,

$$\langle f,\psi\rangle - \langle g,\psi\rangle \le -2\varepsilon \le -\langle u,\psi\rangle + \langle v,\psi\rangle$$

munosabatga kelamiz, ya’ni (Q.6) tengsizlikni hosil qilamiz.

Shunday qilib, $F, G \subset R^n$ to‘plamlar qat’iy ajratilishi uchun, shunday $\varepsilon > 0$ soni va $\psi \in S$ vektor mavjud bo‘lishi kerakki, bunda (Q.7) tengsizlik ixtiyoriy $f \in F, g \in G$ vektorlar uchun bajarilishi zarur va yetarli. Ikkita to‘plamning qat’iy ajratilishidan, ularni ajratilishi kelib chiqishini inobatga olamiz.

F va G bosh bo‘lmagan kompakt to‘plamlar, ya’ni $F, G \in \in \Omega(R^n)$ bo‘lsin. Bu holda (Q.5) munosabatdan

$$c(F,\psi) + c(G,-\psi) = \max_{f\in F}\langle f,\psi\rangle + \max_{g\in G}\langle g,-\psi\rangle \le 0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa $F.G \in \Omega(R^n)$ to‘plamlar ajratilgan bo‘lishi uchun

$$c(F,\psi) + c(G,-\psi) \le 0 \qquad \text{(Q.8)}$$

tengsizlik bajariladigan $\psi \in S$ vektor mavjud bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini bildiradi.

Xuddi shu kabi (Q.7) tengsizlikdan

$$c(F,\psi)+c(G,-\psi)+2\varepsilon=\max_{f\in F}\langle f,\psi\rangle+\max_{g\in G}\langle g,-\psi\rangle+2\varepsilon\le 0,$$

ya'ni $F.G\in\Omega(R^n)$ to'plamlar qat'iy ajratilishi uchun , faqat va faqat shu holdaki,

$$c(F,\psi)+c(G,-\psi)+2\varepsilon\le 0 \qquad (Q.9)$$

tengsizlik bajarilishini ta'minlaydigan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni va $\psi\in S$ vektor mavjud bo'lishi kerak.

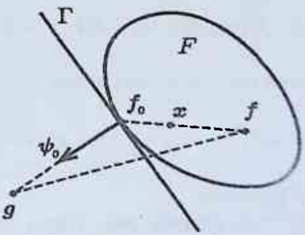
Nuqtani to'plamdan ajratish va qat'iy ajratish haqidagi quyidagi ikki lemmani isbotlaymiz.

Qat'iy ajratish haqidagi lemma. *$F\subset R^n$ - yopiq va qavariq to'plam, $g\in R^n$ nuqta esa F to'plamda yotmasin. U holda F va $\{g\}$ to'plamlar qat'iy ajraluvchan bo'ladi.*

Isboti. F- yopiq qavariq to'plam va $g\notin F$ bo'lsin. g nuqtadan F to'plamgacha bo'lgan masofani $\rho(g,F)$

$$\rho(g,F)=\max_{f\in F}\|g-f\|$$

formula bilan aniqlaymiz. $\|g-f\|$ norma uzluksiz funksiya. F yopiq to'plam. Demak $\|g-f\|$ funksiyaning minimumi qandaydir $f_0\in F$ vektorda erishiladi ((Q.3)-chizmani qarang).



Q.3.-chizma

$g \notin F$ bo'lgani uchun,

$$p(g,F)=\|g-f_0\|>0 \tag{Q.10}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan tashqari, ixtiyoriy $f\in F$ vektor uchun

$$\|f-g\|\geq\|f_0-g\| \tag{Q.11}$$

tengsizlik bajariladi.

Qandaydir $f\in F$ vektorni mahkamlaymiz va bu vektorni f_0 nuqta bilan tutashtiramiz. Bu kesmaning ixtiyoriy nuqtasini

$$x=\lambda f+(1-\lambda)f_0=f_0+\lambda(f-f_0)$$

ko'rinishda yozamiz, bu yerda λ soni [0,1] kesmadan tanlanadi. F qavariq to'plam bo'lgani uchun, u holda barcha $0\leq\lambda\leq1$ sonlar uchun $x\in F$. $x\in F$ nuqtaga (Q.11) munosabatni qo'llab,

$$\|x-g\|\geq\|f_0-g\|$$

tengsizlikni , va demak

$$\langle x-g,x-g\rangle=\|x-g\|^2\geq\|f_0-g\|^2$$

tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlikda x vektor o'rniga , uning λ orqali ifodasini qo'yib,

$$\langle f_0+\lambda(f-f_0)-g,f_0+\lambda(f-f_0)-g\rangle\geq\|f_0-g\|^2$$

tengsizlikni, ya'ni barcha $0\leq\lambda\leq1$ sonlari uchun

$$\|f-f_0\|^2\lambda^2+2\langle f-f_0,f_0-g\rangle\lambda\geq0$$

tengsizlik bajarilishini ko'ramiz.

Bu tengsizlikning chap qismini $\varphi(\lambda)$ orqali belgilaymiz. U holda $0\leq\lambda\leq1$ va $\varphi(0)=0$ bo'lganda $\varphi(\lambda)\geq0$. Demak, $\varphi'(0)\geq0$, ya'ni $\langle f-f_0,f_0-g\rangle\geq0$. $f\in F$ vektor ixtiyoriy tanlanganligi uchun

$$\langle f - f_0, f_0 - g\rangle \geq 0 \qquad \text{(Q.12)}$$

tengsizlik ixtiyoriy $f \in F$ vektor uchun bajariladi.

(Q.10) shart bo'yicha $\|g - f_0\| \neq 0$ bo'lgani uchun, u holda $\psi_0 = \dfrac{g - f_0}{\|g - f_0\|}$ vektorni qaraymiz. (Q.7) munosabatni ψ_0 vektor uchun tekshiramiz. (Q.12) tengsizlikni e'tiborga olgan holda

$$\langle f, \psi_0\rangle - \langle g, \psi_0\rangle = \frac{\langle f, g - f_0\rangle - \langle g, g - f_0\rangle}{\|g - f_0\|} \leq \frac{\langle f_0, g - f_0\rangle}{\|g - f_0\|} - \frac{\langle g, g - f_0\rangle}{\|g - f_0\|} = -\|g - f_0\|$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Agar $2\varepsilon = \|g - f_0\| > 0$ deb olinsa, u holda (Q.7) tengsizlik ixtiyoriy $f \in F$ vektor uchun bajariladi. Demak F va $\{g\}$ to'plamlar qat'iy ajraluvchan bo'ladi, bu esa lemmani isbotlaydi.

Natija. *$F \in \Omega(R^n)$ to'plam qavariq, $g \in R^n$ nuqta F to'plamga tegishli bo'lmasin. U holda*

$$c(F, \psi) < \langle g, \psi\rangle \qquad \text{(Q.13)}$$

qat'iy tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\psi \in S$ vektor mavjud.

Isboti. Isbotlangan lemmaga ko'ra F va $G = \{g\}$ to'plamlar qat'iy ajraluvchan, va demak shunday $\varepsilon > 0$ soni va $\psi \in S$ vektor mavjudki, ular uchun (Q.10) tengsizlik, ya'ni

$$c(F, \psi) + \langle g, -\psi\rangle + 2\varepsilon \leq 0$$

tengsizlik bajariladi. $\varepsilon > 0$ bo'lgani uchun bu tenmgsizlikdan (Q.13) tengsizlik kelib chiqadi va bu bilan natija isbotlandi.

Q.3-chizmadan (Q.13) tengsizlikning geometrik ma'nosi ko'rinib turibdi.

Ajratish haqidagi lemma. *$F \subset R^n$ yopiq va qavariq to'plam, $g \in R^n$ nuqta esa F to'plamning ichki sohasiga tegishli bo'lmasin. U holda F va $\{g\}$ to'plamlar ajraluvchan bo'ladi.*

Isboti. $g \notin \operatorname{int} F$ bo'lgani uchun, F to'plamga tegishli bo'lmagan g nuqtaga yaqinlashuvchi $\{g_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi mavjud. Qat'iy ajraluvchanlik haqidagi lemmaga ko'ra har bir g_k nuqta F to'plamdan qat'iy ajraluvchan va demak ajraluvchan bo'ladi. U holda shunday $\psi_k \in S$ vektor mavjudki, ixtiyoriy $f \in F$ vektor uchun (Q.5) tengsizlik, ya'ni

$$\langle f,\psi_k\rangle-\langle g_k,\psi_k\rangle\leq 0 \qquad \text{(Q.14)}$$

tengsizlik bajariladi. S - birlik sfera kompakt to'plam bo'lgani uchun $\{\psi_k\}$ nuqtalar ketma-ketligidann qandaydir $\psi \in S$ vektorga yaqinlashuvchi qismi ketma-ketlik ajratish mumkun. Bu qismi ketma-ketlikni yana $\{\psi_k\}$ orqali belgilaymiz. U holda ixtiyoriy $f \in F$ vektor uchun, (Q.14) tengsizlikda limitga o'tishdan foydalanib

$$\langle f,\psi\rangle-\langle g,\psi\rangle\leq 0$$

tengsizlikni, ya'ni ψ vektor uchun (Q.5) munosabat bajarilishni ko'ramiz.Demak F va $\{g\}$ to'plamlar ajraluvchan bo'ladi. Lemma isbotlandi.

Natija. $F \in \Omega(R^n)$ *qavariq to'plam va* f_0 *nuqta* F *to'plamning chegarasida yotsin, ya'ni* $f_0 \in \partial F$. *U holda,* F *to'plamga* f_0 *nuqtada tayanch bo'lgan* $\psi_0 \in S$ *vektor mavjud(Q.3-chizmaga qarang).*

Isboti. f_0 nuqta F to'plamning ichki sohasiga tegishli bo'lmaganligi uchun ajraluvchanlik haqidagi lemma bo'yicha F va $G=\{f_0\}$ to'plamlar ajraluvchan bo'ladi. Demak shunday $\psi_0 \in S$ vektor mavjudki, bunda (Q.8) tengsizlik, ya'ni

$$c(F,\psi_0)+\langle f_0,-\psi_0\rangle\leq 0$$

tengsizlik bajariladi. Tayanch funksiyalar 6-xossasining natijasiga ko'ra (3-ma'ruzani qarang) $f_0 \in F$ mansublikdan

$$\langle f_0,\psi\rangle\leq c(F,\psi_0)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Oxirgi ikkita tengsizlikdan

$$c(F,\psi_0)=\langle f_0,\psi_0\rangle$$

tenglik kelib chiqadi. Shuning uchun ψ_0 vektor F to'plamga f_0 nuqtada tayanch vektor bo'ladi.

Qat'iy ajraluvchanlik haqidagi teorema. *Ikkita qavariq $F,G \in \Omega(R^n)$ to'plamlar qat'iy ajraluvchan bo'lishi uchun, ularning kesishmasligi, ya'ni $F \cap G = \varnothing$ bo'lishi zarur va yetarli.*

Isboti. Ikkita qavariq $F,G \in \Omega(R^n)$ to'plamlar qat'iy ajraluvchan bo'lishi uchun (Q.9) tengsizlik bajarilishini ta'minlaydigan $\varepsilon > 0$ soni va $\psi \in S$ vektor mavjud bo'lishi, ya'ni bu $\psi \in S$ vektor uchun

$$c(F,\psi) + c(G,-\psi) < 0$$

tengsizlikni bajarilishi zarur va yetarli.

Tayanch funksiyalarning 12 xossasiga ko'ra (3-ma'ruzani qarang) ikkita $F,G \in \Omega(R^n)$ qavariq to'plamlar kesishi uchun, barcha $\psi \in S$ vektorlar uchun

$$c(F,\psi) + c(G,-\psi) \geq 0$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli. Bundan teoremaning xulosasi darhol kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Ajraluvchanlik haqidagi teorema. *Ikkita qavariq $F,G \in \Omega(R^n)$ to'plamlar ajraluvchan bo'lishi uchun*

$$0 \notin \mathrm{int}[F + (-1)G] \qquad (Q.15)$$

mansublikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isboti. Ikkita $F,G \in \Omega(R^n)$ to'plamlar ajraluvchan bo'lishi uchun (Q.8) tengsizlik bajariladigan $\psi \in S$ vektorni mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Boshqa tomondan $F + (-1)G$ to'plam qavariq bo'lgani uchun tayanch funksiyalarning 14-xossasining natijasiga ko'ra (3-ma'ruzani qaraymiz) (Q.15) munosabat ixtiyori $\psi \in S$ vektor uchun

$$0 < c(F,\psi) + c(G,-\psi)$$

tengsizlikni bajarilishi zarur va yetarli edi. Bundan teoremaning xulosasi darhol kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Agar $F+(-1)G$ bo'sh to'plam bo'lmasa, u holda qavariq $F,G\in\Omega(R^n)$ to'plamlar doimo ajraluvchan bo'lishini qayd etamiz.

Q.3. QAVARIQ FUNKSIYALAR

Agar ikkita $x_1,x_2\in R^n$ nuqtalar va ixtiyoriy $0\le\lambda\le 1$ soni uchun

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \tag{Q.16}$$

tengsizlik bajarilsa, $f:R^n\to R^1$ funksiyaga qavariq gunksiya deyiladi.

Matematik induksiya bo'yicha $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m\in R^n$ nuqtalarning

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots.\lambda_mx_m,\lambda_i\ge 0,\lambda_1+\lambda_2+\ldots.+\lambda_m=1$$

qavariq kombinatsiyasi uchun $f(x)$ qavariq funksiya

$$f(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_mx_m)\le\lambda_1f(x_1)+\ldots+\lambda_mf(x_m) \tag{Q.17}$$

tengsizlikni qanoatlantirishini ko'rsatish qiyin emas.

Biz tayanch funksiyalar va ularning xossalarini o'rganishda har qanday $F\in\Omega(R^n)$ to'plamning $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasi $\psi\in R^n$ vektor bo'yicha qavariq funksiya bo'lishini (1- va 2- xossalarning natijalari) ko'rdik. 3-ma'ruzada $F\in\Omega(R^n)$ to'plamning $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasi $\psi\in R^n$ vektor bo'yicha uzluksiz (13-xossaning natijasi) bo'lishiga amin bo'ldik. Shu bilan birga har qanday qavariq funksiya chekli qiymatlar qabul qilsa, ya'ni $f(x)\ne\pm\infty$ bo'lsa, bu funksiya uzluksiz bo'lar ekan.

1-Teorema. Agar $f:R^n\to R^1$ funksiya qavariq va chekli bo'lsa, u holda u uzluksizdir.

Isboti. Ixtiyoriy $x_0\in R^n$ nuqtani mahkamlaymiz va unga yaqin turgan $x_0+\Delta x\in R^n$ nuqtani qaraymiz. R^n fazoda $e_1,e_2,\ldots,e_n$ bazis vektorlarni va ularga teskari $e_{n+1}=-e_1,e_{n+2}=-e_2,\ldots,e_{2n}=-e_n$ vektorlarni qaraymiz. Argumentning $\Delta x=(\Delta x^1,\Delta x^2,\ldots,\Delta x^n)$ vektor orttirmasini $e_1,e_2,\ldots,e_{2n}$ vektorlar bo'yicha:

agar $\Delta x^i\ge 0$ bo'lsa, u holda $\xi_i=\Delta x^i$, $\xi_{n+i}=0$, agar $\Delta x^i<0$ bo'lsa, u holda $\xi_i=0$, $\xi_{n+i}=-\Delta x^i$, ko'rinishni tanlab

$$\Delta x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_{2n} e_{2n} \qquad (Q.18)$$

kabi ifodalaymiz. Shunday qilib, $\Delta x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$ yoyilmada barcha ξ_i sonlar nomanfiy, ya'ni $\xi_i \geq 0$ va $\Delta x \to 0$ da $\xi_i \to 0$. Δx vektorni yetarlicha kichik deb faraz qilamiz, chunki $\xi_i \leq 1$.

(Q.17) formula va $f(x)$ qavariq funksiyaning (Q.16) ta'rifiga ko'ra

$$f(x_0 + \Delta x) = f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{2n} \xi_i e_i\right) = f\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_0 + \xi_i 2ne_i)\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f(x_0 + \xi_i 2ne_i) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f[(1-\xi_i)x_0 + \xi_i(x_0 + 2ne_i)] \leq$$
$$\leq \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}[(1-\xi_i)f(x_0) + \xi_i f(x_0 + 2ne_i)]$$

tengsizlikni yozamiz.

Endi funksiya orttirmasini baholaymiz. Hosil qilingan tengsizlikdan foydalanib

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}[(1-\xi_i)f(x_0) + \xi_i f(x_0 + 2ne_i)] - f(x_0) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\xi_i[f(x_0 + 2ne_i) - f(x_0)]$$

ekanligini topamiz.

$f(x) \neq \pm\infty$ bo'lgani uchun o'rta qavs ichida qandaydir son bo'lib, bu tengsizlikning o'ng tomoni $\Delta x \to 0$ da nolga intiladi.Demak har qanday $\varepsilon > 0$ soni uchun, shunday $\delta > 0$ soni mavjudki, $\|\Delta x\| \leq \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\Delta x \in R^n$ orttirma uchun

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq \varepsilon \qquad (Q.19)$$

tengsizlik bajariladi.

$\|\Delta x\| \leq \delta$ bo'lsin Yana bir bor (Q.16) formuladan foydalanib,

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_0 + \Delta x}{2} + \frac{x_0 - \Delta x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x_0 + \Delta x) + \frac{1}{2}f(x_0 - \Delta x),$$

ya'ni

$$f(x_0) - f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)$$

tengsizlikka kelamiz. $|-\Delta x|\le\delta$ bo‘lgani uchun (Q.19) formulaga ko‘ra bu tengsizlikning o‘ng tomoni $\varepsilon>0$ sonidan kichik, shuning uchun $f(x_0)-f(x_0+\Delta x)\le\varepsilon$. Hosil bo‘lgan tengsizlikni (Q.19) formula bilan taqqoslab, yetarlicha kichik Δx orttirmalar uchun

$$|\, f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\,|\le\varepsilon$$

tengsizlikka olamiz. Shunday qilib $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. 1-teorema isbotlandi.

Yana ixtiyoriy $f:R^n\to R^1$ funksiyani va qandaydir $h\in R^n$ vektorni qaraymiz.

Agar musbat α soni nolga intilganda

$$\varphi(\alpha)=\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}$$

ifodaning chekli limiti mavjud bo‘lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyaning x nuqtada $h\in R^n$ vektor yo’nalishidagi hosilasi deyiladi va $f'(x;h)$ kabi belgilanadi.

Demak

$$f'(x;h)=\lim_{\alpha\to+0}\varphi(\alpha)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} \qquad (Q.20)$$

2-Teorema. Agar $f:R^n\to R^1$ funksiya qavariq va chekli bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $x\in R^n$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning har qanday $h\in R^n$ vektor yo’nalishida $f'(x;h)$ hosilasi mavjud bo‘lib u quyidagi:

1) $f'(x;\lambda h)=\lambda f'(x;h), \quad \forall\lambda\ge 0,$

2) $f'(x;h_1+h_2)\le f'(x;h_1)+f'(x;h_2), \ \forall h_1,h_2\in R^n$

shartlarni qanoatlantiradi.

Isboti. $x,h\in R^n$ vektorlarni fiksirlaymiz. Agar biz $\alpha\to+0$ da $\varphi(\alpha)=\dfrac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}$ ifodaning o‘smasligi va chegaralanganligini ko‘rsatsak, u holda (Q’.20) munosabatdagi limit mavjud va chekli bo‘ladi, ya’ni biz bu holda $f'(x;h)$ hosilani mavjudligini isbotlaymiz.

α_1, α_2 sonlari $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ shartni qanoatlantirsin.(Q.16) formulada $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $1 - \lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}$ va $x_1 = x + \alpha_1 h,\ x_2 = x$ belgilashlar kiritsak $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x + \alpha_2 h$ va

$$f(x+\alpha_2 h) \le \frac{\alpha_2}{\alpha_1} f(x+\alpha_1 h) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} f(x)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Demak

$$\frac{f(x+\alpha_2 h) - f(x)}{\alpha_2} \le \frac{1}{\alpha_1} f(x+\alpha_1 h) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} f(x) - \frac{1}{\alpha_2} f(x) =$$
$$= \frac{f(x+\alpha_1 h) - f(x)}{\alpha_1},$$

ya'ni $\varphi(\alpha_2) \le \varphi(\alpha_1)$ bo'ladi va $\varphi(\alpha)$ funksiya $\alpha \to +0$ da o'smaydi.

(Q.16) formulada $\lambda = \frac{1}{1+\alpha}$, $1 - \lambda = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ va $x_1 = x + \alpha h,\ x_2 = x - h$ belgilashlar kiritsak $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x$ va

$$f(x) \le \frac{1}{1+\alpha} f(x+\alpha h) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(x-h)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Demak,

$$\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} \ge \frac{(1+\alpha) f(x) - \alpha f(x-h) - f(x)}{\alpha} = f(x) - f(x-h)$$

$f(x) \ne 0$ bo'lgani uchun bu tengsizlikning o'ng tomoni chekli son, demak $\varphi(\alpha)$ funksiya quyidan chegaralangan. Biz (Q.20) limitni mavjud va chekli yani $f(x)$ funksiya x nuqtada h yo'nalish bo'yicha differensialanuvchi ekanligini isbotladik.

1-xossa. (Q.20) munosabatdan darhol kelib chiqadi. Haqiqatdan ham $\lambda > 0$ ($\lambda = 0$ bo'lsa, 1-xossaning bajarilishi ayon) bo'lsa, u holda

$$f'(x;\lambda h) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x+\alpha\lambda h) - f(x)}{\alpha} =$$
$$= \lambda \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x+\alpha\lambda h) - f(x)}{\alpha\lambda} = \lambda f'(x;h)$$

2-xossani isbotlash uchun yana (Q.16) va (Q.20) fo‘rmulalardan foydalanamiz. $h_1, h_2 \in R^n$ bo‘lsin. U holda

$$f'(x; h_1 + h_2) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x + \alpha(h_1 + h_2)) - f(x)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} \frac{f\left(\frac{x + 2\alpha h_1}{2} + \frac{x + 2\alpha h_2}{2}\right) - f(x)}{\alpha} \leq$$

$$\leq \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x + 2\alpha h_1) - f(x)}{2\alpha} + \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x + 2\alpha h_2) - f(x)}{2\alpha} =$$

$$= f'(x; h_1) + f'(x; h_2)$$

Teorema to‘la isbotlandi.

Natija. Har qanday $F \in \Omega(R^n)$ to‘plam va uning $c(F, \psi)$ tayanch funksiyasi qavariq va chekli. Demak

$$\varphi(\alpha) = \frac{c(F, \psi_0 + \alpha\psi) - c(F, \psi_0)}{\alpha} \qquad (Q.21)$$

funksiya ixtiyoriy $\psi_0, \psi \in R^n$ vektorlar uchun quyidan chegaralangan va $\alpha \to +0$ da o‘smaydi. Shuning uchun $c(F, \psi)$ tayanch funksiya , ixtiyoriy $\psi_0 \in R^n$ nuqtada $\psi \in R^n$ ixtiyoriy yo‘nalish bo‘yicha differensiallanuvchi va yo‘nalish bo‘yicha $c'(F, \psi_0; \psi)$ hosilasi quyidagi:

1) $c'(F, \psi_0; \lambda\psi) = \lambda c'(F, \psi_0; \psi) \quad \forall \lambda \geq 0;$

2) $c'(F, \psi_0; \psi_1 + \psi_2) \leq c'(F, \psi_0; \psi_1) + c'(F, \psi_0; \psi_2), \ \forall \psi_1, \psi_2 \in R^n$

xossalarni qanoatlantiradi.

Agar har qanday $x \in R^n$ vektor uchun shunday $p \in R^n$ vektor topilib bunda,

$$f(x) - f(x_0) = (p, x - x_0) + \bar{o}(\|x - x_0\|) \qquad (Q.22)$$

munosabat bajarilsa $f : R^n \to R^1$ funksiya $x_0 \in R^n$ nuqtada differensiyalanuvchi deyiladi, bu yerda $\bar{o}(\|x - x_0\|)$ miqdor $\|x - x_0\| \to 0$ da $\frac{\bar{o}(\|x - x_0\|)}{\|x - x_0\|} \to 0$ ekanligini bildiradi. Bu holda p vektorga $f(x)$ funksiyaning

x_0 nuqtadagi gradiyenti deyiladi va $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$ kabi belgilanadi. Agar $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning har qanday h yo'nalish bo'yicha hosilasi mavjud bo'lib

$$f'(x_0;h)=\left\langle\frac{\partial f(x_0)}{\partial x},h\right\rangle \qquad (Q.23)$$

ko'rinishga ega. Haqiqatdan ham (Q'.22) munosabatga ko'ra

$$f'(x_0:h)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x},\alpha h\right)+\bar{o}(\|\alpha h\|)}{\alpha}=\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x},h\right)$$

tenglikni yozamiz.

1-misol. $f(x)=\|x\|$ funksiyadan yo'nalish bo'yicha hosilani topamiz. Bu funksiya qavariq va chekli. Demak 2- teoremaga ko'ra uning ixtiyoriy nuqtada ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha hosilasi mavjud. Ma'lumki $\|x\|$ funksiya $x=0$ nuqtadan farqli barcha nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lib $\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{x}{\|x\|}$. Shuning uchun $x\neq 0$ bo'lganda uning yo'nalish bo'yicha hosilasi mavjud bo'lib (Q.23) formulaga ko'ra

$$f'(x;h)=\frac{(x,h)}{\|x\|}$$

ko'rinishga ega. $x=0$ bo'lganda yo'nalish bo'yicha hosilaning (Q.20) tarifiga ko'ra

$$f'(x;h)=\frac{\|\alpha h\|}{\alpha}=\|h\|\ .$$

bo'ladi.

Agar $f:R^n\to R^1$ funksiya qavariq va x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x\in R^n$ vektor uchun

$$\left\langle\frac{\partial f(x_0)}{\partial x},\ x-x_0\right\rangle\le f(x)-f(x_0) \qquad (Q.24)$$

tengsizlik bajariladi.

Haqiqatdan ham, $0<\lambda<1$ bo'lsin. (Q.16) formulada $\lambda=\alpha,\ x_1=x,\ x_2=x_0$ bo'lsa, u holda

$$f(\alpha x+(1-\alpha)x_0)\le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(x_0)=f(x_0)+\alpha[f(x)-f(x_0)].$$

Demak,

$$\frac{f(x_0+\alpha(x-x_0))-f(x_0)}{\alpha}\le f(x)-f(x_0)$$

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada yo'nalish bo'yicha differensiallanuvchi ekanligini e'tiborga olib, bu tengsizlikning o'ng qismida $\alpha\to+0$ da limitga o'tilsa

$$f'(x_0;x-x_0)\le f(x)-f(x_0)$$

tengsizlikni, bundan esa (Q.23) formulaga ko'ra (Q.24) tengsizlikka kelamiz.

Endi $f:R^n\to R^1$ oddiy qavariq funksiya bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x\in R^n$ vektor uchun

$$\langle p,x-x_0\rangle\le f(x)-f(x_0) \tag{Q.25}$$

tengsizlik bajarilsa ((Q.24) formula bilan taqqoslang), $p\in R^n$ vektorga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi subgradiyenti deyiladi. Barcha $p\in R^n$ vektorlar majmuasiga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi subdifferensiali deyiladi va $\partial f(x_0)$ bilan belgilanadi. Shuning uchun

$$\partial f(x_0)=\{p:\langle p,x-x_0\rangle\le f(x)-f(x_0)\forall x\in R^n\}.$$

Keyin, agar $f(x)$ funksiyaning bu nuqtada hech bo'lmaganda bitta subgradiyenti mavjud bo'lsa, ya'ni $\partial f(x_0)$ bo'sh to'plam bo'lmasa, $f(x)$ funksiyaga x_0 nuqtada subdifferensiyallanuvchi deyiladi. (Q.24) formuladan , agar $f(x)$ qavariq funksiya $x_0\in R^n$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada subdifferensiallanuvchi bo'lib, uning bu nuqtadagi gradiyenti $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$ subgradiyenti bo'ladi, ya'ni $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \in \partial f(x_0)$.

Q.4-bo'limda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada boshqa subgradiyentlarga ega emasligi, ya'ni $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \partial f(x_0)$ ekanligi ko'rsatiladi.

2-misol. $f(x)=\|x\|$ funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi subdifferensialini topamiz. (Q.25) tengsizlik bu holda

$$\langle p,x\rangle \le \|x\|$$

ko'rinishni olishi va barcha $x \in R^n$ vektorlar uchun bajariladi. Har qanday $\|p\| \le 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy p vektor uchun bu tengsizlik barcha $x \in R^n$ vektorlar uchun bajariladi, agarda $\|p\|>1$ bo'lsa, u holda, masalan $x=\frac{p}{2}$ bo'lganda bu tengsizlik buziladi, chunki $\frac{1}{2}\|p\|^2 > \frac{1}{2}\|p\|$. Demak, $f(x)=\|x\|$ funksiya $x_0=0$ nuqtada subdifferensiallanuvchi bo'lib, uning bu nuqtadagi subdifferensiali birlik shar bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $\partial f(0)=S_1(0)$. $f(x)=\|x\|$ funksiya $x_0=0$ nuqtada differensiallanuvchi emasligini qayd etamiz. Umuman olganda ixtiyoriy qavariq funksiya subdifferensiallanuvchi bo'lmaydi. Masalan

$$f(x)=\begin{cases} -\sqrt{1-\|x\|}, & agar\ \|x\|\le 1 bo'lsa, \\ +\infty & agar\ \|x\|>1 bo'lsa. \end{cases}$$

funksiya $\|x\|>1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in R^n$ nuqtalarda subdifferensiallanuvchi emas. Kitobxonga bu tasdiqni mustaqil tekshirib ko'rishni havola etamiz.

Masalalar

1. $f(x)=\max\limits_{1\le i\le n}|x^i|$ funksiya ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha differensiallanuvchi ekanligini isbotlang va uning yo'nalish bo'yicha hosilasini toping, bu yerda x^i - x vektorning koordinatasi.

2. $f(x)=\max\limits_{1\le i\le n}|x^i|$ funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi subdifferensialini toping.

3*. $f:R^n\to R^1$ funksiya qavariq, chekli va ixtiyoriy nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiya uzluksiz differensiallanuvchi ekanligini, ya'ni uning gradiyenti x ga uzluksiz bog'liqligini isbotlang.

Q.4. SUBDIFFERENSIALNING XOSSALARI

Biz oldingi bo'limda $f:R^n\to R^1$ qavariq funksiyaning $x_0$nuqtadagi $\partial f(x_0)$ subdifferensiyali tushunchasi bilan tanishdik. Bunda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi subdifferensiyali deb uning shu nuqtadagi barcha subgradiyentlari to'plamiga aytiladi.O'z navbatida barcha $x\in R^n$ nuqtalar uchun

$$(p,x-x_0)\le f(x)-f(x_0)$$

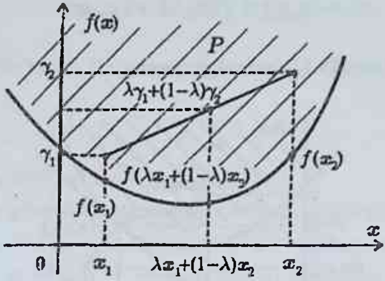
tengsizlikni qanoatlantiruvchi $p\in R^n$ vektorga subgradiyent deyiladi.

1-Teorema. Agar $f:R^n\to R^1$ chekli qavariq funksiya bo'lsa, u holda bu funksiya ixtiyoriy $x\in R^n$ nuqtada subdifferensiallanuvchi bo'ladi, yani va uning $\partial f(x_0)$ subdifferensiyali kompakt va qavariq to'plam bo'ladi.

Isboti. Bizdan $\partial f(x_0)\in\Omega(R^n)$ va $\partial f(x_0)$ to'plamlarni qavariqligini isbotlash talab qilinmoqda. Dastlab $\partial f(x_0)$ bo'sh to'plam emasligini ko'rsatamiz. $R^1\times R^2$fazoda $f(x)$ funksiya grafigining ustki nuqtalari to'plamini qaraymiz. Bunday to'plam $f(x)$ funksiya grafikusti deyiladi va

$$P=\{(\gamma,x)\in R^1\times R^2 : \gamma\ge f(x)\}$$

to'plam ko'rinishida aniqlanadi (Q.4.-chizma).



Q.4-chizma

P yopiq to‘plam ekanligi ayon. Haqiqatdan $(\gamma_n, x_n) \in P$ nuqtalar ketma-ketligi $(\gamma, x) \in R^1 x R^n$ nuqtaga yaqinlashsin. Grafik usti ta’rifiga ko‘ra $\gamma_n \geq f(x_n)$ tengsizlik bajariladi. $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lganligi uchun bu tengsizlikdan limitga o‘tilsa $\gamma \geq f(x)$ tengsizlik hosil bo‘ladi, yani (γ, x) nuqta P tegishli.

P to‘plamni qavariq ekanligini ko‘rsatamiz. Aytaylik $(\gamma_1, x_1), (\gamma_2, x_2) \in P$ nuqtalar va $0 < \lambda < 1$ soni berilgan bo‘lsin. P to‘plamning ta’rifiga ko‘ra $\gamma_1 \geq f(x)$, $\gamma_2 \geq f(x_2)$ tengsizliklarga ega bo‘lamiz. $f(x)$ funksiya qavariq bo‘lganligi uchun

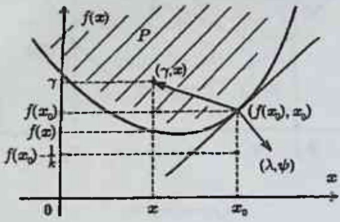
$$\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2 \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2),$$

y’ani $\lambda(\gamma_1, x_1) + (1-\lambda)(\gamma_2, x_2) \in P$.

Shunday qilib P to‘plam $R^1 \times R^2$ fazoning qavariq va yopiq to‘plam osti ekan. Ixtiyoriy $x_0 \in R^n$ nuqtani qaraymiz. $(f(x_0), x_0)$ nuqta P to‘plamga tegishli, ammo P to‘plamning ichki sohasiga tegishli emas, chunki $(f(x_0) - \frac{1}{k}, x_0)$ nuqtalar ketma –ketligi k ning hech bir qiymatida P to‘plamga tegishli emas va $k \to \infty$da $(f(x_0), x_0)$ nuqtaga yaqinlashadi. Ajratish haqidagi lemmaga ko‘ra (Q.2. bo‘limga qarang) P va $\{f(x_0), x_0)\}$ to‘plamlar $R^1 x R^n$ fazoda ajratiladigan to‘plamlar bo‘ladi, ya’ni shunday $(\lambda, \psi) \in R^1 x R^n$ birlik vektor mavjudki barcha $(\lambda, x) \in P$ nuqtalar uchun

$$\gamma\lambda + (x,\psi) \le f(x_0)\lambda + (x_0,\psi) \qquad \text{(Q.26.)}$$

tengsizlik bajariladi (Q.5.-chizmaga qarang).



Q.5-chizma

$x=x_0$ bo'lganda $\gamma \ge f(x_0)$ bo'lib, bu tengsizlikda $\gamma\lambda \le f(x_0)\lambda$, y'ani $\lambda \ge 0$ tengsizlikni hosil qilamiz. Agarda $\lambda = 0$ bo'lsa, u holda (Q.26) tengsizlik $\psi = 0$ bo'lgandagina barcha $x \in R^n$ lar uchun bajariladigan $(x,\psi) \le (x_0,\psi)$ tengsizlikka o'tadi.Buning bo'lishi mumkin emas, chunki $(\lambda,\psi) \in R^1 \times R^2$ birlik vektor. Demak, (Q.26) tengsizlikda λ soni manfiy. Bu tengsizlikni λ soniga bo'lamiz va unga $(f(x),x) \in P$ nuqtani qo'yamiz.Natijada barcha $x \in R^n$ vektorlar uchun o'rinli bo'lgan

$$\left(-\frac{\psi}{\lambda}, x - x_0\right) \le f(x) - f(x_0)$$

tengsizlikka kelamiz.Demak, $-\frac{\psi}{\lambda} \in R^n$ vektor $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi $\partial f(x_0)$ subdifferensiyaliga tegishli ((Q.25) formulani qarang), yani $\partial f(x_0) \ne \varnothing$. va $f(x)$ funksiya ixtiyoriy $x_0 \in R^n$ nuqtada subdifferensiallanuvchi.

Endi $\partial f(x_0)$ to'plamni yopiq to'plam ekanligini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik $p_k \in \partial f(x_0)$ nuqtalar ketma-ketligi $p \in R^n$ nuqtaga yaqinlashsin.(Q.25) formulaga binoan barcha $x \in R^n$ nuqtalar uchun

$$(p_k, x - x_0) \le f(x) - f(x_0),$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.Bu tengsizlikda limitga o'tib

$$(p, x - x_0) \le f(x) - f(x_0)$$

tengsizlikka, yani $p \in \partial f(x_0)$ xulosaga kelamiz.

Endi $\partial f(x_0)$ to'plamni chegaralangan to'plam ekanligini ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilamiz, yani shunday $p_k \in \partial f(x_0)$ nuqtalar ketma-ketligi mavjudki, $k \to \infty$ da $\|p_k\| \to +\infty$ bo'lsin. (Q.25) formulaga binoan barcha $x \in R^n$ nuqtalar uchun

$$(p_k, x - x_0) \le f(x) - f(x_0)$$

tengsizlik bajariladi. Har bir k uchun bu tengsizlikka $x = x_0 + \frac{p_k}{\|p_k\|}$ nuqtani qo'yamiz.Natijada $\|p_k\| \le f(x_k) - f(x_0)$ tengsizlikka kelamiz. $f(x)$ qavariq funksiyalar mavzusidagi 1-teoremaga ko'ra (Q.3 bo'limga qarang) uzluksiz.Shuning uchun oxirgi tengsizlikning o'ng tomoni $S_1(x_0)$ sharda chegaralangan. Bu esa bizning $k \to \infty$ da $\|p_k\| \to +\infty$ bo'lsin deb qilgan farazimizga zid.

Nihoyat $\partial f(x_0)$ to'plamni qavariqligini ko'rsatish qoldi. $p_1, p_2 \in \partial f(x_0)$ nuqtalar va $0 \le \lambda \le 1$ soni berilgan bo'lsin. U holda (Q.25) formulaga binoan barcha $x \in R^n$ nuqtalar uchun

$$(p_1, x - x_0) \le f(x) - f(x_0), \quad (p_2, x - x_0) \le f(x) - f(x_0)$$

tengsizliklar bajariladi.

Bu tengsizliklarni mos ravishda λ va $1-\lambda$ sonlariga ko'paytirib qo'shilsa, barcha $x \in R^n$ nuqtalar uchun o'rinli bo'lgan

$$(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2, x - x_0) \le f(x) - f(x_0)$$

munosabatni hosil qilamiz. Demak, $\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 \in \partial f(x_0)$ bo'ladi. Teorema to'la isbotlandi.

Natija. Har qanday $F \in \Omega(R^n)$ to'plam uchun uning $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasi ixtiyoriy $\psi_0 \in R^n$ nuqtada subdifferensiyallanuvchi va uning $\partial c(F,\psi_0)$ qavariq, koompakt to'plam bo'ladi.

2-Teorema. Aytaylik $f: R^n \to R^1$ funksiya chekli bo'lsin. Bu holda $f(\psi)$ funksiya qandaydir $F \in \Omega(R^n)$ to'plamning tayanch funksiyasi bo'lishi uchun

$$1)\, f(\lambda \cdot \psi) = \lambda f(\psi), \lambda \ge 0;$$
$$2)\, f(\psi_1 + \psi_2) \le f(\psi_1) + f(\psi_2)$$

munosabatlarni bajarilishi zarur va yetarli. Bunda F to'plam

$$F = \left\{ f \in R^n : \left\langle f, \psi \right\rangle \le f(x) \quad \forall \psi \in R^n \right\} \tag{Q.27}$$

ko'rinishga ega.

Isboti. Agar $f(\psi)$ funksiya qandaydir $F \in \Omega(R^n)$ to'plamning tayanch funksiyasi bo'lsa, ko'ra 1-,2-xossalarini qanoatlantiradi (3-ma'ruza , tayanch funksiyalarning 1-va 2-xossalariga qarang).

Teoremaning xulosasini boshqa tomonga ko'rsatamiz. $f(\psi)$ funksiya chekli va qavariq bo'lganligi uchun 1-va 2-shartlardan barcha $\psi_1, \psi_2 \in R^n$ nuqtalar va $0 \le \lambda \le 1$ soni uchun

$$f(\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2) \le f(\lambda\psi_1) + f((1-\lambda)\psi_2) = \lambda f(\psi_1) + (1-\lambda) f(\psi_2)$$

munosabat kelib chiqadi. Yuqorida isbotlangan 1-teoremaga ko'ra bu funksiya ixtiyoriy $\psi_0 \in R^n$ nuqtada subdifferensiyallanuvchi bo'ladi. (Q.27) formula bilan berildan F to'plam $f(\psi)$ funksiyaning $\psi_0 = 0$ nuqtadagi subdifferensiyalidan iborat ((Q.25) formula bilan taqqoslang). Demak 1-teoremaga ko'ra F qavariq kompakt to'plam.

F to'plamning $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasini qaraymiz. Agar biz $c(F,\psi) = f(\psi)$ ekanligini ko'rsatsak teorema isbot bo'ladi.

(Q.27) formuladan foydalanib, har qanday $\psi \in R^n$ vektor uchun

$$c(F,\psi) = \max_{f \in F} \left\langle f, \psi \right\rangle \le f(\psi)$$

tengsizlikni yozamiz. Bu tengsizlikda tenglik o'rinli ekanligini isbotlash uchun teskaridan faraz qilamiz, yani shunday $\overline{\psi} \in R^n$ vektor topiladiki, uning uchun $c(F,\overline{\psi}) < (f,\overline{\psi})$ tengsizlik bajarilsin. 1-teoremaga ko'ra $\partial f(\overline{\psi})$ to'plam bo'sh emas. $p \in \partial f(\overline{\psi})$ vektor va barcha $\psi \in R^n$ vektorlar uchun o'rinli bo'ladigan

$$\langle p, \psi - \overline{\psi} \rangle \le f(\psi) - f(\overline{\psi}) \tag{Q.28}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.2-shartdan

$$f(\psi) = f(\psi - \overline{\psi} + \overline{\psi}) \le f(\psi - \overline{\psi}) + f(\overline{\psi}),$$

yani $f(\psi) - f(\overline{\psi}) \le f(\psi - \overline{\psi})$ tengsizlik kelib chiqadi. Shuning uchun (Q.28) tengsizlikdan har qanday $\psi \in R^n$ vektor uchun o'rinli bo'ladigan $(p, \psi - \overline{\psi}) \le f(\psi - \overline{\psi})$ tengsizlikni hosil qilamiz.

Keltirilgan tengsizlik ixtiyoriy $\psi - \overline{\psi} \in R^n$ vektor uchun ham o'rinli.Bu esa $p \in \partial f(0) = F$ ekanligini bildiradi.

1-shartga ko'ra $f(0) = 0$. Shuning uchun (Q.28) tengsizlikda $\psi = 0$ deb olsak, $(p, \overline{\psi}) \ge f(\psi) > c(F, \overline{\psi})$ tengsizlik hosil bo'ladi.
Bu esa tayanch funksiyalarning 6-xossasiga ko'ra (3-ma'ruzaga qarang) $p \notin F$ ekanligini bildiradi.Hosil bo'lgan qarama qarshilik teoremaning isbotini beradi.

3-Teorema. $f: R^n \to R^1$ funksiya chekli bo'lsin. U holda har qanday $x \in R^n$ nuqta va har qanday $\psi \in R^n$ vekto'r uchun

$$c(\partial f(x), \psi) = f'(x;\psi)$$

tenglik o'rinli.

Isboti. Oldingi mavzuning 2-teoremasiga ko'ra(Q.2.bo'limga qarang) ixtiyoriy $x \in R^n$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning har qanday $\psi \in R^n$ vektor yo'nalishida $f'(x;\psi)$ hosilasi mavjud bo'lib u quyidagi:

1) $f'(x;\lambda\psi) = \lambda f'(x;\psi)$, $\lambda \ge 0$,
2) $f'(x;\psi_1 + \psi_2) \le f'(x;\psi_1) + f'(x;\psi_2)$

shartlarni qanoatlantiradi. Demak 2-teoremaga ko'ra $f'(x;\psi)$ funksiya

$$F=\{f\in R^n:\langle f,\psi\rangle\le f'(x;\psi)\quad \forall\psi\in R^n\}$$

to'plamning tayanch funksiyasi bo'ladi. Shunga ko'ra $\partial f(x)$ va F to'plamlarni ustma-ust tushishini isbotlash qoldi. Yo'nalish bo'yicha hosilaning ta'rifiga ko'ra

$$F=\left\{f\in R^n:\langle f,\psi\rangle\le \lim_{\alpha\to+0}\frac{f(x+\alpha\psi)-f(x)}{\alpha}\quad \forall\psi\in R^n\right\}$$

Oldingi mavzuning 2-teoremasida Q.2.bo'limga qarang) $f(x)$ qavariq funksiya uchun $\alpha\to+0$ da $\dfrac{f(x+\alpha\psi)-f(x)}{\alpha}$ miqdorini o'smasligini ko'rsatgan edik. Shuning uchun

$$F=\left\{f\in R^n:\langle f,\psi\rangle\le \frac{f(x+\alpha\psi)-f(x)}{\alpha}\quad \forall\alpha>0,\ \forall\psi\in R^n\right\}=$$
$$=\{f\in R^n:\langle f,\alpha\psi\rangle\le f(x+\alpha\psi)-f(x)\quad \forall\alpha>0,\ \forall\psi\in R^n\}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Agar bu tenglikdan $y=x+\alpha\psi$ deb olsak

$$F=\{f\in R^n:\langle f,y-x\rangle\le f(y)-f(x)\quad \forall y\in R^n\}=\partial f(x)$$

tenglik hosil bo'lib, teoremani isbotlaydi.

Natija. Har qanday $F\in\Omega(R^n)$ to'plam uchun uning $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasi $\psi_0,\psi\in R^n$ vektorlarning barcha qiymatlarida

$$c(\partial c(F,\psi_0),\psi)=c'(F,\psi_0;\psi)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4-Teorema. $f:R^n\to R^1$ funksiya chekli bo'lsin.Bu holda $f(x)$ funksiya $x_0\in R^n$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning bu nuqtadagi subdifferensiali yagona $\partial f(x_0)=\left\{\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x}\right\}$ vektordan iborat bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x}$ uning gradiyenti bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiyaning har qanday $\psi\in R^n$ vektor yo'nalishida $f'(x;\psi)$ hosilasi mavjud bo'lib , u $f'(x;\psi)=(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x},\psi)$ ko'rinishga ega. 3-teorema bo'yicha $c(\partial f(x_0),\psi)=<\frac{\partial f(x_0)}{\partial x},\psi>$, yani $\partial f(x_0)$ va $\{\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\}$ to'plamlarning tayanch funksiyalari ustma-ust tushadi. Demak tayanch funksiyalar 11-xossasining natijasiga ko'ra (3-ma'ruzaga qarang) $\partial f(x_0)$ va $\{\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\}$ to'plamlarning tayanch funksiyalari ustma-ust tushadi, yani $\partial f(x_0)$ to'plamning subdifferensiali yagona $\{\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\}$ vektordan iborat bo'ladi.

Endi $\partial f(x_0)$ to'plamning subdifferensiali yagona $p\in R^n$ vekto'rdan iborat bo'lsin. Bu holda 3-teoremada har qanday $\psi\in R^n$ vektor uchun $f'(x_0;\psi)=(p,\psi)$ tenglik bajariladi. Yo'nalish bo'yicha hosilaning ta'rifini hisobga olsak har qanday $\alpha>0$ soni va ixtiyoriy $\psi\in R^n$ vektor uchun

$$f(x_0+\alpha\psi)-f(x_0)=\alpha\langle p,\psi\rangle+\bar{o}(\alpha) \qquad (Q.29)$$

munosabat bajariladi. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va p uning gradiyenti ekanligini ko'rsatamiz.Buning uchun

$$f(x)-f(x_0)-\langle p,x-x_0\rangle=\bar{o}(\|x-x_0\|)$$

munosabat bajarilishini isbotlaymiz. $f(x)-f(x_0)-\langle p,x-x_0\rangle\geq 0$ bo'lgani uchun p subdifferensiali ta'rifi bo'yicha ((Q.25) formulani qarang).

$$f(x)-f(x_0)-\langle p,x-x_0\rangle\leq\bar{o}(\|x-x_0\|) \qquad (Q.30)$$

ekanligini isbotlash yetarli.

Oldingi mavzudagi 1-teoremaning isbotida(Q.3 bo'limni qarang) $\Delta x=x-x_0$ vektor orttirma uchun $e_1,...,e_{2n}\in R^n$ vektorlar bo'yicha

$$x-x_0=\xi_1e_1+...+\xi_{2n}e_{2n}$$

yoyilmani qirgan edik. Shu bilan birga ξ_i sonlari $0 \le \xi_i \le \|x - x_0\|$ shartni va demak $\bar{o}(\xi_i) \le \bar{o}(\|x - x_0\|)$ shartni qanoatlantiradi. Bundan tashqari $f(x_0 + \Delta x)$ funksiya orttirmasi uchun

$$f(x+\Delta x) \le \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f(x_0 + \xi_i 2ne_i)$$

bahoni keltirib chiqargan edik. Demak

$$f(x) - f(x_0) \le \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}[f(x_0 + \xi_i 2ne_i) - f(x_0)] \qquad \text{(Q.31)}$$

Bu tengsizlikda yig'indi ostidagi har bir qo'shiluvchi agar $\xi_i = 0$

bo'lsa , nolga teng yoki, agar $\xi_i > 0$ bo'lsa (Q.29) formula bo'yicha

$$f(x_0 + \xi_i 2ne_i) - f(x_0) = \xi_i(p, 2ne_i) + \bar{o}(\xi_i)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin edi. Demak (Q.31) munosabatga ko'ra

$$f(x) - f(x_0) \le \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}[\xi_i\langle p, 2ne_i\rangle + \bar{o}(\xi_i)] \le \langle p, x - x_0\rangle + \bar{o}(\|x - x_0\|)$$

munosabatni hosil qilamiz y'ani (Q.30) baho isbotlandi. Bu bilan teoremaning isbotini yakunlaymiz.

Biz $f(x)$ qavariq funksiyadan olingan $\partial f(x)$ subdifferensialning ba'zi asosiy xossalarini tahlil qildik. Subdifferensialning ko'rsatilgan xossalardan tashqari yana bir qator ajoyib xossalari mavjud. Alohida subdiffernsial hisobni ham qurish mumkin. Ammo bu bizning tadqiqotlarimizga kirmaydi. Hozirgi davrga kelib qavariq funksiyallarning subdifferensiallari matematikaning ko'plab sohalarida o'z tadbiqlarini topmoqda.

Masalalar

1. $f_1(x), f_2(x)$ qavariq chekli funksiyalar va $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ sonlar bo'lsin.

$$\partial(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda_1 \partial f_1(x) + \lambda_2 \partial f_2(x)$$

tenglikni isbotlang.

2. A matritsa bilan berilgan $A: R^n \to R^m$ chegaralangan chiziqli operator va $f: R^m \to R^1$ chekli va qavariq funksiya bolsin.

$$\partial f(Ax) = A^{*}\partial f(x)$$

ekanligini isbotlang.

3. $f: R^n \to R^1$ chekli qavariq funksiya $x_0 \in R^n$ nuqtada minimumga erishishi uchun $0 \in \partial f(x_0)$ mansublikning bajarilishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang. $0 = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$ shart bajarilganda, xuddi shuningdek tasdiqni silliq funksiya uchun taqqoslang.

4*. $f: R^n \to R^1$ chekli va qavariq funksiya bolsin. Uning $\partial f(x)$ subdifferensiyali yuqoridan yarim uzluksiz ko'p qiymatli akslantirish, ya'ni ixtiyoriy $x_0 \in R^n$ nuqta va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ soni mavjud bo'lishi kerakki barcha x vektorlar uchun $\|x - x_0\| \le \delta$ tengsizlik bajarilganda

$$\partial f(x) \subset \partial f(x_0) + S_\varepsilon(0)$$

tengsizlik bajarilishini isbotlang.

D.5. TAYANCH TO'PLAM

$F \in \Omega(R^n)$ to'plamning $\psi_0 \in R^n$ yo'nalishdagi tayanch to'plami (3-ma'ruza, 7-va Q.5-chizmalarga qarang) deb

$$c(F, \psi_0) = \max_{f \in F}(f, \psi_0)$$

tayanch funksiya maksimumga erishadigan barcha $f_0 \in F$ vektorlarning majmuasiga aytiladi . Bu tayanch to'plamni $U(F, \psi_0)$ bilan belgilab,

$$U(F, \psi_0) = \{f \in F : (f, \psi_0) = c(F, \psi_0)\} \qquad \text{(Q.32)}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar $\psi_0 \ne 0$ bo'lsa, u holda $U(F, \psi_0)$ to'plam F to'plam bilan

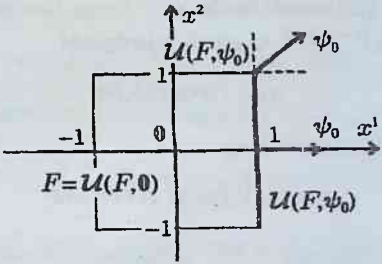
$$\Gamma_{\psi_0} = \{f \in R^n : \langle f, \psi_0 \rangle = c(F, \psi_0)\} \qquad \text{(Q.33)}$$

tayanch gipertekislikning kesishmasidan iborat. Agarda $\psi_0 = 0$ bo'lsa, u holda $U(F,\psi_0) = F$. Shuning uchun $U(F,\psi_0) \in \Omega(R^n)$ y'ani $U(F,\psi_0)$ bo'sh bo'lmagan kompakt to'plam bo'ladi. Bundan tashqari agarda $F \in \Omega(R^n)$ to'plam qavariq bo'lsa, u holda uning $U(F,\psi_0)$ tayanch to'plami ham qavariqdir.

1-misol. $F \in \Omega(R^n)$ to'plam

$$F = \{x \in R^2 : |x_1| \le 1, |x_2| \le 1 \}$$

shart bilan berilgan tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan kvadrat bo'lsin (Q.6.-chizma).



Q.6-chizma

Agar ψ vektorning ψ_1, ψ_2 koordinatalardan hech biri nolga teng bo'lmasa, u holda $U(F,\psi)$ to'plam yagona $(sign\psi_1, sign\psi_2)$ nuqtadan iborat. Qolgan hollarda tayanch to'plam

$$U(F,\psi) = \begin{cases} \{x \in R^2 : x_1 = sign\psi_1, |x_2| \le 1\}, \ agar\ \psi_1 \ne 0, \psi_2 = 0, \\ \{x \in R^2 : |x_1| \le 1, x_2 = sign\psi_2\}, \ agar\ \psi_1 = 0, \psi_2 \ne 0, \\ F \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \ agar\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0 \end{cases}$$

ko'rinishdagi munosabat bilan beriladi.

1-Teorema. $F \in \Omega(R^n)$ to'plam va uning $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasi berilgan bo'lsin. U holda $U(F,\psi_0)$ tayanch to'plamning $\psi_0 \in R^n$

yo‘nalishdagi $convU(F,\psi_0)$ qavariq qobig‘i $c(F,\psi)$ tayanch funksiyaning ψ_0 nuqtadagi $\partial c(F,\psi_0)$ subdifferensiali bilan ustma-ust tushadi, yani

$$convU(F,\psi_0)=\partial c(F,\psi_0) \qquad (Q.34)$$

Isboti. Tayanch funksiyaning subdifferensiali

$$\partial c(F,\psi_0)=\{f\in R^n:(f,\psi-\psi_0)\le c(F,\psi)-c(F,\psi_0)\,,\,\psi\in R^n\} \qquad (Q.35)$$

munosabat bilan berilishini eslaymiz. Dastlab

$$U(F,\psi_0)\subset\partial c(F,\psi_0) \qquad (Q.36)$$

mansublikni bajarilishini ko‘rsatamiz.

$f\in U(F,\psi_0)$ bo‘lsin, u holda (Q.38) formuladan $f\in F,\,(f,\psi_0)=c(F,\psi_0)$ munosabatlar kelib chiqadi. Tayanch funksiyalarning 6-xossasi natijasiga ko‘ra(3-ma’ruzani qarang) ixtiyoriy $\psi\in R^n$ vektor uchun $(f,\psi)\le c(F,\psi)$ tengsizlik bajariladi. Bundan

$$(f,\psi)-(f,\psi_0)\le c(F,\psi)-c(F,\psi_0)$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu esa f vektorni $\partial c(F,\psi_0)$ subdifferensialga ((Q.35) formulaga qarang) mansubliguni bildiradi va shu bilan (Q.36) mansublik isbotlandi. Endi

$$\partial c(F,\psi_0)\subset convF \qquad (Q.37)$$

mansublikni isbotlaymiz. $f\in\partial c(F,\psi_0)$ bo‘lsin. (Q.35) formuladan va tayanch funksiyalarning 2- xossasidan(3-ma’ruzani qarang) foydalanib. ixtiyoriy $\psi\in R^n$ vektor uchun

$$(f,\psi-\psi_0)\le c(F,\psi)-c(F,\psi_0)=c(F,\psi-\psi_0+\psi_0)-c(F,\psi_0)\le c(F,\psi-\psi_0)$$

munosabatga erishamiz.

Bu esa har qanday $h=\psi-\psi_0\in R^n$ vektor uchun $(f,h)\le c(F,h)$ tengsizlik o'rinli ekanligini bildiradi. Bundan tayanch funksiyalarning 9- xossasiga ko'ra (3-ma'ruzani qarang) $f\in convF$ kelib chiqadi.

Endi

$$\partial c(F,\psi_0)\subset \Gamma_{\psi_0} \tag{Q.38}$$

mansublikni isbotlaymiz. $f\in\partial c(F,\psi_0)$ bo'lsin . U holda ixtiyoriy $\psi\in R^n$ vektor uchun ((Q.35) ga qarang)

$$\langle f,\psi-\psi_0\rangle\le c(F,\psi)-c(F,\psi_0)$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikda $\psi=0$ va $\psi=2\psi_0$ deb olsak $-(f,\psi_0)\le -c(F,\psi_0)$ va $(f,\psi_0)\le c(F,\psi_0)$ tengsizliklar hosil bo'lib bundan $(f,\psi_0)=c(F,\psi_0)$ tenglikka kelamiz. Demak (Q.33) munosabatga ko'ra $f\in\Gamma_{\psi_0}$ va (Q.38) mansublik isbotlandi.

Endi yana bir

$$convF\bigcap\Gamma_{\psi_0}=convU(F,\psi_0) \tag{Q.39}$$

mansublikni isbotlaymiz. $f\in convF\bigcap\Gamma_{\psi_0}$ bo'lsa, u holda $f\in convF$ va $f\in\Gamma_{\psi_0}$ bo'ladi. Q.1 bo'limda $conv\,F$ qavariq qobiqning ixtiyoriy f nuqtasi

$$f=\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_{n+1}f_{n+1},\, f_i\in F,\lambda_i\ge 0,\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}=1 \tag{Q.40}$$

ko'rinishda tasvirlanishini ko'rgan edik. $f_i\in F$ bo'lgani uchun tayanch funksiyalarning 6- xossasining natijasidan(3-ma'ruzaga qarang) foydalanib $n+1$ ta

$$(f_i,\psi_0)\le c(F,\psi_0),\quad i=1,\,2,\,....,n+1$$

tengsizliklarni hosil qilamiz. Bu tengsizliklarning barchasida tenglik bajariladi, chunki agarda ularning hech bo'lmaganda bittasida qat'iy tengsizlik bajarilsa bu tengsizliklarni $\lambda_i\ge 0$ sonlarga to'paytirib ularni qo'shsak (Q.40) fo'rmulaga ko'ra $(f_i,\psi_0)<c(F,\psi_0)$ qat'iy tengsizlikka

kelamiz. Bu esa $f \in \Gamma_{\psi_0}$ mansublikka zid. Shuning uchun $f \in \Gamma_{\psi_0}$, va demak tayanch to‘plamning (Q.32 formulaga qarang) ta’rifiga ko‘ra $f_i \in U(F,\psi_0)$ boladi. Bundan (Q.40) yoyilmani etiborga olsak $f \in convU(F,\psi_0)$ ni hosil qilamiz (Q.39) tenglik bir tomonga isbotlandi.

Endi $f \in convU(F,\psi_0)$ bo‘lsin. U holda (Q.40) yoyilma o‘rinli bo‘lib, unda $f_i \in U(F,\psi_0)$. Demak $f_i \in F$ va $f_i \in \Gamma_{\psi_0}$. Bundan yana (Q.40) yoyilmadan foydalanib $f \in convF$ va $f \in \Gamma_{\psi_0}$. Shuning uchun $f \in convF \cap \Gamma_{\psi_0}$ bo‘lib (Q.39) tenglik to‘la isbotlandi.

Teorema isbotini yakunlash uchun barcha isbotlangan mulohazalargan foydalanish kerak. (Q.37) va(Q.38) mansubliklarga ko‘ra $\partial c(F,\psi_0) \subset conv\, F \cap \Gamma_{\psi_0}$ bo‘ladi demak (Q.39) shartga ko‘ra

$$\partial c(F,\psi_0) \subset convU(F,\psi_0)$$

1-teoremaga ko‘ra $\partial c(F,\psi_0)$ qavariq to‘plam (Q.4 bo‘limning 1-teoremasi) bo‘lganligi uchun (Q.36) mansublikni e’tiborga olsak, talab qilingan (Q.34) tenglikni hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Natija. Tayanch to‘plamning tayanch funksiyasi

$$c(U(F,\psi_0),\psi = c'(F,\psi_0;\psi) \qquad \text{(Q.41)}$$

ko‘rinishga ega.

Bu mulohaza 1-teorema va 3-teorema natijasidan bevosita kelib chiqadi (Q.4 bo‘limga qarang).

2-Misol. $S_r(a)$ sharning $\psi_0 \in R^n$ yo‘nalishdagi tayanch to‘plamini topamiz. Sharning tayanch funksiyasi bizga ma’lum bo‘lib $c(S_r(a),\psi) = (a,\psi) + r\|\psi\|$ ko’rinishga ega. $\psi_0 \neq 0$ bo‘lsin . Bu funksiyaning ψ_0 nuqtada ψ yo‘nalish bo‘yicha hosilasi

$$c'(S_r(a)_{\psi_0};\psi) = (a,\psi) + r\left(\frac{\psi_0}{\|\psi_0\|},\psi\right)$$

ko‘rinishga ega. Bu esa $a + r\frac{\psi}{\|\psi_0\|}$ vektorning tayanch funksiyasi.

(Q.41) tenglikdan $U(S_r(a),\psi_0)=a+r\frac{\psi}{\|\psi_0\|}$ kelib chiqadi. Agar $\psi_0=0$ bo'lsa u holda $U(S_r(a),0)=S_r(a)$.

Agar $F\in\Omega(R^n)$ to'plam $U(F,\psi_0)$ tayanch to'plami yagona nuqtadan iborat bo'lsa u holda bu funksiya $\psi_0\in R^2$ yo'nalish bo'yicha qat'iy qavariq to'plam deyiladi. Kelgusida F to'plam agar u ixtiyoriy $\psi_0\neq 0$ yo'nalish bo'yicha qat'iy qavariq bo'lsa, bu to'plamni bir so'z bilan qat'iy qavariq to'plam deb nomlaymiz. $U(F,0)=F$ bo'lgani uchun bu to'plam yagona nuqtadan tashkil topgan bo'lsa, ya'ni $F=\{f\}$ u $\psi_0=0$ yo'nalishda qat'iy qavariq bo'ladi. Qat'iy qavariq funksiya albatta qavariq bo'lishi shart emasligini eslatamiz.

3-misol. R^n fazodagi. S birlik sfera qat'iy qavariq to'plamdir, chunki $U(S_1(0),\psi_0)=\left\{\frac{\psi_0}{\|\psi_0\|}\right\}$ (2-misolga qarang). Ammo bu to'plam qavariq emas.

4-misol. Tekislikdagi

$$F=\{x\in R^2:|x_1\leq 1,|x_2|\leq 1|\}$$

kvadrat qat'iy qavariq to'plam bo'lmaydi, chunki uning tayanch to'plami hech bo'lmaganda bitta koordinatasi noldan iborat bo'lgan ψ_0 vektorlar uchun bittadan ortiq nuqtadan tashkil topgan (Q.6.-chizma va 1-misolga qarang). Boshqa ψ_0 yo'nalishlar uchun F to'plam qat'iy qavariq.

2-teorema. $F\in\Omega(R^n)$ to'plam $\psi_0\in R^2$ yo'nalishda qat'iy qavariq bo'lishi uchun uning $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasi ψ_0 nuqtada differensiyallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Ta'rif bo'yicha $F\in\Omega(R^n)$ to'plam $\psi_0\in R^2$ yo'nalishda qat'iy qavariq bo'lishi uchun $U(F,\psi_0)$ tayanch to'plam yagona nuqtadan iborat bo'lishi zarur va yetarli edi. 1-teoremaga ko'ra $conv U(F,\psi_0)=\partial c(F,\psi_0)$ tenglik bajarilgani uchun, bu shart $\partial c(F,\psi_0)$ subdifferensial yagona nuqtadan iborat bo'lishiga teng kuchli. O'z navbatida bu esa $c(F,\psi)$ tayanch funksiya ψ_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishining zarur va yetarli shartidan iborat. Teorema isbotlandi.

Natija. $F\in\Omega(R^n)$ to'plam qat'iy qavariq bo'lishi uchun uning $c(F,\psi)$ tayanch funksiyasi $\psi=0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda differensiyallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli.

Masalalar

1. $$F=\left\{x\in R^2;\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1,\quad a,b\neq 0\right\}$$

ellipisning $\psi_0\in R^2$ yo'nalish bo'yicha tayanch to'plamini toping.

Bu to'plam qat'iy qavariq bo'ladimi?

2. $\psi_0\in R^n$ yo'nalish bo'yicha qat'iy qavariq $A,B\in\Omega(R^n)$ to'plamlarning $A+B$ algebraik yig'indisi ham $\psi_0\in R^n$ yo'nalish bo'yicha qat'iy qavariq to'plam bo'lishini isbotlang.

3. $\psi_0\in R^n$ yo'nalish bo'yicha qat'iy qavariq bo'lgan $F\in\Omega(R^n)$ to'plamning ixtiyoriy λ soniga ko'paytmasi λF to'plam ham $\psi_0\in R^n$ yo'nalish bo'yicha qat'iy qavariq to'plam bo'lishini isbotlang.

4*.2-teorema bo'yicha qavariq va qat'iy qavariq bo'lgan $F\in\Omega(R^n)$ to'plamning chegarasini birlik sfera nuqtalari orqali parametrizatsiyalash imkoniyatini beradi. Bu holda

$$\frac{\partial c(F,\cdot)}{\partial\psi}:S\to R^n$$

funksiya $S\in R^n$ birlik sferani $F\in\Omega(R^n)$ to'plam chegarasiga o'zaro bir qiymatli akslantirishini isbotlang. Bu funksiyaning uzluksizligini isbotlang.

Q.6. O'LCHOVDOSHLIK

O'lchov tushunchasi matematik analizning eng asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Bu tushunchadan kelgusida foydalanish uchun, biz bu bo'limda o'lchovli to'plamlar, o'lchovli funksiyalar va Lebeg integralining ta'rifini va ularning asosiy xossalarini (isbotsiz) keltiramiz. Ko'rsatilgan ko'plab xossalarning isbotlarini matematik analiz bo'yicha, masalan [3], [4] adabiyotlardan topish yoki mustaqil bajarish mumkin.

O'lchovli to'plamlar

R^n fazoda o'lchov tushunchasini kiritamiz. Ko'rgazmalilik uchun $n=1$ holni, yani R^1 son o'qini qaraymiz. Qandaydir $I=[t_0,t_1]$ kesmani va bu kesmada uzunlik tushunchasini yoki *to'plamning o'lchovi* tushunchasini kiritish uchun zarur bo‘lgan $A \subset I$ qism to‘plamlarning $\sum$ sistemasini qaraymiz. $\sum$ sistemaning har bir A to‘plami o‘lchovli to‘plam deyilib, unga Lebeg o‘lchovi deb nomlangan qandaydir μ soni mos qo‘yiladi, ya’ni $\mu:\sum \to R^1$ funksiya aniqlanadi. Olchovli to‘plamlarning $\sum$ sistemasini va ularga mos Lebegning μ o‘lchovini aniqlashni bir necha bosqichlarda amalga oshiramiz.

$\sum$ sistemaga dastlab $I=[t_0,t_1]$ kesmadagi barcha

$$(a,b)\,,\,[a,b]\,,\,(a,b]\,,\,[a,b) \qquad (Q.42)$$

oraliqlarni kiritamiz. Bunday oraliqlarning Lebeg o‘lchovini $\mu = b-a$ deb qabul qilamiz. Demak xususiy holda $I=[t_0,t_1]$ kesmaning o‘lchovi $\mu(I)=t_1-t_0$, bitta $t \in I$ nuqtaning o‘lchovi $\mu(\{t\})=0$, shuningdek $\varnothing$- bo‘sh to‘plamning o‘lchovi $\mu(\varnothing)=0$.

Kelgusida $\sum$ sistemaga chekli yoki sanoqli sondagi o‘zaro kesishmaydigan (Q.42) ko‘rinishdagi P_i oraliqlarning birlashmasi bo‘lgan ixtiyoriy $A \subset I$ yani

$$A=\bigcup_i P_i\ ,\ P_i \cap P_j = \varnothing\ ,\ i \neq j \qquad (Q.43)$$

ko‘rinishdagi to‘plamlarni kiritamiz va bu $A \subset I$ to‘plamning Lebeg o‘lchovini

$\mu(A)=\sum_i \mu(P_i)$ tenglik bilan aniqlaymiz. Demak $\sum$ sistemaga $I=[t_0,t_1]$ kesmadagi barcha ochiq to‘plamlar ham kiradi, chunki har qanday ochiq to‘plamni chekli yoki sanoqli sondagi o‘zaro kesishmaydigan ochiq oraliqlar birlashmasi sifatida ifodalash mumkin.

$\sum$ sistemaga $I=[t_0,t_1]$ kesmagacha to‘ldiruvchi to‘plam bo‘lgan barcha chekli yoki sanoqli sondagi o‘zaro kesishmaydigan turli (Q.43) ko’rinishdagi P_i oraliqlarning birlashmasidan iborat bo‘lgan $A \subset I$ y’ani

$$A = I \setminus \bigcup_i P_i,\ P_i \bigcap P_j = \varnothing,\ i \neq j \qquad (Q.44)$$

to‘plamlarni kiritamiz. Bunday to‘plamlarning Lebeg o‘lchovini $\mu(A)=\mu(I)-\sum_i \mu(P_i)$ ko‘rinishda aniqlaymiz. Har qanday yopiq to‘plamni butun kesmagacha to‘ldiruvchisi chekli yoki sanoqli sondagi o‘zaro kesishmaydigan ochiq oraliqlar birlashmasi sifatida ifodalash mumkinligidan $\sum$ sistemaga $I=[t_0,t_1]$ kesmadagi barcha yopiq to'plamlar ham kiradi.

Demak, $\sum$ sistema barcha mumkin bo'lgan (Q.42) ko'rinishdagi oraliqlarni hamda (Q.43) va (Q.44) ko'rinishdagi to'plamlarni o'zida saqlagani uchun yetarlicha katta to'plamni tashkil etadi. Ammo buning o'zi ham yetarli emas va biz $\sum$ sistemaga yana qandaydir to'plamlarni kiritamiz. Bu ishni quyidagicha amalga oshiramiz.

Ixtiyoriy $A\subset I$ to'plam uchun uning (Q.43) ko'rinishdagi chekli yoki sanoqli sondagi P_i oraliqlardan tashkil topgan barcha qoplamalarni qaraymiz. Natijada $A\subset\bigcup_i P_i$ munosabatga ega bo'lamiz. A to'plamning *yuqori o'lchovi* deb

$$\mu^*(A)=\inf\sum_i \mu(P_i)$$

tenglik bilan aniqlangan $\mu^*(A)$ soniga aytiladi. Bu yerda quyi chegara A to'plamning barcha mumkin bo'lgan qoplamalari boyicha olinadi.

Keyin

$$\mu_*(A)=\mu(I)-\mu^*(I\setminus A)$$

tenglik bilam aniqlangan $\mu_*(A)$ soniga A to'plamning *quyi o'lchovi* deyiladi. Agar A to'plamning quyi va yuqori o'lchovlari ustma-ust tushib μ soniga teng, yani $\mu^*(A)=\mu_*(A)=\mu$ bo'lsa bunday to'plamlarni ham $\sum$ sistemaga sistemaga kiritamiz va μ sonini bu to'plamning *Lebeg o'lchovi* deb nomlaymiz. Albatta bunday qabul qilishning, y'ani (Q.42),(Q.43) yoki (Q.44) ko'rinishdagi $A\subset I$ to'plamlar uchun qurilgan yuqori va quyi o'lchovlari oldin kiritilgan Lebeg o'lchovi bilan ustma-ust tushishini isbotlash zarur.

Sunday qilib biz har qanday $I=[t_0,t_1]$ kesmadagi o'lchovli to'plamlarning $\sum$ sistemasini qurdik va har qanday o'lchovli A to'plam uchun uning $\mu(A)$ Lebeg o'lchovini aniqladik. Shu bilan birga $I=[t_0,t_1]$ kesmada o'lchovsiz to'plamlar mavjudligini yani $I=[t_0,t_1]$ kesmaning $\sum$ sistemaga tushmaydigan qism to'plamlari borligini etiborga olamiz.

Agar barcha $A\bigcap[i,i+1]$, $i=0,\pm1,\pm2,...$ to'plamlar o'lchovli bo'lsa, u holda ixtiyoriy $A\in R^1$ to'plam o'lchovli deyiladi. Bunda $A\in R^1$ to'plamning o'lchovi deb

$$\mu(A)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mu(A\bigcap[i,i+1])$$

soniga aytamiz. Shunday qilib son to'g'ri chizig'ida to'plamning o'lchovli tushunchasi kiritildi.

Agar qandaydir xossa $t\in[t_0,t_1]\setminus A$ nuqtalar uchun bajarilib, $A\in R^1$ to'plamning o'lchovi nolga teng, ya'ni $\mu(A)=0$ bo'lsa, bu xossa $[t_0,t_1]$ *kesmaning deyarli barcha nuqtasida bajariladi* deyiladi.

O'lchovli funksiyalar

Agar R^n fazodagi ixtiyoriy $\widetilde{S}_\varepsilon(x_0)=\{x\in R^n:\|x-x_0\|<\varepsilon\}$ ochiq sharning asli (aksi) $f:R^n\to R^n$ akslantirishda o'lchovli to'plam, ya'ni $\sum$ to'plamlar sistemasiga tegishli bo'lsa, u holda $f:R^n\to R^n$ funksiyaga *o'lchovli funksiya* deyiladi. Demak har qanday $\varepsilon>0$ soni va ixtiyoriy $x_0\in R^n$ nuqta uchun

$$f^{-1}(\widetilde{S}_\varepsilon(x_0))=\{t:\|f(t)-x_0\|<\varepsilon\}\in\sum$$

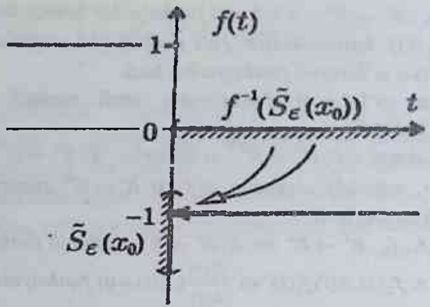
munosabat bajarilsa $f(t)$ funksiya o'lchovli bo'ladi.

Shuning ichun ixtiyoriy uzluksiz $f(t)$ funksiya o'lchovli funksiyadir, chunki uning uchun ixtiyoriy ochiq sharning probrazi ochiq to'plam bo'lib, $\sum$ sistemaga tegishli.

1-misol.

$$f(t)=\begin{cases}1, \ agar -\infty<t\le 0,\\ -1, agar \ 0<t<+\infty\end{cases}$$

munosabat bilan aniqlangan (Q.7-chizma) $f:R^1\to R^1$ funksiyani qaraymiz.



Q.7-chizma

Bu funksiyani o'lchovli ekanligini ko'rsatamiz. Berilgan holda R^1 fazodagi ixtiyoriy ochiq shar uchun, ya'ni ixtiyoriy ochiq oraliq uchun quyidagi to'rtta: bu oraliq -1 va 1 nuqtalarni o'zida saqlamaydi; faqat 1 nuqtani saqlaydi; faqat -1 nuqtani saqlaydi; -1 va 1 nuqtalarni o'zida saqlaydi; to'rtta hollar bo'lishi mumkin (Q.7-chizmani qarang). Birinchi holda bu oraliqning aksi bo'sh to'plam, ikkinchi holda $(-\infty,0]$oraliq, uchinchi holda $(0,+\infty)$ bilan va nihoyat to'rtinchi holda butun R^1 son o'qi bilan ustma-ust tushadi. Ammo bu to'plamlarning hammasi R^1 to'g'ri chiziq uchun qurilgan $\sum$ sistemaga kiradi. Demak $f(t)$ o'lchovli funksiya.

Biz kelgusida foydalanadigan o'lchovli funksiyalarning ba'zi xossalarini qarab chiqamiz. C uzluksiz funksiyalar sinfi L o'lchovli funksiyalar sinfiga kiradi, ya'ni biz uzluksiz funksiyalar sinfini o'lchovli funksiyalar sinfigacha kengaytirdik.

1-xossa. *Agar $[t_0,t_1]$ kesmada uzluksiz $f_k(t)$ funksiyalar ketma-ketligi mavjud bo'lib, har bir $t\in[t_0,t_1]$ uchun*

$$f(t)=\lim_{k\to\infty} f_k(t)$$

munosabatning bajarilishi $f:R^1\to R^n$ funksiyaning $[t_0,t_1]$ kesmada o'lchovli bo'lishi uchun zarur va yetarli.

2-xossa. $f_k : R^1 \to R^n$ - *o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi bo'lib, har bir* t *uchun* $\{f_k(t)\}$ *ketma-ketlik* $f(t)$ *funksiyaga yaqinlashsin. U holda* $f(t)$ *limit funksiya o'lchovli funksiya bo'ladi.*

Shuning uchun o'lchovli funksiyalar sinfi nuqtali yaqinlashishga nisbatan yopiq bo'ladi.

3-xossa. *Agar* $f : R^1 \to R^n$ *o'lchovli,* $g : R^n \to R^m$ *esa uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda ularning* $g(f(t)) : R^1 \to R^m$ *superpozitsiyasi ham o'lchovli funksiya bo'ladi.*

4-xossa. $f_1, f_2 : R^1 \to R^n$ *va* $\lambda : R^1 \to R^1$ *o'lchovli funksiyalar bo'lsin.*

U holda $f_1(t) \pm f_2(t), \lambda(t) f_1(t)$ va $\dfrac{f_1(t)}{\lambda(t)}$ $(\lambda(t) \neq 0)$ *funksiyalar ham o'lchovli bo'ladi.*

Agar $f : R^1 \to R^n$ funksiya sanoqlidan ko'p bo'lmagan $x_1, x_2, \ldots \in R^n$ qiymatlar qabul qilsa bu funksiyaga *oddiy* funksiya deyiladi.

5-xossa. $f : R^1 \to R^n$ *oddiy funksiya bo'lib* $x_1, x_2, \ldots \in R^n$ *uning qiymatlar to'plami bo'lsin. Bu holda* $f(t)$ *o'lchovli funksiya bo'lish uchun barcha* $A_i = \{t \in R^1 : f(t) = x_i\}$ *to'plamlar o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli*

6-xossa. $f : R^1 \to R^n$ *funksiya o'lchovli bo'lishi uchun u oddiy funksiyalar ketma-ketligining tekis limiti bo'lishi, ya'ni barcha* $t \in R^1$ *lar uchun* $f(t) = \lim\limits_{k \to +\infty} f_k(t)$ *tekis yaqinlashishni qanoatlantiruvchi* $f_k(t)$ *sodda o'lchovli funksiyalar ketma ketligining mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Lebeg integrali

Integral tushunchasini o'lchovli funksiyalar sinfiga ham tadbiq etish mumkin.

Dastlab bu ishni sodda o'lchovli funksiyalar uchun amalga oshiramiz.

$I = [t_0, t_1] \subset R^1$ kesma, $f : I \to R^n$ sodda o'lchovli funksiya va uning $x_1, x_2, \ldots \in R^n$ qiymatlari to'plam berilgan bo'lsin. U holda o'lchovli funksiyalarning 5- xossa bo'yicha barcha to'plamlar o'lchovlidir.

Agar

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{t : f(t) = x_i\}) x_i$$

qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning yig'indisiga $f(t)$ funksiyadan olingan Lebeg integrali deyiladi va $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ kabi belgilanadi.

Shuning uchun

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{m} \mu(\{t: f(t)=x_i\})x_i$$

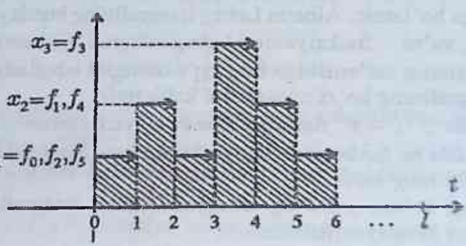
2-misol. $f: R^1 \to R^1$ funksiya $[0,l]$ kesmada bo'lakli o'zgarmas bo'lsin, bu yerda l butun soni quyidagi ko'rinishda aniqlangan: $i \le t < i+1$ $(i = 0,1,...,l-1)$ bo'lganda $f(t) = f_i$ (Q.8-chizma). f_i sonlar orasida ustma-ust tushadiganlari ham bo'lishi mumkin. x_j, $j = 0,1,...,m \le l-1$ orqali $\{f_i\}$ barcha turli nuqtalarni belgilaymiz. Bu funksiyaning Lebeg integrali

$$\int_0^l f(t)dt = \sum_{j=0}^{m} \mu(\{t: f(t) = x_j\})x_j \qquad (Q.45)$$

ko'rinishga ega $f(t)$ funksiya $[0,l]$ kesmada bo'lakli o'zgarmas. Shuning uchun $f(t)$ funksiyaning odatdagi Riman integrali mavjud bo'lib, u

$$\int_0^l f(t)dt = \sum_{i=0}^{l-1} f_i \qquad (Q.46)$$

ko'rinishga ega. Bu integral qiymat bo'yicha chizmada belgilangan (Q.8-chizma).



Q.8-chizma

Bu integrallarning ustma-ust tushishi tushunarli. Bu integral Riman va Lebeg bo'yicha qanday hisoblanishini tushuntiramiz. Riman bo'yicha ((Q.46) formulaga qarang) barcha f_i sonlarini ketma-ket yig'ish zarur, Lebeg bo'yicha ((Q.45) formulaga qarang). $f(t)$ funksiya bir xil x_j qiymatlar qabul qiluvchi kesmalarning umumiy $\mu(\{t: f(t)=x_j\})$ uzunligini uning x_j nuqtadagi qiymatlariga ko'paytirib qo'shish kerak. Bu integrallar orasidagi farqni Lebegga tegishli bo'lgan ko'rgazmalilik orqali quyidagicha taqqoslash mumkin: bizda qop xaltada tanga pullar bo'lib ularni umumiy yig'indisini topish kerak. Riman bo'yicha xaltadan bittadan tangalar olib tangalarda yozilgan raqamlarni qo'shib umumiy summani topish, Lebeg bo'yicha dastlab tangalarni bir xil qiymat bo'yicha guruhlarga ajratish va har bir guruhlardagi tangalar qiymatlarini qo'shib umumiy summani topish kerak.

$f: I \to R^n$ ixtiyoriy o'lchovli funksiya berilgan bo'lsin. U holda o'lchovli funksiyalarning 6-xossasiga ko'ra, shunday sodda o'lchovli $f_k(t)$ funksiyalar ketma-ketligi mavjudki, barcha $t \in I$ lar uchun $\lim_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)$ munosabat bajariladi. Agarda $\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t_1} f_k(t)dt$ mavjud bo'lsa, bu limitga $f(t)$ funksiyaning Lebeg integrali deyiladi va $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ orqali belgilanadi. Shuning uchun

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = \lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t_1} f_k(t)dt$$

tenglikka ega bo'lamiz. Albatta Lebeg integralining bunday ta'riflanishini to'g'riligini, ya'ni funksiyaning Lebeg integrali $f_k(t)$ sodda funksiyalar ketma-ketligining tanlanishiga bog'liq emasligini isbotlash kerak.

Lebeg integralining ba'zi xossalarini keltiramiz.

1-xossa. *Agar $f: I \to R^n$ funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya Lebeg bo'yicha ham integrallanuvchi bo'lib, bu integrallar teng bo'ladi.*

Shuning uchun , Lebeg integrali Riman integralining o'lchovli funksiyalarga kengaytirilishidir.

2-xossa. *$f: I \to R^n$ funksiya Lebeg bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun, $f(t)$ o'lchovli funksiya va barcha $t \in I$ larda $\|f(t)\| \le k(t)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi, Lebeg bo'yicha integrallanuvchi $k: I \to R^1$ skalyar funksiyaning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Chegaralangan $f: I \to R^n$ funksiya Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lishi uchun, bu funksiya I kesmaning deyarli barcha nuqtasida uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli ekanligini eslatamiz.

Lebeg integrali uchun Riman integralining odatdagi barcha xossalari bajariladi. Bu yerda ulardan ba'zilarini keltiramiz.

3-xossa. Agar $f, f_1, f_2 : R^1 \to R^n$ funksiyalar integrallanuvchi bo'lib, λ qandaydir son bo'lsa, u holda

$$\int_{t_0}^{t_1} [f_1(t) \pm f_2(t)]dt = \int_{t_0}^{t_1} f_1(t)dt \pm \int_{t_0}^{t_1} f_2(t)dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda f(t)dt = \lambda \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$$

$$\int_{t_0}^{\tau} f(t)dt + \int_{\tau}^{t_1} f(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt, \ \tau \in I$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \right\| \le \int_{t_0}^{t_1} \| f(t) \| dt$$

munosabatlar o'rinli.

4-xossa. $f: I \to R^n$ funksiya integrallanuvchi bo'lib, $\tau \in I$ bo'lsin. U holda

$$g(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} f(t)dt$$

integral integrallashning yuqori chegarasi τ ga uzluksiz bog'liq , ya'ni $g: I \to R^n$ funksiya uzluksiz.

$n = 1$ bo'lgan hol uchun Lebeg integralining quyidagi ikkita xossasini keltiramiz.

5-xossa. Agar $f: I \to R^1$ funksiya integrallanuvchi va $f(t) \ge 0$ bo'lsa, u holda $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \ge 0$ bo'ladi.

6-xossa. Agar $f: I \to R^1$ funksiya integrallanuvchi bo'lib, $f(t) \ge 0$ va $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = 0$ bo'lsa, u holda $f(t)$ funksiya I kesmaning deyarli barcha nuqtasida nolga teng.

Q.7. KO‘P QIYMATLI AKSLANTIRISHLAR

Ixtiyoriy $F:R^1 \to \Omega(R^n)$ funksiyaga (4-ma’ruzani qarang), ya’ni qiymatlari R^n fazoning bo‘sh bo‘lmagan kompakt to‘plamlardan iborat bo‘lgan $F(t)$ funksiyaga ko‘p qiymatli akslantirish deyiladi.

Agar $F(t)$ akslantirishning $c(F(t),\psi)$ tayanch funksiyasi har bir mahkamlangan $\psi \in R^n$ vektor uchun, t bo‘yicha $I=[t_0,t_1]$ kesmada o‘lchovli funksiya bo‘lsa, $F(t)$ akslantirishga $I=[t_0,t_1]$ kesmada o‘lchovli deyiladi. O‘lchovning bunday ta’rifi o‘ta umumiy bo‘lib, ko‘plab $F(t)$ funksiyalar sinfi ko‘rsatilgan ma’noda o‘lchovlidir. Odatda , ko‘p qiymatli funksiyalar bo‘yicha adabiyotlarda o‘lchov tushunchasi o‘ta qisqa $F(t)$ akslantirishlar sinfi uchun aniqlanadi. $F(t)$ akslantirishning $c(F(t),\psi)$ tayanch funksiyasi bo‘yicha faqat $convF(t)$ qavariq qobiqni tiklash mumkinligidan, o‘lchovning berilgan ta’rifi faqat ko‘p qiymatli $convF:R^1 \to \Omega(R^n)$ funksiyaning xususiyatiga cheklanishlar qo‘yiladi, ammo $F(t)$ akslantirishni $convF(t)$ to‘plamning ichki sohasidagi qismida hech qanday ta’sir ko‘rsatmaydi. Shu bilan birga quyida keltirilgan natijalar ko‘rsatilgan ma’noda o‘lchovli bo‘lgan $F(t)$ ko‘p qiymatli akslantirishlar uchun o‘rinli.

Ixtiyoriy $F:R^1 \to \Omega(R^n)$ ko‘p qiymatli akslantirish o‘lchovli, chunki uning $c(F(t),\psi)$ tayanch funksiyasi har bir mahkamlangan $\psi \in R^n$ vektor uchun , t bo‘yicha $I=[t_0,t_1]$ kesmada uzluksiz funksiyadir (4-ma’ruzaning 1-teoremasiga qarang), va demak o‘lchovlidir.

1-teorema (Filippov teoremasi). Agar $F:R^1 \to \Omega(R^n)$ ko‘p qiymatli akslantirish o‘lchovli bo‘lsa, u holda uning o‘lchovli bir qiymatli $f(t) \in F(t)$ shoxchasi mavjud.

Isboti. $F(t)$ ko‘p qiymatli akslantirish o‘lchovli bo‘lsin, ya’ni uning $c(F(t),\psi)$ tayanch funksiyasi t bo‘yicha o‘lchovli. Ixtiyoriy $\psi_0 \in R^n$ vektorni mahkamlaymiz va $U(F(t),\psi_0)$ tayanch to‘plamni qaraymiz. Uning $c(U(F(t),\psi_0),\psi)$ tayanch funksiyasi

$$c(U(F(t),\psi_0),\psi) = c'(F(t),\psi_0;\psi)$$

ko‘rinishga ega (Q.5-bo‘lim 1-teoremasining natijasiga qarang).

Yo‘nalish bo‘yicha hosilaning ta’rifiga ko‘ra

$$c'(U(F(t),\psi_0),\psi)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{c(F(t),\psi_0+\alpha\psi)-c(F(t),\psi_0)}{\alpha} \qquad (Q.47)$$

tenglikka kelamiz. Demak, $c(U(F(t),\psi_0),\psi)$ tayanch funksiya o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligining limiti sifatida t bo‘yicha o‘lchovli funksiya bo‘ladi (Q.6-bo‘limning o‘lchovli funksiyalar 2- xossasiga qarang). $F(t)\in\Omega(R^n)$ bo‘lgani uchun $U(F(t),\psi_0)\in\Omega(R^n)$, ya’ni tayanch to‘plam - bo‘sh bo‘lmagan kompakt to‘plam. Keyin $U(F(t),\psi_0)$ tayanch to‘plam $F(t)$ to‘plamga tayanch bo‘lgan Γ_{ψ_0} gipertekislikda yotadi. Demak uning o‘lchami $n-1$ dan ortmaydi ($F\in R^n$ to‘plamning o‘lchami F to‘plamni o‘zida saqlagan minimal chiziqli ko’pchillikning o‘lchamiga teng).

Endi ψ_0 vektor sifatida ketma-ket R^n fazoning $e_1,e_2,\dots,e_n$ bazis vektorlarini olamiz. Ko‘p qiymatli akslantirishlarning $U_1(t)=U(F(t),e_1),\ U_2(t)=U(F(t),e_2),\dots,U_n(t)=U(F(t),e_n)$ ketma-ketligini qaraymiz. Berilgan ketma-ketlikda har bir $U_i(t)$ ko‘p qiymatli akslantirishning $c(U_i(t),\psi)$ tayanch funksiysi t bo‘yicha o‘lchovli funksiya bo‘ladi. Bundan tashqari ixtiyoriy $t\in R^1$ uchun $U_i(t)\in\Omega(E^n)$ mansublik o‘rinli bo‘lib, $U_i(t)$ to‘plamning o‘lchami $n-i$ dan ortmaydi, chunki bu to‘plamlar i ta ortogonal $\Gamma_{e_1},\dots,\Gamma_{e_i}$ gipertekisliklar kesishmasida yotadi. Tayanch to‘plam ta’rifiga ko‘ra

$$U_n(t)\subset U_{n-1}(t)\subset\ldots\subset U_1(t)\subset F(t)$$

mansubliklar ketma-ketligini hosil qilamiz.

$U_n(t)$ to‘plamning o‘lchami noldan ortmasligi va $U_n(t)\in\Omega(E^n)$ bo‘lgani uchun $U_n(t)$ to‘plam yagona $u_n(t)$ nuqtadan iborat. Bu to‘plam bilan belgilaymiz, ya’ni $f(t)=u_n(t)$. Keyin

$$c(U_n(t),\psi)=\langle u_n(t),\psi\rangle=\langle f(t),\psi\rangle$$

tayanch funksiya ixtiyoriy $\psi\in R^n$ vektor uchun t boy‘icha o‘lchovli. Bundan $f(t):R^1\to R^n$ funksiyaning o‘zi o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar ketma-ket $\psi=e_1,\dots,e_n$ deb olinsa, u holda $f(t)$

funksiyaning har bir $f_i(t)=\langle f(t),e_i\rangle$ koordinatasi o'lchovli funksiya bo'ladi. Endi

$$f(t)=f_1(t)e_1+...+f_n(t)e_n$$

funksiyaning o'zi ham uzluksiz va o'lchovli funksiyalarning superpozitsiyasi sifatida o'lchovli funksiyadir (Q.6 bo'lim, o'lchovli funksiyalarning 2-xossasi). Barcha $t\in R^1$ lar uchun $f(t)\in F(t)$ bo'lgani uchun, u holda $f(t)$ funksiya $F(t)$ akslantirishning bir qiymatli shoxchasidir. Teorema isbotlandi.

1-xossa. $F:R^1\to\Omega(R^n)$ o'lchovli ko'p qiymatli akslantirish va $\psi_0\in R^n$ -mahkamlangan vektor berilgan bo'lsin. U holda $U(F(t),\psi_0)$ o'lchovli akslantirish bo'ladi, va demak uning $f(t)\in U(F(t),\psi_0)$ o'lchovli bir qiymatli shoxchasi mavjud.

Isboti. $U(F(t),\psi_0)$ akslantirishning tayanch funksiyasi $c(U(F(t),\psi_0),\psi)$ o'lchovli ekanligiga ishonch hosil qilish yetarli. Bu ma'lumot 1-teoremaning isbotida ko'rsatilgan ((Q.47 formulaga qarang).

Yana bitta kelgusida qo'llaniladigan natijani keltiramiz.

2-xossa. $F:R^1\to\Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirish $I=[t_0,t_1]$.kesmada uzluksiz bo'lsin. U holda uning bu kesmada o'lchovli bir qiymatli $f(t)\in F(t)$ shoxchasi mavjud.. Bundan tashqari agar $\psi\in S$ - ixtiyoriy mahkamlangan vektor bo'lsa, u holda $U(F(t),\psi)$ ko'p qiymatli akslantirishning $f(t)$ bir qiymatli shoxchasi mavjud, ya'ni barcha $t\in I$ lar uchun $f(t)\in U(F(t),\psi)$.

$I=[t_0,t_1]$ kesma va $F:I\to\Omega(E^n)$ ko'p qiymatli akslantirish berilgan bo'lsin.

1-ta'rif.

$$G=\int_{t_0}^{t_1}F(t)dt=\left\{\int_{t_0}^{t_1}f(t)dt: f(t)\in F(t)\right\}$$

to'plamga $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning $I=[t_0,t_1]$ kesma bo'yicha integrali deyiladi.

Tenglikning o'ng qismidagi Lebeg integrali $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning barcha bir qiymatli shoxchalari bo'yicha olinadi, agar u mavjud bo'lsa. Bu yerda G to'plam R^n fazoning qism to'plami ekanligi ravshan.

2-teorema (Lyapunov teoremasi). $F: I \to \Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirish o'lchovli va Lebeg bo'yicha $I = [t_0, t_1]$ kesmada jamlanuvchi $k(t)$ skalyar funksiya uchun $|F(t)| \le k(t)$ bahoni qanoatlantirsin. U holda $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning integrali R^n fazoda bo'sh bo'lmagan qavariq kompakt to'plamdan iborat, ya'ni

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt \in \Omega(R^n).$$

Bundan tashqari G qavariq to'plam.

Bu teorema (vektor o'lchovlar haqidagi teorema sifatida) birinchi bor [5] da isbotlangan. Keyingi ishlarda (xususiy holda [7],[8] ni qarang) uning isboti sezilarli darajada soddalashtirilgan.

Doimo 2-teoremaning shartlari bajariladi deb hisoblab, dastlab quyidagi uchta lemmani isbotlaymiz.

1-lemma. *G bo'sh bo'lmagan chegalangan to'plam.*

Isboti. Teorema shartlari bo'yicha G bo'sh to'plam emasligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham 1-teoremaga asosan $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning hech bo'lmaganda bitta o'lchovli bir qiymatli $f(t) \in F(t)$ shoxchasi mavjud. Keyin

$$\|f(t)\| \le |F(t)| \le k(t) \tag{Q.48}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Shuning uchun Lebeg integrali 2-xossasiga ko'ra (Q.6 bo'limni qarang) $f(t)$ shoxcha integrallanuvchi va $\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt \in G$, ya'ni G bo'sh to'plam emas. G to'plamni chegaralanganligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham $g \in G$ bo'lsin, u holda $g = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$, bu yerda $f(t)$- $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning qandaydir shoxchasi. Lebeg integralining 3-xossasi va (Q.48) munosabatga ko'ra

$$\|g\| = \left\|\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt\right\| \le \int_{t_0}^{t_1} \|f(t)\|dt \le \int_{t_0}^{t_1} k(t)dt = k$$

Shuning uchun $G \subset S_k(0)$, ya'ni G - chegaralangan to'plam. 1-lemma isbotlandi.

2-lemma. *G ko'p qiymatli akslantirishdan olingan integral bo'yicha, uning tayanch funksiyasini*

$$c(G,\psi) = \sup_{g \in G}\langle g,\psi\rangle \qquad (Q.49)$$

tenglik bilan aniqlash mumkin. Bu ifodada maksimumga doimo erishiladi. Bundan tashqari

$$c\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt\,,\psi\right) = \left(\int_{t_0}^{t_1} c(F(t),\psi)\,dt\right) \qquad (Q.50)$$

tenglik o'rinli.

Isboti. $c(F(t),\psi)$ tayanch funksiya t bo'yicha o'lchovli va

$$|c(F(t),\psi)| \le |F(t)|\cdot\|\psi\| \le k(t)\|\psi\|$$

o'rinli bo'lgani uchun, (Q.50) tenglikning o'ng tomonidagi integral mavjud. Ixtiyoriy $\psi \in S$ vektorni mahkamlaymiz. Integral ta'rifiga ko'ra $g = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ tenglikni qanoatlantiruvchi $F(t)$ ko'p qiymatli akslantirishning hech bo'lmaganda bitta o'lchovli bir qiymatli $f(t) \in F(t)$ shoxchasi mavjud. Tayanch funksiyalar 6-xossasi natijasiga ko'ra (3-ma'ruzaga qarang)

$$(f(t),\psi) \le c(F(t),\psi) \qquad (Q.51)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. 1-teoremaning i-natijasiga ko'ra $U(F(t),\psi)$ ko'p qiymatli akslantirishning $f^*(t)$ bir qiymatli shoxchasi mavjud. $|F(t)| \le k(t)$ bahoga ko'ra bu shoxcha I kesmada integrallanuvchi. Tayanch to'plamning ta'rifiga ko'ra

$$c(F(t),\psi) = \langle f^*(t),\psi\rangle \qquad (Q.52)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shuning uchun Lebeg integralining xossalaridan foydalanib, (Q.51) va (Q.52) formulalardan

$$c(G,\psi)=\sup_{g\in G}\langle g,\psi\rangle=\sup_{f(t)\in F(t)}\int_{t_0}^{t_1}\langle f(t),\psi\rangle dt\le\int_{t_0}^{t_1}c(F(t),\psi)dt=\int_{t_0}^{t_1}\langle f^*(t),\psi\rangle dt\le c(G,\psi)$$

munosabatlar zanjirini hosil qilamiz. Demak barcha tengsizliklarda tenglik bajariladi, ya'ni (Q.50) formula o'rinli, va supremumni maksimum bilan almashtirish mumkin. Bu maksimum

$$g^*=\int_{t_0}^{t_1}f^*(t)dt$$

nuqtada erishiladi. Lemma isbotlandi.

3-lemma. $\psi\in R^n$ ixtiyoriy mahkamlangan vektor bo'lsin. U holda

$$u(G,\psi)=\int_{t_0}^{t_1}u(F(t),\psi)dt \qquad (Q.53)$$

tenglik o'rinli.

Isboti. $g_0\in u(G,\psi)$ bo'lsin. Bu esa $g_0\in G$ va barcha $g\in G$ vektorlar uchun

$$\langle g,\psi\rangle\le\langle g_0,\psi\rangle \qquad (Q\ 54)$$

tengsizlik bajarilishini bildiradi. $g_0\in G$ nuqta uchun $g_0=\int_{t_0}^{t_1}f_0(t)dt$ tenglik o'rinli, bu yerda $f_0(t)$ - $F(t)$ akslantirishning integrallanuvchi bir qiymatli shoxchasi. 1-teoremaning 1- natijasiga ko'ra $U(F(t),\psi)$ akslantirishda o'lchovli , bir qiymatli $f^*(t)$ shoxcha mavjud va uning uchun (Q.54) tengsizlik o'rinli.

$$g=g^*=\int_{t_0}^{t_1}f^*(t)dt\in G$$

nuqtani (Q.54) tengsizlikka qo'yamiz, natijada

$$\int_{t_0}^{t_1}c(F(t),\psi)dt=\left\langle\int_{t_0}^{t_1}f^*(t)dt,\psi\right\rangle\le\left\langle\int_{t_0}^{t_1}f_0(t)dt,\psi\right\rangle=\int_{t_0}^{t_1}\langle f_0(t),\psi\rangle dt$$

munosabatni hosil qilamiz. Shuning uchun ,

$$\int_{t_0}^{t_1}[c(F(t),\psi)-\langle f_0(t),\psi\rangle]dt\le 0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $f_0(t)\in F(t)$ mansublikka ko‘ra integral ostidagi ifoda nomanfiy. Lebeg integralining xossalaridan foydalanib, deyarli barcha $t\in[t_0,t_1]$ lar uchun

$$c(F(t),\psi)-\langle f_0(t),\psi\rangle=0 \tag{Q.55}$$

tenglikni, ya’ni $f_0(t)\in u(F(t),\psi)$ ni, va demak

$$g_0\in\int_{t_0}^{t_1}u(F(t),\psi)dt \tag{Q,56}$$

mansublikni hosil qilamiz. Endi g_0 nuqta (Q.56) mansublikni qanoatlantirsin. U holda $g_0=\int_{t_0}^{t_1}f_0(t)dt$ nuqta va $f_0(t)\in u(F(t),\psi)$ shoxcha (Q.55) tenglikni qanoatlantiradi. Demak ixtiyoriy $g\in G$ nuqta uchun

$$\langle g-g_0,\psi\rangle=\int_{t_0}^{t_1}[\langle f(t),\psi\rangle-c(F(t),\psi)]dt\le 0$$

tengsizlik , yani (Q.54) tengsizlik bajariladi, chunki $f(t)\in F(t)$ mansublikka ko‘ra integral ostidagi ifoda musbat . Shuning uchun $g_0\in u(G,\psi)$ mansublik o‘rinli. Shu bilan (Q.53) munosabatdagi tenglik isbotlandi.

2-teoremani isbotlashda bo‘sh bo‘lmagan $A\subset R^n$ to‘plamning o‘lchami tushunchasi talab qilinadi.

2-ta’rif. *Bo‘sh bo‘lmagan A to‘plamning* $\dim A$ *o‘lchami deb, A to‘plamni o‘zida saqlovchi L minimal ko‘p xillikning o‘lchamiga aytiladi.*

Bitta nuqtaning o‘lchami 0 ga, R^n fazodagi har qanday kesmaning o‘lchami 1 ga, R^2 tekislikdagi aylana yoyining o‘lchami 2 ga, ichki qismi bo‘sh bo‘lmagan R^n fazodagi to‘plamning o‘lchami doimo fazoning o‘lchami n ga teng. Agar $0\in A$ bo‘lsa, u holda L chiziqli ko‘p xillik qism fazo bo‘ladi. Agar A yopiq to‘plam bo‘lsa, uning o‘lchami o‘zgarmaydi, chunki $A \subset L$ mansublikdan L fazoning yopiqligiga ko'ra $\overline{A} \subset L$ mansublik kelib chiqadi. Agar bunda yana $\overline{A}$ to'plamning qavariq qobig'i olinsa, u holda o'lcham yana o'zgarmaydi, chunki $\overline{A} \subset L$ mansublikdan L fazoning yopiqligiga ko'ra $conv\overline{A} \subset L$ mansublik bajariladi.

2-teoremaning isboti. 1-lemma bo'yicha G integral bo'sh bo'lmagan, chegaralangan to'plam. Bizga bu to'plamning yopiq va qavariq ekanligini isbotlash qoldi. 1-3- lemmalarni isbotlashda biz hech joyda G to'plamning yopiqligi va qavariqligidan foydalanmaganligimizni eslatamiz. 5-ma'ruzada bayon etilgan natijalar boshqa edi.

G to'plamning yopig'ini olishda, uning tayanch funksiyasi o'zgarmaydi, ya'ni ixtiyoriy $\psi \in R^n$ vektor uchun

$$c(\overline{G},\psi) = c(G,\psi) \tag{Q.57}$$

tenglik o'rinli. Haqiqatdan ham, $G \subset \overline{G}$ mansublikka ko'ra doimo

$$c(G,\psi) \le c(\overline{G},\psi) \tag{Q.58}$$

tengsizlik o'rinli. Boshqa tomondan $g \in \overline{G}$ bo'lsa, u holda g_0 nuqtaga yaqinlashuvchi $g_k \in G$ nuqtalar ketma-ketligi mavjud. $g_k \in G$ nuqtalarning barchasi uchun

$$\langle g_k, \psi \rangle \le c(G,\psi)$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikda $k \to \infty$ da limitga o'tib

$$\langle g, \psi \rangle \le c(G,\psi),$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Demak .

$$c(\overline{G},\psi) = \max_{g \in \overline{G}} \langle g, \psi \rangle \le c(G,\psi)$$

tengsizlik bajariladi. Shuning uchun (Q.58) tengsizlikni hisobga olib, (Q.57) tenglikni hosil qilamiz.

To'plamdan uning qavariq qobig'iga o'tishda to'plamning tayanch funksiyasi o'zgarmaydi (3-ma'ruza, tayanch funksiyalarning 7-xossasiga qarang) va shuning uchun (Q.57) formula va 2-lemmadan

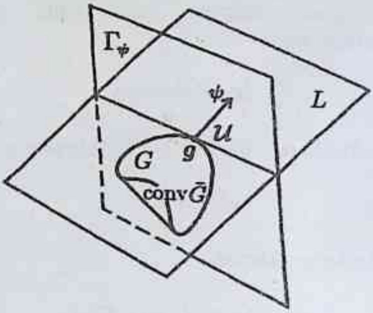
$$c(conv\overline{G},\psi)=c(G,\psi)=\int_{t_0}^{t_1}c(F(t),\psi)dt \qquad (Q.59)$$

tenglikni hosil qilamiz. G to'plamning yopiqligi va qavariqligini isbotlashni induksiya bo'yicha olib boramiz, bunda induksiya G to'plamning o'lchami, ya'ni $k=\dim G$ soni bo'yicha olib boriladi.

$\dim G=0$ bo'lsin. G bo'sh to'plam bo'lmaganligi (1-lemma), va uning o'lchami nolga teng bo'lgani uchun, bu to'plam yagona nuqtadan iborat. Nuqta yopiq va qavariq to'plam bo'ladi. demak $k=0$ uchun 2-teorema isbotlandi.

Endi $\dim G\le k-1$ bo'lganda 2-teorema o'rinli deb faraz qilamiz. Bu esa, agar faqat o'lchami $k-1$dan ortmagan, moduli bo'yicha jamlanuvchi funksiya bilan chegaralangan, ixtiyoriy kesma bo'yicha, ixtiyoriy o'lchovli ko'p qiymatli akslantirishdan olingan integral yopiq va qavariq to'plam bo'lishini bildiradi.

$\dim G=k$ holni qaraymiz. Bu esa G to'plam k o'lchamli L chiziqli ko'pxillikda yotishini, ya'ni $G\subset L$ ekanligini, va demak $conv\overline{G}\subset L$ ekanligini bildiradi (Q.9-chizma).



Q.9-chizma

Umumiylikni saqlagan holda koordinata boshi, ya'ni $x=0$ nuqta barcha $t\in[t_0,t_1]$ lar uchun $F(t)$ to'plamda yotishini, ya'ni

$$0\in F(t),\ \ t\in I \qquad (Q.60)$$

mansublikni bajarilishini faraz qilamiz. Agar bu shart bajarilmasa, barcha $t \in I$ lar uchun $\widetilde{F}(t) = F(t) - f(t)$ tenglik bilan aniqlangan yangi $\widetilde{F}: I \to \Omega(R^n)$ ko'p qiymatli akslantirishni qaraymiz, bu yerda $f(t)$ $F(t)$ akslantirishning qandaydir mahkamlangan o'lchovli bir qiymatli shoxchasi. 1-teorema bo'yicha bunday bir qiymatli shoxcha mavjud.

U holda $\widetilde{F}(t)$ akslantirish hamon (Q.60) mansublikni va shuningdek 2-teorema shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatdan ham, uning tayanch funksiyasi

$$c(\widetilde{F}(t), \psi) = c(F(t), \psi) - (f(t), \psi)$$

t bo'yicha o'lchovli va

$$|\widetilde{F}(t)| \leq |F(t)| + \|f(t)\| \leq 2|F(t)| \leq 2k(t)$$

tengsizlik bajariladi, bu yerda $2k(t)$ funksiya $[t_0, t_1]$ kesmada integrallanuvchidir. Ko'p qiymatli akslantirishdan olingan integralning ta'rifiga ko'ra

$$\int_{t_0}^{t_1} \widetilde{F}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{F}(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt,$$

ya'ni G integral $\overline{G}$ integraldan $\widetilde{F}(t)$ akslantirishni R^n fazoda $p = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ o'zgarmas vektorga siljitishdan iborat. Bu xossada qavariqlik va yopiqlik xossalari saqlanishi tushunarli.

(Q.60) shartdan

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} 0dt \in G$$

mansublikni kelib chiqishi isbotni biroz soddalashtiradi.

Ixtiyoriy $g \in conv\overline{G}$ nuqta olamiz. Agar $g \in G$ ekanligi ko'rsatilsa, u holda bu G integralning yopiq va qavariq to'plam ekanligini bildiradi. Haqiqatdan ham, bundan $conv\overline{G} \in G$ mansublik kelib chiqadi, teskari

$G \subset conv\overline{G}$ esa doimo o'rinli. Ixtiyoriy $g \in conv\overline{G}$ nuqta olamiz. Tayanch funksiyalarning xossalariga ko'ra , ixtiyoriy $\psi \in R^n$ vektor uchun

$$\langle g,\psi \rangle \le c(conv\overline{G},\psi) \qquad (Q.61)$$

tengsizlik bajariladi. Biz bu tengsizlikni L qism fazoda yotuvchi birlik uzunlikka ega bo'lgan ψ vektorlar uchun, ya'ni $\psi \in S_L = S \cap L$ vektorlar uchun qaraymiz. Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin, bu hollarni alohida qaraymiz.

1. Shunday $\psi_0 \in S_L$ vektor mavjudki, (Q.61) tengsizlikda bu vektor uchun tenglik, ya'ni

$$\langle g,\psi_0 \rangle = c(conv\overline{G},\psi_0)$$

munosabat bajarilsin. Bu esa g nuqtani $U(conv\overline{G},\psi_0)$ tayanch to'plamga tegishli bo'lishini, yani

$$g \in U(conv\overline{G},\psi_0) \qquad (Q.62)$$

munosabatni bildiradi. $\psi_0 \in S_L$ bo'lgani uchun Γ_{ψ_0} gipertekislikka ortogonal bo'lgan vektor L qism fazo bilan o'lchami $k-1$ ga teng bo'lgan chiziqli ko'p xillik bilan kesishadi (Q.9-chizmani qarang). Shuning uchun

$$U(conv\overline{G},\psi_0) \in \Gamma_{\psi_0} \cap L$$

mansublikdan

$$\dim U(conv\overline{G},\psi_0) \le k-1 \qquad (Q.63)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Doimo

$$U(G,\psi_0) \subset U(conv\overline{G},\psi_0) \qquad (Q.64)$$

mansublik bajariladi. Haqiqatdan ham, agar $g \in U(G,\psi)$ bo'lsa, u holda $g \in G$ bo'lib,

$$\langle g,\psi_0 \rangle = c(G,\psi_0) \qquad (Q.65)$$

tenglik bajariladi. Demak $g \in conv\overline{G}$ va (Q.65) formulaga ko'ra

$$\langle g, \psi_0 \rangle = c(conv\overline{G}, \psi_0)$$

tenglik bajariladi. Shuning uchun $g \in U(conv\overline{G}, \psi_0)$ va (Q.64) mansublik o'rinli. (Q.64) mansublik va (Q.63) tengsizlikdan $U(G, \psi_0)$ tayanch to'plamning o'lchami ham $k-1$ dan ortmasligi kelib chiqadi. Ammo 3-lemmmaga ko'ra $U(G, \psi_0)$ tayanch to'plamning o'zi ham o'lchovli (1-teoremaning natijasi) va moduli bo'yicha integrallanuvchi $k(t)$ funksiya bilan chegaralangan $U(F(t), \psi_0)$ ko'p qiymatli akslantirishning integrali bo'ladi, chunki

$$|U(F(t), \psi_0)| \leq |F(t)| \leq k(t)$$

tengsizlik bajariladi. Shuning uchun induksuyada qilingan farazga ko'ra $U(G, \psi_0)$ to'plam qavariq va yopiqdir.

Endi

$$U(G, \psi_0) = U(conv\overline{G}, \psi_0) \tag{Q.66}$$

tenglikni isbotlaymiz. Bu tenglikning chap va o'ng qismlarida qavariq va kompakt to'plamlar joylashganligi uchun, ularning tayanch funksiyalari ustma-ust tushishini ko'rsatish kifoya (3-ma'ruza, tayanch funksiyalar1 1-xossasining natijasiga qarang). Ketma-ket 3-lemmani, 2-lemmani va 1-teoremaning natijasi (Q.5-bo'lim) ni qo'llab,

$$\begin{aligned} c(U(G, \psi_0), \psi = c\left(\int_{t_0}^{t_1} U(F(t), \psi_0) dt, \psi\right) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} c(U(F(t), \psi_0), \psi) dt = \int_{t_0}^{t_1} c'(F(t), \psi_0; \psi) dt \end{aligned} \tag{Q.67}$$

munosabatlar zanjirini hosil qilamiz.

Boshqa tomondan, yana bir bor 1-teoremaning natijasini (Q.5-bo'limga qarang) qo'llab

$$c(U(conv\overline{G},\psi_0),\psi)=c'(conv\overline{G},\psi_0;\psi)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{c(conv\overline{G},\psi_0+\alpha\psi)-c(conv\overline{G},\psi_0)}{\alpha}=$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\int\limits_{t_0}^{t_1}c(F(t),\psi_0+\alpha\psi)dt-\int\limits_{t_0}^{t_1}c(F(t),\psi_0)dt}{\alpha}=\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{c(F(t),\psi_0+\alpha\psi)-c(F(t),\psi_0)}{\alpha}dt$$

tengliklar zanjirini hosil qilamiz. Oxirgi integralning integral belgisi ostida turgan funksiyalar ketma-ketligi $\alpha\to+0$ da o'smaydi va quyidan chegaralangan (Q.3-bo'limning 2-teoremasining natijasiga qarang). Demak integralda integrallash tartibini o'zgartirish mumkinligini va (Q.67) formulani hisobga olib

$$c(U(conv\overline{G},\psi_0),\psi)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\lim_{\alpha\to+0}\frac{c(F(t),\psi_0+\alpha\psi)-c(F(t),\psi_0)}{\alpha}dt=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}c'(F(t),\psi_0;\psi)dt=c(U(G,\psi_0),\psi)$$

ifodani hosil qilamiz. Shunday qilib (Q.66) tenglik isbotlandi. Bu tenglikni e'tiborga olib, (Q.62) mansublikdan $g\in U(G,\psi)$ munosabatni hosil qilamiz. Demak $g\in G$ mansublik o'rinli. Birinchi hol to'la isbotlandi.

2. Endi ixtiyoriy $\psi\in S_L$ vektor uchun (Q.61) formulada qat'iy, y'ani

$$\langle g,\psi\rangle<c(conv\overline{G},\psi) \tag{Q.68}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. $g\neq0$ deb hisoblaymiz, chunki $g=0$ bo'lganda $g\in G$ mansublik bajariladi.

Endi

$$\rho(\tau)=\max_{\psi\in S_L}\left[\langle g,\psi\rangle-\int\limits_{t_0}^{\tau}c(F(t),\psi)dt\right] \tag{Q.69}$$

Skalyar funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uzluksiz funksiyalarning S_L kompakt to'plamidagi maksimumidir (3-ma'ruza, tayanch funksiyalarining xossalarini qarang). (Q.59) formulaga ko'ra (Q.60) tengsizlikdan $\rho(t_1)<0$ tengsizlikni hosil qilamiz. Keyin $\tau=t_0$ bo'lganda $\rho(t_0)=\|g\|>0$ bo'lishi ravshan. Shuning uchun, uzluksizga ko'ra $\rho(\tau_0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $\tau_0\in[t_0,t_1]$ qiymat mavjud. $\rho(\tau)$ funksiyaning (Q.69) ta'rifidan

$$\langle g,\psi_0\rangle-\int\limits_{t_0}^{\tau_0}c(F(t),\psi_0)dt=0 \tag{Q.70}$$

tenglik bajariladigan $\psi_0\in S_L$ vektor mavjudligi kelib chiqadi.

$F(t)$ ko'pqiymatli akslantirishning $[t_0,\tau_0]$ kesmadagi integrali sifatida G_0 to'plamni, y'ani

$$G_0 = \int_{t_0}^{\tau_0} F(t)dt$$

to'plamni aniqlaymiz. (Q.60) farazimizga ko'ra $G_0 \subset G$, mansublik bajariladi, chunki ixtiyoriy $\int_{t_0}^{\tau_0} f(t)dt$ nuqtaga G_0 to'plamdan olingan $\int_{t_0}^{\tau_0} 0dt$ nuqtani qo'shib G ning nuqtasini hosil qilamiz. Demak, G_0 to'plam ham L qism fazoda joylashadi. (Q.59) formuladan foydalanib (Q.70) munosabatdan

$$\langle g,\psi\rangle = c(conv\overline{G}_0,\psi_0)$$

tenglikka kelamiz. Endi G_0 integralga oldingi bo'limdagi mulohazalarni takrorlab $g \in G_0$ ekanligiga, va demak $g \in G$ mansublik bajariladi degan xulosaga kelamiz.

Shunday qilib teorema to'la isbotlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука,1961.
2. *Р. Рокафеллар* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
3. *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
4. *И.П.Натансон* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
5. *А.А. Ляпунов* О вполне аддитивных вектор-функциях I.// Изв. РАН. Сер. «Математика». Т. 3, N 6, 1940, с.465-478.
6. *Ф.Кларк* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
7. *Д.Б. Силин* Субдифференциалы выпуклых функций и интегралы от многозначных отображений.// Вестник МГУ. Вычисл. Мат. и кибернети-ка N1, 1984, с.55-59.
8. *H.Hermes,J.P. La Salle* Funktional analysis and time optimal control: Acad. Press, 1969.
9. *В.И. Благодатских* Задача управляемости для линейных систем. // Тр.МИАН РАН. 1977, Т. 143, с. 57-67.

MUNDARIJA

V.I. BLAGODATSKIX

OPTIMAL BOSHQARUVGA KIRISH

Toshkent – «Fan va texnologiya» – 2019

Muharrir:	F.Ismoilova
Tex. muharrir:	A.Moydinov
Musavvir:	F.Tishabayev
Musahhih:	Sh.Mirqosimova
Kompyuterda sahifalovchi:	N.Raxmatullayeva

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Tel: 245-57-63, 245-61-61.
Nashr.lits. AI№149, 14.08.09. Bosishga ruxsat etildi 10.01.2018.
Bichimi 60x84 1/16. «Timez Uz» garniturasi. Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i 15,0. Nashriyot bosma tabog'i 15,5.
Tiraji 100. Buyurtma № 2.

«Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi» da chop etildi.
100066, Toshkent sh., Olmazor ko'chasi, 171-uy.