MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

100 YIL

N.M.Jabborov

OLIY MATEMATIKA

I-jild

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI
O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

Mirzo Ulug‘bek nomidagi
O‘zbekiston Milliy universiteti
100 yilligiga bag‘ishlanadi

N.M.Jabborov

OLIY MATEMATIKA

(bakalavr ta’lim yo‘nalishlari talabalari uchun darslik)

I-jild

Toshkent
“Universitet”
2017

Jabborov N.M. Oliy matematika. I-jild. Darslik.
–T.: «Universitet» nashriyoti. 2017. –304 b.

Taqrizchilar:

T.T.To'ychiyev – Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti Mexanika-matematika fakulteti "Matematik analiz" kafedrasi dotsenti,

A.Gaziyev – Samarqand Davlat universiteti "Matematik analiz" kafedrasi professori,

I.Israilov – Samarqand Davlat universiteti "Matematik programmalashtirish" kafedrasi professori.

Darslik O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta-maxsus ta'lim vazirligi 2017-yil 28-iyundagi 434-sonli buyrug'iga asosan nashrga tavsiya etilgan.

ISBN 978-9943-5041-1-0

So'z boshi

Oliy o'quv yurtlarida oliy matematika yo'nalishlarga qarab, u yoki bu hajmda o'qitiladi. Oliy matematikani o'qitishdan ko'zlangan asosiy maqsad: bir tomondan, shu fanning asosiy tushunchalari, tasdiqlari, turli usullari hamda boshqa matematik ma'lumotlar bilan tanishtirish bo'lsa, ikkinchi tomondan, amaliy masalalarni matematik usullar yordamida yechishga o'rgatishdan iborat. Ayni paytda, talabalarni mantiqiy fikrlashga o'rgatish ham oliy matematikaning vazifalaridan biri hisoblanadi.

Ozbekistonda kadrlar tayyorlash tizimini tubdan isloh qilish jarayonida talabalarni o'quv materiallari bilan, ayniqsa, darslik va o'quv qo'llanmalari bilan ta'minlash muhim ahamiyatga ega.

"Oliy matematika" kursi bo'yicha turli darajada yozilgan va maqsad hamda yo'nalishlari xilma-xil bo'lgan qator darslik va o'quv qo'llanmalari mavjud. Ammo davlat ta'lim standartlari o'quv dasturlarini zamon talablariga moslashtirishni va qayta ko'rib chiqishni taqozo etadi.

Mazkur darslik davlat ta'lim standartlari asosida yozilgan hamda ma'lum tartibda bob va paragraflarga ajratilib bayon etilgan.

Ushbu darslik 17 ta bobdan iborat bo'lib, ikki qismga ajratilgan. Birinchi qism 10 ta bobdan iborat bo'lib, unda sonlar o'qi, dekart va qutb koordinatalari sistemasi, determinantlar va matritsalar, ular yordamida tenglamalar sistemasini yechish, vektorlar va kompleks sonlar, tekislikda to'g'ri chiziq va uning turli ko'rinishdagi tenglamalari, ikkinchi tartibli egri chiziqlar, bir o'zgaruvchili funksiya, uning hosila va differensiallari, Teylor formulasi, differensial hisobning tatbiqlari, funksiyaning noaniq va aniq integrallari, aniq integralning tatbiqlari, qatorlarga oid mavzular keltirilgan.

Dastlabki boblarda haqiqiy sonlar, tenglamalar va tengsizliklar haqida qisqacha ma'lumotlar keltirildi. Ular, fikrimizcha, "elementar matematika"dan oliy matematikaga o'tishda ko'prik vazifasini bajaradi.

Darslikni yozishda biz quyidagilarga:

1) har bir mavzuning ravon, ixcham, matematik qat'iylik bilan bayon etilishiga;

2) mavzulaming bir-biriga uzviy bogliqlikda, ma'lum ketma-ketlikda, kerakli isbotlar bilan yoritilishiga;

3) turli amaliy masalalarni yechishda matematik usullaming tatbiqiga e'tibor qaratdik.

Ma'lumki, oliy matematikaning turli sohalarga tatbiq qilish doirasi nihoyatda keng. Ayniqsa, fizika, mexanika masalalarini, shuningdek, texnik hamda iqtisod masalalarini yechishda matematik usullardan har doim foydalaniladi.

Kitobda oliy matematikaning tatbiqlariga misol va masalalar qisman keltirilgan bo'lib, N.M.Jabborovning "Matematika" (matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar toplami) darsligida kengroq va batafsil to'xtalib o'tilgan. Shuni ham aytish kerakki, ko'p yillar davomida mualliflarning mazkur kurs bo'yicha o'qigan ma'ruzalari kitobni yozish jarayonida katta yordam berdi. Bundan tashqari, oliy matematika bo'yicha xorijda chop etilgan adabiyotlardan ham foydalanildi. Jumladan, I.I.Bavrin, V.L.Matrosov "Общий курс высшей математики" 1995-y., V.G.Skatetskiy va boshqalarning "Математические методы в химии" 2006-y., L.I.Lure "Основы высшей математики" kabi darslik va o'quv qo'llanmalari tahlil qilinib, ulardan foydalanildi.

Kitob qo'lyozmasini sinchiklab o'qib, uning ilmiy va uslubiy jihatdan yaxshilanishiga o'z hissasini qo'shgan professor X.T.Mansurovga o'z minnatdorchiligimizni bildiramiz.

Muallif

I BOB. DASTLABKI MA'LUMOTLAR

1-§. Haqiqiy sonlar. Sodda tenglamalar va tengsizliklar

"Son" tushunchasi matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Ular:

1) natural sonlar (1, 2, 3, ...);
2) butun sonlar (..., –2, –1, 0, 1, 2, ...);
3) kasr sonlar (oddiy va o'nli kasrlar);
4) haqiqiy sonlar bo'lishi mumkin. Bunday sonlar ustida bajariladigan amallar, amallarning bajarilish qoidalari o'quvchiga maktab, kollej va litseylarda o'qitiladigan "Matematika" fanidan ma'lum.

"Oliy matematika" kursi davomida ko'p hollarda haqiqiy sonlardan foydalaniladi. Shuning uchun haqiqiy sonlar haqidagi asosiy ma'lumotlarni qisqacha bayon etamiz.

1.1. Ratsional va irratsional sonlar

Ma'lumki, $\frac{p}{q}$ ko'rinishida ifodalaniladigan son ratsional son deyiladi, bunda p – butun son, q esa natural son bo'lib, ular o'zaro tub, ya'ni $(p,q)=1$. Oddiy kasrlar esa ratsional son bo'ladi.

Agar $\frac{p}{q}$ kasrning maxraji 10, 100, umuman, 10 ning natural darajalari (10^n) bo'lsa, bunday oddiy kasr o'nli kasr deyiladi. Masalan,

$\frac{3}{2}, \frac{1}{17}, \frac{23}{11}, -\frac{8}{9}$ – oddiy kasrlar,

$\frac{7}{10}=0,7$, $\frac{112}{10}=11,2$, $\frac{23}{100}=0,23$ – o'nli kasrlar bo'ladi.

$\frac{p}{q}$ ratsional son – oddiy kasr berilgan bo'lsin. Bo'lish qoidasidan foydalanib, p butun sonni q natural songa bo'lamiz. Agar bo'lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo'lsa, u holda bo'lish jarayoni to'xtab, $\frac{p}{q}$ kasr o'nli kasrga aylanadi. Odatda, bunday o'nli kasr chekli o'nli kasr deyiladi.

p ni q ga bo'lish jarayoni cheksiz davom etib, ma'lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchrashi, so'ng undan oldingi raqamlar mos ravishda takrorlanishi mumkin. Odatda, bunday o'nli kasr cheksiz davriy o'nli kasr deyiladi. Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) o'nli kasrning davri deyiladi.

Masalan, $\frac{53}{36}$ ratsional son $1,4722...=1,47(2)$ o'nli kasrga keladi. Bu cheksiz davriy o'nli kasr bo'lib, uning davri 2 ga teng: $\frac{53}{36}=1,47(2)$.

Demak, har qanday $\frac{p}{q}$ ratsional son chekli o'nli kasr yoki cheksiz davriy o'nli kasr orqali ifodalanadi.

Aksincha, har qanday chekli o'nli kasrni yoki cheksiz davriy o'nli kasrni $\frac{p}{q}$ ko'rinishida ifodalash mumkin.

Masalan,
$$1,03=1\frac{3}{100}=\frac{103}{100},$$
$$0,(3)=0,3333...=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}$$
(bunda, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisini topish formulasidan foydalanildi) bo'ladi.

Demak, har qanday chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr ratsional son orqali ifodalanadi.

Shunday qilib, ixtiyoriy ratsional son chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr orqali va aksincha, ixtiyoriy chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr ratsional son orqali ifodalanadi.

Ammo cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar ham mavjud. Masalan, $1,1010010001...$, $1,4142135...$, $2,7182818...$ sonlar cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar bo'ladi (bu sonlardan ikkinchisi $\sqrt{2}$ ni, uchinchisi esa e sonini ifodalaydi). Ravshanki, bu sonlar ratsional sonlar bo'lmaydi.

Ta'rif. *Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr irratsional son deyiladi*. Masalan,
$$1,4142135...=\sqrt{2},\quad 3,141583...=\pi,\quad 2,718281...=e$$
sonlar irratsional sonlardir.

1.2. Haqiqiy son. Haqiqiy sonlar to'plami va uning xossalari

Ta'rif. *Ratsional va irratsional sonlar umumiy nom bilan haqiqiy sonlar deyiladi.*

Masalan, $2,\ 7\frac{1}{2},\ -3,\ \sqrt{2},\ \pi,$
sonlar haqiqiy sonlardir.

Odatda, matematikada turli matematik obyektlar, jumladan, haqiqiy sonlar, alohida-alohida o'rganilmasdan, ularning bir nechtasi birgalikda o'rganiladi. Bu "to'plam" tushunchasiga olib keladi.

To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, u narsalarning ma'lum belgilar bo'yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi. Masalan, 2, 4, 6 sonlaridan tashkil topgan to'plam bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan to'plam deyilishi mumkin. To'plamni tashkil etgan narsalar uning elementlari deyiladi.

Haqiqiy sonlardan tashkil topgan to'plamlar sonli to'plamlar deyiladi. Bundan keyin sonli to'plam o'rniga qisqacha to'plam deb qo'llaymiz.

Matematikada to'plamlar bosh harflar bilan, uning elementlari esa kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, $A,B,...$ to'plamlar, $a,b,...$ to'plam elementlari.

Agar a biror A to'plamning elementi bo'lsa, $a\in A$ kabi yoziladi va "a element A to'plamga tegishli" deb o'qiladi. Agar a shu A to'plamga tegishli bo'lmasa, u $a\notin A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli emas» deb o'qiladi.

Odatda, barcha natural sonlardan iborat to'plam N harfi:
$$N=\{1,2,3,...\},$$
barcha butun sonlardan iborat to'plam Z harfi:
$$Z=\{...,-2,-1,0,1,2,...\},$$
barcha ratsional sonlardan iborat to'plam Q harfi:
$$Q=\left\{\frac{p}{q}: p\in Z,\ q\in N,\ (p,q)=1\right\},$$
barcha haqiqiy sonlardan iborat to'plam R harfi bilan belgilanadi.

Agar A chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u chekli to'plam, aks holda, cheksiz to'plam deyiladi.

Masalan, $A=\{2,4,6,8,10,12,14\}$
chekli to'plam, $N=\{1,2,3,...,n,...\}$
cheksiz to'plam bo'ladi.

Ta'kidlash kerakki, to'plamni tashkil etgan elementlar orasida aynan bir-biriga teng bo'lgan elementlar to'plamning elementi sifatida faqat bir martagina olinadi.

Aytaylik, ikki E va F to'plamlari berilgan bo'lsin. Agar E to'plamning barcha elementlari F to'plamga tegishli bo'lsa, E to'plam F to'plamning qismi deyiladi va $E\subset F$ kabi yoziladi. Masalan,
$$N\subset Z\subset Q\subset R$$
bo'ladi.

Agar $E \subset F$ va $F \subset E$ bo'lsa, E va F bir-biriga teng to'plamlar deyiladi va $E = F$ kabi yoziladi.

E va F to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam, bu to'plamlar yig'indisi deyiladi va $E \cup F$ kabi belgilanadi. E va F to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam, bu to'plamlarning ko'paytmasi (kesishmasi) deyiladi va $E \cap F$ kabi yoziladi. E to'plamning F to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam E to'plamdan F to'plamning ayirmasi deyiladi va $E \setminus F$ kabi yoziladi.

Masalan, $A = \{1,2,5,8,11,13\}$, $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

to'plamlar uchun

$$A \cup B = \{1,2,4,5,6,8,10,11,12,13\},$$
$$A \cap B = \{2,8\},$$
$$A \setminus B = \{1,5,11,13\},$$
$$B \setminus A = \{4,6,10,12\},$$

shuningdek, $N \cup Z = Z$, $N \cap Z = N$, $Z \setminus N = \{\ldots -3,-2,-1,0\}$ bo'ladi.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Odatda, chekli A to'plam elementlari soni $m(A)$ orqali belgilanadi.

1-misol. *Dunyo okeanida 19 ta suvosti chuqurliklari ma'lum, ularning chuqurligi 7 km. dan oshadi. Ulardan 16 tasi Tinch va Hind okeanlarida, 4 tasi Hind va Atlantika okeanlarida. Har bir okeanda nechtadan suvosti chuqurliklari bor?*

Yechilishi. A to'plam bilan Tinch va Hind okeanlaridagi suvosti chuqurliklarini, B to'plam bilan Hind va Atlantika okeanlaridagi suvosti chuqurliklarini belgilaymiz. Masala shartiga ko'ra $m(A)=16$, $m(B)=4$ bo'ladi. Ayni paytda, $m(A \cup B)=19$ ekanligi ma'lum. Ravshanki, Hind okeanidagi suvosti chuqurligi $A \cap B$ to'plamni tashkil etadi. Bu to'plamning elementlari quyidagicha topiladi:

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 16 + 4 - 19 = 1.$$

Shunday qilib, Hind okeanida 1 ta, Tinch okeanida 15 ta, Atlantika okeanida 3 ta suvosti chuqurliklari bor ekan.

Endi barcha haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan R to'plamning xossalarini keltiramiz:

1) *R to'plamda (to'plam elementlari orasida) qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish amallari kiritilgan bo'lib, bu amallarning bajarilish qoidalari ham o'rinli bo'ladi;*

2) *R to'plamda (to'plam elementlari orasida) teng, katta, kichik tushunchalari kiritilgan. Ixtiyoriy $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$ haqiqiy sonlar uchun*

$a = b$, yoki $a > b$, yoki $a < b$

bo'lib, $a < b$, $b < c$ bo'lishidan $a < c$ bo'lishi kelib chiqadi;

3) *R zich to'plam bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $a \in R$, $b \in R$ haqiqiy sonlar uchun $a \neq b$ bo'lsa, u holda a va b sonlar orasida istalgancha haqiqiy son bo'ladi.*

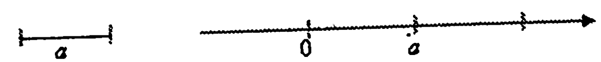
2-misol. *Agar r – ratsional, α – irratsional son bo'lsa, $r + \alpha$ sonning irratsional son bo'lishi isbotlansin.*

Yechilishi. Berilgan r va α sonlarning yig'indisini β deylik: $\beta = r + \alpha$. Ravshanki, bu tenglikdan $\alpha = \beta - r$ bo'lishi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, β ratsional son bo'lsin. Unda $\beta - r$ soni, ikki ratsional son ayirmasi yana ratsional son bo'lganligi uchun ratsional son bo'ladi: $\beta - r = \alpha$ ratsional son. Bu esa berilishiga ko'ra α ning irratsional son bo'lishiga ziddir. Ziddiyatning kelib chiqishiga β ning ratsional son bo'lsin deyilishi sabab bo'ldi. Demak, β – irratsional son.

1.3. Sonlar o'qi. Sonlarni geometrik tasvirlash

To'g'ri chiziq va bu to'g'ri chiziqda biror nuqta olib, uni O harfi bilan belgilaymiz (1-chizma).



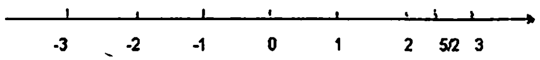
1-chizma

Bu O nuqta nol sonining geometrik tasviri deyiladi. O nuqta to'g'ri chiziqni ikki nurga ajratadi. O nuqtadan o'ng tomondagi nurning yo'nalishini musbat, chap tomondagi nurning yo'nalishini manfiy deb qaraymiz. So'ng o'lchov birligi (uzunligi 1 ga teng kesma)ni olamiz.

Natijada, yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq, O nuqta va o'lchov birliklaridan iborat sistema hosil bo'ladi. U sonlar o'qi deyiladi.

O'lchov birligi deb qabul qilingan a kesmani O nuqtadan boshlab, sonlar o'qining o'ng tomoniga joylashtira boramiz. Uni bir marta joylashtirganda bir uchi O nuqtada bo'lib, ikkinchi uchi aniqlagan nuqta 1 sonining geometrik tasviri bo'ladi. Shu tarzda birlik kesmani ikki marta, uch marta va h.k. marta joylashtirib, sonlar o'qida 2, 3 va h.k. sonlarning geometrik tasvirlari topiladi.

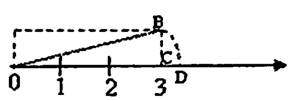
Xuddi shunday usul bilan birlik kesmani O nuqtadan chap tomondagi nurga joylashtira borib, –1, –2, –3 va h.k. sonlarning geometrik tasvirlari aniqlanadi (2-chizma).



2-chizma

Aytaylik, qaralayotgan son ratsional son bo'lsin: masalan, $\frac{5}{2}$. Bu sonni tasvirlovchi nuqtani topish uchun avval o'lchov birligini O nuqtadan o'ng tomonga ikki marta joylashtirib, ikki sonni tasvirlovchi nuqta topiladi, so'ngra bu nuqtadan boshlab o'lchov birligining $\frac{1}{2}$ qismini qo'yib, $\frac{5}{2}$ sonni geometrik ifodalovchi nuqta topiladi (2-chizma).

Umuman, ratsional sonlar to'plami Q dan olingan har bir ratsional songa to'g'ri chiziqda bitta nuqta mos keladi. Biroq sonlar o'qida shunday nuqtalar borki, ular birorta ham ratsional sonning tasviri bo'lmaydi. Masalan, $\sqrt{10}$ sonini olaylik (bu son irratsional son bo'ladi). Tomonlari 3 va 1 ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni olamiz (3-chizma).



3-chizma

Bu to'g'ri to'rtburchakning OB diagonali, Pifagor teoremasiga ko'ra, $OB^2 = OC^2 + BC^2$ bo'lib, $OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ bo'ladi. Sirkulning uchi O nuqtaga qo'yilib, radiusi OB ga teng bo'lgan aylana chizilsa, bu aylana sonlar o'qini D nuqtada kesadi. Ravshanki, $OB = OD$.

Demak, $\sqrt{10}$ soni geometrik tasvirlovchi nuqta D nuqta bo'ladi.

Sonlar o'qida shu kabi nuqtalar cheksiz ko'p bo'lib, ular irratsional sonlarning geometrik tasvirlari bo'ladi. Ma'lumki, barcha ratsional hamda barcha irratsional sonlardan tashkil topgan to'plam haqiqiy sonlar to'plami bo'lib, u R harfi bilan belgilangan edi.

Ko'rsatish mumkinki, (u maxsus adabiyotlarda, masalan [2] da isbotlangan) har bir haqiqiy songa sonlar o'qida bitta nuqta va aksincha, sonlar o'qidagi har bir nuqtaga bitta haqiqiy son mos keladi. Bu haqiqiy

sonlar to'plami R bilan sonlar o'qining nuqtalari to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslikda ekanligini bildiradi.

Kelgusida, to'g'ri chiziqning nuqtasi deganda haqiqiy sonni, haqiqiy son deganda to'g'ri chiziqning nuqtasini tushunamiz.

Endi ba'zi bir sonlar to'plamini keltiramiz, ulardan, kelgusida ko'p foydalaniladi.

Aytaylik, $a \in R$, $b \in R$ sonlar berilgan bo'lib, $a < b$ bo'lsin.

a, b ва ular orasidagi barcha haqiqiy sonlardan tashkil topgan to'plam segment deyiladi va $[a,b]$ kabi belgilanadi:

$$[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$$

Xuddi shunga o'xshash ushbu (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, to'plamlar quyidagicha ta'riflanadi:

$$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\} \text{ – interval},$$
$$[a,b) = \{x \in R : a \le x < b\} \text{ – yarim interval},$$
$$(a,b] = \{x \in R : a < x \le b\} \text{ – yarim interval}.$$

Bunda a va b sonlar $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ va $(a,b]$ to'plamlarning chegaralari deyiladi. Shuningdek,

$$[a,+\infty) = \{x \in R : x \ge a\},$$
$$(-\infty,a) = \{x \in R : x < a\},$$
$$(-\infty,+\infty) = R$$

deb qaraymiz.

1.4. Sonning absolyut qiymati va uning xossalari

Biror x haqiqiy sonni $(x \in R)$ olamiz. Bu son musbat $(x > 0)$, manfiy $(x < 0)$ yoki $x = 0$ bo'lishi mumkin.

$x > 0$ bo'lganda shu x ga teng, $x < 0$ bo'lganda shu songa qarama-qarshi $-x$ ga, $x = 0$ bo'lganda 0 ga teng bo'ladigan son x ning absolyut qiymati deyiladi va $|x|$ kabi belgilanadi. Demak,

$$|x| = \begin{cases} x, & agar\ x \ge 0, \\ -x, & agar\ x < 0. \end{cases}$$

Masalan, $|7| = 7$, $|-2| = -(-2) = 2$, $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1) Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun

$$|x| \ge 0,\ |x| = |-x|,\ x \le |x|,\ -x \le |x|$$

munosabatlar o'rinli;

2) Agar x haqiqiy son

$$|x| \le a \quad (a>0)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u

$$-a \le x \le a$$

tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha;

3) Agar x haqiqiy son

$$|x| > a$$

tengsizlik qanoatlantirsa, u

$$x>a, \; x<-a$$

tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha;

4) Ikki x va y haqiqiy sonlar uchun

a) $|x+y| \le |x|+|y|$,

b) $|x-y| \ge |x|-|y|$,

d) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

e) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \ne 0)$

bo'ladi.

5) Ushbu

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

munosabat o'rinli.

3-misol. *Agar a,b,c haqiqiy sonlar uchun $a>b>c$ bo'lsa,*

$$|a-b|+|c-a|-|b-c|$$

topilsin.

Yechilishi. Ravshanki, $a>b$ bo'lgani uchun $a-b>0$ bo'lib,

$$|a-b| = a-b$$

bo'ladi, $a>c$ bo'lgani uchun $c-a<0$ bo'lib,

$$|c-a| = -(c-a) = a-c$$

bo'ladi, $b>c$ bo'lgani uchun $b-c>0$ bo'lib

$$|b-c| = b-c$$

bo'ladi. Demak,

$$|a-b|+|c-a|-|b-c| = a-b+a-c-(b-c) = 2(a-b).$$

1.5. Sodda tenglamalar va tengsizliklar

Oliy matematikaning turli sohalaridagi masalalari, ko'p hollarda tenglama va tengsizliklarni yechish bilan hal qilinadi.

Odatda, berilgan tenglama va tengsizliklar, ularga teng kuchli, ayni paytda, soddaroq bo'lgan tenglama va tengsizliklar bilan almashtiriladi. Ularni yechib, berilgan tenglama va tengsizliklarning yechimlari topiladi.

a) Chiziqli va kvadrat tenglamalar

Ma'lumki, noma'lumga nisbatan birinchi darajada bo'lgan tenglama chiziqli tenglama deyiladi. Bu tenglama sodda holda ushbu

$$ax+b=0 \tag{1}$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda a va b berilgan sonlar. (1) tenglama:

1) $a \ne 0$ bo'lganda yagona $x = -\dfrac{b}{a}$ yechimga ega bo'ladi,

2) $a=0, \quad b=0$ bo'lganda yechimlari cheksiz ko'p (ixtiyoriy son tenglamaning yechimi) bo'ladi.

3) $a=0, \quad b \ne 0$ bo'lganda yechimga ega bo'lmaydi.

4-misol. *Ushbu tenglamani yeching:*

$$\frac{2x-5}{4} + \frac{2x+1}{3} + x = \frac{x}{4} + 2$$

◀Bu tenglamaning har ikki tomonini 4 va 3 sonlarining eng kichik umumiy karralisini 12 ga ko'paytirib

$$12 \cdot \frac{2x-5}{4} + 12 \cdot \frac{2x+1}{3} + 12x = 12 \cdot \frac{x}{4} + 24,$$

ya'ni

$$3(2x-5)+4(2x+1)+12x = 3x+24$$

bo'lishini topamiz.

Soddalashtirish natijasida keyingi tenglik quyidagi

$$6x-15+8x+4+12x = 3x+24,$$

ya'ni

$$23x = 35$$

ko'rinishga keladi. Ravshanki, bu tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lib, uning yechimi $x = \dfrac{35}{23}$ bo'ladi.▶

Ma'lumki, noma'lumga nisbatan ikkinchi darajada bo'lgan tenglama kvadrat tenglama deyiladi. Bu tenglama sodda holda ushbu

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a \ne 0) \tag{2}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda a,b,c berilgan sonlar bo'lib, kvadrat tenglama-ning koeffitsiyentlari deyiladi.(2) tenglamaning yechimi, uning diskriminanti

$$D = b^2 - 4ac$$

ga bog'liq:

1) agar $D>0$ bo'lsa, (2) tenglama ikkita haqiqiy yechimga

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

ega bo'ladi;

2) agar $D=0$ bo'lsa, (2) tenglama bitta haqiqiy yechimga ega

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

bo'ladi;

3) agar $D<0$ bo'lsa, (2) tenglama haqiqiy yechimga ega bo'lmaydi.

5-misol. *Ushbu tenglamani yeching:*

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$$

◀Ravshanki, $2x^2+7x-4=(x+4)(2x-1)$. Berilgan tenglamaning har ikki tomonini ($x\neq-4$, $x\neq\frac{1}{2}$ deb) $(x+4)(2x-1)$ ga ko'paytirib topamiz:

$$2x^2+7x-4+\frac{2x}{x+4}\cdot(x+4)(2x-1)+\frac{27(2x^2+7x-4)}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}(x+4)(2x-1).$$

Natijada

$$2x^2+7x-4+4x^2-2x+27=6x+24$$

bo'lib,

$$6x^2-x-1=0$$

bo'ladi. Bu tenglamani yechib

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm5}{12},$$

$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$ bo'lishini topamiz. Biroq, $x=\frac{1}{2}$ da qaralayotgan tenglama ma'noga ega emas. Demak, berilgan tenglamaning yechimi $x=-\frac{1}{3}$ bo'ladi.▶

b) Chiziqli va kvadrat tengsizliklar

Ma'lumki, ushbu $ax+b>0$, $ax+b\geq0$, $ax+b<0$, $ax+b\leq0$ ko'rinishdagi tengsizliklar sodda chiziqli tengsizliklar deyiladi, bunda a,b berilgan sonlar, x esa noma'lum.

Chiziqli tengsizlik

$$ax+b\geq0 \quad (9)$$

ni yechish usuli:

$$ax+b\geq0,$$
$$ax\geq-b.$$

Keyingi tengsizlikning yechimi a ning ishorasiga bog'liq bo'ladi:

a) aytaylik, $a>0$ bo'lsin. Bu holda tengsizlikning ikki tomonini a ga bo'lsak, tengsizlik ma'nosi o'zgarmaydi va

$$x\geq-\frac{b}{a}$$

bo'ladi. Demak, bu holda tengsizlik yechimlari cheksiz ko'p bo'lib, ular $\left[-\frac{b}{a},+\infty\right)$ to'plamni (yechimlar to'plamini) hosil qiladi;

b) aytaylik, $a<0$ bo'lsin. Bu holda tengsizlikning har ikki tomonini a ga bo'lsak, tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi va

$$x\leq-\frac{b}{a}$$

bo'ladi. Demak, bu holda ham tengsizlik yechimlari cheksiz ko'p bo'lib, ular $\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right]$ to'plamni (yechimlar to'plamini) hosil qiladi.

d) aytaylik, $a=0$ bo'lsin. U holda $b\geq0$ tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlik bajarilgan yoki bajarilmagan bo'lishi mumkin. Birinchi holda ixtiyoriy son berilgan tengsizlikning yechimi bo'ladi. Ikkinchi holda esa hech qanday son yechim bo'la olmaydi.

6-misol. *Ushbu tengsizlikni yeching.*

$$x-\frac{x-1}{2}>\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$$

◀Berilgan tengsizlikning ikki tomonini 12 ga ko'paytirib topamiz:

$$12x-6(x-1)>3(x-3)-4(x-2)$$
$$12x-6x+6>3x-9-4x+8.$$

Natijada $7x>-7$ bo'lib, undan $x>-1$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami $(-1;+\infty)$ bo'ladi.▶

Ma'lumki, ushbu $\begin{matrix} ax^2+bx+c>0, & ax^2+bx+c\geq0, \\ ax^2+bx+c<0, & ax^2+bx+c\leq0. \end{matrix}$

tengsizliklar kvadrat tengsizliklar deyiladi, bunda a,b,c berilgan sonlar, x noma'lum.

Kvadrat tengsizliklarni yechishda

a hamda $D=b^2-4ac$

miqdorlarning ishoralari muhim.

Masalan,

$$ax^2+bx+c>0$$

tengsizlikda $a>0, D>0$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglama ikkita x_1 va x_2 ildizlarga ega bo'lib,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \text{ bo'ladi.}$$

Qaralayotgan tengsizlik ushbu

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0$$

va uning ikki tomonini a ga bo'lish natijasida

$$(x-x_1)(x-x_2)>0$$

ko'rinishga keladi. Bu tengsizlik intervallar usuli yordamida yechiladi.

Aytaylik, $x_1<x_2$ bo'lsin. Unda, berilgan tengsizlikning yechimi $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ bo'lib, yechimlar to'plami $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ bo'ladi.

Endi kvadrat tengsizliklar va ularning yechimini ko'rsatuvchi jadvalni keltiramiz:

	Tengsizliklar	a	D	Yechimlari
1	$ax^2+bx+c>0$	$a>0$	$D>0$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
2	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a>0$	$D>0$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$
3	$ax^2+bx+c>0$	$a>0$	$D=0$	$\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$
4	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a>0$	$D=0$	$(-\infty,+\infty)$
5	$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c\geq 0$	$a>0$	$D<0$	$(-\infty,+\infty)$
6	$ax^2+bx+c>0$	$a<0$	$D>0$	(x_1,x_2)
7	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a<0$	$D>0$	$[x_1,x_2]$
8	$ax^2+bx+c>0$	$a<0$	$D=0$	$\varnothing$
9	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a<0$	$D=0$	$x=-\frac{b}{2a}$
10	$ax^2+bx+c<0$	$a<0$	$D>0$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
11	$ax^2+bx+c\leq 0$	$a<0$	$D>0$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$
12	$ax^2+bx+c<0$	$a<0$	$D=0$	$\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$
13	$ax^2+bx+c\leq 0$	$a>0$	$D=0$	$x=-\frac{b}{2a}$
14	$ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\leq 0$	$a<0$	$D<0$	$(-\infty,+\infty)$
15	$ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\leq 0$	$a>0$	$D<0$	$\varnothing$
16	$ax^2+bx+c<0$	$a>0$	$D=0$	$\varnothing$
17	$ax^2+bx+c\leq 0$	$a>0$	$D=0$	$x=-\frac{b}{2a}$
18	$ax^2+bx+c<0$	$a>0$	$D>0$	(x_1,x_2)
19	$ax^2+bx+c\leq 0$	$a>0$	$D>0$	$[x_1,x_2]$
20	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a<0$	$D<0$	$\varnothing$

7-misol: *Ushbu tengsizlikni yeching:*

$$2x(x+2)\geq x(7x+10)+1$$

◀Soddalashtirish natijasida

$$2x^2+4x\geq 7x^2+10x+1,$$

$$5x^2+6x+1\leq 0$$

bo'ladi. Keyingi kvadrat tengsizlik uchun

$$a=5>0,\quad D=36-4\cdot5\cdot1=16>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6\pm4}{10};\quad x_1=-1,\quad x_2=-\frac{1}{5}$$

bo'ladi. Unda jadvalning 19-katakdagi formulasiga ko'ra berilgan tengsizlikning yechimi (yechimlar to'plami) $\left[-1,-\frac{1}{5}\right]$ bo'ladi.▶

1.6. Matematik belgilar

Matematikada tez-tez uchraydigan so'z va so'z birikmalari o'rnida maxsus belgilar ishlatiladi:

1) agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi iborasi "$\Rightarrow$" belgi orqali ifodalanadi;

2) ikki fikrning ekvivalentligi ushbu "$\Leftrightarrow$" belgi orqali ifodalanadi;

3) "har qanday", "ixtiyoriy", "barchasi uchun" so'zlari o'rniga "$\forall$" belgi ishlatiladi;

4) "mavjudki", "topiladiki" so'zlari o'rniga "$\exists$" belgi ishlatiladi.

Shuningdek, tasdiqlarning isboti boshlanganligi "◀" belgi, tugaganligi esa "▶" belgi orqali ifodalanadi.

Mashqlar

1. 80 ta "Matematika" fani bo'yicha olimpiada qatnashchilaridan 60 tasi shaxmat ishqibozi, 50 tasi shashka ishqibozi va 40 tasi shashka va shaxmat ishqibozlari. Olimpiada qatnashchilarning qanchasi bu o'yinlarga befarq emas?

2. Ma'lumki, ikki radiusdan tashkil topgan α markaziy burchak tortib turgan yoyning uzunligi $l=R\alpha$ (α radian o'lchovda) bo'ladi. Yer sharining ekvatorida 1^0 burchak tortib turgan yoy uzunligini toping (Yer sharining ekvator radiusi $R=6300$ km deb olinadi).

3. Biologiyada o'rganiladigan bir hujayrali hayvonlar har minutda har biri ikkiga bo'linib ko'payadi. Agar bitta olingan bunday hayvon 100 minutda ko'payib, ularning soni n taga yetsa, dastlab olingan ikkita hayvonning ko'payib, ularning soni ham n taga yetishi uchun qancha vaqt kerak bo'ladi?

4. A to'plam 3 ga bo'linuvchi barcha natural sonlar to'plami, B esa 5 ga bo'linuvchi barcha natural sonlar to'plami bo'lsa, $A\cap B$ to'plam qanday bo'ladi?

5. $A=\{x\in N|2<x\le 6|\}$, $B=\{x\in N|1<x<4|\}$ ва $C=\{x\in N|x^2-4=0|\}$ bo'lsa,

a) $B\cup C$; b) $A\cap B\cap C$; d) $A\cup B\cup C$; e) $(A\cap B)\cup(B\cup C)$ to'plamlarni toping.

6. Ushbu tenglamalarni yeching:

a) $(p-1)x+2=p+1$; b) $mx^2-(m+n)x+n=0$

7. Ushbu tengsizliklarni yeching:

a) $x(2x-1)>(x-2)^2$; b) $(x^2-2x)<\frac{3}{4}$.

2-§ Matritsalar va determinantlar. Chiziqli tenlamalar sistemasi

2.1. Matritsalar va ular ustida amallar

Ko'p hollarda amaliy masalalarni hal etishda maxsus matematik ifodalardan foydalaniladi. Bunday matematik ifodalardan biri matritsalardir.

m ta $(m\in N)$ yo'l va n ta $(n\in N)$ ustunda joylashgan a_{ik} sonlardan ($i=1,2,3,...,m$, $k=1,2,3,...,n$) tuzilgan ushbu

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}...a_{2n} \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

to'rtburchak shakldagi jadval $m\times n$ o'lchovli matritsa deyiladi. Odatda, matritsalar katta harflar bilan belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3×4 o'lchovli matritsa bo'ladi.

Matritsani tashkil etgan sonlar uning elementlari deyiladi. Matritsaning elementlari ikki indeks bilan yozilib, birinchi indeks shu element turgan yo'lni, ikkinchi indeks esa ustunni bildiradi.

Agar matritsa bitta ustundan iborat bo'lsa,

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

u ustun matritsa, bitta yo'ldan iborat bo'lsa,

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{pmatrix}$$

u yo'l matritsa deyiladi.

Agar matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lsa,

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

u nol matritsa deyiladi.

Agar matritsaning yo'llar soni ustunlar soniga teng, ya'ni $m=n$ bo'lsa,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

u n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi. Bu matritsada $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlar bosh diagonal elementlar deyiladi.

Agar (1) matritsada bosh diagonal elementlardan boshqa barcha elementlar nol bo'lsa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

u diagonal matritsa deyiladi. Xususan, bu matritsada

$$a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}=1$$

bo'lsa,

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

u birlik matritsa deyiladi.

A va B bir xil o'lchovli matritsalar bo'lsin. Agar A va B matritsalarning mos elementlari teng bo'lsa, A va B teng deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi.

A va B matritsalarning mos elementlarining yig'indisidan tashkil topgan matritsa A va B matritsalar yig'indisi deyiladi va $A+B$ kabi yoziladi.

A va B matritsalarning mos elementlarining ayirmasidan tashkil topgan matritsa A va B matritsalar ayirmasi deyiladi va $A-B$ kabi yoziladi.

Aytaylik, A matritsa hamda λ son berilgan bo'lsin. Bu matritsaning har bir elementini λ songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan matritsa λ son bilan A matritsa ko'paytmasi deyiladi va $\lambda \cdot A$ kabi belgilanadi.

Ikki A va B matritsalarning ko'paytmasi tushunchasi birinchi matritsaning ustunlar soni ikkinchi matritsaning yo'llar soniga teng bo'lgandagina kiritiladi.

Aytaylik, $m \times n$ o'lchovli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa hamda $n \times k$ o'lchovli

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

matritsalar berilgan bo'lsin.

A matritsaning i-yo'lda joylashgan

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{in}$$

elementlarini mos ravishda B matritsaning j-ustunida joylashgan.

$$b_{1j},\ b_{2j},\ \dots,\ b_{nj}$$

ko'paytirib,

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\dots+a_{in}\cdot b_{nj}$$

yig'indini hosil qilamiz. Bu sonlardan tuzilgan ushbu

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

$m \times k$ o'lchovli matritsa A va B matritsalar ko'paytmasi deyiladi va $A \cdot B$ kabi belgilanadi.

Agar
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ o'lchovli kvadrat matritsa bo'lib,

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$n \times n$ o'lchovli birlik matritsa bo'lsa, u holda

$$A \cdot E = EA = E$$

bo'ladi.

8-misol. Agar A va B matritsalar quyidagicha

$$A=\begin{pmatrix}-7 & 12\\ -4 & 7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}26 & 45\\ 15 & 26\end{pmatrix}$$

bo'lsa,

$$A\cdot B,\quad 2A,\quad -3B$$

matritsalarni toping.

◀Yuqorida keltrilgan ta'riflardan foydalanib topamiz:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-7 & -12\\ -4 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}26 & 45\\ 15 & 26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cdot 26+(-12)\cdot 15 & 7\cdot 45+(-12)\cdot 26\\ -4\cdot 26+7\cdot 15 & -4\cdot 45+7\cdot 26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix}-7 & 12\\ -4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-7) & 2\cdot 12\\ 2\cdot(-4) & 2\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-28 & 24\\ -8 & 14\end{pmatrix},$$

$$-3B=-3\begin{pmatrix}26 & 45\\ 15 & 26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-3)\cdot 26 & (-3)\cdot 45\\ (-3)\cdot 15 & (-3)\cdot 26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-72 & -135\\ -45 & -72\end{pmatrix}. ▶$$

9-misol. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

matritsalar ko'paytmasini toping.

◀Matritsalarni ko'paytirish qoidasidan foydalanib topamiz:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 2\\ 3\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2 & 3\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}. ▶$$

2.2. Determinantlar va ularning xossalari

Matematikaning qator masalalarini yechishda ma'lum xossalarga ega bo'lgan ifodalardan foydalaniladi. Bunday maxsus ifodalardan biri determinantlardir.

Aytaylik, 4 ta a,b,c,d haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Ushbu $ad-bc$ ayirma (son)ni berilgan sonlarni yo'l va ustun ko'rinishida joylashtirib, quyidagicha

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

ifodalaymiz. Demak,

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc. \qquad (2)$$

(2) ifoda 2-tartibli determinant deyiladi. Bunda a,b,c,d – determinantning elementlari, a,b va c,d sonlar mos ravishda determinantning birinchi va ikkinchi yo'llari, a,c va b,d sonlar determinantining mos ravishda birinchi va ikkinchi ustunlari, a,d sonlar determinantning bosh diagonali, b,c son-lar determinantning yordamchi diagonali deyiladi.

Odatda, determinantning elementlarini ikkita indeks qo'yilgan harflar bilan belgilanadi. Bunda birinchi indeks yo'lni, ikkinchisi esa ustunni bildiradi. Masalan, a_{21} son determinantning ikkinchi yo'l birinchi ustunida turgan element bo'ladi.

Ikkinchi tartibli determinant ta'rifiga ko'ra:

$$\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 7 & 2\end{vmatrix}=-3\cdot 2-5\cdot 7=-6-35=-41,$$

$$\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ -\cos x & \sin x\end{vmatrix}=\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

bo'ladi.

Endi ikkinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

ning asosiy xossalarini keltiramiz:

1) *Determinant yo'li ustuni bilan almashtirilsa, shuningdek, ustunini yo'li bilan almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi.*

Bu xossaning isboti determinant ta'rifidan kelib chiqadi.

2) *Determinantning yo'li o'zaro almashtirilsa, uning ishorasi o'zgaradi:*

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}.$$

◀Ravshanki,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=-(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}. ▶$$

3) *Determinantning biror yo'lida turgan barcha elementlar biror o'zgarmas k songa ko'paytirilsa, determinantning qiymati ham k ga ko'payadi:*

$$\begin{vmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

◀Haqiqatdan ham,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

bo'ladi.▶

4) Determinantning bir yo'lidagi elementlari ikkinchi yo'lidagi elementlariga proporsional bo'lsa, determinant 0 ga teng bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0$$

◀Bu tenglik determinant ta'rifidan kelib chiqadi.▶

5) Determinantning bir yo'lidagi elementlarni biror songa ko'paytirib, ikkinchi yo'lidagi mos elementlarga qo'shilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

◀Determinant ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}(a_{11}+ka_{21}) - a_{21}(a_{12}+ka_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22} + ka_{22}\cdot a_{21} - a_{21}a_{12} - ka_{21}a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.▶$$

Endi uchinchi tartibli determinant tushunchasini keltiramiz.

Aytaylik, 9 ta $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar berilgan bo'lsin. Bu sonlarni uchta yo'l, uchta ustun tarzida joylashtirib yozilishidan hosil bo'lgan ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ifoda uchinchi tartibli determinant deyiladi. Uchinchi tartibli determinant son bo'lib, uning qiymati

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ga teng bo'ladi. Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Masalan, ushbu

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinant ta'rifiga binoan

$$d = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 2(-2) + 3\cdot 1 = 0$$

ga teng bo'ladi.

Uchinchi tartibli determinantlarda ham determinant elementlari, yo'llari, ustunlari, bosh va yordamchi diagonallari tushunchalari xuddi ikkinchi tartibli determinantlardagi kabi kiritiladi. Shuningdek, uchinchi tartibli determinant ham, ikkinchi tartibli determinant singari xossalarga ega bo'ladi.

Faraz qilaylik, biror

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (4)$$

uchinchi tartibli determinant berilgan bo'lsin. Bu determinantning biror a_{ik} $(i = 1,2,3;\ k = 1,2,3)$ elementini olib, shu element joylashgan yo'lni hamda ustunni o'chiramiz. Ravshanki, qolgan elementlari ikkinchi tartibli determinantni hosil qiladi. Bu determinantga a_{ik} elementning minori deyiladi va u M_{ik} kabi belgilanadi.

Masalan, (4) determinantning a_{31} element turgan yo'lni hamda ustunni o'chirish

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

natijasida ikkinchi tartibli ushbu

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

determinant hosil bo'ladi. Bu (4) determinantning a_{31} elementi minori bo'ladi. Ravshanki, (4) determinant 9 ta minorga ega.

Ushbu

$$(-1)^{i+k}\cdot M_{ik}$$

miqdor (4) determinant a_{ik} elementining algebraik to'ldiruvchisi deyiladi. U A_{ik} orqali belgilanadi. Demak,

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\cdot M_{ik}.$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantning $a_{13}=3$ elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}=1\cdot(1\cdot0-2\cdot3)=-6$$

bo'ladi.

1-teorema. *Determinantning biror yo'lida joylashgan barcha elementlarning ularga mos algebraik to'ldiruvchilari bilan ko'paytmasidan tashkil topgan yig'indi shu determinantning qiymatiga teng bo'ladi.*

◀Bu teoremani

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

determinantning birinchi yo'lida joylashgan a_{11},a_{12},a_{13} elementlaridan foydalanib isbotlaymiz.

Ravshanki, bu a_{11},a_{12},a_{13} elementlarning algebraik to'ldiruvchilari

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=1\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=1\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},$$

bo'ladi. Unda

$$a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

bo'lib, bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda (3) ga ko'ra uchinchi tartibli determinant teng ekanini topamiz. Demak,

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}. \ ▶$$

Eslatma. *Biz yuqorida ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar bilan tanishdik va ularning xossalarini bayon etdik.*

Xuddi shunga o'xshash n-tartibli $(n>3)$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

determinant tushunchasi kiritiladi va ularning xossalari o'rganiladi.

2.3. Determinantlarni hisoblash

Ma'lumki, ikkinchi tartibli determinant, ta'rifga ko'ra

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

bo'ladi.

Uchinchi tartibli determinant, ta'rifga ko'ra

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

bo'ladi. Bu tenglikda qatnashgan ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblab topamiz:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32})-a_{12}(a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{31})+$$

$$+a_{13}(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-\qquad(5)$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

Demak, uchinchi tartibli determinant 6 ta had yig'indisidan iborat bo'lib, ularning uchtasi musbat ishorali, uchtasi manfiy ishorali bo'ladi.

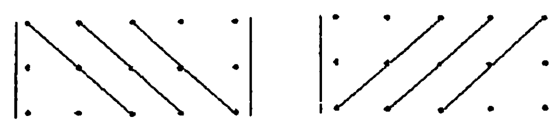
Musbat va manfiy ishorali hadlarni yozishda quyidagi tasvirlangan sxemalardan foydalanish qulay bo'ladi,

$+\qquad\qquad -$.

Agar uchinchi tartibli determinantni quyidagi ko'rinishda yozib olsak

$$\begin{matrix}a_{11}a_{12}a_{13}a_{11}a_{12}\\a_{21}a_{22}a_{23}a_{21}a_{22}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{31}a_{32}\end{matrix}$$

determinantning qiymatini Sarryus usuli deb ataluvchi usul bilan ham hisoblash mumkin;



$+\qquad\qquad -$

10-misol. *Ushbu determinantni hisoblang.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

◀Bu determinantni hisoblashda (5) formula va keltirilgan sxemadan foydalanamiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot9+3\cdot1\cdot6+7\cdot5\cdot8-7\cdot4\cdot6-3\cdot5\cdot9-2\cdot1\cdot8 =$$

$$= 72+18+280-168-135-16=51. ▶$$

Determinantni (ayniqsa, yuqori tartibli determinantlarni) hisoblashda determinantning xossalari va yuqorida keltirilgan teoremadan foydalaniladi. Misol tariqasida bitta 4-tartibli determinantning hisoblanishini ko'rsatamiz. Aytaylik, ushbu $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$

determinantni hisoblash lozim bo'lsin. Avvalo, determinantning birinchi yo'lini 2 ga ko'paytirib, 4-yo'liga qo'shamiz. Natijada, 5-xossaga ko'ra

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Keyingi determinantning birinchi yo'lini birinchi ustun bilan almashtiramiz. Unda 1-xossaga ko'ra

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

bo'ladi.

Endi keltirilgan teoremadan foydalanib (determinantning birinchi yo'lda joylashgan elementlari bo'yicha) topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 0\cdot A_{14} =$$

$$= 1\cdot A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 54+0+0-0-0-0 = 54.$$

2.4. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer usuli

Ikkita chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (6)$$

sistema ikki – x va y noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari, b_1 va b_2 sonlar ozod hadlar deyiladi.

(6) sistemaning koeffitsiyentlaridan ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinantni, so'ng bu determinantning birinchi ustunidagi elementlarni ozod hadlar bilan almashtirib,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinantni, ikkinchi ustundagi elementlarni ozod hadlar bilan almashtirib,

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

determinantlar hosil qilamiz.

Demak, (6) sistema berilgan holda har doim $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ determinantlarga ega bo'lamiz.

2-teorema. *Quyidagi*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (7)$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar:

1) $\Delta \neq 0$ *bo'lsa, u holda (7) sistema yagona* (x, y) *yechimga ega bo'lib,*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'ladi;

2) $\Delta = 0$ *bo'lib,* $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ *bo'lsa, u holda (7) sistema yechimga ega bo'lmaydi;*

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ *bo'lsa, u holda (7) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.*

◀(7) sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchi tenglamasini $-a_{12}$ ga ko'paytirib, so'ng ularni hadlab, qo'shib topamiz:

$$a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1,$$
$$-a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

Keyingi tenglikdan:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x,$$

ya'ni

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shuningdek, (7) sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchi tenglamasini a_{11} ga ko'paytirib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$-a_{11}a_{21}x - a_{12}a_{21}y = -b_1a_{21},$$
$$a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = b_2a_{11}$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Bu tenglikdan

$$\Delta \cdot y = \Delta_y,$$

ya'ni

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib berilgan tenglamalar sistemasi quyidagi:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases}$$

ko'rinishga kelib, sistema $\Delta \neq 0$ bo'lganda, yagona yechimga

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

ega bo'ladi.

Shunga o'xshash:

$\Delta = 0$ bo'lganda, sistema yechimga ega bo'lmasligi, $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ bo'lganda sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi ko'rsatiladi.▶

11-misol. *Ushbu sistemani yeching.*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$$

◀Bu sistema uchun $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ larni topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5.$$

Demak,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-7}{1} = -7, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{1} = 5$$

bo'ladi.▶

12-misol. *Ushbu sistemani yeching.*

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4, \\ 0{,}35x - 0{,}14y = 2 \end{cases}$$

◀Bu sistema uchun $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ larni topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0{,}35 & -0{,}14 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-0{,}14) - 0{,}35 \cdot (-2) = -0{,}7 + 0{,}7 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -0{,}14 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-0{,}14) - 2 \cdot (-2) = -0{,}56 + 4 \neq 0.$$

Demak, berilgan sistema yechimga ega emas.▶

Uchta chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \tag{8}$$

sistema uchta x, y va z noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari, b_1, b_2 *va* b_3 sonlar ozod hadlar deyiladi.

(8) sistemaning koeffitsiyentlaridan quyidagi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantni hosil qilamiz. So'ng bu determinantning birinchi, ikkinchi va uchinchi ustunlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirib, quyidagi determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Demak, (8) sistema berilgan holda har doim $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarga ega bo'lamiz.

3-teorema. *Faraz qilaylik,*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar:

1) $\Delta \neq 0$ *bo'lsa, u holda (8) sistema yagona* (x,y,z) *yechimga ega bo'lib,*

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

bo'ladi;

2) $\Delta=0$ *bo'lib,* $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0, \Delta_z \neq 0$ *bo'lsa, u holda (8) sistema yechimga ega bo'lmaydi;*

3) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ *bo'lsa, u holda (8) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.*

◀Bu teoremaning isboti 2-teoremaning isboti kabidir.▶

6-misol. *Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.*

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5, \\ x+y+2z=7, \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$$

◀Avvalo, sistema koeffitsiyentlaridan tuzilgan Δ determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2+12+1-(-2)-(-4)-3=18.$$

Demak, berilgan sistema yagona yechimga ega. Endi $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=5+6+7-(-1)-(-10)-21=8,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=14+20-1-(-14)-4-5=38,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2+42-5-10-(-14)-3=40.$$

Unda

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{38}{18}=\frac{19}{9}$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{40}{18}=\frac{20}{9}$$

bo'ladi.▶

Yuqorida keltirilgan tenglamalar sistemasining yechimini topish usuli **Kramer usuli** deyiladi.

Shu usul bilan n ta chiziqli tenglamalardan tuzilgan n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

ni ham yechish mumkin.

Mashqlar

Quyidagi matrisalar ustuda amallar bajaring.

Agar

a) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Quyidagi uchinchi tartibli determinantlarni hisoblang.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

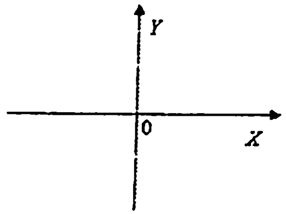
a) $\begin{cases} 3x+y+z=5, \\ x-4y-2z=-3, \\ -3x+5y+6z=7. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+8y-z=7, \\ 2x-3y+2z=9, \\ x+2y+3z=1. \end{cases}$

3-§. Tekislikda Dekart va qutb koordinatalari sistemasi

3.1. Dekart koordinatalari sistemasi

Tekislikda ikkita o'zaro perpendikulyar OX va OY to'g'ri chiziqlarni (o'qlarni, ularning musbat yo'nalishlari 1-chizmada ko'rsatilgan) olaylik.

Aytaylik, OX o'qi gorizontal, OY o'qi vertikal joylashsin (1-chizma).

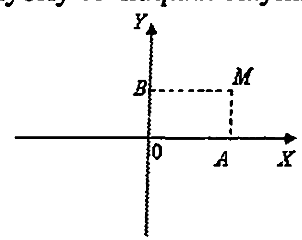


1-chizma

OX va OY to'g'ri chiziqlar koordinata o'qlari (OX – abssissalar o'qi, OY – ordinatalar o'qi), ular kesishgan O nuqta koordinata boshi deyiladi.

Bu ikkala o'q uchun bir xil bo'lgan o'lchov birligi – masshtab birligi (uzunligi 1 ga teng kesma)ni olamiz. Natijada, OX, OY koordinata o'qlari va ularda tayinlagan masshtab birligidan iborat sistema hosil bo'ladi. Bu sistema tekislikda **Dekart koordinatalari sistemasi** deyiladi.

Endi tekislikda ixtiyoriy M nuqtani olaylik (2-chizma).



2-chizma

M nuqtadan abssissa o'qi OX ga MA, ordinata o'qi OY ga MB perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyar OX o'qidan OA, OY o'qidan OB kesmalarni ajratadi. Hosil bo'lgan OA va OB kesmalarning uzunliklarini qanday ishora bilan olinishini quyidagi qoida aniqlab beradi:

1) agar A nuqta OX o'qida O nuqtadan o'ng tomonda joylashsa, unda OA kesmaning uzunligi "+" ishora bilan, O nuqtadan chapda joylashsa, unda OA kesmaning uzunligi "–" ishora bilan olinadi.

2) agar B nuqta OY o'qida O nuqtadan yuqorida joylashsa, unda OB kesmaning uzunligi "+" ishora bilan, O nuqtadan pastda joylashsa, unda OB kesmaning uzunligi "–" ishora bilan olinadi.

Ishoralari keltirilgan qoidaga ko'ra olingan OA va OB kesmalarning uzunliklarini mos ravishda x va y orqali belgilaymiz:

$$x = OA, \quad y = OB..$$

Odatda, x ga M nuqtaning abssissasi, y ga esa M nuqtaning ordinatasi, umuman, x va y ga M nuqtaning koordinatalari deyiladi. M nuqta koordinatalar orqali $M(x,y)$ kabi yoziladi.

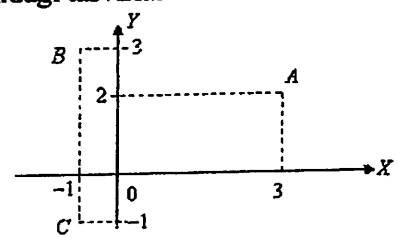
Demak, tekislikdagi ixtiyoriy nuqta o'zining koordinatalari x va y lardan tuzilgan (x,y) juftlik bilan to'la aniqlanadi.

Aytaylik, x va y haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Tekislikda koordinatalari shu x va y bo'lgan nuqta quyidagicha topiladi: OX o'qida x haqiqiy son, OY o'qida y haqiqiy son joylashtirilib, shu nuqtalardan mos ravishda OX va OY o'qlariga perpendikulyar o'tkaziladi. Bu perpendikulyarning kesishish nuqtasi izlanayotgan nuqtani aniqlaydi.

Masalan,

$$A(3,2), \quad B(-1,3), \quad C(-1,-1)$$

nuqtalarning tekislikdagi tasvirlari 3-chizmada ko'rsatilgan.



3-chizma

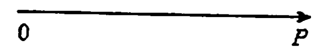
Eslatma. *Abssissa o'qida joylashgan barcha nuqtalarning ordinatalari, ordinata o'qida joylashgan barcha nuqtalarning abssissalari nol bo'ladi. Koordinatalar boshining koordinatalari* $(0,0)$ *bo'ladi:* $O(0,0)$.

Yuqorida aytilganlardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga x va y haqiqiy sonlardan tuzilgan bitta (x,y) juftlik mos keladi. Aksincha, ixtiyoriy x va y haqiqiy sonlardan tuzilgan (x,y) juftlik tekislikda bitta nuqtani ifodalaydi.

3.2. Qutb koordinatalari sistemasi

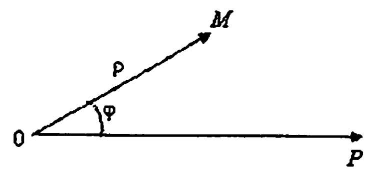
Tekislikda tayin O nuqta va bu nuqtadan chiqqan tayin OP nurni (sonlar o'qini) olamiz. So'ng masshtab birligini tanlaymiz.

Odatda, O nuqta qutb, OP nur esa qutb o'qi deyiladi. (4-chizma)



4-chizma

Tekislikda ixtiyoriy M nuqtani (O nuqtadan farqli) olaylik. O nuqta bilan M nuqtani tutashtirib, OM kesmani hosil qilamiz. OM ning uzunligini ρ, qutb o'qi OP bilan OM nurning tashkil etgan burchakni φ deymiz (5-chizma).



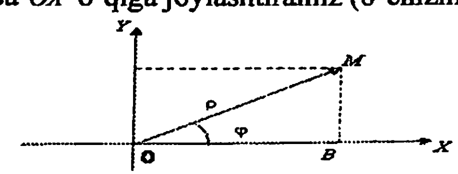
5-chizma

Bunda ρ – qutb radiusi, φ – esa qutb burchagi deyiladi. Bu ρ va φ lar tekislikdagi nuqtaning holatini aniqlaydi. Ular M nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi. M nuqta qutb koordinatalari orqali quyidagicha yoziladi: $M(\rho,\varphi)$. Odatda, $0 \le \rho < +\infty$, $\quad 0 \le \varphi < 2\pi$ deb olinadi.

Bu holda tekislik nuqtalari bilan, uning qutb koordinatalari orasida (O nuqtadan tashqari, O nuqta uchun $\rho = 0$ bo'lib, φ – aniq emas) o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi. Bunday sistema qutb koordinatalar sistemasi deyiladi. Tekislikdagi har bir nuqta (nuqtaning holati O nuqtadan tashqari) bu sistema yordamida to'liq aniqlanadi.

Shunday qilib, tekislikda nuqtaning holati Dekart koordinatalar sistemasida x, y bilan, qutb koordinatalari sistemasida esa ρ, φ bilan aniqlanadi. Nuqtaning Dekart va qutb koordinatalari orasida bog'lanish mavjud.

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasini olib, qutbni O nuqtaga, OP qutb o'qini esa OX o'qiga joylashtiramiz (6-chizma):



6-chizma

Tekislikda biror M nuqtani olaylik. Uning Dekart koordinatalari (x,y) $\left(M(x,y)\right)$, qutb koordinatalari (ρ,φ) $\left(M(\rho,\varphi)\right)$ bo'lsin. 6-chizmadan ko'rinadiki, ΔOBM to'g'ri burchakli uchburchak bo'lib, $OB = x$, $\quad MB = y$, $\quad OM = \rho$, $\quad \angle BOM = \varphi$ bo'ladi.

ΔOBM dan topamiz:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \tag{1}$$

Bu formulalar M nuqtaning Dekart koordinatalarini uning qutb koordinatalari orqali ifodalanishini ko'rsatadi.

Shuningdek, ΔOBM dan topamiz:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Bu formulalar M nuqtaning qutb koordinatalarini uning Dekart koordinatalari orqali ifodalanishini ko'rsatadi.

Masalan, C nuqtaning Dekart koordinatalari $x = 1$, $\quad y = \sqrt{3}$ bo'lsa, $\left(C\left(1, \sqrt{3}\right)\right)$, uning qutb koordinatalari (2) formulaga ko'ra

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2, \quad tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

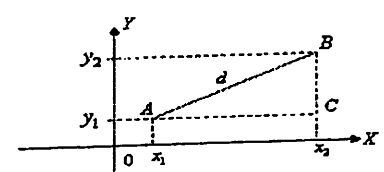
bo'ladi. Agar D nuqtaning qutb koordinatalari $\rho = 3$, $\quad \varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $\left(D\left(3, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, uning Dekart koordinatalari (1) formulaga ko'ra

$$x = 3 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad y = 3 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 3$$

bo'ladi.

3.3. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

1°. Ikki nuqta orasidagi masofa. Tekislikda ikki A va B nuqtalar berilgan bo'lib, uning koordinatalari mos ravishda (x_1, y_1) va (x_2, y_2) bo'lsin: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Bu nuqtalarni to'g'ri chiziq bilan birlashtirish natijasida AB kesma hosil bo'ladi. Bu kesmaning uzunligi A va B nuqtalar orasidagi masofani ifodalaydi. Masofani d bilan belgilaylik (7-chizma).



7-chizma

Berilgan nuqtalarning koordinatalariga ko'ra d ni topamiz.

Keltirilgan chizmadan ko'rinadiki, $\Delta ABC-$ to'g'ri burchakli uchburchak bo'lib, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$, $AB = d$ bo'ladi. Pifagor teoremasiga ko'ra:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ya'ni

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (3)$$

bo'ladi. Bu ikki nuqta orasidagi masofani ifodalovchi formuladir.

Xususan, koordinatalar boshi $O(0,0)$ bilan $A(x,y)$ nuqta orasidagi masofa

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

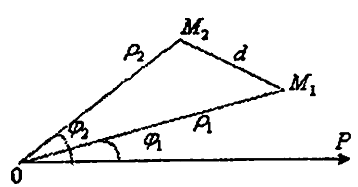
bo'ladi.

Masalan, tekislikda $A(1,2)$ va $B(4,6)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar uchun $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 4$, $y_2 = 6$ bo'lishini e'tiborga olib, A va B nuqtalar orasidagi masofani (3) formuladan foydalanib topamiz:

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Misol. *Qutb koordinatalarda berilgan $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ va $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.*

◀Aytaylik, bu nuqtalar tekislikda 8-chizmada ko'rsatilgandek tasvirlansin:



8-chizma

Keltirilgan chizmadan

$$M_1M_2 = d, \quad OM_1 = \rho_1, \quad \angle POM_1 = \varphi_1$$
$$OM_2 = \rho_2, \quad \angle POM_2 = \varphi_2$$
$$\angle M_1OM_2 = \varphi_2 - \varphi_1$$

bo'lishini aniqlaymiz.

Endi M_1OM_2 uchburchakni qaraylik. Kosinuslar teoremasiga ko'ra:

$$d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

ya'ni

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

bo'ladi.▶

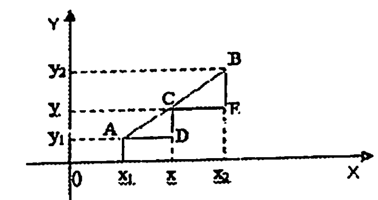
2°. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. Tekislikda ikkita $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ularni to'g'ri chiziq bilan birlashtirish natijasida AB kesma hosil qilingan. Shuningdek, biror musbat λ son ham berilgan $(\lambda > 0)$.

AB kesmada shunday C nuqtani (nuqtaning koordinatalarini) topish kerakki,

$$\frac{AC}{BC} = \lambda \qquad (4)$$

bo'lsin. Bu jarayon AB kesmani berilgan nisbatda bo'lish deyiladi.

Izlanayotgan C nuqta koordinatalarini x va y deylik: $C(x,y)$ (9-chizma).



9-chizma

Ravshanki, $AD = x - x_1$, $CE = x_2 - x$

hamda ΔACD va ΔCBE lar o'xshash. Binobarin

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CB}$$

bo'ladi. Demak,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

Keyingi tenglikda $x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$

bo'lib, undan

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

kelib chiqadi.

Xuddi shunga o'xshash $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

bo'lishi topiladi.

Shunday qilib, berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalarni birlashtirishdan hosil bo'lgan kesmani berilgan λ son $(\lambda > 0)$ nisbatda bo'luvchi $C(x,y)$ nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

bo'ladi.

Xususan, $C(x,y)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqta bo'lsa, (ya'ni $AC=CB$) u holda

$$\frac{AC}{CB}=\lambda=1$$

bo'lib, $C(x,y)$ nuqtaning koordinatalari

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

bo'ladi.

Masalan, $A(2,9)$ va $B(-4,3)$ nuqtalarni birlashtiruvchi AB kesmani $\lambda=\frac{7}{5}$ nisbatda $\left(\frac{AC}{CB}=\lambda=\frac{7}{5}\right)$ bo'luvchi $C(x,y)$ nuqtaning koordinatalari

$$x=\frac{2+\frac{7}{5}\cdot(-4)}{1+\frac{7}{5}}=\frac{2\cdot5+7\cdot(-4)}{12}=-\frac{3}{2},\qquad y=\frac{9+\frac{7}{5}\cdot3}{1+\frac{7}{5}}=\frac{9\cdot5+3\cdot7}{12}=\frac{11}{2}$$

bo'ladi.

Mashqlar

1. Uchlari $A(-5;3)$, $B(2;-4)$ nuqtalarda bo'lgan AB kesma berilgan. $C(x;y)$ nuqta kesmani $\frac{1}{4}$ nisbatda bo'ladi. $C(x;y)$ nuqta koordinatalari bilan AB kesma uzunligini toping.

2. Bir uchi $(8;2)$ nuqtada, o'rtasi $(4,-12)$ nuqtada bo'lgan kesmaning ikkinchi uchi koordinatalarini toping.

3. Tekislikda diagonallari koordinata o'qlari bo'yicha joylashgan, ularning kesishgan nuqtasi koordinatalar boshida bo'lgan kvadrat berilgan bo'lsin. Agar kvadratning diagonali 5 ga teng bo'lsa, uning uchlari koordinatalarini toping.

4. Tekislikda M=M(2;6) nuqta berilgan. Abssissa o'qida bu nuqtadan d =10 ga teng masofada joylashgan nuqtani toping.

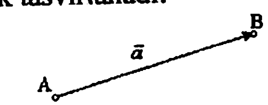
5. Agar A nuqtaning Dekart koordinatalari x=1, y=1 bo'lsa, uning qutb koordinatalari $-\rho,\ \varphi$ ni toping.

4-§. Vektorlar

4.1. "Vektor" tushunchasi va vektorlar ustida amallar

Tabiatda, texnikada va fanning turli sohalarida uchraydigan miqdorlar turlicha bo'ladi. Ulardan biri faqat son qiymati bilan aniqlansa, (masalan, uzunlik, og'irlik, hajm, va h.k.), ikkinchisi esa, son qiymati bilan birga yo'nalishi ma'lum bo'lgandagina aniqlangan (masalan, tezlik, kuch, va h.k.) hisoblanadi. Odatda, birinchi holdagi miqdorlar **skalyar miqdorlar,** ikkinchi holdagi miqdorlar esa **vektor miqdorlar** deyiladi.

Yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasi vektor deyiladi. U 1-chizmada ko'rsatilgandek tasvirlanadi:



1-chizma

A nuqta vektorning boshi, B nuqta vektorning oxiri deyiladi, vektorning o'zi esa $\overline{AB}$ kabi belgilanadi. Vektorlar bitta harf bilan ham belgilanadi, bunda harf ustiga strelka qo'yiladi, masalan, $\vec{a}$.

Kesmaning uzunligi vektorning uzunligi deyilib, u $\left|\vec{AB}\right|$ (yoki $|\vec{a}|$) kabi belgilanadi. Agar $\vec{a}$ vektorning uzunligi 1 ga teng, $|\vec{a}|=1$ bo'lsa, u birlik vektor deyiladi.

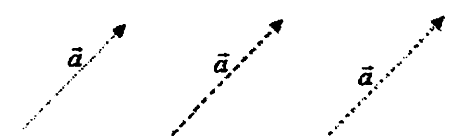
Agar vektorning boshi va oxiri ustma-ust tushsa, u ***nol vektor*** deyiladi: $\vec{0}$. Bu vektorning uzunligi 0 ga teng $|\vec{0}|=0$ bo'lib, uning yo'nalishi aniq emas.

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Agar:

1) bu vektorlarning uzunliklari bir-biriga teng: $|\vec{a}|=|\vec{b}|$;

2) ular bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda joylashgan;

3) yo'nalishi bir tomonga qaragan bo'lsa, bu vektorlar bir-biriga teng deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ kabi yoziladi.



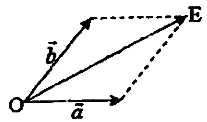
2-chizma

Keltirilgan ta'rifdan, har qanday $\vec{a}$ vektorni parallel ravishda vektor boshini tekislikning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirish mumkinligi kelib chiqadi (2-chizma).

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ berilgan bo'lsin (3-chizma):

3-chizma

Bu vektorlarning boshlari A va C larni bir nuqta O ga keltirib, tomonlari $|\vec{a}|=|\vec{AB}|$ va $|\vec{b}|=|\overline{CD}|$ bo'lgan parallelogramm yasaymiz (4-chizma).



4-chizma

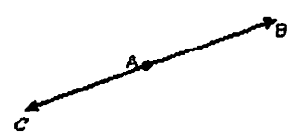
O nuqtadan E nuqtaga qarab yo'nalgan, uzunligi OE diagonalning uzunligiga teng bo'lgan $\vec{OE}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi deyiladi va $\vec{a}+\vec{b}$ kabi yoziladi.

Keltirilgan ta'rifdan

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Har qanday $\vec{a}=\vec{AB}$ vektor uchun unga qarama-qarshi $-\vec{a}=\overline{AC}$ vektor mavjud bo'lib, ular bir xil uzunlikka ega, yo'nalishi qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi (5-chizma).



5-chizma

Ravshanki,

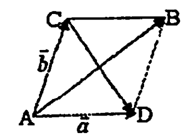
$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ berilgan bo'lsin. $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorning ayirmasi deb, shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki,

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$$

bo'ladi. Vektorlar ayirmasi $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ kabi yoziladi.

Yuqoridagidek, tomonlari $|\vec{a}|$ va $|\vec{b}|$ bo'lgan parallelogramm yasaymiz (6-chizma):



6-chizma

Ma'lumki, $\vec{AB}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi bo'lar edi. Bu parallelogrammning ikkinchi diagonali $\overline{CD}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ayirmasi bo'ladi: $\overline{CD}=\vec{a}-\vec{b}$.

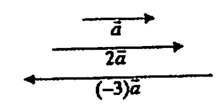
Ravshanki,

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

Biror $\vec{a}$ vektor va k son berilgan bo'lsin.

Uzunligi $|k|\cdot|\vec{a}|$ ga teng, yo'nalishi esa $k>0$ bo'lganda, $\vec{a}$ vektorning yo'nalishi bilan bir xil, $k<0$ bo'lganda, $\vec{a}$ ning yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgan vektor k son bilan $\vec{a}$ vektorning ko'paytmasi deyiladi va $k\cdot\vec{a}$ kabi yoziladi.

Masalan, $\vec{a}$, $2\vec{a}$, $(-3)\vec{a}$ vektorlar 7-chizmada tasvirlangan:



7-chizma

Odatda, $(-1)\vec{a}$ vektor $-\vec{a}$ kabi yoziladi. Ravshanki,

$$-\vec{BA}=\vec{AB}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $\vec{a}$ nol vektor bo'lmasin.

Bu vektorni uning uzunligi $|\vec{a}|$ ga bo'lib, (ya'ni vektorni $\frac{1}{|\vec{a}|}$ ga ko'paytirib) ushbu

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{e} \qquad (|\vec{e}|=1)$$

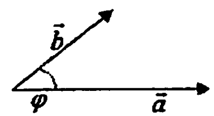
birlik vektorga kelamiz. Keyingi tenglikdan

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{e} \qquad (1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu hol har qanday vektor uning uzunligi bilan birlik vektor ko'paytmasi sifatida ifodalanishini ko'rsatadi.

4.2. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi va vektorlarning koordinatalari

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor berilgan bo'lsin. Bu vektorlarning boshlarini bir nuqtaga keltirib, ular orasidagi burchakni φ deylik (8-chizma).



8-chizma

Ushbu

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

miqdor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deyiladi va $(\vec{a},\vec{b})$ kabi belgilanadi:

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (2)$$

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$

2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c}) \text{ bo'ladi.}$$

3) $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$ bo'lib, $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$ bo'ladi.

4) λ son uchun

$$(\lambda\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b}) \text{ bo'ladi.}$$

5) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi φ burchak uchun

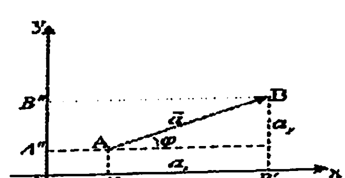
$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \text{ bo'ladi.}$$

Ravshanki, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$(\vec{a},\vec{b})=0$$

bo'lib, bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi va $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorni olamiz (9-chizma).



9-chizma

A va B nuqtalardan OX o'qiga perpendikulyarlar tushiramiz. Ularning OX o'qidagi asoslari A', B' bo'lsin.

Shuningdek, A va B nuqtalardan OY o'qiga perpendikulyarlar tushiramiz. Ularning OY o'qidagi asoslari A'', B'' bo'lsin. $A'B'$ kesma $\vec{a}$ vektorning OX o'qidagi proyeksiyasi, $A''B''$ kesma esa $\vec{a}$ vektorning OY o'qidagi proyeksiyasi deyiladi.

Ular

$$a_x=A'B', \quad a_y=A''B''$$

kabi belgilanadi.

Agar $\varphi-$ o'tkir burchak (9-chizma) bo'lsa, proyeksiya musbat ishora bilan, φ – o'tmas burchak bo'lsa, proyeksiya manfiy ishora bilan olinadi.

Odatda, a_x va a_y lar $\vec{a}$ vektorning koordinatalari deyiladi. $\vec{a}$ vektor koordinatalari orqali quyidagicha:

$$\vec{a}(a_x,a_y) \quad \textit{yoki} \quad \vec{a}=\{a_x,a_y\}$$

yoziladi.

Agar OX o'qdagi birlik vektor $\vec{i}$, OY o'qidagi birlik vektor $\vec{j}$ deyilsa, u holda

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j} \qquad (3)$$

bo'ladi. Demak, har qanday vektor birlik vektorlar $\vec{i}$ va $\vec{j}$ orqali (3) formula bo'yicha ifodalanadi.

Yuqorida keltirilgan chizmadan ko'rinadiki, $\vec{a}$ vektorning uzunligi

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

bo'ladi.

Endi koordinatalari orqali berilgan vektorlarning yig'indisi, ayirmasi, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytmalarining ifodalarini keltiramiz:

Aytaylik, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari orqali berilgan bo'lsin.

$$\vec{a}=\{a_x,a_y\},\ \vec{b}=\{b_x,b_y\}.$$

U holda

$$\vec{a}+\vec{b}=\{a_x+b_x,\ a_y+b_y\}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x,\ a_y-b_y\}$$

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x;\lambda a_y\} \text{ bo'ladi.}$$

Shuningdek,

$$(\vec{a},\vec{b})=a_xb_x+a_yb_y \text{ bo'lib,}$$

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}} \quad (4) \text{ bo'ladi.}$$

Keyingi tenglikdan $\vec{a}=\{a_x,a_y\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y\}$ vektorlarning perpendikulyar bo'lishi uchun $a_xb_x+a_yb_y=0$ bo'lishi yetarli ekanini topamiz.

Aytaylik, $\vec{a}=\{a_x,a_y\}$ vektorning OX va OY koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklar mos ravishda α va β bo'lsin. $\vec{b}$ vektorni $\vec{b}=\{1,0\}$ deb olib, (4) formuladan foydalanib,

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} \tag{5}$$

bo'lishini topamiz.

Shuningdek, $\vec{b}$ vektorni $\vec{b}=\{0,1\}$ deb olib, yana (4) formuladan foydalanib

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} \tag{6}$$

bo'lishini topamiz.

Odatda, $\cos\alpha$ va $\cos\beta$ sonlar $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

(5) va (6) tengliklardan

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\frac{a_x^2}{a_x^2+a_y^2}+\frac{a_y^2}{a_x^2+a_y^2}=1$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Mashqlar

1. $\vec{b}(0;-2)$ va $\vec{c}(-3;4)$ vektorlar berilgan bo'lsa, $\vec{a}=3\vec{b}-2\vec{c}$ vektorning koordinatalarini toping.
2. $\vec{a}(7;3)$ va $\vec{b}(5;2)$ vektorlar berilgan. $|\vec{a}+\vec{b}|$ hisoblansin.
3. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=30^0$ bo'lsa, $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$ vektorning uzunligini toping.

5-§. Kompleks sonlar

5.1. "Kompleks son" tushunchasi

Aytaylik, a va b haqiqiy sonlar bo'lsin. Ushbu:

$$a+bi$$

ifoda kompleks son deyiladi. Bunda $i=\sqrt{-1}$ bo'lib, u **mavhum birlik** deyiladi.

Kompleks sonlar bitta harf, ko'pincha z harfi bilan belgilanadi:

$$z=a+bi.$$

Demak, kompleks son ikki a va bi qismlardan iborat bo'ladi. Odatda, a son z kompleks sonning haqiqiy qismi deyiladi va $\mathrm{Re}\,z$ kabi belgilanadi:

$$a=\mathrm{Re}\,z.$$

b son esa z kompleks sonning mavhum qismi deyiladi va Imz kabi belgilanadi:

$$b=Imz.$$

Masalan, $z=2+3i$ kompleks son uchun $\mathrm{Re}\,z=2$, $Imz=3$ bo'ladi. $z=a+bi$ kompleks sonning mavhum qismining ishorasi bilan farq qiluvchi $a-bi$ kompleks son z ning qo'shmasi deyiladi va $\bar{z}$ kabi belgilanadi:

$$\bar{z}=a-bi.$$

Ikki $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. Agar

$$a_1=a_2,\quad b_1=b_2$$

bo'lsa, z_1 va z_2 kompleks sonlar teng deyiladi va $z_1=z_2$ kabi yoziladi.

5.2. Kompleks sonlar ustida amallar

Ikkita

$$z_1=a_1+b_1\cdot i,\qquad z_2=a_2+b_2\cdot i$$

kompleks son berilgan bo'lsin.

Ushbu

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\cdot i$$

kompleks son z_1 va z_2 kompleks sonlarning yig'indisi deyiladi va z_1+z_2 kabi belgilanadi:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\cdot i.$$

Ma'lumki,

$$z=\mathrm{Re}\,z+Imz\cdot i$$

Demak,

$$\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}\,z_1+\mathrm{Re}\,z_2,$$

$$Im(z_1+z_2)=Imz_1+Imz_2.$$

Yuqorida keltirilgan qoidadan foydalanib topamiz:

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b+(-b))i=2a.$$

Ushbu

$$(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\cdot i$$

kompleks son z_1 kompleks sondan z_2 kompleks sonning ayirmasi deyiladi va z_1-z_2 kabi belgilanadi:

$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\cdot i.$$

Demak,

$$\mathrm{Re}(z_1-z_2)=\mathrm{Re}\,z_1-\mathrm{Re}\,z_2,$$
$$Im(z_1-z_2)=Imz_1-Imz_2.$$

Ravshanki,

$$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=(a-a)+(b-(-b))i=2bi$$

bo'ladi.

Ushbu

$$(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot i$$

kompleks son z_1 va z_2 kompleks sonlarning ko'paytmasi deyiladi va $z_1\cdot z_2$ kabi belgilanadi.

$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot i.$$

Eslatma. *Ushbu*

$$a+0\cdot i=a \text{ – haqiqiy son}$$
$$0+b\cdot i=bi \text{ – sof mavhum son}$$
$$0+i=i, \quad 0-i=-i$$

munosabatlarni kelishuv sifatida qaraymiz:

Unda

$$i^2=i\cdot i=(0+1\cdot i)(0+1\cdot i)=-1+0\cdot i=-1$$
$$b\cdot i=(b+0\cdot i)(0+1\cdot i)=0+bi=bi$$

bo'ladi. Umuman,

$$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i,$$
$$i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=1,$$
$$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i,$$

....

$$i^{4n}=1, \quad i^{4n+1}=i, \quad i^{4n+2}=-1, \quad i^{4n+3}=-i,$$

(n– natural son) bo'ladi.

Ravshanki,

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=(a\cdot a-b\cdot(-b))+(a(-b)+a\cdot b)i=$$
$$=(a^2+b^2)+0\cdot i=a^2+b^2$$

Demak, kompleks son o'zining qo'shmasiga ko'payganda ko'paytma haqiqiy son bo'lar ekan.

Ushbu

$$\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\cdot i$$

kompleks son z_1 va z_2 $(z_2\neq 0)$ kompleks sonlarning nisbati yoki bo'linmasi deyiladi va $\frac{z_1}{z_2}$ kabi belgilanadi:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\cdot i \qquad (z_2\neq 0) \qquad (1)$$

Amaliyotda z_1 va z_2 kompleks sonlarning nisbati z_1/z_2 kasrning surat va maxrajini maxrajda turgan kompleks sonning qo'shmasiga ko'paytirish bilan topiladi:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\cdot i.$$

Masalan,

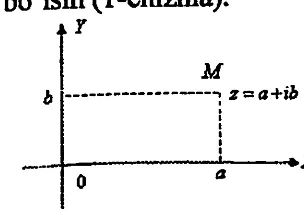
$$\frac{3+2i}{4+5i}=\frac{(3+2i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{22+7i}{41}=\frac{22}{41}-\frac{7}{41}i.$$

Yuqorida kiritilgan qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari uchun amallarning bajarilish qoidalari o'rinli bo'ladi:

$$z+0=z, \quad z_1+z_2=z_2+z_1, \quad (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),$$
$$0\cdot z=0, \quad 1\cdot z=z, \quad z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,$$
$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3), \quad (z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$$

5.3. Kompleks sonni geometrik tasvirlash

Aytaylik, tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi va $z=a+bi$ kompleks son berilgan bo'lsin (1-chizma).

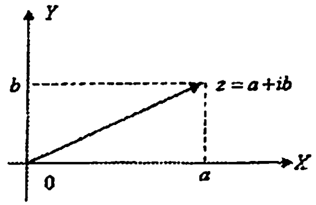


1-chizma

Ravshanki, koordinatalari a va b bo'lgan (a,b) juftlik tekislikda bitta nuqtani ifodalaydi. Uni M deylik: $M(a,b)$. Bu nuqta $z=a+bi$ kompleks sonning geometrik tasviri deyiladi.

Demak, har bir kompleks songa tekislikda bitta nuqta va aksincha, tekislikdagi har bir nuqtaga bitta komplleks son mos qo'yiladi. Bu kompleks sonlar to‘plami bilan tekislik nuqtalari to‘plami orasida o‘zaro bir qiymati moslik mavjudligini bildiradi. Shuni nazarda tutib, XOY tekislik **kompleks tekislik** deb ham yuritiladi.

OX o‘qida haqiqiy sonlar joylashadi: $z=a+0i=a$. Shuning uchun OX o‘q haqiqiy o‘q deyiladi. OY o‘qida sof mavhum sonlar joylashadi: $z=0+bi=bi$. Shuning uchun OY o‘q mavhum o‘q deyiladi.



2-chizma

Kompleks sonlarning yig‘indisi va ayirmasini sodda geometrik talqin etish mumkin.

Ravshanki, har qanday $z=a+bi$ kompleks son uchun $\vec{Oz}$ vektorning OX va OY o‘qlardagi proyeksiyalari mos ravishda a va b bo‘ladi (2-chizma).

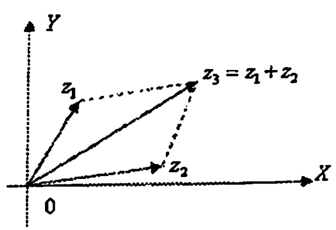
Aytaylik,

$$z_1=a_1+b_1i,\qquad z_2=a_2+b_2i$$

bo‘lsin. Ma’lumki, $z_3=z_1+z_2$ uchun

$$z_3=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\cdot i$$

bo‘ladi (3-chizma).

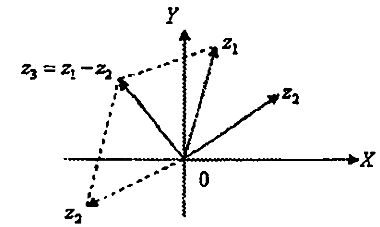


3-chizma

Bundan ko‘rinadiki, $\overline{oz_3}$ vektorning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari $\overline{oz_1}$ va $\overline{oz_2}$ vektorlarning shu o‘qlardagi mos proyeksiyalari yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Demak,

$$\overline{oz_3}=\overline{oz_1}+\overline{oz_2}$$

z_1 va z_2 vektorlar ayirmasi $z_3=z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ 4-chizmada geometrik talqin etilgan.



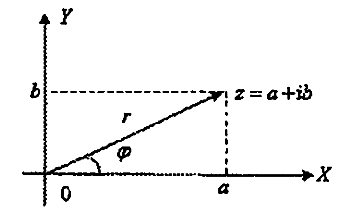
4-chizma

5.4. Kompleks sonning trigonometrik shakli. Kompleks sonning moduli va argumenti

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasini olamiz.
Biror

$$z=a+bi$$

kompleks sonni qaraymiz. Ravshanki, bu .on tekislikda nuqtani tasvirlaydi (5-chizma):



5-chizma

$\overline{Oz}$ vektorning uzunligi, ya’ni 0 nuqtadan z nuqtagacha bo‘lgan masofa z kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ kabi belgilanadi.

Ravshanki, $z=a+bi$ kompleks sonning moduli

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

bo‘ladi (Pifagor teoremasidan foydalanildi). $\overline{oz}$ vektor bilan OX o‘qi orasidagi φ burchak z kompleks sonning argumenti deyiladi va $\arg z$ kabi yoziladi:

$$\varphi=\arg z$$

Kompleks sonning argumenti $2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ aniqlikda $(z=0$ dan tashqari) bo‘lib, uni ushbu

$$0\le \arg z<2\pi$$

munosabatda qaraymiz.

Yuqorida keltirilgan 5-chizmadan ko‘rinadiki,

$$\cos\varphi=\frac{a}{r},\qquad \sin\varphi=\frac{b}{r},\qquad tg\varphi=\frac{b}{a}\qquad\qquad (2)$$

bo'lib, bu formulalar yordamida kompleks sonning argumenti topiladi.

Masalan, $z=1+i$ kompleks sonning moduli:

$$|z|=r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

argumenti esa: $tg\varphi=1,\quad \varphi=45^\circ,\quad \arg z=45^\circ$ bo'ladi.

(2) tengliklardan topamiz:

$$a=r\cos\varphi,\qquad b=r\sin\varphi$$

Demak, $z=a+bi$

kompleks sonni ushbu $z=r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

ko'rinishda yozish mumkin. Kompleks sonning bu ko'rinishi uning trigonometrik ko'rinishi (shakli) deyiladi. Kompleks sonning bu ko'rinishi ko'p masalalarni hal etishda qulaylik tug'diradi.

Ikki

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\qquad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

kompleks sonlarni olamiz. Ularning ko'paytmasi

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left[(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)+\right.$$
$$\left.+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right]=$$
$$=r_1\cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

bo'ladi. Bu tenglikdan

$$|z_1\cdot z_2|=r_1\cdot r_2=|z_1|\cdot|z_2|,$$
$$\arg(z_1\cdot z_2)=\varphi_1+\varphi_2=\arg z_1+\arg z_2$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, ikkita kompleks son ko'paytirilganda, ko'paytmaning moduli modullar ko'paytmasiga, argumenti esa argumentlar yig'indisiga teng bo'ladi.

Endi z_1 va z_2 kompleks sonlarning nisbatini ko'ramiz:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right]}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

Bu tenglikdan

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$
$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\varphi_1-\varphi_2=\arg z_1-\arg z_2$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, ikki kompleks sonning nisbati olinganda nisbatning moduli surat moduli bo'lingan maxraj moduliga teng, nisbatning argumenti surat argumentidan maxraj argumentini ayirganiga teng bo'ladi.

Endi $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ kompleks sonning darajasini qaraymiz.

Bu sonning n-darajasi (n – natural son) yuqorida aytilganiga ko'ra

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\ ta}=\underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n\ ta}\left[\cos(\underbrace{\varphi+\varphi+\cdots+\varphi}_{n\ ta})+i\sin(\underbrace{\varphi+\varphi+\cdots+\varphi}_{n\ ta})\right],$$

ya'ni
$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\tag{3}$$

bo'ladi. Bu tenglik **Muavr formulasi** deyiladi.

Masalan, $z=1+i\qquad \left(r=\sqrt{2},\quad \varphi=\frac{\pi}{4}\right)$

kompleks sonning 10-darajasi

$$(1+i)^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4}\right)=32(0+i)=32i \text{ bo'ladi.}$$

Aytaylik, z kompleks son va n – natural son berilgan bo'lsin. n-darajasi shu z songa teng bo'lgan w kompleks son,

$$w^n=z,\tag{4}$$

z kompleks sondan olingan n-darajali ildiz deyiladi va $\sqrt[n]{z}$ kabi belgilanadi:

$$w=\sqrt[n]{z}.$$

Faraz qilaylik, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\qquad w=\rho(\cos\Psi+i\sin\Psi)$

bo'lsin. U holda Muavr formulasidan foydalanib, (4) tenglikni quyidagicha

$$\rho^n(\cos n\Psi+i\sin n\Psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

yozamiz. Keyingi tenglikdan

$$\rho^n=r,$$
$$n\Psi=\varphi+2k\pi\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

ya'ni

$$\rho=\sqrt[n]{r},$$
$$\Psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)\tag{5}$$

(5) ko'rinishdagi sonlar orasida faqat n tasigina turlicha bo'lishini ko'rsatish mumkin. Ular k ning

$$k=0,1,2,\ldots,n-1$$

qiymatlarida hosil bo'ladi.

Shunday qilib, z kompleks sondan olingan n-darajali ildizning n ta qiymati bo‘lib, ular

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\qquad (k=0,1,\dots n-1)\qquad (6)$$

formuladan topiladi.

Misol. *Ushbu ildizning qiymatlarini toping:*

$$w=\sqrt[3]{-1+i}$$

◀Ravshanki,

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

bo‘ladi. (5) formuladan foydalanib topamiz:

$$w=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right].\qquad (k=0,1,2)$$

Demak,

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right),$$

$$w_2=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right).$$ ▶

Mashqlar

1. Quyidagi kompleks sonlarning moduli va argumentini toping.
   a) $z=-7-i$;
   b) $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$;
2. Ushbu kompleks sonlarni trigonometrik ko‘rinishda yozing.
   a) -2;
   b) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

6-§. Yuqori darajali tenglamalar

Chiziqli va kvadrat tenglamalar birinchi va ikkinchi darajali tenglamalar bo‘lib, ularni yechish o‘quvchiga ma’lum. Endi yuqori darajali tenglamalarni qaraymiz.

Quyidagi

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0\qquad (1)$$

tenglama n-darajali tenglama deyiladi, bunda $a_0, a_1, \dots a_n$ berilgan sonlar (haqiqiy yoki kompleks), x noma’lum son, n – natural son, $a_n\neq 0$.

Aytaylik, x_0 haqiqiy yoki kompleks son bo‘lsin. Agar

$$a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\dots+a_1x_0+a_0\equiv 0$$

bo‘lsa, x_0 son (1) tenglamaning yechimi deyiladi. (1) tenglamaning barcha yechimlarini topish bilan u yechiladi.

6.1. Ko‘phadlar va algebraning asosiy teoremasi

Ushbu $\qquad a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$

ifoda ko‘phad deyiladi, bunda $a_0, a_1, \dots a_n$ sonlar ko‘phadning koeffitsiyentlari, n esa ko‘phadning darajasi. Ravshanki, qaralayotgan ko‘phad x ga (x o‘zgaruvchiga) bog‘liq. Uni $f(x)$ kabi belgilash mumkin:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

Agar x^* son uchun

$$f(x^*)=0$$

bo‘lsa, x^* son $f(x)$ ko‘phadning ildizi deyiladi.

Faraz qilaylik,

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0,$$

$$\varphi(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0$$

ko‘phadlar berilgan bo‘lsin. Agar

$$a_k=b_k\qquad (k=0,1,2,\dots,n)$$

bo‘lsa, bu ko‘phadlar teng deyiladi va $f(x)=\varphi(x)$ kabi yoziladi.

Ravshanki, $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlarning yig‘indisi $f(x)+\varphi(x)$, ayirmasi $f(x)-\varphi(x)$, ko‘paytmasi $f(x)\cdot\varphi(x)$ lar yana ko‘phadlar bo‘ladi.

Aytaylik, $f(x)$ hamda $g(x)$ ko‘phadlar berilgan bo‘lsin. $f(x)$ ko‘phadni $g(x)$ ko‘phadga bo‘lamiz:

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x).\qquad (2)$$

Odatda, $q(x)$ bo'linma, $r(x)$ esa qoldiq deyiladi. Bunda $r(x)$ ko'phadning darajasi $g(x)$ ko'phadning darajasidan kichik bo'ladi.

Agar (2) tenglikda $r(x)\equiv 0$ bo'lsa, $f(x)$ ko'phad $g(x)$ ko'phadga bo'linadi deyiladi ($g(x)$ $f(x)$ ning bo'luvchisi deb ham yuritiladi).

Aytaylik, $f(x)$ ko'phad berilgan bo'lib, u $x-a$ ga bo'lganda bo'linma $q(x)$, qoldiq esa $r(x)$ bo'lsin:

$$f(x)=(x-a)\cdot q(x)+r(x).$$

Ravshanki, bu holda qoldiq $r(x)$ o'zgarmas songa teng bo'ladi: $r(x)=c$. Demak,

$$f(x)=(x-a)\cdot q(x)+c.$$

Keyingi tenglikda $x=a$ deyilsa,

$$f(a)=c$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ ko'phadni $x-a$ ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiq, $f(x)$ ko'phadning $x=a$ dagi qiymatiga teng bo'lishini bildiradi.

Demak, $x=a$ son $f(x)$ ko'phad ildizi bo'lishi uchun $f(x)$ ning $x-a$ ga qoldiqsiz bo'linishi zarur va yetarli bo'ladi.

Odatda, bu tasdiq **Bezu teoremasi** deyiladi.

Agar $f(x)$ ko'phad $(x-a)^k$ ga bo'linsa $(k\geq 1)$, a son $f(x)$ning karrali ildizi deyiladi. Ayni paytda, $f(x)$ ko'phad $(x-a)^{k+1}$ga bo'linmasa, a son $f(x)$ ko'phadning k karrali ildizi deyiladi. Bu holda

$$f(x)=(x-a)^k\cdot\varphi(x)$$

bo'lib, $\varphi(x)$ ko'phad $x-a$ ga bo'linmaydi.

Quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

Tasdiq. *Darajasi birdan kichik bo'lmagan har qanday ko'phad kamida bitta ildizga ega bo'ladi (bu ildiz kompleks son bo'lishi ham mumkin).*

Aytaylik, n-darajali

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

ko'phad berilgan bo'lsin. Bu ko'phad yuqorida keltirilgan tasdiqqa ko'ra kamida bitta α_1 ildizga ega: $f(\alpha_1)\equiv 0$.

Shuning uchun

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot\varphi_1(x)$$

bo'ladi, bunda $\varphi_1(x)$ ko'phad bo'lib, uning darajasi $n-1$ ga teng.

Agar $n>1$ bo'lsa, unda $\varphi_1(x)$ ko'phad ham tasdiqqa ko'ra kamida bitta α_2 ildizga ega. Demak,

$$\varphi_1(x)=(x-\alpha_2)\cdot\varphi_2(x),\qquad \varphi_2(x)\text{ – ko'phad.}$$

Natijada, $f(x)$ ko'phad ushbu

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\varphi_2(x)$$

ko'rinishni oladi. Bu jarayonni davom ettirish bilan

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

tenglikka kelamiz. Keyingi tenglikda $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n$ sonlar orasida o'zaro bir-biriga tenglari bo'lishi mumkin. Demak,

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}$$

bo'lib, $k_1+k_2+\dots+k_s=n$, $\quad i\neq j$ da $\alpha_i\neq\alpha_j$ $\quad (i,j=1,2,\dots s)$.

Natijada, quyidagi teoremaga kelamiz.

Teorema *(algebraning asosiy teoremasi). Har qanday n-darajali $(n\geq 1)$ ko'phad n ta ildizga ega (har bir ildiz necha karrali bo'lsa, shuncha marta hisoblanadi).*

6.2. Yuqori darajali tenglamalarni yechish

Algebraning asosiy teoremasi

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0 \tag{3}$$

tenglamaning n ta yechimi mavjudligini ifodalasa ham, umumiy holda bu yechimlarni topish algoritmlarini aniqlab bermaydi. (3) tenglamani yechish masalasi hozirga qadar katta muammo bo'lib, u ayrim xususiy hollardagina hal etilgan.

(3) tenglamaning yechimi tenglama koeffitsiyentlari ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va ildiz chiqarish amallarini bajarishdan hosil bo'lgan ifoda bilan aniqlansa, (3) tenglama radikallarda yechiladi deyiladi.

Eslatma. *Agar $\alpha=a+bi$ kompleks son (3) tenglamaning yechimi bo'lsa, α sonning qo'shmasi $\bar{\alpha}=a-bi$ kompleks son ham (3) tenglamaning yechimi bo'ladi.*

Endi (3) tenglama radikallarda yechiladigan ba'zi hollarini qaraymiz.

Ravshanki, $n=2$ bo'lganda (3) tenglama avval o'rganilgan kvadrat tenglamaga keladi: $ax^2+bx+c=0$.

Bu tenglama har doim ikkita ildizga ega:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

(diskriminant $b^2-4ac>0$ bo'lganda, x_1 va x_2 lar haqiqiy va turli sonlar; $b^2-4ac=0$ bo'lganda $x_1=x_2$ bo'lib, ildiz karrali; $b^2-4ac<0$ bo'lganda x_1 va x_2 lar bir-biriga qo'shma kompleks sonlar bo'ladi).

Endi (3) tenglamaning keyingi xususiy hollarini qaraymiz.

a) $n=3$ bo'lsin. Bu holda (3) tenglama

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

ko'rinishga keladi. Qulaylik maqsadida keyingi tenglamani quyidagicha

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \qquad (a_0\neq 0) \tag{4}$$

yozib olamiz. (4) tenglama quyidagicha yechiladi:

1) (4) tenglamaning ikki tomonini a_0 ga bo'lib, topamiz:

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0,, \tag{5}$$

bunda $b_k=\frac{a_k}{a_0}$ $\qquad (k=1,2,3)$.

2) (5) tenglamada $x=y-\frac{b_1}{3}$

almashtirishni bajaramiz. Unda (5) tenglamaning chap tomoni ushbu

$$\left(y-\frac{b_1}{3}\right)^3+b_1\left(y-\frac{b_1}{3}\right)^2+b_2\left(y-\frac{b_1}{3}\right)+b_3=$$
$$=y^3+\left(b_2-\frac{b_1^2}{3}\right)y+\left(b_3-\frac{b_1b_2}{3}+\frac{2}{27}b_1^3\right)$$

ko'rinishga kelib, quyidagi

$$b_2-\frac{b_1^2}{3}=p, \quad b_3-\frac{b_1b_2}{3}+\frac{2}{27}b_1^3=q$$

almashtirishdan so'ng (5) tenglama

$$y^3+py+q=0 \tag{6}$$

ko'rinishni oladi.

3) (6) tenglamaning yechimini

$$y=u+v \tag{7}$$

ko'rinishda izlaymiz, bunda u va v lar ushbu

$$u\cdot v=-\frac{p}{3} \tag{8}$$

shartni qanoatlantirishi talab etiladi.

Ravshanki, (7) va (8) munosabatlardan qaralayotgan u va v lar quyidagi

$$t^2-yt-\frac{p}{3}=0$$

kvadrat tenglamaning ildizlari ekanligi kelib chiqadi (Viyet teoremasi).

4) $y=u+v$ ni (6) tenglamadagi y ning o'rniga qo'yamiz:

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0.$$

Natijada,

$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+pu+pv+q=0,$$

ya'ni

$$(u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0 \tag{9}$$

bo'ladi.

Ma'lumki, $u\cdot v=-\frac{p}{3}$. Unda $3uv+p=0$ bo'lib, (9) tenglama

$u^3+v^3+q=0$, ya'ni $u^3+v^3=-q$

ko'rinishga keladi. Demak,

$$y^3+py+q=0$$

tenglamani yechish ushbu

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3\cdot v^3=-\frac{p^3}{27} \end{cases} \tag{10}$$

sistemani yechishga keladi.

5) (10) tengliklardan ko'rinadiki, u^3 va v^3 lar ushbu

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$$

kvadrat tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu kvadrat tenglamani yechib topamiz:

$$t_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, \quad t_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

Demak,

$$u^3=t_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, \tag{11}$$

$$v^3=t_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{12}$$

6) (11) va (12) tengliklardan

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$
$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \tag{13}$$

bo'lishini topamiz. Demak, (6) tenglamaning yechimi

$$y=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \tag{14}$$

bo'ladi.

(14) tenglik **Kardano formulasi** deyiladi. Bu formula

$$u+v$$

yig'indidan iborat bo'lib, har bir u va v lar uchtadan qiymatga ega. Unda $u+v$ yig'indining qiymatlari 9 ta bo'ladi. Bu qiymatlar ichida uchtasigina (6) tenglamaning yechimi bo'lib, bunday u va v ning qiymatlari ushbu

$$uv=-\frac{p}{3}$$

munosabatda bo'ladi.

7) Aytaylik, u va v ning (13) tengliklarning qiymatlaridan biri u_1 va v_1 bo'lsin. Unda

$$u_2=\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}u_1,\quad u_3=\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}u_1,$$

$$v_2=\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}v_1,\quad v_3=\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}v_1,$$

bo'ladi.

8) (6) tenglamaning yechimlari

$$\begin{aligned} y_1&=u_1+v_1,\\ y_2&=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)+\frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}(u_1-v_1),\\ y_3&=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)-\frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}(u_1-v_1)\end{aligned}\qquad(15)$$

bo'lib, berilgan tenglamaning yechimlari

$$x_1=y_1-\frac{b_1}{3},\quad x_2=y_2-\frac{b_1}{3},\quad x_3=y_3-\frac{b_1}{3}$$

bo'ladi.

1-misol. *Ushbu tenglamani yeching:*

$$x^3-9x^2+21x-5=0$$

◀Berilgan tenglamada

$$x=y+3$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$(y+3)^3-9(y+3)^2+21(y+3)-5=0$$

ya'ni

$$y^3-6y+4=0$$

bo'ladi. (14) formuladan foydalanib topamiz.

$$u=\sqrt[3]{-2+\sqrt{4-8}}=\sqrt[3]{-2+2i}$$

Ravshanki, bu kub ildizning qiymatlaridan biri

$$u_1=1+i$$

bo'ladi. Unda

$$v_1=\frac{6}{3(1+i)}=1-i$$

bo'lib, (15) formulaga ko'ra

$$y_1=2,\quad y_2=-1-\sqrt{3},\quad y_3=-1+\sqrt{3}$$

bo'ladi. Demak, berilgan tenglamaning yechimlari

$$x_1=5,\quad x_2=2-\sqrt{3},\quad x_3=2+\sqrt{3}$$

bo'ladi.▶

b) $n=4$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0\qquad(16)$$

ko'rinishga keladi.

(16) tenglama radikallarda yechiladi. Uning yechish algoritmi mavjud (qaralsin, [1]).

Eslatma. $n\geq 5$ *bo'lgan holda (3) tenglamaning radikallarda yechilishi masalasi haqida ko'p izlanishlar olib borilgan. Natijada, quyidagi xulosaga kelingan.*

Agar (3) tenglamaning darajasi besh va undan katta bo'lsa, (3) tenglama umumiy holda radikallarda yechilmaydi.

Endi yuqori darajali tenglamalarning radikallarda yechiladigan yana ayrim xususiy hollarini keltiramiz.

d) Ikki hadli tenglamalar.

Ushbu

$$ax^n+b=0\qquad(a\neq 0)\qquad(17)$$

ko'rinishdagi tenglama ikki hadli tenglama deyiladi. Bu tenglamaning yechimi $x=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ bo'ladi.

2-misol. *Ushbu tenglamani yeching:*

$$x^5+32=0$$

◀Ravshanki,

$$x=\sqrt[5]{-32}.$$

Endi, 32 ni kompleks son sifatida qarab, 5-ma'ruzada keltirilgan formuladan foydalanib topamiz: $-32=32(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Kompleks sondan ildiz chiqarish qoidasiga ko'ra

$$\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{32(\cos\pi+i\sin\pi)}=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\ (k=0,1,2,3,4)$$

bo'ladi. Demak,

$$x_0=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right),\quad x_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right),$$

$$x_2=-2,\quad x_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right),\quad x_4=2\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right).$$▶

e) **Uch hadli tenglamalar.**

Ushbu $ax^{2n}+bx^n+c=0$ $\qquad (a\neq 0)$

ko'rinishdagi tenglama uch hadli tenglama deyiladi.

Berilgan tenglamada $x^n=t$ almashtirish bajaramiz. Natijada, berilgan tenglama $at^2+bt+c=0$ kvadrat tenglamaga keladi va uning yechimlari $t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ bo'ladi. Demak, $x^n=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Keyingi tenglikdan

$$x=\sqrt[n]{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad (18)$$

bo'lishini topamiz.

3-misol. *Ushbu tenglamani yeching.*

$$x^6-3x^3-2=0$$

◀(18) formuladan foydalanib topamiz: $x=\sqrt[3]{\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{3\pm1}{2}}$.

Demak, $x^{(1)}=\sqrt[3]{1}$, $\quad x^{(2)}=\sqrt[3]{2}$.

Ravshanki, $x^{(1)}=\sqrt[3]{1}=1\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$ $\qquad (k=0,1,2)$.

Bundan, $x_0^{(1)}=1$, $\quad x_1^{(1)}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\qquad x_2^{(1)}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shuningdek, $x^{(2)}=\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$ $\qquad (k=0,1,2)$

bo'lib, undan

$x_0^{(2)}=\sqrt[3]{2}$, $\quad x_1^{(2)}=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $\quad x_2^{(2)}=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ bo'lishini

topamiz.

Shunday qilib, berilgan tenglamaning yechimlari

$$x_1=1,\quad x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\qquad x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3},\quad x_4=\sqrt[3]{2},$$

$$x_5=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\qquad x_6=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

bo'ladi.▶

Mashqlar

Quyidagi tenglamalarni yeching:

1. $2x^3-5x^2+8x-3=0$
2. $x^4+1=0$
3. $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$
4. $x^3-5x^2+28=0$

II BOB. Tekislikda to'g'ri chiziq hamda sodda ikkinchi tartibli egri chiziqlar

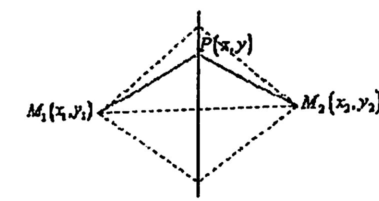
1-§. Tekislikda to'g'ri chiziq va uning turli tenglamalari

"Tekislikda to'g'ri chiziq" sodda, ayni paytda, muhim geometrik tushunchalardan biri. U tekislikdagi nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) sifatida tushuniladi.

Ma'lumki, tekislikdagi nuqta o'zining x va y koordinatalari bilan to'liq aniqlanadi. Bu x va y sonlar turli qiymatlarni qabul qilganda (x,y) juftliklar turlicha bo'lib, ular turli nuqtalarni tasvirlaydi. Odatda, bunday nuqtalar o'zgaruvchi nuqta deyiladi. Agar o'zgaruvchi nuqtaning koordinatalari x va y lar biror bog'lanishda bo'lsa, u holda bunday nuqtalar to'plami (geometrik o'rni) biror geometrik shaklni ifodalashi mumkin. Bog'lanish esa **geometrik shaklning tenglamasi** deyiladi.

1.1. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

Faraz qilaylik, tekislikda ikkita tayin $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalardan baravar uzoqlikda turgan nuqtalar biror to'g'ri chiziqda bo'lishini, bunday nuqtalar to'plami (geometrik o'rni) to'g'ri chiziqni ifodalashini tasavvur qilish mumkin. Shu xususiyatdan foydalanib, undagi o'zgaruvchi $P(x,y)$ nuqta koordinatalari orasidagi bog'lanishni topamiz (1-chizma).



1-chizma

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$$M_1P=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},$$

$$M_2P=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

bo'lib,

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

bo'ladi. Bu tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'tarib, so'ng qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib topamiz:

$$x^2-2x_1x+x_1^2+y^2-2y_1y+y_1^2=x^2-2x_2x+x_2^2+y^2-2y_2y+y_2^2.$$

Keyingi tenglikdan

$$2(x_2-x_1)\cdot x+2(y_2-y_1)\cdot y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)=0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar

$$A=2(x_2-x_1),$$
$$B=2(y_2-y_1),$$
$$C=x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2$$

deyilsa, unda

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

bo'ladi.

Demak, to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy *P(x, y)* nuqtaning x va y koordinatalari (1) tenglama bilan bog'langan. Binobarin, bu tenglama to'g'ri chiziqning tenglamasi bo'ladi.

Odatda, (1) tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

Eslatma. *Agar tekislikdagi* $A(x_0,y_0)$ *nuqtaning* x_0,y_0 *koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirsa, ya'ni*

$$Ax_0+By_0+C=0$$

bo'lsa, A nuqta to'g'ri chiziqda yotadi, tenglamani qanoatlantirmasa, ya'ni

$$Ax_0+By_0+C\neq 0$$

bo'lsa, A nuqta to'g'ri chiziqda yotmaydi.

1-misol. *Ushbu*

$$3x-2y-8=0 \qquad (2)$$

tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqni tekislikda yasang.

◄Ma'lumki, ikki nuqta to'g'ri chiziqning tekislikdagi holatini to'liq aniqlaydi.

Aytaylik, $x=0$ bo'lsin. Unda (2) tenglikka ko'ra

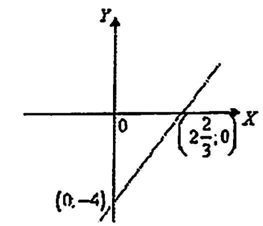
$$3\cdot 0-2y-8=0,\quad 2y=-8,\quad y=-4$$

bo'ladi. Demak, *(0, –4)* nuqta to'g'ri chiziqda yotadi.

Aytaylik, $y=0$ bo'lsin. Unda (2) tenglikka ko'ra

$$3x-2\cdot 0-8=0,\quad 3x=8,\quad x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$

bo'ladi. Demak, $\left(2\frac{2}{3},0\right)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotadi. Bu $(0,-4)$, $\left(2\frac{2}{3},0\right)$ nuqtalarni tekislikda yasab, ular orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz (2-chizma).



2-chizma

Tenglamasi $3x-2y-8=0$ bo'lgan to'g'ri chiziqning tekislikda joylashishi 2-chizmada tasvirlangan.►

Ravshanki, (1) tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqning tekislikdagi holati (vaziyati) tenglamadagi A,B,C sonlarga bog'liq bo'ladi.

1) (1) tenglamada $C=0$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$Ax+By=0$$

ko'rinishga kelib, bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi;

2) (1) tenglamada $A=0$ bo'lsin. U holda (1) tenglama

$$By+C=0,\ \text{ya'ni}\ y=-\frac{C}{B} \qquad (B\neq 0)$$

ko'rinishga kelib, bu to'g'ri chiziq OX o'qiga parallel bo'ladi;

3) (1) tenglamada $B=0$ bo'lsin. U holda (1) tenglama

$$Ax+C=0,\ \text{ya'ni}\ x=-\frac{C}{A}$$

ko'rinishiga kelib, bu to'g'ri chiziq OY o'qiga parallel bo'ladi;

4) (1) tenglamada $A=C=0$ bo'lsin. U holda (1) tenglama

$$By=0,\ \text{ya'ni}\ y=0$$

ko'rinishiga kelib, bu to'g'ri chiziq OX o'qi bo'ladi;

5) (1) tenglamada $B=C=0$ bo'lsin. U holda (1) tenglama

$$Ax=0,\ \text{ya'ni}\ x=0$$

ko'rinishga kelib, bu to'g'ri chiziq OY o'qi bo'ladi.

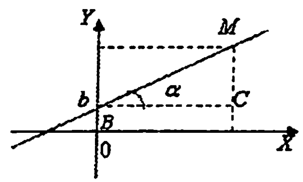
Demak, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

$$Ax+By+C=0$$

da $A\neq 0,\quad B\neq 0,\quad C\neq 0$ bo'lsa, u holda bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan ham o'tmaydi, koordinata o'qlariga parallel ham bo'lmaydi.

1°. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi va biror ℓ to'g'ri chiziqni olaylik. Bu to'g'ri chiziq OX o'qiga parallel bo'lmasin. Binobarin, ℓ to'g'ri chiziq

OX o'qini kesib o'tadi. To'g'ri chiziqning OY o'qi bilan kesishgan nuqtani B, OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni α deylik (3-chizma).



3-chizma

Ravshanki, $B = B(0;b)$ bo'lib, b esa OB kesmaning uzunligi.

To'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M = M(x,y)$ nuqtani olamiz. Keltirilgan chizmadan ko'rinadiki, BMC – to'g'ri burchakli uchburchak, $\angle CBM = \alpha$, $BC = x$, $MC = y-b$.

BMC uchburchakdan

$$tg\alpha = \frac{y-b}{x}$$

bo'lishini topamiz. Bu miqdor **to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti** deyiladi va k bilan belgilanadi:

$$k = tg\alpha.$$

Natijada,

$$k = \frac{y-b}{x} \text{ bo'lib, undan}$$

$$y = kx + b \qquad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning x va y koordinatalari (3) tenglama bilan bog'langan.

Ushbu $\quad y = kx + b$

tenglama **to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi** deyiladi.

(3) tenglama k va b larga bog'liq bo'lib, to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati shu k va b lar bilan to'liq aniqlanadi.

Masalan, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\quad b = 2$ bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y = x + 2$$

bo'ladi, chunki $k = tg\frac{\pi}{4} = 1$.

Eslatma. *Agar to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi*

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4)$$

da $B \neq 0$ bo'lsa, uni to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasiga keltirish mumkin.

Haqiqatdan ham, (4) tenglamani y ga nisbatan yechib,

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

so'ng

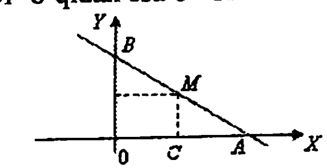
$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

deyilsa, unda (4) tenglama ushbu

$$y = kx + b$$

ko'rinishga keladi. Bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasidir.

2°. To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi. Aytaylik, tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi va biror ℓ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Bu ℓ to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tmasin va u OX o'qidan $a = OA$ kesmani, OY o'qidan esa $b = OB$ kesmani ajratsin (4-chizma).



4-chizma

Qaralayotgan to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M = M(x,y)$ nuqtani olamiz. Keltirilgan chizmadan ko'rinadiki:

OAB, CAM uchburchaklar to'g'ri burchakli uchburchaklar, $OC = x$, $MC = y$, $CA = a - x$, $OB = b$, $OA = a$

Endi ΔOAB va ΔCAM uchburchaklarning o'xshashligidan foydalanib topamiz:

$$\frac{MC}{OB} = \frac{CA}{OA}, \text{ ya'ni } \frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}.$$

Keyingi tenglikdan

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a}$$

bo'lib, undan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (5)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning x va y koordinatalari (5) tenglama bilan bog'langan.

Ushbu $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ tenglama **to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi** deyiladi.

(5) tenglama a va b larga bog'liq bo'lib, to'g'ri chiziqning tekislikdagi holati shu a va b lar bilan to'liq aniqlanadi.

Masalan, OX o'qidan 2 birlik $(a=2)$, OY o'qidan 3 birlik $(b=3)$ kesma ajratadigan to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \text{ bo'ladi.}$$

Eslatma. *Agar to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi*

$$Ax+By+C=0$$

da $C\neq 0,\quad A\neq 0,\quad B\neq 0$ *bo'lsa, uni to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasiga keltirish mumkin.*

Haqiqatan ham, (4) tenglamaning ikki tomonini C ga bo'lib,

$$\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1,$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1$$

so'ng

$$a=-\frac{C}{A},\quad b=-\frac{C}{B}$$

deyilsa, unda (4) tenglama ushbu

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ko'rinishga keladi. Bu to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasidir.

1.2. To'g'ri chiziqqa oid masalalar

1°. Ikki to'g'ri chiziq orasida burchak. Ikki to'g'ri chiziqning parallellik hamda perpendikulyarlik shartlari. Tekislikda ikkita ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlarni qaraylik, ℓ_1 to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

$$y=k_1x+b_1,$$

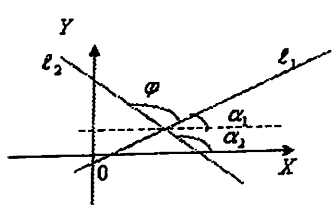
ℓ_2 to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi esa

$$y=k_2x+b_2$$

bo'lsin. Bunda

$$k_1=tg\alpha_1,\quad k_2=tg\alpha_2.$$

(5-chizma)



5-chizma

ℓ_1 to'g'ri chiziqni M nuqta atrofida soat strelkasiga teskari tomonga uni ℓ_2 to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha burish natijasida hosil bo'lgan φ burchak $(0\leq\varphi<\pi)$, ikki ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deyiladi.

Yuqorida keltirilgan 5-chizmadan ko'rinadiki, φ burchak

$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1$$

bo'ladi.

Ma'lumki,

$$tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2\cdot tg\alpha_1}.$$

Demak,

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \tag{6}$$

bo'lib, u ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning tangensini aniqlab beradi.

Masalan, ushbu $\quad y=-\frac{1}{7}x+2,\quad y=\frac{3}{4}x+3$

to'g'ri chiziqlar uchun $\quad k_1=-\frac{1}{7},\quad k_2=\frac{3}{4}$

bo'lib, ular orasidagi α burchakning tangensi (6) formulaga ko'ra

$$tg\alpha=\frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{7}\right)}{1+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)}=\frac{21+4}{28-3}=1$$

bo'ladi. Demak, berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak

$$\alpha=45^\circ$$

bo'ladi.

Aytaylik, ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak $\alpha=0$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi. Ayni paytda,

$$tg0=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=0$$

bo'lib,

$$k_1=k_2 \tag{7}$$

bo'ladi. (7) munosabat ikki to'g'ri chiziqning parallellik shartini ifodalaydi.

Aytaylik, ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak $\alpha=\frac{\pi}{2}$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'ladi. Ayni paytda

$$tg\frac{\pi}{2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\infty \text{ bo'lib,}$$

$$1+k_1\cdot k_2=0, \text{ ya'ni}$$

$$k_1=-\frac{1}{k_2} \quad \left(k_2=-\frac{1}{k_1}\right) \tag{8}$$

bo'ladi. (8) munosabat ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

Eslatma. *Aytaylik, ikki to'g'ri chiziq umumiy ko'rinishdagi tenglamalari*

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

bilan berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2},$$

perpendikulyarlik sharti esa

$$A_1\cdot A_2+B_1B_2=0$$

bo'ladi.

2°. Bir va ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari. Tekislikda tayin $M_1=M_1(x_1,y_1)$ nuqta berilgan bo'lsin. Shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqni (to'g'ri chiziq tenglamasini) topamiz. To'g'ri chiziqni, uning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

$$y=kx+b \tag{9}$$

ko'rinishida izlaymiz. Bu to'g'ri chiziq berilgan M_1 nuqta orqali o'tishi lozim. Binobarin, M_1 nuqtaning koordinatalari x_1 va y_1 lar (9) tenglamani qanoatlantiradi.

$$y_1=kx_1+b \tag{10}$$

(9) va (10) tengliklarni hadlab ayirib $y-y_1=kx+b-(kx_1+b)$,

ya'ni

$$y-y_1=k(x-x_1) \tag{11}$$

bo'lishini topamiz.

Bu (11) tenglama berilgan $M_1(x_1,y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Agar (11) tenglamadagi k tayin son bo'lsa, u holda (11) tenglama (x_1,y_1) nuqtadan o'tuvchi tayin bitta to'g'ri chiziq bo'ladi.

Agar (11) tenglamadagi k turli qiymatlarni qabul qiluvchi o'zgaruvchi bo'lsa, u holda (11) tenglama (x_1,y_1) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi bo'ladi.

Misol. $P(3,2)$ *nuqtadan o'tuvchi, ushbu*

$$y=\frac{4}{3}x-7 \tag{12}$$

to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

◀Izlanayotgan to'g'ri chiziq (12) to'g'ri chiziqqa parallel bo'lishi kerakligidan, ularning burchak koeffitsiyentlari bir xil bo'lib,

$$y-y_1=\frac{4}{3}(x-x_1)$$

bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq $P(3,2)$ nuqtadan o'tadi. Demak,

$$y-2=\frac{4}{3}(x-3)$$

ya'ni

$$y=\frac{4}{3}x-2$$

bo'ladi. Bu izlanayotgan to'g'ri chiziqdir.▶

Aytaylik, tekislikda ikkita $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topish uchun, avvalo, $M_1(x_1,y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini (11) formulaga ko'ra yozib olamiz:

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Bu to'g'ri chiziq $M_2(x_2,y_2)$ nuqtadan o'tishi kerak. Demak,

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

k ning bu qiymatini (11) tenglamadagi k ning o'rniga qo'ysak, unda

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{13}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu berilgan $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Masalan, $M_1(2,3)$, $M_2(4,5)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-2}{4-2}$$

ya'ni

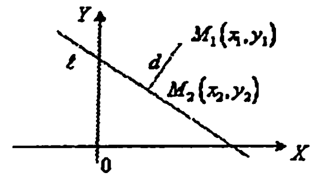
$y=x+1$ bo'ladi.

3°. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Tekislikda ushbu

$$Ax+By+C=0$$

tenglama bilan berilgan ℓ to'g'ri chiziq va $M_1(x_1,y_1)$ nuqtani olaylik.

M_1 nuqtadan ℓ to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi M_1 nuqtadan ℓ to‘g‘ri chiziqqacha masofa deyiladi (6-chizma).



6-chizma

Perpendikulyarning ℓ chiziq bilan kesishish nuqtasi $M_2(x_2,y_2)$ bo‘lsin. Demak, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa M_1M_2 kesmaning uzunligi bo‘ladi. Uni d bilan belgilaymiz.

Ushbu

$$Ax+By+C=0,$$
$$Bx-Ay+C_1=0$$

to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi, chunki bu to‘g‘ri chiziqlar uchun perpendikulyarlik sharti bajariladi:

$$A\cdot B+B\cdot(-A)=AB-AB=0.$$

Unda perpendikulyar to‘g‘ri chiziqning $M_1(x_1,y_1)$ nuqtadan o‘tganligini e’tiborga olib, uning tenglamasi

$$B\cdot(x-x_1)-A(y-y_1)=0$$

bo‘lishini topamiz. Ayni paytda, bu to‘g‘ri chiziq $M_2(x_2,y_2)$ nuqtadan ham o‘tadi. Demak,

$$B\cdot(x_2-x_1)-A(y_2-y_1)=0$$

bo‘ladi. Keyingi tenglikdan

$$B\cdot(x_2-x_1)=A(y_2-y_1)$$

ya’ni

$$\frac{x_2-x_1}{A}=\frac{y_2-y_1}{B}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Agar bu nisbatlarni t bilan belgilasak,

$$\frac{x_2-x_1}{A}=\frac{y_2-y_1}{B}=t$$

unda

$$x_2-x_1=At,\quad x_2=x_1+At,$$
$$y_2-y_1=Bt,\quad y_2=y_1+Bt$$

bo‘ladi.

Ravshanki,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{A^2+B^2}\cdot|t| \qquad (14)$$

Endi $M_2(x_2,y_2)$ nuqta qaralayotgan $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziqda yotishini e’tiborga olib topamiz:

$$Ax_2+By_2+C=A(x_1+At)+B(y_1+Bt)+C=$$
$$=(Ax_1+By_1+C)+t(A^2+B^2)=0$$

Keyingi tenglikdan

$$t=-\frac{Ax_1+By_1+C}{A^2+B^2} \qquad (15)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, (14) va (15) tengliklardan

$$d=\sqrt{A^2+B^2}\cdot|t|=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (16)$$

bo‘ladi. Bu berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topib beradigan formuladir.

Masalan, $M_1(3,-4)$ nuqtadan $6x-8y+31=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa (16) formulaga ko‘ra $d=\frac{|6\cdot3-8\cdot(-4)+31|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{18+32+31}{10}=8{,}1$

bo‘ladi.

Mashqlar

1. Ushbu to‘g‘ri chiziqlarni tekislikda tasvirlang:

$$а)\ 2x-5y-16=0,\quad б)\ y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3},\quad в)\ \frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$$

2. Ushbu $10x+5y+12=0$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.

3. $2x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziq bo‘ylab yorug‘lik nuri yo‘naltirilgan, u abssissalar o‘qigacha borib, undan qaytadi. Qaytgan nurning tenglamasini yozing.

4. Rombning diagonallari 8 va 3 birlikka teng. Agar rombning katta diagonalini OX o‘q uchun, kichgina diagonalini OY o‘q deb qabul qilsak, romb tomonlarining tenglamasini yozing.

5. Ushbu $3x+y-2=0$, $x-3y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

6. Ushbu $2x-y-3=0$, $x-3y-4=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o‘tuvchi hamda $x+y=1$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

7. Uchlari $A=A(12;0)$, $B=B(1;8)$, $C=C(0;5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning B nuqtasidan AC tomongacha bo‘lgan masofani toping.

8. Yorug‘lik nuri OX o‘qiga qanday burchak ostida yo‘naltirilganda qaytgan nur $A(-2;\sqrt{3})$ ва $B(-3;2\sqrt{3})$ nuqtalardan o‘tadi?

2-§. Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Biz sodda ikkinchi tartibli egri chiziqlar aylana, ellips, giperbola, parabolalar va ularning xossalarini keltiramiz.

2.1. Aylana

Ma'lumki, tekislikda berilgan (tayin) nuqtadan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalar (tekislik nuqtalari) to'plami ***aylana***, berilgan nuqta esa ***aylana markazi*** deyiladi.

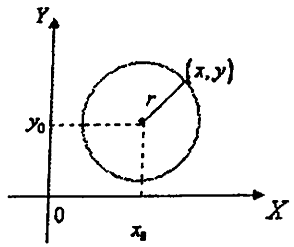
Endi aylananing tenglamasini keltirib chiqarish maqsadida tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini va $M_0 = M_0(x_0, y_0)$ nuqtani olamiz. Ravshanki, bu nuqtadan r masofada $(r>0)$ joylashgan nuqtalar (bunday nuqtalar to'plami aylana bo'ladi) o'zgaruvchi nuqtalar bo'ladi. Bunday nuqtalardan birini $M = M(x,y)$ deylik. $M_0(x_0,y_0)$ va $M(x,y)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$M_0M = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \text{ bo'ladi.}$$

Keyingi tenglikdan

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \qquad (1)$$

bo'lishi kelib chiqadi.



1-chizma

Shunday qilib, aylanada joylashgan o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari x va y larni bog'lovchi tenglamaga keldik. Bu (1) tenglama ***aylananing sodda tenglamasi*** deyiladi, r esa ***aylana radiusi*** deyiladi.

Demak, aylananing tenglamasi markaz deb atalgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaga hamda r radiusga bog'liq bo'lib, ular yordamida aylananing tekislikdagi holati to'liq aniqlanadi.

Xususan, markazi koordinatalar boshida bo'lgan aylana tenglamasi quyidagicha

$$x^2+y^2=r^2 \text{ bo'ladi.}$$

Masalan, markazi (–1, 2), radiusi 5 ga teng bo'lgan aylananing tenglamasi

$$(x+1)^2+(y-2)^2=25 \text{ bo'ladi.}$$

Aylana bilan umumiy bitta $M(x_1,y_1)$ nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq **aylanaga o'tkazilgan urinma** deyiladi.

Ushbu

$$x^2+y^2=r^2$$

aylananing (x_1,y_1) nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi quyidagi

$$x_1x+y_1y-r^2=0 \qquad (2)$$

ko'rinishga ega.

Masalan, ushbu $x^2+y^2=8$ aylananing (2, –2) nuqtasidan o'tuvchi urinmaning tenglamasi $2x+(-2)y-8=0$, ya'ni $x-y-4=0$ bo'ladi.

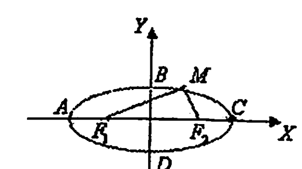
2.2. Ellips

Tekislikda ikkita tayin nuqtalarni olaylik. Tekislikning bu nuqtalargacha bo'lgan masofalari yig'indisi o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalari to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) ***ellips*** deyiladi.

Endi ellipsning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Ta'rifda keltirilgan tayin nuqtalardan birini F_1, ikkinchisini F_2 orqali belgilaymiz.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha tasvirlaymiz:

F_1 va F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi (OX o'qi), F_1F_2 kesmaning o'rtasidan o'tuvchi hamda abssissa o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni ordinata o'qi (OY o'qi) deb olamiz (2-chizma).



2-chizma

Aytaylik, F_1 va F_2 nuqtalar orasidagi masofa $2c$ ga $(c>0)$ teng bo'lsin. U holda bu nuqtalarning koordinatalari mos ravishda $(-c,0)$ va $(c,0)$ bo'ladi: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

Odatda, F_1 va F_2 nuqtalar ellipsning fokuslari deyiladi.

Ellipsda ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olaylik. Unda ellips ta'rifiga binoan F_1M va F_2M masofalar yig'indisi o'zgarmas songa teng bo'ladi. Bu o'zgarmas sonni $2a$ deylik $(a>0)$.

Demak,

$$F_1M+F_2M=2a. \qquad (3)$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib topamiz:

$$F_1M=\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$F_2M=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Unda (3) ga ko'ra

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \text{ bo'ladi.}$$

Bu tenglikni quyidagicha

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

yozib, uning ikki tomonini kvadratga ko'tarsak, unda

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

bo'ladi. Bunda esa $\quad x^2+2cx+c^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2$

$$4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

ya'ni

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'tarish natijasida

$$\left(a^2-cx\right)^2=a^2\left((x-c)^2+y^2\right),$$

ya'ni

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \text{ hosil bo'ladi.}$$

Ravshanki, $2a>2c$ ya'ni $a>c$ bo'lganligi uchun $a^2-c^2>0$ bo'ladi. Uni b^2 bilan belgilaymiz:

$$b^2=a^2-c^2.$$

Natijada,

$$x^2\cdot b^2+y^2a^2=a^2b^2$$

bo'lib, undan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, ellipsdagi o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari x va y larni bog'lovchi tenglama hosil bo'ldi. Bu (4) tenglama ellipsning sodda tenglamasi deyiladi.

Ellips tenglamasi (4)da x ni $-x$ ga, y ni $-y$ ga almashtirsak, (4) tenglama o'zgarmaydi. Demak, ellips (yopiq egri chiziq) koordinata o'qlariga nisbat simmetrik joylashgan.

Agar (4) tenglamada $y=0$ deyilsa, unda

$$-x^2=a^2, \quad x=\pm a \text{ bo'ladi.}$$

Demak, ellips OX o'qini ikki – $A(-a,0)$, $\quad C(a,0)$ nuqtalarda kesadi.

Agar (4) tenglamada $x=0$ deyilsa, unda

$$-y^2=b^2, \quad y=\pm b \text{ bo'ladi.}$$

Demak, ellips OY o'qini ikki – $B(0,b)$, $\quad D(0,-b)$ nuqtalarda kesadi.

Odatda, $A(-a,0), B(0,b), C(a,0), D(0,-b)$ nuqtalar ellipsning uchlari deyiladi. AC кесма ellipsning katta o'qi, BD kesma ellipsning kichik o'qi deyiladi.

Ravshanki, AC kesmaning uzunligi $2a$, BD kesmaning uzunligi esa $2b$ ga teng. Demak, (4) tenglamada a ellips katta yarim o'qi, b esa kichik yarim o'qi bo'ladi.

Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

tenglama bilan berilgan ellipsni qaraylik. Bu ellipsning fokuslari orasidagi masofa $2c$ ga teng.

Ushbu

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a} \qquad (5)$$

miqdor ellipsning ekssentrisiteti deyiladi. Ma'lumki, $a>c$. Demak, ellipsning ekssentrisiteti uchun

$$0<\varepsilon<1$$

bo'ladi (agar $\varepsilon=0$ bo'lsa, $c=0$ bo'lib, ellips aylana bo'lib qoladi).

Ellipsning ekssentrisiteti ellipsning siqilish darajasini bildiradi. Haqiqatdan ham, (4) munosabatdan, $b^2=a^2-c^2$ bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Bu tenglikdan ko'rinadiki, ε ning ortib borishi bilan $\frac{b}{a}$ nisbat kamaya boradi, binobarin, ellips tortila boradi.

1-misol. *Katta o'qi 10 ga, ekssentrisiteti 0,8 ga teng bo'lgan ellipsning tenglamasini toping.*

◄Shartga ko'ra $2a=10$. Demak, $a=5$. Ma'lumki, ekssentrisitet:

$$\varepsilon=\frac{c}{a},\qquad c=a\cdot\varepsilon.$$

Unda $c=5\cdot 0{,}8=4$ bo'ladi. $b^2=a^2-c^2$ bo'lishidan $b^2=25-16=9,\quad b=3$ ekanligi kelib chiqadi. Izlanayotgan ellipsning tenglamasi

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

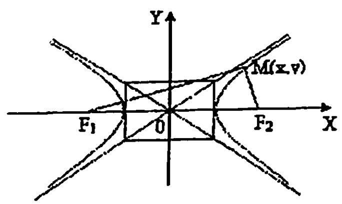
bo'ladi.▶

2.3. Giperbola

Tekislikda ikkita tayin nuqtalarni olaylik. Tekislikning bu nuqtalargacha bo'lgan masofalari ayirmasi o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) giperbola deyiladi.

Endi giperbolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Ta'rifda keltirilgan nuqtalarni F_1 va F_2 orqali belgilaymiz.

F_1 va F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi, F_1F_2 kesmaning o'rtasidan o'tuvchi hamda abssissa o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni ordinata o'qi deb, koordinatalar sistemasini chizamiz (3-chizma).



3-chizma

Agar F_1 va F_2 nuqtalar orasidagi masofa $2c$ $(c>0)$ deyilsa, unda bu nuqtalarning koordinatalari mos ravishda $(-c,0)$ va $(c,0)$ bo'ladi:

$$F_1(-c,0),\quad F_2(c,0).$$

Bu F_1 va F_2 nuqtalar ***giperbolaning fokuslari*** deyiladi.

Giperbolada ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olaylik. Unda giperbola ta'rifiga binoan F_1M va F_2M masofalar ayirmasi o'zgarmas songa (u $2a$ deyilsa) teng bo'lib, $F_1M-F_2M=2a$, $F_2M-F_1M=-2a$, umuman

$$F_1M-F_2M=\pm 2a$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad F_2M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Demak,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Endi

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

tenglikni (xuddi ellipsning tenglamasini keltirib chiqarishdagi qilingan ishlar kabi) ikki tomonini kvadratga ko'tarib, so'ng lozim bo'lgan soddalashtirishlarni bajarib, natijada:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

tenglamaga kelamiz, bunda $b^2=c^2-a^2$, $(a<c)$.

Shunday qilib, giperboladagi o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari x va y larni bog'lovchi tenglama hosil bo'ldi. Bu (6) tenglama ***giperbolaning sodda tenglamasi*** deyiladi.

Giperbola ham koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan, u 3-chizmada tasvirlangan. Giperbola ikki qismdan iborat bo'lib, bu qismlar uning shoxchalari deyiladi.

Agar (6) tenglamada $y=0$ deyilsa, unda

$$x^2=a^2,\quad x=\pm a$$

bo'ladi. Demak, giperbola OX o'qini $A(-a,0)$ va $B(a,0)$ nuqtalarda kesadi. Bu nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi. Giperbola OY o'qi bilan kesishmaydi.

Ushbu

$$\varepsilon=\frac{c}{a}$$

miqdor giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi.

Agar $b^2=c^2-a^2$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2 \text{ bo'lib,}$$

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1} \text{ bo'ladi.}$$

Giperbolaning ekssentrisiteti ham uning shaklini xarakterlaydigan miqdordir.

Giperbola tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

ni y ga nisbatan yechib $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$,

uni quyidagicha yozamiz: $y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$.

Bu tenglikdan ko‘rinadiki, x yetarlicha katta bo‘lganda, $\frac{a^2}{x^2}$ nisbat 0 ga yaqin bo‘lib, $\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ miqdor 1 ga yaqin bo‘ladi.

Natijada, ushbu $y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\approx\pm\frac{b}{a}x$ munosabat hosil bo‘ladi.

Demak, x yetarlicha katta bo‘lganda giperbola nuqtalarining ordinatalari ushbu

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

to‘g‘ri chiziqlar nuqtalarining ordinatalariga yetarlicha yaqin bo‘ladi. Bu

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

to‘g‘ri chiziqlar **giperbolaning asimptotalari** deyiladi (3-chizma).

2-misol. *Ushbu*

$$16x^2-25y^2=400$$

giperbolaning fokuslari, ekssentrisiteti va asimptotalarini toping.

◀Agar tenglamaning ikki tomonini 400 ga bo‘lsak, unda giperbolaning tenglamasi quyidagi

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$$

ko‘rinishga keladi.

Demak,

$$a^2=25,\quad b^2=16,\quad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41},$$

$$F_1=F_1\left(-\sqrt{41},0\right),\quad F_2=F_2\left(\sqrt{41},0\right),$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{5}$$

asimptotalari esa

$$y=\frac{4}{5}x,\quad y=-\frac{4}{5}x$$

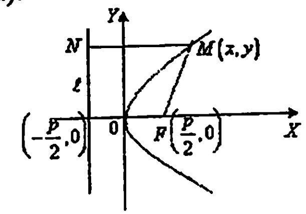
bo‘ladi.▶

2.4. Parabola

Tekislikda tayin ℓ to‘g‘ri chiziq va bu to‘g‘ri chiziqda yotmagan tayin F nuqtani olaylik. Tekislikning ℓ to‘g‘ri chiziq hamda F nuqtadan baravar uzoqlikda bo‘lgan nuqtalari to‘plami (nuqtalarning geometrik o‘rni) ***parabola*** deyiladi.

Endi parabolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz.

F nuqtadan o‘tuvchi va ℓ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni abssissa o‘qi (OX o‘qi), F nuqta va ℓ to‘g‘ri chiziq orasidagi kesmaning o‘rtasidan o‘tuvchi va abssissa o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni ordinata o‘qi (OY o‘qi) deb, koordinatalar sistemasini chizamiz (4-chizma).



4-chizma

F nuqta bilan ℓ to‘g‘ri chiziq orasidagi masofani p deylik. Unda F nuqtaning koordinatasi $\left(\frac{p}{2},0\right)$

$$F=F\left(\frac{p}{2},0\right)$$

bo‘lib, ℓ to‘g‘ri chiziqning tenglamasi

$$x=-\frac{p}{2}\ \text{bo‘ladi.}$$

Bu $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqta parabolaning fokusi, ℓ to‘g‘ri chiziq esa ***parabolaning direktrisasi*** deyiladi.

Parabolada ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olaylik. Unda parabola ta’rifiga binoan

$$NM=FM$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$NM=x+\frac{p}{2},\quad FM=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Demak,

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Bu tenglikning ikki tomonini kvadratga ko‘tarib, so‘ng lozim bo‘lgan soddalashtirishlarni bajarib

$$y^2=2px \tag{7}$$

bo‘lishini topamiz.

Shunday qilib, paraboladagi o‘zgaruvchi $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari x va y larni bog‘lovchi tenglama hosil bo‘ladi. Bu (7) tenglama parabolaning sodda tenglamasi deyiladi.

Ravshanki, $x=0$ da $y=0$ bo‘ladi. Demak, parabola koordinata boshidan o‘tadi. Ayni paytda, uning tenglamasida y kvadratda qatnashgani uchun parabola OX o‘qiga nisbatan simmetrik, x esa har doim musbat bo‘lgani uchun parabola OY o‘qining o‘ng tomonida joylashgan bo‘ladi (4-chizma).

3-misol. *Ushbu* $A(1,2)$ *nuqtadan o‘tuvchi parabola tenglamasini toping.*

◀Modomiki, izlanayotgan parabola $y^2=2px$ $A(1,2)$ nuqtadan o‘tishi lozim ekan, unda bu nuqtaning koordinatalari parabola tenglamasini qanoatlantiradi:

$$2^2=2p\cdot 1$$

Bu tenglamadan $p=2$ ekani kelib chiqadi. Demak,

$$y^2=4x.\blacktriangleright$$

2.5. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi

Aytaylik, ushbu

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (8)$$

tenglik tekislikdagi o‘zgaruvchi $N(x,y)$ nuqtaning x va y koordinatalari orasidagi bog‘lanishni ifodalasin. Bunday nuqtalar to‘plami (nuqtalarning geometrik o‘rni), umuman aytganda, egri chiziq bo‘ladi. U ikkinchi tartibli egri chiziq, (8) tenglama esa ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta’rifda “umuman aytganda” degan ibora ishlatildi. Bunday deyilishining boisi, (8) tenglamaga har doim ham tekislikda geometrik shakl mos kelavermasligida.

Masalan,

$$2x^2+9y^2+10=0,$$

ya’ni

$$2x^2+9y^2=-10$$

tenglama tekislikda hech qanday shaklni ifodalamaydi.

Shunga o‘xshash

$$2x^2+9y^2=0$$

tenglama tekislikda egri chiziqni emas, balki nuqtani ifodalaydi.

Endi (8) tenglama ba’zi ko‘rinishlarida egri chiziqni ifodalashiga misollar keltiramiz.

4-misol. *Ushbu tenglamani olaylik.*

$$5x^2+7x-11y+6=0$$

◀Ravshanki, bu tenglama (8) tenglamaning

$$A=5,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=7,\quad E=-11,\quad F=6$$

bo‘lgan xususiy holi. Uni quyidagicha

$$11y=5x^2+7x+6,$$

ya’ni

$$y=\frac{5}{11}x^2+\frac{7}{11}x+\frac{6}{11}$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

Ravshanki,

$$y=\frac{5}{11}\left(x^2+\frac{7}{5}x+\frac{6}{5}\right)=\frac{5}{11}\left(x+\frac{7}{5}\right)^2-\frac{5}{11}\cdot\frac{19}{25}=\frac{5}{11}\left(x+\frac{7}{5}\right)^2-\frac{19}{55}$$

koordinatalar sistemasidagi koordinatalar boshini ko‘chirish natijasidan keyingi tenglama quyidagi $y_1=px_1^2$ ko‘rinishga keladi. Bu paraboladir.▶

5-misol. *Ushbu tenglamani olaylik.*

$$4x^2+5y^2+20x-30y+8=0$$

◀Ravshanki, bu tenglama (8) tenglamaning

$$A=4,\quad B=0,\quad C=5,\quad D=20,\quad E=-30,\quad F=8$$

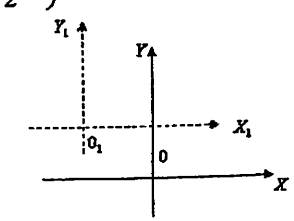
bo‘lgan xususiy holi. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$4\left(x^2+5x+\frac{25}{4}\right)+5\left(y^2-6y+9\right)=25+45-8,$$

ya’ni

$$4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+5(y-3)^2=62.$$

Agar koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish bilan uning koordinatalar boshini $\left(-\frac{5}{2};3\right)$ nuqtaga ko‘chirilsa (5-chizma),



5-chizma

unda yangi $X_1O_1Y_1$ sistemada qaralayotgan tenglama ushbu $4x_1^2+5y_1^2=62$ ko‘rinishga keladi. Keyingi tenglikni ikki tomonini 62 ga bo‘lib topamiz:

$$\frac{4x_1^2}{62}+\frac{5y_1^2}{62}=1.$$

Demak,

$$\frac{x_1^2}{\frac{31}{2}}+\frac{y_1^2}{\frac{62}{5}}=1.$$

Bu ellipisdir.▶

6-misol. *Ushbu tenglamani olaylik.*

$$2x^2-3y^2+4x+12y-16=0$$

◀Ravshanki, bu tenglama (8) tenglamaning

$$A=2,\quad B=0,\quad C=-3,\quad D=4,\quad E=12,\quad F=-16$$

bo'lgan xususiy holi. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$2\left(x^2+2x+1\right)-3\left(y^2-4y+4\right)-6=0,$$

$$2(x+1)^2-3(y-2)^2=6. \qquad (9)$$

Yuqoridagidek, koordinatalar boshini $(-1,2)$ nuqtaga, koordinatalar o'qlarini esa parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lgan yangi $X_1O_1Y_1$ koordinatalar sistemasida (9) tenglama ushbu

$$2x_1^2-3y_1^2=6$$

ko'rinishga keladi. Keyingi tenglikning ikki tomonini 6 ga bo'lib topamiz:

$$\frac{x_1^2}{3}-\frac{y_1^2}{2}=1.$$

Bu tenglama giperbolani ifodalaydi.▶

Yuqorida keltirilgan ma'lumot va misollardan ko'rinadiki, ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

qanday egri chiziqni ifodalashi (8) tenglamaning koeffitsiyentlariga bog'liq bo'ladi.

(8) tenglamadan bir muncha soddaroq bo'lgan

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (10)$$

tenglamani qaraylik.

Quyidagi tasdiq o'rinli bo'ladi:

agar (10) tenglamada $AC=0$ *bo'lsa, (10) tenglama parabolani ifodalaydi;*

agar (10) tenglamada $AC>0$ *bo'lsa, (10) tenglama ellipsni ifodalaydi;*

agar (10) tenglamada $AC<0$ *bo'lsa, (10) tenglama giperbolani ifodalaydi.*

Bu tasdiq yuqoridagi misollarda qo'llanilgan usul bilan isbotlanadi.

(8) tenglama koordinatalar sistemasini tanlash yo'li bilan, shu sistemada qaralayotgan quyidagi kanonik ko'rinishlardan bittasiga keltiriladi.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (ellips)

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (mavhum ellips)

3) $a^2x^2+c^2y^2=0$ (ikki mavhum kesishuvchi chiziqlar)

4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (giperbola)

5) $a^2x^2-c^2y^2=0$ (ikki kesishuvchi chiziqlar)

6) $y^2=2px$ (parabola)

7) $y^2-a^2=0$ (ikki parallel chiziqlar)

8) $y^2+a^2=0$ (ikki parallel mavhum chiziqlar)

9) $y^2=0$ (ikki o'zaro ustma-ust tushuvchi chiziqlar)

Mashqlar

1. Elipsning ekssentrisiteti 0,8 ga, uning nuqtalaridan birining fokal radiuslari 2 va 3 ga teng, ellipsning katta o'qi absissalar o'qi bilan, uning markazi esa koordinatalar boshi bilan mos keladi deb olib, shu ellipsning tenglamasini tuzing.

2. $9x^2-16y^2=144$ giperbolada shunday nuqtalar topilsinki, bu nuqtalar bilan giperbolaning chap fokusi orasidagi masofa ularning o'ng fokusigacha bo'lgan masofasidan ikki marta kichik bo'lsin.

3. Giperbolaning fokuslari $F_1(\sqrt{7},0)$ ва $F_2(-\sqrt{7},0)$ nuqtalarda joylashgan. Giperbola $A(2;0)$ nuqtadan o'tadi. Uning asimptotalarining tenglamasi va ular orasidagi burchakni toping.

4. Fokus $4x-3y-4=0$ to'g'ri chiziq va OX o'qi bilan kesishish nuqtasida yotgan parabola tenglamasini tuzing.

5. $4x+3y+10=0$ to'g'ri chiziqdan 2 birlik uzoqlikda yotgan $y^2=32x$ parabolaga tegishli nuqtani toping.

III BOB. Funksiya va uning grafigi

1-§. "Funksiya" tushunchasi

Tabiat va texnik jarayonlarda, shuningdek, fanning barcha sohalarida har hil miqdorlar qatnashadi. Bunda ayrim miqdorlar turli son qiymatlarni qabul qilsa, ayrimlari esa faqat bitta son qiymatga teng bo'lib qolaveradi. Birinchi holdagi miqdorlar o'zgaruvchi miqdorlar, ikkinchi holdagi miqdorlar esa o'zgarmas miqdorlar deyiladi.

Masalan, yuqoriga otilgan jismning tezligi o'zgaruvchi miqdor bo'ladi, chunki uning tezligi avval kamaya boradi, so'ng nolga aylanadi va yerning tortish qonuniga ko'ra tezlik orta boradi. Uchburchakning ichki burchaklari yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'ladi, chunki har qanday uchburchakda ichki burchaklar yig'indisi 180° ga teng.

O'zgaruvchi miqdorlar x,y,z va h.k. harflar bilan belgilanadi va ularning qabul qiladigan qiymatlari haqiqiy sonlar bo'ladi.

Odatda, o'zgaruvchi miqdorning qabul qiladigan qiymatlari to'plami (haqiqiy sonlardan iborat to'plam) ma'lum bo'lsa, o'zgaruvchi berilgan hisoblanadi.

Masalan, o'zgaruvchi sifatida aylana radiusi olinadigan bo'lsa, bu o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlari to'plami barcha musbat sonlardan iborat to'plam bo'ladi.

Ba'zan, x o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlari to'plami $E(E\subset R)$ bo'lsin deyish o'rniga x o'zgaruvchi $E\subset R$ to'plamda o'zgaradi deymiz.

Matematikada bir qancha o'zgaruvchilar va ular orasidagi bog'lanishlar o'rganiladi.

1.1. Funksiya ta'rifi. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari (to'plamlari)

Aytaylik, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda $E(E\subset R)$ hamda $F(F\subset R)$ haqiqiy sonlar to'plamlarida o'zgarsin: $x\in E$, $y\in F$.

1-ta'rif. *Agar E to'plamdan olingan har bir x songa biror f qoidaga (yoki qonunga) ko'ra F to'plamning bitta tayin y soni mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda funksiya aniqlangan deyiladi.*

Bunda:

E to'plam funksiyaning aniqlanish (berilish) sohasi,

$\{y=f(x): x\in E\}=F$ to'plam funksiyaning o'zgarish sohasi,

x – erkli o'zgaruvchi, funksiya argumenti,

y – erksiz o'zgaruvchi, x ning funksiyasi deyiladi.

Ta'rifdagi x,y va f larni birlashtirib, y o'zgaruvchi x ning funksiyasi deyilishi

$$y=f(x) \tag{1}$$

kabi yoziladi va "igrek teng ef iks" deb o'qiladi.

Ravshanki, har bir x ga boshqa qoidaga ko'ra bitta tayin y mos qo'yiladigan bo'lsa, unda boshqa funksiya hosil bo'ladi. U, masalan, $y=\varphi(x)$ kabi yozilishi mumkin.

Eslatma. *Funksiya ta'rifida E va F to'plamlarning berilishi aytilgan bo'lsa-da, amaliyotda bu to'plamlar (1) munosabatdan foydalanib topiladi. Jumladan,*

$$y=f(x)$$

funksiyaning aniqlanish sohasi (to'plami) argument x ning shunday qiymatlaridan iborat to'plam bo'lishi kerakki, bu to'plamdan olingan har bir x ning qiymatida $y=f(x)$ munosabat ma'noga ega bo'lsin. Masalan,

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

da, uning ma'noga ega bo'lishi uchun $4-x^2\geq 0$ bo'lishi kerak. Keyingi tengsizlikni yechamiz:

$$4-x^2\geq 0,\ x^2-4\leq 0,\ (x-2)(x+2)\leq 0, -2\leq x\leq 2$$

Demak, qaralayotgan funksiyaning aniqlanish sohasi (to'plam) $E=[-2,2]$ bo'ladi. Bu funksiyaning o'zgarish sohasi esa $F=[0,2]$ bo'ladi.

Funksiya ta'rifidagi mos qo'yuvchi qoida turlicha usul – analitik, jadval, grafik va boshqa usullarda bo'lishi mumkin.

a) Analitik usul. Bu usulda x o'zgaruvchining har bir qiymatiga ko'ra unga mos keladigan y ning qiymati x ustida analitik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va boshqa amallar) bajarilishi natijasida topiladi, ya'ni x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar bilan ifodalanadi.

Masalan,

$$y=x^2+x+1,\quad y=\frac{1}{x^2-1},\quad y=\lg x.$$

Funksiyaning analitik usulda berilishida funksiya bir nechta formula yordamida ham aniqlanishi mumkin. Masalan,

$$y=\begin{cases} x+1, & agar \quad x\geq 0 \\ x^2+1, & agar \quad x<0. \end{cases}$$

b) Jadval usuli. Bu usulda x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval ko'rinishida bo'ladi. Bu holda funksiya argumenti x ning bir nechta tayin

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

qiymatlariga mos keladigan y ning qiymatlari

$$y_1, y_2, ..., y_n$$

jadval tarzida ifodalanadi.

Funksiyaning jadval usulida berilishidan turli kuzatishlar va tajribalarda keng foydalaniladi.

c) Grafik usul. Bu usulda x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishni egri chiziq (grafik) amalga oshiradi. Funksiyaning grafik usulidan ko'pincha tajriba bilan bog'liq ishlarda, ayniqsa, o'zi yozar apparatlardan foydalanishda qo'llaniladi. Bunda, bog'lanishni ifodalovchi egri chiziqdan x ning kerakli qiymatidagi funksiya qiymati ko'chirib olinadi.

1.2. Funksiya grafigi

Faraz qilaylik,

$$y = f(x)$$

funksiya E to'plamda aniqlangan bo'lsin. E to'plamga tegishli bo'lgan biror x_0 nuqtani olaylik. Ravshanki bu nuqtaga y o'zgaruvchining biror qiymati mos keladi. Uni y_0 deylik. Bu y_0 son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi xususiy qiymati deyiladi va u $f(x_0) = y_0$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$f(x) = y = 5x^2 - 3$$

funksiyaning $x = 1$ nuqtadagi xususiy qiymati $f(1) = 5 \cdot 1 - 3 = 2$ bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, $x = x_0$ va $y = f(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $(y_0 = f(x_0))$ sonlar birgalikda (x_0, y_0) juftlikni tashkil etib, u tekislikda nuqtani tasvirlaydi.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini olamiz.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, argument x ning E to'plamdan olingan har bir qiymatiga funksiyaning mos qiymati y $(f(x) = y)$ bo'lsin. Natijada, (x, y) juftliklardan tuzilgan ushbu

$$\Gamma = \{(x, y) : x \in E, y = f(x)\} \qquad (2)$$

to'plam hosil bo'ladi.

Odatda, (2) to'plam (tekislik nuqtalarining geometrik o'rni) $y = f(x)$ funksiya grafigi deyiladi.

Funksiya grafigining tasviri uning xususiyatlarini chuqurroq tasavvur etishga yordam beradi.

Dastavval, berilgan funksiya grafigini "nuqtalar" bo'yicha tasvirlashni keltiramiz. Keyinchalik funksiya grafigini batafsil o'rganamiz.

$y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi E to'plamdan x argumentning bir nechta bir-biriga yaqinroq bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarini olib, bu nuqtalardagi funksiya qiymatlarini topamiz.

Aytaylik, ular $y_1, y_2, ..., y_n$ bo'lsin. $(y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n))$.

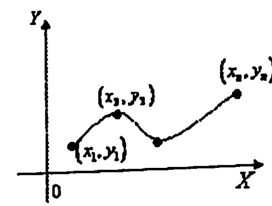
Natijada,

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

jadval hosil bo'ladi. Bu jadvaldan foydalanib

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... (x_n, y_n)$$

juftliklarni tuzamiz. So'ng, bu juftliklarni tekislikda tasvirlaymiz (1-chizma).



1-chizma

Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirishda hosil bo'lgan chiziq $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (taxminiy grafigi) bo'ladi.

1.3. Chegaralangan va monoton funksiyalar

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to'plamda $(E \subset R)$ aniqlangan bo'lsin.

2-ta'rif. *Agar shunday o'zgarmas M son (m son) topilsaki, $\forall x \in E$ uchun*

$$f(x) \le M \qquad (f(x) \ge m)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya E to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, u E to'plamda chegaralangan deyiladi.

Ravshanki, agar $\forall x \in E$ uchun $|f(x)| \le p$ ($p-$ musbat son) tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda chegaralangan bo'ladi.

1-misol. *Ushbu*

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

funksiyaning $E=[0,+\infty)$ *to'plamda chegaralangan bo'lishini isbotlang.*

◀Ravshanki, $\forall x \in E$ uchun $f(x)=\frac{x}{1+x^2}\ge 0$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiya E da quyidan chegaralangan.

Ma'lumki, ixtiyoriy x uchun

$$0 \le (x-1)^2 = x^2-2x+1,$$

$$2x \le 1+x^2,$$

$$\frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2}$$

bo'ladi. Demak, $\forall x \in E$ uchun $f(x)=\frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2}$.

Bu esa berilgan funksiyaning E da yuqoridan chegaralanganligini bildiradi.

Shunday qilib, berilgan funksiya $E=[0,+\infty)$ da ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan, binobarin, funksiya E da chegaralangan bo'ladi.▶

Eslatma. *Chegaralangan funksiyaning grafigi* OX *o'qiga parallel bo'lgan ikki to'g'ri chiziq orasida joylashgan bo'ladi.*

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. *Agar funksiya argumenti* x *ning ixtiyoriy* x_1 *va* x_2 *qiymatlari uchun* $x_1 < x_2$ *bo'lganda:*

$$f(x_1) \le f(x_2) \qquad (f(x_1) < f(x_2))$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya* E *to'plamda o'suvchi (qat'iy o'suvchi) deyiladi.*

4-ta'rif. *Agar funksiya argumenti* x *ning ixtiyoriy* x_1 *va* x_2 *qiymatlari uchun* $x_1 < x_2$ *bo'lganda*

$$f(x_1) \ge f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2))$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya* E *to'plamda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.*

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan monoton funksiyalar deyiladi.

2-misol. *Ushbu* $f(x)=x^3$ *funksiyani monotonlikka tekshiring.*

◀Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E=(-\infty,+\infty)$ bo'ladi. E to'plamdan ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ bo'lsin deylik. So'ng ushbu $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3$ ayirmani qaraymiz. Uni quyidagicha yozamiz:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)=\left(x_2^2+2\cdot\frac{1}{2}x_2x_1+x_1^2+\frac{1}{4}x_1^2-\frac{1}{4}x_1^2\right)\cdot$$

$$\cdot(x_2-x_1)=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right].$$

Ravshanki, $x_2-x_1>0$, $\quad \left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2>0$

Demak, $f(x_2)-f(x_1)>0$, ya'ni $f(x_2)>f(x_1)$ bo'ladi. Shunday qilib, berilgan funksiya uchun ixtiyoriy $x_1 \in E$, $x_2 \in E$ va $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)<f(x_2)$ bo'lar ekan. Bu esa $f(x)=x^3$ funksiyaning $E=(-\infty,+\infty)$ da qat'iy o'suvchi ekanini bildiradi.▶

Sodda tasdiqlarni keltiramiz:

a) *agar* $f(x)$ *funksiya* E to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, C *o'zgarmas son bo'lsa, u holda* $f(x)+C$ *funksiya ham* E *to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi;*

b) *agar* $f(x)$ *funksiya* E *to'plamda o'suvchi bo'lib,* $c>0$ *bo'lsa, u holda* $c\cdot f(x)$ *funksiya* E *da o'suvchi,* $c<0$ *bo'lsa,* $c\cdot f(x)$ *funksiya* E *to'plamda kamayuvchi bo'ladi;*

d) *agar* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar* E *to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, u holda* $f(x)+g(x)$ *funksiya* E *da o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.*

Masalan, biz yuqorida $f(x)=x^3$ funksiyaning $E=(-\infty,+\infty)$ da o'suvchi ekanini isbotlagan edik. Keltirilgan tasdiqqa ko'ra, $\varphi(x)=-x^3$ funksiya $E=(-\infty,+\infty)$ da kamayuvchi bo'ladi.

1.4 Juft, toq va davriy funksiyalar

1°. Juft va toq funksiyalar

Aytaylik, E koordinata boshi O nuqtaga nisbatan simmetrik to'plam, ya'ni $\forall x \in E$ uchun, $-x \in E$ bo'lsin (masalan, $[-2,2]$, $(-4,4)$ – simmetrik to'plamlar bo'ladi).

Bu E to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

5-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $x \in E$ uchun*

$$f(-x)=f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ juft funksiya,

$$f(-x)=-f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ toq funksiya deyiladi.

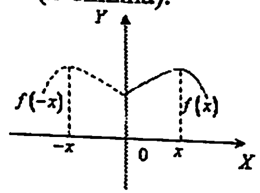
Masalan, $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$ funksiyalar juft funksiyalar bo'ladi, chunki

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x), \quad g(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=g(x).$$

Ushbu $\varphi(x)=x^3+x$ funksiya esa toq funksiya bo'ladi, chunki

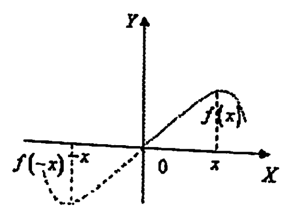
$$\varphi(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-(x^3+x)=-\varphi(x).$$

Juft funksiyaning grafigi OY o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shuning uchun funksiya grafigini $x \geq 0$ bo'lgan hol uchun chizish yetarli bo'ladi. Uni OY o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish bilan berilgan funksiyaning grafigi topiladi (2-chizma).



2-chizma

Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shuning uchun funksiya grafigini $x \geq 0$ bo'lgan hol uchun chizish yetarli bo'ladi. Uni OY o'qi atrofida o'ng tomonga $180°$ ga burish bilan funksiya grafigi topiladi (3-chizma).



3-chizma

2°. Davriy funksiyalar

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. *Agar shunday o'zgarmas T son ($T \neq 0$) topilsaki, ixtiyoriy*

$$x \in E \text{ uchun } \begin{matrix} 1) x-T \in E, \quad x+T \in E, \\ 2) f(x)=f(x+T)=f(x-T) \end{matrix}$$

shartlar bajarilsa, $f(x)$ davriy funksiya, T son esa uning davri deyiladi.

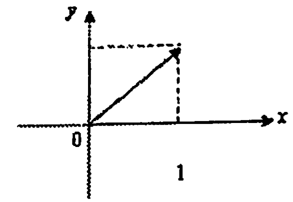
Agar T son ($T \neq 0$) $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda $n \cdot T$ ($n=\pm1,\pm2,\ldots$) sonlar ham funksiyaning davri bo'ladi.

Demak, davriy funksiyaning davrlari ko'p bo'ladi. Ular ichida eng kichik musbat bo'lgani (agar u mavjud bo'lsa) funksiyaning asosiy davri deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri T ($T \neq 0$) bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi, uzunligi T ga teng bo'lgan oraliqdagi (masalan, $[a, a+T]$) grafigini davriy davom ettirish bilan topiladi.

Ma'lumki, x haqiqiy sonning butun qismi (x dan katta bo'lmagan eng katta butun son) x ning funksiyasi bo'lib, u $[x]$ kabi belgilanadi.

Endi $f(x)=x-[x]$ funksiyani olaylik. Ravshanki, bu funksiya x ning kasr qismini ifodalaydi va $[0,1]$ dagi grafigi quyidagicha bo'ladi (4-chizma):



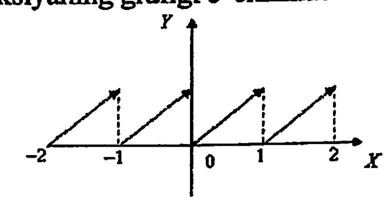
4-chizma

Qaralayotgan funksiya davriy funksiya bo'lib, uning davri $T=1$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham,

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x].$$

Bu davriy funksiyaning grafigi 5-chizmada tasvirlangan.



5-chizma

1.5. Murakkab va teskari funksiyalar

1°. Murakkab funksiya

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lsin. Har bir $x\in E$ uchun berilgan funksiyaning qiymati y ni topib, bunday qiymatlardan

$$F(f)=\{y=f(x):x\in E\}$$

to'plamni hosil qilamiz. Ravshanki, bu funksiya qiymatlari to'plami bo'ladi.

Shu $F(f)$ to'plamda, o'z navbatida, $U=\varphi(y)$ funksiya berilgan deylik. Natijada, E to'plamdan olingan har bir x ga bitta y son ($f-$ qoidaga ko'ra) va $F(f)$ to'plamdagi bunday y songa bitta U son ($\varphi-$ qoidaga ko'ra) mos qo'yilib, E to'plamda funksiya aniqlanadi. U murakkab funksiya deyilib,

$$U=\varphi(f(x)) \qquad (3)$$

kabi belgilanadi.

(3) murakkab funksiya $y=f(x)$ hamda $U=\varphi(y)$ funksiyalar yordamida hosil qilinadi.

Masalan,

$$U=\sqrt{x^2+1}$$

murakkab funksiya bo'lib, bu funksiya

$$U=\sqrt{y}, \qquad y=x^2+1 \qquad (0.1)$$

funksiyalar yordamida hosil bo'lgan.

2°. Teskari funksiya

$y=f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, ixtiyoriy $x_1\in E$, $x_2\in E$ va $x_1\neq x_2$ uchun $f(x_1)\neq f(x_2)$ bo'lsin. U holda berilgan funksiyaning qiymatlari to'plami $F(f)$ dan olingan har bir y ga E to'plamda shunday $x\in E$ nuqta topiladiki, $f(x)=y$ bo'ladi.

$F(f)$ to'plamdan olingan har bir y ga E to'plamda shunday $x\in E$ mos qo'yilsaki, $f(x)=y$ bo'lsa, unda $F(f)$ to'plamda aniqlangan funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiya berilgan $y=f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya deyilib, uni $x=f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

Demak, $x=f^{-1}(y)$ shunday funksiyaki,

$$f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x))=x$$

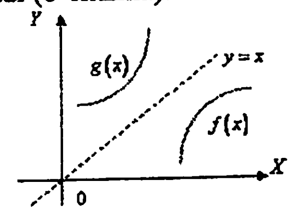
bo'ladi.

3-misol. *Ushbu $y=f(x)=2x+1$ funksiyani $E=[0,1]$ da qaraylik. Bu funksiyaga teskari funksiyani toping.*

◀Bu funksiyaning qiymatlari to'plami $F(f)=[1,3]$ bo'ladi. $[1,3]$ da aniqlangan $x=f^{-1}(y)=\frac{y-1}{2}$ funksiya berilgan $y=f(x)=2x+1$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ladi, chunki $f^{-1}(y)=f^{-1}(2x+1)=\frac{2x+1-1}{2}=x$.▶

Eslatma. *Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiyada x – argument, y esa uning funksiyasi. Bu funksiyaga nisbatan teskari funksiya $x=f^{-1}(y)$ da y-argument, x esa uning funksiyasi. Demak, teskari funksiya grafigini yasashda abssissa o'qi sifatida OY o'qni, ordinata o'qi sifatida OX o'qni olish kerak bo'ladi. Bu hol ma'lum noqulayliklar tug'diradi. Qulaylik maqsadida teskari funksiyaning argumentini ham x, uning funksiyasini y kabi belgilanib, quyidagicha $y=g(x)$ kabi yoziladi.*

$y=f(x)$ ga nisbatan teskari bo'lgan $y=g(x)$ funksiya grafigi $y=f(x)$ funksiya grafigi $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik ko'chirishdan hosil bo'ladi (6-chizma).



6-chizma

Mashqlar

1. Ushbu $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}$ funksiyaning $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$ nuqtalardagi qiymatlarini toping.

2. Ushbu:

   a) $y=\frac{3x-1}{x^2-3x+2}$, b) $y=\frac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$

funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping.

3. Quyidagi funksiyalarni juft yoki toqlikka tekshiring:

   a) $f(x)=x^2-\cos x$, b) $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

4. Quyidagi funksiyalarni davriylikka tekshiring, davriy bo'lsa, eng kichik musbat davrini toping.

   a) $f(x)=\sin^2 x$, b) $f(x)=\cos 4x$.

2-§. Sodda funksiyalar va ularning grafiklari

Sodda funksiyalar va ularning grafiklari o'quvchiga umumiy holda ma'lum bo'lsa-da, bu funksiyalarning oliy matematikada muhimligini e'tiborga olib, ular haqidagi ma'lumotlarni qisqacha bayon etamiz.

2.1. Butun ratsional funksiya

Ushbu $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ (1)
ko'rinishdagi funksiya butun ratsional funksiya deyiladi, bunda $a_0, a_1, \ldots a_n$ o'zgarmas haqiqiy sonlar, n esa natural son. Bu funksiyaning aniqlanish to'plami (sohasi) $E=R=(-\infty,+\infty)$ bo'ladi.

Butun ratsional funksiyaning ba'zi muhim xususiy hollarini qaraymiz.

1°. Chiziqli funksiya. Bu funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y=ax+b, \qquad (2)$$

bunda a va b o'zgarmas sonlar. Chiziqli funksiya $E=(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan bo'lib: $a>o$ bo'lganda o'suvchi, $a<o$ bo'lganda kamayuvchi funksiya bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $a>o$ bo'lib, ixtiyoriy $x_1, x_2\in E$, $x_1<x_2$ uchun

$$f(x_1)-f(x_2)=ax_1+b-ax_2-b=a(x_1-x_2)<0$$

bo'ladi. Bundan $f(x_1)<f(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi. Xuddi shunga o'xshash $a<o$ bo'lganda chiziqli funksiyaning kamayuvchi bo'lishi ko'rsatiladi.

Biz 7-ma'ruzada to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini bayon etgan edi. Demak, chiziqli funksiyaning grafigi burchak koeffitsiyenti a ga $(a=tg\alpha)$ va OY o'qidan b kesma ajratuvchi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

2°. Kvadrat funksiya. Bu funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y=ax^2+bx+c \qquad (3)$$

bunda a, b, c o'zgarmas sonlar. Kvadrat funksiya $E=(-\infty,+\infty)$ to'plamda aniqlangan.

Xususan, $a=1$, $b=c=0$ bo'lganda

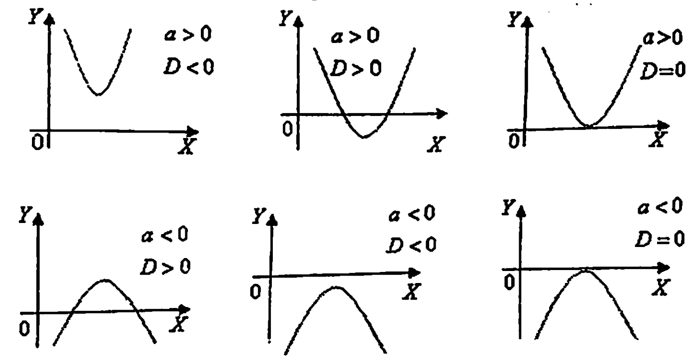
$$y=x^2$$

funksiyaga ega bo'lamiz. Bilz 8-ma'ruzada

$$y^2=2px$$

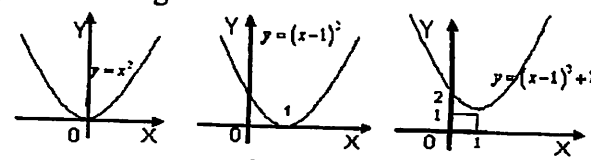
parabola va uning tekislikdagi tasvirini ko'rgan edik. Xuddi shunga o'xshash $y=x^2$ funksiya grafigi paraboladan iborat bo'lishini aniqlash qiyin emas.

Umuman, $y=ax^2+bx+c$ funksiyaning grafigi parabola bo'lib, uning tekislikdagi tasviri a hamda $D=b^2-4ac$ (kvadrat uchhadning diskriminanti) larning ishoralariga bog'liq bo'ladi (1-chizma):



1-chizma

Quyida ushbu $y=x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1$ funksiya grafigini chizish jarayoni ko'rsatilgan:



2-chizma

2.2. Kasr ratsional funksiya

Ushbu $y=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$, ko'rinishidagi funksiya kasr ratsional funksiya deyiladi, bunda $a_0, a_1, \ldots, a_n$ hamda $b_0, b_1, \ldots, b_m$ o'zgarmas haqiqiy sonlar, n va m esa natural sonlar. Bu funksiya x o'zgaruvchini kasr maxrajini nolga aylantiradigan qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlarida aniqlangan, ya'ni ushbu

$$E=(-\infty,+\infty)\setminus\{x: b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m=0\}$$

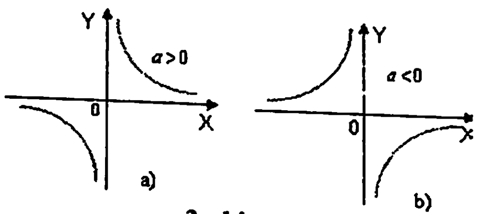
to'plamda aniqlangan.

Kasr ratsional funksiyaning ba'zi muhim xususiy hollarini qaraymiz

1°. Teskari proporsional bog‘lanish. Bu funksiya quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$y=\frac{a}{x},$$

bunda a o‘zgarmas son $(a\neq 0)$. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ bo‘ladi. Qaralayotgan funksiyaning grafigi a ga bog‘liq bo‘lib, $a>o$ bo‘lganda 3_a – chizmada tasvirlangan egri chiziq (teng yonli giperbola), $a<o$ bo‘lganda esa 3_b– chizmada tasvirlangan egri chiziq bo‘ladi:



3-chizma

Eslatma. *Yuqoridagi* $y=\frac{a}{x}$ *funksiyaning grafigiga ko‘ra* $y=\frac{a}{x+b}$ *funksiyaning grafigini chizish mumkin.*

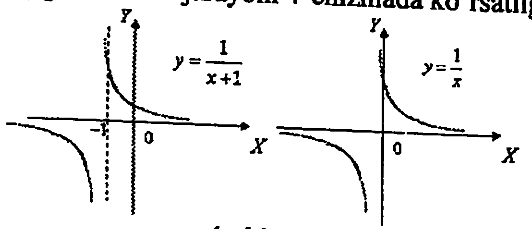
Masalan,

$$y=\frac{1}{x}$$

funksiyaning grafigiga ko‘ra

$$y=\frac{1}{x+1}$$

funksiyaning grafigini chizish jarayoni 4-chizmada ko‘rsatilgan



4-chizma

2°. Kasr chiziqli funksiya. Bu funksiya quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},$$

bunda a,b,c,d – o‘zgarmas haqiqiy sonlar. $(c\neq 0)$. Kasr chiziqli funksiya $E=(-\infty,-\frac{d}{c})U(-\frac{d}{c},+\infty)$ to‘plamda aniqlangan.

Bu funksiyaning grafigi $y=\frac{a}{x}$ funksiya grafigi OX va OY o‘qlari bo‘yicha parallel ko‘chirish bilan yasaladi.

Aytaylik, $a\neq 0$ bo‘lsin. Bu holda

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a(x+\frac{b}{a})}{c(x+\frac{d}{c})}=\frac{a}{c}\cdot\frac{(x+\frac{d}{c})+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

bo‘lib, $\frac{d}{c}=\alpha,\quad \frac{a}{c}=\beta,\quad \frac{bc-ad}{c^2}=k$ deyilsa, unda

$$y=\frac{k}{x+\alpha}+\beta$$

bo‘ladi. Agar $a=0$ bo‘lsa, u holda

$$y=\frac{k}{x+\alpha}$$

bo‘ladi.

Misol. *Ushbu*

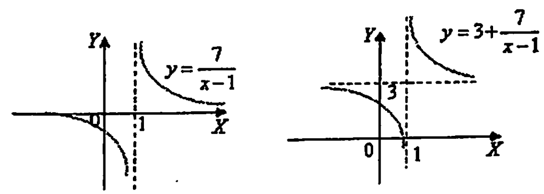
$$y=\frac{3x+4}{x-1}$$

funksiya grafigini chizing.

◀Ravshanki, bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E=(-\infty,1)U(1,+\infty)$ bo‘ladi. Berilgan funksiyani quyidagicha yozib olamiz:

$$y=\frac{3x+4}{x-1}=\frac{x+\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}(x-1)}=\frac{x-1+\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}(x-1)}=3+\frac{7}{x-1}.$$

Shunday qilib, berilgan funksiyaning grafigi $\frac{7}{x-1}$ funksiya grafigini ordinata o‘qi bo‘yicha yuqoriga 3 birlikka ko‘tarish bilan topiladi (5-chizma).▶

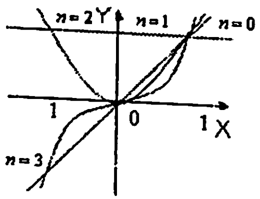


5-chizma

3°. Darajali funksiya. Ushbu $y=x^n$

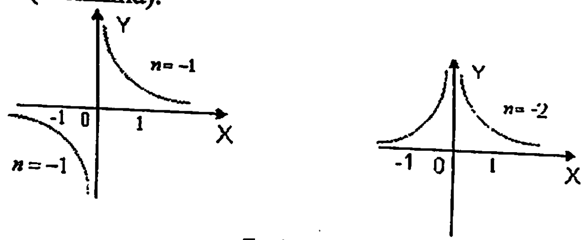
ko'rinishdagi funksiya darajali funksiya deyiladi, bunda n – butun son. Bu funksiya $n \geq 0$ bo'lganda $E=(-\infty,+\infty)$ to'plamda, $n<0$ bo'lganda $E=(-\infty,0)U(0,+\infty)$ to'plamda aniqlangan.

Agar $n \geq 0$ bo'lsa, masalan, $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$ bo'lsa, darajali funksiya grafigi $y=1$, $y=x$ to'g'ri chiziqlar, $y=x^2$ parabola hamda $y=x^3$ egri chiziq (kubik parabola) lardan iborat bo'ladi (6-chizma).



6-chizma

Agar $n<0$ bo'lsa, masalan, $n=-1$, $n=-2$ bo'lsa, darajali funksiya grafigi $y=\frac{1}{x}$ giperbola $y=\frac{1}{x^2}$ egri chiziq (ikkinchi tartibli giperbola)lardan iborat bo'ladi (7-chizma).



7-chizma

Eslatma. *Agar darajali funksiyada daraja ko'rsatkich* $\frac{1}{n}$ *ga* $(n \in \mathrm{N})$ *teng bo'lsa, bu holda funksiya ushbu* $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ *ko'rinishga ega bo'ladi. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi* n *– juft son bo'lganda* $E=[0,+\infty)$ *to'plam,* n*– toq son bo'lganda* $E=(-\infty,+\infty)$ *to'plam bo'ladi. Ravshanki,*

$$x=y^n.$$

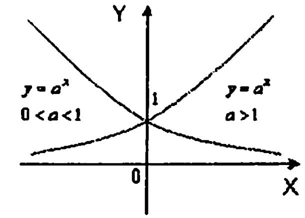
Demak, $y=\sqrt[n]{x}$ funksiya darajali funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ladi. Binobarin, qaralayotgan funksiyaning grafigini darajali funksiya grafigiga ko'ra topish mumkin.

4°. Ko'rsatkichli funksiya. Ushbu

$$y=a^x$$

ko'rinishdagi funksiya ko'rsatkichli funksiya deyiladi, bunda $a>o$ va $a \neq 1$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E=(-\infty,+\infty)$ bo'lib, $a>1$ bo'lganda funksiya o'suvchi, $0<a<1$ bo'lganda esa kamayuvchi bo'ladi. Ko'rsatkichli funksiyaning qiymati har doim musbat, grafigi OX o'qidan yuqorida joylashgan (8-chizma).



8-chizma

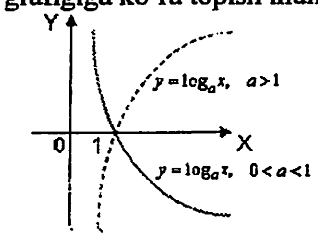
5°. Logarifmik funksiya. Ushbu

$$y=\log_a x$$

ko'rinishdagi funksiya logarifmik funksiya deyiladi, bunda $a>o$, $a \neq 1$.

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E=(0,+\infty)$ to'plam bo'ladi. Ravshanki $x=a^y$.

Demak, logarifmik funksiya ko'rsatkichli funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ladi. Binobarin, logarifmik funksiyaning grafigini ko'rsatkichli fulnksiya grafigiga ko'ra topish mumkin (9-chizma).



9-chizma

2.3. Trigonometrik funksiyalar

Trigonometrik funksiya

$$\sin\alpha, \quad \cos\alpha, \quad tg\alpha, \quad ctg\alpha$$

lar haqidagi dastlabki ma'lumotlar o'quvchiga ma'lum. Unda argument α graduslarda yoki radianlarda hisoblangan burchak deyilgan. Oliy matematikada bu funksiyalarning argumenti x ni son deyilib, y x radianga teng deb qaraladi:

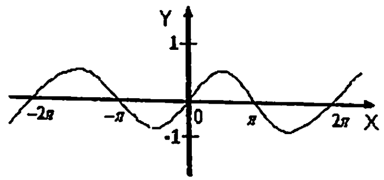
$$y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad y=tgx, \quad y=ctgx.$$

1) $y=\sin x$ **funksiyasi.**

Bu funksiya $E=(-\infty,+\infty)$ to'plamda aniqlangan, qiymatlari to'plami esa $F(y)=[-1,1]$ bo'ladi:

$$-1\le \sin x\le 1, \qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

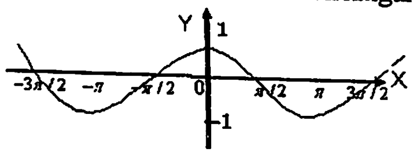
$y=\sin x$ toq, $T=2\pi$ davrli funksiya bo'lib, grafigi 10-chizmada tasvirlangan.



10-chizma

2) $y=\cos x$ **funksiyasi.**

Bu funksiya $E=(-\infty,+\infty)$ to'plamda aniqlangan, qiymatlari to'plami esa $F(y)=[-1,1]$ bo'ladi: $-1\le\cos x\le 1,\quad x\in(-\infty,+\infty)$. $y=\cos x$ juft, $T=2\pi$ davrli funksiya bo'lib, grafigi 11-chizmada tasvirlangan.



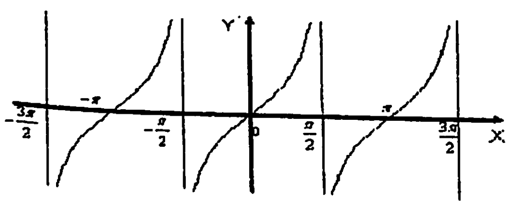
11-chizma

3) $y=tgx$ **funksiyasi.**

Bu funksiya x ning ushbu $x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ $\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlarida, ya'ni

$$E=(-\infty,+\infty)\setminus\left\{x:x=(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots\right\}$$

to'plamda aniqlangan. $y=tgx$ toq, $T=\pi$ davrli funksiya bo'lib, grafigi 12–chizmada tasvirlangan.

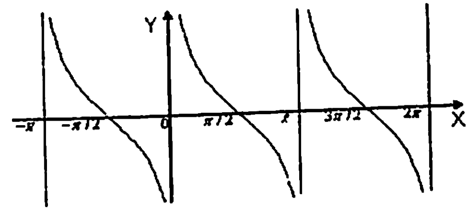


12-chizma

4) $y=ctgx$ **funksiyasi.**

Bu funksiya x ning ushbu $x=k\pi$ $\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlarida, ya'ni $E=(-\infty,+\infty)\setminus\{x:x=k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ to'plamda aniqlangan.

$y=ctgx$ toq, $T=\pi$ davrli funksiya bo'lib, grafigi 13-chizmada tasvirlangan.



13-chizma

2.4. Teskari trigonometrik funksiyalar

Ma'lumki, $y=\sin x$ funksiya uchun $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]=X$ bo'lsa, $y\in[-1,1]=F$ bo'lib, X va F to'plamlar o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi. $y=\sin x$ funksiya nisbatan teskari bo'lgan funksiya $y=\arcsin x$ kabi yoziladi. Bu funksiya $[-1,1]$ da aniqlangan bo'lib, o'zgarish sohasi $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash $y=\cos x,\ y=tgx,\ y=ctgx$ funksiyalarga nisbatan teskari bo'lgan funksiyalar mos ravishda $y=\arccos x,\ y=arctgx,\ y=arcctgx$ kabi belgilanadi.
Odatda, bu funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deyiladi.

Endi teskari trigonometrik funksiyalarning xossalarini keltiramiz.

$y=\arcsin x$ **funksiyaning xossalari:**

1) aniqlanish sohasi $[-1,1]$,
2) o'zgarish sohasi $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,
3) toq funksiya $\arcsin(-x)=-\arcsin x$,
4) monoton o'suvchi.

$y=\arccos x$ **funksiyaning xossalari:**

1) aniqlanish sohasi $[-1,1]$,
2) o'zgarish sohasi $[0,\pi]$,

3) quyidagi munosabat o'rinli $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,
4) monoton kamayuvchi.

$y = \operatorname{arctg} x$ **funksiyaning xossalari:**
1) aniqlanish sohasi $(-\infty, +\infty)$,
2) o'zgarish sohasi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
3) toq funksiya $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$,
4) monoton o'suvchi.

$y = \operatorname{arcctg} x$ **funksiyaning xossalari:**
1) aniqlanish sohasi $(-\infty, +\infty)$,
2) o'zgarish sohasi $[0, \pi]$,
3) quyidagi munosabat o'rinli $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$,
4) monoton kamayuvchi

Mashqlar

Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang.

1. $y = 3x^2 - 6x - 17$
2. $y = -2x^2 - 4x + 4$
3. $y = \dfrac{2x+5}{x-2}$
4. $y = 2^{1-x^2}$
5. $y = \arcsin(3x-1)$

3-§. Natural argumentli funksiya (sonlar ketma-ketligi) va uning limiti

3.1. "Sonlar ketma-ketligi" tushunchasi

Aytaylik, biror qoidaga ko'ra har bir natural n songa $(n \in N)$ bitta x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsin $(f : n \to x_n)$. Ravshanki, bu holda argumenti n bo'lgan funksiyaga ega bo'lamiz. Bunday funksiya natural argumentli funksiya deyiladi:

$$x_n = f(n).$$

Bu funksiya qiymatlaridan iborat ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots \qquad (1)$$

to'plam sonlar ketma-ketligi deyiladi va $\{x_n\}$ kabi belgilanadi . $x_1, x_2, \dots$ sonlar (1) ketma-ketlikning hadlari, x_n esa (1) ketma-ketlikning umumiy yoki n-hadi deyiladi.

Masalan, har bir natural n songa $\frac{1}{n}$ sonni mos qo'yish bilan $(n \to \frac{1}{n})$ ushbu

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

ketma-ketlik hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlikning umumiy hadi $x_n = \frac{1}{n}$ bo'ladi.

Odatda, ketma-ketlik, uning umumiy hadi orqali belgilanadi.

Masalan, 1) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$; $\dfrac{2}{1}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dots, \dfrac{n+1}{n}, \dots$,

2) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dots$,

3) $x_n = aq^{n-1}$; $a, aq, aq^2, \dots aq^{n-1}, \dots$,

4) $x_n = 5$; $5, 5, 5, \dots 5, \dots$,

5) $x_n = (-1)^{n+1}$; $1, -1, 1, -1, \dots (-1)^{n+1}, \dots$, lar ketma-ketliklar bo'ladi.

Ketma-ketlikning har bir x_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ hadi sonlar o'qida bitta nuqtani tasvirlaydi.

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots \qquad (1)$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar (1) ketma-ketlikning hadlari uchun

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_n \le \dots \qquad (x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots),$$

ya'ni

$$\forall n\in N \quad uchun \quad x_n\le x_{n+1} \qquad (\forall n\in N \quad uchun \quad x_n<x_{n+1})$$

bo'lsa, (1) ketma-ketlik o'suvchi (qat'iy o'suvchi) deyiladi.

Agar (1) ketma-ketlikning hadlari uchun

$$x_1\ge x_2\ge x_3\ge\ldots\ge x_n\ge\ldots \qquad (x_1>x_2>x_3>\ldots>x_n>\ldots),$$

ya'ni

$$\forall n\in N \quad uchun \quad x_n\ge x_{n+1} \qquad (\forall n\in N \quad uchun \quad x_n>x_{n+1})$$

bo'lsa, (1) ketma-ketlik ***kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi)*** deyiladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi ketma-ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma-ketliklar deyiladi.

1-misol. *Ushbu*

$$x_n=\frac{n}{n+1}: \quad \frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots$$

ketma-ketlik monotonlikka tekshirilsin.

◀Berilgan ketma-ketlikning

$$x_n=\frac{n}{n+1}, \qquad x_{n+1}=\frac{n+1}{n+1+1}=\frac{n+1}{n+2}$$

hadlarini olamiz. Bu hadlar uchun

$$x_{n+1}-x_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

bo'ladi. Ma'lumki, $\forall n\in N$ uchun

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$$

bo'ladi. Demak,

$$x_{n+1}-x_n>0$$

bo'lib, undan $\forall n\in N$ uchun

$$x_n<x_{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Berilgan ketma-ketlik qat'iy o'suvchi.▶

Agar (1) ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta o'zgarmas M sonidan kichik yoki teng, ya'ni

$$\forall n\in N \text{ uchun } x_n\le M$$

bo'lsa, (1) ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan deyiladi.

Agar (1) ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta o'zgarmas m sonidan katta yoki teng, ya'ni

$$\forall n\in N \text{ uchun } x_n\ge m$$

bo'lsa, (1) ketma-ketlik quyidan chegaralangan deyiladi.

Agar (1) ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, (1) ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Masalan,

1) $x_n=\dfrac{n^2+1}{n^2}$: $2,\dfrac{5}{4},\dfrac{10}{9},\ldots,\dfrac{n^2+1}{n^2},\ldots$

ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'ladi, chunki

$$\forall n\in N \text{ uchun } x_n=\frac{n^2+1}{n^2}=1+\frac{1}{n^2}\le 2$$

2) $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$: $1,-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{16},\ldots,\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2},\ldots$

ketma-ketlik quyidan chegaralangan bo'ladi, chunki

$\forall n\in N$ uchun $x_n\ge-\dfrac{1}{4}$,

3) $x_n=\dfrac{n^2-1}{n^2}$: $0,\dfrac{3}{4},\dfrac{8}{9},\ldots,\dfrac{n^2-1}{n^2},\ldots$

ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi, chunki

$$\forall n\in N \text{ uchun } 0\le x_n<1,$$

bo'ladi.

3.2. Sonlar ketma-ketligining limiti

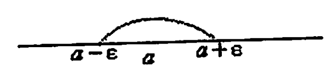
Biror $\{x_n\}$:

$$x_1,x_2,x_3,\ldots x_n,\ldots \tag{1}$$

ketma-ketlik va a soni berilgan bo'lsin. Ushbu

$$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=U_\varepsilon(a)$$

interval (sonlar to'plami) a nuqtaning atrofi (ε-atrofi) deyiladi, bunda ε - ixtiyoriy musbat son (1-chizma)



1-chizma

1-ta'rif. *Agar a nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(a)$ atrofi olinganda ham (1) ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi va*

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \qquad yoki \qquad n\to\infty \quad da \quad x_n\to a$$

kabi yoziladi.

Ta'rifdagi "biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadidan" iborasi "shunday natural n_0 topilib, $\forall n>n_0$ uchun" deb aytilishini bildiradi.

Demak, $\forall n>n_0$ uchun $x_n\in U_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ bo'lishi bunday hadlarning ushbu

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon, \quad -\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$$

ya'ni

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishini keltirib chiqaradi.

Unda yuqorida keltirilgan ta'rifni quyidagicha ham aytsa bo'ladi: agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilib, barcha $n>n_0$ uchun $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a son x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi.

2-misol: *Ushbu*

$$x_n=\frac{1}{n}:$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$$

ketma-ketlikning limiti 0 bo'lishini isbotlang.

◀Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olamiz. Ravshanki berilgan ketma-ketlikning limiti 0 bo'lishi uchun

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \quad (2)$$

tengsizlikning n ning biror qiymatidan boshlab o'rinli bo'lishini ko'rsatish yetarli. Keyingi

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \quad (3)$$

tengsizlikni yechib,

$$n>\frac{1}{\varepsilon}$$

bo'lishini topamiz. Agar n_0 sifatida $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($[a]$ – a soninig a dan katta bo'lmagan butun qismi) olinsa, $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ unda barcha $n>n_0$ da (3) demak, (2) tengsizlik bajariladi. Ta'rifga binoan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

bo'ladi.▶

3-misol. *Ushbu* $x_n=(-1)^n$:

$$-1,1,-1,1,\ldots,(-1)^n,\ldots$$

ketma-ketlikning limitga ega emasligini ko'rsating.

◀Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni ketma-ketlik limitga ega bo'lib, u a ga teng bo'lsin. Unda ta'rifga ko'ra, $\forall\varepsilon>0$ uchun, xususan, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ son uchun shunday natural n_0 son topiladiki, $\forall n>n_0$ da

$$|x_n-a|<\frac{1}{2}$$

ya'ni

$$|(-1)^n-a|<\frac{1}{2}$$

bo'ladi. Ravshanki, $n>n_0$ va $n=2k$ $(k\in w)$ bo'lganda $x_n=1$, $n>n_0$ va $n=2k-1$ $(k\in w)$ bo'lganda esa $x_n=-1$ bo'ladi. Unda bir vaqtda

$$|a-(-1)|<\frac{1}{2}, \quad |1-a|<\frac{1}{2}$$

tengsizliklar bajariladi.

Ayni paytda,

$$2=|(1-a)+(a+1)|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

bo'lishidan, ma'noga ega bo'lmagan $2<1$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu qilingan farazni, ya'ni $x_n=(-1)^n$ ketma-ketlikning limitiga ega bo'lsin deyilishi natijasida sodir bo'ladi. Demak, qaralayotgan ketma-ketlik limitga ega emas.▶

Agar $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'lsa, bu ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Masalan, $\alpha_n=\frac{1}{n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor bo'ladi, chunki

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti a ga teng bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

U holda $\alpha_n=x_n-a$ *dan* $|\alpha_n|<\varepsilon$ bo'lib, u cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Natijada,

$$x_n=a+\alpha_n$$

bo'ladi. Masalan, $x_n=\frac{n+1}{n}$ ketma-ketlik uchun $x_n=1+\frac{1}{n}$ bo'lib, $\alpha_n=\frac{1}{n}$ cheksiz kichik miqdor bo'lganligidan

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1,x_2,x_3,\ldots x_n,\ldots$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar har qanday musbat M son olinganda ham, ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari uchun $|x_n|>M$ bo'lsa, x_n ketma-ketlikning limiti cheksiz deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$x_n=(-1)^n\cdot n:$$

$$-1,2,-3,4\ldots$$

ketma-ketlikning limiti ∞ bo'ladi, chunki

$$|x_n|=|(-1)^n n|=n$$

bo'lib, har qanday musbat M son olinganda ham shunday natural n son topiladiki, $n>M$ tengsizlik bajariladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Masalan, $x_n=n$:

$$1,2,3,4,\ldots$$

ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi, chunki $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$.

3.3. Ketma-ketliklar ustida amallar. Cheksiz kichik miqdorlar haqida lemmalar

Ikkita $\{x_n\}$:

$$x_2,x_3,\ldots x_n,\ldots$$

va $\{y_n\}$

$$y_1,y_2,y_3,\ldots y_n,\ldots$$

ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$x_1+y_1,\quad x_2+y_2,x_3+y_3,\ldots,x_n+y_n,\ldots,$$

$$x_1-y_1,\quad x_2-y_2,x_3-y_3,\ldots,x_n-y_n,\ldots,$$

$$x_1\cdot y_1,\quad x_2\cdot y_2,x_3\cdot y_3,\ldots,x_n\cdot y_n,\ldots,$$

$$\frac{x_1}{y_1},\frac{x_2}{y_2},\frac{x_3}{y_3},\ldots,\frac{x_n}{y_n},\ldots\qquad (y_k\neq 0,k=1,2,3,\ldots)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati deyiladi va

$$\{x_n+y_n\},\quad \{x_n-y_n\},\quad \{x_n\cdot y_n\},\quad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

kabi belgilanadi.

Endi cheksiz kichik miqdorlar haqidagi lemmalarni keltiramiz.

1-lemma. *Ikki cheksiz kichik miqdorlar yig'indisi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.*

◄Aytaylik, α_n va β_n – cheksiz kichik miqdorlar bo'lsin. Unda ta'rifga ko'ra $\forall\varepsilon>0$ uchun n ning biror qiymatidan boshlab

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$|\alpha_n+\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|.$$

Demak, n ning biror qiymatidan boshlab

$$|\alpha_n+\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\alpha_n+\beta_n$ ning cheksiz kichik miqdor ekanini bildiradi.►

2-lemma. *Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.*

◄Aytaylik, x_n-chegaralangan ketma-ketlik α_n esa cheksiz kichik miqdor bo'lsin. Unda $\forall n\in N$ uchun $|x_n|\le M$ bo'ladi, bunda M tayin o'zgarmas son.

Modomiki, α_n cheksiz miqdor ekan, n ning biror qiymatidan boshlab,

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{M}$$

bo'ladi. Natijada,

$$|x_n\cdot\alpha_n|=|x_n|\cdot|\alpha_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n\to\infty} x_n\cdot\alpha_n=0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x_n\cdot\alpha_n$ – cheksiz kichik miqdor.►

3.4. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1,x_2,x_3,\ldots x_n,$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik:

1) chekli limitga ega bo'lishi mumkin;
2) limiti cheksiz bo'lishi mumkin;
3) limitga ega bo'lmasligi mumkin.

Birinchi holda $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Ikkinchi va uchinchi hollarda $\{x_n\}$ uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Agar har qanday musbat M son olinganda ham, ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari uchun $|x_n|>M$ bo'lsa, x_n ketma-ketlikning limiti cheksiz deyiladi va $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$x_n=(-1)^n\cdot n:$$

$$-1,2,-3,4...$$

ketma-ketlikning limiti ∞ bo'ladi, chunki

$$|x_n|=|(-1)^n n|=n$$

bo'lib, har qanday musbat M son olinganda ham shunday natural n son topiladiki, $n>M$ tengsizlik bajariladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Masalan, $x_n=n$:

$$1,2,3,4,...$$

ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi, chunki $\lim_{n\to\infty} n=\infty$.

3.3. Ketma-ketliklar ustida amallar. Cheksiz kichik miqdorlar haqida lemmalar

Ikkita $\{x_n\}$:

$$x_1,x_2,...x_n,...$$

va $\{y_n\}$

$$y_1,y_2,y_3,...y_n,...$$

ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$x_1+y_1,\quad x_2+y_2,x_3+y_3,...,x_n+y_n,...,$$

$$x_1-y_1,\quad x_2-y_2,x_3-y_3,...,x_n-y_n,...,$$

$$x_1\cdot y_1,\quad x_2\cdot y_2,x_3\cdot y_3,...,x_n\cdot y_n,...,$$

$$\frac{x_1}{y_1},\frac{x_2}{y_2},\frac{x_3}{y_3},...,\frac{x_n}{y_n},...\qquad (y_k\neq 0,k=1,2,3,...)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati deyiladi va

$$\{x_n+y_n\},\quad \{x_n-y_n\},\quad \{x_n\cdot y_n\},\quad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

kabi belgilanadi.

Endi cheksiz kichik miqdorlar haqidagi lemmalarni keltiramiz.

1-lemma. *Ikki cheksiz kichik miqdorlar yig'indisi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.*

◀Aytaylik, α_n va β_n – cheksiz kichik miqdorlar bo'lsin. Unda ta'rifga ko'ra $\forall\varepsilon>0$ uchun n ning biror qiymatidan boshlab

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$|\alpha_n+\beta_n|\leq|\alpha_n|+|\beta_n|.$$

Demak, n ning biror qiymatidan boshlab

$$|\alpha_n+\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\alpha_n+\beta_n$ ning cheksiz kichik miqdor ekanini bildiradi.▶

2-lemma. *Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.*

◀Aytaylik, x_n-chegaralangan ketma-ketlik α_n esa cheksiz kichik miqdor bo'lsin. Unda $\forall n\in N$ uchun $|x_n|\leq M$ bo'ladi, bunda M tayin o'zgarmas son.

Modomiki, α_n cheksiz miqdor ekan, n ning biror qiymatidan boshlab,

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{M}$$

bo'ladi. Natijada,

$$|x_n\cdot\alpha_n|=|x_n|\cdot|\alpha_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n\to\infty} x_n\cdot\alpha_n=0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x_n\cdot\alpha_n$ – cheksiz kichik miqdor.▶

3.4. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1,x_2,x_3,...x_n,$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik:

1) chekli limitga ega bo'lishi mumkin;
2) limiti cheksiz bo'lishi mumkin;
3) limitga ega bo'lmasligi mumkin.

Birinchi holda $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Ikkinchi va uchinchi hollarda $\{x_n\}$ uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, $x_n=\frac{n+1}{n}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik, $x_n=(-1)^{n+1}$ hamda $x_n=n$ ketma-ketliklar esa uzoqlashuvchi ketma-ketliklar bo'ladi.

Endi yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalarini keltiramiz.

1-xossa. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.*

2-xossa. *Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n=b$$

bo'lsa, u holda

a) $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot x_n=c\cdot a$, *ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot x_n=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad (c=const)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$, *ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=ab$, *ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b} \quad (b\neq 0)$, *ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

bo'ladi.

Bu xossalardan b) holining isbotini keltiramiz. Modomiki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n=b$$

ekan, unda

$$x_n=a+\alpha_n, \qquad y_n=b+\beta_n$$

bo'ladi, bunda α_n va β_n – cheksiz kichik miqdorlar. Shularni hamda 1-lemmani e'tiborga olib topamiz:

$$x_n+y_n=a+\alpha_n+b+\beta_n=(a+b)+(\alpha_n+\beta_n)=(a+b)+\gamma_n,$$

bunda γ_n – cheksiz kichik miqdor. Keyingi tenglikdan

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$$

bo'lishi kelib chiqadi.▶

3-xossa. *Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$

2) $x_n\le y_n \quad (n=1,2,\ldots)$

bo'lsa, u holda $a\le b$, *ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\le\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ *bo'ladi.*

3.5. Ketma-ketlik limitining mavjudligi

Ketma-ketlik limitining mavjudligini ifodalaydigan teoremalarni keltiramiz.

1-teorema. *Agar $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lib,*

1) $x_n\le y_n\le z_n \quad (n=1,2,3,\ldots)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$

bo'lsa, u holda $\{y_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} y_n=a$$

bo'ladi.

◀Shartga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a.$$

Unda ta'rifga binoan, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun n ning biror qiymatidan boshlab

$$|x_n-a|<\varepsilon, \qquad ya'ni \quad a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon \tag{4}$$

bo'ladi.

Shuningdek,

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ dan

$$|z_n-a|<\varepsilon, \qquad ya'ni \quad a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon \tag{5}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Teoremaning 1-sharti va (4), (5) munosabatlardan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun, n ning biror qiymatlaridan boshlab

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon, \qquad ya'ni \quad |y_n-a|<\varepsilon$$

bo'lishini topamiz. Demak, $\{y_n\}$ ketma-ketlikning limiti mavjud va

$$\lim_{n\to\infty} y_n=a$$

bo'ladi.▶

Izoh. *1-teorema "ikki mirshab haqidagi teorema" deb ham ataladi.*

2-teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik:*

1) o'suvchi,

2) yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega bo'ladi.

3-teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik:*

1) kamayuvchi,

2) quyidan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega bo'ladi.

Eslatma. *Ketma-ketlikning chekli limitga ega bo'lishi haqida umumiyroq teorema mavjud. Bu va yuqoridagi 2- va 3-teoremalarning isboti maxsus adabiyotlarda keltirilgan ([2]).*

4-misol. *Ushbu $y_n=\frac{\cos n}{n}$ ketma-ketlikning limitnii toping.*

◀Ma'lumki, $-1\le\cos n\le 1$.

Bu tengsizliklarning barcha tomonlarini $\frac{1}{n}$ ga ko'paytirib topamiz:

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

Endi $x_n = -\frac{1}{n}$, $z_n = \frac{1}{n}$ deyilsa, unda bir tomondan

$$x_n \le y_n \le z_n$$

va ikkinchi tomondan esa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

bo'lgani uchun 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0$$

bo'ladi.▶

3.6. Muhim limit (e-soni) va ketma-ketlik limitini hisoblash

Oliy matematikada e deb ataluvchi son muhim rol o'ynaydi. U maxsus ketma-ketlikning limiti orqali ta'riflanadi. Bunday ketma-ketlik va uning limiti mavjudligini ko'rsatishdan avval bitta tengsizlikni keltiramiz.

Bernulli tengsizligi. *Ixtiyoriy $\alpha > -1$ va ixtiyoriy natural $n \ge 2$ uchun ushbu*

$$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha \qquad (6)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

◀(6) tengsizlikni matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz. (6) tengsizlik $n=2$ bo'lganda o'rinli bo'ladi:

$$(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2 > 1+2\alpha.$$

Aytaylik, (6) tengsizlik $n=k$ bo'lganda o'rinli bo'lsin:

$$(1+\alpha)^k > 1+k\alpha.$$

(6) tengsizlikni $n=k+1$ uchun o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Keyingi tengsizlikni ikki tomonini $1+\alpha$ ga ko'paytirib $(1+\alpha>0)$ topamiz:

$$(1+\alpha)^k\cdot(1+\alpha) > (1+\alpha)\cdot(1+k\alpha),$$

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1+k\alpha+\alpha+k\alpha^2 > 1+(k+1)\alpha$$

Unda matematik induksiya usuliga binoan (6) tengsizlik barcha $n \ge 2$ uchun o'rinli bo'ladi.▶

(6) tengsizlik Bernulli tengsizligi deyiladi.

Quyidagi

$$x^n = (1+\frac{1}{n})^n: \quad 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \dots, (1+\frac{1}{n})^n, \dots$$

ketma-ketlikni qaraylik. Bu ketma-ketlikning

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n, \quad x_{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^{n-1} = (\frac{n}{n-1})^{n-1}$$

hadlarining nisbati

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \text{ dagi}$$

$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n-1}$ ga Bernulli tengsizligini qo'llaymiz

$$\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n-1} > 1+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Natijada,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} > \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1+\frac{1}{n^3} > 1$$

bo'ladi. Keyingi tengsizlikda $x_{n-1} < x_n$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlik o'suvchi.

Endi $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ni baholaymiz:

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{2n+2}{2n}\right)^n\left(\frac{2n+1}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^n} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}$$

Bernulli tengsizligiga ko'ra

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \left(1+\frac{-1}{2n}\right)^n > 1+n\cdot\left(\frac{-1}{2n}\right) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

bo'ladi. Natijada,

$$x_n < \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 4$$

bo'lib, undan x_n ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Shunday qilib $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning o'suvchi va yuqoridan chegaralangan ekanligi isbotlandi. Unda 2-teoremaga ko'ra bu ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi.

2-ta'rif. *Ushbu*

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots,)$$

ketma-ketlikning limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

e irratsional son bo'lib, uning qiymati $e=2,718281...$, bo'ladi. Odatda, asosi e bo'lgan logarifm natural logarifm deyilib, $\ln A$ kabi belgilanadi.

Endi ketma-ketliklarning limitini hisoblashga misollar keltiramiz.

5-misol

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)}=1.$$

6-misol

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{0}{1}=0.$$

7-misol

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+...+(n-1))=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

8-misol

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

Mashqlar

Quyidagi ketma-ketliklar limitini hisoblang.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^2-20n}$, 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{\sqrt{n^2-20n}}$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{n^3-8}$, 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+5}}{\sqrt{4n^2-20n}}$,

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$.

IV BOB

Funksiya limiti va uzluksizligi

1-§. Funksiya limiti

1.1. Funksiya limiti ta'rifi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $E(E\subset R)$ to'plamda berilgan bo'lib, a nuqtaning ixtiyoriy atrofida to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lsin. Ushbu

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \quad (1)$$

ketma-ketlik quyidagi ikki shartni qanoatlantirsin:

1) (1) ketma-ketlikning barcha hadlari $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi E ga tegishli va $\forall n\in N$ uchun $x_n\neq a$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ mavjud.

Bu ikki shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar cheksiz ko'p bo'ladi.

Modomiki, $x_n\in E$ $(n=1,2,3,...)$ ekan, bu nuqtalarda $f(x)$ funksiya tayin $f(x_n)$ qiymatlarga ega bo'lib, ular

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3),...f(x_n),... \quad (2)$$

ketma-ketlikni (sonlar ketma-ketligini) hosil qiladi. Ravshanki, bunday ketma-ketliklar ham cheksiz ko'p bo'ladi.

Ta'rif: *Agar ikkala shartni qanoatlantiruvchi har qanday (1) ketma-ketlik uchun, funksiya qiymatlaridan iborat (2) ketma-ketlik har doim bitta A limitga ega bo'lsa, A $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti deyiladi va*

$$\lim_{x\to a}f(x)=A$$

kabi belgilanadi.

Ta'rifdagi a va A lar chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Agar A chekli son bo'lsa, funksiya limiti chekli deyiladi.

Demak,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

bo'lishidan

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$$

bo'lishi kelib chiqsa, unda A $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti bo'ladi.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

e irratsional son bo'lib, uning qiymati $e=2,718281...$, bo'ladi. Odatda, asosi e bo'lgan logarifm natural logarifm deyilib, $\ln A$ kabi belgilanadi.

Endi ketma-ketliklarning limitini hisoblashga misollar keltiramiz.

5-misol

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)}=1.$$

6-misol

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{0}{1}=0.$$

7-misol

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+...+(n-1))=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

8-misol

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

Mashqlar

Quyidagi ketma-ketliklar limitini hisoblang.

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^2-20n}$, 2. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{\sqrt{n^2-20n}}$,

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{n^3-8}$, 4. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+5}}{\sqrt{4n^2-20n}}$,

5. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$.

IV BOB

Funksiya limiti va uzluksizligi

1-§. Funksiya limiti

1.1. Funksiya limiti ta'rifi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $E(E\subset R)$ to'plamda berilgan bo'lib, a nuqtaning ixtiyoriy atrofida to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lsin. Ushbu

$$x_1,x_2,x_3,...,x_n,... \qquad (1)$$

ketma-ketlik quyidagi ikki shartni qanoatlantirsin:

1) (1) ketma-ketlikning barcha hadlari $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi E ga tegishli va $\forall n\in N$ uchun $x_n\neq a$
2) $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ mavjud.

Bu ikki shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar cheksiz ko'p bo'ladi.

Modomiki, $x_n\in E$ $(n=1,2,3,...)$ ekan, bu nuqtalarda $f(x)$ funksiya tayin $f(x_n)$ qiymatlarga ega bo'lib, ular

$$f(x_1),f(x_2),f(x_3),...f(x_n),... \qquad (2)$$

ketma-ketlikni (sonlar ketma-ketligini) hosil qiladi. Ravshanki, bunday ketma-ketliklar ham cheksiz ko'p bo'ladi.

Ta'rif: *Agar ikkala shartni qanoatlantiruvchi har qanday (1) ketma-ketlik uchun, funksiya qiymatlaridan iborat (2) ketma-ketlik har doim bitta A limitga ega bo'lsa, A $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti deyiladi va*

$$\lim_{x\to a}f(x)=A$$

kabi belgilanadi.

Ta'rifdagi a va A lar chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Agar A chekli son bo'lsa, funksiya limiti chekli deyiladi.

Demak,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

bo'lishidan

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$$

bo'lishi kelib chiqsa, unda A $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti bo'ladi.

1-misol. *Ushbu*

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}$$

limit topilsin.

◀Ravshanki,

$$f(x)=\frac{1}{1+x}$$

funksiya $E=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ to'plamda aniqlangan. Har bir hadi shu to'plamga tegishli bo'lgan va 2 ga intiluvchi (limiti 2 bo'lgan) ixtiyoriy x_n:

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ..., \ \lim_{n\to\infty} x_n = 2, \ x_n \neq 2$$

ketma-ketlikni olamiz. Unda mos funksiya qiymatlaridan iborat ketma-ketlik

$$\frac{1}{x_1+1}, \frac{1}{x_2+1}, \frac{1}{x_3+1}, ..., \frac{1}{x_n+1}, ...$$

bo'ladi. Ketma-ketlik limitini hisoblash qoidalaridan foydalanib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}. ▶$$

2-misol. *Ushbu*

$$f(x)=\sin x$$

funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti mavjud emasligini ko'rsating.

◀Ravshanki, bu funksiya $E=(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan. Har bir had shu E to'plamga tegishli bo'lgan va ∞ ga intiluvchi 2 ta turli:

$$x_n = n\pi: \quad \pi, 2\pi, 3\pi, ... n\pi, ... \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n\pi = \infty,$$

$$y_n = 2n\pi+\frac{\pi}{2}: \quad 2\pi+\frac{\pi}{2}, \quad 4\pi+\frac{\pi}{2}, \quad 6\pi+\frac{\pi}{2}, ..., 2n\pi+\frac{\pi}{2}, ...$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\infty$$

ketma-ketliklarni olamiz. Unda mos funksiya qiymatlaridan iborat ketma-ketliklar

$$f(x_n)=\sin x_n=\sin n\pi=0 \quad : \quad 0,0,0,...,0,... \quad \lim_{n\to\infty}\sin x_n=0,$$

$$f(y_n)=\sin y_n=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1 \quad : \quad 1,1,1,...,1,... \quad \lim_{n\to\infty}\sin y_n=1,$$

bo'ladi. Demak, ∞ ga intiluvchi turli x_n va y_n ketma-ketliklar uchun

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0, \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n)=1$$

bo'ladi. Bu limitlar bir xil bo'lmagani uchun berilgan funksiya limitga ega bo'lmaydi.▶

Funksiya limiti ta'rifidan quyidagilar kelib chiqadi:

1) Ixtiyoriy a (chekli yoki cheksiz) uchun $\lim\limits_{x\to a} x = a$ bo'ladi,
2) Agar barcha x larda $f(x)=c=const$ bo'lsa, ixtiyoriy a (chekli yoki cheksiz) uchun

$$\lim_{x\to a} f(x)=c$$

bo'ladi.

Aytaylik, a va A lar chekli bo'lsin. Unda $x\to a$ *da* $f(x)\to A$ bo'lishini quyidagicha ham ta'riflasa bo'ladi:

agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki,

$$0<|x-a|<\delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in E$ uchun

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti deyiladi.

Ravshanki, $|x-a|<\delta$ tengsizlik $a-\delta<x<a+\delta$ ga ekvivalent, ya'ni bir yo'la $a-\delta<x<a$ va $a<x<a+\delta$ bajariladi.

Agar $a-\delta<x<a$ bo'lganda, $|f(x)-A|<\varepsilon$ bo'lsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi chap limiti deyiladi va

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x)=A$$

kabi belgilanadi.

Agar $a<x<a+\delta$ bo'lganda, $|f(x)-A|<\varepsilon$ bo'lsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi o'ng limiti deyiladi va

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)=A$$

kabi belgilanadi.

Eslatma. *Funksiyaning o'ng $f(a+0)$, chap $f(a-0)$ limitlari bir-biriga teng bo'lishi ham mumkin, teng bo'lmasligi ham mumkin. $f(a+0)=f(a-0)$ bo'lgan holda $f(x)$ funksiya $x\to a$ da limitga ega bo'ladi.*

1.2. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar

Agar $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Masalan, $\alpha(x)=x$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ bo'lsin. U holda

$$f(x)-A=\alpha(x)$$

funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi va aksincha.

1-misol. *Ushbu*

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}$$

limit topilsin.

◀Ravshanki,

$$f(x)=\frac{1}{1+x}$$

funksiya $E=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ to'plamda aniqlangan. Har bir hadi shu to'plamga tegishli bo'lgan va 2 ga intiluvchi (limiti 2 bo'lgan) ixtiyoriy x_n:

$$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots,\ \lim_{n\to\infty}x_n=2,\ x_n\neq 2$$

ketma-ketlikni olamiz. Unda mos funksiya qiymatlaridan iborat ketma-ketlik

$$\frac{1}{x_1+1},\frac{1}{x_2+1},\frac{1}{x_3+1},\ldots,\frac{1}{x_n+1},\ldots$$

bo'ladi. Ketma-ketlik limitini hisoblash qoidalaridan foydalanib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}.\ \blacktriangleright$$

2-misol. *Ushbu*

$$f(x)=\sin x$$

funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti mavjud emasligini ko'rsating.

◀Ravshanki, bu funksiya $E=(-\infty,+\infty)$da aniqlangan. Har bir had shu E to'plamga tegishli bo'lgan va ∞ ga intiluvchi 2 ta turli:

$$x_n=n\pi:\quad \pi,2\pi,3\pi,\ldots n\pi,\ldots\ ,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}n\pi=\infty,$$

$$y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}:\quad 2\pi+\frac{\pi}{2},\quad 4\pi+\frac{\pi}{2},\quad 6\pi+\frac{\pi}{2},\ldots,2n\pi+\frac{\pi}{2},\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\infty$$

ketma-ketliklarni olamiz. Unda mos funksiya qiymatlaridan iborat ketma-ketliklar

$$f(x_n)=\sin x_n=\sin n\pi=0\quad:\quad 0,0,0,\ldots,0,\ldots\quad \lim_{n\to\infty}\sin x_n=0,$$

$$f(y_n)=\sin y_n=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1\quad:\quad 1,1,1,\ldots,1,\ldots\quad \lim_{n\to\infty}\sin y_n=1,$$

bo'ladi. Demak, ∞ ga intiluvchi turli x_n va y_n ketma-ketliklar uchun

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}f(y_n)=1$$

bo'ladi. Bu limitlar bir xil bo'lmagani uchun berilgan funksiya limitga ega bo'lmaydi. ▶

Funksiya limiti ta'rifidan quyidagilar kelib chiqadi:

1) Ixtiyoriy a (chekli yoki cheksiz) uchun $\lim\limits_{x\to a}x=a$ bo'ladi,
2) Agar barcha x larda $f(x)=c=const$ bo'lsa, ixtiyoriy a (chekli yoki cheksiz) uchun

$$\lim_{x\to a}f(x)=c$$

bo'ladi.

Aytaylik, a va A lar chekli bo'lsin. Unda $x\to a$ *da* $f(x)\to A$ bo'lishini quyidagicha ham ta'riflasa bo'ladi:

agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki,

$$0<|x-a|<\delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in E$ uchun

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti deyiladi.

Ravshanki, $|x-a|<\delta$ tengsizlik $a-\delta<x<a+\delta$ ga ekvivalent, ya'ni bir yo'la $a-\delta<x<a$ va $a<x<a+\delta$ bajariladi.

Agar $a-\delta<x<a$ bo'lganda, $|f(x)-A|<\varepsilon$ bo'lsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi chap limiti deyiladi va

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0}f(x)=A$$

kabi belgilanadi.

Agar $a<x<a+\delta$ bo'lganda, $|f(x)-A|<\varepsilon$ bo'lsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi o'ng limiti deyiladi va

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x)=A$$

kabi belgilanadi.

Eslatma. *Funksiyaning o'ng $f(a+0)$, chap $f(a-0)$ limitlari bir-biriga teng bo'lishi ham mumkin, teng bo'lmasligi ham mumkin. $f(a+0)=f(a-0)$ bo'lgan holda $f(x)$ funksiya $x\to a$ da limitga ega bo'ladi.*

1.2. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar

Agar $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Masalan, $\alpha(x)=x$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ bo'lsin. U holda

$$f(x)-A=\alpha(x)$$

funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi va aksincha.

Keyingi tenglikdan topamiz:

$$f(x)=A+\alpha(x).$$

Demak, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya A limitga ega bo'lishi uchun

$$f(x)=A+\alpha(x)$$

ko'rinishda ifodalanishi zarur va yetarli, bunda $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya.

Cheksiz kichik funksiyalar cheksiz kichik miqdorlar xossalari kabi xossalarga ega (qaralsin, 11-ma'ruza)

Agar

$$\lim_{x\to a}\beta(x)=\infty$$

bo'lsa, $\beta(x)$ funksiya $x\to a$ da cheksiz katta funksiya deyiladi.

Masalan, $\beta(x)=tgx$ funksiya $x\to\frac{\pi}{2}$ da cheksiz katta funksiya bo'ladi, chunki

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}tgx=\infty.$$

Cheksiz kichik hamda cheksiz katta funksiyalar orasida bog'lanish mavjud:

1) agar $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya $(\alpha(x)\neq 0)$ bo'lsa, u holda

$$\beta(x)=\frac{1}{\alpha(x)}$$

funksiya $x\to a$ da cheksiz katta funksiya bo'ladi;

2) agar $\beta(x)$ funksiya $x\to a$ da cheksiz katta funksiya bo'lsa, u holda

$$\alpha(x)=\frac{1}{\beta(x)}$$

funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

1.3. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ham yaqinlashuvchi ketma-ketliklar, ya'ni chekli limitga ega bo'lgan ketma-ketliklarning xossalari singari xossalarga ega bo'ladi. Quyida bu xossalarni bayon etamiz va ulardan birining isbotini keltiramiz.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar E to'plamda berilgan bo'lib, a nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin

1-xossa. *Agar* $\lim_{x\to a}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a}g(x)=B$ *bo'lsa, u holda* $x\to a$ *da* $f(x)\pm g(x)$ *funksiya ham limitga ega bo'lib,*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B,$$

ya'ni

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

bo'ladi.

◄Shartga ko'ra $x\to a$ da $f(x)\to A$, $g(x)\to B$. Unda

$$f(x)=A+\alpha(x),\qquad g(x)=B+\beta(x)$$

bo'lib, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $x\to a$ da cheksiz kichik funksiyalar bo'ladi. Keyingi tengliklardan topamiz:

$$f(x)+g(x)=(A+B)+(\alpha(x)+\beta(x))=(A+B)+\gamma(x),$$

bunda $\gamma(x)$ funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya.

Demak,

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B.\blacktriangleright$$

Natija. *Agar* $x\to a$ *da* $f(x)\to A$ *bo'lsa,* A *yagona bo'ladi.*

◄Teskarisini faraz qilaylik $\lim_{x\to a}f(x)=A$, $\lim_{x\to a}f(x)=A^*$ bo'lsin. U holda bir tomondan $\lim_{x\to a}(f(x)-f(x))=A-A^*$ ikkinchi tomondan esa,

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(x))=0$$

bo'ladi. Keyingi tengliklardan $A=A^*$ bo'lishi kelib chiqadi.►

2-xossa. *Agar* $\lim_{x\to a}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a}g(x)=B$ *bo'lsa, u holda* $x\to a$ $f(x)\cdot g(x)$ *funksiya ham limitga ega bo'lib,*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B,\quad \textit{ya'ni}\quad \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

bo'ladi.

Natija. *O'zgarmas sonni limit belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin.*

◄Ravshanki, ixtiyoriy $c=const$ uchun

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x))=\lim_{x\to a}c\cdot\lim_{x\to a}f(x)=c\cdot\lim f(x)$$

bo'ladi.►

3-xossa. *Agar*

$$\lim_{x\to a}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a}g(x)=B$$

bo'lib, $\hat{A}\neq 0$ *bo'lsa, u holda*

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{A}{B},\quad \textit{ya'ni}\quad \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

bo'ladi.

4-xossa. *Agar* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ *bo'lib, ixtiyoriy* $x\in E$ *uchun* $f(x)\le g(x)$ *bo'lsa, u holda* $A\le B$, *ya'ni* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ *bo'ladi.*

1.4. Funksiya limitining mavjudligi

Funksiya limitga ega bo'lishi haqidagi teoremalarni keltiramiz.

1-teorema. *Faraz qilaylik,* $f(x)$, $g(x)$ *va* $\varphi(x)$ *funksiyalar* $E\subset R$ *to'plamda berilgan bo'lib,* a *nuqta* E *to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Agar bu funksiyalar uchun:*

1) $f(x)\le g(x)\le \varphi(x)$, $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=A$

bo'lsa, u holda $g(x)$ *funksiya* $x\to a$ *da limitga ega bo'lib,*

$$\lim_{x\to a} g(x)=A \text{ bo'ladi.}$$

◄Shartga ko'ra, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=A$

Unda ta'rifga binoan har qanday $\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ topiladiki, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in E$ uchun

$$A-\varepsilon<f(x), \quad \varphi(x)<A+\varepsilon$$

bo'ladi. Teoremaning birinchi shartidan foydalanib topamiz:

$$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon.$$

Demak, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$.►

2-teorema. *Faraz qilaylik,* $f(x)$ *funksiya* E *to'plamda berilgan bo'lib,* $(a-\alpha,a)\subset E$ $(\alpha>0)$ *bo'lsin. Agar:*

1) $f(x)$ *funksiya* E *to'plamda o'suvchi;*

2) $f(x)$ *funksiya* E *to'plamda yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda* $x\to a-0$ *da* $f(x)$ *funksiyaning limiti mavjud bo'ladi.*

3-teorema. *Faraz qilaylik,* $f(x)$ *funksiya* E *to'plamda berilgan bo'lib,* $(a,a+\alpha)\subset E$ $(\alpha>0)$ *bo'lsin. Agar:*

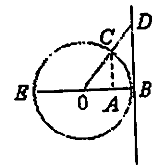
1) $f(x)$ *funksiya* E *da kamayuvchi;*

2) $f(x)$ *funksiya* E *to'plamda quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda* $x\to a+0$ *da* $f(x)$ *funksiyaning limiti mavjud bo'ladi.*

1.5. Muhim limitlar va funksiya limitini hisoblash

1) *Ushbu* $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ *limitlarni isbotlang.*

◄Radiusi $OB=1$ bo'lgan aylana chizamiz:



1-chizma

Trigonometrik funksiyalar: $\sin x, \cos x, tgx$ larning ta'riflariga binoan

$$AC=|\sin x|,$$
$$OA=|\cos x|,$$
$$BD=|tgx|,$$

bo'ladi. Aytaylik, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ bo'lsin, unda BC yoyi BC vatardan kichik bo'lmaganligi va, o'z navbatida, vatar AC dan kichik bo'lmaganligi uchun

$$|\sin x|\le|x| \tag{3}$$

bo'ladi. Shuningdek, OCA uchburchakda uning bir tomoni qolgan ikki tomonlari ayirmasidan kichik emasligi haqidagi tasdiqqa ko'ra

$$\cos x\ge 1-|\sin x| \tag{4}$$

bo'ladi.

Ravshanki, (3) tengsizlikdan

$$-|x|\le \sin x\le|x|$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ayni paytda, $x\to 0$ da

$$-|x|\to 0, \quad |x|\to 0$$

bo'lganligi uchun 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0$$

bo'ladi.

Ravshanki, $\cos x\le 1$. Unda (4) munosabatga muvofiq

$$1-|\sin x|\le \cos x\le 1$$

bo'lib, 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

bo'ladi.

Ma'lumki, ΔOAC ning yuzi $\frac{1}{2}\cos x\cdot|\sin x|$

OBC sektorning yuzi $\frac{1}{2}|x|$,

ΔOBD ning yuzi $\frac{1}{2}|tgx|$

bo‘lib, ular uchun

$$\frac{1}{2}\cos x\cdot|\sin x|\le\frac{1}{2}|x|\le\frac{1}{2}|tgx|$$

tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan,

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{|\sin x|}{|x|},\qquad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

munosabatlarni e’tiborga olgan holda

$$\cos x\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x},$$

bo‘lishini topamiz. Ma’lumki,

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Unda 1-teoremaga ko‘ra:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

bo‘ladi.

2) Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

limitni isbotlang.

Ma’lumki,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Aytaylik, $x>1$ bo‘lsin. Agar x ning butun qismini n desak, unda $n\le x<n+1$ bo‘lib,

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$$

bo‘ladi. Bu munosabatlardan

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1+\frac{1}{n+1})^{-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{-1}=e\cdot 1=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n})=e\cdot 1=e.$$

Unda 1-teoremaga ko‘ra

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ bo‘ladi.}$$

Aytaylik, $x<-1$ bo‘lsin. Agar $x=-t$ deyilsa, u holda

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot 1=e$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Keyingi muhim limitlarni keltirish bilan kifoyalanamiz.

3) Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\qquad (a>0, a\ne 1)$$

xususan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

munosabat o‘rinli.

4) Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\qquad (a>0)$$

tenglik o‘rinli.

5) Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

tenglik o‘rinli.

6) Ushbu

$$\lim_{x\to a}\left[U(x)\right]^{V(x)}=C$$

limitda:

a) agar

$$\lim_{x\to a}U(x)=A,\qquad \lim_{x\to a}V(x)=B\qquad \textit{bo'lsa,}$$

$$C=A^B\qquad \textit{bo'ladi}$$

b) agar

$$\lim_{x\to a}U(x)=A\ne 1,\qquad \lim_{x\to a}V(x)=\pm\infty$$

bo‘lsa, qaralayotgan limit bevosita hisoblanadi.

d) agar

$$\lim_{x\to a}U(x)=1,\qquad \lim_{x\to a}V(x)=\infty$$

bo‘lsa, u holda

$$C=e^{\lim\limits_{x\to a}[U(x)-1]V(x)} \text{ bo‘ladi.}$$ ►

Funksiya limiti haqidagi ma'lumotlardan, shuningdek, muhim limitlardan foydalanib, funksiyalarning limitini hisoblaymiz.

1) Ushbu

$$\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$$

limitni hisoblang.

◀Bu limit quyidagicha hisoblanadi:

$$\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1+x^2-1+x^3-1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1+(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(1+x+1+x^2+x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}3+2\lim_{x\to1}x+\lim_{x\to1}x^2=3+2+1=6.\ ▶$$

2) Ushbu

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin10x}$$

limitni hisoblang.

◀Bu limitni hisoblashda

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

dan foydalanamiz.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin10x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin5x}{5x}\cdot5x}{\frac{\sin10x}{10x}\cdot10x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin10x}{10x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}.\ ▶$$

3) Ushbu

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\sin x}$$

limitni hisoblang.

◀Bu limitni hisoblashda

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

lardan foydalanamiz.

Avvalo, berilgan limit ostidagi kasrning surat va maxrajini x ga bo'lamiz, so'ng limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2^x-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{\ln2}{1}=\ln2.\ ▶$$

4) Ushbu

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$$

limitni hisoblang.

◀Bu limit quyidagicha hisoblanadi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\cdot\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\cdot e=e^2.\ ▶$$

5) Ushbu

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$$

limitni hisoblang.

◀Avvalo, quyidagi $x=t^6$ almashtirishni bajaramiz. Bunda $x\to1$ *da* $t\to1$. Natijada,

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to1}\frac{1-t^3}{1-t^2}$$

bo'ladi. Keyingi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{t\to1}\frac{1-t^3}{1-t^2}=\lim_{t\to1}\frac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)}=\lim_{t\to1}\frac{1+t+t^2}{1+t}=\frac{3}{2}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}.\ ▶$$

6) Ushbu

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$$

limitni hisoblang.

◀Bu limitni hisoblash uchun $1-x=t$ almashtirish bajaramiz. Unda $x\to1$ *da* $t\to0$ bo'lib,

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}\cdot t}=\frac{\pi}{2}\cdot1=\frac{\pi}{2}$$

bo'ladi.▶

7) Ushbu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$

limitni hisoblang.

◀Bu limitni hisoblashda $\lim\limits_{x\to a}[U(x)]^{V(x)}=C$ dagi $C=e^{\lim\limits_{x\to a}[U(x)-1]V(x)}$ holidan foydalanamiz. Ravshanki,

$$U(x)=\frac{x-1}{x+1},\qquad V(x)=x \text{ bo‘lib},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}x=\infty$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}-1\right]x},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1-x-1}{x+1}x=\lim_{x\to\infty}(-2)\frac{x}{x+1}=-2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=-2.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=e^{-2}$ bo‘ladi.▶

Mashqlar

Fuksiyalarning limitini hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ 2. $\lim\limits_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$
3. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos3x}{\sin^2 7x}$ 4. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{1-\sin2x}{(\pi-4x)^2}$
5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\ln x}$

2-§. Funksiyaning uzluksizligi. Uzluksiz funksiyalarning xossalari

“Funksiya limiti” tushunchasi bilan bog‘liq, ayni paytda, oliy matematikada muhim bo‘lgan “funksiyaning uzluksizligi” tushunchasini, uzluksiz funksiyalarning xossalarini keltiramizl.

2.1. “Funksiyaning uzluksizligi” tushunchasi

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya E to‘plamda $(E\subset R)$ berilgan bo‘lib, $x_0\in E$ bo‘lsin.

1-ta’rif. *Agar*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \tag{1}$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Masalan,

$$y=f(x)=x^2$$

funksiya ixtiyoriy $x_0\in(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo‘ladi, chunki:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}x^2=\lim_{x\to x_0}(x\cdot x)=x_0\cdot x_0=x_0^2=f(x_0).$$

Agar

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o‘ngdan,
agar

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan uzluksiz deyiladi.

Masalan,

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2, & agar \quad x\le2\\ x\,, & agar \quad x>2\end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to2-0}f(x)=\lim_{x\to2-0}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-2=f(2),$$

$$\lim_{x\to2+0}f(x)=\lim_{x\to2+0}x=2\ne f(2)$$

bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya $x_0=2$ nuqtada chapdan uzluksiz.

$y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi sharti

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0. \tag{10}$$

Quyidagi belgilarni kiritamiz:

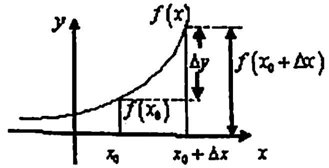
$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \qquad (2)$$

Odatda, Δx argument orttirmasi , Δy esa ***funksiya orttirmasi*** deyiladi.

(2) munosabatlardan topamiz:

$$x = x_0 + \Delta x, \qquad \Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Δx va Δy larning geometrik ma'nolari 1-chizmada keltirilgan.



1-chizma

(1) va (2) munosabatlardan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0 \qquad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, (3) munosabat $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ta'rifi sifatida qaralishi mumkin.

Masalan, $f(x) = c = const$ funksiya ixtiyoriy $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} (c - c) = 0.$$

2-ta'rif. *Agar $f(x)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya E to'plamda uzluksiz deyiladi.*

2.2. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar E to'plamda berilgan bo'lsin.

1-teorema. *Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x_0 \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda*

$$c \cdot f(x), \ (c = const), \quad f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

◀Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz. Unda

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

bo'ladi. Funksiya limiti xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot f(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Keyingi munosabatlardan $c \cdot f(x)$, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiyalarning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.▶

2-teorema. *Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, $u = \varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada $(y_0 = f(x_0))$ uzluksiz bo'lsa, u holda $u = \varphi(f(x))$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

◀Shartga ko'ra $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Unda

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$$

bo'ladi. Shuningdek, $u = \varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz. Unda $\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$ bo'ladi. Demak, $\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0) = \varphi(f(x_0))$.

Bu esa $\varphi(f(x))$ murakkab funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishini bildiradi.▶

Uzluksiz sodda funksiyalarni keltiramiz.

1) $f(x) = c = const$, $f(x) = x$ funksiyalarning ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz bo'lishi ravshan.

2) $f(x) = x^m$ (m – natural son) bo'lsin. Bu funksiya m ta uzluksiz funksiyalarning ko'paytmasi sifatida ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz bo'ladi.

3) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ bo'lsin, bunda $a_0, a_1, \ldots a_n$ o'zgarmas sonlar. Bu funksiya ham 1-teoremaga ko'ra ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz bo'ladi.

4) Aytaylik, $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$

bo'lsin, bunda $a_0, a_1, \ldots a_n$ va $b_0, b_1, \ldots b_m$ o'zgarmas sonlar.

Bu funksiyaning ixtiyoriy

$$x \in E = (-\infty, +\infty) \setminus \{x : b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m = 0\}$$

da uzluksiz bo'lishi 1-teoremadan kelib chiqadi.

5) $f(x) = \sin x$ bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ uchun

$$\Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

bo'ladi. Trigonometriyadan ma'lum bo'lgan ushbu

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

tenglikdan foydalanib topamiz: $\Delta f(x)=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$.

Ravshanki, $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$ va $\Delta x\to 0$ da $\sin\frac{\Delta x}{2}\to 0$. Demak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0.$$

Bu esa $f(x)=\sin x$ funksiyaning ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz ekanini bildiradi.

6) $f(x)=\cos x$ bo'lsin. Ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ uchun $\Delta f(x)=\cos(x+\Delta x)-\cos x$ bo'ladi. Ma'lum

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Bu formuladan foydalanib topamiz:

$$\Delta f(x)=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Ravshanki, $\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$ va $\Delta x\to 0$ da $\sin\frac{\Delta x}{2}\to 0$. Demak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$$

bo'lib, $f(x)=\cos x$ funksiya ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo'ladi

7) Ushbu

$$f(x)=tgx,\quad f(x)=ctgx$$

funksiyalarning uzluksizligi $\sin x, \cos x$ funksiyalarning uzluksizligi hamda 1-teoremadan kelib chiqadi.

$f(x)=tgx$ funksiya ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)\setminus\{x:x=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,...\}$ da uzluksiz bo'ladi.

8) $f(x)=a^x$, $f(x)=\log_a x$, $f(x)=\arcsin x$, $f(x)=\arccos x$, $f(x)=arctgx$, $f(x)=arcctgx$ funksiyaning o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz bo'lishi yuqoridagidek ko'rsatiladi.

Demak, barcha sodda funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz bo'ladi.

2.3. Funksiyaning uzilishi va uzilishning turlari

Ma'lumki, $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi ushbu

1) $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$ ning mavjudligi,

2) $A=f(x_0)$ bo'lishi

shartlarining bajarilishi bilan ifodalanadi.

Agar $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ munosabat bajarilmasa, $f(x)$ funksiya uzilishga ega, x_0 nuqta esa uzilish nuqtasi deyiladi.

Ma'lumki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi $f(x_0+0)$ o'ng limiti, $f(x_0-0)$ chap limiti mavjud bo'lib,

$$f(x_0+0)\ne f(x_0-0)$$

bo'lsa, yoki bu limitlardan hech bo'lmaganda biri mavjud bo'lmasa, $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmaydi. Binobarin, bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo'ladi.

Masalan,

$$f(x)=\begin{cases}-1, & agar\quad x<0\quad bo'lsa,\\ 0, & agar\quad x=0\quad bo'lsa,\\ 1, & agar\quad x>0\quad bo'lsa,\end{cases}$$

funksiya uchun

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}1=1,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1$$

bo'lib, $x=0$ nuqtada funksiyaning o'ng va chap limitlari bir-biriga teng bo'lmaydi. Demak, berilgan funksiya uzilishga ega va $x=0$ nuqtada uning uzilish nuqtasi bo'ladi.

Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & agar\quad x>0\quad bo'lsa,\\ -x, & agar\quad x\le 0\quad bo'lsa,\end{cases}$$

funksiya uchun

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}\sin\frac{1}{x}-\text{mavjud emas},$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}(-x)=0$$

bo'ladi. Demak, bu funksiya $x=0$ nuqtada uziladi.

Ushbu $f(x)=\begin{cases}x^2, & agar\quad x\ne 0\quad bo'lsa,\\ 1, & agar\quad x=0\quad bo'lsa,\end{cases}$ uchun $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^2=0$ bo'lib, u berilgan funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qiymatiga teng emas: $f(0)\ne 0$. Demak, funksiya $x=0$ nuqtada uziladi.

Funksiyaning uzilishi nuqtalari qatoriga uning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lmagan, sohaning chegaraviy nuqtalari ham kiritiladi.

Xususan, funksiyaning aniqlanish sohasi intervaldan iborat bo'lsa, intervalning chegaraviy nuqtalari uzilish nuqtalari bo'lishi mumkin.

Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $E=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$da aniqlangan bo'lib, $x=0$ nuqta (ravshanki, bu nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli emas va u oraliqning chegarasi) uzilish nuqta bo'ladi.

Shunday qilib,

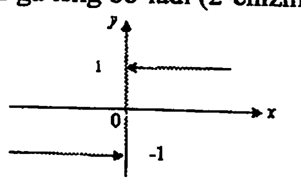
1) $x_0$nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli va $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ shart bajarilmaganda;

2) $x_0$nuqta aniqlanish sohasiga tegishli bo'lmasdan, uning chegaraviy nuqtasi bo'lsa, u holda x_0 funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi.

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib, $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$ bo'lganda, uning x_0 nuqtadagi uzilishi birinchi tur uzilishi deyiladi. Ushbu $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ miqdor funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Masalan, ushbu $f(x)=\begin{cases}-1, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa\\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa\\ 1, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa\end{cases}$

funksiyaning $x=0$ nuqtadagi uzilishi birinchi tur uzilishi bo'lib, uning $x=0$ nuqtadagi sakrashi 2 ga teng bo'ladi (2-chizma):



2-chizma

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi boshqa uzilishlari ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ A\neq f(x_0)$ holdan tashqari) ***ikkinchi tur uzilishi*** deyiladi.

Masalan,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa,\\ x^2, & agar \quad x\le 0 \quad bo'lsa,\end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x^2=0$$

bo'lib, bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi uzilishi ikkinchi tur uzilish bo'ladi.

2.4. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalar haqida teoremalar

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan bo'lib, (a,b) intervalda uzluksiz hamda a nuqtada o'ngdan, $b$nuqtada esa chapdan uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz deb ataladi.

Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalar haqida bir nechta asosiy teoremalarni (isbotsiz) keltiramiz.

1-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u shu segmentda chegaralangan bo'ladi.*

Bu holda shunday ikkita m va M sonlari $(m\le M)$ topiladiki, funksiya grafigi $y=m$ va $y=M$ parallel to'g'ri chiziqlar orasida joylashadi.

2-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, segmentning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, $(f(a)>0,\quad f(b)<0$ yoki $f(a)<0,\quad f(b)>0)$ u holda a bilan b orasida hech bo'lmaganda, bitta shunday c nuqta $(a<c<b)$ topiladiki, $f(c)=0$ bo'ladi.*

Bu holda $f(x)$ funksiyaning grafigi OX o'qini hech bo'lmaganda, bitta nuqtada kesadi.

Bu teorema $f(x)=0$ tenglamaning yechimi mavjudligini ko'rsatish bilan birga uni taqribiy hisoblash imkonini ham beradi.

3-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya $[a,b]$ segmentda o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi, ya'ni shunday $x_*\in[a,b]$ nuqta topiladiki, ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun $f(x)\le f(x_*)$, shunday $x^*\in[a,b]$ nuqta topiladiki, ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun $f(x)\ge f(x^*)$ bo'ladi.*

Mashqlar

Quyidagi funksiyalarni uzluksiz ekanini ko'rsating.

1. $y=x^2-2x$. 2. $y=\cos 3x$. 3. $y=e^x$

Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping.

1. $y=\frac{1}{2-x}$. 2. $y=\frac{1}{x^2-4x+3}$.

V BOB

Funksiyaning hosilasi va differensiallari

1-§. Funksiyaning hosilasi. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari

1.1. "Funksiya hosilasi" tushunchasi

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan bo'lib, $x_0\in(a,b)$ bo'lsin. x_0 nuqta bilan birga shu (a,b)ga tegishli bo'lgan $x_0+\Delta x$ ni $(\Delta x\neq 0)$ qaraymiz. Natijada, funksiya ushbu

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

nisbat muayyan $f(x)$ va tayin x_0 da Δx ning funksiyasiga aylanadi. $\Delta x\to 0$ da bu nisbat limiti "funksiya hosilasi" tushunchasiga olib keladi.

Ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *(1)*

limit mavjud bo'lsa, bu limit $y=f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi hosilasi deyiladi va* $f'(x_0)$ *yoki* $\frac{df(x_0)}{dx}$ *yoki* $y'_{x=x_0}$ *kabi belgilanadi.*

Agar (1) limit chekli bo'lsa, hosila chekli deyiladi, (1) limit cheksiz bo'lsa, hosila cheksiz deyiladi.

Eslatma. *Funksiyaning tayin nuqtadagi chekli hosilasi sonni ifodalaydi.*

Agar (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida funksiyaning chekli hosilasi mavjud bo'lsa, unda hosila x ning funksiyasiga aylanadi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari singari funksiyaning o'ng va chap hosilalari ta'riflanadi. Ushbu

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\qquad \lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

limitlar mavjud bo'lsa, ular mos ravishda funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap hosilalari deyiladi va $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Xususan, $[a,b]$ segmentda berilgan $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi hosilasi deganda, uning shu nuqtadan o'ng hosilasi, b nuqtadagi hosilasi deganda, uning shu nuqtadagi chap hosilasi tushiniladi.

Misollar. 1. *Ushbu*

$$f(x)=x^2$$

funksiyaning $x_0=2$ *nuqtadagi hosilasini toping.*

◀Ta'rifdan foydalanib topamiz. Ravshanki, berilgan funksiyaning $x_0=2$ nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(2)=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2=4+4\Delta x+\Delta x^2-4=4\Delta x+\Delta x^2$$

bo'ladi. Unda

$$\frac{\Delta f(2)}{\Delta x}=\frac{4\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=4+\Delta x$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$

bo'ladi. Demak,

$$f'(2)=4\ ▶$$

2. $y=c$ $(c=const)$ bo'lsin. Bu holda ixtiyoriy x uchun

$$\Delta y=c-c=0$$

bo'ladi. Demak,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

Shunday qilib, ixtiyoriy x da $y'=0$.

3. $y=x$. Ixtiyoriy x da $\Delta y=x+\Delta x-x=\Delta x$ bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

bo'ladi. Demak,

$$y'=1.$$

4. $y=\frac{1}{x}$. Ixtiyoriy $x\neq 0$ uchun

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)},\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

bo'ladi. Demak,

$$y'=-\frac{1}{x^2}.$$

V BOB

Funksiyaning hosilasi va differensiallari

1-§. Funksiyaning hosilasi. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari

1.1. "Funksiya hosilasi" tushunchasi

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan bo'lib, $x_0\in(a,b)$ bo'lsin. x_0 nuqta bilan birga shu (a,b)ga tegishli bo'lgan $x_0+\Delta x$ ni $(\Delta x\neq 0)$ qaraymiz. Natijada, funksiya ushbu

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

nisbat muayyan $f(x)$ va tayin x_0 da Δx ning funksiyasiga aylanadi. $\Delta x\to 0$ da bu nisbat limiti "funksiya hosilasi" tushunchasiga olib keladi.

Ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *(1)*
limit mavjud bo'lsa, bu limit $y=f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi hosilasi deyiladi va* $f'(x_0)$ *yoki* $\frac{df(x_0)}{dx}$ *yoki* $y'_{x=x_0}$ *kabi belgilanadi.*

Agar (1) limit chekli bo'lsa, hosila chekli deyiladi, (1) limit cheksiz bo'lsa, hosila cheksiz deyiladi.

Eslatma. *Funksiyaning tayin nuqtadagi chekli hosilasi sonni ifodalaydi.*

Agar (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida funksiyaning chekli hosilasi mavjud bo'lsa, unda hosila x ning funksiyasiga aylanadi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari singari funksiyaning o'ng va chap hosilalari ta'riflanadi. Ushbu

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\qquad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

limitlar mavjud bo'lsa, ular mos ravishda funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap hosilalari deyiladi va $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Xususan, $[a,b]$ segmentda berilgan $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi hosilasi deganda, uning shu nuqtadan o'ng hosilasi, b nuqtadagi hosilasi deganda, uning shu nuqtadagi chap hosilasi tushiniladi.

Misollar. 1. *Ushbu*

$$f(x)=x^2$$

funksiyaning $x_0=2$ *nuqtadagi hosilasini toping.*

◀Ta'rifdan foydalanib topamiz. Ravshanki, berilgan funksiyaning $x_0=2$ nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(2)=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2=4+4\Delta x+\Delta x^2-4=4\Delta x+\Delta x^2$$

bo'ladi. Unda

$$\frac{\Delta f(2)}{\Delta x}=\frac{4\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=4+\Delta x$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$

bo'ladi. Demak,

$$f'(2)=4\ ▶$$

2. $y=c$ $(c=const)$ bo'lsin. Bu holda ixtiyoriy x uchun

$$\Delta y=c-c=0$$

bo'ladi. Demak,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

Shunday qilib, ixtiyoriy x da $y'=0$.

3. $y=x$. Ixtiyoriy x da $\Delta y=x+\Delta x-x=\Delta x$ bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

bo'ladi. Demak,

$$y'=1.$$

4. $y=\frac{1}{x}$. Ixtiyoriy $x\neq 0$ uchun

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)},\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

bo'ladi. Demak,

$$y'=-\frac{1}{x^2}.$$

5. $y=\dfrac{2x+1}{3x+1}$. Bu funksiyaning hosilasini ta'rifga ko‘ra hisoblaymiz:

$$\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)+1}{3(x+\Delta x)+1}-\frac{2x+1}{3x+1}=-\frac{\Delta x}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)},$$

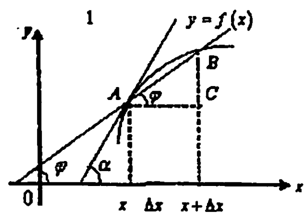
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)}\right]=-\frac{1}{(3x+1)^2}.$$

Demak,

$$y'=-\frac{1}{(3x+1)^2}.$$

1.2. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo‘lib, $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Bu funksiyaning grafigini 1-chizmada keltirilgan egri chiziq tasvirlasin.



1-chizma

AB kesuvchining OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchakni φ, egri chiziqqa A nuqtada o‘tkazilgan urinmaning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchakni α deylik.

ΔABC dan topamiz: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=tg\varphi$

Agar $\Delta x\to 0$ bo‘lsa, ya'ni B nuqta egri chiziq bo‘ylab A nuqtaga intilsa, u holda φ burchak α burchakka intilib

$$tg\varphi\to tg\alpha$$

bo‘ladi. Keyingi munosabatlardan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\alpha$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak,

$$f'(x)=tg\alpha$$

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, bu funksiya grafigiga $A(x,y)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma mavjud. Funksiyaning x nuqtadagi hosilasi $f'(x)$ esa bu urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi. Urinmaning tenglamasi esa ushbu $Y=f(x)+f'(x)(X-x)=y+f'(x)(X-x)$ ko‘rinishda bo‘ladi, bunda (X,Y) urinmadagi o‘zgaruvchi nuqtaning koordinatasi.

Endi hosilaning mexanik ma'nosini keltiramiz. Faraz qilaylik, moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab (bu to‘g‘ri chiziqni OX o‘qi deylik) harakat qilib, M nuqtaga kelganda bosib o‘tilgan yo‘l S bo‘lsin: $OM=S$ (2-chizma).

2-chizma

Ravshanki, bu yo‘l vaqtga bog‘liq bo‘lib, uning funksiyasi bo‘ladi:

$$S=S(t) \tag{2}$$

Odatda, (2) tenglama ***moddiy nuqta harakat qonuni*** deyiladi.

Agar nuqta t vaqt oralig‘ida $S(t)$ masofani, $t+\Delta t$ vaqt oralig‘ida esa $S(t+\Delta t)$ masofani bosib o‘tgan bo‘lsa, unda Δt vaqt oralig‘ida o‘tilgan yo‘l $\Delta S(t)=S(t+\Delta t)-S(t)$ bo‘lib, $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$ nisbat esa moddiy nuqtaning t dan $t+\Delta t$ gacha vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezligini ifodalaydi.

Agar Δt nolga intila borsa, o‘rtacha tezlik moddiy nuqtaning t paytdagi oniy tezligini aniqroq ifodalay boradi. Demak, t paytdagi tezlik $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ bo‘ladi. Keyingi tenglikdan $V=S'(t)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, moddiy nuqtaning harakat qonuni $S=S(t)$ bo‘lganda funksiyaning t nuqtadagi hosilasi $S'(t)$ harakat tezligini ifodalaydi.

1.3. Hosila hisoblash qoidalari

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da berilgan bo‘lib, $\delta\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda:

1) ixtiyoriy o‘zgarmas c *da* $y=c\cdot f(x)$ *funksiya hosilaga ega bo‘lib,* $y'=(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$ *bo‘ladi;*

2) *funksiyalar yig‘indisi* $y=f(x)+g(x)$ *funksiya hosilaga ega bo‘lib,* $y'=(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ *bo‘ladi;*

3) *funksiyalar ko'paytmasi* $y=f(x)\cdot g(x)$ *funksiya hosilaga ega bo'lib,* $y'=(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ *bo'ladi;*

4) *funksiyalar nisbati* $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ *funksiya* $(g(x)\neq 0)$ *hosilaga ega bo'lib,* $y'=(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ *bo'ladi;*

Bu tasdiqlarning birini, masalan 2)-sining isbotini keltiramiz.

◀Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega. Unda ta'rifga binoan

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

bo'ladi. Ravshanki, $y=f(x)+g(x)$ funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]=$$
$$=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x).$$

Demak,

$$y'=(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).▶$$

Misollar

1. $y=\frac{3}{2}x$ bo'lsa, $y'=\left(\frac{3}{2}x\right)'=\frac{3}{2}(x)'=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$ bo'ladi

2. $y=x+\frac{1}{x}$ bo'lsa, $y'=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=(x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}$ bo'ladi.

3. $y=\frac{2x+1}{3x+1}$ bo'lsa,

$$y'=\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)'=\frac{(2x+1)'\cdot(3x+1)-(2x+1)\cdot(3x+1)'}{(3x+1)^2}=$$
$$=\frac{2\cdot(3x+1)-3(2x+1)}{(3x+1)^2}=-\frac{1}{(3x+1)^2}$$

bo'ladi.

5) *Murakkab funksiyaning hosilasi. Aytaylik,* $u=\varphi(x)$ *va* $y=f(u)$ *bo'lib, ular yordamida* $y=f(\varphi(x))$ *murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.*

Agar $u=\varphi(x)$ *funksiya* x *nuqtada* $u'=\varphi'(x)$ *hosilaga ega bo'lib,* $y=f(u)$ *funksiya* u *nuqtada* $(u=\varphi(x))$ $f'(u)$ *hosilaga ega bo'lsa, u holda* $y=f(\varphi(x))$ *murakkab funksiya* x *nuqtada hosilaga ega va* $y'_x=f'(u)\cdot u'_x$, *ya'ni* $y'_x=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ *bo'ladi.*

◀Ravshanki, $\Delta x\neq 0$ bo'lganda $\Delta u=\Delta\varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\neq 0$ bo'ladi. Ayni paytda, $\Delta y=\Delta f(u)=f(u+\Delta u)-f(u)$ bo'lib, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$ bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'_x=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

(ravshanki, $\Delta x\to 0$ *da* $\Delta u\to 0$). Demak,

$$y'_x=[f(\varphi(x))]'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).▶$$

1.4. Teskari funksiyaning hosilasi

Aytaylik, $y=f(x)$ *funksiya* (a,b) *da berilgan bo'lib, u teskari* $x=\varphi(y)$ *funksiyaga ega bo'lsin. Agar* $y=f(x)$ *funksiya* $x\in(a,b)$ *nuqtada* $f'(x)$ *hosilaga ega bo'lib,* $f'(x)\neq 0$ *bo'lsa, teskari funksiya* $\varphi(y)$ *ham* y *nuqtada* $(y=f(x))$ *hosilaga ega va* $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ *bo'ladi.*

◀x va y o'zgaruvchilarning orttirmalari Δx va Δy lar uchun

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}\qquad(\Delta y\neq 0)$$

bo'ladi. Ayni paytda, $\Delta y\neq 0$ da $\Delta x\neq 0$ bo'lib, $\Delta y\to 0$ *da* $\Delta x\to 0$. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

Demak,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.▶$$

1.5. Funksiya hosilalarini hisoblash

Funksiya hosilasi hosila ta'rifi hamda hosila hisoblash qoidalaridan foydalanib hisoblanadi.

1) $y=x^{\alpha}$ $(x>0)$ bo'lsin. Bu funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}=x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\Delta x}=x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikda $\Delta x\to 0$ da limitga o'tib, 12-ma'ruzada keltirilgan (5) muhim limitdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=x^{\alpha-1}\lim_{\Delta x\to 0}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Demak,

$$y'=\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

Agar $y=u^{\alpha}$, $u=u(x)$ bo'lsa, $y'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$ bo'ladi.

2) $y=a^{x}$ $(a>0, a\neq 1)$ bo'lsin. Bu funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^{x}=a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$$

bo'ladi. Bu tenglikda $\Delta x\to 0$ da limitga o'tib, 12-ma'ruzada keltirilgan (4) muhim limitdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^{x}\cdot\ln a.$$

Demak,

$$y'=\left(a^{x}\right)'=a^{x}\cdot\ln a.$$

Xususan, $y=e^{x}$ bo'lsa, $y'=\left(e^{x}\right)'=e^{x}$ bo'ladi.

Agar $y=a^{u}$, $u=u(x)$ bo'lsa, $y'=\left(a^{u}\right)'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$ bo'ladi.

3) $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$ bo'lsin. Bu funksiyaning orttirmasi $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikda $\Delta x\to 0$ da limitga o'tib, 12-ma'ruzada keltirilgan (3) muhim limitdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a e.$$

Demak,

$$y'=\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e$$

Xususan, $y=\ln x$ bo'lsa,

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

bo'ladi.

Agar $y=\log_a u$, $u=u(x)$ bo'lsa,

$$y'=\left(\log_a u\right)'=\frac{1}{u}\log_a e\cdot u'$$

bo'ladi.

4) $y=\sin x$ bo'lsin. Bu funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

bo'ladi. Bu tenglikda $\Delta x\to 0$ da limitga o'tib, 12-ma'ruzada keltirilgan muhim limitdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Demak, $y'=(\sin x)'=\cos x$.

Agar $y=\sin u$, $u=u(x)$ bo'lsa, $y'=(\sin u)'=\cos u\cdot u'$ bo'ladi.

Xuddi yuqoridagidek ko'rsatish mumkinki, $y=\cos x$ bo'lsa, $y'=(\cos x)'=-\sin x$ bo'ladi.

Agar $y=\cos u$, $u=u(x)$ bo'lsa, $y'=(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$ bo'ladi.

5) $y=tgx$ bo'lsin. Ma'lumki,

$$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kasrning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y'=(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Agar $y=tgu$, $u=u(x)$ bo'lsa,

$$y'=(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$$

bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash $y=ctgx$ bo'lsa, $y'=(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ bo'ladi.

Agar $y=ctgu$, $u=u(x)$ bo'lsa, $y'=(ctgu)'=\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$ bo'ladi.

6) $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arc}tgx$, $y=\mathrm{arc}ctgx$ berilgan bo'lsin. Ravshanki, bu funksiyalar mos ravishda

$$x=\sin y,\quad x=\cos y,\quad x=tgy,\quad x=ctgy$$

funksiyalarga nisbatan teskari funksiyalardir.

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'=(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'=(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$y'=(arcctgx)'=\frac{1}{(ctgy)'}=\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+ctg^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Agar $y=\arcsin u$, $y=\arccos u$, $y=\mathrm{arc}tgu$, $y=\mathrm{arc}ctgu$ bo'lib, $u=u(x)$ bo'lsa, u holda

$$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',\quad (\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',$$

$$(\mathrm{arc}tgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u',\quad (\mathrm{arc}ctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$$

bo'ladi.

7) $y=[u(x)]^{v(x)}$ $(u(x)>0)$ bo'lib, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Avvalo, logarifm ta'rifidan foydalanib, berilgan funksiyani quyidagicha:

$$y=[u(x)]^{v(x)}=e^{\ln[u(x)]^{v(x)}}=e^{v(x)\ln u(x)}$$

yozib olamiz. So'ng hosila hisoblash va murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidalaridan foydalanib topamiz:

$$y'=\left([u(x)]^{v(x)}\right)'=\left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]'=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot[v(x)\cdot\ln u(x)]'=$$

$$=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\right)=$$

$$=[u(x)]^{v(x)}\cdot\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x)\right).$$

Hosilalar jadvali. Yuqorida funksiya hosilalari uchun topilgan formulalarni jamlab, ularni jadval ko'rinishida yozamiz:

1) $(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$

2) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$, $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$

3) $(e^x)'=e^x$, $(e^u)'=e^u\cdot u'$

4) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$, $(\log_a u)'=\frac{1}{u}\log_a e\cdot u'$

5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$

6) $(\sin x)'=\cos x$, $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$

7) $(\cos x)'=-\sin x$, $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$

8) $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$

9) $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $(ctgu)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

10) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

12) $(\operatorname{arc}tgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arc}tgu)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$,

13) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Misollar

Endi hosilalar jadvali hamda hosila hisoblash qoidalaridan foydalanib, funksiyalarning hosilalarini topamiz:

1. $y=2^{tgx}$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasi

$$y'=\left(2^{tgx}\right)'=2^{tgx}\cdot\ln 2\cdot(tgx)'=2^{tgx}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2^{tgx}\ln 2}{\cos^2 x}$$

bo'ladi.

2. $y=x^2+\sin e^x$ bo'lsin.

$$y'=\left(x^2+\sin e^x\right)'=2x+\cos e^x\cdot e^x.$$

3. $y=\ln tgx$ bo'lsin.

$$y'=(\ln tgx)'=\frac{1}{tgx}\cdot(tgx)'=\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

4. $y=\ln^6 \sin x$ bo'lsin.

$$y'=6\ln^5\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x.$$

5. $y=\dfrac{\ln^2 x}{\arcsin x}$ bo'lsin.

$$y'=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot\arcsin x-\ln^2 x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}.$$

6. $y=\sqrt{\sin(\ln x)}$ bo'lsin.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\sin(\ln x)}}\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}.$$

Mashqlar

Berilgan funksiyaning hosilasini toping.

1. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$ 2. $y=\dfrac{(2x^2-x-1)}{3\sqrt{2+4x}}$

3. $y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$ 4. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1+3x^4}}$

5. $y=(\sin x)^{5a^x}$ 6. $y=(\cos 5x)^{e^x}$

2-§. Funksiyaning differensiali. Taqribiy formulalar

$f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lsin. Agar funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Funksiya (a,b) ning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u (a,b) da differensiallanuvchi deyiladi.

Odatda, funksiyaning ***hosilasini topish*** uni ***differensiallash*** deyiladi.

2.1. "Funksiya differensiali" tushunchasi

Faraz qilaylik, $y=f(x)$funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$$

bo'ladi, bunda α – cheksiz kichik funksiya ($\Delta x\to 0da \quad \alpha=\alpha(\Delta x)\to 0$). Keyingi tenglikning ikki tomonini Δx ga ko'paytirib topamiz:

$$\Delta y=y'\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \qquad (1)$$

Yuqoridagi (1) tenglikdan, y' hosila chekli bo'lganda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $y=f(x)$ funksiya x nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Biroq, funksiya biror nuqtada uzluksiz bo'lsa, u shu nuqtada hosilaga ega bo'lmasligi mumkin.

Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, biroq u shu nuqtada hosilaga ega emas, chunki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

limit mavjud emas.

Funksiya orttirmasi $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ ni ifodalovchi (1) tenglikning o'ng tomoni ikki qo'shiluvchi $y'\cdot\Delta x$ hamda $\alpha\cdot\Delta x$ lardan iborat. Birinchi qo'shiluvchi uchun $y'\neq 0$ bo'lganda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$$

11) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

12) $(\mathrm{arc}tgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arc}tgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$,

13) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Misollar

Endi hosilalar jadvali hamda hosila hisoblash qoidalaridan foydalanib, funksiyalarning hosilalarini topamiz:

1. $y = 2^{tgx}$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasi

$$y' = \left(2^{tgx}\right)' = 2^{tgx} \cdot \ln 2 \cdot (tgx)' = 2^{tgx} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2^{tgx} \ln 2}{\cos^2 x}$$

bo'ladi.

2. $y = x^2 + \sin e^x$ bo'lsin.

$$y' = \left(x^2 + \sin e^x\right)' = 2x + \cos e^x \cdot e^x.$$

3. $y = \ln tgx$ bo'lsin.

$$y' = (\ln tgx)' = \frac{1}{tgx} \cdot (tgx)' = \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4. $y = \ln^6 \sin x$ bo'lsin.

$$y' = 6\ln^5 \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

5. $y = \frac{\ln^2 x}{\arcsin x}$ bo'lsin.

$$y' = \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \arcsin x - \ln^2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}.$$

6. $y = \sqrt{\sin(\ln x)}$ bo'lsin.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin(\ln x)}} \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Mashqlar

Berilgan funksiyaning hosilasini toping.

1. $y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2-4)}$ 2. $y = \frac{(2x^2 - x - 1)}{3\sqrt{2+4x}}$

3. $y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$ 4. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1+3x^4}}$

5. $y = (\sin x)^{5e^x}$ 6. $y = (\cos 5x)^{e^x}$

2-§. Funksiyaning differensiali. Taqribiy formulalar

$f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lsin. Agar funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Funksiya (a,b) ning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u (a,b) da differensiallanuvchi deyiladi.

Odatda, funksiyaning ***hosilasini topish*** uni ***differensiallash*** deyiladi.

2.1. "Funksiya differensiali" tushunchasi

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$$

bo'ladi, bunda α – cheksiz kichik funksiya ($\Delta x \to 0 da$ $\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$). Keyingi tenglikning ikki tomonini Δx ga ko'paytirib topamiz:

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x \qquad (1)$$

Yuqoridagi (1) tenglikdan, y' hosila chekli bo'lganda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $y = f(x)$ funksiya x nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Biroq, funksiya biror nuqtada uzluksiz bo'lsa, u shu nuqtada hosilaga ega bo'lmasligi mumkin.

Masalan, $y = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz, biroq u shu nuqtada hosilaga ega emas, chunki

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

limit mavjud emas.

Funksiya orttirmasi $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ ni ifodalovchi (1) tenglikning o'ng tomoni ikki qo'shiluvchi $y' \cdot \Delta x$ hamda $\alpha \cdot \Delta x$ lardan iborat. Birinchi qo'shiluvchi uchun $y' \neq 0$ bo'lganda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$$

bo'lib, undan Δx va $y' \cdot \Delta x$ larning nolga intilish tartiblari bir xil ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi qo'shiluvchi uchun

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

bo'lib, undan $\alpha \cdot \Delta x \to 0$ ni $\Delta x \to 0$ ga qaraganda tezroq ekanligi kelib chiqadi.

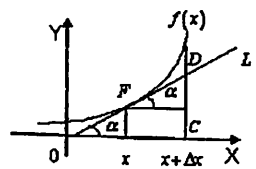
Demak, $\Delta x \to 0$ da $\Delta x \to 0$ ni $y' \cdot \Delta x$ qo'shiluvchi aniqlaydi. Shuning uchun $y' \cdot \Delta x$ qo'shiluvchi funksiya orttirmasi Δy ning bosh qismi deyiladi.

Ta'rif. *Funksiya orttirmasining (1) ifodasidagi $y' \cdot \Delta x$ qo'shiluvchi $y = f(x)$* ***funksiyaning differensiali*** *deyiladi va dy yoki $df(x)$ kabi belgilanadi.*

Demak, $dy = y' \cdot \Delta x$ $\quad (df(x) = f'(x) \cdot \Delta x)$.

2.2. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi 1-chizmada ko'rsatilgan egri chiziqni tasvirlasin.



1-chizma

Bu egri chiziqqa, uning $F = F(x,y)$ nuqtasida FL urinma o'tkazib, uning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni α дейлик. Unda, ma'lumki, $tg\alpha = f'(x)$ bo'ladi.

Ravshanki, ΔFDC dan $\frac{DC}{FC} = tg\alpha$ bo'lishini topamiz. Keyingi tenglikdan $DC = tg\alpha \cdot FC$ ya'ni

$$DC = f'(x) \cdot \Delta x$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ayni paytda, $f'(x) \cdot \Delta x = df(x)$

Demak,

$$DC = df(x),$$

ya'ni $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali funksiya grafigi $F(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi DC ni ifodalaydi.

Xususan, $y = x$ bo'lganda, $dy = y' \Delta x = \Delta x$, ya'ni $\Delta x = dx$ bo'lib, funksiya differensiali uchun quyidagi

$$dy = y'dx = f'(x)dx \qquad (2)$$

ifodaga kelamiz.

Shunday qilib, funksiyaning differensiali funksiya hosilasi bilan argument differensiali ko'paytmasiga teng.

Endi funksiya hosilalari jadvalidan foydalanib, ularning differensiallari jadvalini keltiramiz:

1) $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx,$

2) $d(a^x) = a^x \cdot \ln a \, dx,$

3) $d(e^x) = e^x dx,$

4) $d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e dx,$

5) $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx,$

6) $d(\sin x) = \cos x \, dx,$

7) $d(\cos x) = -\sin x \, dx,$

8) $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x} dx,$

9) $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx,$

10) $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$

11) $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$

12) $d(\mathrm{arc}tgx) = \frac{1}{1+x^2} dx,$

13) $d(\mathrm{arc}ctgx) = -\frac{1}{1+x^2} dx.$

Masalan, $y = e^{\sqrt{arctgx}}$ funksiyaning differensiali

$$dy = d\left(e^{\sqrt{arctgx}}\right) = \left(e^{\sqrt{arctgx}}\right)' \cdot dx = e^{\sqrt{arctgx}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{arctgx}} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

bo'ladi.

2.3. Yig'indi, ko'paytma va nisbatning differensiali. Murakkab funksiyaning differensiali

Ikki funksiya yig'indisi, ko'paytmasi va nisbatining hosilalari haqidagi ma'lumotlardan foydalanib, ularning differensiallarini topamiz.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da berilgan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda shu nuqtada $y=f(x)+g(x)$ funksiya hosilaga ega bo'lib, $y'=f'(x)+g'(x)$ bo'ladi. Bu tenglikning ikki tomonini dx ga ko'paytirib $y'\cdot dx=f'(x)dx+g'(x)dx$ ya'ni $dy=df(x)+dg(x)$ bo'lishini topamiz. Demak,

$$d\big(f(x)+g(x)\big)=df(x)+dg(x).$$

Xuddi yuqoridagidek

$$d(c\cdot f(x))=c\cdot df(x),\quad (c=const)$$

$$d(f(x)\cdot g(x))=g(x)\cdot df(x)+f(x)\cdot dg(x),$$

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}\qquad (g(x)\neq 0)$$

bo'lishi isbotlanadi.

Biz yuqorida $y=f(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, uning differensiali

$$dy=f'(x)dx$$

bo'lishini, ya'ni funksiya differensiali funksiya hosilasi bilan argument differensiali ko'paytmasiga teng bo'lishini ko'rdik.

Endi $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ bo'lib, ular $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiyani hosil qilsin, bunda $f(u)$ funksiya $f'(u)$, $\varphi(x)$ funksiya $\varphi'(x)$ hosilalarga ega.

Ravshanki, murakkab funksiyaning hosilasi

$$y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$y'\cdot dx=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx \qquad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar

$$y'dx=dy,\qquad \varphi'(x)dx=d\varphi(x)=du$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda (3) tenglik ushbu

$$dy=f'(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)$$

ya'ni

$$dy=f'(u)du \qquad (4)$$

ko'rinishga keladi.

Demak, funksiya murakkab bo'lgan holda ham funksiya differensiali funksiya hosilasi $f'(u)$ bilan argument differensiali du ko'paytmasidan iborat.

Ikkala holda ham ($y=f(x)$); $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ *hollarda*) funksiya differensiali bir xil ko'rinishga ega bo'ladi. (Qaralsin (2) va (4)). Odatda, bu xossa **differensial ko'rinishining invariantligi** deyiladi.

2.4. Taqribiy formulalar

O'rganiladigan ko'p jarayonlar funksiyalar bilan, aniqrog'i, funksiyalarning nuqtadagi qiymatini hisoblash bilan bog'liq. Funksiyalarning murakkab bo'lishi, ularning nuqtadagi qiymatini topishni ancha qiyinlashtiradi. Natijada, funksiyalarning nuqtadagi qiymatini taqribiy hisoblash zaruriyati yuzaga keladi.

Funksiyaning differensiali esa taqribiy formulalarni topish imkonini beradi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)\neq 0$ hosilaga ega bo'lsin. U holda

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

funksiya orttirmasi uchun

$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x\qquad (f'(x)\cdot\Delta x=dy)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{dy}=\frac{f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x}{f'(x)\cdot\Delta x}=1+\frac{\alpha}{f'(x)}$$

bo'ladi, bunda $\Delta x\to 0$ da $\alpha\to 0$.

Keyingi tenglikdan $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1$ bo'lishi kelib chiqadi.

Bu hol ushbu

$$\Delta y\approx dy \qquad (5)$$

munosabatga (taqribiy tenglikga) olib keladi.

Ravshanki, Δx ning har qancha kichik bo'lishi bu taqribiy tenglikning aniqligini shuncha oshiradi.

Funksiya differensialining tuzilishi funksiya orttirmasiga nisbatan ancha sodda bo'lishi (5) taqribiy formuladan taqribiy hisoblashlarda keng foydalanishga olib keladi.

(5) formulani quyidagicha

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

ham yozsa bo'ladi.

Misol. *Ushbu*

$\sqrt[4]{17}$ *miqdor taqribiy hisoblansin.*

◀Quyidagi $f(x)=\sqrt[4]{x}$ funksiyani olamiz. Unda

$$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

bo'ladi.

Endi $x=16$, $\Delta x=1$ deb topamiz:

$$\sqrt[4]{17}\approx\sqrt[4]{16}+\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\sqrt[4]{2^4}+\frac{1}{4\sqrt[4]{2^{12}}}=2+\frac{1}{4\cdot 8}=2+\frac{1}{32}=2\frac{1}{32}=2,03125.$$ ►

Mashqlar

Differensial yordamida taqribiy hisoblang.

1. $y=\sqrt[3]{x},\ x=7,76$ 2. $y=\sqrt[3]{x^3+7x},\ x=1,012$

3. $y=\arcsin x,\ x=0,08$ 4. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x},\ x=0,01$

3-§. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

3.1. Yuqori tartibli hosilalar

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, uning ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqtasida $y'=f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ ham x ning funksiyasi bo'lib, u ham hosilaga ega bo'lishi mumkin.

$f'(x)$ ning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'', yoki $f''(x)$ yoki $\frac{d^2y}{dx^2}$ kabi belgilanadi. Demak, $y''=(y')'$, $f''(x)=(f'(x))'$. $f''(x)$ ning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi deyiladi va

$$y''',\ ,\hat{e}\grave{e}\quad f'''(x)\ ,\hat{e}\grave{e}\quad \frac{d^3y}{dx^3}$$

kabi belgilanadi.

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiyaning to'rtinchi va h.k., n-tartibli hosilalari ta'riflanadi va bu yuqori tartibli hosilalar quyidagicha

$$f^{IV}(x),\ldots,f^{(n)}(x)$$

belgilanadi.

Masalan, $y=2x^3-5x^2+1$ funksiyaning yuqori tartibli hosilalari

$$y'=6x^2-10x,\quad y''=12x-10,\quad y'''=12,$$
$$y^{(IV)}=y^{(V)}=\ldots=0$$

bo'ladi.

Funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topish uchun, umuman aytganda, uning hamma avvalgi tartibli hosilalarini hisoblash kerak bo'ladi. Ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalarini bir yo'la hisoblash mumkin.

Misollar

1. $y=a^x$ *funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:*

$$y'=a^x\ln a,$$
$$y''=\left(a^x\ln a\right)'=a^x\cdot(\ln a)^2,$$
$$y'''=\left(a^x(\ln a)^2\right)'=a^x\cdot(\ln a)^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=\left(a^x(\ln a)^{n-1}\right)'=a^x(\ln a)^n.$$

Xususan, $y=e^x$ bo'lsa, $y^{(n)}=e^x$ bo'ladi.

2. $y=\ln x$ *funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:*

$$y'=\frac{1}{x},$$
$$y''=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}=(-1)\cdot\frac{1}{x^2},$$
$$y'''=\left[(-1)\cdot\frac{1}{x^2}\right]'=(-1)\cdot\frac{2}{x^3}=(-1)^2\frac{1\cdot 2}{x^3},$$
$$y^{(IV)}=\left[(-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2}{x^3}\right]'=(-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\cdot(-1)=(-1)^3\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}\qquad (n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots n)$$

3. $y=\sin x$ *funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:*

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}),$$
$$y''=(y')'=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'''=[-\sin x]'=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Xuddi shunga o'xshash, agar $y=\cos x$ bo'lsa, u holda

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi.

Eslatma. *Yuqorida keltirilgan funksiyalarning n-tartibli hosilalarini ifodalovchi formulalar induksiya usuli yordamida isbotlanadi.*

Endi $x=16$, $\Delta x=1$ deb topamiz:

$$\sqrt[4]{17}\approx\sqrt[4]{16}+\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\sqrt[4]{2^4}+\frac{1}{4\sqrt[4]{2^{12}}}=2+\frac{1}{4\cdot 8}=2+\frac{1}{32}=2\frac{1}{32}=2,03125.$$ ▶

Mashqlar

Differensial yordamida taqribiy hisoblang.

1. $y=\sqrt[3]{x},\ x=7,76$ 2. $y=\sqrt[3]{x^3+7x},\ x=1,012$

3. $y=\arcsin x,\ x=0,08$ 4. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x},\ x=0,01$

3-§. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

3.1. Yuqori tartibli hosilalar

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo‘lib, uning ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqtasida $y'=f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Ravshanki, $f'(x)$ ham x ning funksiyasi bo‘lib, u ham hosilaga ega bo‘lishi mumkin.

$f'(x)$ning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'', *yoki* $f''(x)$ *yoki* $\frac{d^2y}{dx^2}$ kabi belgilanadi.

Demak, $y''=(y')'$, $f''(x)=(f'(x))'$. $f''(x)$ ning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi deyiladi va

$$y''', \quad ,\hat{e}\grave{e} \quad f'''(x) \quad ,\hat{e}\grave{e} \quad \frac{d^3y}{dx^3}$$

kabi belgilanadi.

Xuddi shunga o‘xshash $f(x)$ funksiyaning to‘rtinchi va h.k., n-tartibli hosilalari ta’riflanadi va bu yuqori tartibli hosilalar quyidagicha

$$f^{IV}(x),\dots,f^{(n)}(x)$$

belgilanadi.

Masalan, $y=2x^3-5x^2+1$ funksiyaning yuqori tartibli hosilalari

$$y'=6x^2-10x,\quad y''=12x-10,\quad y'''=12,$$
$$y^{(IV)}=y^{(V)}=\ldots=0$$

bo‘ladi.

Funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topish uchun, umuman aytganda, uning hamma avvalgi tartibli hosilalarini hisoblash kerak bo‘ladi. Ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalarini bir yo‘la hisoblash mumkin.

Misollar

1. $y=a^x$ *funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:*

$$y'=a^x\ln a,$$
$$y''=\left(a^x\ln a\right)'=a^x\cdot(\ln a)^2,$$
$$y'''=\left(a^x(\ln a)^2\right)'=a^x\cdot(\ln a)^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)}=\left(a^x(\ln a)^{n-1}\right)'=a^x(\ln a)^n.$$

Xususan, $y=e^x$ bo‘lsa, $y^{(n)}=e^x$ bo‘ladi.

2. $y=\ln x$ *funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:*

$$y'=\frac{1}{x},$$
$$y''=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}=(-1)\cdot\frac{1}{x^2},$$
$$y'''=\left[(-1)\cdot\frac{1}{x^2}\right]'=(-1)\cdot\frac{2}{x^3}=(-1)^2\frac{1\cdot 2}{x^3},$$
$$y^{(IV)}=\left[(-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2}{x^3}\right]'=(-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\cdot(-1)=(-1)^3\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}\qquad (n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots n)$$

3. $y=\sin x$ *funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:*

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}),$$
$$y''=(y')'=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'''=[-\sin x]'=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Xuddi shunga o‘xshash, agar $y=\cos x$ bo‘lsa, u holda

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

bo‘ladi.

Eslatma. *Yuqorida keltirilgan funksiyalarning n-tartibli hosilalarini ifodalovchi formulalar induksiya usuli yordamida isbotlanadi.*

Masalan, $y=e^{3+4x}$ funksiyaning yuqori tartibli hosilalari quyidagicha bo'ladi:

$$y'=e^{3+4x}\cdot 4,$$
$$y''=e^{3+4x}\cdot 4^2,$$
$$y'''=e^{3+4x}\cdot 4^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)}=e^{3+4x}\cdot 4^n.$$

3.2. Sodda qoidalar. Leybnis formulasi

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da berilgan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada $f^n(x)$ va $g^n(x)$ hosilalarga ega bo'lsin:

1) $(c\cdot f(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$, $c=const$,

2) $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$

bo'ladi. Bu tengliklarning o'rinli bo'lishi hosila hisoblash qoidalardan kelib chiqadi.

Endi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ko'paytmasi $y=f(x)\cdot g(x)$ ning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:

$$y'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x),$$
$$y''=f''(x)\cdot g(x)+f'(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g'(x)+g'(x)\cdot f''(x)=$$
$$=f''\cdot g+2f'\cdot g'+f\cdot g'',$$
$$y'''=f'''\cdot g+f''\cdot g'+2f''\cdot g'+2f'\cdot g''+f'\cdot g''+f\cdot g'''=$$
$$=f'''\cdot g'+3f''\cdot g'+3f'\cdot g''+f\cdot g''',$$
$$y^{(IV)}=f^{(IV)}\cdot g+4f'''\cdot g'+6f''\cdot g''+4f'\cdot g'''+f\cdot g^{(IV)}$$

umuman,

$$y^{(n)}=f^{(n)}\cdot g+C_n^1 f^{(n-1)}g'+C_n^2 f^{(n-2)}\cdot g''+\dots+f\cdot g^{(n)} \qquad (1)$$

bo'ladi, bunda $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ $\quad (k!=1\cdot 2\dots k)$

Keyingi tenglikning o'rinli bo'lishi matematik induksiya usuli yordamida ko'rsatiladi.

(1) formula **Leybnis formulasi** deyiladi.

4-misol. *Ushbu $y=x\cdot e^x$ funksiyaning n-tartibli hosilasini toping.*

◀Bu tenglikda $e^x=f(x)$, $\quad x=g(x)$ deylik. Ravshanki,

$$f^{(n)}(x)=(e^x)^{(n)}=e^x \qquad (n=1,2,3,\dots)$$
$$g'(x)=1,\quad g''(x)=g'''(x)=\dots=g^{(n)}(x)=0$$

Unda Leybnis formulasiga ko'ra $y^{(n)}=(e^x\cdot x)^{(n)}=e^x\cdot x+n\cdot e^x$ bo'ladi.▶

3.3. Yuqori tartibli differensiallar

Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiyaning differensiali $dy=f'(x)dx$ da $f'(x)$ ko'payuvchi x ning funksiyasi, dx esa x ning orttirmasi Δx bo'lib, x ga bog'liq bo'lmaydi. Demak, dy x ning funksiyasi bo'ladi.

Ta'rif. *$y=f(x)$ funksiya differensialining differensiali berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va d^2y yoki $d^2f(x)$ kabi belgilanadi.*

Demak, $d^2f(x)=d(df(x))$ $\qquad (d^2y=d(dy))$.

Funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali d^2y, o'z navbatida, x ning funksiyasi bo'lishi mumkin. Bu differensialning differensiali $y=f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli differensiali deyiladi va d^3y yoki $d^3f(x)$ kabi belgilanadi. Demak,

$$d^3f(x)=d(d^2f(x)) \qquad (d^3y=d(d^2y))$$

Umuman $y=f(x)$ funksiyaning n-tartibli differensiali d^ny quyidagicha

$$d^ny=d(d^{n-1}y) \qquad (d^nf(x)=d(d^{n-1}f(x)))$$

ta'riflanadi.

Shuni yana bir bor ta'kidlaymizki, yuqoridagi funksiya differensiallarida argument x ning differensiali dx $(dx=\Delta x)$ o'zgarmas sifatida qaraladi. Shu holatdan foydalanib, yuqori tartibli differensiallarning yuqori tartibli hosilalar orqali ifodalarini topamiz:

$$d^2y=d(dy)=d(y'\cdot dx)=dx\cdot dy'=dx\cdot y''\cdot dx=y''dx^2,$$
$$d^3y=d(d^2y)=d(y''\cdot dx^2)=dx^2\cdot dy''=dx^2\cdot y'''\cdot dx=y'''\cdot dx^3$$

umuman, $d^ny=y^{(n)}\cdot dx^n$.

Keyingi tenglik matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi.

Masalan, $y=\sin x$ funksiyaning 8-tartibli differensiali

$d^8y=y^{(8)}\cdot dx^8=\sin\left(x+8\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)dx^8=\sin x dx^8$ bo'ladi.

Mashqlar

Berilgan funksiyalarning n-tartibli hosilasini hisoblang.

1. $y=\sqrt{x}$
2. $y=\sin 2x+\cos(x+1)$
3. $y=\sqrt[5]{e^{7x-1}}$
4. $y=\lg(5x+2)$

Masalan, $y=e^{3+4x}$ funksiyaning yuqori tartibli hosilalari quyidagicha bo'ladi:

$$y'=e^{3+4x}\cdot 4,$$
$$y''=e^{3+4x}\cdot 4^2,$$
$$y'''=e^{3+4x}\cdot 4^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)}=e^{3+4x}\cdot 4^n.$$

3.2. Sodda qoidalar. Leybnis formulasi

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da berilgan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada $f^n(x)$ va $g^n(x)$ hosilalarga ega bo'lsin:

1) $(c\cdot f(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x), \quad c=const,$

2) $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$

bo'ladi. Bu tengliklarning o'rinli bo'lishi hosila hisoblash qoidalardan kelib chiqadi.

Endi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ko'paytmasi $y=f(x)\cdot g(x)$ ning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:

$$y'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x),$$
$$y''=f''(x)\cdot g(x)+f'(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g'(x)+g'(x)\cdot f''(x)=$$
$$=f''\cdot g+2f'\cdot g'+f\cdot g'',$$
$$y'''=f'''\cdot g+f''\cdot g'+2f''\cdot g'+2f'\cdot g''+f'\cdot g''+f\cdot g'''=$$
$$=f'''\cdot g'+3f''\cdot g'+3f'\cdot g''+f\cdot g''',$$
$$y^{(IV)}=f^{(IV)}\cdot g+4f'''\cdot g'+6f''\cdot g''+4f'\cdot g'''+f\cdot g^{(IV)}$$

umuman,

$$y^{(n)}=f^{(n)}\cdot g+C_n^1 f^{(n-1)}g'+C_n^2 f^{(n-2)}\cdot g''+\dots+f\cdot g^{(n)} \qquad (1)$$

bo'ladi, bunda $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \qquad (k!=1\cdot 2\dots k)$

Keyingi tenglikning o'rinli bo'lishi matematik induksiya usuli yordamida ko'rsatiladi.

(1) formula **Leybnis formulasi** deyiladi.

4-misol. *Ushbu* $y=x\cdot e^x$ *funksiyaning* n*-tartibli hosilasini toping.*

◀Bu tenglikda $e^x=f(x), \quad x=g(x)$ deylik. Ravshanki,

$$f^{(n)}(x)=(e^x)^{(n)}=e^x \qquad (n=1,2,3,\dots)$$
$$g'(x)=1, \quad g''(x)=g'''(x)=\dots=g^{(n)}(x)=0$$

Unda Leybnis formulasiga ko'ra $y^{(n)}=(e^x\cdot x)^{(n)}=e^x\cdot x+n\cdot e^x$ bo'ladi.▶

3.3. Yuqori tartibli differensiallar

Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiyaning differensiali $dy=f'(x)dx$ da $f'(x)$ ko'payuvchi x ning funksiyasi, dx esa x ning orttirmasi Δx bo'lib, x ga bog'liq bo'lmaydi. Demak, dy x ning funksiyasi bo'ladi.

Ta'rif. $y=f(x)$ *funksiya differensialining differensiali berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va* d^2y *yoki* $d^2f(x)$ *kabi belgilanadi.*

Demak, $d^2f(x)=d(df(x)) \qquad (d^2y=d(dy))$.

Funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali d^2y, o'z navbatida, x ning funksiyasi bo'lishi mumkin. Bu differensialning differensiali $y=f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli differensiali deyiladi va d^3y yoki $d^3f(x)$ kabi belgilanadi. Demak,

$$d^3f(x)=d(d^2f(x)) \qquad (d^3y=d(d^2y))$$

Umuman $y=f(x)$ funksiyaning n-tartibli differensiali d^ny quyidagicha

$$d^ny=d(d^{n-1}y) \qquad (d^nf(x)=d(d^{n-1}f(x)))$$

ta'riflanadi.

Shuni yana bir bor ta'kidlaymizki, yuqoridagi funksiya differensiallarida argument x ning differensiali dx $(dx=\Delta x)$ o'zgarmas sifatida qaraladi. Shu holatdan foydalanib, yuqori tartibli differensiallarning yuqori tartibli hosilalar orqali ifodalarini topamiz:

$$d^2y=d(dy)=d(y'\cdot dx)=dx\cdot dy'=dx\cdot y''\cdot dx=y''dx^2,$$
$$d^3y=d(d^2y)=d(y''\cdot dx^2)=dx^2\cdot dy''=dx^2\cdot y'''\cdot dx=y'''\cdot dx^3$$

umuman, $d^ny=y^{(n)}\cdot dx^n$.

Keyingi tenglik matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi.

Masalan, $y=\sin x$ funksiyaning 8-tartibli differensiali

$d^8y=y^{(8)}\cdot dx^8=\sin\left(x+8\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx^8=\sin x dx^8$ bo'ladi.

Mashqlar

Berilgan funksiyalarning n–tartibli hosilasini hisoblang.

1. $y=\sqrt{x}$
2. $y=\sin 2x+\cos(x+1)$
3. $y=\sqrt[5]{e^{7x-1}}$
4. $y=\lg(5x+2)$

4-§. Differensiallanuvchi funksiyalarning xossalari. Teylor formulasi

Biror oraliqda differensiallanuvchi bo‘lgan funksiyalar ma’lum xossalarga ega bo‘ladi. Odatda, ular teoremalar orqali ifodalanadi. Xossalardan ba’zilarini keltiramiz.

4.1. Differensiallanuvchi funksiyalarning xossalari

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo‘lib, $x_0\in(a,b)$ bo‘lsin. Ma’lumki, ixtiyoriy $x\in(a,b)$ uchun $f(x)\le f(x_0)$ $\quad (f(x)\ge f(x_0))$ bo‘lsa, $f(x_0)$ miqdor $f(x)$ funksiyaning (a,b) dagi eng katta qiymati (eng kichik qiymati) deyiladi.

1-teorema (Ferma). *Agar $y=f(x)$ funksiya c nuqtada $(c\in(a,b))$ o‘zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishib, funksiya c nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, u holda $f'(c)=0$ bo‘ladi.*

◀Aytaylik, $f(x)$ funksiya c nuqtada $(c\in(a,b))$ o‘zining eng katta qiymatiga erishsin:

$$f(x)\le f(c) \qquad (x\in(a.b)) \tag{1}$$

c nuqtaga Δx orttirma beramizki $c+\Delta x\in(a,b)$ bo‘lsin.

Unda (1) ko‘ra, $f(c+\Delta x)\le f(c)$ bo‘ladi. Keyingi tengsizlikdan $\Delta y=f(c+\Delta x)-f(c)\le 0$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Shartga ko‘ra $f(x)$ funksiya c nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega.

Ta’rifga binoan $f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Agar $\Delta x>0$ bo‘lsa, unda $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$ bo‘lib,

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0 \tag{2}$$

bo‘ladi.

Agar $\Delta x<0$ bo‘lsa, unda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$$

bo‘lib,

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0 \tag{3}$$

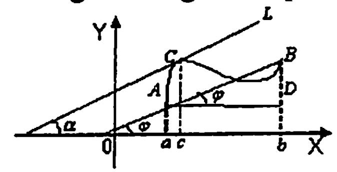
bo‘ladi. (2) va (3) munosabatlardan

$$f'(c)=0$$

bo‘lishi kelib chiqadi.▶

2-teorema (Lagranj). *Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, (a,b) intervalda hosilaga ega bo‘lsa, u holda a bilan b orasida shunday c nuqta $(a<c<b)$ topiladiki, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ bo‘ladi.*

◀Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, uning grafigi 1-chizmada tasvirlangan AB egri chiziqni ifodalasin.



1-chizma

AB vatarning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchakni φ deylik. Unda bu vatar (to‘g‘ri chiziq)ning burchak koeffitsiyenti $tg\varphi$ bo‘ladi.

AB egri chiziqda shunday C nuqta bo‘lishini tasavvur etish mumkinki, egri chiziqqa shu nuqtada o‘tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo‘ladi. Bu L urinmaning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchakni α deylik. Ravshanki, urinma to‘g‘ri chiziq bo‘lib, uning burchak koeffitsiyenti $tg\alpha$ bo‘ladi.

Ayni paytda, $y=f(x)$ funksiya hosilasining geometrik ma’nosiga ko‘ra

$$tg\alpha=f'(c) \tag{4}$$

bo‘ladi, bunda c nuqta AB egri chiziqdagi C ning absissasi.

Modomiki, vatar bilan urinma parallel ekan, unda

$$tg\varphi=tg\alpha \tag{5}$$

bo‘ladi.

1-chizma keltirilgan ADB to‘g‘ri burchakli uchburchakda

$$AD=b-a,\quad BD=f(b)-f(a),\quad \angle A=\varphi.$$

Unda shu uchburchakdan

$$tg\varphi=\frac{BD}{AD}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{6}$$

bo‘lishini topamiz.

(4), (5), va (6) munosabatlardan

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{7}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.▶

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. *Agar* (a,b) *intervalda* $f'(x)=0$ *bo'lsa, u holda funksiya* (a,b) *da o'zgarmas bo'ladi.*

◀ (a,b) intervalda tayin x_0 va ixtiyoriy x nuqtalarni olamiz. So'ng $[x_0,x]$ kesma(yoki $[x,x_0]$) ga Lagranj teoremasini qo'llaymiz:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c)=0.$$

Bundan

$$f(x)=f(x_0)=const$$

bo'lishi kelib chiqadi.▶

2-natija. $y=f(x)$ *funksiya uchun Lagranj teoremasining shartlari bajarilib,*

$$f(a)=f(b)$$

bo'lsin. U holda a *va* b *orasida shunday* c *nuqta* $(a<c<b)$ *topiladiki,*

$$f'(c)=0$$

bo'ladi.

◀Bu natijaning isboti $f(a)=f(b)$ shartda (7) tenglikdan kelib chiqadi.▶

Endi Lagranj teoremasidan umumiyroq bo'lgan teoremani isbotsiz keltiramiz.

3-teorema (Koshi). *Aytaylik,* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar*

1) $[a,b]$ *segmentda uzluksiz,*

2) (a,b) *intervalda* $f'(x), g'(x)$ *hosilalarga ega,*

3) (a,b) *da* $g'(x)\neq 0$ *bo'lsin. U holda* a *bilan* b *orasida shunday* c $(a<c<b)$ *topiladiki,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

Xususan, $g(x)=x$ bo'lganda Koshi teoremasidan Lagranj teoremasi kelib chiqadi.

4.2. Teylor formulasi

Faraz qilaylik, $f(x)$funksiya x_0 nuqtaning biror atrofi $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da $(\delta>0)$

$$f'(x), f''(x), f'''(x),\dots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$$

hosilalarga ega bo'lsin. Berilgan funksiya va uning hosilalarining x_0 nuqtadagi qiymatlaridan foydalanib, ushbu

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (8)$$

ko'phad (butun ratsional funksiya) ni hosil qilamiz.

Bu ko'phadni $f(x)$ funksiyaga qanchalik yaqinligini aniqlash maqsadida

$$R_n(x)=f(x)-\Big[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Big] \qquad (9)$$

ayirmani qaraymiz. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+ \dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (10)$$

(10) formula $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasi deyiladi, $R_n(x)$ ga esa Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi.

Qoldiq had $R_n(x)$ning (9) formula bilan ifodalanishi (8) ko'phadning $f(x)$ ga yaqin bo'lishi haqida xulosa chiqarishga imkon bermaydi. Agar $R_n(x)$ni n va x larning qiymatlari bo'yicha baholay olsak va uning nolga intilishini ko'rsata olsak, u holda $f(x)$ funksiya (8) ko'phadga yaqin deya olamiz.

x o'zgaruvchini tayinlab, t ni o'zgaruvchi sifatida qarab quyidagi

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \qquad (11)$$

yordamchi funksiyani $[x_0,x]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$ (yoki $[x,x_0]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$) da qaraymiz. Bu funksiyaning hosilasini topamiz:

$$F'(t)=-f'(t)-\left[\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-f'(t)\right]-\left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right]-\dots$$

$$\dots-\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\cdot(x-t)^{n-1}\right]=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Demak, $F'(t)=-\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$ (12)

Endi ushbu $\phi(t)=(x-t)^{n+1}$ (13)

funksiyani olaylik. Bu funksiya ham $[x_0,x]$ da uzluksiz va

$\phi'(t)=-(n+1)(x-t)^n$ (14) hosilaga ega.

1-natija. *Agar* (a,b) *intervalda* $f'(x)=0$ *bo'lsa, u holda funksiya* (a,b) *da o'zgarmas bo'ladi.*

◀ (a,b) intervalda tayin x_0 va ixtiyoriy x nuqtalarni olamiz. So'ng $[x_0,x]$ *kesma*$(yoki[x,x_0])$ ga Lagranj teoremasini qo'llaymiz:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c)=0.$$

Bundan

$$f(x)=f(x_0)=const$$

bo'lishi kelib chiqadi.▶

2-natija. $y=f(x)$ *funksiya uchun Lagranj teoremasining shartlari bajarilib,*

$$f(a)=f(b)$$

bo'lsin. U holda a *va* b *orasida shunday* c *nuqta* $(a<c<b)$ *topiladiki,*

$$f'(c)=0$$

bo'ladi.

◀Bu natijaning isboti $f(a)=f(b)$ shartda (7) tenglikdan kelib chiqadi.▶

Endi Lagranj teoremasidan umumiyroq bo'lgan teoremani isbotsiz keltiramiz.

3-teorema (Koshi). *Aytaylik,* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar*

1) $[a,b]$ *segmentda uzluksiz,*

2) (a,b) *intervalda* $f'(x),g'(x)$ *hosilalarga ega,*

3) (a,b) *da* $g'(x)\neq 0$ *bo'lsin. U holda* a *bilan* b *orasida shunday* c $(a<c<b)$ *topiladiki,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

Xususan, $g(x)=x$ bo'lganda Koshi teoremasidan Lagranj teoremasi kelib chiqadi.

4.2. Teylor formulasi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofi $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ da $(\delta>0)$

$$f'(x),f''(x),f'''(x),\dots,f^{(n)}(x),f^{(n+1)}(x)$$

hosilalarga ega bo'lsin. Berilgan funksiya va uning hosilalarining x_0 nuqtadagi qiymatlaridan foydalanib, ushbu

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (8)$$

ko'phad (butun ratsional funksiya) ni hosil qilamiz.

Bu ko'phadni $f(x)$ funksiyaga qanchalik yaqinligini aniqlash maqsadida

$$R_n(x)=f(x)-[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+ +\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ ] \quad (9)$$

ayirmani qaraymiz. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+ +\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad (10)$$

(10) formula $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasi deyiladi, $R_n(x)$ ga esa Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi.

Qoldiq had $R_n(x)$ning (9) formula bilan ifodalanishi (8) ko'phadning $f(x)$ ga yaqin bo'lishi haqida xulosa chiqarishga imkon bermaydi. Agar $R_n(x)$ni n va x larning qiymatlari bo'yicha baholay olsak va uning nolga intilishini ko'rsata olsak, u holda $f(x)$ funksiya (8) ko'phadga yaqin deya olamiz.

x o'zgaruvchini tayinlab, t ni o'zgaruvchi sifatida qarab quyidagi

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \quad (11)$$

yordamchi funksiyani $[x_0,x]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $(yoki[x,x_0]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta))$ da qaraymiz. Bu funksiyaning hosilasini topamiz:

$$F'(t)=-f'(t)-\left[\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-f'(t)\right]-\left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right]-\dots$$

$$\dots-\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\cdot(x-t)^{n-1}\right]=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Demak, $F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$ (12)

Endi ushbu $\phi(t)=(x-t)^{n+1}$ (13)

funksiyani olaylik. Bu funksiya ham $[x_0,x]$ da uzluksiz va

$\phi'(t)=-(n+1)(x-t)^n$ (14) hosilaga ega.

Shunday qilib, $F(t)$ va $\phi(t)$ funksiyalar uchun $[x_0,x]$ da Koshi teoremasining shartlari bajariladi. Unda Koshi teoremasiga ko'ra

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\phi(x)-\phi(x_0)}=\frac{F'(c)}{\phi'(c)} \qquad (15)$$

bo'ladi, bunda c nuqta x_0 va x nuqtalar orasida joylashgan.

(11), (12), (13) va (14) munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$F(x)=0, \quad F(x_0)=R_n(x), \quad F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$\phi(x)=0, \quad \phi(x_0)=(x-x_0)^{n+1}, \quad \phi'(c)=-(n+1)(x-c)^n$$

Natijada, (15) tenglik ushbu $\dfrac{-R_n(x)}{-(x-x_0)^{n+1}}=\dfrac{-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n}$

ko'rinishga keladi. Bu tenglikdan

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n}=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(10) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (16)$$

(16) formula Lagranj ko'rinishidagi **qoldiq hadli Teylor formulasi** deyiladi.

Xususiy holda, $x_0=0$ bo'lganda

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+$$
$$+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (16')$$

bo'lib, u **Makloren formulasi** deb yuritiladi.

Agar (16) va (16') formulalarda qoldiq had yetarlicha kichik bo'lsa, u holda

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n$$

taqribiy formulalar hosil bo'lib, ulardan funksiyalarning qiymatlarini taqribiy hisoblashda foydalaniladi. Agar Teylor formulasida $x_0=0$ bo'lsa, unda hosil bo'lgan formula **Makloren formulasi** deyiladi.

4.3. Ba'zi funksiyalar uchun Teylor (Makloren) formulalari. Taqribiy formulalar

1) Aytaylik, $y=e^x$ bo'lsin. Ma'lumki, $y^{(n)}=e^x$. Unda $y(0)=1$, $y^{(k)}(0)=1$ $(k=1,2,\dots,n+1)$ bo'lib, bu funksiyaning Makloren formulasi

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

bo'ladi. $n\to\infty$ da qoldiq had nolga intiladi. Natijada,

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

taqribiy formulaga ega bo'lamiz.

2) Aytaylik, $y=\sin x$ bo'lsin. Ma'lumki, $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

Ravshanki, $y(0)=0$ va

$$y^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & agar \ n \ juft \ bo'lsa\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & agar \ n \ toq \ bo'lsa\end{cases}$$

bo'ladi. Bu funksiyaning Makloren formulasi $(n=2m)$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos c$$

bo'lib, undan ushbu

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

taqribiy formula kelib chiqadi.

3) Aytaylik, $y=\cos x$ bo'lsin. Bu funksiyaning $n-$ tartibli hosilasi $y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ bo'ladi. Ravshanki, $y(0)=1$

$$y^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}o, & agar \ n \ toq \ bo'lsa\\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & agar \ n \ juft \ bo'lsa\end{cases}$$

bo'ladi. Bu funksiyaning Makloren formulasi $(n=2m)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos c$$

bo'lib, undan ushbu

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

taqribiy formula kelib chiqadi.

Shunday qilib, $F(t)$ va $\phi(t)$ funksiyalar uchun $[x_0,x]$ da Koshi teoremasining shartlari bajariladi. Unda Koshi teoremasiga ko'ra

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\phi(x)-\phi(x_0)}=\frac{F'(c)}{\phi'(c)} \qquad (15)$$

bo'ladi, bunda c nuqta x_0 va x nuqtalar orasida joylashgan.

(11), (12), (13) va (14) munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$F(x)=0,\quad F(x_0)=R_n(x),\quad F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$\phi(x)=0,\quad \phi(x_0)=(x-x_0)^{n+1},\quad \phi'(c)=-(n+1)(x-c)^n$$

Natijada, (15) tenglik ushbu $\dfrac{-R_n(x)}{-(x-x_0)^{n+1}}=\dfrac{-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n}$

ko'rinishga keladi. Bu tenglikdan

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n}=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(10) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (16)$$

(16) formula Lagranj ko'rinishidagi **qoldiq hadli Teylor formulasi** deyiladi.

Xususiy holda, $x_0=0$ bo'lganda

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+$$
$$+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (16')$$

bo'lib, u **Makloren formulasi** deb yuritiladi.

Agar (16) va (16') formulalarda qoldiq had yetarlicha kichik bo'lsa, u holda

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n$$

taqribiy formulalar hosil bo'lib, ulardan funksiyalarning qiymatlarini taqribiy hisoblashda foydalaniladi. Agar Teylor formulasida $x_0=0$ bo'lsa, unda hosil bo'lgan formula **Makloren formulasi** deyiladi.

4.3. Ba'zi funksiyalar uchun Teylor (Makloren) formulalari. Taqribiy formulalar

1) Aytaylik, $y=e^x$ bo'lsin. Ma'lumki, $y^{(n)}=e^x$. Unda $y(0)=1,\ y^{(k)}(0)=1\ \ (k=1,2,\dots,n+1)$ bo'lib, bu funksiyaning Makloren formulasi

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

bo'ladi. $n\to\infty$ da qoldiq had nolga intiladi. Natijada,

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

taqribiy formulaga ega bo'lamiz.

2) Aytaylik, $y=\sin x$ bo'lsin. Ma'lumki, $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

Ravshanki, $y(0)=0$ va

$$y^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & agar\ \ n\ \ juft\ \ bo'lsa\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & agar\ \ n\ \ toq\ \ bo'lsa\end{cases}$$

bo'ladi. Bu funksiyaning Makloren formulasi $(n=2m)$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos c$$

bo'lib, undan ushbu

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

taqribiy formula kelib chiqadi.

3) Aytaylik, $y=\cos x$ bo'lsin. Bu funksiyaning $n-$tartibli hosilasi

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi. Ravshanki, $y(0)=1$

$$y^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}o, & agar\ \ n\ \ toq\ \ bo'lsa\\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & agar\ \ n\ \ juft\ \ bo'lsa\end{cases}$$

bo'ladi. Bu funksiyaning Makloren formulasi $(n=2m)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos c$$

bo'lib, undan ushbu

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

taqribiy formula kelib chiqadi.

4) Aytaylik, $y=(1+x)^n$ bo'lsin. Bunda $n-$ natural son
Bu funksiyaning hosilalari

$$y'=n(1+x)^{n-1},$$
$$y''=n(n-1)(1+x)^{n-2},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(k)}=n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(1+x)^{n-k},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)}=n!$$

(n dan yuqori bo'lgan barcha tartibdagi hosilalar 0 ga teng bo'ladi: $y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\dots=0$), bo'lib

$$y(0)=1,\quad y'(0)=n,\quad y''(0)=n(n-1),\dots,\quad y^{(k)}(0)=n(n-1)\dots(n+k+1)$$
$$y^{(n)}=n!$$

bo'ladi. Unda $y=(1+x)^n$ funksiya uchun (16′) formula quyidagicha bo'ladi:

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k+\dots+x^n$$

Bu **Nyuton binomi formulasidir.**

Mashqlar

1. $y=x^3$ egri chizig'ida shunday nuqtani topingki, bu nuqtada unga o'tkazilgan urinma $A(-1;-1)$ va $B(2;8)$ nuqtalarni tutashtiruvchi vatarga parallel bo'lsin.

2. Lagranj teoremasidan foydalanib, tengsizliklarni isbotlang:
   a) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$;
   b) $|arctga-arctgb|\le|a-b|$;
   d) $e^x>1+x,\ x\in R$;

3. Quyidagi funksiyalar uchun Makloren formulasini yozing:
   a) $f(x)=\ln(1-2x)$;   b) $f(x)=e^{2x}$;   d) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$;

VI BOB

Differentsial hisobning tatbiqlari

1-§. Hosilalar yordamida funksiyalarning o'suvchi, kamayuvchi hamda ekstremumlarini aniqlash

1.1. Funksiyaning o'suvchi hamda kamayuvchiligi

$y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lsin. Ma'lumki, ixtiyoriy $x_1\in(a,b)$, ixtiyoriy $x_2\in(a,b)$ lar uchun

$x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\le f(x_2)$ bo'lsa,

$f(x)$ funksiya (a,b) da o'suvchi,

$x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\ge f(x_2)$ bo'lsa,

$f(x)$ funksiya (a,b) da kamayuvchi deyiladi.

Funksiyaning hosilalari yordamida uning o'suvchiligini hamda kamayuvchiligini aniqlash (o'suvchi hamda kamayuvchi bo'ladigan oraliqlarni aniqlash) mumkin.

1-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib,*

$$f'(x)\ge 0\qquad (x\in(a,b))$$

bo'lsa, u holda funksiya (a,b) da o'suvchi bo'ladi.

◀Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x)\ge0$ bo'lsin. (a,b) intervalda ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni (ular uchun $x_1<x_2$ bo'lsin) olib, $[x_1,x_2]$ segmentni qaraymiz. Ravshanki, $[x_1,x_2]\subset(a,b)$. Bu segmentda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini bajaradi. Unda Lagranj teoremasiga ko'ra shunday c nuqta, $x_1<c<x_2$ topiladiki,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c),$$

ya'ni

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)\text{ bo'ladi.}$$

Keyingi tenglikda

$$f'(c)\ge0,\qquad x_2-x_1>0$$

bo'lgani uchun $f(x_2)-f(x_1)\ge0$ bo'lib, undan $f(x_1)\le f(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\le f(x_2)$ bo'ladi.

$f(x)$ funksiya (a,b) da o'suvchi.▶

2-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya (a,b) da o'suvchi bo'lsa, u holda*

$$f'(x) \geq 0 \qquad (x \in (a,b))$$

bo'ladi.

◀ (a,b) intervalda ixtiyoriy x nuqta hamda $x+\Delta x$ nuqtalarni olaylik $(x \in (a,b), x+\Delta x \in (a,b))$. $f(x)$ funksiya (a,b) da o'suvchi bo'lgani uchun $\Delta x > 0$ bo'lganda $f(x) \leq f(x+\Delta x)$, ya'ni

$$f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$$

$\Delta x < 0$ bo'lganda $f(x) \geq f(x+\Delta x)$, ya'ni

$$f(x+\Delta x) - f(x) \leq 0$$

bo'lib, ikkala holda ham

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad (1)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega. Unda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

bo'lib, (1) munosabatga binoan $f'(x) \geq 0$ bo'ladi.▶

Xuddi shunga o'xshash quyidagi teoremalar isbotlanadi.

3-teorema. Agar $f(x)$ *funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib,*

$$f'(x) \leq 0 \qquad (x \in (a,b))$$

bo'lsa, u holda funksiya (a,b) kamayuvchi bo'ladi.

4-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya (a,b) da kamayuvchi bo'lsa, u holda*

$$f'(x) \leq 0 \qquad (x \in (a,b))$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu

$$y = f(x) = \ln(1-x^2)$$

funksiyaning o'sish hamda kamayish oraliqlarini toping.

◀Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi,

$$1-x^2 > 0, \qquad (x-1)(x+1) < 0, \qquad -1 < x < 1$$

$E = (-1,1)$ bo'ladi. Endi funksiyaning hosilasini topamiz:

$$y' = \frac{-2x}{1-x^2}.$$

So'ng $y' \geq 0$, ya'ni $\frac{2x}{x^2-1} \geq 0$ tengsizlikni yechamiz: Ravshanki,

$$\frac{2x}{x^2-1} \geq 0, \; x(x-1)(x+1) \geq 0.$$

Demak, $-1 < x < 0$ bo'lib, bu $(-1,0)$ oraliqda berilgan funksiya o'suvchi bo'ladi.

Yuqoridagidek ko'rsatiladiki, berilgan funksiya $(0,1)$ oraliqda kamayuvchi bo'ladi.▶

1.2. Funksiya ekstremumi. Funksiya ekstremumiga erishishining zaruriy va yetarli shartlari

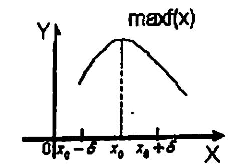
$f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, x_0 nuqta o'zining atrofi $U_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ bilan $(\delta > 0)$ (a,b) intervalga tegishli bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ uchun*

$$f(x) \leq f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi deyiladi. x_0 funksiyaning maksimum nuqtasi, $f(x_0)$ ga funksiyaning maksimum qiymati deyiladi va $\max f(x)$ kabi belgilanadi: (1-chizma)

$$f(x_0) = \max f(x)$$

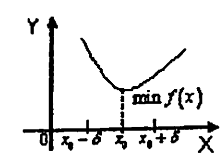


1-chizma

2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ uchun*

$$f(x) \geq f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi deyiladi. x_0 funksiyaning minimum nuqtasi, $f(x_0)$ ga funksiyaning minimum qiymati deyiladi va $\min f(x)$ kabi belgilanadi: (2-chizma) $f(x_0) = \min f(x)$



2-chizma

Funksiya maksimum va minimumlari umumiy nom bilan uning ekstremumlari deyiladi.

Masala, funksiyaga ekstremum qiymat beradigan nuqtalarni hamda funksiyaning ekstremum qiymatlarini topishdan iborat. Bu masala funksiyaning hosilalaridan foydalanib hal etilishi mumkin.

5-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada ekstremumga erishsa va bu nuqtada funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, u holda*

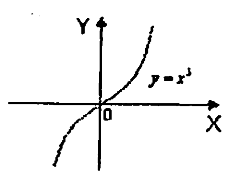
$$f'(x_0)=0$$

bo'ladi.

◀Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'lib, $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ da $f(x) \le f(x_0)$ tengsizlik bajariladi. Ayni paytda, $f(x_0)$ qaralayotgan funksiyaning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ dagi eng katta qiymati bo'ladi. Ferma teoremasidan foydalanib, $f'(x_0)=0$ bo'lishini topamiz.

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'lib, $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lganda ham teorema isbotlanadi.▶

Eslatma. *$f(x)$ funksiyaning biror $x' \in (a,b)$ nuqtada $f'(x')$ hosilaga ega va $f'(x')=0$ bo'lishidan uning x' nuqtada ekstremumga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, $y=x^3$ funksiyaning hosilasi $y'=3x^2$ $x=0$ da $y'=0$ bo'ladi, biroq bu funksiya $x=0$ nuqtada ekstremumga ega emas. (3-chizma)*



3-chizma

Demak, 5-teorema funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

Endi funksiya ekstremumga erishishining yetarli shartlarini keltiramiz:

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da hosilaga ega bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada u nolga aylansin.

$$f'(x_0)=0,$$

(demak, funksiya ekstremumga erishishining zaruriy sharti bajarildi). Quyidagi savol tug'iladi, x_0 nuqtada funksiya ekstremumga erishadimi?

Erishsa, qaysi biriga maksimumgami, minimumgami? $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga erishadi, lekin $y'(0)$ mavjud emas.

Bu savollarning javobi funksiya ekstremumga erishishining yetarli shartlarini ifodalaydi.

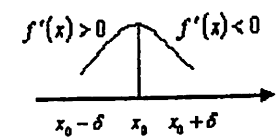
x_0 nuqtaning $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$ atrofini olamiz.

a) Agar

ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)>0$,

ixtiyoriy $x \in (x_0, x+\delta)$ da $f'(x)<0$,

ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini "+" dan "–" ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi (4-chizma).



4-chizma

Haqiqatdan ham, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta, x_0]$ da o'suvchi bo'lib, $f(x)<f(x_0)$, $[x_0, x+\delta)$ da kamayuvchi bo'lib, $f(x_0)>f(x)$ bo'ladi.

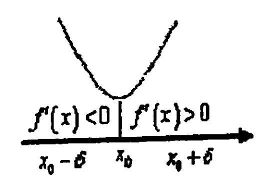
Demak, ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ да $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa funksiyaning x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

b) Agar

ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)<0$

ixtiyoriy $x \in (x_0, x+\delta)$ da $f'(x)>0$

ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini "-" dan "+" ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi. (5-chizma).



5-chizma

Haqiqatan ham, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta, x_0)$ da kamayuvchi bo'lib, $f(x)>f(x_0)$, $[x_0, x+\delta)$ da o'suvchi bo'lib, $f(x)>f(x_0)$ bo'ladi. Demak, ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ da $f(x)>f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishishini bildiradi.

d) Agar

$$\text{ixtiyoriy } x\in(x_0-\delta,x_0) \text{ da } f'(x)>0,$$
$$\text{ixtiyoriy } x\in(x_0,x+\delta) \text{ da } f'(x)>0$$

yoki

$$\text{ixtiyoriy } x\in(x_0-\delta,x_0) \text{ da } f'(x)<0,$$
$$\text{ixtiyoriy } x\in(x_0,x+\delta) \text{ da } f'(x)<0$$

ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi. Bu holda $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ da o'suvchi yoki kamayuvchi bo'ladi.

Natijada, $f(x)$ funksiya ekstremumini topishning quyidagi qoidasiga kelamiz:

1) funksiya hosilasi $f'(x)$ topiladi;

2) $f'(x)=0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tenglama yechimlaridan biri x_0 bo'lsin: $f'(x_0)=0$;

3) x_0 nuqtaning chap atrofi $(x_0-\delta,x_0)$ va o'ng atrofi $(x_0,x+\delta)$ da $f'(x)$ hosilaning ishorasi aniqlanadi va yuqorida keltirilgan a), b) qoidalar tatbiq etilib, ekstremum qiymati topiladi.

2-misol. Ushbu

$$f(x)=x^3-3x+2$$

funksiyani ekstremumga tekshiring.

◄Berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x)=3x^2-3.$$

So'ng uni 0 ga tenglab, $f'(x)=0$ tenglamani yechamiz:

$$3x^2-3=0,\quad 3(x-1)(x+1)=0,$$
$$x_1=-1,\quad x_2=+1.$$

Funksiya hosilasi

$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$

ning $x_1=-1$ va $x_2=1$ nuqtalar atrofida ishorasini aniqlaymiz.

$x_1=-1$ nuqtaning $(-1-\delta,-1+\delta)$ atrofini $\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$ olamiz.

Ixtiyoriy $x\in(-1-\delta,-1)$ da $f'(x)=3(x-1)(x+1)>0$ bo'ladi, chunki bunday nuqtalarda $x-1<0,\quad x+1<0.$

Ixtiyoriy $x\in(-1,-1+\delta)$ da $f'(x)=3(x-1)(x+1)<0$ bo'ladi., chunki bunday nuqtalarda $x-1<0,\quad x+1>0.$

Shunday qilib, $f'(x)$ hosila $x_1=-1$ nuqtadan o'tishda ishorasini "+" dan "–" ga o'zgartiradi. Demak, berilgan funksiya $x_1=-1$ nuqtada maksimumga erishadi va uning maksimum qiymati

$$\max f(x)=f(-1)=4$$

bo'ladi.

$x_2=1$ nuqtaning $(1-\delta,1+\delta)$ atrofini $\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$ olamiz

Ixtiyoriy $x\in(1-\delta,1)$ da $f'(x)=3(x-1)(x+1)<0$ bo'ladi, chunki, bunday nuqtalarda $x-1<0,\quad x+1>0.$

Ixtiyoriy $x\in(1,1+\delta)$ da $f'(x)=3(x-1)(x+1)>0$ bo'ladi, chunki, bunday nuqtalarda $x-1>0,\quad x+1>0.$

Shunday qilib, $f'(x)$ hosila $x_2=1$ nuqtadan o'tishda ishorasini "–" dan "+" ga o'zgartiradi. Demak, berilgan funksiya $x_2=1$ nuqtada minimumga erishadi va uning minimum qiymati

$$\min f(x)=f(1)=0$$

bo'ladi.►

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $x_0\in(a,b)$ bo'lsin.

6-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$ atrofida birinchi va ikkinchi tartibli $f'(x),f''(x)$ hosilalarga ega bo'lib,

1) $f'(x_0)=0,$

2) x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ uzluksiz va $f''(x_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$f''(x_0)>0$$

bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi;

$$f''(x_0)<0$$

bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

◄Teylor formulasidan foydalanib topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2,\quad c=x_0+\theta(x-x_0),0<\theta<1.$$

Shartga ko'ra $f'(x_0)=0$. Unda

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f''(x_0)<0$ bo'lsin. Unda ikkinchi tartibli hosilaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishidan, x_0 nuqtaning biror atrofi topiladiki, bu atrofdagi nuqtalarda $f''(x)<0$, binobarin, $f''(c)<0$ bo'ladi. Ravshanki, $(x-x_0)^2>0$. Demak,

$$\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2<0$$

bo'lib,

$$f(x)-f(x_0)<0$$

ya'ni,

$$f(x)<f(x_0)$$

bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

Xuddi shunga o'xshash, $f''(x_0)>0$ bo'lganda, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishishi ko'rsatiladi.▶

3-misol. Ushbu

$$f(x)=x^3-12x$$

funksiyani ekstremumga tekshiring.

◀Ravshanki, $f'(x)=3x^2-12$ bo'ladi. $3x^2-12=0$ tenglamaning yechimlari $x_1=-2$, $x_2=2$ bo'ladi. Demak, $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$.

Berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)=6x$ bo'lib,

$$f''(-2)=6(-2)=-12<0, \quad f''(2)=6\cdot 2=12>0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $x=-2$ da maksimumga, $x=2$ da minimumga ega bo'lib,

$$\max f(x)=f(-2)=16, \quad \min f(x)=f(2)=-16$$

bo'ladi.▶

Eslatma. *Agar $f'(x_0)=0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada ekstremumga erishishi ham mumkin, erishmasdan qolishi ham mumkin. Bu holda qo'shimcha tekshirish bilan aniqlanadi.*

1.3. Funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlari

Ma'lumki, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, unda uzluksiz funksiyalarning xossasiga ko'ra bu funksiya $[a,b]$ da eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi. Bu qiymatlar quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ topilib, u nolga tenglanadi: $f'(x)=0$.

2) $f'(x)=0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tenglamaning yechimlari x_1,x_2,x_3 bo'lsin.

3) $f(x)$ funksiyaning x_1,x_2,x_3 nuqtalardagi qiymatlari topiladi.

Aytaylik, ular $f(x_1),f(x_2),f(x_3)$ bo'lsin.

4) $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentning chekkalari a va b nuqtalardagi qiymatlari topiladi: $f(a),f(b)$.

Natijada, $f(x_1),f(x_2),f(x_3)$, $f(a),f(b)$ qiymatlar hosil bo'ladi. Bu qiymatlar orasidagi kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi eng katta qiymati, kichigi esa $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi eng kichik qiymati bo'ladi.

4-misol. Ushbu

$$f(x)=x^2e^{-x}$$

funksiyaning $[-1,3]$ segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

◀Bu funksiyaning hosilasi

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=\left(2x-x^2\right)e^{-x}$$

bo'lib, $f'(x)=0$ ya'ni

$$\left(2x-x^2\right)e^{-x}=0$$

tenglamaning yechimlari $x_1=0$, $x_2=2$ bo'ladi.

Endi berilgan funksiyaning bu $x_1=0$, $x_2=2$ nuqtalardagi hamda $[-1,3]$ segmentning chetki nuqtalari $x_3=-1$, $x_4=3$ dagi qiymatlarini topamiz:

$$f(x_1)=f(0)=0, \qquad f(x_3)=f(-1)=e$$
$$f(x_2)=f(2)=4e^{-2} \qquad f(x_4)=f(3)=ve^{-3}$$

Demak, berilgan funksiyaning $[-1,3]$segmentdagi katta qiymati e, eng kichik qiymati 0 bo'ladi.▶

Mashqlar

Hosilalar yordamida quyidagi funksiyalarning o'sishini, kamayishini va ekstremum nuqtalarini aniqlang.

1. $y=2x^3-9x^2+12x-9$ 2. $y=3x-x^2$

3. $y=x^2(x-2)^2$ 4. $y=\dfrac{x^3-9x^2}{4}+6x-9$

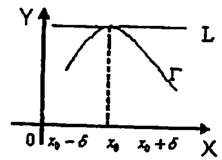
2-§.Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi, egilish nuqtasi va asimptotasi

2.1. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan, $x_0 \in (a,b)$ va bu nuqtaning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ atrofi $(\delta>0)$ shu (a,b) intervalga tegishli bo‘lsin.

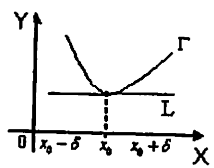
Berilgan $f(x)$ funksiya grafigi – egri chiziqni Γ, unga $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmani L deylik.

Agar $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da Γ egri chiziq L urinmadan pastda joylashgan bo‘lsa, $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da **qavariq** deyiladi (1-chizma).



1-chizma

Agar $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da Γ egri chiziq L urinmadan yuqorida joylashgan bo‘lsa, $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da botiq deyiladi (2-chizma)



2-chizma

Funksiya hosilalari yordamida uning grafigini qavariqligini, botiqligini aniqlash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da ikkinchi tartibli uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo‘lsin.

1-teorema. *Agar* $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ *da*

$$f''(x)<0$$

bo‘lsa, u holda $f(x)$ *funksiya grafigi* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *da qavariq bo‘ladi, agar* $f''(x)>0$ *bo‘lsa, u holda* $f(x)$ *funksiya grafigi* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *da botiq bo‘ladi.*

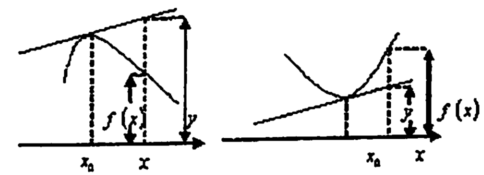
◀Aytaylik, abssissasi x bo‘lgan urinma nuqtasining ordinatasi y bo‘lsin. Unda

$$f(x)-y \le 0 \ \left(x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\right)$$

bo‘lganda funksiya grafigi qavariq bo‘ladi;

$$f(x)-y \ge 0$$

bo‘lganda esa funksiya grafigi botiq bo‘ladi. (3-chizma).



3-chizma

Teylor formulasidan foydalanib ($n=2$ bo‘lgan hol uchun) topamiz:

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+f''(c)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!}, \tag{1}$$

bunda c nuqta x_0 va x nuqtalar orasida.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya grafigiga $(x_0, f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma (yuqorida aytilgan urinma) tenglamasi

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \tag{2}$$

bo‘ladi. (1) tenglikdan (2) tenglikni hadlab ayirib topamiz:

$$f(x)-y=f''(c)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} \tag{3}$$

Ravshanki, $x \to x_0$ da $c \to x_0$ bo‘ladi. Ikkinchi tartibli hosila x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lgani uchun

$$f''(c) \to f''(x_0)$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $f''(x)<0$ bo‘lsin. Bu holda $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da $f''(c) \le 0$ bo‘lib, (3) tenglikka ko‘ra

$$f(x)-y \le 0$$

bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya grafigi $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da qavariq bo‘ladi.

Aytaylik, $f''(x)>0$ bo‘lsin. Bu holda $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da $f''(c) \ge 0$ bo‘lib, (3) tenglikka ko‘ra

$$f(x)-y \ge 0$$

bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya grafigi $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da botiq bo‘ladi.▶

2.2. Funksiya grafigining egilish nuqtasi

Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0)$ da funksiya grafigi Γ urinma L dan yuqorida (pastda) joylashgan bo'lib, ixtiyoriy $x\in(x_0,x_0+\delta)$ da funksiya grafigi Γ urinma L dan pastda (yuqorida) joylashgan bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda, $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0-\delta,x_0)$ da botiq (qavariq) bo'lib, $(x_0,x_0+\delta)$ da qavariq (botiq) bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi deyiladi.

Funksiya hosilalari yordamida uning grafigining egilish nuqtasini topish mumkin.

Yuqorida keltirilgan 1-teorema va funksiya grafigining egilish nuqtasi ta'rifidan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. *$f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtalarini ikkinchi tartibli $f''(x)$ ning nolga aylantiradigan nuqtalar orasida ($f''(x)=0$ tenglamaning yechimlari orasidan) qidirish kerak.*

2-teorema. *Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ da ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin.*

Agar $f''(x)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda ishorasini o'zgartirsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

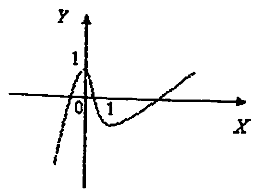
1-misol. *Ushbu $f(x)=x^3-3x^2+1$ funksiya qavariq va botiqlikka tekshirilsin, egilish nuqtasini toping.*

◀Berilgan funksiya uchun $f'(x)=3x^2-6x,\quad f''(x)=6x-6$ bo'ladi.

Ravshanki, $f''(x)=6x-6<0,\ x-1<0,\ x<1$. Demak, berilgan funksiya grafigi $(-\infty,1)$ da qavariq bo'ladi.

Shuningdek, $f''(x)=6x-6>0,\ x-1>0,\ x>1$.

Demak, berilgan funksiya grafigi $(1,+\infty)$ da botiq bo'ladi. $x=1$ nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi (4-chizma).▶



4-chizma

2.3. Funksiya grafigining asimptotalari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $a\in R$ nuqtaning biror $(a-\delta,a+\delta)$ atrofida $(\delta>0)$ berilgan bo'lsin.

Agar ushbu

$$\lim_{x\to a+0} f(x),\ \lim_{x\to a-0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi cheksiz bo'lsa,

$$x=a$$

to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya vertikal asimptotasi deyiladi.

Masalan, $x=0$ to'g'ri chiziq (ordinatalar o'qi)

$$y=\frac{1}{x}$$

funksiyaning vertikal asimptotasi bo'ladi, chunki

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Agar $x\to+\infty$ da ($x\to-\infty$ da) $f(x)$ funksiya ushbu

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

ko'rinishda ifodalansa, bunda k va b lar o'zgarmas sonlar va

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0\ \left(\lim_{x\to-\infty}\alpha(x)=0\right) \text{ bo'lsa,}$$

$$y=kx+b \tag{1}$$

to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi deyiladi.

Xususan, (1) da $k=0$ bo'lsa,

$$y=b$$

to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining **gorizontal asimptotasi** deyiladi.

Masalan,

$$y=x-4$$

to'g'ri chiziq

$$f(x)=\frac{x^2-3x-2}{x+1}$$

funksiyaning og'ma asimptotasi bo'ladi, chunki

$$f(x)=\frac{x^2-3x-2}{x+1}=x-4+\frac{2}{x+1}=x-4+\alpha(x)$$

bo'lib,

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+1}=0$$

bo'ladi (bunda $k=1,\ b=-4$).

2-misol. *Ushbu* $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ *funksiya grafigining asimptotalarini toping.*

◀Bu funksiya $x=1$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan va uzluksiz.

Ravshanki, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-2x}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2-2x}{x-1}=-\infty$ bo'ladi. Demak, $x=1$ to'g'ri chiziq berilgan funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi.

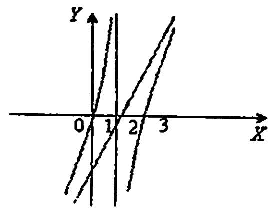
Berilgan funksiyani quyidagicha yozib olamiz:

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{(x-1)^2-1}{x+1}=x-1-\frac{1}{x-1}.$$

Agar $\alpha(x)=\dfrac{1}{1-x}$ deyilsa, unda

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-x}=0$$

bo'lib, $y=x-1$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiyaning og'ma asimptotasi ekanini topamiz (5-chizma).



5-chizma

Shuni aytish kerakki, $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiyaning og'ma asimptotasi bo'lishi uchun

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right] \qquad (2)$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Bundan $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasini topish uchun (2) limitlarni hisoblash yetarli bo'ladi.▶

2.4. Funksiya grafigini yasash

Endi funksiya grafigini yasashga o'tish mumkin. U quyidagi sxema asosida bajariladi:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.
2. Funksiyani juft-toqlikka tekshirish.

3. Funksiyani davriylikka tekshirish.
4. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish.
5. Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish.
6. Monotonlik oraliqlarini aniqlash.
7. Ekstremumga tekshirish.
8. Botiq va qavariqlikka tekshirish.
9. Funksiyaning asimptotalarini topish.
10. Funksiya grafigini chizish.

3-misol. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ *funksiyani to'liq tekshiring va grafigini chizing.*

1. Funksiya $x=1$ nuqtadan tashqari sonlar o'qining barcha nuqtalarida aniqlangan.

2. $f(-x)=\dfrac{-2x-1}{(-x-1)^2}\neq f(x)$ va $f(-x)\neq -f(x)$, demak, funksiya toq ham emas, juft ham emas.

3. Funksiya davriy emas.

4. $x=1$ nuqtada II tur uzilishga ega: $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=+\infty$, qolgan nuqtalarda funksiya uzluksiz.

5. Agar $x=0$ bo'lsa, u holda $y=-1$ va $y=0$ da $x=\dfrac{1}{2}$. Bundan kelib chiqadiki, $(0;-1)$ va $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ nuqtalar funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari.

6. $y'=-\dfrac{2x}{(x-1)^3}$ funksiya aniqlanish sohasini quyidagi oraliqlarga bo'lamiz: $(-\infty;0)$, $(0,1)$, $(1;+\infty)$

$(-\infty;0)$ oraliqlarda funksiya kamayadi. $(0,1)$ oraliqda esa funksiya o'sadi. $(1;+\infty)$ oraliqda funksiya kamayadi.

7. $y'(x)$ hosila ishorasini $x=0$ nuqtani o'tishda manfiydan musbatga o'zgartiradi. Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada minimumga erishadi va $y_{\min}=y(0)=-1$ bo'ladi.

8. Funksiya botiq va qavariqligini tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilani olamiz. $y''=2\cdot\dfrac{2x+1}{(x-1)^4}$ funksiyaning aniqlanish sohasini quyidagi oraliqlarga ajratamiz.

$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ $(1;+\infty)$.

$\left(-\infty;\frac{-1}{2}\right)$ da $f''(-1)=-\frac{1}{8}<0$ funksiya qavariq,

$\left(-\frac{1}{2};1\right)$ da $f''(0)=2>0$ funksiya botiq, $(1;+\infty)$ oraliqda $f''(0)=10>0$ funksiya botiq. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $x=-\frac{1}{2}$ dan o'tishda o'z ishorasini o'zgartiradi, bundan kelib chiqadiki, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{9}$ nuqta egilish nuqtasi bo'ladi.

9. $x=1$ funksiyaning vertikal asimptotasi, $y=0$ gorizontal asimptotasi, ya'ni $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=0$

Og'ma asimptotasini topamiz:

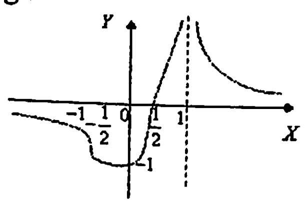
$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=0,$$

u holda $k=0$

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0,$$

u holda $b=0$. Bundan kelib chiqadiki $y=kx+b$ og'ma asimptota yo'q.

10. Funksiya grafigi:



Mashqlar

Quyidagi funksiyalarni to'liq tekshiring va grafigini yasang.

1. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ 2. $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

3. $y=\frac{2}{x^2+2x}$ 4. $y=\frac{4x^2}{3+x^2}$

3-§. Parametrik usulda berilgan funksiyalar

3.1. "Parametrik usulda" berilgan funksiya tushunchasi

Ma'lumki, $X\subset R$ to'plamdan olingan har bir x songa biror f qoidaga ko'ra, $Y\subset R$ to'plamdagi bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda funksiya berilgan deyilib,

$$y=f(x)$$

kabi belgilanar edi. Bunda x ga y ni mos qo'yadigan qoida turlicha, jumladan, analitik, jadval hamda grafik usullarida bo'lishini ko'rdik.

x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish yordamchi o'zgaruvchi (vositachi), masalan t o'zgaruvchi orqali ham o'rnatilishi mumkin.

Aytaylik, x ham, y ham biror t o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsin:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha\le t\le\beta) \qquad (1)$$

Bu (1) munosabatdagi

$$x=\varphi(t) \qquad (\alpha\le t\le\beta) \qquad (2)$$

funksiyaning qiymatlar to'plamini X deylik. X to'plamga tegishli bo'lgan ixtiyoriy x_0 sonni olib, uni (2) munosabatdagi x ning o'rniga qo'yamiz:

$$x_0=\varphi(t).$$

Natijada, t ga nisbatan tenglama hosil bo'ladi. Faraz qilaylik, bu tenglama yagona $t=t_0$ yechimga $(t_0=\varphi^{-1}(x_0))$ ega bo'lsin. Uni (1) munosabat

$$y=\psi(t)$$

dagi t ning o'rniga qo'ysak, unda y_0 $(y_0=\psi(t_0))$ son hosil bo'ladi.

X to'plamdan olingan x_0 songa shu y_0 sonni mos qo'yish bilan x_0 va y_0 lar orasida bog'lanish yuzaga keladi.

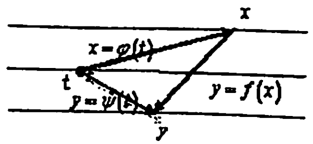
Natijada, X to'plamdan olingan har bir x ga yuqorida ko'rsatilgan qoidaga ko'ra bitta y mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi:

$$y=f(x).$$

Bunda x va y orasidagi bog'lanishni

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t)\ (\alpha\le t\le\beta) \end{cases} \qquad (3)$$

sistema bajaradi (1-chizma).



1-chizma

Odatda, t o'zgaruvchi parametr deyiladi.

$y=f(x)$ funksiyani (1) sistema yordamida aniqlanishi funksiyani parametrik usulda berilishi deyiladi. Masalan, ushbu

$$\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3 \end{cases}$$

sistema

$$y=x^{\frac{3}{2}}$$

funksiyani aniqlaydi.

3.2. Parametrik usulda berilgan funksiyalarning hosilalari

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda ushbu

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t)\ (\alpha\le t\le\beta) \end{cases} \qquad (3)$$

sistema yordamida parametrik usulda berilgan bo'lib, $\varphi(t), \psi(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz va $\varphi(t)$ funksiya shu oraliqda qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsin.

Teorema. *Agar $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $t_0\in[\alpha,\beta]$ nuqtada $\varphi'(t_0)$ va $\psi'(t_0)$ hosilalarga ega bo'lib, $\varphi'(t_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $x_0\in[a,b]$ nuqtada $(x_0=\varphi(t_0))$ $f'(x_0)$ hosilaga ega va*

$$f'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

bo'ladi.

◀Ushbu

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

nisbatni qaraylik, bunda $f(x)=y$, $f(x_0)=y_0$. (3) sistemadan foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{\varphi(t)-\varphi(t_0)}.$$

Ravshanki, $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\dfrac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}}{\dfrac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}}.$$

Keyingi tenglikda limitga o'tsak ($t\to t_0$ *da* $x\to x_0$) unda

$$f'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \qquad (4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.▶

Eslatma. *(3) munosabat quyidagicha*

$$y'_x(x_0)=f'_x(x_0)=\frac{\psi'_t(t_0)}{\varphi'_t(t_0)} \qquad \left(\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)$$

ham yozilishi mumkin.

1-misol. *Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya parametrik usulda ushbu*

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t \end{cases} \qquad \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right) \qquad (5)$$

sistema yordamida berilgan bo'lsin. $y=f(x)$ funksiyaning hosilasini toping.

◀Bu $y=f(x)$ funksiyaning hosilasini (4) formuladan foydalanib topamiz: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(b\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'}=\frac{3b\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\frac{b}{a}tgt$ ▶

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya ushbu

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t)\ (\alpha\le t\le\beta) \end{cases} \qquad (3)$$

sistema yordamida parametrik usulda berilgan bo'lsin.

Tegishli shartlar bajarilganda, bu funksiya ikkinchi, uchinchi va h.k. tartibli hosilalarga ega bo'ladi.

Biz $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi va uchinchi tartibli hosilalari qanday hisoblanishini ko'rsatamiz.

Ma'lumki,

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad (4)$$

(4) munosabatdagi $f'(x)$ hosilani x ning murakkab funksiyasi sifatida

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad t=\varphi^{-1}(x)$$

(bunda $t=\varphi^{-1}(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo‘lib, uning hosilasi $\left[\varphi^{-1}(x)\right]'_t=\frac{1}{\varphi'(t)}$ bo‘ladi) qarab topamiz:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=$$

$$=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}. \qquad (5)$$

Xuddi shunga o‘xshash $f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi hisoblanadi. Bu hosila uchun

$$f'''(x)=\frac{\varphi'^2(t)\cdot\psi'''(t)-\varphi'(t)\cdot\psi'(t)\cdot\varphi'''(t)-3\varphi'(t)\cdot\varphi''(t)\cdot\psi''(t)+3\varphi''^2(t)\cdot\psi'(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^5}$$

bo‘ladi.

2-misol. *Aytaylik,* $y=f(x)$ *funksiya parametrik usulda ushbu*

$$\begin{cases} x=\varphi(t)=t-2\sqrt{t}, \\ y=\psi(t)=t+2\sqrt{t} \end{cases} \quad (1<t<+\infty)$$

sistema yordamida berilgan bo‘lsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi hamda $f'(x)$, $f''(x)$ *hosilalarini toping.*

◄Avvalo, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz.

Ma’lumki, $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $x=\varphi(t)=t-2\sqrt{t}$ $(1<t<+\infty)$ funksiyaning qiymatlari to‘plami bo‘ladi. $\sqrt{t}=u$ deb topamiz:

$$u^2-2u-x=0.$$

Ravshanki,

$$u_{1,2}=1\pm\sqrt{1+x}.$$

Demak, $1+x>0$, ya’ni $x>-1$ bo‘lib, undan $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(-1,+\infty)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

$f(x)$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}{1-\frac{1}{\sqrt{t}}}=\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{t}-1},$$

$$f''(x)=\frac{d}{dt}\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}-1}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}-1}\right)}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{\left(\sqrt{t}-1\right)^3}. \ ►$$

3.3. Parametrik usulda berilgan funksiyalarning ekstremumlari

Ma’lumki, $y=f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, y $x_0\in X$ nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo‘lsa, funksiya ekstremumi quyidagicha topilar edi:

1) $f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ hisoblanib, $f'(x)=0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tenglamaning yechimi x_0 bo‘lsin: $f'(x_0)=0$,

2) $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ hosilasi hisoblanadi.

Agar $f''(x_0)>0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga, $f''(x_0)<0$ bo‘lsa, maksimumga erishadi.

Xuddi shu yo‘l bilan parametrik usulda berilgan funksiyaning ekstremumi topiladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya ushbu

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha\le t\le\beta) \qquad (3)$$

sistema yordamida parametrik usulda berilgan bo‘lsin. Bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo‘lib, $\varphi'(t)\neq 0$.

Ma’lumki,

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad f''(x)=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}. \qquad (6)$$

Funksiyaga ekstremum qiymat beradigan nuqtalarni

$$\psi'(t)=0$$

tenglama ildizlari orasidan izlanishi kerak.

Faraz qilaylik, $t=t_0$ bu tenglamaning yechimi bo‘lsin: $\psi'(t_0)\equiv 0$. Unda (6) ga ko‘ra $f''(x_0)=\frac{\psi''(t_0)}{\left[\varphi'(t_0)\right]^2}$ bo‘ladi.

Agar $\psi''(t)<0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x=x_0=\varphi(t_0)$ nuqtada maksimumga, agar $\psi''(t)>0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x=x_0=\varphi(t_0)$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

3-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases} x=\varphi(t)=t^5-5t^3-20t+7, \\ y=\psi(t)=4t^3-3t^2-18t+3 \end{cases} \quad (-2<t<2)$$

sistema yordamida parametrik usulda berilgan funksiyani ekstremumga tekshiring.

◄Berilgan $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz:

$$\varphi'(t)=5t^4-15t^2-20,$$
$$\psi'(t)=12t^2-6t-18,$$
$$\psi''(t)=24t-6.$$

Ravshanki, $(-2,2)$ da $\psi'(t)\neq 0.\ u'(t)\neq 0$.

Endi

$$\psi'(t)=0,\ \text{ya'ni}\ 12t^2-6t-18=0$$

tenglamani yechib, topamiz:

$$t_1=-1,\quad t_2=\frac{3}{2}.$$

Agar

$$\psi''(-1)<0,\quad \psi''\left(\frac{3}{2}\right)>0$$

bo'lishini e'tiborga olsak, $y=f(x)$ funksiya

$t_1=-1$ (ya'ni $x=31$) da maksimumga,

$t_2=\frac{3}{2}$. (ya'ni $x=-\frac{1031}{32}$) da minimumga

erishishini topamiz.▶

Mashqlar

1. Ushbu chiziqning

$$\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan t parametr yo'qotilib, uning Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini toping va grafigini chizing.

Ko'rsatma: Avval birinchi tenglamani 3 ga, ikkinchi tenglamani 2 ga bo'lib, so'ngra t parametrni yo'qoting.

2. Quyidagi chiziqlarning parametrik tenglamasidan t parametr yo'qotilib, uning Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini toping va grafigini chizing.

a) $x=t-1,\ y=t^2-2t+2$.

b) $x=(t+1)^2,\ y=(t-1)^2$.

3. Parametrik ko'rinishda berilgan $y=y(x)$ funksiya uchun y'_x ni toping.

$$\text{a)}\ x=\sin^2 t,\ y=\cos^2 t,\ 0<t<\frac{\pi}{2}.$$
$$\text{b)}\ x=e^{-t},\ y=t^3,\ -\infty<t<+\infty.$$

VII BOB

Aniqmas integral. Integralning sodda xossalari va integrallash usullari

1-§. Aniqmas integralning sodda xossalari. Integrallash usullari

"Funksiyaning hosilasi" tushunchasida matematikada muhim bo'lgan differensiallash amali berilgan funksiyaga ko'ra uning hosilasini topish bayon etildi. Bu amal orqali ko'pgina masalalar, jumladan, moddiy nuqta harakat qonuniga ko'ra uning tezligini topish, egri chiziqqa urinma o'tkazish kabi masalalar hal etildi.

Aksincha, funksiyaning hosilasi ma'lum bo'lganda funksiyaning o'zini topish (tezlikka ko'ra harakat qonunini topish, urinmaga ko'ra egri chiziqni topish va h.k.) masalalari ko'p uchraydi. Bunday masalalar yuqorida keltirilgan masalalarga teskari bo'lib, ular funksiyaning integrali tushunchasiga olib keladi (Bayon etiladigan integrallash amali differensiallashga teskari bo'lgan amal bo'ladi).

1.1. "Boshlang'ich funksiya" va "aniqmas integral" tushunchalari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lsin. Agar shu intervalda aniqlangan $F(x)$ funksiya uchun

$$F'(x)=f(x) \tag{1}$$

bo'lsa, $F(x)$ funksiya (a,b) da $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\frac{x^3}{3}$ bo'ladi, chunki $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x)$, shuningdek, $f(x)=\cos x$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\sin x$ bo'ladi, chunki $F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$. (1) munosabatga ko'ra

$$(F(x)+c)'=F'(x)+0=F'(x)=f(x) \tag{2}$$

bo'ladi, bunda c-ixtiyoriy o'zgarmas son.

Shunday qilib, $F(x)+c$ funksiyalar ham $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyalari bo'ladi.

◀Berilgan $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz:

$$\varphi'(t)=5t^4-15t^2-20,$$
$$\psi'(t)=12t^2-6t-18,$$
$$\psi''(t)=24t-6.$$

Ravshanki, $(-2,2)$ da $\psi'(t)\neq 0.\ u'(t)\neq 0$.

Endi

$$\psi'(t)=0, \text{ ya'ni } 12t^2-6t-18=0$$

tenglamani yechib, topamiz:

$$t_1=-1, \quad t_2=\frac{3}{2}.$$

Agar

$$\psi''(-1)<0, \quad \psi''\left(\frac{3}{2}\right)>0$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, $y=f(x)$ funksiya

$t_1=-1$ (ya’ni $x=31$) da maksimumga,

$t_2=\frac{3}{2}$. (ya’ni $x=-\frac{1031}{32}$) da minimumga

erishishini topamiz.▶

Mashqlar

1. Ushbu chiziqning

$$\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan t parametr yo‘qotilib, uning Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini toping va grafigini chizing.

Ko‘rsatma: Avval birinchi tenglamani 3 ga, ikkinchi tenglamani 2 ga bo‘lib, so‘ngra t parametrni yo‘qoting.

2. Quyidagi chiziqlarning parametrik tenglamasidan t parametr yo‘qotilib, uning Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini toping va grafigini chizing.

a) $x=t-1,\ y=t^2-2t+2$.

b) $x=(t+1)^2,\ y=(t-1)^2$.

3. Parametrik ko‘rinishda berilgan $y=y(x)$ funksiya uchun y'_x ni toping.

a) $x=\sin^2 t,\ \ y=\cos^2 t,\ \ 0<t<\frac{\pi}{2}$.

b) $x=e^{-t},\ \ y=t^3,\ \ -\infty<t<+\infty$.

VII BOB

Aniqmas integral. Integralning sodda xossalari va integrallash usullari

1-§. Aniqmas integralning sodda xossalari. Integrallash usullari

“Funksiyaning hosilasi” tushunchasida matematikada muhim bo‘lgan differensiallash amali berilgan funksiyaga ko‘ra uning hosilasini topish bayon etildi. Bu amal orqali ko‘pgina masalalar, jumladan, moddiy nuqta harakat qonuniga ko‘ra uning tezligini topish, egri chiziqqa urinma o‘tkazish kabi masalalar hal etildi.

Aksincha, funksiyaning hosilasi ma’lum bo‘lganda funksiyaning o‘zini topish (tezlikka ko‘ra harakat qonunini topish, urinmaga ko‘ra egri chiziqni topish va h.k.) masalalari ko‘p uchraydi. Bunday masalalar yuqorida keltirilgan masalalarga teskari bo‘lib, ular funksiyaning integrali tushunchasiga olib keladi (Bayon etiladigan integrallash amali differensiallashga teskari bo‘lgan amal bo‘ladi).

1.1. “Boshlang‘ich funksiya” va “aniqmas integral” tushunchalari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo‘lsin. Agar shu intervalda aniqlangan $F(x)$ funksiya uchun

$$F'(x)=f(x) \tag{1}$$

bo‘lsa, $F(x)$ funksiya (a,b) da $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi $F(x)=\frac{x^3}{3}$ bo‘ladi, chunki $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x)$, shuningdek, $f(x)=\cos x$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi $F(x)=\sin x$ bo‘ladi, chunki $F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$. (1) munosabatga ko‘ra

$$(F(x)+c)'=F'(x)+0=F'(x)=f(x) \tag{2}$$

bo‘ladi, bunda c-ixtiyoriy o‘zgarmas son.

Shunday qilib, $F(x)+c$ funksiyalar ham $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyalari bo‘ladi.

Demak, $f(x)$ bitta boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u cheksiz ko'p boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lib qoladi.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya ixtiyoriy ikkita $F(x)$ va $\phi(x)$ boshlang'ich funksiyalarga ega, ya'ni

$$F'(x)=f(x), \quad \phi'(x)=f(x)$$

bo'lsa,

$$\phi(x)=F(x)+c \qquad (c=const)$$

bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$[\phi(x)-F(x)]'=\phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

bo'lib, Lagranj teoremasining natijasiga ko'ra (qaralsin, 17-ma'ruza)

$$\phi(x)-F(x)=c \qquad (c=const)$$

bo'ladi va undan $\phi(x)=F(x)+c$ bo'lishi kelib chiqadi.

Natijada, quyidagi xulosaga kelamiz:

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da boshlang'ich funksiya $F(x)$ ga ega bo'lsa, u holda

1) $f(x)$ funksiya cheksiz ko'p boshlang'ich funksiyalarga ega;

2) barcha boshlang'ich funksiyalarning umumiy ifodasi

$$F(x)+c \qquad (c=const) \qquad (3)$$

bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy boshlang'ich funksiya shu ifodadan (o'zgarmas c ga qiymat berish natijasida) kelib chiqadi.

Ta'rif. *(3) ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va*

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi, bunda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, $\int$ – integral belgisi.

Demak, $\int f(x)dx=F(x)+c \qquad (c=const) \qquad (4)$

1-misol. *Ushbu $\int 5x^5dx$ integralni toping.*

◄Ta'rifga ko'ra, bu integral shunday funksiyaki, uning hosilasi $5x^5$ ga teng. Ravshanki,

$$F(x)=\frac{5}{6}x^6+c \qquad (c=const)$$

funksiya uchun

$$F'(x)=(\frac{5}{6}x^6+c)'=\frac{5}{6}\cdot 6x^5+0=5x^5$$

bo'ladi. Demak,

$$\int 5x^5dx=\frac{5}{6}x^6+c.►$$

Eslatma. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da uzluksiz bo'lsa, uning aniqmas integrali mavjud bo'ladi* (bu tasdiq keyinroq isbotlanadi).

Ko'pincha funksiyaning aniqmas integrali qaralganda uni qanday oraliqda bo'lishi ko'rsatilmaydi. Bunda funksiyaning aniqlanish sohasida qaralayapti, deb hisoblanadi.

1.2. Aniqmas integralning sodda xossalari

Aniqmas integral ta'rifidan uning quyidagi sodda xossalari kelib chiqadi:

1) ushbu $\int f(x)dx$ aniqmas integralning hosilasi $f(x)$ ga teng bo'ladi.

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

2) funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiyaga teng bo'ladi (o'zgarmas son aniqligida)

$$\int dF(x)=F(x)+c \qquad (c=const)$$

Xususan,

$$\int dx=x+c \qquad (c=const)$$

bo'ladi;

3) o'zgarmas sonni integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin.

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \quad (k=const,\ k\neq 0) \qquad (5)$$

4) ikki funksiya yig'indisining integrali bu funksiyalar integrallarining yig'indisiga teng:

$$\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx \qquad (6)$$

Eslatma. *Yuqoridagi (5), (6) tengliklarni o'ng va chap tomonidagi ifodalar orasidagi ayirma o'zgarmas songa barobarligi ma'nosidagi (o'zgarmas son aniqligida) tengliklar deb qaraladi.*

Ma'lumki, berilgan funksiyaning hosilasini topish uni **differensiallash** deyiladi. Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish esa uni integrallash deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ma'lumotlardan funksiyani differensiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar ekanini payqash qiyin emas.

Ma'lumki,

$$\int f(x)dx=F(x)+c, \text{ ya'ni } F'(x)=f(x)$$

bo'lsa, unda

$$(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$$

bo'ladi va aksincha bo'ladi.

Demak, $f(x)$ bitta boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u cheksiz ko'p boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lib qoladi.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya ixtiyoriy ikkita $F(x)$ va $\phi(x)$ boshlang'ich funksiyalarga ega, ya'ni

$$F'(x)=f(x), \quad \phi'(x)=f(x)$$

bo'lsa,

$$\phi(x)=F(x)+c \qquad (c=const)$$

bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$[\phi(x)-F(x)]'=\phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

bo'lib, Lagranj teoremasining natijasiga ko'ra (qaralsin, 17-ma'ruza)

$$\phi(x)-F(x)=c \qquad (c=const)$$

bo'ladi va undan $\phi(x)=F(x)+c$ bo'lishi kelib chiqadi.

Natijada, quyidagi xulosaga kelamiz:

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da boshlang'ich funksiya $F(x)$ ga ega bo'lsa, u holda

1) $f(x)$ funksiya cheksiz ko'p boshlang'ich funksiyalarga ega;

2) barcha boshlang'ich funksiyalarning umumiy ifodasi

$$F(x)+c \qquad (c=const) \qquad (3)$$

bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy boshlang'ich funksiya shu ifodadan (o'zgarmas c ga qiymat berish natijasida) kelib chiqadi.

Ta'rif. *(3) ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va*

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi, bunda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, $\int$ – integral belgisi.

Demak, $\int f(x)dx=F(x)+c \qquad (c=const) \qquad (4)$

1-misol. *Ushbu $\int 5x^5dx$ integralni toping.*

◄Ta'rifga ko'ra, bu integral shunday funksiyaki, uning hosilasi $5x^5$ ga teng. Ravshanki,

$$F(x)=\frac{5}{6}x^6+c \qquad (c=const)$$

funksiya uchun

$$F'(x)=(\frac{5}{6}x^6+c)'=\frac{5}{6}\cdot 6x^5+0=5x^5$$

bo'ladi. Demak,

$$\int 5x^5dx=\frac{5}{6}x^6+c. \blacktriangleright$$

Eslatma. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da uzluksiz bo'lsa, uning aniqmas integrali mavjud bo'ladi* (bu tasdiq keyinroq isbotlanadi).

Ko'pincha funksiyaning aniqmas integrali qaralganda uni qanday oraliqda bo'lishi ko'rsatilmaydi. Bunda funksiyaning aniqlanish sohasida qaralayapti, deb hisoblanadi.

1.2. Aniqmas integralning sodda xossalari

Aniqmas integral ta'rifidan uning quyidagi sodda xossalari kelib chiqadi:

1) ushbu $\int f(x)dx$ aniqmas integralning hosilasi $f(x)$ ga teng bo'ladi.

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

2) funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiyaga teng bo'ladi (o'zgarmas son aniqligida)

$$\int dF(x)=F(x)+c \qquad (c=const)$$

Xususan,

$$\int dx=x+c \qquad (c=const)$$

bo'ladi;

3) o'zgarmas sonni integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin.

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \quad (k=const,\ k\neq 0) \qquad (5)$$

4) ikki funksiya yig'indisining integrali bu funksiyalar integrallarining yig'indisiga teng:

$$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx \qquad (6)$$

Eslatma. *Yuqoridagi (5), (6) tengliklarni o'ng va chap tomonidagi ifodalar orasidagi ayirma o'zgarmas songa barobarligi ma'nosidagi (o'zgarmas son aniqligida) tengliklar deb qaraladi.*

Ma'lumki, berilgan funksiyaning hosilasini topish uni **differensiallash** deyiladi. Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish esa uni integrallash deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ma'lumotlardan funksiyani differensiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar ekanini payqash qiyin emas.

Ma'lumki,

$$\int f(x)dx=F(x)+c, \text{ ya'ni } F'(x)=f(x)$$

bo'lsa, unda

$$\left(F(x)+c\right)'=F'(x)=f(x)$$

bo'ladi va aksincha bo'ladi.

Funksiya hosilalari jadvali hamda aniqmas integral ta'rifidan foydalanib, ba'zi funksiyalar aniqmas integrallarining jadvalini keltiramiz.

1) $\int 1\cdot dx=\int dx=x+c$, chunki $(x+c)'=1$.

2) $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad (n\neq -1)$, chunki $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c\right)'=x^n$.

3) $\int x^{-1}dx=\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+c$, chunki

$x>0$ da $\int\dfrac{dx}{x}=\ln x+c$ va $(\ln x+c')=x^{-1}$.

$x<0$ da $\int\dfrac{dx}{x}=\ln(-x)+c$ va $(\ln(-x)+c)'=x^{-1}$.

4) $\int a^x\cdot dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+c$, chunki $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}+c\right)'=a^x$.

5) $\int e^x\cdot dx=e^x+c$, chunki $(e^x+c)'=e^x$.

6) $\int \sin x dx=-\cos x+c$, chunki $(-\cos x+c)'=\sin x$.

7) $\int \cos x dx=\sin x+c$, chunki $(\sin x+c)'=\cos x$.

8) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+c$, chunki $(-ctgx+c)'=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c$, chunki $(tgx+c)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

10) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c$, chunki $(\arcsin x+c)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x+c$, chunki $(-\arccos x+c)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12) $\int\dfrac{dx}{1+x^2}=arctgx+c$, chunki $(arctgx+c)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

13) $\int\dfrac{dx}{1+x^2}=-arcctgx+c$, chunki $(-arcctgx+c)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

14) $\int shxdx=chx+c$, chunki $(chx+c)'=shx$.

15) $\int chxdx=shx+c$, chunki $(shx+c)'=chx$.

Yuqorida keltirilgan integrallar jadvali hamda integralning sodda xossalaridan foydalanib, aniqmas integrallarni hisoblashga doir misollar keltiramiz.

Misollar

1. $\int(3x^2-2x+7)dx=\int 3x^2dx-\int 2xdx+\int 7dx=$

$=3\int x^2dx-2\int xdx+7\int dx=3\cdot\dfrac{x^3}{3}-2\cdot\dfrac{x^2}{2}+7x+c=x^3-x^2+7x+c$

2. $\int\dfrac{x^2-x^3+1}{x^5}dx=\int(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^5})dx=\int x^{-3}dx-\int x^{-2}dx+\int x^{-5}dx=$

$=\dfrac{1}{-2}x^{-2}-\dfrac{1}{-1}x^{-1}+\dfrac{1}{-4}x^{-4}+c=\dfrac{-2x^2+4x^3-1}{4x^4}+c$

3. $\int(5\sqrt{x}-3\sqrt[5]{x^3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}})dx=5\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^{\frac{3}{5}}dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$

$=5\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}-3\dfrac{1}{\frac{3}{5}+1}x^{\frac{3}{5}+1}-2\dfrac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+c=$

$=\dfrac{10}{3}\sqrt{x^3}-\dfrac{15}{8}\sqrt[5]{x^8}-4\sqrt{x}+c$

4. $\int tg^2xdx=\int\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1)dx=$

$=\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=tgx-x+c.$

1.3. Integrallash usullari

1°. O'zgaruvchini almashtirib integrallash usuli

Aytaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: $F'(x)=f(x)$

Ravshanki,

$$\int f(x)dx=F(x)+c \tag{7}$$

bo'ladi. Keyingi integralda

$$x=\varphi(t)$$

deylik, bunda $\varphi(t)$ uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega bo'lgan funksiya.

Ma'lumki, $F(\varphi(t))$ murakkab funksiya hosilaga ega bo'lib,

$$(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

bo'ladi. Modomiki, $F'(x)=f(x)$ ekan, unda

$$(F(\varphi(t)))'=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

bo'lib, keyingi tenglikdan

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+c \tag{8}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(7) va (8) munosabatlardan topamiz:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Bu formula integrallarda o'zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

2-misol. *Ushbu* $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ *integranil hisoblang.*

◀Bu integralda $x=t^2$ almashtirish bajaramiz. Unda $dx=2tdt$ bo'lib,

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\sin t}{t}\cdot 2tdt=2\int\sin tdt=-2\cos t+c=-2\cos\sqrt{x}+c$$

bo'ladi.▶

Ba'zi hollarda $x=\varphi(t)$ almashtirish o'rniga $t=\psi(x)$ almashtirish qulay bo'ladi.

3-misol. *Ushbu*

$$\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda $t=x^2+x+1$ deymiz. Unda

$$dt=d\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)'dx=(2x+1)dx$$

bo'lib,

$$\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|x^2+x+1\right|+c$$ bo'ladi.▶

Ko'p hollarda o'zgaruvchi almashtirish ifodasini yozish zaruriyati bo'lmaydi. Ushbu

1) $d(x+a)=dx, \qquad (a=const)$

2) $d(ax)=adx$, яъни $dx=\frac{1}{a}d(ax) \qquad (a=const, a\neq 0)$

tengliklarni e'tiborga olish va uni tatbiq etish yetarli bo'ladi.

4-misol. *Ushbu*

$$\int\sqrt{x+1}dx$$

integralni hisoblang.

◀Ravshanki, $d(x+1)=dx$. Unda

$$\int\sqrt{x+1}dx=\int(x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1)=\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+c$$

bo'ladi.▶

5-misol. *Ushbu*

$$\int e^{2x}dx$$

integralni hisoblang.

◀Ravshanki, $dx=\frac{1}{2}d(2x)$. Unda

$$\int e^{2x}dx=\int e^{2x}\cdot\frac{1}{2}d(2x)=\frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

bo'ladi.▶

6-misol. *Ushbu*

$$\int\frac{dx}{4x+7}$$

integralni hisoblang.

◀Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\frac{dx}{4x+7}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x)}{4x+7}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x+7)}{4x+7}=\frac{1}{4}\ln|4x+7|+c.$$▶

2°. Bo'laklab integrallash usuli

Aytaylik, $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ funksiyalar uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin.

Ma'lumki,

$$d(u\cdot v)=vdu+udv$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikni integrallab

$$\int d(uv)=\int vdu+\int udv$$

so'ng

$$\int d(u\cdot v)=u\cdot v$$

bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$uv=\int vdu+\int udv.$$

Natijada,

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (9)$$

formulaga kelamiz. (9) formula bo'laklab integrallash formulasi deyiladi. U $\int udv$ integralni hisoblashni $\int vdu$ integralni hisoblashga olib keladi.

Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanish uchun berilgan integral ostidagi ifoda $u(x)$ va dv lar ko'paytmasi ko'rinishida shunday yozib olinishi lozimki, bunda dv hamda $v(x)du$ lar oson hisoblanadigan bo'lsin.

7-misol. *Ushbu* $\int xe^x dx$ *integralni hisoblang.*

◀Bu integralda

$$x=u,$$
$$e^x dx=dv$$

deymiz. U holda

$$du = dx,$$
$$v = \int e^x dx = e^x$$

bo‘lib, (9) formulaga ko‘ra

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

bo‘ladi. (bu holda $\int xe^x dx$ integralni hisoblash jadvalda keltirilgan $\int e^x dx$ integralga keldi). Ravshanki, $\int e^x dx = e^x + c \to$. Demak,

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c. \blacktriangleright$$

8-misol. *Ushbu* $\int x\cos x dx$ *integralni hisoblang.*

◀Bu integralda

$$x = u,$$
$$\cos x dx = dv$$

deymiz. U holda

$$du = dx,$$
$$v = \int \cos x dx = \sin x$$

bo‘lib, (9) formulaga ko‘ra

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$$

bo‘ladi.▶

9-misol. *Ushbu*

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

integralni hisoblang.

◀Avvalo, $n=1$ bo‘lgan holni ko‘rib chiqamiz. Bu holda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c$$

bo‘ladi.

Endi $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ da

$$u = \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n},$$
$$dv = dx$$

deylik. U holda

$$du = \left(\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}\right)' dx = -\frac{2nx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx,$$
$$v = x$$

bo‘lib, (9) formulaga ko‘ra $J_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx$

bo‘ladi. Bu tenglikning o‘ng tomonidagi integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = \int \frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx -$$
$$-\int \frac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx - a^2\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = J_n - a^2 \cdot J_{n+1}$$

Natijada, $J_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\cdot J_n - 2na^2\cdot J_{n+1}$ bo‘lib, undan

$$J_{n+1} = \frac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\cdot J_n \qquad (10)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Yuqorida ko‘rdikki, $J_1 = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c$ (10) formulada $n=1$ deb

$$J_2 = \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{x}{2a^2\cdot\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a} + c$$

bo‘lishini topamiz.

Shu tariqa (10) formula yordamida $n = 2, 3, 4, \ldots$ bo‘lgan hollarda mos integrallar hisoblanadi.▶

Odatda, (10) formula rekurent formula deyiladi.

Ba’zi hollarda, u va dv lar uchun ularning ifodalarini yozib o‘tirnasdan (9) fomuladan foydalanib integrallarni hisoblash mumkin.

10-misol. *Ushbu* $\int x\, arctgx\cdot dx$ *integralni hisoblang.*

◀Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int x\, arctgx\cdot dx = \frac{1}{2}\int arctgx\cdot d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)\cdot arctgx - \int\left(x^2+1\right)d(arctgx)\right] =$$
$$= \frac{x^2+1}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^2+1}{2}arctgx - \frac{1}{2}x + c. \blacktriangleright$$

Mashqlar

Quyidagi aniqmas integrallarni hisoblang.

1. $\int(4-3x)e^{-3x}dx$ **2.** $\int arctg\sqrt{4x-1}dx$

3. $\int(4-16x)\sin 4x dx$ **4.** $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$

2-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

Biz 10-ma'ruzada butun va kasr ratsional funksiyalar, 6-ma'ruzada yuqori darajali ratsional tenglamalar va ularning ildizlari haqida ma'lumotlar keltirgan edik. Endi ulardan foydalanib, ratsional funksiyalarni integrallashni ko'rib chiqamiz.

2.1. Ko'phad va uning ildizlari

Biror

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{1}$$

ko'phad (butun ratsional funksiya) berilgan bo'lsin, bunda $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – o'zgarmas sonlar, $a_n \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$ esa ko'phadning darajasi.

Ma'lumki, α son uchun $P(\alpha)=0$ bo'lsa, α son $P(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi. Agar $P(x)$ ko'phad $(x-\alpha)^k$ ga $(k \in \mathrm{N})$ qoldiqsiz bo'linsa, α son $P(x)$ ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi.

Agar $h=\alpha+i\beta$ kompleks son $P(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda $\bar{h}=\alpha-i\beta$ kompleks son ham bu ko'phadning ildizi bo'ladi. Demak, $P(x)$ ko'phadning ifodasida quyidagi

$$(x-h)(x-\bar{h})=[x-(\alpha+i\beta)]\cdot[x-(\alpha-i\beta)]=$$
$$=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q \qquad (p=-2\alpha, \quad q=\alpha^2+\beta^2)$$

kvadrat uchhad ko'paytuvchi sifatida qatnashadi.

Faraz qilaylik,

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

ko'phad uchun

α_1 son m_1 karrali,
α_2 son m_2 karrali,
....
α_k son m_k karrali,

haqiqiy ildizlari bo'lib,

h_1 kompleks son t_1 karrali,
h_2 kompleks son t_2 karrali,
....
h_s kompleks son t_s karrali,

ildizlari bo'lsin. U holda $P(x)$ ko'phad quyidagi

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}$$
$$\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{t_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s} \tag{2}$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda

$$m_1+m_2+\cdots+m_k+2(t_1+t_2+\cdots t_s)=n,$$
$$x^2+p_i\cdot x+q_i=0 \qquad (i=1,2,\ldots,s)$$

tenglamalar haqiqiy ildizga ega emas.

$P(x)$ ko'phadni (2) ko'rinishda ifodalash uni ko'paytuvchilarga ajratish ham deyiladi.

Endi ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratishga misollar keltiramiz:

1) $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$,

2) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$,

3) $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=$
$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2x}+1)$,

4) $x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x^2+2x+1=$
$=x^2(x+1)+(x+1)^2=(x+1)(x^2+x+1)$.

Ushbu

1) $\frac{A}{x-a}$, A va a o'zgarmas sonlar;

2) $\frac{A}{(x-a)^n}$, $\quad n=2,3,4,\ldots$;

3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, B,C hamda p va q o'zgarmas sonlar, x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas.

4) $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$, $\quad m=2,3,4,\ldots \quad \left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$ ko'rinishdagi kasrlar

sodda kasrlar deyiladi.

Masalan, quyidagi funksiyalar

$$\frac{2}{x+1}, \quad \frac{6}{(x-2)^4}, \quad \frac{2x+1}{x^2+x+1}, \quad \frac{4}{x^2+1}, \quad \frac{3x+2}{(x^2+4x+4)^3}$$

sodda kasrlar bo'ladi.

2.2. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodalash (to'g'ri kasrlarni sodda kasrlarga yoyish)

Ma'lumki, ushbu

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$$

2-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

Biz 10-ma'ruzada butun va kasr ratsional funksiyalar, 6-ma'ruzada yuqori darajali ratsional tenglamalar va ularning ildizlari haqida ma'lumotlar keltirgan edik. Endi ulardan foydalanib, ratsional funksiyalarni integrallashni ko'rib chiqamiz.

2.1. Ko'phad va uning ildizlari

Biror

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \qquad (1)$$

ko'phad (butun ratsional funksiya) berilgan bo'lsin, bunda $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – o'zgarmas sonlar, $a_n \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$ esa ko'phadning darajasi.

Ma'lumki, α son uchun $P(\alpha)=0$ bo'lsa, α son $P(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi. Agar $P(x)$ ko'phad $(x-\alpha)^k$ ga $(k \in \mathrm{N})$ qoldiqsiz bo'linsa, α son $P(x)$ ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi.

Agar $h=\alpha+i\beta$ kompleks son $P(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda $\bar{h}=\alpha-i\beta$ kompleks son ham bu ko'phadning ildizi bo'ladi. Demak, $P(x)$ ko'phadning ifodasida quyidagi

$$(x-h)(x-\bar{h})=[x-(\alpha+i\beta)]\cdot[x-(\alpha-i\beta)]=$$
$$=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q \qquad (p=-2\alpha, \quad q=\alpha^2+\beta^2)$$

kvadrat uchhad ko'paytuvchi sifatida qatnashadi.

Faraz qilaylik,

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

ko'phad uchun

α_1 son m_1 karrali,
α_2 son m_2 karrali,
....
α_k son m_k karrali,

haqiqiy ildizlari bo'lib,

h_1 kompleks son t_1 karrali,
h_2 kompleks son t_2 karrali,
....
h_s kompleks son t_s karrali,

ildizlari bo'lsin. U holda $P(x)$ ko'phad quyidagi

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}$$
$$\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{t_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s} \qquad (2)$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda

$$m_1+m_2+\cdots+m_k+2(t_1+t_2+\cdots t_s)=n,$$
$$x^2+p_i\cdot x+q_i=0 \qquad (i=1,2,\ldots,s)$$

tenglamalar haqiqiy ildizga ega emas.

$P(x)$ ko'phadni (2) ko'rinishda ifodalash uni ko'paytuvchilarga ajratish ham deyiladi.

Endi ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratishga misollar keltiramiz:

1) $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$,

2) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$,

3) $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=$
$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2x}+1)$,

4) $x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x^2+2x+1=$
$=x^2(x+1)+(x+1)^2=(x+1)(x^2+x+1)$.

Ushbu

1) $\frac{A}{x-a}$, A va a o'zgarmas sonlar;

2) $\frac{A}{(x-a)^n}$, $\quad n=2,3,4,\ldots$;

3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, B, C hamda p va q o'zgarmas sonlar, x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas.

4) $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$, $\quad m=2,3,4,\ldots \quad \left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$ ko'rinishdagi kasrlar

sodda kasrlar deyiladi.

Masalan, quyidagi funksiyalar

$$\frac{2}{x+1}, \quad \frac{6}{(x-2)^4}, \quad \frac{2x+1}{x^2+x+1}, \quad \frac{4}{x^2+1}, \quad \frac{3x+2}{(x^2+4x+4)^3}$$

sodda kasrlar bo'ladi.

2.2. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodalash (to'g'ri kasrlarni sodda kasrlarga yoyish)

Ma'lumki, ushbu

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$$

kasr ratsional funksiya $n<m$ bo'lganda (suratidagi ko'phadning darajasi maxrajdagi ko'phadning darajasidan kichik bo'lganda) to'g'ri kasr deyiladi.

Aytaylik, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasrning maxraji $Q(x)$ ko'phad quyidagicha

$$Q(x)=(x-a)^k\left(x^2+px+q\right)^s \qquad (3)$$

ko'paytuvchilarga ajralgan bo'lsin, bunda $k\in N,\ s\in N$, va x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas. Bunday to'g'ri kasr $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ni sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodalanishi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *To'g'ri kasr* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *uchun*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{(x-a)^k\left(x^2+px+q\right)^s}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+$$
$$+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_1x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\cdots+\frac{B_sx+C_s}{\left(x^2+px+q\right)^s} \qquad (4)$$

bo'ladi, bunda $A_1,A_2,...,A_k$, $B_1,C_1,B_2,C_2,...,B_s,C_s$ *– o'zgarmas haqiqiy sonlar. (4) yoyilmadagi o'zgarmas sonlar quyidagicha topiladi.*

(4) tenglikning o'ng tomonidagi sodda kasrlar yig'indisi umumiy maxrajga keltiriladi.

Natijada,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{Q(x)}$$

tenglik hosil bo'lib, undan barcha x lar uchun o'rinli bo'lgan

$$P(x)=R(x)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldida turgan koeffitsiyentlarni tenglashtirib, noma'lum sonlarni topish uchun tenglamalar sistemasi hosil qilinadi. Sistemani yechib noma'lum sonlar topiladi.

Eslatma. *Yuqorida*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

to'g'ri kasrda maxraj (4) ko'rinishda ko'paytuvchilarga ajralgan hol uchun to'g'ri kasrni sodda kasrlarga ajralishini ko'rdik.

To'g'ri kasr maxraji $Q(x)$ ko'phad boshqa ko'rinishda ko'paytuvchilarga ajralganda ham kasr sodda kasrlar yig'indisi sifatida ifodalanadi.

Masalan,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

to'g'ri kasr maxraji

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdot...\cdot(x-a_k)$$

bo'lsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_k}{x-a_k}$$

bo'ladi;

$$Q(x)=\left(x^2+p_1x+q_1\right)\left(x^2+p_2x+q_2\right)\cdot...\cdot\left(x^2+p_kx+q_k\right)$$

bo'lsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+p_2x+q_2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{x^2+p_kx+q_k}$$

bo'ladi.

To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodalash jarayonini misollarda ko'rsatamiz.

1-misol. *Ushbu*

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}$$

to'g'ri kasrni sodda kasrlarga yoying.

◄1) kasrning maxrajida turgan x^3+4x^2+4x ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^3+4x^2+4x=x\left(x^2+4x+4\right)=x(x+2)^2$$

2) berilgan to'g'ri kasrni noma'lum koeffitsiyentlar orqali yuqorida ko'rsatilgandek sodda kasrlar yig'indisi orqali yozamiz:

$$\frac{3x^2+8}{x\cdot(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2} \qquad (5)$$

3) bu tenglikning ikki tomonini $x(x+2)^2$ ga ko'paytirib, uni maxrajdan qutqartiramiz:

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx.$$

Keyingi tenglikdan

$$3x^2+8=(A+B)x^2+(4A+2B+C)x+4A$$

bo'lishi kelib chiqadi.

4) bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldida turgan koeffitsiyentlarni tenglashtirib, ushbu

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 4A+2B+C=0 \\ 4A=8 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz.

5) tenglamalar sistemasini yechib,

$$A=2,\quad B=1,\quad C=-10$$

bo'lishini topamiz va ularni (5) tenglikdagi A,B,C larning o'rniga qo'yish natijasida berilgan to'g'ri kasrni sodda kasrlar yig'indisi orqali quyidagicha

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}$$

ifodalanishini topamiz.▶

2-misol. *Ushbu* $\frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}$ *to'g'ri kasrni sodda kasrlarga yoying.*

◀1) $x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x^2+2x+1=$
$=x^2(x+1)+(x+1)^2=(x+1)(x^2+x+1)$.

2) $\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$;

3) $2x+3=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$, ya'ni

$$2x+3=(A+B)x^2+(A+B+C)x+A+C$$

4) $\begin{cases} A+B=0, \\ A+B+C=2, \\ A+C=3. \end{cases}$

$A=1,\quad B=-1,\quad C=2$

5) $\frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}=\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2+x+1}$ ▶

3-misol. *Ushbu* $\frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}$ *to'g'ri kasrni sodda kasrlarga yoying.*

◀1) $x^4+10x^2+25=(x^2+5)^2$;

2) $\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+5}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+5)^2}$,

3) $x^3-3=(B_1x+C_1)\cdot(x^2+5)+B_2x+C_2$,

4) $\begin{cases} B_1=1, \\ C_1=0, \\ 5B_1+B_2=0, \\ 5C_1+C_2=-3 \end{cases}$

5) $B_1=1,\quad C_1=0,\quad B_2=-5,\quad C_2=-3$

$$\frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}=\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\frac{x}{x^2+5}-\frac{5x+3}{(x^2+5)^2}.$$ ▶

2.3. Sodda kasrlarni integrallash

Sodda kasrlarning integrallari quyidagicha hisoblanadi:

1) $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$.

2) $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=$
$=A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=A\frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$

$(n=2,3,4,\ldots)$.

3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ sodda kasrning integrali $\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ ni hisoblash uchun kasr maxrajidagi kvadrat uchhadni quyidagicha yozib olamiz:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2$$

bunda

$$a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Natijada,

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$$

bo'ladi. Keyingi integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx=\left[x+\frac{p}{2}=t,\quad x=t-\frac{p}{2},\quad dx=dt\right]=$$

$$=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C^*=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C^*$$

sistemani hosil qilamiz.

5) tenglamalar sistemasini yechib,

$$A=2,\quad B=1,\quad C=-10$$

bo'lishini topamiz va ularni (5) tenglikdagi A,B,C larning o'rniga qo'yish natijasida berilgan to'g'ri kasrni sodda kasrlar yig'indisi orqali quyidagicha

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}$$

ifodalanishini topamiz.▶

2-misol. *Ushbu* $\frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}$ *to'g'ri kasrni sodda kasrlarga yoying.*

◀1) $x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x^2+2x+1=$

$=x^2(x+1)+(x+1)^2=(x+1)(x^2+x+1)$.

2) $\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$;

3) $2x+3=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$, ya'ni

$$2x+3=(A+B)x^2+(A+B+C)x+A+C$$

4) $\begin{cases} A+B=0, \\ A+B+C=2, \\ A+C=3. \end{cases}$

$A=1,\quad B=-1,\quad C=2$

5) $\frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}=\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2+x+1}$ ▶

3-misol. *Ushbu* $\frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}$ *to'g'ri kasrni sodda kasrlarga yoying.*

◀1) $x^4+10x^2+25=(x^2+5)^2$;

2) $\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+5}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+5)^2}$,

3) $x^3-3=(B_1x+C_1)\cdot(x^2+5)+B_2x+C_2$,

4) $\begin{cases} B_1=1, \\ C_1=0, \\ 5B_1+B_2=0, \\ 5C_1+C_2=-3 \end{cases}$

5) $B_1=1,\quad C_1=0,\quad B_2=-5,\quad C_2=-3$

$$\frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}=\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\frac{x}{x^2+5}-\frac{5x+3}{(x^2+5)^2}.$$ ▶

2.3. Sodda kasrlarni integrallash

Sodda kasrlarning integrallari quyidagicha hisoblanadi:

1) $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$.

2) $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=$

$=A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=A\frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$

$(n=2,3,4,...)$.

3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ sodda kasrning integrali $\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ ni hisoblash uchun kasr maxrajidagi kvadrat uchhadni quyidagicha yozib olamiz:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2$$

bunda

$$a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Natijada,

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$$

bo'ladi. Keyingi integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx=\left[x+\frac{p}{2}=t,\quad x=t-\frac{p}{2},\quad dx=dt\right]=$$

$$=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C^*=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C^*$$

Demak,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C^* \qquad (6)$$

bunda C^* – ixtiyoriy o'zgarmas son.

Masalan, ushbu $\int \frac{xdx}{x^2-x+1}$ integral (6) formulaga ko'ra (bu holda $B=1,\ C=0,\ p=-1,\ q=1$) quyidagicha bo'ladi:

$$\int \frac{xdx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C^*.$$

4) Ushbu $\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx \qquad (m=2,3,4,...)$

to'g'ri kasrning integrali quyidagicha hisoblanadi:

$$J_m = \int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \left[\begin{array}{l} x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}, \\ x+\frac{p}{2}=t, \quad x=t-\frac{p}{2}, \quad dx=dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{Bt+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m}dt = \frac{B}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} =$$

$$= \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral avvalgi paragrafda keltirilgan rekurent formula yordamida hisoblanadi.

2.4. Ratsional funksiyalarni integrallash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya ratsional funksiya bo'lsin.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ noto'g'ri kasr (suratidagi ko'phadning darajasi maxrajidagi ko'phadning darajasidan katta bo'lsa, unda suratini maxrajiga bo'lib, uning butun qismini ajratib, butun ratsional funksiya (ko'phad) ham to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida quyidagicha

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

ifodalab olinadi. Integrallash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int R(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi $\int R(x)dx$ integral butun ratsional funksiya (ko'phad) ning integrali bo'lib, u oson hisoblanadi.

Tenglikdagi $\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$ integral esa to'g'ri kasrning integrali. Uni hisoblash uchun, avvalo, $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ kasr yuqorida ko'rsatilgan usul bilan sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodalab olinadi. So'ng integrallash qoidalari va sodda kasrlarning integrallaridan foydalanib, to'g'ri kasrning integrali topiladi.

4-misol. *Ushbu* $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$ *integralni hisoblang.*

◀Ravshanki, integral ostidagi funksiya ratsional funksiya bo'lib, u noto'g'ri kasrdir. Bu kasrning suratini maxrajiga bo'lib, uning butun qismini ajratamiz:

Demak,

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} = 2x+\frac{1}{x^4+3x^2}$$

bo'lib, $$\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx = \int\left(2x+\frac{1}{x^4+3x^2}\right)dx = \int 2xdx + \int \frac{1}{x^4+3x^2}dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}+ \int \frac{1}{x^4+3x^2}dx$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral to'g'ri kasrning integrali. Uni hisoblash uchun integral ostidagi to'g'ri kasr

$$\frac{1}{x^4+3x^2}$$

ni sodda kasrlarga yoyamiz:

1) $x^4+3x^2=x^2\left(x^2+3\right)$,

2) $\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$,

3) $1=Ax(x^2+3)+B(x^2+3)+x^2(Cx+D)$,
$1=(A+C)x^3+(B+D)x^2+3Ax+3B$,

4) $A+C=0$,
$B+D=0$,
$3A=0$,
$3B=1$.

Demak,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C^* \qquad (6)$$

bunda C^* – ixtiyoriy o'zgarmas son.

Masalan, ushbu $\int \frac{xdx}{x^2-x+1}$ integral (6) formulaga ko'ra (bu holda $B=1,\ C=0,\ p=-1,\ q=1$) quyidagicha bo'ladi:

$$\int \frac{xdx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^*.$$

4) Ushbu $\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx \qquad (m=2,3,4,...)$

to'g'ri kasrning integrali quyidagicha hisoblanadi:

$$J_m = \int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \left[\begin{array}{l} x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}, \\ x+\frac{p}{2} = t, \quad x = t-\frac{p}{2}, \quad dx = dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{Bt + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m}dt = \frac{B}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} =$$

$$= \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral avvalgi paragrafda keltirilgan rekurent formula yordamida hisoblanadi.

2.4. Ratsional funksiyalarni integrallash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya ratsional funksiya bo'lsin.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ noto'g'ri kasr (suratidagi ko'phadning darajasi maxrajidagi ko'phadning darajasidan katta bo'lsa, unda suratini maxrajiga bo'lib, uning butun qismini ajratib, butun ratsional funksiya (ko'phad) ham to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida quyidagicha

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

ifodalab olinadi. Integrallash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int R(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi $\int R(x)dx$ integral butun ratsional funksiya (ko'phad) ning integrali bo'lib, u oson hisoblanadi.

Tenglikdagi $\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$ integral esa to'g'ri kasrning integrali. Uni hisoblash uchun, avvalo, $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ kasr yuqorida ko'rsatilgan usul bilan sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodalab olinadi. So'ng integrallash qoidalari va sodda kasrlarning integrallaridan foydalanib, to'g'ri kasrning integrali topiladi.

4-misol. *Ushbu* $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$ *integralni hisoblang.*

◄Ravshanki, integral ostidagi funksiya ratsional funksiya bo'lib, u noto'g'ri kasrdir. Bu kasrning suratini maxrajiga bo'lib, uning butun qismini ajratamiz:

Demak,

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4+3x^2}$$

bo'lib, $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx = \int\left(2x + \frac{1}{x^4+3x^2}\right)dx = \int 2xdx + \int \frac{1}{x^4+3x^2}dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{x^4+3x^2}dx$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral to'g'ri kasrning integrali. Uni hisoblash uchun integral ostidagi to'g'ri kasr

$$\frac{1}{x^4+3x^2}$$

ni sodda kasrlarga yoyamiz:

1) $x^4+3x^2 = x^2\left(x^2+3\right)$,

2) $\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$,

3) $1 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + x^2(Cx+D)$,
$1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 3Ax + 3B$,

4) $A+C=0$,
$B+D=0$,
$3A=0$,
$3B=1$.

5) $A=0,\quad B=\frac{1}{3},\quad C=0,\quad D=-\frac{1}{3},$

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}.$$

Endi keyingi tenglikdan foydalanib, to'g'ri kasrning integralini topamiz:

$$\int\frac{1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}\right)dx=\frac{1}{3}\int x^{-2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c=-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$$

Shunday qilib berilgan integral uchun

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c$$

bo'ladi.▶

Mashqlar

Aniqmas integralni hisoblang.

1. $\int\frac{x^3+1}{x^2-x}dx$ 2. $\int\frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$

3. $\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$ 4. $\int\frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$

5. $\int\frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

3-§. Ba'zi irratsional funksiyalarni hamda trigonometrik funksiyalarni integrallash

3.1. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

Biz 22-ma'ruzada ratsional funksiyalarning integralini har doim hisoblash mumkinligini ko'rdik. Irratsional funksiyalarning integrallarini hisoblashda vaziyat boshqacha, ya'ni irratsional funksiyalarning integrallari har doim ham hisoblanavermaydi.

Integral ostidagi funksiyada o'zgaruvchi $x,\ ax+b,\ ax^2+bx+c$ lar turli kasr darajalarda qatnashgan ayrim hollarda integrallarning hisoblanishini misollarda bayon etamiz. Shuni aytish kerakki, bunday hollarda integrallar o'zgaruvchilarini almashtirish yordamida ratsional funksiyalarga keltirilib, hisoblanadi.

1-misol. Ushbu

$$J=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda $x=t^2$ almashtirish bajaramiz. Unda $dx=2tdt$ bo'lib,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t}{1+t}\cdot 2tdt=2\int\frac{t^2}{1+t}dt$$

bo'ladi. Natijada, irratsional funksiyani integrallash ratsional funksiyani integrallashga keldi.

Ravshanki,

$$\frac{t^2}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}$$

bo'ladi. Unda

$$\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dx=\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)+c$$

bo'lib,

$$J=2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)+c=t^2-2t+2\ln(t+1)+c=$$

$$=x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+c$$

bo'ladi.▶

2-misol. *Ushbu* $J=\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$ *integralni hisoblang.*

◀Bu integralda $x=t^6$ almashtirishni bajaramiz. Unda $dx=6t^5dt$ bo'lib,

$$J=\int\frac{6t^5dt}{(1+t^2)t^3}=6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=6\left[\int 1\cdot dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right]=$$

$$=6t-6arctgt+c$$

bo'ladi. Demak,

$$J=6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+c.▶$$

3-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda $\frac{1+x}{x}=t^2$ deb

$$x=\frac{1}{t^2-1},\quad dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$$

bo'lishini topamiz. Natijada

$$A=0,\quad B=\frac{1}{3},\quad C=0,\quad D=-\frac{1}{3},$$

5)
$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}.$$

Endi keyingi tenglikdan foydalanib, to'g'ri kasrning integralini topamiz:

$$\int\frac{1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}\right)dx=\frac{1}{3}\int x^{-2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c=-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$$

Shunday qilib berilgan integral uchun

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c$$

bo'ladi.▶

Mashqlar

Aniqmas integralni hisoblang.

1. $\int\frac{x^3+1}{x^2-x}dx$
2. $\int\frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$
3. $\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$
4. $\int\frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$
5. $\int\frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

3-§. Ba'zi irratsional funksiyalarni hamda trigonometrik funksiyalarni integrallash

3.1. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

Biz 22-ma'ruzada ratsional funksiyalarning integralini har doim hisoblash mumkinligini ko'rdik. Irratsional funksiyalarning integrallarini hisoblashda vaziyat boshqacha, ya'ni irratsional funksiyalarning integrallari har doim ham hisoblanavermaydi.

Integral ostidagi funksiyada o'zgaruvchi x, $ax+b$, ax^2+bx+c lar turli kasr darajalarda qatnashgan ayrim hollarda integrallarning hisoblanishini misollarda bayon etamiz. Shuni aytish kerakki, bunday hollarda integrallar o'zgaruvchilarini almashtirish yordamida ratsional funksiyalarga keltirilib, hisoblanadi.

1-misol. Ushbu

$$J=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda $x=t^2$ almashtirish bajaramiz. Unda $dx=2tdt$ bo'lib,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t}{1+t}\cdot 2tdt=2\int\frac{t^2}{1+t}dt$$

bo'ladi. Natijada, irratsional funksiyani integrallash ratsional funksiyani integrallashga keldi.

Ravshanki,

$$\frac{t^2}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}$$

bo'ladi. Unda

$$\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dx=\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)+c$$

bo'lib,

$$J=2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)+c=t^2-2t+2\ln(t+1)+c=$$
$$=x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+c$$

bo'ladi.▶

2-misol. *Ushbu* $J=\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$ *integralni hisoblang.*

◀Bu integralda $x=t^6$ almashtirishni bajaramiz. Unda $dx=6t^5dt$ bo'lib,

$$J=\int\frac{6t^5dt}{(1+t^2)t^3}=6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=6\left[\int 1\cdot dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right]=$$
$$=6t-6arctgt+c$$

bo'ladi. Demak,

$$J=6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+c.▶$$

3-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda $\frac{1+x}{x}=t^2$ deb

$$x=\frac{1}{t^2-1},\qquad dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$$

bo'lishini topamiz. Natijada

$$J=\int(t^2-1)\cdot t\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=-2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=-2t-2\int\frac{dt}{t^2-1}=-2t-2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)(t-1)}dt=$$

$$=-2t-\int\frac{dt}{t-1}+\int\frac{dt}{t+1}=-2t-\ln|t-1|+\ln|t+1|+c=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

bo'ladi. Demak,

$$J=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+c.▶$$

4-misol. *Ushbu* $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ $(a\neq 0)$ *integralni hisoblang.*

◀Bu integralda

$$t=x+\sqrt{x^2+a}$$

deymiz. Unda

$$dt=\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'dx=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{t}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

bo'lib,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}$$

bo'ladi. Natijada

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c$$

bo'ladi.▶

5-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$$

integralni hisoblang.

◀Ravshanki, $x^2-6x+13=x^2-6x+9+4=(x-3)^2+4$. Unda

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

bo'ladi. Bu integralda $x-3=t$ deymiz. Natijada,

$$J=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+c,$$

ya'ni

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}=\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+4}\right|+c$$

bo'ladi.▶

6-misol. *Ushbu*

$$J=\int x^3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda $x^2=y$ deymiz. Unda $2xdx=dy$ bo'lib,

$$J=\frac{1}{2}\int y(1-y)^{-\frac{3}{2}}dy$$

bo'ladi. Keyingi integralda

$$1-y=t^2$$

almashtirishni bajaramiz. Natijada, $dy=-2tdt$ bo'lib,

$$J=-\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=-\int\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt=\frac{1}{t}+t+c=\frac{1}{\sqrt{1-y}}+\sqrt{1-y}+c$$

va nihoyat

$$J=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+c$$

bo'ladi.▶

3.2. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$ funksiyalarning integrallari ma'lum. Jumladan,

$$\int ctgxdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+c$$

bo'ladi.

Shuningdek, $y=\sin ax$, $y=\cos ax$, $y=tgax$, $y=ctgax$ hamda $y=\sin(x+a)$, $y=\cos(x+a)$, $y=tg(x+a)$, $y=ctg(x+a)$ funksiyalarning integrallarini oson hisoblanishini ham bilamiz. Masalan,

$$\int\sin(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)d(2x+1)=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+c.$$

$\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar ustida ratsional amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish) bajarilishidan hosil bo'lgan ifodani $f(x)$ bilan belgilaylik. Odatda, bunday $f(x)$ funksiya $\sin x$ va $\cos x$ larning ratsional funksiyasi deyiladi. Ularga quyidagilar:

$$f(x)=\frac{1}{\sin x},\quad f(x)=\frac{1}{3\sin x-4\cos x},\quad f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x\cdot\sin 2x},$$

$$f(x)=\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1},$$

misol bo'ladi.

Bunday trigonometrik funksiyalarning integrallari har doim ushbu

$$J=\int\left(t^2-1\right)\cdot t\frac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=-2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=-2t-2\int\frac{dt}{t^2-1}=-2t-2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)(t-1)}dt=$$

$$=-2t-\int\frac{dt}{t-1}+\int\frac{dt}{t+1}=-2t-\ln|t-1|+\ln|t+1|+c=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

bo'ladi. Demak,

$$J=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+c.\blacktriangleright$$

4-misol. *Ushbu* $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ $(a\neq 0)$ *integralni hisoblang.*

◀Bu integralda

$$t=x+\sqrt{x^2+a}$$

deymiz. Unda

$$dt=\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'dx=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{t}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

bo'lib,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}$$

bo'ladi. Natijada

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c$$

bo'ladi.▶

5-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$$

integralni hisoblang.

◀Ravshanki, $x^2-6x+13=x^2-6x+9+4=(x-3)^2+4$. Unda

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

bo'ladi. Bu integralda $x-3=t$ deymiz. Natijada,

$$J=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+c,$$

ya'ni

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}=\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+4}\right|+c$$

bo'ladi.▶

6-misol. *Ushbu*

$$J=\int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda $x^2=y$ deymiz. Unda $2xdx=dy$ bo'lib,

$$J=\frac{1}{2}\int y(1-y)^{-\frac{3}{2}}dy$$

bo'ladi. Keyingi integralda

$$1-y=t^2$$

almashtirishni bajaramiz. Natijada, $dy=-2tdt$ bo'lib,

$$J=-\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=-\int\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt=\frac{1}{t}+t+c=\frac{1}{\sqrt{1-y}}+\sqrt{1-y}+c$$

va nihoyat

$$J=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+c$$

bo'ladi.▶

3.2. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$ funksiyalarning integrallari ma'lum. Jumladan,

$$\int ctgxdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+c$$

bo'ladi.

Shuningdek, $y=\sin\alpha x$, $y=\cos\alpha x$, $y=tg\alpha x$, $y=ctg\alpha x$ hamda $y=\sin(x+a)$, $y=\cos(x+a)$, $y=tg(x+a)$, $y=ctg(x+a)$ funksiyalarning integrallarini oson hisoblanishini ham bilamiz. Masalan,

$$\int\sin(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)d(2x+1)=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+c.$$

$\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar ustida ratsional amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish) bajarilishidan hosil bo'lgan ifodani $f(x)$ bilan belgilaylik. Odatda, bunday $f(x)$ funksiya $\sin x$ va $\cos x$ larning ratsional funksiyasi deyiladi. Ularga quyidagilar:

$$f(x)=\frac{1}{\sin x},\quad f(x)=\frac{1}{3\sin x-4\cos x},\quad f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x\cdot\sin 2x},$$

$$f(x)=\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1},$$

misol bo'ladi.

Bunday trigonometrik funksiyalarning integrallari har doim ushbu

$$tg\frac{x}{2}=t$$

almashtirish natijasida ratsional funksiyalarning integrallariga keladi. Bunda

$$x=2arctgt,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

bo'ladi.

7-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda $tg\frac{x}{2}=t$ deymiz. Unda yuqorida aytilganlarga ko'ra

$$J=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{6t}{1+t^2}-\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+\frac{3}{2}t-1}dt$$

bo'ladi. Natijada, berilgan trigonometrik funksiyaning integrali ratsional funksiyaning integraliga keldi.

Ravshanki,

$$t^2+\frac{3}{2}t-1=t^2+2t-\frac{1}{2}t-1=t\left(t-\frac{1}{2}\right)+2\left(t-\frac{1}{2}\right)=\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+2).$$

Unda

$$\frac{1}{t^2+\frac{3}{2}t-1}=\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+2)}=\frac{A}{t-\frac{1}{2}}+\frac{B}{t+2},$$

$$1=A(t+2)+B\left(t-\frac{1}{2}\right),$$

$$1=(A+B)t+2A-\frac{1}{2}B,$$

$$\begin{cases}A+B=0,\\ 2A-\frac{1}{2}B=1,\end{cases}$$

$$A=\frac{2}{5},\quad B=-\frac{2}{5}$$

bo'lib,

$$\frac{1}{t^2+\frac{3}{2}t-1}=\frac{\frac{2}{5}}{t-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{2}{5}}{t+2}$$

bo'ladi. Integralni hisoblab topamiz:

$$J=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\frac{2}{5}}{t-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{2}{5}}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\left(\int\frac{dt}{t-\frac{1}{2}}-\int\frac{dt}{t+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|-\ln|t+2|\right)+c=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+2}\right|+c$$

Shunday qilib,

$$J=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{tg\frac{x}{2}+2}\right|+c$$

bo'ladi.▶

8-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda

$$tg\frac{x}{2}=t$$

almashtirish bajarib, bunda

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$J=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1+t^2+2t+1-t^2}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+c=\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+c$$ ▶

Eslatma. *Ba'zi hollarda*

$$\sin x=t,\quad \cos x=t,\quad tgx=t$$

almashtirishlar integrallarni hisoblashni yengillashtiradi.

9-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

integralni hisoblang.

◄Bu integralda $tgx=t$ deymiz. Unda

$$x=arctgt,\quad dx=(arctgt)'\cdot dt=\frac{1}{1+t^2}dt,$$

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{tg^2x}{tg^2x+1}=\frac{t^2}{1+t^2}$$

bo'lib,

$$J=\int\frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{d(\sqrt2\cdot t)}{1+(\sqrt2\cdot t)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}arctg(\sqrt2\cdot t)+c=\frac{1}{\sqrt2}arctg(\sqrt2\cdot tgx)+c$$

bo'ladi.►

Eslatma. *Ayrim trigonometrik funksiyalarni integrallashda trigonometriyada ma'lum bo'lgan ushbu*

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac12[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac12[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac12[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac12\sin 2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2},$$

formulalardan foydalanilsa, integrallar oson hisoblanadi.

10-misol. *Ushbu*

$$\int\sin3x\cdot\cos5xdx$$

integralni hisoblang.

◄Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\sin3x\cdot\cos5xdx=\frac12\int[\sin8x+\sin(-2x)]dx=\frac12\int\sin8xdx-\frac12\int\sin2xdx=$$

$$=\frac12\cdot\frac18\int\sin8xd(8x)-\frac12\cdot\frac12\int\sin2xd(2x)=\frac{-1}{16}\cos8x+$$ ►

$$+\frac14\cos2x+c=\frac14\cos2x-\frac1{16}\cos8x+c.$$

11-misol. *Ushbu*

$$J=\int\sin^2x\cos^4xdx$$

integralni hisoblang.

◄Bu integralni hisoblashda yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanamiz:

$$J=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2xdx=\int\left(\frac{\sin2x}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos2x}{2}dx=$$

$$=\frac18\int\sin^22x(1+\cos2x)dx=\frac18\int\sin^22xdx+\frac18\int\sin^22x\cos2xdx=$$

$$=\frac18\int\frac{1-\cos4x}{2}dx+\frac18\cdot\frac12\int\sin^22xd(\sin2x)=\frac1{16}\int(1-\cos4x)\cdot dx+$$

$$+\frac1{16}\int\sin^22xd(\sin2x)=\frac1{16}x-\frac{\sin4x}{64}+\frac{\sin^32x}{48}+c.$$ ►

Mashqlar

Ushbu aniqmas integrallarni hisoblang.

1) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$	2) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$
3) $\int\frac{dx}{\sin^3x\cos^5x}$	4) $\int\cos^3x\cdot\cos2xdx$
5) $\int\cos^52x\cdot\sin^72xdx$	

almashtirishlar integrallarni hisoblashni yengillashtiradi.

9-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda $tgx=t$ deymiz. Unda

$$x=arctgt,\quad dx=(arctgt)'\cdot dt=\frac{1}{1+t^2}dt,$$

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{tg^2x}{tg^2x+1}=\frac{t^2}{1+t^2}$$

bo'lib,

$$J=\int\frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}\cdot t)}{1+(\sqrt{2}\cdot t)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}\cdot t)+c=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}\cdot tgx)+c$$

bo'ladi.▶

Eslatma. *Ayrim trigonometrik funksiyalarni integrallashda trigonometriyada ma'lum bo'lgan ushbu*

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

formulalardan foydalanilsa, integrallar oson hisoblanadi.

10-misol. *Ushbu*

$$\int\sin 3x\cdot\cos 5xdx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\sin 3x\cdot\cos 5xdx=\frac{1}{2}\int[\sin 8x+\sin(-2x)]dx=\frac{1}{2}\int\sin 8xdx-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\int\sin 8xd(8x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\sin 2xd(2x)=\frac{-1}{16}\cos 8x+$$

$$+\frac{1}{4}\cos 2x+c=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+c.$$ ▶

11-misol. *Ushbu*

$$J=\int\sin^2 x\cos^4 xdx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralni hisoblashda yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanamiz:

$$J=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2 xdx=\int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)\cdot dx+$$

$$+\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{1}{16}x-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+c.$$ ▶

Mashqlar

Ushbu aniqmas integrallarni hisoblang.

1) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$	2) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$
3) $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$	4) $\int\cos^3 x\cdot\cos 2xdx$
5) $\int\cos^5 2x\cdot\sin^7 2xdx$	

VIII BOB

Aniq integral

1-§. Aniq integral va uning sodda xossalari. Aniq integralni hisoblash usullari

1.1. Masala

Faraz qilaylik, moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha $[t_0,T]$ vaqt oralig'ida $V=V(t)$ tezlik bilan harakat qilsin. Uning shu vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini S toping.

Ma'lumki, tezlik o'zgarmas, ya'ni $V(t)=V_0=const$ bo'lsa, u holda o'tilgan yo'l

$$S=V_0(T-t_0)$$

bo'ladi.

Agar tezlik t o'zgaruvchining $(t\in[t_0,T])$ ixtiyoriy funksiyasi bo'lsa, unda masalani yechishga quyidagicha kirishiladi:

1) vaqt oralig'i $[t_0,T]$ ni $t_0,t_1,t_2,...,t_n$ $(t_n=T)$ nuqtalar yordamida n ta qismga ajratiladi, bunda

$$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots t_{n-1}<t_n=T;$$

2) har bir $[t_k,t_{k+1}]$ $(k=0,1,2,...,n-1)$ oraliqda ixtiyoriy ξ_k nuqtani olib, tezlikning shu nuqtadagi qiymati $V(\xi_k)$ topiladi:

3) $V(\xi_k)$ ni $[t_k,t_{k+1}]$ oraliqning uzunligi $(t_{k+1}-t_k)$ ga ko'paytiriladi.

$$V(\xi_k)\cdot(t_{k+1}-t_k)\qquad(k=0,1,2,...,n-1)\tag{1}$$

Bu miqdor, tezlik $V(t)$ni $[t_k,t_{k+1}]$ oraliqda o'zgarmas va u $V(\xi_k)$ ga teng deb olinganda, nuqtaning $[t_k,t_{k+1}]$ oraliqda bosib o'tgan yo'lini (taqriban) ifodalaydi.

4) (1) ko'paytmani k ning $(k=0,1,2,...,n-1)$ qiymatlari uchun yozib, so'ng ularni yig'ib, ushbu

$$V(\xi_0)\cdot(t_1-t_0)+V(\xi_1)(t_2-t_1)+\cdots+$$
$$+V(\xi_k)\cdot(t_{k+1}-t_k)+V(\xi_{n-1})(t_n-t_{n-1})$$

yig'indi hosil qilinadi. Bu yig'indi ushbu Σ orqali quyidagicha yoziladi:

$$\sum_{k=0}^{n-1}V(\xi_k)\cdot(t_{k+1}-t_k).\tag{2}$$

Ravshanki, (2) yig'indi nuqtaning $[t_0,T]$ oraliqda bosib o'tgan yo'lini taqribiy ifodalaydi, chunki tezlik $V(t)$ vaqtning ixtiyoriy funksiyasi bo'lgan holda u har bir $[t_k,t_{k+1}]$ da o'zgarmas $V(\xi_k)$ deb olindi. Demak,

$$S\approx\sum_{k=0}^{n-1}V(\xi_k)\cdot(t_{k+1}-t_k).$$

$t_{k+1}-t_k=\Delta t_k$ deb, bu Δt_k $(k=0,1,2,...,n-1)$ larning eng kattasini λ deylik.

Endi $[t_0,T]$ oraliqning bo'laklash soni orttira borilsa (bunda har bir Δt_k nolga, ya'ni $\lambda\to0$ intilsin), u holda

$$\sum_{k=0}^{n-1}V(\xi_k)\cdot\Delta t_k$$

miqdor izlanayotgan yo'lni tobora aniqroq ifodalay boradi. Binobarin,

$$S=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1}V(\xi_k)\cdot\Delta t_k$$

bo'ladi.

Shunday qilib, nuqtaning tezligiga ko'ra o'tilgan yo'lni topish masalasi maxsus tuzilgan yig'indining limitini topishga kelar ekan.

Shunga o'xshash ko'pgina masalalar, jumladan, sterjenning zichligiga ko'ra uning massasini topish, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish, o'zgaruvchi kuchning bajargan ishini topish masalalari ham yuqoridagiga o'xshash yig'indining limitini topishga keladi. Bunday yig'indining limiti oliy matematikada muhim bo'lgan "aniq integral" tushunchasga olib keladi.

1.2. "Aniq integral" tushunchasi. Integralning mavjudligi

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lsin. Bu segmentni $x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n$ $(x_0=a,\ x_n=b,\ x_0<x_1<...<x_n)$ nuqtalar yordamida n ta

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_k,x_{k+1}],...,[x_{n-1},x_n]$$

bo'lakka ajratamiz. Bu bo'lakchalarning uzunliklarini mos ravishda quyidagicha belgilaymiz:

$$\Delta x_0=x_1-x_0\qquad(x_0=a),$$
$$\Delta x_1=x_2-x_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta x_{n-1}=x_n-x_{n-1}\qquad(x_n=b)$$

Odatda, $\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}$ kesmalar sistemasi (to'plami) $[a,b]$ segmentni bo'laklash deyiladi va u λ bilan belgilanadi:

$$\lambda = \{\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}\}.$$

Bu $\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}$ larning eng kattasini $|\lambda|$ deylik:

$$|\lambda| = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}\}.$$

Har bir tayin λ bo'laklash $[a,b]$ segmentining bitta bo'linishini aniqlaydi.

Har bir bo'lakchada ixtiyoriy ravishda bittadan

$$\xi_0, \xi_1, ..., \xi_k, ..., \xi_{n-1}$$

nuqtalarni olib, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari

$$f(\xi_0), f(\xi_1), ..., f(\xi_k), ..., f(\xi_{n-1})$$

ni mos ravishda bo'lakchalarning uzunliklariga ko'paytirib

$$f(\xi_0)\cdot\Delta x_0, f(\xi_1)\cdot\Delta x_1, ..., f(\xi_k)\cdot\Delta x_k, ..., f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

quyidagi

$$\sigma = f(\xi_0)\cdot\Delta x_0 + f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + ... + f(\xi_k)\cdot\Delta x_k +$$
$$+ ... + f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

yig'indini hosil qilamiz.

Odatda,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (3)$$

yig'indi $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi deyiladi. Bu yig'indi $[a,b]$ segmentning bo'laklanishiga, hamda har bir bo'lakchada olingan ξ_k nuqtalarga bog'liq bo'ladi.

Endi $[a,b]$ segmentining shunday bo'laklashlar ketma-ketligi

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ... \qquad (4)$$

ni olaylik, ular uchun

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$$

bo'lsin.

Ixtiyoriy, yuqorida aytilgan (4) ketma-ketlikni olib, bu ketma-ketlikning har bir hadiga mos integral yig'indilarni tuzamiz. Ular

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_n, ... \qquad (5)$$

ketma-ketlikni hosil qiladi, bunda

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

Ta'rif. *Agar har bir bo'lakchada olingan ixtiyoriy* ξ_k *nuqtalarda* $\{\sigma_n\}$ *ketma-ketlik har doim bitta* I *songa intilsa, (uni* $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$

ning limiti deyiladi), $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *segmentda integrallanuvchi,* I *son esa* $f(x)$ *funksiyaning* $[a,b]$ *segment bo'yicha aniq integrali deyiladi va u*

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = I = \int_a^b f(x)dx.$$

Bunda a son integralning quyi chegarasi, b son esa integralning yuqori chegarasi, $[a,b]$ segment **integrallash oralig'i** deyiladi.

24.1 da keltirilgan masalaning yechimi, o'tilgan S yo'l, tezlik $V(t)$ ning $[t_0, T]$ oraliq bo'yicha aniq integraldan iborat ekanligini bildiradi:

$$S = \int_{t_0}^{T} V(t)dt$$

Misol: *Agar* $[a,b]$ *da* $f(x) = c - const$ *bo'lsa, u holda*

$$\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$$

bo'lishini isbotlang.

◀ $[a,b]$ segmentning ixtiyoriy bo'laklashi

$$[a,x_1],\quad [x_1,x_2],\quad [x_2,x_3],...,\quad [x_k,x_{k+1}],...\quad [x_{n-1},b]$$

ni olib, har bir bo'lakchada bittadan ixtiyoriy

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ..., \xi_{n-1}$$

nuqtalarni tanlaymiz. Ravshanki,

$$f(\xi_0) = c, f(\xi_1) = c, f(\xi_2) = c, ..., f(\xi_k) = c, ..., f(\xi_{n-1}) = c$$

bo'lib,

$$\sigma = c\cdot\Delta x_0 + c\cdot\Delta x_1 + c\cdot\Delta x_2 + ... + c\cdot\Delta x_k + ... + c\cdot\Delta x_{n-1} =$$
$$= c(\Delta x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_k + ... + \Delta x_{n-1}) =$$
$$= c(x_1 - a + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + ... + x_{k+1} - x_k + ... + b - x_{n-1}) =$$
$$= c\cdot(b-a)$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{n\to\infty}\sigma = \lim_{n\to\infty} c\cdot(b-a) = c\cdot(b-a). \blacktriangleright$$

Xususan, $f(x) \equiv 1$ bo'lsa,

$$\int_a^b 1\,dx = \int_a^b dx = b - a$$

bo'ladi.

Odatda, $\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}$ kesmalar sistemasi (to‘plami) $[a,b]$ segmentni bo‘laklash deyiladi va u λ bilan belgilanadi:

$$\lambda = \{\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}\}.$$

Bu $\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}$ larning eng kattasini $|\lambda|$ deylik:

$$|\lambda| = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}\}.$$

Har bir tayin λ bo‘laklash $[a,b]$ segmentining bitta bo‘linishini aniqlaydi.

Har bir bo‘lakchada ixtiyoriy ravishda bittadan

$$\xi_0, \xi_1, ..., \xi_k, ..., \xi_{n-1}$$

nuqtalarni olib, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari

$$f(\xi_0), f(\xi_1), ..., f(\xi_k), ..., f(\xi_{n-1})$$

ni mos ravishda bo‘lakchalarning uzunliklariga ko‘paytirib

$$f(\xi_0)\cdot\Delta x_0, f(\xi_1)\cdot\Delta x_1, ..., f(\xi_k)\cdot\Delta x_k, ..., f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

quyidagi

$$\sigma = f(\xi_0)\cdot\Delta x_0 + f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + ... + f(\xi_k)\cdot\Delta x_k +$$
$$+ ... + f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

yig‘indini hosil qilamiz.

Odatda,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (3)$$

yig‘indi $f(x)$ funksiyaning integral yig‘indisi deyiladi. Bu yig‘indi $[a,b]$ segmentning bo‘laklanishiga, hamda har bir bo‘lakchada olingan ξ_k nuqtalarga bog‘liq bo‘ladi.

Endi $[a,b]$ segmentining shunday bo‘laklashlar ketma-ketligi

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ... \qquad (4)$$

ni olaylik, ular uchun

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$$

bo‘lsin.

Ixtiyoriy, yuqorida aytilgan (4) ketma-ketlikni olib, bu ketma-ketlikning har bir hadiga mos integral yig‘indilarni tuzamiz. Ular

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_n, ... \qquad (5)$$

ketma-ketlikni hosil qiladi, bunda

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

Ta’rif. *Agar har bir bo‘lakchada olingan ixtiyoriy* ξ_k *nuqtalarda* $\{\sigma_n\}$ *ketma-ketlik har doim bitta* I *songa intilsa, (uni* $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$

ning limiti deyiladi), $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *segmentda integrallanuvchi,* I *son esa* $f(x)$ *funksiyaning* $[a,b]$ *segment bo‘yicha aniq integrali deyiladi va u*

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = I = \int_a^b f(x)dx.$$

Bunda a son integralning quyi chegarasi, b son esa integralning yuqori chegarasi, $[a,b]$ segment **integrallash oralig‘i** deyiladi.

24.1 da keltirilgan masalaning yechimi, o‘tilgan S yo‘l, tezlik $V(t)$ ning $[t_0, T]$ oraliq bo‘yicha aniq integraldan iborat ekanligini bildiradi:

$$S = \int_{t_0}^{T} V(t)dt$$

Misol: *Agar* $[a,b]$ *da* $f(x) = c - const$ *bo‘lsa, u holda*

$$\int_a^b c\cdot dx = c\cdot(b-a)$$

bo‘lishini isbotlang.

◄ $[a,b]$ segmentning ixtiyoriy bo‘laklashi

$$[a,x_1],\quad [x_1,x_2],\quad [x_2,x_3], ...,\quad [x_k,x_{k+1}], ...\quad [x_{n-1},b]$$

ni olib, har bir bo‘lakchada bittadan ixtiyoriy

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ..., \xi_{n-1}$$

nuqtalarni tanlaymiz. Ravshanki,

$$f(\xi_0) = c, f(\xi_1) = c, f(\xi_2) = c, ..., f(\xi_k) = c, ..., f(\xi_{n-1}) = c$$

bo‘lib,

$$\sigma = c\cdot\Delta x_0 + c\cdot\Delta x_1 + c\cdot\Delta x_2 + ... + c\cdot\Delta x_k + ... + c\cdot\Delta x_{n-1} =$$
$$= c(\Delta x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_k + ... + \Delta x_{n-1}) =$$
$$= c(x_1 - a + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + ... + x_{k+1} - x_k + ... + b - x_{n-1}) =$$
$$= c\cdot(b-a)$$

bo‘ladi. Demak,

$$\int_a^b c\cdot dx = \lim_{n\to\infty}\sigma = \lim_{n\to\infty} c\cdot(b-a) = c\cdot(b-a). ►$$

Xususan, $f(x)\equiv 1$ bo‘lsa,

$$\int_a^b 1\cdot dx = \int_a^b dx = b-a$$

bo‘ladi.

Yuqorida funksiyaning aniq integrali integral yig'indining limiti sifatida ta'riflandi. Albatta, yig'indining limiti integrallanadigan funksiyaga bog'liq bo'ladi.

Integral yig'indi limitining mavjudligini ko'rsatish (ya'ni funksiyaning integrallanuvchi bo'lishini isbotlash) ancha murakkab bo'lib, ular maxsus adabiyotlarda ma'lum sinf funksiyalari uchun isbotlanadi. Biz quyida bunday teoremalardan birini isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.*

Eslatma.

1) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u $[a,b]$ da chegaralangan bo'ladi.

2) *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan bo'lib, u $[a,b]$ ning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega va qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'ladi.*

1.3. Aniq integralning xossalari

Funksiyaning aniq integrali qator xossalarga ega. Bu xossalardan aniq integralni hisoblashda va uning turli sohalarga tatbiqlarida foydalaniladi. Ko'p hollarda xossalarning isboti aniq integral ta'rifi va funksiya limiti xossalaridan kelib chiqadi. Biz xossalarni keltirish bilan kifoyalanamiz:

1) Aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ da x ning o'rniga ixtiyoriy harf ishlatilishi mumkin: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(z)dz$ va h.k.

2) Ushbu

$$\int_a^a f(x)=0,$$

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

tengliklar o'rinli.

3) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $c\cdot f(x)$ funksiya ($c=const$) ham $[a,b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx=c\cdot\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

4) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x)+g(x)$ funksiya ham $[a,b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

5) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x\in[a,b]$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0$$

bo'ladi.

6) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x\in[a,b]$ da $f(x)\leq g(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

7) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya $[a,b]$ ning istalgan $[\alpha,\beta]$ qismida ($[\alpha,\beta]\subset[a,b]$) integrallanuvchi bo'ladi.

8) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, $a<c<b$ bo'lsa, u holda funksiya $[a,c]$ va $[c,b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lib, u shu segmentda integrallanuvchi bo'lsin.

Ushbu

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

miqdor $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi o'rta qiymati deyiladi.

9) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lsa, u holda shunday c nuqta ($a<c<b$) topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a)$$

bo'ladi. Bu xossa o'rta qiymat haqidagi teorema deb ham yuritiladi.

Yuqorida funksiyaning aniq integrali integral yig'indining limiti sifatida ta'riflandi. Albatta, yig'indining limiti integrallanadigan funksiyaga bog'liq bo'ladi.

Integral yig'indi limitining mavjudligini ko'rsatish (ya'ni funksiyaning integrallanuvchi bo'lishini isbotlash) ancha murakkab bo'lib, ular maxsus adabiyotlarda ma'lum sinf funksiyalari uchun isbotlanadi. Biz quyida bunday teoremalardan birini isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.*

Eslatma.

1) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u $[a,b]$ da chegaralangan bo'ladi.

2) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan bo'lib, u $[a,b]$ ning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega va qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'ladi.

1.3. Aniq integralning xossalari

Funksiyaning aniq integrali qator xossalarga ega. Bu xossalardan aniq integralni hisoblashda va uning turli sohalarga tatbiqlarida foydalaniladi. Ko'p hollarda xossalarning isboti aniq integral ta'rifi va funksiya limiti xossalaridan kelib chiqadi. Biz xossalarni keltirish bilan kifoyalanamiz:

1) Aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ da x ning o'rniga ixtiyoriy harf ishlatilishi mumkin: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$ va h.k.

2) Ushbu

$$\int_a^a f(x) = 0,$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

tengliklar o'rinli.

3) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $c\cdot f(x)$ funksiya ($c = const$) ham $[a,b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

4) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x)+g(x)$ funksiya ham $[a,b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

5) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x\in[a,b]$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bo'ladi.

6) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x\in[a,b]$ da $f(x)\leq g(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

7) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya $[a,b]$ ning istalgan $[\alpha,\beta]$ qismida ($[\alpha,\beta]\subset[a,b]$) integrallanuvchi bo'ladi.

8) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, $a<c<b$ bo'lsa, u holda funksiya $[a,c]$ va $[c,b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lib, u shu segmentda integrallanuvchi bo'lsin.

Ushbu

$$\mathrm{M}[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

miqdor $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi o'rta qiymati deyiladi.

9) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lsa, u holda shunday c nuqta ($a<c<b$) topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

bo'ladi. Bu xossa o'rta qiymat haqidagi teorema deb ham yuritiladi.

Mashqlar

Berilgan funksiyalarning ko'rsatilgan oraliqlardagi o'rta qiymatlarini aniqlang:

1) $f(x)=x^2$, $[0,1]$.

2) $f(x)=\sqrt{x}$, $[0,100]$.

3) Agar

$$f(x)=e^{2x}, a=0, b=1$$

bo'lsa, u holda c ning qanday qiymatida ushbu

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi?

4) 9-xossadan foydalanib, quyidagi integrallarni baholang:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0,5\cos x};\qquad \int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx;\quad \int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx.$$

2-§. Aniq integralni hisoblash. Aniq integralni taqribiy hisoblash.

2.1. Aniq integralni hisoblash usullari

1°. Aniq integrallarni Nyuton-Leybnis formulasi yordamida hisoblash. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, $F(x)$ funksiya esa uning $[a,b]$ segmentdagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:

$$F'(x)=f(x).$$

Ravshanki, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx$$

mavjud. Bu integral uchun

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{1}$$

bo'lishini isbotlaymiz.

$[a,b]$ segmentni

$$x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n \quad (a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b)$$

nuqtalar yordamida n ta

$$[a,x_1],\quad [x_1,x_2],\dots,\quad [x_k,x_{k+1}],\dots,\quad [x_{n-1},b]$$

bo'lakchalarga ajratamiz. Har bir bo'lakchada $F(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$F(x_1)-F(a)=F'(\xi_0)\cdot(x_1-a)=f(\xi_0)\cdot\Delta x_0,\quad a<\xi_0<x_1$$
$$F(x_2)-F(x_1)=F'(\xi_1)\cdot(x_2-x_1)=f(\xi_1)\cdot\Delta x_1,\quad x_1<\xi_1<x_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F(b)-F(x_{n-1})=F'(\xi_{n-1})\cdot(b-x_{n-1})=f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1},\quad x_{n-1}<\xi_{n-1}<b$$

Bu tengliklarni hadlab qo'shish natijasida

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \tag{2}$$

hosil bo'ladi. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi. (2) tenglikda limitga o'tsak, unda

$$\int_a^b f(x)\cdot dx=F(b)-F(a)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Shuni isbotlash kerak edi.

Odatda, (1) formula **Nyuton-Leybnis formulasi** deb yuritiladi. Bu formula yordamida ko'pgina aniq integrallar hisoblanadi.

(1) tenglikning o'ng tomonidagi $F(b)-F(a)$ (yozuvni qisqa qilish maqsadida) $F(x)|_a^b$ kabi yoziladi:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b$$

Shunday qilib,

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralni Nyuton-Leybnis formulasidan foydalanib hisoblash uchun, avvalo, $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali hisoblanadi:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

So'ng

$$(F(x)+C)\Big|_a^b=F(b)+C-(F(a)+C)=F(b)-F(a)$$

topiladi.

Misollar

1. Ushbu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$$

integralni hisoblang.

◀Ma'lumki, $\int\sin x dx=-\cos x+c$.

Unda $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (-\cos x + c)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$

bo'ladi.▶

2. Ushbu

$$\int\limits_0^1 x^n dx \qquad (n \neq -1)$$

integralni hisoblang.

◀ $f(x) = x^n$ funksiyaning aniqmas integrali

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

bo'lgani uchun

$$\int\limits_0^1 x^n dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

bo'ladi.▶

3. Ushbu

$$\int\limits_0^a \frac{x^2}{a^3 + x^3} dx \qquad (a > 0)$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralni Nyuton-Leybnis formulasidan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int\limits_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3} dx = \int\limits_0^a \frac{\frac{1}{3}dx^3}{a^3+x^3} = \frac{1}{3}\int\limits_0^a \frac{d(a^3+x^3)}{a^3+x^3} = \int\limits_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3} dx = \left(\frac{1}{3}\ln\left(a^3+x^3\right)\right)\Big|_0^a = .$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2a^3 - \frac{1}{3}\ln a^3 = \frac{1}{3}\ln\frac{2a^3}{a^3} = \frac{1}{3}\ln 2 . ▶$$

Eslatma. *Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsin. U $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, integralning xossasiga ko'ra $[a,x]$ da $(a \le x \le b)$ da ham integrallanuvchi bo'ladi:*

$$\int\limits_a^x f(t)dt .$$

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, ya'ni

$$F'(x) = f(x)$$

bo'lsa, u holda Nyuton-Leybnis formulasiga ko'ra

$$\int\limits_a^x f(t)\cdot dt = F(x) - F(a)$$

bo'lib, undan

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\cdot dt\right)' = \left(F(x) - F(a)\right)' = F'(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,

$$\int\limits_a^x f(t)dt$$

funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi. Bu uzluksiz funksiya har doim boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishini bildiradi.

2°. Aniq integrallarni o'zgaruvchini almashtirish usuli bilan hisoblash. $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning aniq integrali

$$\int\limits_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

ni hisoblash kerak bo'lsin. Ko'p hollarda bu integralda o'zgaruvchini almashtirish natijasida u soddaroq, hisoblash uchun qulayroq integralga keladi.

(3) integralda

$$x = \varphi(t)$$

deylik, bunda $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $x = \varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega,

2) ixtiyoriy $t \in [\alpha,\beta]$ da $a \le \varphi(t) \le b$ ва $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$.

U holda

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

bo'ladi.

◀Faraz qilaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:

$$F'(x) = f(x) .$$

Ravshanki,

$$\left[F(\varphi(t))\right]' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) .$$

Demak, $F(\varphi(t))$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ funksiyaning boshlang'ich funksiya bo'ladi. Unda Nyuton-Leybnis formulasiga ko'ra

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

bo‘lishi ma’lum. Keyin ikki tenglikdan

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Misollar

4. Ushbu

$$\int_1^3\sqrt{x+1}dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda

$$x=2t-1$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$x=1 \text{ da } 1=2t-1, \text{ ya’ni } t=1,$$
$$x=3 \text{ da } 3=2t-1, \text{ ya’ni } t=2$$

bo‘lib,

$$dx=2dt$$

bo‘ladi. Natijada,

$$\int_1^3\sqrt{x+1}dx=\int_1^2\sqrt{2t}\cdot 2dt=2\sqrt{2}\int_1^2 t^{\frac{1}{2}}dt$$

bo‘lib,

$$\int_1^2 t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^2=\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$$

bo‘lganligidan

$$\int_1^3\sqrt{x+1}dx=2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)=\frac{4\sqrt{2}}{3}(\sqrt{8}-1)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.▶

5. Ushbu

$$J=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda

$$\sqrt{1+x^2}=t, \text{ ya’ni } x=\sqrt{t^2-1}$$

almashtirish bajaramiz.

Unda

$$x=0 \text{ da } t=1,$$
$$x=1 \text{ da } t=\sqrt{2}$$
$$dx=\left(\sqrt{t^2-1}\right)'\cdot dt=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$$

bo‘lib,

$$J=\int_1^{\sqrt{2}}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

bo‘ladi. Demak,

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$▶

6. Ushbu

$$J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda

$$e^x=t \text{ ya’ni } x=\ln t$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$x=\ln 2 \text{ da } t=2,$$
$$x=\ln 3 \text{ da } t=3,$$
$$dx=\frac{1}{t}dt$$

bo‘lib,

$$J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int_2^3\frac{dt}{t\left(t-t^{-1}\right)}=\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int_2^3\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\ln(t-1)-\ln(t+1)\right]\Big|_2^3=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Demak,

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$▶

3°. Aniq integrallarni bo‘laklab integrallash usuli yordamida hisoblash.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz va uzluksiz $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. Ravshanki,

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

Ayni paytda,

$$\int_a^b\left(f(x)\cdot g(x)\right)'dx=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b$$

bo‘ladi. Demak,

$$\int_a^b \left[f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\right]dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b$$

bo‘lib, undan

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx \qquad (5)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu formula yordamida aniq integrallar hisoblanadi.

Yuqoridagi (5) formula aniq integrallarda bo‘laklab integrallash formulasi deyilib, uni

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$$

kabi ham yozish mumkin.

Misollar

7. Ushbu

$$\int_0^1 xe^x dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda

$$f(x)=x, \qquad dg(x)=e^x dx$$

deymiz. U holda

$$df(x)=f'(x)dx=(x)'dx=dx,$$
$$g(x)=\int e^x dx=e^x$$

bo‘lib, (5) formulaga ko‘ra

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$xe^x\Big|_0^1 = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 = e, \qquad \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e-1.$$

Demak,

$$\int_0^1 xe^x dx = e-(e-1)=1. \blacktriangleright$$

8. Ushbu

$$\int_1^2 \ln x dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda

$$f(x)=\ln x, \qquad dg(x)=dx$$

deymiz. U holda

$$df(x)=f'(x)dx=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx, \qquad g(x)=x$$

bo‘lib, (5) formulaga ko‘ra

$$\int_1^2 \ln x dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - 1\cdot\ln 1 -$$
$$-\int_1^2 dx = 2\ln 2-(x)\Big|_1^2 = 2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$$

bo‘ladi.▶

9. Ushbu

$$\int_0^1 x^3 arctgx dx$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralda

$$f(x)=arctgx, \qquad dg(x)=x^3 dx$$

deymiz. U holda

$$df(x)=f'(x)dx=(arctgx)'dx=\frac{1}{1+x^2}dx,$$
$$g(x)=\int x^3 dx=\frac{1}{4}x^4$$

bo‘lib, (5) formulaga ko‘ra

$$\int_0^1 x^3 arctgx dx = \frac{1}{4}x^4\cdot arctgx\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\frac{1}{4}x^4 arctgx\Big|_0^1 = \frac{1}{4}arctg1 - \frac{1}{4}\cdot 0\cdot arctg0 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{16}.$$

Keyingi integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left[\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right]dx =$$
$$=\int_0^1 (x^2-1)dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_0^1 + arctgx\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-1+arctg1 = -\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}.$$

Demak,

$$\int_0^1 x^3 arctgx dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{16}+\frac{1}{6}-\frac{\pi}{16} = \frac{1}{6}. \blacktriangleright$$

2.2. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, uning boshlang‘ich funksiyasi ma’lum bo‘lsa, bu funksiyaning aniq integrali Nyuton-Leybnis formulasi yordamida hisoblanishini ko‘rdik. Ammo boshlang‘ich

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right] \quad (k=0,1,2,...,n-1)$$

taqribiy ifodalaymiz.

Keyingi taqribiy formulani k ning $0,1,2,...,n-1$ qiymatlari uchun yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib, ushbu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right]=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\Big[\big(f(x_0)+f(x_{2n})\big)+4\big(f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})\big)+ \quad (9)$$

$$+2\big(f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{2n-2})\big)\Big]$$

taqribiy formulaga kelamiz. Bu (9) formula **parabolalar (Simpson) formulasi** deyiladi.

Eslatma. *Odatda, taqribiy formula chiqarilganda, albatta, uni qo'llaganda yo'l qo'yiladigan xatolikni aniqlash yoki baholash lozim bo'ladi. Buning natijasida taqribiy formulalar o'zaro taqqoslanadi.*

Integrallanadigan $f(x)$ funksiya tegishli tartibdagi uzluksiz hosilalarga ega bo'lganda:

1) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi (7) ning xatoligi

$$R_1=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)$$

uchun

$$R_1=\frac{(b-a)^3}{24n}f''(c) \qquad (c\in(a,b))$$

bo'ladi;

2) Trapetsiyalar formulasi (8) ning xatoligi

$$R_2=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$$

uchun

$$R_2=\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(c) \qquad (c\in(a,b))$$

bo'ladi;

3) Parabolalar (Simpson) formulasi (9)ning xatoligi

$$R_3=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right]$$

uchun

$$R_3=\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(IV)}(c) \qquad (c\in(a,b))$$

bo'ladi (qaralsin, [2])

Misollar

1. *Ushbu* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *integralni taqribiy hisoblang.*

◀ $[0,1]$ segmentni 10 ta teng bo'lakka bo'lamiz. Bo'linish nuqtalari

$x_0=0,\quad x_1=0,1;\quad x_2=0,2;\quad x_3=0,3;\quad x_4=0,4;\quad x_5=0,5;$

$x_6=0,6;\quad x_7=0,7;\quad x_8=0,8;\quad x_9=0,9;\quad x_{10}=1,0;$

bo'lib, bu nuqtalarda

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_0)=f(0)=1,00000,$$
$$f(x_1)=f(0,1)=0,99010,$$
$$f(x_2)=f(0,2)=0,96154,$$
$$f(x_3)=f(0,3)=0,91743,$$
$$f(x_4)=f(0,4)=0,86207,$$
$$f(x_5)=f(0,5)=0,80000,$$
$$f(x_6)=f(0,6)=0,73529,$$
$$f(x_7)=f(0,7)=0,67114,$$
$$f(x_8)=f(0,8)=0,60976,$$
$$f(x_9)=f(0,9)=0,55249,$$
$$f(x_{10})=f(1,0)=0,50000.$$

Ravshanki, bu holda $\Delta x_k=\frac{1-0}{10}=0,1$ bo'ladi.

1) To'g'ri to'rtburchaklar formulasi (7) bo'yicha

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx 0,1\cdot(0,99010+0,96154+0,91743+0,86207+0,80000+$$
$$+0,73529+0,67114+0,60976+0,55249+0,50000)=0,75998.$$

2) Trapetsiyalar formulasi (8) bo'yicha

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx 0,1\cdot(\frac{1+0,5}{2}+7,09982)=0,78498$$

bo'ladi.

Qaralayotgan integralning bu taqribiy qiymatlarini, uning

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^1=arctg1=\frac{\pi}{4}=0,785398$$

qiymati bilan taqqoslab, trapetsiyalar formulasi yordamida topilgan integralning qiymati aniqroq ekanligini ko'ramiz.▶

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right] \quad (k=0,1,2,...,n-1)$$

taqribiy ifodalaymiz.

Keyingi taqribiy formulani k ning $0,1,2,...,n-1$ qiymatlari uchun yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib, ushbu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right]=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left[\left(f(x_0)+f(x_{2n})\right)+4\left(f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})\right)+\right. \quad (9)$$

$$\left.+2\left(f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{2n-2})\right)\right]$$

taqribiy formulaga kelamiz. Bu (9) formula **parabolalar (Simpson) formulasi** deyiladi.

Eslatma. *Odatda, taqribiy formula chiqarilganda, albatta, uni qo'llaganda yo'l qo'yiladigan xatolikni aniqlash yoki baholash lozim bo'ladi. Buning natijasida taqribiy formulalar o'zaro taqqoslanadi.*

Integrallanadigan $f(x)$ funksiya tegishli tartibdagi uzluksiz hosilalarga ega bo'lganda:

1) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi (7) ning xatoligi

$$R_1=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

uchun

$$R_1=\frac{(b-a)^3}{24n}f''(c) \qquad (c\in(a,b))$$

bo'ladi;

2) Trapetsiyalar formulasi (8) ning xatoligi

$$R_2=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$$

uchun

$$R_2=\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(c) \qquad (c\in(a,b))$$

bo'ladi;

3) Parabolalar (Simpson) formulasi (9)ning xatoligi

$$R_3=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right]$$

uchun

$$R_3=\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(IV)}(c) \qquad (c\in(a,b))$$

bo'ladi (qaralsin, [2])

Misollar

1. *Ushbu* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *integralni taqribiy hisoblang.*

◀ $[0,1]$ segmentni 10 ta teng bo'lakka bo'lamiz. Bo'linish nuqtalari

$$x_0=0,\quad x_1=0,1;\quad x_2=0,2;\quad x_3=0,3;\quad x_4=0,4;\quad x_5=0,5;$$
$$x_6=0,6;\quad x_7=0,7;\quad x_8=0,8;\quad x_9=0,9;\quad x_{10}=1,0;$$

bo'lib, bu nuqtalarda

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_0)=f(0)=1,00000,$$
$$f(x_1)=f(0,1)=0,99010,$$
$$f(x_2)=f(0,2)=0,96154,$$
$$f(x_3)=f(0,3)=0,91743,$$
$$f(x_4)=f(0,4)=0,86207,$$
$$f(x_5)=f(0,5)=0,80000,$$
$$f(x_6)=f(0,6)=0,73529,$$
$$f(x_7)=f(0,7)=0,67114,$$
$$f(x_8)=f(0,8)=0,60976,$$
$$f(x_9)=f(0,9)=0,55249,$$
$$f(x_{10})=f(1,0)=0,50000.$$

Ravshanki, bu holda $\Delta x_k=\frac{1-0}{10}=0,1$ bo'ladi.

1) To'g'ri to'rtburchaklar formulasi (7) bo'yicha

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx 0,1\cdot(0,99010+0,96154+0,91743+0,86207+0,80000+$$
$$+0,73529+0,67114+0,60976+0,55249+0,50000)=0,75998.$$

2) Trapetsiyalar formulasi (8) bo'yicha

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx 0,1\cdot(\frac{1+0,5}{2}+7,09982)=0,78498$$

bo'ladi.

Qaralayotgan integralning bu taqribiy qiymatlarini, uning

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^1=arctg1=\frac{\pi}{4}=0,785398$$

qiymati bilan taqqoslab, trapetsiyalar formulasi yordamida topilgan integralning qiymati aniqroq ekanligini ko'ramiz.▶

2. *Ushbu* $\int\limits_4^{10}\frac{1}{\ln x}dx$ *integralni taqribiy hisoblang.*

◀ $[4,10]$ segmentni 6 ta teng bo'lakka bo'lamiz. Bo'linish nuqtalari

$$4,5,6,7,8,9,10$$

bo'lib, bu nuqtalarda

$$f(x)=\frac{1}{\ln x}$$

funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(4)=0,72135,$$
$$f(5)=0,62133,$$
$$f(6)=0,55811,$$
$$f(7)=0,51390,$$
$$f(8)=0,48090,$$
$$f(9)=0,45512,$$
$$f(10)=0,43429.$$

Ravshanki, bu holda $\Delta x_k=\frac{10-4}{2\cdot 3}=1,\quad x_k=4+k\cdot 1\qquad (k=0,1,2,3,4,5,6)$

Parabolalar (Simpson) formulasi (9) dan foydalanib topamiz:

$$\int\limits_4^{10}\frac{dx}{\ln x}\approx\frac{6}{18}\left[(0,72135+0,43429)+4(0,62133+0,51390+0,45512)+\right.$$
$$\left.+2(0,55811+0,48090)\right]=3,19835.$$

Demak,

$$\int\limits_4^{10}\frac{dx}{\ln x}\approx 3,19835. \blacktriangleright$$

Mashqlar

Ushbu integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash usullari yordamida hisoblang:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sqrt[3]{\cos x}dx$. 2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^x\sin x dx$.

3) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos^2 x+x\ \sin x\right)dx$. 4) $\int\limits_{-1}^{1}\left(e^x+e^{-x}\right)tgx dx$.

To'g'ri to'rtburchaklar hamda trapetsiyalar formulalari yordamida xatoligi 10^{-2} dan ko'p bo'lmagan taqribiy qiymati hisoblansin:

1) $\int\limits_1^2 x^3dx$. 2) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^2}$.

IX BOB

Aniq integralning ba'zi bir tatbiqlari. Xosmas integrallar

1-§. Aniq integralning geometrik masalalarini yechishga tatbiqlari

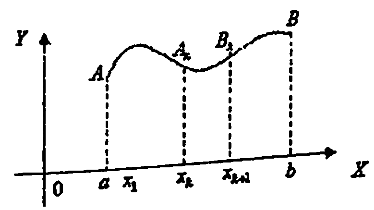
Matematika, fizika, mexanika hamda fan va texnikaning turli sohalarida uchraydigan ko'pgina masalalar ma'lum funksiyaning aniq integralini hisoblash bilan hal etiladi.

Biz quyida geometrik hamda fizik masalalarni aniq integral yordamida yechilishini bayon qilamiz.

1.1. Tekis shaklning yuzini hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsin.

Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x=a, x=b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan abssissa o'qi bilan chegaralangan $aABb$ tekis shaklni olaylik (1-chizma)



1-chizma

Odatda, bunday shakl egri chiziqli trapetsiya deyiladi. $aABb$ egri chiziqli trapetsiya yuzaga ega bo'ladi (qaralsin [2]). Uning yuzini topish masalasini yechamiz.

$[a,b]$ segmentni

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_k<...<x_{n-1}<x_n=b$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz, bunda

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k\qquad (k=0,1,2,...,n-1)$$

deymiz. Har bir $[x_k,x_{k+1}]$ da ixtiyoriy ξ_k nuqtani olib, funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini Δx_k ga ko'paytiramiz:

$$f(\xi_k)\cdot\Delta x_k.$$

2. *Ushbu* $\int\limits_4^{10} \frac{1}{\ln x} dx$ *integralni taqribiy hisoblang.*

◀ $[4,10]$ segmentni 6 ta teng bo‘lakka bo‘lamiz. Bo‘linish nuqtalari

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

bo‘lib, bu nuqtalarda

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo‘ladi:

$$f(4) = 0,72135,$$
$$f(5) = 0,62133,$$
$$f(6) = 0,55811,$$
$$f(7) = 0,51390,$$
$$f(8) = 0,48090,$$
$$f(9) = 0,45512,$$
$$f(10) = 0,43429.$$

Ravshanki, bu holda $\Delta x_k = \frac{10-4}{2\cdot 3} = 1, \quad x_k = 4 + k\cdot 1 \qquad (k = 0,1,2,3,4,5,6)$

Parabolalar (Simpson) formulasi (9) dan foydalanib topamiz:

$$\int\limits_4^{10} \frac{dx}{\ln x} \approx \frac{6}{18}\big[(0,72135 + 0,43429) + 4(0,62133 + 0,51390 + 0,45512) +$$
$$+ 2(0,55811 + 0,48090)\big] = 3,19835.$$

Demak,

$$\int\limits_4^{10} \frac{dx}{\ln x} \approx 3,19835. \blacktriangleright$$

Mashqlar

Ushbu integrallarni o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash usullari yordamida hisoblang:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\, dx$. 2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx$.

3) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2 x + x \ \sin x\right) dx$. 4) $\int\limits_{-1}^{1} \left(e^x + e^{-x}\right) tgx dx$.

To‘g‘ri to‘rtburchaklar hamda trapetsiyalar formulalari yordamida xatoligi 10^{-2} dan ko‘p bo‘lmagan taqribiy qiymati hisoblansin:

1) $\int\limits_1^2 x^3 dx$. 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$.

IX BOB

Aniq integralning ba’zi bir tatbiqlari. Xosmas integrallar

1-§. Aniq integralning geometrik masalalarini yechishga tatbiqlari

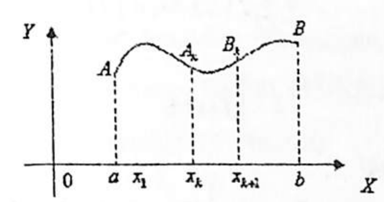
Matematika, fizika, mexanika hamda fan va texnikaning turli sohalarida uchraydigan ko‘pgina masalalar ma’lum funksiyaning aniq integralini hisoblash bilan hal etiladi.

Biz quyida geometrik hamda fizik masalalarni aniq integral yordamida yechilishini bayon qilamiz.

1.1. Tekis shaklning yuzini hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, $\forall x \in [a,b]$ da $f(x) \geq 0$ bo‘lsin.

Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x = a$, $x = b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan abssissa o‘qi bilan chegaralangan $aABb$ tekis shaklni olaylik (1-chizma)



1-chizma

Odatda, bunday shakl egri chiziqli trapetsiya deyiladi. $aABb$ egri chiziqli trapetsiya yuzaga ega bo‘ladi (qaralsin [2]). Uning yuzini topish masalasini yechamiz.

$[a,b]$ segmentni

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

nuqtalar yordamida n ta bo‘lakka bo‘lamiz, bunda

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

deymiz. Har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da ixtiyoriy ξ_k nuqtani olib, funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini Δx_k ga ko‘paytiramiz:

$$f(\xi_k)\cdot \Delta x_k.$$

Bu miqdor asosi Δx_k va balandligi $f(\xi_k)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzini ifodalaydi (1-chizma). U $x_k A_k B_k x_{k+1}$ egri chiziqli trapetsiyaning yuziga taqriban teng bo'ladi.

Ushbu

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

yig'indi esa $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzi S ga taqriban teng bo'ladi:

$$S\approx\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k .$$

Endi $[a,b]$ ning bo'laklash soni orttirib borilsa, ya'ni n cheksizga intila borsa,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

miqdor izlanayotgan S yuzani tobora aniqroq ifodalay boradi.

Binobarin,

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k .$$

Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx .$$

Demak,

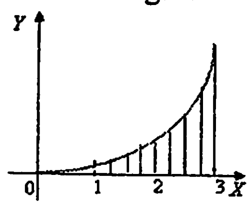
$$S=\int_a^b f(x)dx . \qquad (1)$$

1-misol. *Quyidagi*

$$y=0,\quad y=\frac{1}{2}x^2,\quad x=1,\quad x=3$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

◄Bu shakl 2-chizmada tasvirlangan:



2-chizma

(1) formuladan foydalanib topamiz:

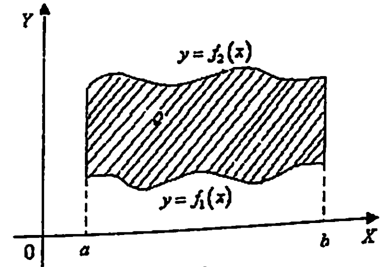
$$S=\int_1^3\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{2}\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{3}.$$ ►

Aytaylik, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ da $0\le f_1(x)\le f_2(x)$ bo'lsin.

Yuqoridan $f_2(x)$ funksiya grafigi, pastdan $f_1(x)$ funksiya grafigi, tomonlardan $x=a$, $x=b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx \qquad (2)$$

bo'ladi (3-chizma).



3-chizma

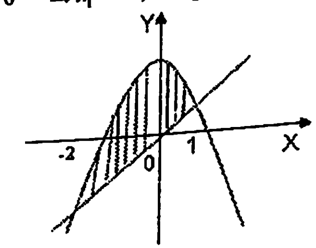
2-misol. *Ushbu*

$$y=x\ ,\quad y=2-x^2$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

◄Avvalo, $\begin{cases} y=x \\ y=2-x^2\end{cases}$ sistemani yechib, chiziqlarning kesishish nuqtalarining abssissalarini topamiz: (4-chizma)

$x=2-x^2 \quad \Rightarrow x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow x_1=-2,\quad x_2=1.$



4-chizma

Bu shaklning yuzini (2) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$S=\int_{-2}^{1}\left[(2-x^2)-x\right]dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=$$

$$=(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}.$$ ►

Eslatma. *Biz $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda $f(x)\geq 0$ deb qaradik. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da ishora saqlamasa, (1) integral egri chiziqli trapetsiyalar yuzalarining yig'indisidan iborat bo'ladi. Bunda OX o'qining yuqorisidagi yuza musbat ishora bilan, OX o'qining pastdagi yuza manfiy ishora bilan olinadi.*

Masalan, OX o'qi va $f(x)=\sin x$ ning $0\leq x\leq 2\pi$ oraliqdagi qismi bilan chegaralangan shaklning yuzi

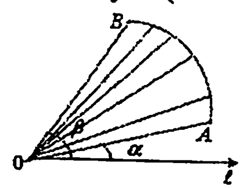
$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx+(-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx)=(-\cos x)\Big|_0^{\pi}-(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$$

bo'ladi.

Qutb koordinatalar sistemasida ushbu

$$r=f(\varphi),\quad \alpha\leq\varphi\leq\beta$$

Funksiya bilan aniqlangan $\breve{AB}$ yoyi hamda OA va OB radius vektorlar bilan chegaralangan (S) shaklni olaylik (5-chizma).



5-chizma

Agar $r=f(\varphi)$ funksiya $[\alpha,\ \beta]$ da uzluksiz bo'lsa, (S) shaklning yuzi

$$S=\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}[f(\varphi)]^2d\varphi \qquad (*)$$

bo'ladi.

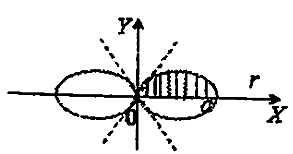
3-misol. *Qutb koordinatalar sistemasida ushbu*

$$r^2=a^2\cos 2\varphi \qquad (**)$$

funksiya yuzi bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

◄(**) tenglama bilan berilgan egri chiziq yopiq chiziq bo'lib, u **lemniskata** deyiladi.

Lemniskata koordinatalar o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan (6-chizma)



6-chizma

Izlanayotgan shaklning yuzini topish uchun uning I-chorakdagi qismi (S) ning yuzini topish yetarli bo'ladi.

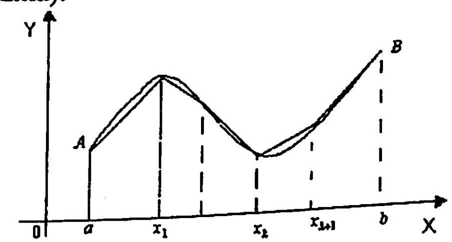
(S) shaklning yuzi (*) formulaga ko'ra

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}r^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d(2\varphi)=\frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{4}$$

bo'ladi. Demak, izlanayotgan shaklning yuzi $4\cdot\frac{a^2}{4}=a^2$ ga teng.►

1.2. Yoy uzunligini hisoblash

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz va uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning $[a,b]$ dagi grafigi $\breve{AB}$ yoyni (egri chiziqni) tasvirlasin (5-chizma).



5-chizma

$[a,b]$ segmentda

$$a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_{n-1},x_n=b$$
$$(a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b)$$

nuqtalarni olib, bu nuqtalar orqali OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Ularning $\breve{AB}$ yoyi bilan kesishgan nuqtalarini

$$A_k(x_k,f(x_k)) \qquad (k=0,1,2,\ldots,n\ ;\ \ A_0=A\ ,\ A_n=B)$$

deymiz. So'ng bu nuqtalarni o'zaro to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birin-ketin birlashtiramiz. Natijada, $\breve{AB}$ yoyiga chizilgan siniq chiziq hosil bo'ladi. Bu siniq chiziq perimetrini L_n deylik.

Ravshanki, siniq chiziqni $A_k(x_k,f(x_k))$, $A_{k+1}(x_{k+1},f(x_{k+1}))$ nuqtalarni birlashtiruvchi bo'lagining uzunligi (ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra)

$$\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}$$

bo'lib, siniq chiziq perimetri

$$L_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}$$

bo'ladi.

Endi $[a,b]$ segmentning bo'laklash soni orttira borilsa, ya'ni n cheksizga intila borsa, unda siniq chiziq $\breve{AB}$ yoyiga yaqinlasha boradi, uning perimetri esa $\breve{AB}$ yoyining uzunligi l ni borgan sari aniqroq ifodalay boradi.

Bundan, tabiiy ravishda $\breve{AB}$ yoyining uzunligi deb

$$l=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}$$

qarash mumkinligi kelib chiqadi.

Yuqorida aytilishiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega. Binobarin, u har bir $[x_k,x_{k+1}]$ da ham shu xususiyatga ega bo'ladi. Har bir $[x_k,x_{k+1}]$ da $f(x)$ ga Lagranj teoremasini qo'llab topamiz: $f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\tau_k)\cdot\Delta x_k$, $(k=0,1,2,...,n-1)$ bunda $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ va $\tau_k\in[x_k,x_{r+1}]$.

Natijada,

$$l=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f'(\tau_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)]^2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\cdot(x_{k+1}-x_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k$$

bo'ladi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. Unda interal yig'indi ixtiyoriy $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$ da jumladan, τ_k da ham chekli limitga, ya'ni aniq integralga intiladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

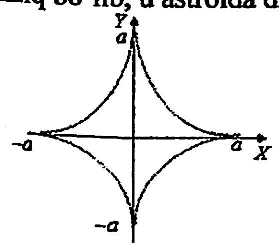
Shunday qilib, $\breve{AB}$ yoyining (egri chiziqning) uzunligi

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (3)$$

bo'ladi.

1-misol. *Ushbu* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ *tenglama bilan berilgan egri chiziqning uzunligini toping.*

◀Bu yopiq egri chiziq bo'lib, u astroida deyiladi (6-chizma)



6-chizma

Astroida koordinatalar o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lib, uning birinchi chorakdagi qismining uzunligini topish yetarli bo'ladi (topilgan qiymatni 4 ga ko'paytirish bilan butun astroidaning uzunligi topiladi).

Astroida tenglamasidan topamiz:

$$y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}},\text{ ya'ni } y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ravshanki,

$$y'=\left(\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)'=$$
$$=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\right)=-\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

bo'lib, birinchi chorakda $0\le x\le a$ bo'ladi.

(3) formuladan foydalanib, astroidaning birinchi chorakdagi qismining uzunligini topamiz:

$$\frac{l}{4}=\int_0^a\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_0^a\sqrt{1+\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}}}dx=$$
$$=\int_0^a\sqrt{1+a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-1}dx=\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}a.$$

Demak, astroidaning uzunligi

$$l=4\cdot\frac{3}{2}a=6a$$

bo'ladi.▶

Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq ushbu

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

tenglamalar sistemasi bilan (parametrik ko'rinishda) berilgan bo'lsin, bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ hamda $\psi'(t)$ hosilalarga ega. Bu egri chiziqning uzunligi

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (4)$$

bo'ladi.

2-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

parametrik ko'rinishda berilgan $\breve{AB}$ *egri chiziqning* $[0,2\pi]$ *dagi (sikloidaning) uzunligini toping.*

Endi $[a,b]$ segmentning bo'laklash soni orttira borilsa, ya'ni n cheksizga intila borsa, unda siniq chiziq $\breve{AB}$ yoyiga yaqinlasha boradi, uning perimetri esa $\breve{AB}$ yoyining uzunligi l ni borgan sari aniqroq ifodalay boradi.

Bundan, tabiiy ravishda $\breve{AB}$ yoyining uzunligi deb

$$l=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}$$

qarash mumkinligi kelib chiqadi.

Yuqorida aytilishiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega. Binobarin, u har bir $[x_k,x_{k+1}]$ da ham shu xususiyatga ega bo'ladi. Har bir $[x_k,x_{k+1}]$ da $f(x)$ ga Lagranj teoremasini qo'llab topamiz: $f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\tau_k)\cdot\Delta x_k$, $(k=0,1,2,...,n-1)$ bunda $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ va $\tau_k\in[x_k,x_{r+1}]$.

Natijada,

$$l=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f'(\tau_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)]^2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\cdot(x_{k+1}-x_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k$$

bo'ladi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. Unda interal yig'indi ixtiyoriy $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$ da jumladan, τ_k da ham chekli limitga, ya'ni aniq integralga intiladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

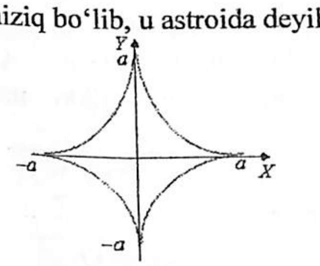
Shunday qilib, $\breve{AB}$ yoyining (egri chiziqning) uzunligi

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (3)$$

bo'ladi.

1-misol. *Ushbu* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ *tenglama bilan berilgan egri chiziqning uzunligini toping.*

◀Bu yopiq egri chiziq bo'lib, u astroida deyiladi (6-chizma)



6-chizma

Astroida koordinatalar o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lib, uning birinchi chorakdagi qismining uzunligini topish yetarli bo'ladi (topilgan qiymatni 4 ga ko'paytirish bilan butun astroidaning uzunligi topiladi).

Astroida tenglamasidan topamiz:

$$y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}},\ \text{ya'ni}\ y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ravshanki,

$$y'=\left(\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)'=$$
$$=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\right)=-\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

bo'lib, birinchi chorakda $0\le x\le a$ bo'ladi.

(3) formuladan foydalanib, astroidaning birinchi chorakdagi qismining uzunligini topamiz:

$$\frac{l}{4}=\int_0^a\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_0^a\sqrt{1+\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}}}dx=$$
$$=\int_0^a\sqrt{1+a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-1}dx=\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}a.$$

Demak, astroidaning uzunligi

$$l=4\cdot\frac{3}{2}a=6a$$

bo'ladi.▶

Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq ushbu

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\quad (\alpha\le t\le\beta)$$

tenglamalar sistemasi bilan (parametrik ko'rinishda) berilgan bo'lsin, bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ hamda $\psi'(t)$ hosilalarga ega. Bu egri chiziqning uzunligi

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad 4) \qquad ((4)$$

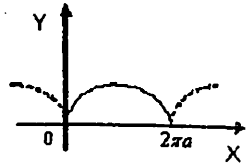
bo'ladi.

2-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

parametrik ko'rinishda berilgan $\breve{AB}$ *egri chiziqning* $[0,2\pi]$ *dagi (sikloidaning) uzunligini toping.*

◀Bu egri chiziq 7-chizmada tasvirlangan.



7-chizma

Bu holda

$$\varphi(t)=a(t-\sin t),\quad \psi(t)=a(1-\cos t)$$

bo'lib,

$$\varphi'(t)=a(1-\cos t)\ ,\quad \psi'(t)=a\sin t,$$

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=a^2 2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}\ ,$$

bo'ladi. (4) formuladan foydalanib topamiz:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\cdot\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$[t=2u,\quad dt=2du\quad va\quad t=0\quad da\, u=0,\ t=2\pi da\quad u=\pi]=$$

$$=4a\int_0^{\pi}\sin u du=4a(-\cos u)\Big|_0^{\pi}=8a\ .$$ ▶

Aytaylik, $A\breve{B}$ egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida quyidagi

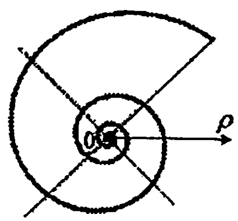
$$r=\rho(\theta)\ ,\quad (\alpha\le\theta\le\beta)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin, bunda $\rho(\theta)$ uzluksiz $\rho'(\theta)$ hosilaga ega. Bu egri chiziqning uzunligi

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}d\theta \qquad (5)$$

bo'ladi.

3-misol. *Qutb koordinatalar sistemasida berilgan ushbu* $\rho(\theta)=e^\theta$ *egri chiziqning (logarifmik spiralning 8-chizma)* $0\le\theta\le\pi$ *dagi uzunligini toping.*



8-chizma

◀Ravshanki,

$$\rho(\theta)=e^\theta$$

bo'lib,

$$\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)=2e^{2\theta}$$

bo'ladi. (5) formuladan foydalanib topamiz:

$$l=\int_0^\pi\sqrt{2e^{2\theta}}d\theta=\sqrt{2}\int_0^\pi e^\theta d\theta=\sqrt{2}\left(e^\theta\right)\Big|_0^\pi=\sqrt{2}\left(e^\pi-1\right).$$ ▶

1.3. Aylanma sirtning yuzini hisoblash

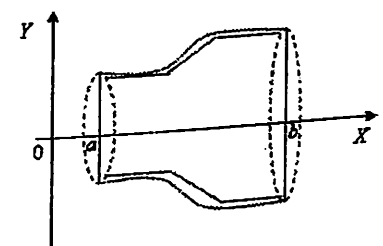
Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\ge 0$ bo'lsin. Bu funksiya grafigining

$$(a,f(a)),\quad (b,f(b))$$

nuqtalari orasidagi bo'lagini $A\breve{B}$ yoy deylik.

$A\breve{B}$ yoyni OX o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt aylanma sirt deyiladi (9-chizma).

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz, y (a,b) oraliqda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, aylanma sirtning yuzi



9-chizma

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (6)$$

bo'ladi.

4-misol. *Ushbu*

$$f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}),\quad a>0,\ 0\le x\le a$$

zanjir chizig'ini OX *o'qining* $[0,a]$ *qismi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzini toping.*

◀Ravshanki,

$$f'(x)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a}-e^{-\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}}).$$

(6) formuladan foydalanib, izlanayotgan aylanma sirtning yuzini topamiz:

$$S=2\pi\int_0^a \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\int_0^a (e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2dx=\frac{\pi a}{2}\int_0^a (e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^a=\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4).\blacktriangleright$$

1.4. Statik momentlar va og'irlik markazlarini hisoblash

Tekislikda m massaga ega bo'lgan A nuqtani qaraylik. Bu nuqtaning koordinatalari x va y bo'lsin: $A(x,y)=A$.

Ushbu

$$M_x=m\cdot y, \qquad M_y=m\cdot x$$

miqdorlar mos ravishda OX va OY o'qlariga nisbatan **statik momentlari** deyiladi.

Aytaylik, tekislikda har biri mos ravishda

$$m_0, m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$$

massaga ega bo'lgan

$$A_0(x_0,y_0),\ A_1(x_1,y_1),\dots,A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$$

nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Ushbu

$$M_x=\sum_{k=0}^{n-1}m_ky_k,\quad M_y=\sum_{k=0}^{n-1}m_kx_k$$

miqdorlar $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ nuqtalar sistemasining mos ravishda OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlari deyiladi.

Agar tekislikdagi $C=C(x*,y*)$ nuqta uchun nuqtalar sistemasining barcha massalari $(m=m_0+m_1+\dots+m_{n-1})$ shu nuqtada bo'lib, bu nuqtaning OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlari sistemaning shu o'qlarga nisbatan statik momentlariga teng, ya'ni

$$M_x=\sum_{k=0}^{n-1}m_ky_k=my^*,$$

$$M_y=\sum_{k=0}^{n-1}m_kx_k=mx^*,$$

bo'lsa, $C=C(x*,y*)$ nuqta sistemaning og'irlik markazi deyiladi.

Keyingi tengliklardan sistema og'irlik markazining koordinatalari uchun

$$x^*=\frac{M_x}{m}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}m_ky_k}{\sum_{k=0}^{n-1}m_k},\qquad y^*=\frac{M_y}{m}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}m_kx_k}{\sum_{k=0}^{n-1}m_k}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, $A\breve{B}$ egri chiziq ($A\breve{B}$ yoyi)

$$y=f(x), \qquad a\le x\le b,$$

tenglama bilan aniqlangan bo'lsin, bunda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega. Bu egri chiziq bo'yicha zichligi o'zgarmas va u 1 ga teng bo'lgan massa tarqatilgan. Ravshanki, bu holda massa (u yoy uzunligi bilan zichlik ko'paytmasiga teng bo'lganligi sababli) yoy uzunligiga teng bo'ladi.

(3) formuladan foydalanib topamiz:

$$m=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx \tag{7}$$

Massali $A\breve{B}$ egri chiziqning OX va OY koordinata o'qlariga nisbatan statik momentlarini hamda uning og'irlik markazining koordinatalarini topish uchun $[a,b]$ segmentini

$$a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$$

nuqtalar yordamida n bo'lakka bo'lamiz. Unda $A\breve{B}$ yoyidagi

$$A_k=A_k(x_k,f(x_k)) \quad (k=0,1,2,\dots,n-1)$$

nuqtalar $A\breve{B}$ yoyini n ta $A_k\breve{A}_{k+1}$ bo'lakka ajratadi. Bunda $A_k\breve{A}_{k+1}$ yoy bo'lagining massasi (7) formulaga ko'ra,

$$m_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (k=0,1,2,\dots,n-1)$$

bo'ladi.

Aniq integralning xossasi (o'rta qiymat haqidagi teorema)dan foydalanib topamiz:

$$m_k=\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

bunda $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$, $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$.

Yuqorida aytilganlarga ko'ra, $(\xi_k,f(\xi_k))$ nuqtaning OX va OY o'qlarga nisbatan statik momentlari

$$M_{\xi_k}=m_kf(\xi_k)=f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

$$M_{f(\xi_k)}=m_k\cdot\xi_k=\xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

$(k=0,1,2,\dots,n-1)$ bo'lib, $(\xi_0,f(\xi_0)),\ (\xi_1,f(\xi_1)),\dots,(\xi_{n-1},f(\xi_{n-1}))$ nuqtalar sistemasining OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlari

$$M_x=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$
$$M_y=\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

bo'ladi.

Endi $[a,b]$ segmentning bo'laklash soni orttira borilsa, ya'ni n cheksizga intila borsa, unda $A_k\breve{A}_{k+1}$ yoyi nuqtaga aylana boradi, yuqoridagi yig'indilar esa massaga ega bo'lgan egri chiziqning OX ва OY o'qlarga nisbatan statik momentini ifodalay boradi. Binobarin, (7) massali egri chiziqning OX va OY o'qlarga nisbatan statik momentlari

$$I_x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$
$$I_y=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

bo'ladi.

Ayni paytda,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b x\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

bo'lganligidan

$$I_x=\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,\quad I_y=\int_a^b x\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

bo'lishini topamiz.

Shuningdek, (7) massali egri chiziq og'irlik markazi $C=C(x*,y*)$ nuqta koordinatalari uchun

$$x*=\frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx},\qquad y*=\frac{\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

bo'ladi.

Mashqlar

1) To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida berilgan quyidagi egri chiziqlar bilan chegaralangan shakllarning yuzasini toping.

a) $y=x^2+1,\ \ x+y=3$

b) $y=\sin 2x,\ \ y=\sin x,\ \ \frac{\pi}{3}\le x\le\pi.$

2) Egri chiziq yoyining uzunligini toping.

a) $y=\frac{4}{5}\cdot x^{\frac{5}{4}},\qquad 0\le x\le 9\qquad$ b) $y=\ln x,\qquad 2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{6}$

3) Quyidagi egri chiziqlarni aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtlarning yuzlarini toping.

a) $y=x^3;\ \ x=-\frac{2}{3},\ \ x=\frac{2}{3};$ OX o'qi atrofida.

b) $y=\mathrm{tg}x,\ \ 0\le x\le\frac{\pi}{4};$ OX o'qi atrofida.

4) Tenglamasi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ bo'lgan to'g'ri chiziqni koordinatalar o'qlari orasidagi qismining OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlarini toping.

5) $y=\cos x$ egri chiziq yoyining $x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}$ nuqtalar orasidagi qismining OX o'qiga nisbatan statik momentini toping.

6) Ushbu

$$x^2+4y^2-16=0,\ \ y=0$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning og'irlik markazini toping.

2-§. Xosmas integrallar

Avvalgi, 24-ma'ruzada $[a,b]$ segmentda berilgan $f(x)$ funksiyaning aniq integrali o'rganildi. Bunda:

1) $[a,b]$ ning chekli oraliq,

2) shu oraliqda $f(x)$ funksiya chegaralangan deb qaraldi.

Matematika va uning tatbiqlarida integrallash oralig'ining cheksiz, funksiyaning chegaralanmagan hollarda uning integrali bilan bog'liq masalalarga duch kelinadi.

Ushbu ma'ruzada cheksiz oraliq bo'yicha hamda chegaralanmagan funksiyaning integrali tushunchasi keltirilib, ular o'rganiladi.

2.1. Chegaralari cheksiz (cheksiz oraliq bo'yicha) integrallar

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda (cheksiz oraliqda) uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning ixtiyoriy $[a,t]$ oraliq (chekli oraliq) bo'yicha integrali

$$\int_a^t f(x)dx\qquad (a<t<+\infty)$$

ni qaraylik. Ravshanki, integral t ga bog'liq bo'ladi.

$$M_x=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

$$M_y=\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

bo'ladi.

Endi $[a,b]$ segmentning bo'laklash soni orttira borilsa, ya'ni n cheksizga intila borsa, unda $A_k\breve{A}_{k+1}$ yoyi nuqtaga aylana boradi, yuqoridagi yig'indilar esa massaga ega bo'lgan egri chiziqning OX ва OY o'qlarga nisbatan statik momentini ifodalay boradi. Binobarin, (7) massali egri chiziqning OX va OY o'qlarga nisbatan statik momentlari

$$I_x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

$$I_y=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k,$$

bo'ladi.

Ayni paytda,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right)\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b x\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

bo'lganligidan

$$I_x=\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,\quad I_y=\int_a^b x\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

bo'lishini topamiz.

Shuningdek, (7) massali egri chiziq og'irlik markazi $C=C(x*,y*)$ nuqta koordinatalari uchun

$$x*=\frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx},\qquad y*=\frac{\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

bo'ladi.

Mashqlar

1) To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida berilgan quyidagi egri chiziqlar bilan chegaralangan shakllarning yuzasini toping.

a) $y=x^2+1,\ \ x+y=3$

b) $y=\sin 2x,\ \ y=\sin x,\ \ \frac{\pi}{3}\le x\le\pi.$

2) Egri chiziq yoyining uzunligini toping.

a) $y=\frac{4}{5}\cdot x^{\frac{5}{4}},\qquad 0\le x\le 9$ b) $y=\ln x,\qquad 2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{6}$

3) Quyidagi egri chiziqlarni aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtlarning yuzlarini toping.

a) $y=x^3;\ \ x=-\frac{2}{3},\ \ x=\frac{2}{3};$ OX o'qi atrofida.

b) $y=\mathrm{tg}x,\ \ 0\le x\le\frac{\pi}{4};$ OX o'qi atrofida.

4) Tenglamasi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ bo'lgan to'g'ri chiziqni koordinatalar o'qlari orasidagi qismining OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlarini toping.

5) $y=\cos x$ egri chiziq yoyining $x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}$ nuqtalar orasidagi qismining OX o'qiga nisbatan statik momentini toping.

6) Ushbu

$$x^2+4y^2-16=0,\ \ y=0$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning og'irlik markazini toping.

2-§. Xosmas integrallar

Avvalgi, 24-ma'ruzada $[a,b]$ segmentda berilgan $f(x)$ funksiyaning aniq integrali o'rganildi. Bunda:

1) $[a,b]$ ning chekli oraliq,

2) shu oraliqda $f(x)$ funksiya chegaralangan deb qaraldi.

Matematika va uning tatbiqlarida integrallash oralig'ining cheksiz, funksiyaning chegaralanmagan hollarda uning integrali bilan bog'liq masalalarga duch kelinadi.

Ushbu ma'ruzada cheksiz oraliq bo'yicha hamda chegaralanmagan funksiyaning integrali tushunchasi keltirilib, ular o'rganiladi.

2.1. Chegaralari cheksiz (cheksiz oraliq bo'yicha) integrallar

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda (cheksiz oraliqda) uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning ixtiyoriy $[a,t]$ oraliq (chekli oraliq) bo'yicha integrali

$$\int_a^t f(x)dx\qquad (a<t<+\infty)$$

ni qaraylik. Ravshanki, integral t ga bog'liq bo'ladi.

1-ta'rif. *Agar*

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning chegarasi cheksiz xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

Agar (1) limit chekli bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar (1) limit cheksiz bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Eslatma: *Agar (1) limit mavjud bo'lmasa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralni uzoqlashuvchi deb qaraladi.*

Misollar

1. Ushbu $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ xosmas integralni olaylik. Bu integral ta'rifga ko'ra

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^2} \text{ bo'ladi.}$$

Ravshanki,

$$\int_1^t\frac{dx}{x^2} = \int_1^t x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\bigg|_1^t = \frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_1^t = -\frac{1}{x}\bigg|_1^t = -\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{t},$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi, uning qiymati 1 ga teng.

2. Ushbu $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ xosmas integralni olaylik. Ta'rifga ko'ra

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{dx}{1+x^2}$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\int_0^t\frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^t = arctgt - arctg0 = arctgt,$$

$$\lim_{t\to+\infty} arctgt = \frac{\pi}{2}.$$

Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

bo'ladi.

3. *Ushbu*

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \qquad (a>0)$$

xosmas integralni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◄Aytaylik, $\alpha\neq 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t x^{-\alpha}dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_a^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$$

bo'ladi, $\alpha>1$ bo'lganda

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{a^{\alpha-1}}$$

bo'ladi, $\alpha<1$ bo'lganda

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$$

bo'ladi. Demak, berilgan integral $\alpha>1$ da yaqinlashuvchi, $\alpha<1$ bo'lganda uzoqlashuvchi.

Aytaylik, $\alpha=1$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t\frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}(\ln t - \ln a) = +\infty$$

bo'lib, berilgan integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

4. Ushbu

$$\int_0^{+\infty}\cos xdx$$

xosmas integralni olaylik. Ta'rifga ko'ra:

$$\int_0^{+\infty}\cos xdx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\cos xdx = \lim_{t\to+\infty}(-\sin x)\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty}\sin t$$

bo'ladi. Biroq keyingi limit mavjud emas. Yuqorida keltirilgan eslatmaga ko'ra berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

Eslatma: *$f(x)$ funksiya $(-\infty,a)$ oraliqda uzluksiz bo'lganda*

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx$$

xosmas integral, $f(x)$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo'lganda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integrallar yuqoridagidek ta'riflanadi:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)dx \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx.$$

Xosmas integrallar haqidagi keyingi ma'lumotlarni

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

integralga nisbatan keltiramiz.

2.2. Yaqinlashuvchi xosmas integrallarning xossalari

Yaqinlashuvchi xosmas integrallar 23-ma'ruzada o'rganilgan aniq integrallarning xossalari kabi xossalarga ega bo'ladi. Jumladan,

1) *agar*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{a}^{+\infty} k\cdot f(x)dx \qquad (k = const)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_{a}^{+\infty} k\cdot f(x)dx = k\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

bo'ladi;

2) *agar*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \ , \qquad \int_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{a}^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_{a}^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \pm \int_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

3) *agar* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ *xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo'lib, ixtiyoriy* $x\in[a,+\infty)$ *da* $f(x)\le g(x)$ *bo'lsa, u holda*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \le \int_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

2.3. Xosmas integralning yaqinlashuvchiligi. Yaqinlashish alomati

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$da uzluksiz bo'lib, ixtiyoriy $x\in[a,+\infty)$ da

$$f(x)\ge 0$$

bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx$$

bo'ladi.

Ayni paytda, $f(x)\ge 0$ bo'lganda $t'>t$ uchun

$$\int_{a}^{t'} f(x)dx = \int_{a}^{t} f(x)dx + \int_{t}^{t'} f(x)dx \ge \int_{a}^{t} f(x)dx$$

bo'ladi (chunki, $\int_{t}^{t'} f(x)dx \ge 0$). Bunda esa

$$\varphi(t) = \int_{a}^{t} f(x)dx$$

funksiyaning o'suvchi ekanligi kelib chiqadi.

Ma'lumki, o'suvchi funksiya har doim chekli yoki cheksiz limitga ega:

agar ixtiyoriy $t\in(a,+\infty)$ da

$$\varphi(t) = \int_{a}^{t} f(x)dx \le M \qquad (M = const)$$

ya'ni $\varphi(t)$ funksiya yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda $t\to+\infty$da $\varphi(t)$ funksiya chekli limitga ega, aks holda esa, uning limiti $+\infty$ bo'ladi. Natijada,

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \qquad (f(x)\ge 0,\ x\in[a,+\infty))$$

xosmas integralning yaqinlashishini ta'minlaydigan quyidagi teoremaga kelamiz.

xosmas integral, $f(x)$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo'lganda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integrallar yuqoridagidek ta'riflanadi:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)dx \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)dx+\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx.$$

Xosmas integrallar haqidagi keyingi ma'lumotlarni

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

integralga nisbatan keltiramiz.

2.2. Yaqinlashuvchi xosmas integrallarning xossalari

Yaqinlashuvchi xosmas integrallar 23-ma'ruzada o'rganilgan aniq integrallarning xossalari kabi xossalarga ega bo'ladi. Jumladan,

1) *agar*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{a}^{+\infty} k\cdot f(x)dx \qquad (k=const)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_{a}^{+\infty} k\cdot f(x)dx=k\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

bo'ladi;

2) *agar*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \ , \qquad \int_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{a}^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_{a}^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]dx=\int_{a}^{+\infty} f(x)dx\pm\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

3) *agar* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ *xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo'lib, ixtiyoriy* $x\in[a,+\infty)$ *da* $f(x)\le g(x)$ *bo'lsa, u holda*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx\le\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

2.3. Xosmas integralning yaqinlashuvchiligi. Yaqinlashish alomati

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$da uzluksiz bo'lib, ixtiyoriy $x\in[a,+\infty)$ da

$$f(x)\ge 0$$

bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx$$

bo'ladi.

Ayni paytda, $f(x)\ge 0$ bo'lganda $t'>t$ uchun

$$\int_{a}^{t'} f(x)dx=\int_{a}^{t} f(x)dx+\int_{t}^{t'} f(x)dx\ge\int_{a}^{t} f(x)dx$$

bo'ladi (chunki, $\int_{t}^{t'} f(x)dx\ge 0$). Bunda esa

$$\varphi(t)=\int_{a}^{t} f(x)dx$$

funksiyaning o'suvchi ekanligi kelib chiqadi.

Ma'lumki, o'suvchi funksiya har doim chekli yoki cheksiz limitga ega:

agar ixtiyoriy $t\in(a,+\infty)$ da

$$\varphi(t)=\int_{a}^{t} f(x)dx\le M \qquad (M=const)$$

ya'ni $\varphi(t)$ funksiya yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda $t\to+\infty$ da $\varphi(t)$ funksiya chekli limitga ega, aks holda esa, uning limiti $+\infty$ bo'ladi. Natijada,

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \qquad (f(x)\ge 0, \ x\in[a,+\infty))$$

xosmas integralning yaqinlashishini ta'minlaydigan quyidagi teoremaga kelamiz.

1-teorema. *Agar*

$$\varphi(t)=\int_a^t f(x)dx \le M \qquad (t\in(a,+\infty))$$

bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (f(x)\ge 0)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

Eslatma: *Agar* $\varphi(t)=\int_a^t f(x)dx$ $\quad (f(x)\ge 0)$ *funksiya yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.*

Endi amaliyotda ko'p foydalaniladigan xosmas integralning yaqinlashishini ta'minlaydigan yaqinlashish alomatini keltiramiz. Odatda, bu alomat **solishtirish teoremasi** deyiladi.

2-teorema. *Aytaylik,* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar* $[a,+\infty)$ *oraliqda uzluksiz bo'lib, ixtiyoriy* $x\in[a,+\infty)$ *da*

$$0\le g(x)\le f(x)$$

tengsizliklarni qanoatlantirsin. Agar

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Eslatma: *Keltirilgan teoremaning sharti bajarilganda,*

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (f(x)\ge 0)$$

xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilishi kerak bo'lsin. Bunda integral ostidagi funksiya bilan ushbu

$$f(x)\le\varphi(x) \qquad (x\in[a,+\infty))$$

munosabatda bo'lgan va ayni paytda, $\varphi(x)$ ning xosmas integrali yaqinlashuvchi bo'lgan $\varphi(x)$ funksiyani topish bilan $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning yaqinlashuvchi bo'lishi aniqlanadi.

Misollar

5. *Ushbu* $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+x}}$ *xosmas integralni yaqinlashuvchi-likka tekshiring.*

◀Integral ostidagi $f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+x}}$ uchun

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+x}}=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{x\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}\le\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \qquad (x>1)$$

bo'ladi.

Ravshanki, $\varphi(x)=\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$ funksiyaning xosmas integrali $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}dx$ yaqinlashuvchi (qaralsin, 3-misol, bunda $\alpha=\frac{5}{3}>1$).

Demak, yuqoridagi teoremaga ko'ra

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+x}}$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

6. *Ushbu*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$$

xosmas integralni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◀Ravshanki, $\frac{\cos^2 x}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^2}$ bo'lib,

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

integral yaqinlashuvchi.

Demak, $\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

2.4. Xosmas integralning absolyut yaqinlashuvchiligi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. Bu funksiya ixtiyoriy $x\in[a,+\infty)$ da $f(x)\geq 0$ bo'lgan holda uning xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

ning mavjudligi hamda solishtirish alomati 27.3 da bayon etildi.

Endi $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy funksiyani qaraymiz. Bu funksiya yordamida tuzilgan

$$|f(x)|$$

funksiya $[a,+\infty)$da manfiy bo'lmaydi: $|f(x)|\geq 0$

3-teorema. *Agar*

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ $f(x)$ ва $|f(x)|$ funksiyalar yordamida ushbu

$$\varphi(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2},\quad \psi(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$$

funksiyalarni tuzamiz. Ravshanki,

1) $\varphi(x)\geq 0,\ \psi(x)\geq 0,$

2) $\varphi(x)\leq|f(x)|,\ \psi(x)\leq|f(x)|,$

3) $\varphi(x)-\psi(x)=f(x)$

bo'ladi.

Shartga ko'ra

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi. Unda solishtirish teoremasiga ko'ra

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx,\quad \int_a^{+\infty}\psi(x)dx$$

xosmas integrallar ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx-\int_a^{+\infty}\psi(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi. ▶

3-ta'rif. *Agar*

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ***xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi integral*** *deyiladi.*

Masalan, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi, chunki

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}$$

va

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

integral yaqinlashuvchiligidan

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$$

integralning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

2.5. Xosmas integrallarni hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lib, uning xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

yaqinlashuvchi bo'lsin.

Ma'lumki, bu holda $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi. Uni $F(x)$ bilan belgilaylik, $(F'(x)=f(x))$.

Ta'rifga binoan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx.$$

Ayni paytda, Nyuton-Leybnis formulasiga ko'ra

$$\int_a^t f(x)dx=F(t)-F(a)$$

bo'ladi. Agar

$$\lim_{t\to+\infty}F(t)=F(+\infty)$$

deyilsa, unda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\left(F(t)-F(a)\right) = F(+\infty)-F(a)$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}. \quad (2)$$

Ko'pincha xosmas integrallar shu formula yordamida hisoblanadi.

Misollar

7. *Ushbu*

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integralni hisoblang.

◀Bu integralning yaqinlashuvchi bo'lishi ravshan. Endi

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topamiz:

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} d(1+x^2) = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = -(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + C.$$

Unda (2) formulaga ko'ra

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + C\right]\Big|_0^{\infty} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \left(-(1+0)^{-\frac{1}{2}}\right) = 0+1 = 1$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 1. ▶$$

8. *Ushbu*

$$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx \quad (a = const)$$

integralning ixtiyoriy o'zgarmas $p>0$ da qiymatini toping.

◀(2) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx = -\frac{1}{p}e^{-px}\Big|_a^{\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-px}\right) - \left(-\frac{1}{p}e^{-pa}\right) = 0 + \frac{1}{p}e^{-pa} = \frac{1}{p}e^{-pa}. ▶$$

9. *Ushbu*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

xosmas integralni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◀Ravshanki, $(x-1)^2 = x^2-2x+1 \geq 0,$
$-2x+1 \geq -x^2.$

Unda

$$e^{-x^2} \leq e^{-2x+1} = e\cdot e^{-2x} \quad (3)$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$$

integral yaqinlashuvchi. (3) munosabat hamda solishtirish teoremasiga ko'ra

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

2.6. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b)$ da uzluksiz bo'lsin. Bu funksiya $x \to b-0$ da cheksizga intilsin: $\lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$. Demak, $f(x)$ funksiya $[a, b)$ da chegaralanmagan (aniqrog'i $f(x)$ funksiya b nuqta atrofida chegaralanmagan).

$f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy $[a,t]$ oraliq $(a<t<b)$ bo'yicha integrali

$$\int_a^t f(x)dx \quad (a<t<b)$$

ni qaraylik. Ravshanki, integral t ga bog'liq bo'ladi.

4-ta'rif. *Agar ushbu*

$$\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $[a,b)$ bo'yicha xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx. \quad (4)$$

Agar (4) limit mavjud va chekli bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ **xosmas integral yaqinlashuvchi** deyiladi.

Agar (4) limit cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, $\int_a^b f(x)dx$ **xosmas integral uzoqlashuvchi** deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a,b]$ da uzluksiz bo'lib, $x\to a+0$ da cheksizga intilsin. Ravshanki, bu funksiyaning $[t,b]$ oraliq $(a<t<b)$ bo'yicha integrali

$$\int_t^b f(x)dx \quad (a<t<b)$$

t o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi.

Agar ushbu

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx. \qquad (5)$$

Agar (5) limiti mavjud va chekli bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Misollar

10. *Ushbu*

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

integralni hisoblang.

◄Ravshanki, integral ostidagi $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiya $x\to 1-0$ da cheksizga intiladi. Demak, berilgan integral chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali.

Ta'rifga binoan

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1-0}\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1-0}(\arcsin x)\Big|_0^t=\lim_{t\to 1-0}(\arcsin t-\arcsin 0)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

bo'ladi. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $\frac{\pi}{2}$ ga teng:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}. ►$$

11. *Ushbu* $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ *xosmas integralning qiymatini toping.*

◄Bu chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali bo'ladi, chunki $x\to 1+0$ da $\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\to+\infty$.

Ta'rifdan foydalanib topamiz:

$$\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{t\to 1+0}\int_t^2\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{t\to 1+0}\int_t^2(\ln x)^{-\frac{1}{2}}d(\ln x)=$$

$$=\lim_{t\to 1+0}\frac{(\ln x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_t^2=\lim_{t\to 1+0}\left(2\sqrt{\ln 2}-2\sqrt{\ln t}\right)=2\sqrt{\ln 2}.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va

$$\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=2\sqrt{\ln 2}. ►$$

12. *Ushbu* $J_1=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$, $J_2=\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$ $\quad(a<b,\quad p=const>0)$ *integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshiring.*

◄Aytaylik, $p\neq 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{dx}{(x-a)^p}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b(x-a)^{-p}d(x-a)=\lim_{t\to a+0}\frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_t^b=$$

$$=\frac{1}{1-p}\lim_{t\to a+0}[(b-a)^{1-p}-(t-a)^{1-p}],$$

bo'lib, $p<1$ bo'lganda $\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{dx}{(x-a)^p}=\frac{1}{(1-p)(b-a)^{p-1}}$, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi, $p>1$ bo'lganda

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{dx}{(x-a)^p}=+\infty,$$

berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, $p=1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{dx}{x-a}=\lim_{t\to a+0}(\ln(x-a))\Big|_t^b=\lim_{t\to a+0}[\ln(b-a)-\ln(t-a)]=+\infty$$

bo'ladi. Demak, berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi.

Agar (4) limit cheksiz yoki mavjud bo‘lmasa, $\int_a^b f(x)dx$ **xosmas integral uzoqlashuvchi** deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a,b]$ da uzluksiz bo‘lib, $x \to a+0$ da cheksizga intilsin. Ravshanki, bu funksiyaning $[t,b]$ oraliq $(a<t<b)$ bo‘yicha integrali

$$\int_t^b f(x)dx \quad (a<t<b)$$

t o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘ladi.

Agar ushbu

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx$$

limit mavjud bo‘lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx. \tag{5}$$

Agar (5) limiti mavjud va chekli bo‘lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, cheksiz yoki mavjud bo‘lmasa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Misollar

10. *Ushbu*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

integralni hisoblang.

◀Ravshanki, integral ostidagi $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiya $x\to 1-0$ da cheksizga intiladi. Demak, berilgan integral chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali.

Ta’rifga binoan

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-0}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-0}(\arcsin x)\Big|_0^t = \lim_{t\to 1-0}(\arcsin t - \arcsin 0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

bo‘ladi. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $\frac{\pi}{2}$ ga teng:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}. ▶$$

11. *Ushbu* $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ *xosmas integralning qiymatini toping.*

◀Bu chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali bo‘ladi, chunki $x\to 1+0$ da $\frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \to +\infty$.

Ta’rifdan foydalanib topamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{t\to 1+0}\int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{t\to 1+0}\int_t^2 (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d(\ln x) =$$

$$= \lim_{t\to 1+0}\frac{(\ln x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_t^2 = \lim_{t\to 1+0}\left(2\sqrt{\ln 2} - 2\sqrt{\ln t}\right) = 2\sqrt{\ln 2}.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln 2}. ▶$$

12. *Ushbu* $J_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$, $J_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ $\quad (a<b, \quad p=const>0)$ *integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshiring.*

◀Aytaylik, $p\neq 1$ bo‘lsin. Bu holda

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{t\to a+0}\int_t^b (x-a)^{-p} d(x-a) = \lim_{t\to a+0}\frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_t^b =$$

$$= \frac{1}{1-p}\lim_{t\to a+0}[(b-a)^{1-p} - (t-a)^{1-p}],$$

bo‘lib, $p<1$ bo‘lganda l $\lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{1}{(1-p\cdot)(b-a)^{p-1}}$, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi, $p>1$ bo‘lganda

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{(x-a)^p} = +\infty \quad ,$$

berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Aytaylik, $p=1$ bo‘lsin. Bu holda

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t\to a+0}(\ln(x-a))\Big|_t^b = \lim_{t\to a+0}[\ln(b-a) - \ln(t-a)] = +\infty$$

bo‘ladi. Demak, berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi.

Shunday qilib, $J_1=\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ xosmas integral $0<p<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $p\geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.▶

Xuddi yuqoridagidek ko'rsatish mumkin, $J_2=\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ xosmas integral $0<p<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $p\geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Biz mazkur ma'ruzaning 1-5 paragraflarida chegaralari cheksiz xosmas integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ni o'rgandik. Bu integralga nisbatan keltirilgan tushuncha va tasdiqlarga o'xshash ma'lumotlar chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali ($t\to a+0$ da $f(x)\to\infty$ yoki $t\to b-0$ da $f(x)\to\infty$) $\int\limits_a^b f(x)dx$ uchun ham keltirilishi mumkin. Jumladan, agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar:

1) $(a,b]$ da uzluksiz va ixtiyoriy $x\in(a,b]$ da $0\leq g(x)\leq f(x)$;

2) xosmas integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int\limits_a^b g(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

13. *Ushbu* $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$ *xosmas integralni yaqinlashuvchilikka tekshiring.*

◀Ravshanki, $0<x<1$ bo'lganda $\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$ bo'ladi.

Ma'lumki, $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ yaqinlashuvchi. Demak, berilgan integral $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$ yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

Mashqlar

1) Ushbu $\int\limits_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ integralni hisoblang.

2) Ushbu $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ integralni hisoblang. Integralni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

3) Ushbu $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$ integralni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

X BOB

Qatorlar

1-§. Sonli qatorlar

1.1. "Sonli qator" tushunchasi. Qatorning yaqinlashuvchiligi va uzoqlashuvchiligi

Aytaylik, biror $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning hadlari yordamida tuzilgan ushbu

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{1}$$

ifoda sonli qator (qisqacha qator) deyiladi. Bunda $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ sonlar qatorning hadlari, a_n ga esa qatorning umumiy yoki n-hadi deyiladi.

(1) qator hadlaridan quyidagi

$$S_1=a_1,$$
$$S_2=a_1+a_2,$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

yig'indilarni hosil qilamiz. Ular (1) qatorning **qismiy yig'indilari** deyiladi. Natijada, (1) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

sonlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz.

Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S$$

(1) qator yaqinlashuvchi deyiladi. S son esa (1) qatorning yig'indisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ limit cheksiz yoki u mavjud bo'lmasa (1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Shunday qilib, $J_1=\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ xosmas integral $0<p<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $p\geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.▶

Xuddi yuqoridagidek ko'rsatish mumkin, $J_2=\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ xosmas integral $0<p<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $p\geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Biz mazkur ma'ruzaning 1-5 paragraflarida chegaralari cheksiz xosmas integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ni o'rgandik. Bu integralga nisbatan keltirilgan tushuncha va tasdiqlarga o'xshash ma'lumotlar chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali ($t\to a+0$ da $f(x)\to\infty$ yoki $t\to b-0$ da $f(x)\to\infty$) $\int\limits_a^b f(x)dx$ uchun ham keltirilishi mumkin. Jumladan, agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar:

1) $(a,b]$ da uzluksiz va ixtiyoriy $x\in(a,b]$ da $0\leq g(x)\leq f(x)$;

2) xosmas integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int\limits_a^b g(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

13. *Ushbu* $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$ *xosmas integralni yaqinlashuvchilikka tekshiring.*

◀Ravshanki, $0<x<1$ bo'lganda $\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$ bo'ladi.

Ma'lumki, $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ yaqinlashuvchi. Demak, berilgan integral $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$ yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

Mashqlar

1) Ushbu $\int\limits_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ integralni hisoblang.

2) Ushbu $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ integralni hisoblang. Integralni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

3) Ushbu $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$ integralni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

X BOB

Qatorlar

1-§. Sonli qatorlar

1.1. "Sonli qator" tushunchasi. Qatorning yaqinlashuvchiligi va uzoqlashuvchiligi

Aytaylik, biror $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning hadlari yordamida tuzilgan ushbu

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

ifoda sonli qator (qisqacha qator) deyiladi. Bunda $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ sonlar qatorning hadlari, a_n ga esa qatorning umumiy yoki n-hadi deyiladi.

(1) qator hadlaridan quyidagi

$$S_1=a_1,$$
$$S_2=a_1+a_2,$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

yig'indilarni hosil qilamiz. Ular (1) qatorning **qismiy yig'indilari** deyiladi. Natijada, (1) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

sonlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz.

Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

(1) qator yaqinlashuvchi deyiladi. S son esa (1) qatorning yig'indisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ limit cheksiz yoki u mavjud bo'lmasa (1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

1-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

◀Qatorning qismiy yig'indilari ta'rifga ko'ra

$$S_1=a_1=\frac{1}{2},$$

$$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}, \qquad (1)$$

....

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$$

bo'ladi.

Endi S_n ni quyidagicha yozib olamiz:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Keyingi tenglikda $n\to\infty$ da limitga o'tib

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

bo'lishini topamiz. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi 1 ga teng.▶

2-misol. *Ushbu*

$$1+2+3+...n+...$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

◀Bu qatorning hadlari arifmetik progressiyani tashkil etadi. Arifmetik progressiya dastlabki n ta hadining yig'indisini hisoblash formulasidan foydalanib, topamiz:

$$S_n=1+2+3+...n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Keyingi tenglikda $n\to+\infty$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{x\to+\infty}S_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2}=+\infty$$

Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.▶

3-misol. *Ushbu*

$$a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+... \qquad (2)$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Bu qatorning hadlari geometrik progressiyani tashkil etadi. Shuning uchun u geometrik qator deyiladi.

Geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig'indisi formulasidan foydalanib topamiz:

$$S_n=a+aq+aq^2+...+aq^n=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

Aytaylik, $|q|<1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-aq^n}{1-q}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q}$$

bo'lib, (2) geometrik qator yaqinlashuvchi, yig'indisi

$$S=\frac{a}{1-q}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $q>1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-aq^n}{1-q}\right)=\infty$$

bo'lib, (2) geometrik qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, $q=1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}na=\infty$$

bo'lib, (2) geometrik qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, $q\le -1$ bo'lsin. Bu holda $n\to+\infty$ da

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}$$

ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lmaydi. Demak, (2) qator uzoqlashuvchi.

Shunday qilib, (2) geometrik qator $|q|<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $|q|>1$ va $q=\pm1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.▶

4-misol. *Ushbu*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◀Bu qator garmonik qator deyiladi va u uzoqlashuvchi bo'ladi. Shuni isbotlaylik. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni garmonik qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S bo'lsin. Ravshanki, bu holda

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=S,$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\right)=S$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$S_{2n}-S_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\right)-$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+$$
$$+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

bo'ladi. Bu esa $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ bo'lishiga zid. Ziddiyat kelib chiqishiga sabab, garmonik qatorning yaqinlashuchi bo'lsin deyilishidir. Demak, garmonik qator uzoqlashuvchi.▶

1.2. Yaqinlashuvchi qatorlarning sodda xossalari

Yaqinlashuchi qatorlarlar ma'lum xossalarga ega. Ularni keltiramiz.

1-xossa. *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (3)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi S bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=ca_1+ca_2+ca_3+...+ca_n+... \qquad (4)$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $c\cdot S$ bo'ladi, bunda $c=const$.

◀Aytaylik,

$$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n,$$
$$\sigma_n=ca_1+ca_2+ca_3+...+ca_n$$

bo'lsin. Ravshanki,

$$\sigma_n=c\cdot S_n$$

bo'ladi.

(3) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

bo'ladi. Unda

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}c\cdot S_n=c\cdot\lim_{n\to\infty}S_n=c\cdot S$$

bo'lib, bu tenglikdan (4) qatorning yaqinlashuvchiligi, uning yig'indisi cS ga teng bo'lishi kelib chiqadi.▶

2-xossa. *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+... , \qquad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+...+b_n+... \qquad (6)$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda S va σ ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+...+(a_n+b_n)+...$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S+\sigma$ ga teng bo'ladi.

◀Aytayiik,

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n$$
$$\sigma_n=b_1+b_2+...+b_n$$

bo'lsin. Ravshanki,

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+...+(a_n+b_n)=S_n+\sigma_n.$$

Shartga ko'ra, (5) va (6) qatorlar yaqinlashuvchi va ularning yig'indisi mos ravishda S va σ. Demak,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,\quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma.$$

Unda

$$\lim_{n\to\infty}(S_n+\sigma_n)=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S+\sigma$$

bo'lib, bu tenglikdagi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

qatorning yaqinlashuvchiligi va uning yig'indisi $S+\sigma$ ga teng bo'lishi kelib chiqadi.▶

3-xossa. *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+...$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $n\to\infty$ da qatorning umumiy hadi a_n nolga intiladi:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

◀Aytaylik, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsin: Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n)=S,$$
$$\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+...+a_{n-1})=S.$$

Ayni paytda,

$$S_n-S_{n-1}=a_n$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

bo'ladi.▶

Eslatma. *Qatorning umumiy hadi $n\to\infty$ da nolga intilishidan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

garmonik qatorning umumiy hadi $a_n=\frac{1}{n}$ bo'lib, u $n\to\infty$ da nolga intiladi, ammo bu qator uzoqlashuvchi.

Demak, yuqorida keltirilgan 3-xossa qator yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy shartini ifodalaydi.

1.3. Musbat hadli qatorlar va ularning yaqinlashuvchiligi. Solishtirish teoremalari

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+...$$

qatorning har bir hadi uchun

$$a_n\ge 0 \quad (n=1,2,3,...)$$

bo'lsa, qator musbat hadli (qisqacha musbat) qator deyiladi.

Aytaylik,

$$a_1+a_2+...+a_n+... \tag{7}$$

musbat qator bo'lib,

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n$$

uning qismiy yig'indisi bo'lsin. Ravshanki,

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$$

bo'lib, $a_n\ge 0$ bo'lgani uchun

$$S_n\le S_{n+1} \quad (n=1,2,3,...)$$

bo'ladi. Demak, musbat qatorlarda uning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'ladi.

1-teorema. *Musbat hadli*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+... \tag{8}$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qismiy yig'indilari ketma-ketligi $\{S_n\}$ ning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

◄**Zarurligi.** Aytaylik, (8) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda ta'rifga binoan

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S \quad (S-\text{chekli son},\ S_n=a_1+a_2+...+a_n\ ).$$

Ma'lumki, yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan, jumladan, yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsin. Ayni paytda, bu ketma-ketlik o'suvchi. Unda monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga ko'ra $\{S_n\}$ ketma-ketlik $n\to\infty$ da chekli limitga ega bo'ladi. Demak, (8) qator yaqinlashuvchi.►

Eslatma. *Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+...$ musbat hadli qatorda, uning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.*

Biror musbat qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini bilgan holda, hadlari bu qator hadlari bilan ma'lum munosabatda bo'lgan ikkinchi musbat qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini aniqlash mumkin. Ular quyidagi teoremalar (solishtrish teoremalari) orqali ifodalanadi.

2-teorema. *Ikkita musbat hadli qatorlar*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+... \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+...+b_n+... \tag{10}$$

uchun

$$a_n\le b_n \quad (n=1,2,3,...) \tag{11}$$

bo'lsa, u holda (10) qator yaqinlashuvchi bo'lganda (9) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi, (9) qator uzoqlashuvchi bo'lganda (10) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

◄$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qatorlarning qismiy yig'indilari

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n,$$
$$\sigma_n=b_1+b_2+...+b_n$$

bo'lsin.

(10) qator yaqinlashuvchi bo'lsin deylik. Unda 1-teoremaga ko'ra, $\{\sigma_n\}$ yuqoridan chegaralangan, ya'ni

$$\sigma_n\le M \quad (M=const)$$

bo'ladi. (11) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n\le b_1+b_2+...+b_n=\sigma_n.$$

Demak, $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan:

$$S_n\le M.$$

Unda 1-teoremaga ko'ra (9) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, (9) qator uzoqlashuvchi bo'lsin. Unda $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan, (11) tengsizlikka asosan $\{\sigma_n\}$ ketma-ketlik ham yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi. Bundan (10) qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.▶

3-teorema. *Agar (9) va (10) qatorlar uchun*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (a_n > 0, b_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots)$$

bo'lsa, u holda (10) qator yaqinlashuvchi bo'lganda (9) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi, (9) qator uzoqlashuvchi bo'lganda (10) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teorema 2-teoremadan foydalanib isbotlanadi.

5-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$$

qatorni aqinlashuvchilikka tekshiring.

◀Ravshanki, berilgan qator musbat hadli qator. Qatorning umumiy hadi

$$a_n = \frac{1}{2^n + n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bo'lib, uning uchun

$$a_n = \frac{1}{2^n + n} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

geometrik qator bo'lib, maxraji $q = \frac{1}{2} < 1$ bo'lganligi uchun, qator yaqinlashuvchi. Unda 2-teoremaga ko'ra, berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

1.4. Musbat hadli qatorlarda yaqinlashish alomatlari

Ushbu bandda musbat qatorlarning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishini aniqlab beradigan alomatlarni keltiramiz. Ulardan amaliy masalalarni yechishda ko'p foydalaniladi.

Faraz qilaylik, musbat hadli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (12)$$

qator berilgan bo'lsin.

1. Koshi alomati. *Agar (12) qatorning umumiy hadi a_n uchun biror nomerdan boshlab $\sqrt[n]{a_n} < 1$ bo'lsa, u holda (12) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;*

$$\sqrt[n]{a_n} \ge 1$$

bo'lsa, u holda (12) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Koshi alomati quyidagicha limit ko'rinishida aytilishi ham mumkin.

Agar (12) qatorning umumiy hadi a_n uchun

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

bo'lib, $k < 1$ bo'lsa (12) qator yaqinlashuvchi, $k > 1$ bo'lsa (12) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

6-misol. *Ushbu*

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n + \ldots$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◀Bu qatorning umumiy hadi $a_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ bo'ladi. Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

bo'lib, u 1 dan kichik. Demak, Koshi alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.▶

Eslatma. *Koshi alomatining limit ko'rinishidagi ifodasida $k = 1$ bo'lsa, u holda (12) qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.*

2. Dalamber alomati.

Agar (12) qator hadlari uchun biror nomerdan boshlab

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad (a_n > 0,\ n = 1, 2 \ldots)$$

bo'lsa, u holda (12) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \qquad (a_n > 0,\ n = 1, 2 \ldots)$$

bo'lsa, u holda (12) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Dalamber alomatini quyidagicha limit ko'rinishida aytish ham mumkin.

Agar (12) qatorning hadlari uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \quad (a_n > 0,\ n = 1, 2 \ldots)$$

bo'lib, $d < 1$ bo'lsa, (12) qator yaqinlashuvchi, $d > 1$ bo'lsa, (12) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

7-misol. *Ushbu*

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◀Bu qatorning a_n va a_{n+1} hadlari

$$a_n=\frac{2n-1}{2^n}, \quad a_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n-1)}=\frac{1}{2}$$

bo'lib, u 1 dan kichik. Demak, Dalamber alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

Eslatma. *Dalamber alomatining limit ko'rinishidagi ifodasida* $d=1$ *bo'lsa, u holda (12) qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.*

3. Koshining integral alomati.

Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (13)$$

musbat hadli qator berilgan bo'lsin.

Aytaylik, $f(x)$ *funksiya* $[1,+\infty)$ *oraliqda uzluksiz bo'lib,*

1) $\forall x\in[1,+\infty)$ *da* $f(x)\geq 0$,

2) $f(x)$ *funksiya* $[1,+\infty)$ *da kamayuvchi,*

3) $f(n)=a_n \quad (n=1,2,3,\ldots)$, *ya'ni*

$$a_1=f(1), a_2=f(2),\ldots,a_n=f(n),\ldots$$

bo'lsin. U holda

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, (13) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx$$

xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, (13) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

8-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots \qquad (\alpha>0)$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◀Bu misol uchun alomatda keltirilgan $f(x)$ funksiya sifatida $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$ olinsa, bu funksiya, ravshanki $[1,+\infty)$ da uzluksiz, ixtiyoriy $x\in[1,+\infty)$ da $f(x)\geq 0$, $[1,+\infty)$ da kamayuvchi va

$$1=f(1),\frac{1}{2^\alpha}=f(2),\frac{1}{3^\alpha}=f(3),\ldots,\frac{1}{n^\alpha}=f(n),\ldots$$

bo'ladi.

Ma'lumki,

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$$

xosmas integral $0<\alpha\leq 1$ da uzoqlashuvchi, $\alpha>1$ da yaqinlashuvchi. Haqiqatan ham

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \textit{agar } \alpha>1 \textit{ bo'lsa,}\\ \infty, & \textit{agar } \alpha<1 \textit{ bo'lsa,}\end{cases}$$

va $\alpha=1$ bo'lganda

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{dt}{t}=\infty$$

bo'ladi.

Demak, Koshining integral alomatiga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ qator $\alpha>1$ bo'lganda – yaqinlashuvchi, $\alpha\leq 1$ bo'lganda – uzoqlashuvchi bo'ladi.▶

Odatda, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ qator umumlashgan **garmonik qator** deyiladi.

1.5. Ixtiyoriy hadli qatorlar. Qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi, Leybnis teoremasi

Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (14)$$

qator berilgan bo'lib, uning har bir hadi ixtiyoriy ishorali haqiqiy sonlardan iborat bo'lsin. (Odatda, bunday qator ixtiyoriy hadli qator deyiladi.) Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \qquad (15)$$

qatorni tuzamiz.

4-teorema. **Agar** *(15) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (14) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.*

◀Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsin.

Ravshanki,

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n| \quad (n = 1,2,3,\ldots) \quad (16)$$

Solishtirish teoremasiga ko'ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

qatorning ikki yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) \text{ va } \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

qatorlar ayirmasi sifatida ifodalanishini topamiz.

Demak, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi.

9-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}(-1)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} + \ldots \quad (\alpha > 1)$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◀Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator quyidagicha

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots$$

bo'lib, u yaqinlashuvchi bo'ladi. Unda yuqoridagi teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

1-ta'rif. *Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.*

Eslatma. *Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi ham bo'lishi mumkin, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.*

2-ta'rif. *Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.*

10-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

qator shartli yaqinlashuvchi qator bo'lishini isbotlang.

◀Ravshanki, berilgan qatorning qismiy yig'indisi

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (17)$$

bo'ladi.

Ma'lumki, $\ln(1+x)$ funksiyaning Makloren formulasiga ko'ra yoyilmasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

bo'lib, $0 \le x \le 1$ bo'lganda

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}$$

bo'lar edi.

Xususan, $x = 1$ bo'lganda

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1) \quad (18)$$

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{n+1}$$

bo'ladi.

(17) va (18) munosabatlardan

$$\ln 2 = S_n + R_{n+1}(1)$$

va undan

$$|S_n - \ln 2| < \frac{1}{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $n \to \infty$ da $S_n \to \ln 2$. Bu esa qaralayotgan qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi. Ayni paytda, berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

garmonik qator bo'lib, uning uzoqlashuvchiligi ma'lum. Demak, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi qator.▶

4-teorema. **Agar** *(15) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (14) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.*

◀Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1|+|a_2|+...+|a_n|+...$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsin.

Ravshanki,

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n| \quad (n=1,2,3,...) \ (16)$$

Solishtirish teoremasiga ko'ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

qatorning ikki yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) \text{ ва } \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

qatorlar ayirmasi sifatida ifodalanishini topamiz.

Demak, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi.

9-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}(-1)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} + ... \quad (\alpha > 1)$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◀Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator quyidagicha

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + ... + \frac{1}{n^{\alpha}} + ...$$

bo'lib, u yaqinlashuvchi bo'ladi. Unda yuqoridagi teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

1-ta'rif. *Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.*

Eslatma. *Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi ham bo'lishi mumkin, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.*

2-ta'rif. *Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.*

10-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + ...$$

qator shartli yaqinlashuvchi qator bo'lishini isbotlang.

◀Ravshanki, berilgan qatorning qismiy yig'indisi

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (17)$$

bo'ladi.

Ma'lumki, $\ln(1+x)$ funksiyaning Makloren formulasiga ko'ra yoyilmasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

bo'lib, $0 \le x \le 1$ bo'lganda

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}$$

bo'lar edi.

Xususan, $x = 1$ bo'lganda

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1) \quad (18)$$

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{n+1}$$

bo'ladi.

(17) va (18) munosabatlardan

$$\ln 2 = S_n + R_{n+1}(1)$$

va undan

$$|S_n - \ln 2| < \frac{1}{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $n \to \infty$ da $S_n \to \ln 2$. Bu esa qaralayotgan qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi. Ayni paytda, berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

garmonik qator bo'lib, uning uzoqlashuvchiligi ma'lum. Demak, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi qator.▶

Aytaylik, biror ixtiyoriy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

qator berilgan bo'lib, u yaqinlashuvchilikka tekshirilishi kerak bo'lsin. Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

qator tuziladi. Ravshanki, keyingi qator musbat qator bo'ladi. Binobarin, uni yaqinlashuvchilikka tekshirishda yaqinlashish alomatlaridan foydalanish mumkin. Agar biror alomatga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qatorning yaqinlashuvchiligi aniqlansa, unda qaralayotgan qatorning yaqinlashuvchi ekanligi topiladi.

Endi ixtiyoriy hadli qatorning bitta muhim xususiy holini qaraymiz. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots \tag{19}$$

qatorni qaraymiz, bunda $c_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Odatda, bunday qator hadlarining ishoralari navbat bilan o'zgarib keladigan qator deyiladi.

Masalan, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

qator hadlarining ishoralari navbat bilan o'zgarib keladigan qator bo'ladi.

5-teorema (Leybnis alomati). *Agar (19) qatorda:*

1) $c_{n+1} < c_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

2) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

bo'lsa, u holda (19) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀Berilgan (19) qatorning dastlabki $2m$ ta hamda $2(m+1)$ ta $(m \in N)$ hadlaridan iborat qismiy yig'indilarni olib, ularni quyidagicha

$$S_{2m} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2m-1} - c_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m}),$$

$$S_{2(m+1)} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2m-1} - c_{2m} + c_{2m+1} - c_{2m+2} =$$

$$= (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m}) + (c_{2m+1} - c_{2m+2})$$

yozamiz. Ravshanki,

$$S_{2(m+1)} = S_{2m} + (c_{2m+1} - c_{2m+2}).$$

Teoremaning 2-shartiga ko'ra $c_{2m+2} < c_{2m+1}$ bo'lib,

$$S_{2(m+1)} > S_{2m} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

bo'ladi. Demak, $\{S_{2m}\}$ ketma-ketlik o'suvchi.

Endi S_{2m} yig'indini quyidagicha yozamiz:

$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifodada qatnashgan qavs ichidagi ayirmalarning, shuningdek, c_{2m} ning musbat bo'lishini e'tiborga olib,

$$S_{2m} < c_1$$

bo'lishini topamiz. Demak, $\{S_{2m}\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan.

Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga ko'ra

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S \ (S - \text{chekli son}) \tag{20}$$

mavjud.

Endi (6) qatorning dastlabki $2m-1$ та $(m \in N)$ sondagi hadidan iborat ushbu

$$S_{2m-1} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2m-1}$$

qismiy yig'indisini olaylik. Ravshanki,

$$S_{2m-1} = S_{2m} + c_{2m}.$$

Teoremaning $n \to \infty$ да $c_n \to 0$ bo'lishi sharti hamda (20) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + c_{2m}) = S.$$

Shunday qilib, berilgan (19) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat ketma-ketlik chekli limitga ega ekani ko'rsatildi. Demak, (19) qator yaqinlashuvchi.▶

Yuqorida yaqinlashuvchiligi ko'rsatilgan

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \tag{21}$$

qator yaqinlashishi Leybnis teoremasi yordamida oson isbotlanadi.

Bu qatorda

$$c_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bo'lib, uning uchun

1) $c_{n+1} < c_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

2) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

bo'ladi. Leybnis teoremasiga ko'ra

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi absolyut yaqinlashuvchi qatorning bitta xossasini keltiramiz.

Aytaylik, biror ixtiyoriy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{22}$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlarining o'rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n + \ldots \qquad (23)$$

qator hosil qilamiz. Ravshanki, keyingi qatorning har bir hadi berilgan qatorning tayin bir hadining aynan o'zi.

6-teorema. *Agar (22) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S bo'lsa, u holda bu qator hadlarining o'rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirishdan hosil bo'lgan (23) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi ham S bo'ladi.*

Mashqlar

1. Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchiligini aniqlang, yig'indisini toping.

a) $\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\ldots+\frac{2}{5^n}+\ldots$ b) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}+\ldots$

2. Quyidagi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorlarni yaqinlashish alomatlaridan foydalanib, yaqinlashishga tekshiring.

a) $a_n = \frac{3^n}{n^n}$. b) $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$.

3. Quyidagi qatorlarning absolyut yaqinlashuvchiligini isbotlang.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln^2 n}{2^n}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \arcsin\frac{\pi}{4n}$.

4. Quyidagi qatorlarni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$.

2-§. Funksional qatorlar va ularning tekis yaqinlashuvchanligi

2.1. "Funksional qator" tushunchasi

Yuqoridagi qator tushunchasiga oid mavzuda har bir hadi haqiqiy son bo'lgan qatorlar o'rganildi.

Endi har bir hadi x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lgan

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+,\ldots \qquad (1)$$

qatorni qaraymiz, bunda har bir $u_n(x)$ funksiya $(n=1,2,3,\ldots)$ biror $X (X \subset R)$ to'plamda aniqlangan. Odatda, bunday qator funksional qator deyiladi.

Masalan, ushbu

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots,$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n} = \frac{1}{x+2}+\frac{1}{2(x+2)^2}+\ldots+\frac{1}{n(x+2)^n}+\ldots,$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n} = \frac{\ln x}{1}+\frac{\ln^2 x}{2}+\frac{\ln^3 x}{3}+\ldots+\frac{\ln^n x}{n}+\ldots$

qatorlar funksional qatorlar bo'ladi.

X to'plamdan olingan tayin x_0 nuqtani (1) dagi x ning o'rniga qo'yish bilan

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots \qquad (2)$$

sonli qator hosil bo'ladi. Ravshanki, x ning turli qiymatlarida, turli sonli qatorlar hosil bo'ladi. Bunda x ning ba'zi qiymatlaridagi sonli qatorlar yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlaridagi esa uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

Agar (2) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) funksional qator x_0 nuqtada yaqinlashuvchi, x_0 nuqta esa (1) funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi deyiladi.

1-ta'rif. *(1) Funksional qatorning barcha yaqinlashish nuqtalaridan iborat to'plam, funksional qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.*

28-ma'ruzada keltirilgan yaqinlashish alomatlaridan foydalanib, funksional qatorlarning yaqinlashish sohalarini topish mumkin.

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

funksional qatorni qaraylik. Bu maxraji x ra teng bo'lgan geometrik qatordir. Demak, bu qator x ning $|x|<1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har bir qiymatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Bundan esa qaralayotgan funksional qatorning yaqinlashish sohasi $(-1,1)$ intervaldan iborat ekanligi kelib chiqadi.

Shuningdek, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots \qquad (x \ge 0)$ funksional qatorning yaqinlashish sohasi $(1,+\infty)$ bo'ladi.

Endi (1) funksional qatorning dastlabki n ta hadi yig'indisi

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$$

ni olaylik. U (1) funksional qatorning qismiy yig'indisi deyiladi. Bu yig'indi x ga bog'liq bo'ladi:

$$S_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x).$$

Ravshanki, (1) funksional qatorning yaqinlashish sohasidan olingan har bir x da $n\to\infty$ da $S_n(x)$ limitga ega bo'lib, bu limit olingan x ga bog'liq, ya'ni x ning funksiyasi bo'ladi. Uni $S(x)$ deylik. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x).$$

Bu $S(x)$ funksiya (1) funksional qatorning yig'indisi deyiladi va

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

kabi yoziladi.

Masalan, ushbu

$$1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$$

funksional qator (maxraji x bo'lgan geometrik qator) $(-1,1)$ da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi

$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+u_{n+1}(x)+\dots \quad (1)$$

funksional qator M to'plamda $(M\subset R)$ yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsin:

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+u_{n+1}(x)+\dots$$

Odatda, ushbu

$$S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\dots$$

ayirma (1) qatorning n-qoldig'i deyiladi va $r_n(x)$ kabi belgilanadi:

$$r_n=S(x)-S_n(x).$$

Ma'lumki,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S(x).$$

Demak, (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$ bo'ladi.

2.2. Funksional qatorning tekis yaqinlashuvchiligi

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots \quad (1)$$

funksional qator M to'plamda $(M\subset R)$ yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $S(x)$ bo'lsin.

2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\forall\varepsilon>0$ son olinganda shunday x ga bog'liq bo'lmagan $n_0=n_0(\varepsilon)\in N$ son topilsaki, barcha $n>n_0$ va ixtiyoriy $x\in M$ uchun*

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

ya'ni

$$|r_n(x)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, (1) funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

Endi funksional qatorning tekis yaqinlashishini ta'minlaydigan, ayni paytda, amaliyotda ko'p foydalaniladigan teoremani keltiramiz.

Teorema (Veyershtrass alomati). *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots \quad (1)$$

funksional qatorning har bir hadi M to'plamda quyidagi

$$|u_n(x)|\le c_n\,,\ (\forall n\in N,\ \forall x\in M\ da) \quad (2)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa va

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=c_1+c_2+\dots+c_n+\dots \quad (3)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (1) funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

◄Aytaylik, (3) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi C ga teng bo'lsin:

$$C=\lim_{n\to\infty}(c_1+c_2+c_3+\dots+c_n)=\lim_{n\to\infty}c_n.$$

Ravshanki,

$$r_n=C-c_n=c_{n+1}+c_{n+2}+\dots$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} r_n=0 \quad (4)$$

ya'ni

$$r_n<\varepsilon \qquad (n>n_0)$$

bo'ladi.

(2) tengsizlikdan foydalanib,

$$\forall n>n_0,\ \forall p\in N \text{ va } \forall x\in M \text{ uchun}$$

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\dots+u_{n+p}(x)|\le|u_{n+1}(x)|+$$
$$+|u_{n+2}(x)|+\dots+|u_{n+p}(x)|\le c_{n+1}+c_{n+2}+\dots+c_{n+p}$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\dots\le c_{n+1}+c_{n+2}+\dots=r_n$$

bo'lib,

$$|r_n(x)| \le r_n \tag{5}$$

bo'ladi. (4) va (5) munosabatlardan $\forall n > n_0$ va ixtiyoriy $x \in M$ uchun

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, funksional qator M da tekis yaqinlashuvchi. ▶

1-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}} = 1 + \frac{x^2}{2\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{x^n}{n\sqrt{n}} + \ldots$$

funksional qator tekis yaqinlashishga tekshirilsin.

◀Berilgan qatorning umumiy hadi

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$$

bo'lib, ixtiyoriy $x \in [-1,1]$ da

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{|x^n|}{n\sqrt{n}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

sonli qator yaqinlashuvchi (qaralsin, 28-ma'ruza). Demak, Veyershtrass alomatiga ko'ra berilgan funksional qator $[-1,1]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

2.3. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalari

Ushbu paragrafda tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalarini isbotsiz keltiramiz.

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

funksional qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsin.

1) agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

funksional qatorning har bir $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *hadi* M *da uzluksiz bo'lib, qator* M *to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda funksional qatorning yig'indisi* $S(x)$ *funksiya* M *to'plamda uzluksiz bo'ladi;*

2) *agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

funksional qatorning har bir $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *hadi* $[a,b]$ *segmentda uzluksiz bo'lib, qator shu segmentda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator hadlarining integrallaridan tuzilgan*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt = \int_a^x u_1(t)dt + \int_a^x u_2(t)dt + \cdots$$

qator $[a,b]$ *da yaqinlashuvchi, uning yig'indisi* $\int_a^b S(x)dx$ *ga teng bo'ladi;*

3) *agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

funksional qatorning har bir $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *hadi* $[a,b]$ *segmentda uzluksiz* $u_n'(x)$ *hosilaga ega bo'lib, bu hosilalardan tuzilgan*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

funksional qator $[a,b]$ *da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator yig'indisi*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

funksiya $[a,b]$ *da uzluksiz* $S'(x)$ *hosilaga ega va*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

bo'ladi.

2-misol. *Ushbu* $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}$ $(0 \le x \le +\infty)$ *funksional qatorning yig'indisini toping.*

◀Ma'lumki, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ funksional qator $[0,+\infty)$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S(x) = \frac{1}{1+x}$ ga teng:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}.$$

Ravshanki, bu qatorning har bir hadi $[0,+\infty)$ da uzluksiz. Demak, uni 2-xossaga ko'ra hadlab, integrallash mumkin:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{dt}{(n+t)(n+1+t)}.$$

Aniq integrallarni hisoblaymiz:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x),$$

$$\int_0^x \frac{1}{(n+t)(n+1+t)}dt = \int_0^x \left(\frac{1}{n+t} - \frac{1}{n+1+t}\right)dt =$$

$$= \ln(n+t)\Big|_0^x - \ln(n+1+t)\Big|_0^x = \ln\frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}.$$

Demak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)} = \ln(1+x).▶$$

Mashqlar

1. Ushbu

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n + \ldots$$

funksional qatorni $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda yaqinlashishga tekshiring.

2. Ushbu

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^6} + \ldots + \frac{1}{1+x^{2n}} + \ldots$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

3. Ushbu $\sin x + \frac{1}{2^2}\cdot\sin^2 2x + \frac{1}{3^2}\cdot\sin^3 3x + \ldots + \frac{1}{n^2}\cdot\sin^n nx + \ldots$ funksional qatorni $(-\infty,+\infty)$ oraliqda Veyershtrass alomatidan foydalanib, tekis yaqinlashishini ko'rsating.

4. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ $(-1<x<1)$ funksional qatorning yig'indisini toping.

3-§. Darajali qatorlar

3.1. Darajali qatorlar, ularning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (x\in R) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi funksional qator **darajali qator** deyiladi, bunda

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

haqiqiy sonlar **darajali qatorning koeffitsiyentlari** deyiladi.

(1) qator hadlari

$$u_n(x) = a_n x^n$$

bo'lgan funksional qatordir.

Masalan,

1) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad (x\in R)$,

2) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (x\in R)$,

3) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \quad (x\in R)$,

qatorlar darajali qatorlar bo'ladi.

Darajali qatorning yaqinlashish sohasini aniqlashda quyida keltiriladigan teorema muhim rol o'ynaydi.

Shuni aytish kerakki, har qanday darajali qator $x=0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi.

1-teorema (Abel). *Agar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (2)$$

darajali qator $x = x_0 \neq 0$ *nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa,* x *ning*

$$|x| < |x_0|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, ya'ni

$$(-|x_0|;|x_0|)$$

intervalda qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀Shartga ko'ra (1) qator $x = x_0 \neq 0$ da yaqinlashuvchi, ya'ni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

sonli qator yaqinlashuvchi. Unda sonli qatorning yaqinlashishining zaruriy shartiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

bo'lib,

$$\left|a_n x_0^n\right| \le M \quad (M = const)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n. \qquad (3)$$

Endi

$$|x| < |x_0|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x nuqtani olib,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| = |a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots, \qquad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (5)$$

qatorlarni qaraymiz.

(5) qator geometrik qator sifatida (maxraji $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$) yaqinlashuvchi. (3) tengsizlikni e'tiborga olib, solishtirish teoremasidan foydalanib, (4) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz. Demak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

darajali qator $|x| < |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x ning qiymatlarida, ya'ni $(-|x_0|;|x_0|)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.►

Natija. *Agar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

darajali qator $x = x_1$ *nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsa, ya'ni*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n + \ldots$$

sonli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda x *ning*

$$|x| > |x_1|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarda, ya'ni ushbu to'plamda

$$(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *qator uzoqlashuvchi bo'ladi.*

Isbotlash mumkinki, ixtiyoriy (1) darajali qator uchun shunday chekli yoki cheksiz musbat r son mavjud bo'ladiki, x ning:

1) $|x| < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (1) darajali qator yaqinlashuvchi (absolyut yaqinlashuvchi),

2) $|x| > r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (1) darajali qator uzoqlashuvchi,

3) $|x| = r$, ya'ni $x = -r, x = r$ da (1) darajali qator yoki yaqinlashuvchi, yoki uzoqlashvchi bo'ladi.

Odatda, r son (1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi, $(-r,r)$ interval esa darajali qatorning yaqinlashish intervali deyiladi.

(1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi ushbu

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (a_n \ne 0,\ n = 1,2,3\ldots) \qquad (6)$$

formula yordamida topiladi.

Eslatma. *Agar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

darajali qator faqat bitta nuqtada yaqinlashuvchi (bu $x = 0$ *nuqta bo'ladi) bo'lsa, u holda* $r = 0$ *deb olinadi.*

Masalan.

$$1 + x + 2!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots \quad (x \in R),$$

darajali qator faqat $x = 0$ da yaqinlashuvchi. Bu qator uchun $r = 0$.

Agar darajali qator x ning ixtiyoriy qiymatlarida $(x \in (-\infty, \infty))$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$r = +\infty$$

deb olinadi.

Masalan,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (x \in R),$$

darajali qator x ning ixtiyoriy qiymatlarida $(x \in (-\infty, \infty))$ yaqinlashuvchi. Bu qator uchun $r = +\infty$.

Odatda, r son $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi, $(-r,r)$ interval esa darajali qatorning yaqinlashish intervali deyiladi.

Eslatma. *Darajali qator* $x = \pm r$ *nuqtalarda yaqinlashishi ham mumkin, uzoqlashishi ham mumkin.*

Misollar

1. *Ushbu*

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \quad (x \in R),$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi hamda yaqinlashish intervalini toping.

◄Bu darajali qator uchun

$$a_n=\frac{1}{n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

bo'lib, (6) formulaga ko'ra

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

bo'ladi. Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=1$ bo'lib, yaqinlashish intervali $(-1,1)$ bo'ladi.

Ravshanki, $x=1$ da darajali qator

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

garmonik qator bo'lib, u uzoqlashuvchi.

$x=-1$ da

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-...+\frac{(-1)^n}{n}+...$$

bo'lib, Leybnis teoremasiga ko'ra bu qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, berilgan qatorning yaqinlashish sohasi $[-1,1)$ yarim segmentdan iborat.►

2. *Ushbu*

$$\frac{x^0}{1\cdot5^0}+\frac{x^1}{2\cdot5}+\frac{x^2}{3\cdot5^2}+...+\frac{x^n}{(n+1)5^n}+...$$

darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping.

◄Dastlab, bu qatorning yaqinlashish radiusi hamda yaqinlashish intervalini topamiz.

Berilgan qator uchun

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\cdot5^n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)\cdot5^{n+1}}$$

bo'lib,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{(n+1)\cdot5^n}:\frac{1}{(n+2)\cdot5^{n+1}}=\frac{(n+2)5^{n+1}}{(n+1)5^n}=5\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right),$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}5\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=5$$

bo'ladi. Demak, qaralyotgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=5$, yaqinlashish intervali $(-5,5)$ bo'ladi.

$x=5$ da darajali qator

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

garmonik qator bo'lib, u uzoqlashuvchi,

$x=-5$ da esa darajali qator

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1}+...$$

bo'lib, Leybnis teoremasiga ko'ra bu qator yaqinlashuvchi.

Shunday qilib, berilgan darajali qatorning yaqinlashish sohasi $[-5,5)$ bo'ladi.►

3.2. Darajali qatorning xossalari

Aytaylik, ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (1)$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r>0$ bo'lsin.

3-teorema. *Agar (1) darajali qatorning yaqinlashish intervali $(-r,r)$ bo'lsa, $(r>0)$, u holda $(-r,r)$ intervalga tegishli bo'lgan har qanday $[-c,c]$ segmentda $(0<c<r)$ (1) qator tekis yaqinlashuvchi bo'ladi* $([-c,c]\subset(-r,r))$.

◄Ravshanki, $c\in(-r,r)$. Binobarin, bu nuqtada ushbu qator

$$|a_0|+|a_1|\cdot c+|a_2|\cdot c^2+...+|a_n|\cdot c^n+...$$

yaqinlashuvchi bo'lib, $[-c,c]$ da

$$|a_nx^n|\le|a_n|\cdot c^n\quad (n=0,1,2,3,..)$$

bo'ladi. Veyershtrass alomatiga ko'ra, (1) qator $[-c,c]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.►

Ma'lumki, darajali qatorlar funksional qatorlardir. Binobarin, tekis yaqinlashuvchi darajali qatorlar tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalari kabi xossalarga ega bo'ladi. Jumladan, (1) darajali qatorning yaqinlashish intervali $(-r,r)$ bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsa, u holda $[-c,c]$ segmentda $(0<c<r)$

1) $S(x)$ funksiya uzluksiz bo'ladi;

2) (1) darajali qatorni hadlab differensiallashdan hosil bo'lgan

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=0+a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}+...$$

darajali qator ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

bo'ladi;

3) (1) darajali qatorni hadlab integrallashdan hosil bo'lgan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_nx^ndx\right)=\int_a^b a_0dx+\int_a^b a_1xdx+\int_a^b a_2x^2dx+...\int_a^b a_nx^ndx+...$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_nx^ndx$$

bo'ladi ($[a,b]\subset(-r,r)$).

3-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=x+2x^2+3x^3+...+nx^n+..., \qquad |x|<1$$

darajali qator yig'indisini toping.

◀Quyidagi,

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=x+x^2+x^3+...+x^n+...$$

darajali qatorni qaraymiz. Bu qator $(-1,1)$ da yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $S(x)=\frac{x}{1-x}$ ekanligi ma'lum (maxraji x bo'lgan geometrik qator):

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

Bu darajali qatorni hadlab differensiallab topamiz:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},$$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Keyingi tengliklardan

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglikning har ikki tomonini x ga ko'paytirmiz. Natijada,

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2} \qquad (-1<x<1)$$

bo'ladi.▶

3.3. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Teylor qatori.

Yuqorida

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (1)$$

ko'rinishdagi darajali qatorlar o'rganildi. Ushbu

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+... \qquad (2)$$

ko'rinishdagi qator ham darajali qator deyiladi, bunda $a_0,a_1,...,a_n,...$ hamda x_0 o'zgarmas sonlar.

Ravshanki, (2) umumiyroq darajali qator bo'lib, y $x-x_0=t$ almashtirish yordamida (1) ko'rinishidagi qatorga keladi.

Agar r son $(r>0)$ (2) darajali qatorning yaqinlashish radiusi bo'lsa, uning yaqinlashish intervali (x_0-r,x_0+r) bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x_0\in R$ nuqtaning (x_0-r,x_0+r) atrofida istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lsin. Bu hol $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasini yozish imkonini beradi:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$$

bunda $r_n(x)$-qoldiq had.

Modomiki, $f(x)$ funksiya (x_0-r,x_0+r) da istalgan tartibdagi hosilaga ega ekan, unda quyidagi

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+... \qquad (3)$$

darajali qatorni qarash mumkin.

3) Bu darajali qator $x=x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi, lekin $y=x_0$ nuqtadan farqli nuqtalarda qachon yaqinlashuvchi bo'ladi va yaqinlashuvchi bo'lganda uning yig'indisi qachon $f(x)$ funksiyaga teng bo'ladi degan savol paydo bo'ladi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi (*).

4-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (x_0-r,x_0+r) intervalda istalgan tartibdagi hosilalarga ega bo'lib, barcha $x\in(x_0-r,x_0+r)$ va barcha $n=0,1,2,...$ lar uchun shunday o'zgarmas $M>0$ topilsaki,*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ *funksiya uchun* $(-r,r)$ *da* $\left(f^{(0)}(x)=f(x)\right)$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (3^*)$$

bo'ladi.

◀Modomiki, (x_0-r,x_0+r) da $f(x)$ funksiya istalgan tartibli hosilalarga ega ekan, unda bu funksiya uchun Teylor formulasi o'rinli bo'ladi. Uning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini olamiz

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x) \qquad (4)$$

bunda,

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (0<\theta<1)$$

Endi teoremaning shartidan foydalanib, qoldiq hadni baholaymiz:

$$|r_n(x)|=\frac{\left|f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\le M\cdot\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (5)$$

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

musbat qatorni qaraymiz. Bu qator uchun

$$a_n=\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\qquad a_{n+1}=\frac{|x-x_0|^{n+2}}{(n+2)!}$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-x_0|^{n+2}}{(n+2)!}:\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+2}\cdot(n+1)!}{(n+2)!\cdot|x-x_0|^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|}{n+2}=0<1$$

bo'ladi. Dalamber alomatiga ko'ra qator yaqinlashuvchi. Unda qator yaqinlashishining zaruriy shartiga binoan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0 \qquad (6)$$

bo'ladi (5) va (6) munosabatlardan

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(4) tenglikda, $n\to\infty$ da limitga o'tib topamiz:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\Big[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Big]+\lim_{n\to\infty}r_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$
$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots. \;▶$$

(3) qator $f(x)$ funksiyaning **Teylor qatori** deyiladi.

Odatda, (3^*) munosabat o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi deyiladi.

Agar (3^*) da $x_0=0$ deyilsa, u

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (7)$$

bo'ladi va bu qatorni $f(x)$ funksiyaning **Makloren qatori** deyiladi.

3.4. Ba'zi sodda funksiyalarning Makloren qatori

1) Aytaylik, $f(x)=e^x$ bo'lsa, $\forall x\in[-p,p](p>0)$ lar uchun

$$f^{(n)}(x)=e^x,\qquad f^{(n)}(0)=e^0=1,\qquad \left|f^{(n)}(x)\right|=e^x<e^p\qquad n=0,1,2,\ldots$$

bo'lib, 4-teoremaga ko'ra

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad (0!=1).$$

bo'ladi. Agar bu munosabatda x ni $-x$ ga almashtirsak:

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

bo'ladi.

Ma'lumki, giperbolik sinus hamda giperbolik kosinus funksiyalari quyidagicha:

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

ta'riflanar edi.

Yuqoridagi

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+...$$

formulalardan foydalanib topamiz:

$$shx=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

2) Aytaylik, $f(x)=\sin x$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

bo'lib,

$$k=2n \text{ bo'lganda } f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2}=0,$$

$$k=2n+1 \text{ bo'lganda } f^{(k)}(0)=(-1)^n$$

bo'ladi. Ayni paytda, barcha $x\in(-\infty,\infty)$ da

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le 1 \ (n=0,1,2,...)$$

tengsizliklar bajariladi. 4-teoremadan foydalanib topamiz!

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-..., x\in(-\infty,\infty)$$

3) Aytaylik, $f(x)=\cos x$ bo'lsin. Bu holda yuqoridagiga o'xshash

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-... \quad x\in(-\infty,\infty)$$

bo'ladi.

4) Endi $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in R$ va $f(x)=\ln(1+x)$ funksiyalarning Makloren qatorlarini keltiramiz.

$x\in(-1,1)$ uchun

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+... \quad (8)$$

$x\in(-1,1]$ uchun

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$$

bo'ladi.

Natija. *Yuqoridagi (8) munosabatdan foydalanib, α ning ba'zi xususiy qiymatlardagi funksiyalarning yoyilmalarini keltiramiz:*

1) $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+x^4-...+(-1)^n x^n+...$

2) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+...+x^n+...$

3) $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{1\cdot3\cdot x^3}{2\cdot4\cdot6}-...$

4) $\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}-\frac{1\cdot3\cdot x^3}{2\cdot4\cdot6}-...$

3.5. Darajali qatorlarning taqribiy hisoblashlarga tatbiqlari

Ma'lumki, "funksiya" oliy matematikada o'rganiladigan asosiy tushuncha. Ko'pgina masalalar funksiyani hisoblash (berilgan nuqtadagi qiymatini topish) bilan bog'liq. Funksiyaning murakkab bo'lishi bunday hisoblashlarda katta qiyinchiliklar tug'diradi. Natijada, funksiyani sodda va hisoblashga qulay bo'lgan funksiya bilan taqribiy ifodalash zaruriyati paydo bo'ladi.

Odatda, taqribiy ifodalovchi funksiya sifatida butun ratsional funksiya-ko'phad olinadi.

Funksiyalarning darajali qatorlarga yoyilmasidan foydalanib, ularning qiymatlarini taqribiy ifodalovchi formulalarni hosil qilish mumkin.

Biz yuqorida $f(x)$ funksiya ma'lum shartlarni qanoatlantirganda uni darajali qatorga yoyilishini ko'rdik.

Jumladan, $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$ formula (Makloren qatori). Modomiki, $n\to\infty$ da

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...+\bar{r}_n(x)$$

da $\bar{r}_n(x)\to0$ bo'lar ekan, unda $x=0$ nuqtaning atrofida

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (9)$$

deyish mumkin. Bu taqribiy formuladan funksiyalarning qiymatlarini taqribiy hisoblashda foydalaniladi.

(9) formulani

$f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x)=(1+x)^\alpha$ $(\alpha\in R)$

funksiyalarga tatbiq etib topamiz:

$$e^x\approx1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

$$\cos x \approx 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-...+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Misollar

4. *Ushbu $\alpha=\sin 1$ miqdorni taqribiy hisoblang.*

◀Agar $\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ da $x=1$ deyilsa, unda

$$\sin 1\approx 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

bo'ladi. Ma'lumki, 1 radian $\approx 57^0 18'$. Keyingi munosabatda ikkita had olinadigan bo'lsa, unda

$$\sin 1\approx \sin 57^0 18'\approx 1-\frac{1}{3!}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

bo'ladi.▶

5. *Ushbu*

$$\alpha=\ln 1,1$$

miqdorni hisoblang.

◀Ma'lumki,

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad (-1<x\le 1).$$

Bu yerda $x=0,1$ deyilsa,

$$\ln 1,1\approx 0,1-\frac{(0,1)^2}{2}+\frac{(0,1)^3}{3}-\frac{(0,1)^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{(0,1)^n}{n}$$

bo'ladi. Agar keyingi taqribiy tenglikning dastlabki uchta hadi olinsa, unda

$$\ln 1,1\approx 0,1-\frac{(0,1)^2}{2}+\frac{(0,1)^3}{3}\approx 0,0953$$

bo'lishini topamiz.▶

6. *Ushbu*

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

integralni taqribiy hisoblang.

◀Ma'lumki,

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}.$$

Bu munosabatda x ni $-x^2$ ga almashtirib topamiz:

$$e^{-x^2}\approx 1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}.$$

Keyingi munosabatda dastlabki to'rtta hadi olinib, so'ng $[0,1]$ bo'yicha integrallansa, natijada,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}\approx 0,7428$$

bo'ladi.▶

Mashqlar

1. Ushbu

$$2x^5+\frac{4x^{10}}{3}+\frac{8x^{15}}{5}+...+\frac{2^n x^{5n}}{2n-1}+...$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

2. Ushbu

a) $f(x)=\sin^3 x$, b) $f(x)=\ln(1-x^2)$, v) $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$

funksiyalar Teylor qatoriga yoyilsin.

3. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}\qquad (x\in R)$$

qatorning yig'indisini toping.

4. Ushbu

$$\sqrt[3]{130}$$

miqdorni 0,001 aniqlikda hisoblang.

5. Ushbu

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$$

integralni 0,001 aniqlikda hisoblang.

4-§. Furye qatori

4.1. "Furye qatorlari" tushunchasi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $R=(-\infty,+\infty)$ da berilgan bo'lsin. Ma'lumki, shunday $T\in R\setminus\{0\}$ son topilsaki, $\forall x\in R$ da

$$f(x+T)=f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ davriy funksiya, $T\neq 0$ son esa uning davri deyiladi.

Agar $T\neq 0$ son $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda

$$kT \quad (k=\pm1,\pm2,...)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ davriy funksiyalar bo'lib, $T\neq 0$ ularning davri bo'lsa,

$$f(x)\pm g(x)\ ,\ f(x)\cdot g(x)\ ,\ \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham davriy bo'lib, ularning davri T ga teng bo'ladi.

$y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyalar $T=2\pi$ davrli funksiya bo'lgan holda ushbu

$$\varphi(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x\ \ (a,b,\alpha -\text{ o'zgarmas, } \alpha\neq 0)$$

funksiya ham davriy funksiya bo'lib, uning davri $T=\frac{2\pi}{\alpha}$ bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\varphi\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)=a\cos\left[\alpha\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)\right]+b\sin\left[\alpha\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)\right]=$$
$$=a\cos(\alpha x+2\pi)+b\sin(\alpha x+2\pi)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x=\varphi(x)$$

bo'ladi.

Bu $\varphi(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x$ sodda davriy funksiya bo'lib, u **garmonika** deb ataladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da uzluksiz bo'lsin. Unda

$$f(x)\cos nx,\quad f(x)\sin nx\quad (n=1,2,3,...)$$

funksiyalar ham $[-\pi,\pi]$ da uzluksiz bo'lib, ular $[-\pi,\pi]$ da integrallanuvchi bo'ladi. Bu integrallarni quyidagicha belgilaymiz:

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\\ a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad (n=1,2,...)\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.\quad (n=1,2,...)\end{aligned}\tag{1}$$

Bu sonlardan foydalanib, ushbu

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\tag{2}$$

qatorni (uni trigonometrik qator deyiladi) hosil qilamiz.

(2) qator funksional qator bo'lib, uning har bir hadi garmonikadan iborat.

Ta'rif. *(2) funksional qator $f(x)$ funksiyaning **Furye qatori** deyiladi. (1) munosabatlar bilan aniqlangan*

$$a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,...,a_n,b_n,...$$

*sonlar **Furye koeffitsiyentlari** deyiladi.*

Demak, berilgan $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari shu funksiyaga bog'liq bo'lib, (2) formulalar yordamida aniqlanadi, qator esa quyidagicha: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ belgilanadi.

1-misol. *Ushbu $f(x)=e^{\alpha x}$ $(-\pi\le x\le\pi,\alpha\neq 0)$ funksiyaning Furye qatorini toping.*

◄(1) formulalardan foydalanib, berilgan funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini hisoblaymiz:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha\pi}\left(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}\right)=\frac{2}{\alpha\pi}sh\alpha\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha\cos nx+n\sin nx}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=(-1)^n\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}sh\alpha\pi$$

$(n=1,2,...)$,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha\sin nx-n\cos nx}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=(-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2n}{\alpha^2+n^2}sh\alpha\pi$$

$(n=1,2,...)$.

Demak, $f(x)=e^{\alpha x}$ funksiyaning Furye qatori

$$f(x)=e^{\alpha x}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$
$$=\frac{2sh\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}(\alpha\cos nx-n\sin nx)\right]$$

bo'ladi.►

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da berilgan juft funksiya bo'lsin: $f(-x)=f(x)$. U holda

$f(x)\cdot\cos nx$ juft, $f(x)\cdot\sin nx$ toq $(n=1,2,3,...)$ funksiya bo'ladi.

(1) formulalardan foydalanib, $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right]=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n=0,1,2,...),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right]=0 \qquad (n=1,2,...).$$

Demak, juft $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n=0,1,2,...)$$

$$b_n=0 \qquad (n=1,2,...)$$

bo'lib, Furye qatori $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da berilgan toq funksiya bo'lsin: $f(-x)=-f(x)$. U holda

$f(x)\cdot\cos nx$ toq, $f(x)\cdot\sin nx$ juft $(n=1,2,3,...)$ funksiya bo'ladi.

(1) formulalardan foydalanib, $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx+f(x)\cos nxdx\right]=0 \qquad (n=0,1,2,...),$$

$$+f(x)\cos nxdx\Big]=0 \qquad (n=0,1,2,...),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right] \qquad (n=1,2,...).$$

Demak, toq $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n=0, \quad (n=0,1,2,...),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad (n=1,2,...)$$

bo'lib, Furye qatori $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ bo'ladi.

2-misol. *Ushbu* $f(x)=x^2$ $(-\pi\le x\le\pi)$ *juft funksiyaning Furye qatorini toping.*

◀Avvalo, berilgan funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2 \quad ,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\left(\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=(-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}. \qquad (n=1,2,...)$$

Demak, $f(x)=x^2$ funksiyaning Furye qatori

$$f(x)=x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

bo'ladi.▶

3-misol. *Ushbu* $f(x)=x$ $(-\pi\le x\le\pi)$ *toq funksiyaning Furye qatorini toping.*

◀Berilgan funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini hisoblaymiz:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{2(-1)^{n-1}}{n}.$$

Demak, $f(x)=x$ funksiyaning Furye qatori $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx$ bo'ladi.▶

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[-p,p]$ $(p>0)$ segmentda uzluksiz bo'lsin. Ma'lumki, ushbu

$$t=\frac{\pi}{p}x$$

almashtirish $[-p,p]$ oraliqni $[-\pi,\pi]$ ga o'tkazadi, ya'ni x o'zgaruvchi $[-p,p]$ da o'zgarganda t o'zgaruvchi $[-\pi,\pi]$ da o'zgaradi. Endi

$$f(x)=f\left(\frac{p}{\pi}t\right)=\varphi(t).$$

deymiz. Unda $\varphi(t)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ oraliqda berilgan uzluksiz funksiya bo'ladi. Bu funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt \quad , \qquad (n=0,1,2,...)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt \qquad (n=1,2,...)$$

ni topib, Furye qatorini yozamiz:

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$

Modomiki,

$$t=\frac{\pi}{p}x$$

ekan, unda

$$\varphi\left(\frac{\pi}{p}x\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{p}x+b_n\sin n\frac{\pi}{p}x\right),$$

bo'lib, uning koeffitsiyentlari

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-l}^{l}\varphi\left(\frac{\pi}{p}x\right)\cos n\frac{\pi}{p}xdx\quad,\quad(n=0,1,2\ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-l}^{l}\varphi\left(\frac{\pi}{p}x\right)\sin n\frac{\pi}{p}xdx\quad.\quad(n=1,2\ldots)$$

bo'ladi. Natijada, $[-p,p]$ da berilgan $f(x)$ funksiyaning Furye qatorini quyidagicha

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p}+b_n\sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

bo'lishini topamiz, bunda

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx\qquad(n=0,1,2\ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx\qquad(n=1,2\ldots)$$

4-misol. *Ushbu*

$$f(x)=e^x\qquad(-1\le x\le 1)$$

funksiyaning Furye qatorini toping.

◄Yuqoridagi formulalardan foydalanib, $f(x)=e^x$ funksiyaning Furye koeffitsiyentilarini topamiz:

$$a_0=\int_{-1}^{1}e^xdx=e-e^{-1},\qquad a_n=\int_{-1}^{1}e^x\cos n\pi xdx=\frac{n\pi\sin n\pi x-\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}e^x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{1+n^2\pi^2}\left(e\cos n\pi-e^{-1}\cos n\pi\right)=(-1)^n\frac{e-e^{-1}}{1+n^2\pi^2}\qquad(n=1,2,\ldots),$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}e^x\cos n\pi xdx=\frac{\sin n\pi x-n\pi\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}e^x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{1+n^2\pi^2}\left(en\pi\cos n\pi+n\pi e^{-1}\cos n\pi\right)=$$

$$=\frac{n\pi(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\left(e^{-1}-e\right)=(-1)^{n+1}\frac{e-e^{-1}}{1+n^2\pi^2}\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Demak,

$$f(x)=e^x\qquad(-1\le x\le 1)$$

funksiyaning Furye qatori

$$e^x\sim\frac{e-e^{-1}}{2}+\left(e-e^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi+\frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2}n\pi\sin n\pi x\right]$$

bo'ladi.►

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da berilgan bo'lsin. $[a,b]$ segment a_k nuqtalar yordamida bo'laklarga ajratilgan. $(a_0=a,\ a_n=b)$.

Agar har bir (a_k,a_{k+1}) $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ da $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lib, $x=a_k$ nuqtalarda chekli o'ng

$$f'(a_k+0)\qquad(k=0,1,2,\ldots,n-1),$$

va chap

$$f'(a_k-0)\qquad(k=0,1,2,\ldots,n)$$

hosilalarga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da bo'lakli-differensiallanuvchi deyiladi.

Endi Furye qatorining yaqinlashuvchi bo'lishi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. 2π *davrli* $f(x)$ *funksiya* $[-\pi,\pi]$ *oraliqda bo'lakli-differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning Furye qatori*

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$[-\pi,\pi]$ *da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

ga teng bo'ladi.

5-misol. *Ushbu*

$$f(x)=\cos ax\qquad(-\pi\le x\le\pi\,,\ a\ne n\in Z)$$

funksiyaning Furye qatorini toping va uni yaqinlashishga tekshiring.

◄Bu funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz. Qaralayotgan funksiya juft bo'lgani uchun

$$b_n=0\qquad(n=1,2,3,\ldots)$$

bo'lib,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx dx=\int_0^{\pi}\left[\cos(a-n)x+\cos(a+n)x\right]dx=$$

$$=\frac{\sin a\pi}{\pi}(-1)^n\left[\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right]$$

bo'ladi. Demak, $f(x)\sim\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)\cos nx\right]$.

Agar $f(x)=\cos ax$ funksiya teoremaning shartlarini bajarishini e'tiborga olsak, unda $\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)\cos nx\right]$ bo'lishini topamiz.▶

Mashqlar

1. Ushbu $f(x)=2\sin(2x+2)$ garmonikaning grafigini toping.

2. Ushbu $f(x)=|x|$ $(-\pi\le x\le\pi)$ funksiyaning Furye qatorini toping.

3. Ushbu $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{agar } -\pi\le x\le 0 \text{ bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar } 0<x<\pi \text{ bo'lsa}\end{cases}$ funksiyaning Furye qatorini toping va uni yaqinlashishga tekshiring.

4. Ushbu $f(x)=-\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ $(x\ne 2k\pi,\ k\in Z)$ funksiyaning Furye qatorini toping va uni yaqinlashishga tekshiring.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Жўраев Т., Садуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А. Олий математика асослари. 1-жилд, –Т.: "Ўзбекистон", 1995; 2-жилд. –Т: "Ўзбекистон", 1998.
2. Азларов Т., Мансуров Х.Т. Математик анализ, 1-2-жилдлар, –Т.: "Ўзбекистон", 1994, 1995.
3. Xudoyberganov G., Varisov A.K., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan maruzalar. 1-2 jild. –T.: "Voris", 2010.
4. Jabborov N.M., Aliqulov E.O., Axmedova Q.C. Oliy matematika. 1-2 жилд. –Qarshi.: "QarDU", 2010.
5. Садуллаев А., Мансуров Х.Т., Худойберганов Г., Ворисов А., Ғуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 1 ва 2-жилдлар. –Т.: "Ўзбекистон", 1993, 1996.
6. Салохиддинов М.С., Насритдинов Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. –Т.: "Ўзбекистон", 1980.
7. Салохиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. –Т.: "Ўзбекистон", 2002.
8. Жураев Т.Ж., Абдуназаров С. Математик физика тенгламалари. –Т.: "Университет", 2003.
9. Нармонов А. Дифференциал геометрия. –Т.: "Университет", 2003.
10. Хожиев Ж., Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси. –Т.: "Ўзбекистон", 2001.
11. Абдушкуров А.А., Азларов Т.А., Жомирзаев А.А. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масала ва мисоллар тўплами. –Т.: "Университет", 2004.
12. Narmonov A.Y. Analitik geometriya. –T.: "O.F.M.J", 2008.
13. Сирожиддинов С.Х., Маматов Н.М. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. –Т.: "Ўқитувчи", 1980.
14. Jabborov N.M. Oliy matematika. –T.: "Университет", 2004.
15. Жабборов Н.М. Олий математика. –Т.: "Университет", 2004.
16. Shoimqulov B.A., To'ychiyev T.T., Djumaboyev D.X. Matematik analizdan mustaqil ishlar. –T.: "Университет", 2008.
17. Данко П.Е., Попов А.Г., Т.Я.Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. 1-2 часть: –М.: 1996.
18. Луре Л.И. Основы высшей математики. 2003.
19. Минорский В.П. Олий математикадан масалалар тўплами. 1980.
20. Баврин И.И. Высшая математика. –М.: "Academa", 2002.
21. Gaziyev A., Israilov I., Yaxshiboyev M. Funksiyalar va grafiklar. –T.: 2006.

22. Баврин И.И., М.Л. Матросов. Общий курс высшей математики. 1995.
23. Скатетский В.Ж. и др. Математические методы в химии. Минск. 2006.
24. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. 1-2 т. –М.: 2007. "'

Mundarija

Nasritdin Jabborov

OLIY MATEMATIKA
I-jild

(Darslik)

Muharrir M.A.Xakimov

Bosishga ruxsat etildi. 11.09.2017y. Bichimi 60X84 $^{1}/_{16}$.
Bosma tabog'i 19,0. Shartli bosma tabog'i 16,0. Adadi 250 nusxa.
Buyurtma №152 (2-nashr). Bahosi kelishilgan narhda.

«Universitet» nashriyoti. Toshkent, Talabalar shaharchasi,
O'zMU ma'muriy binosi.

O'zbekiston Milliy universiteti bosmaxonasida bosildi.
Toshkent, Talabalar shaharchasi, O'zMU.

ISBN 978-9943-5041-1-0