А. А. АБДУҚОДИРОВ, Ф. Н. ФОЗИЛОВ,
Т. Н УМУРЗОҚОВ

ҲИСОБЛАШ МАТЕМАТИКАСИ ВА ДАСТУРЛАШ

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги педагогика институтларининг талабалари учун ўқув қўлланмаси сифатида тавсия этган

ИККИНЧИ НАШРИ

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ“ 1996

Тақризчилар: техника фанлари доктори *М. З. Зиёхўжаев*
физика-математика фанлари доктори *Н. Н. Муҳитдинов*

Махсус муҳаррир — физика-математика фанлари номзоди, доцент *М. М. Орипов*

Ушбу қўлланмада ҳисоблаш техникасининг ривожланиш тарихи, ҳисоблаш машиналари ва уларнинг арифметик асослари, математик таъминоти, алгоритм ва алгоритмик тил ҳақида тушунчалар, Бейсик дастурлаш тили, ҳисоблаш математикаси элементлари баён қилинган. Бундан ташқари, материални ўзлаштиришга ёрдам берадиган мисол ва масалалар ҳам келтирилган.

Қўлланма педагогика институтлари талабаларига мўлжалланган. Ундан, шунингдек, кечки ва сиртқи бўлим талабалари ва ўрта мактаб ўқитувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин.

АБДУҚАҲҲОР АБДУҚОДИРОВ,
ФУРИДДИН ФОЗИЛОВ,
ТОШПУЛАТ УМУРЗОҚОВ

ҲИСОБЛАШ МАТЕМАТИКАСИ ВА ДАСТУРЛАШ

Педагогика институтлари талабалари учун ўқув қўллана

Тошкент «Ўқитувчи» 1996

Таҳририят мудири *М. Пўлатов.*
Муҳаррир *С. Бекбоева*
Бадиий муҳаррир *М. Кудряшова*
Тех. редактор *Т. Ф. Скиба, Э. В. Вильданова*
Мусаҳҳиҳ *М. И. Иброҳимова*

ИБ № 6773

Теришга берилди 15.12.95. Босишга рухсат этилди 23.07.96. Формати 84×108/32. Литературная гарнитураси. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 13,44. Шартли кр.-отт. 13,86. Нашр л. 11,96. Тиражи 3000. Буюртма № 185.

«Ўқитувчи» нашриёти. 700129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09-251-93. Вилоят газеталарининг М. В. Морозов номидаги бирлашган нашриёти ва босмахонаси. Самарқанд ш., У. Турсунов кўчаси 82.

$A \frac{1702070000 - 166}{353\ (04) - 97} 147 - 96$

ISBN 5—645-00139—7

ИККИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Қўлингиздаги қўлланманинг иккинчи нашри биринчи нашрига қараганда анча ўзгартириш билан чоп этилди. Жумладан, қўлланманинг биринчи бобига „Ахборотларни иккили саноқ системасида коллаш", „Мантиқий амаллар ва схемалар", „Компьютер ишлашининг мантиқий ва физик асослари", „Компьютернинг дастур билан бошқариладиган иш принципи" каби янги параграфлар қўшилди. Қўлланмада иложи борича ўзбек атамаларидан фойдаланишга ҳаракат қилинди. Унинг V—VIII бобларида берилган „Сонли услубларнинг" деярли барчасига замонавий компьютерларга мўлжалланган дастурлар келтирилди Бир неча йил давомида дарс жараёнида сезилган камчиликлар, шунингдек кўпгина кишиларнинг истак ва фикрлари ҳисобга олинди. Қўлланманинг ушбу нашри масала-ва мисоллар билан бойитилди Бундаги барча қўшимча ва ўзгартиришларни А. А. Абдуқодиров бажарди.

БИРИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИДАН

Республика педагогика институтларида юқори малакали, ҳозирги замон талабларига тўла жавоб берадиган етук физика, математика ва информатика ҳамда ҳисоблаш техникаси мутахассислиги бўйича ўрта мактаб ўқитувчилари тайёрлаш алоҳида аҳамиятга эга. Бу эса талабаларни она тилида ёзилган дарслик ва қўлланмалар билан таъминлашга бевосита боғлиқдир.

Умумий таълим ва ҳунар-техника мактаби ҳамда олий ўқув юртларини ислоҳ қилишнинг асосий йўналишларида ёш авлоднинг мустаҳкам билим олиши учун ҳозирги замон техника воситаларидан унумли фойдаланиш, замонавий ҳисоблаш техникаси тўғрисидаги билимлар ва шу техникадан фойдаланиш жараёнида компьютерларнинг кенг кўламда қўлланишини таъминлаш лозимлиги алоҳида қайд этиб ўтилган. Ана шу мақсадда ўрта мактаблар, техникумлар ва олий ўқув юртлари Агат, Искра-226, ДВК-2М, Ямаха, Правец-8, УКНЦ, БК-0010, Корвет, IBM каби ва бошқа мини ЭҲМ лар билан жиҳозланяпти, ҳисоблаш марказлари, дисплей синфлари ташкил қилиняпти.

Мазкур қўлланма педагогика институтларининг физика-математика факультетларида ўқиётган талабаларга ҳисоблаш техникасидан фойдаланишни, турли дастурлар тузишни ўргатиш, умуман ҳисоблаш техникаси ва дастурлар тузишни ўргатиш, дастурлашга доир маълумотлар беришни кўзда тутиб яратилган. Китобда ҳисоблаш техникасининг қисқача ривожланиш тарихи ва келажаги, ЭҲМ нинг арифметик асоси, алгоритм ва алгоритмик тил, БЕЙСИК дастурлаш тили ҳақида тушунчалар берилган ҳамда чизиқли дастурлаш ҳақида тушунчалар келтирилган.

Қўлланмани ёзишда муаллифлар ўзларининг Тошкент ва Сирдарё Давлат педагогика институтларида кўп йиллар давомида ўқиган маърузаларини ва шу соҳада чоп этилган баъзи услубий кўрсатмаларини асос қилиб олдилар.

Қўлланма саккиз бобдан иборат бўлиб, I, II, III бобларни муаллифлар биргаликда, VI, VII бобларни А. Абдуқодиров ва Ф. Фозилов, қолган бобларни А. Абдуқодиров ёзган.

Муаллифлар қўлёзмани синчиклаб кўриб чиқиб, ўз фикр ва маслаҳатларини бериб, қўлланманинг сифатини яхшилашга ёрдам берган физика-математика фанлари доктори Н. Муҳитдинов, техника фанлари докторлари Т. Ф. Бекмуратов, М. Зиёхўжаев, физика-математика фанлари номзоди Т. Х. Шарипов ва Э. Нисанов ўртоқларга ўзларининг самимий миннатдорчиликларини билдирадилар.

Бундай қўлланма ўзбек тилида илк бор чоп этилаётганлиги учун айрим хато ва камчиликлардан холи эмас, албатта. Шундай камчиликларни кўрсатган ўртоқларга муаллифлар ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

Муаллифлар

I БОБ. ҲИСОБЛАШ ТЕХНИКАСИ РИВОЖЛАНИШИНИНГ АСОСИЙ БОСҚИЧЛАРИ

1-§. Механик машиналаргача бўлган давр

Ҳисоблаш ишларининг тарихи одамзод пайдо бўлишидан бошланади. Ер юзидаги энг биринчи ҳисоблаш асбоби ибтидоий одамларнинг бармоқлари эди. Қўл ва оёқ бармоқлари ибтидоий „ҳисоблаш асбоби" вазифасини ўтаган. Бинобарин, ўша олис замонлардаёқ ҳисоблашнинг энг биринчи ва энг оддий усули — бармоқ ҳисоби пайдо бўлган. У қадимий қабилаларда ҳисобни 20 гача олиб боришни таъминлаган. Ҳисоблашнинг бу усулида бир қўл бармоқлари „беш" ни, икки қўл бармоқлари „ўн"ни, қўл ва оёқ бармоқлари эса биргаликда „йигирма"ни билдирган.

Дастлабки ва энг содда сунъий ҳисоб асбобларидан бири биркадир Бирка 10 ёки 12 та таёқчадан иборат бўлиб, таёқчалар турли-туман шакллар билан ўйилгандир. Кишилар бирка ёрдамида подадаги моллар сонини, йиғиб олинган ҳосил миқдорини, қарз ва ҳоказоларни ҳисоблашган.

Ҳисоблаш ишларининг мураккаблашуви эса янги ҳисоблаш асбоблари ва усулларини излашни тақозо этарди. Ана шундай эҳтиёж туфайли бунёдга келган ва кўринишидан ҳозирги чўтни эслатувчи абак асбоби ҳисоблаш ишларини бирмунча осонлаштирди. Дастлабки ҳисоб асбобларидан яна бири рақамлар ёзилган бир қанча таёқчалардан иборат бўлиб, шотландиялик математик Жон Непер номи билан аталган. Непер таёқчалари ёрдамида қўшиш, айириш ва кўпайтириш амаллари бажарилган. Кейинроқ бу асбоб анча такомиллаштирилди ва ниҳоят, логарифмик чизғич яратилишига асос бўлди.

2-§. Механик давр

Ҳисоблаш техникасида механик қурилмалар даврини бошлаб берган машиналардан бири немис олими Вильгельм Шиккард томонидан 1623 йили ихтиро қилинди. Бироқ, бу ҳисоблаш машинаси жуда тор доирадаги кишиларгагина маълум бўлганлиги сабабли узоқ вақтларгача бу борадаги биринчи ихтирочи 1645 йили арифмометр ясаган француз математиги Блез Паскаль деб ҳисобланиб келинган. Лекин 1958 йили Штутгарт шаҳри кутубхонасида И. Кеплернинг қўлёзма ва ҳужжатлари орасидан топилган ҳисоблаш машинаси чизмаси бу борадаги биринчи ихтирочи Шиккард эканлигини узил-кесил тасдиқлади.

Лекин қарангки, Шиккарднинг машинаси ҳам биринчи эмас экан: 1967 йили Мадриддаги миллий кутубхонада Леонардо да Винчининг нашр қилинмаган икки жилдли қулёзмаси топилди. Қўлёзманинг биринчи жилди деярли бошдан-оёқ механикага бағишланган бўлиб, ундаги чизмалар орасидан ҳисоблаш қурилмасининг чизмаси ҳам чиққан. Шу чизма асосида машина яратилганда, у қўшиш ва айириш амалларини бажарувчи қурилма эканлиги маълум бўлди. Шунга қарамай, Леонардо да Винчи XV—XVI асрларда ясалган ҳисоблаш машиналарининг номаълум ихтирочиларидан бири деб ҳисобланиб келинмоқда Механик ҳисоблаш машиналарининг тарихи эса, юқорида айтиб ўтилганидек, Паскаль машинасидан бошланади.

Блез Паскалнинг отаси Этьен Паскаль молия ишларига боғлиқ турли вазифаларда хизмат қилар эди ва табиийки ҳисоб-китоб унинг кўп вақтини оларди. Ёш Паскаль отасининг меҳнатини енгиллаштиришга уринди ва ҳисоблаш машинасини яратишга муваффақ бўлди. Сирасини айтганда, Блез соат механизмини ҳисоблаш машинасига айлантирди. Ўртадаги тафовут шунда эдики, қўзғалмас циферблат қўзғалувчан, ҳаракатланувчи соат мили эса, аксинча, қўзғалмайдиган бўлди. Циферблат дастлаб ҳисоб дискига, кейинроқ эса ҳисоб ғилдирагига айланди. Паскалнинг машинаси бўйи 30—40, эни 15, баландлиги 10 сантиметргача бўлган жез қутичадан иборат эди. Асримиз бошларида француз журналларидан бири „Паскалнинг 50 дан ортиқ машинаси мавжуд... уларнинг барчаси шакли, қандай материалдан ясалгани ва қай хилда ишлашига кўра турлича", деб ёзган эди.

Паскалнинг машинаси немис математиги, механиги ва файласуфи Готфрид Лейбницни ҳам ихтирочиликка ундади. Аммо у фақат қўшиш ва айиришнинг ўзигина эмас, балки тўртала арифметик амални бажара оладиган машина яратишни истарди. Лейбниц 1673 йили шундай машинани яратди ва уни Париж академиясига тақдим қилди. Бу ҳисоблаш машинасидаги янгилик шунда эдики, Лейбниц биринчи бўлиб, рақамлар терадиган ғилдиракни поғонали валик атрофида турли узунликдаги ўнта зинаси бўлган цилиндр билан алмаштирди. У машиналаридан бирини Россия подшоси Петр I га совға қилмоқчи эди, лекин, афсус и, ўша машина бузилиб қолди, Лейбниц уни тузатишга юборди, бироқ механик қанча уринмасин, машинани тузата олмади. Лейбницнинг ҳисоблаш машиналаридан бири ҳозир Ганновер шаҳри музейида сақланмоқда.

Механик машиналарнинг тараққиётида рус олимларининг ҳам хизматлари каттадир. Масалан, 1845 йилда З. Слонимский тўрт арифметик амални ва илдиз чиқариш амалини бажара оладиган ҳисоблаш асбоби схемасини чизиб, матбуотда эълон қилди. Бу асбоб Россия фанлар Академияси томонидан иккинчи даражали Демидов мукофоти билан тақдирланди. Атоқли рус математиги В. Я. Буняковский 1867 йилда 12 хонали сонларни қўшиш ва айириш учун ишлатиш мумкин бўлган ҳисоблаш машинасини яратди ва ушбу ҳисоблаш воситаси ёрдамида кўп ҳисоблашларни муваффақиятли бажарди

Ҳисоблаш машиналарида поғонали валикнинг қўлланилиши механик машиналарни такомиллаштиришга кучли турткн берди, бир қанча олимлар ҳисоблаш машиналарининг кўпгина хилларини яратишди. Булар орасида рус математиги П. Л. Чебишевнинг арифмометри алоҳида эътиборга лойиқдир. 1890 йили бошқа бир рус математиги В. Однер ғилдиракдаги тишлар сони ўзгарувчан ва қўлланиб келинган „Феликс" арифмометрдан айтарли фарқ қилмайдиган ҳисоблаш машинасини яратди.

Электр энергияси билан ишловчи ҳисоблаш машиналари асосан қўлда ҳаракатлантириладиган механик қурилмаларнинг ўрнини эгаллади. Электромеханик ҳисоблаш машиналарининг деярли ҳаммасида сонлар машинага тугма (клавиш) лар ёрдамида киритилади. Бу босқичда тугма Однер ғилдираги принципида ишлайдиган ўн тугмали „ВК-1“ машинаси ишлаб чиқилди. Кейинроқ эса барча арифметик амаллар учун етарли тугмалари бўлган „КСМ-1“ ва „КСМ-2“ ҳисоблаш машиналари яратилди. Бу хил машиналарни янада такомиллаштириш туфайли „САЛ-2С“, „САР“, „ВМА-2“, „ВММ-2“ ва бошқа ҳисоблаш машиналари дунёга келди.

3-§. Электрон ҳисоблаш машиналари даври

Электромеханик машиналар ҳам, ўз навбатида, XX аср фан ва техникаси тараққиёти эҳтиёжларини қониқтира олмай қолди. Бу машиналарда ҳисоблаш жараёни кўп вақт талаб қилиши сабабли янада тезроқ ҳисоблайдиган янги хил машиналар яратиш зарурияти туғилди. Шу боисдан ҳам ҳисоблаш машиналарида электрон лампалардан фойдаланиш устида жадаллик билан тадқиқот олиб борила бошланди.

1942—1945 йилларда биринчи бўлиб АҚШдаги Пенсильвания университетида электрон лампали рақамли ҳисоблаш машинаси яратилди 30 тонна оғирликдаги, 150 квадрат метрли залии эгаллаган ва 18 минг электрон лампали бу баҳайбат электрон ҳисоблаш машинаси „ЭНИАК“ деб ном олди. 1946 йили америка олими Дж. Нейман (1803—1957) шундай электрон ҳисоб машиналарини қуришнинг асосий математик принципини баён қилди. Бу принцип дастур асосида кетма-кет автоматик бошқариш принципидир. Бу хил машиналар ҳисоблаш техникаси тарихида кескин бурилиш ясади, фан-техниканинг турли соҳалари жадал ривожланишига турткн берди. Кейинроқ АҚШда ва Буюк Британияда „ЭДВАК“, „ЭДСАК“, „СЕАК“, „БИНАК“, „УНИВАК“ ва бошқалар яратилди. Умуман 1950 йил электрон ҳисоблаш машиналари тараққиётининг бошланиши бўлди

Собиқ Иттифоқда биринчи электрон ҳисоблаш машинаси (ЭҲМ) нинг лойиҳасини 1948 йили электроника ва ҳисоблаш техникаси соҳасидаги йирик олимлардан С. А. Лебедев ва Б. И. Рамеевлар ишлаб чиқишди Кичик электрон ҳисоблаш машинаси (МЭСМ) Украина ФА Электроника институтида яратилди. Бу машинанинг асосий камчилиги ахборот сиғимининг кичиклиги ҳамда сонлар хонасининг озлигида эди. 1954 йили Аниқ механика ва ҳисоблаш техникаси институтида С. А. Лебедев раҳбарлигида янги ЭҲМ ишга туширилди (БЭСМ — катта электрон ҳисоблаш машинаси).

Тарихан қисқа вақт мобайнида (35—40 йил орасида) ЭҲМнинг тўрт авлоди яратилиб, бешинчи авлод машиналари лойиҳаланмоқда. ЭҲМларни авлодларга бўлиш элемент базаси, конструктив-технологик, мантиқий тузилиши, математик таъминоти, техник характеристикалари, фойдаланувчиларнинг ЭҲМни ишлата олиш даражаси билан фарқланади. Айниқса, Японияда 1981 йилда ЭҲМ ларнинг бешинчи авлодини яратиш лойиҳанинг эълон қилиниши бутун дунёда катта шов-шувга сабаб булди.

ЭҲМларнинг **биринчи авлоди*** (50-йиллар бошларигача) қаторига БЭСМ-1, БЭСМ-2, Стрела, М-3, Минск-1, Урал-1, Урал-2, М 20 ва бошқалар киради. Бу машиналарнинг ҳаммаси электрон лампалар (электрон вакуумли элементлар) асосида қурилган бўлиб, ўлчамлари катта, кўп электр қувватини истеъмол қиладиган, амал бажариш тезлиги паст, хотира сиғими кичик ва тез-тез ишдан чиқиб турар эди (ЭҲМнинг тўғри ишлаш ишончи кам эди).

ЭҲМларнинг **иккинчи авлоди** (60-йилларнинг бошлари) транзисторлар (ярим ўтказгич ва магнитли элементлар) дан тузилган. Бу авлодга мансуб машиналарнинг ўзига хос хусусиятларидан бири уларнинг қўлланиш соҳаси бўйича ихтисослаштирилишдир. Иккинчи авлод ЭҲМларида ихтиёрий маълумотларни қайта ишлаш имконияти яратилди.

ЭҲМнинг иккинчи авлодига қуйидаги машиналар киради: Минск-2, Раздан-3, М-220, БЭСМ-6, Мир, Наири, Минск-22, Минск-32, Урал-14 ва бошқалар. Бу машиналарда қўйилган масалаларни тез ечиш имкониятини туғдирувчи дастурлаш тилларидан фойдаланиш мумкин бўлиб қолди.

Электрон ҳисоблаш машиналарининг кейинги мураккаблашуви мосламаларнинг ўсишига олиб келди, бу эса ўз навбатида элемент ва схемаларнинг ўлчамларини кичрайтиришни ва уларнинг ишлашидаги ишончли-

---

* ЭҲМларни авлодларга бўлиш, янги авлодга мансуб ЭҲМларнинг пайдо бўлишида аниқ чегарани келтириш нисбий ва шартлидир.

ликни оширишни талаб этди. Шунга асосан микроэлектроникада тез орада янги йўналиш — электрон элементларнинг ўзаро функционал боғланишларидан ясалган ўта митти схемалар пайдо бўла бошлади. Бундай схемалар оддий схемалар каби ўзаро мос боғланишлар орқали бириктирилган алоҳида тайёрланган элементлардан йиғилмай, уларнинг ҳаммаси ягона технологик жараёнлар ва қурилиши тугалланган комплекс билан амалга ошириларди. Бундай схемалар интеграл схемалар номини олди (уларни шунингдек, „функционал модул“ ёки „микросхема“ ҳам деб аталади)

ЭҲМ нинг учинчи авлоди (60-йилларнинг охири) кўпчилик транзисторлар ва турли хил деталларнинг ўрнига интеграл схемалардан кенг кўламда фойдаланилиши билан характерланади.

Интеграл схемаларни ишлатиш туфайли машиналарнинг техник ва фойдаланиш характеристикаларини анча яхшилашга муваффақ бўлинди. Уларда математик таъминот янада такомиллаштирилди, ЭҲМ ларнинг самарали ишлатилишини таъминлайдиган операцион системалар кенг қўлланила бошланди. Бу авлод машиналарини Ўзаро Иқтисодий Ҳамкорлик Кенгаши аъзолари биргаликда ишлаб чиқарган ягона система (ЕС — единая система) типидаги машиналар ташкил қилади. Булар қаторига ЕС-1010, ЕС-1020, ЕС-1030, ЕС-1040, ЕС-1050 ва ЕС-1060 машиналарини киритиш мумкин. Бу машиналар турига қараб, секундига 10 мингдан 1 млн. 300 мингача амал бажариши мумкин.

ЭҲМнинг тўртинчи авлоди 1970 йиллардан эътиборан такомиллаша бошлади. Уларда элемент асоси сифатида катта интеграл схемалар (КИС) қўлланилди. Бундай ЭҲМлардан жамоа фойдаланиш, ЭҲМлар тармоғини яратиш имконияти туғилди. Уларда ривожланган операцион тизимлар ишлатила бошланди. Аниқ вақт орасида масалаларни ечиш мумкин бўлиб қолди.

Ҳозирги кунда бешинчи авлод ЭҲМлари пайдо бўла бошлади. Ушбу авлод машиналари оддий сўзни „тушунадиган“, расмларни „кўра оладиган“, товушларни „эшита оладиган“, секундига 1 млрд. амал бажара оладиган, ана шундай ҳажмдаги хотирага эга бўлган ҳамда ихчам бўлиши керак.

Бешинчи авлод машиналари ривожланиши билан келажакда ЭҲМ ларнинг элемент асосларининг ишлаб чиқариш технологияси тубдан янги йўналиш олиши мумкин эканлигини ҳам ҳисобга олиш керак. Масалан, оптик интеграл схемаларнинг пайдо бўлиши ўта тезкор „оптик ЭҲМ" ларни, яъни ЭҲМ ларнинг янги авлодини яратишга олиб келиши мумкин. Ҳозирги ҳисобларга қараганда бундай машиналарнинг ишончлилиги замонавий ЭҲМларга қараганда юқори бўлиши мумкин. Бундан ташқари, биологиянинг эришаётган ютуқларини қўллаб, янги ЭҲМ яратилиши мумкин Ҳозирги вақтда ер юзида лабораторияларда оқсил молекулалари билан тажрибалар ўтказилмоқда. Улар компьютерларнинг арифметик асосини ташкил қилувчи асосий элемент иккили саноқ системасида хотирловчи катакчаларнинг вазифаларини ўтаяптилар. Албатта ушбу йўналишда ЭҲМ қуриш ҳақида гап юритиш эрта албатта, лекин тажрибалар яхши натижаларга олиб келса, у ҳолда такомиллашган элемент асосга эга бўлган, ҳисоблаш техникасида янги даврни бошлайдиган ЭҲМ ларга эга бўламиз.

Ҳозирги кунда ЭҲМлардан физика, математика, астрономия, геофизика, техника ва бошқа бир талай фан соҳаларида турли хил мураккаб математик масалаларни ечишда муваффақиятли фойдаланилмоқда. Ҳозир ЭҲМлар қўлланилмаётган бирон соҳани топиш мушкул. Улар дастгоҳ, цех, заводларни бошқаришда ҳам инсонга яқиндан кўмаклашмоқда. ЭҲМ ларнинг икки муҳим хусусияти — ҳисоблаш тезлиги ва хотирасида катта ҳажмдаги маълумотни сақлай олиши — халқ хўжалигини режалаштириш ва бошқариш учун керак бўлган ихтиёрий ҳажмдаги маълумотни қайта ишлаб чиқишда жуда кенг имкониятлар яратиб бермоқда.

II БОБ. ЭЛЕКТРОН ҲИСОБЛАШ МАШИНАЛАРИ

1-§. Электрон ҳисоблаш машиналарининг турлари

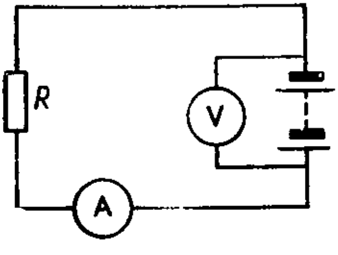
Электрон ҳисоблаш машиналари асосан икки турга бўлинади: аналог ёки моделловчи ҳисоблаш машиналари (узлуксиз ишлайдиган ҳисоблаш машиналари) ва электрон-рақамли ҳисоблаш машиналари (ёки дискрет ишлайдиган ҳисоблаш машиналари).

Аналог ҳисоблаш машиналари. Бундай ҳисоблаш машиналари электр кучланиши, ток кучи, валнинг бурчакли силжиши ёки шу каби доимо ўзгариб турувчи физик миқдорлар билан иш кўради. Узлуксиз ишлайдиган машиналар механик электр, электрон, гидравлик ва ҳоказо системалардан иборат бўлиб, унда математик масалани ечишда текширилаётган жараёнларда қатнашадиган миқдорлар ўртасидаги муносабатларга ўхшаш муносабатлар намойиш қилинади, яъни бу системалар ўрганилаётган жараён ёки масаланинг математик моделидан ташкил топган, шунинг учун бу машиналар моделловчи ёки ўхшатувчи машиналар деб ҳам юритилади. Шу турдаги оддий асбоблардан бири бўлган логарифмик чизғични мисол сифатида келтириш мумкин, чунки логарифмик чизғичларда сон кесма узунлиги ёрдамида ифодаланади.

Сонлар электр катталик билан ифодаланадиган мисол келтирайлик. Манба (батарея) ва қаршиликдан тузилган электр занжирини олайлик. Маълумки, бундай занжирдаги ток Ом қонунига бўйсунади: $I = V/R$, бу ерда I - ток, V — кучланиш, R — қаршилик катталиги. Занжирга амперметр ва вольтметр улаб, амперметр кўрсатиши бўйича V соннинг R га бўлинмасини ва вольтметр кўрсатиши бўйича $I \cdot R$ кўпайтмани топишимиз мумкин (мос равишда қолган катталиклар а керакли қийматлар бериб турилади). Шундай қилиб, бу содда электр схема (1-расм) электр катталик билан ифодаланган сонлар (кучланиш ток, катталиги, қаршилик катталиги) ни кўпайтириш ва бўлиш учун хизмат қилиши мумкин экан Бу мисолдан кўриниб турибдики, бундай турдаги машиналар аслида ҳеч қандай ҳисоб бажармасдан, фақат моделлаштиради.

Моделловчи машиналарда ҳар бир математик масалани ечиш учун махсус блоклардан фойдаланилади. Масалан, қўшиш, кўпайтириш, айириш, бўлиш, интеграллаш, берилган функциянинг қийматини ҳисоблаш блоклари Бу блоклар масалаларга қараб мос тартибда уланади.

Бу машиналарнинг хусусияти шундаки, уларда ҳисобловчи элементларнинг таркиби маълум бўлиб, турғунлашган электр манбаларидан ток олиб ишлайди.



1-расм.

Ҳисобловчи элементларнинг чекланганлиги ва улар орасидаги муносабатнинг қатъийлиги баъзи масалаларни ечишда уларнинг кўпчилигининг ишлатилмаслигига олиб келади. Узлуксиз ишлайдиган ЭҲМларнинг камчилиги, уларда масалаларни ечиш аниқлиги вергулдан сўнг 2—3 рақам билан чегараланишидадир.

Электрон-рақамли ҳисоблаш машиналари (ЭРҲМ). Бу машиналар қандай характердаги ва ҳажмдаги масалаларни еча олишларига қараб универсал, ихтисослашган ва мантиқий (логик) рақамли машиналарга бўлинади.

Универсал машиналар физика, математика, астрономия, геофизика ва техникага оид бўлган энг қийин ва турли математик масалаларни ечишда қўлланилади. Универсал ҳисоблаш машиналарининг ҳаммасида ҳам масалаларни машина „тили" да ёзиб, яъни дастур тузиб, сўнгра улар ёрдамида ечилади.

Ихтисослашган машиналар асосан фан ва техниканинг маълум бир соҳасига оид масалаларни ечиш ва бошқариш учун мўлжалланган бўлиб, универсал машиналардан машинага маълумот киритадиган ва ҳисоблаш натижалари олинадиган қурилмалари билан фарқ қилади. Бундай машиналар автоматик бошқариш системаларида ишлатилади.

Мантиқий машиналар тафаккур жараёнларини амалга ошириш ҳамда турли ахборотларни қайта ишлашда қўлланилади. Умуман мантиқий машиналар ихтисослашган бўлиб, улар мантиқий масалаларни ечишда фойдаланилади.

Электрон рақамли ҳисоблаш машиналарида ҳар бир рақам учун уни ифода этувчи биттадан физик элемент қўлланилади. Улар бир-биридан ажралган ҳолда туради. Ҳар бир шундай ҳолат учун битта рақам мос келади. Рақамли ҳисоблаш машинасининг энг содда қурилмаси бўлмиш арифмометрда шундай элемент ўрнида айланганда қатъий ҳолатни сақловчи оддий ҳалқача мавжуд.

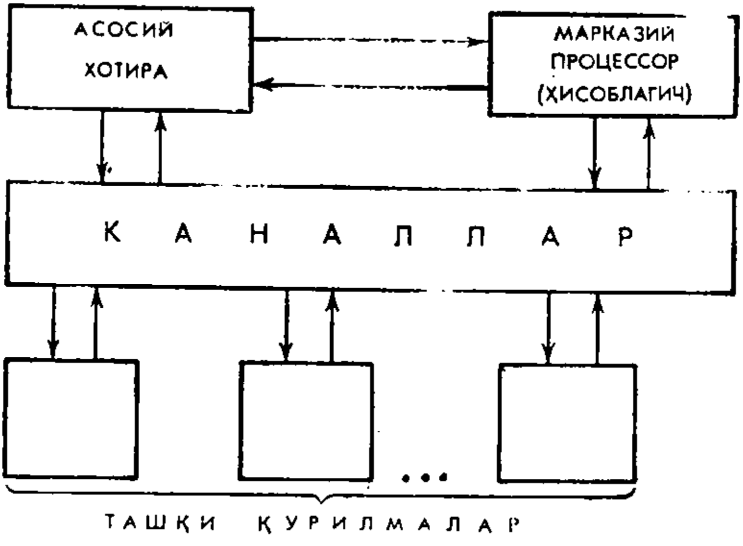
ЭҲМларнинг яхши хусусиятлардан бири масалани керакли аниқликда ечиш мумкинлигидадир.

Биз ушбу китобда асосан уриверсал ҳисоблаш машиналари устида фикр юритамиз.

2-§. Электрон ҳисоблаш машиналарининг тузилиши

Электрон ҳисоблаш машиналари қанчалик мураккаблашмасин, уларнинг барчасига тегишли қурилмаларни ажратиш мумкин. Улар арифметик, хотира, бошқариш, киритиш-чиқариш қурилмаларидан иборат. **Арифметик қурилма** сонлар устида арифметик ва мантиқий амалларни бажариш учун хизмат қилади. **Хотира қурилмаси** берилган маълумотни, оралиқ ва охирги натижаларни, буйруқларни керакли вақтгача сақлаб туриш ва бошқа қурилмаларга узатиш учун хизмат қилади. **Киритиш қурилмаси** берилган маълумотларни машинага қулай шаклда ўтказиб, уни хотирага киритиш учун хизмат қилади. **Чиқариш қурилмаси** маълумотни хотира қурилмасидан керакли шаклда чиқариш учун хизмат қилади. **Бошқариш қурилмаси** берилган дастурга мувофиқ мураккаб ишларни амалга ошираётган қурилмаларнинг ишини таъминлайди. Унинг асосий қисмларидан бири бошқариш пультидир. Пульт ёрдамида оператор машинани ишга туширади, унинг ишлашини кузатади ва керак пайтда машинани тўхтатади.

Ягона система (ЕС) электрон ҳисоблаш машиналарининг блок-схемаси 2-расмда келтирилган. ЭҲМнинг



2-расм.

марказий қурилмаларини асосий хотира ва марказий ҳисоблагич (процессор) ташкил этади. Каналлар мультиплекс канали ва селектор каналидан иборат бўлиб, улар ташқи қурилмаларни процессор билан боғлаш учун ишлатилади. Ташқи қурилмалар қаторига киритиш, чиқариш, бир қанча ёрдамчи хотира қурилмалари киради.

Марказий процессор асосий ва тезкор хотираларни адреслаш, маълумотларни танлаб олиш ва ёзиш, улар устида арифметик ва мантиқий амал бажариш, буйруқлар кетма-кетлигининг зарур тартибини таъминлаш, асосий хотира билан ташқи қурилма орасида ахборот айирбошлашни ташкил этишга мўлжалланган.

Процессор. Дастур билан берилган маълумотни ўзгартирадиган, ҳамма ҳисоблаш жараёнларини бошқарадиган ҳамда ҳисоблаш системаси агрегатларининг ўзаро алоқасини амалга оширадиган қурилма **процессор** деб аталади.

Процессордаги бирлаштириш функционал воситаларининг асосий қисми ЕС — ЭҲМлари ҳар қайси моделининг ядроси ҳисобланади. Процессорда арифметик ва мантиқий амалларни бажариш, хотирага мурожаат қилиш, буйруқларнинг берилган кетма-кетликда бажарилишини бошқариш ҳамда асосий хотира билан киритиш-чиқариш системалари ўртасида айирбошлашни ташкил қилиш воситалари тўпланган.

Арифметик ва бошқариш қурилмалари қаторида регистр деб аталувчи хотирлаш катакчаси мавжуд.

Хотира қурилмалари. Хотира қурилмалари марказий процессорнинг* таркибий қисми бўлиб, улар маълумотларнинг кўчишини жуда юқори тезлик билан таъминлаши керак Замонавий ЭҲМларда хотира қурилмаларининг турли типлари қўлланилади. Ҳозирги вақтда мавжуд бўлган магнит ўзаклар, юпқа магнит лента ва катта интеграл схемалар микросекунд ва наносекунд диапазонларда ишлайди. Шунингдек, тузилаётган янги хотира қурилмалари микросекунд диапазонида ишлаши мумкин ва улар маълумотларнинг процессорларда ишланиб чиқиш тезлигининг оширишини янада енгиллаштиради Бироқ хотира қурилмасининг туридан қатъи назар элементар маълумот элтувчилар сифатида иккилик рақам —0 ёки 1 нинг сақланишини

---

* Баъзан хотира процессорлардан алоҳида деб қаралади.

таъминловчи дискрет ёки интеграл элементлар ёрдамида бажарилган ва икки турғун ҳолатга эга бўлган хотирлаш элементлари қўлланилади. Шундай элемент учун унинг ҳолатини бошқариш оддийлаштирилиши, белгиланган ҳолатнинг узоқ муддат сақланиши, ҳолатни аниқлаш имконияти, уларнинг дастлабки ҳолатга қайтиш имконияти мавжуд бўлиши керак.

Хотира қурилмалари ўта оператив, доимий, буфер ва ташқи хотира қурилмаларига бўлинади.

Ҳозирги замон ҳисоблаш машиналарида магнит барабанли, магнит дискли, феррит ўзакли, магнит ленталли ва интеграл схемали хотира қурилмалари кенг қўлланилмоқда

Ташқи қурилмалар. Машина ишлаши учун керак бўлган барча маълумотлар киритиш қурилмаси орқали келади. Ҳисоблаш системаларининг киритиш қурилмаларининг ташқи юритгичлари сифатида қоғоз лента ёки карталар ишлатилади. Уларда маълумотлар тешикчалар ёрдамида ёзилгани учун мос равишда перфолента ва перфокарта деб аталади. Киритиш қурилмаси сифатида қуйидаги тур қурилмалар ишлатилади: перфокарталардан тезкорлик билан ўқиш қурилмалари, перфокарталардан санаш қурилмалари, магнитли лентада, дискларда йиғгичлар, алоқа каналлари билан ишлайдиган киритиш-чиқариш қурилмаси ҳамда терминаллари, оптик санагичлар, электрон нурли трубка қурилмаси, пультли ёзув машиналари, шунингдек, овозли киритиш чиқариш қурилмалари, дисплейлар ва ҳоказо

Бундан ташқари маълумотларни системага киритиш учун ҳисоблаш машинаси пультидаги тугмалардан ҳам фойдаланиш мумкин.

Чиқариш қурилмаси сифатида перфокарталар учун перфораторлар ва қоғоз перфоленталар, шунингдек, тезкор босиш (ёки чоп этиш) қурилмаларидан фойдаланиш мумкин. Бундан ташқари, чиқариш электр импульслар тарзида амалга оширилиши мумкин, бу импульсдан бошқа ҳисоблаш машиналарини бошқаришда фойдаланилади.

Каналлар. Каналлар маълумотларни ташқи қурилмаларда асосий хотира қурилмасига ва асосий хотира қурилмасидан ташқи қурилмалар орқали юритгичларга етказиш учун хизмат қилади.

ЕС — ЭҲМлари системалари машиналарининг таркибига иккита асосий тур канал киради: мультиплекс ва селектор каналлари.

Мультиплекс канал бир вақтнинг ўзида параллел ишлаётган бир нечта ташқи қурилмаларга хизмат қилиши мумкин. Бу қурилмаларнинг ҳар қайсиси ташқи қурилма маълумотнинг навбатдаги порциясини (улушини) қабул қилиб олишга ёки беришга тайёрлангандан кейингина, канал билан қисқа вақт давомида боғланади. Агар бир неча ташқи қурилма навбатдаги алоқага тайёрланиб, канал томонидан хизмат кўрсатилишини сўраса, у ҳолда канал булардан бирини айнан система учун қабул қилинган устунлик қоидаларга мувофиқ, масалан, қурилмаларнинг чиқиш магистрал каналларига уланиш тартибига мувофиқ танлайди. Алоқа сеансига тайёр қолган қурилмалар ўзига хизмат кўрсатилиш навбатини кутиб туради.

Мультиплекс канал асосан маълумотни йўқотмасдан хизмат кўрсатилишини кутиб туриш қобилиятига эга бўлган ва нисбатан секин ишлайдиган қурилмалар билан ишлашга мўлжалланган.

Селектор каналдан, асосан, киритиш-чиқаришнинг тезкор қурилмаларини — магнитли ленталари ва магнит дискларини бошқаришда фойдаланилади

Бундан ташқари, селектор каналлар киритиш-чиқаришнинг секин ишлайдиган қурилмаларини ҳам бошқариши мумкин, аммо уларнинг устунлик иш режими киритиш-чиқаришнинг тезкор қурилмалари билан ишлашда анча самаралироқдир. Устунлик режимида ишлаганда киритиш-чиқаришнинг битта қурилмаси каналнинг ҳамма воситаларини тўла эгаллайди ва уларни узатилаётган маълумотларнинг энг охири сегментига хизмат кўрсатмаганлигига қадар бўшатмайди.

Процессорнинг ўтказиш қобилиятидаги ортиб кетмаслик шарти бажарилгандагина ҳамма каналлар бир вақтнинг ўзида ишлаши мумкин.

III БОБ. ЭЛЕКТРОН ҲИСОБЛАШ МАШИНАЛАРИНИНГ АРИФМЕТИК АСОСИ

1-§. Саноқ системалари ҳақида тарихий маълумот

Сонлар бошланғич рақамлардан ташкил топади Биз кундалик ҳаётда ўнли саноқ системаси билан иш кўрамиз. Бизнинг саноқ системада 10 та рақам: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 дан фойдаланилади. Лекин ҳар жойда ва барча давр одамлари ҳамма вақт ҳам ўнли саноқ системасидан фойдаланавермаганлар. Чунки ушбу саноқ системаси ҳар жойда қўл келавермаган. Ўнли саноқ системасини юртдошимиз Абу Али ибн Сино киритган.

Ҳозирги пайтда ўнли саноқ системаси билан бирга ҳисоблаш машиналари туфайли иккили ва саккизли саноқ системалари қўлланила бошланди

Тарихий даврларда одамлар ўнли системадан фарқли турли системаларда иш кўрганлар. Масалан, ўн иккили система жуда кўп ишлатилган. Бунинг келиб чиқиш сабабларидан биттаси 4 та бармоқнинг 12 фаланг (бўғинли) эканлигидир. Бош бармоқ билан ҳисоб олиб борилган. Биринчи бармоқнинг бўғинига 1 хонаси, иккинчисига 2 хонаси ва ҳоказо, шу тариқа 1 дан 12 гача мос қўйилган. Оғзаки гапларда бу системанинг қолдиқларини учратиш мумкин. Масалан, 12 дейиш ўрнига русларда „дюжина" дейилади. Кўпчилик асбоблар (пичоқ, вилка, тарелкалар) дюжина ҳисобида юритилади. Сервизлар кўпинча, 12 ёки 6 кишига мўлжалланади.

Англияда ўн иккили саноқ системасининг қолдиқлари ишлатилади. Масалан, ўлчов системасида 1 фут — 12 дюйм, пул системасида 1 шиллинг — 12 пенс. Математикада ҳам ўн иккили система ўнли системадан устун туради, чунки 12 сони 2, 3, 4, 6 га бўлинса, 10 сони фақат 2, 5 га бўлинади.

Қадимий Вавилонда математика юқори даражада тараққий этган эди. Ўша пайтда мураккаб олтмишли саноқ системаси мавжуд эди. Эрамиздан икки минг йил илгари шу саноқ системасининг келиб чиқишида кўпчилик тарихчилар фикрига қараганда икки хил гипотеза мавжуд:

1) икки қадимий: сумерий ва аккад халқлари бўлиб, уларнинг бири олтили, иккинчиси ўнли саноқ системаларидан фойдаланганлар. Уларни бирлашиб кетишидан олтмишли саноқ системаси ҳосил бўлган дейишади;

2) вавилонликлар йилни 360 кун ҳисоблаганлар. Бу эса 60 билан боғлиқ, албатта. Шунинг учун олтмишли саноқ системаси вужудга келган, дейишади. Лекин бизнингча иккинчи гипотезага асосланиш қийинроқ Чунки, вавилонликлар астрономиянинг ривожланишида ўша

даврда муҳим роль ўйнаган эдилар. Шунинг учун бир йилни 5 кун хатоси билан олмаган бўлсалар керак. Бу система ҳам ҳозирда ўз қолдиқларини сақлаб келмоқда. Масалан, 1 соат — 60 минут, 1 минут — 60 секунд. Бурчак ўлчовида эса $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$. Лекин бу система ҳам анча мураккаблигига қарамасдан ўнли саноқ системасига қараганда анча қулайдир (системани янги ўрганаётган ўқувчига, бу албатта, дарров сезилмайди).

Африкалик олим Стенлининг айтишича, Африканинг қабилаларидан бирида бешли саноқ системаси мавжуд бўлган экан. Бу системанинг вужудга келиши одам қўлининг тузилишига — „бошланғич ҳисоб машинаси“га боғлиқлиги равшан, албатта.

Африканинг қабилаларидан бирида йигирмали саноқ системаси мавжуд бўлган (XVI — XVII асрлар). Масалан, „80“ уларда *quatre — vinqt* сўзма-сўз тўртта йигирма дегани. Улар пул системасида ҳам учрайди. Масалан, франк — 20 га бўлинади. Бу системаларнинг ҳаммаси одамнинг „анатомик“ тузилиши билан боғлиқ эканлиги кўриниб турибди.

Таниқли рус сайёҳи Миклухо-Маклай сўзи бўйича, Янги Гвинея қабила кишилари қуйидагича ҳисоблашган: „...папуас бармоқларини бирин-кетин букиб, овоз чиқариб, „бе, бе, бе, бе, бе“ деб „ибонбе“ (бир қўл), сўнгра иккинчи қўли билан худди шундай „бе, бе, бе, бе, бе“ деб „ибон-али“ (икки қўл), сўнгра „бе, бе ..“ самба-бе ва самба-али (бир оёқ, икки оёқ), дейишган. Булар биринчи саноқ системалари одам анатомик тузилишига боғлиқ эканлигини яна бир бор тасдиқлайди.

2-§. Саноқ системалари турлари

1-таъриф. Бирор саноқ системасида рақамлар қиймати позициясига (туриш жойига) қараб белгиланса, у ҳолда бундай система позицион саноқ системаси, акс ҳолда нопозицион саноқ системаси дейилади

Масалан, Қадимги Рим саноқ системаси нопозицион саноқ системасига мисолдир. Бу системада бир неча символлар бўлиб, уларнинг ҳар бири доимо бир хил сонни ифодалайди: *I* — бир, *V* — беш, *X* — ўн, *L* — эллик, *C* — юз, *D* — беш юз, *M* — минг ва ҳоказо. Масалан, 88 бу системада бундай ёзилади: LXXXVIII. Символ қаерда туришидан қатъи назар ҳар доим бир хил қийматни ифода этади. Бу саноқ системаси ҳозирги пайтда турли тарихий саналарни ёзишда, китоб бобларини, соат рақамларини белгилашда учрайди.

Позицион саноқ системаларининг нопозицион системадан қулайлик томони шуки, унда катта сонларни қисқа қилиб ёзиш мумкин.

Позицион саноқ системасига мисол сифатида бизга маълум бўлган ўнли саноқ системасини олиш мумкин. Бу системада ўнта рақам борлиги маълум. Бошқа асосли системада аҳвол қандай бўлади? Масалан, ўн олтили системада 10 та рақам етмайди, шунинг учун яна 6 та рақам қўшиш керак бўлади (ўн, ўн бир, . . ., ўн беш) Бу рақамлар ҳам ўн олтили саноқ системасида бир рақам деб қаралади. Шунинг учун ушбу рақамлар учун *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* белгиларни киритсак, 16 та рақамга эга бўламиз: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. „16" сони эса 10 кўринишда ёзилади. Ўн олтили саноқ системаси „Ассемблер" дастурлаш тилида кўп ишлатилади.

Бундай саноқ системаларда таърифга биноан ҳар бир рақам ўзининг жойлашишига қараб қиймат олади. Масалан, ўнли саноқ системасида ёзилган 222 сонида (ўнгда чапга томон) биринчи 2 иккита бирликни, иккинчи 2 иккита ўнликни, учинчи 2 иккита юзликни ифодалайди

2-таъриф. Саноқ системасида сонларни ёзиш учун қўлланиладиган рақамлар сони системанинг асоси дейилади Масалан, ўнли саноқ системасининг асоси 10, ўн олтили саноқ системасининг асоси 16.

p асосли саноқ системасида берилган X сонни X_p каби ёзилади. Масалан, $327{,}42_8$.

3-§ Турли позицион саноқ системалари ва улар орасида боғланишлар

Ихтиёрий сонни бирор позицион саноқ системасида ифодалаш бу сонни система асосининг даражалари бўйича ёйилмасининг йиғиндиси шаклида ёзилишидан иборатдир. Масалан, ўнли саноқ системасида $454{,}34_{10}$ рақамлар кетма-кетлиги

$$4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$$

ифоданинг қисқартирилган ёзувини ифодалайди. Худди шунга ўхшаш, ўнли саноқ системасидаги ихтиёрий X_{10} сонга мос

$$(K_n K_{n-1} \ldots K_1 K_0, K_{-1} K_{-2} \ldots K_{-m})_{10}$$

кетма-кетликни

$$X_{10} = K_n \cdot 10^n + K_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + K_1 \cdot 10^1 + \\ + K_0 \cdot 10^0 + K_{-1} \cdot 10^{-1} + K_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots + K_{-m} \cdot 10^{-m}$$

каби ифодалаш мумкин бўлиб, бу ерда K_i коэффициентлар ушбу саноқ системасида қўлланилиши мумкин бўлган рақамлардан биридир.

p асосли саноқ системасидаги X сонни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$X_p = K_n \cdot p^n + K_{n-1} \cdot p^{-1} + \ldots + K_0 \cdot p^0 + \\ + K_{-1} \cdot p^{-1} + \ldots + K_{-m} \cdot p^{-m} + \ldots$$

ёки қисқача ёзсак

$$X_p = (K_n K_{n-1} \ldots K_0, K_{-1} K_{-2} \ldots K_{-m} \ldots)_p.$$

Бу ерда вергул X_p соннинг бутун қисмини каср қисмидан ажратиш учун қўйилган.

Иккили саноқ системаси. Ихтиёрий сонни иккили саноқ системасида ёзиш учун фақат 0 ва 1 рақамларидан фойдаланилади. Иккили саноқ системасининг асоси бўлган икки 10 каби ёзилиб, қолган ҳар қандай сон 0 ва 1 нинг комбинациялари сифатида ёзилади.

Масалан, 75_{10} сонини иккили саноқ системасида ёзайлик:

$$75_{10} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + \\ + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Шундай қилиб, $75_{10} = 1001011_2$.

Иккили сонларни қўшиш. Иккили сонларни қўшиш учун қуйидаги жадвалдан фойдаланилади:

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 10$

Мисол. 1010_2 ва 1011_2 сонларининг йиғиндисини топинг.

Бу сонларни бир устунга ёзиб, умумий қоида бўйича қўшамиз:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 1010_2 \\ 1011_2 \end{array} \\ \hline 10101_2 \end{array}$$

Иккили сонларни айириш. Иккили сонларни айириш жалвали қуйидагича:

$0 - 0 = 0$
$1 - 0 = 1$
$1 - 1 = 0$
$10 - 1 = 1$

Мисол. $101{,}01_2$ ва $10{,}10_2$ сонларинин айирмасини топинг.

$$\begin{array}{r} 101{,}01_2\\ -\;10{,}10_2\\ \hline 10{,}11_2\end{array}$$

Иккили сонларни кўпайтириш. Иккили сонларни кўпайтириш жадвали қуйидагича:

$0 \times 0 = 0$
$1 \times 0 = 0$
$0 \times 1 = 0$
$1 \times 1 = 1$

Иккили сонларни кўпайтириш ўнли саноқ системасидаги қоида каби бажарилади.

Мисол. 10111_2 ва 101_2 сонларининг кўпайтмасини топинг.

$$\begin{array}{r} 10111_2\\ \times\;101_2\\ \hline 10111\\ +\;10111\\ \hline 1110011_2\end{array}$$

Иккили сонларни бўлиш. Иккили сонларни бўлиш амали бажарилаётганда кўпайтириш ва айириш жадвалларидан фойдаланилади.

Мисол. 110101110_2 сонини 1010_2 сонига бўлишдан ҳосил бўлган сонни топинг.

$$\begin{array}{r|l} 110101110_2 & 1010_2\\ \cline{2-2} -\,1010 & 101011_2\\ \cline{1-1} -\,1101 & \\ 1010 & \\ \cline{1-1} -\,1111 & \\ 1010 & \\ \cline{1-1} -\,1010 & \\ 1010 & \\ \cline{1-1} 0000 & \end{array}$$

Келтирилган мисоллардан кўриниб турибдики, арифметик амаллар иккили ва ўнли саноқ системаларида бир хил бажарилар экан. Лекин иккили саноқ системасида арифметик амалларни бажариш ўнли системадагидан анчагина осонроқ.

Саккизли саноқ системаси. Саккизли саноқ системасида сонларни ёзиш учун саккизта рақам қўлланилади: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Асосни кўрсатувчи саккиз сони 10 каби ёзилади.

Саккизли сонларни қўшиш. Саккизли сонларни қўшиш қуйидаги жадвалга кўра бажарилади:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Мисол. 732_8 ва 324_8 сонларининг йиғинди ва айирмасини топинг.

а) $$\begin{array}{r} 732_8 \\ +\ 324_8 \\ \hline 1256_8 \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} 732_8 \\ -\ 324_8 \\ \hline 406_8 \end{array}$$

Саккизли сонларни кўпайтириш ва бўлиш. Саккизли сонларни кўпайтириш қуйидаги жадвалга асосан бажарилади:

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

1-мисол. $23{,}4_8$ сонини $12{,}2_8$ сонига кўпайтиринг.

$$\begin{array}{r} \times\ 23{,}4_8 \\ 12{,}2_8 \\ \hline 470 \\ +\ 470 \\ 234 \\ \hline 307{,}70_8 \end{array}$$

2-мисол. 11730_8 сонини 24_8 сонига бўлинг.

$$\begin{array}{r|l} -\,11730_8 & 24_8 \\ 74 & \overline{376_8} \\ \hline -\,233 & \\ 214 & \\ \hline -\,170 & \\ 170 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

Бир санок системасидан бошқа санок системасига ўтиш. ЭҲМларда ҳисоблаш ишлари иккили саноқ системасида бажарилади ва натижа ўнли саноқ системасига ўтказилган ҳолда берилади. Оралиқда саккизли, ўн олтили саноқ системалари ҳам ишлатилиши мумкин. Шунинг учун бирор саноқ системасидан бошқасига қандай қилиб ўтиш жараёни билан танишайлик.

p асосли саноқ системасида N_p бутун сон берилган бўлиб, уни q асосли саноқ системасига ўтказиш талаб этилаётган бўлсин.

Бу жараён амалга оширилган дейлик ва берилган соннинг q асосли саноқ системасидаги қисқача ёзилиши қуйидагича бўлсин:

$$N_p = X_q = (X_n X_{n-1} \ldots X_2 X_1 X_0)_q,$$

бу ерда $0 \leqslant X_i \leqslant q$.

N сонни асос даражалари бўйича ёйилмасини ёзайлик:

$$N_p = X_q = X_n \cdot q^n + X_{n-1} \cdot q^{n-1} + \ldots + X^2 \cdot q^2 +$$
$$+ X_1 \cdot q^1 + X_0 \cdot q^0.$$

Бу ерда қатнашган номаълум X_i коэффициентларни аниқлаш учун қуйидагича йўл тутамиз. N_p сонни q га бўламиз:

$$\frac{1}{q} \cdot N =$$
$$= \underbrace{X_n \cdot q^{n-1} + X_{n-1} \cdot q^{n-2} + \ldots + X_2 \cdot q^1 + X_1 \cdot q^0}_{N_1} + X_0 \cdot q,$$

бу ерда X_0 сон N/q бўлинманинг қолдиғи бўлиб, X_q соннинг энг кичик хонасидан иборат Бутун қисмни N_1 билан белгилаб, уни q сонга бўламиз:

$$\frac{1}{q} \cdot N_1 = \underbrace{X_n \cdot q^{n-2} + X_{n-1} \cdot q^{n-3} + \ldots + X^2 \cdot q^0}_{N_2} + X_1/q,$$

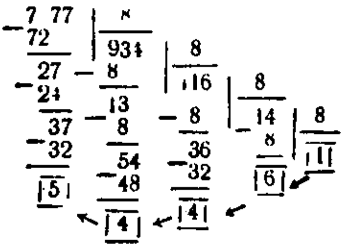
бу ерда X_1 бўлинма қолдиғи бўлиб X_q соннинг навбатдаги хонасидан иборат бўлади. Бутун қисмни N_2 билан белгилаб, уни q сонга бўламиз ва X_q нинг навбатдаги хонасига эга бўламиз ва ҳоказо. Ушбу жараённи ҳосил бўлаётган бўлинмадаги бутун қисм ноль бўлгунга қадар давом эттирамиз. Унинг схемасини қисқача қуйидагича ёзиш мумкин:

$$N = N_1 \cdot q + X_0$$
$$N_1 = N_2 \cdot q + X_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$N_n = N_{n+1} \cdot q + X_n$$

Бу ерда $N_{n+1} = 0$ бўлиб, изланаётган соннинг кўриниши $(X_n X_{n-1} \ldots X_2 X_3 X_0)_q$ каби бўлади.

Шундай қилиб, берилган саноқ системасидаги бутун сонни янги саноқ системасига ўтказиш учун кетма-кет бўлиш усулидан фойдаланар эканмиз Бўлиш охирида қолдиқ бўлаётган сон саноқ системаси асосидан кичик бўлгунга қадар давом этади. Охирги бўлинма янги саноқ системасидаги соннинг биринчи рақами, охирги қолдиқ иккинчи рақами ва ҳоказо бўлади. Мазкур жараённи мисолда кўрайлик.

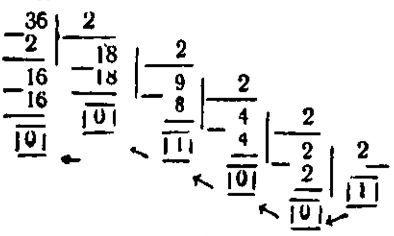
1-мисол. 7477_{10} сонини саккизли саноқ системасига ўтказинг



Ўқилиш йўналиши.

Демак, $7477_{10} = 16465_8$

2-мисол. 36_{10} сонини иккили саноқ системасига ўтказинг:



Ўқилиш йўналиши

Демак, $36_{10} = 100100_2$.

Худди бутун сонларни бир саноқ системасидан бошқа саноқ системасига ўтказилгани каби каср сонларни ҳам бошқа саноқ системасига ўтказиш мумкин Бунинг учун каср сонларни саноқ системасининг асосига кетма-кет кўпайтириш керак. Янги системадаги каср сон кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган бутун сонлар билан ифодаланади. Масалан, $0{,}3125_{10}$ каср сонни иккили саноқ системасига ўтказайлик:

$$\begin{array}{r} \times\;0{,}3125 \\ 2 \\ \hline \times\;0.62\;0 \\ 2 \\ \hline \times\;1{,}2500 \\ 2 \\ \hline \times\;0{,}5000 \\ 2 \\ \hline 1{,}0000 \end{array}$$

Шундай қилиб, $0{,}3125_{10} - 0{,}0101_2$.

4-§. Рақамли ҳисоблаш машиналарида қўлланиладиган саноқ системалари

Электрон ҳисоблаш машиналарида сонларни ифодалаш учун бир ёки бир неча турғун ҳолатга эга бўла оладиган элементлар ишлатилади.

Ҳар бир рақамга элементнинг битта турғун ҳолати тўғри келиши керак. Рақамларни ЭҲМ ларда тасвирлаш учун қуйидаги элементлар: электрон лампалар, конденсаторлар, реле ва транзисторлар, ферромагнитлар ва ҳоказолар хизмат қилади. Масалан, электрон лампа ток ўтказиши (лампа очиқ) ёки ток ўтказмаслиги (лампа берк), конденсатор зарядланиши ёки разрядланиши, реле уланиши ёки уланмаслиги, ферромагнит элементлар магнитланиш ёки магнитсизланиши мумкин ва ҳоказо. Ҳар бир рақамга айтилган турғун ҳолатлардан аниқ бири мос қўйилиши керак.

Ўнли саноқ системасини ЭҲМ да қўллаш учун шундай элемент топиш керакки, бу элемент ўнта турғун ҳолатга эга бўлиши лозим Бундай элементни тузиш анча қийин. Шунинг учун ҳам ўнли саноқ системаси ЭҲМ учун ноқулай ЭҲМ ларда асосан иккили саноқ системаси қўлланилади. Бу системада ҳар қандай сонлар 0 ва 1 нинг комбинацияси ёрдамида ифодаланади. Элементларнинг турғун ҳолатларидан бири 0 сонини ифодаласа, иккинчи ҳолати 1 сонини ифодалайди Шунинг учун ҳам иккили саноқ система и ЭҲМ нинг асосий саноқ системаси ҳисобланади, бошқача айтганда, иккили саноқ системаси ЭҲМ нинг арифметик асоси ҳисобланади. Лекин бу системани қўллашда бир қанча ноқулайликларга дуч келинади, чунончи барча бошланғич қийматлар ўнли саноқ системасида берилади, уни иккили системага ўтказиш, сўнгра натижани иккили системадан ўнли саноқ системасига ўтказиш зарур бўлади. ЭҲМ ларда саккизли шунингдек ўн олтили саноқ системалари ҳам қўлланилади. Бу системаларнинг қулайлик томонларидан бири сонларни иккили системада ёзилганидан қисқароқ ёзилиши бўлса, иккинчиси бу системаларнинг биридан иккинчисига ўтиш соддадир. Шунинг учун ҳам саккизли ва ўн олтили санок системалари оралиқ вазифаларни бажаради. ЭҲМда иккили, саккизли ва ўнли саноқ системалари билан бир қаторда аралаш саноқ системалари ҳам ишлатилади. Сонларни бундай усулда ифодалаш қуйидагичадир. Ўнли рақамни иккили системада ифодалаганда тўрттадан ортиқ бўлмаган (ёки саккизли рақамни иккили системада ифодалаганда учтадан ортиқ бўлмаган) сондаги рақам қўлланиши қуйидаги жадвалдан кўриниб турибди.

Ўнли рақам	Тетрада (тўртлик)	Триада (учлик)	Саккизли рақам
0	0000	000	0
1	0001	001	1
2	0010	010	2
3	0011	011	3
4	0100	100	4
5	0101	101	5
6	0110	110	6
7	0111	111	7
8	1000		
9	1001		

Ўнли рақамни ифодалайдиган тўртта иккили разрядни *тетрада*, саккизли рақамни ифодалайдиган учта иккили разрядни *триада* дейилади.

1-мисол. 6148 ўнли сонни иккили ўнли формада ёзинг. Берилган соннинг ҳар бир рақами тагига унга мос тетрадаларни ёзамиз:

6	1	4	8
0110	0001	0100	1000

Шундай қилиб, $6148_{10} = 0110000101001000_{2-10}$.

Аксинча ўтиш ҳам осонлик билан амалга оширилади. Бунинг учун берилган иккили-ўнли системадаги соннинг бутун қисмидаги рақамларини ўнгдан чапга қараб, каср қисмидагиларни эса чапдан ўнгга қараб тетрадаларга ажратамиз. Бажариш жараёнида рақамларнинг сони тетрадаларга етмай қолса, уларнинг айтилган йўналишда ноллар билан тўлдирамиз ва ўнли рақамлар билан ифодалаймиз.

2-**мисол**. $1001010101000110, 01101001 1_{2-10}$ сонини ўнли системада ифодаланг.

$$\underset{\longleftarrow}{1001}\ \ \underset{\longleftarrow}{0101}\ \ \underset{\longleftarrow}{0100}\ \ \underset{\longleftarrow}{0110},\ \ \underset{\longrightarrow}{0110}\ \ \underset{\longrightarrow}{1001}\ \ \underset{\longrightarrow}{1000} = 9546{,}698_{10}$$

Худди шунингдек, сонларни иккили системада саккизли кўринишда ва аксинча ифодалаш осон бажарилади. Чунки саккизли сонга битта триада мос келади ва аксинча.

3-**мисол**. 715_8 сонини иккили-саккизли системада ифодаланг.

$$\begin{matrix} 7 & 1 & 5 \\ 111 & 001 & 101 \end{matrix}$$

Демак, $715_8 = 111001101_{2-8}$.

4-**мисол**. $10111101, 10011_{2-8}$ сонини иккили системада ифодаланг.

Бунинг учун иккили системада берилган сон рақамларини мос триадаларга ажратамиз (триадаларга ажратиш вергулнинг ўнг ва чап томонларига қараб бажарилади), сўнгра ҳар қайси триадага мос келадиган саккизли рақамларини ёзамиз, яъни

$$\underset{\longleftarrow}{010}\ \ \underset{\longleftarrow}{111}\ \ \underset{\longleftarrow}{101},\ \ \underset{\longrightarrow}{100}\ \ \underset{\longrightarrow}{110} = 275{,}46_8.$$

Саккизли саноқ системадаги буйруқ ва адреслар ЭҲМда автоматик равишда иккили системага ўтказилади ва маълумот хотирага жойлаштирилади.

Қуйидаги жадвалда баъзи сонларни ўнли, иккили, саккизли ва ўн олтили системаларда ифодалаш кўрсатилган.

Саноқ системалари			
ўнли	иккили	саккизли	ўн олтили
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	5
7	111	7	7
8	1000	10	8

давоми

Саноқ системалари			
ўнли	иккили	саккизли	ўн олтили
9	1001	11	9
10	1010	12	*A*
11	1011	13	*B*
12	1100	14	*C*
13	1101	15	*D*
14	1110	16	*E*
15	1111	17	*F*
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

5- §. Сонларнинг ЭҲМда тасвирланиши

ЭҲМда сонлар икки хил, қўзғалмас ва қўзғалувчи вергулли шаклларда ифодаланиши мумкин.

Қўзғалмас вергул кўринишида берилган сонларнинг бутун ва каср қисмларини ажратиб турувчи вергул ўзгармайди. Шунинг учун бундай кўринишдаги сонларни **қўзғалмас вергулли сонлар** дейилади.

Ҳар қандай сонни тўғри каср билан саноқ системаси асосининг бутун даражалари кўпайтмаси орқали ифодалаш мумкин. Масалан, N_{10} сонини $N = A \cdot 10^p$ кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда $|A| < 1$ бўлиб, у N сонининг мантиссаси, p эса тартиби дейилади. Агар $|A| \geqslant 0,1$ бўлса, у ҳолда N сони **нормал** шаклда ифодаланган дейилади, акс ҳолда эса **нормаллаштирилмаган** дейилади.

Мисоллар. 1) $36587,6 = 0,365876 \cdot 10^5$;

2) $36587,6 = 0,00365876 \cdot 10^7$; 4) $36587,6 = 0,0365876 \cdot 10^6$;

3) $36587,6 = 36,5876 \cdot 10^3$; 5) $0,00365876 = 0,365876 \cdot 10^{-2}$.

Бу мисоллардан ҳар қандай сонни тўғри каср билан саноқ системаси асосининг бутун даражалари кўпайтмаси шаклида ифодалаш мумкин эканлиги кўриниб турибди. Биринчи мисолда 36587,6 сонининг нормал кўринишдаги ифодаси келтирилган, чунки унинг 0.365876 мантиссаси 0,1 дан кичик эмас. Бу соннинг тартиби 5 га тенг. Иккинчи ва тўртинчи мисолларда берилган соннинг нормаллаштирилмаган кўриниши келтирилган, чунки буларда мантиссалар 0,1 дан кичик. Ва ниҳоят, бешинчи мисолда, соннинг тартиби манфий бўлиши мумкинлиги кўрсатилган.

Келтирилган мисоллардан кўриниб турибдики, ҳар қандай сонни нормаллаштирилмаган кўринишда бир қанча усул билан ёзиш мумкин, лекин унинг нормал кўриниши ягонадир. Шунинг учун машинага сон ўрнига унинг тартиби билан мантиссасини бериш кифоя. ЭҲМ қўзғалмас ва қўзғалувчи вергулли сонлар устида амаллар бажаради.

Масалан, машинада мантисса учун олтита хона, тартибни ифодалаш учун икки хона ажратилган бўлса, у ҳолда биринчи мисол бундай ёзилади:

$$+365876+05$$

ёки бешинчи мисол $+365876-02$ каби ёзилиши мумкин.

Кўрилган мисоллар ўнли саноқ системасидаги сонлардан иборат Энли ҳисоблаш машиналари ишлайдиган саноқ системасидан — иккили саноқ системасидан мисоллар келтирамиз. Масалан, 1010,10 берилган бўлса, у ҳолда унинг нормал ифодаси $0,1010 \cdot 10^{100}$ каби бўлади ёки машинада $+1010+100$ каби ифодаланади. Худди шу каби:

$$0,0010111 = 0,10111 \cdot 10^{-10} \text{ ёки } +10111-10.$$

6-§ Ахборотларни иккили саноқ системасида кодлаш

Ахборотни ҳаммага маълум бўлган шаклдан фарқли равишда ифодалашга кодлаш деб аталади. Аксинча жараённи декодлаш дейилади.

Ўтган замонларда кодлаш махфий ёзув учун фойдаланилган Рим императори Юлий Цезарь бегоналар давлат аҳамиятига эга маълумотларни ўқий олмасликлари учун шартли белгилардан фойдаланган. Унинг шартли белгиси бўйича алифбо аниқ сондаги ҳарфга ўнгга ёки чапга сурилар эди. Масалан, бири ўзгармаган, иккинчиси бир ҳарфга чапга сурилган икки қатор ўзбек ҳарфларини ёзайлик:

АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЬЭЮЯЎҚҒҲ
БВГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЬЭЮЯЎҚҒҲА

У ҳолда бундай усул билан „Пахта“ сўзи „РБЦУБ“ кўринишда махфийлаштирилиши мумкин.

Худди шунга ўхшаш кодлашнинг бошқа усулини кўриш мумкин. Масалан, алифбо ҳарфларини рақамларга мос қўйиб кодлаш мумкин: „а“ ҳарфни 1, „б“ ҳарфни 2, „в“ ҳарфни 3 ва ҳоказо шу каби давом этиб, „ҳ“ ни 35 сон билан кодлайлик. У ҳолда, бундай кодларда „Пахта“ сўзини 17; 1; 23; 20; 1 каби рақамлар кетма-кетлигида ёзиш мумкин, бу усул энг содда кодлашдир.

Эски телеграфда, масалан, ахборот Морзе алифбоси билан, яъни нуқта ва тирелар кетма-кетлиги кўринишида кодлаштирилар ва узатилар эди. Масалан, Морзе алифбосида

STOP сўзи „... — ——— . —— “
S T O P

каби ёзилиши мумкин.

Компьютер ихтиёрий ҳарфни „таниши“ учун унинг хотирасида ҳарфларнинг ҳар хил усулда ёзилиши бўлиши керак. Шунинг учун қўлингиздаги дарсликдаги матн ҳарфларини компьютер таниши учун унинг хотирасида ҳарф ва белгиларнинг тахминан 2 минг хил турли кўринишларини сақлаш керак. Бу жуда мушкул ва қимматга тушадиган иш. Бу жараённи соддалаштириш учун барча ҳарфларни рақамлар билан алмаштириш ва шу йўл билан барча ҳарфларини 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамлар билан алмаштириш мумкин. Шу йўсинда тиниш белгиларини ҳам рақамлар орқали кодлаш имконияти бўлади. Масалан, нуқтани — 36, вергулни —37 билан ва ҳоказо.

Табиийки, машина рақамларни эмас, балки рақамларни ифодаловчи сигналларни фарқ қилади. Хуллас, кодлаш мураккаб тушунчани сигналнинг икки қиймати билан (магнитланган ёки магнитланмаган, уланган ёки уланмаган, юқори ёки паст кучланиш ва ҳоказо) ифодалашдир. Бу ҳолатнинг биринчисини 0 билан, иккинчисини эса 1 рақами билан белгилаш қабул қилинган бўлиб, ахборотни **иккиликда кодлаш** номини олган. Бунда ҳар бир мураккаб тушунча иккили белгилар кетма-кетлигида ифодаланади. Шундай қилиб, қуйидагилар бажарилади:

— ўнли рақамларни иккили (бинарли) кодлаш (ИК);

— алифбо белгиларини иккили кодлаш (ахборот алмашинишининг алифболи стандарт коди — ААСК).

Кодлар икки: текис ва текис бўлмаган турда бўлиши мумкин. Текис иккили кодлар кетма-кетлиги бир хил иккили белгиларга эга бўлса, текис бўлмаган тури тенг бўлмаган иккили белгиларга эга.

Текис бўлмаган кодга Морзе алифбоси мисол бўла олади, чунки унда ҳар бир ҳарф ва рақамга узун ва қисқа сигналларнинг иккили кетма-кетлиги мос келади. Масалан, Е ҳарфига биргина нуқта мос келса, Р ҳарфи учун тўртта тире мос келади.

Ҳисоблаш техникасида одатда текис кодлар фойдаланилади. Шулар қаторига ахборотларни киритиш ва чиқариш учун ЭҲМда фойдаланиладиган ахборот алмашиниш коди ААК — 8; иккили ахборот алмашиниш коди — ИААК ва бошқаларни киритиш мумкин. Кўпгина замонавий компьютерларда ҳар бир белгига 8 битлик (1 байт) кетма-кетлик мос қўйилади. 8 та ноль ва бирлардан ташкил топган турли кетма-кетликлар жами $2^8 = 256$ та бўлиб, улар 256 хил турли белгиларни кодлаш, масалан, лотин, рус алифбосининг катта ва кичик ҳарфлари, рақамлар, тиниш белгилар ва бошқа белгиларни кодлаш имконини беради (худди шундай ААК-7 да ҳаммаси бўлиб $2^7 = 128$ та ҳарф ва белгини кодлаш мумкин). Байт ва белгиларнинг мослиги, яъни ҳар бир кодга мос белги жадвалда кўрсатилади. МДҲ давлатларида кенг тарқалган ҳарф рақамли кодлашнинг ААК-8 (8 хоналик) жадвалини келтирамиз:

Ўзбек алифбоси ҳарфларининг кодлари лотин алифбоси ҳарфлариникидан фарқ қилади. Масалан, ўзбекча катта „И“ ҳарфи 11101001, „Л“ ҳарфи 11101100, „М“ ҳарфи 11101101, „К“ ҳарфи 11101011, „О“ ҳарфи 11111111, „Д“ ҳарфи 11100100 кодларга эга. Масалан, „ИЛМ“ сўзи кодланса, у қуйидаги 24 та битдан иборат кетма-кетлик бўлади:

$$\frac{11101001}{\text{И}}\quad\frac{11101100}{\text{Л}}\quad\frac{11101101}{\text{М}};$$

КОД сўзи эса

$$\frac{11101011}{\text{К}}\quad\frac{11111111}{\text{О}}\quad\frac{11100100}{\text{Д}}$$

кетма-кетлик билан кодланади.

Одатда, иккиликда ёзилган кодларнинг узунлигини қисқартириш учун у саккизли ва ўн олти саноқ системасида ёзилади. Масалан, „ИЛМ“ сўзининг коди ўн олти саноқ системасида мос равишда

$$\frac{1110}{\text{E}}\quad\frac{1001}{9}\quad\frac{1110}{\text{E}}\quad\frac{1100}{\text{C}}\quad\frac{1110}{\text{E}}\quad\frac{1101}{\text{Д}} = \text{E9ECEД} \qquad (16)$$

каби, „КОД“ сўзи эса

$$\frac{1110}{\text{E}}\quad\frac{1011}{\text{B}}\quad\frac{1111}{\text{F}}\quad\frac{1111}{\text{F}}\quad\frac{1110}{\text{E}}\quad\frac{0100}{4} = \text{EBFFE4} \qquad (16)$$

каби ёзилади.

Ноль ва бирлар кетма-кетлиги билан график ахборотларни ҳам кодлаш мумкин. Рўзномадаги расмга диққат билан разм солсангиз, у майда нуқталардан ташкил топганлигини кўрасиз, турли полиграфия ускуналарида бу нуқталарнинг зичлиги турлича бўлади. Масалан, „Тошкент оқшоми“ рўзномасидаги расм „Халқ таьлими“ ойномасидаги расмга қараганда аниқроқдир. Кўпчилик рўзномалардаги расмларда бир сантиметрли узунликда 24 та нуқта бўлади, яъни 10×10 сантиметрли расм тахминан 60 минг нуқтадан иборат. Агар булар фақат оқ ва қора нуқталардан иборат бўлса, у ҳолда уларнинг ҳар бирини 1 бит билан кодласа бўлади. Агар нуқталар ҳар хил бўлса, у ҳолда битта нуқтага бир бит етарли бўлмайди Икки бит билан нуқтанинг 4 тўрт хил рангини: 00 — оқ, 01 — оч кулранг, 10 — тўқ кулранг, 11 — қора рангни кодлаш мумкин. Уч бит 8 хил рангни, 4 бит 16 хил рангни кодлаш имкониятини беради ва ҳоказо.

Шунингдек, овозни ҳам кодлаш мумкин. Мусиқага ёзилган ноталар овозни кодлашнинг турларидан биридир. Нота белгиларига рақамлар мос келтирилиб, овозни битлар орқали ифодалаш ҳам мумкин. Биз бу ҳақда тўхталмаймиз.

Саволлар

1. Кодлаш деб нимага айтилади?
2. Ахборотларни кодлаш нима учун зарур?
3. Ахборотларни кодлашнинг қандай турларини биласиз?
4. Морзе алифбосини рақамлар орқали ифодалаш мумкинми? Мумкин бўлса, қандай амалга оширилади?
5. Иккили кодлаш нима учун керак?
6. Етти бит орқали қанча белги ва ҳарфни кодлаш мумкин? Саккиз бит ёрдамида-чи?

7. ААК-7 билан ААК-8 нинг фарқи нимада?

8. График ахборотларни кодлаш мумкинми?

9. Икки, уч ва тўрт битлар билан неча хил рангни кодлаш мумкин ва қандай амалга оширилади?

10. Товушни кодлаш мумкинми? Мумкин бўлса, товушни қандай қилиб рақамларга ўтказиш мумкин?

Машқлар

1. Маълумотларни шифрлаш усулларидан бири ҳар бир белги ёки ҳарфдан сўнг қандайдир ҳарф (умуман, ҳар гал турли ҳарф бўлиши мумкин) қўйилади. Масалан, „Информатика“ сўзи

ЮИАНБФДОПРСМЕАЦТУИОКБАХ

кабн ифодаланиши мумкин.

а) Худди шу усулда шифрланган жумлани топинг:

ЦТБАБИИПАСТЦНРИ ААЛСМРИАТНОГБ.

в) Қўшимча қўйиладиган ҳарфларни бир хил танлаб, „ЭКОЛОГИЯ“, „МУСТАҚИЛЛИК“ ва „ПРЕЗИДЕНТ“ сўзларини кодланг.

2. Ўзбек алифбосининг ҳарфларини уларнинг мос тартиб номери билан алмаштириб (А — 1, Б — 2, В — 3, ..., Ҳ — 35), „Бешинчи авлод компьютери“ жумласини кодланг.

3. Ўзбек алифбосининг ҳарфларини ихтиёрий тартибда икки хонали сонлар билан номерланг ва „Ўзбекистон ватаним маним“ жумласини кодланг.

4. ААК — 8 жадвалдан фойдаланиб:

а) STOP, END, RUN сўзларини кодланг;

б) ўн олтиликда ФАН, НОН, БАЙТ сўзларини кодланг.

5. Ўн олтиликда кодланган қуйидаги ёзувларни дешифровка қилинг:

а) 352B32303; в) EBE9F4FFE2.

6. Иккиликда кодланган қуйидаги ёзувни дешифровка қилинг:

а) 0100100101000110;

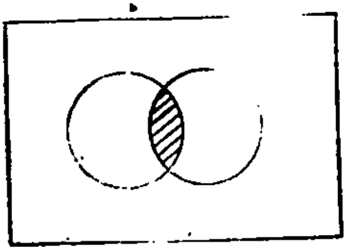
б) 111000011110011111100000111110010.

7-§. Мантиқий амаллар ва схемалар

1. **Мантиқий амаллар** Одатда ўзбек тилида мулоҳазалардан янги мураккаб мулоҳазалар ҳосил қилиш учун бир неча мантиқий боғловчилардан фойдаланилади. Булар „ВА“, „ЁКИ“, „ЭМАС“ ва бошқа мулоҳазалар устида бажариладиган мантиқий амаллардир. Мулоҳазаларни лотин алифбосининг бош ҳарфлари билан белгилаймиз. Шундай қилиб, А, В, С, ... лар ўзгарувчи мулоҳазалар деб аталади. Ҳар бир ўзгарувчи мулоҳаза фақат иккита: „рост“ ёки „ёлғон“ мантиқий

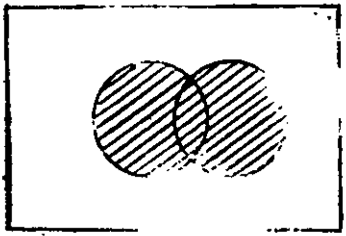
қийматга эга бўлиши мумкин (баъзан ҳа ёки йўқ деб ҳам олиш мумкин). Қулайлик учун „ростни“ 1, „ёлғонни“ эса 0 рақами билан белгилаймиз ҳамда уларни константа (ўзгармас) мулоҳазалар деб атаймиз. Энди мулоҳазалар устида баъзи амалларни кўриб чиқамиз.

а) A ва B мулоҳазалар бир пайтда рост бўлгандагина рост бўладиган янги мулоҳазага **мантиқий кўпайтириш** („ВА“) деб аталади. Мантиқий кўпайтириш амали „A ва B“ (ёки $A \wedge B$) каби ёзилади. Мантиқий кўпайтиришни жадвал ва чизма ёрдамида қуйидагича ифодалаш мумкин.



A	B	A ва B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

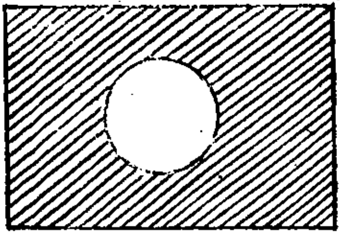
б) A ва B мулоҳазаларнинг камида биттаси рост бўлганда рост бўладиган янги мулоҳазага **мантиқий қўшиш** дейилади ва „A **ЁКИ** B“ (ёки $A \vee B$, ёки $A + B$) каби белгиланади. Мантиқий қўшиш амалини чизма ва жадвал кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин:



A	B	A ёки B
1	1	1
1	0	1
1	1	1
0	0	0

в) A мулоҳаза **рост** бўлганда **ёлғон**, A **ёлғон** бўлганда эса **рост** қиймат оладиган мулоҳазага мантиқий инкор деб аталади. Мантиқий инкор амали „A ЭМАС“ (ёки $\neg A$) каби ёзилади. Мантиқий инкор амали чизма ва жадвал кўринишида қуйидагича ифодаланади:

А	¬А
1	0
0	1



Мантиқий амалларга кўра мисоллар кўрайлик:

1-мисол А мулоҳаза рост қиймат қабул қилса, А **ВА** (**А ЭМАС**) амал қандай қиймат қабул қилади?

Ечиш. А рост қиймат қабул қилганлиги учун А эмас ёлғон қийматга эга бўлади. У ҳолда рост ВА ёлғон қийматлардан. ёлғон натижага эга бўламиз. Шундай қилиб, жавоб ёлғон экан.

2-мисол. А ва В мулоҳазалар рост қиймат қабул қилса, $A \wedge B \vee A$ амал қандай қийматга эга бўлади?

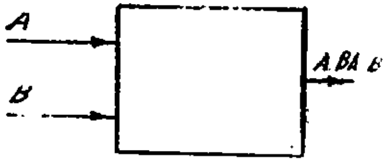
Ечиш А ва В мулоҳазалар рост қийматли бўлгани учун $A \wedge B$ амал рост қиймат қабул қилади. У ҳолда жадвалга кўра, иккита ростни мантиқий қўшишдан рост ҳосил бўлади Демак, жавоб рост экан.

3-мисол. $a = 3{,}2$; $b = -2{,}4$ ва $A \equiv$ рост, $B \equiv$ ёлғон қийматларга эга бўлса, $(b > a) \wedge A \vee \neg B$ амалдан қандай қиймат ҳосил бўлади?

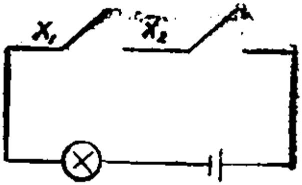
Ечиш $-2{,}4 > 3{,}2$ муносабат нотўғри бўлганлигидан бу натижа ёлғон қиймат қабул қилади. А рост қиймат қабул қилганлигидан $(b > a) \wedge A$ амал ёлғон қабул қиймат қилади В рост бўлганидан $\neg B$ ёлғон қийматли бўлади. У ҳолда $(b > a) \wedge A \vee \neg B$ амал ёлғон қиймат қабул қилади. Демак, натижа ёлғон экан.

2. **Мантиқий элементлар.** Компьютернинг ҳар қандай мантиқий функцияси асосий мантиқий элементлар ёрдамида бажарилади Элементларнинг ўзи турли-туман электр схемалардан тузилади Бунда схема киритиш жойига келган сигналлар аргумент бўлса, чиқувчи сигналлар бу аргументларнинг функцияси бўлади. Агар сигнал бўлса, у ҳолда уни ифодалайдиган аргументнинг қиймати бир, агар сигнал бўлмаса, нолга тенг бўлади. Энди энг содда ва кенг тарқалган мантиқий элементлар билан танишамиз.

а) **Мос тушиш схемаси** (**ВА** элементи). Мантиқий кўпайтиришни амалга оширадиган схема тузиш маса-



а)



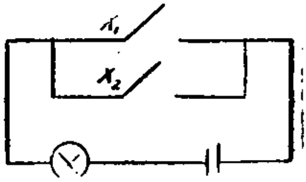
б)

ласи қўйилган бўлсин Бундай схема икки А ва В киришга ва битта А ВА В чиқишга эга бўлади.

Кирувчи ва чиқувчи (натижа) сигналлар электр импульсларидан иборат бўлиши керак. Бунда импульс бўлишига 1, бўлмаслигига 0 рақам мос келсин. Фараз қилайлик, ток манбаси, лампоча ва иккита улагичли электр схемаси йиғилган бўлсин. Лампочка ёниши 1 ва ўчган ҳоли 0 бўлсин (б) расмдан кўриниб турибдики, улагич улангандагина лампочка ёнади). Бундай схема мос тушиш схемаси деб аталади.

б) **Йиғувчи схема (ЁКИ элементи).** Бу схема кириш сигналига нисбатан камроқ „талаб қўяди". Киришлардан камида бирида 1 қиймат бўлган ҳолда чиқишда 1 қиймат ҳосил бўлаверади.

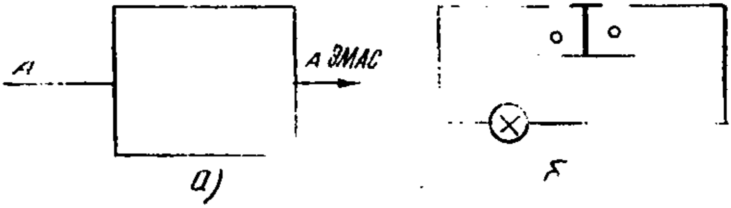
а)



б)

Ёки мантиқий амалларга бўйсунувчи б) электр схема ток манбаси, лампочка ва параллел уланган иккита улагичдан иборат бўлиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, улагичлардан бирини (масалан, Х ни улашимиз билан лампочка ёнади. Мос тушиш схемасидан фарқли бу ерда киришлардан ихтиёрий бирига сигнал тушиши биланоқ чиқишга ўтади. Шунинг учун мантиқий қўшиш амалини амалга оширувчи схемалар йиғувчи схема номини олган. Бундай схемалар ёрдамида бир нуқтага турли-туман тармоқ линиялардан ўзаро уланиб қолмайдиган (замыканиясиз) қилиб кучланиш узатиш мумкин.

в) **Инвентор схемаси (ЭМАС элементи).** Инвентор схемасини „тескари занжир“ деб атаса ҳам бўлади. Унда битта кириш ва битта чиқиш бўлади.



Эмас мантиқий амалга мос келадиган б) электр схемаси ток манбаси, лампочка ва тугмадан иборат. Ток импульси киришда сигнал бўлмаган ҳолда пайдо бўлади. Ҳақиқатан ҳам, тугма босилса, туташтиргич туташган жойдан олинади, электр занжир ажратилади ва лампочка ўчади. Тугма қўйиб юборилган пайтда, яъни кириш сигнал йўқ бўлган ҳолда лампочка ёниб туради. Демак, лампочка тугмага нисбатан ўзини тескари тутади, яъни таъсирга тескари бўлади.

Саволлар

1. Ўзгарувчи мулоҳазалар деб нимага айтилади ва улар қандай қийматлар қабул қилиши мумкин?
2. Мантиқий кўпайтириш деб нимага айтилади?
3. Мантиқий кўпайтириш жадвалини оғзаки айтинг.
4. Мантиқий қўшиш деганда нимани тушунасиз?
5. Мантиқий қўшиш жадвалини оғзаки айтинг.
6. Мантиқий инкор деганда нимани тушунасиз ва жадвали қандай?
7. Иккили саноқ системасидаги арифметик амаллар билан мантиқий амалларни боғлай оласизми?
8. ВА элементига мос схемани қандай тасвирлаш мумкин?
9. ЁКИ мантиқий амалга мос схема яратиш мумкинми? Бўлса, у қандай?
10. Инвентор деганда нимани тушунасиз? Уни электр схемада тушунтиринг.

Машқлар

1. Мантиқий амаллар жадвалини умумлашган ҳолда тасвирланг.
2. Ҳосил қилган мантиқий жадвалдан фойдаланиб A ≡ рост, B ≡ рост, C ≡ рост қийматлар учун қуйидаги амалларни бажаринг:

а) $A \wedge B \wedge C$; б) $A \vee B \wedge C$; в) $A \vee B \vee C$.

3 Агар $a = 5 \cdot 3$, $b = 4 \cdot 0$, A ≡ рост, B ≡ рост қийматлар қабул қилса, қуйидаги амалларни бажаринг:

а) $(a = b) \land A \lor \neg B$; б) $(a > b) \lor \neg A$;

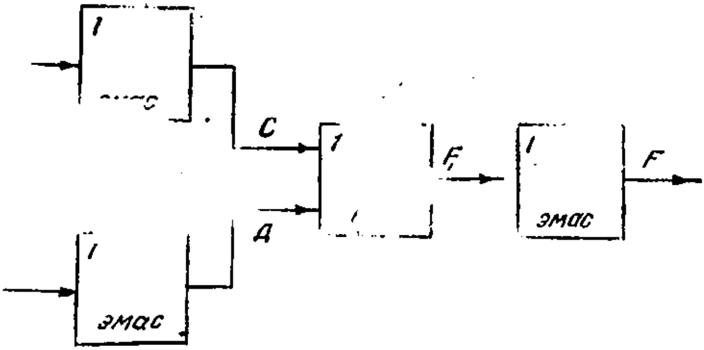
в) $A \lor B\ (a < b) \land A \lor B$.

8- §. Компьютер ишлашининг мантиқий ва физик асослари

Компьютерлардаги ҳар қандай ахборотлар кўп сондаги ноллар ва бирлар ёрдамида ифодаланган кодлар кўринишида сақланишини биламиз. Ушбу ноллар ва бирлар процессор (жараёнчи) томонидан компьютер хотирасида қандай кўринишда ёзилади ва қайта ишланади? Мумкин бўлган усуллардан бири қуйидагичадир. Электрон схеманинг берилган қисмидаги электр сигналининг, аниқроғи электр кучланишининг (потенциаллар айирмасининг) мавжудлиги 1 ни, йўқлиги эса 0 ни кодлайди (Ҳақиқатда кодлашнинг энг кўп тарқалган усулида микросхемага +5 В кучланиш ҳосил қилувчи ток манбаи уланади, нолга 0 дан 0,5 В гача бўлган потенциал, бирга эса схеманинг ерга уланган қисмига нисбатан 2,5 дан 5 В гача потенциал мос келади.)

Кучланишнинг борлиги ёки йўқлиги ёрдамида кодланган ахборотларни қайта ишлаб берувчи оддий электрон қурилма инвертор (ЭМАС элементи) дейилиши бизга маълум. Бундан ташқари, биз сиз билан ВА, ЁКИ элементларини ишлаш принципларини кўриб чиққанмиз. ЭМАС, ВА, ЁКИ элементлари орқали қандай мураккабликка эга бўлмасин, ихтиёрий мантиқий функцияларни амалга ошириш мумкин. Уларни яратиш учун эслатилган элементлардан кўп ёки оз миқдорда керак бўлиши мумкин. Зарур бўлган сон яратилиши керак бўлган мантиқий функцияларнинг мураккаблигига боғлиқ.

Компьютер яратувчилар иложи борича камроқ мантиқий элементлар ишлатишга ҳаракат қиладилар. Бошқача айтганда, шундай электрон схемалар танлайдиларки, улар мўлжалланган мантиқий функцияни бажарсин ва иложи борича камроқ бўғинларга эга бўлсин. Ихтиёрий мантиқий амалларни амалга ошириш учун иккитагина мантиқий элемент етарли бўлар экан. Ҳақиқатан ҳам ЁКИ функцияни ЭМАС ва ВА элементлари орқали амалга ошириш мумкин бўлса, ЭМАС ва ва ЁКИ элементлари орқали ВА функцияни ҳосил қилиш мумкин. ЁКИ функцияни ВА функциясига ўтказиш расмда кўрсатилган.



A	B	C	Д	F₁	F	
0	0	1	1	1	0	
0	1	1	0	1	0	
1	0	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	1	

Ушбу расмда келтирилган мантиқий схема жадвалидаги кириш ва чиқишга мос устунларни ВА функциянинг ростлик жадвали билан таққослаб кўрсангиз, уларни бир хил эканлигига иқрор бўласиз. Шунга ўхшаш бирлащмалар орқали турли-туман содда ва мураккаб схемалар қуриш мумкин. Юқорида кўриб ўтилган элементар мантиқий схемаларга ўхшаш ЁКИ — ВА ва ЭМАС—ЁКИ мантиқий схемалар ҳам мавжуд. Биз буларнинг ишлаш принциплари устида тўхталмаймиз.

ЭМАС, ВА, ЁКИ мантиқий элементлар компьютерлар қурилмаларининг компоненталарини ташкил этувчи функционал блок ва қисмларини, яъни иккилик саноқ системасидаги 0 ёки 1 рақамни ўз хотирасида сақловчи ва унутувчи автомат қурилмалар (тригерлар) яратишда фойдаланилади. Компьютернинг алоҳида қисмларини яратишда қуйидаги функционал блоклар кенг тарқалган:

Тригерлар. Тригер деб иккита турғун ҳолатнинг бирида турган ҳамда тескари алоқа воситасига эга бўлган компьютер элементига айтилади. Бундай икки ҳолатнинг бирида тригер ташқи ишга туширувчи сигнал таъсир этмагунча қолиши мумкин. Ташқи сигнал таъсир этганда, тригер бошқа турғун ҳолатга сакраб ўтади ва шу ҳолатда янги кириш сигнали келгунча туради. Тригерлар, вазифасига кўра хотирловчи ва шакллантирувчи гуруҳларга бўлинади. Асосан тригерлардан арифметик ва мантиқий амалларни бажаришда хотира элементи, оралиқ натижаларни қисқа муддатда хотирада сақлаш ҳамда регистрлар ва ҳисоблагичлар яратишда фойдаланилади. Бундан ташқари, тригерлардан кириш сигналини ҳосил қилувчи элемент сифатида фойдаланиш мумкин. Чиқарадиган сигналларнинг кўринишига қараб статик (ёки потенциал) ва динамик тригерларга ажратилади. Статик тригерларни потенциал сигналлар, динамик тригерларни эса импульс сигналлар чиқаради.

Регистрлар. Регистр деб бир неча сондаги тригерлар ва мантиқий элементлар бирлашмасидан ташкил топиб, берилган ахборотни ўз хотирасида сақлаш, керак бўлган ҳолда ўзгартириш ва узатиш учун мўлжалланган қисқа вақтли хотира қурилмасига. Регистрлар, айтилади, вазифасига кўра, ахборотни қабул қилувчи, сақловчи, узатувчи, сонли кодларни ўзгартирувчи, мантиқий амалларни бажарувчи турларга бўлинади. Компьютерда қўлланиладиган регистрлар статик ва динамик тартибда ишлайди. Ахборотни ўзида сақловчи регистрлар статик тартибли, ахборотни узатувчи регистрлар эса динамик тартибли бўлади Барча регистрлар ишлаш тактига кўра бир ва кўп тактли бўлиши мумкин. Ахборот, ёзиш усулига кўра, параллел ва кетма-кет ишлайдиган турларга бўлинади. Регистрлар жамлагич билан ишлаганда арифметик-мантиқий қурилмада амалларни бевосита бажаришда қатнашиб, қўшиш, кўпайтириш, бўлиш, айириш ва бошқа амалларни бажариши мумкин.

Санагич. Ўз киришига келиб кираётган маълум бир шаклдаги сигнал ёки импульсларни санаш учун мўлжалланган қурилма санагич дейилади. Санагичлар йиғувчи, айирувчи ва реверсив турларга бўлинади. Санагичлар компьютерга киритиладиган ва чиқариладиган ахборот миқдорини, компьютерда бажариладиган амаллар такрорланиш сонини ҳисоблаш учун дастур буйруқлари адреси кетма-кетлигини ҳосил қилиш ва бошқа вазифаларни бажариш учун қўлланилади. Санагичлар ҳар хил турдаги хотира элементлари асосида қурилиши мумкин.

Жамлагич. Жамлагичлар арифметик қурилманинг асосий қисмидан, яъни „юрагидан" иборат. У сонларни қўшиш учун хизмат қилади. Жамлагичнинг ишлаш принципи компьютернинг мантиқий қўшиш қоидасига асослангандир. Ишлатилаётган элементларнинг турига қараб жамлагичлар комбинацияли ва жамғарувчи турларга бўлинади.

Комбинацияли жамлагичлар ВА, ЭМАС, ЁКИ мантиқий элементлар асосида қурилади. Бундай жамлагичлар регистрлар билан бирга ишлайди. Регистр ҳар сафар натижани ёзишни амалга ошириб туради. Жамғарувчи жамлагичлар мантиқий элементлар ва тригерлар асосида қурилиб, маълум бир хонали сонларни қўшиш учун мўлжалланган бўлади.

Дешифратор. Компьютерларнинг иккита рақамли саноқ системада ишлаши бизга маълум. Шунинг учун ҳам компьютерга киритилаётган барча ахборот иккили системага утказилиши керак. Бу жараён эса, компьютерга киритилаётган ахборотни кодлаш жараёни ёки кодлаш амали деб аталади. Компьютердан олинаётган ахборот эса яна иккили системадан одатдаги қўлланиладиган сон, формула, матн ва ҳоказо ахборотларга айлантирилиши керак. Бу жараён кодлаш амалининг тескариси бўлади. Масалан, компьютерга ўнли саноқ системасида 1993 сони киритилиши талаб этилсин. У вақтда ушбу ўнли системадаги сон кодланади, яъни иккили системадаги 001 1001 1001 0011 рақамлар кетма-кетлигига ўтказилади. Бу сонга иккили кодланган сон дейилади. Ушбу сон компьютерда қайта ишлангандан сўнг иккили кодланган натижа ўнли системага ўтказилади. Бундай вазифаларни бажарувчи электрон схемалар саралаш схемалари дейилади. Ана шу схемалар заминида компьютерга кираётган ахборотни кодловчи қурилмага **шифратор**, компьютердан олинаётган натижани яна кодлаш амалининг тескарисига ўтказувчи қурилмага **дешифратор** деб аталади. Дешифратор амал кодларини қайта ўзгартириш, компьютер хотирасига сонларни ёзиш, санаш учун хотира катакчаларини танлаш, регистр, санагич ва бошқалардаги сақланаётган кодланган сонларни кодлаш амалини тескарисига ўтказишда қўлланилади. Дешифраторлар диодлар, транзистор, ферромагнит ўзаклар, интеграл схемалар, мантиқий элементлар асосида қурилиши мумкин Дешифраторлар иккили, саккизли, иккили-ўнли, иккили-ўн олтили саноқ системаларига мосланиши мумкин.

Интеграл микросхема. 1 см^3 ҳажмли кристаллда энг камида 5 дона электроника элементини бирлаштирган электрон қурилма микросхема ёки интеграл схема деб аталади

Интеграл микросхемаларни, тайёрлаш технологиясига кўра, чала ўтказгичли, плёнкали, гибридли турларига бўлиш мумкин. 1 см^3 ҳажмда 100 дан 100 минггача элементни бирлаштирган микросхемалар юқори ва ўта юқори интеграл схемалар деб номланади. Микросхемалар тўғри тўртбурчак ва айлана шаклида тайёрланиши мумкин.

Саволлар

1. Тригер деб нимага айтилади?
2. Тригерлар қандай элементлар асосида қурилади?
3. Регистр деб нимага айтилади? Улар қандай тартибларда ишлайди?
4. Регистрлар қандай элементлар асосида қурилиши мумкин?
5. Санагич деб нимага айтилади? Уларнинг қандай турлари мавжуд?
6. Санагичлар қандай вазифани бажариши мумкин?
7. Дешифратор қандай вазифани бажаради?
8. Дешифратор қандай саноқ системаларга асосланган ҳолда қурилиши мумкин?
9. Микросхема деб нимага айтилади?
10. Интеграл схемалар, тайёрланиш технологиясига кўра, қандай турларга ажратилади?

9-§. Ҳисоблаш системаларини кенгайтириш

Юқоридаги параграфлардан маълумки, ҳисоблаш системалари қуйидаги икки асосий хоссага эга:

1) бирор асосли системада ёзилган ихтиёрий сон асосининг даражалари бўйича ёйилади;

2) p асосли саноқ системасида p та рақам мавжуд.

Юқорида келтирилган шартларнинг иккинчиси бажарилмайдиган саноқ системасини ҳам киритиш мумкин, яъни системадаги мавжуд рақамлар сони система асосига тенг бўлмасин деган шарт қўйилиши мумкин. Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) системанинг рақамлар сони система асосига нисбатан кўп бўлсин Бундай ҳолда сонларни ифодалашда ягоналик бўлмаслиги мумкин. Масалан, саккизли саноқ системасида 10 та рақам бор деб фараз қилайлик: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 8, 9. Бу системада 137_{10} сонини қуйидаги тўрт кўринишда ёзиш мумкин бўлади: 189_8, 191_8, 209_8 ва 211_8. Келтирилган ушбу сонларнинг ўзаро тенглигига ишонч ҳосил қилиш учун уларни 8 сонининг даражалари бўйича ёйиб кўриш мумкин;

б) саноқ системасининг рақамлар сони асосидан кам бўлсин. Бу ҳолда сонларни ифодалаш учун қўшимча тушунчалар киритишга тўғри келади (масалан, манфий рақамлар, каррали хоналар ва ҳоказо). Бу қўшимча тушунчалар ҳам янги символлар деб тушунилиши мумкин лекин улар қолган рақамлар билан қандайдир боғлиқ бўлишлари мумкин Масалан, ҳисоблаш системасидаги етишмайдиган рақамларни ифодалаш учун соннинг олдинги хонасига 1 қўшиб ёзиб, кейинги хонасига лозим бўлган манфий рақамни ёзиш мумкин. Масалан, 0, 1 ., 3, 4, 5, 6, 7 рақамларидан иборат саккиз рақамли ўнли системани қарайлик. Унда сонлар кетма-кетлигини 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 11, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 21, 20, 21, . . . шаклда ифодалаш мумкин;

в) ёзилган соннинг бир неча рақами бирор асосда бўлиб, қолган рақамлари бошқа асосда ифодаланган бўлсин. Бундай ҳолда ҳар бир бўлакнинг асоси чизиқ тортиб алоҳида ёзилади. Масалан, ушбу бешта рақамли $2\big|_{10}\ 10\big|_{2}\ 30\big|_{8}$ сон қуйидагича ёйилмага эгадир:

$$2\big|_{10}\ 10\big|_{2}\ 30\big|_{8} = 2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 3 \cdot 8^1 = 20032_{10}$$

Фараз қилайлик, катта сон бир неча хонани эгаллаган бўлсин Бу сонни ўнли системадан иккили системага ўтказишдан олдин бир хонадаги қисмини иккили системада ифодалаган бўлсак, бу ҳолатдаги соннинг ифодаси юқорида баён қилинган кўринишда, яъни турли асосли бўлади;

г) соннинг асоси ихтиёрий сондан иборат бўлсин. Масалан, сон 1/2 асосли саноқ системасида ёзилган бўлса, у ҳолда у 1/2 нинг даражалари бўйича ёйилади. Агар бирорта сон иккили ва 1/2 ли саноқ системасида ифодаланган бўлса, уларнинг мантисса ва тартибларида маълум ўхшашлик ва ўрин алмаштириш содир бўлади. Масалан, 7,375 сони системанинг асоси 2 ва 1/2 бўлганда мос равишда $111,011_2$ ва $1101,11_{1/2}$ шаклларда ифодаланади. Бу ёзувларни синчиклаб кузатсак, иккинчи сон биринчи сонни тескари тартибда ёзишдан ва бутун қисмини бир хонага оширишдан келиб чиқади. Бундай системаларни **ўзаро тескари системалар** деб аташ мумкин. Ўзаро тескари системаларнинг хусусиятларидан баъзи ҳолларда фойдаланиш мумкин.

10-§. ЭҲМ тили

Электрон ҳисоблаш машиналарида бирор масалани ечиш учун олдин унинг математик моделини тузиб олиш керак. Математик модель тузиш деганда қўйилган масалани математика тилига ўтказиш тушунилади.

Математик модель тузилганидан сўнг уни дискретлаштириш, ечиш усуллари аниқланади. Масалани ечиш алгоритми ва дастур тузилади.

Аслида ЭҲМ элементар арифметик, мантиқий ва бошқа амалларни бажаришга мослаштирилгандир. Шунинг учун масалани ЭҲМда ҳал қилиниши керак бўлса, танланган алгоритм ЭҲМ тушунадиган амаллар кетма-кетлиги шаклида тасвирланади. Бундай кетма-кетлик ЭҲМ тилида ёзилган дастурдир.

Машина тилида дастур тузиш ҳақида маълумот олишдан аввал, машиналарга хос баъзи „хусусиятларни" кўриб чиқайлак.

1. Машинанинг хотираси катаклардан (ячейкалардан) иборат бўлиб, ҳар бир катакда битта сон ёки дастурнинг бир бўлагидан иборат бўлган буйруқ ёзилиши мумкин.

Хотира катаклари номерланган бўлиб, бу номер катакнинг адреси дейилади. Катаклар сони ҳар хил машиналарда ҳар хил бўлиб, хотиранинг катта-кичиклиги катаклар сони билан аниқланади. Катаклар 0, 1, 2, . . . ва ҳоказо номерланади. Ҳозирги замон машиналарида катаклар сони 2048 дан 130972 гача ва ундан ортиқ ҳам бўлиши мумкин.

2. Буйруқда бажарилиши керак бўлган амал (иш) ва бу амал қайси сонлар устида бажарилиши кераклиги ҳақидаги маълумот берилади. Буйруқда амал бажарилиши керак бўлган сонларнинг ўзи эмас, балки у

сонлар жойлашган катак номери (адреси) берилади. Бу адресдаги сонлар (*a*, *b*, *c*) нинг қийматлари эса турлича бўлиши мумкин. Шунинг учун буйруқда кўрсатилган катакларга киритиб қўйилган сонлар қийматига қараб, ҳар хил натижа олиш мумкин.

Масалан, ушбу

$$[175] + [206] \Rightarrow [306]^*$$

буйруқ бирор машина учун 175-катакдаги сонга 206-катакдаги сонни қўшиш ва натижани 306-катакка юбориш (эслаш) ни англатади.

Агар 175-катакда 10 сони ва 206-катакда 25 сони бўлса, натижа 25 га тенг бўлади ва у 306-катакда ёзилиб қолади. Бу сонлар катак номерлари бўлмай, конкрет қийматлардир. Хотиранинг яна бир хусусияти, унинг ҳар қандай катагига янги маълумот юборилмагунча, ундаги эски маълумот ўчмаслиги ва ўзгармаслигидадир. Агар катакка бирор маълумот юборилса, эскиси бутунлай ўчиб кетиб, янги маълумот ёзилиб қолади. Агар қайсидир катакдаги эски маълумот керак бўлса, янги маълумотни у катакка эмас, бошқа бўш катакка юбориш керак.

3. Хотира катагининг ҳам ўлчами бўлиб, ҳар бир катакда сақланадиган соннинг аниқлиги шу билан белгиланади. Маълумки, соннинг (натижанинг) аниқлиги деганда, шу сон нечта рақам билан берилганини тушунамиз. Мисол учун 518,795 сони 0,001 аниқлик билан берилган. Бир машинада бирор аниқлик билан сонларни ёзиш мумкин бўлса, бошқа машиналарда иккинчи аниқлик билан сонларни ёзиш мумкин. Кўпчилик машиналар тахминан 10^{-78} ва 10^{+76} оралиғидаги сонларни ёзиш имконини беради. Шундай қилиб, машиналар бир-биридан хотира катакларининг ўлчамлари билан ҳам фарқ қилади.

4. Асосан хотира катагининг ўлчамига қараб, буйруқ тузилиши ҳам ҳар хил машиналарда ҳар хил бўлади. Буйруқ тузилишининг умумий кўриниши θA шаклида бўлиб, бунда θ — бажарилиши керак бўлган амал; A — адреслар майдони.

Бошқача қилиб айтганда, буйруқ ёзилган пайтда у икки қисмдан иборат бўлиб, биринчи қисмида буйруқ-

---

* Сонлар катак номери эканлигини кўрсатиш учун ўрта қавс ичида ёзилди, $\Rightarrow$ жўнатиш белгисини билдиради.

даги амалнинг ишораси (сон тарзида), иккинчи қисмида эса амал бажарилиши керак бўлган соннинг ёки сонларнинг адреси кўрсатилади.

Адреслар майдони қисмида амалда иштирок этувчи сонлар адреси ва натижа эслаб қолиниши керак бўлган адрес кўрсатилиши мумкин, яъни бир буйруқда учта адрес кўрсатилиши мумкин. Буйруқ тузилиши шундай бўлган машиналар уч адресли машиналар дейилади. Демак, уч адресли машиналарда буйруқ тузилиши $\theta A_1 A_2 A_3$ каби бўлади (масалан, М20, М220, М222, БЭСМ-3М, БЭСМ-4 машиналарида). Икки адресли машиналарда буйруқ тузилиши $\theta A_1 A_2$ каби (масалан, Минск-22, Минск-32 машиналарида), шунингдек бир адресли машиналарда буйруқ тузилиши θA_1 (масалан, Урал-1, БЭСМ-6 машиналарда) каби бўлади.

Биз уч адресли машиналар ҳақида тўхталамиз. Ҳозирги замон ЭҲМ ларида адреслар майдони бир, икки, уч адреслардан иборат бўлиши мумкин.

Буйруқлар бажарилиш тартиби бўйича хотира катакларига ёзилади ва шу тартибда, яъни олдин биринчи буйруқ, кейин иккинчиси ва ҳоказо кетма-кетликда бажарилади. Бунинг учун машинанинг бошқариш пультидан даставвал биринчи буйруқ берилади. Бу бошқаришни катакка бериш дейилади.

Бунда бошқариш қурилмаси буйруқнинг адресини эслайди ва шу катакдаги буйруқ бошқариш қурилмасига олинади. Кейин буйруққа мос бошқарув сигналлари ишлаб чиқарилади, яъни амал бажарилади. Амал бажарилиб тамом бўлиши билан бир вақтда эслаб қолинган адрес биттага ортади. Энди шу адрес эсланади ва шу адресдаги буйруқ хотирадан бошқариш қурилмасига олинади. Кейин, яна буйруққа мос бошқарув сигналлари ишлаб чиқарилади, яъни амал бажарилади ва ҳоказо, то машинани тўхтатиш ҳақида буйруқ тугамагунча (ёки амаллар кетма-кетлигини ўзгартириш ҳақида буйруққача) машина автоматик равишда ишлай беради.

Биз юқорида машиналар ишлашининг асосий принциплари билан танишиб чиқдик. Энди, М-220 электрон ҳисоблаш машинасида ҳақиқий илдизларга эга бўлган $AX^2+BX+C=0$ квадрат тенгламани ечиш дастурини тузайлик.

Дастур

Катак номери	Катакдаги буйруқ				Буйруқ маъноси
	амал белгиси	буйруқнинг адреслари			
	θ	A_1	A_2	A_3	
0062	005	0032	0032	0041	$B \times B$
0063	005	0031	0035	0042	$4 \times A$
0064	005	0042	0033	0043	$(4 \times A) \times C$
0065	002	0041	0043	0044	$B^2 - 4 \times A \times C$
0066	036	0	0075	0	агар олдинги амал натижаси манфий бўлса, 75-катакка ўтиш, акс ҳолда табиий тартибда ишлаш, яъни 67-катакка ўтиш
0067	044	0044	0	0045	$\sqrt{B^2 - 4AC}$
0068	005	0032	0036	0046	$-B$
0069	001	0046	0045	0047	$-B + \sqrt{B^2 - 4AC}$
0070	002	0044	0045	0048	$-B - \sqrt{B^2 - 4AC}$
0071	005	0034	0031	0049	$2A$
0072	004	0047	0049	0050	$(-B + \sqrt{B^2 - 4AC}) : 2A$
0073	004	0048	0049	0051	$(-B - \sqrt{B^2 - 4AC}) : 2A$
0074	ёзувга чиқариш				қоғоз лентага натижани чиқар.
0075	077	0	0	0	тўхташ

Бу дастур тенгламани ечиш учун керак бўладиган қийматларни хотиранинг катакларида қуйидагича ҳолга мослаштириб тузилган.

Катак номери	Катакдаги сон
31	A
32	B
33	C
34	2
35	4
36	—1

Кўриниб турибдики, буйруқдаги амал белгиси ҳам сонлардан иборат экан. Дастурнинг ўзи 62-катакдан бошланади, берилган қийматлар 31-катакдан бошлаб жойлаштирилади ва ниҳоят оралиқ (ёрдамчи) натижалар 41—49 катакларга ёзилади.

Масаланинг x_1, x_2 ечимлари 50, 51-катакларда чиқариляпти ва уларни машинадан чиқариб олиш учун „ёзувга чиқариш" ёзилган.

Машинанинг хусусиятларидан бири шуки, бирор буйруқ бажарилганда, натижага қараб, маълум бир сигнал ишлаб чиқарилади. Хусусан, 65-катакдаги буйруқ бир сон B^2 дан иккинчи $4AC$ сонни айириш ва $B^2 - 4AC$ натижани бирор 0044 катакқа юборишини англатиб, $B^2 - 4AC$ натижа манфий қиймат чиқса, махсус сигнал ишлаб чиқарилади. Кейинги 66-катакдаги буйруқнинг ишлаши шу сигнал бор ёки йўқлигига қараб икки хил бўлади. (Буйруқ 66-катакда бўлгани учун эмас, балки амал белгиси 036 бўлгани учун): агар сигнал бўлса, бошқариш 75-катакка берилади ва сигнал йўқ бўлса, бошқариш табиий тартиб бўйича кейинги 67-катакка берилади. Бу ерда катакдаги буйруқ маъносига ҳам тўхталиб ўтиш мақсадга мувофиқдир. Бу квадрат илдиз чиқариш бўлиб, унда битта сон ($B^2 - 4AC$) қатнашади. Шунинг учун бу буйруқда олдин илдиз чиқарилаётган соннинг адресида ҳамма вақт ноль бўлади ва ниҳоят, натижа юборилаётган адрес кўрсатилади. Агар буйруқни 041 0000 0044 0045 каби ёзсак, бу нолинчи катакдаги сон (ноль) дан квадрат илдиз чиқариш ва натижа (ноль) ни 45-катакка юборишни англатади. Бу эса биз ечаётган масала нуқтаи назаридан хато бўлади.

74-катакдаги буйруқ, албатта, машина тилида бошқачароқ бўлади Унда нимани қоғоз лентага чиқараётганимиз ҳақида ҳам маълумот берилиши керак. Биз натижани қоғоз лентага чиқариш буйруғини тўлиқ келтирмасдан „ёзувга чиқариш" сўзи билан бердик. Шундай қилиб, биз квадрат тенгламанинг илдизларини топиш масаласини машина тилида ечишни кўриб чиқдик. Кўрсатиб ўтганимиздек, берилган A, B, C сонлар ўзгариб турса, шу дастурнинг ўзини ишлатиб бошқа-бошқа илдизлар топишимиз мумкин Яъни бу дастур умумий квадрат тенгламалар ечиш дастури бўлиб, ҳар гал янгидан дастур тузиб ўтирмасдан, шунинг ўзидан фойдаланавериш мумкин. Бу эса дастурлар кутубхонасини ташкил қилишга замин яратади. Бундай дастурлар стандарт дастурлар, уларнинг тўплами эса *стандарт дастурлар кутубхонаси* дейилади. Бу стандарт дастурларни ишлатиш стандарт дастурга **мурожаат қилиш** деб аталади.

Шундай қилиб, биз машина тили (бевосита дастурлаш) элементлари билан қисқача танишиб чиқдик. Хулоса қилиб шуни айтишимиз мумкинки, ҳозир машина тилида дастур умуман тузилмайди. Машина тилида дастур тузишдек машаққатли ишдан дастурлаш тиллари қутқарди. Булардан энг оддийси машина тилининг хусусиятларини ўз ичига олувчи „Ассемблер" тилидир. Унинг юқори поғонаси сифатида БЕЙСИК, ФОРТРАН, ПАСКАЛЬ ва ҳоказо дастурлаш тилларини мисол қилиб келтириш мумкин.

11-§. Компьютернинг дастур билан бошқариладиган иш принципи

Ҳар қандай ечилиши керак бўлган масалани компьютерда ҳал қилиш учун, дастлаб у аниқ ЭҲМ турига мос амаллар мажмуидаги амаллар кетма-кетлиги кўринишида ифодалаб олинади. Бундай амаллар кетма-кетлиги дастур дейилади. Шундай қилиб, дастур бирор масалани ечишда компьютер бажариши лозим бўлган амалларнинг изчил тартибидан иборат. Дастурда натижа олиш учун сонлар устида қандай амаллар, қандай тартибда ва қайси сонлар устида бажарилиши кўрсатилади. Дастур ҳисоблаш жараёнининг тўла тавсифидан иборат бўлиб, кўрсатмалар (буйруқлар) йиғиндисидан иборатдир.

Компьютер учун дастур тузиш жараёни дастурлаш дейилади. Кўрсатма деб, ушбу босқичда қайси сонлар устида қандай амал бажариш кераклиги ҳақидаги кўрсатмаларни ўз ичига олган ҳисоблаш жараёнининг қисми тавсифига айтилади. Аниқ компьютер учун барча мумкин бўлган амаллар (кўпайтириш, айириш ва ҳоказо) кодланган ва кўрсатмада мос амалнинг коди (АК) кўрсатилади. ЭҲМ ларда қабул қилинган кўрсатмалар тузишнинг адресли принципи кўрсатмада амал бажарилаётган сонлар эмас, балки шу сонлар жойлашган ТХҚ катакчасининг номери (адреси) кўрсатилаётганини ифодалайди. Битта кўрсатма бажарилаётганда бир вақтнинг ўзида бир катакча қатнашиши мумкин. Бирданига бирдан учтагача катакча қатнашиши мумкин, яъни буйруқлар бир, икки, уч адресга эга бўлиши мумкин.

Буйруқлар турига қараб, бир ва кўп адресли (икки ва уч адресли) ҳисоблаш машиналарига ажратилади.

Бир адресли ҳисоблаш машиналарининг буйруқларида амал коди ва сон адреси кўрсатилади:

амал коди	сон адреси

Икки сон устида амал бажариш учун учта буйруққа эга бўлиш керак. Биринчи буйруқ бўйича биринчи сон арифметик қурилмага жўнатилади. Иккинчи буйруқ бўйича иккинчи сон ва жамлагичдаги сон билан амал бажаради Учинчи буйруқда бажарилган амал натижаси жўнатилиши керак бўлган катакча адреси (номери) кўрсатилади.

Икки адресли ҳисоблаш машина буйруғида амал коди ва икки сон адреси кўрсатилади.

Амал коди	1- адрес	2- адрес

Амал бажарилгандан кейин натижа арифметик қурилмада қолади. Уни сақлаш учун катакчага жўнатиш учун яна битта буйруқ керак.

Уч адресли ҳисоблаш машиналарда амал коди, биринчи сон адреси, иккинчи сон адреси ва амал бажарилгандан кейин натижани сақлаш учун жўнатиладиган катакча адреси кўрсатилади.

Амал коди	1- адрес	2- адрес	3- адрес

Азиз ўқувчи, бир адресли ҳисоблаш машиналаридаги буйруқларнинг умумий сони уч адресли ҳисоблаш машиналаридаги буйруқларнинг умумий сонига қараганда уч марта кўп экан, деган нотўғри хулосага келманг Аслида бундай эмас, чунки баъзан амаллар орасида ҳисоб натижасини ТХҚ (ташқи хотира қурилмаси) га жўнатиш зарурати бўлмайди. Масалан, унинг ўрнига кейинги амал бажарилади.

Шуни таъкидлаш зарурки, бир адресли ҳисоблаш машиналари катта тезкорликка (ишлаш тезлигига) эга ва улар технологик жараёнларни бошқариш учун фойдаланилади Уч адресли электрон ҳисоблаш машиналар жуда катта ҳажмдаги тезкор хотирага эга бўлиши мумкин, лекин бир адресли машиналарга нисбатан ишлаш тезлиги анчагина паст бўлади.

ЭҲМ ларда буйруқларни бажаришда табиий тартиб қабул қилинган. Бу тартибда барча кўрсатмалар дастурда ёзилган кетма-кетликда бажарилади. К-кўрсатма бажарилгандан кейин албатта К + 1-кўрсатма бажарилади.

Масалани ечиш машина хотирасига дастур ва бошланғич маълумотларни киритишдан бошланади Сўнгра бошқариш қурилмасининг сигналига кўра дастурнинг биринчи кўрсатмаси бажарилади. Бунинг учун номерлағи буйруқда кўрсатилиб, ТХҚ га ёзилган сонлар Р регистрга ва жамлагичга келади. Амал кодига мос ҳолда машинанинг барча қолган курилмалари ушбу амални бажаришга тўғриланади, сўнгра эса арифметик қурилма буйруқда кўрсатилган амални бажаради.

Амал натижаси жамлагичда сақланади ёки тезкор хотирага (буйруқ турига боғлиқ равишда) ёзилади. Ушбу буйруқ бажарилгандан кейин бошқариш қурилмаси а махсус сигнал келади. Бу сигнал қурилмага навбатдаги буйруқни бажаришга ўтишни кўрсатади. Шунгача жамлагичда сақланаётган аввалги амал натижаси Р регистрга (аввалги амал регистри) жўнатилади.

12-§. Алгоритм ва дастур тушунчалари

Алгоритм (ёки алгорифм) — маълум бир турга оид ҳамма масалаларни ечишда ишлатиладиган амаллар системасининг муайян тартибда бажарилиши ҳақидаги аниқ қоидадир.

Ўрта асрларда ўнли саноқ системаси бўйича тўрт арифметик амал бажариладиган қоидани алгоритм деб аташган. Бу қоидаларни математикага IX асрда ўзбек математиги ал-Хоразмий киритган. Ал-Хоразмийнинг „Дедики ал-Хоразмий“ деган сўз билан бошланган „Арифметика“ китоби лотин тилига „*Dixit Algoritmi*“ деб таржима қилинган. Лотин талаффузида ал-Хоразмий сўзи бузилиб. „Алгоризм“ сўнгра эса „Алгоритм„ бўлиб кетганлиги фанда 1849 йили Ж. Рейно орқали маълум бўлди. Алгоритмларни ёзиш бўйича мисоллар кўрайлик.

1-мисол. $y = 3x/(\sqrt{2x} + 1)$ функцияни ҳисоблаш алгоритмини тузинг (аргумент x нинг қиймати берилган деб ҳисобланг).

Алгоритм. 1. x ни 2 га кўпайтирилсин.

2. Биринчи амал натижасидан квадрат илдиз чиқарилсин.

3. Иккинчи амал натижасига 1 қушилсин.
4. x ни 3 га кўпайтирилсин.
5. Тўртинчи амал натижасини учинчи амал натижасига бўлинсин.

2-мисол. Берилган a ва b натурал сонларнинг энг кичик умумий бўлувчисини топиш алгоритмини тузинг (Евклид алгоритми).

Алгоритм. 1. Агар $a > b$ бўлса, у ҳолда 4-бандга ўтилсин, акс ҳолда 2-бандга ўтилсин.
2. Агар $b > a$ бўлса, у ҳолда 5-бандга ўтилсин акс ҳолда 3-бандга ўтилсин.
3. Сонларнин ҳар бири керакли натижани беради Жараён тўхтатилсин.
4. a дан b айрилсин ва айирма a нинг қиймати деб қаралсин. 1-бандга қайтилсин.
5. b дан a айрилсин ва айирма b нинг қиймати деб қаралсин.
1-бандга қайтилсин.

Шундай қилиб, жараён 3-банддаги шарт бажарилгунча давом эттирилади.

3-мисол. x нинг $-25, -24, \ldots, 24, 25$ қийматлари учун $y = 2 \cdot x^2 - 1$ функциянинг қийматлари жадвалини тузиш алгоритмини ёзинг.

Алгоритм. 1. x га -25 қиймат берилсин.
2. $y = 2x^2 - 1$ қиймат ҳисоблансин.
3. y нинг қиймати жадвалга ёзилсин.
4. x нинг қиймати 1 та орттирилсин (қўшилсин).
5. Агар $x < 25$ бўлса, у ҳолда 2-бандга ўтилсин, акс ҳолда навбатдаги кўрсатмага ўтилсин.
6. Жараён тўхтатилсин.

Алгоритмнинг ушбу тафсифида 2 — 5 қадамлар 51 марта такрорланади. Ушбу мисолда, табиийки, 2-банддаги ҳисоблашни янада соддароқ амалларга ажратиш мумкин. Арифметик қоидаларнинг содда ва оддийлиги туфайли биз буни бажариб ўтирмадик.

Биз юқорида келтирилган мисолларда уч хил: чизиқли, тармоқланувчи ва такрорланувчи алгоритмларни кўриб ўтдик. Шундай алгоритмларнинг бирлашмаларидан фойдаланган ҳолда мураккаб масалаларнинг алгоритмлари тузилади.

Алгоритмлар учта асосий шартга бўйсуниши керак: бир қийматлилик, оммавийлик ва натижавийлик. Бир **қийматлилик** шартида қоидаларнинг бажариш усулларининг ҳеч қандай ихтиёрийликка йўл қўйилмайдиган аниқ ва умумтушунарли бўлиши талаб этилади. Бундаги кўрсатмаларга асосланган ҳисоблаш жараёни ҳисобловчи шахс ихтиёрига боғлиқ бўлмайди ва у исталган пайтда бошқа шахс томонидан бирдай муваффақият билан такрорланиши мумкин бўлган бир қийматли жараённи ташкил қилади. **Оммавийлик** — алгоритм фақат биргина аниқ масалани эмас, балки бутун бир масалалар синфини ечиш учун хизмат қилади. Ҳисоблаш усули ҳақидаги кўрсатмалар вариация қилиниши мумкин бўлган бошланғич маълумотларга қўлланилиши мумкин. **Натижавийлик** — баъзида алгоритмнинг йўналтирилганлиги деб аталувчи бу хоссада берилган турнинг исталган масаласига қўлланилган алгоритм жараёнининг чекли қадамдан кейин тўхташи ва тўхтагандан кейин изланган натижани ҳисоблаб чиқиш мумкинлиги талаб этилади.

Фанда „Евклид алгоритми“, „Ғиёсиддин Коший алгоритми“, „Лурье алгоритми“, „Марков алгоритми“ деб аталувчи алгоритмлар маълум. Бундай алгоритмлар борган сари кўпаймоқда. Алгоритм тушунчаси тобора кенгайиб бормоқда. Ҳозирги кунда алгоритмлар назарияси пайдо бўлди. Алгоритмлар назарияси кибернетиканинг назарий ва мантиқий асосидир.

Шуни айтиб ўтиш лозимки, ҳар қандай масалани ҳам ечиш алгоритми мавжуд бўлавермайди. Масалан, фақат циркуль ва чизғич ёрдамида: а) доирани квадратлаштириш; б) бурчакни учга бўлиш; в) кубни иккилантириш масалаларининг ечиш алгоритми мавжуд эмаслиги аниқ исботланган.

Дастур бирор масалани ечишда электрон ҳисоблаш машиналари бажариши лозим бўлган амалларнинг изчил тартибидан иборат. ЭҲМ учун дастур тузиш жараёни **дастурлаш** дейилади.

Ҳар бир ЭҲМ тузилиши, буйруқ кодлари жиҳатидан бир-биридан фарқланиб, фақат маълум содда амаллар (арифметик ва мантиқий) тўпламинигина бажара олади. Аммо бу амаллар ёрдамида исталган мураккаб амалларни бажариш мумкин. Дастурлаш ечилиши керак бўлган масала алгоритмини ЭҲМ тилига, яъни „машина тили“ га ўтказишдир. ЭҲМ учун дастур тузиш — масалани ечиш усулини машина буйруқларининг шундай мажмуи (дастури)га, келтириш демакки, бу буйруқлар хотирага жойлашиб, тартиб билан амалга ошади ва тегишли ҳисоблашларни бажаради.

Дастурлаш икки асосий қисмга: бевосита дастурлаш ва автоматик дастурлашларга бўлинади Бевосита дастурлашда дастурнинг умумий схемасини ишлаб чиқишдан кодлаш ва машинага киритишгача бўлган барча ишни дастурчи бажаради. Автоматик дастурлашда эса дастурчи фақат дастур схемасини тузиб, уни қисқартирилган белгилар (символлар) кўринишида ёзади. Дастур тузиш ва кодлаш каби техник ишлар эса ЭҲМ ёрдамида бажарилади.

13-§. Дастурлаш тиллари ҳақида

Тезкор электрон ҳисоблаш машиналарининг пайдо бўлиши дастурлаш тили деб аталувчи турли-туман белгилар системаларининг пайдо бўлишига олиб келди. Шундай қилиб, ҳисоблаш машиналарида бажарилиши керак бўлган ҳисоблаш жараёнларини тавсифлаш учун қўлланадиган белгилар (символлар) системасини дастурлаш тили деб юритамиз Биринчи авлод машиналарига дастур машина тилида тузилар эди Машина тили аниқ амалларни сонли кўринишда кодлаш қоидаларига олиб келишдан иборат эди. Машина тили қуйи даражадаги дастурлаш тили ҳисобланиб, машинага мўлжалланган тиллар синфига киради (3-расм) Машинага мўлжалланган дастурлаш тилларнинг асосида аниқ бир ҳисоблаш машинасининг буйруқлар системаси ётади. Иккинчи авлод машиналари пайдо бўлиши масалаларни хусусиятларига бутунлай мўлжалланган ва аниқ бир машинага боғлиқ бўлмаган тилларни яратишни тақозо этди. ЭҲМ ларнинг турли-туман тилларининг вужудга келиши бу талабни янада кучайтирди Иккинчи авлод ЭҲМ ларининг символи сифатида муаммога мўлжалланган тиллар пайдо бўлди.

Дастурлаш тили қуйидаги афзалликларга эга:

1) У жонли тилимизга ўхшаш бўлиб, уни ўрганиш осондир;

2) бу тилда ёзилган дастур машина тилидагидан қисқароқ бўлади;

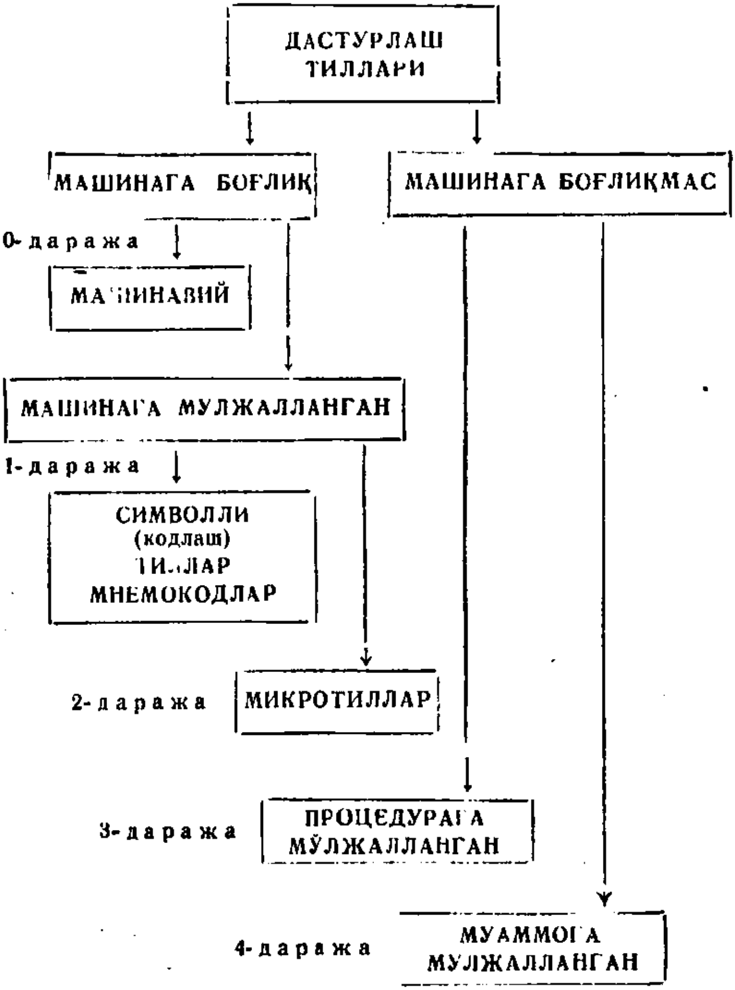
3) дастур ёзишга камроқ вақт сарфланади ва кам хатоликка йўл қўйилади;

4) ёзилган дастурни ихтиёрий дастур тузувчи ўқий олади;

5) дастурлаш тили машинага боғлиқ эмас.

Демак, дастурлаш тилида дастур тузиш қулайроқ, осонроқ ва бунинг учун аниқ машина тилини билиш шарт эмас.

Юқори даражадаги бундай тилда ишлаш мумкин бўлиши учун машинада дастурлаш тилини „тушунади-



3- расм.

ган" ва уни машина тилига таржима қила оладиган дастур бўлиши керак. Бундай дастур транслятор деб аталади („транслятор" инглизча сўз бўлиб, „таржимон" демакдир).

Бу тиллар конкрет ЭҲМ буйруқлари системасига боғлиқ бўлмаслиги ва иборалар тузилиши жиҳатидан умумий хусусиятга эга бўлиши билан бошқа табиий тилларга ўхшаб кетади. Иборалар икки турга — операторлар ҳамда тавсифларга бўлинади, уларнинг бир-бири билан боғлиқлиги қавслар билан, алоҳидалиги нуқтали вергуллар билан ажратилади. Операторлар тилнинг амал бирликлари бўлиб, ўз навбатида ўзгарувчан катталикка қиймат берувчи операторлар, шартга мувофиқ тегишли ҳисоблаш тармоғини танловчи (шартли) операторлар ва такрорий ҳисобни амалга оширувчи такрорланувчи операторларга бўлинади.

Тавсифда ўзгарувчи катталик ва бошқа белгилар хусусиятлари ёзилади. Бирор хусусий масалани ечиш учун тузилган дастурни символик равишда функционал белгилаш мумкин. Бундай белгилаш ва тавсиф биргаликда кичик дастур деб юритилади. Янги дастурлар тузишда кичик дастурлардан тайёр ҳолда фойдаланиш мумкин.

Кейинги йилларда жуда кўп дастурлаш тиллари яратилди. Улар қаторига қуйидагиларни киритиш мумкин Алгол-60 (ALGOL-60 — Algoritmic Language — алгоритмик тил), Фортран (FORTRAN — FORmula TRANslation — формулани ўтказиш), КОБОЛ (COBOL — COmmon Busines Oriented Language — турли ишларга мўлжалланган универсал тил), ПЛ-1 (PL/1 — Programming Language 1 — 1-дастурлаш тили), АЛГОЛ-68, ЛИСП (LISP — LISt Processing — рўйхатни ишлаш), СИМУЛА-67 (SIMULA-67), ЭПСИЛОН, БЕЙСИК (BASIC — Beginner's All purpose Symbolic Instruction Code — янги ўрганаётганлар учун белгили кўрсатмаларнинг кўп мақсадли тили), АДА. ИПЛ, ПАСКАЛЬ, РАПИРА ва бошқалар. Ҳозирги пайтда дастурлаш тилларининг сони жуда кўпайиб кетмоқда. Лекин, шуни айтиш керакки, ҳар қандай дастурлаш тили ўзининг даражаси (3-расм) ва қўллаш соҳасига эга. Ушбу жадвалда дастурлаш тилларининг баъзи бирларининг қўллаш соҳаларига қараб ажратилиши келтирилган. Охирги пайтда бир қанча дастурлаш тилларини умумлаштирувчи дастурлар системаси, структурали (таркибий) дастурлар устида иш олиб борилмоқда.

Тартиб №	Тилларни қўллаш соҳалари	Тилнинг номи
1	Ҳисоблаш масалаларини ечиш	ФОРТРАН, АЛГОЛ-60, АЛГОЛ-68, АЛГАМС

2	Белгили маълумотни ишлаш	ФОРМАЯК, ЭПСИЛОН, ИПЛ, ЛИСП
3	Матнли маълумот ва берилганларни ишлаш	КОБОЛ, АЛГЭК, АЛГЕМ
4	Сатрларни ишлаш	КОМИТ, СНОБОЛ
5	Рўйхатларни ишлаш	ЛИСП
6	Кўп мақсадли тиллар	АЛГОЛ-68, ДЖОВИАЛ, ПЛ/1
7	Мулоқот учун	БЕЙСИК, ДЖОСС, РОБИК, РАПИРА
8	Системали дастурлаш	АЛМО, ЭПСИЛОН, АДА, ОККАМ
9	Моделлаш масалалари ва тавсифлаш	СИМУЛА, САМСКРИПТ
10	Технологик жараённи бошқариш	АРТ
11	Иқтисодий масалаларни ечиш	КОБОЛ
12	Тузилишли дастурлаш	ПАСКАЛЬ, РАПИРА

14-§. Масалани ЭҲМга тайёрлаш ва ундан ўтказиш босқичлари

Ҳар қандай масалани ЭҲМ да ечиш учун қилинадиган тайёргарлик ва ўтказиш қай тарзда бажарилиши устида тўхтаймиз. Бу жараён, одатда, қуйидаги босқичларга бўлинади: масаланинг қўйилиши ва охирги мақсадни аниқлаш, математик ифодалаш; сонли таҳлил; ЭҲМ га дастур тузиш; дастурни ростлаш (текшириш); ҳисоб ва натижани қайта ишлаш.

Масаланинг қўйилиши ва охирги мақсадни аниқлаш

Бу масала, система ва унинг ишлаш шароитларидаги вазифаларни қаноатлантирувчи умумий яқинлашиш-ни, барча мезонларини аниқлаш ва танлашдан иборатдир. Баъзи масалаларда буни амалга ошириш жуда осон бўлса, баъзиларига ўйлаб вақт сарфланади. Қандай бўлмасин, ушбу босқичда, масаланинг асл моҳиятини чуқур тушуниш талаб этилади.

Математик ифодалаш (ёки тавсифлаш.) Маълумки, масалаларни турларига қараб, уни математик ифодалашнинг бир нечта хиллари мавжуд бўлади. Шулардан бирортаси танланиб, қўйилган масалани математик ифодалаш керак.

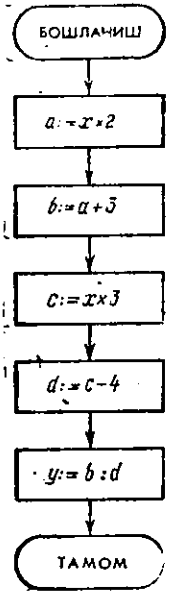
Агар бу усулларнинг бирортаси қўйилаётган масалага тўғри келмаса, у ҳолда янги усул ишлаб чиқилиши талаб этилади. Бу босқич ҳам қўйилган масалани тўлиқ ва математиканинг шунга мос соҳасини яхши билишни талаб этади.

Сонли таҳлил. Қаралаётган масаланинг математик ифодаланишини бирданига ЭҲМ га қўлланиш мумкин бўлмай қолиши мумкин, чунки ЭҲМ фақат арифметик амалларнигина бажара олади. Масалан, маълум бўлган математик тушунчалардан, тригонометрик функциялар, дифференциал тенгламалар, интеграллар, квадрат илдизлар, логарифмлар ва бошқалар, содда арифметик амаллар орқали ифодаланиши зарур. Бундай усуллар турли-туман бўлганлигидан улардан энг қулайи танланади. Бу вазифа математиканинг бутун бир соҳаси ҳисобланади. Мазкур қўлланманинг мақсадларидан бири ўқувчини сонли таҳлил элементлари билан таништиришдан иборат.

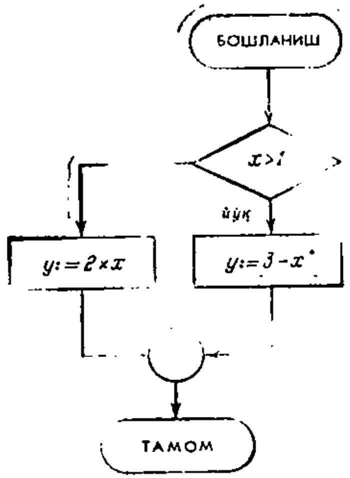
ЭҲМ га дастур тузиш. Қўйилган масалани ЭҲМда ечиш учун танланган сонли усулнинг аввало алгоритми ишлаб чиқилади, сўнгра бу алгоритмга дастур тузилади.

Кўпинча бирор сонли усул учун бир қанча алгоритм таклиф қилиниши мумкин. Улар ўзаро соддалиги, ҳисоблаш ишларининг ҳажми билан фарқланади. Масалани ечиш учун ЭҲМ га қўллашда самаралироқ бўлган алгоритм танланган маъқул. Дастурлашнинг биринчи босқичида алгоритмнинг схематик тасвиридан иборат блок-схемани чизиш фойдалидир. Алгоритмни (дастурни) кўргазмалилик усулда тасвирлаш блок-схема дейилади. Блок-схемада алгоритмик жараённинг ҳар бир босқичи маълум белгилар билан ифодаланади.

Белгилар ичига мос алгоритмик жараённинг мазмуни ёзилади. Алгоритмик жараённинг босқичлари схе-



4-расм



5-расм.

матик ифодалари орасига боғловчи стрелкалар қўйилади. Мисол тариқасида

$$y=(2x+3)/(3x-4) \quad \text{ва} \quad y=\begin{cases}2x, & \text{агар } x>1 \text{ бўлса,}\\ 3-x, & \text{агар } x\leqslant 1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияларни ҳисоблаш алгоритмларининг блок-схемалари келтирилган (мос равишда 4, 5-расмлар).

Дастурлашнинг иккинчи босқичида масалани ечиш учун бирор дастурлаш тили танланади ва мос дастур тузилади. Тузилган дастурнинг сифатли булиши муҳим роль ўйнайди. Дастурчи кўпчилик хатоликларни шу босқичда қилиши мумкин. Шунинг учун дастур тузилишини жуда эҳтиёткорлик ва катта эътибор билан амалга ошириш зарур.

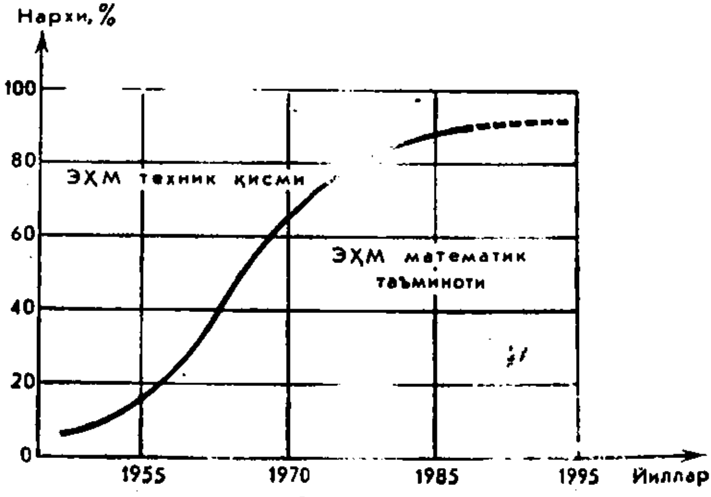
Дастурни ростлаш. Қўйилган масалани ЭҲМ да ечиш учун бирор дастурлаш тилида дастур тузилганидан кейинги яна бир асосий босқич „текшириш-ростлаш" (отладка) бўлиб, бунда қўйилган хатоликлар аниқланади ва тузатилади. Бу босқич ҳам анча қийин ва масъулиятли ҳисобланади. Дастурлар машина турига қараб, перфолента, перфокарта, магнит лента, ёки магнит дискда кодланади ва машинага махсус қурилма ёрдамида киритилади.

Ҳисоб ва натижани қайта ишлаш. Бу босқичнинг мазмуни унинг номидан аён бўлиб турибди. Тузилган дастур бўйича бажарилаётган ҳисоб масалага ва ЭҲМнинг имкониятига қараб бир неча секунддан бир неча соатгача давом этиши мумкин. Масалани машина ечаётганда, бошқача айтганда дастур ЭҲМ да бажарилаётганда, дастурчининг иштироки зарур эмас. Фақат операторларнинг маслаҳатлари билан иш кўрилади. Масала ечимининг таҳлилини муаммони қўйган кишининг ўзи ҳал қилади.

15-§. Электрон ҳисоблаш машиналарининг математик таъминоти. Операцион система

Ихтиёрий ҳисоблаш системаси, жумладан, ЭҲМ икки қисмдан: техник қисм ва математик таъминотдан иборат.

ЭҲМ нинг техник қисми деганда ихтиёрий физик қурилма ёки унинг қисми тушунилади. Марказий процессор, хотира, киритиш ва чиқариш қурилмалари, дисплей, магнит лентаси ва диски, алифбо — рақамли ёзувга чиқариш қурилмаси (АРЁҚ) кабилар ЭҲМнинг техник қисмига киради (6- расм).



6- расм.

ЭҲМдан фойдаланувчи ишининг самарали бўлишига қаратилган ҳар қандай дастур ёки усул ЭҲМ нинг математик таъминотига киради. ЭҲМ нинг математик таъминоти унинг дастурли таъминоти ҳам дейилади.

Ҳозирги кунда ЭҲМ математик таъминотининг асосини операцион системалар (ОТ) ташкил қилади. ОТ нинг асосий вазифаси қуйидагилардан иборат:

— фойдаланувчининг масаласини ЭҲМ га киритиш;

— масаланинг ечилиш жараёнини назорат қилиш ва бажариш;

— авария ҳолатларига барҳам бериш;

— ЭҲМ имкониятларини масалалар ўртасида унумли тақсимлаш, яъни ЭҲМ нинг „ишсиз" қолишига йўл қўймаслик.

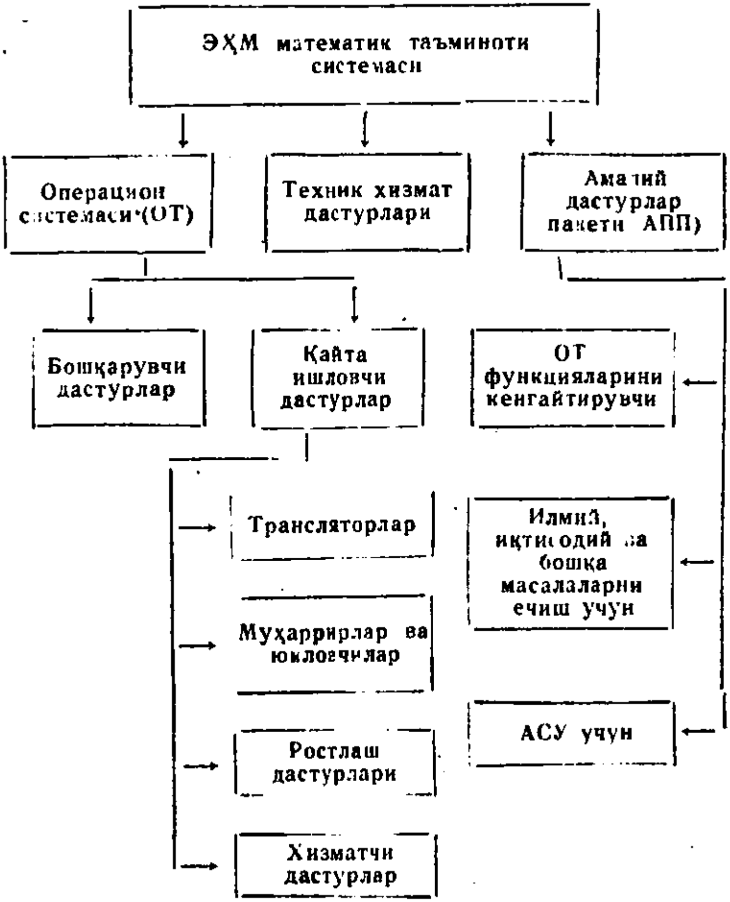
Шундай қилиб, ОТ нинг асосий вазифаси одам ва ҳисоблаш машинасидан ташкил топган системанинг янада унумли ишлаш имкониятини таъминлашдан иборатдир.

Дастлабки ОТ лар 50-йилларнинг бошларида яратилган бўлиб, ҳозирги кунда улар ЭҲМ ларнинг ажралмас қисми бўлиб қолди. Одатда ОТ га қуйидагилар киради (7-расм):

а) Супервизор; б) Транслятор ва интерпретаторлар; в) Хизматчи дастурлар; г) Амалий дастурлар.

1. Супервизор — ОТ нинг асосий бошқарувчи қисмидир. У бир қанча дастурлардан иборат бўлиб, ЭҲМ га қўйилган топшириқни самарали бажарилишини таъминлайди. Одатда ЭҲМ га қўйиладиган топшириқлар бир нечта қадам ёки масалалар кетма-кетлигидан иборатдир. Топшириқдаги масалалар сони одатда ўзгармас ёки ўзгарувчан бўлади (бу ОТ нинг турига боғлиқ). Масалалар ўз навбатида шу масала учун бошланғич қиймат бўлган „маълумотлар" билан боғлиқдир. Демак, ОТ нормал ишлаши учун уларда топшириқ, масала ва маълумотларни бошқариш имконияти бўлиши зарур. Бу ОТ ларда топшириқларни бошқариш, масалаларни бошқариш ва маълумотларни бошқариш каби кўрсатмалар тўплами, яъни тиллар орқали эришилади.

Шуни айтиб ўтиш зарурки, ҳозирги вақтда маълумотларни бошқариш, яъни ЭҲМ нинг хотирасида жойлашган маълумотларни қайта ишлаш жуда катта аҳамиятга эга бўлмоқда. Чунки баъзи бир масалаларни ечиш жуда катта маълумотни қайта ишлаш билан боғ-



7- расм

лиқдир. Шунинг учун ҳам маълумотлар базасини бошқариш системалари яратилмоқда.

Транслятор ва интерпретаторлар. Қандай соҳани олиб қарамайлик, алоқа воситаси сифатида бирор тил иштирок этади. Дастурлаш буни тасдиқлабгина қолмай, балки бунда дастурлаш тиллари ҳал қилувчи аҳамиятга ҳам эгадир. Ҳозирги кунга келиб дастурлаш тилларининг сони бир неча мингдан ошиб кетди. Улар одатда икки хусусиятга кўра турларга бўлинади. Бунда бир томондан, бу тил қай даражада одам ёки ЭҲМга „тушунарлироқ" бўлиши, иккинчи томондан, бу тил қай даражада маълум бир соҳа масалаларини ечиш учун мўлжалланганлиги эътиборга олинади.

Агар дастурлаш тили табиий тилга яқин, яъни одамга тушунарлироқ бўлса, бундай дастурлаш тиллари юқори даражадаги тил деб аталади. Агар дастурлаш тили ЭҲМ даги тушунчаларга асосланган ҳолда тузилган бўлса, у ҳолда бундай тил қуйи даражадаги тил деб аталади.

Юқори даражадаги дастурлаш тилларига АЛГОЛ, ФОРТРАН, ПЛ/І, БЕЙСИК, КОБОЛ, ПАСКАЛЬ, СИМУЛА, ЛОГО каби дастурлаш тиллари мисол бўла олади. Қуйи даражадаги тилларга АССЕМБЛЕР, МАКРОАССЕМБЛЕР ва машина тиллари киради.

ЭҲМ ёрдамида жуда кўп соҳаларга тегишли масалаларни ечиш мумкин. Аммо ихтиёрий соҳага тегишли масалаларни ечишга мослашган, яъни универсал тилларни яратиш баъзи бир ноқулайликларга олиб келиши туфайли бундай тилларни яратиш мақсадга мувофиқ эмас деб топилди. Асосий ноқулайликлардан бири шундан иборатки, бундай тиллар катта ҳажмга эга бўлгани туфайли уни ЭҲМ га татбиқ қилишда ва фойдаланувчи бу тилни ўрганишда катта қийинчиликлар юзага келади. Шунинг учун ҳам, дастурлаш тиллари фақатгина баъзи бир соҳага тегишли масалаларни ечишга мослашгандир. Масалан, АЛГОЛ ва ФОРТРАН каби дастурлаш тиллари математика ва физика масалаларига, яъни ҳақиқий ва бутун сонлар устида катта аниқликдаги амаллар бажаришга, КОБОЛ тили иқтисод ва бухгалтерияга оид ҳисобларга, ЛИСП тили рўйхатларни қайта ишлашга, ПЛ/1 тили жадвал ва анкеталарни саралаш ва қайта ишлашга мослашгандир.

Маълумки, ЭҲМ фақат машина тилидаги дастурни бажара олади. Демак, биз бераётган кўрсатмаларни ЭҲМ „тушуниши" учун, яъни юқори даражадаги дастурлаш тилида ёзилган дастурларни бажариши учун у машина тилига таржима қилиниши керак. Мана шу вазифани ЭҲМ ларда юқори даражадаги тиллар учун яратилган транслятор ва интерпретатор бажаради.

Трансляторнинг интерпретатордан фарқи шуки, транслятор фойдаланувчи ёзган дастурни ЭҲМ учун тушунарли кўринишга ўтказиб (бундай кўриниш ички кўриниш деб номланади), сўнгра бу кўринишдаги дастур бажарилади. Интерпретатор эса ҳар бир кўрсатмани (буйруқни) ички кўринишга ўтказиб бажаради.

3. **Хизматчи дастурлар.** Хизматчи дастурлар, бу авваламбор, ҳисоблаш техникасининг бехато ишлашини таъминловчи дастурлар тўпламидир. Бундай дастурлар тест (қурилмаларни синовчи) **дастурлар** деб аталади.

4. **Амалий дастурлар.** Маълум бир соҳа масалаларини ечишда тез-тез қўлланиб турадиган дастур амалий дастурлар дейилади. Амалий дастурларни баъзан ОТ дан айрим саналаб, уни фойдаланувчининг фонди деб ҳам аталади. Бунга сабаб, амалий дастурлар бир ЭҲМ га мўлжалланган ҳолда тузилиб, у бошқа ЭҲМ ларда ҳам бажарилиши мумкин.

Фақатгина бир соҳа масалаларини ечишга қаратилган амалий дастурлар тўплами **амалий дастурлар пакети** деб аталади. Ҳозирги кунда турли соҳаларга онд амалий дастурлар пакети мавжуддир. Булар қаторига алгебраик тенгламалар системаси, дифференциал тенгламалар, математик физика масалалари, математик статистика ва бошқа кўпгина масалаларни ечишга мўлжалланган дастурларни киритиш мумкин Амалий дастурлар пакетлари, шунингдек, бошқариш системаларини автоматлаштириш учун ҳам қўлланилади. Масалан, самолёт патталарини сотиш учун мўлжалланган „Сирена“ автоматлаштирилган системаси, автоматлаштирилган бошқариш системаси, лойиҳалаш ва бошқа кўпгина соҳаларда одам меҳнатини енгиллаштирувчи автоматлаштирилган системаларни кўрсатиш мумкин.

Математик таъминот ҳар бир машина учун махсус бўлади. Баъзан ЭҲМнинг бир турига бир қанча математик таъминот яратилади. Барча математик таъминот, юқорида қайд қилганимиздек, машина тилида ёзилади. Бундай дастурларни **системали дастур тузувчилар** деб аталувчи махсус дастурчилар тузадилар.

ЭҲМ ларнинг қанчали самарали ишлаётгани уларнинг тўлиқ математик таъминоти билан белгиланади. Шунинг учун ҳар бир машина яхши математик таъминотли бўлиши жуда муҳим ва бунга машинанинг таннархидан кўпроқ куч ва маблағ сарфланади. Масалан, АҚШда чиқарилаётган „ИБМ“ маркали машиналар учун 1,5 млн киши математик таъминот яратиш билан машғулдир (6-расмга қаранг).

ЭҲМ ларга математик таъминот яратиш билан шуғулланадиган дастурлаш **системали дастурлаш** дейилади.

16-§. Алгоритмик тил элементлари

Алгоритмик тил алгоритмларни бир хил ва аниқ ёзиш ҳамда уларни бажариш учун ишлатиладиган белгилар ва қоидалар системасидир.

Бир томондан, алгоритмик тил оддий тилга яқин бўлса, иккинчи томондан, у математик белгилар: сон, катталик, функция символлари, амаллар ишораси, қавслар ва бошқаларни ўз ичига олади. Ҳар қандай тил каби, алгоритмик тил ҳам ўз луғатига эга. Бу луғатнинг асосини бирор алгоритм ижрочисининг буйруқлари системасига кирган буйруқларни ифодалашда қўлланиладиган сўзлар ташкил қилади ва улар **содда буйруқлар** деб аталади.

Одатда, содда буйруқ тўла ёки қисқа шаклдаги буйруқ гапга ўхшаш бўлиб, зарур бўлганда формулалар ва бошқа белгиларни ўз ичига олади.

Алгоритм ҳамда дастурларни ёзиш жараёнида катталиклар тури жуда кўп бўлганлиги учун катталикларнинг номини белгилашда алгоритмда уларнинг маъноси ва вазифасини тушунтирадиган ихтиёрий ҳарфлар, ҳарфлар тўплами ва исталган сўзларни ишлатиш қабул қилинган.

Қийматлари натурал, бутун ва ҳақиқий сонлар бўлган сонли катталиклардан ташқари, қийматлари сўз ёки матндан иборат бўлган катталиклар ҳам мавжуд. Қийматлари сўз ва матндан иборат бўлган катталиклар ҳарфий (литерли) катталик дейилади. Катталиклар ишлатилиш моҳиятига кўра натурал, бутун, ҳақиқий, белгили бўлиши мумкин.

Алгоритмик тилда ёзилган алгоритмнинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

```
алг <алгоритм номи>
бошл
| алгоритм буйруқлари (ёки қатор)
там
```

Ҳар хил тиллар ўз хусусиятига эга бўлишига қарамасдан, алгоритмик тилнинг тузилиши ягона. Масалан, алгоритмик тилда лифтдан фойдаланиш алгоритми қуйидагича ёзилади:

```
алг <лифтдан фойдаланиш>
бошл
|    тугмани босинг
|    лифтнинг эшиги очилгунча кутинг
|    лифтга киринг
|    керакли қават тугмасини босинг
|    лифтда кўтарилинг
|    керакли қаватда лифтдан тушинг
там
```

Юқорида қайд қилганимиздек, алгоритмик тилда ёзилган алгоритм ўз номига эга бўлиши керак. Алгоритм номини ажратиб кўрсатиш учун унинг олдига алг (алгоритм) ёрдамчи сўз қўшилиб ёзилади. Алгоритм номидан кейин (одатда янги сатрдан) унинг бошланиши бошл ёрдамчи (хизматчи) сўзи билан бошланса, охири там (тамом) ёрдамчи сўзи билан тугайди. Буйруқлар эса ана шу бошл ва там ёрдамчи сўзлари оралиғига кетма-кет киритилади.

Ёрдамчи сўзлар қаторига алг, бошл, там, агар, бўлса, акс ҳолда, ҳал бўлди, токи, цб (цикл боши), цо (цикл охири), натижа, ҳақ (ҳақиқий), нат (натурал), бут (бутун), ва, ёки, эмас, арг (аргумент), жад (жадвал), танлаш, бўлганда, учун, дан, гача, қадам, узун (узунлик), қиймат, бут жад (бутун жадвал), ҳақ жад (ҳақиқий жадвал), нат жад (натурал жадвал) ва бошқаларни киритиш мумкин*.

Одатда бир сатрга бир буйруқ ёзилади. Агар бир сатрга бир неча буйруқ ёзилса, улар бир-биридан нуқтали вергул билан ажратилади.

Буйруқ алгоритмдаги бирор тугалланган амални бажариш тўғрисидаги кўрсатмадир. Бирин-кетин бажарилувчи оддий буйруқлар кетма-кетлиги қатор (ёки серия) дейилади.

Ҳар қандай алгоритм алгоритмик тилда ёзилган сарлавҳадан бошланади. Алгоритм сарлавҳасига: алгоритм номи, ундан кейин кичик қавс ичида ўзаро вер-

---

* Баъзан ёрдамчи сўзлар қуюқ ҳарфлар билан терилади. Биз уларнинг остига чизиш билан чекланамиз.

гуллар билан ажратилган ҳолда шу алгоритмда қатнашадиган катталикларнинг турлари, аргументлар ва натижа катталикларнинг тавсифлари киради. Алгоритм сарлавҳаси тузилишини қуйидагича ёзиш мумкин:

```
алг <алгоритм номи> (турлари кўрсатилган катталиклар рўйхати)
    арг <аргументларнинг рўйхати>
    натижа <натижавий катталикларнинг номлари>
```

1-мисол. Икки бутун мусбат сон M ва N нинг энг катта умумий бўлувчиси (ЭКУБ) ни топиш алгоритмининг сарлавҳасини ёзинг.

Ечиш. Бу ерда M ва N сонлар аргументларни, ЭКУБ эса натижани ифода этганлигидан алгоритмнинг сарлавҳаси қуйидагича бўлади;

```
алг энг катта умумий бўлувчини топиш нат M, N, нат ЭКУБ
    арг M, N
    натижа ЭКУБ
```

Буйруқларнинг бир қаторидан тузилган чизиқли алгоритмдан ташқари тармоқланувчи ва такрорланувчи (циклик) алгоритмлар ҳам мавжуд. Бундай алгоритмларни алгоритмик тилда ёзиш учун мураккаб буйруқлардан фойдаланилади. Бу буйруқлар бир-биридан оддий буйруқларнинг бажарилиши ёки бажарилмаслигини кўрсатувчи шартнинг ғорлиги билан фарқланади.

Тармоқланиш буйруғи. Тармоқланиш буйруғининг қисқача шакли қуйидагича ёзилади:

```
агар <шарт>
|       бўлса
|               1-қатор
|       акс ҳолда
|               2-қатор
ҳал бўлди
```

Шартга боғлиқ ҳолда тармоқланиш буйруғига кирувчи икки қатордан фақат биттаси бажарилади. Бунда масалада қўйилган шарт бажарилса, 1-қатор, акс ҳолда 2-қатор бажарилади. Ҳар бир қатордаги буйруқлар кетма-кет, ўз қоидалари бўйича бажарилади. 1- ёки 2-қаторнинг сўнгги буйруғи бажарилиши биланоқ тармоқланиш буйруғи тугайди.

Масалан, алгоритмик тилда ўзбек тилидаги сўз бўғинларини аниқлашнинг алгоритмини қуйидагича ёзиш мумкин:

```
алг сўз бўғинларини аниқлаш
бошл
  агар бўғин унли товуш билан тугаган
    бўлса бўғиннинг ундош билан туговчиси ёзилсин
      акс ҳолда унли билан туговчиси ёзилсин
  ҳал бўлди
там
```

Алгоритмларнинг схемасини тасвирлашда шартни „ҳа“ ёки „йўқ“ жавоби кўринишида берилиши мумкин бўлган савол каби тушунса бўлади.

Тўла тармоқланиш буйруғининг блок-схемаси қуйидагича ифодаланади (8- расм):

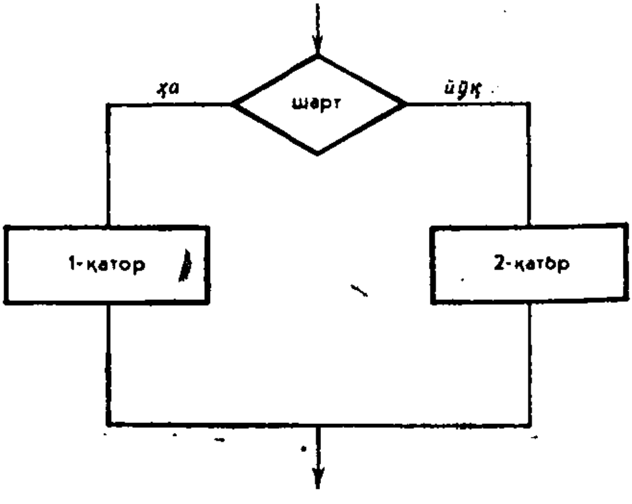
2- мисол x нинг берилган қийматида

$$y = \begin{cases} x^2 + \sin x, & \text{агар } x > \dfrac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ e^x + x, & \text{агар } x < \dfrac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функция қийматини ҳисоблаш алгоритмини ёзинг.

Ечиш.

```
алг функциянинг қийматини ҳисоблаш (ҳақ x, y)
  арг x
```



8- расм.

```
натижа y
бошл
| агар $x > \frac{\pi}{2}$
|   бўлса
|          $y := x^2 + \sin x$
|          акс ҳолда
|          $y := e^x + x$
| ҳал бўлди
там
```

Бу алгоритмнинг блок-схемаси қуйидагича тасвирланади (9-расм).

5-мисол. Чорраҳадан ўтиш алгоритмини алгоритмик тилда ёзинг.

Ечиш.

```
алг светофордан фойдаланиш
бошл
| агар чироқ яшил
| |  бўлса ҳаракатни давом эттиринг
| |            акс ҳолда   агар чироқ сариқ
| |                        | бўлса тайёрланинг
| |                        | акс ҳолда тўхтанг
| |                        ҳал бўлди
| ҳал бўлди
там
```

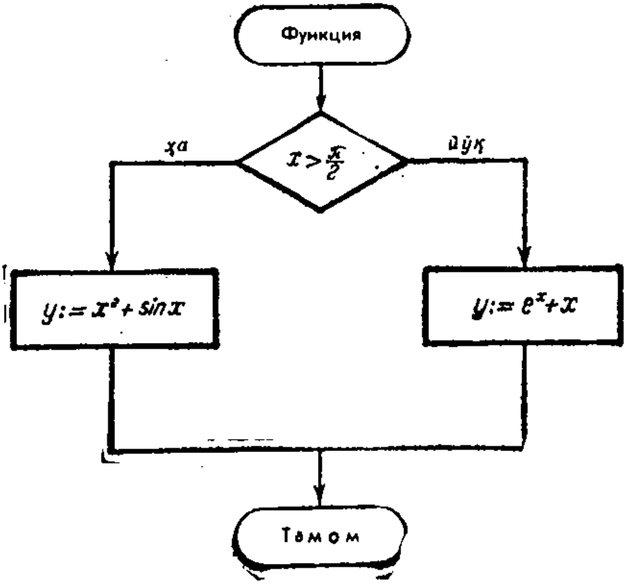
Тармоқланиш буйруғи қисқартирилган ҳолда ҳам қўлланилади. Унинг кўриниши қуйидагича ифодаланади:

```
агар <шарт>
|    бўлса
|           қатор
ҳал бўлди
```

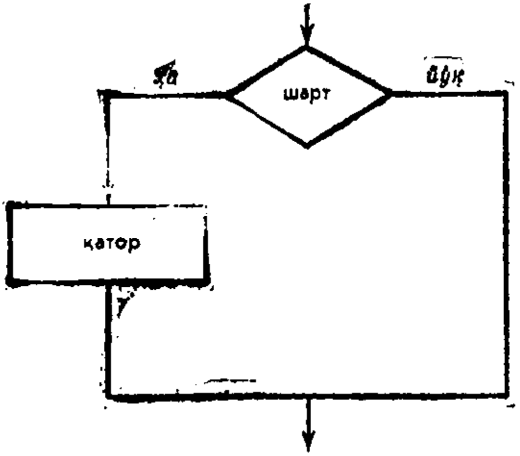
кабидир.

Тармоқланиш буйруғи қисқа шаклининг блок-схемаси қуйидагича тасвирланиши мумкин (10-расм). Масалан, $y = \sin \sqrt{x}$, агар $x \geq 0$ бўлса, функцияни ҳисоблаш алгоритмини қуйидагича ёзиш мумкин:

```
алг функцияни ҳисоблаш (ҳақ x, y)
   арг x
   натижа y
```



9- расм.



10- расм.

```
бошл
  агар $x \geqslant 0$
    бўлса
      $y := \sin \sqrt{x}$
  ҳал бўлди
там
```

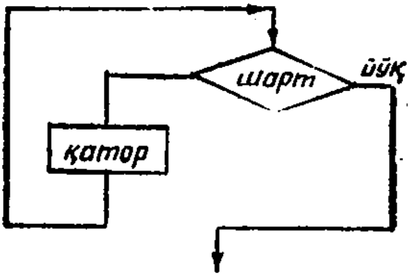
Такрорлаш буйруғи. Инсон ўз иш фаолиятида ечилиши бир хил амалларни такрорлашни талаб қиладиган масала (жараён) ларни доимо учратади. Ана шундай масалаларнинг алгоритмини ёзиш учун алгоритмик тилда махсус такрорлаш (циклик) буйруғи қўлланилади.

Буйруқнинг умумий тузилиши қуйидагичадир:

```
токи <шарт>
  цб
    қатор
  цо
```

Такрорлаш буйруғининг блок-схемаси қуйидагича бўлади (11- расм).

Ушбу шаклдан кўриниб турибдики, токи хизмат сўзидан кейин келган шарт бажарилмай қолгунга қадар цб ва цо орасидаги қатор такрорий равишда бажарилаверади. Бу буйруқнинг бажарилишида буйруқлар қатори кетма-кет бир неча марта такрорланаверади. Бу қайтарилиш, қўйилган шарт ўз кучини йўқотгунча давом эттирилади Агар шарт бошиданоқ бажарилмаса, қатор бир марта ҳам бажарилмайди. Такрорланишнинг шарти буйруқдаги қаторни бажариш жараёнида эмас, балки қаторни бажаришдан олдин текширилади.



11- расм.

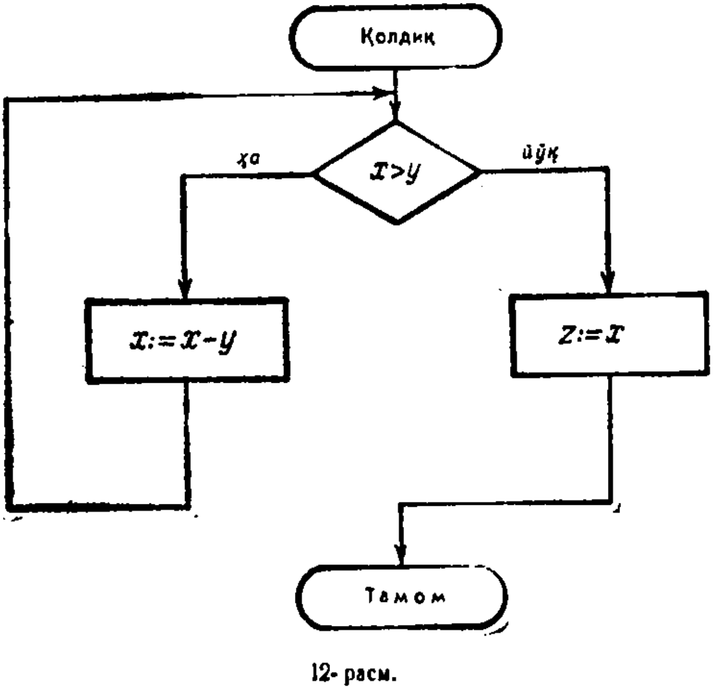
4-мисол. Берилган икки бутун соннинг каттасини кичигига бўлишдан ҳосил бўладиган қолдиқни топиш алгоритмини алгоритмик тилда ёзинг.

Ечиш.

```
алг бўлишдаги қолдиқ (бут $x$, $y$, $z$)
    арг $x$, $y$
    натижа $z$
бошл
|   токи $x > y$
|           цб
|           |   $x := x - y$
|           цо
|               $z := x$
там
```

Қўйилган масаланинг блок-схемаси қуйидагича ифодаланиши мумкин (12-расм).

Энди такрорлаш буйруғи билан тармоқланиш буйруқлари биргаликда келган ҳолга мисол кўрамиз.



12-расм.

5-**мисол.** Саватдаги қора ва оқ шарларни икки хил (қора ва оқ) саватга саралаш алгоритмини алгоритмик тилда ёзинг.

Ечиш.

```
алг Саралаш
    бошл
    | токи яшик бўш эмас
    |     цб
    |     |    яшикдан битта шар олинсин
    |     |  агар шар оқ
    |     |  |  бўлса
    |     |  |         оқ саватга солинсин
    |     |  |  акс ҳолда
    |     |  |         қора саватга солинсин
    |     |  ҳал бўлди
    |     цо
    там
```

Ушбу алгоритмнинг блок-схемаси қуйидагича тасвирланади (13-расм).

6-**мисол** Кичик робот шахмат тахтасида юради дейлик. Унинг координаталари (x, y) каби белгиланади (масалан, e 2 юриш (5, 2), h 5 юриш (8, 5)) Юқорига юриш y ни 1 га, ўнгга юриш x ни 1 га катталаштиради. Робот (x, y) = (2, 3) ҳолатда турибди (14-расм). Унинг (8, 8) ҳолатга чиқиш алгоритмини алгоритмик тилда ёзинг.

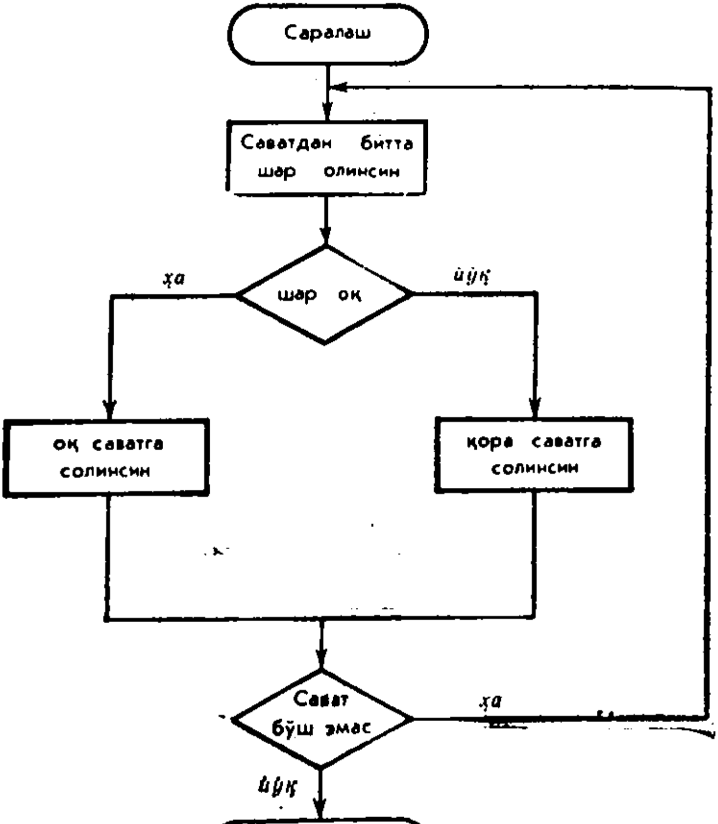
Ечиш.

```
алг юрувчи робот (бут x, y, ҳарф C)
    арг x, y
    натижа C
    бошл токи x < 7
    |     цб
    |     |   ўнгга бир қадам
    |     |   x := x + 1
    |     цо
    |      токи y < 7
    |     цб
    |     |   юқорига бир қадам
    |     |   y := y + 1
    |     цо
    |      C := „КЕЛДИ"
    там
```

7-**мисол.** 14-расмда берилган ҳолатда турган роботнинг айланиб ўтиш алгоритмини алгоритмик тилда ёзинг.

Ечиш.

```
алг Робот айланиб ўтувчи (бут x, y, d, ҳарф C)
```

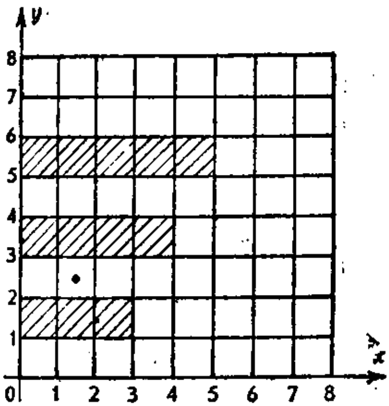


13- расм.

```
арг x, y
натижа C, d
бошл
    токи $y < 7$
        цб
            агар юқорида чуқур бўлмаса
                у ҳолда юқорига бир қадам
                    $y := y + 1$
                    $d := y$
```

```
|         |  акс ҳолда агар $x < 7$
|         |                бўлса, ўнгга бир қадам
|         |                $x := x + 1$
|         |                акс ҳолда $d := y$
|         |                $y := 8$
|         |             ҳал бўлди
|         ҳал бўлди
|      цо
|  $C :=$ МЕН „ГОРИЗОНТДАМАН“
там
```

Шундай масалалар мавжудки, уларни ҳал қилишда қўйилган шартга кўра бир неча тармоқланишдан фойдаланишга тўғри келади. Бундай ҳолларда тармоқланиш буйруғидан фойдаланиш ноқулай бўлганлиги сабабли, масалаларни ҳал қилишни осонлаштириш мақсадида алгоритмик тилга махсус танлаш буйруғи киритилган.



14- расм.

Танлаш буйруғи. Танлаш буйруғининг умумий кўриниши қуйидагичадир:

```
Танлаш
|   1- шарт    бўлганда:     1- қатор
|   2- шарт    бўлганда:     2- қатор
|   . . .      . . .         . . .
|   N- шарт    бўлганда:     N- қатор
|                 акс ҳолда  N + 1- қатор
ҳал бўлди
```

Бундай буйруқни қўллашга оид бир мисол кўрайлик.

8- мисол. Спорт мусобақасида совринли ўринларни эгаллаган командаларга бериладиган мукофотларни тарқатиш алгоритми танлаш буйруғи ёрдамида ёзилсин.

Ечиш.

```
алг совриндор командалар (ҳақ X, ҳарф A)
  арг x
  натижа A
  бош
  | танлаш
  | | x = I бўлганда A := „ОЛТИН МЕДАЛЬ"
  | | x = II бўлганда A := „КУМУШ МЕДАЛЬ"
  | | x = III бўлганда A := „БРОНЗА МЕДАЛЬ"
  | |       акс ҳолда
  | |       A := „СОВРИНДОР ЭМАС"
  | ҳал бўлди
  там
```

Параметрли такрорлаш буйруғи. Параметрли такрорлаш буйруғининг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

```
x учун $x_{\min}$ дан $x_{\max}$ гача $x_{қад}$ қадам
  цб
  | қатор
  цо
```

Бу ерда x — бутун сонли ўзгарувчи катталик, $x_{\min}$ ва $x_{\max}$ бутун сонли қиймат қабул қилувчи ифодалар, $x_{қад}$ бутун сонли ифода бўлиб, қадам дейилади. Буйруқнинг бажарилиши қуйидаги тарзда бўлади:

1) $x_{\min}$ ва $x_{\max}$ ифодаларнинг қийматлари ҳисобланади;

2) x ўзгарувчига $x_{\min}$, $x_{\min} + x_{қад}$, $x_{\min} + 2 \cdot x_{қад}$, ..., $x_{\max}$ қийматлар берилади ва ҳар бир бундай қиймат учун цб ва цо орасидаги қатор буйруқлари бажарилади. Равшанки, $x_{\max} > x_{\min}$ шарт бажарилади. Агар $x_{\max} < x_{\min}$ бўлса, у ҳолда қатор буйруқлари бир марта ҳам бажарилмайди Параметрли такрорлаш буйруғи учун

$$x_{\min} + k \cdot x_{қад} \leqslant x_{\max}$$

шарт бажарилиши зарур. Бу ердаги k такрорланиш сони деб юритилади. Хусусий ҳолда, $x_{қад} = 1$ бўлиб қолса, у ҳолда буйруқнинг умумий кўринишдаги $x_{қад}$ қадам қисми ташлаб ёзилса ҳам бўлади.

9-мисол. 100 гача бўлган жуфт сонларнинг кўпайтмасини аниқлаш алгоритми алгоритмик тилда ёзилсин.

Ечиш.

```
алг жуфт сонларнинг кўпайтмаси (бут $B$)
   натижа $B$
     бошл бут $i$
            $B := 1$
          $i$ учун 2 дан 100 гача 2 қадам
           цб
           | $B := B * i$
           цо
     там
```

10-мисол. Ҳақ жад a [1 : 100] жадвални 5 сонлари билан тўлатиш алгоритмини ёзинг.

Ечиш.

```
алг бешлар билан тўлатиш (ҳақ жад $a$ [1 : 100])
   натижа $a$
   бошл бут $i$
   |   $i$ учун 1 дан 100 гача
   |   цб
   |   | $a[i] := 5$
   |   цо
   там
```

Кўриниб турибдики, ушбу мисолда қадам 1 га тенг.

11-мисол. Икки рақамли сонниng рақамлар йиғиндиси 11 га тенг. Агар ушбу сонга 27 қўшилса, ўша рақамлар билан ёзилган сон ҳосил бўлади, лекин тескари тартибда ёзилади. Ушбу сонни излаш алгоритми тузилсин (агар у мавжуд бўлса).

Ечиш

```
Ал ИЗЛАШ (бут $X$, ҳарф $T$)
берилган икки рақамли сон
керак $X$, $T$
бошл бут $A$, $B$, $AB$, $BA$
7 := „сон йўқ“
$A := 2$
цб токи $T$ = „сон йўқ“ ва $A < 9$
|     $B := 11 - A$
|     $AB := 10 * A + B$
|     $BA := 10 * B + A$
|     агар $AB + 27 = BA$
|     |      у ҳолда $X := AB$
|     |              $T :=$ „сон бор“
|     ҳал бўлди
|     $A := A + 1$
цо
там
```

12-мисол. Бугун сонли A [1:1000] жадвал берилган. Жадвалда кетма-кет келувчи бир хил элементларнинг энг кўп сонини топиш алгоритми тузилсин.

Ечиш.

```
Алг ЭНГ КЎП СОНИ (бут жад $A$ 1:1000, бут сони)
  берилган $A$
  керак сони
бошл бут $i$, $k$
        $k := 1$; сони $:= 1$
        $i$ учун 2 дан 1000 гача
  цб
    агар $A[i] = A[i-1]$
      бўлса $k := k + 1$
      акс ҳолда
            агар $k >$ сони
              бўлса сони $:= k$
            ҳал бўлди
              $k := 1$
    ҳал бўлди
  цо
    агар $k >$ сони
      бўлса. сони $:= k$
    ҳал бўлди
там
```

13-мисол. M ва K натурал сонлар берилган. M сон K соннинг қандай энг катта даражасига бўлинишини аниқлаш алгоритми тузилсин.

```
Алг Катта даражаси (бут $M$, $K$, $C$)
  берилган $M$, $K$
  керак $C$
бошл ҳарф белги
        белги := „сана"
        $c := 0$
  цб токи белги = „сана"
    агар ҚОЛ $(M \cdot K) = 0$
      бўлса $C := C + 1$
            $M := M/K$
      акс ҳолда := „бўлинмайди"
    ҳал бўлди
  цо
там
```

```
алг бут ҚОЛ (бут X, Y)
    берилган X, Y
    керак қолдиқ
    цб токи қиймат > Y
        қиймат := қиймат — Y
    цо
там
```

Текшириш саволлари

1. Алгоритм ёзилишининг умумий кўриниши қандай?
2. Хизматчи сўзлар нима учун қўлланилади?
3. Буйруқ нима? Қандай буйруқларни биласиз?
4. Тармоқланувчи буйруқ қандай кўринишда ёзилади?
5. Танлаш буйруғининг кўриниши қандай?
6. Тармоқланувчи ва танлаш буйруқларининг фарқи нимада?
7. Такрорланувчи буйруқнинг кўриниши қандай?
8. Параметрли такрорлаш буйруғини ёзинг.
9. Параметрли такрорлаш буйруғи билан такрорлаш буйруғининг фарқи нимада?

Машқлар

1) Икки номаълумли

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиш алгоритмини алгоритмик тилда ёзинг.

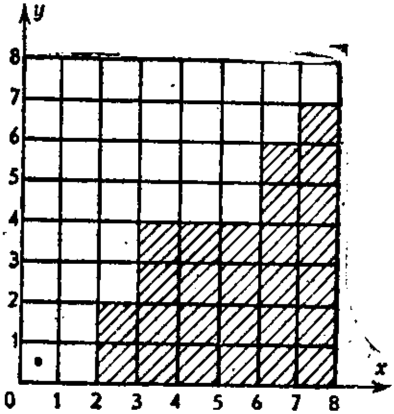
2) 15 расмда берилган ҳолат учун роботнинг тепаликка чиқиш алгоритмини алгоритмик тилда ёзинг.

3) Берилган x бутун соннинг туб сон эканини текшириш алгоритмини ёзинг. Бу алгоритмни 713 ва 49 сонлари учун текшириб кўринг.

4) Икки бутун мусбат сонлар A ва B нинг энг катта умумий бўлувчисини (ЭКУБ) ни топиш учун Евклид алгоритмини алгоритмик тилда ёзинг.

5) 101 ни ҳисоблаш алгоритмини алгоритмик тилда ёзинг.

6) Қандайдир икки хонали соннинг рақамлар квадратлари йиғиндиси ушбу рақамларнинг учланганлигидан 1 та ортиқ. Ушбу икки хонали сонни рақамлар йиғиндисига бўлинса 7 бутун ва 6 қолдиқ ҳосил бў-



15- расм.

лади. Ушбу сонни излаш алгоритмини тузинг (агар у мавжуд бўлса).

7) Рақамлар йиғиндиси уларнинг кўпайтмасига тенг бўлган уч хонали натурал сонни аниқлайдиган алгоритм тузинг.

8) Бутун сонли A [1 : 100] жадвал берилган. Унда манфий элементлар борлигини текширинг. Агар бўлса, $A[I] < 0$ бўлган I ларнинг энг каттасини топиш алгоритмини тузинг.

9) бут жад A [1 : 100] жадвалда учрайдиган ҳар хил сонларнинг сонини ҳисоблаш алгоритмини тузинг. Такрорланадиган сон бир марта ҳисобланади.

10) 2, 3 ва 5 дан бошқа туб бўлувчилари бўлмаган дастлабки 1000 та сонни ўсиб бориш тартибида чиқарадиган алгоритм тузинг. (Рўйхат боши: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12. 15, ...)

11) Бутун сонли A [1 : 1000], B [1 : 1000], C [1 : 1000] 3 та жадвал берилган. Учала жадвалда ҳам учрайдиган бутун сонлар борлиги маълум. Шу сонлардан бирини топиш алгоритмини тузинг.

12) 1, 3, 5, 10, 25, 50 ва 100 сўмлик қоғоз пуллар билан K сўмни тўлаш мумкин бўлган усуллар сонини ҳисоблаш алгоритмини тузинг.

9

VI БОБ. БЕЙСИК ДАСТУРЛАШ ТИЛИ

1-§. Бейсик дастурлаш тили ҳақидаги дастлабки маълумотлар

1965 йили Дартмут коллежининг бир гуруҳ ходимлари General Electric фирмасининг буюрмасига мувофиқ, бошланғич маълумотлар кўп бўлмаган турли ҳисоблашга доир масалаларни машина билан мулоқот (диалог) режимида дастур тузиб ишлаш учун тил ятратдилар. Ушбу тил инглиз сўзлари Beginner's Allpurpose Symbolic Instruktion code ларнинг бош ҳарфларидан ҳосил бўлади. Бу сўзларнинг таржимаси „Бошловчилар учун кўп мақсадли белгили кўрсатмалар тили“ деган маънони англатади, қисқача BASIC — БЕЙСИК дейилади.

Дастлаб ушбу дастурлаш тили DATA NET — 30 ва GE-235 ҳисоблаш машиналарида қўлланилди. 1967 йили ушбу тилнинг GE-400 ҳисоблаш машиналарида қўлланиши алоҳида ўрин тутади. Кейинроқ БЕЙСИК тилини бошқа фирмаларда чиқарилаётган электрон ҳисоблаш машиналарида қўлланила бошланди. Масалан, столга ўрнатиладиган PDP-8, PDP-10 моделлардаги ЭҲМ ларда HP-2114, HP-2115, HP-2116 B каби моделдаги мини ЭҲМ ларда ва бошқа турдаги электрон ҳисоблаш машиналарида қўлланилди.

БЕЙСИК тили илк бор пакетли режимда М-20 электрон ҳисоблаш машинасида қўлланилди. Озгина вақт ўтар-ўтмас, такомиллаштирилган БЕЙСИК дастурлаш тили М-222, ЕС-1010 ва бошқа ҳисоблаш машиналарида қўлланилди, сўнгра эса БЭСМ-6 машинасида ишлатилди. Ҳозирги кунларда ушбу дастурлаш тили М-6000, Электроника-60, Электроника ДЗ-28, Искра-226, ДВК-1, ДВК-2, ЁШЛИК, ПРАВЕЦ, ЯМАХА, IBM ва бошқа компьютерларда кенг қўлланилмоқда.

Ушбу тилнинг кенг оммалашишига сабаб, унинг соддалиги ва ФОРТРАН тилига яқинлигидир.

БЕЙСИК дастурлаш тили соддалигидан, уни ПАСКАЛЬ, РАПИРА, РОБИК дастурлаш тиллари қаторида ўрта мактабда ўқитилаётган „Информатика ва ҳисоблаш техникаси асослари" предметида ўрганилиш кўзда тутилган.

2-§. БЕЙСИК алфавити

Ҳар қандай алгоритмик тиллар каби БЕЙСИК дастурлаш тили ҳам ўзининг алфавитига эга. Бу алфавит қуйидагилардан иборат:

1) Лотин алифбосининг 26 та бош ҳарфи — *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *U*, *V*, *W*, *X*, *Y*, *Z*;

2) Ўнта ўнли рақам 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*;

3) Бешта арифметик амал белгилари — + (плюс), — (минус), * — (кўпайтириш), / (бўлиш), ↑ (даражага кўтариш);

4) Олтита муносабат белгилари — = (тенг), ≠ (тенг эмас), > (катта), ≥ (кичик эмас), ≤ (катта эмас), < (кичик);

5) Махсус белгилар — . (нуқта), , (вергул), ; (нуқта вергул), ' (апостроф), " (қўштирноқ), ! (ундов), ? (сўроқ), % (фоиз), ¤ ёки S (доллар) & — амперсенда белгиси, @ — коммерсантча эт, „␣" - бўшлиқ.

6) Қиймати 3,14159265350 га тенг бўлган π миқдор.

БЕЙСИК нинг баъзи вариантларида бир қанча белгилар бошқалари билан алмаштирилган, масалан,

↑ ўрнига „**" ёки „^", ёки „¬". „≥" ўрнига „>

---

* О ҳарфидан ноль сонини фарқ қилиш мақсадида ноль устига чизикча тортилади.

=“, „≤“ ўрнига „<=“, „≠“ ўрнига „<>“ белгилар қўлланилади.

Қаралаётган ушбу дастурлаш тилида қўллаш учун бир қанча инглиз тилидаги хизматчи сўзлар киритилган, улар шу боб ниҳоясидаги жадвалда келтирилган.

Биз юқорида БЕЙСИК дастурлаш тилининг алфавити билан танишиб чиқдик. Математик жараёнларни ушбу тилда ифодалаётганимизда, улар қандай мураккабликда бўлмасин, оқибатда улар келтирилган алфавит элементлари орқали ифодаланиши зарур.

3-§. Сонлар

БЕЙСИК дастурлаш тилида сонларнинг ёзилиши табиий ёзилишга яқин бўлиб, улар икки турда бутун ва ҳақиқий кўринишда бўлиши мумкин. Ҳақиқий сонларда бутун қисм билан каср қисмини ажратиш учун вергул ўрнида нуқта қўлланилади. Жуда катта ва жуда кичик сонларни ёзишда сонларни қўзғалувчи вергул кўринишда ёзиш мумкин. Мусбат сонларда „+“ ишораси ёзилиши ҳам, ёзилмаслиги ҳам мумкин.

1-мисол. Бутун сонлар одатда ва қаралаётган дастурлаш тилида қуйидагича ифодаланиши мумкин:

Одатдаги ёзувда	БЕЙСИК да
15	15
0	0
−143	−143

2-мисол. Ҳақиқий сонларнинг ёзилиши:

Одатдаги ёзувда	БЕЙСИК да
−2,3	−2.3
0,01	.01
12,0	12.0
−24,454	−24.453

3-мисол. Сонларни ўннинг даражалари билан ифодалаш:

Одатдаги ёзувда		БЕЙСИК да
0,005		.5E − 2
0,005342		.5 42E − 2
	ёки	.005342E1
	ёки	534.2 E − 5
10^4		1E4 (ёки 1E + 4)
$2{,}05 \cdot 10^{-3}$		2.05E − 3

Ўннинг тартибини ифодаловчи E ҳарфидан кейин албатта бутун сон бўлиши керак.

4-мисол. Сонларнинг нотўғри ёзилиши:

Сонларнинг нотўғри ёзилиши	Тушунтириш
E5	Сон ҳарфдан бошланиши керак эмас
75E — 3.5	Тартиб бутун эмас.
12,342	Соннинг бутун қисми билан каср қисми вергул билан ажратилмайди.

Кўпчилик дастурлаш тилларида сонларнинг ўзгариш диапазонига чегара қўйилмайди. Лекин машиналарда аниқ масалалар ечилаётганда унинг техник томондан чегараланганлигини ҳисобга олмай бўлмайди. Масалан, БЕЙСИК тилини „ИСКРА-226“ машинасида қўллаганда сонларнинг қийматли рақамлар сони 13 дан ошмаслиги, бутун сонлар диапазони 0 дан 7999 гача, каср сонлар қийматининг мумкин бўлган диапазони 10^{-99} дан $(10 - 10^{-12}) \cdot 10^{99}$ гача бўлиши керак.

5-мисол. 1. Нотўғри ёзилган сонларга мисоллар келтирамиз.

Нотўғри ёзилган сонлар	Тушунтириш
—1,37568910677б1	Қийматли рақамлар сони 13 дан кўп.
75 38E 198	Сон жуда катта
0,00367 E- 143	Сон жуда кичик

БЕЙСИК тили фақат сонларни қайта ишлаш учунгина эмас, балки белгилардан ташкил топган маълумотларни ҳам қайта ишлашга имкон беради. Белгили константа деб, қўштирноқ ичига олинган белгилар кетма-кетлигига айтилади, масалан: „АВС“, „ЖАДВАЛ“. „ФУНКЦИЯ ҚИЙМАТИ“, „2-ЖАДВАЛ“ ва ҳоказо.

Шундай белгилар кетма-кетлигида қўштирноқда бошқа алифбода мавжуд ихтиёрий белгилар қатнашиши мумкин.

4-§. Ном ва ўзгарувчилар

БЕЙСИК да ном тушунчаси киритилган. Ном (идентификатор) деб ҳарф ёки ҳарфдан бошланган ҳарф ва рақамга айтилади. Дастурнинг бажарилиш жараёнида қиймати ўзгарадиган миқдорлар **ўзгарувчилар** дейилади. Ўзгарувчиларни белгилаш учун ихтиёрий ном қўлланилади.

1-мисол. Қуйидагилар ном бўла олади: *A*, *B*3, *C*0, *K*9.

Амалда ўзгарувчиларни белгилашда иложи борича табиий белгилашларга ҳаракат қилиниши маъқул. Масалан, вақт t ва тезлик v каби белгиланган бўлса, БЕЙСИК да улар мос равишда T ва V каби белгиланиши керак. Функцияларнинг аргументларини белгилашда ҳам юқорида айтилганлардан фойдаланиш керак. Масалан, бирор функциянинг аргументлари x_1, x_2, x_3, x_4 бўлса, $X1$, $X2$, $X3$, $X4$ каби белгилаш мумкин. Грек алифбосининг ҳарфларини белгилашда, унинг ўқилишидаги бош ҳарфини олиб, сўнгра ўқилишидаги ҳарфлар сонини кўрсатувчи рақам ишлатилиши мумкин. Масалан, α ни $A5$ ва β ни $B5$ каби белгилаш мумкин ва ҳоказо. Агар ўзгарувчилар кўп ҳарфлардан фойдаланиб ёзилган бўлса, уни қисқароқ қилиб ёзиш мумкин. Қаралаётган дастурлаш тилида лотин алфавитига тегишли 26 та бош ҳарф ва ўнта рақамни қўллаш мумкинлигидан, бир дастурда ҳаммаси бўлиб $26 \times 10 + 26 = 286$ та ўзгарувчи қўллаш мумкин.

БЕЙСИК да қўлланиладиган сонли ўзгарувчилар уч турда: бутун, ҳақиқий ва белгили ўзгарувчилар бўлиши мумкин Бутун турдаги ўзгарувчиларнинг қийматлари доим бутун сонлардан иборат бўлса, ҳақиқий ўзгарувчиларнинг қийматги бутун бўлмаган сонлардан иборат бўлади. Бутун ўзгарувчиларнинг белгиси сифатида ўзгарувчи номидан кейин % белгиси қўлланилади. Масалан, қуйидагилар бутун ўзгарувчилардир: A%, $A3$%, I%, K%.

Белгили константа типидаги қийматларни қабул қилувчи ўзгарувчилар белгили ўзгарувчилар дейилади. Белгили ўзгарувчиларнинг белгиси унга мос идентификаторлардан кейин ¤ белгининг келишидир. Масалан, B¤, $C3$¤, $X1$¤, E¤ каби ўзгарувчилар белгили ўзгарувчилар сифатида қўлланилиши мумкин. Стандарт белгили ўзгарувчилар (агар унинг узунлиги кўрсатилмаган бўлса) қиймати ИСКРА-226 ЭҲМ ида 16 та белгидан иборат бўлиши мумкин. Лекин БЕЙСИК да ўзгарувчининг қиймати 1 дан 255 тагача белгидан иборат бўлишига эришиш мумкин.

Юқорида кўрилган ўзгарувчилар оддий ўзгарувчилардан иборат. БЕЙСИК да яна индексли ўзгарувчилар ҳам қўлланилиши мумкин Одатда индексли ўзгарувчилар массив элементларини белгилаш учун қўлланилади. Индексли ўзгарувчилар — массив номи сўнгра кичик қавс ичида сонли ёки ҳарфли индекслар кўрсатилган ҳолда белгиланади. Массив номи учун ихтиёрий уч турдаги оддий ўзгарувчи қўлланилиши мумкин. Масалан,

X1 (2), A0% (1, 3), B(2*1, I), A5S (I, I)

ва ҳоказо.

Ўзгарувчиларнинг индекси сонига қараб бир ўлчовли массив, икки ўлчовли массив ва ҳоказо деб аталади. Ушбу тилда бир ва икки ўлчовли массивларгина қўлланилиши мумкин.

Масалан, A$ (I) — бир ўлчовли массив элементи, B5 (I, K) эса икки ўлчовли ҳақиқий турли массив элементидир.

Одатда, массивлар бир қанча оддий ўзгарувчиларни ифодалайдилар. Масалан, A (I, K) — A (3, 2) икки ўлчовли массив A1, A2, . . ., A6 каби олтита элементни ифодалайди.

2-мисол. Қуйида тўғри ва нотўғри номлар келтирилган:

Тўғри номлар	Нотўғри номлар ва тушунтириш
E2 %	2E — рақамдан бошланишн мумкин эмас.
A0	Ю1 — русча ҳарф қўлланилган.
O5	AB — иккинчи белги рақам эмас.
P1$	A17% — узун ном.
74	55% — рақамдан бошланган.
B3% (I, 3)	A* — иккинчи белги рақам эмас.
C	$A3 — $ белгидан бошланиши мумкин эмас.

5-§. Стандарт функциялар

Турли масалаларни ечишда кўп учрайдиган функциялар ҳар доим дастурлаш тилига киритилади, бундай функциялар **стандарт функциялар** дейилади. Қуйидаги жадвалда стандарт функциялар рўйхати келтирилган:

Одатдаги ёзилиши	БЕЙСИКда ёзилиши	Изоҳ
1	2	3
sin x	SIN (X)	X аргументнинг синуси
cos x	COS (X)	X аргументнинг косинуси
tg x	TAN (X)	X аргументнинг тангенси
arc sin x	ARC SIN (X)	X аргументнинг арксинуси
arc cos x	ARC OS (X)	X аргументнинг арккосинуси
arc tg x	ARC TAN (X)	X аргументнинг арктангенси

1	2	3
e^x	EXP(*X*)	экспонента
ln *x*	LOG(*X*)	*X* нинг натурал логарифми
$\|x\|$	ABS(*X*)	*X* нинг модули
$\sqrt{x}$	SQR(*X*)	*X* нинг квадрат илдизи
$[x]$	INT(*X*)	*X* га энг яқин бўлган бутун сон (сонинг бутун қисми)
sign *x*	SGN(*X*)	сигнум *X* (ишора)
	RND(*X*)	тасодифий сонни танлаш

Стандарт функцияларда аргумент ҳар доим кичик қавслар ичига олинишини унутмаслик лозим.

Бу жадвалдаги RND(*X*) функция (0, 1) оралиқдаги тасодифий — текис тақсимланган сонларни ҳосил қилиш учун ишлатилади.

6-§. Арифметик ифодалар

Қаралаётган дастурлаш тилида ифодалар ҳам қўлланилиши мумкин. Ифодалар бир сатрда ёзилиши керак. Сатрдан пастга тушириб ёки юқорига кўтариб ёзиш мумкин эмас. Юқорида келтирилган амал ишоралари арифметик ифодаларни бир сатрга жойлаштириб ёзишни таъминлайди.

Ифодаларни ёзишда амалларни бажариш тартибини кўрсатиш учун кичик қавслар ишлатилади. Қавс ичидаги амалларни бажариш чапдан ўнгга қараб, одатдаги қабул қилинган амалларни бажариш тартиби сақланган ҳолда амалга оширилади:

1. Функция қийматлари ҳисобланади.
2. Даражага кўтариш амали бажарилади.
3. Кўпайтириш ва бўлиш амаллари бажарилади.
4. Қўшиш ва айириш амаллари бажарилади.

Масалан, кесик конуснинг ҳажмини ҳисоблашнинг ушбу

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot H$$

формуласини БЕЙСИК да

$$V=(\pi * R \wedge 2 * H)/3$$

каби ёзиш мумкин. Ушбу мисолда амаллар қуйидаги тартибда бажарилади:

$$\underbrace{(\underbrace{\underbrace{\pi * \underbrace{R \wedge 2}_{1}}_{2} * H}_{3})/3}_{4}$$

Бошқача айтганда, амаллар:

1. $R \wedge 2$,
2. $\pi * R \wedge 2$,
3. $\pi * R \wedge 2 * H$,
4. $(\pi * R \wedge 2H)/3$

каби тартибда бажарилади.

1-мисол. Қуйида келтирилган ифодаларни БЕЙСИК нинг арифметик ифодалари сифатида ёзинг.

Ечиш.

Одатдаги ёзувларда берилиши	БЕЙСИК да ёзилиши
а) $\dfrac{a^3 - 2x^2 + 1}{2 - d}$	$(A \wedge 3 - 2 * X \wedge 2 + 1)/(2 - D)$
б) $(2 \sin x \cdot \cos x) : \sqrt{x - 3}$	$2 * SIN (X) * COS (X)/SQR(X - 3)$
в) $\lvert x - 1 \rvert + \ln z^2$	$ABS (X - 1) + LOG (Z \wedge 2)$
г) $e^{\sin \lvert x \rvert - 1}$	$EXP (SIN (ABS (X)) - 1)$
д) $5^3 - \sqrt[4]{x^2 - 4}$	$5 \wedge 3 - (X \wedge 2 - 4) \wedge (1/4)$
е) $A \cdot 10^{-8} + x^{-7}$	$AE - 3 + X \wedge (-7)$.

2-мисол. БЕЙСИК да ёзилган ифодаларни одатдаги ёзувларда ифодаланг.

Ечиш.

БЕЙСИК да	Одатдаги ёзувларда
а) $A * EXP(-SQR(W/(2 * P)) * X)$	$A \cdot e^{-\sqrt{W/2P} \cdot x}$
б) $LOG\ ABS (1/SIN (X) + TAN (X))$	$\log \left\lvert \dfrac{1}{\sin x} + \operatorname{tg} x \right\rvert$
в) $2 * SQR (Y \wedge 2 + 4 * X \wedge 2/3)$	$2\sqrt{y^2 + \dfrac{4x^2}{3}}$
г) $0.5 * LOG ((1 + SIN (X))/(1 - SIN (X))$	$\dfrac{1}{2} \cdot \log \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$
д) $0\ 5 * (EXP (X) + (EXP (-X))$	$\dfrac{1}{2} (e^x + e^{-x})$
е) $SQR (X \wedge 2 + Y \wedge 2) + 1E - 4$	$\sqrt{x^2 + y^2} + 10^{-4}$

3-мисол. Куйидаги ёзувлар БЕЙСИК даги нотўғри ифодалардир:

	Тушунтириш
а) $2A + B$	кўпайтириш амал белгиси тушиб қолган;
б) $2^* - B$	иккита амал белгиси кетма-кет келган;
в) $(\mathrm{SIN}\,(X) + B$	қавслардан бири тушириб қолдирилган;
г) $\mathrm{SIN}\,X + C$	аргумент қавс ичида эмас;
д) $A_2 - X \uparrow 3$	индексда ёзиш мумкин эмас.

Машқлар

1. Қуйида берилган мисолларда амалларни бажариш тартибини аниқланг:

а) $A * B + C/D \wedge 2;$ б) $A \wedge B \wedge C \wedge D;$
в) $\mathrm{SIN}\,(X + A * B);$ г) $A - B > C * D;$
д) $A + B * C < - E/D;$ е) $A * B/C * D.$

2. Оддий арифметик ифодаларни БЕЙСИКда ёзинг:

а) $\sqrt[3]{a^2 + b^2};$ б) $\sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)};$
в) $g \cdot \frac{\rho - \rho_{ж}}{\eta} \cdot \frac{2 \cdot R^2}{9};$ г) $\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\pi R^4}{8l} \cdot (p_1 - p_2);$
д) $\pi \cdot (P^2 + r^2 + \sqrt{R \cdot r}) \cdot H.$

3. БЕЙСИК да ёзилган ифодаларни одатдаги ёзувларда ифодаланг:

а) $A * \mathrm{EXP}\,(B + C * \mathrm{ABS}\,(D));$
б) $\mathrm{SQR}\,(X + \mathrm{TAN}\,(X + 1) \wedge 2)/A + B;$
в) $\mathrm{LOG}\,(\mathrm{ABS}\,(X - 3)) + \mathrm{SGN}\,(X);$
г) $\mathrm{ARCTAN}\,(\mathrm{SQR}\,(\mathrm{ABS}\,(X + \mathrm{EXP}\,(\mathrm{ABS}\,(X)))) + 1) + 3.141;$
д) $\mathrm{SQR}\,(K/M - R \wedge 2/(4 * M \wedge 2)).$

7-§. Дастур ва операторлар

БЕЙСИК да дастур номерланган сатрлар кетма-кетлигидан иборат. Барча дастурлаш тилларидаги каби БЕЙСИК да ҳам дастур операторлардан иборат бўлиб, уларга номер берилса, сатрларга айланади. Оператор ЭҲМ учун бирор тугал амални англатувчи кўрсатмадир. Дастурнинг бир сатри битта ёки бир нечта операторлардан ташкил топиши мумкин. Агар бир сатрда бир нечта оператор бўлса, улар ўзаро икки нуқта билан ажратилади.

Дастурнинг ихтиёрий оператори сонли белгидан — оператор номеридан бошланади. Белги учун 1 дан 9999 гача бўлган ихтиёрий сон олиниши мумкин. Номердан кейин оператор хизматчи сўзининг (номи) жойлашади. Одатда ном амал характери ва операторнинг матнини ифодалайди. Сатрда 80 тагача белги бўлиши мумкин.

Ҳар қандай дастур, дастур номи билан бошланади ва RUN (бошламоқ) кўрсатма билан тугайди. RUN кўрсатма ЭҲМ га киритилган дастурни БЕЙСИК да трансляция қилинишининг бошланишига сигнал бўлиб хизмат қилади. Агар дастурда хатоликка йўл қўйилмаган бўлса, у ҳолда дастур ЭҲМ тилига таржима қилиниб, керакли ҳисоблашлар бошланади ва лозим бўлса, натижани ёзувга чиқариш мумкин.

RUN ва NEW кўрсатмалари олдига сонли белги қўйилмайди.

- Операторларга қўйиладиган номерлар иккита вазифани бажаради, яъни улар оператор белгиси бўлиб, ушбу операторга бошқариши узатишда ва ЭҲМ га киритилган дастурнинг бажарилишидан аввал операторларни тартибга келтиришда қўлланилади. Кўрилаётган дастурлаш тилида дастур тузилаётганда операторлар ҳар ўндан кейин номерланади. Ана шундай келган кетма-кет операторлар орасига бошқа оператор ёзиш мумкин Шунинг учун ҳам операторларнинг номери ҳар эҳтимолга қарши 10, 20, 30, . . . каби олинади. Операторлар икки турга: **бажариладиган** ва **бажарилмайдиган** операторларга бўлинади Бажарилмайдиган операторлар одатда дастурда турли тушунтириш, изоҳлаш, ўзгарувчиларни тавсифлаш ва бошқа мақсадларда қўлланилади Улар қаторига REM (remark — сўзидан олиниб, шарҳ, изоҳ маъносини англатади) операторини киритиш мумкин. Масалан,

40 REM — Квадрат тенгламани ечиш дастури.

Барча дастурда RUN оператори олдида END (тамом) оператори ёзилиб, у берилган дастурнинг (трансляция) охири эканлигини ифодалайди. Шунинг учун дастурда END оператори максимал номерга эга бўлмоғи керак. Одатда END операторини 9999 сон билан номерланади, чунки бундан катта номерли оператор бўлиши мумкин эмас. Энди бажариладиган операторлар билан танишамиз

а) **Ўзлаштириш оператори.** Ўзгарувчиларнинг қийматини ўзгартиришнинг қулай усулларидан бири ўзлаштириш операторидан фойдаланиш ҳисобланади. Ўзлаштириш операторининг умумий кўриниши қуйидагичадир:

$$\text{сн LET } a_1 = a_2 = \ldots = a_n = k^*,$$

бу ерда сн — сатр номери; LET** — оператор номи, „бўлсин“ деган маънони англатади; a_i — ўзгарувчи; k — арифметик ифода.

Ўзлаштириш оператори сонли ва белгили ўзгарувчилар учун қўлланилиши мумкин. Хусусий ҳолда арифметик ифода ўрнида сон ёки алоҳида олинган ўзгарувчи бўлиши мумкин.

1-мисол

10 LET 1% = 1 — бутун ўзгарувчи, 1% га 1 қиймат берилаяпти

20 LET A = 23.7 — A ҳақиқий ўзгарувчига 23.7 қиймат берилаяпти.

50 LET X1 = B*SIN(У)+3.

Белгили қийматлар учун ўзлаштириш операторининг чап томонида белгили ўзгарувчи, ўнг томонида белгили ўзгарувчи ёки белгили константа бўлиши мумкин.

2-мисол.

40 LET A0 = „TAMOM“ —	A0 символли ўзгарувчига „TAMOM“ белгили қиймат берилаяпти.
50 LET B0 = B$	B0 белгили ўзгарувчига белгили ўзгарувчи A0 нинг навбатдаги қиймати ўзлаштирилаяпти.

Ўзлаштириш оператори бажарилаётган вақтда унинг ўнг томони аниқланган бўлиши керак. Баъзан турли ўзгарувчиларга бир хил қиймат беришга тўғри келади, масалан,

```
10 LET A = 2.5,
20 LET B = 2.5,
30 LET C = 2.5,
```

Бундай ҳолларда бир қанча ўзлаштириш операторлари ўрнига битта оператор ёзиш мумкин, яъни

```
10 LET A = B = C = 2.5.
```

Худди шундай, агар

---

* сн — сатр номери белгиси.

** Баъзи компьютерлар учун тузилган дастурлардаги ўзлаштириш операторида LET ёзилмаса ҳам бўлади.

```
60 LET A$ = „ТЕЛЕВИЗОР“
70 LET B$ — „ТЕЛЕВИЗОР“
80 LET C$ = „ТЕЛЕВИЗОР“
```

белгили ўзгарувчилар берилган бўлса, уни битта оператор ёрдамида қуйидагича ифодалаш мумкин:

```
60 LET A$ — B$ — C$ — „ТЕЛЕВИЗОР“
```

3-мисол. Қуйидаги операторлар кетма-кетлиги бажарилгандан кейин қандай натижага эга бўлинади:

```
20 LET A — 25
30 LET B — 2
. . . . . . . .
90 LET X — A — B — (A + B) ∧ 2?
```

90 оператор бажарилгандан кейин X, A, B ўзгарувчилар 729 қийматни ўзлаштирадилар

б) Маълумотлар блоки оператори. Ўзгарувчиларнинг қийматини ўзгартиришнинг иккинчи усули берилган маълумотлар блокини қўллашга қаратилган Берилган маълумотлар блоки – дастур бажарилиши олдидан тузиладиган тартибланган сонли массивдан иборат. Берилган маълумотлар блоки ташкил қилиш учун DATA (берилганлар) операторидан фойдаланилади Масалан,

```
20 DATA —2,5. 7,0. 28E—9,1.9.
```

Келтирилган ушбу блокда тўртта сон бўлиб, биринчиси —2, иккинчиси 5.7, учинчиси $0.28.10^{-9}$ ва тўртинчиси 1,9 сонидан иборат. Бир дастурда бир неча маълумотлар блоки қатнашиши мумкин

в) READ оператори. READ (ўқимоқ) операторида сон қийматлари DATA операторида келтирилган ўзгарувчилар рўйхатланади. Масалан,

```
60 READ X, Y, Z.
```

Ўқиш операторида қанча ўзгарувчи келтирилган бўлса, DATA операторида ҳам шунча қиймат берилиши керак. Агар DATA операторидаги сонли ёки белгили қийматлар сони READ операторида келтирилган ўзгарувчилар сонидан кам бўлса, етишмаган ўзгарувчилар учун ноль ўзлаштирилади. Агар кўп бўлса, ортиқчаси кейинги READ операторида келтирилган ўзгарувчилар учун қўлланилади (агар у бўлса, акс ҳолда қолган қийматлар эътибордан четда қолаверади).

Дастурдаги DATA ва READ операторларининг сони тенг бўлиши шарт эмас.

г) RESTORE оператори RESTORE (тикламоқ) оператори маълумотлар блокидаги сонлар олиниб бўлгандан кейин уни тиклаш учун қўлланилади. Операторнинг умумий кўриниши қуйидагича:

сн RESTORE

Бу оператор бажарилгандан кейин бошланғич маълумотларни танлаш энг биринчи маълумотлар блокидан бошланади. Бу оператор дастурнинг ихтиёрий жойида (сатрида) келиши мумкин Бунда маълумотлар блокидаги сонларнинг барчаси ишлатилиб бўлиши шарт эмас. Масалан,

```
. . . . . . . . . . .
10 DATA 10. 0. 1, 2. 7, −0. 8
20 READ A, B. C, K
. . . . . . . . . . . . .
100 RESTORE
110 READ A, F, D, K
. . . . . . . . . . . . .
```

Дастурнинг ушбу қисмида биз фақат *A*, *K* ўзгарувчиларнинг қийматларини тикладик. Бу оператор ўқиш операторидаги сонлардан қайтадан фойдаланиш имкониятини беради.

д) INPUT оператори. INPUT (киритилсин) оператори масалада нима талаб қилинишига қараб терминалдан (клавиатурадан) маълумотларни киритиш учун хизмат қилади. Операторнинг умумий кўриниши қуйидагича:

сн INPUT <ўзгарувчилар рўйхати>

бу ерда сн — сатр номери;

INPUT — махсус хизматчи сўз.

Масалан, 10 INPUT *A*, *B*, *C*.

Бу оператор бажарилганда компьютер экранига керакли матнни ёзади ёки сўроқ белгисини беради: „?". Шундан сўнг машина ишлашдан тўхтайди ва киритилиши керак бўлган маълумотларнинг хотирага киритилишини кутади. Киритилаётган бошланғич маълумотлар сони INPUT операторида келтирилган ўзгарувчиларнинг сонига тўғри келмагунга қадар ЭҲМ кутиб туради. Киритиш операторининг ишлаш принципи READ операторининг ишлаш принципи кабидир, лекин биринчисида маълумотлар тугмачалар орқали киритилади, иккинчисида дастурда ёзилади. Киритиш операторининг айтилган хусусиятидан фойдаланиб, ЭҲМ билан мулоҳат тартибида ишлашни ташкил қилиш мумкин.

е) **PRINT оператори.** Ҳисобларнинг натижаларини ва турли тушунтириш матнларини ёзувга чиқариш учун PRINT оператори (ёзувга чиқариш оператори) қўлланилади. Ёзувга чиқариш операторининг умумий кўриниши қуйидагича:

сн PRINT <чиқарилувчи ўзгарувчилар рўйхати>

бу ерда сн — оператор сатр номери; PRINT — махсус хизматчи сўз.

Чиқарилиши керак бўлган рўйхат элементлари ўзаро вергул ёки вергулли нуқта билан ажратилади. Рўйхат элементлари сифатида

— константалар,
— ўзгарувчи номлари,
— ифодалар,
— матнлар,
— TAB (X) функцияси

олиниши мумкин. Одатда матн учун ихтиёрий белгилар кетма-кетлиги, шу жумладан рус алифбоси ҳам олиниши мумкин. Лекин матн қўштирноқ ичига олиниши керак. Масалан,

```
60 PRINT „Икки сон каттаси X = "; X.
```

Қулайлик учун чиқарилаётган рўйхатларнинг жойланишида сатр бешта зонага бўлинган бўлиб, уларнинг узунликлари ўзаро тенг бўлиши керак*. Масалан, битта сатр 75 хонадан иборат бўлса, ҳар бир зонанинг узунлиги 15 хонага тенг бўлади. Биринчи зона 1 дан 15 гача, иккинчи зона 16 дан 30 гача, учинчи зона 31 дан 45 гача, тўртинчи зона 46 дан 60 гача, бешинчи зона 61 дан 75 гача хона номерларига эга бўладилар.

Агар чиқарилаётган рўйхат элементлари ўзаро вергул билан ажратилган бўлса, уларнинг ҳар бирининг мос қиймати зоналарга алоҳида-алоҳида жойлашади.

---

* Баъзи мини ЭҲМларда, масалан, ЯМАХА туридаги шахсий компьютерда сатр 2 та зонага бўлинган.

Масалан,

```
30 PRINT 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
40 END
   RUN
```

бўлса, ёзувга қуйидагича жадвал чиқарилади:

```
 1   2   3   4   5
 6   7   8   9   10
11  12
```

Агар чиқарилаётган рўйхат элементлари ўзаро нуқтали вергул билан ажратилган бўлса, у ҳолда ҳар бир чиқарилаётган элемент орасида биттадан оралиқ қолдирилиб ёзувга чиқарилади. Масалан,

```
30 PRINT 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12
40 END
   RUN
```

каби буйруқ берилган бўлса, у ҳолда ёзувга қуйидагича натижа чиқарилади:

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
```

Агар ёзувга чиқариш оператори номидан кейин қўштирноққа олинмаган бирор ифода бўлса, у ҳолда у ҳисобланиб, сўнгра натижага жавоб чиқарилади.

Шунинг учун қуйидаги икки лавҳа ўзаро тенг кучлидир:

```
. . . . . . . . . . .
100 PRINT A, B,
110 PRINT SQR (A * B)
. . . . . . . . . . .
```

ва

```
. . . . . . . . . . .
120 PRINT A, B, SQR (A * B)
. . . . . . . . . . .
```

Янги сатрдан ёзувга чиқарилиши керак бўлган рўйхат элементининг охирида қандай ажратиш белгиси (вергул, вергулли нуқта ёки ҳеч нима қўйилмаган) қўйилганига боғлиқдир. Агар чиқарилаётган рўйхат элементининг охири вергул билан тугаган бўлса, у ҳолда бир сатр тўлатилгунча давом этади, сўнгра иккинчи сатрга ёзувга ўтказилади. Агар ёзув оператори битта эмас бир қанча бўлиб, ҳар бирининг охирида жойлашган чиқарилувчи элемент кетидан ҳеч қандай белги қўйилмаган бўлса, уларнинг натижалари янги сатрга ёзилади (ҳар бир PRINT натижаси янги сатрга ёзилади). Масалан,

```
90 PRINT X, T,
```

оператордан такрор-такрор фойдалансак, ҳар бир сатрда бештадан натижа оламиз. Агар T дан кейин вергул қўйилмаган бўлганда эди, у ҳолда натижаларда ҳар бир сатрда иккитадан натижа олар эдик.

4-мисол. Асосининг радиуси R, баландлиги H бўлган цилиндр ҳажмини ҳисоблаш дастурини тузинг ва уни $R = 5$ м; $H = 6$ м қийматлар учун ҳисобланг.

Ечиш. (I усул — маълумотлар блоки ёрдамида)

```
10 REM —цилиндр ҳажмини аниқлаш
20 DATA 5,6
30 READ R, H
40 V = (π *R ∧ 2* H)/3
50 PRINT „R ="; R, „H ="; H, „V ="; V
60 END
        RUN
```

Жавоб: $R = 5$ м, $H = 6$ м, $V = 157\ 08$ куб. м.

(II усул — INPUT оператори ёрдамида):

```
10 REM — цилиндр ҳажмини ҳисоблаш
20 INPUT „цилиндр ўлчамлари киритилсин"; R, H
30 V = (π * R ∧ 2* H )/3
40 PRINT „R="; R, „H="; H, „V="; V
50 END
        RUN
```

Жавоб: $R = 5$ м; $H = 6$ м; $V = 157.08$ куб. м.

ж) **STOP оператори.** Одатда дастурнинг бажарилишини режалаштирилган тўхтатиш билан ёки нотўғри ҳолат пайдо бўлганда тўхтатиш мумкин. Режалаштирилган тўхтатиш STOP ёки END операторларига чиқишдан иборат. STOP оператори дастурни таҳлил қилишда ҳам қўлланилади. Шундай тўхтатиш жараёнларида ўзгарувчиларнинг қийматларини текшириш учун PRINT операторидан ҳам фойдаланиш мумкин. Фақат у STOP операторидан кейин келиши зарур. Агар текширилаётган жараён тўғри бўлса, ҳисоблашни давом эттириш мумкин. Баъзи ҳолларда STOP оператори ўчириб юборилиши мумкин. Бунинг учун RUN операторидан фойдаланилади.

Машқлар

1. Биринчи ҳади a ва айирмаси d бўлган арифметик прогрессиянинг n-ҳадини ҳисоблаш дастурини тузин
2. Бошланғич тезлиги v_0 бўлиб, a тезлик билан текис ҳаракат

қилаётган моддий нуктанинг t вақт ичида ўтадиган йўлини аниқлаш дастурини тузинг.

3. Биринчи ҳади u_1, махражи q бўлган геометрик прогрессиянинг n- ҳадини топиш дастурини тузинг.

4. Ер сиртига нисбатан α бурчак остида V_0 бошланғич тезлик билан отилган жисмнинг учиш масофасини аниқлаш дастурини тузинг.

5. Асосларининг радиуслари R ва r бўлган кесик конуснинг баландлиги H бўлса, унинг ҳажмини аниқлаш дастурини тузинг.

6. Бир-биридан B м масофадаги ҳар бирининг массаси мос равишда M_1, M_2 тоннадан иборат бўлган иккита кеманинг ўзаро тортишиш кучи катталигини аниқлаш дастурини тузинг.

Текшириш саволлари

1. БЕЙСИК тилида дастурнинг умумий кўриниши қандай бўлади?
2. Оператор нима? Оператор номери нима учун хизмат қилади?
3. Маълумотлар блоки нима учун қўлланилади?
4. Ўқиш операторининг вазифаси нимадан иборат?
5. PRINT оператори қандай ишлайди?
6. Қандай оператор ёрдамида дастурга изоҳ ёзилиши мумкин?
7. DATA ва READ операторларини бошқа қандай оператор билан алмаштириш мумкин?
8. Ўзлаштириш операторини тушунтириб беринг.
9. RESTORE оператори қандай вазифани бажаради?
10. STOP ва END операторларининг вазифаларини тушунтириб беринг.

8- §. Бошқариш операторлари

а) **Шартсиз узатиш оператори.** Операторларнинг табиий бажарилишини номерлар кетма-кетлиги аниқлайди. Лекин кўп жараёнлар кетма-кет (чизиқли) бўлавермайди. Бунда навбатдаги операторнинг бажарилиши бошқа операторларнинг бажарилишига боғлиқ бўлади.

Операторларнинг табиий ҳолда бажарилиш кетма-кетлигини ўзгартириш учун шартсиз оператор қўлланилади. Шартсиз ўтиш операторининг умумий кўриниши қуйидагичадир:

сн$_1$ GOTO — <арифметик ифода> ёки <хусусий ҳолда сн$_2$>. Бу ерда GOTO — оператор номи (*. . . га ўт* маъносини билдиради).

сн$_1$ — ўтиш операторининг сатр номери,

сн$_2$ — сн$_1$ номерли оператор бажарилгандан кейин бошқаришни узатиш керак бўладиган операторнинг сатр номери. Агар сн$_2$ сатр номерида арифметик ифода бўлса, у ҳисобланиб, ҳосил бўлган соннинг бутун қисмига мос номерли операторга ўтказиш жараёни бажарилади. Масалан,

```
 . . . . . . .
80 LET A — 92.3
90 GOTO A+2
 . . . . . .
94 LET B — A * X
95 GOTO 150
 . . . . . . .
```

Ушбу келтирилган дастурнинг бўлагида операторлар бажарилиши қуйидагича бўлади: 80 оператор бажарилгандан кейин, бошқариш 90-операторга ўтказилади, сўнгра эса 94-оператордан бошлаб ҳисоблаш жараёни бошланади. 94-оператордан кейин 95-оператор бажарилади ва бошқариш 150-операторга ўтказилади. Бунда 91 — 93 ва 96 — 149-операторлар бажарилмай шартсиз равишда ташлаб кетилади.

б) **Шартли узатиш оператори.** Шундай жараёнлар мавжудки, уларда бажарилаётган оператордаги шартга қараб дастурнинг у ёки бу қисмига ўтишга тўғри келади. Ана шундай жараёнларга дастур тузиш учун шартли узатиш операторидан фойдаланилади. Шартли операторнинг умумий кўриниши қуйидагичадир:

сн_1 IF $a_1 * a_2$ THEN сн_2 ELSE сн_3

бу ерда IF — оператор номи, „агар“ деган маънога эга; a_1, a_2 — арифметик ифодалар; * — муносабат амал ишораларидан бири ($>$, $>$, $=$, $<>$, $\leqslant$), THEN — махсус хизматчи сўз бўлиб, „у ҳолда“ деган маънони англатади; ELSE — махсус хизматчи сўз бўлиб „акс ҳолда“ деган маънони англатади; сн_1 — шартли операторнинг сатр номери; сн_2 — шарт бажарилганда ўтиш керак бўлган операторнинг сатр номери; сн_3 — шарт бажарилмаган ҳолда бошқариш узатилиши керак бўлган операторнинг сатр номери.

Шартли оператор қуйидагича амалга ошади: агар $a_1 * a_2$ шарт бажарилса, бошқариш сн_2 номерли операторга, акс ҳолда (шарт бажарилмаса) сн_2 номерли операторга ўтказилади.

Кўпчилик масалаларни ечишда тўлиқ бўлмаган шартли оператордан фойдаланилади. Тўлиқ бўлмаган шартли операторнинг кўриниши қуйидагичадир:

сн_1 IF $a_1 * a_2$ THEN сн_2.

Ушбу оператор қуйидагича амалга ошади: агар $a_1 * a_2$ шарт бажарилса, у ҳолда бошқариш $сн_2$ номерли операторга, акс ҳолда $сн_1$ сатрдан кейинги номерга ўтказилади. Бошқача айтганда, операторларнинг бажарилишининг табиий тартиби сақланади. Масалан:

```
. . . . . .
50 IF x>0 THEN 80
60 Y—2*X
70 GOTO 20
80 Y—SIN(X)
. . . . . . .
```

Бу ерда, агар $x>0$ бўлса, $y=\sin x$, акс ҳолда, яъни $x\leqslant 0$ бўлса, бошқаришни $y=2x$ функцияни ҳисоблашга ўтказилади.

1-мисол. Берилган манфий бўлмаган иккита A ва B сонлардан каттасининг қийматини аниқлаб, C ўзгарувчига ўзлаштириладиган дастур тузинг.

```
10 REM — иккита соннинг катíаси
20 DATA 6,4. 3E — l
30 READ A, B
40 IF A — B > 0 THEN 70
50 LET C — B
60 GOTO 80
70 LET C = A
80 PRINI ,C—"; C
90 END
     RUN
```

Жавоб: $C=6$.

2-мисол. $Ax^2+Bx+C=0$ квадрат тенгламани ечиш дастурини тузинг (ечимнинг барча ҳоллари текширилсин).

Ечиш.

```
10 REM Ax²+Bx+C—0 тенгламани ечиш дастури
20 INPUT „коэффициентларни киритинг"; A, B, C
30 PRINT „a —"; A, „b —"; B, „c —"; C
40 IF A — 0 THEN 220
50 M — 2*A
60 D — B ∧ 2 — 2*M*C
70 IF D — 0 THEN 190
80 IF D > 0 THEN 140
90 D — SQR(ABS(D))
100 PRINT „комплекс ечимлар"
110 PRINT „x1 —"; —B/M; „+i"; D/M
120 PRINT „x2 —"; —B/M: „—i" D/M
130 GOTO 300
140 D — SQR(D)
150 PRINT „ҳақиқий ҳар хил ечимлар"
160 PRINT „x1 —"; (—B+D)/M
```

```
170 PRINT „x2 ="; (-B - D)/M
180 GOTG 300
190 PRINT „каррали илдизлар"
200 PRINT „x1 = x2 ="; -B/M
210 GOTO 300
220 IF B = 0 THEN 260
230 PRINT „ягона ечим"
240 PRINT „x ="; -C/B
250 GOTO 300
260 IF C = 0 THEN 290
270 PRINT „ечим мавжуд эмас"
280 GOTO 300
290 PRINT „чексиз кўп ечим"
300 END
                    RUN

Коэффициентларни киритинг?

              a = 1        b = 1        c = 1

Ж а в о б: комплекс ечимлар

              x1 = -.5 + i · 0.8660254037844
              x2 = -.5 - i · 0.8660254037844
                    RUN

коэффициентларни киритинг?

              a = 0        b = 0        c = 0

Ж а в о б: чексиз кўп ечим
                    RUN

коэффициентларни киритинг?

              a = 3        b = 6        c = 3

Ж а в о б: каррали илдизлар

                    x1 = x2 = -1
                      RUN
коэффициентларни киритинг?
              a = 0        b = 6        c = 5
Ж а в о б: ягона ечим
                 x = .83333 3333333
                      RUN
коэффициентларни киритинг?
              a = 1        b = 5        c = 6
ҳақиқий ҳар хил ечимлар
                      x1 = -2
                      x2 = -3
```

9-§. DIM оператори

Дастурда массив қўлланса, у ҳолда биз уларни тавсифламоғимиз керак. Бир ўлчовли массивни тавсифлаш учун унинг элементлари сонини кўрсатиш керак.

Икки ўлчовли массив элементларини тавсифлаш, унинг сатр ва устуни сонларининг берилишидан иборат. Шунинг учун массивларни тавсифлаш учун махсус DIM (DIMENSION — ўлчов) оператори қўлланилади. Унинг умумий кўриниши қуйидагичадир:

$$\text{сн DIM } W_1(M_1\ ч),\ W_2(M_2\ ч),\ \ldots,\ W(M_n\ ч).$$

Бу ерда сн — оператор сатр номери; W_i, $i = \overline{1, n}$ массив номи; M_i ч — W_i массив чегараси (битта ёки вергул билан ажратилган иккита бутун сон).

Массивларнинг тавсифи уларнинг элементларидан фойдаланишдан олдин келтирилиши керак Агар барча массивларнинг тавсифи битта операторга сиғмаса, у ҳолда уларни иккинчи операторда давом эттириш мумкин. Массивларни тавсифлаш учта мақсадда зарур:

— ЭҲМ оператив хотирасида қанча жой ажратилиши маълум бўлиши учун;

— икки ўлчовли массивларнинг чегараларини кўрсатиш (чегараларини кўрсатмай унинг элементларининг жойлашишини аниқлаб бўлмайди) учун;

— массивларнинг ўлчови ва чегараларини билиш, индексларни нотўғри қўллаш билан боғлиқ хатоларни йўқотишга олиб келади.

БЕЙСИК да массив чегараси 10 дан ошмаган ҳолларда тавсифлаш келтирилмаса ҳам бўлади. Мини-ЭҲМнинг оператив хотирасида тавсифланмаган вектор учун 10 та катак, тавсифланмаган матрица учун 100 та (10 × 10) катак ажратилади. Агар масала шартига кўра массив элементлари сони 10 ёки 100 дан ошиб кетган бўлса, у ҳолда тавсифнинг бўлмаслиги ҳисоб жараёнида хатоликка олиб келади ва мос маълумот экранга чиқарилади. Дастурда қўлланган ўзгарувчининг ўлчовини ўзгарувчи қўллашдан олдин келтириш керак. Масалан, ушбу

```
      . . . . . .
60 LET A = C + B/3
      . . . . . .
100 DIM A (2,5)
      . . . . . .
```

дастур лавҳаси бевосита ишлаш жараёнида хатоликка олиб келади.

10-§. FOR ва NEXT операторлари

Цикллар — дастурнинг у бажарилишида кўп марта такрорланувчи қисмидан иборат. Цикл операторларидан фойдаланиб, дастурларни қисқагина қилиб ёзиш мумкин. Циклик жараёнларга дастур тузиш учун қаралаётган алгоритмик тилга махсус FOR ва NEXT цикл операторлари киритилган. Циклнинг бош қисми деб аталувчи FOR (учун) оператори циклнинг таркибий қисмини ташкил қилувчи оператордан олдин келади ва унинг умумий кўриниши қуйидагичадир:

$$\text{сн FOR } V = a_1 \text{ TO } a_2 \text{ STEP } a_3,$$

бу ерда FOR — хизматчи сўз; V — бошқарувчи ўзгарувчининг номи (цикл параметри); TO — хизматчи сўз („гача" маънони англатади); a_1 — ўзгарувчининг бошланғич қийматини ифодаловчи ифода; a_2 — ўзгарувчининг юқори қийматини ифодаловчи ифода; STEP — хизматчи сўз („қадам" маъносини беради); a_3 — бошқарувчининг қандай ўзгаришини ифодаловчи ифода (ўзгариш қадами).

Агар V бутун сон бўлиб, қадам $a_3 = 1$ каби ўзгарса, у ҳолда цикл оператори соддароқ кўринишда ёзилиши мумкин, яъни

$$\text{сн FOR } V = a_1 \text{ TO } a_2.$$

Бунда FOR операторидан кейин дастурнинг таркибий қисмини ташкил этувчи операторлар келади. Цикл NEXT (навбатдагиси) оператори билан тугайди. Ушбу операторнинг умумий кўриниши қуйидагичадир:

$$\text{сн NEXT } V$$

бу ерда сн — операторнинг сатр номери; NEXT — оператор номи; V — цикл параметрининг номи. NEXT операторининг бажарилишида цикл параметрининг қиймати $V = V + a_3$ каби ўзгаради ва цикл охири таҳлил қилинади.

Умуман цикл қуйидагича бажарилади: FOR оператори билан цикл параметри (бошланғич ва охирги қиймати, ўзгариш (қадам) катталиги) ҳисобланади ва цикл параметрига бошланғич қиймат берилади. Сўнгра циклнинг таркибий қисмини ташкил этувчи операторлар бажарилади. NEXT операторига етгандан кейин цикл параметрининг янги қиймати $V = V + a_3$ ҳисобланади ва a_2 қиймати билан таққосланади. Цикл унинг параметри охирги қиймати a_2 дан қатъий катта, яъни $V > a_2$ (агар қадам мусбат бўлса) ёки қатъий кичик, яъни $V < a_2$ (агар қадам манфий бўлса) бўлгунга қадар давом этади.

Циклдан чиқишда бошқарувчи ўзгарувчи охирги қийматини сақлайди.

1-мисол. Қуйидаги

$$S = \frac{3 \cdot A}{2} (\sqrt{3A^2 + 256} + \sqrt{3} \cdot A), \text{ бу ерда } A = 0{,}1 \cdot k$$

функция учун k ўзгарувчининг 1 дан 10 гача бўлган оралиғида 1 қадам билан мос қийматлар жадвалини ҳосил қилиш дастурини тузинг

Ечиш.

```
10 REM — жадваллаштириш
20 FOR I = 1 TO 10
30 A = 1 * .1
40 S = (3 * A/2) * (SQR (3 * A ∧ 2 + 256) + SQR (3)*A).
50 PRINT „a =“; A, „s =“; S
60 NEXT I
70 END
                RUN
```

Жавоб:

```
a = .1          s = 2.4261213829938
a = .2          s = 4.9050479166489
a = .3          s = 7.43738227 342
a = .4          s = 10.0 46879 9017
a = .5          s = 12.667081322059
a = .6          s = 15.365650467353
a = .7          s = 18.121222673947
a = .8          s = 20934634279154
a = .9          s = 23 80671522961
a = 1           s = 26.738291620199
```

Циклик жараёнларга фақат цикл оператори эмас, балки шартли оператордан фойдаланган ҳолда ҳам дастур тузиш мумкин.

2-мисол. $y = \sqrt{\sin^2 x + k^2 \cos^2 x}$ функциянинг x нинг [0, 0, 5] оралиқдаги қийматлари учун 0. 1 қадам билан $k = 0.5$ учун қийматлар жадвалини ёзувга чиқарадиган дастурни икки усулда: шартли ва циклик операторлар ёрдамида тузинг.

Ечиш. 1-усул (Шартли оператор ёрдамида):

```
10 REM — Функция қиймати
20 DATA 0, 0. 5, 0. 1, 0. 5
30 READ X, X 1, H, K
40 PRINT „X=“; X, „Y=“; SQR (SIN (X) * * 2 + K * * 2
   * COS (X) * * 2)
50 LET X = X + H
60 IF X < X 1 THEN 40
```

```
70 END
        RUN
```

2-усул. (Цикл оператор ёрдамида):

```
10 REM — Фукция қиймати
20 LET K = 0.5
30 FOR X = 0 TO 0.5 STEP 0.1
40 PRINT "X ="; X  "Y ="; SQR (SIN(X)**2 + K**
   2*COS (X)**2)
50 NEXT X
60 END
      RUN
```

Ҳар иккала усулда келтирилган дастурларни ЭҲМ да ечилса, қуйидагича жавоб олинади:

```
X = 0          Y = .5
X = .1         Y = .50741
X = .2         Y = .52877
X = .3         Y = .56169
X = .4         Y = .6031
X = .5         Y = .64991
```

Иккинчи усулда ечишда дастур анча ихчам ёзилганини кўрамиз.

Цикл операторлари ёрдамида TAB(X) стандарт функцияни қўллаб, функция графикларини ёзувга чиқариш мумкин.

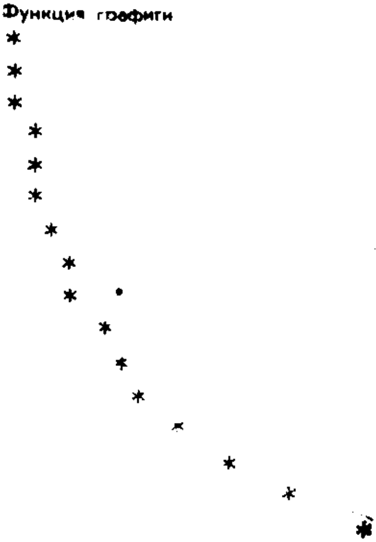
3-мисол. Сатрнинг 25-белги ўрнидан бошлаб [0, 6.28] оралиқда 0.4 қадам билан $y = 2 \cdot \sqrt{e^x + \sin(x+1)}$ функциянинг графигини чизиш дастурини тузинг.

Ечиш.

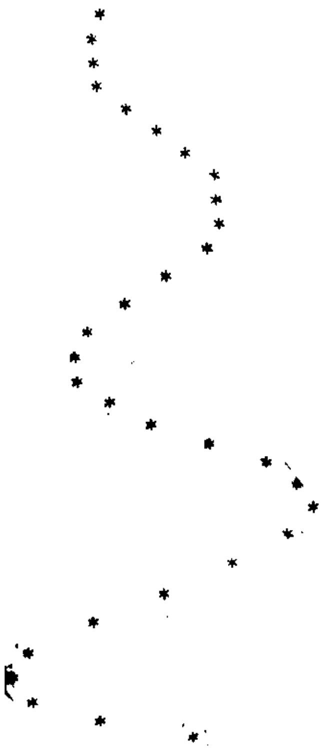
```
10 REM — Функция графиги
20 PRINT "Y = 2 · √(e^x + SIN (x + 1)) функция графиги"
30 FOR X = 0 TO 6.28 STEP 0.4
40 PRINT TAB (25 + 2 * SQR (EXP (X) + SIN (x + 1))); "*"
50 NEXT X
60 END
     RUN
```

Ушбу дастур ЭҲМ да бажарилса, функциянинг графиги 16-расмдагидек бўлади.

4-мисол. Сатрнинг 30-белги ўрнидан бошлаб, [0, 15] оралиқда 0.5 қадам билан $y = 15 \sin x \cdot e^{-0,1x}$ функция графигини чизиш дастурини тузинг.



16-расм.



17- расм.

Ечиш.

```
10 REM — функция графиги
20 PRINT .Y — 15 · SIN x · e^-0,1x функция графиги"
30 FOR X — 0 TO 15 STEP .5
40 PRINT TAB(30 + 15 SIN(X) * EXP(—0. 1 * X));"*"
50 NEXT X
60 END
            RUN
```

Жавоб.

$y = 15 \sin x \cdot e^{-0,1x}$

функция графиги (17- расм).

11- §. Мураккаб цикллар (ичма-ич жойлашган цикллар)

FOR ва NEXT операторлари ёрдамида мураккаб цикллар ҳам ташкил қилиш мумкин. Цикл ичида бошқа цикллар жойлашган бўлса бундай цикл мураккаб цикл дейилади.

Ичма-ич тўртта цикл жойлашган мураккаб циклни схематик қуйидагича ифодалаш мумкин:

```
┌──────────сн1 FOR A1 — . . .
│  ┌───────сн2 FOR A2 — . . .
│  │  ┌────сн3 FOR A3 = . . .
│  │  │  ┌─сн4 FOR A4 — . . .
│  │  │  │   . . . . . . . .
│  │  │  │   . . . . . . . .
│  │  │  └─сн(n+1) NEXT A4
│  │  └────сн(n+2) NEXT A3
│  └───────сн(n+3) NEXT A2
└──────────сн(n+4) NEXT A1
```

Ташқи циклнинг ҳар бир такрорланишига ичида жойлашган цикллар кўрсатилган марта такрорланади.

Мураккаб цикллар ташкил қилинаётганда қуйидагиларга эътибор бериш керак:

— циклга FOR операторидан бошлабгина кириш мумкин;

— цикл ичида қатнашган операторларда цикл параметри қайта ҳисобланиши мумкин эмас. Акс ҳолда циклни такрорлаганда FOR операторига тушмаймиз Шунинг учун циклга киришда ҳисобланган қадам ўзгариши ва параметрнинг охирги қиймати ўзгартирилиши мумкин эмас;

— цикл параметрининг a_3 дан бошқа қиймати ўзгартирилиши мумкин. Бу эса ўзгарувчи қадамли циклларни ташкил қилиш имконини беради.

1-мисол.

```
. .   . . . . . .
120 LET S = 0
130 FOR K = 1 TO 20
140 IF K < 10 THEN 160
150 LET K = K + 1
160 LET S = S + A(K)
170 NEXT K
. . .   . . . . .
```

Келтирилган дастур лавҳасида цикл 20 марта эмас, 15 марта такрорланади, чунки $K = 11$ дан бошлаб, стандарт 1 қадамдан ташқари (170-оператор) цикл ичида K нинг қиймати катталаштирилади. Шундай қилиб, юқоридаги дастур натижасида

$$S = A(1) + A(2) + \ldots + A(10) + A(12) + A(14) + \\ + \ldots + A(20)$$

йиғинди ҳисобланади.

Агар цикллар бир-бирида жойлашган бўлса, у ҳолда улар албатта турли ўзгарувчилар билан ташкил қилиниши зарур. Агар цикл кетма-кет жойлашган бўлса, параметр сифатида битта ўзгарувчи қўлланиши мумкин.

2-мисол. Икки ўзгарувчили $\text{У}(x, t) = \dfrac{\sin x \cdot \cos(x + t)}{\ln\left|x - \dfrac{t}{2}\right|}$ функциянинг $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ва $t = 0.5, 0.52, 0.54, 0.56$ қийматлар учун ҳисоблаш дастурини тузинг.

Ечиш.

```
10 REM — функция қийматлари
20 FOR X = .1 TO .4 STEP .1
30 FOR T = 5 TO .56 STEP .02
40 PRINT "У(x, t) ="; SIN (x)  cos (X + T)/(LOG
    (ABS (X – T/2))
50 NEXT T
60 NEXT X
```

```
70 END
                RUN
У (x, t) = —.043432159304412
У (x, t) = —.044337601722587
У (x, t) = —.045190694317483
У (x, t) = —.045992358228712
У (x, t) = —.050721384925062
У (x, t) = —.053088850556566
У (x, t) = —.055169878935738
У (x, t) = —.057014313677194
У (x, t) = —.068728074449843
У (x, t) = —.062633715951427
У (x, t) = —.055251388970974
У (x, t) = —.049286125147506
У (x, t) = —.12759673891742
У (x, t) = —.11999183077032
У (x, t) = —.11257324295965
У (x, t) = —.10533558609297
```

12-§. Қўлловчининг функциялари

БЕЙСИК да дастур тузаётган киши стандарт функциялардан ташқари функцияларни қўллаши мумкин. Бундай пайтларда функцияга мос формулани бир марта ёзиб олиб, унга ном берилади ва керак пайтда белгиланган функциядан фойдаланилади. Ана шу мақсадда DEF (DEFINITION сўзини қисқартириб олинган бўлиб, „аниқлаш“ маъносини англатади) оператори қўлланади. DEFFN янги функцияни ифодалаш учун ишлатилувчи хизматчи сўз. Операторнинг умумий кўриниши қуйидагичадир:

$$сн\ \mathrm{DEFFN}\ V(X_1, X_2, \ldots, X_n) = a$$

Бу ерда FN V — аниқланаётган функция номи, V — латин ҳарфи, сн — операторнинг сатр номи: X_1, X_2, ..., X_n — расмий аргументларнинг рўйхати; a — арифметик ифода.

Фойдаланувчи киритган функция номи ҳар доим учта ҳарфдан ташкил топиб, бошланғич иккитаси албатта FN бўлиши керак. Шундай қилиб, қўлловчи функцияларининг максимал сони лотин алифбосидаги бош ҳарфлари сонига тенг, яъни 26 та бўлиши мумкин. Расмий аргументлар сифатида ихтиёрий оддий ўзгарувчилар олиниши мумкин. Операторнинг максимал узунлиги унинг аргументларига чегара қўяди. Шунинг учун аргументлар сони 15 тадан ошмаслиги керак.

1-мисол $\cos x - 0{,}1 \cdot x = 0$ тенгламанинг илдизларини ажратиш (изоляция сегментларини аниқлаш) дастурини тузиб ечинг.

Ечиш.

```
10 REM — илдизларни ажратиш
20 DEFFN F(X) = COS(X) — 0.1 * X
30 INPUT A, B, H: K = 0
40 X1 = A: X2 = X1 + H: У1 = FNF(X1)
50 IF X2 > B THEN 120
60 У2 = FNF(X2)
70 IF У1 * У2 > 0 THEN 100
80 K = K + 1
90 PRINT K; "- илдиз"; "["; X1; "; "; X2; "]"
100 X1 = X2; X2 = X1 + H: У1 = У2
110 GOTO 50
120 END
                RUN

? — 10, 10, .1
```

Жавоб:

```
1- илдиз [—9.7; —9.6]
2- илдиз [—9; —8.9]
3- илдиз [—4.3; —4.2]
4- илдиз [—1.8; —1.7]
5- илдиз [1.4; 1.5]
6- илдиз [5.2; 5.3]
7- илдиз [7; 7.1]
```

13- §. Қисм дастур

13

Қисм дастур бир гуруҳ операторлардан фойдаланиб тузилган бўлиб, унга дастурнинг исталган жойидан мурожаат қилиш мумкин. Қисм дастур маълум қоида асосида эълон қилинади. Масалан, қисм дастур ташкил қилишдаги хусусиятлардан бири шуки, у албатта RETURN (қайтиш) оператори билан тугаши керак. Дастурда қатнашган операторларнинг биринчиси учун кўпинча, бажарилмайдиган REM оператори қўлланилади ва қисм дастур GOSUB хизматчи сўзидан бошланади. Қисм дастурга мурожаат қилиш учун GOSUB (қисм дастурга ўт) операторидан фойдаланилиб, унинг умумий кўриниши

$$сн_1 \text{ GOSUB } сн_2$$

кабилар. Бу ерда $сн_1$ — GOSUB операторининг сатр номери; GOSUB — оператор номи; $сн_2$ — қисм дастур биринчи операторининг сатр номери.

GOSUB оператори $сн_2$ сатрли операторга бошқаришни узатишдан ташқари, мурожаат қилингандаги сатр номерини хотирлаб қолади ва қисм дастур бажарилгандан сўнг (яъни RETURN операторидан кейин) ўша ерга қайтиб келади ва дастур бажарилиши давом этади. Шундай қилиб қисм дастур бажарилгандан кейин

GOSUB операторидан кейинги оператордан дастурнинг бажарилиши давом эттирилади.

1-мисол. Декарт координата системасидан қутб координата системасига ўтиш дастури ёзилсин.

Ечиш.

```
10 REM — қутб координата системасига ўтиш
20 INPUT A, B, C, D
30 X = A : Y = B
40 GOSUB 100
50 R1 = ' : F1 = F
60 X = C : Y = D
70 GOS JB  00
80 R2 = R : F2 = F
```

Қисм дастур қуйидагича бўлади:

```
100 REM — X, У — декарт координаталари
100 REM — R, F — қутб координаталари
120 R = SQR (X ∧ 2 + Y ∧ 2)
130 F = ATN (Y/X)
140 RETURN
```

Қурилган дастурнинг 30 ва 60-сатрларида аргументларнинг қийматлари берилади, 50 ва 80-сатрларда эса қисм дастурнинг бажарилиш натижасини узатиш амалга оширилади.

Қисм дастурга RETURN операторидан олдинги ихтиёрий сатрдан кириш мумкин. Қурилаётган мисолда 100 ва 110-сатрлар изоҳ учун қўлланилган, шунинг учун қисм дастурга 120-сатрдан кирилади

Машқлар

1.

$$f(Z) = \begin{cases} Z^2, \text{ агар } Z > 1 \text{ бўлса}, \\ 1 - Z, \text{ агар } Z > 1 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

функция қийматини ҳисоблаш дастурини тузинг.

2. $5x^2 + 6x - 32 = 0$ квадрат тенгламани ечиш дастурини тузинг

3. FN A(T) = SQR (ABS (1 + 2 * SIN (T))) функцияни қўллаб,

$$A(x, y) = \frac{2{,}3 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \sin(x + y)}}{8{,}94 + \sqrt{1 + 2 \cdot \sin(x^2 - y)}}$$

ифоданинг қийматини ҳисоблаш дастурини тузинг.

4. $n!$ ни ҳисоблаш дастурини тузинг.

5. $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{i^2}{2 \cdot i^3 + 1}$ йиғиндини ҳисоблаш дастурини тузинг.

6. $\sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{i=1}^{m} \frac{k + i}{k^2 + i^2}$ ҳисоблаш жараёнига дастур тузинг,

Текшириш саволлари

1. IF оператори нима учун мўлжалланган? Унинг тўлиқ ва тўлиқ бўлмаган формуласи қандай ёзилади?
2. Шартли операторининг бажарилиши қандай амалга оширилади?
3. GOTO оператори нима учун хизмат қилади?
4. FOR ва NEXT операторларининг хизмати нимадан иборат?
5. Циклик жараёнларга FOR ва NEXT операторларисиз дастур тузиш мумкинми?
6. PRINT TAB операторининг вазифаси нима?
7. БЕЙСИК тилида DIM оператори нима учун зарур?
8. Массивнинг максимал ўлчови қандай бўлиши мумкин?
9. DEF оператори нима учун ишлатилади?
10. GOSUB оператори нима учун қўлланилади?
11. Стандарт ва стандарт бўлмаган қисм дастурларнинг фарқи нимада?
12. RETURN ва GOTO операторларининг фарқи нимада?
13. Ичма-ич жойлашган цикллар нечтагача бўлиши мумкин?

14-§. Матрицалар устида амаллар бажариш*

Матрицалар билан бажариладиган барча амалларни уч турга ажратиш мумкин:

а) матрица элементларининг бошланғич қийматларини ҳосил қилиш;

б) матрицалар (векторлар) устида алгебраик амаллар бажариш;

в) матрица элементларини ёзувга чиқариш.

1. Матрица элементларининг бошланғич қийматларини ҳосил қилиш

Бу турга тўрт хил амал киради:

— маълумотлар блокидан танлаш;
— маълумотларни „тозалаш";
— матрицани бирлар билан „ёзиш";
— матрицани диагонал матрица билан алмаштириш.

Маълумотлар блокидан танлаш. Ушбу операторнинг кўриниши

сн MAT READ *A*, *B*, *C*, . . .

каби бўлиб, бу ерда сн — оператор сатр номери; MAT — хизматчи сўз (MATRIX — сўзининг қисқартирилгани

---

* Матрицалар устида амаллар бажариш Искра-226 ЭҲМга тааллуқли.

бўлиб, матрица маъносини англатади); READ — хизматчи сўз (ўқиш); *A*. *B*, *C* . . . — массив номлари.

MAT READ оператори ёрдамида маълумотлар блокидан кетма-кет сонлар олиниб, массив элементларига жойлаштирилади. Бунда аввал биринчи, кейин иккинчи массив элементлари жойлаштирилади.

Матрицани „тозалаш" операторининг кўриниши

сн MAT *C* = ZER

каби бўлиб, бу ерда сн - оператор сатр номери; *C* — массив номи; ZER — махсус хизматчи сўз (ZERO — сўзидан олиниб, ноль дегани).

Бу операторнинг ишлаши натижасида *C* массив элементлари ўрнига ноллар киритилади

Матрицани бирлар билан „ёзиш" операторининг кўриниши

сн MAT *C* = CON

каби бўлиб, бу ерда сн — операторнинг сатр номери; *C* — массив номи, CON — махсус хизматчи сўз.

Бу оператор қўллангандан кейин *C* матрица элементлари бирлардан иборат бўлиб қолади.

Матрицани диагонал матрица билан алмаштириш операторининг кўриниши

сн MAT *C* = IDN

каби бўлиб, бу ерда сн — оператор сатр номери; *C* — массив номи; IDN — махсус хизматчи сўз (IDENTITY — бир хил дегани). Ушбу оператор қўллангандан кейин матрицанинг диагонал элементлари бирлардан, қолган элементлари ноллардан иборат бўлиб қолади.

2. Матрицалар устида алгебраик амаллар бажариш

Ушбу турга кирадиган амаллар матрицалар устида (ёки векторлар устида) маълум алгебраик амалларни бажаришдан иборат. Бундай амаллар бажарилаётганда уларнинг ўлчовликлари орасидаги маълум қонун-қоидалар сақланиши керак ва қатнашаётган амаллар DIM оператори орқали аввал аниқланган бўлиши керак.

Матрицали ўзлаштириш оператори. Бу операторнинг кўриниши

сн MAT *C* = *A*

каби бўлиб, бу ерда сн — оператор сатр номери; A, C — массивлар номлари.

Бу оператор бажарилиши натижасида A массив элементларининг қийматлари мос C массив элементларининг катакчаларига ўтказилади. Бунда иккала массив ўлчовлари мос бўлиши керак.

Матрицаларни (векторларни) қўшиш. Мазкур операторнинг кўриниши

$$\text{сн MAT } C = A + B$$

каби бўлиб, бу ерда A, B, C — массивларнинг номлари; сн — оператор сатр номери.

Бу оператор бажарилиши натижасида C массивнинг барча элементлари A ва B массив элементларининг йиғиндисидан иборат бўлади. яъни

$C(I) = A(I) + B(I)$ — бир ўлчовли массивлар учун;

$C(I, J) = A(I, J) + B(I, J)$ — икки ўлчовли массивлар учун.

Бунда массивларнинг ўлчовлари бир хил бўлиши талаб этилади.

Матрицаларни (векторларни) айириш Бу операторнинг кўриниши

$$\text{сн MAT } C = A - B$$

каби бўлиб, бу ерда сн — оператор сатр номери; A, B, C — массив номлари.

Бу оператор бажарилиши натижасида C массивнинг элементлари A ва B массив элементлари айирмасидан иборат бўлади, яъни

$C(I) = A(I) - B(I)$ — бир ўлчовли массивлар учун;

$C(I, J) = A(I, J) - B(I, J)$ — икки ўлчовли массивлар учун.

Бунда барча иштирок этаётган массивларнинг ўлчовлари тенг бўлиши талаб этилади.

Матрицани (векторни) скалярга кўпайтириш. Бу операторнинг кўриниши

$$\text{сн MAT } C = (a) * A$$

каби бўлиб, бу ерда сн - оператор сатр номери; A, C — массив номлари; a — арифметик ифода (сон)

Амалларнинг тартиби қатъий ва албатта кўрсатилган бўлиши керак, яъни биринчи ўринда скаляр ва иккинчи ўринда A массив туриши керак. Скаляр ўралган кичик қавслар ҳам албатта бўлиши керак.

Массивни скалярга кўпайтиришда аввал a ифоданинг қиймати ҳисобланади, сўнгра массивнинг барча элементлари ҳосил бўлган натижага кўпайтирилади ва мос равишда C массивнинг элементлари учун мўлжалланган жойларга юборилади. Бунда A ва C массивларнинг ўлчовлари бир хил бўлиши керак.

Матрицаларни кўпайтириш. Мазкур операторнинг кўриниши

$$\text{сн MAT } C = A * B$$

каби бўлиб, бу ерда сн — оператор сатр номери; A, B, C — массив номлари.

Матрицаларни улар квадрат матрица бўлганда ҳам, тўғри тўрт бурчакли бўлганда ҳам кўпайтириш мумкин. Фақат иккинчи ҳолда биринчи матрицанинг йўллар сони иккинчи матрицанинг устунлар сонига тенг бўлиши талаб этилади. Масалан, агар A ва B матрицалар мос равишда $N \times M$ ва $M \times K$ ўлчовларга эга бўлса, у ҳолда натижа C массив $N \times K$ ўлчовга эга бўлади. Ҳар бир элемент эса

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^{M} a_{ip} b_{pj}$$

формула билан ҳисобланиб, бу ерда c_{ij}, a_{ip}, b_{pj} — мос равишда C, A ва B массивларнинг элементлари.

Шуни эсда тутиш кераки, MAT $A = A * B$ ёки MAT $B = A * B$ (бу ерда A, B матрицалар) кўринишидаги амалларни бажариш ман этилади.

Матрицаларни транспонирлаш. Бу операторнинг кўриниши

$$\text{сн MAT } C = \text{TRN}(A)$$

каби бўлиб, бу ерда сн — оператор сатр номери; A, C — икки ўлчовли массивларнинг номлари; TRN — махсус хизматчи сўз (TRANSPOSE — транспонирлаш маъносини беради).

Матрицани транспонирлаш — унинг устун элементларини сатр элементлари билан ўрнини алмаштиришдан иборат, яъни

$$C(I, J) = A(J, I).$$

Матрицаларни тескарилаш операторининг кўриниши

$$сн \ MAT \ C = INV(A)$$

каби бўлиб, бу ерда сн — оператор сатр номери; A, C — массивлар номлари; INV — махсус хизматчи сўз (INVERSE — „тескари“ маънодан олинган).

Ушбу амал C матрицанинг элементларини тескари A^{-1} матрица элементлари билан алмаштиришдан иборат бўлиб, у қуйидаги

$$A * A^{-1} = A^{-} * A = E$$

шартни қаноатлантиради. Бу ерда E — бирлик матрица.

Матрицаларни тескарилаш фақат матрицага мос детерминант нолдан фарқли бўлгандагина маънога эга бўлади.

3. Матрица элементларини ёзувга чиқариш

Матрица устида амаллар бажаришнинг ушбу турига фақат битта ёзувга чиқариш оператори киради.

Матрицаларнинг элементларини ёзувга чиқариш операторининг кўриниши

$$сн \ MAT \ PRINT \ A, \ B, \ C$$

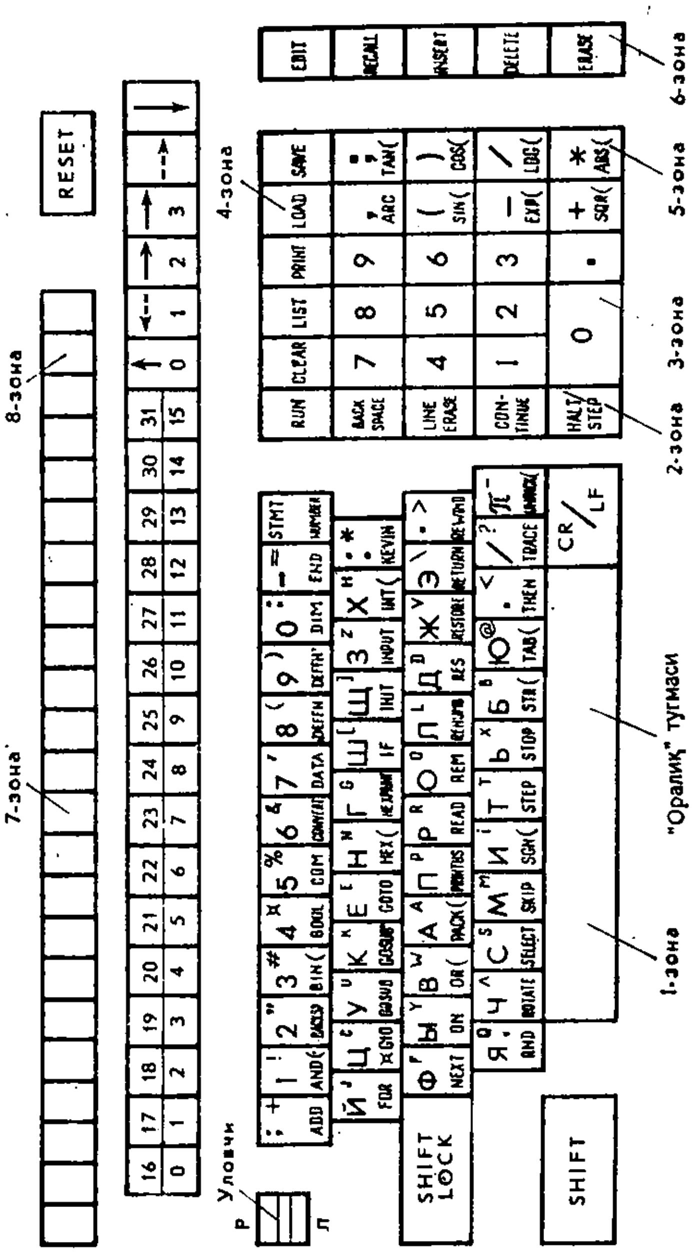
каби бўлиб, бу ерда сн — оператор сатри; A, B, C — массивларнинг номлари (чиқариладиган рўйхат); PRINT — махсус хизматчи сўз (ёзувга чиқариш).

MAT PRINT оператори чиқарилаётган рўйхатни стандарт кўринишда — бир сатрда бешта қиймат ёки зичланган кўринишда — қўшни элементлар орасида биттадан оралиқ (бўшлиқ) қолдирган кўринишларда ёзувга чиқариши мумкин. Биринчи ҳолда массив номлари орасига „вергул“, иккинчи ҳолда „нуқтали вергул“ қўйиш керак.

15-§. „ИСКРА-226“ микро-ЭҲМ билан ишлаш

1. Бошқариш пульти. Дастурлар ва бошланғич маълумотларни, шунингдек, тайёргарлик жараёни ва дастурни бажариш жараёнини пульт (клавиатуралар) орқали амалга оширилади. Клавиатура саккизта зонага ажратилган (18-расм).

Биринчи зона. Учта регистрли ушбу зонага рус


8-зона
7-зона
RESET
4-зона
5-зона
6-зона
3-зона
2-зона
1-зона
"Оралиқ" тугмаси
Уловчи
Р
Л
SHIFT LOCK
SHIFT
CR/LF
EDIT
RECALL
INSERT
DELETE
ERASE
RUN
CLEAR
LIST
PRINT
LOAD
SAVE
BACK SPACE
LINE ERASE
CON-TINUE
HALT/STEP
ARC
TAN(
SIN(
COS(
EXP(
LOG(
SQR(
ABS(
STMT
NUMBER

18- расм.

ва лотин шрифтлари, киритилаётган сатрни кейингисига ўтказиш CR/LF — Carrlage Returm/LINE FEED (кареткaнинг-қайтиши/сатрни ўтказиш ҳамда дастур сатр номери STMT NUMBER телетайп тугмаларини ўз ичига олади. Рус алифбосидан лотин алифбосига ўтиш 1-зона тугмаларининг чап томонида жойлашган уловчи орқали амалга оширилади. Ушбу зона тугмалари ёрдамида фақат белгилар ва ҳарфларнигина киритилмай, БЕЙСИК-га тегишли хизматчи сўзларни киритиш ҳам мумкин. Ушбу регистрга ўтиш SHITF ёки SHIFT LOCK тугмалари орқали бажарилади. Агар SHIFT тугма билан яна бирорта тугмани терилса (шу зонага тегишли тугма), у ҳолда дисплей экранига шу тугмада ёзилган махсус хизматчи сўз ёзилади. SHIFT LOCK тугма доимий равишда махсус хизматчи сўзларга ўтишни таъминлайди. Охирги тугмани босилса, унинг юқорисида жойлашган яшил лампочка ёнади. Уни ўчириш SHIFT тугмасини босиш билан амалга оширилади. Оддий тугмалардан ташқари CR/LF тугмаси бир сатрдан бошқа сатрга ўтишни таъминлаш учун, киритилиб бўлинган дастур ишини бошланишини таъминлаш учун қўлланилади. STMT NUMBER тугма дастурни ўнтадан қилиб номерлаш учун қўлланилади.

Иккинчи зона. Бу зонага тегишли тугмалар гуруҳига иккита матнни таҳлил қилиш ва иккита ҳисобни бошқариш тугмалари киради.

Учинчи зона. Бу зонадаги тугмалар рақамли маълумотларни териш учун қўлланилади. Улар биринчи зона тугмаларининг юқори қаторида жойлашган мос тугмаларни қайтаради. Лекин улар билан ишлаётганда регистрдан регистрга ўтиш керак бўлмайди. Шу билан ундан фойдаланиш анча қулайлашади.

Тўртинчи зона. Бу зона олтитадан кўп қўлланиладиган операторларга тегишли махсус хизматчи сўзларга мос тугмаларни ўз ичига олади. Улар RUN, CLEAR, LIST, PRINT, LOAD, SAVE лардан иборат.

Бешинчи зона. Бу зона тугмалари арифметик амалларнинг ишораларини териш учун мўлжалланган. SHIFT тугма эса элементар функцияларнинг номини териш учун мўлжалланган.

Олтинчи зона. Ушбу зона тугмалари терилган дастурнинг тегишли матнларини таҳлил қилиш учун қўлланилади.

Еттинчи зона. Бу зона иккита регистр ва 16 тугмага эга бўлиб, булар ёрдамида 32 та махсус функцияни ишлатиш мумкин.

Саккизинчи зона. Курсорни таҳлил пайтида керакли жойга суриш учун қўлланилади. Бу тугмалар EDIT тугма босилгандан сўнггина ишлайди.

Клавиатура ўнг қисмининг юқори томонида RESET тугма жойлашган бўлиб, у дастур бажарилишини авария ҳолатида тўхтатиш учун мўлжалланган. Уни босилганда бошқариш машина билан ишлаётган кишига берилади. Бажарилаётган дастур матни ва берилган маълумотлар ЭҲМ оператив хотирасида сақланади.

Дастур матнини таҳлил қилиш усуллари. Дастурларни киритилаётганда унинг сатрларини ўзгартиришга ва тўғрилашга тўғри келади. Бу масалани тезликда ҳал этиш учун иккинчи, олтинчи ва саккизинчи зона тугмалари қўлланилади. Таҳлил қилиш бўйича асосий амалларни кўриб ўтамиз:

1. Сатрни терилаётганда тўғрилаш. Агар дастур сатрини терилаётганда хатоликка йўл қўйилса, уни тўғрилашнинг энг осон йўли уни ўчириб ташлашдан иборат. Бунинг учун BACKSPACE тугма ишлатилади. Бу тугманинг ҳар гал босилиши биттадан белгини ўчиради. Хато белгиларни ўчирилгандан кейин уни тўғриси билан алмаштирилади.

2. EDIT (таҳлил қилиш) режимига ўтиб тўғрилаш. Матн терилаётганда EDIT тугма босилса, машина таҳлил қилиш режимига ўтади. Бу ҳолатда курсорни мос тугмалар билан кўрсатилган томонларга ўзгартириш мумкин, белгиларни олиб ташлаш, сатрни суриш ва янги белгиларни қўйиш, сатрнинг бир қисмини ўчириш мумкин.

Белгини ўчириб ташлаш курсорни керакли белги тагига олиб келиб, DELETE тугмани босиш билан амалга оширилади. Курсордан ўнг томонда жойлашган сатр матни битта хонага чапга сурилади, бунда белгиланган белги ўчирилади.

Қолдирилган белгини киритиш учун аввал курсор керакли жойга сурилади ва INSERT тугма босилади. Бунда курсор билан белгиланган жойдан бошлаб матннинг ўнг қисми чапга бир хонага сурилади ва янги белги учун жой очилади. INSERT тугмани бир неча марта босилса, мос ҳолда сатр шунча хонага сурилади.

Сатрнинг бир қисмини ўчириш учун курсор керакли жойга олиб келинади ва ERASE тугма босилади. Бунда курсордан бошлаб то сатр охиригача ўчирилади.

Сатрнинг ҳаммасини ўчириш LINE ERASE тугмани босиш йўли билан бажарилади.

3. Оперативхотирадаги дастурнинг сатрини таҳлил қилиш. Бунинг учун керакли сатр чақирилади. Чиқариш учун таҳлил қилинаётган сатр номери терилади, сўнгра EDIT ва RECALL тугмалари босилади. Шундан кейин экранда талаб қилинган сатр матни пайдо бўлади. Сўнгра юқорида айтилган барча тавсифланган амаллар бажарилади. Таҳлил қилингандан кейин CR/LF тугма босилади ва сатр эски ўрнига ёзилади.

4. Дастурга янги сатр қўйиш. БЕЙСИКда стандарт номерлаш қабул қилинган. Бу керак бўлган пайтда янги сатрни дастурга киритиш имкониятини беради.

Янги сатрни киритиш учун аввал иккита сатр орасидаги сонга мос номер терилади ва унинг матни ёзилади. Сўнгра CR/LF тугма босилади.

5. Дастурдан сатрни олиб ташлаш. Дастурдан бирорта сатрни олиб ташлаш учун унга мос номер терилади ва CR/LF тугма босилади.

II. ЭҲМ ни ишлашга тайёрлаш

„ИСКРА-226“ Микро-ЭҲМ да ишлашни бошлаш учун аввал процессор электр манбага уланади, сўнгра эластик дискни диск юритувчи қурилма манбага уланади. Агар натижани ёзувга чиқариш мўлжалланган бўлса, булардан кейин ёзувга чиқариш қурилмаси манбага уланади.

Машина ишга тайёр бўлганидан кейин БЕЙСИК тили ёзилган эластик дискни диск юритувчи қурилманинг мос ерига қўйилади. Сўнгра математик таъминот хотирага киритилади.

Диск ўрнатилгандан кейин қуйидагича иш тутилади:

а) LOAD F # 1 (ёки 0, 2, 3 — чунки диск тўртта зонадан иборат) <CR/LF> терилади. Бир неча минутдан кейин экранда BASIC 01.12.0382 зув пайдо бўлади (тилнинг турли вариантига кўра рақамлар турлича бўлиши мумкин);

б) RUNI <CR/LF> буйруғи терилади. Бир неча секунддан кейин READY: — ёзув ҳосил бўлади (у машинанинг ишлашга тайёрлигини ифодалайди). Энди дастур киритиб, ЭҲМ да ишлаш мумкин.

Агар бошқа дискдаги тайёр дастурни фойдаланиш керак бўлса, LOAD DCF (ёки DCR) „Дастурнинг номи" каби буйруқ берилади.

Кўп қўлланиладиган буйруқлар

1) SELECT LIST 0C — хотирадаги дастурни ёзувга чиқариш.
2) SELECT LIST 0 5 — дисплейга қайтиш.
3) SELECT ERINT 0 C — натижани ёзувга чиқариш.
4) LIST/0C <PR/LF> — дастурни ёзиш.
5) LIST S — дастурни дисплейга чиқариш.
6) LIST — дастурни 20 тадан сатри билан дисплейга чиқариш.

БЕЙСИК дастурлаш тилида қўлланиладиган асосий инглиз хизматчи сўзларининг луғати

Хизматчи сўз	Уқилиши	Таржимаси	
		ўзбекча	русча
1	2	3	4
AND	энд	ва	и
CHAR(ACTER)	чэрэктэ	символли	символьный
CLEAR	клиэ	тозалаш	очистить
DATA	дейт	берилганлар	данные
DEFINITION	дефинишн	таъриф	определение

1	2	3	4
DELETE	дилит	ўчирмоқ	вычеркивать
DIM (ENSION)	димэншн	ўлчов	размерность
EDIT	эдит	таҳрир қилиш	редактировать
ELSE	элс	акс ҳолда	иначе
END	энд	охири	конец
ERASE	ирэйз	ўчирмоқ	стирать
ERROR	эрро	хато	ошибка
FOR	фо	учун	для
GOTO	гоуту	га ўт	идти к
IF	иф	агар	если
INPUT	инпут	киритиш	ввод
INSERT	инжет	орасига қўймоқ	вставить
LET	лет	бўлсин	пусть
LINE	лайн	чизиқ	линия
LIST	лист	рўйхат	список
NEXT	некст	навбатдаги	следующий
NOT	нот	эмас	не
OR	ор	ёки	или
OUTPUT	аутпут	чиқармоқ	вывод
PLOT	плот	чизмоқ	чертить
PRINT	принт	чоп қилмоқ, ёзувга чиқармоқ	печатать
READ	рид	ўқимоқ	читать
RECALL	рикол	чақирмоқ	отзывать
REM (ARK)	римак	изоҳ	примечание
REPEAT	рипит	такрорламоқ	повторить
RETURN	ритён	қайтиш	возврат
ROUND	раунд	яхлитламоқ	округлить
RUN	ран	юргизиш, ишга тушириш	пуск
SELECT	селект	танламоқ	выбирать
STEP	стэп	қадам	шаг
STOP	стоп	тўхтатиш	остановить
THEN	зен	у ҳолда	то
TO	ту	гача	до
VAR (IABLE)	вэариэбл	ўзгарувчи	переменная

V БОБ. ХАТОЛИКЛАР НАЗАРИЯСИ

1-§. Хатоликлар манбаи. Абсолют ва нисбий хатоликлар

Инсониятнинг амалий фаолияти катталикларни ўлчаш натижаси бўлган сон билан боғлиқдир. Турли ҳисобларда учрайдиган миқдорларни ўлчаш кўпинча аниқ бўлмай, бирор аниқликда бўлади. Масалан, узунликларни 1 мм ёки 1 см, ҳароратни 0,1 градусгача, тезликни

1 см/с аниқликда ўлчанади. Бундай усуллар билан аниқланган сонлар устида турли амаллар бажаришда хатоликларга йўл қўйилади. Бундай хатоликлар даражасини аниқлаш билан тақрибий ҳисоб шуғулланади. Биз қуйида шу назария билан қисқача танишамиз.

Хатоликлар манбаи қуйидагилардир:

1. Реал жараённинг математик тавсифланиши ноаниқлигидан келиб чиқадиган хатолик — математик модел хатолиги дейилади.

2. Бошланғич маълумотларнинг ноаниқлиги туфайли юзага келадиган хатолик — бошланғич маълумотлар хатолиги дейилади.

3. Масалани ечишда қўлланилаётган усулларнинг ноаниқлигидан чиқадиган хатолик — усул хатолиги дейилади.

4. Ҳисоблашларда вужудга келадиган хатоликлар — ҳисоблаш хатолиги дейилади

5. Яхлитлаш натижасида ҳосил бўладиган хато — йўқотиб бўлмайдиган хатолик деб аталади.

Баъзан математик модел ва бошланғич маълумотлар хатоликларини тузатиб бўлмайдиган (ёки йўқотиб бўлмайдиган) хатоликлар дейилади.

1-таъриф. Ҳисоблашларда қатнашаётган тақрибий a сон билан шу соннинг аниқ қиймати A орасидаги фарқ $(A-a)$ хатолик дейилади.

Агар $A>a$ бўлса, хатолик мусбат ва $A<a$ бўлса, хатолик манфий бўлади Хатоликларни баҳолаш тўғри бўлиши учун абсолют хатолик тушунчаси киритилади.

2-таъриф. Хатоликнинг модулига a тақрибий соннинг абсолют хатоси дейилади, яъни

$$\Delta a = |A-a|. \tag{1}$$

3-таъриф. Тақрибий a сон абсолют хатолигининг шу сон модулига нисбати a тақрибий соннинг нисбий хатолиги дейилади, яъни

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|a|}. \tag{2}$$

Аниқ A сон номаълум бўлганлиги сабабли абсолют ва нисбий хатоликлар ҳам номаълум бўлади, шунинг учун хатоликнинг чегараси кўрсатилади.

4-таъриф. $|A-a|\leqslant h$ тенгсизликни қаноатлантирувчи h катталик абсолют хатоликнинг чегараси дейилади.

5-таъриф. $\frac{|A-a|}{|a|} \leqslant \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ε сони **нисбий хатоликнинг чегараси** дейилади.

Нисбий хатоликнинг чегараси кўпинча фоизларда ифодаланади.

h ва ε сонлари имкони борича кичик қилиб олинади. Масалан, $A=\pi$ бўлиб, $a=3,14$ каби қабул қилинган бўлса, $h=0,002$ деб олиниши мумкин. У ҳолда $\varepsilon=0,07\%$ бўлади.

Тақрибий a соннинг абсолют ва нисбий хатоликлари чегаралари таърифларига кўра, $A=a\pm h$ ва $A=a(1\pm\varepsilon)$ каби ёзиш мумкин.

1-**мисол.** Тақрибий қиймати $a=0,67$ бўлган $A=2/3$ сони нисбий хатолигининг чегарасини топинг.

Ечиш. $|2/3-0,67|=0,01/3$ бўлганидан $h=0,0034$ деб оламиз. У ҳолда $\varepsilon=\frac{0,0034}{0,67}$ ёки $\varepsilon=0,0051=0,51\%$ ҳосил бўлади.

2-**мисол.** 24,6 — бирор соннинг 0,4% нисбий хатоликдаги тақрибий қиймати бўлса, бу яқинлашиш қандай аниқликда бажарилган? A сон қандай чегараларда жойлашган?

Ечиш. Бизга $\varepsilon=0,4\%$, $a=24,6$ берилган. У ҳолда $a.\varepsilon=24,6.0,004=0,0984$ ҳосил бўлади. Соддалик учун $h=0,1$ деб оламиз. Бундан $A=24,6\pm0,1$ ёки $24,5<A<24,7$.

2-§. Қийматлари рақам ва ишончли белги тушунчалари

1-таъриф. Ўнли каср кўринишида ёзилган соннинг чапдан нолдан фарқли рақамдан бошланган барча рақамларига **қийматли рақамлар** дейилади.

Масалан, 0,003020 сони тўртта: 3, 0, 2, 0 қийматли рақамларга эга; 25,5605 сони олтита: 2, 5, 5, 6, 0, 5 қийматли рақамга эга. 500 сони учта 5, 0, 0 қийматли рақамга эга; 0,00001 сони биргина: 1 қийматли рақамга эга ва ҳоказо.

2-таъриф. Агар берилган тақрибий соннинг абсолют хатоси n-қийматли рақами хона бирлигининг ярмидан ошиб кетмаса, бу соннинг бошланғич n та қийматли рақами **ишончли** дейилади.

Шундай қилиб, A аниқ сонни алмаштирувчи a тақрибий сон маълум бўлса, у ҳолда

$$\Delta a=|A-a|\leqslant\frac{1}{2}\cdot10^{m-n+1}$$

бўлиб, бу соннинг бошланғич n та a_m, a_{m-1}, ..., a_{m-n+1} рақамлари қийматли бўлади.

Масалан, $A = 35{,}97$ аниқ сон учун $a = 36{,}00$ тақрибий сон учта ишончли белги билан яқиндир, чунки $|A - a| = 0{,}03 \leqslant \frac{1}{2} \cdot 0{,}1$.

1-мисол. Қуйидаги тақрибий сонлардаги ишончли белгилар сонини аниқланг:

а) $x = 3{,}14 \pm 0{,}01$ б) $y = 2{,}718 \pm 0{,}006$.

Ечиш. а) 3,14 тақрибий соннинг юздан бирлар хонасида жойлашган 4 рақами ишончсиз, чунки $0{,}005 < 0{,}01$. Равшанки, олдинда келган иккита 3 ва 1 рақамлари ишончлидир.

б) 2,718 тақрибий соннинг охирида турган 8 рақами ишончсиз бўлиб, қолганлари ишончли бўлади (чунки, $0{,}0005 < 0{,}006$).

2-мисол. Агар 2,768 сонидаги барча рақамлар ишончли бўлса, унинг абсолют хатолигининг чегараси учун нима олиниши мумкин?

Ечиш. Берилган тақрибий соннинг барча рақамлари ишончли бўлганидан, унинг охирги рақамининг хонаси ярмига боғлиқ равишда хатолик чегараси аниқланади. Охирги рақам хона бирлиги: 0,001. Шунинг учун 0,0005 сондан катта бўлмаган ҳар қандай сон берилган 2,768 тақрибий сони учун абсолют хатолик чегараси бўла олади.

3-§. Яхлитлаш қоидаси

Кўпгина ҳолларда берилган тақрибий сонларни яхлитлашга тўғри келади, яъни уни ишончли белгилар сони кам бўлган тақрибий сон билан алмаштиришга тўғри келади. Бунда яхлитлаш хатолиги минимал бўлишига ҳаракат қилинади.

Берилган тақрибий сонларни яхлитлаш қоидаси қуйидагича. Сонни n та қийматли рақамгача яхлитлаш учун, n-қийматли рақамдан кейинги барча рақамлар ташлаб юборилади ёки агар керак бўлса, улар ноллар билан алмаштирилади. Бунда:

1) агар ташлаб юборилган рақамларнинг биринчиси 5 дан кичик бўлса, у ҳолда қолган ўнли белгилар ўзгаришсиз қолдирилади;

2) агар ташлаб юборилаётган рақамларнинг биринчиси 5 дан катта бўлса, у ҳолда қолган рақамларнинг охиргисига 1 қўшилади,

3) агар ташлаб юборилаётган рақамларнинг биринчиси 5 га тенг бўлса, у ҳолда ташланаётган рақамларга эътибор қилинади, яъни улар ноллардан иборат бўлмаса, қолган охирги рақамга бир қўшилади; агар таш-

ланаётган рақамлар ноллардан иборат бўлса, қолаётган охирги рақамга қараб, жуфт бўлса ташлаб юборилади, тоқ бўлса унга 1 қўшилади.

Мисол. $\pi \approx 3{,}1415926535\ldots$ тақрибий сонни учта қийматли рақамгача яхлитланг.

Ечиш. Яхлитлаш кетма-кетлиги қуйидагича бўлиши мумкин:

$$3{,}1415926535 \approx 3{,}141592654 \approx 3{,}14159265 \approx 3{,}1415926 \approx$$
$$\approx 3{,}141593 \approx 3{,}14159 \approx 3{,}1416 \approx 3{,}142 \approx 3{,}14.$$

Ушбу мисолдаги охирги кетма-кет учта тақрибий соннинг абсолют хатолиги мос равишда $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ ва $0{,}5 \cdot 10^{-2}$ дан катта эмас.

4-§. Хатоликнинг тарқалиши

Юқорида биз сонларни яхлитлашда ҳосил бўладиган хатоликлар ва уларни баҳолаш ҳақида тўхтадик. Бундай хатоликлар турли арифметик амаллар натижаларини таҳлил қилинаётганда ҳисобга олиниши керак. Шунинг учун тақрибий сонлар устида турли амаллар бажарганда хатолик қандай тарқалиши муҳим аҳамият касб этади. Қуйида шулар ҳақида тўхталамиз.

Йиғиндининг хатолиги

1-**теорема**. *Тақрибий сонлар алгебраик йиғиндисининг абсолют хатолиги, шу сонларнинг абсолют хатоликлари йиғиндисидан катта эмас.*

Исбот. Берилган тақрибий сонлар $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лардан иборат бўлсин. Уларнинг алгебраик йиғиндисини кўрайлик:

$$u = x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n.$$

Равшанки,

$$\Delta u = \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \pm \ldots \pm \Delta x_n,$$

бундан

$$|\Delta u| \leqslant |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \ldots + |\Delta x_n|. \qquad (1)$$

Теорема исбот қилинди. Тақрибий сонларнинг алгебраик йиғиндисининг чегаравий абсолют хатолиги учун $h_u = h_{x_1} + h_{x_2} + \ldots + h_{x_n}$ (2) ни олиш мумкин.

2. Айирманинг хатолиги

Икки x_1 ва x_2 тақрибий соннинг $u = x_1 - x_2$ айирмасини кўрайлик. Юқорида кўрилган йиғиндининг чегаравий абсолют хатолиги формуласи (2) га кўра, айирманинг чегаравий абсолют хатолиги

$$h_u = h_{x_1} + h_{x_2} \tag{3}$$

каби бўлади, яъни айирманинг чегаравий абсолют хатолиги айрилувчи ва айирувчиларнинг чегаравий абсолют хатоликлари йиғиндисига тенг.

Бу ердан айирманинг нисбий чегараси учун

$$\varepsilon_2 = \frac{h_{x_1} + h_{x_2}}{|x_1 - x_2|} \tag{4}$$

ни олиш мумкин. Формуладан кўриниб турибдики, агар x_1 ва x_2 сонлар яқин жойлашган бўлса, хатоликлар жуда кичик бўлса ҳам, чегаравий нисбий хатолик етарлича катта бўлиши мумкин.

3. Кўпайтманинг хатолиги

2-теорема. *Нолдан фарқли тақрибий сонлар кўпайтмасининг нисбий хатолиги шу сонларнинг нисбий хатоликлари йиғиндисидан катта эмас.*

Исбот. $u = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ бўлсин. Содда бўлсин учун берилган тақрибий сонлар мусбат дейлик. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\ln u = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n.$$

$\ln x \approx d \ln x = \frac{\Delta x}{x}$ тақрибий формулани қўллаб,

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \dots + \frac{\Delta x_n}{x_n}$$

ни ҳосил қиламиз. Охирги ифодани абсолют катталиги бўйича баҳоласак:

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| < \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \dots + \left|\frac{\Delta x_n}{x_n}\right|$$

ҳосил бўлади ёки

$$\delta(u) \leqslant \delta(x_1) + \delta(x_2) + \dots + \delta(x_n). \tag{5}$$

Натижа. Кўпайтманинг чегаравий нисбий хатолиги учун тақрибий сонларнинг чегаравий нисбий хатоликлари йиғиндисини олиш мумкин, яъни

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2} + \dots + \varepsilon_{x_n}. \tag{6}$$

4. Бўлинманинг хатолиги

Теорема 3. *Бўлинманинг нисбий хатолиги бўлинувчи ва бўлувчиларнинг нисбий хатоликлари йиғиндисидан катта эмас.*

Исбот. $u = x/y$ бўлсин. У ҳолда $\ln u = \ln x - \ln y$ ва

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$$

бўлиб, бу ердан

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

ёки $\delta(u) \leqslant \delta(x_1) + \delta(x_2)$ бўлади.

Натижа. Бўлинманинг чегаравий нисбий хатолиги учун бўлинувчи ва бўлувчининг чегаравий нисбий хатоликлари йиғиндисини олиш мумкин:

$$h_u = h_{x_1} + h_{x_2}. \tag{7}$$

5. Даражанинг хатолиги

$u = x^m$ (m — натурал сон) бўлсин, у ҳолда $\ln u = m \ln x$ ва

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| = m\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$$

бўлиб, бундан

$$\varepsilon_n = m \cdot \varepsilon_x \tag{8}$$

каби ёзиш мумкин, яъни m-даражали соннинг чегаравий нисбий хатолиги тақрибий соннинг чегаравий нисбий хатолигидан даража кўрсаткичи m марта катта.

6. Илдизнинг хатолиги

$u = \sqrt[m]{x}$ бўлсин, у ҳолда $u^m = x$. Даражанинг чегаравий нисбий хатолиги формуласи (8) га кўра

$$\varepsilon_u = \frac{1}{m} \cdot \varepsilon_x, \tag{9}$$

яъни m-даражали илдизнинг чегаравий нисбий хатолиги илдиз остидаги тақрибий соннинг чегаравий нисбий хатолигидан илдиз кўрсаткичи m марта кичик.

Мисол. Қуйидаги функция қийматини ҳисоблашда ҳосил бўладиган хатоликларни топинг:

$$x = \frac{A^2 \cdot B^3}{K}, \text{ бу ерда } A = 28{,}3 \pm 0{,}02, \quad K = 0{,}678 \pm 0{,}003,$$

$$B = 7{,}45 \pm 0{,}01.$$

Ечиш. Қуйидагиларни аниқлаймиз: $A^2 = 800{,}9$; $B^3 = 413{,}5$; $K = 0{,}8234$, булардан фойдаланиб,

$$x = \frac{800{,}9 \cdot 413{,}5}{0{,}8234} = 402200 = 4{,}02 \cdot 10^6.$$

Сўнгра қуйидагиларга эга бўламиз: $\varepsilon_A = 0{,}02/28{,}3 = 0{,}00071$; $\varepsilon_B = 0{,}01/7{,}45 = 0{,}00135$; $\varepsilon_K = 0{,}003/0{,}678 = 0{,}00443$, булардан $\varepsilon_x = 2 \cdot \varepsilon_A + 3 \cdot \varepsilon_B + 0{,}5 \cdot \varepsilon_K = 0{,}00142 + 0{,}00405 + 0{,}00222 = 0{,}77\ \%$. $h_x = 4{,}02 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0077 = 3{,}1 \cdot 10^3$. Шундай қилиб, $x = 4{,}02 \cdot 10^5 \pm 3{,}1 \cdot 10^3$; $\varepsilon_x = 0{,}77\%$.

5- §. Хатоликларнинг умумий формуласи

Аргументларнинг тақрибий қийматлари учун функция қийматининг йўқотиб бўлмайдиган хатолигини баҳолаш масаласини кўрайлик. Бизга

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

дифференциалланувчи функция берилган бўлиб, унинг аргументларининг аниқ қийматлари маълум бўлмай, фақат тақрибий қийматлари маълум бўлсин Аргументларнинг абсолют хатоликлари Δx_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ каби бўлсин. У ҳолда функция қийматининг абсолют хатолиги

$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) -$$
$$- f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$$

бўлади. Δx_i қийматлар жуда кичик бўлганлигидан, амалда уларнинг кўпайтмалари, квадратлари ва юқори даражаларини ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Шунинг учун

$$|\Delta u| \approx |df(x_1, x_2, \ldots, x_n)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|.$$

Шундай қилиб,

$$|\Delta u| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot |\Delta x_i| \qquad (1)$$

ёки

$$h_u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot h_{x_i} \qquad (2)$$

(1) тенгсизликнинг иккала томонини u га бўлиб, нисбий хатоликни баҳоласак,

$$\delta(u) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}{u} \cdot |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| \cdot |\Delta x_i| \qquad (3)$$

ҳосил бўлади, шунинг учун чегаравий нисбий хатолик

$$\varepsilon_u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln u\right| \cdot h_{x_i} \qquad (4)$$

каби бўлиши мумкин.

Мисол. Цилиндр асосининг радиуси $R = 12{,}3$, баландлиги $H = 20{,}4$ см мос равишда 0,01 ва 0,02 аниқликда ўлчанган бўлса, цилиндр ҳажмини ҳисоблашда ҳосил бўладиган хатоликларни топинг.

Ечиш. (2) формулага кўра цилиндр ҳажмини ҳисоблашда ҳосил бўладиган хатоликни аниқлаймиз. Бунинг учун цилиндр ҳажмини ифодаловчи $V = \pi R'H$ функциядан R, H ва π катталиклар бўйича хусусий ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi \cdot R \cdot H = 1576{,}78; \quad \frac{\partial V}{\partial H} = \pi \cdot R^2 = 475{,}05;$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 \cdot H = 3086{,}32.$$

$\pi \approx 3{,}14$ деб олиб, унинг барча рақамлари ишончли дейлик. У ҳолда π катталикнинг абсолют хатолиги учун $h_\pi = 0{,}0016$ ни олишимиз мумкин. Шунинг учун

$$h_V = \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right| \cdot |h_\pi| + \left|\frac{\partial V}{\partial R}\right| \cdot |h_R| + \left|\frac{\partial V}{\partial H}\right| \cdot h_H| = 4{,}988 + 15{,}758 + 9{,}501 = 30{,}197 \approx 30{,}2 \text{ см}^3.$$

Демак,

$$V = \pi \cdot R^2 H = 9691 \text{ см}^3 \pm 30{,}2 \text{ см}^3.$$

Изланаётган чегаравий нисбий хатолик

$$\varepsilon_V = \frac{h_V}{V} = \frac{30{,}2}{9691} \approx 0{,}0031 = 0{,}31\%$$

каби бўлади.

6-§. Хатоликлар назариясининг тескари масаласи

Амалда хатоликларнинг тескари масаласи ҳам муҳим касб этади. Уни қуйидагича ифодалаш мумкин: функциянинг хатолиги берилган катталикдан ошиб кетмаслиги учун аргументлар хатолиги қандай бўлиши керак (қандай олиниши керак)? Бу масала математик аниқланмаган масаладан иборат. Чунки биргина маълум бўлган функциянинг хатолигига кўра n та аргументнинг хатолиги топилиши керак. Ушбу масаланинг содда ечилиши тенг таъсир принципига кўра ҳал қилинади. Бу принципга биноан қуйидаги ҳоллар қаралади:

1. $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциянинг чегаравий нисбий хатолиги ҳосил бўлишига аргумент чегаравий абсолют хатоликлари тенг таъсир этсин, бошқача айтганда, улар ўзаро тенг бўлсин, яъни

$$h_{x_1} = h_{x_2} = \ldots = h_{x_n}.$$

5-§ даги (2) формулага кўра

$$h_{x_i} = \frac{h_u}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|} \quad (i = 1;\ 2;\ \ldots;\ n). \tag{1}$$

2. Функция хатолиги ҳосил бўлишида барча аргументларни ўлчаш аниқлиги бир хил бўлсин, яъни барча чегаравий нисбий хатоликлар ўзаро тенг бўлсин:

$$\varepsilon_{x_1} = \varepsilon_{x_2} = \ldots = \varepsilon_{x_n}.$$

Бундан

$$\frac{h_{x_1}}{|x_1|} = \frac{h_{x_2}}{|x_2|} = \ldots = \frac{h_{x_n}}{|x_n|} = K,$$

бу ерда K — нисбатларнинг умумий қиймати. Шунинг учун

$$h_{x_i} = K \cdot |x_i| \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Бу қийматларни 5·§ даги (2) формулага қўйиб

$$h_a = K \cdot \sum_{i=}^{n} \left| x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|$$

ни ҳосил қиламиз, демак,

$$K = \frac{h_u}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|}.$$

Шундай қилиб, натижада

$$h_{x_i} = \frac{|x_i|\ h_a}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left| x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (2)$$

формулага эга бўламиз.

3. $y = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ функциянинг чегаравий абсолют хатолиги ҳосил бўлишида барча хусусий $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot h_{x_i}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ дифференциаллар тенг таъсир этсин дейлик, яъни

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| h_{x_1} = \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| \cdot h_{x_2} = \ldots = \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \cdot h_{x_n} = \frac{h_u}{n}$$

бўлсин. Демак, 5·§ даги (2) формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$h_{x_i} = \frac{h_a}{n \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|}. \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (3)$$

Мисол. Цилиндр асосининг радиуси $R \approx 2$ м, баландлиги $H \approx 3$ м. Цилиндр ҳажми V ни 0,1 м³ аниқликда ҳисоблаш учун унинг R ва H ўлчамлари қандай аниқликда топилиши керак?

Ечиш. $V = \pi \cdot R\ H$ ва $h_V = 0{,}1$ м³ маълум. $R = 2$ м; $H = 3$ м; $\pi = 3{,}14$ деб тақрибан $\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 \cdot H = 12$; $\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi \cdot R \cdot H = 37{,}7$; $\frac{\partial V}{\partial H} = \pi \cdot R^2 = 12{,}6$ қийматларга эга бўламиз. Бундан $n = 3$ эканлигини эътиборга олиб, (3) формулага кўра қуйидагиларни топамиз:

$$h_\pi = 0{,}1/3 \cdot 12 < 0{,}003; \qquad h_R = 0{,}1/3 \cdot 37{,}7 < 0{,}001;$$

$$h_H = 0{,}1/3 \cdot 12{,}6 < 0{,}003.$$

Демак, $h_x - h_H < 0{,}003$ ва $h_x < 0{,}001$ каби олиниши керак экан

Текшириш саволлари

1. Хатоликлар манбаи нимадан иборат?
2. Қандай хатоликларни биласиз?
3. Абсолют ва нисбий хатоликларни таърифланг.
4. Чегаравий абсолют ва чегаравий нисбий хатоликлар деганда нимани тушунасиз?
5. Тақрибий сонларнинг айирмаси ва йиғиндисининг хатоликларини айтинг.
6. Тақрибий сонларнинг кўпайтмаси ва бўлинмасининг хатоликларини таърифланг.
7. Тақрибий соннинг илдизи ва даражасининг хатоликлари қандай аниқланади?
8. Хатоликни қандай қилиб аниқ ҳисобга олиш мумкин?

Машқлар

1. Қуйида берилган x ва y тақрибий сонларнинг йиғиндиси ва айирмасини топинг ва натижанинг хатолик чегараларини аниқланг:

а) $x = 71{,}367 \pm 0{,}0004$, $y = 8{,}35288 \pm 0{,}00005$,

б) $x = 3{,}6 \pm 0{,}05$, $y = 32{,}82 \pm 0{,}02$.

2. Қуйида берилган сонларнинг кўпайтмаси ва бўлинмасини топинг ва натижа хатолигини аниқланг:

а) $x = 8{,}76 \pm 0{,}03$, $y = 3{,}2 \pm 0{,}05$;

б) $x = 0{,}78 \pm 0{,}001$, $y = 0{,}621 \pm 0{,}0002$.

3. Радиуслари $R = 23{,}3 \pm 0{,}02$ см; $r = 16{,}4 \pm 0{,}05$ см ва ясовчиси $l = 8,$[illegible] $\pm 0{,}01$ см бўлган ва мос равишда 0,02; 0,05; 0,01 хатоликларга эга бўлган кесик конуснинг тўла сирти S ни ҳисоблашда ҳосил бўладиган чегаравий абсолют ва чегаравий нисбий хатоликларни топинг. $\pi \approx 3{,}14$ каби олиб, барча рақамлар ишончли деб ҳисобланг.

4. Кесик конуснинг радиуслари $R = 27{,}6$ см, $r = 10{,}8$ см, баландлиги $H = 35{,}2$ см ва $\pi \approx 3{,}14$. Кесик конус ҳажми V ни 0,2 см³ аниқликда ҳисоблаш учун R, r, H катталикларни қандай абсолют ва нисбий хатоликларда аниқлаш керак?

VI БОБ. АЛГЕБРАНИНГ СОНЛИ УСУЛЛАРИ

1-§. Бир номаълумли алгебраик ва трансцендент тенгламаларни тақрибий ечиш усуллари

1-таъриф. Чап томони n-даражали кўпҳаддан иборат ушбу:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_nx + A = 0 \qquad (1)$$

ифода бир номаълумли алгебраик тенглама дейилади.

Бунда $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — алгебраик тенгламанинг коэффициентларидан иборат, $A_0 \neq 0$.

2-таъриф. Таркибида трансцендент (кўрсаткичли, логарифмик, тригонометрик, тескари тригонометрик ва ҳоказо) функциялар мавжуд бўлган тенгламалар трансцендент тенгламалар дейилади.

Агар алгебраик ва трансцендент тенгламаларнинг чап томонини қисқача $f(x)$ орқали белгиласак, бу тенгламаларни

$$f(x) = 0 \qquad (2)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

3-таъриф. $f(x) = 0$ тенгламанинг чап томонидаги функцияни нолга айлантирувчи $x = x_0$ қиймат бу тенгламанинг илдизи дейилади.

Биздан (2) тенгламани ечиш талаб этилган бўлсин. Бу ерда $f(x)$ қандайдир $a \leqslant x \leqslant b$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз функциядан иборат бўлсин. Берилган тенгламанинг ҳақиқий илдизларини тақрибий ҳисоблаш жараёни икки босқичда бажарилади:

1. Ҳақиқий илдизларни ажратиш. Бу масалани қуйидагича тушунамиз: шундай оралиқларни топиш керакки, уларнинг ҳар қайсисида (2) тенгламанинг ягона, ҳақиқий илдизи ётадиган бўлсин.

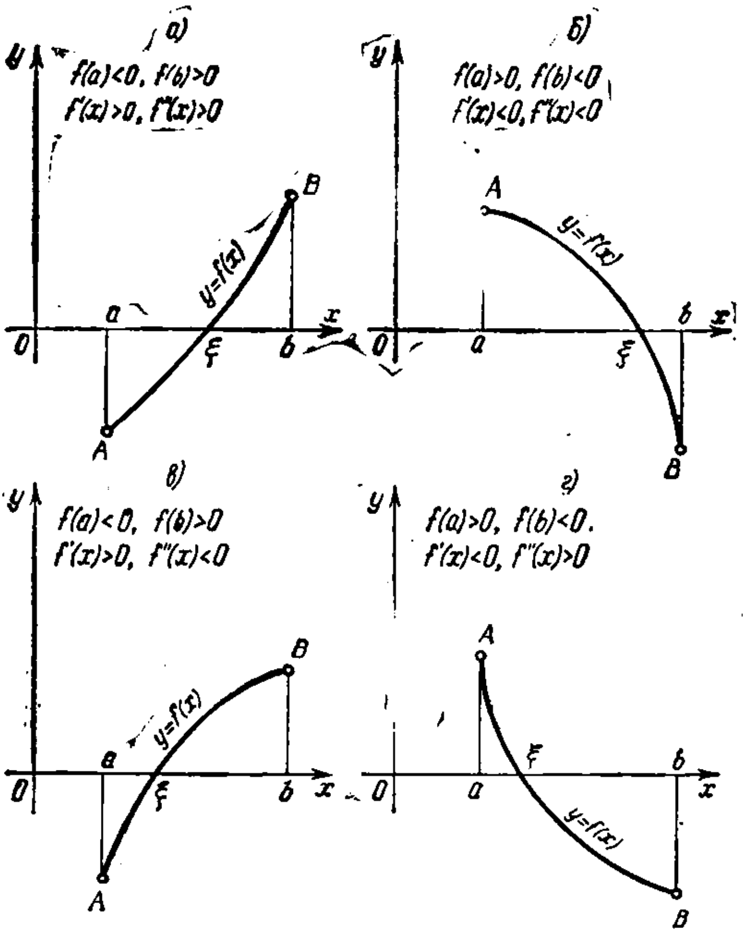
2. Ҳақиқий илдизларни тақрибий ҳисоблаш — илдизни берилган аниқликкача ҳисоблаш.

1-теорема. *Агар узлуксиз $f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг чегара нуқталарида турли ишорали қийматлар қабул қилса, яъни $f(a) \cdot f(b) < 0$ бўлса, у ҳолда ушбу кесма орасида $f(x) = 0$ тенгламанинг ақалли битта илдизи мавжуд бўлади.*

2-теорема. *Агар $[a, b]$ кесмада узлуксиз функция бу кесманинг чегара нуқталарида турли ишорали қийматлар қабул қилиб, ҳосиласи кесма орасида ишорасини сақласа, v ҳолда $[a, b]$ кесмада $f(x) = 0$ тенгламанинг ягона илдизи мавжуд бўлади.*

Келтирилган теоремалардан фойдаланиб, берилган тенгламанинг ҳақиқий илдизлари ажратилади. Бунда тўртта ҳол рўй бериши мумкин (19-расм).

Берилган алгебраик ёки трансцендент тенгламага



19- расм.

мос функция учун чегара нуқталарида турли ишорали қийматлар қабул қиладиган $[a, b]$ кесма топилган бўлса, у ҳолда ушбу тенгламанинг ҳақиқий илдизларини ажратиш масаласини компьютерга юклатиш мумкин. Бунинг учун қуйидаги компьютер дастуридан фойдаланиш мумкин:

```
10 REM—ИЛДИЗЛАРНИ АЖРАТИШ
```

```
20 INPUT „A, B ва H катталикларнинг қийматини киритинг"; A, B, H
30 K = 0
40 X1 = A
50 X2 = X1 + H
60 DEF FN (X) = F (X)
70 Y1 = FNZ (X1)
80 IF X2 < B THEN 170
90 Y2 = FNZ (X2)
100 IF Y1 * Y2 > 0 THEN 130
110 K = K + 1
120 PRINT K; „чи илдиз"; „["; „X1"; „X2";] оралиқда"
130 X1 = X2
140 X2 = X1 + H
150 Y1 = Y2
160 GOTO 80
170 END
```

Энди иккинчи босқични амалга ошириш йўлларини кўрайлик.

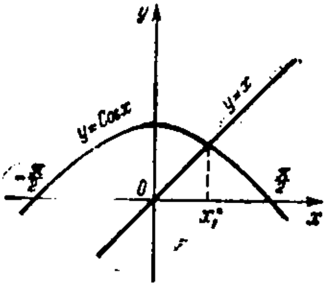
1. **График усул.** $f(x) = 0$ тенгламани ечиш масаласини геометрик нуқтаи назардан $y = f(x)$ функция графиги билан абсциссалар ўқининг кесишган нуқталарини излаш деб тушуниш мумкин. Агар $f(x)$ функциянинг графиги чизилган бўлса, унда тегишли ўлчашлар орқали тенгламанинг изланаётган илдизларини аниқлаш мумкин. Амалда графикни чизиш (функциянинг маълум хоссаларидан ва унинг қийматлар жадвалидан фойдаланиб), шунингдек, кесмаларни ўлчаш (чизғич билан ёки миллиметрли қоғозда) фақат тақрибий бажарилиши мумкин. Тенгламани график усулда ечиш кўп аниқликка эга бўлмайди.

Кўпинча график усул қуйидаги кўринишда қўлланилади: берилган тенгламани иккита функциянинг тенглиги

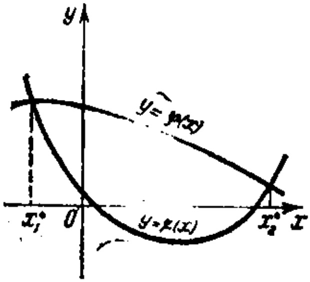
$$\varphi(x) = \psi(x) \qquad (3)$$

кўринишида ёзиб, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларнинг айрим-айрим графиклари ясалади ва сўнгра ўлчаш ёрдами билан графиклар кесишган нуқталарининг абсциссалари топилади (20- расм).

Тенгламаларни тақрибий ечишда ёрдамчи восита сифатида график усул жуда муҳим роль ўйнайди. $\varphi(x)$



20- расм.



21- расм

ва $\psi(x)$ функцияларнинг графикларини билиш кўпинча (3) тенгламанинг ечимлари сонини аниқлашга, „биринчи тақрибийлик“ билан изланаётган илдизлар жойлашган оралиқларни қидириб топишга ва уларнинг „тахминий“ қийматларини аниқлашга имконият туғдиради.

1- мисол. $x-\cos x=0$ тенгламани график усулда ечинг.

Ечиш Аввал тенгламани $x=\cos x$ кўринишда ёзиб оламиз. Энди $y=x$ ва $y=\cos x$ функцияларнинг графигини чизамиз (21-расм). Расмдан кўриниб турибдики, тенглама $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ оралиқда ягона $x^*=0,7$ ечимга эга. $y=x$ ва $y=\cos x$ функцияларнинг хоссаларини ҳисобга олиб, қаралаётган оралиқда берилган тенгламанинг бошқа ечими йўқлигига ишонч ҳосил қиламиз.

2. **Кесмани тенг иккига бўлиш усули.** Узлуксиз функция илдизи ҳақидаги теорема ичма-ич жойлашган $[a_n, b_n]$ кесмалар кетма-кетлиги қуриш йўли билан исботланади.

Аниқлик учун $f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг чап учида манфий, ўнг учида мусбат:

$$f(a)<0, \quad f(b)>0$$

деб фараз этамиз. $[a, b]$ кесманинг ўрта $\xi=\frac{a+b}{2}$ нуқтасини оламиз ва унда $f(x)$ функциянинг қийматини ҳисоблаймиз. Агар $f(\xi)=0$ бўлса, теореманинг тасдиғи исботланган бўлади: биз $[a, b]$ кесмада $f(x)$ нолга айланадиган $c=\xi$ нуқтани топдик. Агар $f(\xi)\neq 0$ бўлса, қуйидагича иш тутамиз: иккита $[a, \xi]$ ва $[\xi, b]$ кесмани қараймиз ва улардан учларида $f(x)$ функция турли ишорали қийматга эга бўлган биттасини танлаймиз Танланган кесмани $[a_1, b_1]$ деб белгилаймиз.

Тузилишига кўра

$$f(a_1)<0,\quad f(b_1)>0.$$

Сўнгра $[a_1, b_1]$ кесманинг ўрта $\xi_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ нуқтасини оламиз ва унда $f(x)$ функциянинг қийматини ҳисоблаймиз. Агар $f(\xi_1)=0$ бўлса, у ҳолда теореманинг исботи тугаган бўлади. $f(\xi_1)\neq 0$ бўлганда эса яна иккита $[a_1, \xi_1]$, $[\xi_1, b]$ кесмани кўрамиз ва улардан учларида $f(x)$ функция турли ишорали қийматларга эга бўлганини танлаймиз Танланган кесмани $[a_2, b_2]$ деб белгилаймиз. Тузилишга кўра

$$f(a_2)<0,\quad f(b_2)>0.$$

Шу жараённи давом эттирамиз. Натижада у ё n-қадамда $f(\xi_n)=0$ бўлгани сабабли узилади, ё чексиз давом этади. Биринчи ҳолда (2) тенглама илдизининг мавжудлиги ҳақидаги масала ҳал бўлади, шунинг учун иккинчи ҳолни кўришимиз лозим.

Жараённи чексиз давом эттириш кесмаларнинг $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, . . . кетма-кетлигига олиб келади. Бу кесмалар ичма-ич қўйилган — ҳар бир навбатдаги кесма барча аввалгиларига тегишли:

$$a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n \tag{4}$$

шу билан бирга

$$f(a_n)<0,\quad f(b_n)>0.$$

Кесмаларнинг узунликлари n номер ортиши билан нолга интилади:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0.$$

Кесмаларнинг чап учларини қараймиз. (4) га кўра, улар монотон камаймайдиган чегараланган $\{a_n\}$ кетма-кетликни ташкил этади. Бундай кетма-кетлик лимитга эга, уни c_1 деб белгилаймиз.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=c_1. \tag{5}$$

(4) га кўра ва тенгсизликларда лимитга ўтиш ҳақидаги теоремага кўра,

$$c_1 \leqslant b_n \tag{6}$$

тенгсизликка эгамиз.

Энди кесмаларнинг ўнг учларини қараймиз. Улар монотон ўсмайдиган чегараланган $\{b_n\}$ кетма-кетликни ташкил этади. Бу кетма-кетлик ҳам лимитга эга. Шу лимитни c_2 деб белгилаймиз:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c_2. \tag{7}$$

(6) тенгсизликка кўра, c_1 ва c_2 лимитлар $c_1 \leqslant c_2$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Шундай қилиб,

$$a_n \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant b_n$$

ва демак,

$$c_2 - c_1 \leqslant b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Бинобарин, $c_2 - c_1$ айирма аввалдан берилган ихтиёрий мусбат сондан кичик. Бу $c_2 - c_1 = 0$, яъни

$$c_1 = c_2 = c \tag{8}$$

эканини англатади.

Топилган c нуқтанинг қизиғи шундаки, у тузилган кетма-кетликнинг барча кесмалари учун ягона умумий нуқтадан иборат. $f(x)$ функциянинг узлуксизлигидан фойдаланиб, унинг (2) тенглама илдизи эканини исбот этамиз.

Маълумки, $f(a_n) < 0$. Узлуксизлик таърифига ва тенгсизликларда лимитга ўтиш мумкинлигига кўра

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0 \tag{9}$$

муносабатга эга бўламиз. Шунга ўхшаш $f(b_n) > 0$ эканини эътиборга олиб,

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0 \tag{10}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. (9) ва (10) лардан

$$f(c) = 0, \tag{11}$$

яъни c (2) тенгламанинг илдизи экани келиб чиқади. Теорема исботланди.

Кесмани тенг иккига бўлиш усули билан ичма-ич қўйилган кесмалар кетма-кетлигини қуриш жараёни (2) тенгламани ечишнинг самарали ҳисоблаш алгоритмидан иборат. Жараённинг n- қадамида

$$a_n < c < b_n \tag{12}$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Бу икки томонлама тенгсизлик кўрсатадики, изланган c илдизни a_n сонками билан, b_n сон эса ортиғи билан кесманинг $\Delta_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ узунлигидан ортмайдиган хатолик билан аниқлайди. n ортиб бориши билан хатолик махражи $q = \frac{1}{2}$ га тенг бўлган геометрик прогрессия қонуни бўйича нолга интилади. Агар талаб этилган аниқлик $\varepsilon > 0$ берилган бўлса, унга эришиш учун

$$N > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \tag{13}$$

шартни қаноатлантирадиган N та қадам бажариш етарли.

2-мисол. Кесмани тенг иккига бўлиш усули билан

$$x - \cos x = 0$$

тенгламанинг [0, 1] кесмадаги илдизи тақрибан аниқлансин

Ечиш. Берилган [0, 1] кесмани 12 марта тенг иккига бўлиш билан тақрибан ечишда ҳосил бўладиган ҳисоблар қуйидаги жадвалда берилган:

n	a_n	b_n	$\xi_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(\xi_n)$
0	0,00000	1,00000	0,50000	−0,37758
1	0,50000	1,00000	0,75000	+0,01831
2	0,50000	0,75000	0,62500	−0,18596
3	0,62500	0,75000	0,68750	−0,08533
4	0,68750	0,75000	0,71875	−0,03388
5	0,71875	0,75000	0,73438	−0,00788
6	0,73438	0,75000	0,74219	−0,00519
7	0,73438	0,74219	0,73828	−0,00134
8	0,73828	0,74219	0,74023	+0,00192
9	0,73828	0,74023	0,73926	+0,00029
10	0,73828	0,73926	0,73877	−0,00053
11	0,73877	0,73926	0,73901	−0,00012
12	0,73901	0,73926		

Жадвалдан кўриниб турибдики, берилган $x - \cos x = 0$ тенгламанинг [0, 1] кесмадаги илдизи $\xi < (1/2)^{12} < 0,00025$ хатолик билан аниқланган Шундай қилиб, биз излаган c илдиз

$$0,73901 < c < 0,73926$$

оралиқда жойлашганлигига эга бўламиз.

Энди алгебраик ва трансцендент тенгламаларни кесмани тенг иккига бўлиш усули билан тақрибан ечишнинг компьютер дастурини келтирамиз:

```
10 REM—КЕСМАНИ ТЕНГ ИККИГА БЎЛИШ
        УСУЛИ
20 INPUT „A=“; A, „B=“; B
30 INPUT „АНИҚЛИК=“; E
40 IF B<=A THEN 20
50 X=A:GOSUB 300:L1=F:X=B:GOSUB
   300:L2=F
60 IF L1*L2<0 THEN 100
70 PRINT „F(A)*F(B)>0 ??“:STOP
80 GOSUB 300:L2=F
90 IF L1*L2<=0 THEN B=X ELSE A=X:
   L1=L2
100 X=(A+B)/2
110 IF X—A>E THEN 80
120 PRINT „ИЛДИЗ X=“; X
130 PRINT „АНИҚЛИК E=“; E
140 END
300 REM—ҚИСМ ДАСТУР
310 F=F(X)
320 RETURN
```

Ушбу дастурга кирган кичик дастурдаги $F(x)$ функция берилган бир номаълумли алгебраик ёки трансцендент тенгламага мос функциядан иборат.

3. Кетма-кет яқинлашиш усули (ёки оддий итерация усули). Бу усул ечимнинг маълум яқинлашиши (тақрибий қиймати) бўйича навбатдаги аниқроқ яқинлашишини топишдан иборат. Берилган (2) тенгламани катма-кет яқинлашиш усули билан (a, b) оралиқдаги ечимини топиш учун, аввал унга тенг кучли бўлган тенгламани

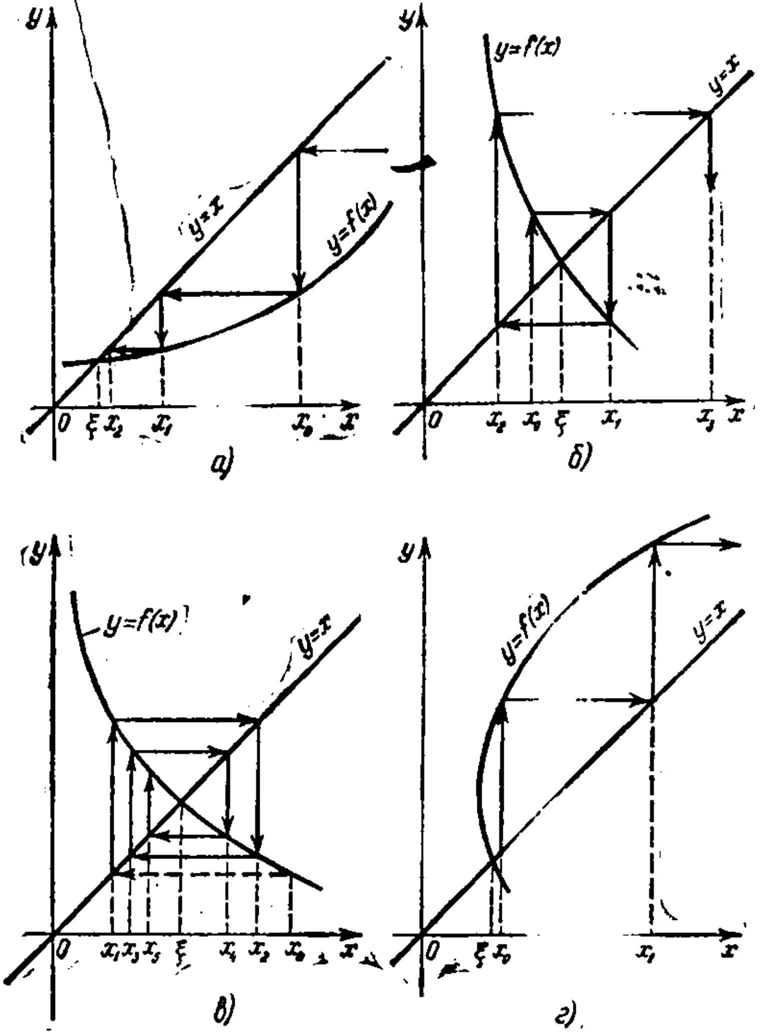
$$x = \varphi(x) \tag{14}$$

каби ёзиб оламиз.

$x_0 \in (a, b)$ тенглама ечимининг бошланғич қийматидан иборат бўлсин. Энди қуйидаги кетма-кетликни тузамиз:

$$x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ \ldots \tag{15}$$

Агар (5) кетма-кетлик чекли $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ лимитга эга



22- расм.

бўлса, бу лимит (2) тенгламанинг ечими бўлади ва жараён яқинлашувчи дейилади. x_0, x_1, . . ., x_n сонлар изланаётган ечимнинг тақрибий қийматларини беради. Агар (a, b) оралиқда

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \qquad (16)$$

бўлса, x_0 қандай танлаб олинишидан қатъи назар, $\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлади. 22-расмда яқинлашувчи а); в) ва узоқлашувчи б); г) жараёнларнинг геометрик тасвири келтирилган.

3-мисол. $10x - \sin x - 2 = 0$ тенгламани оддий итерация усули билан тақрибий ечинг.

Ечиш. $f(0) \cdot f(0,5) < 0$ бўлганлиги сабабли (0; 0,5) оралиқда берилган тенгламанинг илдизи мавжуд. $f'(x) = 10 - \cos x$ бўлганлигидан (0; 0,5) оралиқда функция монотон ўсувчи. Шунинг учун қаралаётган оралиқда тенгламанинг ягона илдизи мавжуд.

$\varphi(x)$ функцияни $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{K}$ муносабатдан топиш мумкин, бу ерда $|K| > Q/2$ ва $Q = \max|f'(x)|$.

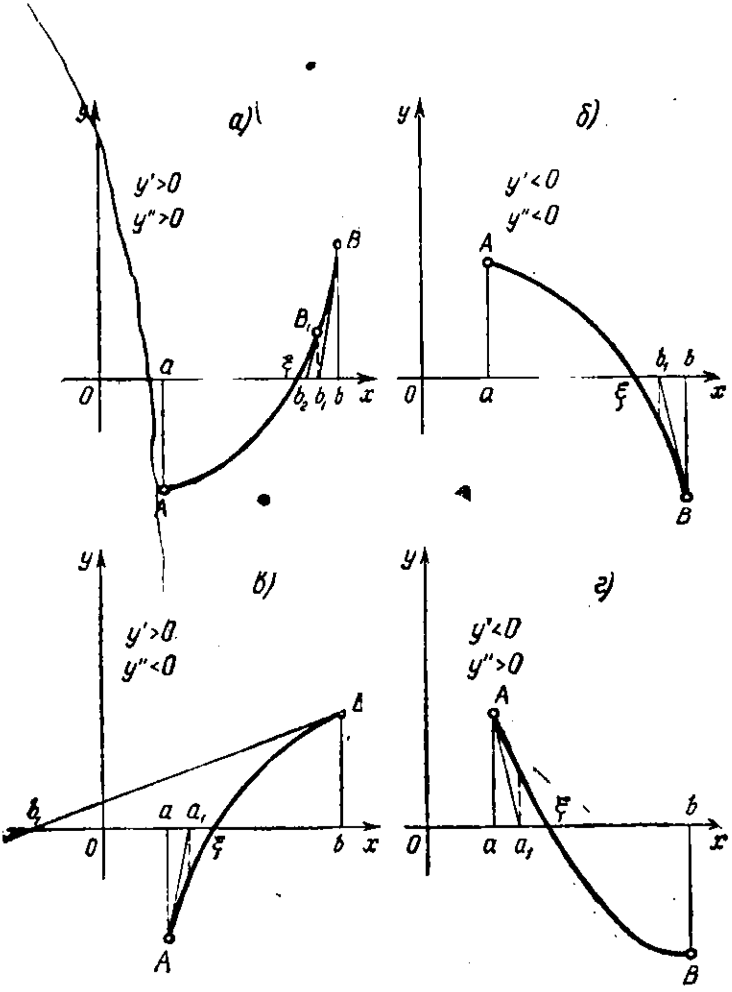
$Q = \max\limits_{[0,\ 0,5]} |f'(x)| = 10 - \cos 0,5 \approx 9 \cdot K = 10$ деб оламиз, у ҳолда $\varphi(x) = 0, \cdot (2 + \sin x)$. Бошланғич ечим учун $x_0 = 0,2$ ни танлаймиз ва $x = 0,1 \cdot (2 + \sin x)$ тенгламага кетма-кет яқинлашиш усулини қўллаймиз $x_1 = 0,2198$; $x_2 = 0,22187$; $x_3 = 0,22200$; $|x_3 - x_2| = 0,0002 < 0,001$ бўлганлиги учун $\xi = 0,2220$ илдиз 0,001 аниқликда топилди.

Қуйида $x = 0,1 \cdot (5 + \sin x)$ тенгламани 0,001 аниқликда итерация усули билан тақрибий ечиш дастурини БЕЙСИК дастурлаш тилида келтирамиз:

```
10 REM — ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ
20 INPUT "БОШЛАНҒИЧ ЕЧИМНИ КИРИТИНГ"; X
30 INPUT "НАТИЖА АНИҚЛИГИНИ КИРИТИНГ"; E
40 GOSUB 90
50 IF ABS (F — X) < E THEN 70
60 X = F: GOTO 40
70 PRINT "ИЛДИЗ X ="; X: END
80 REM — ҚИСМ ДАСТУР
90 F = .1 * (2 + SIN (X))
100 RETURN
              RUN
```

```
Бошланғич ечимни киритинг? 1
Натижа аниқлигини киритинг? 0.001.
      ИЛДИЗ X = .22260627442478.
```

4. Уринмалар усули (Ньютон усули). $f(x) = 0$ тенгламани (a, b) оралиқда ётган ξ ҳақиқий илдизга эга деб фараз қилайлик. Бу илдизга қуйидагича яқинлашиш мумкин. Координаталари b ва $f(b)$ дан иборат B нуқтада эгри чизиққа уринма ўтказамиз (23-а расм). Уринма абсциссалар ўқини b_1 нуқтада кессин; b_1 (нуқталардан иккинчиси) ξ га яқинроқ туради. Энди координаталари b_1 ва $f(b_1)$ бўлган B_1 нуқтада эгри чизиққа уринма ўтказамиз. Уринма абс



23- расм.

циссалар ўқини b_2 нуқтада кессин; бу нуқта ξ га b_1 дан ҳам кўра яқинроқ туради ва ҳ. к. Шу йўл билан ξ илдизга чексиз яқинлашиб борувчи $b, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ қийматлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз.

Бу қийматларнинг нимага тенглигини топайлик. Уринманинг $B\in[b, f(b)]$ нуқтадаги бурчак коэффициенти $f'(b)$ га тенг; демак, уринма тенгламаси

$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

кўринишга эга; b_1 нуқтада $y = 0$ бўлгани учун

$$-f(b)=f'(b)(b_1-b),$$

бундан

$$b_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Худди шу хилда

$$b_2=b_1-\frac{f(b_1)}{f'(b_1)}$$

ва ҳоказо

$$b_n=b_{n-1}-\frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})} \qquad (17)$$

қийматларни топамиз.

Амалда b_n ва b_{n-1} берилган аниқлик билан устма-уст тушгандан кейин ҳисоблаш жараёни тўхтатилади ва $\xi\approx b_n$ деб олинади.

Энди қандай шарт бажарилганда Ньютон усулини қўллаш мумкин эканлиги устида тўхтаймиз. 23-*а* чизмадаги *B* нуқтада эгри чизиқ абсциссалар ўқига ўзининг қавариқ томони билан қараган. Энди *B* нуқтада эгри чизиқ абсциссалар ўқига ўзининг ботиқ томони билан қараган ҳолда нима бўлишини кўрайлик (23-*в* расм). Бу вақтда эгри чизиққа *B* нуқтага ўтказилган уринма абсциссалар ўқини b_1 нуқтада кесса, бу b_1 нуқта ξ га яқинлашмай, аксинча, ξ дан узоқлашади, чунки b_1 дан ξ гача масофа b дан ξ гача масофадан катта. Математик таҳлилдан маълумки, $f(b)$ ва $f''(b)$ бир хил ишорага эга бўлгандагина, *B* нуқтада эгри чизиқ абсциссалар ўқига қавариқ томони билан қараган бўлади. Демак, $f(b)$ ва $f''(b)$ бир хил ишорага эга бўлса ёки, бошқача айтганда

$$f(b)\cdot f''(b)>0$$

шарт бажарилсагина, *B* нуқтада Ньютон усулидан фойдаланиш мумкин. Шунинг учун тенгламани ечишни бошлашдан аввал бошланғич ечим қийматини танлашда ушбу шарт бажарилиши текширилиши зарур.

n- яқинлашишдаги x_n ечимни баҳолаш учун қуйидаги формулалардан фойдаланиш мумкин:

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m} \quad \text{ва} \quad |x_n-\xi|\leqslant\frac{M_1}{2m}(x_n-x_{n-1})^2, \qquad (18)$$

бу ерда

$$m = \min_{a<x<b} |f'(x)|, \qquad M_1 = \max_{a<x<b} |f''(x)|.$$

4-мисол. Уринмалар усулидан фойдаланиб, $x^3 + x^2 - 3 = 0$ тенгламанинг [0,5; 1,5] изоляция кесмасидаги ҳақиқий ечимини $\varepsilon = 0{,}001$ аниқликда топинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап томони $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ функциядан иборат бўлганлигидан $f(0{,}5) = -2{,}625$ ва $f(1{,}5) = 2{,}625$ каби бўлади. Қуйидагиларни аниқлаймиз: $f'(x) = 3x^2 + 2x$ ва $f''(x) = 6x + 2$. $f(1{,}5) \cdot f''(1{,}5) > 0$ шарт бажарилганлигидан, бошланғич ечим учун $x_0 = 1{,}5$ ни танлаймиз.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларидан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$m = \min_{0{,}5<x<1{,}5} |f'(x)| = f'(0{,}5) = 1{,}75;$$

$$M_1 = \max_{0{,}5<x<1{,}5} |f''(x)| = f''(1{,}5) = 11$$

ва $M_1/2m = 3{,}14285$.

Энди (7) формуладан фойдаланиб, берилган тенглама илдизининг тақрибий қийматларини ҳисоблаб, натижани қуйидаги жадвалда келтирамиз:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$	$\frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$
0	1,5000	2,62500	9,75000		
1	1,2308	0,37936	6,97051	0,2692	0,156086
2	1,1764	0,01196	6,50455	0,0543	0,006469
3	1,1746	0,00026	6,48825	0,0018	0,000007

Демак, тенгламанинг илдизи $\xi = 1{,}1746 \pm 0{,}001$ Қуйида $x^3 + x^2 = 3$ тенгламани 0,1 аниқликда Ньютон (уринмалар) усули билан тақрибий ҳисоблаш дастурини БЕЙСИК дастурлаш тилида келтирамиз

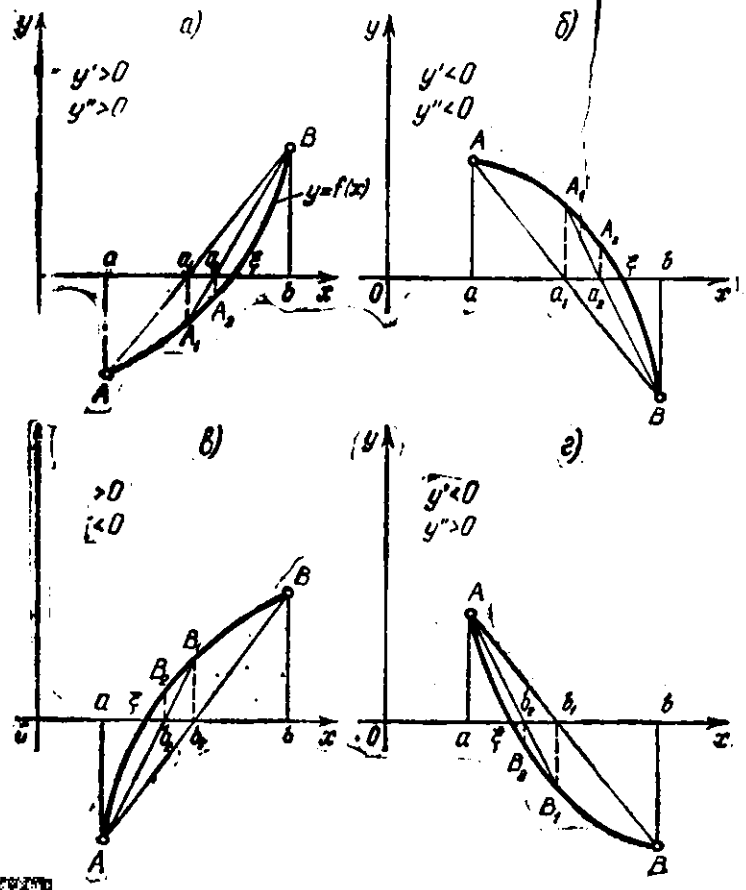
```
10 REM — НЬЮТОН УСУЛИ
20 INPUT "БОШЛАНҒИЧ ЕЧИМНИ КИРИТИНГ"; X
30 INPUT "НАТИЖА АНИҚЛИГИНИ КИРИТИНГ"; E
40 GOSUB 90
50 IF ABS (F — X) < E THEN 70
60 X = F : GOTO 40
70 PRINT "ИЛДИЗ X ="; X
80 REM — ҚИСМ ДАСТУР
90 F = X — (X ∧ 3 + X ∧ 2 — 3)/(3*X ∧ 2 + 2*X) + X
100 RETURN
          RUN

БОШЛАНҒИЧ ЕЧИМНИ КИРИТИНГ? 1
НАТИЖА АНИҚЛИГИНИ КИРИТИНГ? 1
```

Илдиз $x = -1.3585707145096$.

5. Ватарлар усули (тўғри чизиқли интерполяциялаш усули). $f(x) = 0$ тенгламанинг C нуқта билан тасвирланувчи ξ ҳақиқий илдизи (a, b) оралиқда яккаланган бўлсин. $y = f(x)$ эгри чизиқнинг $A[a, f(a)]$ ва $B[b, f(b)]$ нуқталаридан AB ватар ўтказамиз (24-*а* расм).

Бу ватар абсциссалар ўқини ξ га яқин турган a_1 нуқтада кесади. Координаталари $[a_1, f(a_1)]$ бўлган A_1 нуқтани оламиз. Сўнгра A_1B ватарни ўтказамиз: у абсциссалар ўқини ξ га яна яқинроқ турган a_2 нуқтада ке-



24- расм.

сади, бунда A_2 нинг координаталари a_2 ва $f(a_2)$ ва ҳоказо. Ватарлар ўтказиш жараёнини исталган марта такрорлаб, ξ га тобора яқинлашувчи $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ қийматлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз.

Энди эслатилган қийматлар нимага тенглигини аниқлаш мақсадида, аналитик геометрия усулларидан фойдаланамиз.

A ва B нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг

$$\frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}=\frac{x-b}{a-b}$$

тенгламасини олиб, $y=0$ десак,

$$\frac{-f(b)}{f(a)-f(b)}=\frac{a_1-b}{a-b}$$

ҳосил бўлади, бундан

$$a_1=b-\frac{(a-b)f(b)}{f(a)-f(b)}.$$

Худди шунга ўхшаш:

$$a_2=b-\frac{(a_1-b)f(b)}{f(a_1)-f(b)}$$

ва ҳоказо

$$a_n=b-\frac{(a_{n-1}-b)\cdot f(b)}{f(a_{n-1})-f(b)}. \qquad (19)$$

Топилган (19) формула ватарлар методи бўйича бошланғич ечим $x_0=a$ бўлган ҳол учун топилди. Агар бошланғич ечим учун $x_0=b$ танланадиган ҳол қаралса (23-*б* расм), у ҳолда қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$b_n=b_{n-1}-\frac{f(b_{n-1})(a-b_{n-1})}{f(a)-f(b_{n-1})}. \qquad (20)$$

Ватарлар усулидан фойдаланилаётганда бошланғич ечимга қараб (19) ёки (20) формуладан фойдаланиш керак. Шунинг учун бошланғич ечим x_0 учун $f(x_0)\times f''(x_0)<0$ шарт бажариладиган қиймат (a ёки b) қабул қилинади.

n- яқинлашишдаги x_n ечимни баҳолаш учун қуйидаги формуладан фойдаланиш мумкин:

$$|x_n-\xi|<\frac{f(x_n)}{m} \text{ ва } |x_n-\xi|<\frac{M-m}{m}|x_n-x_{n-1}|, \qquad (21)$$

бу ерда

$$m = \min_{a<x<b} |f'(x)|, \quad M = \max_{a<x<b} |f'(x)|.$$

5-**мисол.** Ватарлар усули билан $x^3 + x^2 - 3 = 0$ тенгламанинг [0,5; 1,5] изоляция сегментидаги ҳақиқий илдизини $\varepsilon = 0,001$ аниқликда топинг.

Ечиш. $f(0,5) = -2,625$ ва $f(1,5) = 2,625$ эканлиги уринмалар усулида келтирилган мисолдан маълум. $f(0,5) \cdot f''(0,5) < 0$ бўлганлиги сабабли $x_0 = 0,5$ бошланғич ечим сифатида танланади. Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласидан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$m = \min_{0,5<x<1,5} |f'(x)| = f'(0,5) = 1,75,$$

$$M = \max_{0,5<x<1,5} |f'(x)| = f'(1,5) = 9,75$$

ва $(M - m)/m = 4,57143$.

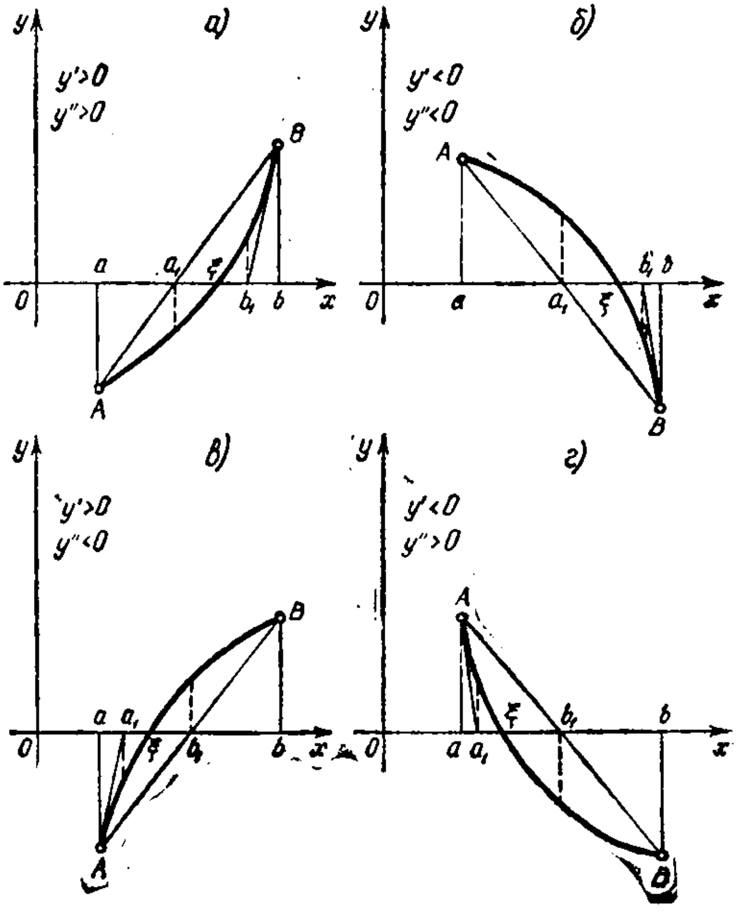
Энди (19) формуладан фойдаланиб, берилган тенглама илдизининг тақрибий қийматларини ҳисоблаб, натижани қуйидаги жадвалда келтирамиз:

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$	$\frac{M-m}{m} \vert x_n - x_{n-1} \vert$
0	0,5	−2,625		
1	1,0	−1,000	0,50000	2,2857
2	1,1379	−0,2318	0,1379	0,6304
3	1,16728	−0,04699	0,02938	0,1343
4	1,17313	0,009265	0,00585	0,0267
5	1,17425	0,001979	0,00112	0,0051
6	1,17449	0,000387	0,00025	0,0011
7	1,17454		0,00005	0,0002

Демак, изланаётган илдиз: $\xi = 1,1745 \pm 0,001$.

6. **Бирлашган усул.** Агар бир номаълумли тенгламаларни тақрибий ечишда уринмалар ва ватарлар усулларини бирданига (бирлашган усулни) қўлланса, мақсадга тезроқ эришиш мумкин.

$f(x) = 0$ тенглама бирлашган усул билан ε аниқликда ечилиши қўйилган бўлсин. $[a, b]$ кесмада $f(a) \times f(b) < 0$ бўлиб, $f'(x)$ ва $f''(x)$ ўз ишораларини сақласин. Уринмалар ва ватарлар усулларини биргаликда қўллаб, $f(x) = 0$ тенгламанинг аниқ ξ илдизининг тақрибий қийматларини турли босқичларда ками ва ортиғи билан топамиз. Бундан, x_n ва $\overline{x}_n$ қийматларнинг умумий рақамлари албатта аниқ илдизга тегишли бўлиши аён. Назарий жиҳатдан бу ерда тўрт ҳол бўлиши мумкин (25-расм):



25- расм.

1) $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$;
2) $f'(x) > 0$; $f''(x) < 0$;
3) $f'(x) < 0$; $f''(x) > 0$;
4) $f'(x) < 0$; $f''(x) < 0$.

Биз биринчи ҳолни қараш билан кифояланамиз.

Шундай қилиб, $a \leqslant x < b$ кесмада $f'(x) > 0$ ва $f''(x) > 0$ шарт бажарилган бўлсин (25- a расм). $x_0 = a$, $x_0 = b$ дейлик. У ҳолда ўнг томондан

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(\bar{x}_{n-1}) - f(x_{n-1})}(\bar{x}_{n-1} - x_{n-1}) \qquad (22)$$

ва чап томондан

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} - \frac{f(\bar{x}_{n-1})}{f'(\bar{x}_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (23)$$

формулалар билан ҳисобланади. 3 ва 4-б. да исботланганига кўра

$$x_n < \xi < \bar{x}_n$$

ва

$$0 < \xi - x_n < \bar{x}_n - x_n$$

эканлиги келиб чиқади.

Яқинлашиш $\bar{x}_n - x_n < \varepsilon$ шарт бажарилгандагина тўхтатилади. Жараён тўхтатилгандан кейин ξ илдизнинг қиймати учун топилган охирги қийматларнинг ўрта арифметигини олиш мақсадга мувофиқдир, яъни

$$\xi = \frac{1}{2}(x_n - \bar{x}_n).$$

6-мисол. $f(x) = x^5 - x - 0,2 = 0$ тенгламанинг илдизини $\varepsilon = 0,001$ аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. $f(1) < 0$ ва $f(1,1) > 0$ бўлганлигидан, илдиз $(1; 1,1)$ оралиқда жойлашган. Қуйидагиларни ҳисоблайлик:

$$f'(x) = 5x^4 - 1 \quad \text{ва} \quad f''(x) = 20x^3.$$

Танланган оралиқда $f'(x) > 0$ ва $f''(x) > 0$, яъни ишоралар сақланади.

$x_0 = 1$ ва $x_0 = 1,1$ деб бирлашган усулни қўллаймиз.

$$f(x_0) = f(1) = -0,2; \qquad f(\bar{x}_0) = f(1,1) = 0,3105;$$

$$f'(\bar{x}_0) = f'(1,1) = 6,3206$$

бўлганлигидан, (22) ва (23) формулалардан мос равишда қуйидагига эга бўламиз:

$$x_1 = 1,039; \quad \bar{x}_1 = 1,051. \quad \text{Бу ерда} \quad \bar{x}_1 - x_1 = 0,012$$

Шунинг учун аниқлик етарли эмас. Навбатдаги яқинлашиш жуфтлигини топамиз:

$$x_2 = 1,04169. \quad \bar{x}_2 = 1,4487$$

Бу ерда $\bar{x}_2 - x_2 = 0,0018$. Шунинг учун аниқлик етарли. Демак,

$$\xi = 1,045 \pm 0,001.$$

2-§. Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш усуллари

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш усулларини икки гуруҳга бўлиш мумкин: аниқ ва итерацион усуллар.

Чекли сондаги амаллар бажарилгандан кейин номаълумларнинг аниқ қийматига олиб келадиган усуллар, масалан, Крамер усули, Гаусс усули, квадрат илдизлар усули ва бошқалар аниқ усуллардан иборат. Бунда берилган чизиқли алгебраик тенгламанинг коэффициентлари ва ўнг томонидаги озод ҳадлар аниқ қийматлардан иборат бўлиб, барча ҳисоблар яхлитланмасдан бажарилиши кўзда тутилади.

Берилган чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг номаълумларини (ечимнинг) маълум тақрибий қиймати бўйича навбатдаги аниқроқ қийматини топиш усуллари – итерацион усул ҳисобланади. Одатда итерацион усуллар ёрдамида чизиқли алгебраик тенглама ечилаётганда жараён иккита кетма-кет келган яқинлашишлар маълум аниқлик билан устма-уст тушгунча давом эттирилади.

Агар чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг тартиби унча катта бўлмаса аниқ усуллар, акс ҳолда итерацион усуллардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

3-§. Матрица ва детерминантлар. Асосий таърифлар

1-таъриф. n та устун ва m та сатрдан иборат тўғри бурчакли жадвалда жойлашган $n \cdot m$ та сонлар тўпламига матрица дейилади.

Матрицани ташкил этувчи сонлар унинг элементлари дейилади. Ҳар бир a_{ij} элементнинг биринчи индекси бу элемент турган сатрнинг номерини, иккинчи индекси эса устуннинг номерини билдиради. Демак, a_{ij} элемент i- сатр ва j- устунда туради. Одатда матрицаларни

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

каби белгиланади. Матрицаларни бош ҳарфлар билан ҳам белгилайдилар.

2-таъриф. Агар A матрица учун $n = m$ шарт бажарилса, у ҳолда уни n-тартибли **квадрат матрица** дейилади.

Квадрат матрицада $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементлар матрицанинг биринчи (бош) диагоналини, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n-1,2}, a_{n1}$ элементлар эса иккинчи диагоналини ташкил этади.

3-таъриф. Барча элементлари ноллардан иборат

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

матрица **ноль-матрица** деб аталади.

4-таъриф. Фақат бир сатрдан иборат

$$A = [a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}]$$

матрица **сатр-матрица** дейилади.

5-таъриф. Фақат бир устунга эга бўлган матрица

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

устун-матрица дейилади

6-таъриф. Бош диагоналига тегишли бўлмаган барча элементлари ноллардан иборат

$$a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{nn} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

квадрат матрицага диагонал матрица дейилади.

7-таъриф. Барча элементлари бирлардан иборат бўлган

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

диагонал матрицага бирлик матрица дейилади ва E ҳарф билан белгиланади.

8-таъриф. Бош диагоналидан бир томонда жойлашган барча элементлари нолдан иборат бўлган

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \text{ ёки } \begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

квадрат матрицага учбурчакли матрица дейилади.

9-таъриф. Агар A матрица B матрицанинг йўл ва устун элементларини алмаштиришдан ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда A матрица B матрицага нисбатан транспонирланган дейилади.

10-таъриф. Агар A матрицанинг элементлари учун $|a_{ij}|=|a_{ji}|$ шарт бажарилса, у ҳолда A матрица симметрик матрица дейилади.

11-таъриф. Агар

$$f=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$$

квадратик форма учун $f>0$ шарт бажарилса, у ҳолда мос $A=|a_{ij}|$ матрица мусбат аниқланган дейилади.

12-таъриф. Сатрлари чизиқли эркли матрица хосмас матрица, сатрлари чизиқли боғланган матрица хос матрица деб аталади.

13-таъриф A матрица учун $AB=E$ тенгликни қаноатлантирувчи B матрица A матрицага тескари матрица дейилади ва у $B=A^{-1}$ кўринишда белгиланади.

Шундай қилиб, $AA^{-1}=E$.

Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема. *Хосмас матрицага тескари матрица мавжуд ва ягонадир.*

4-§. Номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишда номаълумларни кетма-кет йўқотишдан иборат Гаусс усулини кўрамиз.

Фараз қилайлик, n- тартибли

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,\ n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,\ n+1}, \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,\ n+1} \end{cases} \qquad (1)$$

система берилган бўлиб, унда $a_{11} \neq 0$ шарт бажарилсин. Акс ҳолда (1) системанинг бошқа тенгламаларини кўздан кечирамиз ва уларнинг қайси бирида x_1 номаълум олдидаги коэффициент нолдан фарқли бўлса, шу тенгламани биринчи ўринда ёзиб оламиз. Биз қараётган система n та номаълумли бўлгани учун a_{i1} ($i = \overline{1, n}$) ларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлиши табиий. Берилган система учун $\det A \neq 0$ шарт ҳам бажарилсин.

Системанинг биринчи тенгламасини a_{11} коэффициентга бўлиб, уни

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{a_{n,\ n+1}}{a_{11}} \qquad (2)$$

кўринишга келтирамиз. Ҳосил қилинган тенгламани бирма-бир a_{i1} коэффициентларга кўпайтириб, натижаларни қолган тенгламалардан мос равишда айирилса, (1) га эквивалент бўлган қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,\ n+1}^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,\ n+1}^{(1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n,\ n+1}^{(1)} \end{cases} \qquad (3)$$

Бунда

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}},$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}^{(1)} \quad (i = \overline{2, n}, \ j = \overline{2, n+1}).$$

Энди $a_{22}^{(1)}$ коэффициент нолдан фарқли деб (акс ҳолда, юқоридагидек иш юритамиз) (3) системанинг иккинчи тенгламасини $a_{22}^{(1)}$ га бўлиб чиқиб, юқоридагидек x_2 номаълумларни йўқотиб чиқамиз ва берилган системага эквивалент бўлган ушбу

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,\,n+1}^{(1)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2,\,n+1}^{(2)} \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = a_{n,\,n+1}^{(2)} \end{cases} \qquad (4)$$

системага эга бўламиз. Бунда:

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}}{a_{22}^{(1)}}, \quad a_{ij} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot a_{2j}^{(2)} \quad (i = \overline{3, n}; \quad j = \overline{3, n+1}).$$

Ушбу жараённи давом эттириб, оқибатда (1) система қуйидаги эквивалент система билан алмаштирилади:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,\,n+1}^{(1)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2,\,n+1}^{(2)} \\ \qquad\qquad x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n = a_{3,\,n+1}^{(3)} \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = a_{n,\,n+1}^{(n)} \end{cases} \qquad (5)$$

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини (5) кўринишга келтириш жараёни Гаусс усулининг „тўғри юриши“ дейилади. Ҳосил қилинган (5) системани охирги тенгламасидан бошлаб кетма-кет ечиб, x_n, $_{n-1}$, ..., x_2, x_1 номаълумлар топилади. Бу жараён Гаусс усулининг „тескари юриши“ дейилади.

Гаусс усулида нолдан фарқли бўлиши талаб этилган a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, ..., $a_{nn}^{(n-1)}$ лар **бош элементлар** дейилади.

Амалда чизиқли алгебраик тенгламалар системаси Гаусс усули билан ечилаётганда ҳисоблаш ишлари жадвалда бажарилади. 156 — 157-бетлардаги жадвалда юқорида баён этилган Гаусс схемаси келтирилган.

Жадвалдаги $\sum$ устун текшириш йиғиндилардан иборат.

Маълумки, электрон ҳисо лаш машиналарида бирор ҳисоб бажарилаётганда машинанинг кўпроқ вақти кўпайтириш ва бўлиш амалларини бажариш учун сарфланади. Шунинг учун берилган системани ечиш учун қанча кўпайтириш ва бўлиш амали зарур эканлигини баҳолаш муҳимдир.

Система n-тартибли бўлса, у ҳолда бош элемент танлангандан сўнг, коэффициентларни топиш учун $n-1$ та бўлиш амали бажарилади. Сўнгра бош элемент турган сатрни ҳар бир кўпайтувчига кўпайтириш керак. Бунинг учун $(n+1)(n-1)=n^2-1$ та кўпайтириш амали бажарилиши керак. Шундай қилиб, Гаусс схемасининг биринчи қадамидаёқ n^2+n-2 та кўпайтириш ва бўлиш амали зарур. Навбатдаги қадам $(n-1)^2+$ $+(n-1)-2$ та шундай амаллар ёрдамида бажарилади ва ҳоказо. Тескари юришгача ҳаммаси бўлиб

$$[n^2+n-2]+[(n-1)^2+(n-1)-2]+\ldots+$$
$$+[1^2+1-2]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-2n$$

та кўпайтириш ва бўлиш амали зарур бўлади. Тескари юриш учун

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

та кўпайтириш ва бўлиш амали керак бўлади. Агар текшириш устунидаги амалларни эътиборга оладиган бўлсак, унинг сони ҳам шунча (тескари юришчалик) бўлади. Шундай қилиб, n номаълумли чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш учун ҳаммаси бўлиб

$$N=\frac{n}{3}(n^2+6n-1) \tag{6}$$

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{in}	$a_{i,\ n+1}$	Σ
$\boxed{a_{11}}$	a_{12}	a_{13}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1n}	$c_{1,\ n+1}$	$\sum\limits_{j=1}^{n+1} a_{1j}$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\ldots$	a_{2j}	$\ldots$	a_{2n}	$a_{2,\ n+1}$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{in}	$a_{i,\ n+1}$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\ldots$	a_{nj}	$\ldots$	a_{nn}	$a_{n,\ n+1}$	

Давоми

1	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	…	$a_{1j}^{(1)}$	…	$a_{1n}^{(1)}$	$a_{1,n+1}^{(1)}$	$\sum_{j=1}^{n+1} a_{1j}/a_{11}$
	$\boxed{a_{22}^{(1)}}$	$a_{23}^{(1)}$	…	$a_{2j}^{(1)}$	…	$a_{2n}^{(1)}$	$a_{n,n+1}^{(1)}$	$\sum_{j=2}^{n+1} a_{ij}^{(1)}$
	…	…	…	…	…	…	…	
	$a_{i2}^{(1)}$	$a_{i3}^{(1)}$	…	$a_{ij}^{(1)}$	…	$a_{in}^{(1)}$	$a_{i,n+1}^{(1)}$	
	…	…	…	…	…	…	…	
	$a_{n2}^{(1)}$	$a_{n3}^{(1)}$	…	$a_{nj}^{(1)}$	…	$a_{nn}^{(1)}$	$a_{n,n+1}^{(1)}$	
	1	$a_{23}^{(2)}$	…	$a_{2j}^{(2)}$	…	$a_{2n}^{(2)}$	$a_{2,n+1}^{(2)}$	$\sum_{j=2}^{n+1} a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$
		…	…	…	…	…	…	…
				$\boxed{a_{ij}^{(i-1)}}$	…	$a_{in}^{(i-1)}$	$a_{i,n+1}^{(i-1)}$	$\sum_{j=i}^{n+1} a_{ij}^{(i-1)}$
				…	…	…	…	
				$a_{nj}^{(i-1)}$	…	$a_{nn}^{(i-1)}$	$a_{n,n+1}^{(i-1)}$	
				1	…	$a_{in}^{(i)}$	$a_{i,n+1}^{(i)}$	$\sum_{j=i}^{n+1} a_{ij}^{(i-1)}/a_{ij}^{(i-1)}$
					…	…	…	…
						$\boxed{a_{nn}^{(n-1)}}$	$a_{n,n+1}^{(n-1)}$	$\sum_{j=n}^{n+1} a_{nj}^{(n-1)}$
						1	$a_{n,n+1}^{(n)}$	$\sum_{j=n}^{n+1} a_{nj}^{(n-1)}/a_{nn}^{(n-1)}$
						1	x_n	
					…		…	
				1			x_i	
			…				…	
		1					x_3	
	1						x_2	
1							x_1	

та кўпайтириш ва бўлиш амали зарур бўлишини юқоридагиларни қўшиб, осонгина кўриш мумкин.

5-§. Гаусс схемасининг татбиқлари

А. Детерминантни ҳисоблаш. Бизга

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

детерминант берилган бўлиб, уни ҳисоблаш талаб этилган бўлсин. Фараз қилайлик, $a_{11} \neq 0$ бўлсин.

Берилган детерминантнинг биринчи йўл элементларидан детерминант ишораси олдига a_{11} бошловчи элементни чиқариб ёзамиз ва детерминантни қуйидагича ёзамиз:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

бу ерда $b_{1j} = a_{1j}/a_{11}$ $(j = 2, 3, \dots, n)$.

Биринчи йўл элементларини керакли коэффициентга кўпайтириб ва мос равишда улардан айириш натижасида, ушбу детерминантнинг биринчи устундаги биринчи йўлга мос элементидан бошқа барча элементларини нолларга айлантириш мумкин. Бу билан детерминантнинг қиймати ўзгармайди, яъни

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

бу ерда $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} b_{1j}$ $(i,\ j = 2, 3, \dots, n)$. Охирги детерминантни биринчи устун элементлари бўйича ёйиб,

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

ни ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган ушбу детерминант

$n-1$-тартиблидир Юқоридаги каби $n-1$-тартибли ушбу детерминант учун $a_{22}^{(1)}$ ни детерминант белгиси олдига чиқариб, мос амаллар бажарилса,

$$\det A = a_{11}\cdot a_{22}^{(1)}\begin{vmatrix} 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}^{(1)}\begin{vmatrix} a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

кўринишдаги детерминантга эга бўламиз. Бу ерда $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}b_{2j}$ ва $b_{2j} = a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, $(i, j = 3, 4, \dots, n)$. Шу жараённи n марта такрорлаб,

$$\det A = a_{11}a_{22}^{(1)}\dots a_{nn}^{(n-1)}$$

га эга бўламиз. Шундай қилиб, детерминантнинг қиймати Гаусс схемасининг бошловчи элементлари кўпайтмасидан иборат экан.

Б. Тескари матрицани аниқлаш. Бизга

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

квадрат матрица берилган бўлиб, A^{-1} ни топиш талаб этилган бўлсин.

Тескари матрицанинг кўриниши қуйидагича бўлсин:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

$A\cdot A^{-1} = E$ тенглик тескари матрицанинг номаълум элементлари учун чизиқли тенгламалар системаларини ёзиш мумкинлигига олиб келади. Масалан, тескари матрицанинг биринчи устун элементларини топиш учун, A матрицанинг биринчи, иккинчи ва ҳоказо сатр элементларини тескари матрицанинг биринчи устун мос элементларига кўпайтириб, мос равишда E матрицанинг биринчи устун элементларига тенглаштирилади, сўнгра ушбу тенгламалар системаси ечилади:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{31}+\ldots+a_{1n}x_{n1}=1, \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+a_{23}x_{31}+\ldots+a_{2n}x_{n1}=0, \\ a_{31}x_{11}+a_{32}x_{21}+a_{33}x_{31}+\ldots+a_{3n}x_{n1}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{11}+a_{n2}x_{21}+a_{n3}x_{31}+\ldots+a_{nn}x_{n1}=0 \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Ечиш жараёни Гаусс усули бўйича амалга оширилади. Агар A матрицанинг биринчи ва ҳоказо сатр элементлари тескари матрицанинг иккинчи устун элементларига кўпайтирилса, (8) системага ўхшаш чизиқли тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Система Гаусс усули ёрдамида ечилса, тескари матрицанинг иккинчи устун элементлари аниқланади. Худди шундай жараён n марта такрорланиб, тескари матрицанинг барча устун элементлари аниқланади. Берилган матрица махсус бўлмаганлигидан, ягона тескари матрица мавжуддир. Бу эса ҳосил қилинган барча чизиқли тенгламалар системалари ягона ечимга эга эканлигига олиб келади. Ечилаётган барча чизиқли тенгламалар системасининг ҳаммаси ҳам бир хил коэффициентларга эга бўлиб, фақат улар ўзаро ўнг томонларидаги озод ҳадлари билан фарқланадилар Бу системаларни Гаусс усули билан ечаётганда системанинг коэффициентларини бир марта ўзгартириш етарлидир. Демак, барча системаларни бирданига ечиш учун ўнг томонларидаги элементларнинг ҳаммасини бирданига ёзиб, барча системаларни бирданига ечиш мумкин.

6-§. Мусбат аниқланган симметрик матрицали чизиқли тенгламалар системаси учун квадрат илдизлар усули

Бизга мусбат аниқланган симметрик матрицали чизиқли

$$AX=B \qquad (1)$$

тенгламалар системаси берилган бўлсин. Ушбу системани ечиш икки босқич: тўғри ва тескари юриш босқичларида амалга оширилади.

Тўғри юриш. A матрицани иккита ўзаро транспонирланган учбурчакли матрицалар кўпайтмаси кўринишида ёзайлик, яъни

$$A = T^1 \cdot T, \tag{2}$$

бу ерда

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad T^1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

T^1 ва T матрицаларни кўпайтириб, A матрицага тенглаш натижасида t_{ij} номаълумларни топиш учун қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \qquad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \quad (j > 1),$$

$$t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \qquad (1 < i \leqslant n). \tag{3}$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} \qquad (i < j),$$

$$t_{ij} = 0, \text{ агар } i > j \text{ бўлса.}$$

T^1 ва T матрицалар аниқлангандан кейин, (1) системани унга эквивалент бўлган иккита

$$T^1 \cdot Y = B \tag{4}$$

ва

$$TX = Y \tag{5}$$

учбурчакли матрицали чизиқли тенгламалар системасига алмаштирамиз Ёки ушбу чизиқли тенгламалар системасини ёйиб ёзсак:

$$\left.\begin{aligned} & t_{11}y_1 && = b_1, \\ & t_{12}y_1 + t_{22}y_2 && = b_2, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots && \\ & t_{1n}y_1 + t_{2n}y_2 + \dots + t_{nn}y_n && = b_n \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

---

* Биринчи қадамдаёқ квадрат илдиз чиққанлиги сабабли ушбу усул квадрат илдизлар усули дейилади.

$$\left.\begin{array}{r} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots + t_{1n}x_n = y_1, \\ t_{22}x_2 + \ldots + t_{2n}x_n = y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_{nn}x_n = y_n \end{array}\right\} \qquad (7)$$

каби бўлади.

Тескари юриш. Юқорида келтирилган (6) ва (7) чизиқли тенгламалар системасидан кетма-кет

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}} \quad (i > 1) \qquad (8)$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} t_{ik} \cdot x_k}{t_{ii}} \qquad (9)$$

номаълумларни топамиз.

Ушбу баён этилган усул юқорида кўрилган усулларга қараганда анча қулай ва тежамлидир. Лекин бу усулни симметрик бўлмаган матрицали чизиқли тенгламалар системасига тўғридан-тўғри қўллаш мумкин эмас. Шуни айтиб ўтиш керакки, ҳақиқий a_{ij} коэффициентларда t_{ij} лар мавҳум сонлардан иборат бўлиши мумкин. Бу усул шундай ҳолларда ҳам ўринли бўлаверади.

7-§. Чизиқли тенгламалар системаси учун итерация усули (кетма-кет яқинлашиш усули)

Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

чизиқли тенгламалар системасини ечиш талаб этилган бўлсин. (1) системани қуйидаги матрица кўринишида ёзамиз:

$$AX = B, \qquad (2)$$

бу ерда

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

A матрицанинг диагонал элементлари нолдан фарқли деб фараз қилайлик (акс ҳолда йўлларнинг ўрнини алмаштириш натижасида бунга эришиш мумкин), яъни $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ бўлсин.

(1) системанинг биринчи тенгламасини x_1 номаълумга нисбатан, иккинчи тенгламасини x_2 номаълумга нисбатан ва ҳоказо ечамиз. У ҳолда (1) системага эквивалент бўлган қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,\,n-1}x_{n-1}, \end{array}\right\} \quad (3)$$

бу ерда

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ii} = 0, \quad \alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j,\ i,\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

(3) нормал кўринишга келтирилган система дейилади. Қуйидаги

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

белгилашларни киритиб, (3) системани матрицали кўринишда ёзамиз:

$$X = \beta + \alpha X \quad (3')$$

ёки

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

(4) системани кетма-кет яқинлашиш усули билан ечамиз. Нолинчи яқинлашиш учун озод ҳадлар устунини қабул қиламиз:

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

энди матрица — устунлар кетма-кетлигини тузамиз, яъни биринчи яқинлашиш:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix},$$

иккинчи яқинлашиш:

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

ва ҳоказо.

Умуман $(k+1)$- яқинлашиш

$$X^{(k+1)} = \beta + \alpha X^{(k)} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Агар $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$ яқинлашишлар кетма-кетлиги $X = \lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)}$ лимитга эга бўлса, у ҳолда ушбу лимит (3) чизиқли тенгламалар системасининг ечимидан иборат бўлади, чунки кетма-кетлик хоссасига биноан $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)}$, бошқача айтганда $X = \beta + \alpha X$.

Итерацион жараён ва унинг яқинлашиши α матрицанинг элементлари катталикларига қуйидагича боғлиқдир: агар йўл элементларининг модуллари йиғиндиси ёки устун элементларининг модуллари йиғиндиси бирдан кичик бўлса, у ҳолда бошланғич векторни танлашга боғлиқ бўлмаган ҳолда (3) система учун итерацион жараён ягона ечимга яқинлашади.

Шунинг учун яқинлашиш шартини

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \quad \text{ёки}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

каби ёзиш мумкин.

Итерацион жараённинг яқинлашиши α матрицанинг нормалари билан қуйидаги муносабатлар орқали боғланган: агар қуйидаги

$$\|\alpha\|_1 = \max_{i} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$

ёки

$$\|\alpha\|_2 = \max_{j} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1,$$

ёки

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1$$

шарт бажарилса, у ҳолда *чизиқли тенгламалар системасининг итерацион жараёни ягона ечимга яқинлашади.*

Агар мумкин бўлган ε хатолик ва чизиқли система номаълумларининг аниқ қийматлар вектори X_i берилиб, $X_i^{(k)}$ номаълумларнинг итерация усули билан ҳисобланган k- яқинлашишдан иборат бўлса, у ҳолда усулнинг $\|X_i - X_i^{(k)}\| < \varepsilon$ *хатолигини баҳолаш* учун

$$\|X_i - X_i^{(k)}\| \leqslant \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - |\alpha|} \cdot \|\beta\| \tag{5}$$

формулани қўллаш мумкин, бу ерда $\|\alpha\|$ α матрицанинг учта нормаларидан бири, $\|\beta\|$ β векторнинг нормаси, k — берилган аниқликка эришиш учун зарур бўлган итерация сони.

Энди N номаълумли N та чизиқли тенгламалар тизимни оддий итерация усули билан ечиш учун мўлжалланган компьютер дастурини келтирамиз.

```
10 REM — ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИ
         УЧУН ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ
20 DIM A(N, N+1), X(N), Y(N)
30 INPUT „ТЕНГЛАМАЛАР СОНИ КИРИТИЛ-
         СИН“; N
40 PRINT „МАТРИЦА КИРИТИЛСИН“
50 FOR I = 1 TO N
```

```
60 FOR J=1 TO N+1
70 INPUT A(I, J)
80 NEXT J: NEXT I
90 INPUT „ҚИСИЛИШ КОЭФФИЦИЕНТИ КИРИ-
          ТИЛСИН"; B
100 INPUT „АНИҚЛИК КИРИТИЛСИН"; E
110 M=E*(I-B)/B
120 FOR K=1 TO N
130 X(K)=A(K, N+1)
140 NEXT K
150 FOR I=1 TO N
160 Y(I)=A(I, N+1)
170 FOR J=1 TO N
180 Y(I)=Y(I)+A(I, J)+X(J)
190 NEXT J: NEXT I
200 GOSUB 300
210 FOR K=1 TO N
220 X(K)=Y(K)
230 NEXT K
240 IF R>M THEN 150
250 PRINT „ЕЧИМ"
260 FOR I=1 TO N
270 PRINT X(I)
280 NEXT I
290 END
300 R=0
310 FOR K=1 TO N
320 R=R+(X(K)-Y(K))^2
330 NEXT K
340 R=SQR(R)
350 RETURN
```

VII БОБ. МАТЕМАТИК АНАЛИЗНИНГ СОНЛИ УСУЛЛАРИ

1-§. Аналитик функция қийматларини ҳисоблаш ва қийматлар жадвали

Кўпинча фан ва техника масалаларида қатнашган ўзгарувчи миқдорлар ўзаро шундай боғлиқ бўладики, улардан бирининг ўзгаришига қараб иккинчиси ҳам маълум равишда ўзгаради. Масалан, доиранинг радиусини R ва унинг юзини S деб фараз қилинса,

$$S = \pi R^{\cdot}$$

бўлади. Бунда S нинг қиймати R нинг қийматига боғлиқ бўлиб, R га берилган ҳар бир қийматга S нинг аниқ қиймати мос келади. Бу ҳолда „S R нинг функцияси“ дейилади.

Функция тушунчаси математиканинг энг муҳим ва асосий тушунчаларидан биридир. Унинг мукаммалроқ таърифи қуйидагича: X ва Y тўпламлар берилган бўлсин Агар бирор қоида ёки қонунга мувофиқ X тўпламнинг ҳар бир x элементига Y тўпламнинг тайин бир y элементи мос қўйилган бўлса, X тўпламда қийматлари Y тўпламда бўлган функция (акслантириш) берилган дейилади ва бу символик равишда $y=f(x)$ (ёки $f:X \to Y$) каби ифодаланади. X тўплам функциянинг аниқланиш соҳаси, Y тўплам функциянинг ўзгариш соҳаси, x аргумент ёки эркли ўзгарувчи дейилади. Демак, функцияни бериш учун аргумент x нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами X ни ва X дан олинган ҳар бир x га мос келадиган y ни топиш қоидасини кўрсатиш керак.

Функция аналитик, график, жадвал ва бошқа кўринишда берилиши мумкин. Аналитик усулда x ва y ўзгарувчилар орасидаги мослик қоидаси аналитик ифода – формулалар ёрдамида берилади. унда y нинг қийматини топиш учун ўзгармас сон ва аргумент x устида қандай амаллар бажариш кераклиги кўрсатилади. Функциянинг хусусий қийматини топиш учун берилган ифодада x нинг ўрнига берилган x_0 нуқта қўйилиб, кўрсатилган амаллар бажарилади. Масалан, $y=2x^3-1$ функциянинг $x_0=0$ нуқтадаги хусусий қиймати -1 га тенг.

Функция жадвал усулида берилганда аргументнинг маълум тартибдаги $x_0, x_1, \ldots, x_n$ қийматлари ва функциянинг шуларга мос $y_0, y_1, \ldots, y_n$ қийматлари жадвал кўринишида ёзилади, яъни

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Тригонометрик функциялар жадваллари, логарифмлар жадваллари ва ҳоказолар функциянинг жадвал усулида берилишига мисол бўла олади.

Ҳодисаларни тажриба асосида ўрганиш натижасида ҳам ўлчанаётган миқдорлар орасидаги функционал боғланишни ифодаловчи жадваллар ҳосил бўлиши мумкин. Масалан, метеорологик майдончада маълум кунда ҳавонинг ҳароратини ўлчаш натижасида қуйидаги жадвал ҳосил бўлиши мумкин:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	−1	−2	−2	− 0,5	1	3	3,5	4

Бу жадвал ҳарорати T нинг қиймати (градус ҳисобида) t вақтнинг (соат ҳисобида) функцияси каби аниқланади.

Жадвал усулида берилган функция аргументининг бошланғич ва охирги қиймати орқали жадвал **ҳажми** белгиланади. Масалан, юқорида келтирилган мисолда аргумент 1 дан 9 гача бўлган қийматларни олади.

Кетма-кет келган икки аргумент қийматларининг фарқига жадвал **қадами** дейилади, яъни $h_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$). Агар $h_i = \text{const}$ бўлса, қадам **тенг** дейилади. У ҳолда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументларни $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $\ldots$, $x_n = x_0 + nh$ каби ифодалаш мумкин.

Мисол. Берилган

$$y = \frac{e^{-ax}}{\sqrt[3]{x} + \sin^2 bx}$$

функциянинг 0, $< x < 0{,}9$ оралиқда $h = 0{,}2$ қадам билан қийматлар жадвалини тузинг. $a = 0{,}236$, $b = 1{,}384$ деб олинг.

Ечиш (қуйидаги жадвалга қаранг):

x_i	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
y_i	2,02129	1,11958	0,740060	0,54091	0,43396

2-§. Интерполяциянинг умумий масаласи

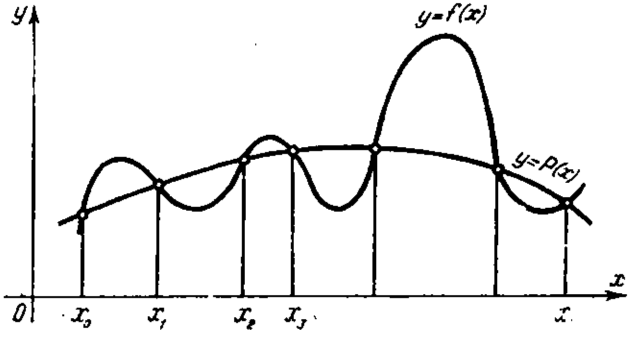
Бирор ҳодисани ўрганишда y ва x миқдорлар орасида шу ҳодисанинг миқдор томонини аниқловчи функционал боғланиш борлиги аниқланган бўлсин; бунда

$y=f(x)$ функция номаълум бўлиб, лекин тажриба асосида аргументнинг $[a, b]$ кесмадаги $x_0, x_1, \ldots, x_n$ қийматларида функциянинг $y_0, y_1, \ldots, y_n$ қийматлари аниқланган бўлсин. Бундаги масала $y=f(x)$ номаълум функцияни $[a, b]$ касмани аниқ ёки тақрибий тасвирлайдиган, ҳисоблаш учун мумкин қадар қулай (масалан кўпҳад ёки тригонометрик функция) шаклидаги функцияни топишдан иборат. Бу масалани умумийроқ шаклда бундай айтиш мумкин: $[a, b]$ кесмада номаълум $y=f(x)$ функциянинг $n+1$ та ҳар хил $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталардаги қийматлари берилган: $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1), \ldots, y_n=f(x_n)$; $f(x)$ функцияни тақрибий ифодаловчи, даражаси n дан катта бўлмаган $P(x)$ кўпҳадни топиш талаб этилади.

Бундай кўпҳад сифатида $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталардаги қийматлари $f(x)$ функциянинг $y_0, y_1, \ldots, y_n$ қийматлари билан мос равишда бир хил бўлган кўпҳадни олиш кераклиги табиийдир (26-расм). У вақтда „функцияни *интерполяциялаш* масаласи“ деб аталадиган бу масала бундай ифодаланади: берилган $f(x)$ функция учун берилган $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталарда $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $\ldots$, $y_n=f(x_n)$ қийматлар қабул қиладиган, даражаси n дан катта бўлмаган $P(x)$ кўпҳадни топиш керак.

Топилган $P(x)$ функция *интерполяцион формула* дейилиб, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ лар *интерполяция тугунлари* дейилади. Тугунлар орасидаги масофа $h=x_i-x_{i-1}$ *интерполяция қадами* дейилади.

Амалда топилган $P(x)$ интерполяцион формула $f(x)$ функциянинг берилган x аргумент қийматларидаги (ин-



26-расм.

терполяция тугунларидан фарқли) қийматларини ҳисоблаш учун қўлланади. Ушбу операция **функцияни интерполяциялаш** дейилади. (Агар $x \in |a, b|$ бўлса, **интерполяциялаш**, $x \overline{\in} |a, b|$ бўлса, **экстраполяциялаш** дейилади).

3-§. Лагранжнинг интерполяцион формуласи

Изланаётган кўпҳаднинг кўринишини қуйидагича олайлик:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \qquad (1)$$

бу ерда a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) — номаълум ўзгармас коэффициентлар. Интерполяция масаласидаги шартга кўра $L_n(x)$ функция $x_0, x_1, \ldots, x_n$ интерполяция тугунларида $L_n(x_0) = y_0$, $L_n(x_1) = y_1$, $\ldots$, $L_n(x_n) = y_n$ қийматларга эришади. У ҳолда x_0 интерполяция тугунида $L_n(x)$ интерполяцион кўпҳад

$$L_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n$$

кўринишга, x_1 интерполяция тугунида

$$L_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n$$

кўринишга ва ниҳоят x_n интерполяция тугунида

$$L_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n$$

кўринишга эга бўлади. Буларни $n+1$ номаълумли тенгламалар системаси кўринишида ифодалаймиз:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = y_n, \end{cases} \qquad (2)$$

бу ерда x_i ва y_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) — мос равишда берилган функциянинг жадвал қийматлари.

Системадаги $a_0, a_1, \ldots, a_n$ номаълумларни Крамер формуласи ёрдамида аниқлаймиз:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (3)$$

бу ерда Δ — (2) система детерминанти. Агар $\Delta \neq 0$

бўлса, у ҳолда система ягона ечимга эга бўлади. Ҳақиқатан (2) системанинг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$x_0, x_1, \dots, x_n$ тугунлар устма-уст тушмаган ҳолда нолдан фарқли бўлади. Номаълум $a_0, a_1, \dots, a_n$ коэффициентларни аниқлаб, изланаётган кўпҳадни

$$L_n(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta} + \frac{\Delta_1}{\Delta} x + \frac{\Delta_2}{\Delta} x^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta} x^n \qquad (4)$$

каби ифодалаш мумкин. Ёки бошқача

$$L_n(x) = y_0 Q_0(x) + y_1 Q_1(x) + \dots + y_n Q_n(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i Q_i(x) \qquad (5)$$

кўринишда ифодаланиши мумкин. Бу ердан кўриниб турибдики, $Q_i(x)$ функция

$$Q_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ агар } i \neq j \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар } i = j \text{ бўлса} \end{cases}$$

шартини (Кронекер белгисини) қаноатлантириши керак, осонгина текшириб кўриш мумкинки, бундай шартни қаноатлантирувчи кўпҳад

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \qquad (6)$$

кўринишда бўлади. $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ нуқталарда $Q_i(x)$ функция 0 га, x_i нуқтада 1 га тенг бўлади

(5) формулада (6) натижани эътиборга олсак,

$$L_n(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \cdot y_i \qquad (7)$$

кўринишдаги Лагранж интерполяцион формуласига эга бўламиз,

(7) формулада $n = 1$ бўлса,

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \tag{8}$$

чизиқли ва $n = 2$ бўлса,

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \tag{9}$$

параболик интерполяцион формулага эга бўламиз.

(7) кўпҳадни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\,\omega'(x_i)},$$

бу ерда $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ $n + 1$-даражали кўпҳаддан иборат бўлиб, унинг $x = x_k$ нуқтадаги ҳосиласи

$$\omega(x_i) = (x_i - x_0)(x - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - \\ - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$$

кабидир.

Мисол. $f(x)$ функция қуйидаги жадвал билан берилган:

i	0	1	2	3
x_i	0	2	3	5
y_i	1	3	2	5

Учинчи даражали Лагранж интерполяцион кўпҳади тузилсин ва $x = 1$ нуқтада функция қиймати ҳисоблансин.

Ечиш. $n = 3$ бўлганда Лагранж интерполяцион кўпҳади (7) га кўра,

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

каби бўлади. x_i ва y_i қийматларни қўйиб, қуйидаги кўпҳадга эга бўламиз:

$$L_3(x) = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1.$$

Ушбу кўпҳадга биноан, $x = 1$ даги функциянинг қиймати

$$f(1) \approx L_3(1) = 3,267$$

каби бўлади.

Энди Лагранж интерполяцион кўпҳади ёрдамида функциянинг x нуқтадаги қийматини ҳисоблаш учун мўлжалланган компьютер дастурини келтирамиз:

```
10 REM—ЛАГРАНЖ ИНТЕРПОЛЯЦИОН КУП-
          ХАДИ
20 DIM X(100), Y(100)
30 GOSUB 150:' НУҚТАЛАРНИ КИРИТИШ
40 INPUT „L(X) УЧУН X“; X:L=0
50 FOR S=0 TO N: P=Y(S)
60 FOR I=0 TO N
70 IF I=S THEN 90
80 P=P*(X—X(I))/(X(S)—X(I))
90 NEXT
100 L=L+P
110 NEXT S
120 PRINT „X аргумент =“; X
130 PRINT „L(X) қиймати =“; L
140 GOTO 40
150 REM—КИЧИК ДАСТУР
160 INPUT „нуқталар сони“; Z:N=Z—1
170 IF Z<2 OR Z<>INT(Z) THEN 160
180 FOR K=0 TO N
190 PRINT „K=“; K
200 INPUT „(X, Y)“; X(K), Y(K)
210 NEXT K
220 'X(K) тугунларни устма-уст тушмаслигини
          текшириш
230 FOR I=0 TO N—1:Z=X(I)
240 I=I+1 TO N
250 IF X(I)<    THEN 270
260 PRINT „X(“; I“)=X(“; I; “) ???“ :END
270 NEXT J I
280 RETURN
```

Ушбу дастурни компьютерда ишлатаётганда тугмалар мажмуасидан компьютер хотирасига қуйидаги маълумотлар киритилиши зарур:

1) интерполяция тугунлар сони;

2) $(x_0, y_0)\cdot(x_1, y_1) \cdots (x_n, y_n)$ нуқталар;

3) $L(x)$ кўпҳаднинг қиймати ҳисобланиши керак бўлган x аргумент қиймати.

Шуни эслатиш зарурки, 3) қадамни бошланғич иккита бандни бажармай туриб кўп марта такрорлаш мумкин.

Агар тугунлар орасидаги масофа ўзгармас бўлса, у ҳолда $\frac{x - x_0}{n} = q$ деб, Лагранж интерполяцион формуласини

$$L_n(x) = L_n(x_0 + qn) = (-1)^n \cdot \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{n!} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{C_n^i y_i}{q - i} \qquad (10)$$

каби ёзиш мумкин. Ушбу

$$(-1)^{n-i} C_n^i \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(q-i)\cdot n!}$$

ифода Лагранж коэффициенти дейилади.

4-§. Лагранж интерполяцион формуласининг хатолиги

Лагранжнинг интерполяцион кўпҳади $f(x)$ функция билан $x_0, x_1, \ldots, x_n$ интерполяция тугунларида устма-уст тушади.

Интерполяция тугунларидан фарқли нуқталарда интерполяцион кўпҳаднинг яқинлашишини баҳолаш учун жадвал усулида берилган $f(x)$ функцияга қўшимча шартлар қўйилиши керак $f(x)$ функция $|a, b|$ кесмада $n + 1$ марта дифференциалланувчи бўлсин дейлик. Хатоликни

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \qquad (1)$$

функция деб ёрдамчи

$$\varphi(x) = R_n(x) - K(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \qquad (2)$$

функцияни киритамиз. Ушбу ёрдамчи функция барча интерполяция тугунларида нолга айланади, бошқача айтганда $n + 1$ та илдизга эга. Функцияда қатнашган номаълум коэффициентни шундай танлаймизки, $\varphi(x)$ функция яна ихтиёрий бирор $\bar{x}$ нуқтада илдизга эга бўлсин. x нуқта интерполяция тугунларидан фарқли ва $\bar{x} \in [a, b]$ Шундай қилиб, $\bar{x}$ нуқта шундай танланадики, $\varphi(\bar{x}) = 0$ бўлади. Демак, $\varphi(x)$ функция $n+2$ та нуқтада нолга айланади. У ҳолда Ролль теоремасига кўра функциянинг ҳосиласи камида $n+1$ нуқтада нолга айланади. $\varphi'(x)$ функцияга қайтадан Ролль теоремасини қўлласак, у ҳолда бу функция камида n нуқтада нолга айланади. Ушбу жараённи $n+1$ марта такрорласак, $[a, b]$ кесмада $\varphi^{n+1}(\xi) = 0$ шарт бажариладиган камида битта ξ нуқта мавжуд эканлигига иқрор бўламиз. Лекин

$$\varphi^{n+1}(x) = f^{n+1}(x) - K(n+1)!.$$

Охирги тенгликка $x = \xi$ ни қўйсак,

$$K = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

эга бўламиз. Бундан

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n)$$

ёки $M_{n+1} = \max\limits_{a<x<b} |f^{n+1}(x)|$ белгилаб ҳамда x нуқтанинг ихтиёрийлигини ҳисобга олиб,

$$R_n(x) = |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x - x_0) \times$$
$$\times (x - x_1) \dots (x - x_n)| \qquad (3)$$

кўринишдаги **Лагранж интерполяцион формуласи учун баҳолаш формуласига** эга бўламиз.

Мисол. Лагранж интерполяцион формуласи ёрдамида $y = \sqrt{x}$ функция учун $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$ тугунлар танлаб, $\sqrt{117}$ сонни қандай аниқликда ҳисоблаш мумкин?

Ечиш. Функция ҳосилаларини топамиз: $y' = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$, $y'' = -\frac{1}{4} \cdot x^{-3/4}$, $y''' = \frac{3}{8} \cdot x^{-5/2}$. Булардан $M_3 = \max|y'''| = \frac{3}{8\sqrt{100^5}}$, бу ерда $100 < x < 144$.

(3) формулага асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$|R_2| < \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{3!}|(115 - 100)(115 - 121)(115 - 144)| \approx$$
$$\approx 1{,}6 \cdot 10^{-3}.$$

5-§. Чекли айирмалар

$y = f(x)$ функция $x_n = x_0 + nh$, n — ихтиёрий бутун сон, h — қадам, кўринишдаги барча қийматлар учун аниқланган бўлсин.

Биринчи тартибли чекли айирмалар деб

$$\Delta y_k = \Delta f_k(x) = f(x_{k+1}) - f(x_k) = y_{k+1} - y_k,$$

иккинчи тартибли чекли айирмалар деб

$$\Delta^2 y_k = \Delta^2 f_k(x) = f(x_{k+2}) - 2f(x_{k+1}) + f(x_k) = \\ = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

ва ҳоказо n- тартибли чекли айирмалар деб

$$\Delta^n y_k = \Delta^n f_k(x) = \Delta^{n-1} f_{k+1}(x) - \Delta^{n-1} f_k(x) = \\ = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$$

ифодаларга айтилади. Чекли айирмаларни одатда жадвалга жойлаштириш қулай:

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$	...
x_0	y_0	Δy_0				
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$			
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$		
x_4	y_4					
...						

n- тартибли чекли айирма $y_0, y_1, \ldots, y_n$ катталиклар орқали қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\Delta^n y_k = y_{k+n} - C_n^1 y_{k+n-1} + C_n^2 y_{k+n-2} - \ldots + (-1)^n y_n.$$

Чекли айирмаларнинг қуйидаги хоссаларини таъкидлаб ўтамиз:

1°. Функциялар йиғиндисининг (айирмасининг) чекли айирмаси функцияларнинг чекли айирмалари йиғиндисига (айирмасига) тенг:

$$\Delta^n (f(x) \pm \varphi(x)) = \Delta^n f(x) \pm \Delta^n \varphi(x).$$

2°. Функция ўзгармас сонга кўпайтирилса, унинг чекли айирмаси ўша сонга кўпаяди:

$$\Delta^n (k \cdot f(x)) = k \cdot \Delta^n f(x).$$

3°. n-тартибли чекли айирманинг m-тартибли чекли айирмаси $(n+m)$-тартибли чекли айирмага тенг:

$$\Delta^m (\Delta^n y) = \Delta^{m+n} y.$$

4°. n-тартибли кўпҳаднинг n-тартибли чекли айирмаси ўзгармас сонга, $n+1$-тартибли чекли айирмаси эса нолга тенг.

1-мисол. Жадвал усулида берилган

x	2	4	6
y	3,146	4,028	4,911

функция учун иккинчи тартибли чекли айирмаларни тузинг.

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамаз:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
2 4 6	3,146 4,028 4,911	0,882 0,883	0,001

6-§. Ньютоннинг интерполяцион формулалари

$y = f(x)$ функциянинг $n+1$ та қиймати маълум бўлсин, яъни аргументнинг $n+1$ та $x_0, x_1, \ldots, x_n$ қийматларида функциянинг қийматлари $y_0, y_1, \ldots, y_n$ бўлсин. Тугунлар орасидаги масофа h ўзгармас бўлсин. Аргументнинг тегишли қийматларида даражаси n дан ошмайдиган тегишли қийматлар оладиган кўпҳад тузиш талаб этилган бўлсин.

Изланаётган кўпҳаднинг кўринишини қуйидагича танлайлик:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}), \qquad (1)$$

бу ерда $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — номаълум коэффициентлар. Интерполяция масаласидаги шартга кўра $P_n(x)$ кўпҳад $x_0, x_1, \ldots, x_n$ интерполяция тугунларида $P_n(x_0) = y_0$, $P_n(x_1) = y_1, \ldots, P_n(x_n) = y_n$ қийматлар қабул қилади. У ҳолда $x = x_0$ бўлса, $P_n(x_0) = y_0 = a_0$, яъни $a_0 = y_0$ бўлади. Энди $P_n(x)$ кўпҳадда $x = x_1$ бўлсин.

$P_n(x_1) = y_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$ ёки $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$.

(1) формулада $x = x_2$ бўлса, у ҳолда аналогик равишда

$$a_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2!h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

эканлигини аниқлаш мумкин. Ушбу жараённи давом эттириб, $x = x_n$ учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Топилган $a_0, a_1, \dots, a_n$ коэффициентларнинг қийматларини (1) формулага қўйсак,

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta v_0}{1!h_2}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \dots (x - x_{-1}) \qquad (2)$$

кўринишга эга бўлган Ньютоннинг 1-интерполяцион формуласи келиб чиқади. Ушбу интерполяцион формулада $q = (x - x_0)/h$ белгилаш киритилса, унинг кўриниши

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots +$$

$$+ \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (3)$$

каби бўлади.

Ньютоннинг 1-интерполяцион формуласини $[a, b]$ нинг бошланғич нуқталарида қўллаш қулай.

Агар $n = 1$ бўлса, у ҳолда $P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0$ кўринишдаги чизиқли интерполяциялаш формуласига; $n = 2$ бўлганда эса

$$P_2(x) = y_0 + q \cdot \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \cdot \Delta^2 y_0$$

кўринишдаги параболик интерполяцион формулага эга бўламиз.

Баъзан Ньютоннинг 1-формуласини олдинга қараб интерполяциялаш формуласи ҳам дейилади.

Лагранж кўпҳади билан Ньютон кўпҳади берилган жадвал учун айнан бир хил бўлиб, улар фақат ёзилиши билан фарқ қилади, чунки x нинг бериладиган $n+1$ та қийматларида берилган $n+1$ та қийматларга эга бўладиган, даражаси n дан ошмайдиган (юқори бўлмаган) кўпҳад ягона усулда топилади.

Кўп ҳолларда Ньютоннинг интерполяцион кўпҳади Лагранжнинг интерполяцион кўпҳадига қараганда қулайроқдир. Ньютон кўпҳадининг хусусияти шундан иборатки, k-даражали кўпҳаддан $k+1$-даражали кўпҳадга ўтишда унинг дастлабки $k+1$ та ҳадлари ўзгармайди, фақат аргументнинг барча олдинги қийматларида нолга тенг бўлган янги бир ҳад ортади, холос.

Энди Ньютоннинг биринчи интерполяцион кўпҳади ёрдамида функциянинг x нуқтадаги қийматини ҳисоблаш учун мўлжалланган компьютер дастурини келтирамиз:

```
10 REM — НЬЮТОН ИНТЕРПОЛЯЦИОН КЎПҲАДИ
20 DIM X(100), Y(100)
30 GOSUB 230 :БОШЛАНҒИЧ ҚИЙМАТЛАРНИ КИРИТИШ
40 R = Y(0)
50 GOSUB 140 :'ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ
60 INPUT „X нинг қиймати =“; X
70 S = R : Q = (X - X0)/H : A = 1
80 FOR K = 0 TO N - 1
90 A = A * (Q - K)/(K + 1)
100 S = S + A * D(K)
110 NEXT K
120 PRINT „X =“; X, „P(X) =“; S
130 GOTO 60
140 REM — „ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАР“ ҚИСМ ДАСТУРИ
150 D(K) ФОРМУЛАДА ЖАДВАЛНИНГ 1-САТРИ
160 FOR J = 1 TO N
170 FOR K = 0 TO N - J
180 Y(K) = Y(K + 1) - Y(K)
190 NEXT K
200 D(J - 1) = Y(0)
210 NEXT J
220 RETURN
230 REM — „КИРИТИШ“ ҚИСМ ДАСТУРИ
```

```
240 INPUT „НУҚТАЛАР СОНИ=“; Z:N=Z-1
250 IF Z<2 OR Z<>INT(Z) THEN 240
260 INPUT „X0=“; X0
270 INPUT „H қадам=“; H:IF H<=0 THEN 270
280 FOR K=0 TO N
290 PRINT „K=“; K,
300 INPUT „Y(K)=“; Y(K)
310 NEXT K
320 RETURN
```

Ушбу компьютер дастурини ишга туширганда унинг хотирасига қуйидаги маълумотларни киритиш талаб қилинади:

1) интерполяция тугунлари сони;

2) „жадвал боши“ — x_0;

3) h қадам;

4) $y_0, y_1, \ldots, y_n$ қийматлар;

5) $P_n(x)$ функциянинг қийматлари ҳисобланиши керак бўлган x аргумент қиймати.

Шуни эслатиб ўтиш керакки, 5) қадамни кўп марта такрораш мумкин.

Изланаётган кўпҳад кўринишини (1) каби эмас, балки

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ + \ldots + a_n(x - x_n) \ldots (x - x_1) \qquad (4)$$

каби танлаш ҳам мумкин. Бунда қатнашаётган $a_0, a_1, \ldots, a_n$ номаълум коэффициентларни топишни $x = x_n$ бўлган ҳолдан бошлаш керак Сўнгра аргументга x_{n-1}, $x_{n-2}, \ldots$ қийматлар бериб, қолган коэффициентлар аниқланади. Коэффициентларнинг кўриниши мос равишда

$$a_0 = y_n, \quad a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}, \ldots, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

каби эканлигига ўқувчи осонгина текшириб кўриб, иқрор бўлиши мумкин Топилган коэффициентларнинг қийматларини (4) формулага қўйсак,

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^3}(x - x_n) \times \\ \times (x - x_{n-1}) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n) \ldots (x - x_1) \qquad (5)$$

кўринишдаги Ньютоннинг 2-интерполяцион

формуласи келиб чиқади. Ушбу формулада $q = (x - x_n)/x$ белгилаш киритилса,

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots +$$
$$+ \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (6)$$

ҳосил бўлади. Баъзан бу формулани орқага қараб интерполяциялаш формуласи ҳам дейилади. (6) формуладан $[a, b]$ кесманинг охирги нуқталарида фойдаланиш қулайроқдир.

Ньютоннинг 1—2-формулаларининг қолдиқ ҳадларини баҳолаш формуласи мос равишда қуйидагилардан иборат:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi),$$

бу ерда $q = (x - x_0)/h$, $\xi \in [x_0, x_n]$ ва

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi),$$

бу ерда $q = (x - x_n)/h$, $\xi \in [x_0, x_n]$.

Амалда функциянинг аналитик кўриниши ҳар доим маълум бўлавермайди. Бундай ҳолларда чекли айирмалар тузилиб, берилган аниқликка яқин бўлганда тўхтатилади ва тахминан

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}$$

деб олинади. Шунинг учун Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласи учун хатолик формуласи

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}\cdot\Delta^{n+1}y_0$$

ва иккинчи интерполяцион формуласи учун

$$R_n(x) \approx \frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}\cdot\Delta^{n+1}y_n$$

каби бўлади.

7-§. Функцияларни кўпҳадлар билан энг яхши яқинлаштириш ҳақида. Чебишев полиноми ёрдамида интерполяция тугунларини танлаш

$[a, b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функция берилган бўлсин. Шу функцияни аввалдан берилган ҳар қандай аниқлик даражаси билан $P(x)$ кўпҳад шаклида тақрибий тасвирлаш мумкинми? Бошқача айтганда, $f(x)$ ва $P(x)$ орасидаги айирманинг абсолют қиймати $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқтасида олдиндан берилган ε мусбат сондан кичик бўладиган $P(x)$ кўпҳадни топиш мумкинми? Бу саволга ижобий жавоб* қуйидаги исботсиз келтирилган теоремада берилган:

Вейерштрасс теоремаси. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шу кесманинг ҳамма нуқталарида

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $P(x)$ кўпҳад мавжуддир.

Рус математиги С. Н. Бернштейн берилган кесмада узлуксиз $f(x)$ функцияга тақрибий тенг бўлган бундай кўпҳадларни топишнинг қуйидаги усулини берди.

Масалан, $f(x)$ функция $[0, 1]$ кесмада узлуксиз бўлсин. Ушбу ифодани тузамиз:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m \cdot x^m \cdot (1-x)^{n-m}, \qquad (1)$$

бу ерда C_n^m — биномиал коэффициентлар. $f\left(\frac{m}{n}\right)$ — берилган функциянинг $x = \frac{m}{n}$ нуқтадаги қиймати, $B_n(x)$ ифода n-даражали кўпҳад; у Бернштейн кўпҳади дейилади.

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон берилган бўлса, шундай Бернштейн кўпҳади топиш (яъни унинг даражаси n ни шундай танлаб олиш) мумкинки, x нинг $[0, 1]$ кесмадаги ҳамма қийматлари учун $|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади.

---

* Бу саволга Лагранж ва Ньютон интерполяцион формулалари жавоб бермайди. Унинг қийматлари тугунлардан ташқарида функциянинг тегишли қийматларидан жуда узоқда бўлиши мумкин.

Ҳар қандай $[a, b]$ кесма ўрнига $[0, 1]$ кесмани қараш умумийликни чегараламайди, чунки $x = a + t \times (b - a)$ алмаштириш билан ҳар қандай $[a, b]$ кесмани $[0, 1]$ кесмага ўтказиш мумкин. Бунда n-даражали кўпҳад яна шу даражали кўпҳадга алмашинади.

Функцияни кўпҳадлар билан энг яхши яқинлаштириш назариясининг ижодчиси, математика фанининг энг буюк намояндаларидан бири бўлган рус математиги П. Л. Чебишевдир (1821 — 1894).

Маълумки, топилган кўпҳаднинг функциядан четланиши $f^{(n+1)}(\xi)$ ва $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$ ларга боғлиқ.

Шундай масала қўяйлик: $\sup\limits_{[a, b]} |\Pi_{n+1}(x)|$ энг кичик бўлиши учун x_i тугунларни қандай танлаш лозим? Ушбу саволга жавоб бериш учун Чебишев полиномидан (кўпҳадидан) фойдаланишга тўғри келади.

Чебишев кўпҳадининг умумий кўриниши қуйидагидан иборат:

$$T_n(x) = \cos\{n \arccos x\}, \quad |x| \leqslant 1.$$

$$n = 1 \text{ бўлса, } T_1(x) = \cos(\arccos x) = x;$$

$$n = 2 \text{ бўлса, } T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Сўнгра

$$\cos(n + 1)\theta = 2\cos\theta \cos n\theta - \cos(n - 1)\theta$$

айниятдан $\theta = \arccos x$ деб қуйидаги рекуррент формулага эга бўламиз:

$$T_{n+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Шундай қилиб, Чебишев кўпҳади x номаълумнинг юқори даражаси олдидаги коэффициенти 2^{n-1} бўлган кўпҳаддан иборат экан. Рекуррент формуладан кетма-кет қуйидагиларни топамиз:

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20^3 + 5x,$$

. . . .

$T_n(x)$ n-даражали кўпҳад каби аниқ n та илдизга эгадир. Равшанки, $\cos(n \arccos x) = 0$ дан

$$n \cdot \arccos x = \frac{\pi}{2}(2m + 1) \text{ ёки } x = \cos\frac{(2m + 1)\pi}{2n}$$

ҳосил бўлади. m га 0, 1, 2, ..., $n-1$ қийматлар бериб, турли n та илдизни аниқлаймиз. Бу илдизларнинг барчаси -1 ва $+1$ орасида жойлашгандир.

Кўриниб турибдики, $[-1, 1]$ кесмада $\max|T_n(x)|$ 1 га тенг ва у $n+1$ та $x_m = \cos\frac{m\pi}{n}$ $(m=0, 1, 2, \ldots, n)$ нуқтада шундай қийматга эришади. Агар интерполяциялаш кесмаси $[a, b]$ ўрнига $[-1, 1]$ кесма ва интерполяциялаш тугунлари ўрнига Чебишев кўпҳадининг x_m илдизлари олинса, у ҳолда $\Pi_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} \times$ $\times T_{n+1}(x)$ ва $\sup|\Pi_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}$ каби бўлади Юқори коэффициенти 1 бўлган ҳар қандай n- даражали $P(x)$ кўпҳад олмайлик,

$$\sup_{x\in[-1, 1]}|P(x)| > \frac{1}{2^{n-1}}$$

шарт бажарилади.

Шундай қилиб, $[-1, 1]$ кесмада $\sup|\Pi_{n+1}(x)|$ ўзининг мумкин бўлган энг кичик қийматини тугунлар учун Чебишев кўпҳадининг илдизлари олингандагина қабул қилади ва бу ҳолда хатолик

$$|f(x) - L_n(x)| < \frac{M^{n+1}}{2^n(n+1)!} \qquad (2)$$

каби бўлади.

Агар интерполяциялаш ихтиёрий $[a, b]$ кесмада бажарилаётган бўлинса, у ҳолда

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)z + (b+a)], \quad z = \frac{1}{b-a}[2x - b - a]$$

чизиқли алмаштириш билан уни $[-1, 1]$ кесмага келтириш мумкин. Бунда $T_{n+1}(x)$ кўпҳаднинг илдизлари

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cdot\cos\frac{2m+1}{2n+2}\cdot\pi + (b+a)\right]$$

кўринишга ўтади. Баҳолаш бу ҳол учун

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

формула орқали амалга оширилади.

Натижада функцияни

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1T_1(x) + \ldots + a_nT_n(x) + \ldots \qquad (3)$$

каби олиш мумкин бўлиб, бу ерда

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\,T_k(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ушбу қатор Лагранж кўпҳадига қараганда тезроқ яқинлашади.

Интерполяция тугунлари қуйидагича танланади: $\theta_m = m\pi/n$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ нуқталарда y_m функция қийматлари билан берилади, бошқача айтганда, x ўзгарувчи учун ушбу нуқталар $x_m = \cos(m\pi/n)$ қонуният бўйича жойлашиши керак. Бундан кўриниб турибдики, интерполяция тугунлари текис жойлашмайди. Тугунлар $[-1, 1]$ кесма чеккаларида қуюқлашади. Тугунларда функциянинг қийматлари

$$y_m = f(x_m) - f\left(\cos m\,\frac{\pi}{n}\right)$$

каби бўлади, бу ерда $m = 0, 1, \ldots, n$.

8-§. Сплайнлар билан интерполяциялаш

Тугунлари сони кўп бўлган интерполяция анча мураккабдир (катта сондаги кесмадаги интерполяция), чунки биринчидан, тугунлар орасидаги аниқлик кичик бўлса, иккинчидан, кесма четларида етарлича четланади (тебранади) ва функция ўзгаришини бузади. Бу ҳол айниқса кетма-кет ҳосилалар олинаётганда яққол сезилади. Кўпинча бундай ҳоллар учун кичик даражали кўпҳадлар билан алоҳида интерполяциялаш қўл келади; кам сондаги тугунларда интерполяциялаб, сўнгра кўпҳадлар умумий интерполяция функциясига бирлаштирилади. Одатда туташган нуқталарда биринчи тартибли ҳосилалар узилишга эга бўлади.

$[a, b]$ кесмада $f(x)$ функциянинг қийматлари интерполяциянинг маълум $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ тугунларида берилган бўлсин. m- даражали сплайн билан интерполяциялаш масаласини қўяйлик.

Шундай $P_m(x)$ функция топилсинки, у:

1) ҳар бир $[x_{k-1}, x_k]$ кесмада m- тартибли P_{mk} кўпҳаддан иборат бўлсин:

$$P_{mk}(x)=a_{mk}x^m+a_{m-1,k}x^{m-1}+\dots+a_{1k}x+a_{0k};$$

2) x_k нуқталарда

$$P_m(x_k)=f(x_k)\ (k=0,\ 1,\ \dots,\ n)$$

тенглик бажарилсин;

3) $m-1$- тартибли ҳосилага эга бўлсин, яъни

$$P_{mk}^{(s)}(x_k)=P_{m,k+1}^{(s)}(x_k)\ (k=1,\ 2,\ \dots,\ n-1;\\ s=1,\ 2,\ \dots,\ m-1)$$

шартларни қаноатлантирсин;

Юқорида келтирилган шартлардан ташқари яна бир қанча чегаравий шартлар ҳам қўйилади (масалан. чегаралардаги ҳосилалар учун). $P_m(x)$ функция m- тартибли сплайн дейилади.

Ҳар бир хусусий кесмадаги кўпҳаднинг энг катта даражаси сплайн даражаси дейилади, сплайн даражаси билан $[a,\ b]$ кесмадаги узлуксиз ҳосиланинг энг юқори тартибли айирмасига сплайн дефекти дейилади.

Амалда умумий ҳолдаги сплайн — интерполяция қўлланмайди. Кўпчилик ҳолларда $[a,\ b]$ кесмада ақалли биринчи тартибли ҳосиласи узлуксиз бўлган учинчи тартибли сплайнлар қўлланилади. Бу сплайнлар кубик сплайнлар дейилади. Кубик сплайнни кўриб чиқайлик.

Ёнма-ён жойлашган бир жуфт тугунлардан ўтувчи функция учинчи даражали кўпҳаддан иборат, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$P_3(x)=a_l+b_l(x-x_{l-1})+c_l(x_{l-1})^2+\\ +d_l(x-x_{l-1})^3. \quad (1)\\ x_{l-1}\leqslant x\leqslant x_l.$$

Кўпҳаднинг ҳар бир интервалдаги мос коэффициентлари тугунлардаги шартларга кўра аниқланади. Равшанки кўпҳад тугунларда жадвал қийматларни қабул қилади:

$$y_{l-1}=P_3(x_{l-1})=a_l,\ 1\leqslant l\leqslant n; \quad (3,$$

$$y_l=P_3(x_l)=a_l+b_lh_l+c_lh_l^2+d_lh_l^3.$$

$$h_l=x_l-x_{l-1}. \quad (3)$$

Бу тенгламаларнинг сони номаълумларнинг сонидан икки марта кам, шунинг учун масала аниқ бўлиши учун ёрдамчи шартлар керак. Бунинг учун (1) кўпҳаднинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари топилади:

$$P_3'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2;$$
$$P_3''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), \quad x_{i-1} < x < x_i$$

Бу ҳосилалар барча нуқталарда (тугунлар билан биргаликда) узлуксиз бўлсин дейлик. Оралиқ x_i тугунларда ҳосилаларнинг ўнг ва чап лимитларини тенглаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1; \qquad (4)$$
$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1. \qquad (5)$$

Етишмаган икки шарт чекка нуқталарда графикнинг ноль эгрилигига кўра аниқланади:

$$\frac{1}{2}P_3''(x_0) = c_1 = 0, \quad \frac{1}{2}P_3''(x_n) = c_n + 3d_n h_n = 0. \qquad (6)$$

Агар функциянинг асимптоталари ҳақида ёрдамчи маълумотлар бўлса, у ҳолда бу шартлар ўрнига бошқа чегаравий шартлар қўлланиши мумкин.

(2) — (6) тенгламалар $4n$ та номаълумни аниқлаш мумкин бўлган чизиқли тенгламалар системасини ташкил этади. Бу системани Гаусс усули билан ечиш мумкин. Лекин уни аввал махсус кўринишга келтириб, сўнгра ечиш қулайроқ. (2) тенгламадан барча a_i коэффициентларни аниқлаш мумкин.

(5) ва (6) тенгламалардан

$$d_i = (c_{i+1} - c_i)/3h_i, \quad 1 \leqslant i < n-1$$
$$d_n = -c_n/3h_n \qquad (7)$$

келиб чиқади.

(7) муносабатни (3) га қўямиз, бунда $a_i = y_{i-1}$ эътиборга олинади, у ҳолда

$$b_i = [(y_i - y_{i-1})/h_i] - \frac{1}{3}h_i(c_{i+1} + 2c_i), \quad 1 < i < n-1,$$
$$b_n = [(y_n - y_{n-1})/h_n] - \frac{2}{3}h_n c_n \qquad (8)$$

муносабатларга эга бўламиз.

Энди (8) муносабатнинг иккинчисида мос равишда индексни бирга ошириб ҳамда (7) асосида (4) даги b_i,

b_{i+1} ва d_i катталикларни йўқотамиз. У ҳолда c_i коэффициентлар учун осонгина қуйидаги ҳолга келтириладиган чизиқли тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{gathered} c_1 = 0, \\ h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} = 3[(y_i - \\ - y_{i-1})/h_i - (y_{i-1} - y_{i-2})/h_{i-1}], \qquad (9) \\ 2 \leqslant i \leqslant n, \\ c_{n+1} = 0. \end{gathered}$$

Ушбу системанинг матрицаси уч диагоналли, яъни асосий диагонали ва икки қўшни диагонал элементларидан ташқари барча элементи ноллардан иборат бўлган матрицадир. Бундай чизиқли тенгламалар системасини ечиш осонгина ҳал қилинади. c_i коэффициентлар топилгандан сўнг (2), (7) ва (8) формулалардан фойдаланиб, қолган коэффициентлар ҳам топилади.

$m_i = P_3'(x_i)$ катталик x_i тугунда сплайннинг оғишини ифодалайди.

9-§. Сонли дифференциаллаш

1. Сонли дифференциаллаш масаласининг қўйилиши. Сонли дифференциаллаш масаласи функция жадвал усулда берилганда ёки аналитик кўринишда берилиб, унинг ҳосиласини аниқлаш мураккаб бўлган ҳолларда зарур бўлади. Сонли дифференциаллаш масаласи нокоррект ҳисобланади, чунки функция аргументи қийматининг жуда кам ўзгариши ҳосила қийматларида етарлича катта фарқларга олиб келиши мумкин. Ана шу ҳолатни сонли дифференциаллаш масаласи ҳал қилинаётганда, айниқса, берилган функцияни бирор интерполяцион кўпҳад билан алмаштираётганда эътиборга олиш керак.

Сонли дифференциаллаш масаласи қуйидагича қўйилади: $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўзининг $n + 1$ та қиймати билан жадвал кўринишида берилган бўлсин. Шу функция ҳосиласининг аналитик кўринишини топиш талаб этилади.

Одатда ифодаланадиган функция учун интерполяцион кўпҳадлардан бироргаси танланади. Агар қўйилган масалада интерполяция тугунлари орасидаги масофа тенг бўлса, яъни $x_{i+1} - x_i = h$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функцияни алмаштириш учун Ньютон формулаларидан бирортасини қўллаш қулай, акс ҳолда Лагранж интерполяцион кўпҳадларидан бирортасини қўллаган маъқул.

2. Ньютон интерполяцион кўпҳади билан интерполяцияланган функцияни дифференциаллаш. Ньютоннинг 1- интерполяцион формуласи тугунлар орасидаги масофа тенг бўлганда қуйидаги кўринишга эга:

$$f(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + $$
$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots, \qquad (1)$$

бу ерда $q = (x - x_0)/h$ ва $h = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Бу формулани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f(x) \approx y_0 + q \cdot \Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 +$$
$$+ \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \ldots \qquad (2)$$

Энди

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{df(x)}{dx} \qquad (3)$$

эканлигини ҳисобга олиб, (2) ни дифференциаллаймиз:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q - 1}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{2q^3 - 9q^3 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right]. \qquad (4)$$

Энди $y = f'(x)$ функцияни дифференциаллаб,

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q - 1) \cdot \Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{13} \times \right.$$
$$\left. \times \Delta^4 y_0 + \ldots\right] \qquad (5)$$

муносабатга эга бўламиз, чунки

$$f''(x) = \frac{d(f'(x))}{dx} = \frac{d(f'(x))}{dq} \cdot \frac{dq}{dx}.$$

Худди шундай, функциянинг бошқа ҳосилаларини аниқлаш мумкин. Амалда кўпинча функциянинг x_0 тугундаги ҳосиласини топиш талаб этилади. Шунинг учун $q = 0$ десак, қуйидаги кўринишдаги формулаларга эга бўламиз:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots\right) \quad (6)$$

ва

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \dots\right). \quad (7)$$

Ҳосилани аниқлашдаги хатолик

$$R'_k(x_0) \approx h^{k+1}\,\frac{q(q-1)\dots q-k)}{(k+1)!}\cdot y^{(k+1)}(\xi) \quad (8)$$

формула ёрдамида тақрибан баҳоланади, бу ерда $\xi \in$ $\in [a, b]$ бўлиб, у интерполяция тугунларидан фарқлидир.

Жадвал охиридаги нуқтадаги функция ҳосиласини аниқлаш учун Ньютоннинг 2-интерполяцион формуласидан фойдаланиш зарур:

$$f(x) \approx y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!}\times \Delta^4 y_{n-4} + \dots, \quad (9)$$

бу ерда $q = (x - x_n)/h$. У ҳолда ҳосилаларнинг тақрибий қийматлари

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1} + \frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{3q^2+6q+2}{6}\times \Delta^3 y_{n-3} + \frac{2q^3+9q^2+11q+3}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \dots\right] \quad (10)$$

ва

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{n-2} + (q+1)\Delta^3 y_{n-3} + \frac{6q^2+18q+11}{12}\times \Delta^4 y_{n-4} + \dots\right] \quad (11)$$

каби бўлади. $x = x_n$ нуқтадаги ҳосилалар эса мос равишда

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2} + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3} + \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4} + \frac{\Delta^5 y_{n-5}}{5} + \dots\right) \quad (12)$$

ва

$$f''(x_n) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{n-2} + \Lambda^3 y_{n-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{6}\Delta^5 y_{n-5} + \ldots\right) \tag{13}$$

кўринишига эга бўлади. Ҳосилаларни аниқлаётгандаги хатолик

$$R_k^{'}(x_n) = h^{k+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+k)}{(k+1)!}\cdot y^{(k+1)}(\xi)$$

формула ёрдамида баҳоланади.

Мисол. $y = f(x)$ функция қуйидаги жадвал билан берилган:

x_i	1	2	3	4
y_i	4	9	26	61

Сонли дифференциаллаш усули билан $y = f(x)$ функциянинг $x=1$ нуқтадаги биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг.

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Lambda^3 y_i$
0	1	4	5	12	6
1	2	9	17	18	
2	3	26	35		
3	4	61			

Қадам $h = 1$ бўлганлигидан, (6) формулага кўра

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0\right), \quad f'(1) = 1$$

ҳосил бўлади. Худди шунингдек $x_0 = 1$ нуқта учун иккинчи тартибли ҳосилани аниқлаймиз. (7) формулага кўра у

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0); \quad f''(1) = 6$$

кўринишга эга бўлади.

Лагранж кўпҳади билан интерполяцияланган функцияни дифференциаллаш. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўзининг $n+1$ та қийматлари билан жадвал кўринишида берилган бўлсин. Соддалик учун тугунлар орасидаги масофа тенг бўлган ҳолни қараймиз. Лагранж кўпҳадининг кўриниши қуйидагидан иборат:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i} \cdot y_i, \qquad (14)$$

бу ерда $q = (x - x_0)/h$ — интерполяция қадами. $\frac{dx}{dq} = h$ бўлганлигидан, (14) га кўра

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{d}{dq} \left[\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i} \right] \cdot y_i \qquad (15)$$

формулага эга бўламиз.

Ҳосилани аниқлашда қўйилган хатолик қуйидаги формула ёрдамида баҳоланади:

$$R'_n(x) = (-1)^{n-i} h^n \cdot \frac{(n-i)!\,i!}{(n+1)!} \cdot y^{(n+1)}(\xi), \qquad (16)$$

бу ерда ξ — $[a, b]$ кесмадаги интерполяция тугунларидан фарқли бўлган нуқта.

$n = 2$ бўлса, қуйидагига эга бўламиз:

$$L_2(x) = \frac{1}{2} \cdot y_0 \cdot (q-1)(q-2) - y_1 \cdot q(q-2) + \\ + \frac{1}{2} \cdot y_2 \cdot q(q-1)$$

Хусусан, функция ҳосиласининг тугунлардаги қийматлари учун қуйидаги ифодаларга эга бўламиз:

$$y'_0 = \frac{1}{2h} \cdot (-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^3}{3} \cdot f'''(\xi);$$

$$y'_1 = \frac{1}{2h} \cdot (-y_0 + y_2) - \frac{1}{6} h^2 \cdot f'''(\xi);$$

$$y'_2 = \frac{1}{2h} \cdot (y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{1}{3} h^2 \cdot f'''(\xi).$$

$n = 3$ бўлган ҳолда эса қуйидагиларга эга бўламиз:

$$y'_0 = \frac{1}{6h} \cdot (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} \cdot f^{IV}(\xi);$$

$$y'_1 = \frac{1}{6h} \cdot (-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} \cdot f^{IV}(\xi);$$

$$y'_2 = \frac{1}{6h} \cdot (y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^5}{12} \cdot f^{IV}(\xi);$$

$$y'_3 = \frac{1}{6h} \cdot (-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} \cdot f^{IV}(\xi).$$

Шуни таъкидлаб ўтмоқ зарурки, сонли дифференциаллаш формулалари интерполяция формулаларига қараганда камроқ аниқликка эга, лекин улар ҳисоб учун қулай.

Худди шунингдек, иккинчи тартибли хосиланинг тугунлардаги қийматлари учун формула топиш мумкин. Чунончи, $n = 2$ бўлса,

$$y''_0 = \frac{1}{6h^2} \cdot (y_0 - 2y_1 + y_2) - h \cdot f'''(\xi_1) + \frac{h^2}{6} \cdot f^{VI}(\xi_2);$$

$$y''_1 = \frac{1}{6h^2} \cdot (y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12} \cdot f^{IV}(\xi);$$

$$y''_2 = \frac{1}{6h^2} \cdot (y_0 - 2y_1 + y_2) + h \cdot f'''(\xi_1) - \frac{h^2}{6} \cdot f^{IV}(\xi_2).$$

$n = 3$ бўлса (яъни нуқталар сони тўртта бўлса),

$$y''_0 = \frac{1}{6h^2} \cdot (12y_0 - 30y_1 + 24y_2 - 6y_3) + \frac{11}{12}h_2 \cdot f^{IV}(\xi_1) - \\ - \frac{h^3}{10} \cdot f^{V}(\xi_2);$$

$$y''_1 = \frac{1}{6h^2} \cdot (6v_0 - 12y_1 + 6y_2) - \frac{1}{12}h^2 \cdot f^{IV}(\xi_1) - \frac{h^3}{30} \cdot f^{V}(\xi_2);$$

$$y''_2 = \frac{1}{6h^2} \cdot (6y_1 - 12y_2 + 6y_3) - \frac{1}{12}h^2 \cdot f^{IV}(\xi_1) - \\ - \frac{h^3}{30} \cdot f^{V}(\xi_2);$$

$$y''_3 = \frac{1}{6h^2} \cdot (-6y_0 + 24y_1 - 30y_2 + 12y_3) + \frac{11}{12}h^2 \cdot f^{IV}(\xi_1) - \\ - \frac{h^3}{10} \cdot f^{V}(\xi_2)$$

ҳосил бўлади.

10- §. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш

Интегралланувчи $f(x)$ функциянинг бошланғичини маълум (элементар) функциялар орқали ифодалаш мумкин бўлмаганда, $f(x)$ функция жадвал ёки график усулда берилганда интегрални тақрибий ҳисоблашга тўғри келади. Қуйида ҳисоблаш учун қулай (синалган) усуллар билан танишиб чиқамиз

1. Тўғри тўртбурчаклар усули. $[a, b]$ кесмада $y = f(x)$ функция ўзининг $n+1$ та қийматлари билан берилган бўлсин (агар функция узлуксиз бўлса, $[a, b]$

кесмани n та бўлакка бўлиб, функциянинг шу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз). Функциянинг $x_0, x_1, \dots, x_r$ нуқталардаги қийматлари мос равишда $y_0, y_1, \dots, y_n$ бўлсин.

Ушбу йиғиндиларни тузамиз:

$$y_0h + y_1h + \dots + y_{n-1}h,$$

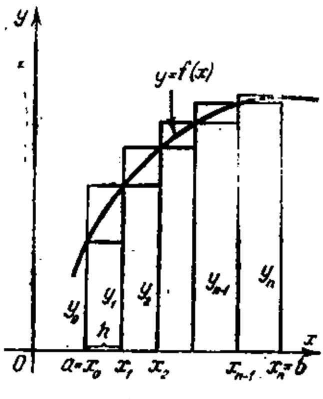
$$y_1h + y_2h + \dots + y_nh.$$

Бу йиғиндиларнинг ҳар бири $f(x)$ функция учун $[a, b]$ кесмада интеграл йиғинди бўлади ва шунинг учун $\int_a^b f(x)\,dx$ аниқ интегралнинг тақрибий қийматини ифодалайди:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i, \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = h\sum_{i=1}^{n} y_i. \quad (2)$$

Булар тўғри тўртбурчаклар формулаларидир. 27-расмдан қуйидагиларни кўриш мумкин: агар $f(x)$ мусбат ва ўсувчи функция бўлса, у ҳолда (1) формула „ички“ тўғри тўртбурчаклардан тузилган зинапоясимон шаклнинг юзини тасвирлайди; (2) формула эса „ташқи“ тўртбурчаклардан тузилган зинапоясимон шаклнинг юзини тасвирлайди. Интегрални тўғри тўртбурчаклар формуласи билан ҳисоблашда қилинган хатолик n қанча катта бўлса, яъни бўлиниш қадами $h = (b-a)/n$ қанча кичик бўлса, шунча кичик бўлади.



27-расм.

Энди $[a, b]$ сегментда берилган $f(x)$ функцияни h қадам билан тўғри тўртбурчак усулида интеграллашнинг компьютер дастурини келтирамиз.

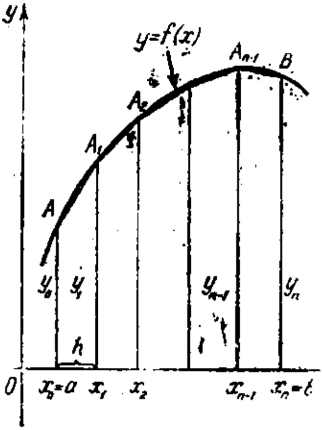
```
10 REM—ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАК ФОРМУЛАСИ
            БИЛАН ИНТЕГРАЛЛАШ
20 INPUT „ИНТЕГРАЛНИНГ ҚУЙИ ЧЕГАРА-
            СИ“; A
30 INPUT „ИНТЕГРАЛНИНГ ЮҚОРИ ЧЕГАРА-
            СИ“; B
40 INPUT „[A, B] СЕГМЕНТНИ БЎЛИШ СОНИ“; N
50 S = 0
60 H = (B — A)/N
70 X = A
80 FOR I = 1 TO N
90 S = S + H * F(X)
100 X = X + H
110 NEXT I
120 PRINT : PRINT N; „ТА СЕГМЕНТ БЎЙИЧА“
130 PRINT A; „ДАН“; B; „ГАЧА ИНТЕГРАЛ =“; S
140 END
```

2. **Трапециялар усули.** Ағар берилган $y=f(x)$ эгри чизиқни тўғри тўртбурчаклар формуласида бўлганидек зинапоясимон чизиқ билан алмаштирмасдан, балки ички чизилган синиқ чизиқ билан алмаштирсак, у ҳолда аниқ интегралнинг анча аниқроқ қиймати ҳосил бўлишини кутиш табиийдир (28-расм).

Бу ҳолда эгри чизиқли $aABb$ трапециянинг юзи юқоридан AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$ ватарлар билан чегараланган тўғри чизиқли трапециялар юзларининг йиғиндисига тенг бўлади. бу Аммо трапециялардан биринчисининг юзи $\frac{y_0+y_1}{2}\times h$, иккинчисининг юзи $\frac{y_1+y_2}{2}h$ ва Аммо ҳоказо бўлганлиги сабабли

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}h + \frac{y_1+y_2}{2}h + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h$$

ёки



28- расм.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\right)=$$

$$= h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right). \qquad (3)$$

Бу трапециялар формуласидир. Бу усулга мувофиқ $[a, b]$ оралиқни бўлиш сони n ихтиёрий танлаб олинади. Бу сон қанча катта бўлса, (3) тақрибий тенгликнинг ўнг томонида ёзилган йиғинди шунча катта аниқлик билан интеграл қийматини беради.

Агар интеграл ишораси остидаги $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмада иккинчи тартибли ҳосиласи узлуксиз бўлса, у ҳолда трапеция формуласининг қолдиқ ҳади:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{n} \cdot M_2$$

формула ёрдамида баҳоланади. Бу ерда $M_2 = \max\limits_{a<x<b} |f''(x)|$.

Қуйида берилган интегрални трапециялар усули билан тақрибан ҳисоблаш учун компьютер дастурини келтирамиз.

```
10 REM — ТРАПЕЦИЯЛАР ФОРМУЛАСИ БИЛАН
         ИНТЕГРАЛЛАШ
20 INPUT „ИНТЕГРАЛНИНГ ҚУЙИ ЧЕГАРАСИ"; A
30 INPUT „ИНТЕГРАЛНИНГ ЮҚОРИ ЧЕГАРА-
         СИ"; B
40 INPUT „[A, B] СЕГМЕНТНИ БЎЛИШ СОНИ"; N
50 DE FFNM (X) = F (X)
60 H = (B — A)/N
70 S = (FNM (A) + FNM (B))/2
80 X = A
90 FOR I = 1 TO N — 1
100 X = X + H
110 S = S + FNM (X)
120 NEXT I
130 PRINT : PRINT N; „ТА СЕГМЕНТ БЎЙИЧА"
140 PRINT A; „ДАН"; B; „ГАЧА ИНТЕГРАЛ = "; S
150 END
```

3. Параболалар усули (Симпсон формуласи). $[a, b]$ кесмани жуфт сондаги $n = 2m$ та бўлакларга ажратамиз. $[x_0, x_1]$ ва $[x_1, x_2]$ кесмаларга мос ва берилган $y=f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини қараймиз. $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ учта нуқтадан ўтувчи ва ўқи Oy ўққа параллел бўлган иккинчи даражали парабола билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни параболик трапеция деб атаймиз (29-расм).

Ўқи Oy ўққа параллел бўлган параболанинг тенгламаси

$$y=Ax^2+Bx+C$$

кўринишда бўлади. A, B ва C коэффициентлар параболанинг берилган уч нуқта орқали ўтиш шартидан бир қийматли аниқланади. Шунга ўхшаш параболаларни кесмаларнинг бошқа жуфтлари учун ҳам ясаймиз. Шундай ясалган параболик трапециялар юзларининг йиғиндиси интегралнинг тақрибий қийматини беради.

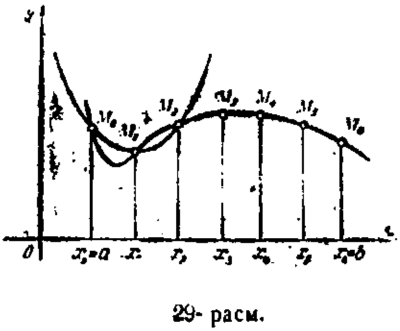
Дастлаб битта параболик трапециянинг юзини ҳисоблаймиз.

Лемма. *Агар эгри чизиқли трапеция*

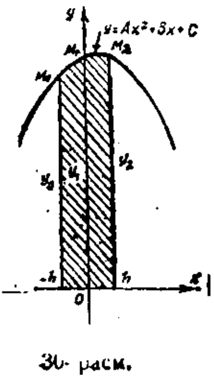
$$y=Ax^2+Bx+C$$

парабола, Ox ўқ ва оралиғи $2h$ га тенг бўлган иккита ордината билан чегараланган бўлса, у ҳолда унинг юзи $S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$ га тенг бўлади, бунда y_0 ва y_2 четдаги ординаталар, y_1 эса эгри чизиқнинг кесма ўртасидаги ординатаси.

Исбот. Ёрдамчи координаталар системасини 30-расмда кўрсатилгандек жойлаштирамиз.



29-расм.



30-расм.

Параболанинг $y = Ax^2 + Bx + C$ тенгламасидаги коэффициентлар қуйидаги тенгламалардан аниқланади:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{агар } x_0 = -h \text{ бўлса, у ҳолда } & y_0 = Ah^2 - Bh + C, \\ \text{агар } x_1 = \ \ 0 \text{ бўлса, у ҳолда } & y_1 = \qquad\qquad\ \ C, \\ \text{агар } x_2 = \ \ h \text{ бўлса, у ҳолда } & y_2 = Ah^2 + Bh + C. \end{array}\right\} \quad (5)$$

A, B, C коэффициентларни маълум деб ҳисоблаб, параболик трапециянинг юзини аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^3}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Аммо (5) тенгликдан:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Демак,

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Шуни исбот қилиш талаб этилган эди.

Биз яна асосий масаламизга қайтамиз (29-расмга қаранг). (5) формуладан фойдаланиб, қуйидаги тақрибий тенгликларни ёза оламиз ($h = \Delta x$):

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

. . . .

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Чап ва ўнг томонларни қўшиб, чапда изланаётган интегрални, ўнгда эса унинг тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots +$$

$$+ 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \qquad (6)$$

ёки

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}\,[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots +$$

$$+ y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})]. \qquad (7)$$

Бу Симпсон формуласидир*. Бу ерда бўлиниш нуқталарининг сони $2m$ ихтиёрий, лекин бу сон қанча катта бўлса, (7) тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди интегралнинг қийматини шунча аниқ ифодалайди.

Интегрални берилган аниқликда ҳисоблаш учун қанча бўлиниш нуқталари олиш кераклигини аниқлашда интегрални тақрибий ҳисоблашда ҳосил бўладиган хатони баҳолаш формуласидан фойдаланиш мумкин.

Агар $f(x)$ функция тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда Симпсон формуласининг қўшимча ҳади қуйидаги формула билан баҳоланади:

$$R = -\frac{(b-a)h^4}{180}M_4, \text{ бу ерда } M_4 = \max_{a<\xi<b}|f^{IV}(\xi)|. \qquad (8)$$

Агар функция жадвал усулида берилган бўлиб, унинг интегралини тақрибан ҳисоблаш талаб этилган бўлса, у ҳолда хатолик чекли айирмалар орқали баҳоланади, яъни

$$R = -\frac{(b-a)}{180}\cdot A_4, \qquad (9)$$

бу ерда A_4 — тўртинчи тартибли чекли айирмаларнинг модули бўйича максимал қиймати, бошқача айтганда $A_4 = \max|\Delta^4 y_i|,\ i = \overline{0,\ n-4}$.

Энди берилган

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

интегрални Симпсон усули билан ҳисоблаш учун компьютер дастурини келтирамиз.

---

* Симпсон Томас (1710 — 1761 йй.) инглиз математиги.

```
10 REM—СИМПСОН ФОРМУЛАСИ БЎЙИЧА ИН-
          ТЕГРАЛЛАШ
20 INPUT „ИНТЕГРАЛНИНГ ҚУЙИ ЧЕГАРА-
          СИ"; A
30 INPUT „ИНТЕГРАЛНИНГ ЮҚОРИ ЧЕГАРА-
          СИ"; B
40 INPUT „A, B СЕГМЕНТНИ БЎЛИШ СОНИ"; N
50 DEF FNM(X)=F(X)
60 S=0
70 H=(B—A)/N
80 S=FNM(A)
90 FOR I=1 TO N—1 STEP 2
100 X=A+I*H
110 S=S+4*FNM(X)
120 SEXT I
130 FOR I=2 TO N—2 STEP 2
140 X=A+I*H
150 S=S+2*FNM(X)
160 NEXT I
170 S=S+FNM(B)
180 S=S*H/3
190 PRINT:PR NT „N; "ТА СЕГМЕНТ БЎЙИЧА"
200 PRINT A; „ДАН"; B; „ГАЧА ИНТЕГРАЛ="; S
210 END
```

1-мисол. Трапеция формуласи ёрдамида $n = 10$ деб $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ интегрални тақрибан ҳисобланг.

Ечиш Интеграл ишораси остидаги функциянинг қийматлар жадвалини тузамиз. Функция қийматларини ҳисоблаётганда вергулдан кейин тўртта рақам оламиз.

x_i	$1+x_i$	$y_i=\frac{1}{1+x_i}$	x_i	$1+x_i$	$y_i=\frac{1}{1+x_i}$
0,0000	1,0000	1,0000	0,6000	1,6000	0,6250
0,1000	1,1000	0,9091	0,7000	1,7000	0,5882
0,2000	1,2000	0.8333	0,8000	1,8000	0,5556
0,3000	1,3000	0.7692	0,9000	1,9000	0,5263
0,4000	1,4000	0,7143	1,0000	2,0000	0,5000
0,5000	1,5000	0,6667			

Трапециялар формуласи (3) га кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x}\approx\frac{1}{10}\left(\frac{1,0000+0,5000}{2}+0,9091+0,8333+\right.$$

$$+0,7692+0,7143+0,6667+0,6250+0,5882+$$

$$\left.+0,5556+0,5263\right)=0,1\cdot6,9377\approx0,6938.$$

Натижанинг хатолигини баҳолаймиз. Интеграл ишораси остидаги функция учун $[0,\ 1]$ кесмада $f''(x)=2/(1+x)^3$ га эга бўламиз. $0<x\leqslant1$ бўлгани учун, $|f''(x)|\leqslant2$ бўлади. Демак, M_2 учун 2 сонини олиш мумкин. (4) формулага кўра баҳоласак,

$$|R|\leqslant\frac{2}{12\cdot10^2}\leqslant0,0017$$

ҳосил бўлади.

2-мисол. Симпсон формуласидан фойдаланиб $\ln2=\int_{0,5}^{1}\frac{dx}{x}$ интегрални 10^4 аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. Аввал $[a,\ b]$ кесманинг бўлиниш сонини аниқлаймиз. Интеграл ишораси остидаги $f(x)=\frac{1}{x}$ функция учун $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$ кесмада $f^{IV}(x)=24/x^5$ га эга бўламиз ва бундан $|f^{IV}(x)|<24\cdot2^5$ ни ҳосил қиламиз. $a=1/2$, $b=1$ ва $h=1/4n$ эканлигини ҳисобга олиб, (8) формулага кўра

$$|R_n|<\frac{1}{2\cdot180}\cdot24\cdot2^5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

ёки

$$|R_n|<\frac{1}{120\cdot n^4}$$

га эга бўламиз.

Берилган аниқликка эришиш учун

$$\frac{1}{120\cdot n^4}<10^{-4}\ \text{ёки}\ n^4>\frac{10^3}{12}$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур. Демак, $n^4>100$ бўлиб, $n=4$ олиниши мумкин. $h=0,0625$ ни топиб, функция қийматлар жадвалини тузамиз:

x_i	y_0, y_8	y_1, y_3, y_5, y_7	y_2, y_4, y_6
0,5000	2,0000		
0,5625		1,7777	
0,6250			1,6000
0,6875		1,4545	
0,7500			1,3333
0,8125		1,2308	
0,8750			1,1428
0,9375		1,0667	
1,0000	1,0000		
	3,0000	5,5298	4,0762

(7) формулага кўра

$$\int_{0,5}^{1} \frac{dx}{x} = \ln 2 \approx 0,6931$$

эканлигини аниқлаймиз.

11- §. Биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш

1. Эйлер методи. Биз ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларнинг сонли ечилишининг икки усулини кўриб чиқамиз. Ушбу параграфда Эйлер усулига тўхтаймиз.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

тенгламанинг $[x_0, b]$ кесмада $x = x_0$ да $y = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи тақрибий ечимини топамиз. $[x_0, b]$ кесмани $x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ нуқталар билан n та бўлакка (тенг бўлиши шарт эмас) бўламиз (бу ерда $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$ деб белгилаймиз. Демак, $h = \frac{b - x_0}{n}$. $y = \varphi(x)$ (1) тенгламанинг бирор тақрибий ечими ва

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \quad \ldots, \quad y_n = \varphi(x_n)$$

бўлсин.

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ \ldots, \ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{-n1}$$

деб белгилаймиз. (1) тенгламада ҳар бир $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқтадаги ҳосилани чекли айирмалар нисбати билан алмаштирамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y) \tag{2}$$

ёки

$$\Delta y = f(x, y) \cdot \Delta x, \tag{2'}$$

$$x = x_0 \text{ нуқтада } \Delta y_0 = f(x_0, y_0) \cdot \Delta x,$$

яъни

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0) h$$

бўлади. Бу тенгликда x_0, y_0, h маълум, демак

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) h$$

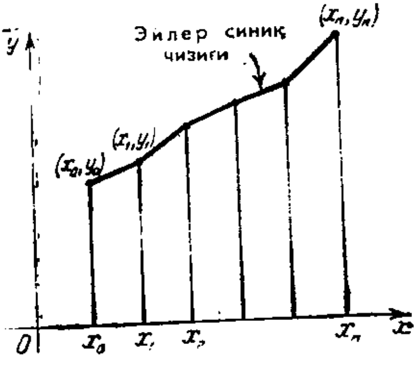
ни топамиз. $x = x_1$ да (2′) тенглама $\Delta y_1 = f(x_1, y_1) \cdot h$ бўлиб,

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h$$

қийматни ҳосил қиламиз. Бу ерда x_1, y_1, h маълум сонлар, y_2 эса аниқланадиган қиймат. Умумий ҳолда

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n, \text{ бу ерда } \Delta y_n = f(x_n, y_n) \cdot h. \tag{3}$$

Шундай қилиб, x_0, x_1, …, x_n нуқталарда ечимнинг тақрибий қийматлари топилди. Координата текислигида (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, Эйлернинг синиқ чизиғидан иборат бўлган интеграл эгри чизиқнинг тақрибий тасвирини ҳосил қиламиз (31- расм).



31- расм.

Агар $f(x, y)$ функция қандайдир $R\{|x - x_0| < a, |y - y_0| \leqslant b\}$ тўғри тўртбурчакда

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant N \cdot |y_1 - y_2| \quad (N = \text{const})$$

шартини қаноатлантирса ва бундан ташқари

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + f \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M \quad (M = \text{const}) \qquad (4)$$

бўлса, у ҳолда хатоликни баҳолашнинг қуйидаги формуласи ўринли бўлади:

$$|y(x_n) - y_n| \leqslant \frac{h \cdot M}{2N}\left[(1 + h \cdot N)^n - 1\right], \qquad (5)$$

бу ерда $y(x_n)$ — (1) тенглама ечимининг аниқ қиймати ($x = x_h$ да), y_n эса n-қадамда олинган тақрибий қиймати.

(5) формула назарийдир Одатда „икки марта ҳисоб" қоидаси қўлланилади, яъни аввал ҳисоб h қадам билан, сўнгра қадамни майдалаб такрорий ҳисоб $h/2$ қадам билан бажарилади. Аниқроқ ечим y_n^* нинг хатолиги $|y_n^* - y(x_n)| \approx |y_n^* - y_n|$ формула ёрдамида баҳоланади.

Берилган функция ҳосиласига нисбатан ечилган оддий дифференциал тенгламани Эйлер усули билан ечишнинг компьютер дастури қуйида келтирилади:

```
10 REM — ЭЙЛЕР УСУЛИ
20 INPUT A, B, Y, H
30 PRINT „X", „Y" : PRINT
40 FOR X = A TO B STEP H
50 PRINT X, Y
60 Y = Y + H * F(X, Y)
70 NEXT X
80 END
```

1-мисол. Эйлер усулидан фойдаланиб,

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

дифференциал тенгламанинг $[0, 1]$ кесмада $y(0) = 1$ шартни қаноатлантирувчи ечимининг қийматлар жадвалини тузинг $h = 0.2$ қадам танлансин.

Ечиш. Ҳисоблашларнинг натижасини жадвалда келтирамиз. Ҳисоблар (3) формулага кўра амалга оширилади.

i	x_i	y_i	y_i-2x_i/y_i	Δy_i	Аниқ ечиқ $y=2x+1$
0	0	1,0000	1 0000	0,2000	1,0000
1	0,2	1,2000	0,8667	0,1733	1,1832
2	0,4	1,3733	0,7805	0,1561	1,3416
3	0,6	1,5294	0,7458	0,1492	1,4832
4	0,8	1,6786	0,7254	0,1451	1,6124
5	1,0	1,8237			1,7310

Жадвалдан кўриниб турибдики, y_5 нинг абсолют хатоси $\varepsilon = 0{,}0917$ ни, нисбий хатоси 5% ни ташкил этар экан.

Эйлер усули оддий дифференциал тенглама системасига осонгина қўлланилиши мумкин.

Бошланғич шартлари $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ бўлган

$$\left.\begin{aligned} y' &= f_1(x,\ y,\ z), \\ z' &= f_2(x,\ y,\ z) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

иккита дифференциал тенгламалар системасини ечиш талаб қилинган бўлсин. У ҳолда $y(x_{i+1}) \approx v_{i+1}$ ва $z(x_{i+1}) \approx z_{i+1}$ тақрибий қийматлар қуйидаги формула ёрдамида кетма-кет ҳисобланади:

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot f_1(x_i,\ y_i,\ z_i), \\ z_{i+1} &= z_i + h \cdot f_2(x_i,\ y_i,\ z_i) \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

2. Эйлернинг такомиллаштирилган усули. Ушбу

$$y' = f(x,\ y) \qquad (1)$$

оддий дифференциал тенгламанинг $[x_0, b]$ кесмада $x = x_0$ да $y = y_0$ шартни қаноатлантирувчи тақрибий ечимини топиш талаб этилган бўлсин.

$[x,\ b]$ кесмани $x = x_0 + ih$ $(i = 0,\ 1, 2,\ \ldots,\ n)$ нуқталар билан n та тенг бўлакларга ажратамиз, бу ерда $h = (b - x_0)/n$ — интеграллаш қадами. Эйлернинг такомиллаштирилган усулининг асосий мазмуни қуйидагидан иборат.

Аввал

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}\, y'_i \qquad (2)$$

формула ёрдамида қидирилаётган функциянинг $x_{i+\frac{1}{2}} =$

$= x_i + \frac{h}{2}$ нуқтадаги ёрдамчи қиймати ҳисобланади, сўнгра $f(x, y)$ функциянинг ўрта нуқтадаги қиймати ҳисобланади, яъни

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

ва бундан

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y'_{i+1/2} \qquad (3)$$

аниқланади.

Хатолик „икки марта ҳисоб“ қоидаси билан амалга оширилади: ҳисоб h учун ҳисоблангандан сўнг, $h/2$ қадам учун такрорланади ва y_i^* аниқроқ қийматининг хатолиги тақрибан қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{1}{3} |y_i^* - y_i|,$$

бу ерда $y(x_n)$ — берилган оддий дифференциал тенгламанинг аниқ ечимидан иборат.

Функция ҳосиласига нисбатан ечилган оддий дифференциал тенгламани Эйлернинг такомиллаштирилган усулида тақрибан ечишни Бейсик дастурлаш тилида ёзилган компьютер дастури қуйидагича бўлади:

```
10 REM — ЭЙЛЕРНИНГ ТАКОМИЛЛАШТИРИЛ-
         ГАН УСУЛИ
20 INPUT A, B, H, Y
30 PRINT „X“, „Y“ : PRINT
40 FOR X = A TO B STEP H
50 PRINT X, Y
60 XI = X + H/2
70 YI = Y + H/2 * F (X, Y)
80 Y2 = F (XI, YI)
90 Y = Y + H * Y2
100 NEXT X
120 END
```

2-мисол. Эйлернинг такомиллаштирилган усулидан фойдаланиб, $h = 0,2$ учун

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

дифференциал тенгламанинг $[0, 1]$ кесмада $y(0) = 1$ шартни қаноатлантирувчи ечимининг қийматлар жадвали тузилсин.

Ечиш. Ҳисоблашларнинг натижасини қуйидаги жадвалда келтирамиз. Ҳисоблар (3) формулага кўра амалга оширилади.

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2}f(x_i, y_i)$	$x_{i+1/2}$	$y_{i+1/2}$	$\Delta y_i = h f_{i+1/2}$
0	0	1	0,1	0,1	1,1	0,1836
1	0,2	1,1836	0,0846	0,3	1,2682	0,1590
2	0,4	1,3426	0,0747	0,5	1,4173	0,1424
3	0,6	1,4850	0,0677	0,7	1,5527	0,1302
4	0,8	1,6152	0,0625	0,9	1,6777	0,1210
5	1,0	1,7362				

Ушбу жадвални тўлдириш қуйидагича амалга оширилади. Биринчи сатрда $i=0$, $x_0=0$, $y_0=1$ ёзилади. $f(x_0, y_0)=1$ ни ҳисоблаймиз. У ҳолда (2) формулага кўра $x_{\frac{1}{2}}=0,1$ да $y_{\frac{1}{2}}=1+0,1=1,1$ ҳосил бўлади ҳамда $f(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}})=0,9182$ ва $\Delta y_0=h\cdot f(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}})=0,2\times$ $\times 0,9182=0,8136$ аниқланади. У ҳолда (3) формулага кўра:

$$y_1=y_0+\Delta y_0=1+0,8136.$$

Бу натижадан фойдаланиб, $i=1$, $x_1=0,2$, $y_1=1,1836$ қийматлар иккинчи сатрга ёзилади ва $\frac{h}{2}f(x_1, y_1)=$ $=0,0846$ ҳисобланади. Сўнгра (2) формулага кўра $x_{3/2}=0,3$ да $y_{3/2}=1,1836+0,0846=1,2682$, $f(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}})=$ $=0,7942$ ва $\Delta y_1=h\cdot f(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}})=0,2\cdot 0,7942=0,1590$ аниқланади. У ҳолда (3) формулага кўра

$$y_2=y_1+\Delta y_1=1,1836+0,1590=1,3426.$$

Жадвални $i=2, 3, 4, 5$ қийматлар учун ҳисоблаш шу каби бажарилади.

3. Рунге методи. Ушбу

$$y'=f(x, y), \quad y(x_0)=y_0 \qquad (1)$$

масаланинг $[x_0, b]$ кесмадаги ечимини топиш талаб этилсин. $[x_0, b]$ кесмани $x=x_0+ih$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ нуқталар билан n та тенг бўлакларга ажратамиз, бу ерда $h=(b-x_0)/n$ — интеграллаш қадами. Рунге усулида ҳам Эйлер усулидаги сингари, қидирилаётган функция қийматлари

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \qquad (2)$$

формуладан фойдаланиб кетма-кет топилади. Бу ерда

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right) \qquad (3)$$

ва

$$K_1^{(i)} = h \cdot f(x_i,\ y_i),$$

$$K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\quad y_i + \frac{K_1^{i}}{2}\right),$$

$$K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right), \qquad (4)$$

$$K_4^{(i)} = hf\left(x_i + h,\quad y_i + K_3^{(i)}\right),\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Барча ҳисобларни жадвалда келтирилгандек жойлаштириш керак.

i	x_i	y_i	$k = hf(x,\ y)$	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

Жадвални тўлдириш тартиби қуйидагича:

1) жадвалнинг биринчи сатрига берилган x_0, y_0 қийматлар ёзилади;

2) $f(x_0,\ y_0)$ ни ҳисоблаб, h га кўпайтирилади ва уни $K_1^{(0)}$ сифатида жадвалга ёзилади;

3) жадвалнинг иккинчи сатрига $x_0+h/2$, $y_0+K_2^{(0)}/2$ ёзилади;

4) $f(x_0+h/2,\ y_0+K_1^{(0)}/2)$ ни ҳисоблаб, h га кўпайтирилади ва $K_2^{(0)}$ сифатида жадвалга ёзилади;

5) учинчи сатрга $x_0+h/2$, $y_0+K_2^{(0)}/2$ ёзилади.

6) $f(x_0+h/2,\ y_0+K_2^{(0)}/2)$ ни ҳисоблаб, h га кўпайтирилади ва $K_3^{(0)}$ сифатида жадвалга ёзилади;

7) тўртинчи сатрга x_0+h, $y_0+K_3^{(0)}$ ёзилади;

8) $f(x_0+h,\ y_0+K_3^{(0)})$ ни ҳисоблаб, h га кўпайтирилади ва $K_4^{(0)}$ сифатида жадвалга ёзилади;

9) Δy устунига $K_1^{(0)}$, $2K_2^{(0)}$, $2K_3^{(0)}$, $K_4^{(0)}$ сонлар ёзилади;

10) Δy устунда турган сонларни қўшиб, олтига бўлинади ва жадвалга Δy_0 сифатида ёзилади;

11) $y_1 - y_0 + \Delta y_0$ ҳисобланади.

Сўнгра бошланғич нуқта учун x_1, y_1 лар олиниб, барча ҳисоблашлар эслатилган тартибда давом эттирилади.

Бир нуқтадан бошқасига ўтганда ҳисоб қадамини ўзгартириш мумкин.

Танланган h қадамнинг тўғрилигини текшириш учун

$$\theta = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right|$$

касрни ҳисоблаш керак. θ нинг катталиги бир неча юздан бир бирликка тенг бўлиши керак, акс ҳолда қадам кичикроқ олинади. Рунге усули $[x_0, b]$ кесмада h^4 тартибдаги аниқликка эга. Усулнинг хатосини аниқлаш анча мураккаб. Шунинг учун кўполроқ баҳолаш формуласидан фойдаланилади. У формула „икки марта ҳисоб“ қоидаси бўйича аниқланади:

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{|y_n^* - y_n|}{15}$$

Бу ерда $y(x_n)$ — (1) тенглама аниқ ечимининг x_n нуқтадаги қиймати, y_n^*, y_n лар эса $h/2$ ва h қадамлар билан олинган тақрибий қийматлардир.

Энди функция ҳосиласига нисбатан ечилган оддий дифференциал тенгламаларни Рунге-Кутт усули билан ечиш учун компьютерга мўлжалланган дастурни келтирамиз.

```
10 REM — РУНГЕ-КУТТ УСУЛИ
20 INPUT A, B, Y, H
30 PRINT „X“, „Y“ : PRINT
40 FOR X = A TO B STEP H
50 PRINT X, Y
60 K1 = H * F(X, Y)
70 K2 = H * F(X + H/2, Y + K1/2)
80 K3 = H * F(X + H/2, Y + K2/2)
90 K4 = H * F(X + H, Y + K3)
100 Y = Y + (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)/6
110 NEXT X
120 END
```

3-мисол. Рунге усулидан фойдаланиб, $h = 0,2$ учун

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

дифференциал тенгламанинг $[0, 1]$ кесмада $y(0) = 1$ шартни қаноатлантирувчи ечимининг қийматлар жадвали тузилсин.

Ечиш. (2), (3) ва (4) формуладан фойдаланиб ҳисобланган натижаларни ушбу жадвалда келтирамиз:

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$K_i = h \cdot f(x_i, y_i)$	Δy_i
1	2	3	4	5	6
0	0,	1,0000	1,0000	0,2000	0,2000
	0,1	1.1000	0,0918	0,1838	0,3676
	0,1	1,0918	0,0908	0,1817	0,3634
	0,2	1,1817	0,0843	0,1686	0,3372
					0,1832
1	0,2	1,1832	0,8451	0,1690	0,1690
	0,3	1,2677	0,7944	0,1589	0,3178
	0,3	1,2626	0,7874	0,1575	0,3150
	0,4	1,3407	0,7440	0,1488	0,1488
					0,1574
2	0,4	1,3416	0,7453	0,1490	0,1490
	0,5	1,4161	0,7099	0,1420	0,2830

1	2	3	4	5	6
	0,5 0,6	1,4125 1,4825	0,7046 0,6731	0,1409 0,1346	0,2818 0,1346
					0,1416
3	0,6 0,7 0,7 0,8	1,4832 1,5506 1,5480 1,6119	0,6741 0,6477 0,6436 0,6193	0,1348 0,1295 0,1287 0,1238	0,1348 0,2490 0,2574 0,1238
					0,1292
4	0,8 0,9 0,9 1,0	1,6123 1,6743 1,6722 1,7195	0,6199 0,5992 0,5359 0,4192	0,1240 0,1198 0,1072 0,0898	0,1240 0,2397 0,2144 0,0898
					0,1113
5	1,0 1,1 1,1 1,2	1,7236 1,7799 1,7780 1,8317	0,5632 0,5439 0,5406 0,5218	0,1126 0,1088 0,1080 0,1043	0,1126 0,2175 0,2163 0,1043
	1,2	1,8320			

Юқорида кўрилган усулларнинг натижаларини таққослаш жадвалини тузамиз. Бунда берилган мисолнинг аниқ ечими $y = \sqrt{2x+1}$ эканлиги ҳисобга олинади.

i	x_i	Эйлер	Эйлернинг такомиллаштирилган	Рунге	Аниқ ечим
		усули бўйича y_i нинг қиймати			
0	0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,2	1,2000	1,1836	1,1832	1,1832
2	0,4	1,3733	1,3426	1,3416	1,3416
3	0,6	1,5294	1,4850	1,4832	1,4832
4	0,8	1,6786	1,6152	1,6123	1,6124
5	1,0	1,8237	1,7362	1,7336	1,7320

Жадвалдан кўриниб турибдики, Рунге усулини қўллаганда аниқ ечимга яқинроқ ечим олинган. Демак, Рунге усули қаралган учта усулга қараганда аниқроқ усул экан.

Рунге усулини функция ҳосиласига нисбатан ечилган биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар системасига ҳам қўллаш мумкин. Ушбу қўлланмада биз бунга тўхталмаймиз.

12-§. Кузатиш натижаларини қайта ишлаш

Статистик муносабатлар тўғрисида умумий тушунчалар. Кўпинча тажриба ишларида турли сон ва сифат белгилари орасидаги муносабатларни ўрганишга тўғри келади. Белгилар орасида икки турдаги боғланиш — функционал ва корреляцион (ёки статистик) боғланишлар мавжуддир.

Функционал боғланишларда бир ўзгарувчи миқдорнинг ҳар қайси қийматига бошқа ўзгарувчи миқдорнинг аниқ бир қиймати мос келади. Бундай боғланишлар аниқ фанлар — математика, физика ва кимиёда айниқса яққол кузатилади Масалан:

1) газнинг бир қанча намуналарини олиб, уларнинг ҳарорати 20°С дан 25°С гача ўзгартирилса, у вақтда бир хил шароитда бўлган барча газ намуналарининг ҳажмлари бир хил аниқ миқдорга кенгаяди;

2) термометрдаги симоб устунининг баландлиги ҳаво ёки сувнинг ҳарорати ҳақида аниқ ва бир қийматли маълумот беради;

3) айлана радиуси R ва унинг узунлиги C орасида геометриядан маълум бўлган $C=2\pi R$ формула бўйича аниқланган функционал боғланиш мавжуд. Бошқача, айтганда, R нинг ҳар бир қийматига C нинг аниқ битта қиймати мос келади.

Агар икки x ва y тасодифий миқдор орасида шундай муносабат мавжуд бўлсаки, x миқдорнинг ҳар бир қийматига x нинг ўзгариши билан қонуний равишда ўзгарадиган y миқдорнинг аниқ тақсимоти мос келса. x ва y орасидаги бундай муносабат статистик ёки корреляцион муносабат дейилади.

x ва y орасидаги муносабат оддий жадвал кўринишида берилиши мумкин.

Иккала ҳолда ҳам x ва y ўзгарувчиларни боғлайдиган $y=\varphi(x)$ аналитик ифода танлаш керак. Кузатишдан олинган аналитик боғланишларни эмпирик боғланиш деймиз. Эмпирик боғланишларни аниқлаш асоған икки босқичда амалга оширилади: эмпирик формулани танлаш ва танланган формуладаги коэффициентларни аниқлаш.

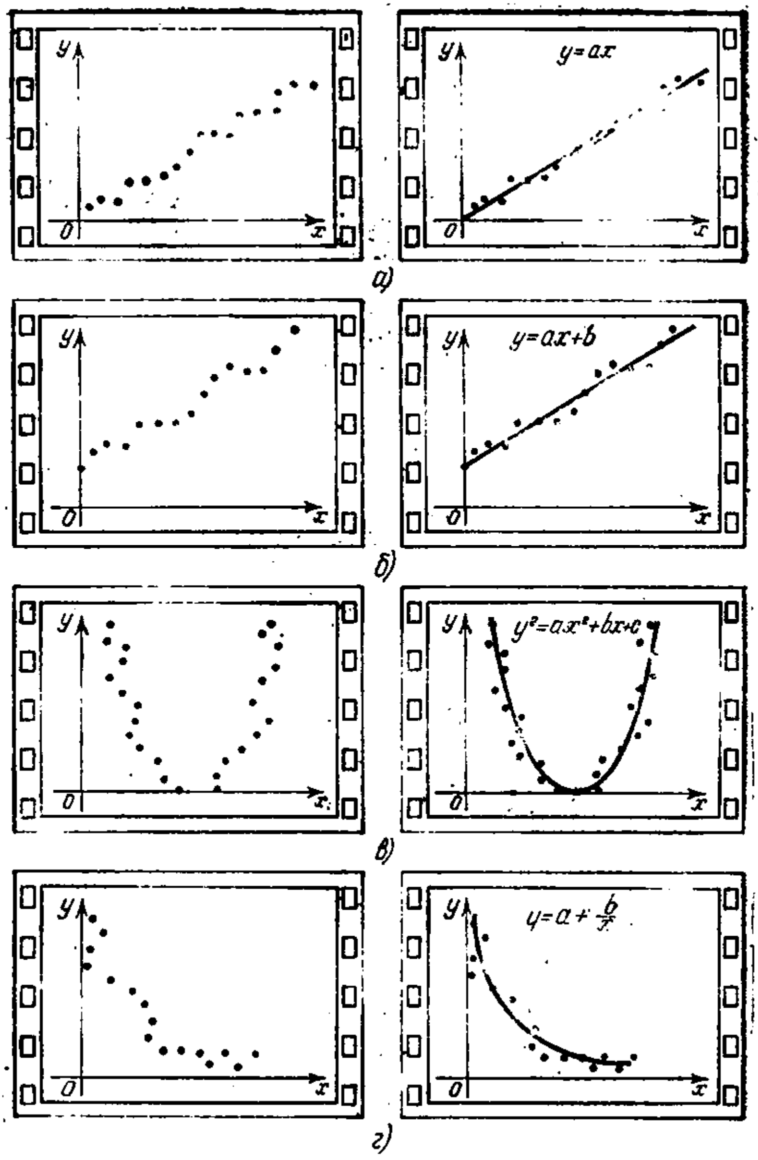
Тажриба натижасида аргументнинг n та қиймати учун функциянинг n та мос қиймати олинган бўлсин. Натижалар қуйидаги жадвалда ёзилган:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

y миқдорининг x миқдорга функционал боғлиқлиги $y=\varphi(x)$ ни тажрибада олинган натижаларга кўра аниқлаш талаб этилсин. Ушбу функциянинг кўриниши тажрибада олинган қийматларга мос келадиган нуқталарнинг координаталар текислигида қандай жойлашганига қараб аниқланади. Бу нуқталарни экспериментал нуқталар деб атаймиз. Масалан, экспериментал нуқталар координаталар текислигида 32-расмда тасвирлангандек жойлашган бўлсин. Тажриба бажарилаётганда озгина бўлса-да хато бўлишини ҳисобга олиб, изланган $y=\varphi(x)$ функцияни: а) $y=ax$, б) $y=ax+b$, в) $y=ax^2+bx+c$, г) $y=a+b/x$ функциялар кўринишида танлаш мумкин (бошқа ҳоллар ҳам бўлиши мумкин). Функцияни $y=\varphi(x, a, b, \ldots, c)$ кўринишида танлаб олгач, шу функцияга кирувчи $a, b, \ldots, c$ параметрларни шундай танлаш талаб этиладики, у ўрганилаётган ҳодисани бирор маънода жуда яхши акс эттирсин

Жадвалда келтирилган ҳар бир аргументнинг қийматига бир функция қийматидан ташқари биттадан эмпирик функциянинг қиймати мос келади. Эмпирик функциянинг қиймати билан экспериментал нуқта ординатаси орасидаги фарқни четланиш деб атаймиз. Функцияни шундай танлашимиз керакки, ушбу четланишлар иложи борича кам бўлсин.

Юқорида қўйилган масалани ечишда одатда учта усулдан — танланган нуқталар, ўртача ва энг кичик квадратлар усулларидан фойдаланилади. Биз қуйида жуда кенг тарқалган усул — энг кичик квадратлар усулидан фойдаланамиз. Бу усул қуйидагидан иборат: тажрибадан олинган y_i қийматлар билан мос нуқталардаги $\varphi(x, a, b, \ldots, c)$ функция қийматлари



62 расм.

орасилаги айирмалар (четланишлар) квадратларининг йиғиндисини қараймиз:

$$S(a, b, \ldots, c) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, \ldots, c)]^2, \quad (1)$$

$a, b, \ldots, c$ параметрларни шундай танлаймизки, бу йиғинди энг кичик қиймат қабул қилсин:

$$S(a, b, \ldots, c) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, \ldots, c)]^2 \to \min. \quad (2)$$

Демак, масала $S(a, b, \ldots, c)$ функцияни минимумга айлантирадиган $a, b, \ldots, c$ параметрлар қийматларини топишга келтирилади. Бу функция мусбат функция бўлганлиги сабабли, у қуйидан чегараланган. Демак, функция минимумга эга. Экстремумнинг зарурий шарти ҳақидаги теоремага кўра $a, b, \ldots, c$ параметрларнинг бу қийматлари қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантириши керак:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \quad (3)$$

ёки

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, \ldots, c)] \cdot \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, \ldots, c)}{\partial a} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, \ldots, c)] \cdot \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, \ldots, c)}{\partial b} = 0, \quad (4) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, \ldots, c)] \cdot \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, \ldots, c)}{\partial c} = 0. \end{aligned}$$

Бу ерда қанча номаълум бўлса, шунча тенглама бўлади. Ҳар қайси аниқ ҳолда (4) тенгламалар системасининг ечими мавжудлиги ва $S(a, b, \ldots, c)$ функциянинг минимумга эгалиги масаласи текширилади. $y = \varphi(x, a, b, \ldots, c)$ функцияни аниқлашнинг бир неча ҳолини қараб чиқамиз.

I. Танланган функция $y = ax + b$ кўринишида бўлсин. Бу ҳолда $S(a, b)$ функция қуйидаги кўринишда бўлади. ((I) ифодага қаранг):

$$S(a,\ b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2. \tag{5}$$

Демак,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b_i)]\,x_i=0,\\ \frac{\partial S}{\partial b}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b_i)]=0,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

яъни (4) тенгламалар системаси бу ҳолда қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b\sum_{i=1}^{n}x_i=0,\\ &\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-bn=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Иккита a ва b номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бу система тенгламаларнинг *нормал системаси* дейилади.

Керакли ўзгартиришлар амалга оширилгандан кейин бу система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left.\begin{aligned}&a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ &a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Охирги тенгламалар системасини ечамиз:

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \tag{9}$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}. \tag{10}$$

(9) ва (10) формулалардан топилган a ва b коэффициентлар **регрессия коэффициентлари** дейилади.

Топилган a ва b коэффициентларидан фойдаланиб ёзилган $y=ax+b$ чизиқ **регрессия чизиғи** дейилади.

Регрессия коэффициентини ҳисоблаш тажрибадан олинган нуқталар чизиққа яқин жойлашган ҳолда маъқул. Икки x ва y миқдорларнинг боғланиш даражасини **корреляция коэффициенти** аниқлайди. Бу коэффициент

$$r=\frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right)}}\qquad(11)$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Корреляция коэффициентининг қиймати ҳар доим $-1\leqslant r\leqslant 1$ шартни қаноатлантиради.

Агар корреляция коэффициенти қийматининг модули бирдан кам фарқ қилса, тажрибадан олинган нуқталар шунчалик регрессия чизиғига яқин жойлашган бўлади. Агар r корреляция коэффициенти нолга тенг бўлса, у ҳолда x ва y миқдорлар **корреляцияланмаган** дейилади. Корреляция коэффициенти нолдан етарлича фарқ қилиш-қилмаслигини аниқлаш учун, одатда, Стьюдент мезони t дан фойдаланилади. Стьюдент мезони қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$t=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}.\qquad(12)$$

Ушбу формула билан ҳисобланган t нинг қиймати, қийматдорлик даражаси α ва озодлик даражаси сони $n-2$ га мос равишда олинган Стьюдент тақсимот жадвалидаги қиймати билан солиштирилади (иловага қаранг). Агар ҳисобланган қиймат жадвалдагидан катта бўлса, у ҳолда корреляция коэффициенти нолдан етарлича катта бўлади.

Чизиқли регрессия учун компьютер дастурини тузамиз.

```
10. REM — ЧИЗИҚЛИ РЕГРЕССИЯ
20 INPUT „ЖУФТЛИКЛАР СОНИ КИРИТИЛСИН“; N
```

```
30 DIM X(N), Y(N)
40 S1 = S2 = S3 = S4 = S5 = 0
50 PRINT „ЖАДВАЛ ЭЛЕМЕНТЛАРИ КИРИТИЛ-
СИН“
60 FOR I = 1 TO N : INPUT X(1), Y(1)
70 S1 = S1 + X(1) : S2 = S2 + Y(1)
80 S3 = S3 + X1 * Y1 : S4 = S4 + X(1) ∧ 2
90 S5 = S5 + Y1 ∧ 2
100 NEXT I : PRINT
110 GOSUB 300
120 A = M1/M2 : B = M3/M2
130 PRINT „ЧИЗИҚЛИ РЕГРЕССИЯ ТЕНГЛАМА-
СИ“
140 PRINT : PRINT „Y =“; A; „* X +“; B
150 P = M3/SQR(M2 * M4) : T = R * SQR(N — 2)/
SQR (1 — R ∧ 2)
160 PRINT „КОРРЕЛЯЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТИ
R =“; R
170 PRINT „СТЬЮДЕНТ КОЭФФИЦИЕНТИ T=“; T
180 IF R ≠ O THEN GOTO 200
190 PRINT „X ва Y ЎЗГАРУВЧИЛАР КОРРЕЛЯ-
ЦИЯЛАНМАГАН“
200 END
300 REM — ҚИСМ ДАСТУР
310 M1 = N * S3 — S1 * S2
320 M2 = N * S4 — S1 ∧ 2
330 M3 = S4 * S2 — S1 * S3
340 M4 = N * S5 — S2 ∧ 2
350 RETURN
```

1-мисол. Аргументнинг тўртта қийматида изланган функциянинг тажрибага асосан тўртта қиймати олинган бўлсин: улар ушбу жадвалда ёзилган:

x_i	1	2	3	4
y_i	3	4	2,5	0,5

φ функцияни $y = ax + b$ чизиқли функция кўринишида топамиз. Тегишли ҳисобларни қуйидаги жадвалда келтирамиз:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	1	3	3	1	9
2	2	4	8	4	16
3	3	2,5	7,5	9	6,25
4	4	0,5	2	16	0,25
$\sum$	10	10	20,5	30	31,5

(8) система қаралаётган мисол учун ушбу кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} 30a + 10b = 20{,}5; \\ 10a + 4b = 10. \end{aligned}\right\}$$

Бу системани ечиб, a ва b ни топамиз: $a = -0{,}9$, $b = 4{,}75$. Изланган тўғри чизиқ $y = -0{,}9x + 4{,}75$ каби бўлади.

(11) формула ёрдамида корреляция коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$r = \frac{4 \cdot 20{,}5 - 10 \cdot 10}{\sqrt{(4 \cdot 30 - 10^2)(4 \cdot 31{,}5 - 10^2)}} = \frac{-18}{\sqrt{250}} \approx -0{,}805.$$

(12) формула ёрдамида Стьюдент коэффициентини ҳисоблаймиз: $t = 0{,}048$.

II. Ифодаланувчи функция учун иккинчи даражали учҳадни олайлик: $y = ax^2 + bx + c$.

У ҳолда (1) ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$S(a,\ b,\ c) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 - bx_i - c)]^2. \qquad (13)$$

Бу учта ўзгарувчининг функциясидир. (4) тенгламалар системаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c] \cdot x_i^2 = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot x_i = 0; \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ёки керакли ўзгартиришлар бажариб, a, b, c номаълумларни топиш учун

$$\left.\begin{array}{l} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c\cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right\} \quad (14)$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу уч номаълумли чизиқли тенгламалар системасини ечиб, номаълум a, b, c ларни топамиз ва квадрат учҳадга қўямиз.

2-мисол. Жадвал усулида берилган

x	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
y	0,3010	0,3424	0,3802	0,4150	0,4472	0,4771

функция учун энг кичик квадратлар усули билан $y = ax^2 + ax + b$ кўринишдаги кўпҳад танлаб, коэффициентларини аниқланг.

Ечиш. Ёрдамчи жадвал тузамиз:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	2,0	0,3010	4,00	8,000	16,0000	0,60200	1,204000
2	2,2	0,3424	4,84	10,648	23,4256	0,75328	1,657216
3	2,4	0,3802	5,76	13,824	33,1776	0,91248	2,189952
4	2,6	0,4150	6,76	17,576	45,6976	1,07900	3,805400
5	2,8	0,4472	7,84	21,952	61,4656	1,26216	3,506048
6	3,0	0,4771	9,00	27,000	81,0000	1,43130	4,293900
Σ	15,0	2,3629	38,2	99,000	260,7664	6,03022	15,656516

Жадвалда келтирилганларни (14) системага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{r} 260,7664a + 99,000b + 38,20c = 15,656516, \\ 99,000a + 38,20b + 15c = 6,03022, \\ 38,20a + 15b + 6c = 2,3629. \end{array}\right\}$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, $a = -0{,}035762$; $b = 0{,}354481$; $c = -0{,}26470$ параметрларга эга бўламиз. У ҳолда қидирилаётган квадрат учҳад қуйидагидан иборат бўлади:

$$y = -0{,}035762x^2 + 0{,}354481x - 0{,}26470.$$

Берилган нуқталар аниқланган ушбу квадрат учҳадга қанчалик яқин жойлашганликлари уларни координаталар системасига қўйиб аниқланади. Бу вазифани китобхоннинг ўзига қолдирамиз.

VIII БОБ. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Чизиқли дастурлаш ҳақида тушунча

Ҳозирги вақтда математик усуллар халқ хўжалигини ривожлантиришда, иқтисодий масалаларни ечишда муваффақият билан қўлланилмоқда. Халқ хўжалигини бошқариш ва режалаштириш жараёнида иқтисодчи қуйидаги хусусиятларга эга бўлган масалаларга дуч келади:

1) изланаётган миқдорларга жуда кўп чекланишлар қўйилади;

2) масала жуда кўп ечимга эга бўлиб, улардан қандайдир маънода энг яхшиларини танлаб олиш керак бўлади.

Масаланинг бундай қўйилиши иқтисодчи ёки лойиҳаловчи учун катта қийинчиликлар туғдиради Яқин вақтларгача бундай масалаларнинг кўпчилиги эмпирик йўл билан, яъни чекланишларга бўйсунувчи изланаётган миқдорлар танлаб олиш усули билан ҳал этиларди. Яна ҳам аниқроқ натижа олиш учун бир неча вариантни олиб, улар ўзаро солиштирилар ва энг яхшиси танлаб олинарди. Кейинги йилларда яратилган чизиқли дастурлаш усуллари қўйилган масалани бирдан-бир тўғри ҳал қилиш имконини яратиб берди.

Математик дастурлаш амалга оширса бўладиган дастур (режа, жадвал тақсимот) ни аниқлашдан иборат бўлиб, у маълум нуқтаи назардан қабул қилинган мезонга асосан оптимал ҳисобланади. Математик дастурлашга фан сифатида Л. В. Канторович ўзининг „Математические методы организации и планирования производства" номли иши билан 1939 йили асос солди. Берилган иқтисодий масалани ечиш учун юқорида айтилганидек, олдин бу масалани математика тилида ифодалаш, бошқача қилиб айтганда, иқтисодий масаланинг математик моделини тузиш керак бўлади. Бу иш икки босқичдан ташкил топади:

1. Олдимизга қўйилган мақсад изланаётган миқдорларнинг (номаълумларнинг) бирор боғланиши кўринишида берилади (ишлаб чиқарилган маҳсулотларини сотишдан келадиган фойда, маълум миқдордаги ишни бажаришга сарф бўлган харажат ва ҳоказо). Бу боғланиш мақсад функцияси ёки мазкур масаланинг функционали дейилади.

2. Шундан сўнг изланаётган миқдорларга қўйиладиган чекланишлар ифодаланади. Улар ресурсларнинг миқдори, маълум талабларни қондириш зарурати, технология шароити ва бошқа иқтисодий ҳамда техникавий омиллардан келиб чиқади. Одатда, бундай шартлар тенгсизликлар ёки тенгликлар системаси орқали ифодаланади, Математик кўринишда ифодаланган бундай шартлар мазкур масаланинг чекланишлар системаси дейилади.

Агар мақсад функцияси мусбат иқтисодий омилларни (масалан, фойдани) ифодаласа, у ҳолда мақсад функциясининг максимум қиймати изланади, акс ҳолда минимумни излаш керак бўлади.

Номаълум ўзгарувчиларнинг сон қийматлари тўплами масала режаси деб аталади. Чекланишлар системасини қаноатлантирувчи ҳар қандай режа мумкин бўлган режа (ечим) дейилади. Мумкин бўлган режалар тўплами чексиз, чунки чекланишлар системаси сони номаълумлар сонидан ҳар доим кўп бўлади. Мақсад функцияга максимум (ёки минимум) қиймат берадиган мумкин бўлган режа оптимал режа дейилади.

Шундай қилиб, масалани ечиш — мумкин бўлган барча режалардан оптималини топишдан иборат.

Агар мақсад функцияси ва чекланишлар системаси номаълумларга нисбатан чизиқли бўлса, у ҳолда дастурлаш чизиқли дастурлаш дейилади. Агар мақсад функция ёки чекланишлар системаси чизиқсиз ифодалардан ташкил топган бўлса, у ҳолда дастурлаш чизиқсиз дастур дейилади. Чизиқсиз дастурлашга қавариқ, дискрет, квадратик, стохастик ва бошқа дастурлашлар киради. Математик дастур чизиқли ва чизиқсиз дастурлашни ўз ичига олади.

2-§. Чизиқли дастур масаласининг қўйилиши

Математик дастурлашнинг муҳим бўлими ҳисобланган чизиқли дастурлаш иқтисодда кенг тарқалган бўлиб, уларни ечиш усуллари анча мукаммал ишлаб чиқилган Чизиқли дастурлаш масаласини умумий ҳолда қуйидагича баён қилиш мумкин.

Фараз қилайлик, бир неча ўзгарувчининг чизиқли функцияси бўла оладиган бирорта миқдор (масалан, вақт, нарх) берилган бўлсин. Ўзгарувчилар ўз навбатида чизиқли тенглик ёки тенгсизлик кўринишидаги чекланишга бўйсунган бўлсин.

Ўзгарувчиларнинг чизиқли функцияси бўлган миқдорга энг катта (энг кичик) қиймат берувчи манфий бўлмаган қийматларни топиш талаб этилади.

Ушбу айтилганлар математика тилида қуйидагича ёзилади: n та ўзгарувчили m та чизиқли тенгламалар системаси:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$x_{i,j} \geqslant 0, \quad i, j=\overline{1, n}$$

ҳамда шу ўзгарувчиларнинг

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \qquad (2)$$

чизиқли функцияси берилган.

(1) системанинг мумкин бўлган ечимларидан шундайини аниқлаш керакки, (2) чизиқли функция энг кичик (энг катта) қийматга эга бўлсин. Бундай ечимни оптимал ечим деймиз. (1) — чекланишлар системаси, (2) — мақсад функцияси дейилади.

3-§. Қисқача тарихий маълумот

Чизиқли алгебра математиканинг мустақил соҳаси сифатида XVIII асрда немис математиги Лейбниц ҳамда швейцариялик математик Г. Крамер томонидан n-

тартибли детерминантлар тушунчаси киритилиб, *n* та номаълумли *n* та тенгламалар системасини ечишнинг умумий формуласи берилгандан кейин юзага келди.

XIX аср ўрталарида инглиз математиклари Кэли ҳамда Сильвестр ишларида матрицалар тушунчаси киритилиб, матрица ҳисобининг асослари берилди. Шу билан бир вақтда *n* та номаълумли *n* та тенгламалар системасини ечиш ҳамда текширишнинг геометрик ифодаси каби ниҳоятда муҳим масала ривожланиб, икки ҳамда уч ўлчовли геометриянинг умумлашувига, чизиқли *n* ўлчовли фазо тушунчасига олиб келди. Кейинчалик детерминантлар, матрицалар, чизиқли фазолар, чизиқли алмаштиришлар каби тушунчалар чизиқли тенгламалар системасини ечишда бевосита ишлатилиши билан бир вақтда, улар математиканинг мустақил объектларига айландилар.

Чизиқли алгебранинг бу тушунчалари математиканинг турли соҳаларида (дифференциал тенгламалар назарияси, сонлар назарияси, геометрия ва ҳ. к.), шунингдек математик усуллардан фойдаланиладиган бошқа фанларда (назарий механика, квант механикаси, назарий физика, тўлқинлар назарияса ва ҳ. к.) кенг қўлланила бошланди. Чизиқли алгебранинг тушунчалари ва усуллари иқтисодий-математик текширишларда катта аҳамият касб этади.

Чизиқли алгебра назарий такомиллашиши билан бирга унинг ҳисоблаш усуллари ҳам ўсиб борди. Гап шундаки, ҳатто оддий алгебраик масалаларни ечишда ҳам жуда кўп меҳнат талаб қиладиган ҳисоблар билан иш кўришга тўғри келади. Шунинг учун ҳам ҳисоблаш қулай бўлган усулларни яратиш чизиқли алгебра учун муҳимдир. Бу соҳада энг аввал кетма-кет чиқариш (йўқотиш) усулини яратган немис математиги Ф. Гаусс ҳамда француз математиги К. Жорданнинг номларини айтиб ўтиш лозим.

Ҳисоблаш усулларига бўлган эҳтиёж электрон ҳисоблаш машиналарининг яратилиши билан ҳам ўсиб бормоқда.

Юк ташишнинг оптимал режасини тузиш масаласи чизиқли дастурлаш масаласи тариқасида биринчи марта иқтисодчи А. Н. Толстов томонидан (1930 й.) қўйилган.

1931 йили венгер математиги Б. Эгервари чизиқли дастурлашнинг хусусий ҳолларидан бирининг математик қўйилишини текшириб, бу масала кейинчалик „Танлаш муаммоси“ номи билан юритила бошланди.

Бу масала америкалик математик Г. У. Кун томонидан ривожлантирилиб, унинг ечиш усули венгер усули деб атала бошланди

Чизиқли дастурлаш масаласини текширишнинг систематик тараққиёти 1939 йили Л. В. Канторович ва унинг шогирдларининг ишлари асосида бошланди. Л В Канторович чизиқли дастурлаш масаласини ечишнинг умумий усули — ҳал қилувчи кўпайтувчилар усулини яратди. Бу усул ҳозирги вақтда кенг қўлланилаётган симплекс усулдан айрим қисмлари билангина фарқ қилади. Кейинчалик у М. К. Гавурин билан биргаликда транспорт масаласини ечадиган потенциаллар усулини яратди (194) й.). Чизиқли дастурлаш назарияси ҳамда унинг татбиқи математик ва иқтисодчи олимлар Л. В. Канторович, В. С Немчинов, В. В. Новожилов, А. А. Лурье, А А. Брудно, Г. Ж. Рубинштейн, Ц. Б Юдин, Б Г Гольштейн, А. Г Аганбегян ва бошқалар томонидан ривожлантирилди.

Чизиқли дастурлаш усуллари чет элларда ва биринчи навбатда америкалик олимлар томонидан Л. В. Канторович билан деярли бир вақтда, лекин мустақил равишда ривожлантирилди. Америка адабиётларида транспорт масаласи 1941 йили Ф. Л. Хичкок томонидан қўйилди

Чизиқли дастурлаш масаласини ечишнинг асосий усули — симплекс усулини 1949 йили Дж. Данциг яратди. Чизиқли ва чизиқсиз дастурлашнинг кейинги ривожланиши Форд, Фулкерсон, Кун, Лемке, Гасс, Чарнес, Бил ва Радняр ишларида ўз аксини топди.

4-§. Чизиқли дастурлаш масалалари

Чизиқли дастурлаш усулларини қўлланиб ечиладиган аниқ масалаларни кўриб ўтамиз.

1. Транспорт масаласи. Қуйидагилар берилган: M_1, M_2, M_3 кўмир конларида ҳар ойда мос равишда a_1, a_2, a_3 тоннадан кўмир қазиб чиқарилади: кўмир P_1, P_2, P_3 тармоққа етказиб берилиши керак; бу тармоқларнинг кўмирга ҳар ойдаги талаби мос равишда b_1, b_2, b_3 тоннани ташкил этади Кўмирнинг қазиб олинган миқдори билан сотилган миқдори ўзаро тенг, яъни

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$$

деб олайлик.

M_i кондан P_j тармоққа келтирилган кўмирнинг 1 тоннасига c_{ij} сўм сарфлансин. Агар M_i кондан P_j тармоққа келтирилган кўмирни x_{ij} тонна десак, кўмир ташиш режаси қуйидагича бўлади:

га дан	P_1	P_2	P_3	Ҳамма жўнатилган кўмир
M_1	X_{11} $\boxed{c_{11}}$	X_{12} $\boxed{c_{12}}$	X_{13} $\boxed{c_{13}}$	a_1
M_2	X_{21} $\boxed{c_{21}}$	X_{22} $\boxed{c_{22}}$	X_{23} $\boxed{c_{23}}$	a_2
M_3	X_{31} $\boxed{c_{31}}$	X_{32} $\boxed{c_{32}}$	X_{33} $\boxed{c_{33}}$	a_3
Ҳамма келтирилган кўмир	b_1	b_2	b_3	

Ташиш режасининг номаълумлари қуйидаги шартларни қаноатлантиришлари керак:

1. Қабул тармоқларига зарур бўлган миқдордаги кўмирларни етказиб бериш:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=b_2, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Ҳар қайси жўнатиш тармоқларидан барча кўмирни ташиб кетиш:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=a_3. \end{cases} \qquad (2)$$

3. Манфий бўлмасликлари зарур:

$$x_{ij}\geqslant 0,$$

чунки манфий ишорали ўзгарувчилар юкларни тескари йўналишда ташишни англатади, бу эса бўлиши мумкин эмас.

x_{ij} тонна кўмирни ташиш харажати $c_{ij}\cdot x_{ij}$ сўм бўлганидан ҳамма кўмирни ташиш харажати

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{33}x_{33} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

сўмни ташкил этади.

Демак, (1) ва (2) ни биргаликда олиш билан тузилган 6 та чизиқли тенглама системасининг манфий бўлмаган ечимлари x_{ij} орасидан шундайини танлашимиз керакки, Z форма энг кичик қийматга (минимумга) эга бўлсин.

Масалада M_i конларнинг сони билан P_j тармоқларнинг сони ихтиёрийдир; улар бир-бирига тенг бўлиши шарт эмас. Умуман, бу ерда M_i $(i=\overline{1, m})$ конлар ва P_j $(j=\overline{1, n})$ тармоқлар учун $m < n$, $m = n$, $m > n$ ҳоллар бўлиши мумкин.

2. **Озуқа рациони масаласи.** Хўжаликда n хил озуқа бўлиб, уларнинг ҳар қайсиси m турдаги тўйимли моддага (ёғ, крахмал, оқсил кабилар) эга. Биринчи озуқанинг бир бирлиги a_{11} бирлик биринчи тўйимли моддага, a_{21} бирлик иккинчи тўйимли моддага эга ва иккинчи озуқанинг бир бирлиги a_{12} бирлик биринчи тўйимли моддага, a_{22} бирлик иккинчи тўйимли моддага эга ва ҳоказо. Умумий ҳолда j номерли бир бирлик озуқада a_{ij} бирлик модда бор (демак, коэффициентнинг биринчи индекси тўйимли модданинг номерини, иккинчиси эса озуқанинг номерини билдиради). Келтирилган технологик коэффициентларнинг ҳар бири химиявий ёки бошқа таҳлиллар натижасида аниқланади.

Энди b_i $(i=\overline{1, m})$ билан ҳар қайси тўйимли модданинг миқдорини белгилаймиз. Бу нарсани рационга албатта киритиш молларнинг нормал ўсиши заруратидан келиб чиқади. Бошқача қилиб айтганда, b_i — моллар олиши лозим бўлган минимал миқдордаги i номерли тўйимли моддадир. Бу коэффициентларни зоотехниклар аниқлашади. j номерли озуқанинг нархини c_j $(j=\overline{1, n})$ билан белгилайлик. Озуқа нархи маълум ҳисобланади.

Шундай рацион x (боқиш режаси) ни топиш керакки, у барча талабларга жавоб бериб, нархи энг кичик қийматга эга бўлсин.

Мақсад функция Z изланаётган миқдор x_j лар орқали қуйидаги математик кўринишда боғланган бўлади:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j;$$

чекланишлар системаси эса:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m, \end{cases}$$

бунда $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $x_n \geqslant 0$.

Номаълум x_j ларнинг шундай қийматларини топиш керакки, улар барча чекланишлар системасини қаноатлантириб, Z функцияга энг кичик қиймат берсин.

3. **Ресурслардан фойдаланиш масаласи.** Корхона хом ашё, асбоб ускуна ва бошқа ресурсларга эга. Бу корхонанинг тегишли ўлчов бирликлари билан b_1, b_2, b_3 миқдорда олинган уч хил P_1, P_2, P_3 ресурси мавжуд Корхона икки хил T_1, T_2 маҳсулот ишлаб чиқаради. T_j ($j = 1, 2$) маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун P_i ($i = 1, 2, 3$) ресурс бирлигидан a_{ij} та талаб қилинади. T_j маҳсулот бирлигидан корхона c_j сўм даромад олади. Корхона P_i ресурс запасининг миқдори b_i ($i = 1, 2, 3$).

Корхонанинг энг кўп (максимал) даромад олиш масаласи қўйилади.

Ишлаб чиқарилган T_1 ва T_2 маҳсулотлар миқдорини мос равишда x_1 ва x_2 деб белгиласак, корхонанинг даромади

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

сўмни ташкил этади. Иккала маҳсулотни ишлаб чиқаришда фойдаланилган P_i ($i = 1, 2, 3$) ресурсларнинг умумий миқдори $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$ бўлиб, у b_i запасдан ортмаслиги керак. Демак, масалани ечиш учун

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 < b_3, \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (5)$$

системанинг шундай манфий бўлмаган ечимини топиш керакки, у Z чизиқли функцияга энг катта қиймат берсин.

Бу масалада ҳам P_i ресурсларнинг ва ишлаб чиқариладиган T_j маҳсулотларнинг m ва n сони ҳар қанча бўлиши, яъни $m < n$, $m = n$, $m > n$ бўлиши мумкин.

5-§. Чизиқли дастурлаш масаласининг каноник формаси

Чизиқли дастурлаш назарияси билан ечиладиган масалалардаги чекланишлар тенгламалари ўрнига чекланиш тенгсизликларини, ва аксинча, олиш мумкин. Ҳақиқатан, чизиқли дастурлашнинг бирор масаласини ечишда ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

чекланиш тенгламалари системаси ва

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \qquad (2)$$

чизиқли функция ҳосил қилинган бўлсин. Бу ерда $b_j > 0$ $(j = \overline{1, m})$ деб фараз қилиш мумкин. Чунки $b_j < 0$ шартда j- тенгламани (-1) га кўпайтириш кифоя. (1) системанинг r $(r \leqslant m)$ та тенгламасини $x_1, x_2, \dots, x_r$ га нисбатан ечамизки, яъни

$$\begin{cases} x_1 = b_1' + a_{1,r+1}'x_{r+1} + a_{1,r+2}'x_{r+2} + \dots + a_{1n}'x_n, \\ x_2 = b_2' + a_{2,r+1}'x_{r+1} + a_{2,r+2}'x_{r+2} + \dots + a_{2n}'x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = b_r' + a_{r,r+1}'x_{r+1} + a_{r,r+2}'x_{r+2} + \dots + a_{rn}'x_n \end{cases} \qquad (3)$$

деймизки, бунда $b_1' \geqslant 0$, $b_2' \geqslant 0, \dots, b_r' \geqslant 0$ шарт бажарилсин. Биз (1) системанинг фақат мумкин бўлган ечимлари билангина иш кўрганимиз сабабли $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0, \dots, x_r \geqslant 0$ бўлганидан (3) система ушбу

$$\begin{cases} b_1' + a_{1,r+1}'x_{r+1} + a_{1,r+2}'x_{r+2} + \dots + a_{1n}'x_n \geqslant 0, \\ b_2' + a_{2,r+1}'x_{r+1} + a_{2,r+2}'x_{r+2} + \dots + a_{2n}'x_n \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_r' + a_{r,r+1}'x_{r+1} + a_{r,r+2}'x_{r+2} + \dots + a_{rn}'x_n \geqslant 0 \end{cases} \qquad (4)$$

тенгсизликлар системасига ўтади

Демак, (1) тенгламалар системаси ўрнига (4) тенгсизликлар системасини ечиб, унинг $x^0_{r+1}, x^0_{r+2}, \ldots, x^0_n$ мумкин бўлган (ўринли) ечимини топамиз. Сўнгра (3) система ёрдамида $x_1=x_1^0 \geqslant 0,\ x_2=x_2^0>0, \ldots, x_r=x_r^0 \geqslant 0$ ни аниқлаб, (1) системанинг $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_r^0, x^0_{r+1}, \ldots, x^0_n$ мумкин бўлган ечими учун Z мақсад функциясининг максимум ёки минимумини излаймиз.

Аксинча масалани ечиш ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 > 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m > 0 \end{cases} \qquad (5)$$

тенгсизликлар системасига ва (2) чизиқли формага олиб келган бўлсин. (5) тенгсизликлар системасидаги биринчи тенгсизликнинг чап томонига тенг қўшимча x_{n+1} номаълумни, иккинчи тенгсизликнинг чап томонига тенг x_{n+2} номаълумни, . . m тенгсизликнинг чап томонига тенг x_{n+m} номаълумни киритсак, ушбу тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} + b_1 = 0, \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} + b_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} + b_m = 0. \end{cases}$$

Энди, бу системанинг шундай $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ мумкин бўлган ечимини топишимиз керакки, $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ сонлар (2) чизиқли формани максималлаштирсин (ёки минималлаштирсин).

Яна шуни қайд қилиб ўтамизки,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant b_j \quad \text{ёки} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i > b_j \ (j=\overline{1, n})$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи $Z=\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i$ чизиқли функцияга максимум ёки минимум қийматни берувчи манфий бўлмаган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оптимал ечимни аниқлаш чизиқли дастурлашнинг *стандарт масаласи* дейилса, $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j$ $(j=\overline{1, m})$ системани қаноатлантирувчи ва $Z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i$ чизиқли формасига максимум ёки минимум қийматни берувчи оптимал манфий бўлмаган ечимини топишни чизиқли дастурлашнинг каноник масаласи дейилади.

Энди чизиқли функциянинг минимумга (максимумга) эришиши ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема. Z чизиқли функция ўзининг максимуми (минимуми) га чекланишлар системаси билан аниқланадиган соҳанинг чекка нуқталарида эришади.

6-§. Симплекс усул

Симплекс усул кенг тарқалган ҳисоблаш усулларидан бўлиб, ечимни кетма кет яхшилаш ғоясини амалга оширишга асосланган. Бу усулни чизиқли дастурлашнинг масалаларига қўллаш мумкин бўлганлигидан уни *универсал усул* дейилади.

Чизиқли дастурлаш масаласида чекланишлар тенгламалари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларга нисбатан шундай ечилган, яъни

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1,r+1} x_{r+1} + a_{1,r+2} x_{r+2} + \ldots + a_{1n} x_n, \\ x_2 = b_2 - a_{2,r+1} x_{r+1} + a_{2,r+2} x_{r+2} + \ldots + a_{2n} x_n, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_r = b_r - a_{r,r+1} x_{r+1} + a_{2,r+2} x_{r+r} + \ldots + a_{rn} x_n \end{cases} \tag{1}$$

бўлсинки, $b_1 \geqslant 0, b_2 \geqslant 0, \ldots, b_r \geqslant 0$ шартлар бажарилсин.

Z чизиқли функцияда ҳам $x_1, x_2, \ldots, x_r$ номаълумларни (1) система орқали ифодалаб, уни

$$Z = \gamma_0 - \gamma_{r+1} x_{r+1} - \gamma_{r+2} x_{r+2} - \ldots - \gamma_n x_n \tag{2}$$

кўринишга келтирамиз ва бу функциянинг минимумини топиш масаласини қўямиз.

(1) системасининг чап томонидаги $x_1, x_2, \ldots, x_r$ номаълумлар тўплами чизиқли дастурлаш масаласининг *базиси* дейилади ва у $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ кўринишида белгиланади; $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — базис номаълумлар, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ эса **озод номаълумлар** дейилади.

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ озод номаълумларга $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$ қийматни берсак, (1) дан $x_1 = b_1 > 0$,

$x_2 = b_2 > 0, \ldots, x_r = b_2 > 0$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, базис ечим деб аталган ушбу

$$(b_1, b_2, \ldots, b_r, 0, 0, \ldots, 0) \qquad (3)$$

ўринли ечим ҳосил бўлади; Z нинг бу ечимидаги қиймати $Z = \gamma_0$ га тенг.

Бу масалада икки ҳол рўй бериши мумкин:

1) (2) системала ҳамма $-\gamma_{r+1}, -\gamma_{r+2}, \ldots, -\gamma_n$ сонлар манфий эмас, яъни $-\gamma_i \geq 0$. У вақтда Z функция $x_{r+1} = x_{n+2} = \ldots = x_n = 0$ шартда $Z = \gamma_0$ минимум қийматга эришади, яъни B базиснинг (3) вектор ечими оптимал бўлади, чунки бирор $-\gamma_i > 0$ ва $x_j > 0$ учун $-\gamma_j x_j > 0$ бўлиб, бундан $Z = \gamma_0 - \gamma_j x_j > \gamma_0$ келиб чиқади;

2) (2) функцияда $-\gamma_{r+1}, -\gamma_{r+2}, \ldots, -\gamma_n$ сонлар орасида манфийлари бор. Масалан, $-\gamma_j < 0$ дейлик. У вақтда $x_{r+1} = \ldots x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_n = 0$ ва $x_j > 0$ деб олиб, x_j нинг қийматини орттира бориш ҳисобига $Z = \gamma_0 - \gamma_j x_j$ нинг қийматини камайтириш мумкин Лекин бу ишда эҳтиёт бўлиш керак, яъни (1) дан келиб чиқадиган

$$x_1 = b_1 - a_{1j}x_j,\quad x_2 = b_2 - a_{2j}x_j,\quad \ldots,\quad x_r = b_r - a_{rj}x_j \qquad (4)$$

тенгламалардаги $x_1, x_2, \ldots, x_r$ нинг ҳеч қайсиси манфий бўлиб қолмасин.

Бу ерда ҳам икки ҳол рўй беради:

а) (4) да ҳамма $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{rj}$ сонлар мусбат эмас. У вақтда $x_j > 0$ учун $-a_{kj}x_j \geq 0$ ($k = 1, 2$) бўлганидан $x_k = b_k - a_{kj}x_j \geq b_k > 0$ ($k = 1, 2$) га асосан $x_1 \geq b_1 \geq 0$, $x_2 \geq b_2 \geq 0, \ldots, x_r \geq b_r \geq 0$ дир. Демак, $Z = \gamma_0 - \gamma_j x_j$ да $\gamma_j > 0$ ва $x_j > 0$ бўлганлиги сабабли x_j ни чексиз орттира бориш билан $\min Z = -\infty$ га келамиз Бундан эса Z функциянинг минимумга эришмаслиги кўринади.

б) (4) да $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{rj}$ сонлари орасида мусбатлари бор. Масалан, a_{kj} 0 бўлсин. У ҳолда $x_k = b_k - a_{kj} \cdot x_j$ да x_j га b_k/a_{kj} дан ортиқ қиймат бериш мумкин эмас, чунки акс ҳолда $x_k < 0$ бўлиб қолади. Бунда $b_k/a_{kj} \geq 0$ эканлиги равшан. Бундай касрлар орасида энг кичигини b_l/a_{lj} деймиз. Бундай $a_{lj} > 0$ сон ҳал қилувчи элемент дейилади. Қисқалик учун $b_l/a_{lj} = \rho$

белгилаш киритамиз Демак, x_j ни ρ гача орттира оламиз, чунки акс ҳолда $x_l < 0$ бўлишини кўрдик.

Озод номаълумларга

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \quad \ldots, \quad x_{j-1} = 0, \quad x_j = \rho,$$
$$x_{j+1} = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0 \tag{5}$$

қийматларни бериб, базис номаълумларни

$$x_1 = b_1 - a_{1j}\rho, \; x_2 = b_2 - a_{2j}\rho, \; \ldots, \; x_l = b_l - a_{lj}\rho = 0,$$
$$\ldots, \; x_r = b_r - a_{rj}\rho \tag{6}$$

деб аниқлаймиз. Энди янги B' базисга ўтамиз:

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_{l-1} \, x_j, \; x_{+1}, \; \ldots, \; x_r.$$

Бунга мос базис ечим (6) ва (5) дан тузилади (1) система ва (2) функцияни янги базисга мослаб ёзамиз. Бунинг учун (1) даги

$$x_l = b_l - (a_{l,r+1} x_{r+1} + \ldots + a_{lj} x_j + \ldots + a_{ln} x_n)$$

тенгламани x_j га нисбатан ечамиз:

$$x_j = \frac{b_l}{a_{lj}} - \left(\frac{a_{l,r+1}}{a_{lj}} x_{r+1} + \ldots + \frac{1}{a_{lj}} x_l + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{a_{ln}}{a_{lj}} x_n\right).$$

Бу ифодани (1) нинг ҳамма қолган тенгламаларига қўямиз. Ҳосил бўлган янги системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - (a'_{1,r+1} x_{r+1} + \ldots + a'_{1l} x_l + \ldots + a'_{1n} x_n), \\ x_2 = b'_2 - (a'_{2,r+1} x_{r+1} + \ldots + a'_{2l} x_l + \ldots + a'_{2n} x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_j = b'_j - (a'_{j,r+1} x_{r+1} + \ldots + a'_{jl} x_l + \ldots + a'_{jn} x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b'_r - (a'_{r,r+} x_{r+1} + \ldots + a'_{rl} x_l + \ldots + a'_{rn} x_n). \end{cases} \tag{7}$$

Бу базиснинг ифодаларини Z га қўйиб, уни

$$Z = \gamma'_0 - \gamma'_{r+1} x_{r+1} - \ldots - \gamma'_l x_l - \ldots - \gamma'_n x_n \tag{8}$$

шаклга келтирамиз.

Бу жараённинг биринчи қадами шу билан тугайди. Кейинги қадам яна шу биринчи қадамни, яъни (8) ва

(7) га нисбатан 1) ёки 2) ҳолни, ундан кейин 2) а) ёки 2) б) ни такрорлашдан иборат бўлади ва ҳоказо.

Шундай қилиб, симплекс усули қуйидаги жараённи ифодалайди:

1. Чекланишлар тенгламалари системасини (1) шаклга, Z чизиқли функцияни (2) шаклга келтирилади.

2. Агар (2) да ҳамма $-\gamma_{r+}$, $-\gamma_{r+2}$, ..., $-\gamma_n$ коэффициентлар манфий бўлмаса, B базиснинг (b_1, b_2, ..., b_r, 0, 0, ..., 0) ечими оптимал бўлиб, бу ечимда Z функция $Z_в = \gamma_0$ минимумга эришади.

3. (2) да $-\gamma_{r+1}$, $-\gamma_{r+2}$, ..., $-\gamma_n$ лар орасида манфийлари мавжуд, масалан, $-\gamma_j < 0$ десак, $x_{r+1} = \ldots = x_{j-1} = 0$, $x_j > 0$, $x_{j+1} = \ldots = x_n = 0$ қийматларда (1) система (4) кўринишни олади. Агар (4) да ҳамма a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{rj} коэффициентлар мусбат бўлмаса, $\min Z = -\infty$ келиб чиқади, яъни Z функция минимумга эришмайди.

4. (4) даги a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{rj} коэффициентларнинг мусбатлари мавжуд, яъни $a_{kj} > 0$ десак, b_k/a_{kj} сонлар орасидаги энг кичиги b_l/a_{lj} ни оламиз; (1) системанинг x_l га нисбатан ёзилган тенгламасидан x_j ни аниқлаб, (1) системани янги $B' = \{x_1, \ldots, x_{l-1}, x_j, x_{l+1}, \ldots, x_r\}$ базисга нисбатан ёзиб, (7) ни ҳосил қиламиз; функцияни эса (8) кўринишда ифодалаймиз. Янги озод номаълумлар (5) дан иборат бўлади. Юқорида баён этилган жараён (8) ва (7) га нисбатан такрорланади.

1-мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = -1, \\ &x_2 - 3x_3 + x_5 = 2, \\ &x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

система ва $Z = 4x_1 - x_2 + x_4 + 2$ чизиқли функция берилган бўлиб, Z ни минимумлаштириш талаб этилган бўлсин.

Ечиш. (1) нинг иккинчи тенгламасини x_2 га, биринчи тенгламасини x_4 га нисбатан ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} &x_2 = 2 + 3x_3 - x_5, \\ &x_4 = 1 + x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5. \end{aligned}\right\}$$

Иккинчи тенгламага биринчидан x_1 ни қўямиз:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 2 + 3x_3 - x_5, \\ x_4 &= 5 + x_1 + 7x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) дан x_2 ва x_4 нинг ифодаларини Z га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$Z = 5 + 5x_1 + 4x_3 + x_5. \qquad (3)$$

(2) ни қабул қилинган шаклда ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 2 - (-3x_3 + x_5), \\ x_4 &= 5 - (-x_1 - 7x_3). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Энди $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ қийматларда (4) дан $x_2 = 2$, $x_4 = 5$ ни топамиз. Демак, (4) система ушбу (0, 2, 0, 5, 0) ўринли ечимга эришади. Бу ечимда $Z = 5$, (3) да $\rho_1 = +5 > 0$, $\rho_3 = +4 > 0$, $\rho_5 = +1 > 0$. Шу сабабли $Z = 5$ Z нинг минимуми, (0, 2, 0, 5, 0) эса оптимал ечим бўлади.

7-§ Симплекс жадваллар

Бирор масаланинг ечимини симплекс усул ёрдамида аниқлаш бир қанча босқичдан иборат эканлиги юқорида кўрилган 6-§ дан маълум. Эслатилган босқичларнинг барчасини симплекс жадваллар ёрдамида бажариш мумкин. Буни қуйидаги мисолда кўриб ўтамаз.

Мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_5 &= 3, \\ x_2 + x_4 \quad\;\; &= 6, \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

системанинг манфий бўлмаган ечимлари орасидан $Z = -x_4 - 2x_5 + 3$ чизиқли функцияга минимал қиймат берувчи ечимни топинг.

Ечиш. Чизиқли тенгламалар системаси (1) ни осонгина x_1, x_2, x_3 номаълумларга нисбатан ечиш мумкин. Шунинг учун бу номаълумларни (1) системанинг базис номаълумлари деб қабул қиламиз.

Базис номаълумларни жадвалнинг 1-устунига, озод ҳадларни 2-устунига, x_1 нинг коэффициентларини 3-устунга, ва ҳоказо, x_5 номаълумнинг коэффициентларини охирги устунига ёзиб, ушбу жадвалга эга бўламиз.

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	3	1	0	0	1	1
x_2	6	0	1	0	1	0
x_3	1	0	0	1	$\boxed{1}$	1
Z функция	3	0	0	0	1	2

Z функцияга минимал қиймат берадиган ечимни топиш учун $\{x_1, x_2, x_3\}$ базис номаълумлардан бошқасига ўтиш керак. Бу иш жадваллар ёрдамида қуйидагича бажарилади:

1. Z чизиқли функцияга мос келувчи сатр элементлари орасида мусбати бўлса, шу элемент жойлашган устун элементларидан мусбатларини белгилаб оламиз. Бизнинг мисолда охирги, яъни Z функциянинг сатрида иккита мусбат элемент бор (озод ҳад ҳисобга олинмайди). Шу мусбат элементлардан биронтасини танлаймиз, масалан, 1 танланган бўлсин. Бу элемент жойлашган охиридан аввалги устунда 1 дан ташқари учта мусбат 1, 1, 1 элемент мавжуд. Улар биринчи, иккинчи ва учинчи сатрда жойлашган.

2. Ажратилган мусбат 1, 1, 1 элементлар билан битта сатрда жойлашган озод ҳадларнинг шу 1, 1, 1 ларга нисбатларини тузамиз.

Бу нисбатлар $\frac{1}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{3}{1}$, яъни 1, 6, 3 лардир.

3. Тузилган нисбатлардан энг кичигининг махражи **ҳал қилувчи элемент** бўлади. Жадвалда ҳал қилувчи элемент тўртбурчак ичига олинган.

4. Ҳал қилувчи элемент 1 га тенг бўлиши керак, акс ҳолда уни 1 га тенг қилиб олиш мумкин. Бунинг учун шу элемент жойлашган сатрнинг барча элементларини ҳал қилувчи элементга бўлиш кифоя.

5. Жадвал сатрларининг элементларини шундай ўзгартирамизки, ҳал қилувчи 1 элемент турган устундаги шу элементдан бошқалари 0 ларга айлансин. Бунинг учун жадвалнинг учинчи сатрини −1, −1, −1 га

кўпайтириб, мос равишда 1, 2, 3-сатрларга қўшамиз. У ҳолда янги жадвал келиб чиқади:

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	1	0	−1	0	0
x_2	5	0	1	−1	0	−1
x_3	1	0	0	1	1	$\boxed{1}$
Z функция	2	0	0	−1	0	1

6. Юқорида қилинган иш натижасида аввалги $\{x_1, x_2, x_3\}$ базисдаги x_3 ўрнига x_4 келади ва жадвалда кўрсатилгандек, янги $\{x_1, x_2, x_3\}$ базис ҳосил бўлади.

Жадвалнинг охирги сатрида фақат битта мусбат элемент мавжуд бўлиб, у x_5 жойлашган устундадир. Шу устунда яна битта мусбат элемент бор, яъни 1 бор Уни ҳал қилувчи элемент деб ҳисоблаб, учинчи базисга киритамиз. Бу ишнинг натижаси жадвалда кўрсатилган.

Базис номаълумлум	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	1	0	−1	0	0
x_2	6	0	1	0	1	0
x_3	1	0	0	1	1	1
Z функция	1	0	0	−2	−1	0

Жадвалнинг охирги сатрида бирорта ҳам мусбат элемент қолмади, демак, топилган (2, 6, 0, 0, 1) ечим оптимал бўлиб, унга мос келувчи функциянинг минимуми $Z = 1$ га тенг, яъни $Z_{\min} = 1$.

8-§. Ўзаро икки ёқлама масалалар

Чизиқли дастурлашнинг бирор масаласи муносабати билан ушбу

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant b_i \quad (i = \overline{1, m}) \qquad (1)$$

чекланишлар системаси ва

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2)$$

чизиқли функция берилган бўлсин. Фараз қилайлик, (1) системанинг оптимал ечими учун (2) чизиқли функцияни минимумлаштириш лозим бўлсин. (1) — (2) масала **дастлабки (бошланғич) масала** дейилади.

(1) — (2) масаладан яна бир чизиқли дастурлаш масаласи тузиш мумкин.

$$a_{1j} \cdot y_1 + a_{2j} \cdot y_2 + \ldots + a_{mj} \cdot y_m \leqslant c_j \quad (j = \overline{1, n}) \qquad (1')$$

чекланишлар системаси ва

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 \ldots + b_my_m = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (2')$$

чизиқли функция воситаси билан ифодаланади. Бу ерда (1') системанинг оптимал ечими учун (2') ни максималлаштириш талаб қилинади. (1') — (2') масала дастлабки масалага нисбатан **икки ёқлама масала** дейилади.

Дастлабки ва икки ёқлама масалаларнинг матрицалари бир-бирига нисбатан транспонирланганлиги кўриниб турибди.

(1) системанинг озод ҳадлари (2') функциянинг коэффициентларидан, ва аксинча, (1') системанинг озод ҳадлари ( ) функциянинг коэффициентларидан иборатлир

(1) системанинг ҳамма тенгсизликлари „кичик эмас“ ва (1') системанинг тенгсизликларида эса „катта эмас“ ишоралидир

Дастлабки масала сифатида (1') — (2') ни олсак, яъни (1) — (2) масалани унга икки ёқлама масала деб ҳисобласак, у ҳолда (1') системадаги тенгсизликларнинг ишораларини „катта эмас“ га алмаштиришимиз ва F нинг максимуми ўрнига минимумини, Z нинг эса, аксинча, минимуми ўрнига максимумини излашимиз керак. Бунга эришиш учун (1′) ва (1) даги ҳамма тенгсизликларнинг иккала томонини -1 га кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$-a_{1j}\cdot y_1 - a_{2j}\cdot y_2 - \dots - a_{mj}y_m \geqslant -c_j \quad (j=\overline{1,\ n}),$$
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leqslant -b_i \quad (i=\overline{1,\ m}),$$
$$-Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n = \sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j,$$
$$-F = -b_1y_1 - b_2y_2 - \dots - b_my_m = \sum_{i=1}^{n}(-b_i)y_i.$$

Демак, $\min(-F)$ ва $\max(-Z)$ ни аниқлаш талаб қилинади. Бу эса қуйидагини беради:

$$\min(-F) = \min\sum_{i=1}^{m}(-b_i)\,y_i = -\max\sum_{i=1}^{m}b_iy_i = -\max F.$$

Шунга ўхшаш:

$$\max(-Z) = \max\sum_{i=1}^{m}(-c_j)\,x_j = -\min\sum_{j=1}^{n}c_jx_j = -\min Z.$$

Булардан:

$$\max F = -\min(-F), \quad \min Z = -\max(-Z).$$

1-теорема. (1) ва (1′) системаларнинг исталган ўринли ечимлари мос равишда ($x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$) ва ($y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0$) орқали белгиланган десак, у ҳолда Z ва F функцияларнинг бу ечимлардаги Z_0 ва F_0 қийматлари $Z_0 \geqslant F_0$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Исботи. (1), (2), (1′), (2′) га ўринли ечимларни қўйиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \dots + a_{in}x_n^0 \geqslant b_i \quad (i=\overline{1,\ m}),$$
$$Z_0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + \dots + c_nx_n^0. \tag{3}$$
$$a_{1j}y_1^0 + a_{2j}y_2^0 + \dots + a_{mj}y_m^0 \leqslant c_j \quad (j=\overline{1,\ n}),$$
$$F_0 = b_1y_1^0 + b_2y_2^0 + \dots + b_my_m^0. \tag{4}$$

(3) тенгсизликларни мос равишда $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ га кўпайтириб, сатрлар бўйича қўшсак,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_j^0y_i^0 \geqslant \sum_{i=1}^{m}b_iy_i^0 = F_0 \tag{5}$$

келиб чиқади. Шунингдек (4) тенгсизликларни мос равишда $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ га кўпайтириб, устунлар бўйича қўшсак,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^0 y_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_j x_j^0 = Z_0 \qquad (6)$$

ҳосил бўлади. (5) ва (6) $Z_0 \geqslant F_0$ эканлигини тасдиқлайди.

Натижа. Агар $F_0 = Z_0$ тенглик бажарилса, $F_0 = \max F$ ва $Z_0 = \min Z$ бўлади, яъни $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ва $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ оптимал ечимлар бўлади.

Исботи. Теоремага асосан, исталган $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ва $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ ўринли ечимлар учун $F_0 \leqslant Z_0$ бўлгани сабабли Z_0 сон F функция қийматларининг юқори чегараси, F_0 сон эса Z функция қийматларининг қуйи чегараси бўлади.

Демак, $F_0 = Z_0$ тенглик бажарилганда $F_0 = \max F$ ва $Z_0 = \min Z$ эканлиги тасдиқланади.

Мисол Ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\leqslant 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &\leqslant 12, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &\leqslant 8, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &\leqslant 11, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ва

$$Z = 12x_1 + 6x_2 - 7x_3 \to \max$$

дастлабки масала, шунингдек, унга икки ёқлама бўлган

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 &\geqslant 12, \\ y_1 + 4y_2 - 3y_3 + 8y_4 &\geqslant 6, \\ -y_1 - 5y_2 + y_3 - y_4 &\geqslant -7, \\ y_1,\ y_2,\ y_3 &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ва

$$F = 5y_1 + 12y_2 + 8y_3 + 11y_4 \to \min$$

масала берилган бўлсин. (7) ва (8) системаларнинг (6, 0, 1) ва (2, 0, 0, 5) ечимлари учун мос равишда $Z_{\max} = 65$ ва $F_{\min} = 65$ бўлади, демак, $Z_{\max} = F_{\min} = 65$.

Икки ёқламаликнинг асосий теоремасини исботсиз келтирамиз.

2-теорема. Дастлабки масала ечиладиган бўлса, унга икки ёқлама бўлган масала ҳам ечиладиган бўлиб, Z функциянинг минимуми билан F функциянинг максимуми учун $\min Z = \max F$ тенглик бажарилади. Агар дастлабки масалада Z функция қуйидан чегараланмаган бўлса, икки ёқлама масаладаги чекланиш системаси манфий бўлмаган ечимларга эга бўлмайди.

9-§. Чизиқли дастурлаш масаласини график усулда ечиш

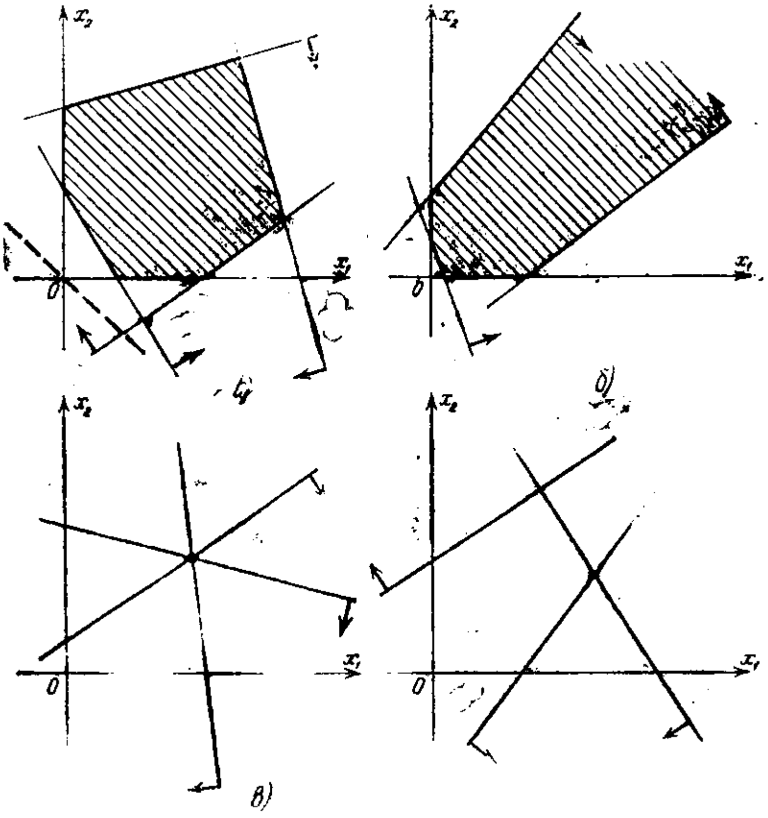
Чизиқли дастурлаш масаласини, чекланишлар системасидаги номаълумлар сони иккита ёки учта бўлганда, график усулда ечиш мумкин. Номаълумлар сони иккита бўлганда чизиқли дастурлаш масаласи қуйидагича қўйилади:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 > b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \geqslant b_n, \\ x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 > 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

чекланишлар системасининг мумкин бўлган ечимлар соҳасидан

$$Z(x_1,\ x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 \qquad (2)$$

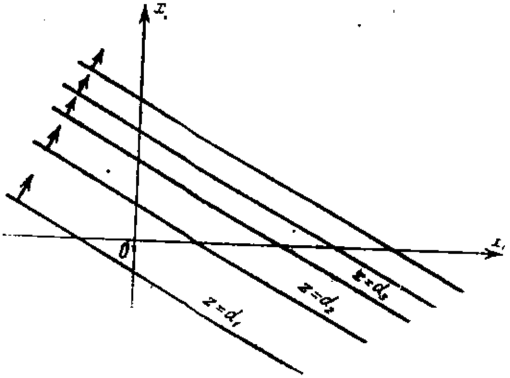
чизиқли функцияга минимал (максимал) қиймат бера оладиганлари топилсин. Қўйилган масалани ҳал қилиш учун, аввал (1) системанинг мумкин бўлган ечимларини аниқлаймиз. Маълумки, (1) системанинг ҳар бир тенгсизлиги текисликда ярим текисликни ифодалайди. Шунинг учун (1) системанинг барча тенгсизликлари системасининг ечимлар соҳаси турлича бўлади. Чекланишлар системаси чексиз кўп, ягона ечимга эга бўлиши мумкин ёки умуман ечимга эга бўлмаслиги мумкин. 33-расмда турли ҳолдаги ечимлар келтирилган. Чекланишлар системаси чексиз кўп ечимга эга бўлиб, ечимлар соҳаси чегараланган (а) ҳоли ва чегараланмаган (б) ҳоли; чекланишлар системаси ягона ечимга эга (в) ҳоли); чекланишлар системаси умуман ечимга эга эмас (г) ҳоли).



33- расм.

Фараз қилайлик, биз қўйган масаланинг чекланишлари 33- расмнинг а) ҳоли бўлсин.

Энди (2) чизиқли функциянинг чап томонига ихтиёрий d_1 константа берамиз ва ҳосил бўлган тўғри чизиқни (нолинчи сатҳ чизиқни) расмда келтирамиз, расмда у штрихлар билан келтирилган. Агар ўзгармас d_1 сон ўрнида бошқа d_2 сон олинса, янги сатҳ чизиғига эга бўламиз. Танланаётган константалар ўсиб, 0 дан $+\infty$ гача бўлган барча қийматларни қабул қилсин У ҳолда сатҳ чизиқлари ўз-ўзларига параллел кўчиб, текислик ҳосил қиладилар, яъни сатҳ чизиқлари ўзлари-



34- расм

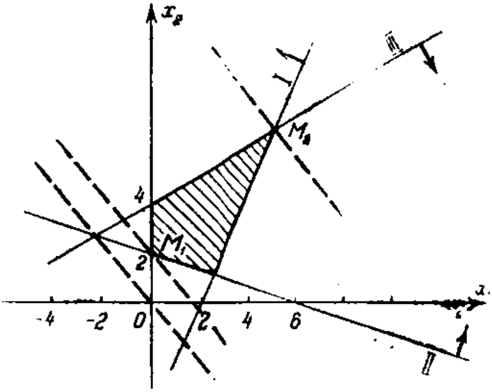
нинг градиентлари бўйича „пастга“ ёки „юқорига“ силжиб, текислик ҳосил қиладилар. 34- расмда $d > 0$ деб олинди, шунинг учун сатҳ тўғри чизиқлари „юқорига“ қараб силжийди (агар $d < 0$ бўлса, сатҳ чизиқлари „пастга“ қараб силжийди). Юқорида айтилганларни эътиборга олиб, қўйилган масалани осонроқ баён қилиш мумкин: M кўпбурчак соҳанинг барча нуқталари орасидан Z функцияни минимумлаштирадиганини аниқлаш талаб этилади (ёки максимумлаштирадиганини аниқлаш керак). Ўша нуқталарнинг координаталари масала ечимидан иборат бўлади. Равшанки, бу нуқталар чизиқли функция учун сатҳ чизиғи билан M соҳанинг дастлаб (охирги) учрашган нуқтасидан иборат бўлади.

Баъзи ҳолларда функция сатҳ чизиғи билан, мумкин бўлган ечимлар соҳасининг бирор томони параллел бўлиб қолиши мумкин. Бундай ҳолларда оптимал ечим чексиз кўп бўлади. Агар мумкин бўлган ечимлар соҳаси чегараланмаган бўлса, максимумга эришмаслиги ҳам мумкин, чунки максимум $+\infty$ бўлади.

Мисол. Текисликда берилган

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leqslant 4, \\ x_1 + 3x_2 &> 6, \\ 4x_1 + 9x_2 &\leqslant 36, \\ x_1 > 0, \ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

чизиқли тенгсизликлар системасининг мумкин бўлган ечимлар соҳасида $Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$ чизиқли функ-



35- расм.

цияга энг кичик (энг катта) қиймат бера оладиганлари аниқлансин.

Ечиш. Тенгсизликлар системасининг ечимлар соҳасини чизиб олгандан кейин (35-расмга қаранг) Z га бирор қиймат бериб (масалан, соддалик учун 0), ҳосил бўлган тўғри чизиқни — нолинчи сатҳ чизиғини чизиб оламиз. Шу тўғри чизиқдан юқори томондаги энг узоқлашган соҳанинг нуқтаси чизиқли функцияга энг катта ва энг яқин жойлашган нуқтаси эса энг кичик қиймат берганлиги учун M_1 ва M_2 нуқталарнинг координаталарини аниқлаймиз.

Бунинг учун мос иккита тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси топилиши керак. Иккита $x_1=0$ ва $x_1+3x_2=$ $=6$ тенгламалар системасининг ечилишидан M_1 (0, 2) нуқтага, $-4x_1+9x_2=36$ ва $2x_1-x_2=4$ тенгламалар системасини ечишдан эса $M_2(36/7, 44/7)$ нуқтага эга бўламиз. Демак, бу нуқталар координаталарини чизиқли функцияга қўйиб, чизиқли функциянинг энг кичик ва энг катта қийматларини топамиз:

$$Z(0,\ 2)=4\cdot 0+2\cdot 3=6,$$

$$Z\left(\frac{36}{7},\ \frac{44}{7}\right)=4\cdot\frac{36}{7}+3\cdot\frac{44}{7}=39\frac{3}{7}.$$

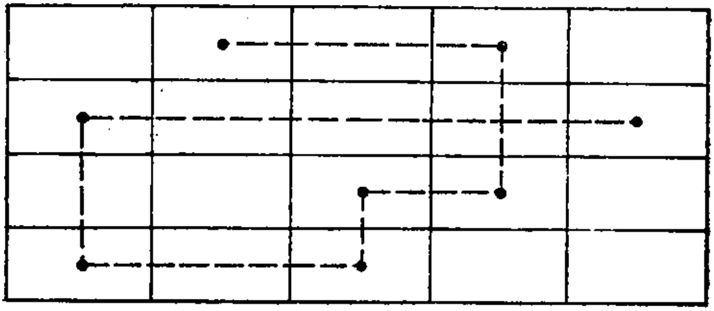
(1) чекланишлар системасининг номаълумлар сони учта бўлганда юқорида айтилганларнинг ҳаммаси фазода бажарилади. Биз бунга тўхталмаймиз.

10-§ Транспорт масаласини ечиш усулларининг обзори

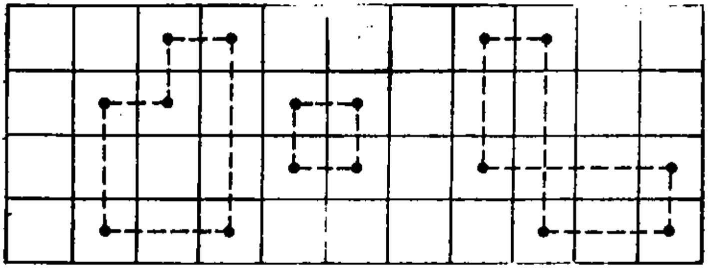
Транспорт масаласи одатда жадваллар ёрдамида ечилади. Қўйилган масалани ечиш учун, тайёрланган маълумотлар ёрдамида бошланғич режа тузиб олинади Бошланғич режа жадвалининг катакларини тўлдириш турли усулларга бўлинади: энг кам нарх, шимолий-ғарб ва диагонал усуллари *Энг кам нарх усулида* жадвал катаклари тарифи энг кичик бўлган катакни тўлдиришдан бошланади, сўнгра истеъмолчининг талаби ва захира ресурсларга қараб, қолган катакларнинг тарифидан энг кичигига эга бўлган катак тўлдирилади ва ҳоказо *Шимоли-ғарб усулида* бошланғич режа катакларини тўлдиришда биринчи йўл ва биринчи устунга мос катак тўлдирилади. Истеъмолчининг талаби ва ресурсларнинг захирасига қараб туриб, биринчи сатрнинг иккинчи устунига мос катак тўлдирилади. Агар иккала катакдаги ресурслар йиғиндиси истеъмолчи талабини қондирса, иккинчи йўл ва иккинчи устундаги катак тўлдирилади ва ҳоказо. *Диагонал усулида* бошланғич режа жадвалининг катакларини тўлдириш жадвалнинг асосий диагоналида жой олган катаклардан бошланади. Сўнгра истеъмолчининг эҳтиёжи ва ресурсларнинг зоҳирасига қараб, асосий диагоналга параллел бўлган юқори катаклар тўлдирилади ва ҳоказо. Жадвал диагоналининг юқоридаги катаклари истеъмолчининг эҳтиёжига яраша тўллирилгандан сўнг, ундан пастки томонда жойлашган катаклар тўлдирилади Тўлатиш тартиби яна асосий диагонал катакларига параллел ҳолда бажарилади.

Бошланғич режа жадвалида иккита қўшни катакнинг бир қаторда (сатр ёки устун) жойлашган бирлашмаси кетма-кетлигига *занжир* дейилади. Бунда ҳеч қандай учта катак бир қаторда жойлашмайди. 35-расмда занжир келтирилган. Агар занжирнинг охирги катаги биринчи катак билан бир қаторда жойлашса, у *цикл* дейилади. 37-расмда турли цикллар келтирилган. Агар бошланғич режа жадвалининг бўш бўлмаган катаклари орасида бирорта ҳам цикл бўлмаса, у ҳолда мумкин бўлган режа ациклли (*ноциклли*) дейилади. 38-расмда ациклли режа келтирилган.

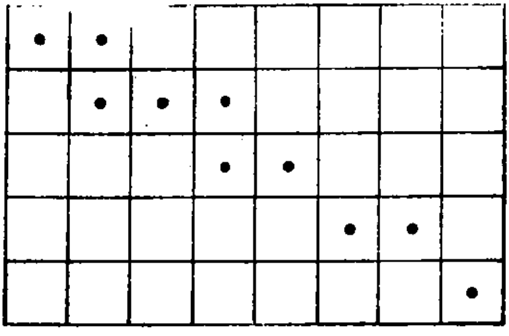
1. Потенциал усули. Ушбу усулни транспорт масаласининг асосий теоремасидан бошлаймиз.



36- расм.



37- расм



38- расм.

1-теорема. Агар транспорт масаласининг қандайдир режасига $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ да

$$\alpha_j - \beta_i \leqslant c_{ij} \qquad (1)$$

ва $x_{ij} \geqslant 0$ учун эса

$$\alpha_j - \beta_i = c_{ij} \qquad (2)$$

шартларни қаноатлантирувчи $m + n$ та $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_n$ сонларни танлаш мумкин бўлса у ҳолда режа оптимал бўлади. α_j, β_i — сонлар жўнатиш ва қабул қилиш тармоқларининг потенциаллари дейилади, (1) ва (2) шартлар эса режанинг потенциаллик шарти дейилади.

Потенциаллик шартини қуйидагича айтиш мумкин: режанинг барча катаклари учун потенциаллар айирмаси тарифдан катта бўлмасликлари, бўш бўлмаган катаклари учун тарифларга тенг бўлиши керак. Ушбу шартни қаноатлантирувчи режа потенциалли дейилади.

Ушбу атамалар ёрдамида 1-теоремани қисқароқ баён этиш мумкин: транспорт масаласининг қандайдир режаси потенциалли бўлса, у ҳолда у оптималдир.

2-теорема (тескари теорема). Агар режа оптимал бўлса, у ҳолда у албатта потенциалли бўлади.

1 ва 2-теоремаларни исботсиз келтирамиз.

Юқорида келтирилган асосий теоремалардан фойдаланиб, потенциаллар усулининг алгоритмини келтирамиз. Ушбу алгоритм бошланғич режа ва оптимал ечимни изловчи иккита — дастлабки ва такрорланувчи умумий қадамлардан иборат. Дастлабки қадам қуйидаги уч босқичга бўлинади:

а) масаланинг мумкин бўлган аниқлик режаси топилади;

б) сонлар системаси, яъни ресурсларни жўнатиш ва қабул қилиш тармоқларининг потенциаллари тузилади;

в) системанинг потенциаллари бор-йўқлиги таҳлил қилинади. Агар у потенциалли бўлса, топилган режа оптимал бўлади, акс ҳолда у оптимал ечимга эга бўлгунча давом эттириладиган такрорланувчи умумий қадамга ўтилади. Такрорланувчи умумий қадам қуйидагича бажарилади: қўйилган масалада и мавжуд юкларни жадвалда энг кам нархлар бўйича тарқатилади, агар масала шартида максимум қийматини топиш талаб этилган бўлса, катта нархдан бошланади. Жадвалдаги тўлдирилган катаклар сони $m+n-1$ бўлиши керак, бу ерда m — сатрлар, n — устунлар сонидир. Бошланғич режанинг оптимал эканлигини текшириш учун жўнатиш ва қабул қилиш тармоқларида потенциаллар ҳисоблаб чиқилади:

а) тўлдирилган катаклардан потенциаллар $\beta_j - \alpha_i = c_{ij}$ топилади, бу ерда c_{ij} тариф (баҳо, км ва ҳоказо бўлиши ҳам мумкин);

б) тўлдирилмаган бўш катаклар учун масаланинг оптимал ечими топилади, яъни $\beta_j - \alpha_i \leqslant c_{ij}$ шартнинг бажарилиши текширилади. (Масала шарти максимумни талаб этса, у ҳолда $\beta_j - \alpha_i \geqslant c_{ij}$ бўлади.) Агар б) шарт бажарилса, масала оптимал ечимга эга бўлади, акс ҳолда оптимал ечимни қуйидагича излаймиз: тўлдирилмаган катакларнинг бирида ёки бир нечтасида потенциал бузилса, шу катакдаги энг катта тариф бўйича ёпиқ занжир цикл тузилади. Циклда бошланғич катак бўш қолади ва қолган катаклар тўлдирилган бўлади. Бошланғич катакка + (плюс), иккинчисига — (минус), учинчисига + (плюс) ва ҳоказо ишораларни кетма-кет алмаштириб қўйилади. Ҳосил бўлган циклнинг манфий катаклардаги энг кам тақсимланган юк миқдорини олиб, мусбат катакчалардаги юк миқдорларига қўшилади ва манфий катаклардаги юк миқдоридан олиб ташланади. Натижада юк тақсимлашни янги варианти ҳосил бўлади. Ушбу амал цикл бўйича сурилиш дейилади Агар цикл сурилиши бажарилгандан кейин б) шарт бажарилса, унда оптимал ечимга эга бўламиз, акс ҳолда шу тартибда давом эттирилади.

Мисол. Учта A_1, A_2, A_3 омбордаги 300, 250, 350 тонна унни тўртта B_1, B_2, B_3, B_4 дўконларга мос равишда 225, 230, 235, 210 тоннадан қилиб тақсимлаш керак. Бир тонна юкни A_i ($i=1, 2, 3$) омбордан ихтиёрий B_j ($j=1, 2, 3, 4$) дўконга олиб бориш учун йўл харажати

$$C=\begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 & 15 \\ 4 & 13 & 15 & 14 \\ 9 & 16 & 17 & 11 \end{pmatrix}.$$

каби бўлса, умумий сарф қилинадиган маблағ минимал бўладиган ташиш режасини тузинг.

Ечиш. Масалада келтирилган маълумотлар ёрдамида энг кам нарх усулини қўллаб бошланғич ташиш режасини тузамиз (жадвалга қаранг).

га / дан	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	12 65	10 235	15	300
A_2	4 225	13 25	15	14	250
A_3	9	16 140	17	11 210	350
	225	230	235	210	

Эътибор қилинса, жадвални тўлдириш x_{21} катакдан бошланган, чунки бу катакда нархларнинг энг кичиги $C_{21}=4$ жойлашган. B_1 дўконга керакли ҳамма унни A_2 омбор бера олади. x_{21} катакка 225 ёзиб, биринчи устуннинг қолган катакларини эътибордан чиқарамиз. Қолган уч устунли жадвалда нархларнинг энг кичиги C_{13} катакдир. Унга мос нарх 10 сўмни ташкил этади. Юқорида айтилгандек бу катакка ҳам юк миқдори берилади. У миқдор 235 тонна ундир. Худди шундай қолган катакларни ҳам тўлдирамиз. Натижада қуйидаги ечимга эга бўламиз: $x_{11}=x_{14}=x_{28}=x_{24}=x_{31}=$ $=x_{33}=0$, $x_{12}=65$, $x_{13}=235$, $x_{21}=225$, $x_{22}=25$, $x_{32}=$ $=140$, $x_{34}=210$.

Режани потенциалли эканлигини таҳлил қиламиз. Бунинг учун потенциаллар тенгламалари системасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1+\beta_2' &= 12 \\ \alpha_1+\beta_3 &= 10 \\ \alpha_2+\beta_1 &= 4 \\ \alpha_2+\beta_2 &= 13 \\ \alpha_3+\beta_2 &= 16 \\ \alpha_3+\beta_4 &= 11 \end{aligned}\right\}$$

Потенциаллар системаси олти тенгламадан иборат бўлиб, номаълумлар сони еттита. Шунинг учун $\alpha_1=0$ деб, қолган номаълумлар қийматини аниқлаймиз.

Ечим қуйидагилардан иборат бўлади: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 4$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 12$, $\beta_3 = 10$, $\beta_4 = 7$. Тўла бўлмаган катакларнинг потенциалларини аниқлаймиз:

$$
\begin{gathered}
C'_{11} = \alpha_1 + \beta_1 = 3 < 8 = C_{11}, \\
C'_{14} = \alpha_1 + \beta_4 = 7 < 15 = C_{14}, \\
C'_{23} = \alpha_2 + \beta_3 = 11 < 15 = C_{23}, \\
C'_{24} = \alpha_2 + \beta_4 = 8 < 14 = C_{24}, \\
C'_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = 7 < 9 = C_{31}, \\
C'_{33} = \alpha_3 + \beta_3 = 14 < 17 = C_{33}.
\end{gathered}
$$

Демак, система потенциалли экан. Режа оптимал бўлади. Режага кетадиган барча харажат $S = 65 \cdot 12 + 235 \cdot 10 + 25 \cdot 13 + 140 \cdot 26 + 210 \cdot 11 + 225 \cdot 4 = 8905$. Демак, $S = 8905$ тонна-сўм.

Потенциал усули алгоритмидан фойдаланилганда ҳисобларни текшириш қуйидагича амалга оширилади. Масалани ечиш жараёнида ҳар бир ҳосил қилинган режа ўринлиликка текширилади. Бунинг учун режа компоненталари сатр ва устун бўйича қўшилади. Йиғиндилар мос равишда истеъмолчининг эҳтиёжи билан жўнатиладиган ресурслар захирасига тенг бўлмоғи лозим. Оптимал режа асосий теоремадан келиб чиқадиган

$$
Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i
$$

формуладан фойдаланилган ҳолда текширилади. Йўл-йўлакай потенциаллар ҳам текширлади.

II. Транспорт масаласини ечишда тақсимлаш усули потенциал усулидан фақат ҳисоблаш жараёнининг ўзгариши билан фарқ қилади. Тақсимлаш усулининг алгоритми қуйидагича бўлади:

а) берилган маълумотлар шимолий бурчак усули билан бошланғич режа жадвалига тақсимланади ва у оптимал ечиш (тўлдирилган катаклар бўйича) ҳисобланади;

б) олинган ечим ҳал қилувчи кўпайтувчилар ёрдамида текширилади, яъни бу қўшилувчилар ёрдамида тўлдирилган катаклардаги ҳамма баҳолар нолга айлантирилади. Агар бундай тузатишлардан кейин ҳамма катакларда манфий ишорали баҳо сақланмаса (максимумни излашда манфий ишорали), у оптимал ечимга эга бўлади, акс ҳолда масалани ечишнинг қуйидаги босқичини бажариш керак;

в) жадвалда учта ноль баландлик ва тўртинчиси мусбат баландлик бўйича тўғри бурчак ажратилади, агар бундай тўғри бурчаклар бир нечта бўлса, уларнинг манфий баландликдаги сонининг абсолют қиймати жиҳатидан энг каттасидан бошланади. Ҳосил бўлган тўғри бурчаклан манфий баландликлаги энг кам юк миқдорини олиб, мусбат катаклардаги юк миқдорлари қўшилади ва манфий катаклардаги юк миқдорларидан айириб ташланади (агар масаланинг шарти максимумни талаб этса, юқоридагининг акси бўлади). Натижада режа янгича тақсимланади. Бунда режа оптимал ечимга эга бўлгунча алмаштириш давом эттирилади.

III. Транспорт масаласини ечишнинг ёпиқ модели Транспорт масаласини ечишда масала турлича қўйилиши мумкин. Шулардан транспортга оид масаланинг қуйидаги математик модели ёпиқ модель деб юритилади:

а) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ресурслардан тўла фойдаланиш керак;

б) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = B_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ истеъмол қилувчининг талаби тўла қондирилиши керак;

в) $\sum_{j=1}^{n} B_j = \sum_{i=1}^{m} A_i$ — истеъмолчиларнинг талаби қондирилиши учун ресурслардан тўла фойдаланиш керак*;

г) $x_{ij} \geqslant 0$ -- номаълумлар манфий бўлмасликлари керак. Юқоридаги шартларда $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ функциянинг минимум ёки максимум қиймати топилиши керак.

IV. Транспорт масаласининг очиқ модели. Транспортга оид масалада очиқ моделнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

а) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_i$ ёки б) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Агар ташиладиган умумий юк захира истеъмол қилувчиларга нисбатан кўп бўлса, у вақтда истеъмол қилув-

---

* в) шарти бажарилса, модель ёпиқ модель дейилади.

чиларга қўшимча истеъмол тармоғи $(n+1)$ қўшилади, яъни

$$b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i-\sum_{j=1}^{n} b_j \text{ бўлади.}$$

Мўлжалланган тармоққа ташиладиган юкнинг баҳоси нолга тенг деб ҳисобланади. Ҳосил бўладиган янги масала транспорт масаласида ёпиқ модель кўринишига келади:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n+1} b_j.$$

Худди шундай иккинчи кўринишдаги б) формуланинг ёпиқ моделига хос ифодаси берилади:

бунда $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j-\sum_{i=1}^{m} a_i$ бўлиб, юкни ташишдаги баҳо эса $C_{m+1,j}=0$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$ га тенг ёки $\sum_{i=1}^{m+1} a_i=$ $=\sum_{j=1}^{m} b_j$ бўлади. Юқорида келтирилган моделларга боғлиқ бўлган масалаларнинг ҳар хил йўллар билан ечилиши қўлланмада келтирилмайди.

ИЛОВА

$\Phi(a)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ функция қийматлари жадвали (эҳтимоллик интегралининг қийматлари)

a	$\Phi(a)$	a	$\Phi(a)$	a	$\Phi(a)$	a	$\Phi(a)$	a	$\Phi(a)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,00	0,000	0,61	0,458	1,22	0,778	1,83	0,933	2,44	0,985
0,01	0,008	0,62	0,465	1,23	0,781	1,84	0,924	2,45	0,985
0,02	0,016	0,63	0,471	1,24	0,785	1,85	0,936	2,46	0,985
0,03	0,024	0,64	0,478	1,25	0,789	1,86	0,937	2,47	0,986
0,04	0,032	0,65	0,484	1,26	0,792	1,87	0,939	2,48	0,987
0,05	0,040	0,66	0,491	1,27	0,796	1,88	0,940	2,49	0,987
0,06	0,048	0,67	0,497	1,28	0,800	1,89	0,941	2,50	0,988
0,07	0,056	0,68	0,504	1,29	0,803	1,90	0,943	2,51	0,988
0,08	0,064	0,69	0,510	1,30	0,806	1,91	0,944	2,52	0,988
0,09	0,072	0,70	0,516	1,31	0,810	1,92	0,945	2,53	0,989
0,10	0,080	0,71	0,522	1,32	0,813	1,93	0,946	2,54	0,989
0,11	0,088	0,72	0,528	1,33	8,716	1,94	0,948	2,55	0,989

Давоми

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,12	0,096	0,73	0,535	1,34	0,8 0	1,95	0,949	2,56	0,990
0,13	0,103	0,74	0,541	1,35	0,823	1,96	0,950	2,57	0,990
0,14	0,111	0,75	0,547	1,36	0 826	1,97	0,951	2,58	0,990
0,15	0.119	0,76	0,553	1,37	0,829	1,98	0,952	2,59	0,990
0,16	0,127	0,77	0.559	1,38	0,832	1,99	0,953	2,60	0 991
0,17	0,135	0,78	0,566	1,39	0,835	2,00	0,955	2,61	0,991
0,18	0,143	0,79	0,570	1,40	0,838	2,01	0,556	2,62	0,991
0,19	0,151	0,80	0,576	1,41	0,841	2,02	0,9 7	2,63	0,991
0,20	0.159	0,81	0,582	1,42	0 844	2,03	0,958	2,64	0,992
0,21	0,166	0,82	0,588	1.43	0,847	2,04	0,959	,65	0,992
0,22	0,174	0,83	0 593	1,44	0,850	2,05	0,960	2,66	0,992
0,23	0, 82	0,84	0,599	1,45	0,853	2,06	0,961	2,67	0,992
0,24	0,190	0,85	0,605	1,46	0,856	2,07	0.962	2,68	0,993
0,25	0,197	0,86	0,610	1,47	0,858	2,08	0,962	2,69	0.993
0,26	0,205	0,87	0,616	1,48	0,8 1	2,09	0,963	2,70	0,993
0,27	0,213	0,88	0,621	1,49	0,864	2,10	0,964	2,71	0,993
0,28	0,221	0,89	0,627	1,50	0 8 6	2,11	0,965	2,72	0,993
0,29	0,2 8	0,90	0,632	1,51	0,867	2,12	0,966	2,73	0 993
0,30	0,236	0,91	0,637	1,53	0,871	2,13	0,967	2,74	0 994
0,31	0,243	0,9	0,642	1,53	0,87	2,14	0,968	2,75	0,994
0,32	0,251	0,93	0,648	1,54	0,876	2,15	0,968	2,76	0,995
0,33	0, 59	0,94	0,653	1,55	0,879	2,16	0,969	2,80	0,995
0,34	0,266	0,95	0,658	1,56	0,881	2,17	0,970	2,82	0,995
0,35	0,274	0,96	0.663	1,57	0,884	2.18	0,971	2,84	0,995
0,36	0,281	0,97	0,668	1,58	0,886	2,19	0,971	2,86	0,996
0,37	0,289	0,98	0,673	1,59	0,888	2,20	0,972	2,88	0,996
0,38	0,296	0,99	0,678	1,60	0,890	2,21	0,973	2,90	0,996
0,39	0,303	1,00	0,683	1,61	0,893	2,22	0,974	2,94	0,996
0,40	0,311	1.01	0,688	1,62	0,8 5	2,23	0,974	2,95	0,997
0,41	0,318	1,02	0,692	1 63	0,897	2,24	0,975	2 96	0,997
0,42	0,326	1,03	0,697	1,64	0,899	2,25	0,976	2,98	0,997
0,43	0,333	1,04	0,702	1,65	0,901	2,26	0,976	3.00	0,997
0,44	0,340	1,05	0,706	1,66	0,903	2,27	0,976	3,10	0,998
0,45	0,347	1,06	0,711	1,67	0,905	2.28	0,977	3,20	0,999
0,46	0, 54	1,07	0,715	1,68	0,907	2,29	0,978	3,30	0.999
0,47	0,362	1,08	0,716	1,69	0,909	2,30	0,979	3,40	0,999
0,48	0,369	1,09	0,724	1,70	0,911	2,31	0,979	3,50	0,9995
0,49	0,376	1,10	0,729	1,71	0,913	2,32	0,980	3,60	0,9997
0,50	0,383	1,11	0,733	1.72	0.915	2,33	0,980	3,70	0,9998
0,51	0,390	1,12	0,737	1,73	0,916	2,34	0,981	3,80	0.99986
0,52	0,397	1,13	0,742	1,74	0,918	2,35	0.981	3,90	0,9 990
0,53	0,404	1,14	0,746	1 75	0,920	2,36	0,982		
0,54	0,411	1,15	0,750	1,76	0,922	2,37	0,982	4,00	9,99994
0,55	0,418	1.16	0,754	1,77	0,923	2,37	0,983		
0,56	0,425	1,17	0,758	1.78	0,925	2,39	0.983		
0,57	0,431	1,18	0,762	1,79	0.927	2,40	0,984		
0.58	0,43	1,19	0,766	,80	0,928	2,41	0,984		
0,59	0,445	1,20	0,770	1,81	0,930	2 42	0,984		
0 60	0,351	1,21	0,774	1,82	0,931	2,43	0,985	9,00	0,99999994

АДАБИЁТ

1. Н. С. Бахвалов. Численные методы. М., Наука, 1975.
2. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. М., Наука, 1966.
3. А. Ш. Блох, А. Т. Кузнецов. Вычислительная математика и программирование. Минск. Народная асвета, 1983.
4. Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. М., Наука, 1970.
5. В. Г. Житомирский и др. Практикум по вычислительной математике. Свердловск, 1977.
6. В. И. Крылов и др. Вычислительные методы. М., Наука, 1976, т. 1—2.
7. Р. Искандаров, Р. Назаров. Алгебра ва сонлар назарияси. Тошкент, «Ўқитувчи», 1977, 1-қисм.
8. М. П. Лапчик. Введение в программирование на алгоритмическом языке БЕЙСИК. Омск ОМГПИ им. А. М. Горького, 1985.
9. Ю. Л. Кетков. Программирование на БЕЙСИКе. М., Машиностроение, 1981.
10. И. Ф. Полунин. Курс математического программирования. Минск, Вышэйшая школа, 1970.
11. Т. Уорт. Программирование на языке БЕЙСИК. М., Машиностроение, 1978.
12. А. А. Абдуқодиров, Э. И. Кузнецов. Ҳисоблаш математикаси ва программалашдан лаборатория ишлари. Тошкент, «Ўқитувчи», 1987.
13. А. А. Абдуқодиров ва бошқалар. Информатикага кириш (методик тавсиянома), Тошкент, 1987.
14. А. А. Абдуқодиров, А. А. Атабаев. БЕЙСИК алгоритмик тилини ўрганиш бўйича методик кўрсатма. Тошкент, 1986.

МУНДАРИЖА