O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI
OPTIMAL BOSHQARUV USULLARI KAFEDRASI

Ro’yxatga olindi:	“Tasdiqlayman”
№__________	O’quv ishlari bo’yicha prorektor
2019 yil «___» _________	_______ prof. A.S. Soleev
	“___” _________2019 yil

«OPERATSIYALAR TADQIQOTI»

O’QUV – USLUBIY MAJMUA

(Moddle tizimi asosida)

Bilim sohasi: 100 000 – Gumanitar soha

Ta’lim sohasi: 130 000 – Matematika

Ta’lim yo’nalishi: 5130200 – Amaliy matematika va informatika (3-kurs)

Tuzuvchi:	SamDU Amaliy matematika va informatika fakulteti, “Optimal boshqaruv usullari” kafedrasi dotsenti **I.N. Bozorov**
Kafedra mudiri:	**dots. I.N. Bozorov**
Fakultet dekani:	**dots. A.I. Babayarov**

Samarqand - 2019

I.N. Bozorov. “Operatsiyalar tadqiqoti” fanidan o’quv-uslubiy majmua. – Samarqand: SamDU nashri – 2019. 180 bet.

“Matematika va informatika o’qitish metodikasi” fanidan ushbu o’quv-uslubiy majmua oliy o’quv yurtlari 5130200 – Amaliy matematika va informatika bakalavriat ta’lim yo’nalishi 3-kurs talabalariga mo’ljallangan.

Taqrizchilar:

Sh.S. Mamatov – SamDU, “Matematik modellashtirish” kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n.

J.I. ABdullayev – SamDU, “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kafedrasi professori, f.-m.f.d.

SamDU o’quv – uslubiy kengashining 2019 yil _________ dagi ____ -qarori bilan o’quv-uslubiy majmua sifatida nashrga tavsiya etilgan.

Tuzuvchi: – Amaliy matematika va informatika fakulteti, "Optimal boshqaruv usullari" kafedrasi dotsenti

I.N. Bozorov

Mazkur ushbu o'quv-uslubiy majmua Samarqand davlat universiteti 5130200 – Amaliy matematika va informatika bakalavriat ta'lim yo'nalishi o'quv rejasidagi "Matematika va informatika o'qitish metodikasi" fani bo'yicha O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan namunaviy fan dasturi asosida ishlab chiqilgan.

"Optimal boshqaruv usullari" kafedrasining 2019 yil ______________dagi __–son majlisida muhokama etilgan va fakultet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri: __________ dots. I.N. Bozorov

"Amaliy matematika va informatika" fakulteti o'quv-uslubiy kengashining 2019 yil "___" _____________dagi "___"–son qarori bilan tasdiqlangan.

O'quv-uslubiy kengashi raisi: _________ dots. Sh. Mamatov

"Amaliy matematika va informatika" fakulteti ilmiy kengashining 2019 yil "___" _____________dagi "___"–son qarori bilan chop qilishga tavsiya etilgan.

Fakultet kengashi raisi: ________ dots. A.B. Babayarov

Kelishildi:
O'quv uslubiy boshqarma boshlig'i

_________________ **dots. B.S. Aliqulov**

ANNOTATSIYA

Ilmiy-texnika revolyusiyasi davri deb haqli ravishda atalayotgan bizning davrimizda fan tomonidan tashkillashtirish va boshqarish masalariga yanada ko'proq e'tibor berilmoqda. Bunining asosiy sabablardan biri xozirgi kunga kelib xalq xo'jaligining nihoyatda ko'p qirrali, murakkab tizilma shaklida namoyon bo'layotganligidir. Bunday sharoitda ko'p sonli aloqa va boqlanishlarni hisobga olgan holda samarali boshqarishni tashkillashtirish uchun ilmiy yondoshishning zarurligi o'z-o'zidan ravshan bo'lib qolmoqda.

Inson amaliy faoliyatining xilma-xil sohalarida ishlab chiqarishni va ta'mi-notni tashkillashtirishda, transportdan foydalanishda, kadrlarni joy-joyiga qo'yishda, soqlikni saqlashda, aloqada, harbiy harakatlarda va shu kabilarda murakkab chora-tadbirlar, harakatlar tizimini amalga oshirish maqsadida to'qri, oqilona qarorlar qabul qilish uchun matematik, miqdoriy usularning qo'llanilishi jarayonlarni tadqiq qilishfanining paydo bo'lishi va jadal rivojlanishiga olib keldi.

Jarayonlar tadqiqoti - eng umumiy ma'noda tashkiliy boshqaruv tizimlari ishi bilan boqliq masalalarga, ularni boshqaruvchilarga optimal yechimlar berish maqsadida, ilmiy prinsiplar, usullar va vositalarni qo'llash deb ta'riflanishi mumkin.

"Jarayonlar tadqiqoti"ning asosiy predmeti - bir-biri bilan uzviy boqlangan obyektlar majmuasidan iborat bo'lgan va muayyan maqsadga erishishga xizmat qiluvchi tizilmalardir.

Ushbu o'quv-uslubiy majmua oliy o'quv yurtlari 5130200 – Amaliy matematika va informatika bakalavriat ta'lim yo'nalishi 3-kurs talabalariga mo'ljallangan.

M U N D A R I J A

«Operatsiyalar tadqiqoti» fanining 2019/2020 o‘quv yili uchun mo’ljallangan SILLABUSI

<table>
<tr><td colspan="4">Fanning qisqacha tavsifi</td></tr>
<tr><td>OTMning nomi va joylashgan manzili:</td><td colspan="2">Samarqand davlat universiteti</td><td>Universitet xiyoboni, 15</td></tr>
<tr><td>Kafedra:</td><td colspan="2">Optimal boshqaru usullari</td><td>Rektorat tarkibida</td></tr>
<tr><td>Ta’lim sohasi va yo‘nalishi:</td><td>Ta’lim sohasi: 130000 – Matematika</td><td colspan="2">Ta’lim yo’nalishi: 5130200 – Amaliy matematika va informatika</td></tr>
<tr><td>Fanni (kursni) olib boradigan o‘qituvchi to‘g‘risida ma’lumot:</td><td>O'qituvchi: Bozorov Islom Namozovich</td><td>e-mail:</td><td>islomnb@mail.ru</td></tr>
<tr><td>Dars mashg‘ulotini o‘tkazishning vaqti va joyi:</td><td>O'quv-uslubiy bo'lim tomonidan ishlab chiqilgan jadval asosida universitetning o'quv binolarida</td><td>Kursning boshlanish va davom etish muddati:</td><td>Bakalavriat ta'lim yo'nalishi o'quv rejasiga muvofiq, yettinchi semestrda</td></tr>
<tr><td>Individual grafik asosida professor-o‘qituvchining talabalar bilan ishlash vaqti:</td><td colspan="3">Haftaning dushanba, chorhanba va juma kunlari 15.00 dan 17.00 gacha</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fanga ajratilgan o‘quv soatlarining o‘quv turlari bo‘yicha taqsimoti</td><td colspan="2">Auditoriya soatlari</td><td rowspan="2">Mustaqil ta’lim: 14</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ma'ruza: 10
Amaliy:10</td></tr>
<tr><td>Fanning boshqa fanlar bilan uzviy aloqasi (prerekvizitlari):</td><td colspan="3">Matematik analiz, chiziqli algebra, differensial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, matematik fizika tenglamalari</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fanning mazmuni</td></tr>
<tr><td>Fanning dolzarbligi va qisqacha mazmuni:</td><td colspan="3">Fanning maqsadi va vazifalari.
Operatsiyalarni tadqiq qilish — boshqaruv tizimlaridagi masalalarni yechishning kompleks ilmiy usullarini topish va tadbiq qilish bilan shug’ullanadi. Mazkur kursning maqsadi, talabalarni jrayonlarni tadqiq qilishda ko’p uchraydigan masalalar va ularning yechish usullari bilan yaqindan tanishtirishdan iborat.
Fanning ishlab chiqarishdagi o’rni
Bu kursning amaliy matematika va informatika yo’nalishidagi mutaxassislarni tayyorlashdagi o’rni uning barcha informatikaviy</td></tr>
</table>

	fanlar bilan bog'langanligidan kelib chiqadi. Kurs mos ta'lim yo'nalishi bakalavrlarini tayyorlashda yetakchi o'rin tutadi. Operatsiyalar tadqiqoti fani doirasida yaratilgan algoritmlar tavakkalchilik vaziyatda qaror qabul qilish masalalariga olib keluvchi iqtisodiyot masalalarida, texnologik jarayonlarni optimal bosharish masalalarida, zahirani optimal boshqarish masalalarida, ko'p kriteriyli optimal boshqarish masalalarida keng qo'llanilib kelmoqda. **Fan bo'yicha talabaning malakasiga qo'yiladigan talablar** Operatsiyalar tadqiqoti o'quv fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr: - chiziqli programmalash, dinamik programmalash, Markov zanjirlari, o'yinlar nazariyasi, boshqariluvchi markov zanjirlarining optimal stasionar strategiyalarni topish algoritmlarini ***bilishi kerak;*** - Markov o'yinlarining turlari va ularni yechish usullari, Pontryaginning maksimum prinsipi, chiziqli tizimlarni optimal boshqarish, tez harakat masalasi, boshqarishning optimalligining yetarli sharti ***ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak****;* - matrisali o'yinni chiziqli programmalash yordamida yechish; - zahirani boshqarish masalasini yechish; - jihozlarni almashtirish va ta'mirlash masalasini yechish; - ryukzak haqidagi masalasini yechish ***malakalariga ega bo'lishi kerak.*** **Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan o'zaro bog'liqligi** Operatsiyalar tadqiqoti fani matematik analiz, chiziqli algebra, differensial tenglamalar, extimollar nazariyasi va matematik statistika, matematik fizika tenglamalari fanlari bilan uzviy bog'liq va ushbu fanlarni bilish zarur. Bu fan usullari amaliy ahamiyatga ega bo'lgan iqtisodiy masalalarni yechishda keng qo'llaniladi. **Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar** O'quv jarayoni bilan bog'liq ta'lim sifatini belgilovchi holatlar quyidagilar: yuqori ilmiy-pedagogik darajada dars berish, muammoli ma'ruzalar o'qish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil qilish, ilg'or pedagogik texnologiyalardan va mul'timedia vositalaridan foydalanish, tinglovchilarni undaydigan, o'ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo'yish, talabchanlik, tinglovchilar bilan individual ishlash, erkin muloqot yuritishga, ilmiy izlanishga jalb qilish.

Talabalar uchun talablar	Universitetning odob-ahloq qoidalari talablariga qat’iy rioya qilish, shuningdek: -professor-o‘qituvchi auditoriga kirganida o‘tirgan joydan turib “Assalomu alaykum” deb kutib olish; - uyali aloqa vositalarini o‘chirib qo‘yish; - professor-o‘qituvchidan so‘ng dars mashg‘ulotiga kech kelgan talaba auditoriyaga kiritilmaydi; - professor-o‘qituvchi va guruhdoshlarga qo‘pollik qilmaslik, so‘z talashmaslik, hurmat bilan munosabatda bo‘lish; - universitet ichki tartib - intizom qoidalariga rioya qilish; - kiyinish talablari (madaniyati) ga rioya qilish; - mashg‘ulotlar vaqtida o‘qituvchining ruxsatisiz auditoriyadan chiqmaslik (umuman dars jarayonida auditoriyadan sababsiz chiqishga ruxsat berilmaydi); - uy vazifasi va mustaqil ish topshiriqlarini o‘z vaqtida va sifatli bajarish; - ko‘chirmachilik (plagiat) qilmaslik; - darslarga qatnashish majburiy, sababsiz 2 (ikki) va undan ortiq dars qoldirgan talaba keyingi mashg‘ulotlarga tegishli sabablarni aniqlaganidan keyin fakultet dekanining ruxsati bilan dars mashg’ulotlariga kiritiladi; - sababli dars qoldirilgan taqdirda, professor-o‘qituvchiga ma’lumotnoma taqdim etish; - har qanday holatlarda ham qoldirilgan darslar qayta o‘zlashtirilishi shart; - ma’ruza va amaliy darslariga oldindan tayyorlanib kelish va faol ishtirok etish; - qo‘shimcha ravishda bajarilgan taqdimot, mustaqil ish, referat, turli xil tadbirlar va ilmiy- amaliy anjumanlarda
	ma’ruzalar bilan ishtirok etganligi uchun qo’shimcha ballar beriladi; - talabaga o‘z vaqtida bajarilmagan mustaqil ish, uy vazifasi, tartib - intizomi bo‘yicha jarima ballari belgilanadi; - talaba reyting ballidan norozi bo‘lsa fan bo‘yicha nazorat turlari e’lon qilingan vaqtdan boshlab 1 kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat qiladi va apellyatsiya komissiyasi shu kunning o‘zida talabaning arizasini ko‘rib cliiqib xulosa cliiqaradi.
Elektron pochta orqali munosabatlar tartibi	Professor-o‘qituvchi va talaba o‘rtasidagi aloqa elektron pochta orqali ham amalga osliirilishi mumkin, telefon orqali balio masalasi muhokama qilimnaydi, lekin oraliq, joriy va yakuniy baholash faqatgina institut hududida, ajratilgan xonalarda va dars davomida amalga oshiriladi. Elektron pochtani ocliish vaqti soat 15.00 dan 20.00 gacha.

Fan mavzulari va unga ajratilgan soatlar taqsimoti:

T/r	Mavzular nomi	Ma'ruza	Amaliy mashg'ulot	Mustaqil ta'lim	Jami
VII semester bo'yicha					
1	Dinamik programmalash usuli. Bellmanning funksional tenglamasi.	2		2	4
2	Zahirani boshqarish masalasi. Kuchlanishni taqsimlash modeli.	2	2	2	6
3	Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlari. Ommaviy xizmat ko'rsatishning asosiy formulalari.	2	4	2	8
4	Markov zanjirlari. Kolmogorov–Chepmen formulasi. Ergodik teorema. Markov zanjirlari va dinamik programmalash.	2	2	2	6
5	Boshqariluvchi Markov zanjirlari uchun rekurrent algoritmlar. Markov o'yinlari. Markov o'yinlari uchun rekurrent algoritmlar.	2	2	2	6
6	Imitasion modellashtirish. Monte-Karlo usuli.			2	2
7	Variasion hisob. Eyler tenglamasi. Pontryaginning maksimum prinsipi.			2	2
	Jami:	**10**	**10**	**14**	**34**

Dasturning informasion-uslubiy ta’minoti

Bu fanni o’qitish davomida kompyuter xizmatlaridan doimo foydalaniladi, buning uchun Maple, Matlab, Mathcad matematik tizimlari va Hisoblash usullari, Matematik fizika va Dasturlash fanlaridan hamda adabiyotlar ro’yxatida keltirilgan mavjud darsliklar, o’quv qo’llanmalar, elektron adabiyotlardan keng foydalaniladi.

Tavsiya etilgan adabiyotlar ro’yxati

Asosiy adabiyotlar:	1. Вагнер Г. Основы исследований операции. Т. 1–3. М.: Мир. 1972-73. 2. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974. 3. Зайченко Ю. Б. Исследование операций. Киев. 1979. 4. Таха Х. Введение в исследование операций. Т. 1, 2. М.: Мир. 1981.
Qo‘shimcha adabiyotlar:	1. Дюбин Г. Н., Суздал В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981. 2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960. 3. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Сов. Радио, 1964, 192 с. 4. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977. 176 с.5
Internet resurslar	1. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm 2. http://www.ruscommech.ru/ 3. http://iccpripu.ru 4. http://lib.ru

“Operatsiyalar tadqiqoti” fanidan talabalar bilimini reyting tizimi asosida baholash mezoni

“Operatsiyalar tadqiqoti” fani bo’yicha reyting jadvallari, nazorat turi, shakli, soni hamda har bir nazoratga ajratilgan maksimal ball, shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi ma’lumotlar fan bo’yicha birinchi mashg’ulotda talabalarga e’lon qilinadi.

Fan bo’yicha talabalarning bilim saviyasi va o’zlashtirish darajasining Davlat ta’lim standartlariga muvofiqligini ta’minlash uchun quyidagi nazorat turlari o’tkaziladi:

- **joriy nazorat (JN)** – talabaning fan mavzulari bo'yicha bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Joriy nazorat fanning xususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg'ulotlarda og'zaki so'rov, test o'tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollekvium, uy vazifalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakllarda o'tkazilishi mumkin;
- **oraliq nazorat (ON)** – semestr davomida o'quv dasturining tegishli (fanlarning bir necha mavzularini o'z ichiga olgan) bo'limi tugallangandan keyin talabaning nazariy bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oraliq nazorat bir semestrda ikki marta o'tkaziladi va shakli (yozma, og'zaki, test va hokazo) o'quv faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi;
- **yakuniy nazorat (YaN)** – semestr yakunida muayyan fan bo'yicha nazariy bilim va amaliy ko'nikmalarni talabalar tomonidan o'zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan "Yozma ish" shaklida o'tkaziladi.

ON o'tkazish jarayoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **ON** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **ON** qayta o'tkaziladi.

Oliy ta'lim muassasasi rahbarining buyrug'i bilan ichki nazorat va monitoring bo'limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida **YaN** ni o'tkazish jarayoni muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **YaN** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **YaN** qayta o'tkaziladi.

Talabaning bilim saviyasi, ko'nikma va malakalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabaning fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

«Operatsiyalar tadqiqoti» fani bo'yicha talabalarning semestr davomidagi o'zlashtirish ko'rsatkichi 100 ballik tizimda baholanadi.

Ushbu 100 ball baholash turlari bo'yicha quyidagicha taqsimlanadi:

Ya.N.-30 ball, qolgan 70 ball esa J.N.-35 ball va O.N.-35 ball qilib taqsimlanadi.

Ball	Baho	Talabalarning bilim darajasi
86-100	A'lo	Xulosa va qaror qabul qilish. Ijodiy fikrlay olish. Mustaqil mushohada yurita olish. Olgan bilimlarini amalda qo'llay

		olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.
71-85	Yaxshi	Mustaqil mushohada qilish. Olgan bilimlarini amalda qo'llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.
55-70	Qoniqarli	Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo'lish.
0-54	Qoniqarsiz	Aniq tasavvurga ega bo'lmaslik. Bilmaslik.

- Fan bo'yicha saralash bali 55 ballni tashkil etadi. Talabaning saralash balidan past bo'lgan o'zlashtirishi reyting daftarchasida qayd etilmaydi.
- Talabalarning o'quv fani bo'yicha mustaqil ishi joriy, oraliq va yakuniy nazoratlar jarayonida tegishli topshiriqlarni bajarishi va unga ajratilgan ballardan kelib chiqqan holda baholanadi.
- Talabaning fan bo'yicha reytingi quyidagicha aniqlanadi: $R = V \cdot O'/100$,

bu yerda: *V*– semestrda fanga ajratilgan umumiy o'quv yuklamasi (soatlarda);
O'– fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi (ballarda).

- Fan bo'yicha joriy va oraliq nazoratlarga ajratilgan umumiy ballning 55 foizi saralash ball hisoblanib, ushbu foizdan kam ball to'plagan talaba yakuniy nazoratga kiritilmaydi.
- Joriy **JN** va oraliq **ON** turlari bo'yicha 55bal va undan yuqori balni to'plagan talaba fanni o'zlashtirgan deb hisoblanadi va ushbu fan bo'yicha yakuniy nazoratga kirmasligiga yo'l qo'yiladi.
- Talabaning semestr davomida fan bo'yicha to'plagan umumiy bali har bir nazorat turidan belgilangan qoidalarga muvofiq to'plagan ballari yig'indisiga teng.
- **ON** va **YaN** turlari kalendar tematik rejaga muvofiq dekanat tomonidan tuzilgan reyting nazorat jadvallari asosida o'tkaziladi. **YaN** semestrning oxirgi 2 haftasi mobaynida o'tkaziladi.
- **JN** va **ON** nazoratlarda saralash balidan kam ball to'plagan va uzrli sabablarga ko'ra nazoratlarda qatnasha olmagan talabaga qayta topshirish uchun, navbatdagi shu nazorat turigacha, so'nggi joriy va oraliq nazoratlar uchun esa yakuniy nazoratgacha bo'lgan muddat beriladi.

- Talabaning semestrda **JN** va **ON** turlari bo'yicha to'plagan ballari ushbu nazorat turlari umumiy balining 55 foizidan kam bo'lsa yoki semestr yakuniy joriy, oraliq va yakuniy nazorat turlari bo'yicha to'plagan ballari yig'indisi 55 baldan kam bo'lsa, u akademik qarzdor deb hisoblanadi.
- Talaba nazorat natijalaridan norozi bo'lsa, fan bo'yicha nazorat turi natijalari e'lon qilingan vaqtdan boshlab bir kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat etishi mumkin. Bunday holda fakultet dekanining taqdimnomasiga ko'ra rektor buyrug'i bilan 3 (uch) a'zodan kam bo'lmagan tarkibda apellyasiya komissiyasi tashkil etiladi.
- Apellyasiya komissiyasi talabalarning arizalarini ko'rib chiqib, shu kunning o'zida xulosasini bildiradi.
- Baholashning o'rnatilgan talablar asosida belgilangan muddatlarda o'tkazilishi hamda rasmiylashtirilishi fakultet dekani, kafedra muduri, o'quv-uslubiy boshqarma hamda ichki nazorat va monitoring bo'limi tomonidan nazorat qilinadi.

Talabalar ON dan to'playdigan ballarning namunaviy mezonlari

№	Ko'rsatkichlar	ON ballari (maks.)
1	Darslarga qatnashganlik darajasi. Ma'ruza darslaridagi faolligi, konspekt daftarlarining yuritilishi va to'liqligi.	15
2	Talabalarning mustaqil ta'lim topshiriqlarini o'z vaqtida va sifatli bajarishi va o'zlashtirish.	10
3	Og'zaki savol-javoblar, kollokvium va boshqa nazorat turlari natijalari bo'yicha	10
Jami ON ballari		**35**

Talabalar JN dan to'playdigan ballarning namunaviy mezonlari

№	Ko'rsatkichlar	JN ballari (maks.)
1	Darslarga qatnashganlik va o'zlashtirishi darajasi. Amaliy mashg'u-lotlardagi faolligi, amaliy mashg'ulot daftarlarining yuritilishi va holati	15
2	Mustaqil ta'lim topshiriqlarining o'z vaqtida va sifatli bajarilishi. Mavzular bo'yicha uy vazifalarini bajarilish va o'zlashtirishi darajasi.	10
3	Yozma nazorat ishi yoki test savollariga berilgan javoblar	10
Jami JN ballari		**35**

Yakuniy nazorat “Yozma ish” shaklida belgilangan bo’lsa, u holda yakuniy nazorat 30 ballik “Yozma ish” variantlari asosida o’tkaziladi.

Agar yakuniy nazorat markazlashgan test asosida tashkil etilgan bo’lib fan bo’yicha yakuniy nazorat “Yozma ish” shaklida belgilangan bo’lsa, u holda yakuniy nazorat quyidagi jadval asosida amalga oshiriladi.

№	**Ko’rsatkichlar**	**JN ballari**	
		maks.	**O’zgarish oralig’i**
1	Fan bo’yicha yakuniy yozma ish nazorati	6	0-6
2	Fan bo’yicha yakuniy test nazorati	24	0-24
Jami JN ballari		**30**	**0-30**

Yakuniy nazoratda “Yozma ish”larni baholash mezoni

Yakuniy nazorat “Yozma ish” shaklida amalga oshirilganda, sinov ko’p variantli usulda o’tkaziladi. Har bir variant 2 ta nazariy savol va 3 ta amaliy topshiriqdan iborat. Nazariy savollar fan bo’yicha tayanch so’z va iboralar asosida tuzilgan bo’lib, fanning barcha mavzularini o’z ichiga qamrab olgan.

Har bir nazariy savolga yozilgan javoblar bo’yicha o’zlashtirish ko’rsatkichi 0-6 ball oralig’ida baholanadi. Amaliy topshiriq esa 0-6 ball oralig’ida baholanadi. Talaba maksimal 30 ball to’plashi mumkin.

Yozma sinov bo’yicha umumiy o’zlashtirish ko’rsatkichini aniqlash uchun variantda berilgan savollarning har biri uchun yozilgan javoblarga qo’yilgan o’zlashtirish ballari qo’shiladi va yig’indi talabaning yakuniy nazorat bo’yicha o’zlashtirish bali hisoblanadi.

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

"ТАСДИҚЛАЙМАН"
Ўзбекистон Республикаси Олий ва Ўрта махсус таълим вазири
____
201 6 йил «6» 04
м.у.

В 5130200-16

ЎҚУВ РЕЖА

Таълим йўналиши:
5130200 – Амалий математика ва информатика

Академик даража - БАКАЛАВР
Ўқиш муддати - 4 йил
Таълим шакли - кундузги

I. ЎҚУВ ЖАРАЁНИ ЖАДВАЛИ

Курс	Ҳафталар																																																				Ўқув жараёни:					Таътил	Ҳаммаси
	Сентябрь					Октябрь				Ноябрь					Декабрь				Январь					Февраль				Март					Апрель				Май				Июнь				Июль				Август				ЖАМИ	шундан					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52		Назарий таълим	Аттестациялар	Малака амалиёти	Битирув малакавий иши		
I																		Т	Т		А	А																			А	А	М	М	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	42	36	4	2		10	52
II																		Т	Т		А	А																			А	А	М	М	М	М	Т	Т	Т	Т	Т	Т	44	36	4	4		8	52
III																		Т	Т		А	А																			А	А	М	М	М	М	Т	Т	Т	Т	Т	Т	44	36	4	4		8	52
IV	М	М	М	М	М	М	М	М										Т	Т		А	А												А	А	Д	Д	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Д	Т	Т	Т	Т					42	21	7	8	6	6	48
																																																				Жами	172	129	19	18	6	32	204

	Назарий таълим	А	Аттестация	М	Малака амалиёти	Д	Давлат аттестацияси	Б	Битирув малакавий иши	Т	Таътил

II. ЎҚУВ РЕЖАСИ

Т/р	Ўқув блоклари, фанлар ва фаолият турларининг номлари	Талабанинг ўқув юкламаси (соатларда)									Соатларининг курс, семестр ва ҳафталар бўйича тақсимоти							
		Умумий юкламанинг ҳажми		Аудитория машғулотлари (соатларда)						Мустақил таълим	1-курс		2-курс		3-курс		4-курс	
				Жами	Маъруза	Амалий	Лаборатория	Семинар	Курс лойиҳаси (иши)		Курслардаги ҳафталар сони							
											42		44		44		42	
											Семестрлар							
											1	2	3	4	5	6	7	8
											Семестрдаги аудитория машғулотлари ҳафталарининг сони							
		соат	%								18	18	18	18	18	18	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1.00	**Гуманитар ва ижтимоий-иқтисодий фанлар**	**1594**	**23**	**998**	**274**	**452**		**272**		**596**	**11**	**10**	**9**	**9**	**4**	**6**	**8**	**4**
1.01	Ўзбекистон тарихи	116		72	36			36		44	4							
1.02	Ҳуқуқшунослик. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси	116		54	26			28		62		3						
1.03	Фалсафа	148		90	44			46		58			2	3				
1.04	Маънавият асослари. Диншунослик	92		54	26			28		38			3					
1.05	Маданиятшунослик	56		36	18			18		20				2				
1.06	Иқтисодиёт назарияси	116		72	36			36		44						4		
1.07	Социология	56		36	18			18		20					2			
1.08	Миллий ғоя: асосий тушунча ва тамойиллар	60		40	18			22		20							4	
1.09	Фуқаролик жамияти. Ўзбекистонда демократик жамият қуриш назарияси ва амалиёти	122		76	36			40		46							4	4
1.10	Ўзбек (рус) тили	116		72		72				44	2	2						
1.11	Чет тили	360		252		252				108	3	3	2	2	2	2		
1.12	Жисмоний маданият ва спорт *	236		144	16	128				92	2	2	2	2				
2.00	**Математик ва табиий-илмий фанлар**	**932**	**13**	**558**	**260**	**262**		**36**		**390**	**5**	**4**	**4**	**4**	**8**	**6**		
2.01	Чизиқли алгебра ва аналитик геометрия	274		162	72	90				52				4				
2.02	Комбинаторика ва графлар назарияси	122		72	36	36				52					4			
2.03	Механика	122		72	36	36				74					4	2		
2.04	Назарий физика	122		72	36	36				112	5	4						
2.05	Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика	170		108	44	64				50			4					
2.06	Математика ва информатика ўқитиш методикаси	122		72	36			36		50						4		
3.00	**Умумкасбий фанлар**	**3269**	**47**	**1961**	**872**	**1033**		**56**	**3 ки**	**1350**	**16**	**18**	**19**	**15**	**14**	**12**	**10**	**16**
3.02	Дастурлаш асослари	564		324	144	180				232	8	6	4					
3.03	Математик анализ	633		378	180	198				255	8	6	4	3				
3.04	Берилганлар структураси ва алгоритмлар	182		108	42	66			ки	74			4	2				
3.05	Дискрет математика ва математик мантиқ	182		108	54	54				74		6						
3.06	Оддий дифференциал тенгламалар	158		108	54	54				74			4	2				
3.07	Сонли усуллар	210		126	60	66				50				4				
3.08	Функционал анализ	122		72	36	36				74					4	2		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3.09	Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар	158		108	54	54				77						4	4	
3.10	WEB дастурлаш технологиялари	182		108	26	82			ки	74					3	3		
3.11	Тизимли дастурлаш	122		72	36	36				50					4			
3.12	Математик моделлаштириш	189		112	44	68			ки	84			3	4				
3.13	Ахборотларни ҳимоялаш	93		55	30	25				38								5
3.14	Умумий психология	90		54	26			28		36						3		
3.15	Умумий педагогика	90		54	26			28		36					3			
	Танлов фанлари	294		174	60	114				122							6	11
4.00	**Ихтисослик фанлари**	**667**	**10**	**395**	**180**	**215**				**268**				**4**		**2**	**14**	**13**
4.01	Оптималлаштириш усуллари	101		60	30	30				41							6	
4.02	Жараёнлар тадқиқоти	98		58	28	30				38						2	2	
4.03	Компьютер графикаси	142		84	40	44				56							6	2
4.04	Берилганлар базасини бошқариш тизимлари	122		72	30	42				50				4				
	Танлов фанлари	204		121	52	69				83								11
5.00	**Қўшимча тайёргарлик**	**450**	**7**	**216**	**108**	**108**				**234**					**6**	**6**		
	ЖАМИ	**6966**	**100**	**4128**	**1694**	**2070**		**364**	**3 ки**	**2838**	**32**	**32**	**32**	**32**	**32**	**32**	**32**	**32**
	Малака амалиёт	**1026**																
	Битирув малакавий иши	**324**																
	Аттестациялар	**1026**																
	ҲАММАСИ	**9342**																

Изох:

1. Олий таълим муассасаси ихтисослик фанлари рўйхатини тузишда кадрлар буюртмачиларининг талабларини эътиборга олади.
2. Ҳарбий тайёргарлик машғулотлари қўшимча фанлар блокининг соатлари ҳисобига, ҳарбий йиғин эса таътил вақти ҳисобига ўтказилади. Ҳарбий тайёргарлик машғулотлари ўтказилмайдиган ҳолларда меҳнат бозори ва кадрлар буюртмачиларининг талабларига мослашувчанлиги ва ҳаракатчанлигини таъминлаш учун Илмий Кенгашнинг қарори билан фойдаланилади.
3. Ўқув режа асосида олий таълим муассаси ҳар йили ишчи ўқув режасини тузади. Бунда олий таълим муассасасига талабалар юкламасининг ҳафталик ҳажмини сақлаган ҳолда ўқув фанлари блоки ҳажмини 5 фоизгача, блоклар таркибидаги фанлар ҳажмини 10 фоизгача ўзгартириш ҳуқуқи берилади.
4. Ўқув фанлари ҳажмининг камида 25 фоизи мустақил таълим тарзида ўзлаштирилиши шарт.
5. Талаба билимини баҳолаш рейтинг тизимига мувофиқ ўқув жараёни давомида амалга оширилади.
6. Битирув малакавий ишини бажариш муддатлари таркибига уни ҳимоя қилиш ҳам киритилади.
7. Чет тили фанининг охирги 7-8-семестрларида битирувчи курслар учун қўшимча ва танлов фанлар блоки соатлари ҳисобидан ҳар ҳафтада 2 соатдан "Амалий инглиз тили" фани ўқитилади.
8. *Жисмоний маданият ва спорт фани таркибида «Валеология асослари» назарий курсидан 16 соат ҳажмида маъруза, 12 соат ҳажмида амалий машғулот ўқитилиши кўзда тутилади.
9. Курс иши (лойиҳаси) "Умумкасбий фанлар" ва "Ихтисослик фанлар" блокларидаги фанлар бўйича бериш тавсия этилади.
10. 1-3-курслардаги малакавий амалиётлар таътил вақтига тўғри келганлиги сабабли ҳар бир курсда мос равишда назарий таълим билан бирга ўтказилади.
11. Гуманитар ва ижтимоий-иқтисодий фанлар блокидаги Педагогика. Психология фани умумкасбий фанлар блокидаги Умумий педагогика, Умумий психология фанларига қўшиб ўқитиш режалаштирилган.

Ўқув жараёнининг таркибий қисмлари	Ҳафталар сони	Семестр	Давлат аттестацияси
Назарий таълим	129	1-8	1. Гуманитар ва ижтимоий-иқтисодий фанлардан
Малака амалиёти	18	2, 4, 6, 7	2. Чет тили
Аттестациялар	16+3 (Д)	1-8	3. Битирув малакавий ишини ҳимоя қилиш
Битирув малакавий иши	6	8	
Таътил	32	1-8	
Жами	204		

Мувофиқлаштирувчи кенгаш раиси ____________________ (имзо)

Олий таълим муассасалари бош бошқармаси бошлиғи **И. Мажидов**

Маънавий ва ахлоқий тарбия бошқармаси бошлиғи **М.Комилов**

ОЎМКҲТРМ директори **Б.Рахимов**

ЎзМУ ректори **Ш.Сирожиддинов**

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг Олий ва ўрта махсус, касб-хунар таълими йўналишлари бўйича ўқув-услубий бирлашмалар фаолиятини Мувофиқлаштирувчи кенгашда маъқулланган

2016 йил "26" 03 даги 2 - сонли баённома

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ТАСДИҚЛАЙМАН
Самарқанд давлат университети
ректори
________ 2018 й.

ИШЧИ ЎҚУВ РЕЖА

Таълим йўналиши:
5130200 – Амалий математика ва информатика

Академик даража - БАКАЛАВР
Ўқиш муддати - 4 йил
Таълим шакли - кундузги

I. ЎҚУВ ЖАРАЁНИ ЖАДВАЛИ

Курс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	ЖАМИ	Назарий таълим	Аттестациялар	Малака амалиёти	Битирув малакавий иши	Таътил	Ҳаммаси
	Ҳафталар																																																				Ўқув жараёни	шундан					
	Сентябрь					Октябрь				Ноябрь					Декабрь				Январь					Февраль				Март					Апрель				Май				Июнь				Июль				Август										
I																		Т	Т		А	А																			А	А	М	М	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	Т	42	36	4	2		10	52
II																		Т	Т		А	А																			А	А	М	М	М	М	Т	Т	Т	Т	Т	Т	44	36	4	4		8	52
III																		Т	Т		А	А																			А	А	М	М	М	М	Т	Т	Т	Т	Т	Т	44	36	4	4		8	52
IV	М	М	М	М	М	М	М	М										Т	Т		А	А												А	А	Д	Д	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Д	Т	Т	Т	Т					42	21	7	8	6	6	48
																																																			Жами	172	129	19	18	6	32	204

☐ Назарий таълим А Аттестация М Малака амалиёти Д Давлат аттестацияси Б Битирув малакавий иши Т Таътил

II. ЎҚУВ РЕЖАСИ

Т/р	Ўқув блоклари, фанлар ва фаолият турларининг номлари	Талабанинг ўқув юкламаси (соатларда)									Соатларнинг курс, семестр ва ҳафталар бўйича тақсимоти							
		Умумий юкламанинг ҳажми		Аудитория машғулотлари (соатларда)						Мустақил таълим	1-курс		2-курс		3-курс		4-курс	
				Жами	Маъруза	Амалий	Лаборатория	Семинар	Курс лойиҳаси (иши)		Курслардаги ҳафталар сони							
											42		44		44		42	
											Семестрлар							
											1	2	3	4	5	6	7	8
											Семестрдаги аудитория машғулотлари ҳафталарининг сони							
		соат	%								18	18	18	18	18	18	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1.00	**Гуманитар ва ижтимоий-иқтисодий фанлар**	**1594**	**23**	**998**	**274**	**452**		**272**		**596**	**198**	**180**	**162**	**162**	**72**	**108**	**84**	**32**
1.01	Ўзбекистон тарихи	116		72	36			36		44	72							
1.02	Ҳуқуқшунослик. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси	116		54	26			28		62		54						
1.03	Фалсафа	148		90	44			46		58			46	44				
1.04	Маънавият асослари. Диншунослик	92		54	26			28		38			54					
1.05	Маданиятшунослик	56		36	18			18		20				36				
1.06	Иқтисодиёт назарияси	116		72	36			36		44						72		
1.07	Социология	56		36	18			18		20					36			
1.08	Миллий ғоя: асосий тушунча ва тамойиллар	60		40	18			22		20							40	
1.09	Фуқаролик жамияти Ўзбекистонда демократик жамият қуриш назарияси ва амалиёти	122		76	36			40		46							44	32
1.10	Ўзбек (рус) тили	116		72		72				44	36	36						
1.11	Чет тили	360		252		252				108	54	54	36	36	36	36		
1.12	Жисмоний маданият ва спорт *	236		144	16	128				92	36	36	36	36				
2.00	**Математик ва табиий-илмий фанлар**	**948**	**14**	**558**	**260**	**262**		**36**		**390**	**90**	**72**	**72**	**72**	**144**	**108**		
2.01	Механика	124		72	36	36				52				72				
2.02	Назарий физика асослари	124		72	36	36				52					72			
2.03	Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика	182		108	44	64				74					72	36		
2.04	Чизиқли алгебра ва аналитик геометрия	274		162	72	90				112	90	72						
2.05	Комбинаторика ва графлар назарияси	122		72	36	36				50			72					
2.06	Математика ва информатика ўқитиш методикаси	122		72	36			36		50						72		
3.00	**Умумкасбий фанлар**	**3315**	**47**	**1968**	**872**	**1040**		**56**	**ки**	**1347**	**180**	**252**	**342**	**270**	**252**	**288**	**100**	**169**
3.01	Дастурлаш асослари	556		324	144	180				232	144	108	72					
3.02	Математик анализ	633		378	180	198				255	144	108	62	64				
3.03	Дискрет математика ва математик мантиқ	182		108	54	54				74			72	36				

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3.04	Берилганлар структураси ва алгоритмлар	182		108	42	66			кн	74		108						
3.05	Оддий дифференциал тенгламалар	182		108	54	54				74			72	36				
3.06	Функционал анализ	122		72	36	36				50				72				
3.07	Хусусий хосилали дифференциал тенгламалар	182		108	54	54				74					36	72		
3.08	Математик моделлаштириш	189		112	44	68			кн	77						72	40	
3.09	WEB дастурлаш технологиялари	182		108	26	82			кн	74					54	54		
3.10	Тизимли дастурлаш	122		72	36	36				50					72			
3.11	Сонли усуллар	210		126	60	66				84			54	72				
3.12	Ахборотни химоялаш	93		55	30	25				38								55
3.13	Умумий психология	90		54	26			28		36						54		
3.14	Умумий педагогика	90		54	26			28		36					54			
	Танлов фанлари	300		181	60	121				119							60	114
4.00	**Ихтисослик фанлари**	659	9	388	180	208				278				72		36	140	140
4.01	Оптималлаштириш усуллари	101		60	30	30				41							60	
4.02	Операциялар тадкикоти	94		56	28	28				38						36	20	
4.03	Компьютер графикаси	138		82	40	42				56							60	22
4.04	Берилганлар базасини бошкариш тизимлари	122		72	30	42				50				72				
4.05	**Танлов фанлари**	204		118	52	66				86								118
5.00	**Кўшимча тайёргарлик**	450	7	216	108	108				234					144	72		
5.1	Чекли элементлар усули	150		72	36	36				78						72		
5.2	Интернет мухитида илов. яратиш	150		72	36	36				78					72			
5.3	Чекли улчовли экстремал масалалар ва уларни ечишнинг сонли усуллари	150		72	36	36				78					72			
	ЖАМИ	6966	100	4128	1694	2070		364	3кн	2838	32	32	32	32	32	32	32	32
	Малака амалиёт	972										108		216		216	432	
	Битирув малакавий иши	324																324
	Аттестациялар	1026									108	108	108	108	180	108	108	270
	ХАММАСИ	9288																

Ўкув режа Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 26.03.2016 йилдаги 2 ракамли буйруги билан тасдикланган ўкув режа асосида тузилди.

Ўкув жараёнининг таркибий кисмлари	Хафталар сони	Семестр	Давлат аттестацияси
Назарий таълим	129	1-8	1. Гуманитар ва ижтимоий-иктисодий фанлардан
Малака амалиёти	18	2, 4, 6, 7	2. Чет тили
Аттестациялар	16+3 (Д)	1-8	3. Битирув малакавий ишини химоя килиш
Битирув малакавий иши	6	8	
Таътил	32	1-8	
Жами	204		

Самарканд давлат университети
Ўкувуслубий кенгаш томонидан маъкулланди.
2018 йил «3» 07 10 сонли баённома.

Самарканд давлат университети
Илмий кенгаш томонидан маъкулланди.
2018 йил «6» 07 13 сонли баённома.

Амалий математика ва информатика факультети декани **А.Р.Ахатов**

Ахборотлаштириш технологиялари кафедраси мудири **И.И.Жуманов**

Математик моделлаштириш ва комплекс дастурлаш кафедраси мудири **Б.Х.Хужаеров**

Оптимал бошкарув усуллари кафедраси мудири **И.Н.Бозоров**

Амалий математика ва информатика факультети ўкув ишлари бўйича декан муовини **Н.Н.Низамова**

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA FAKULTETI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Ro'yxatga olindi:
№ 1313
2019 yil «___»_______

"TASDIQLAYMAN"
O'quv ishlari bo'yicha prorektori:
prof. A.S.Soliyev
2019 yil

«OPERATSIYALAR TADQIQOTI» fanidan

ISHCHI O'QUV DASTURI

Bilim sohasi: 100 000 – Gumanitar soha
Ta'lim sohasi: 130 000 – Matematika
Ta'lim yo'nalishi: 5130200 – Amaliy matematika va informatika

Dars turi	7-semestr	Jami
Ma'ruza	10	10
Amaliy	10	10
Mustaqil ta'lim	14	14
Jami	**34**	**34**

Samarqand – 2019

Fanning ishchi o'quv dasturi o'quv reja va namunaviy o'quv dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar: I.N.Bozorov - SamDU, «Optimal boshqaruv usullari» kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n.

Taqrizchi: Niyozov I.E. – SamDU Matemetik fizika va funksional analiz kafedrasi dotsenti., f.-m.f.n

Abdullayev A. – SamDU Axborotlashtirish texnologiyalari kafedrasi dotsenti., t.f.n.

Fanning ishchi o'quv dasturi Optimal boshqaruv usullari kafedrasining 2019 yil "___"________dagi "____"-son majlisida muhokama etilgan va ma'qullangan.

Kafedra mudri: dots. I.N.Bozorov

Fanning ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti o'quv-uslubiy kengashining 2019 yil "___"________dagi "____"-son qarori bilan tasdiqlangan.

O'quv-uslubiy kengash raisi: dots. Sh.S.Mamatov

Fanning ishchi o'quv dasturi Amaliy matematika va informatika fakulteti ilmiy kengashining 2019 yil "___"________dagi "____"-son qarori bilan tasdiqlangan.

Fakultet kengashi raisi: dots. A.I.Babayarov

Kelishildi:
O'quv-uslubiy
boshqarma boshlig'i
__________________dots. Aliqulov B.S.

MA'RUZA MASHG'ULOTLARI

1-ma'ruza: Dinamik dasturlash usuli. Bellmanning funksional tenglamasi

Reja:

1. Masalaning qo'yilishi.
2. Masalaning yechilishi.
3. Algoritm.
4. Algoritmdan jadval yordamida foydalanish.

Tayanch ibora va so'zlar: dinamik dasturlash, jarayon, dinamik jarayonlar, matematik dasturlash, maqsad funksiyasi, resurs miqdori, resurs taqsimoti, xom ashyo, masalalar oilasi, Bellman tenglamasi, Bellman funksiyasi.

Dinamik dasturlash usuli

Dinamik dasturlash – ko'p bosqichli va dinamik jarayonlarni matematik dasturlash hamda optimal boshqarishning maxsus masalalarini yechish usulidir. Quyida bu usulning matematik dasturlash masalalaridan bir tipiga qo'llanilishini ko'ramiz.

1. Masalaning qo'yilishi. Matematik dasturlashning quyidagi

$$u = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le (=) b, a_i > 0, x_i \ge 0, i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

masalasini qaraymiz. Bu masalaning o'ziga xos xususiyati shundan iboratki, uning maqsad funksiyasi separabeldir, ya'ni bir o'zgaruvchili $f_i(x_i), i = \overline{1,n}$, funksiyalar yig'indisidan iborat.

Bir qator iqtisodiy masalalarni (1) masala ko'rinishida matematik modellashtirish mumkin. Shunday masalalardan biri-resurslar taqsimoti haqidagi masaladir. U b miqdordagi xom ashyo (resurs) va n ta texnologik jarayonlar berilgan bo'lsin; agar xom ashyoning x miqdorini i - texnologik jarayonda foydalansak, $f_i(x)$

miqdordagi foyda olinishi ma’lum bo’lsa, maksimal umumiy foyda olish uchun xom ashyoni jarayonlar o’rtasida qanday taqsimlash kerak?

Agar x_i orqali i-jarayon uchun ajratilgan resurs miqdorini belgilasak, $u=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ – jami foyda, $\sum_{i=1}^{n} x_i = b,\ x_i \ge 0,\ i=\overline{1,n}$ bo’ladi. Natijada resurslar taqsimoti haqidagi masala quyidagicha matematik modellashtiriladi:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = b, \ \ x_i \ge 0, \ i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

2. Masalaning yechilishi. Amerikalik olim R. Bellman tomonidan asoslangan sxemaga ko’ra, (1) masalani dinamik dasturlash usuli bilan yechish quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi.

Birinchi bosqichda (1) masalani unga o’xshash masalalar oilasiga invariant kiritamiz, ya’ni

$$u=\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \to \max, \ \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \le (=) y, \ x_i \ge 0, \ i=\overline{1,k}, \ 1 \le k \le n, \ 0 \le y \le b \tag{3}$$

masalalar oilasini qaraymiz. (3) masala maqsad funksiyasining optimal qiymatini $B_k(y)$ kabi belgilaymiz:

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i), \ \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \le (=) y, \ \ x_i \ge 0, \ \ i=\overline{1,k}. \tag{4}$$

$B_k(y)$ – Bellman funksiyasi deyiladi.

Ikkinchi bosqichda rekurrent

$$B_k(y) = \max_{0 \le z \le \frac{y}{a_k}} [f_k(z) + B_{k-1}(y - a_k z)], \ k=\overline{2,n}, \ \ 0 \le y \le b$$

Bellman tenglamasidan va $b_1(y) = \max\limits_{0 \le z \le y/a_1} f_1(z)$ (asosiy bog’lanish tenglik shaklda bo’lgan holda $b_1(y) = f_1(y/a_1)$ boshlang’ich shartdan foydalanib ketma-ket $B_2(y), B_3(y), \ldots, B_n(y)$ funksiyalarini topamiz.

Oxirgi, **uchinchi bosqichda** (1) masalaning $\{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}$ yechimini quramiz: x_n^0 ni $f_n(z) + B_{n-1}(b - a_n z),\ 0 \le z \le b/a_n$ funksiyaga maksimum beruvchi nuqta sifatida aniqlaymiz, ya'ni $f_n(x_n^0)+B_{n-1}(b-a_n x_n^0)=\max\limits_{0\le z\le b/a_n}[f_n(z)+B_{n-1}(b-a_n z),\ x_{n-1}^0$ ni

ham shunga o'xshash $f_{n-1}(x_{n-1}^0)+B_{n-2}(b_1-a_{n-1}x_{n-1}^0)=\max\limits_{0\le z\le b/a_{n-1}}[f_{n-1}(z)+B_{n-2}(b_1-a_{n-1}z)]$

shartdan aniqlaymiz, bu yerda $b_1=b-a_n x_n^0$.

Shunday davom etib, $x_{n-1}^0,\ \ i=2,3,\dots,n-2$ nuqtalarni

$$f_{n-i}(x_n^0)+B_{n-i-1}(b_i-a_{n-i}x_{n-i}^0)=\max_{0\le z\le b_i/a_{n-1}}[f_{n-i}(z)+B_{n-i-1}(b_i-a_{n-i}z)$$

shartdan topamiz, bu yerda

$$b_i=b-\sum_{k=0}^{i-1}a_{n-k}x_{n-k},\ \ i=2,3,\dots,n-2.$$

x_1^0 ni esa, $f_1(x_1^0)=\max\limits_{0\le z\le b_{n-1}/a_1}f_1(z)$ shartdan topamiz (asosiy bog'lanish tenglik ko'rinishda bo'lganda esa, $x_1^0=(b-\sum\limits_{k=0}^{i-1}a_{n-k}x_{n-k}^0)/b_1$ bo'ladi). (1) masala maqsad funksiyasining maksimal qiymati $B_n(b)$ ga teng.

Eslatma. Agar (1) masalada $f_i(x), i=\overline{1,n}$ funksiyalar ham qavariq bo'lsa, $B_1(y),B_2(y),\dots,B_n(y)$ funksiyalar ham qavariq bo'ladilar va demak qavariq funksiyalarning xossalariga ko'ra (4) tenglamaning o'ng tomonida maksimumga yo $z=0$, yoki $z=y/b_k$ nuqtada erishiladi.

1-misol. Resurslar taqsimoti haqidagi (2) masalada

$$n=3,\ b=4,\ f_1(x)=x,\ \ f_2(x)=x^2+x,\ \ f_3(x)=x^2-x^3+24x$$

bo'lsin. Shu masalani yechamiz.

Demak, quyidagi masala berilgan:

$$x_1+x_2+x_3=4,\ \ x_i\ge 0,\ \ \ i=1,2,\dots$$

$$\sum_{i=1}^{3}f_i(x_i)=x_1+x_2^2+x_2+x_3^2-x_3^3+24x_3\to\max,$$

Unga o'xshash masalalar oilasi quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = y, \quad x_i \geq 0, \; i=\overline{1,k}, \; k=1,2,3, \quad 0 \leq y \leq 4,$$
$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \to \max.$$

Bellman funksiyasi

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i), \;\; \sum_{i=1}^{k} x_i = y, \;\; x_i \geq 0, \;\; i=\overline{1,k}, \;\; k=1,2,3, \;\; 0 \leq y \leq 4$$

uchun Bellman tenglamasini yozamiz:

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z \leq y} \left[f_k(z) + B_{k-1}(y-z) \right], \quad k=2,3, \quad 0 \leq y \leq 4.$$

Bu tenglama uchun boshlang'ich shart $B_1(y) = f_1(y) = y$ bo'ladi. Bellman tenglamasidan ketma-ket $B_2(y)$ va $B_3(y)$ funksiyalarni topamiz:

$$B_2(y) = \max_{0 \leq z \leq y} \left[f_2(z) + B_1(y-z) \right] = \max_{0 \leq z \leq y} \left[z^2 + z + y - z \right] = y^2 + y$$

$$B_3(y) = \max_{0 \leq z \leq y} \left[f_3(z) + B_2(y-z) \right] = \max_{0 \leq z \leq y} \left[z^2 - z^3 + 24z + (y-z)^2 + y - z \right]$$

Endi optimal taqsimotni aniqlaymiz.

$$B_3(4) = \max_{0 \leq z \leq 4} \left[z^2 - z^3 + 24z + (4-z)^2 + 4 - z \right] = \max_{0 \leq z \leq y} \left[2z^2 - z^3 + 15z + 20 \right] = 56$$

bu yerda maksimumga $z=3$ da erishiladi. Demak,

$$b_1 = b - x_3^0 = 1; \quad B_2(1) = \max_{o \leq z \leq 1} [z^2 + 1] = 2,$$

bu yerda maksimumga $z=1$ da erishiladi. Demak, $x_2^0 = 1$. U vaqtda $x_1^0 = 4 - x_3^0 - x_2^0 = 0$.

Shunday qilib, optimal taqsimot quyidagicha bo'ladi: $x_1^0 = 0, \; x_2^0 = 1, \; x_3^0 = 3$**:** maksimal foyda $B_3(4) = 56$ ga teng.

3. Algoritm. Faraz qilaylik, (1) masalada $a_i, \; i=\overline{1,n}, \; b-$ butun sonlar bo'lsin hamda $x_i, \; i=\overline{1,n},$ o'zgaruvchilar faqat manfiy bo'lmagan butun qiymatlar qabul qilinsin. Bu holda Bellman tenglamasi

$$B_k(y) = \max_{z=0,1,\ldots,[y/a_k]} \left[f_k(z) + B_{k-1}(y - a_k z) \right], \; k=\overline{2,n}, \;\; y=0,1,\ldots,b \qquad (5)$$

va uning uchun boshlang'ich shart

$$B_k(y) = \max_{z=0,1,\ldots,[y/a_k]} f_1(z) \qquad (6)$$

(asosiy bog'lanish tenglik ko'rinishida bo'lganda $B_1(y) = f_1([y/a_1])$) bo'ladi, bu yerda $[y/a_1] - y/a_1$ sonning butun qismini ifodalaydi.

Qaralayotgan holda (1) masalani dinamik dasturlash usuli bilan yechishni quyidagi ***algoritm*** bo'yicha amalga oshirish mumkin:

1) $y = 0$ deb olamiz;

2) $f_1(z)$ funksiyaning $z = 0,1,\ldots,[y/a_1]$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz ($\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ bo'lganda. $f_1([y/a_1])$ hisoblanadi).

3) $B_k(y) = \max_{z=0,1,\ldots,[y/a_k]} f_1(z) = f_1(x_1(y))$ $\quad (B_1(y) = f_1([y/a_1]))$ ni hisoblaymiz hamda $B_1(y)$ va $x_1(y)$ ni eslab qolamiz;

4) agar $y < b$ bo'lsa, $y = y + 1$ deb 2) punktga qaytamiz; aks holda navbatdagi punktga o'tamiz;

5) $k = 2,\ y = 0$ deb olamiz;

6) $z = 0,1,..,[y/a_1]$ uchun $f_k(z) + B_{k-1}(y - a_k z)$ qiymatlarni hisoblaymiz;

7) $B_k(y) = \max_{z=0,1,\ldots,[y/a_k]} [f_k(z) + B_{k-1}(y - a_k z)] = f_k(x_k(y)) + B_{k-1}(y - a_k x_k(y))$ ni hisoblaymiz hamda $B_k(y)$ va $x_k(y)$ ni eslab qolamiz;

8) agar $y < b$ bo'lsa, $y = y + 1$ deb 6) punktga qaytamiz; aks holda navbatdagi punktga o'tamiz;

9) agar $k < n$ bo'lsa. $k = k + 1,\ y = 0$ deb 6) bandga qaytamiz; aks holda navbatdagi bandga o'tamiz;

10) (1) masalani yechimi $x_1^0,\ x_2^0,\ldots,x_n^0$ ni aniqlaymiz:

$$x_n^0 = x_n(b),\ \ x_{n-i}^0 = x_{n-i}(b_i),\ \ b_i = b - \sum_{j=0}^{i-1} a_{n-j} x_{n-j}^0, i = 1,2,\ldots,n-1 \qquad (7)$$

$B_k(b)$ -(1) masala maqsad funksiyasining optimal qiymati bo'ladi.

Eslatma. Agar (7) formulada biror $i_n, 1 \le i_n \le n-1$ uchun $b_i = 0$ bo'lsa, $x_i^0 = 0, \qquad 1 \le i \le i_n$ bo'ladi.

4. Algoritmdan jadval yordamida foydalanish

$B_k(y),\ \ 1 \le k \le n,\ \ 0 \le y \le b$ qiymatlar bilan birga (6) ga maksimum beruvchi $x_1(y_1, y = 0,1,2,\ldots,b)$ va (5) ga maksimum beruvchi $x_k(y),\ k = 1,2,\ldots,n,\ \ y = 0,1,2,\ldots,b$ sonlarni ham yozib qo'yamiz (agar (5) va (6) ga maksimum beruvchi nuqtalar bir nechta bo'lsa, ularning hammasi yoziladi). Jadvalni to'ldirgandan so'ng (7) bo'yicha formula bo'yicha (1) masala yechimi $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ ni osongina aniqlash mumkin.

Algoritmdan jadval yordamida foydalanish qo'lda bajariladigan hisoblashlar uchun tavsiya qilinadi.

<u>Eslatma.</u> Asosiy bog'lanish tenglik ko'rinishda bo'lganda (ya'ni $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$)$x_1(y),\ \ y = 0,1,2,\ldots,b$) sonlarni jadvalga yozish shart emas. Bu holda (1) masala yechimining x^0 koordinatasini $x_1^0 = \left[\left(b - \sum_{j=0}^{n-2} a_{n-j} x_{n-j}^0 \right) / a_1 \right]$ formula bilan topamiz.

1-jadval

y / $B_k(y)$	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$	b
$B_1(y)$ $x_1(y)$	$B_1(0)$ $x_1(0)$	$B_1(1)$ $x_1(1)$	$B_1(2)$ $x_1(2)$	$\ldots$	$B_1(k)$ $x_1(k)$	$\ldots$	$B_1(b)$ $x_1(b)$
$B_2(y)$ $x_2(y)$	$B_2(0)$ $x_2(0)$	$B_2(1)$ $x_2(1)$	$B_2(2)$ $x_2(2)$	$\ldots$	$B_2(k)$ $x_2(k)$	$\ldots$	$B_2(b)$ $x_2(b)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$B_n(y)$ $x_n(y)$	$B_n(0)$ $x_n(0)$	$B_n(1)$ $x_n(1)$	$B_n(2)$ $x_n(2)$	$\ldots$	$B_n(k)$ $x_n(k)$	$\ldots$	$B_n(b)$ $x_n(b)$

<u>2-misol</u>. $\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 - x_2 + 2x_3 \to \max,\ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6,$

bu yerda $x_i \geq 0,\ 1 = 1,2,3-$ butun qiymatlar qabul qiladi.

Yechish. Berilgan masala uchun $n = 3, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b = 6,$

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f_2(x) = x^2 - x, \quad f_3(x) = 2x$$

2-jadvalni to'ldiramiz. Birinchi qatorga quyidagi sonlarni yozamiz:

$$B_k(y) = \max_{z=0,1,\ldots,[y/a_k]} f_1(z) = \max_{z=0,1,\ldots,y} \frac{z^2}{2} = \frac{y^2}{2}, \quad y = 0,1,\ldots,6$$

Ikkinchi satrni to'ldiramiz:

$$B_2(y) = \max_{z=0,1,\ldots,[y/a_k]} [f_2(z) + B_1(y - a_2 z)] = \max_{z=0,1,\ldots,[y/a_1]} [z^2 - z + \frac{(y-2z)^2}{2}], \quad y = 0,1,\ldots,6$$

$$B_2(0) = [z^2 - z + \frac{4z^2}{2}]_{z=0} = 0, \qquad x_2(0) = 0$$

$$B_2(1) = \max_{z=0,[\frac{1}{2}]} \left[z^2 - z + \frac{(1-2z)^2}{2} \right] = \left[z^2 - z + \frac{(1-2z)^2}{2} \right]_{z=0} = \frac{1}{2}, \quad x_2(1) = 0,$$

$$B_2(2) = \max_{z=0,1} \left[z^2 - z + \frac{(2-2z)^2}{2} \right] = \max\{2;0\} = 2, \quad x_2(2) = 0,$$

$$B_2(3) = \max_{z=0,[\frac{3}{2}]} \left[z^2 - z + \frac{(3-2z)^2}{2} \right] = \max\left\{\frac{9}{2};\frac{1}{2}\right\} = \frac{9}{2}, \quad x_2(3) = 0,$$

$$B_2(4) = \max_{z=0,1,2} \left[z^2 - z + \frac{(4-2z)^2}{2} \right] = \max\{8;2;2\} = 8, \quad x_2(4) = 0,$$

$$B_2(5) = \max_{z=0,1,[\frac{5}{2}]} \left[z^2 - z + \frac{(5-2z)^2}{2} \right] = \max\left\{\frac{25}{2};\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right\} = \frac{25}{2}, \quad x_2(5) = 0,$$

$$B_2(6) = \max_{z=0,1,2,3} \left[z^2 - z + \frac{(6-2z)^2}{2} \right] = \max\{18;8;4;6\} = 18, \quad x_2(6) = 0,$$

Xuddi shunga o'xshash, jadvalning uchinchi satrini $B_3(y)$ funksiyaning

$$B_3(y) = \max_{z=0,1,\ldots,[y/a_k]} [f_3(z) + B_2(y - a_3 z)] = \max_{z=0,1,\ldots,[y/a_1]} [f_3(z) + B_2(y - 3z)], \quad y = 0,1,\ldots,6,$$

ifodadan aniqlanuvchi qiymatlar $B_3(0), B_3(1), \ldots, B_3(6)$ lar va bu ifodaga maksimum beruvchi $x_3(0), x_3(1), \ldots, x_3(6)$ sonlar bilan to'ldiramiz.

2-jadval

y $B_k(y)$	0	1	2	3	4	5	6
$B_1(y)$ $x_1(y)$	0 0	$\frac{1}{2}$ 1	2 2	$\frac{9}{2}$ 3	8 4	$\frac{25}{2}$ 5	18 6
$B_2(y)$ $x_2(y)$	0 0	$\frac{1}{2}$ 0	2 0	$\frac{9}{2}$ 0	8 0	$\frac{25}{2}$ 0	18 0
$B_3(y)$ $x_3(y)$	0 0	$\frac{1}{2}$ 0	2 0	$\frac{9}{2}$ 0	8 0	$\frac{25}{2}$ 0	18 0

Tuzilgan jadvalning oxirgi ustuni berilgan masala yechimini aniqlaydi, chunki (7) formulaga ko'ra.

$$x_3^0 = x_3(6) = 0, \quad x_2^0 = x_2(6 - a_3 x_3^0) = x_2(6) = 0, \quad x_1^0 = x_1(6 - a_3 x_3^0 - a_2 x_2^0) = x(6) = 6$$

Maqsad funksiyasining maksimal qiymati $B_3(6) = 18.$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Qaralayotgan (1) masalani dinamik dasturlash usuli bilan yechishning asosiy bosqichlari.
2. Bellman funksiyasi, Bellman tenglamasi.
3. Dinamik dasturlash usuli bilan o'zgaruvchilari butun qiymatli bo'lgan (1) masalani yechish algoritmi.
4. Algoritmdan jadval yordamida foydalanish qanday bajariladi?

Mavzuni mustahkamlash uchun tavsiya etiladigan adabiyotlar

5. Вагнер Г. Основы исследований операции. Т. 1–3. М.: Мир. 1972-73.
6. Зайченко Ю. Б. Исследование операций. Киев. 1979.
7. Таха Х. Введение в исследование операций. Т. 1, 2. М.: Мир. 1981.

2-ma’ruza: Zahirani boshqarish masalasi

Reja:

1. Zahiralarni boshqarish umumiy modeli va uning tiplari.
2. Zahira darhol to’ldiriladigan deterministik model.
3. Zahira vaqt bo’yicha tekis to’ldiriladigan deterministik model.
4. Bir bosqichli ehtimolli model.

Tayanch so’z va iboralar: zahirani tashkil etish, zahirani boshqarish, zahirani yangilash, zahirani to’ldirish, talab, buyurtma, buyurtma o’lchami, buyurtmaning optimal o’lchami, partiya, optimal partiya, zahirani boshqarishning deterministik va ehtimolli modellari, Uilson formulasi.

1. Zahiralarni boshqarish umumiy modeli va uning tiplari

Har bir ishlab chiqarish korxonasi va tashkilotlarning uzluksiz, samarali faoliyatini ta’minlash moddiy resurslarning zahiralarini tashkil etish hamda optimal boshqarishni taqozo etadi. Zahiralar odatda biror vaqt oralig’i uchun tashkil etiladi va uning ma’lum miqdorda (me’yorda) bo’lishi ta’minlanadi. Zahirani tashkil etish va boshqarish jarayoni resurs (yoki mahsulot) uchun buyurtma berish va uni amalga oshirish, zahirani saqlash va uning me’yorini kuzatish, zahirani yangilash va to’ldirish kabi operasiyalar ketma-ketligidan iborat.

Zahirani boshqarish masalalari asosan quyidagi ikki savolga javob berishni nazarda tutadi:

a) resursga qancha miqdorda buyurtma berish lozim?

b) resursga qaysi vaqtda buyurtma berish lozim?

Buyurtma qilinayotgan resurs miqdori buyurtma o’lchami (partiya) deb ataladi va optimal partiya aniqlansa birinchi savolga javob topildi deb hisoblash mumkin.

Optimal partiyaga ma’lum vaqt momentlarida buyurtma beriladi. Shu vaqt momentlarini aniqlash ikkinchi savolga javobni ifodalaydi. Bu javob zahirani boshqarish sistemasining tipiga bog’liqdir. Agar sistema zahiraning holatini davriy ravishda teng vaqt oraliqida (masalan, har hafta, har oy, har kvartal) kuzatishni ko’zda tutsa, buyurtmaning kelib tushishi odatda vaqt intervalining boshlanishi bilan ustma-ust tushadi. Agar zahira holati uzluksiz nazorat qilinsa, buyurtma nuqtasi, ya'ni buyurtma berish vaqt momenti zahiraning me'yori bilan aniqlanadi.

Shunday qilib, zahirani tashkil etish va boshqarishda buyurtma o'lchamini hamda buyurtma nuqtasini aniqlash muammosi asosiy muammolardan biri hisoblanadi. Buyurtma o'lchami va buyurtma nuqtasi odatda zahirani boshqarish sistemasidagi umumiy xarajatlarini minimallashtirish shartiga binoan topiladi. Zahirani boshqarishdagi umumiy xarajatlar buyurtmani tashkillashtirish uchun ketgan xarajat, zahirani saqlash xarajati va tanqislik hisobiga bo'ladigan yo'qotishlar yig'indisidan iboratdir.

Bundan tashqari, umumiy xarajatlarda mahsulotni sotib olish bilan bog'liq xarajatlarni ham hisobga olishga to'qri keladi. Bu xarajatlar ulgurji savdo bahosidagi chegirmalar orqali ifodalanadi.

Buyurtmani tashkil etish xarajatlari buyurtma o'lchamidan bog'liqdir. Odatda, kichik hajmda buyurtmalar tashkil etish xarajatlari (ular ko'p sonli bo'lganligidan) yirik buyurtmalar uchun xarajatlarga qaraganda ko'p bo'ladi. Zahirani saqlash xarajatlari ham buyurtma o'lchami va resursning sarflanish tezligiga bog'liq. Va nihoyat, tanqislik hisobidan xarajatlar resursga talab paydo bo'lgan vaqtda uning yo'qligi natijasida bo'ladigan jarima yoki yo'qotishdan kelib chiqadi. Buyurtma optimal o'lchamini aniqlashda qaralayotgan model uchun xarajatlar ba'zi turlarining ta'siri ahamiyatsiz bo'lishi va natijada ular hisobga olinmasligi mumkin.

Yuqorida keltirilgan ma'lumotlardan tushunarliki, zahiralarni boshqarishning umumiy modeli sodda tarkibiy tuzilishga ega. Ammo, bu sinfga tegishli modellar juda xilma-xil bo'lib, ularga mos masalalarni yechishning matematik usullari ham turlichadir. Bu usullar orasida differensial va integral hisobning sodda sxemalari ham, dinamik va matematik programmalashtirishning murakkab algoritmlari ham mavjud.

Zahiralarni boshqarish modellarining xilma-xilligi resursga bo'lgan talabning xarakteri bilan aniqlanadi. Talab dermenistik xarakterga (ya'ni oldindan ma'lum) bo'lishi yoki ehtimolli (ya'ni faqat taqsimot qonuni ma'lum tasodifiy miqdor) bo'lishi mumkin. Shunga mos holda zahirani boshqarishning deterministik va ehtimolli modellariga ega bo'lamiz.

Deterministik model statik va dinamik xarakterga ega bo'lishi mumkin. Statik talabga ega deterministik modelda zahiraning iste'mol qilinish jadalligi vaqt bo'yicha o'zgarmaydi. Dinamik talabga ega modelda esa iste'mol jadalligi vaqtdan bog'liq ravishda o'zgaradi.

Ehtimolli modelda talab statsionar (talabning taqsimot funksiyasi vaqtdan bog'liq bo'lmasligi) yoki nostasionar (talabning taqsimot funksiyasi vaqtga bog'liq) bo'lishi mumkin.

Real voqelikda deterministik xarakterli statik talab juda kam uchraydi. Unga mos model eng sodda hisoblanadi. Talab vaqtga bog'liq holda juda sekin o'zgarganda bu modeldan foydalansa bo'ladi.

Amaliyotda ko'proq nostasionar ehtimolli taqsimot yordamida ifodalanuvchi talablar uchraydi. Ammo bunday talab ishtirok etuvchi zahirani boshqarish modelini matematik tadqiq qilish qiyin vazifadir. Zahiralarni boshqarish modellarini o'rganishda eng sodda modeldan murakkabroq modelga o'tib borish maqsadga muvofiqdir.

Talabning xarakteri zahiralarni boshqarish modellarini qurishda asosiy omil hisblanadi. Bunday modellar bilan ish ko'rganda yana boshqa bir qator omillar ta'sirini ham hisobga olish zarur. Ular qatoriga quyidagilarni kiritish mumkin.

A. Buyurtmani bajarish muddati yoki ta'minotdagi kechikish. Buyurtma berilgandan so'ng u darhol yoki ma'lum muddatda bajarilishi mumkin. Buyurtma berilish vaqt momenti va uning ta'minoti orasidagi vaqt intervaliga ta'minotdagi kechikish yoki buyurtmani bajarish muddati deyiladi. Bu miqdor deterministik yoki ehtimolli bo'lishi mumkin.

B. Zahirani to'ldirish. Zahirani boshqarish sistemasi ta'minotdagi kechikish vaziyatida faoliyat ko'rsatsa ham zahirani to'ldirish jarayoni darhol yoki vaqt bo'yicha tekis ravishda amalga oshirilishi mumkin. Odatda, zahiraning darhol to'ldirilishi buyurtma tashqi manbadan ta'minlangan holda yuz beradi. Agar zahirasi tashkil etilayotgan mahsulot shu zahirani uyushtiruvchi tomonidan ishlab chiqarilayotgan bo'lsa, zahirani to'ldirish vaqt bo'yicha tekis holda amalga oshirilishi mumkin.

C. Zahiraning yig'ilish punktlari soni. Zahirani boshqarish sistemasida bir nechta saqlash punktlari bo'lishi mumkin. Ba'zi hollarda bu punktlar shunday tashkillashtirilishi mumkinki, ulardan ba'zilari boshqalari uchun ta'minotchi rolini bajaradi. Bunday holda tarmoqlangan strukturali zahirani boshqarish sistemasiga ega bo'lamiz.

D. Mahsulot turlari soni. Zahirani boshqarish sistemasida bittadan ko'p mahsulot qatnashishi mumkin. Bu omil har xil mahsulotlar orasida ma'lum boqlanishlar bo'lgan holda hisobga olinadi.

E. Zahirani boshqarish davri. Zahirani ma'lum me'yorda saqlab turish vaqti – zahirani boshqarish davrini tashkil etadi. Bu vaqt oraliqini oldindan rejalashtirishga harakat qilinadi. Zahirani boshqarish davri chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin.

Xulosa qilib shuni ta'kidlash lozimki, real vaziyatni to'liq aks ettiruvchi zahirani boshqarish umumiy modelini qurish qoyat murakkab masaladir. Hatto bunday modelni qurishga erishilganda ham unga mos matematik masalani yechish katta qiyinchiliklarga olib keladi. Shuning uchun amalda uchrashi mumkin bo'lgan bir qator vaziyatlarga mos soddalashtirilgan modellarni o'rganish va ular asosida natijalar olishga harakat qilinadi. Quyida shunday modellardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

2. Zahira darhol to'ldiriladigan deterministik model

Zahiralarni boshqarishning eng sodda modelini qaraymiz. Zahiraga bo'lgan talab vaqt bo'yicha doimiy, uni to'ldirish darhol amalga oshadi va tanqislik yo'q deb hisoblaymiz. Faraz qilaylik, zahirani sarflash intensivligi (vaqt birligida zahiraga bo'lgan talab) μ va buyurtma o'lchami q bo'lsin. Buyurtma qilingan resurs partiyasi kelib tushgan paytda zahira darajasi eng yuqori bo'ladi. $\tau = q/\mu$ vaqt o'tgandan so'ng esa zahira darajasi nolgacha kamayadi. Shu paytda buyurtmaning yangi partiyasi kelib tushadi. Har bir τ vaqt intervalida zahiraning o'rtacha darajasi $q/2$ bo'ladi. Buyurtma o'lchami q qanchalik kichik bo'lsa, buyurtmalarni shunchalik tez tashkil etish lozim bo'ladi. Ammo, bunda zahiraning o'rtacha darajasi kamayadi. Ikkinchi tomondan, agar buyurtma o'lchami kattalashsa, buyurtmalar tashkil etish siyraklashadi va zahiraning o'rtacha darajasi oshadi.

Faraz qilaylik C_1 – buyurtmani bir marta tashkil etish xarajati, C_2 – bir birlik resursni birlik vaqt davomida saqlash xarajati bo'lsin. Agar qaralayotgan davrda jami n marta buyurtma berilgan bo'lsa, umumiy xarajat $C = \left(C_1 + C_2 \frac{q}{2} \frac{q}{\mu} \right) n$ bo'ladi. Bu ifodaning chap va o'ng taraflarini $\frac{q}{\mu} n$ ga bo'lib va $H(q) = \frac{\mu C}{qn}$ deb belgilab, vaqt birligidagi bitta buyurtma umumiy xarajatini topamiz:

$$H(q) = C_2 \frac{q}{2} + C_1 \frac{\mu}{q}.$$

Buyurtmaning optimal o'lchami q^*ni topish uchun $H(q)$ning q bo'yicha hosilasini nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{dH}{dq} = \frac{C_2}{2} - \frac{C_1 \mu}{q^2} = 0.$$

Bu yerdan

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_1 \mu}{C_2}}. \qquad (1)$$

Bu formula buyurtmaning optimal o'lchamini topish yoki **Uilson formulasi** deyiladi.

Zahirani yangilash optimal vaqt intervali τ^* quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$\tau^* = \frac{q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2C_1}{C_2 \mu}}. \qquad (2)$$

Endi vaqt birligidagi bitta buyurtma uchun optimal xarajatlar miqdori H^*ni aniqlash formulasini keltiramiz:

$$H^* = \sqrt{2C_1 C_2 \mu}. \qquad (3)$$

Faraz qilaylik, qaralayotgan modelda buyurtmani bajarish muddati $L > 0$ bo'lsin. Bu holda zahirani yangilash optimal vaqt intervali τ^* dagi

$$t^* = \tau^* - L, \qquad (4)$$

nuqta buyurtmani yangilash nuqtasini bildiradi. Agar t^* buyurtmani yangilash nuqtasi bo'lsa, zahira darajasi $p^* = t^*\mu = q^* - L\mu^*$ bo'lganda zahirani to'ldirishga yangi buyurtma beriladi.

1- misol. Biror mahsulotga bo'lgan kundalik talab 160 birlikni tashkil etsin. Mahsulot zahirasini hosil qilish uchun har bir buyurtma xarajati 40000 pul birligini, bir dona mahsulotni saqlash kunlik xarajati 20 pul birligini tashkil etadi. Agar buyurtmani bajarish muddati 2 kun bo'lsa, buyurtmaning optimal o'lchamini, zahirani yangilash optimal vaqtini, optimal xarajat miqdori va buyurtmani yangilash nuqtasini aniqlash kerak.

Bu misol uchun $C_1 = 40000$ pul birligi, $C_2 = 20$ pul birligi, $\mu = 160$ birlik, $L = 2$ kun bo'lgani uchun (1)–(4) formulalarga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_1\mu}{C_2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 40000\cdot 160}{20}} = 800 \text{ (birlik mahsulot)},$$

$$\tau^* = \frac{q^*}{\mu} = \frac{800}{160} = 5 \text{ (kun)}, \ t^* = \tau^* - L = 5 - 2 = 3 \text{ (kun)},$$

$$H^* = \sqrt{2C_1C_2\mu} \approx 11200 \text{ (pul birligi)},$$

$$p^* = t^*\mu = 3\cdot 160 = 480 \text{ (birlik mahsulot)}.$$

Demak, har 5 kunda 800 birlik mahsulotga buyurtma berilishi kerak. Har bir buyurtma mahsulot zahirasi 480 birlikni tashkil etganda berilishi lozim. Bunda kundalik minimal xarajat taqriban 11200 pul birligini tashkil etadi.

3. Zahira vaqt bo'yicha tekis to'ldiriladigan deterministik model

Faraz qilaylik, zahira tashkil etish uchun har safar q miqdordagi resursga buyurtma beriladi va buyurtma vaqt bo'yicha λ intensivlikda bajariladi. Resursning sarflanish intensivligi (vaqt birligidagi iste'mol) μ, $\mu < \lambda$ bo'lsin. Demak, zahiraning to'ldirilishi va sarflanishi vaqt bo'yicha tekis amalga oshiriladi.

τ_1 deb q miqdordagi resurs to'liq kelib tushishi uchun zarur vaqtni belgilaymiz (bu vaqt davomida resurs sarflanishi to'xtamaydi). τ_2 esa q miqdordagi resurs to'liq kelib tushgandan so'ng uning faqat sarflanish vaqti bo'lsin. U holda $\tau = \tau_1 + \tau_2$ vaqtda zahiraning q miqdori to'liq iste'mol qilinadi (zahira miqdori nolgacha kamayadi) va yangi buyurtma bo'yicha resurs keltirish boshlanadi.

τ_1 vaqt davomida zahira miqdori $\lambda-\mu$ intensivlik bilan o'sadi va uning miqdori $d=(\lambda-\mu)\tau_1$ bo'ladi. Shu zahira τ_2 vaqt davomida faqat sarflangani uchun $d=\mu\tau_2$ bo'ladi. Demak, $(\lambda-\mu)\tau_1=\mu\tau_2$. Endi $\tau_1=\dfrac{q}{\lambda}$ bo'lgani uchun oxirgi tenglikdan $\tau_2=\dfrac{(\lambda-\mu)q}{\lambda\mu}$ ekanligini topamiz. Shunday qilib

$$\tau=\tau_1+\tau_2=\frac{q}{\lambda}+\frac{(\lambda-\mu)q}{\lambda\mu}=\frac{q}{\mu}.$$

τ_1 vaqtda yiqilgan $d=(\lambda-\mu)\tau_1=(\lambda-\mu)\dfrac{q}{\lambda}$ resurs τ_2 vaqt davomida sarflangani uchun τ vaqt intervalidagi zahiraning o'rtacha miqdori $\bar{d}=\dfrac{(\lambda-\mu)q}{2\lambda}$ bo'ladi.

Avvalgidek, C_1 – har bir buyurtmani tashkil etish xarajati, C_2 esa resurs birligining birlik vaqt davomida saqlash xarajati bo'lsa hamda tanqislik yo'q deb hisoblansa, umumiy xarajat quyidagicha bo'ladi:

$$C=C_1+C_2\bar{d}\tau=C_1+C_2\frac{(\lambda-\mu)q^2}{2\lambda\mu}. \tag{5}$$

$H(q)=\dfrac{\mu C}{q}$ deb belgilab, (5)dan

$$H(q)=\frac{C_1\mu}{q}+C_2\frac{(\lambda-\mu)q}{2\lambda} \tag{6}$$

ifodani olamiz. (6) bilan aniqlangan $H(q)$ ning hosilasini nolga tenglashtirib, buyurtmaning optimal o'lchami q^*ni topamiz:

$$q^*=\sqrt{\frac{2C_1\mu}{C_2\left(1-\dfrac{\mu}{\lambda}\right)}}. \tag{7}$$

Zahirani yangilash uchun zarur vaqt intervali τ^* quyidagicha aniqlanadi:

$$\tau^* = \frac{q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2C_1}{C_2\mu\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}}. \qquad (8)$$

Vaqt birligi ichida optimal xarajatlar H^* esa

$$H^* = \sqrt{2C_1C_2\mu\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)} \qquad (9)$$

tenglikdan topiladi.

2- misol. Tovar omborga kuniga λ=12 birlikda q miqdordagi buyurtma bo'yicha keltiriladi. Iste'mol uchun kuniga $\mu = 9$ birlik tovar sarflanadi. Har bir buyurtmani tashkil qilish uchun $C_1 = 20000$ pul birligi, 1 birlik tovarni 1 kun saqlash uchun $C_2 = 225$ pul birligi xarajat qilinadi.

(7), (8) va (9) formulalardan foydalanib,

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_1\mu}{C_2\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20000\cdot 9}{225\cdot\left(1-\frac{9}{12}\right)}} = 80 \text{ (birlik tovar)},$$

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda} = \frac{80}{12} \approx 6{,}67 \text{ (kun)}, \ \tau^* = \frac{q^*}{\mu} = \frac{80}{9} \approx 8{,}89 \text{ (kun)},$$

$$H^* = \sqrt{2C_1C_2\mu\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)} = \sqrt{2\cdot 20000\cdot 225\cdot 9\cdot\left(1-\frac{9}{12}\right)} = 4500$$ (pul birligi) ekanligini aniqlaymiz.

Demak, tovar uchun buyurtma optimal o'lchami 80 birlik bo'lib, u $\tau_1^* \approx 6{,}67$ kunda keltiriladi va $\tau^* \approx 8{,}89$ kunda yangilanadi. Bunda har bir partiya tovar uchun minimal xarajat $H^* = 4500$ pul birligini tashkil etadi.

4. Bir bosqichli ehtimolli model

Zahiralarni boshqarish ehtimolli modellarining bir necha tiplari mavjud bo'lib ular bir yoki ko'p bosqichli bo'ladilar. Quyida bir bosqichli ehtimolli modelni qaraymiz. Zahiralarni boshqarishning bir bosqichli modeli shunday vaziyatni ifodalaydiki, bunda talab etilayotgan resursga ma'lum vaqt intervali davomida faqat bir marta buyurtma beriladi. Bir bosqichli modellar har xil sharoitlarda o'rganiladi.

Jumladan, resursga talab (resursning iste’moli) tezkor (bir lahzali) yoki vaqt bo’yicha tekis bo’lishi mumkin. Bunda buyurtmani tashkillashtirish xarajatlari hisobga olinishi yoki olinmasligi mumkin.

Qaralayotgan modelda resursning iste’moli bir lahzali bo’lsin. Talab etilayotgan resurs vaqt oraliqining boshida kelib tushsin va u shu ondayoq iste’mol qilinsin. Demak, resursning talab etilgan ξ miqdoriga bog’liq holda darhol zahira musbat qiymatli (ortiqcha zahira) yoki manfiy qiymatli (tanqis) bo’lib qoladi.

Buyurtma o’lchami q va talab ξ bo’lganda zahira darajasi $V(q,\xi)$ va tanqislik $W(q,\xi)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$V(q,\xi)=\begin{cases} q-\xi, & \xi<q \text{ bo'lganda,} \\ 0, & \xi\geq q \text{ bo'lganda,} \end{cases}$$

$$W(q,\xi)=\begin{cases} 0, & \xi<q \text{ bo'lganda,} \\ \xi-q, & \xi\geq q \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

Buyurtma bo’yicha resurs kelib tushmasdan oldin zahira darajasi z va talab ehtimoli taqsimotining zichligi $\varphi(\xi)$ bo’lsin. h_1 – resurs birligini qaralayotgan vaqt oraliqi (bosqichi) davomida saqlash xarajatini, h_2 esa birlik resurs tanqisligidan keladigan yo’qotishni bildirsin. Buyurtmani tashkillashtirish xarajati faqat resursni sotib olish xarajatidan iborat bo’lib, h_3 – birlik resursning bahosi bo’lsin.

Bosqich davomida xarajatlar umumiy miqdori $H(q)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$H(q)=h_3(q-z)+h_1\int_0^\infty V(q,\xi)\varphi(\xi)d\xi+h_2\int_0^\infty W(q,\xi)\varphi(\xi)d\xi=$$

$$=h_3(q-z)+h_1\int_0^q (q-\xi)\varphi(\xi)d\xi+h_2\int_q^\infty (\xi-q)\varphi(\xi)d\xi.$$

Buyurtma o’lchamining optimal qiymatini aniqlash uchun $H(q)$ funksiyaning birinchi hosilasini topib, uni nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{dH(q)}{dq}=h_3+h_1\int_0^q \varphi(\xi)d\xi-h_2\int_q^\infty \varphi(\xi)d\xi=0. \tag{10}$$

Ma’lumki, $\int_q^{\infty}\varphi(\xi)d\xi = 1 - \int_0^q \varphi(\xi)d\xi$. Shuning uchun (10)dan:

$$\int_0^q \varphi(\xi)d\xi = \frac{h_2 - h_3}{h_1 + h_2}. \qquad (11)$$

Qaralayotgan model uchun $h_2 \geq h_3$ deb hisoblaymiz. Shu holda buyurtma o’lchamining optimal qiymati q^* (11) munosabat yordamida aniqlanadi ($h_2 < h_3$ bo’lganda esa, qaralayotgan model q^*ni topish uchun yaroqsizdir).

$\frac{d^2H(q)}{dq^2} = (h_1 + h_2)\varphi(q) > 0$ bo’lgani uchun q^* nuqta $H(q)$ funksiyaning global minimum nuqtasidir. Topilgan q^* ko’rsatadiki, ξ talabning $\xi \leq q^*$ munosabatni qanoatlantirishi ehtimoli $p(\xi \leq q^*) = \frac{h_2 - h_3}{h_1 + h_2}$ bo’ladi. Shunday qilib, zahiraga buyurtma berish optimal strategiyasi quyidagichadir:

agar $q^* > z$ bo’lsa, $q^* - z$ miqdorda resursga buyurtma berish kerak;

agar $q^* \leq z$ bo’lsa, buyurtma berilmaydi.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Zahiralarni boshqarish umumiy modelini tushuntiring va uning asosiy tiplarini bayon qiling.
2. Buyurtmaning optimal o’lchami nima va u qanday aniqlanadi?
3. Buyurtma berishning optimal vaqt momenti nima va u qanday aniqlanadi?
4. Zahira darhol to’ldiriladigan deterministik modelning mohiyatini tushuntiring.
5. Zahira vaqt bo’yicha tekis to’ldiriladigan deterministik modelda buyurtmaning optimal o’lchami, zahirani yangilash uchun zarur vaqt intervali qanday topiladi.
6. Bir bosqichli ehtimolli modelda buyurtmaning optimal o’lchamini aniqlash qanday amalga oshiriladi.

3-ma'ruza. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlari. Ommaviy xizmat ko'rsatishning asosiy formulalari

Reja:

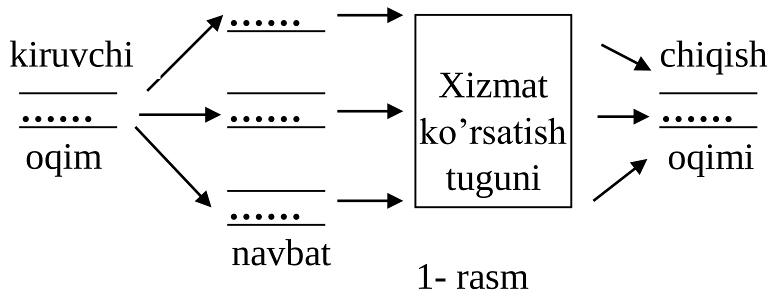
1. **Ommaiviy xizmat ko'rsatish tizimi umumiy tavsifi.**
2. **Puasson oqimi. Xizmat ko'rsatish vaqti.**

Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi deb atalgan ehtimolli tizimni tahlil qilishda daniyalik olim A.Erlang tadqiqotlari katta rol o'ynagan. Bu tadqiqotlar telefon stansiyalari ishini tashkil etish kabi amaliy masalalarni hal qilishda muhim ahamiyatga ega bo'ldi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi tasodifiy vaqt momentlarida tizimga kiruvchi talabnomalardan foydalanib shu tizimning miqdoriy xarakteristikasini beradi va uni tekshirish usullarini yaratadi.

1. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi umumiy tavsifi. Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida **talablar oqimi** deb vaqtning qandaydir momentlarida birin ketin keladigan talablar ketma ketligiga aytiladi. Bunga misol qilib quyidagilarni olish mumkin: telefon stansiyasiga keladigan chaqiriqlar oqimi, tez yordam punktiga keladigan chaqiriqlar oqimi, aloqa bo'limiga keladigan buyurtma xatlar oqimi, aeroportga qo'nadigan samolyotlar oqimi, maishiy xizmat ko'rsatish korxonasiga keladigan mijozlar oqimi va boshqalar.

Har qanday ommaviy xizmat ko'rsatish tizimida: talablarning kiruvchi oqimi, xizmat ko'rsatish navbati, xizmat ko'rsatish tuguni va talablar chiqish oqimi bo'ladi. Bu modelni 1-rasmdagidek tasvirlash mumkin.



1- rasm

2. Puasson oqimi. Xizmat ko'rsatish vaqti. Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi bo'yicha barcha tekshirishlar kiruvchi oqimni o'rganishdan boshlanadi. Eng sodda kiruvchi oqim – bu regulyar oqimdir. Regulyar oqim deganda ma'lum o'zgarmas vaqt oralig'ida keluvchi talablar oqimini tushunamiz. Amaliyotda regulyar oqim juda kam uchraydi.

Ko'pchilik hollarda talablar tushishi ehtimolli bo'ladi, ya'ni talab tushish vaqt oralig'i qandaydir taqsimot qonuniga bo'ysungan tasodifiy miqdordir. Ommaviy xizmat ko'rsatish bo'yicha ko'pchilik tadqiqotlar Puasson yoki sodda kiruvchi oqim uchun bajarilgan. Puasson oqimining uchta xossasi bor: stasionarlik, ordinarlik va oqibatsizlik xossalari.

Talablar kiruvchi oqimning uchta xossasini e'tiborga olib $P_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ taqsimotni hosil qilish mumkin, bunda $\lambda > 0$ – oqim parametri, $P_k(t)$ – t vaqt oralig'ida k ta talab kelish ehtimoli. Bu formulaga Puasson formulasi deyiladi. λ parametrning ma'nosini tushunish uchun $(0,t)$ vaqt oralig'idagi kutishini topamiz:

$$M_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^s}{s!} = e^{-\lambda t} \lambda t e^{\lambda t} = \lambda t .$$

$t = 1$ bo'lsa, $M_k(1) = \lambda$. Demak, λ –birlik vaqt oralig'idagi talablar soniga teng.

Puasson formulasidan $P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + v(\Delta t)$ kelib chiqadi, bunda $v(\Delta t)$ – Δt nisbatan cheksiz kichik kattalik. λ parametrli Puasson oqimi uchun talablar tushishi $P(T < t)$ taqsimot funksiyasi eksponensial qonun bo'yicha taqsimlanadi:

$$P(T < t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t} .$$

Xizmat ko'rsatish vaqti. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimini matematik usullar yordamida tadqiq qilish uchun xizmat ko'rsatish tugunidagi har bir qurilmaning talablarga xizmat ko'rsatish vaqtlari ma'lum bo'lishi kerak. Talabga xizmat ko'rsatish vaqti ko'pchilik hollarda tasodifiy miqdor bo'lib, unga ko'p faktorlar ta'sir qiladi. Shuning uchun $t_{x.k}$ – xizmat ko'rsatish vaqti $F(t) = P(t_{x.k} < t)$ taqsimot funksiyasi yordamida xarakterlanishi mumkin, bunda $P(t_{x.k} < t)$ – xizmat ko'rsatish vaqtinining t dan oshmasligi ehtimoli.

Xizmat ko'rsatish vaqtining taqsimot qonuni turlicha bo'lishi mumkin. Ko'pchilik hollarda $F(t)=1-e^{-\mu t}$ ko'rinishga ega, ya'ni eksponensial qonunga bo'ysunadi, bunda μ musbat parametr bo'lib xizmat ko'rsatish intensivligi (jadalligi). μ parametrning ma'nosini tushunish xizmat ko'rsatish vaqtining matematik kutishini hisoblaymiz: $M(t)=\overline{t_{x.k}}=\int_0^\infty tdF(t)=\int_0^\infty t\mu e^{-\mu t}dt=\frac{1}{\mu}$. Shunday qilib, μ parametr vaqt birligida xizmat ko'rstaish qurilmasining o'rtacha nechta talabga xizmat ko'rsatganini bildiradi.

Ochiq xizmat ko'rstaish tizimlari. Agar tizimga talablar chegaralanmagan manbadan kelsa, bunday tizim ochiq deb ataladi.

Talablar oqimi o'rtacha qiymatda λ bo'lgan Puasson oqimidan iborat bo'lsin. Agar talab kelgan vaqtda xizmat ko'rsatish tuguni band bo'lib, navbatda m – ta talab bo'lsa, kelgan talab yo'qoladi. Aks holda u birorta bo'sh joy egallab navbatda turadi. Xizmat ko'rsatish tugunida bir xil unumdorlikka ega bo'lgan n ta parallel xizmat ko'rstaish qurilmasi bor bo'lsin. Har bir qurilmada talabga xizmat ko'rsatish vaqti μ parametrli ko'rsatgichli qonun bo'yicha taqsimlangan. Agar tizimga talab tushgan vaqtda bir necha bo'sh turgan qurilmalar bo'lsa, ularning xar biri bir xil ehtimol bo'lsin. Talabga xizmat ko'rsatish mumkin. Shunday qilib, tizimda bir vaqtda $n+m$ ta talab qatnashish mumkin. Bu tizim Markov tasodifiy jarayon bo'ladi.

Holatlar to'plami. O'tishlar ehtimollari.

Talablar bo'lganda tizim holatlarini E_k, $k=0,1,2,\dots,n+m$ deb, tizimning t vaqt momentida E_k holatda bo'lish ehtimolini $P_k(t)$ deb belgilaymiz. $P_k(t)$ ehtimollar uchun tenglamalar tuzish masalasini qaraymiz. Δt vaqt oralig'ida ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi uchun o'tishlar ehtimollari matrisasini $P(\Delta t)$ deb belgilaymiz. $\overline{P}(t+\Delta t)=\overline{P}(t)P(\Delta t)$ tenglikni hosil qilish mumkin, bunda $\overline{P}(t)=(P_0(t),P_1(t),\dots,P_{n+m}(t))$. $P(\Delta t)$ matrisani tuzish uchun tizimning bir holatdan boshqa holatga o'tish ehtimollarini aniqlaymiz. Oldin tizimning $t+\Delta t$ vaqt momentida talablardan holi bo'lish ehtimolini topamiz. Ma'lumki, $P(t_{x.k}<\Delta t)=F(\Delta t)=1-e^{-\mu\Delta t}$

Δt vaqt birligi ichida xizmat ko'rsatishni tugatish ehtimolidan iborat. $e^{-\mu\Delta t}$ ni Teylor qatoriga yoyib $P(t_{x.k} < \Delta t) = 1 - 1 + \mu\Delta t + v(\Delta t) \approx \mu\Delta t$ munosabatni olamiz. Demak, $P(t_{x.k} \geq \Delta t) = 1 - P(t_{x.k} < \Delta t) \approx 1 - \mu\Delta t$ tenglik Δt vaqt birligi ichida xizmat ko'rsatishning tugamasligi ehtimolini aniqlaydi. Bundan tashqari $P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + v(\Delta t)$ Δt vaqt birligi ichida bitta talab tushish ehtimolidan iborat

$$E_0 \to E_0: \quad 1 - \lambda\Delta t + v\Delta t \approx 1 - \lambda\Delta t;$$
$$E_1 \to E_0: \quad \mu\Delta t(1 - \lambda\Delta t) \approx \mu\Delta t;$$
$$E_j \to E_0 \;\; j = \overline{2, n+m}: \quad v(\Delta t) \approx 0$$

Uchta holni qaraymiz: $1 \leq k \leq n, \;\; n \leq k < n+m, \;\; k = n+m$.

1) $1 \leq k \leq n$, ya'ni barcha k talabga xizmat ko'rsatilyapti, k ta qurilma ishlayapti, $n-k$ qurilma bo'sh turibdi. Bunda quyidagilar bo'lishi mumkin:

a) tizimda k ta qurilma xizmat kursatayapti va Δt vaqt oralig'ida hech qaysi qurilma ishini tugatmadi.

b) tizimda k ta qurilma xizmat ko'rsatayapti va Δt vaqt oralig'ida ulardan bittasi ishini tugatdi.

a) holda $(1 - \mu\Delta t)^k = 1 - k\mu\Delta t + v(\Delta t) \approx 1 - k\mu\Delta t, \quad k = \overline{1, n}$

b) holda $k\mu\Delta t$

$$E_k \to E_k: \quad (1 - \lambda\Delta t)(1 - k\mu\Delta t) \approx 1 - (\lambda + k\mu)\Delta t;$$
$$E_{k-1} \to E_k: \quad \lambda\Delta t[1 - (k-1)\mu\Delta t) \approx \lambda\Delta t;$$
$$E_{k+1} \to E_k: \quad (k+1)\mu\Delta t(1 - \lambda\Delta t) \approx (k+1)\mu\Delta t;$$

2) $n \leq k < n+m$. Bu holda barcha qurilmalar band bo'lib, $k-n$ ta talab navbat kutmoqda. Agar biror qurilma xizmatni tugatsa u beto'xtov boshqa talabga xizmat ko'rstaishni boshlaydi.

$$E_k \to E_k: \quad (1 - \lambda\Delta t)(1 - n\mu\Delta t) \approx 1 - (\lambda + n\mu)\Delta t;$$
$$E_{k-1} \to E_k: \quad \lambda\Delta t[1 - n\mu\Delta t) \approx \lambda\Delta t;$$
$$E_{k+1} \to E_k: \quad n\mu\Delta t(1 - \lambda\Delta t) \approx n\mu\Delta t.$$

3) $k = n+m$. Bu holda

$$E_{n+m} \to E_{n+m}: \quad 1 - n\mu\Delta t;$$
$$E_{n+m-1} \to E_{n+m}: \quad \lambda\Delta t;$$

yuqoridagi topilganlar asosida quyidagi t va $t+\Delta t$ vaqt momentlaridagi tizimning ehtimollari orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz:

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t$$
$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\lambda\Delta t + P_k(t)[1-(\lambda+k\mu)\Delta t] + P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t, \quad 1\le k\le n;$$
$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\lambda\Delta t + P_k(t)[1-(\lambda+n\mu)\Delta t] + P_{k+1}(t)n\mu\Delta t, \quad n\le k\le n+m.$$
$$P_{n+m}(t+\Delta t) = P_{n+m-1}(t)\lambda\Delta t + P_{n+m}(t)(1-n\mu\Delta t).$$

Bu tengliklardan $\Delta t\to 0$ bo'lganda limitga o'tib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin.

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$
$$P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda+k\mu)P_k(t) + P_{k+1}(t)(k+1)\mu, \quad k=\overline{1,n-1};$$
$$P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda+n\mu)P_k(t) + P_{k+1}(t)n\mu, \quad k=\overline{n,n+m-1};$$
$$P_{n+m}'(t) = \lambda P_{n+m-1}(t) - P_{n+m}(t)n\mu.$$

Bu sistemani yechib, $P_k(t)$ ehtimollarini topish mumkin.

Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarida $t\to\infty$ bo'lgan hol qaraladi. $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = P_k$ deb belgilab uni stasionar ehtimol deb aytamiz. Bundan tashqari $\lim\limits_{t\to\infty} P_k'(t) = 0$ ekanligini e'tiborga olib, stasionar ehtimollar uchun quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0;$$
$$\lambda P_{k-1} - (\lambda+k\mu)P_k + \mu(k+1)P_{k+1} = 0, k=\overline{1,n-1};$$
$$\lambda P_{k-1} - (\lambda+n\mu)P_k + \mu n P_{k+1} = 0, k=\overline{n,n+m-1};$$
$$\lambda P_{n+m-1} - n\mu P_{n+m} = 0.$$

Bu tenglamalarga yana $\sum\limits_{k=0}^{n+m} P_k = 1$ shartni ham qo'shish kerak.

Bu algebraik sistemani yechish uchun

$$z_k = \begin{cases} \lambda P_{k-1} - k\mu P_k, & 1\le k<n, \\ \lambda P_{k-1} - n\mu P_k, & n\le k<n+m. \end{cases}$$

deb belgilash olamiz. U holda tizim $z_1=0$, $z_k - z_{k+1} = 0$, $k=\overline{1,n+m-1}$, $z_{n+m}=0$ ko'rinishga keladi. Bu barcha $k=\overline{1,n+m-1}$ uchun $z_k=0$ ekanligini bildiradi. Demak

$k=\overline{1,n-1}$ uchun $\lambda P_{k-1}=k\mu P_k$

$k=\overline{n,n+m}$ uchun $\lambda P_{k-1}=n\mu P_k$.

$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$ deb belgilab quyidagilarni hosil qilamiz.

$$P_1=\rho P_0,\quad k=1;$$
$$P_2=(\rho^2/2!)P_0,\quad k=2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P_k=(\rho^k/k!)P_0,\ k=\overline{1,n-1};$$
$$P_k=(\rho^k/(n^{k-n}n!))P_0,\quad k=\overline{n,n+m}$$

P_0 ni topish uchun bu ifodalarni $\sum_{k=0}^{n+m}P_k=1$ tenglikka qo'yamiz:

$$P_0+\rho P_0+\left(\rho^2/2!\right)P_0+\ldots+\left(\rho^n/n!\right)P_0+\rho^n/n!\left(\rho/n+\rho^2/n+\ldots+\rho^m/n^m\right)P_0=1$$

yoki

$$P_0\left(\sum_{k=0}^{n}\rho^k/k!+\rho^n/n!\sum_{k=1}^{m}\rho^k/n^k\right)=1.$$

Bundan qavs ichidagi ikkinchi qo'shiluvchi geometrik progressiya yigindisi ekanligini hisobga olsak ,

$$P_0=1/\left[\sum_{k=0}^{n}\rho^k/k!+\rho^n/n!\frac{(\rho/n)^{m+1}-\rho/n}{\rho/n-1}\right]$$

tenglik kelib chiqadi.

Endi tizimning asosiy xarakterli bog'lanishlarini ko'rib chiqamiz.

1. Tizimdagi xizmat ko'rsatish qurilmalarining hammasi bo'shligining ehtimoli oxirgi tenglik yordamida topiladi.
2. Tizimning ma'lum sondagi qurilmasi band bo'lish ehtimoli $P_k=(\rho^k/k!)P_0$, $k=\overline{1,n-1}$ formula bilan topiladi.
3. Tizimda barcha xizmat ko'rsatish qurilmalari band va l ta talabning navbat kutish ehtimoli $P_{n+l}=\dfrac{\rho^{n+l}}{n^l n!}P_0,\ l=\overline{1,m}$ formula bilan topiladi.

4. Talabning qondirilmaslik faqatgina barcha xizmat ko’rsatish qurilmalari va kutish joylari band bo’lgandagina amalga oshiriladi. Shuning uchun talabni rad qilish ehtimoli $P_{rad} = P_{n+m} = \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0$ bo’ladi.

5. Endi xizmat ko’rsatishda band bo’lgan qurilmalar o’rtacha soni N_{band} ni tasodifiy tasdiq miqdor matematik kutish sifatida topamiz:

$$N_{band} = \sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{l=1}^{m} nP_{n+l} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{\rho^k}{k!}P_0 + n\sum_{l=1}^{m}\frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho^l}{n^l}P_0 =$$
$$= \rho P_0\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(\rho/n)^{m+1}-(\rho/n)}{(\rho/n)-1}\right]$$

Bu ifodani soddalashtirib $N_{band} = \rho\left(1-\dfrac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0\right)$ formulani hosil qilamiz.

6. Bo’sh turgan qurilmalar o’rtacha soni $N_{bo'sh}$ soddagina topiladi: $N_{bo'sh} = n - N_{band}$.

7. Bo’sh turish koeffisiyenti $K_{bo'sh}$ quyidagicha topiladi: $K_{bo'sh} = \dfrac{N_{bo'sh}}{n}$.

8. Bandik koeffisiyenti K_{band} quyidagicha hisoblanadi: $K_{band} = \dfrac{N_{band}}{n} = 1 - K_{bo'sh}$.

9. Ommaviy xizmat ko’rsatish tizimining yana bir muhim xarakteristikasi nisbiy o’tkazish qobiliyati q dir. Nisbiy o'tkazish qobiliyati deganda tizimga tushgan talablar umumiy sonining xizmat ko’rsatilgan qismini tushunamiz, ya’ni

$$q = 1 - P_{rad} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m}P_0.$$

10. Tizim vaqt birligi ichida xizmat ko’rsatgan talablarning o’rtacha soniga absolyut otkazish qobiliyati deb ataladi va A bilan belgilanadi:

$$A = \lambda q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m}P_0\right).$$

11. Endi tizimda navbat kutuvchi talablar o’rtacha soni $L_{N.K}$ ni aniqlaymiz:

$$L_{N.K} = 1\cdot P_{n+1} + 2\cdot P_{n+2} + \ldots + mP_{n+m} = \sum_{l=1}^{m} lP_{n+l}$$

yoki

$$L_{N.K}=\frac{\rho^{n+1}}{n!n}P_0\left[1+2\cdot\frac{\rho}{n}+3\cdot(\frac{\rho}{n})^2+\ldots+m(\frac{\rho}{n})^{m-1}\right]$$

geometrik progressiya yigindisidan: $\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^m=\dfrac{\alpha-\alpha^{m+1}}{1-\alpha}$. Bu tenglikni α bo'yicha differensiallab, $\alpha+2\alpha+3\alpha^2+\ldots+m\alpha^{m-1}=\dfrac{1-\alpha^m(m+1-m\alpha)}{(1-\alpha)^2}$ formulani hosil qilamiz. Demak, $L_{N.K}=\dfrac{\rho^{n+1}}{n!n}\cdot\dfrac{1-(\rho/n)^m(m+1-m\rho/n)}{(1-\rho/n)^2}P_0$.

12. Tizimdagi talablar o'rtachcha soni L

$$L=L_{N.K}+N_{band}$$

formula bilan topiladi.

13. Talablarning navbatda turish o'rtacha vaqti W ni topamiz:

$$W=\frac{1}{n\mu}P_n+\frac{2}{n\mu}P_{n+1}+\ldots+\frac{m}{n\mu}P_{n+m-1}=\frac{\rho^n}{\mu n!n}\cdot\frac{1-(\rho/n)^m(m+1-m\rho/n)}{(1-\rho/n)^2}P_n,$$

ya'ni $W=\dfrac{L_{N.K}}{\rho\mu}=\dfrac{L_{N.K}}{\lambda}$.

14. Talabning tizimda bo'lish o'rtacha vaqti V uchun formula chiqaramiz: t_{tiz} – talabning tizimda bo'lish vaqti; t_{kut} – talabning navbat kutish vaqti; $t_{x.k}$ – talabga xizmat ko'rsatish tasodifiy vaqti deb belgilab olsak $t_{tiz}=t_{kut}+\tau$ bo'ladi, bunda

$$\tau=\begin{cases}t_{x.k}, & agar\quad talabga\quad xizmat\quad ko'rsatilsa,\\ 0, & aks\quad holda.\end{cases}$$

matematik kutishni hisoblaymiz: $M(t_{tiz})=M(t_{kut})+M(\tau)$

$M(\tau)=\dfrac{q}{\mu}$ ekanligini e'tiborga olsak, $V=W+\dfrac{q}{\mu}$ formulani hosil qilamiz.

Mustaqil ishlash uchun savollar.

1. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi va uning asosiy elementlari.
2. Parallel xizmat ko'rsatish qurilmasi va chegaralangan sondagi kutish joyi bo'lgan tizimlar.
3. Tizimning ma'lum holatda bo'lish ehtimoli uchun tenglamalar.
4. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimining xarakterli bog'lanishlari.

4-ma’ruza. Markov zanjirlari. Kolmogorov–Chepmen formulasi. Ergodik teorema. Markov zanjirlari va dinamik programmalash

Reja

1. Diskret tasodifiy jarayon tushunchasi.
2. Markov tasodifiy jarayonlarida o’tish ehtimollari.
3. Markov jarayoni uchun daromad tushunchasi.
4. Boshqariluvchi Markov jarayonlarining optimal strategiyalari.

Tayanch so’z va iboralar: *tasodifiy jarayon, Markov jarayoni (zanjiri), o’tish ehtimollari, holatlar ehtimollari, ergodik Markov zanjiri, o’tish daromadi, boshqariluvchi Markov jarayoni, strategiya, optimal strategiya.*

1. Diskret tasodifiy jarayon tushunchasi

Biror S sistema berilgan bo’lib, u o’z holatini $t_0, t_1, ..., t_m, ...$, $(t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < ...)$ vaqt momentlarida tashqi ta’sirlar natijasida tasodifiy ravishda o’zgartirishi mumkin bo’lsin. Har bir ketma-ket vaqt momentlari orasidagi intervalni qadam deb ataymiz. Har bir sistemaning bir holatdan boshqa holatga o’tishiga olib keladi. Sistemaning boshlang’ich holatini E_0 deb, *m*- qadamdagi holatini esa E_m deb belgilaymiz. Sistemaning $E_0, E_1, ..., E_m, ...$ holatlar ketma-ketligiga diskret tasodofiy jarayon deyiladi.

Har bir qadamda sistemaning bir holatdan boshqa holatga o’tishini biror eksperiment (tajriba) natijasi deb qarash mumkin. Sistemaning har bir *m*- qadamda o’tishi mumkin bo’lgan holatlar to’plami eksperimentning natijalar to’plamini tashkil etadi: $Z_m = \{z_0^m, z_1^m, ..., z_{L_m}^m\}$, $E_m \in Z_m$. Z_0 to’plam yagona elementdan, ya’ni sistemaning boshlang’ich E_0 holatidan iboratdir.

Tasodifiy jarayon berilgan bo’lishi uchun har bir qadamda sistemaning boshqa holatlarga o’tish ehtimollari berilgan bo’lishi, ya’ni natijalar fozosidagi ehtimollar taqsimoti ma’lum bo’lishi lozim. Umumiy holda bu ehtimollar taqsimoti sistemaning avvalgi qadamlardagi qabul qilgan holatlariga bog'liq bo'ladi, ya'ni quyidagi shartli ehtimoldan iborat:

$$p(E_m = z_k^m \mid E_0, E_1, \ldots, E_{m-1}),\ k = 0,1,2,\ldots,L_m; \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{L_m} p(E_m = z_k^m \mid E_0, E_1, \ldots, E_{m-1}) = 1. \tag{2}$$

Tasodifiy jarayon cheksiz davom etishi mumkin. Ammo, amaliyotda ko'pincha jarayonni chekli qadamdan so'ng to'xtatishga to'g'ri keladi. Natijada chekli yoki ko'p qadamli jarayon deb ataluvchi tasodifiy jarayonga ega bo'lamiz.

Ehtimollar taqsimotining ko'rinishiga qarab tasoddifiy jarayonlarni bir necha tiplarga ajratish mumkin. Ularning keng tarqalganlari quyidagilardir: bog'liqsiz qiymatli jarayonlar, bog'liqsiz sinovlar jarayonlari va Markov zanjirlari.

Agar chekli tasodifiy jarayon uchun ehtimollar taqsimoti har bir qadamda avvalgi qadam natijalaridan bog'liq bo'lmasa, ya'ni (2) shartni qanoatlantiruvchi (1) ehtimollar uchun

$$\sum_{k=0}^{L_m} p(E_m = z_k^m \mid E_0, E_1, \ldots, E_{m-1}) = p(E_m = z_k^m),\, k = 0,1,2,\ldots,L_m, \tag{3}$$

tenglik bajarilsa, bu jarayonga bog'liqsiz qiymatli tasodifiy jarayon deyiladi.

Bog'liqsiz qiymatli tasoddifiy jarayon uchun (3) ehtimollarni $p_m(z), z \in Z_m$, $m = 0,1,2,\ldots$, deb belgilash mumkin.

Bog'liqsiz qiymatli tasodifiy jarayonning muhim xossasi shundan iboratki, sistemaning $E_0, E_1, \ldots, E_m$ holatlar ketma-ketligini bog'liqsiz eksperimentlar natijasi deb qarash mumkin. Shuning uchun bunday ketma-ketlikning paydo bo'lish ehtimoli shu ketma-ketlikka kiruvchi natijalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$p(E_0, E_1, \ldots, E_m) = p_0(E_0)p_1(E_1)\ldots p_m(E_m), E_i \in Z_i, i = 0,1,\ldots,m. \tag{4}$$

Bog'liqsiz qiymatli tasodifiy jarayonning muhim bir xususiy holi bog'liqsiz sinovlar jarayonlaridir. Agar bog'liqsiz qiymatli jarayon uchun sistemaning mumkin bo'lgan holatlari to'plami $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$ va undagi ehtimollar taqsimoti har bir qadamda bir xil bo'lsa, ya'ni

$$p_i(z) = p_j(z) = p(z), \forall z \in Z, i, j = \overline{1,m}, \tag{5}$$

munosabat bajarilsa, bunday jarayonga bog’liqsiz sinovlar jarayoni deyiladi. Boshqacha aytganda, bog’liqsiz sinovlar jarayonini aynan bir eksperimentning bir xil sharoitlarda ko’p marta takrorlanishi deb qarash mumkin.

Agar sistemaning mumkin bo’lgan holatlar to’plami Z har bir qadamda bir xil bo’lib, natijalar to’plami uchun ehtimollar taqsimoti avvalgi qadamdan bog’liq, ya’ni

$$p(E_m = z \mid E_0, E_1, \ldots, E_{m-1}) = p(E_m = z \mid E_{m-1}) \qquad (6)$$

bo’lsa, bunday holda qaralayotgan tasodifiy jarayonga Markov tasodifiy jarayoni yoki Markov zanjiri deyiladi.

Markov zanjiri tushunchasi atoqli rus matematigi A.A.Markov (1856–1922) tomonidan kiritilgan va o’rganilgan. Markov zanjirlari fan va texnikaning xilma-xil sohalaridagi bir qator muhim masalalarni hal etishda keng qo’llaniladi. Masalan, fizikada gazlar diffuziyasini o’rganishda Markov zanjirlaridan foydalaniladi. Texnikada Markov zanjirlari ma’lumotlarni uzatish jarayonini ifodalashda, murakkab texnik qurilmalarning ishlashini nazorat qilish va ulardagi nosozlikni aniqlash jarayonida qo’llaniladi. Biologiyada Markov zanjirlari yordamida alohida o’simlik va hayvonot turlarining rivojlanishi o’rganiladi. Sosiologiyada Markov zanjirlari aholining ijtimoiy va professional tarkibining o’zgarishi, aholi migrasiyasi kabi muammolarini o’rganishda qo’llaniladi.

2. Markov tasodifiy jarayonlarida o’tish ehtimollari

Faraz qilaylik, Markov zanjiri uchun sistema (m–1)- qadamda biror $z_i \in Z$ holatda bo’lsin. U vaqtda (6) ehtimollar taqsimoti sistemaning m- qadamda z_i holatda bo’lish ehtimolini bildiradi. Biz bu ehtimolni $p_{ij}(m)$ deb belgilaymiz. Demak

$$p_{ij}(m) = p(E_m = z_j \mid E_{m-1} = z_i) \qquad (7)$$

bo’lib,

$$0 \le p_{ij}(m) \le 1, \; \sum_{j=1}^{L} p_{ij}(m) = 1, \qquad (8)$$

shartlarning bajarilishi ravshan.

Shunday qilib, (7) va (8) munosabatlarga ko'ra $p_{ij}(m)$ shartli ehtimol bo'lib, u qaralayotgan sistemaning *m*- qadamda z_i holatdan z_j holatga o'tish ehtimolini anglatadi.

Agar o'tish ehtimollari qadamdan bog'liq bo'lmasa, Markov zanjiri stasionar (yoki bir jinsli), aks holda esa nostasionar (yoki bir jinsli bo'lmagan) deyiladi.

Bir jinsli Markov zanjiri berilgan bo'lib, qaralayotgan *S* sistemaning o'tish mumkin bo'lgan holatlari $E_1, E_2, \ldots, E_n$ bo'lsin. U vaqtda p_{ij} o'tish ehtimollari yordamida quyidagi $n \times n$ o'lchamli matrisani tuzamiz:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bu matrisaga o'tish extimollari matrisasi deyiladi. Uning elementlari ((8)ga ko'ra):

$$0 \le p_{ij} \le 1,\ i, j = \overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n},$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Qaralayotgan bir jinsli Markov zanjiri uchun *S* sistemaning *m*- qadamda E_i holatda bo'lishi ehtimolini $p_i(m)$ deb belgilaymiz va sistemaning *m*- qadamdagi holatlari ehtimollaridan

$$\overline{p}(m) = (p_1(m), p_2(m), \ldots, p_n(m))$$

vektorni tuzamiz. Bu vektor komponentalari uchun

$$0 \le p_i(m) \le 1,\ i = \overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} p_j(m) = 1,$$

shartlar bajariladi. Agar E_1 – qaralayotgan sistemaning boshlang'ich holati deb olsak, $\overline{p}(0) = (1, 0, \ldots, 0)$ bo'ladi.

Sistema *m*- qadamda E_i holatga avvalgi (*m*–1)- qadamdagi ixtiyoriy mumkin bo'lgan $E_j,\ j = \overline{1,n}$, holatidan o'tish imkoniyatiga ega ekanligini e'tiborga olib, to'la ehtimollar formulasiga ko'ra

$$p_i(m)=\sum_{j=1}^{n} p_j(m-1)p_{ij} \tag{9}$$

formulaga ega bo'lamiz. Vektor-matrisali yozuvda (9)ni

$$\overline{p}(m)=\overline{p}(m-1)P \tag{10}$$

ko'rinishda yozish mumkin. (10)dan

$$\overline{p}(m)=\overline{p}(0)P^m \tag{11}$$

kelib chiqadi, bu yerda $P^m=\underbrace{P\cdot P\cdot\ldots\cdot P}_{m}$.

P o'tish ehtimollari matrisasi bir jinsli Markov zanjiridagi bitta qadamga mos keladi. Endi Markov zanjiridagi *m*ta qadamga mos o'tish ehtimollari matrisasini $P^{(m)}$ deb belgilaymiz. Bu matrisaning har bir $p_{ij}^{(m)}$ elementi sistemaning E_i holatdan E_j holatga *m*ta qadam (*m* marta o'tish) natijasida o'tish ehtimolini bildiradi.

Agar sistema E_i holatdan biror E_μ holatga *k*ta qadamdan so'ng o'tgan bo'lsa va E_μ holatdan E_j holatga esa (*m*–*k*)ta qadamdan so'ng o'tgan bo'lsa, E_i dan E_j ga *m*ta qadamda o'tish ehtimoli $p_{i\mu}^{(k)}p_{\mu j}^{(m-k)}$ bo'ladi. Bunda oraliq E_μ holat sifatida ixtiyoriy mumkin bo'lgan E_i, $i=\overline{1,n}$, holat olinishi mumkinligini hisobga olib va to'la ehtimollar formulasini qo'llab, $p_{i\mu}^{(k)}=\sum_{\mu=1}^{n}p_{i\mu}^{(k)}p_{\mu j}^{(m-k)}$ tenglikni olamiz. Bu tenglikni

$$P^{(m)}=P^{(k)}P^{(m-k)} \tag{12}$$

ko'rinishda yozish ham mumkin. (12)da $k=1$ deb olsak,

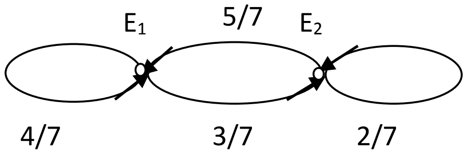
$$P^{(m)}=P^{(1)}P^{(m-1)}$$

tenglikni olamiz. $P^{(1)}=P$ ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglikdan $P^{(m)}=P^m$ formulaga ega bo'lamiz. Shuni hisobga olsak, (11)ni

$$\overline{p}(m)=\overline{p}(0)P^{(m)}$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Agar Markov zanjirida har bir E_j holatga ixtiyoriy E_i holatdan chekli sondagi qadamda o'tish mumkin bo'lsa, u ergodik Markov zanjiri deyiladi.



1- rasm

Ma'lumki, agar Markov zanjiri ergodiklik xossasiga ega bo'lsa, u stoxastik turg'un bo'ladi, ya'ni $m \to \infty$ bo'lganda sistemaning $p_i(m)$ holatlar ehtimollarining boshlang'ich holatiga bog'liksiz ravishda p_i limitlari mavjud bo'ladi: $\lim_{m\to\infty} p_i(m) = p_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$.

$\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ deb belgilab va (10)da $m \to \infty$da limitga o'tib, $\overline{p} = \overline{p}P$ tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ tenglik bilan birgalikda $p_i$larga nisbatan tenglamalar sistemasini tashkil qiladi:

$$\left.\begin{aligned} p_j &= \sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij}, \; j = 1,2,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{n} p_i &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

1-misol. Tayyorlanayotgan mahsulotga aholining talabidan bog'liq holda ishlab chiqarish korxonasi har bir ish oxirida ikkita holatdan birida bo'ladi: E_1 – talab bor, E_2 – talab yo'q. Har bir yilda korxona holatlari uchun o'tish ehtimollari matrisasi $P = \begin{pmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 5/7 & 2/7 \end{pmatrix}$ bo'lsin. Bu o'tish ehtimollari matrisasini 1- rasmdagidek tasvirlash mumkin.

Agar boshlang'ich vaqt momentida korxona E_1 holatda bo'lsa, $p(0) = (1,0)$ bo'ladi. (11) formulaga ko'ra 1- yil oxirida korxonaning mumkin bo'lgan holatlari ehtimollarini hisoblaymiz:

$$p_1(1)=p_1(0)p_{11}+p_2(0)p_{21}=1\cdot\frac{4}{7}+0\cdot\frac{5}{7}=\frac{4}{7},$$

$$p_2(1)=p_1(0)p_{12}+p_2(0)p_{22}=1\cdot\frac{3}{7}+0\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{7}.$$

Demak, $p(1)=\left(\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right)$. Yana (11) formuladan foydalanib, sistemaning 2- qadamdan so’nggi holatlari ehtimollarini hisoblaymiz:

$$p_1(2)=p_1(1)p_{11}+p_2(1)p_{21}=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{7}=\frac{31}{49},$$

$$p_2(2)=p_1(1)p_{12}+p_2(1)p_{22}=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{18}{49}.$$

Demak, $p(2)=\left(\frac{31}{49},\frac{18}{49}\right)$. Shunday davom etib, sistemaning keyingi qadamlardagi holatlari ehtimollarini hisoblash mumkin. Bu ehtimollarning limitik holatini hisoblash uchun (13) sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} p_1=p_1\cdot\frac{4}{7}+p_2\cdot\frac{5}{7}, \\ p_2=p_1\cdot\frac{3}{7}+p_2\cdot\frac{2}{7}, \\ p_1+p_2=1. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $p_1=\frac{5}{8}$, $p_2=\frac{3}{8}$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, qadam soni ortishi bilan korxonaning E_1 va E_2 holatlarda bo’lish ehtimollari, mos ravishda, $\frac{5}{8}$ va $\frac{3}{8}$ ga yaqinlashadi.

3. Daromadli Markov jarayonlari

Chekli $E_1,E_2,...,E_N$ holatlarga va $P=(p_{ij})$ o’tishlar matrisasiga ega bo’lgan ergodik Markov jarayoni berilgan bo’lsin. E_i dan E_j ga o’tishga daromad deb ataluvchi r_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$ sonlarni mos qo’yamiz. Bunday sistema ishlab tursa, ma’lum vaqt o'tgandan so'ng Markov jarayonining ehtimollari taqsimotiga bog'liq bo'lgan umumiy daromad ham tasodifiy miqdor bo'ladi.

Sistema m o'tish qilishi natijasidagi umumiy daromadni hisoblaymiz. Umumiy daromad deganda daromadning matematik kutilmasi yoki o'rtacha qiymati tushuniladi.

Agar jarayon E_i holatdan boshlanib m o'tishdan keyin kutilgan daromad miqdorini $v_i(m)$ deb belgilasak, m o'tishdan keyin daromadni birinchi o'tishdan olgan daromad plyus qolgan $(m-1)$ o'tishdan olingan daromad deb hisoblash mumkin. Sistemani E_i holatdan bir o'tishda olingan daromadni q_i deb belgilaymiz:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} r_{ij}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Qolgan $(m-1)$ o'tish natijasida kutilgan daromad birinchi kadamdan keyingi sistemaning holatiga bog'liq. Sistema E_j holatga o'tgan bo'lsin. U holda qolgan $(m-1)$ o'tish natijasidagi o'rtacha daromad $v_j(m-1)$ ga teng bo'ladi. Sistema E_i holatdan istalgan $E_j, \quad j = \overline{1, N}$ holatga o'tish mumkin bulgani uchun qolgan $(m-1)$ o'tish natijasidagi urtacha daromad

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij} v_j (m-1), \quad m = 1, 2, \ldots$$

bo'ladi. Shunday qilib, oxirgi natijalarni e'tiborga olib, m o'tish natijasidagi umumiy daromad

$$v_i(m) = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^{N} P_{ij} v_j (m-1), \quad i = \overline{1, N}, m = 1, 2, \ldots$$

yoki

$$v_i(m) = q_i + \sum_{j=1}^{N} P_{ij} v_j (m-1), \quad i = \overline{1, N}, m = 1, 2, \ldots$$

formula bilan hisoblanishini topamiz.

Oxirgi formulaning vektor matrisali yozuvda $V(m)=q+Pv(m-1)$ ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $V(m)=\begin{pmatrix} v_1(m) \\ v_2(m) \\ \vdots \\ v_N(m) \end{pmatrix}$, $q=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$, $P=\left\| P_{ij} \right\|$ o'tishlar matrisasi. Markov jarayonining ergodik ekanligini e'tiborga olib katta m lar uchun $v_i(m)$ daromad $v_i(m)=mg+v_i$ yoki vektorli yozuvda $v(m)=mg+v$ formula bilan topilishini hosil qilamiz, bu yerda $g=\sum_{i=1}^{N} P_i q_i$, P_i – Markov jarayonining limitik ehtimoli.

4. Boshqariluvchi Markov jarayonlari.

Boshqariluvchi tasodifiy jarayonlar hayotda turli hollarda namoyon bo'ladi. Masalan, sanoat korxonasining ishini rejalashtirishni olaylik. Har bir rejalashtirish vaqtining boshida erishilgan holatga qarab keyingi vaqtga reja tuziladi. Rejalashtirilayotganda aktiv mablag' miqdorlariga qarab ish ko'riladi. Aktiv mablag'ni ishlatishning mumkin bo'lgan usullarini strategiya deb ataydilar.

Faraz qilaylik qaralayotgan korxonaning (korxonani bundan keyin sistema deb ataymiz) ish faoliyati Markov tasodifiy jarayoni bilan aniqlansin. Turli strategiyalarga sistemaning turli o'tish extimollari va turli daromadlar mos keladi.

Har bir strategiya uchun o'tish ehtimollari va daromadlarini mos ravishda P_{ij}^{k} va r_{ij}^{k} deb belgilaymiz. Har bir holatga mos strategiyalar to'plamiga ega bo'lgan jarayonga boshqariluvchi Markov jarayoni deb aytamiz. Har bir E_i holat uchun shunday $d_i(m)$ strategiya nomerini topish masalasini qaraymizki, bu strategiya m – qadamda ishlatilib bir o'tishda maksimal o'rtacha daromad g ni bersin.

Bu stretegiyalar to'plami $d(m)$ vektorni beradi: $d(m)=\begin{pmatrix} d_1(m) \\ d_2(m) \\ \vdots \\ d_N(m) \end{pmatrix}$.

Strategiyalarni ketma-ket tahlil qilib shu narsani aniqlash mumkinki, sistema $(m+1)$ – qadamda optimal o'rtacha daromad berishi uchun m - qadam optimal bo'lishi kerak.

$$v_i(m) = q_i + \sum_{j=1}^{N} P_{ij} v_j(m-1), \quad i=\overline{1,N},\ m=1,2,...$$

$$v_i(m+1) = \max_k \left[q_i^k + \sum_{j=1}^{N} P_{ij}^k v_j(m) \right], \quad i=\overline{1,N}$$

Bu yerda $v_i(m+1)$, $v_j(m)$ lar tanlangan optimal o'tish uchun kutilgan daromadni bildiradi. Kutilgan daromad va optimal strategiyalarni oxirgi tenglik yordamida ketma-ket hisoblashni $d(m)$ vektor o'zgarmay qolguncha davom ettiriladi.

5. Boshqariluvchi Markov jarayonlarining optimal strategiyalari

Endi optimal strategiyalarni $v_i(m) = mg + v_i,\quad i=1,2,...,N$ asimtotik formulalar yordamida topish metodini qarab chiqamiz.

$$v_i(m) = q_i + \sum_{j=1}^{N} P_{ij} v_j(m-1), \quad i=\overline{1,N},\ m=1,2,...$$

bo'lgani uchun

$$mg + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} P_{ij} v_j(m-1)$$

yoki

$$mg + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} P_{ij} \left[v_j + (m-1)g \right]$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$mg + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} P_{ij} v_j + (m-1)g \sum_{j=1}^{N} P_{ij}$$

tenglikni va $\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1$ ekanligini e'tiborga olib

$$g + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} P_{ij} v_j, \quad i=\overline{1,N}$$

munosabatni hosil qilamiz. Shunday qilib, $N+1$ ta $g, v_1, v_2, ..., v_N$ o'zgaruvchili N ta tenglamalar sistemasiga ega bo'ldik. Optimal strategiyani aniqlashda v_j, $j=\overline{1,N}$ o'zgaruvchilarning absolyut qiymatlarini bilish shart emas. $v_j - v_i$ ayirmalar o'zgarmas qiymat qabul qilishini talab qilish yetarli. Bunga erishish qiyin emas, oxirgi sistemaga, masalan, $v_N = 0$ tenglamani qo'shish yetarli, chunki istalgan i uchun $v_i = 0$ deb olish mumkin.

Oxirgi sistemani $v_N = 0$ tenglama bilan birgalikda hal qilinsa $v_j(m)$ kattalikning asimptotik qiymati $g^0, v_1^0, v_2^0, ..., v_N^0$ topiladi.

Fiksirlangan strategiyalar uchun g ni aniqlashda oxirgi sistemani yechmasdan

$$g = \sum_{i=1}^{N} P_i q_i$$

formuladan foydalanib topsa ham bo'ladi. Lekin bu vaqtda optimal strategiyani topish uchun hyech kanaqa informasiyaga ega bo'lmaymiz. Topilgan $g^0, v_1^0, v_2^0, ..., v_N^0$ yechimdan foydalanib turli strategiyalarni baholash mumkin.

Algoritm.

Dastlabki qadam. $v_i = 0, \quad i=\overline{1,N}$ deb olamiz va ikkinchi qadamga o'tamiz.

Birinchi qadam. P_{ij} va q_i lardan foydalanib g daromadni va $v_1, v_2, ..., v_N$ larni

$$\left.\begin{array}{l} g + v_i = q_i + \sum\limits_{j=1}^{N} P_{ij} v_j, \quad i=\overline{1,N} \\ v_N = 0 \end{array}\right\}$$

sistemani yechib topamiz. Ikkinchi qadamga o'tamiz.

Ikkinchi qadam (yechimni yaxshilash). Birinchi qadamda topilgan qiymatlardan foydalanib har bir E_i, $i=\overline{1,N}$ holat uchun $q_i^k + \sum\limits_{j=1}^{N} P_{ij}^k v_j$ kriteriyga maksimum beruvchi k strategiyani topamiz. Bu strategiyani yangi vektor – yechim deb olamiz. Agar yangi vektor – yechim eskisi bilan bir xil bo'lsa, masala yechildi, aks holda q_i^k ni $q_i^{k'}$ ga P_{ij}^k ni $P_{ij}^{k'}$ ga almashtiramiz va birinchi qadamga o'tamiz.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Diskret tasodifiy jarayonlar va ularning asosiy tiplari.
2. Markov zanjiriga oid asosiy tushunchalar. O'tishlar ehtimollari, sistema holatining limitik ehtimoli qanday aniqlanadi?
3. Markov jarayonida daromad tushunchasi. Bir necha qadamdan so'ng har bir holatga mos o'rtacha umumiy daromadning qanday aniqlanishini tushuntiring.

Mavzuni mustahkamlash uchun tavsiya etiladigan adabiyotlar:

1. Otaqulov S., Azizov I., Xodjayev T. Operasiyalarni tekshirishning asosiy masalalari. Muammoli ma'ruzalar kursi. Samarqand – 2004.

2. Вагнер Г. Основы исследований операции. Т. 1–3. М.: Мир. 1972-73.

3. Зайченко Ю. Б. Исследование операций. Киев. 1979.

4. Таха Х. Введение в исследование операций. Т. 1, 2. М.: Мир. 1981.

5-ma'ruza. Boshqariluvchi Markov zanjirlari uchun rekurrent algoritmlar. Markov o'yinlari. Markov o'yinlari uchun rekurrent algoritmlar

Reja

1. Diskret tasodifiy jarayon tushunchasi.
2. Markov tasodifiy jarayonlarida o'tish ehtimollari.
3. Markov jarayoni uchun daromad tushunchasi.
4. Boshqariluvchi Markov jarayonlarining optimal strategiyalari.

Tayanch so'z va iboralar: *tasodifiy jarayon, Markov jarayoni (zanjiri), o'tish ehtimollari, holatlar ehtimollari, ergodik Markov zanjiri, o'tish daromadi, boshqariluvchi Markov jarayoni, strategiya, optimal strategiya.*

Stoxastik o'yinlar tushunchasi dastavval Shepli tomonidan kiritilgan. Stoxastik o'yin Markov jarayonlari orqali amalga oshiriladi. Bunda o'tish jadvali elementlari o'yinchilar tomonidan tanlangan yechimlarga bog'liq bo'ladi.

Obyektning holatlar soni N ta bo'lsin. Har bir qadamda o'yin bu N ta holatlarning birortasida bo'ladi. Agar o'yin $i(1 \leq i \leq N)$ holatda bo'lib, I o'yinchi $k(1 \leq k \leq m_i)$, II o'yinchi $l(1 \leq l \leq n_i)$ yechimni tanlashgan bo'lsa, u holda o'yinning $j(1 \leq j \leq N)$ holatga o'tish ehtimoli p_{ij}^{kl} soniga teng bo'ladi. Bundan I o'yinchining yutug'i w_i^{kl} bo'ladi. I o'yinchi yig'ilgan yutuqlarning o'rtachasini maksimum qiluvchi strategiyani tanlaydi. II o'yinchi bu yutuqni minimum qiluvchi strategiyani tanlashga harakat qiladi. Biror $i(1 \leq i \leq N)$ holatni tanlab olish hisobiga jadvalli G_i o'yinni hosil qilamiz. qilib, stoxastik o'yin $G = G_i$, $i = 1, 2, ..., N$ jadvalli o'yinlar to'plamidan iborat bo'lar ekan.

Shepli tomonidan stoxastik o'yinlar uchun, to'xtash tushunchasi kiritilgan bo'lib, bunda har bir $i(1 \leq i \leq N)$ uchun:

$$1 - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{kl} = s_i^{kl} > 0$$

tengsizlik bajarilishligi talab etiladi. Bunday o'yinlar *to'xtalishli stoxastik* deb ataladi. Shepli tomonidan to'xtalishli o'yinlar uchun, olingan natijalarni keltiramiz.

To'xtalishli stoxastik o'yinlar quyidagi:

$$P_{ij} = p_{ij}^{kl} : k = 1, 2, ..., m_i, \; l = 1, 2, ..., n_i$$

$$W_i = w_i^{kl} : k = 1, 2, ..., m_i, \; l = 1, 2, ..., n_i$$

$N^2 + N$ ta jadvallar bilan beriladi, bu yerda P_{ij} ning elementlari

$$p_{ij}^{kl} \geq 0, \; |w_i^{kl}| \leq M,$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl} = 1 - s_i^{kl} \leq 1 - s < 1, \; i, j = 1, 2, ..., N$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Agar o'yin $i(1 \leq i \leq N)$ holatda turgan bo'lsa $i-$ o'yinchining sof yechimlari $k = 1, 2, ..., m_i$ lardan, II o'yinchiniki $l = 1, 2, ..., n_i$ lardan iborat bo'ladi. $(k, l) - i$ holat uchun, *sof yechim juftligini* tashkil qiladi.

1-ta'rif. $i(1 \leq i \leq N)$ holatda I o'yinchining sof yechimlari $1, 2, ..., m_i$ ustida taqsimlangan to'la ehtimollik *aralash yechim* deb ataladi.

Demak, aralash yechim $x_i = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^{m_i})$ ko'rinishda bo'lib:

$$\sum_{j=1}^{m_i} x_i^j = 1, \; x_i^j \geq 0, \; j = 1, 2, ..., m_i, \; i = 1, 2, ..., N.$$

2-ta'rif. I o‘yinchining statsionar aralash strategiyasi deb $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)$ bu yerda $x_i = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^{m_i})$ ko‘rinishdagi vektorga aytiladi.

Xuddi shunga o‘xshash tushunchalarni II o‘yinchiga nisbatan ham kiritish mumkin.

Agar $x_i^k = 1$, $x_i^j = 0$, $j \neq k$ bo‘lsa x_i – sof yechimni beradi.

B jadvalli o‘yinda $val[B]$ bilan I o‘yinchining minimaks yutug‘ini belgilaymiz. $S_I[B]$ va $S_{II}[B]$ bilan I va II o‘yinchilarning mos optimal strategiyalari to‘plamini belgilaymiz. B va C lar bir xil o‘lchovli jadvallar bo‘lishsa:

$$|val[B] - val[C]| \leq \max_{k,l} |b^{kl} - c^{kl}| \tag{3.1}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Stoxastik o‘yinda $W_i(\alpha)$ jadvalning (k, l) – elementi

$$w_i^{kl} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl} \alpha_j$$

bilan aniqlanadi, bu yerda $1 \leq k \leq m_i$ $1 \leq l \leq n_i$ va $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)^T$ vektor ustun. Ixtiyoriy $\alpha^{(0)}$ boshlang‘ich vektor olingan bo‘lsin. Uning yordamida $\alpha^{(n)}$ vektorlar ketma-ketligini quyidagicha quramiz:

$$\alpha^{(n)} = val[W_i(\alpha^{(n-1)})],$$

bu yerda $n = 1, 2, ...$. Ko‘rsatamizki, $\alpha^{(n)}$ vektor $n \to \infty$ da limitga ega va u $\alpha^{(0)}$ ga bog‘liq emas bo‘lib, uning i – elementi G_i o‘yinning bahosiga teng.

Quyidagicha U akslantirishni aniqlaymiz:

$$U\alpha = \beta,$$

bu yerda $\beta_i = val[A_i(\alpha)]$. α vektorning normasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$||\alpha|| = \max_i |\alpha_i|.$$

U holda yuqoridagi (3.1) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$
\begin{gathered}
||U\beta - U\alpha|| = \max_i |val[A_i(\beta)] - val[A_i(\alpha)]| \leq \\
\left|\max_{i,k,l} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl}\beta_j - \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl}\alpha_j\right| \leq \\
\max_{i,k,l} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl} \max_j ||\beta_j - \alpha_j| = (1-s)||\beta - \alpha||.
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

Bundan, xususan $||U^2\alpha - U\alpha|| \leq (1-s)||\beta - \alpha||$. Demak, $\alpha^{(0)}$, $U\alpha^{(0)}$, $U^2\alpha^{(0)}, \ldots$ ketma-ketlik yaqinlashar ekan va uning limiti bo'lgan α^* vektor U akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi bo'ladi: $U\alpha^* = \alpha^*$. Bu qo'zg'almas nuqta yagona ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, boshqa yana bir α^{**} qo'zg'almas nuqta mavjud bo'lsin. U holda (3.2) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$||\alpha^* - \alpha^{**}|| = ||U\alpha^* - U\alpha^{**}|| \leq (1-s)||\alpha^* - \alpha^{**}||.$$

Bu tengsizlik o'rinli bo'ladi, agar $||\alpha^* - \alpha^{**}|| = 0$ bo'lsa. Demak, α^* yagona qo'zg'almas nuqta bo'lib, u boshlang'ich $\alpha^{(0)}$ ga bog'liq emas. Endi α_i soni G_i o'yinning bahosi ekanligini ko'rsatish uchun, quyidagicha mulohaza yuritamiz: i– o'yinchi birinchi n qadam davomida ro'y beradigan $G_i^{(n)}$ o'yinlarda optimal strategiyasini qo'llab, keyingi o'yinlarda ixtiyoriy strategiyani qo'llasa, u holda uning yutug'i $G_i^{(n)}$ o'yinning bahosidan ko'pi bilan $\varepsilon_n = (1-s)^n/s$ ga farq qiladi. Bu mulohaza II o'yinchiga nisbatan ham o'rinli. $\varepsilon_n \to 0$ va $G_i^{(n)}$ o'yinning bahosi α_i^* ga intilganligi sababli α_i^* G_i o'yinning bahosi bo'ladi. qilib quyidagi teorema isbot qilindi.

1-teorema. G stoxastik o'yinning o'yin bahosi quyidagi:

$$\alpha_i = val[A_i(\alpha)],\ i = 1, 2, \ldots, N$$

tenglamalar sistemasining yagona yechimidan iborat bo'ladi.

2-teorema. Stoxastik G o'yinda I va II o'yinchilarning statsionar optimal strategiyalari mos ravishda x^* va y^* lardan iborat bo'lib, $x_i^* \in S_I[A_i(\alpha^*)]$ va $y_i^* \in S_{II}[A_i(\alpha^*)]$, ya'ni G ga tegishli $G_i(i = 1, 2, ..., N)$ o'yinda I va II o'yinchilarning optimal strategiyalari bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, G_i o'yin n – qadamda yakunlanib, bundan I o'yinchi α_i^* o'rniga $w_i^{kl} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl}\alpha_j^*$ yutuqni olsin. Tushunarliki, bunda I o'yinchi tomonidan statsionar x^* strategiyani qo'llash α_i^* yutuqni ta'minlaydi.

Boshlang'ich G_i o'yinda I o'yinchi tomonidan x^* strategiyani qo'llash natijasida n qadam davomida olgan o'rtacha yutug'i:

$$\alpha_i^* - (1-s)^{n-1} \max_{i,k,l} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl}\alpha_j^*$$

sonidan kichik bo'lmaydi. Demak, bu yutuq:

$$\alpha_i^* - (1-s)^n \max_j \alpha_j^*$$

kichik bo'lmaydi. Shu sababli I o'yinchining umumiy yutug'i:

$$\alpha_i^* - (1-s)^n \max_j \alpha_j^* - (1-s)^n/s$$

sonidan katta yoki unga teng bo'ladi.

Bu mulohazalar n ning yetarlicha katta qiymatlari uchun, o'rinli bo'lganligi sababli, bundan kelib chiqadiki, G_i o'yinda x^* strategiya I o'yinchi uchun, optimal. Xuddi y^* strategiya II o'yinchi uchun, optimal. Teorema isbot bo'ldi.

val operatorning nochiziqliligi 1 va 2-teoremalar yordamida aniq yechimni olishni qiyinlashtiradi. Shuning uchun, yutuqlarni statsionar strategiyalar orqali ifodalash maqsadga muvofiq. Buning uchun, quyidagi belgilashni kiritamiz. $\bar{G} = \bar{G}_i$ – sof strategiyalari G o'yin uchun, statsionar bo'lgan o'yinlar to'plami bo'lsin. Ularning to'lov funksiyalari $K_i(x, y)$ quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$K_i(x,y) = x_i A_i y_i + \sum_{j=1}^{N} x_i P_{ij} y_i K_j(x,y),\ i = 1,2,\dots,N.$$

Bu sistema yagona yechimga ega. Haqiqatan, chiziqli U_{xy} almashtirish uchun: $U_{xy}\alpha = \beta$ bu yerda $\beta_i = x_i A_i y_i + \sum_{j=1}^{N} x_i P_{ij} y_i \alpha_j$, quyidagi munosabat o‘rinli:

$$K_i(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} x_1P_{11}y_1 - 1 & x_1P_{12}y_1 & \dots - x_1A_1y_1 & \dots\ x_1P_{1N}y_1 \\ x_2P_{21}y_2 & x_2P_{22}y_2 - 1 & \dots - x_2A_2y_2 & \dots\ x_2P_{2N}y_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ x_NP_{N1}y_N & x_NP_{N2}y_N & \dots - x_NA_Ny_N & \dots\ x_NP_{NN}y_N - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1P_{11}y_1 - 1 & x_1P_{12}y_1 & \dots - x_1P_{1i}y_1 & \dots\ x_1P_{1N}y_1 \\ x_2P_{21}y_2 & x_2P_{22}y_2 - 1 & \dots - x_2P_{21}y_2 & \dots\ x_2P_{2N}y_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ x_NP_{N1}y_N & x_NP_{N2}y_N & \dots - x_NP_{Ni}y_N & \dots\ x_NP_{NN}y_N - 1 \end{vmatrix}}$$

$$||U_{xy}\beta - U_{xy}\alpha|| = \max_i \left| \sum_{j=1}^{N} x_i P_{ij} y_i (\beta_j - \alpha_j) \right| \le (1-s)||\beta - \alpha||.$$

Kramer qoidasiga asosan yuqoridagi yechimni hosil qildik.

3-teorema. $\bar{G}_i$ o‘yinlarning har biri egar nuqtaga ega:

$$\min_y \max_x K_i(x,y) = \max_x \min_y K_i(x,y).$$

Barcha $G_i \in G$ lar uchun, optimal bo‘lgan statsionar strategiya $\bar{G}_i \in \bar{G}$ lar uchun, sof optimal strategiya bo‘ladi va aksincha, G va $\bar{G}$ larning vektor baholari ustma-ust tushadi.

Isbot. Teorema isboti 2-teoremadan osongina kelib chiqadi. E'tibor beramizki, biror G_i (yoki $\bar{G}_i$) uchun, optimal bo'lgan x strategiya G (yoki $\bar{G}$) ga tegishli boshqa o'yinlar uchun, optimal bo'lmasligi mumkin.

Ko'rsatish mumkinki, G o'yinning barcha statsionar optimal strategiyalari to'plami yopiq qavariq ko'pyoqdan iborat bo'ladi. Ratsional koeffitsiyentli stoxastik o'yin ratsional bahoga ega bo'lishi shart emas. i holatdan j holatga o'tish mumkin bo'lgan qadamlar sonini bildiruvchi n soni to'plamini N_{ij} bilan belgilaymiz. d_i N_{ij} dagi sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'lsin.

i holatdan j holatga n qadamda o'tish ehtimolini $p_{ij}^{(n)}$ bilan belgilaymiz.

3-ta'rif. Agar biror n topilib $p_{ij}^{(n)} > 0$ bo'lsa *j holatga i holatdan o'tish mumkin deyiladi* va $i \to j$ kabi belgilanadi.

4-ta'rif. i va j holatlar *o'zaro aloqada* deyiladi, agar bir holatdan ikkinchi holatga o'tish mumkin bo'lsa, bu $i \leftrightarrow j$ kabi belgilanadi.

5-ta'rif. O'zaro aloqada bo'lishlik ma'nosida *ajralmaydigan ekvivalent sinflarga* bo'linadi.

Isbotsiz quyidagi lemmani keltiramiz.

1-lemma. Bir ajralmaydigan ekvivalent sinfga tegishli i, j lar uchun, $d_i = d_j = d$ bo'ladi va N_{ij} ga tegishli sonlar modul bo'yicha taqqoslamadir.

N_{ij} ning ixtiyoriy elementi bilan d modul bo'yicha taqqoslash mumkin bo'lgan sonni $t_{ij} (0 \leq t_{ij} \leq d)$ bilan belgilaymiz.

6-ta'rif. Ixtiyoriy i va j elementi uchun, $t_{ij} = 0$ bo'lgan sinf *siklik sinf* deb ataladi.

7-ta'rif. Agar Markov zanjiri faqat bitta siklik sinfdan iborat bo'lsa, u *regulyar,* aks holda *siklik* deb ataladi.

Bunda quyidagi teorema o'rinli.

4-teorema. Zanjir regulyar bo'lishligi uchun, biror n da P^n ning barcha elementlari musbat bo'lishligi kerak, ya'ni bunda ixtiyoriy holatdan boshqa bir ixtiyoriy holatga n qadam davomida o'tish mumkin.

8-ta'rif. $s_1, s_2, ...$ sonli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $t_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} s_i$ ketma-ketlik t soniga yaqinlashsa, u holda yuqoridagi ketma-ketlik t ga Chezaro ma'nosida yaqinlashadi deyiladi.

9-ta'rif. $s_1, s_2, ...$ sonli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $u_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} k^{(n-i)}(1-k)^i s_i$, $(0 < k < 1)$ ketma-ketlik t soniga yaqinlashsin. U holda yuqoridagi ketma-ketlik t ga Eyler ma'nosida yaqinlashadi deyiladi.

10-ta'rif. $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j > 0$, $j = 1, 2, ..., N$ dan hosil qilingan $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$ taqsimot *ergodik(statsionar) taqsimot* deb ataladi.

Faqat bitta ergodik sinfdan iborat bo'lgan markov zanjiri *ergodik markov zanjiri* deb ataladi.

5-teorema. Ixtiyoriy ergodik zanjir uchun, darajali P^n qator Eyler ma'nosida A limit jadvalga yaqinlashadi. Bu limit jadvalning ko'rinishi quyidagicha $A = \xi p$ bo'ladi. Bu yerda ξ – elementlari birdan iborat bo'lgan vektor ustun, p – musbat ehtimol vektori.

Isbot. Siklik zanjirda bir sikldan boshqasiga o'tish n ning ayrim qiymatlarida amalga oshiriladi va bu o'tishlar davriy qaytarib turiladi. Shu sababli o'tish jadvali P ning hech bir darajasi musbat bo'lmaydi va turli darajalari turli joylarda nol elementga ega bo'ladi. Darajaning ortib borishi bilan bu nol elementlarning joylashuvi davriy qaytarilib turadi. Demak, P^n ketma-ketlik oddiy ma'noda yaqinlashmaydi. Ko'rsatamizki, ushbu ketma-ketlik Eyler ma'nosida yaqinlashadi. $0 < k < 1$ berilgan son bo'lsin, quyidagi $kI + (1-k)P$ jadvalni qaraylik. Ushbu jadval o'tuvchi jadvaldir. Bunda P jadvalning musbat elementlar joylashgan joyda $kI + (1-k)P$ jadvalning ham musbat elementlar joylashgan, demak, u ham ergodik zanjirni ifodalaydi. Shu bilan birga uning diagonal elementlari ham musbatdir. Demak, har bir holatga bir qadamdan so'ng qaytib kelish mumkin ekan, bu degani $d = 1$. Natijada yangi zanjirning regulyar ekanligi kelib chiqadi.

Regulyar zanjirning ergodik teoremasidan kelib chiqadiki, $(kI + (1-k)P)^n$ ketma-ketlik $A = \xi p$ jadvalga yaqinlashadi, bu yerda $p-$ musbat ehtimollik vektori. Natijada quyidagilar hosil bo'ldi:

$$A = \lim_{n\to\infty} (kI + (1-k)P)^n$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} k^{(n-i)}(1-k)^i P^i.$$

Oxirgi tenglikdan ko'rinib turibdiki, P^n ketma-ketlik har bir k da Eyler ma'nosida A ga yaqinlashadi. Teorema isbot bo'ldi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

6-teorema. Agar P ergodik o'tish jadvali bo'lib A va P lar 5-teoremadan olingan bo'lsin, u holda:

a) ixtiyoriy ehtimollik vektori π uchun, πP^n ketma-ketlik Eyler ma'nosida p ga yaqinlashuvchi;

b) p vektor P jadvalning yagona qo'zg'almas vektori bo'ladi;

c) $PA = AP = A$.

Eslatib o'tamiz $\{X_n\}_{n\geq 0}$ diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi:

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} : X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\} =$$
$$= P\{X_{n+1} = i_{n+1}; X_n = i_n\}$$

shartni qanoatlantirsa, u *sodda Markov zanjiri* deb ataladi. Demak, sodda Markov zanjirida keyingi o'tish ehtimoli faqat hozirgi holatga bog'liq bo'lib, avvalgilariga bog'liq emas ekan (bog'liq bo'lsa *yuqori tartibli Markov zanjiri* deb ataladi).

$\{X_n\}_{n\geq 0}$ tasodifiy miqdorlarning qiymatlar sohasi *holatlar fazosi* deb ataladi.

$$P_{ij}(n) = P\{X_{n+1} = j : X_n = i\}$$

tengliklar bilan elementlari aniqlangan P_n jadval n qadamda *o'tish ehtimoli jadvali* deb ataladi. Elementlari $p_i = P\{X_0 = i\}$ bilan aniqlangan $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$ vektor Markov zanjirining *boshlang'ich taqsimoti* deyiladi.

Markov zanjiri *bir jinsli* deyiladi, agar o'tish jadvallari qadam soniga bog'liq bo'lmasa, ya'ni ixtiyoriy n da

$$P_{ij}(n) = P_{ij}$$

aks holda *bir jinsli emas* deyiladi.

Bundan keyin bir jinsli Markov zanjirlari ko'riladi.

Shartli ehtimollik xossasiga asosan:

$$P\{X_n = i_n : X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\} = p_{i_{n-1}i_n}p_{i_{n-2}i_{n-1}}...p_{i_0i_1}p_{i_0}$$

bundan *Kolmogorov – Chepmen tenglamasi* kelib chiqadi:

$$P\{X_n = i_n : X_0 = i_0\} = (P^n)_{i_0i_n},$$

demak, bir jinsli Markov zanjirida n qadamdagi o'tish ehtimoli jadvali bir qadamda o'tish ehtimoli jadvalining $n-$ darajasiga teng ekan. Bundan quyidagi hosil bo'ladi:

$$P\{X_n = i_n\} = ((P^T)^n p)_{i_n}.$$

Yuqorida diskret Markov zanjiri uchun, kiritilgan tushunchalarni uzluksiz bo'lgan Markov zanjirlari uchun, ham aytish mumkin.

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi:

$$P\{X_{t+h} = x_{t+h} : X_s = x_s, 0 < s \leq t\} =$$

$$P\{X_{t+h} = x_{t+h} : X_t = x_t\}$$

shartni qanoatlantirsa, *uzluksiz vaqtli Markov zanjiri* deb ataladi. Agar uzluksiz vaqtli Markov zanjiri uchun:

$$P\{X_{t+h} = x_{t+h} : X_t = x_t\} = P\{X_h = x_h : X_0 = x_0\}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u *bir jinsli Markov zanjiri* deb ataladi.

Diskret Markov zanjiriga o'xshash uzluksiz holda ham bir jinsli Markov zanjirining chekli taqsimoti boshlang'ich taqsimot

$$p = (p_1, p_2, ...)^T,\ p_i = P\{X_0 = i\},\ i = 1, 2, ...$$

va o'tish jadvali

$$P(h) = (P_{ij}(h)) = P\{X_h = j : X_0 = i\}$$

bilan to'la aniqlangan.

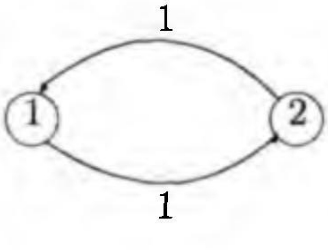
O'tish jadvali quyidagi *Kolmogorov – Chepmen* tenglamasini qanoatlantiradi:

$$P(t+s) = P(t)P(s)$$

yoki

$$P_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(s).$$

Misol. Eng sodda siklik zanjir quyidagi ko'rinishga ega:



Uning o'tish jadvali

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi, statsionar taqsimoti esa $p = (0,5; 0,5)$ bo'ladi.

AMALIY MASHG’ULOTLAR

1-amaliy mashg’ulot. Zahirani boshqarish masalasi. Kuchlanishni taqsimlash modeli

Reja:

1. Zahira darhol to’ldiriladigan deterministik model.
2. Zahira vaqt bo’yicha tekis to’ldiriladigan deterministik model.
3. Kuchlanishni taqsimlash modeli.
4. Ikki chegarali kuchlanishni taqsimlash modeli.

1. Zahira darhol to’ldiriladigan deterministik model

Zahiralarni boshqarishning eng sodda modelini qaraymiz. Zahiraga bo’lgan talab vaqt bo’yicha doimiy, uni to’ldirish darhol amalga oshadi va tanqislik yo’q deb hisoblaymiz. Faraz qilaylik, zahirani sarflash intensivligi (vaqt birligida zahiraga bo’lgan talab) μ va buyurtma o’lchami q bo’lsin. Buyurtma qilingan resurs partiyasi kelib tushgan paytda zahira darajasi eng yuqori bo’ladi. $\tau = q/\mu$ vaqt o’tgandan so’ng esa zahira darajasi nolgacha kamayadi. Shu paytda buyurtmaning yangi partiyasi kelib tushadi. Har bir τ vaqt intervalida zahiraning o’rtacha darajasi $q/2$ bo’ladi. Buyurtma o’lchami q qanchalik kichik bo’lsa, buyurtmalarni shunchalik tez tashkil etish lozim bo’ladi. Ammo, bunda zahiraning o’rtacha darajasi kamayadi. Ikkinchi tomondan, agar buyurtma o’lchami kattalashsa, buyurtmalar tashkil etish siyraklashadi va zahiraning o’rtacha darajasi oshadi.

Faraz qilaylik C_1 – buyurtmani bir marta tashkil etish xarajati, C_2 – bir birlik resursni birlik vaqt davomida saqlash xarajati bo’lsin. Agar qaralayotgan davrda jami n marta buyurtma berilgan bo’lsa, umumiy xarajat $C = \left(C_1 + C_2 \frac{q}{2}\frac{q}{\mu}\right)n$ bo’ladi. Bu ifodaning chap va o’ng taraflarini $\frac{q}{\mu}n$ ga bo’lib va $H(q) = \frac{\mu C}{qn}$ deb belgilab, vaqt birligidagi bitta buyurtma umumiy xarajatini topamiz:

$$H(q) = C_2 \frac{q}{2} + C_1 \frac{\mu}{q}.$$

Buyurtmaning optimal o'lchami q^*ni topish uchun $H(q)$ning q bo'yicha hosilasini nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{dH}{dq} = \frac{C_2}{2} - \frac{C_1\mu}{q^2} = 0.$$

Bu yerdan

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_1\mu}{C_2}}. \qquad (1)$$

Bu formula buyurtmaning optimal o'lchamini topish yoki **Uilson formulasi** deyiladi.

Zahirani yangilash optimal vaqt intervali τ^* quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$\tau^* = \frac{q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2C_1}{C_2\mu}}. \qquad (2)$$

Endi vaqt birligidagi bitta buyurtma uchun optimal xarajatlar miqdori H^*ni aniqlash formulasini keltiramiz:

$$H^* = \sqrt{2C_1C_2\mu}. \qquad (3)$$

Faraz qilaylik, qaralayotgan modelda buyurtmani bajarish muddati $L > 0$ bo'lsin. Bu holda zahirani yangilash optimal vaqt intervali τ^*dagi

$$t^* = \tau^* - L, \qquad (4)$$

nuqta buyurtmani yangilash nuqtasini bildiradi. Agar t^* buyurtmani yangilash nuqtasi bo'lsa, zahira darajasi $p^* = t^*\mu = q^* - L\mu^*$ bo'lganda zahirani to'ldirishga yangi buyurtma beriladi.

1- misol. Biror mahsulotga bo'lgan kundalik talab 160 birlikni tashkil etsin. Mahsulot zahirasini hosil qilish uchun har bir buyurtma xarajati 40000 pul birligini, bir dona mahsulotni saqlash kunlik xarajati 20 pul birligini tashkil etadi. Agar buyurtmani bajarish muddati 2 kun bo'lsa, buyurtmaning optimal o'lchamini, zahirani yangilash optimal vaqtini, optimal xarajat miqdori va buyurtmani yangilash nuqtasini aniqlash kerak.

Bu misol uchun $C_1 = 40000$ pul birligi, $C_2 = 20$ pul birligi, $\mu = 160$ birlik, $L = 2$ kun bo'lgani uchun (1)–(4) formulalarga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_1\mu}{C_2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 40000\cdot 160}{20}} = 800 \text{ (birlik mahsulot)},$$

$$\tau^* = \frac{q^*}{\mu} = \frac{800}{160} = 5 \text{ (kun)}, \ t^* = \tau^* - L = 5 - 2 = 3 \text{ (kun)},$$

$$H^* = \sqrt{2C_1C_2\mu} \approx 11200 \text{ (pul birligi)},$$

$$p^* = t^*\mu = 3\cdot 160 = 480 \text{ (birlik mahsulot)}.$$

Demak, har 5 kunda 800 birlik mahsulotga buyurtma berilishi kerak. Har bir buyurtma mahsulot zahirasi 480 birlikni tashkil etganda berilishi lozim. Bunda kundalik minimal xarajat taqriban 11200 pul birligini tashkil etadi.

2. Zahira vaqt bo'yicha tekis to'ldiriladigan deterministik model

Faraz qilaylik, zahira tashkil etish uchun har safar q miqdordagi resursga buyurtma beriladi va buyurtma vaqt bo'yicha λ intensivlikda bajariladi. Resursning sarflanish intensivligi (vaqt birligidagi iste'mol) μ, $\mu < \lambda$ bo'lsin. Demak, zahiraning to'ldirilishi va sarflanishi vaqt bo'yicha tekis amalga oshiriladi.

τ_1 deb q miqdordagi resurs to'liq kelib tushishi uchun zarur vaqtni belgilaymiz (bu vaqt davomida resurs sarflanishi to'xtamaydi). τ_2 esa q miqdordagi resurs to'liq kelib tushgandan so'ng uning faqat sarflanish vaqti bo'lsin. U holda $\tau = \tau_1 + \tau_2$ vaqtda zahiraning q miqdori to'liq iste'mol qilinadi (zahira miqdori nolgacha kamayadi) va yangi buyurtma bo'yicha resurs keltirish boshlanadi.

τ_1 vaqt davomida zahira miqdori $\lambda - \mu$ intensivlik bilan o'sadi va uning miqdori $d = (\lambda - \mu)\tau_1$ bo'ladi. Shu zahira τ_2 vaqt davomida faqat sarflangani uchun

$d = \mu\tau_2$ bo’ladi. Demak, $(\lambda - \mu)\tau_1 = \mu\tau_2$. Endi $\tau_1 = \dfrac{q}{\lambda}$ bo’lgani uchun oxirgi tenglikdan $\tau_2 = \dfrac{(\lambda - \mu)q}{\lambda\mu}$ ekanligini topamiz. Shunday qilib

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{q}{\lambda} + \frac{(\lambda - \mu)q}{\lambda\mu} = \frac{q}{\mu}.$$

τ_1 vaqtda yiqilgan $d = (\lambda - \mu)\tau_1 = (\lambda - \mu)\dfrac{q}{\lambda}$ resurs τ_2 vaqt davomida sarflangani uchun τ vaqt intervalidagi zahiraning o’rtacha miqdori $\bar{d} = \dfrac{(\lambda - \mu)q}{2\lambda}$ bo’ladi.

Avvalgidek, C_1 – har bir buyurtmani tashkil etish xarajati, C_2 esa resurs birligining birlik vaqt davomida saqlash xarajati bo’lsa hamda tanqislik yo’q deb hisoblansa, umumiy xarajat quyidagicha bo’ladi:

$$C = C_1 + C_2\bar{d}\tau = C_1 + C_2\frac{(\lambda - \mu)q^2}{2\lambda\mu}. \tag{5}$$

$H(q) = \dfrac{\mu C}{q}$ deb belgilab, (5)dan

$$H(q) = \frac{C_1\mu}{q} + C_2\frac{(\lambda - \mu)q}{2\lambda} \tag{6}$$

ifodani olamiz. (6) bilan aniqlangan $H(q)$ ning hosilasini nolga tenglashtirib, buyurtmaning optimal o’lchami q^* ni topamiz:

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_1\mu}{C_2\left(1 - \dfrac{\mu}{\lambda}\right)}}. \tag{7}$$

Zahirani yangilash uchun zarur vaqt intervali τ^* quyidagicha aniqlanadi:

$$\tau^* = \frac{q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2C_1}{C_2\mu\left(1 - \dfrac{\mu}{\lambda}\right)}}. \tag{8}$$

Vaqt birligi ichida optimal xarajatlar H^* esa

$$H^* = \sqrt{2C_1C_2\mu\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)} \tag{9}$$

tenglikdan topiladi.

2- misol. Tovar omborga kuniga λ=12 birlikda q miqdordagi buyurtma bo'yicha keltiriladi. Iste'mol uchun kuniga $\mu = 9$ birlik tovar sarflanadi. Har bir buyurtmani tashkil qilish uchun $C_1 = 20000$ pul birligi, 1 birlik tovarni 1 kun saqlash uchun $C_2 = 225$ pul birligi xarajat qilinadi.

(7), (8) va (9) formulalardan foydalanib,

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_1\mu}{C_2\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20000\cdot 9}{225\cdot\left(1-\frac{9}{12}\right)}} = 80 \text{ (birlik tovar)},$$

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda} = \frac{80}{12} \approx 6{,}67 \text{ (kun)}, \quad \tau^* = \frac{q^*}{\mu} = \frac{80}{9} \approx 8{,}89 \text{ (kun)},$$

$$H^* = \sqrt{2C_1C_2\mu\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)} = \sqrt{2\cdot 20000\cdot 225\cdot 9\cdot\left(1-\frac{9}{12}\right)} = 4500 \quad \text{(pul birligi)}$$

ekanligini aniqlaymiz.

Demak, tovar uchun buyurtma optimal o'lchami 80 birlik bo'lib, u $\tau_1^* \approx 6{,}67$ kunda keltiriladi va $\tau^* \approx 8{,}89$ kunda yangilanadi. Bunda har bir partiya tovar uchun minimal xarajat $H^* = 4500$ pul birligini tashkil etadi.

2-§. Kuchlanishni taqsimlash modeli

Kuchlanishni taqsimlash modelini o'zida aks ettirgan quyidagi e'tiborli misolni ko'rib chiqamiz. Korxona zaxiradagi (to'planib qolgan) N dona mahsulotini s ta savdo shaxobchasiga taqsimlash kerak bo'lsin. Agar j – savdo shaxobchasiga y_j dona mahsulot jo'natilsa, bundan keladigan foyda $R_j(y_j)$ so'mni tashkil etsin. Yana shu narsa ma'lumki, hamma mahsulotni bitta savdo shaxobchasiga jo'natish maqsadga muvofiq emas. Bu masalaning modelini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\sum_{j=1}^{s} R_j(y_j) \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{s} y_j = N,$$
$$y_j = 0, 1, \ldots - \text{ixtiyoriy } j \text{ da.}$$

Dinamik dasturlash usulini qo'llash uchun, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$g_j(n) - n$ ta mahsulotni $1, 2, \ldots, j$ shaxobchalarga optimal qilib tarqatganda kelgan foydani bildirsin.

$y_j(n)$ – $g_j(n)$ foyda olish uchun, $j-$ savdo shaxobchaga jo'natilgan mahsulot miqdori bo'lsin. U holda dinamik dasturlashning rekurrent formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$g_j(n) = \max_{y_j}[R_j(y_j) + g_{j-1}(n - y_j)],\ j = 1, \ldots, s,$$
$$g_0(n) = 0;\ n = 0, 1, \ldots, N,\ \ y_j \le n.$$

Misollarda hisoblash jarayoni quyidagicha olib boriladi: avval $g_1(0), g_1(1), \ldots, g_1(N)$ lar hisoblanadi, keyin $g_2(0), g_2(1), \ldots, g_2(N), \ldots$ oxirida $g_s(N)$, so'ng boshidan oxiriga qarab hisoblash olib boriladi va y_j larning qiymatlari aniqlanadi.

Bu ko'rilgan model kuchlanishni taqsimlash modelining xususiy holi bo'lib, umumiysi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^{s} R_j(y_j) \to \max$$
$$\sum_{j=1}^{s} H_j(y_j) = N,\ y_j = 0, 1, \ldots .$$

Bu yerda faraz qilinadiki, $H_j(y_j)$ lar kamaymaydigan funksiyalar va $H_j(0) = 0$. Rekurrent formula quyidagicha bo'ladi:

$$g_j(n) = \max_{y_j}[R_j(y_j) + g_{j-1}(n - H_j(y_j))],\ j = 1, \ldots, s,\ \ g_0(n) = 0;$$

$$n = 0, 1, ..., N, \; y_j : H_j(y_j) \leq n, \;\; y_j - butun\, son.$$

Ikki chegarali kuchlanishni taqsimlash modeli

Avtomobil ishlab chiqaruvchi firma yangi tipdagi mahsulotini reklama qilish maqsadida N so‘m pul ajratgan bo‘lsin. Reklama qilish mintaqasida s ta radiostansiya joylashgan bo‘lib, j – radiostansiyaga y_j so‘m jo‘natilgan bo‘lsa, undan keladigan sof foyda $R_j(y_j)$ so‘mni tashkil qiladi. Shu bilan birga umumiy reklamalar soni M dan oshib ketmasligi kerak. Agar j – radiostansiyaga y_j so‘m jo‘natilgan bo‘lsa, reklamalar soni $K_j(y_j)$ ni tashkil qiladi. Demak, modelning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\sum_{j=1}^{s} R_j(y_j) \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{s} y_j \leq N,$$
$$\sum_{j=1}^{s} K_j(y_j) \leq M,$$

bu yerda faraz qilinadiki, N, M va $K_j(y_j)$ lar manfiy bo‘lmagan butun sonlarni qabul qiladi. U holda mos rekurrent formula quyidagicha ko‘rinishga keladi:

$$g_j(n, m) = \max_{y_j}[R_j(y_j) + g_{j-1}(n - y_j; m - K_j(y_j))], \; j = 1, ..., s,$$
$$g_0(0, m) = g_0(n, 0) = 0, \; n = 0, 1, ..., N, \; m = 0, 1, ..., M, \; y_j \leq n,$$
$$K_j(y_j) \leq m.$$

Ulkan qurilish firmasi M miqdordagi kapitalini s ta qurilish obyektlariga sarflamoqchi. j – qurilish obyektiga K_j so‘m kerak bo‘lib, undan keyinchalik keladigan foyda R_j so‘mni tashkil qiladi. Har bir qurilish obyekti muhim hisoblanib, uni qurish yoki qurmaslikni hal etish kerak bo‘ladi. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$y_j = \begin{cases} 0, \text{ j - obyekt qurilmasin} \\ 1, \text{ j - obyekt qurilsin.} \end{cases}$$

U holda qo'yilgan masalaning matematik modeli quyidagicha yoziladi:

$$\sum_{j=1}^{s} R_j y_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{s} y_j \le N,$$
$$\sum_{j=1}^{s} K_j y_j \le M.$$

Dinamik dasturlashning rekurrent formulasi esa quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$g_j(n,m) = \max_{y_j}[R_j y_j + g_{j-1}(n - y_j; m - K_j y_j)]$$

bu yerda $g_j(n,m) - 1, 2, ..., j$ variantlardan n tasi tanlab olingandagi m so'mni sarflashdan kelgan maksimal foyda.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Zahira darhol to'ldiriladigan deterministik statik modelda umumiy xarajatlar buyurtma qilingan mahsulotni sotib olish, buyurtmani tashkil etish va zahirani saqlash xarajatlari yig'indisidan iborat bo'lsin hamda tanqislikka yo'l qo'yilmasin. Sotib olinadigan mahsulot birligi bahosi B zahiraning q miqdoridan boqliq bo'lib,

$$B(q) = \begin{cases} b_1, \ q < z \text{ bo'lganda,} \\ b_2, \ q \ge z \text{ bo'lganda,} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lsin, bu yerda $b_1 > b_2$, z – mahsulot bahosi uchun chegirmani ta'minlovchi buyurtmaning quyi chegarasi. Shu modelni tahlil etib buyurtmaning optimal o'lchamini topish imkoniyatini tekshiring.

2. Zahirani boshqarish deterministik modelida zahira darajasi davriy ravishda kuzatiladi va zahirani to'ldirish $i = 1,2,\ldots,N$ bosqichlarda amalga oshiriladi deb hisoblab, quyidagilarni faraz qilaylik. Modelda talab ma'lum va u bosqichdan bosqichga o'tganda o'zgarsin. Har bir bosqich boshida buyurtma darhol keltirilsin. Xarajatlar har bir bosqichda buyurtmani tashkil etish, saqlash va mahsulotni sotib olish xarajatlaridan iborat bo'lsin. Shu model uchun har bir bosqichda buyurtmaning optimal o'lchamini qanday topish mumkinligini tekshirib ko'ring.
3. Qarab chiqilgan bir bosqichli ehtimolli modelda talab diskret tasodifiy miqdor bo'lib, uning ehtimoli taqsimoti $\varphi(\xi)$ bo'lsin. Shu modelda umumiy xarajatlarni toping va uni minimallashtiruvchi buyurtma o'lchamini aniqlang.
4. Zahira darhol to'ldirilishi ta'minlanadigan deterministik statik modelda buyurtmani tashkil etish xarajati $C_1 = 10000$ pul birligi, birlik resursni vaqt birligida saqlash xarajati $C_2 = 50$` pul birligi, resursga kunlik talab $\mu = 30$ birlik bo'lsin. Buyurtmaning optimal o'lchamini va ketma-ket buyurtmalar orasidagi vaqt oraliqini aniqlang. Agar buyurtmani bajarish muddati $L = 14$ kun bo'lsa, buyurtmani yangilash nuqtasini topilsin.
5. Firma zaruriyati uchun mahsulot kuniga 50 donadan sarflanadi. Shu mahsulotga har bir buyurtmani tashkil qilish uchun 25000 pul birligi, bir dona mahsulotni bir hafta saqlash uchun esa 7000 pul birligi xarajat qilinadi. Tanqislikka yo'l qo'yilmaydi deb hisoblab, umumiy yillik xarajatlarni minimallashtiruvchi buyurtmalar sonini aniqlang.

Mavzuni mustahkamlash uchun tavsiya etiladigan adabiyotlar

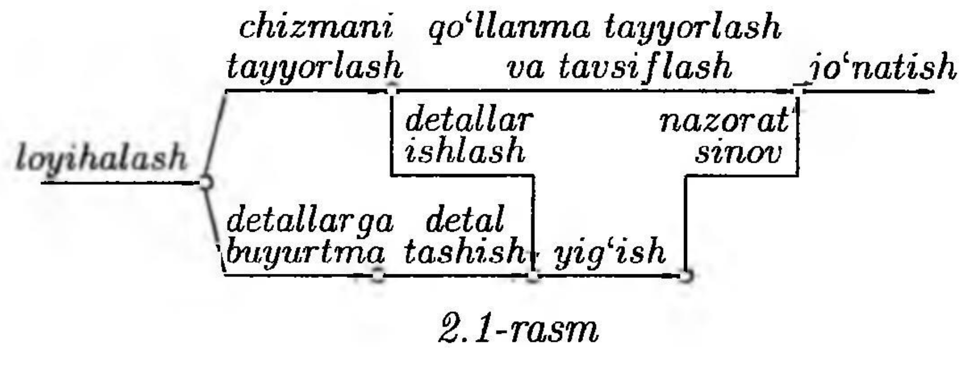
8. Вагнер Г. Основы исследований операции. Т. 1–3. М.: Мир. 1972-73.
9. Зайченко Ю. Б. Исследование операций. Киев. 1979.
10. Таха Х. Введение в исследование операций. Т. 1, 2. М.: Мир. 1981.

2-amaliy mashg’ulot. Kalendar grafikni tuzish va resurslarni taqsimlashning tarmoqli modeli

Reja

1. Dasturning tarmoq modeli.
2. Tarmoq modelini hisoblash.
3. Zahira vaqtlarini aniqlash.
4. Kalendar rejani tuzish va zahiralarni taqsimlash.
5. Dasturni amalga oshirish jarayonini boshqarish.

Bir-biri bilan bog‘langan ishlar tashkil etgan butun komplekslarni o‘z ichiga olgan yirik ishlanmalarni ratsional rejalashtirishda tarmoq usullari keng qo‘llaniladi. Masalan, qurilish obyektlarini barpo etish, yangi texnik sistemalarni va buyumlarni yaratish, yirik ta’mirlash va tiklash, yirik obyektlarni (samolyot, kemalar, kosmik kemalar) va boshqalarni tayyorlash va yig‘ish. Tarmoq usullari bajarilishi lozim bo‘lgan kompleks ishlarni yo‘naltirilgan graf yordamida yaqqol, aniq ko‘rinishda ifodalashga asoslangan. Bunda, grafning yoylari bajarilayotgan ishlarni, uchlari esa alohida ishlarning yakunlanishini ifodalaydigan hodisalarni tasvirlaydi.



2.1-rasm

2.1-rasmda biror jihozni yaratishdagi ishlarning tarmoq grafikasi keltirilgan. Tarmoq grafikasi bajarilishi lozim bo'lgan ishlarning ketma-ketligini aniqlab berish bilan birga mavjud mehnat va material zaxiralaridan ratsional foydalanish yo'llarini ham ko'rsatib berishga yordam beradi.

Biror loyihaning tarmoq grafikasini tuzish uchun, uni alohida ishlarga yoki jarayonlarga ajratish talab etiladi. Har bir ishning davomiyligi bor, shu sababli u boshlanish va tamom bo'lish vaqtiga ega. Bunda boshlanish va tamom bo'lish vaqt momentlari to'la aniqlangan bo'lishi lozim. Yana, bajarilishi kerak bo'lgan ishlarning tartibini va muhimlik darajalarini o'rnatish ham talab etiladi.

Natijaviy maqsadga erishish uchun, ma'lum tartibda bajarilishi lozim bo'lgan, bir-biri bilan bog'langan ishlar majmuyi *dasturni* tashkil qiladi. Ishlar mantiqiy ketma-ketlikka egaligi shuni bildiradiki, biror ishni bajarish uchun, avvalgilari, albatta bajarilgan bo'lishi kerak.

Shu yerda ta'kidlab o'tamizki, tarmoq usullari yaratilishidan avval dasturning kalendar rejalari (ya'ni vaqt bo'yicha rejalashtirish) katta bo'lmagan hajmda olib borilgan bo'lishi lozim. Bunday rejalashtirishning ma'lum vositalaridan eng mashhuri Gantning chiziqli grafigidir (2.1-jadval), unda har bir ishning boshlanish va tamom bo'lish momentlari gorizantal vaqt o'qida ko'rsatib berilgan. Uning kamchiligi turli ishlarning bir-biri bilan bog'langanlik darajalarini, demak, dasturning bajarilish sur'atini aniqlashtirish imkonini bermaydi.

Zamonaviy dasturlar murakkabligining ortib borishi, ularning bajarish jarayonini mukammallashtirishda aniqroq va samaradorliroq rejalashtirish usullarini yaratish zarur ekanligini talab qiladi. Bunda samaradorlik deyilganda, butun dasturni, mavjud zaxiralarning iqtisodiy omillarini hisobga olgan holda, bajarish davomiyligini minimallashtirish nazarda tutiladi. Natijada tarkibiy va kalendar rejalashtirishning analitik usullari yaratildi. Ulardan biri *kritik yo'l usuli* deb ataladi va u asosan vaqt omiliga diqqatni qaratadi. Bunda ishlarning davomiyligini determinik yoki tasodifiy miqdorlar sifatida ham qarash mumkin.

Dasturni tarmoqli rejalashtirish va boshqarish uchta bosqichni o'z ichiga oladi: *tarkibiy rejalashtirish, kalendar rejalashtirish va tezkor boshqarish.* Dasturni aniq ishlarga ajratish bilan tarkibiy rejalashtirish bosqichi boshlanadi. Shundan so'ng ishlarning davomiyligi aniqlanib, tarmoq modeli (tarmoq grafigi, yo'naltirilgan diagramma) tuziladi, bunda har bir yoy (yo'nalish) ishni aks ettiradi. Biz determinik bo'lgan holatlarni o'rganamiz:

2.1-jadval

Bosqichlar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Maqsadni aniqlash												
Loyiha rejasini tuzish												
Muammoning tavsifi												
Modelni qurish												
Hisoblash usulini ishlash												
Dasturning texnik topshiriqni ishlash												
Dastur tuzish va sozlash												
Ma'lumotlar to'plash												
Modelni tekshirish												
Natijani amaliyotga tatbiq etish												

Tarmoq modeli birgalikda dasturni tashkil etgan ishlarning bog'liqligini ifodalaydigan grafik ko'rinishdir. Tarmoq modelini qurish, dasturni amaliyotga qo'llashdan avval, barcha ishlarni tahlil qilish va qo'shimcha o'zgarishlarni kiritish imkonini beradi.

Eng muhimi, tarmoq modelidan foydalanish dasturning kalendar rejasini ishlab chiqishda katta ahamiyat kasb etadi.

Ikkinchi bosqich bo'lgan kalendar rejaning yakuniy maqsadi har bir ishning boshlanish va tamom bo'lish vaqtlarini aniqlash, hamda dasturni tashkil etgan ishlarning o'zaro bog'liqlarini belgilashlardan iborat kalendar grafikni tuzishdir. Bundan tashqari, kalendar grafik muhim hisoblangan kritik yo'lni (vaqt nuqtayi nazardan) aniqlash imkonini berishi va bu bilan dasturni belgilangan direktiv muddatda tamomlanishni ta'minlashi lozim. Kalendar reja, kritik yo'lga kirmagan ishlarning zaxira vaqtlarini aniqlash va ulardan kechikishda va zaxiralardan oqilona foydalanishga imkon yaratib beradi.

Yakuniy bosqich dasturni amaliyotga qo'llash jarayonini operativ suratda boshqarishdan iboratdir. Bu bosqich tarmoq modeli va kalendar grafikasidan foydalangan holda dastur bajarilishi haqida davriy hisobotlar berishni o'z ichiga oladi. Shuni alohida ta'kidlash lozimki, tarmoq modeli tahlil qilish va zarur hollarda o'zgartirishlarga, tuzatishlarga moyil bo'ladi.

Dasturning tarmoq tavsifi (tarmoq modeli)

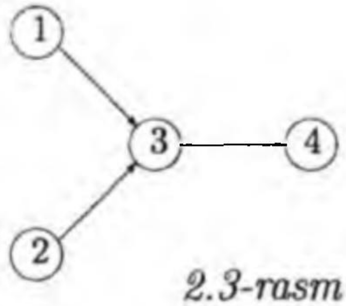
Tarmoq modeli ishlarning o'zaro bog'lanishlarini va ularning bajarilish ketma-ketligini (tartiblanish yoki avval-keyin munosabatlarini) aniqlab beradi. Ish yo'naltirilgan yoy (strelka) orqali ifodalanib, uning yo'nalishi dasturning vaqt bo'yicha bajarilishiga mos keladi. Ishlarning o'zaro munosabatlari hodisalar orqali beriladi. *Hodisa,* bu bir ishning tamom bo'lishi, ikkinchi ishning boshlanishini bildiradi. qilib, ishning boshlanish va tamom bo'lish vaqtlari juft hodisa bilan tavsiflanib, ular mos ravishda *boshlang'ich* va *oxirgi hodisalar* deb ataladi. Biror hodisadan chiqib keluvchi ishning boshlanishi uchun, bu hodisaga kiruvchi barcha ishlar bajarilgan bo'lishi kerak. Demak, har bir ish yo'naltirilgan grafning yoyi orqali, hodisa esa uch (tugun nuqtasi) orqali ifodalanadi. Bunda, yoy uzunligi ishning davomiyligiga proporsional, kesma ko'rinishda bo'lishi shart emas. Quyidagi 2.2-rasmda boshlang'ich i hodisa va oxirgi j hodisalarning ifodalaydigan (i, j) ishning graf ifodasi keltirilgan. 2.3-rasmdan ko'rinib turibdiki, (3,4) ishni boshlash uchun, albatta (1,3) va (2,3) ishlar bajarilgan bo'lishi shart.

1-qoida. *Har bir ish faqat bitta yoy (strelka) bilan ifodalanadi.* Hech bir ish modelda ikki marta ishtirok etmaydi. Biror ish ikkiga ajratilsa, har biri alohida yoy bilan ifodalanishi kerak.

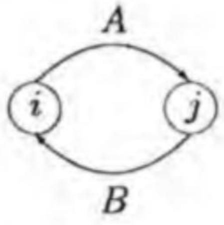
2-qoida. *Hech bir juft ish bir vaqtning o'zida bir xil boshlang'ich, bir xil oxirgi hodisa orqali ifodalanmasligi lozim.* Bunday holat ikki yoki undan ko'p ishlarni bir vaqtda bajarish mumkinligidan kelib chiqadi (2.4-rasm). Bunday holat bo'lmasligi uchun, A ishning oxiri (boshlanish) hodisasi bilan B ishning oxiri (boshlanish) hodisalari fiktiv (yolg'ondakam) ish yordamida birlashtiriladi. 2.5-rasmda fiktiv (D) ishni kiritish variantlari keltirilgan.

Shundan so'ng A va B juft ishlarning yoki boshlang'ich yoki oxirgi hodisalari turlicha bo'ladi. Bunda, shunga e'tibor berish kerakki, fiktiv ish na vaqt, na zaxira talab qiladi. Fiktiv ishni kiritish mantiqiy ketma-ketlikni aks ettirishda yordam beradi. Faraz qilaylik, biror dasturda A va B ishlar C dan oldin, E ish esa faqat B dan keyin bajarilsin. 2.6-rasmda A, B va C ishlarning tartiblanishi to'g'ri bo'lgani bilan, E ishning A va B ishlardan keyin bajarilishi kelib chiqadi. Bu holatning to'g'ri berilishi 2.7-rasmda keltirilgan.

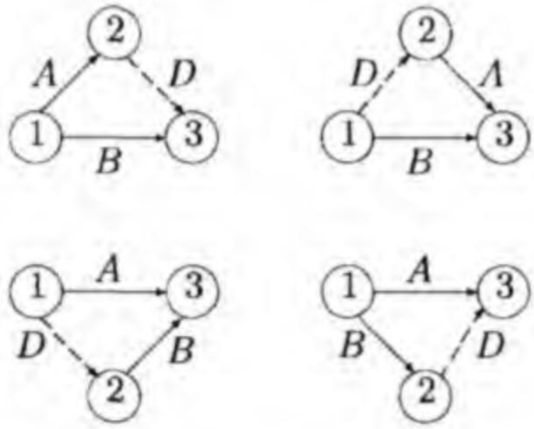
2.2-rasm



2.3-rasm

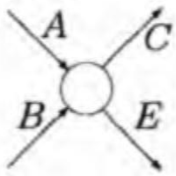


2.4-rasm

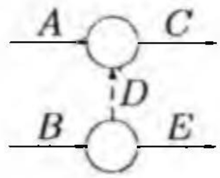


2.5-rasm

Bunda D fiktiv ish bajarilishi uchun, vaqt ham, zaxira ham talab etilmaydi, shu sababli bu holat haqiqiy tartiblashni beradi.



2.6-rasm



2.7-rasm

3-qoida. *Tarmoq modelini to'g'ri tartiblash uchun, yangi ishni kiritishdan avval quyidagi savollarga javob berilgan bo'lishi zarur.*

a) Bu ishni bajarish uchun, avval qaysi ishlar tugallanishi lozim?

b) Bu ish bajarilgandan so'ng qaysi ishlarni boshlash mumkin?

c) Bu ish bilan qanday ishlar parallel olib boriladi?

Ushbu qoidalar yordamida tarmoq grafidagi ishlarning tartiblanishi nazorat qilib boriladi.

1-misol. Quyidagi $A, B, C, D, E, F, G, X, I, J, K, L$ ishlarning berilgan tartiblanishi asosida dasturning grafi tuzilsin.

1. A, B va C – boshlang'ich ishlar bo'lib, ular bir paytda boshlanishi mumkin.

2. A va B ishlar D ishdan avval bajariladi.

3. B ish E, F va X ishlardan avval bajariladi.

4. F va C ishlar G ishdan avval bajariladi.

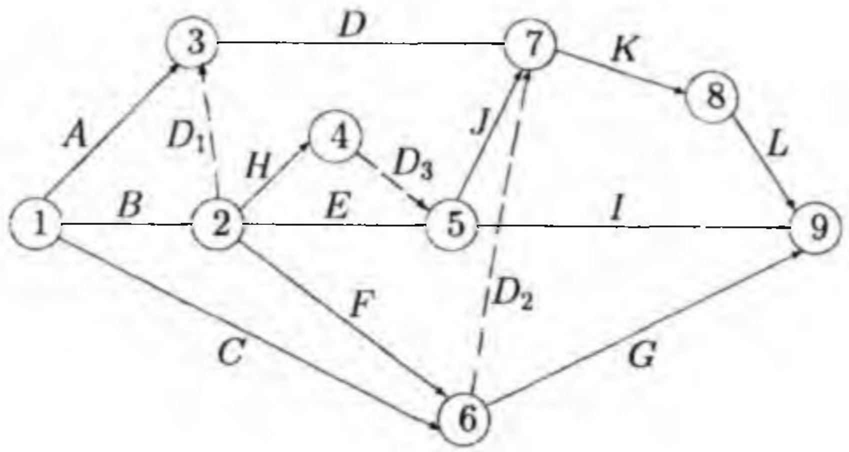
5. E va X ishlar I va J ishlardan avval bajariladi.

6. C, D, F va J ishlar K ishdan avval bajariladi.

7. K ish L ishdan avval bajariladi.

8. I, G va L – dasturning yakunlaydigan ishlari.

Bu ishlarni bajarish dasturini aniqlab beruvchi tarmoq grafi quyidagicha bo'lib, unda ishlarning ketma-ketligini to'g'ri akslantirish uchun, D_1, D_2 va D_3 fiktiv ishlar kiritilgan (2.8-rasm).



2.8-rasm

1-mashq. a) Quyidagi o'zgarishlar tarmoq grafidagi ishlar ketma-ketligiga qanday ta'sir qiladi?

1) (3, 5) fiktiv [*Javob.* A ish I va J ishlardan avval bajariladi].

2) (3, 4) fiktiv [*Javob.* A ish I va J ishlardan avval bajariladi].

3) (5, 6) fiktiv [*Javob.* E va X ishlar G ishdan avval bajariladi].

4) (3, 6) fiktiv ish [*Javob.* A ish G ishdan avval bajariladi].

b) Quyidagi holatlar ro'y berishi uchun, tarmoq grafida qanday o'zgarishlar qilish kerak?

1) A va B ishlar G ishdan avval bajariladi [*Javob.* (3, 6) fiktiv ish kiritiladi].

2) D ish G ishdan avval bajariladi [*Javob.* D ishning oxiri bilan 7-hodisa fiktiv ish bilan birlashtiriladi, keyin D ishning oxiri bilan 6-hodisa fiktiv ish bilan birlashtiriladi].

3) C ish D ishdan avval bajariladi [*Javob.* C ishning oxiri bilan 6-hodisa fiktiv ish bilan birlashtiriladi, keyin C ishning oxiri bilan 3-hodisa fiktiv ish bilan birlashtiriladi].

Tarmoq modelini hisoblash

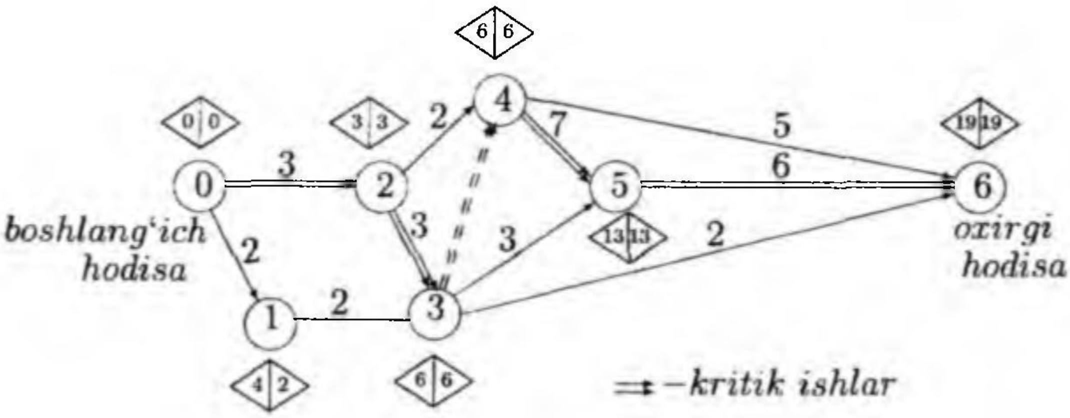
Tarmoq modeliga rejalashtirish va boshqarish usullarini qo'llash orqali dasturdagi har bir ishning boshlanish va tamom bo'lish vaqtlarini ko'rsatib beruvchi kalendar reja aniqlangan bo'lishi kerak. Tarmoq grafi qurish shu maqsadga erishishning birinchi qadami hisoblanadi. Turli ishlar o'rtasida o'zaro bog'liqlik borligi sababli, ularning boshlanishi va yakunlanishi vaqtlarini aniqlab berish uchun, maxsus hisoblash usuli kerak bo'ladi. Buni tarmoq grafikasida oddiy qoidalar orqali olib borish mumkin. Buning natijasida dasturning *kritik* va *kritik bo'lmagan* ishlari aniqlanadi. Agar ishning kechikib boshlanishi butun dasturning bajarilish muddatini oshishiga olib kelsa, bunday ish *kritik ish* deb ataladi. Kritik bo'lmagan ishlarning bajarilish vaqt oraliqlarini, butun dastur muddatiga ta'sir etmagan holda, kattalashtirish mumkin, ya'ni bunday ishlarni bajarish uchun, qo'shimcha – zaxira vaqt bo'ladi.

Biz kritik yo'lni aniqlash usulini ko'rib chiqamiz. Dasturning boshlang'ich va oxirgi hodisalarini birlashtiruvchi kritik ishlarning uzluksiz ketma-ketligi *kritik yo'l* deb ataladi. Kritik yo'lni aniqlashning bir usulini quyidagi sonli misolda keltiramiz.

Har bir ishning bajarilish vaqt oraliqlari mos yoylarning yuqori qismida berilgan.

Kritik yo'lni topish ikki bosqichdan iborat. Birinchi bosqich *to'g'ri o'tish* deb ataladi. Bunda hisoblash boshlang'ich hodisadan boshlanib tarmoq grafining oxirgi hodisasiga yetguncha davom ettiriladi. Har bir hodisa uchun, uning eng erta boshlanish vaqti hisoblanadi. Bu sonlar 2.9-rasmdagi mos qo'sh uchburchak belgilarining o'ng tarafiga yozib qo'yilgan. Ikkinchi bosqich *teskari o'tish* deb ataladi, bunda to'rning oxirgi hodisasidan boshlanib boshlang'ich hodisaga yetguncha hisoblash davom ettiriladi. Bunda har bir hodisa uchun, uning eng kech boshlanish vaqti hisoblanib, u qo'sh uchburchak belgilarining chap tarafiga yozib qo'yilgan.

Faraz qilaylik, $ES_i - i$ hodisadan chiquvchi barcha ishlarning eng erta boshlanish vaqti bo'lsin. Shu bilan birga ES_i $i-$ hodisaning eng erta ro'y berish vaqtini aniqlaydi. To'g'ri o'tishni ko'rib chiqamiz:



2.9-rasm

Agar $i = 0$, ya'ni boshlang'ich hodisaning raqami nolga teng bo'lsa, unda $ES_0 = 0$ bo'ladi. D_{ij} bilan (i, j) ishning davomiyligi belgilansa, u holda to'g'ri o'tishda hisoblash quyidagi formula orqali amalga oshiriladi:

$$ES_j = \max_i \{ES_i + D_{ij}\}$$

barcha (i, j) ishlar bo'yicha, bunda $ES_0 = 0$. kilib j hodisaning ES_j sini hisoblash uchun, j hodisaga kiruvchi barcha ishlarning boshlang'ich hodisalari uchun, mos ES_i larni aniqlash talab etiladi.

Ushbu to'g'ri o'tishni 2.9-rasm tarmoq grafiga qo'llash quyidagi hisoblashlarga olib keladi. $ES_0 = 0$ bo‘lganligi sababli, boshlang‘ich 0 hodisaning ustidagi qo‘sh uchburchakning o‘ng tarafiga nol soni yozilgan. 1-hodisaga faqat bitta $(0,1)$ ish kelganligi va uning davomiyligi $D_{01} = 2$ bo‘lganligi sababli

$$ES_1 = ES_0 + D_{01} = 0 + 2 = 2$$

bo‘ladi. Bu son mos ravishda 1-hodisaning qo‘sh uchburchagini o‘ng tarafiga yozib qo‘yilgan. Xuddi mulohaza bilan 2-hodisa qaraladi [izoh: 3 hodisani qarab bo‘lmaydi, chunki ES_2 soni noma’lum. Demak,

$$ES_2 = ES_0 + D_{02} = 0 + 3 = 3.$$

Ushbu son 2-hodisaga mos qo‘sh uchburchakning o‘ng tarafiga yozib ko‘yilgan. Endi 3-hodisaga o‘tiladi. Ushbu hodisaga ikkita $(1,3)$ va $(2,3)$ ishlar kelganligi uchun:

$$ES_3 = \max_{i=1,2}\{ES_i + D_{i3}\} = \max\{2+2, 3+3\} = 6.$$

Bu natija 3-hodisaning mos qo‘sh uchburchagini chap tarafiga yozib qo‘yilgan.

Shunga o‘xshash amallar barcha j larda ES_j lar topilishga qadar davom ettiriladi. Natijada quyidagilarni hosil qilamiz:

$$ES_4 = \max_{i=2,3}\{ES_i + D_{i4}\} = \max\{3+2, 6+0\} = 6$$
$$ES_5 = \max_{i=3,4}\{ES_i + D_{i5}\} = \max\{6+3, 6+7\} = 13$$
$$ES_6 = \max_{i=3,4,5}\{ES_i + D_{i6}\} = \max\{6+2, 6+5, 13+6\} = 19.$$

Aniqlangan sonlar mos ravishda qo‘sh uchburchaklarning o‘ng tarafiga yozib chiqiladi. Shu bilan to‘g‘ri o‘tish yakunlanadi.

Teskari o‘tish tarmoq grafigining oxirgi hodisasidan boshlanadi. Bunda asosiy maqsad i-hodisaga kiruvchi barcha ishlarning eng kech vaqtlari LS_i aniqlashdir. Tarmoq grafining oxirgi hodisasi n bo‘lsin va $i = n$ bo‘lsa, u holda $LS_n = ES_n$ bo‘ladi, ya’ni teskari o'tishning boshlanishi hisoblanadi. Umuman, ixtiyoriy i hodisa uchun:

$$LS_i = \min_j \{LS_j - D_{ij}\}$$

barcha (i, j) lar uchun, bo'ladi.

Har bir hodisaning mos qo'sh uchburchaklarini birinchi uchburchagiga LS sonlari yozib chiqiladi:

$$
\begin{aligned}
&LS_6 = ES_6 = 19,\\
&LS_5 = LS_6 - D_{56} = 19 - 6 = 13,\\
&LS_4 = \min_{j=5,6}\{LS_j - D_{4j}\} = \min\{13 - 7, 19 - 5\} = 6,\\
&LS_3 = \min_{j=4,5,6}\{LS_j - D_{3j}\} = \min\{6 - 0, 13 - 3, 19 - 2\} = 6,\\
&LS_2 = \min_{j=3,4}\{LS_j - D_{2j}\} = \min\{6 - 3, 6 - 2\} = 3,\\
&LS_1 = LS_3 - D_{13} = 6 - 2 = 4,\\
&LS_0 = \min_{j=1,2}\{LS_j - D_{0j}\} = \min\{4 - 2, 3 - 3\} = 0.
\end{aligned}
$$

Shu bilan teskari o'tish hisoblandi.

Endi to'g'ri va teskari o'tishlardan foydalanib kritik yo'lni aniqlash mumkin. (i, j) ish kritik yo'lga tegishli bo'lishligi uchun, quyidagi uchta tenglik o'rinli bo'lishi kerak:

$$ES_i = LS_i, \tag{2.1}$$

$$ES_j = LS_j, \tag{2.2}$$

$$ES_j - ES_i = LS_j - LS_i = D_{ij}. \tag{2.3}$$

Bu shartlar, aslida shuni bildiradiki, kritik ishning zaxira vaqtlari bo'lmaydi. 2.9-rasmda kritik yo'l $(0, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)$ va $(5, 6)$ ishlardan iboratdir. Kritik yo'l butun dasturni eng qisqa davomiyligini ta'minlab beradi. E'tibor beramizki, $(2, 4), (3, 5), (3, 6)$ va $(4, 6)$ ishlar (2.1) va (2.2)-tengliklarni qanoatlantiradi, ammo (2.3)-tenglikni qanoatlantirmaydi. Shu sababli ular kritik ishlar emas. Eslatib o‘tamiz kritik yo‘l boshlang‘ich va oxirgi hodisalarni birlashtiruvchi uzluksiz ishlar zanjiridan iboratdir.

2-mashq. 2.9-rasmda keltirilgan tarmoq grafi uchun, quyidagi hollarda kritik yo‘l (yo‘llar) aniqlansin.

(a) $D_{01} = 4$. [Javob:(0,2,3,4,5,6) va (0,1,3,4,5,6)].

(b) $D_{36} = 15$ [Javob: (0,2,3,6)].

Zaxira vaqtlarini aniqlash. Kritik yo‘lni aniqlashda kritik bo‘lmagan ishlarning zaxira vaqtlarini bilish muhimdir. Tushunarliki, kritik ishlarning zaxira vaqtlari nolga teng, shuning uchun, ham ular kritik ishlar deb ataladi.

Zaxira vaqtlarni aniqlashdan avval har bir ishga bog‘liq bo‘lgan ikkita muddat tushunchalarini kiritish lozim. Bular (LS) *kech boshlanish* va (ES) *erta tamomlash* bo‘lib, ular har bir (i, j) ish uchun, quyidagi munosabatlar orqali aniqlanadi:

$$LS_{ij} = LS_j - D_{ij},\ ES_{ij} = ES_i + D_{ij}.$$

Zaxira vaqtlarining asosiy ikkita ko‘rinishi farqlanadi: (TF) *to‘la zaxira* va (FF) *erkin zaxira.*

(i, j) ishning to‘la zaxirasi, bu ishning bajarilishi mumkin bo‘lgan maksimal vaqt oralig‘i $(LS_j - ES_i)$ bilan uning bajarilish muddati (D_{ij}) orasidagi farq, ya’ni

$$TF_{ij} = LS_j - ES_i - D_{ij} = LS_j - ES_{ij} = LS_{ij} - ES_i.$$

Berilgan dasturda kritik yo‘lni va kritik bo‘lmagan ishlarning zaxira vaqtlarini aniqlashning qulay usuli bu jadval ko‘rinishda ifodalashdir (2.2-jadval). Jadvaldagi sonlar yuqorida berilgan formulalar orqali oson topiladi. Ushbu jadvalda kalendar rejani (grafikani) aniqlash uchun, barcha ma’lumotlar mavjud. Ta’kidlaymizki, faqat kritik ishlar to‘la nol zaxira vaqtga ega bo‘lishadi. Agar to‘la zaxira nolga teng bo‘lsa, erkin zaxira ham nolga teng. Ammo aksinchasi to‘g‘ri emas, chunki kritik bo'lmagan ishning erkin zaxirasi nol bo'lishi mumkin. Masalan, 2.2-jadvalda $(0,1)$ kritik bo'lmagan ishning erkin zaxirasi nolga teng.

Erkin zaxira vaqti, barcha ishlar erta muddatda bajariladi farazi orqali aniqlanadi. Bu holda (i,j) ish uchun, FF_{ij} miqdor ishning bajarilishi mumkin bo'lgan vaqt $(ES_j - ES_i)$ oralig'i bilan uning davomiyligi (D_{ij}) orasidagi farq bilan aniqlanadi, ya'ni

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}.$$

2.2-jadval

(i,j) *ishlar*	D_{ij} *davomlik*	*erta*		*kech*		TF_{ij} *to'la zaxira*	FF_{ij} *erkin zaxira*
		ES_i *bosh*	ES_{ij} *oxiri*	LS_{ij} *bosh*	ES_i *oxiri*		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$(0,1)$	2	0	2	2	4	2	2
$(0,2)$	3	0	3	0	3	0	0
$(1,3)$	2	2	4	4	6	2	2
$(2,3)$	3	3	6	3	6	0	0
$(2,4)$	2	3	5	4	6	1	1
$(3,4)$	0	6	6	6	6	0	0
$(3,5)$	3	6	9	10	13	4	4
$(3,6)$	2	6	8	17	19	11	11
$(4,5)$	7	6	13	6	13	0	0
$(4,6)$	5	6	11	14	19	8	8
$(5,6)$	6	13	19	13	19	0	0

3-mashq. 2.2-jadvalda quyidagi ishlarning to'la va erkin zaxira vaqtlari to'g'ri hisoblanganini tekshiring: (a) $(0,1)$ ish; (b) $(3,4)$ ish; (c) $(4,6)$ ish.

Kalendar rejani tuzish va zaxiralarni taqsimlash

Tarmoq modelida olib borilgan hisoblashlarning yakuniy natijasi kalendar grafigi (reja) bo'lishi lozim. Bu grafik real vaqt shkalasiga nisbatan dasturni bajarish jarayonlarini amalga oshirish imkonini beradi.

Kalendar grafikni qurishda zaxiralar hajmini hisobga olish zarur, chunki ayrim ishlarni parallel bajarish, ishchi kuchining, uskunalarning yoki boshqa omillarning chegaralanganligi sababli, imkoni bo'lmasligi mumkin. Mana shu ma'noda, kritik bo'lmagan ishlarning to'la zaxira vaqti ahamiyatlidir.

Kritik bo'lmagan ishlarni to'la zaxira vaqti doirasida u yoki bu tomonga siljitish orqali zaxiralardan maksimal foydalanishni kamaytirish mumkin bo'ladi. Ammo zaxiralar hajmiga chegara bo'lmasa ham, to'la zaxira vaqtlari, odatda, butun dasturni bajarish muddati davomida, zaxiralardan foydalanishni mumkin qadar tekkis taqsimlash uchun, xizmat qiladi. Haqiqatda, bu bildiradiki, ishchi kuchiga (boshqa zaxiralarga) nisbatan talab vaqt oraliqlarida keskin farq qilganda dasturni ma'lum sondagi ishchilar tarkibi bilan tamomlash imkonini beradi.

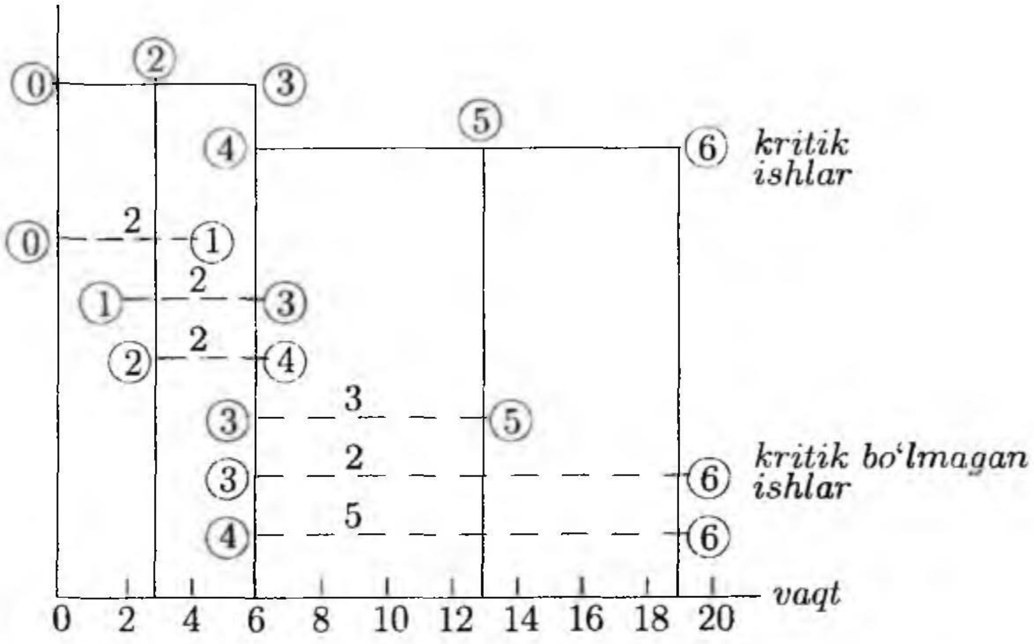
Quyidagi konkret misolda tarmoq grafikni qurish keltirilgan. Keyingi misolda esa dastur uchun, zaxiralardan oqilona foydalanish ko'rsatilgan.

2-misol. 2.9-rasmda keltirilgan dastur uchun, tarmoq grafik qurilsin.

Tarmoq grafikni qurishdagi zarur ma'lumotlar 2.2-jadvalda keltirilgan. Avval kritik ishlarning kalendar muddatlari (bajarilish vaqtlari) aniqlanadi. Keyin kritik bo'lmagan ishlarning erta boshlanish muddatlari ES va oxirgi bajarilish muddatlari LS lar topiladi. Tarmoq grafida kritik ishlar uzluksiz chiziqlar orqali berilgan. Kritik bo'lmagan ishlarning bajarilish muddatlar punktir chiziqlar yordamida berilgan. Ya'ni, ushbu ishlarning kalendar muddatlari punktir chiziq ichida ixtiyoriy ravishda joylashgan bo'lib, faqat ularning ketma-ketligi saqlangan bo'lishi zarur.

2.9 va 2.10-rasmlarda keltirilgan misol uchun, kalendar grafik xizmatini o'taydi. $(3,4)$ ish fiktiv bo'lib, uni bajarish vaqti nolga teng, shuning uchun, u vertikal kesma bilan ifodalangan. Kritik bo'lmagan ishlarning (punktir kesmalar) yuqori qismiga yozilgan sonlar ularning davomiyligiga mos keladi.

Kritik bo'lmagan ishlarning kalendar muddatlarini aniqlashdagi to'la va erkin zaxira vaqtlarining roli quyidagi ikki umumiy qoida bilan izohlanadi.



2.10-rasm

1. Agar to'la va erkin zaxiralar vaqti bir-biriga teng bo'lsa, u holda kritik bo'lmagan ishning kalendar muddatlarini uning erta boshlanish va kech tamomlanish oraliqlaridan ixtiyoriy ravishda olish mumkin (2.10-rasmda punktir kesmalar).

2. Agar erkin zaxira vaqt to'ladan kichik bo'lsa, u holda kritik bo'lmagan ishning boshlanish vaqtini, undan keyin keladigan ishlarning kalendar muddatlariga ta'sir etmagan holda, erta boshlanishga nisbatan erkin vaqt miqdoridan katta bo'lmagan oraliq vaqtigacha surish mumkin.

Ko'rilayotgan misolda 2-qoidani faqat $(0, 1)$ ishga nisbatan qo'llash mumkin, boshqa ishlarning kalendar muddatlari 1-qoida bo'yicha tanlanadi. Bunga sabab, $(0, 1)$ ishning erkin zaxira vaqti nolga teng. qilib, agar $(0,1)$ ishning boshlanishi uning erta boshlanish vaqti ($t=0$) bo'lsa, u holda undan keyin keladigan $(1,3)$ ishning kalendar muddatini erta boshlanish ($t=2$) va kech tamomlash ($t=6$) oralig'idan olish mumkin bo'ladi. Agar $(0,1)$ ishning boshlanish vaqti $t=0$ ga nisbatan surilgan bo'lsa, $(1,3)$ ishning ham erta boshlanish vaqti kamida shunchaga surilgan bo'lishi zarur. Masalan, $(0,1)$ ish $t=1$ vaqtda boshlangan bo'lsa, uning tamom bo'lishi $t=3$ vaqtga to'g'ri keladi, demak, bu holda $(1,3)$ ishning kalendar muddatini aniqlash kerakki, natijada, u $[3,6]$ oraliqda yotsin. Bunday hol boshqa kritik bo'lmagan ishlarga taalluqli emas, chunki ularning to'la va erkin zaxira vaqtlari ustma-ust tushadi. Bu natijani 2.10-rasm orqali oson tushuntirish mumkin.

qilib, ishning erkin zaxira vaqti to'la zaxira vaqtidan kichik bo'lsa, uning kalendar vaqtini aniqlashtirishni undan keyin bajariladigan ishning boshlanish vaqtini hisobga olgan holda amalga oshirish kerak. Bunday muhim ma'lumotni faqat tarmoq modeli orqali olish mumkin.

Dasturni amalga oshiruvchi kalendar reja (grafik) tuzish kerakki, natijada, dasturni bajarish davomida ishchi kuchiga bo'lgan talab mumkin qadar tekis taqsimlangan bo'lsin. 2.11,a-rasmda kritik bo'lmagan ishlarning bajarilish kalendar muddatlarini, ularning erta vaqtlariga teng deb olingandagi ishchi kuchiga bo'lgan ehtiyojlar keltirilgan (bu erta yoki chap kalendar reja deyiladi), 2.11,b-rasmda esa eng kech vaqtlari olingandagi ishchi kuchiga bo'lgan ehtiyoj (bu kech yoki o'ng kalendar reja deyiladi). Punktir chiziqlar bilan kritik ishlarning ehtiyojlari belgilangan bo'lib, u dasturni minimal vaqtda tamomlash uchun, albatta bajarilishi zarur (ta'kidlaymizki, $(0,1)$ va $(1,3)$ ishlarni bajarish uchun, ishchi kuchi talab etilmaydi).

4-mashq. Quyidagi misollarda kritik bo'lmagan ishning to'la va erkin zaxira vaqtlari (TF va FF) hamda uning davomiyligi berilgan. Ishning erta boshlanish vaqtiga nisbatan boshlanishini maksimal kech qolish vaqtini aniqlang. Bunda, keyin bajariladigan ishlarning kalendar muddatlari erta boshlanish va kech tamom bo'lish oralig'ida yotishi mumkin:

(a) $TF = 10, FF = 10, D = 4$[Javob: kechikish = 10];

(b) $TF = 10, FF = 5, D = 4$[Javob: kechikish = 5];

(c) $TF = 10, FF = 0, D = 4$[Javob: kechikish = 0];

(d) $TF = 10, FF = 3, D = 4$[Javob: kechikish = 3].

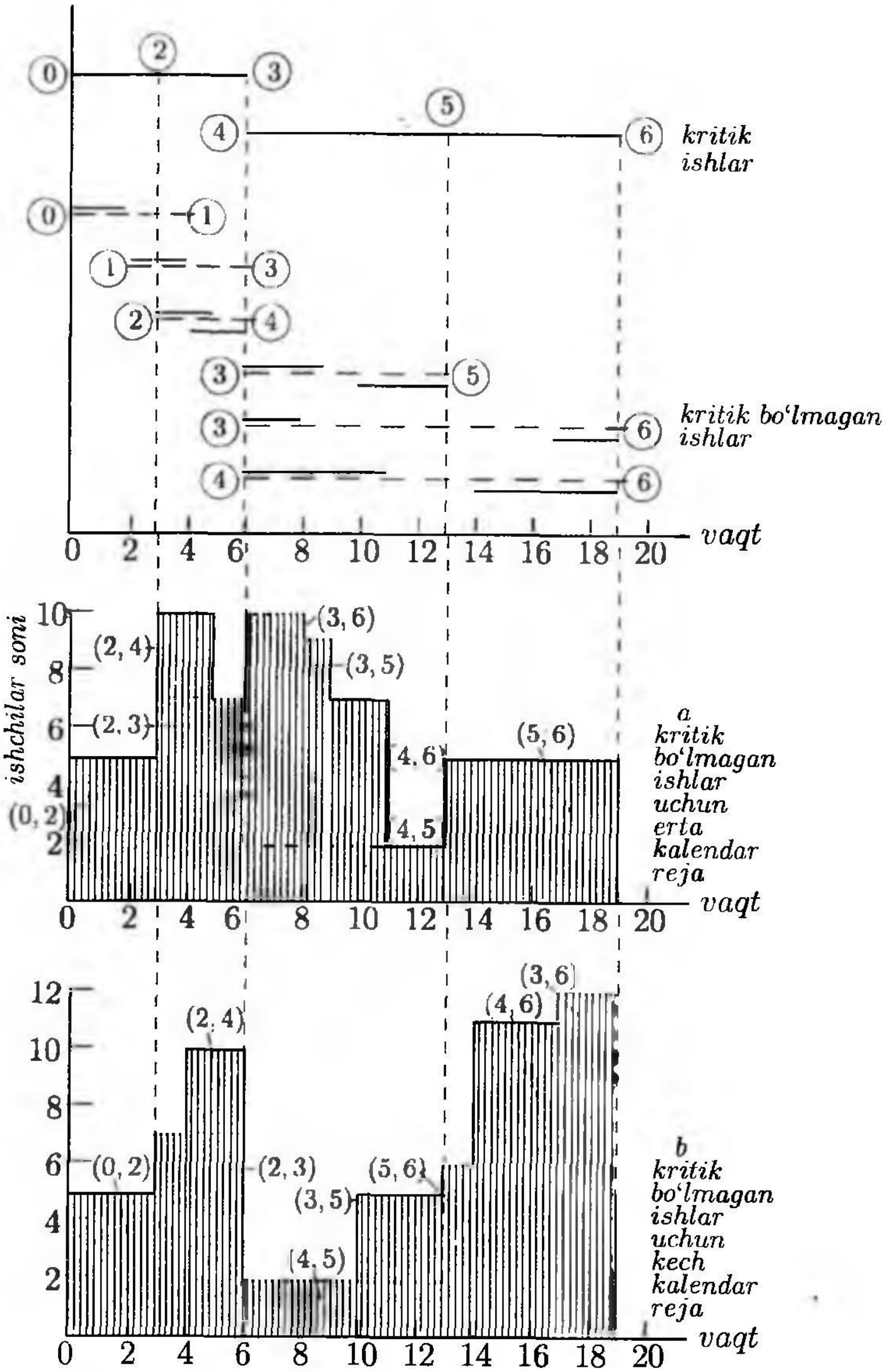
3-misol. Faraz qilaylik, 3-misolda turli ishlarni bajarish uchun, quyidagicha ishchi kuchlari talab etilsin.

2.3-jadval

Ishlar	Ishchilarga talab (soni)	Ishlar	Ishchilarga talab (soni)
$(0,1)$	0	$(3,5)$	2
$(0,2)$	5	$(3,6)$	1
$(1,3)$	0	$(4,5)$	2
$(2,3)$	7	$(4,6)$	5
$(2,4)$	3	$(5,6)$	6

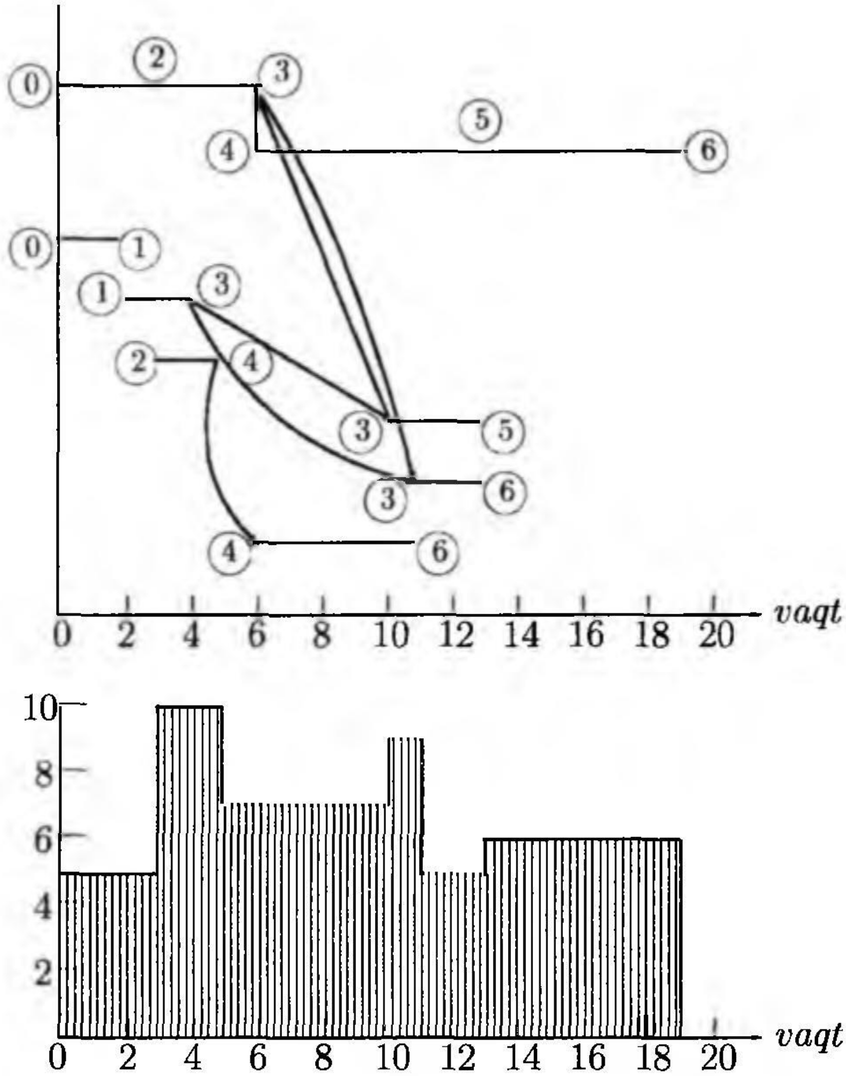
Dasturni amalga oshirish uchun, kritik ishni bajarishda kamida 7 ishchi kuchi talab etiladi. Kritik bo'lmagan ishlarni erta kalendar rejasida maksimal ishchi kuchi soni 10 ta, kech kalendar rejada esa 12 ta. Bu misol yaqqol ko'rsatadiki, zaxiralarga bo'lgan maksimal talab miqdori kritik bo'lmagan ishlarning zaxira vaqtlaridan qanday foydalanishga bog'liq ekan.

2.11-rasmdan ko'rinib turibdiki, kritik bo'lmagan ishlarning zaxira vaqtlari qanday taqsimlanishidan qat'i nazar ishchi kuchiga bo'lgan maksimal talab 10 tadan kichik bo'lmaydi, chunki kritik ishning bajarilish oralig'i bilan kesishadi.


kritik
ishlar
kritik bo'lmagan
ishlar
vaqt
ishchilar soni
(2, 4)
(2, 3)
(0, 2)
(3, 6)
(3, 5)
(4, 6)
(4, 5)
(5, 6)
a
kritik
bo'lmagan
ishlar
uchun
erta
kalendar
reja
b
kritik
bo'lmagan
ishlar
uchun
kech
kalendar
reja

2.11-rasm

Erta kalendar rejada ishchi kuchiga bo'lgan talab grafini yaxshilash mumkin, bunga $(3,5)$ ishning kech kalendar muddatini olib, $(3,6)$ ishni bevosita $(4,6)$ ishdan keyin boshlash orqali erishiladi. Bu yangi grafik 2.12-rasmda ko'rsatilgan, unda ishchi kuchiga bo'lgan ehtiyoj ancha tekis taqsimotga egadir.



2.12-rasm

Ayrim dasturlarda maqsad nafaqat zaxiralarni tekis taqsimlash, balki maksimal ehtiyojni ma'lum bir chegarada ushlab turish masalasi qo'yilgan bo'lishi ham mumkin. Agar bu maqsadga kritik bo'lmagan ishlar hisobiga erishishning iloji bo'lmasa, zaxiralarga bo'lgan talabni ayrim kritik ishlarning davomiyligini uzaytirish orqali kamaytirish kerak bo'ladi.

Matematik qiyinchilik sababli, hozircha zaxiralarni tekis taqsimlashning optimal masalasi yechilmagan, ya'ni dasturni bajarish davomida zaxiralarga bo'lgan maksimal ehtiyojni minimallashtirish. Shu sababli yuqoridagiga o'xshash evristik usullardan foydalanishga to'g'ri keladi. Bu usullarning barchasi kritik bo'lmagan ishlarning zaxira vaqtlaridan foydalanish qoidasiga asoslangan.

5-mashq. Faraz qilaylik, 4-misolda $(0,1)$ va $(1,3)$ ishlarni bajarish uchun, mos ravishda 8 va 2 ta ishchilar kerak bo'lsin. Quyidagi hollarning har biri 2.11-rasmda qanday o'zgarish sodir qiladi?

a). Har ikkala ishda ham kalendar muddatining boshlanishi sifatida erta vaqt olinadi. [*Javob.* $0 \leq t \leq 2$ intervalda ishchi kuchiga bo'lgan talab 13 ga teng, $2 \leq t \leq 3$ da – 7, $3 \leq t \leq 4$ da – 12].

b). Har ikkala ishda ham kalendar muddatining boshlanishi sifatida kech vaqt olinadi. [*Javob.* $2 \leq t \leq 3$ intervalda ishchi kuchiga bo'lgan talab 13 ga teng, $3 \leq t \leq 4$ da – 15, $4 \leq t \leq 6$ da – 12].

Dasturlarning kalendar rejasini tuzishda aniqmasliklar va sarflar ham hisobga olinishi mumkin.

Dasturni amalga oshirish jarayonini boshqarish

Ayrim hollarda kalendar reja tuzilgandan so'ng, tarmoq modeli keraksiz bo'lib qoladi deb o'ylaydiganlar topiladi. Ammo bu juda ham noto'g'ri fikrdir. Dasturni bajarish davomida tarmoq modeli katta foyda keltirishi mumkin.

Rejalashtirish bosqichida kalendar reja tuzilgan bo'lsa ham, dasturni bajarish bosqichida bunga amal qilish kamdan-kam uchraydi. Odatda, ayrim ishlar aniq shart-sharoitlarda kalendar rejaga nisbatan tezroq yoki sekinroq bajariladi. Kalendar rejadan bunday chetga chiqishlar dasturning qolgan qismi uchun, yangi kalendar reja tuzishni taqoza etadi. Dasturni bajarilish jarayonini nafaqat kalendar reja, balki tarmoq modelida ham aks ettirish lozim. Kalendar reja ishlarni o'z vaqtida bajarilayotganini nazorat qilishda foydalaniladi.

Biror ishning kech boshlanishi dasturning qolgan qismiga ta'siri tarmoq modelida aniq ifodalanadi.

Faraz qilaylik, dasturni bajarish paytida ayrim ishlarni kech boshlanishi sababli butunlay yangi kalendar reja tuzish talab etiladi. Mavjud tarmoq modelidan foydalangan holda bu yangi rejani qanday aniqlab bo'ladi? Avval tarmoq grafiga tuzatishlar (yangilanish) kiritish kerak, masalan, tamomlangan ishlarning davomiyligini nolga teng deb, qisman bajarilgan ishlarning davomiyligini mos ravishda o'zgartirish zarur.

Bundan tashqari tarmoq grafida tarkibiy o'zgarishlarni ham amalga oshirish kerak, ya'ni qandaydir sabablar bilan keraksiz bo'lib qolgan ishlarni chiqarib tashlash, avval kerak bo'lmagan, ammo kelajakda zarur bo'lib qolgan ishlarni kiritish.

Shundan so'ng odatdagi hisoblashlar yordamida yangi kalendar rejani tuzish va dasturni davom etish vaqtini aniqlash mumkin bo'ladi. Kalendar rejani yangisiga almashtirish vaqti kelguncha bunday ma'lumotlarni bilish katta ahamiyatga ega. Haqiqiy holatda esa kalendar rejani tez-tez almashtirish, odatda, dasturni boshlang'ich bosqichida bajariladi. Shundan so'ng uni bajarish jarayoni turg'un holatga o'tib, kalendar rejani tuzatishlar soni keskin kamayadi.

Tarmoq modelida hisob olib borish soddaligi bilan ajralib turadi, bundan tashqari murakkab dasturlarning kalendar rejasini tuzishda juda muhim ma'lumotlarni beradi. Shu sababli, tarmoq usullari amaliyotda katta mashhurlikka ega. Bu usullarning effektivligini ta'minllaydigan omillar ularning algoritmlari va maxsus tizimlari yaratilgandadur. Ular dasturlar tarmoq modellarini tahlil qilish va to'g'rilash xususiyatiga ega.

3-amaliy mashg'ulot. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlari. Ommaviy xizmat ko'rsatishning asosiy formulalari

Reja

1. Puasson oqimi. Xizmat ko'rsatish vaqti.
2. Kutishli ommaviy xizmat qilish sistemasi.

1. Puasson oqimi. Xizmat ko'rsatish vaqti

Ommaviy xizmat ko'rsatish bo'yicha ko'pchilik tadqiqotlar Puasson oqimi yoki sodda oqim deb ataluvchi talablar kiruvchi oqimi uchun bajarilgan. Buning sababi shundaki, talablarning bunday kiruvchi oqimi amaliyotda ko'p uchraydi hamda ularni o'rganish natijalaridan foydalanish qulay.

Sistemaga t vaqt oralig'ida k ta talab kelib tushish ehtimolini $p_k(t)$ deb belgilaylik. Puasson oqimi uchun

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (1)$$

taqsimot o'rinlidir, bunda $\lambda > 0$ – oqim parametri. Bu formulaga Puasson formulasi deyiladi.

λ parametrning ma'nosini tushunish uchun $(0,t)$ vaqt oralig'ida kelib tushuvchi talablar o'rtacha soni–matematik kutilishini topamiz:

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^s}{s!} = \lambda t .$$

Tabiiyki, $t = 1$ bo'lsa, $M(1) = \lambda$. Demak, λ – birlik vaqt oralig'idagi talablar o'rtacha soniga teng.

Sistemaga talablarning ketma-ket kelib tushish vaqt oralig'ini T deb belgilasak, $p(T < t)$ sistemada yangi talabning paydo bo'lish vaqt oralig'ining t dan oshmaslik ehtimolini bildiradi. Shu ehtimolni hisoblaymiz:

$$p(T < t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t} . \qquad (2)$$

Shunday qilib, (2) tenglik ko'rsatadiki, agar talablarning kelib tushish vaqt momentlari Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, talablar kelib tushishi orasidagi vaqt oraliqlari (2) eksponensial qonunga ko'ra taqsimlangan bo'ladi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish sistemasini matematik usullar yordamida tadqiq qilish uchun xizmat ko'rsatish tugunidagi har bir qurilmaning talablarga xizmat ko'rsatish vaqtlarining taqsimot funksiyasi ma'lum bo'lishi kerak. $t_{x.k.}$ – talabga xizmat ko'rsatish vaqti, $p(t_{x.k.} < t)$ – xizmat ko'rsatish vaqtining t dan oshmaslik ehtimoli bo'lsin. $F(t) = p(t_{x.k.} < t)$ – xizmat ko'rsatish vaqtining taqsimot funksiyasini bildiradi.

Xizmat ko'rsatish vaqtining taqsimot qonuni turlicha bo'ladi. Amaliyotda ko'pincha

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \mu > 0, \tag{3}$$

ko'rinishdagi eksponensial taqsimotdan foydalaniladi. Musbat μ parametrga xizmat ko'rsatish intensivligi (jadalligi) deyiladi. Bu parametrning ma'nosini tushunish uchun xizmat ko'rsatish vaqtining matematik kutilishini hisoblaymiz:

$$M(t_{x.k.}) = \overline{t_{x.k.}} = \int_0^\infty t dF(t) = \int_0^\infty t\mu e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu}.$$

Shunday qilib, μ parametr vaqt birligida xizmat ko'rsatish qurilmasining o'rtacha nechta talabga xizmat ko'rsatishini bildiradi.

(3) eksponensial taqsimotdan foydalanib Δt vaqt oralig'ida talabga xizmat ko'rsatilish ehtimolini hisoblaymiz: $F(\Delta t) = p(t_{x.\kappa.} < \Delta t) = 1 - e^{-\mu \Delta t}$.

$F(t) = p(t_{x.k.} < t)$ funksiyaning Teylor qatoriga yoyilmasidan foydalansak,

$$p(t_{x.\kappa.} < \Delta t) = 1 - 1 + \mu \Delta t + o(\Delta t) \approx \mu \Delta t \tag{6}$$

bo'ladi.

Talabga xizmat ko'rsatishning Δt vaqt oralig'ida tugamasligi ehtimoli

$$p(t_{x.\kappa.} \geq \Delta t) = 1 - p(t_{x.\kappa.} < \Delta t) \approx 1 - \mu \Delta t$$

bo'ladi.

1-misol. Avtomat telefon stansiyasiga (ATSga) bir minut ichida o'rtacha ikkita chaqiriq keladi. 5 minut ichida: a) ikkita chiqiriq kelishi; b) ikkitadan kam chaqiriq kelishi; c) kamida ikkita chaqiriq kelish ehtimolini toping. Chaqiriqlar oqimi eng oddiy oqim deb hisoblanadi.

Yechilishi. Shartga ko'ra $\lambda = 2,\ \ t = 5$ Ushbu

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

formuladan foydalanamiz.

a) 5 minut ichida 2 ta chaqiriq kelish ehtimoli

$$P_5(2) = \frac{10^2}{2!} e^{-10} = \frac{100}{2} \cdot 0{,}00045 = 0{,}000025$$

Bu hodisaning amalda ro'y berishi deyarli mumkin emas.

b) «ikkitadan kam chaqiriq keldi» hodisasi quyidagi birgalikda bo'lmagan hodisalardan bir ro'y bergan taqdirdagina ro'y beradi:

1) bitta ham chaqiriq kelmadi; 2) bitta chaqiriq keldi; Bu hodisalar birgalikda emasligi sababli birgalikda bo'lmagan hodisalarning ehtimollarini qo'shish teoremasini qo'llash mumkin:

$$P_5(k < 2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + \frac{10}{2!} e^{-10} = 0{,}000435$$

Bu hodisaning amalda ro'y berishi deyarli mumkin emas

c) «ikkitadan kam chaqiriq keldi» va «kamida ikkita chaqiriq keldi» hodisalari o'zaro qarama-qarshi hodisalar. Shu sababli izlanayotgan ehtimol, ya'ni 5 minut ichida kamida 2 ta chaqiriq kelish ehtimoli

$$P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - 0{,}000435 = 0{,}993505$$

Bu hodisa deyarli muqarrar hodisa.

2-misol. Shossedan kuzatuvchi oldidan bitta yo'nalishda o'tayotgan mashinalar oqimi eng oddiy oqimdan iborat. 5 minut davomida mashinalar o'tmasligi ehtimoli ma'lum va u 0,5 ga teng. 10 minut davomida kuzatuvchi oldidan ikkitadan ortiq bo'lmagan mashina o'tish ehtimolini toping.

Yechilishi. Vaqt birligini 5 minut deb qabul qilamiz. Masalada

$$P_2(k \le 2) = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) = e^{-\lambda 2} + \frac{2\lambda}{1!}e^{-\lambda 2} + \frac{(2\lambda)^2}{2!}e^{-\lambda 2}$$

ehtimolini topish talab qilinadi.

Shartga ko'ra $P_1(0) = 0{,}5$, ya'ni $e^{-\lambda} = 0{,}5$, bundan $\lambda = \ln 2$ ni topamiz. Yuqoridagi tenglamaga λ ning qiymatini qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_2(k \le 2) = e^{-(\ln 2)2} + \frac{2\ln 2}{1!}e^{-(\ln 2)2} + \frac{(2\ln 2)^2}{2!}e^{-(\ln 2)2} =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\ln 2 + 2\ln^2 2) = 0{,}84$$

3-misol. Shosseda bitta yo'nalishda borayotgan mashinalar oqimi intensivligi λ bo'lgan eng oddiy oqimdan iborat. Kishi shu yo'nalishda borayotgan birinchi uchragan mashinani to'xtatish uchun shossega chiqadi. U mashina kutishga to'g'ri keladigan T vaqtning taqsimot qonunini, matematik kutilishini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Yechilishi. Kutish vaqtining taqsimot zichligi mshinalar orasidagi vaqt oralig'ining taqsimot zichligi qanday bo'lsa shunday bo'ladi, ya'ni

$$F(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (t > 0)$$

chunki oddiy oqimda «kelajak», «o'tmishga» bog'liq bo'lmaydi, xususan oxirgi mashina qancha vaqt oldin o'rganisha bog'liq bo'lmaydi.

Ko'rsatkichli taqsimot qonun uchun

$$MT = \frac{1}{\lambda}; DT = \frac{1}{\lambda^2};\ \sigma_T = \sqrt{DT} = \frac{1}{\lambda} = MT\,.$$

2. Kutishli ommaviy xizmat qilish sistemasi. Asosiy hisoblash formulalari

1. Parametr:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

bunda λ-talablar oqimining intensivligi (zichligi), $\mu = \frac{1}{\bar{t}_x}$-xizmat qilish parametri, $\bar{t}_x$ - bitta talabga o'rtacha xizmat qilish vaqti.

2. Xizmat qiluvchi barcha kanallar bo'sh bo'lish ehtimoli:

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{(n-1)!(n-\alpha)}},\quad \frac{\alpha}{n}<1 \text{bo'lganda,}$$

bu yerda n - sistemadagi xizmat qiluvchi kanallar soni.

3. k ta kanal xizmat qilish bilan band (sistemada k ta talab) bo'lishi ehtimoli

$$P_k=\frac{\alpha^k}{k!}P_0,\quad 1\le k\le n \ \text{ bo'lganda.}$$

4. Xizmat qiluvchi barcha kanallar band bo'lish ehtimoli:

$$P_{band}=\frac{\alpha^m P_0}{(n-1)!(n-\alpha)},\quad \frac{\alpha}{n}<1.$$

5. Navbatda turib xizmati boshlanishi kutayotgan talablarning o'rtacha soni:

$$M_n=\frac{\alpha P_{band}}{n(1-\frac{\alpha}{n})^2}$$

6. Sistemada turgan talablarning o'rtacha soni

$$M_s=M_n+\frac{nP_n}{1-\frac{\alpha}{n}}+P_0\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha^k}{(k-1)!}$$

7. Xizmat qilmasdan bo'sh turgan kanallarning o'rtacha soni:

$$N_0=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k!}\alpha^k P_0$$

8. Navbatda turib xizmati boshlanishini kutayotgan talabning o'rtacha kutish vaqti:

$$\bar{t}_{kut}=\frac{P_{band}\cdot\bar{t}_{xiz}}{n-\alpha},\qquad \frac{\alpha}{n}<1.$$

4-misol. Turli radioapparaturalarni ta'mirlaydigan ustaxona 5 ta tajribali ustaga ega. Kun davomida aholidan ta'mirlanishga o'rtacha 10 ta radioappartura keladi. Ta'mirlanishi uchun keladigan radioapparaturalar Puasson oqimini tashkil qiladi. Ustalarning har biri ish kuni davomida o'rtacha $\mu=2{,}5$ ta radioapparaturalarni ta'mirlashga ulguradi. Ishini baholash talab qilinadi.

Yechilishi. Shartga ko'ra $n=5, \lambda=10, \mu=2{,}5$

1^0. α parametrni aniqlaymiz:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{2,5} = 4$$

2^0. Barcha ustalar apparaturalarni ta'mrlamasdan bo'sh turishi ehtimolini topamiz:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{(n-1)!(n-\alpha)}} =$$

$$= \frac{1}{1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{(5-1)!(5-4)}} = 0,013$$

3^0. n ta usta apparaturalarni ta'mirlash bilan band bo'lish ehtimolini topamiz:

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 = \frac{4^5}{5!} \cdot 0,013 = 0,11$$

4^0. Barcha ustalar ta'mirlash bilan band bo'lish ehtimolini topamiz:

$$P_{band} = \frac{\alpha^n P_0}{(n-1)!(n-\alpha)} = \frac{4^5 \cdot 0,013}{(5-1)!(5-4)} = 0,554$$

5^0.Ta'mirlanishi boshlanishi navbatini kutayotgan radioappara-turalarning o'rtacha sonini topamiz:

$$M_n = \frac{\alpha P_{band}}{n(1-\frac{\alpha}{n})^2} = \frac{4 \cdot 0,554}{5(1-\frac{4}{5})^2} \approx 11,1 \text{ apparat.}$$

6^0. Ustaxonada ta'mirlashda turgan (ta'mirlashni kutayotgan va ta'mirlanayotgan) radioapparaturalarning o'rtacha sonini topamiz:

$$M_s = M_n + \frac{nP_n}{1-\frac{\alpha}{n}} + P_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} = 11,1 + \frac{5 \cdot 0,111}{1-\frac{4}{5}} + 0,013 \cdot \sum_{k=1}^{4} \frac{4^k}{(k-1)!} = 15,5 \text{ usta}$$

7^0. Bo'sh turgan ustalarning o'rtacha sonini topamiz:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k P_0 =$$

$$= 0{,}013 \left[\frac{5-0}{1} \cdot 1 + \frac{5-1}{1!} \cdot 4 + \frac{5-2}{2!} \cdot 4^2 + \frac{5-3}{3!} \cdot 4^3 + \frac{5-4}{4!} \cdot 4^4 \right] \approx 0{,}95$$

8^0. Ta'mirlanishni boshlanishini o'rtacha kutish vaqtini topamiz:

$$\bar{t}_{kut} = \frac{P_{band} \cdot \bar{t}_{xiz}}{n-\alpha} = \frac{0{,}554 \cdot 2{,}8}{5-4} \approx 1{,}55 \quad \text{soat},$$

bunda $\bar{t}_{xiz} = \frac{7}{\mu} = \frac{7}{2{,}5} = 2{,}8\,\text{soat}$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Dispetcherlik punktida bir minutda taksi mashinalari uchun o'rtacha uchta buyurtma qabul qilinadi. 2 minut ichida: a) to'rtta buyurtma; b) to'rttadan kam buyurtma; c) kamida to'rtta buyurtma kelish ehtimolini toping. Buyurtmalar oqimi eng oddiy oqim deb faraz qilamiz.

2. ATS da bir minut ichida o'rtacha ikkita chaqiriq qabul qilinadi. 4 minut ichida: a) uchta chaqiriq; b) uchtadan kam chaqiriq; c) kamida uchta chaqiriq qabul qilinish ehtimolini toping. Chaqiriqlar oqimi eng oddiy oqim deb faraz qilinadi.

3. Vokzalga 5 minut ichida o'rtacha 2 ta poyezd keladi. 15 minut ichida 3 ta poyezd kelish ehtimolini toping. Poyezdlar oqimi eng oddiy oqim deb faraz qilinadi

4. Vagonlarni joriy ta'mirlash punktiga ta'mirlash uchun talablar tushadi. Talablar oqimining intensivligi $\lambda = 0{,}617$ bo'lgan eng oddiy oqim deb hisoblash mumkin. Bir soat ichida ikkita talab (vagon) tushishlik ehtimolini toping.

5. Temir yo'lda kuzatuvchi odldidan bita yo'nalish bo'yicha poyezdlarning eng oddiy oqimi harakatlanadi. 10 minut davomida poyezdlar bo'lmasligi ehtimoli ma'lum va 0,8 ga teng. 20 minut ichida kuzatuvchi oldidagi uchtadan ortiq bo'lmagan poyezd o'tish ehtimolini toping.

6. Shosseda bita yo'nalishda borayotgan mashinalar oqimi intensivligi minutigan 6 mashina bo'lgan eng oddiy oqimdan iborat. Kishi shu yo'nalishda borayotgan birinchi uchragan mashinani to'xtatish uchun shossega chiqadi. U mashina kutishga to'g'ri keladigan T vaqtning taqsimot qonunini, matematik kutilishini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

7. Talablarning eng oddiy oqimi uchun

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_t(k \geq 1)}{P_t(k=1)} = 1$$

bo'lishini isbot qiling.

Ko'rsatma: $P_t(k=0) + P_t(k \geq 1) = 1$tenglikdan foydalaning.

8. Dengiz porti (bandargoh) quruq yuk tashuvchi kemalardan yuklar tushiriladigan 5 ta prichalga (kema bog'lab qo'yiladigan joyga) ega. Oy davomida portga o'rtacha 20 ta katta tonnajli kema yuk bilan keladi. Yukini tushirish uchun keladigan kemalar Puasson oqimini tashkil etadi. Prichalda kemadan yukni tushirish uchun o'rtacha 6 ish kuni sarflanadi. Port ishini baholash talab qilinadi.

9. To'rtta yonilg'i quyish kolonkasiga ega bo'lgan avtoyonilg'i quyish stansiyasining (AYoQSning) ishi qaralmoqda. Bitta mashinaga yonilg'i quyish o'rtacha 3 daqiqa davom etadi. O'rtacha har daqiqada AYoQSga benzin quyilishiga ehtiyoji bor mashina keladi. Navbatdagi o'rinlar soni amalan cheklanmagan. Yonilg'ini olishi uchun navbatda turgan mashinalarning hammasi « chidam bilan» o'z navbatini kutadi. AYoQS ishini baholash talab etiladi.

10. Kutish vaqti chegaralanmagan 3 kanalli ommaviy xizmat qilish sistemasiga intensivligi soatiga 4 talab bo'lgan talablarning eng oddiy oqimi keladi. Bitta talabga xizmat ko'rsatish vaqti o'rtacha 30 daqiqa. Xizmat qilishning stasionar rejimi mavjud bo'lishini aniqlang; agar shunday bo'lsa, u holda $P_0, P_1, P_2, P_3, P_{band}$ ehtimollarni, M_n, M_s, N_0larni $\bar{t}_{kut}$ni toping.

11. Bilet(chipta) kassasi soat 15 dan 21 gacha tanaffussiz ishlaydi. Chiptalarni bitta kassir sotadi. Bir kishiga xizmat ko'rsatish vaqti o'rtacha 2 daqiqa. Kechki kino seansiga kirishni hohlovchi chipta oluvchilarning o'rtacha soni 120 ga teng. Sistemaning asosiy ehtimoliy harakteristikalarini toping.

12. Temir yo'l poliklinikasining flyurografiya kabinetida (xonasida) minutiga 12 kishi qabul qilinadi. Qabul qilishga ketadigan vaqt ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan. Keluvchilar oqimi eng oddiy oqim, intensivligi minutiga 5 kishi. Flyurografiyaning ishini baholash talab qilinadi.

TEST SAVOLLARI

1. Xizmat qilish vaqti o’zgarmas bo’lganda, navbatda turgan talablarning o’rtacha soni ko’rsatkichli qonun bo’yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo’lgandagiga qaraganda necha marta kichik?

A) teng, B) 3 marta, C) 2 marta, D) 5 marta

2. Eng oddiy oqimning ixtiyoriy ikkita qo’shni hodisasi orasidagi intervalining uzunligi qanday taqsimot qonun bo’yicha taqsimlangan?

A) ko’rsatkichli taqsimot qonuni, B) normal taqsimot qonuni,

C) Koshi taqsimot qonuni, D) tekis taqsimot qonuni

3. Parametri $2\left[\frac{1}{daq}\right]$ bo’lgan Puasson oqimi berilgan. Ikkita qo’shni talabi orasidagi intervalning uzunligi 2 dan 4 gacha daqiqani tashkil qilish ehtimolini toping.

A) $e^{-4}(1-e^{-4})$, B) $e^{-4}(1-e^{-2})$, C) $e^{-2}(1-e^{-4})$, D) $e^{-2}(1-e^{-2})$

Mavzuni mustahkamlash uchun tavsiya etiladigan adabiyotlar:

1. М.С Красс, Б.П. Чупрынов. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: «Дело», 2008.
2. Красс М. С., Чупрынов В.П. Математика для экономистов. 2-е изд. СПб., 2005.
3. Otaqulov S., Azizov I., Xodjayev T. Operasiyalarni tekshirishning asosiy masalalari. Muammoli ma’ruzalar kursi. Samarqand – 2004.
4. Вагнер Г. Основы исследований операции. Т. 1–3. М.: Мир. 1972-73.
5. Зайченко Ю. Б. Исследование операций. Киев. 1979.
6. Таха Х. Введение в исследование операций. Т. 1, 2. М.: Мир. 1981.

4-amaliy mashg’ulot. Imitasion modellashtirish. Monte-Karlo usuli

REJA:

1. Kutishsiz sistemalar. Erlang formulalari.
2. Kutishli parallel xizmat ko’rsatish qurilmalari bo’lgan sistemalar.
3. Statistik modellashtirish usuli.
4. Monte-Karlo usulining ommaviy xizmat ko’rsatish sistemasini modellashtirishga tadbiqi.

1. Kutishsiz sistemalar (Erlang formulalari). Kutishsiz xizmat ko’rsatish sistemasi unga kelgan talab yo birdan xizmat ko’rsatish tuguniga tushushi yoki talabga xizmat ko’rsatilmasligi bilan xarakterlanadi. Bu sistemada kutish joylari bo’lmaydi. Bunday sistema birinchi bo’lib A.Erlang tomonidan analiz qilingan. Erlang birinchi bo’lib shu sistemadagi bog’liqliklarni topgan. Bu bog’liqliklar Erlang formulalari deyiladi .

Shunday qilib, n ta xizmat ko’rsatish qurilmasiga ega va kutish joylari bo’lmagan ($m=0$) sodda kiruvchi oqimi, xizmat ko’rsatish vaqti eksponsial taqsimotli ommaviy xizmat ko’rsatish sistemasini qaraymiz.

Ochiq xizmat ko’rsatish sistemasi uchun topilgan formulalarda $m=0$ ekanligini e’tiborga olib quyidagi differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{aligned}
&P_o'(t) = -\lambda P_o(t) + \mu P_1(t) \\
&P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)P_k(t) + (k+1)\mu P_{k-1}(t), 1 \le k < n, \\
&P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) - n\mu P_n(t)
\end{aligned}$$

Bu yerdan

$$\begin{aligned}
&-\lambda P + \mu P_1 = 0 \\
&\lambda P_{k-1} - (\lambda + k\mu)P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0, k = 1, n-1, \\
&\lambda P_{n-1} - n\mu P_n = 0
\end{aligned}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo’ladi. Bu sistemani hal qilib qaralayotgan ommaviy xizmat ko’rsatish sistemasining asosiy bog’lanishlari, ya’ni Erlang formulalari aniqlanadi:

1. Barcha qurilmalar bo’shligi ehtimoli

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}$$

2. K ta qurilmaning bandligi ehtimoli

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \ \ k = 1,\ldots,n$$

3. Talabni rad qilish ehtimolini topish uchun barcha qurilmalar bandligi ehtimolini topish yetarli

$$P_{rad} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

4. Band bo'lgan qurilmalar o'rtacha soni

$$N_{band} = \rho(1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0)$$

formula bilan aniqlandi.

5. Bo'sh turgan qurilmalar o'rtacha soni, bo'sh turish koeffisiyenti, bandlik koeffisenti avvalgidek topiladi.
6. Nisbiy va absolyut o'tkazish qobiliyatlari quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi.

$$q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0,$$

$$A = \lambda q = \lambda(1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0).$$

2. Kutilishli parallel xizmat ko'rsatish qurilmalari bo'lgan sistemalar. Amaliyotda kelayotgan talablarga albatta xizmat ko'rsatiladigan kutishni sistemalar ko'p ishlatiladi. Bu sistemalarda kelayotgan talablar uchun yetarlicha kutish joylari bor deb hisoblanadi. Avval qaralgan m kutishni joyiga ega sistemada – $m \to \infty$ bo'lgan holni kutishli sistema deb hisoblash mumkin:

Bunday sistemada K ta talab bo'lish ehtimolini topamiz:

$$a)\quad P_k=\frac{\rho^k}{k!}P_0, k=\overline{1,n-1};$$

$$b)\quad P_k=\frac{\rho^k}{n^{k-n}n!}P_0,\ \ k=n,n+1...$$

Endi sistemada talab bo'lmaslik ehtimoli P ni topish uchun yana $\sum_{k=0}^{\infty}P_k=1$ shartni ishlatamiz. Bu shartni quyidagicha yozamiz:

$$P_o\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}+\frac{\rho^2}{n^2}+\frac{\rho^3}{n^3}+\cdots\right)\right]=1$$

Kichik qavs ichidagi qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\frac{\rho}{n}<1$ bo'lishi, ya'ni qaralayotgan sistema stasionar bo'lishi kerak. Agar $\frac{\rho}{n}\geq 1$ bo'lsa, qaralayotgan qator uzoqlashadi, ya'ni sistemadagi navbat kutayotgan talablar cheksiz ko'p bo'ladi. Shunday qilib stasionar rejim uchun quyidagilar o'rinli:

$$1.\ P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}}$$

Bu sistemada barcha talablarga xizmat ko'rsatilayotganligi tufayli

2. $p_{rad}=0$;

3. $q=1$;

4. $A=\lambda q=\lambda$

1. Band bo'lgan qurilmalar o'rtacha soni

$$N_{band}=\lim_{m\to\infty}\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^m p_0\right)=\rho$$

2. Bo'sh bo'lgan qurilmalar o'rtacha soni

$$N_{bo'sh}=n-\rho.$$

3. Xizmat ko'rsatish bandlik koeffisenti

$$K_{band}=\frac{\rho}{n}.$$

4. Qurilmalarning bo’sh turish koeffisenti

$$K_{bo'sh} = 1 - \frac{\rho}{n}.$$

9. Navbat kutuvchi talablar o’rtacha soni

$$L_{n.k.} = \lim_{n \to \infty} P_0 \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2},$$

$$L_{n.k.} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2};$$

10. Sistemadagi barcha talablar soni

$$L = L_{n.k.} + \rho.$$

11. Navbatda turish o’rtacha vaqti

$$W = \frac{L_{n.k.}}{\lambda} = \frac{\rho^n}{n! n\mu \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} p_0.$$

12. Talablarni sistemada bo’lish o’rtacha vaqti

$$V = W + \frac{1}{\mu}.$$

3.Statistik modellashtirish usuli. Amaliyotda juda ko’p operasiyalar mavjudki, ularning analitik modelini tuzish qiyin muammodan iborat. Analitik modelni qurish mumkin bo’lmagan hollarda statistik sinovlar usuli yoki Monte-Karlo usuli deb ataluvchi matematik modellashtarish usuli qo’llaniladi.

Bu metodni qo’llash qisqa vaqt ichida ko’p operasiyalar bajarish mumkin bo’lgan EHM bilan bog’liq. Turli xil natijalar EHMda olingandan so’ng katta statistik ma’lumot yig’iladi.

Monte-Karlo usuli juda ko’p mehnat talab qiladi. Bu metodni qo’llashdan oldin qo’pol bo’lsada qandaydir analitik model tuzish maqsadga muvofiqdir.

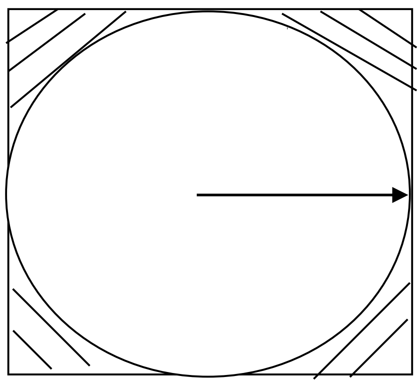
Statistik sinovlar usulining ustunligi shundaki u uneversaldir, ya’ni bu metod miqdor o’lchovga ega bo’lgan barcha hodisalarni tadqiq qilishga yaraydi.

Statistik modellashtirish usuli iqtisodiy tadqiqotlarda juda ko'p ishlatiladi.

Monte-Karlo usulining mohiyati shundan iboratki, unda ehtimollar nazariyasining qonunlari sun'iy ravishda bajariladi. Bu metodni qo'llaganda har bir boshlang'ich tasodifiy qiymatlar uchun operasiya bajariladi. (Ko'pgina operasiya EHMda bajariladi). Qaraliyotgan operasiyani juda ko'p marta takrorlangandan so'ng shu operasiya haqida informasiya yig'iladi.

Monte-Karlo usulining mohiyatini tushunib olish uchun misol qaraymiz.

Misol: Faraz qilaylik P sonining qiymatini hisoblash kerak bo'lsin. Bu ishni Monte-Karlo usuli yordamida bajaramiz. Buning uchun R=1 radiusli doira chizib uni



kvadrat ichiga joylashtirimiz. Ma'lumki, doira yuzi S0=PR formula bilan topiladi. R=1 bo'lgani uchun S_0=PR, ya'ni doira yuzi P soniga teng.

Rasmda shtrixlangan figura yuzani S_1 bilan belgilaymiz. Agar biror o'lchovi juda kichik bo'lgan predmetni kvadratga tashlasak, u doira ichiga tushish ehtimoli $\frac{S_0}{S_0+S_1}$ bo'ladi. Tajriba o'tkazib, predmetni kvadraga juda ko'p marta, masalan N marta tashlab, uning doira ichiga tushishlar sonini n_0 bilan belgilasak bu ehlimol n_0/N kabi yoziladi. $S_0+S_1=4$ ekanligini e'tiborga olsak, $S_0\pi = \frac{4n_0}{N}$

Faraz qilaylik, predmet N=40 marta tashlanganda n_0=31 marta doira ichiga tushgan bo'lsin. U holda

$$\pi = S_0 = \frac{4n_0}{N} = \frac{4\cdot 31}{40} = 3{,}1$$

Aniqroq hisoblash uchun predmetni yanada ko'proq tashlash kerak bo'ladi. Lekin predmetni tashlash ko'p vaqtni oladi. Shuning uchun bu ishni EHM da bajarish maqsadga muvofiqdir Buning uchun koordinata boshi doira markazida bo'lgan koordinatalar sistemasini olamiz. Bu tasodifiy sonlar bir biriga bog'liq bo'lmagan tekis taqsimotga ega bo'lgan (0,1) intervaldagi sonlar bo'lsin. Ularni $x_i.y_i$ deb belgilaymiz. Ma'lumki, agar $x_i^2+y_i^2\leq 1$ bo'lsa, $(x_{i,}y_i)$ bu nuqta doira ichida (yoki chegarada) yotadi, agarda $x_i^2+y_i^2>1$ bo'lsa, bu nuqta doiradan tashqarida bo'ladi. Shunday qilib, predmetni tashlash EHMda bir juft tasodifiy sonlarni hosil qilish bilan almashtirildi. Endi faqatgina shu ishni mumkin qadar ko'p marta bajarib N va n_0 larni haqida $S_0=\pi = \frac{4n_0}{N}$

Formula bo'yicha P ni hisoblash qoldi.

4. Ommaviy xizmat ko'rsatish sistemasini modellashtirish. Monte-Karlo usulini sodda ommaviy xizmat ko'rsatish sistemasiga ko'llashni qarab chiamiz. Bitta xizmat ko'rsatish kurilmasi bo'lgan sistemani qaraymiz. Agar talab kelgan vaqtda qurilma band bo'lsa talabga xizmat ko'rsatilmaydi (tolib navbat kutmaydi) deb faraz qilamiz. Qaralayotgan ommaviy xizmat ko'rsatish sistemasini modellashtirish uchun ikkita bir biridan bog'iq bo'lmagan ko'rsatkichli taqsimotga bo'ysunuvchi tasodifiy sonlarni hosil qilish kerak. Ulardan biri talablar kelishini, ikkinchisi talabga xizmat ko'rsatishni bildiradi.

Statistik siovlar usuli yordamida topilgan natijalar tasodifiy xarakterga ega.

Bu metod yordamida aniq natija olish uchun qancha sinov o'tkazish kerakligini aniqlash masalasini qaraymiz. Bu masalani hal qilish uchun ehtimollar nazariyasining markaziy teoremasidan foydalanamiz. Bizning masalamiz uchun bu teorema quyidagicha aytiladi: Katta sondagi N sinovlar uchun biror A hodisaning namoyon bo'lishi n/N nomal taqsimotga yaqin taqsimotga bo'ysunadi.

A hodisaning N sinovda namoyon bulish ehtimolini P bilan belgilasak

$$M\left[\frac{m}{n}\right] = p, \qquad \delta_{\frac{m}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

Monte-Karlo usulining anikligini topish uchun m/Nning R ehtimolidan farqi avvaldan berilgan E dan kichik bo'lish ehtimoli bilan aniqlanadi:

$$P\left\{\left|\frac{m}{N} - P\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right),$$

bunda $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – Laplas funksiyasi.

N ni topish uchun kuyidagi formula ishlatiladi:

$$N=\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}q\right)\right]^2$$

bu yerda (q-qandaydir ehtimol bilan N sondan sinov kilish yetarli deb hisoblanadi), Φ^{-1} – Laplas funksiyasiga teskari funksiya.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Kutishsiz ochiq xizmat ko'rsatish sistemasi uchun asosiy xarakteristikalar (Erlang formulalari)
2. Kutishli parallel xizmat ko'rsatish qurilmalari bo'lgan sistemalar uchun asosiy xarakteri bog'lanishlar.
3. Statik modellashtirish usuli (Monte-Karlo usuli) va uning ommaviy xizmat ko'rsatish sistemasini modellashtirishga tadbiqi.

Mavzuni mustahkamlash uchun tavsiya etiladigan adabiyotlar

1. Otaqulov S., Azizov I., Xodjayev T. Operasiyalarni tekshirishning asosiy masalalari. Muammoli ma'ruzalar kursi. Samarqand – 2004.
2. Вагнер Г. Основы исследований операции. Т. 1–3. М.: Мир. 1972-73.
3. Зайченко Ю. Б. Исследование операций. Киев. 1979.
4. Таха Х. Введение в исследование операций. Т. 1, 2. М.: Мир. 1981.

5-amaliy mashg'ulot. Variasion hisob. Eyler tenglamasi. Pontryaginning maksimum prinsipi

Ma'lumki, biz ko'rib kelgan funksiyalar, odatda, bitta yoki bir nechta erkli o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lar edi. Lekin ko'p masalalarda bunday funksiyalar tushunchasi yetarli bo'lmay qoladi: masalan, o'tkazgich bo'ylab elektr toki oqimi o'tganda o'tkazgich atrofida hosil bo'lgan elektromagnit maydonining kuchlanishi o'tkazgich ega bo'lgan egri chiziq shakliga bog'liq. Uchirilayotgan raketalar Yer sun'iy yo'ldoshlari va planetalararo kosmik kemalar sirtlarining shakllari ham katta ahamiyatga ega, ayniqsa yer atmosferasiga kirganda mumkin qadar kamroq qizish, atmosfera qarshiligini mumkin qadar kamroq sezish uchun, albatta, bu kemalarning shakllari katta ahamiyatga egadir. Funksional analiz kursida operatorlar, akslantirishlar, ko'p qiymatli funksiyalar haqidagi tushunchalar atroflicha o'rganib chiqiladi. Variatsion hisob fanida akslantirishlarning xususiy holi bo'lgan integral orqali berilgan funksionalning ekstremum masalasi o'rganiladi.

1 . Variatsion hisobning sodda masalasi. Eyler tenglamasi

1-ta'rif. *Funksional fazo osti to'plamini haqiqiy sonlar to'plamiga akslantirishga funksional deb ataladi.*

Integral ko'rinishdagi funksional quyidagicha:

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \tag{1.1}$$

berilgan bo'ladi. Bu yerda $F(x, y, y')$, $y = y(x)$ lar ma'lum funksiyalar sinfiga tegishli bo'lishadi. Bundan tashqari $y = y(x)$ funksiya quyidagi:

$$y(x_0) = y_0, \;\; y(x_1) = y_1 \tag{1.2}$$

chegaraviy shartlarni ham qanoatlantirish lozim.

Berilgan chegaraviy (1.2)-shartlarni qanoatlantiruvchi chiziqlar ichidan chiziqni topish kerakki, natijada (1.1)-funksional ekstremumga erishsin. Bu variatsion hisobning *eng sodda masalasi* deb ataladi.

Misol sifatida, variatsion hisobni shitob bilan rivojlanishiga turtki bergan, I. Bernulli tomonidan birinchi bor e'lon qilingan Braxistoxrona masalasini qaraylik.

Tekislikda, bir paytda vertikal va gorizantal chiziqlarda joylashmagan $A(x_0, y_0)$ va $B(y_0, y_1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq bo'ylab jism o'z og'irligi ta'sirida yuqoridan pastga qarab harakatlanadi. Savol: chiziq qanday shaklda bo'lganda jismning $B(y_1, y_1)$ nuqtaga kelish uchun, ketgan vaqti eng qisqa bo'ladi?

Berilgan A va B nuqtalar 1.1-rasmda ko'rsatilgan holatda bo'lishsin.

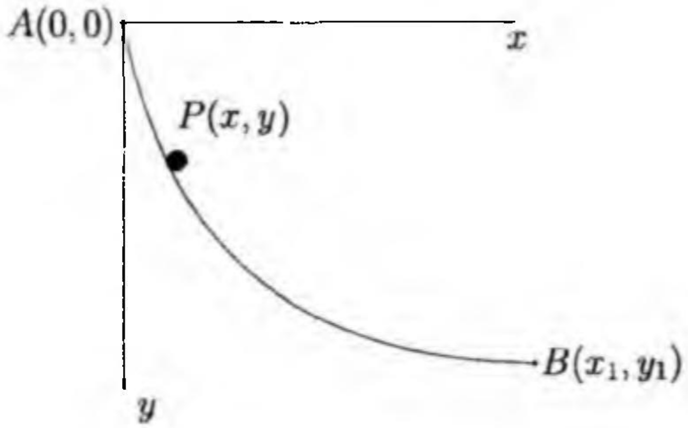
Fizik nuqtayi nazardan izlanayotgan chiziq to'g'ri chiziqning kesmasi bo'la olmaydi, chunki unda jismning tezligi sekin ortadi, bu holda A dan B ga kelish uchun ko'proq vaqt talab etiladi.

Izlanayotgan egri chiziq $y = y(x)$ bilan belgilansin. U holda tushayotgan jismning vertikal bo'yicha y masofa o'tgandagi tezligi $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ga teng bo'ladi. Biz bilamizki, egri chiziqning elementar yoyi $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$ ga teng, shu sababli $dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$

hosil bo'ladi. Bundan umumiy vaqt T quyidagiga:

$$T[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

teng bo'ladi. qilib quyidagi masalaga kelamiz: $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$ shartlarni qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ funksiyalar ichidan (1.1)-funksionalga minimum beruvchi funksiyani toping.



1.1-rasm

Ko'rsatiladiki, egri chiziq sikloidadan iborat bo'lib, uning tenglamasi:

$$x = R(t - sint),$$
$$y = R(1 - cost)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda R iladigan aylana radiusidir.

Lemma(Lagranj). $[x_0, x_1]$ oralida uzluksiz bo'lgan $m(x)$ funksiya va shu oraliqda $C^1[x_0, x_1]$ sinfga tegishli $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\eta(x)$ funksiya uchun, ushbu:

$$\int_{x_0}^{x_1} m(x)\eta(x)\,dx = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $m(x) \equiv 0$ bo'ladi.

Isbot. Teskarisidan faraz qilish usulidan foydalanamiz, ya'ni (x_0, x_1) oraliqda ξ nuqta topilsinki, $m(\xi) \neq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Aniqlik uchun, $m(\xi) > 0$ deb olaylik. U holda $m(x)$ ning uzluksizligidan bu nuqtani o'z ichiga olgan $(\xi_0, \xi_1) \subset [x_0, x_1]$ oraliq topiladiki, unda $m(x) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\eta(x)$ funksiyani quyidagicha qurib olamiz: $\eta_0(x) = (x - \xi_0)^2(x - \xi_1)^2$, agar $x \in (\xi_0, \xi_1)$; $\eta_0(x) = 0$, agar $x \bar{\in} (\xi_0, \xi_1)$. Bu $\eta_0(x)$ funksiya lemma shartlarini qanoatlantiradi. Bulardan quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{x_0}^{x_1} m(x)\eta_0(x)\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} m(x)\eta_0(x)\,dx > 0$$

bu esa lemma shartiga zid. Demak, farazimiz noto'g'ri. Bundan kelib chiqadiki $[x_0, x_1]$ oraliqda $m(x) \equiv 0$. Lemma isbot bo'ldi.

Eyler tenglamasi

Integral ko'rinishdagi funksionalning ekstremumini topish uchun, zaruriy shartlarni aniqlash masalasiga o'taylik. Faraz qilaylik, $v[y]$ funksional (1.2)-shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x)$ egri chiziq ustida ekstremumga erishsin. Berilgan egri chiziq $y(x)$ va unga ma'lum ma'noda yaqin bo'lgan $\bar{y}(x)$ egri chiziqlar ustidagi funksional qiymatlarini mos ravishda $v[y]$, $v[\bar{y}]$ bilan belgilaymiz. U holda $v[y]$ funksional orttirmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned}\Delta v &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, \bar{y}, \bar{y}') - F(x, y, y')]\,dx.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Oxirgi integral belgisi ostidagi ifodaga o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llab quyidagini hosil qilamiz:

$$F(x, \bar{y}, \bar{y}') - f(x, y, y') = F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y' + \delta y') +$$

$$+F(x,y,y'+\delta y')-F(x,y,y') = \frac{\partial F(x,y+\theta\delta y,y'+\delta y')}{\partial y}(\bar{y}-y)+$$

$$+\frac{\partial F(x,y,y'+\theta_1\delta y')}{\partial y'}(\bar{y}'-y')=\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\delta y'+r$$

bu yerda r – qoldiq, $\delta y = \bar{y} - y$, $\delta y' = \bar{y} - y'$ belgilashlar kiritilgan.

Endi buni (1.3) ga olib borib qo'ysak quyidagini hosil qilamiz:

$$\triangle v = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx + R,$$

bunda R qo'shiluvchi δy va $\delta y'$ larga nisbatan cheksiz kichik miqdordir. Oxirgi orttirmaning bosh qismi bo'lgan:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx$$

integral *funksionalning variatsiyasi* deyiladi va u δv bilan belgilanadi. Variatsiyani ifodalovchi integralni bo'laklab integrallash va $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$ ni hisobga olgan holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx.$$

Bundan kelib chiqadiki, funksionalning ekstremumi, δy va $\delta y'$ lar kichik miqdorlar bo'lganda, δv variatsiyaning ishorasi bilan aniqlanadi. Ammo δv variatsiya δy va $\delta y'$ lar hisobiga turli ishoraga ega bo'lishi mumkin, shu sababli δv variatsiya, demak, integralning qiymati nolga teng bo'lishi kerak. Ya'ni:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx = 0$$

tenglik funksionalning ekstremumga erishishining zaruriy sharti bo'ladi.

Oxirgi tenglikka Lagranj lemmasini qo'llash orqali quyidagi:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

ikkinchi tartibli differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Bu differensial tenglama *Eyler tenglamasi* deb ataladi. Uning yechimlari *ekstremallar*, (1.2)-chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi exstremal esa *joiz ekstremal* deb ataladi.

2-§. Maksimum prinsipi va klassik variatsion hisob

1. Ekstremallarni aniqlovchi Eyler tenglamasi va kuchli lokal minimumning Veyershtrass sharti maksimum prinsipining natijasi hisoblanadi.

Quyidagi:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \inf, \quad x(t_0) = x^0$$

klassik variatsion masalani qaraylik. $\dot{x}(t) = u(t)$ belgilashni kiritish bilan, ko'rilayotgan masalani ekvivalent bo'lgan:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf, \tag{2.1}$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \; x(t_0) = x^0, \; U \equiv R^n \tag{2.2}$$

masalaga keltiramiz.

(2.1)–(2.2)-masala uchun

$$H(t, x, u, p(t)) = -\lambda_0 L(t, x, u) + (p(t), u) \tag{2.3}$$

Pontryagin funksiyasini va

$$\dot{p}(t) = \lambda_0 L_x(t, \bar{x}, \bar{u}) \tag{2.4}$$

qo'shma sistemani yozamiz.

$(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \; t \in [t_0, t_1]$ optimal jarayon

$$\begin{aligned} &-\lambda_0 L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + (p(t), \bar{u}(t)) = \\ &= \max_{u \in R^n} [-\lambda_0 L(t, \bar{x}(t), u) + (p(t), u)], \; t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \tag{2.5}$$

maksimum prinsipini qanoatlantiradi. Klassik variatsion masalada $L(t, x, \dot{x})$ funksiya argumentlari bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lganligi sababli (2.5)-shartdan

$$H_u = -\lambda_0 L_u(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + p(t) = 0 \tag{2.6}$$

ayniyat kelib chiqadi.

Bundan ko'rinib turibdiki $\lambda_0 \neq 0$, chunki aks holda, ya'ni $\lambda_0 = 0$ bo'lsa (2.6) dan $p(t) = 0$ kelib chiqadi, bu esa maksimum prinsipi teoremasining shartiga zid. $\lambda_0 = 1$ deb olamiz.

1) (2.6) ni t bo'yicha differensiallab:

$$\frac{d}{dt}[-L_u(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + p(t)] = 0$$

ayniyatga kelamiz, (2.4) dan foydalanib,

$$-\frac{d}{dt}L_u(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$$

ayniyatni hosil qilamiz. Demak, optimal jarayon Eyler tenglamasini qanoatlantirar ekan.

2) O'ng tomoni qo'zg'almas bo'lganligi sababli $p(t_1) = 0$ bo'ladi, yoki $L_{\dot{x}}(t_1, \bar{x}(t_1), \dot{\bar{x}}(t_1)) = 0$ bu esa o'ng tomon uchun, transversallik shartidir.

3) $H(t, \bar{x}(t), u, p(t))$ funksiyaning $u = \bar{u}(t)$ da maksimumga erishishining zaruriy sharti $H_{uu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t))$ matritsaning musbat bo'lmasligidir. Buni hisobga olgan holda (2.3) dan:

$$L_{uu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \geq 0, \ \ t \in [t_0, t_1]$$

$$(L_{uu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\xi, \xi) \geq 0, \ \ \forall \xi \in R^n$$

ya'ni Lejandr sharti hosil bo'ladi.

4) Variatsion hisobning Vershtrass sharti maksimum prinsipining natijasi bo'ladi. Buni ko'rsatish uchun, (2.5) ni quyidagicha:

$$-L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + (p(t), \bar{u}(t)) \geq -L(t, \bar{x}(t), u) + \\ (p(t), u), \ \forall t \in [t_0, t_1], \ \forall u \in R^n \tag{2.7}$$

ekvivalent ko'rinishda yozib olamiz.

Variatsion hisobning klassik masalasida $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$ va $u(t)$ kamida uzluksiz bo'ladi, shuning uchun, (2.7) tengsizlik ixtiyoriy $u \in R^n$ da o'rinlidir.

$$u = \xi, \ \bar{u}(t) = \dot{\bar{x}}(t), \ p(t) = L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \tag{2.8}$$

belgilashlarni hisobga olgan holda (2.7) ni quyidagicha:

$$\begin{gathered} L(t, \bar{x}(t), \xi) - L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - (L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))(\xi - \dot{\bar{x}})) \geq 0, \\ \forall t \in [t_0, t_1], \ \forall \xi \in R^n \end{gathered} \tag{2.9}$$

yozib olamiz. (2.9) tengsizlik Veyershtrass shartini ifodalaydi.

5) $p(t)$ funksiya absolyut uzluksiz ekanligini hisobga olib, (2.3), (2.5) va (2.8) dan

$$\begin{gathered} \left(L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))\right)_t = 0, \\ \left((\dot{\bar{x}}(t), L_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))) - L(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))\right)_t = 0, \ t \in [t_0, t_1] \end{gathered} \tag{2.10}$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$\left(z(t)\right)_t = z(t+0) - z(t-0)$$

belgilash kiritilgan. (2.10) shart $x(t)$, $(t \in [t_0, t_1])$ ning hosilalari uzilishga ega bo‘lgan nuqtalarida Erdman – Veyershtrass shartini beradi.

6) Quyidagi izoperimetrik masalani qaraymiz:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \inf,$$

$$K_1 = \int_{t_0}^{t_1} G_1(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt,$$

$$x(t_0) = x^0, \ x(t_1) = x^1.$$

$\dot{x}(t) = u(t)$ belgilashni kiritish bilan bu masalaga ekvivalent bo'lgan:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf,$$

$$K_1 = \int_{t_0}^{t_1} G_1(t, x(t), u(t))\, dt,$$

$$\dot{x} = u,$$

$$x(t_0) = x^0, \;\; x(t_1) = x^1$$

masalani hosil qilamiz.

x vektorga qo'shimcha x^0 komponenta kiritamiz, u

$$\dot{x}^0 = G_1(t, x(t), u(t))\, dt, \;\; x^0(t_0) = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi.

qilib

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \\ \dot{x}^0 = G_1(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

differensial tenglamar sistemasiga ega bo'lamiz, bu yerdan

$$x^0(t) = \int_{t_0}^{t_1} G_1(s, x(s), u(s))\, ds,$$

$$x^0(t_1) = K_1.$$

Pontryagin funksiyasini yozamiz:

$$H(t, x, u, p(t)) = -\lambda_0 L(t, x, u) + (p(t), u) + p^0(t) G_1(t, x, u).$$

Maksimum prinsipiga asosan optimal boshqaruv Pontryagin funksiyasiga maksimum qiymat beradi, $U = R^n$ bo'lganligi uchun, maksimumga erishishning zaruriy sharti – statsionarlik $\bar{H}_u(t) = 0$ bajariladi, ya'ni:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial u}(t) = -\lambda_0 \frac{\partial L(t,\bar{x},\bar{u})}{\partial u} + p(t) + p^0(t)\frac{\partial G_1(t,\bar{x},\bar{u})}{\partial u} = 0. \quad (2.11)$$

Qo'shma sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = \lambda_0 \frac{\partial L(t,\bar{x},\bar{u})}{\partial x} - p^0(t)\frac{\partial G_1(t,\bar{x},\bar{u})}{\partial x}, \\ \dot{p}^0(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x^0} = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Bundan kelib chiqadiki: $p^0(t) = \lambda = const.$ $u = \dot{x}$ ekanligini hisobga olib (2.11) munosabatni quyidagicha yozib olamiz:

$$-\lambda_0 \frac{\partial L(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{x}} + p(t) + p^0(t)\frac{\partial G_1(t,\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\widetilde{L} = -\lambda_0 L + p^0(t) G_1,$$

u holda oxirgi tenglama quyidagi ko'rinishda

$$p(t) + \frac{\partial \widetilde{L}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.13)$$

bo'ladi. (2.13) ni t bo'yicha differensiallab,

$$\dot{p}(t) + \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.14)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(2.12) qo'shma sistemani

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \widetilde{L}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))}{\partial x} \quad (2.15)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

(2.14) va (2.15) larni birlashtirib, izoperimetrik masala uchun, quyidagi:

$$\frac{\partial \widetilde{L}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))}{\partial \dot{x}}=0$$

Eyler – Lagranj tenglamasini hosil qilamiz.

Optimal boshqaruvga doir masalalarni yechish
1-misol.

$$J(u)=\int_0^2 x_1\,dt$$

ko'rinishdagi funksionalning minimumini topish talab etiladi. Bunda

$$x_1(0)=x_2(0)=0,$$

boshlang'ich

$$|u|\le 1,$$

boshqaruvga chegara va

$$x_1(2)=x_(2)=0,$$

chegaraviy shartlar hamda

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=u$$

dinamik chegaralar berilgan.

Yechish. Pontryagin funksiyasi quyidagi:

$$H(t,x,u,\lambda_0,p(t))=-\lambda_0x_1+p_1(t)x_2+p_2(t)u$$

ko'rinishda bo'ladi.

Maksimum prinsipiga asosan optimal boshqaruv

$$H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{\lambda}_0,\bar{p}(t))=\max_{|u|\le 1}(H(t,\bar{x}(t),u,\lambda_0,p(t))$$

tenglikni qanoatlantiradi. Bundan $p_2(t)\bar{u}(t) = \max\limits_{|u|\leq 1} p_2(t)u$ ga ega bo‘lamiz. Maksimum prinsipiga asosan optimal boshqaruv

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & p_2(t) > 0, \\ -1, & p_2(t) < 0, \\ \text{[-1,1]} \; dan \; ixtiyoriy, & p_2(t) = 0, \end{cases}$$

bo‘ladi. Agar $p_2(t) = 0$ chekli vaqt momentlari t da ro‘y bersa, bu nuqtalarda boshqaruvning qiymatlarini ixtiyoriy deb olish mumkin. Mabodo, $p_2(t) = 0$ musbat o‘lchovli to‘plamda o‘rinli bo‘lsa, u holda boshqa optimallik shartlaridan foydalanishga to‘g‘ri keladi:

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda_0, p(t))}{\partial x_1} = \lambda_0,$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda_0, p(t))}{\partial x_2} = -p_1(t)$$

qo‘shma sistemani yozamiz.

O‘ng va chap tomonlar qo‘zg‘almas bo‘lganligi uchun, transversallik sharti natija bermaydi.

Avval regulyar bo‘lmagan yechimlarni tahlil etamiz, ya’ni $\lambda_0 = 0$ bo‘lsin. U holda qo‘shma sistema quyidagi:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \end{cases} \tag{2.16}$$

ko‘rishni oladi, buni integrallaymiz:

$$\begin{cases} p_1(t) = c, \\ p_2(t) = -ct + b. \end{cases} \tag{2.17}$$

Ko‘rsatish mumkinki, optimal boshqaruv o‘zgarmas son bo‘la olmaydi, chunki bunda holat uchun, boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bajarilmaydi. (2.16), (2.17) dan kelib chiqadiki, optimal boshqaruv o‘z qiymatini ko‘pi bilan faqat bir marta o‘zgartira oladi, chunki nol bo‘magan chiziqli $p_2(t)$ funksiya o‘z ishorasini ko'pi bilan bir marta almashtirishi mumkin, bu almashtirish momentini τ bilan belgilaymiz. U holda quyidagi ikkita hol bo'lishi mumkin:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,\tau], \\ 1, & t \in [\tau, 2], \end{cases} \qquad \bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,\tau], \\ -1, & t \in [\tau, 2]. \end{cases} \tag{2.18}$$

1. (2.18) ning birinchi holini qaraymiz, ya'ni

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,\tau], \\ 1, & t \in [\tau, 2]. \end{cases} \tag{2.19}$$

$t \in [0,\tau]$ da

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1 \end{cases}$$

sistemaning umumiy yechimi:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + At + B, \\ \bar{x}_2(t) = -t + A \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi. Boshlang'ich shartlardan foydalanib A va B larni topamiz:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(0) = B = 0, \\ \bar{x}_2(0) = A = 0. \end{cases}$$

$t \in [\tau, 2]$ da mos sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \frac{t^2}{2} + A_1 t + B_1, \\ \bar{x}_2(t) = t + A_1 \end{cases}$$

bo'lib, chegaraviy shartlardan foydalanamiz:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(2) = 2 + 2A_1 + B_1 = 0 \Rightarrow A_1 = -2, \\ \bar{x}_2(2) = 2 + A_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 2. \end{cases}$$

$\bar{x}_2(t)$ funksiyaning τ nuqtada uzluksiz bo'lishligidan $\bar{x}_2(\tau - 0) = \bar{x}_2(\tau + 0)$ ga yoki $-\tau = \tau - 2$ ga ega bo'lamiz. Buni yechib $\bar{u}(t)$ boshqaruv qiymati o'zgarish momenti $\tau = 1$ ni topamiz. Bundan:

$$\bar{x}_1(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2}, & t \in [0,1], \\ -\frac{t^2}{2} - 2t + 2, & t \in (1,2], \end{cases} \quad \bar{x}_2(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0,1], \\ -t - 2, & t \in (1,2]. \end{cases}$$

x_2(t) funksiya $t = \tau = 1$ da uzluksiz emas, demak, (2.19) mumkin emas ekan.

2. Shunga o‘xshash (2.18) ning ikkinchi holini ko‘ramiz: $t \in [0, \tau]$ da

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 1 \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Uning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \frac{t^2}{2} + A_2 t + B_2, \\ \bar{x}_2(t) = t + A_2. \end{cases}$$

Chegaraviy shartlardan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(0) = B_2 = 0, \\ \bar{x}_2(0) = A_2 = 0. \end{cases}$$

Demak,

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \frac{t^2}{2}, \\ \bar{x}_2(t) = t. \end{cases}$$

Agar $t \in [\tau, 2]$ bo‘lsa

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1 \end{cases}$$

dinamik sistema

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + A_3 t + B_3, \\ \bar{x}_2(t) = -t + A_3 \end{cases}$$

umumiy yechimga ega bo‘ladi. Bu yerda ham chegaraviy shartlardan foydalangan holda,

$$\begin{cases} \bar{x}_1(2) = -2 + 2A_3 + B_3 = 0 \Rightarrow A_3 = 2, \\ \bar{x}_2(2) = -2 + A_3 = 0 \Rightarrow B_3 = -2 \end{cases}$$

ga ega bo‘lamiz. Yoki

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t - 2, \\ \bar{x}_2(t) = -t + 2. \end{cases}$$

$x_2(t)$ funksiyaning τ momentda uzluksizligidan $\tau = -\tau + 2$ tenglik hosil bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki, boshqaruvning qiymat almashtirish momenti $\tau = 1$ ga teng bo‘lar ekan. Bu nuqtada $x_1(t)$ funksiya uzluksiz emas, demak, bu holda regulyar bo‘lmagan yechimlar yo‘q ekan.

3. Regulyar holni qaraymiz. $\lambda_0 = 1$ bo‘lsin, u holda qo‘shma sistemaning yechimi:

$$\begin{cases} p_1(t) = t + c, \\ p_2(t) = -\frac{t^2}{2} - ct + b. \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$p_2(t) = -\frac{t^2}{2} - ct + b$ parabola $[0,2]$ kesmani ko‘pi bilan ikki marta kesib o‘tishi mumkin. Regulyar bo‘lmagan holda ko‘rdikki, boshqaruv o‘zgarmas ham, bir marta qiymatini o‘zgartirishi ham maqsadga olib kelmaydi. Shu sababli yuqoridagi parabola kesmani ikki marta kesib o‘tishi kerak. Parabolaning shoxlari pastga yo‘nalgani uchun, boshqaruv qiymati avval minus, keyin plyus va yana minus bo‘ladi. Shuning uchun, optimal boshqaruvning ko‘rinishi

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau_1], \\ 1, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ -1, & t \in [\tau_2, 2], \end{cases}$$

bo‘ladi:

a) $\bar{u}(t) = -1,\ t \in [0, \tau_1]$ bo‘lsin, unda

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1 \end{cases}$$

sistemaning yechimi

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + A_1 t + B_1, \\ \bar{x}_2(t) = -t + A_1 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi. Chegaraviy shartlardan foydalanamiz:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(0) = B_1 = 0, \\ \bar{x}_2(0) = A_1 = 0; \end{cases}$$

b) $\bar{u}(t) = -1,\ t \in [\tau_2, 2]$ bo'lsin, u holda,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1 \end{cases}$$

sistemaning yechimi

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + A_2 t + B_2, \\ \bar{x}_2(t) = -t + A_2 \end{cases}$$

bo'ladi.

Chegaraviy shartlardan foydalanib A_2, B_2 larni topamiz:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(2) = -2 + 2A_2 + B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = -2, \\ \bar{x}_2(2) = -2 + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 2; \end{cases}$$

c) $\bar{u}(t) = 1,\ t \in [\tau_1, \tau_2]$ bo'lsin, u holda

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 1 \end{cases}$$

sistema

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \frac{t^2}{2} + A_3 t + B_3, \\ \bar{x}_2(t) = t + A_3 \end{cases}$$

yechimga ega bo'ladi. $x_1(t)$ va $x_2(t)$ funksiyalarning uzluksizligidan

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\tau_1 - 0) &= \bar{x}_1(\tau_1 + 0), \\ \bar{x}_2(\tau_1 - 0) &= \bar{x}_2(\tau_1 + 0), \\ \bar{x}_1(\tau_2 - 0) &= \bar{x}_1(\tau_2 + 0), \\ \bar{x}_2(\tau_2 - 0) &= \bar{x}_2(\tau_2 + 0) \end{aligned}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bundan

$$A_3 = -1,\ B_3 = \frac{1}{4},\ \tau_1 = \frac{1}{2},\ \tau_2 = \frac{3}{2}$$

kelib chiqadi. U holda optimallikning zaruriy shartiga asosan:

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} -1, t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1, \ t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \\ -1, t \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases} \qquad \bar{x}_1(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2}, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{4}, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 2, t \in [\frac{3}{2}, 2]. \end{cases}$$

$$\bar{x}_2(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ t - 1, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \\ -t + 2, t \in [\frac{3}{2}, 2]. \end{cases}$$

hosil bo'ladi. Optimal jarayonda funksionalning qiymati

$$L(u) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{t^2}{2}\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{4}\right) dt +$$
$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(-\frac{t^2}{2} + 2t - 2\right) dt = \frac{1}{4}$$

ga teng.

ILOVALAR

Mustaqil ta'lim tashkil etishning shakli va mazmuni

Talaba mustaqil ta'limning asosiy maqsadi - o'qituvchining rahbarligi va nazoratida muayyan o'quv ishlarini mustaqil ravishda bajarish uchun bilim va ko'nikmalarini shakllantirish va rivojlantirish.

Mustaqil ish mavzularini o'zlashtirish ta'lim jarayonida uzluksiz nazorat qilib boriladi va yozma hisobot sifatida topshiriladi.

Talaba mustaqil ishini tashkil etishda quyidagi shakllardan foydalanadi:

- ayrim nazariy mavzularni o'quv adabiyotlari yordamida mustaqil o'zlashtirish;
- berilgan mavzular bo'yicha axborot (referat) tayyorlash;
- nazariy bilimlarni amaliyotda qo'llash;
- maket, model va namunalar yaratish;
- ilmiy maqola, anjumanga ma'ruza tayyorlash va h.k.

Bunda talabalar ma'ruzalarda olgan bilimlarini amaliy mashg'ulotlarni bajarishlari bilan mustahkamlashi hamda nazariy mexanikaning ba'zi mavzularini tushunishi hamda ularga oid masalalarni yechishlari kerak.

№	Mustaqil ta'lim mavzulari
1	Zahirani boshqarish masalasi. Kuchlanishni taqsimlash modeli.
2	Ommaviy xizmat kursatish modellari.
3	Boshqariluvchi Markov zanjirlari turlari. Markov o'yinlari turlari.
4	Chiziqli tizimlarni optimal boshqarish. Boshqarishning optimalligini yetarli sharti.
5	Optimal boshqarish masalalarini yechish uchun izoxron usul.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Вагнер Г. Основы исследований операции. Т. 1–3. М.: Мир. 1972-73.
2. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.
3. Зайченко Ю. Б. Исследование операций. Киев. 1979.
4. Таха Х. Введение в исследование операций. Т. 1, 2. М.: Мир. 1981.
5. Q. Safayeva. Matematik dasturlash. Darslik. TMI-2003y.
6. М.С Красс, Б.П. Чупрынов. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: «Дело», 2008.
7. Красс М. С., Чупрынов В.П. Математика для экономистов. 2-е изд. СПб., 2005.
8. Otaqulov S., Azizov I., Xodjayev T. Operasiyalarni tekshirishning asosiy masalalari. Muammoli ma'ruzalar kursi. Samarqand – 2004.
9. Дюбин Г. Н., Суздал В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981.
10. Беллман Р. Динамическое программироваине. М.: ИИЛ, 1960.
11. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Сов. Радио, 1964, 192 с.
12. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977. 176 с.5

Internet manzillari

1. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm
2. http://www.ruscommech.ru/
3. http://iccpripu.ru
4. http://lib.ru

Glossariy

Model - lotincha *modulus* so’zidan olingan bo’lib, o’lchov, namuna ma’nolarini anglatadi.

Matematik model - o’rganilayotgan jarayonlarni algebraik, differensial yoki integral tenglamalar ko’rinishidagi taqribiy ifodasi;

Faktorlar - modellashtirishda tashqi muhitning tekshirilayotgan obyekt parametrlariga ta’sir qiluvchi ko’rsatkichlari.

Operasiya - qandaydir maqsadni ko’zlab qilinayotgan va shu maqsadga erishish uchun birlashtirilgan harakatlar tizimiga aytiladi.

Optimal qaror - qarorlar ichida boshqalariga qaraganda qandaydir maqsadga erishishda eng yaxshi, eng qulay, eng kerakli qarorga aytiladi.

Samaradorlik mezoni - operasiya maqsadining matematik ekvivalenti bo’lib, shu maqsadga erishganlik darajasini miqdoriy baholash imkonini beradi.