A.ABDURAXMONOV,
A.NARMANOV, N.NARMURATOV

MATEMATIKA TARIXI

TOSHKENT

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

A.ABDURAXMONOV, A.NARMONOV,
N.NARMURATOV

MATEMATIKA TARIXI

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT – 2016

UO‘K: 373.524
KBK 22.3
A-66

A-66 $\boxed{\text{A.Abduraxmonov}}$**, A.Narmonov, N.Narmuratov. Matematika tarixi. –T.: «Fan va texnologiya», 2016, 204 bet.**

ISBN 978–9943–11–351–0

Mazkur o‘quv qo‘llanma bakalavriatning matematika yo‘nalishi uchun mo‘ljallangan bo‘lib, amaldagi yangi bakalavriat dasturi asosida yozilgan. O‘quv qo‘llanma ikki qismdan iborat bo‘lib, birinchi qismda matematika bo‘limlarining paydo bo‘lishi va rivojlanish bosqichlari yoritlgan, ikkinchi qismda islom mamlakatlari olimlarining matematika rivojiga qo‘shgan hissalari yoritilgan. O‘quv qo‘llanma respublikamizda matematika tarixi bo‘yicha ilk qo‘llanma bo‘lib, undan talabalar, oliy o‘quv yurtlari o‘qituvchilari va matematika tarixi bilan qiziquvchilar foydalanishlari mumkin.

***

Учебное пособие написано на основе существующей программы для направлений бакалавриата «математика». Учебное пособие состоит из двух частей. В первой части изложены этапы развития и возникновения разделов математики, вторая часть посвящена вкладам ученых исламского мира в развитии математики. Учебное пособие предназначено для студентов, преподавателей высших учебных заведений и для всех, кто интересуется историей математики.

***

This tutorial is written on the basis of the existing programs for bachelor «mathematics». The manual consists of two parts. The first part outlines the stages of development and the occurrence of branches of mathematics, the second part is devoted to the contributions of the scientists of the Islamic world in the development of mathematics. The manual is intended for students, academics and anyone interested in the history of mathematics.

UO‘K: 373.524
KBK 22.3

Taqrizchilar:

M.Sh.Mamatov – fizika-matematika fanlari doktori, O‘zbekiston Milliy universiteti geometriya kafedrasi professori;

R.B.Beshimov – fizika-matematika fanlari doktori, Nizomiy nomidagi Toshkent davlat pedagogika universiteti kafedrasi mudiri.

ISBN 978–9943–11–351–0

KIRISH

Respublikamizdagi oliy o'quv yurtlari xalq xo'jaligining turli sohalariga yetuk mutaxassislar tayyorlash bilan birga umumta'lim maktablari va o'rta maxsus ta'lim muassasa (akademik litsey va kollej)lari uchun matematika o'qituvchilari ham tayyorlab bermoqda. Bu bizning oldimizga umumta'lim o'rta maktablari va o'rta maxsus ta'lim muassasa (akademik litsey va kollej)larida ta'lim va tarbiyani, oliy va o'rta maxsus o'quv yurtlarida esa o'qitish ishlarini tubdan yaxshilash, matematika o'qituvchilari tayyorlashga bo'lgan talabni yanada yuqori ko'tarishimizni talab etadi. Ma'lumki, ko'pchilik universitetlar qoshida umumta'lim maktablari va o'rta maxsus o'quv yurtlari uchun o'qituvchilar tayyorlaydigan bo'limlar mavjud. Universitetlar va pedagogika institutlari oldiga o'qituvchilar tayyorlashda psixologiya va pedagogika fanlarini, hozirgi zamon ilmiy informatikasi asoslarini, pedagogika fanlari tarixini, o'zbek xalqi tarixini, mutaxassisligi bo'yicha o'rta maktablarda o'qitiladigan fanlarning o'qitilish uslublari va tarixini chuqurroq o'rgatish vazifasi yuklatiladi.

Ushbu o'quv qo'llanma biz yuqorida sanab o'tgan vazifalardan biri – matematika tarixini o'rganishga bag'ishlangan. Biz bu o'quv qo'llanmani yaratishda O'zbekiston Milliy universiteti geometriya kafedrasida matematika tarixidan o'qitilgan umumiy va maxsus kurslar mazmuni va metodikasiga asoslandik.

Mazkur o'quv qo'llanma universitet va pedagogika institutlari matematika fakultetlarining talabalariga mo'ljallangan. Undan tashqari, o'quv qo'llanmadan matematika tarixi bilan qiziquvchi o'rtoqlar ham anchagina ma'lumotlar ola biladi, degan umiddamiz.

Matematika tarixi predmeti

Avvalo, matematika tarixi matematik fanlar jumlasiga kirishini e'tirof etish joiz. Ma'lumki, matematik fanlarning sohalari turli-tuman bo'lishiga qaramay, ular umumiylik belgisi ostida bitta predmetga birlashtirilgan. Bu umumiylik belgisini quyidagi matematikaga berilgan ta'rifidan yaqqol ko'rish mumkin. «Matematika-haqiqiy borliqning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalaridir».

Matematikaning turli sohalari mana shu miqdoriy munosabatlar va fazoviy formalarning ayrim xususiy hollari bilan ish ko'radi.

Matematika predmetining tarkibi quyidagilardan iborat:

1. Matematika rivojlanishi jarayonida yig'ilgan faktlar.
2. Gipotezalar, ya'ni ilmiy farazga asoslangan, keyinchalik tajribada sinab ko'riladigan faktlar.
3. Umumiylashtirilgan va o'z asosini topgan materiallar, ya'ni matematik nazariya va qonun-qoidalar.
4. Matematika metodologiyasi-matematika predmetini o'rganishga yondashishni xarakterlovchi matematik qonunlar va nazariyalarni tushuntirishning umumiy usuli.

Matematika predmetining sanab o'tilgan elementlari o'zaro bog'liq va rivojlanishda. Biror aniq davrda shu rivojlanish qanday ro'y bergan, keyinchalik bu rivojlanish qanday tus oladi, shularni o'rganish, natijada ularning sabablarini ochib berish matematika tarixi predmeti zimmasiga yuklatiladi.

Demak, matematika tarixi matematika rivojlanishining obyektiv qonunlari haqidagi fan ekan. Shu sababli ham matematika tarixi juda katta masalalarni hal etishiga to'g'ri keladi.

Bu vazifalar ro'yxatini keltirish ancha mushkul ish, ammo bo'lajak matematika o'qituvchilari matematika tarixidan nimalarni bilishlari zarur ekanini sanab ko'rsatish mumkin.

Birinchidan, bo'lajak matematika o'qituvchisi matematikaning rivojlanish bosqichlarini, matematik tushunchalar qadim-qadim zamonlarda qanday shakllanganini bilish, *ikkinchidan,* fan sifatidagi matematika qanday yo'llar bilan shakllanganligini bilish, *uchinchidan,* fan sifatidagi va o'quv predmeti sifatidagi geometriyaning rivojlanish tarixi bilan tanish bo'lish, *to'rtinchidan,* trigonometriya tarixini bilish, *beshinchidan,* algebraning vujudga kelishi, rivojlanishi, hozirgi kundagi ahvoli bilan tanish bo'lish, *oltinchidan,* matematik tahlil predmeti, uning boshlang'ich tarixini bilish zarur.

Bundan tashqari, matematika tarixini o'rganishda hozirgi zamon mantiqiy strukturalarning tarixiy xarakteri, ularning rivojlanish dialektikasi sistemali o‘rganilishi kerak, bu esa matematika sohalarining nisbati va ular rivojlanishining istiqbolini bilib olishga yordam beradi.

Matematika tarixi predmeti ko‘p sondagi boshqa fanlar va ularning tarixi bilan bog‘liq, bu esa uning muammolari doirasini yanada kengaytiradi va tarixiy-matematik tekshirish metodlari rolini orttiradi.

Matematika rivojlanishining asosiy davrlari

Ko‘pchilik matematika tarixchilari matematika rivojlanishining A.N.Kolmogorov tomonidan tavsiya qilingan davrlashtirishni ma’qul ko‘radilar. Buning asosiy sababi, Kolmogorovning davrlashida matematikaning muhim metodlari, g‘oyalari va natijalari, ya’ni matematikaning mazmunini baholash asosi qilib olingan. Matematika rivojlanishini bunday maxsus davrlarga bo‘lish matematika tarixini mohiyatini butunlay hal qilib bermaydi, balki matematika rivojlanishining obyektiv qonunlarini yaxshiroq tushunish uchun qo‘shimcha bir vosita bo‘ladi. Uning fikricha matematika rivojlanishini quyidagi to‘rt davrga bo‘lish maqsadga muvofiqdir:

1.Matematikaning vujudga kelishi. Bu davr eradan oldingi VI-Y asrlargacha davom etgan, ya’ni bu davrda matematika o‘zining predmeti va metodlariga ega bo‘lgan mustaqil fanga aylangan. Davrning boshi eng qadimgi davr-ibtidoiy jamoa tuzumiga borib taqaladi. Bu davrning xarakterli tomoni-matematik faktlarning yig‘ilishidan iborat.

2.Elementar matematika davri (O‘zgarmas miqdorlar matematikasi davri). U er.avv. VI-V asrlardan XVII asrgacha davom etgan. Bu davrda o‘zgarmas miqdorlarni o‘rganish sohasida katta yutuqlarga erishildi. Bu yutuqlar haqida hozirgi kunda o‘rta maktablarda o‘qitiladigan matematika kurslari ba’zi tasavvurlarni berish mumkin. Bunda o‘zbek olimi Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy (780-850 yy.) tomonidan algebra fanining yaratilishi, R.Dekart tomonidan analitik geometriyaning yaratilishi, cheksiz kichik miqdorlarning rivojlana boshlashini eslash lozim. Umuman olganda, elementar matematika tushunchasiga ta’rif berish qiyin, uning aniq bir ta’rifi ham yo‘q, ammo matematika tarixida mana shunday davrni farqlash to‘g‘ri va u tarixni o‘rganishni qulaylashtiradi.

3.O‘zgaruvchi miqdorlar matematikasi davri. Bu davr R.Dekart (1596-1650) tomonidan analitik geometriyaning uzul-kesil yaratilishi, I.Nyuton (1642-1727) va Leybnis (1646-1716) lar tomonidan differensial va integral hisobning vujudga kelishi bilan boshlanadi. Davrini oxiri XIX asrning yarmigacha boradi. Bu davrda matematika hozirgi zamon ko‘ri-nishiga keldi. Xuddi shu davrda klassik matematika deb ataluvchi matematikaning hamma ilmiy asoslari hosil bo‘ladi.

4.Hozirgi zamon matematikasi davri. U XIX asrning o‘rtalaridan boshlanadi. Bu davr matematik abstraksiya rolining ortishi, matematikada matematik modellash keng ko‘lamda qo‘llanilishi bilan xarakterlanadi. Mana shu davrda klassik matematika deb ataladigan matematika o‘zi uchun, matematikaning boshqa sohalari uchun tatbiq etishga ancha torlik qilib qoldi. Sababi, matematika juda ko‘p tarmoqlarga ajralib ketdi, unda aksiomatik metod keng rivojlandi, natijada yangi matematik tushuncha-matematik struktura vujudga keldi. Matematik struktura tushunchasi bir qaraganda bir-biridan juda uzoq tuyulgan matematik faktlar va metodlarning birligini o‘rgatishga yordam beradi.

Ma’lumki, matematika elementlari ixtiyoriy bo‘lgan to‘plamlar ustida amallar bajaradi va turli munosabatlarni qaraydi. To‘plamlarning elementlari ularni boshqaruvchi aksiomalarga bog‘liq ravishda turli matematik strukturalar hosil qiladi. Keyingi paytlarda matematikaning turli bo‘limlarini, hatto ayrim matematik predmetlarni o‘sha strukturalarning modeli sifatida talqin qilina boshladi. Shu sababli hozirgi zamon matematikasini matematik strukturalar va ularning modellari haqidagi fan deb ta’riflash mumkin.

Matematika hamma boshqa fanlar singari uzluksiz rivojlanib turadi. Buning quyidagi ikki sababi mavjud: birinchidan, uning rivojlanishini kundalik hayot va amaliyot taqozo qiladi; ikkinchidan, rivojlanishni matematikaning o‘z ichki ehtiyoji talab qiladi.

Matematikaning tez sura’tlar bilan rivojlanishi texnikani, iqtisodni, ishlab chiqarishni boshqarishning rivojlanishiga, shuningdek boshqa qo‘shni fanlarning ham rivojlanishiga katta ta’sir ko‘rsatadi.

Matematika darslari jarayonida tarixiy ma’lumotlardan foydalanish uni yanada qiziqarli qiladi, o‘quvchilarning o‘rganilayotgan materialga qiziqishlarini orttiradi, bilimlarni mustahkam egallashlariga yordam beradi.

Mualliflar

BIRINCHI QISM

BOSHLANG'ICH MATEMATIK TUSHUNCHALAR, ELEMENTAR MATEMATIKA BO'LIMLARINING PAYDO BO'LISHI VA RIVOJLANISHI HAQIDA

1-§. Son va figura tushunchalarining vujudga kelishi

Bizning son va figuralar haqidagi tasavvurimiz juda qadim zamonlardan – tosh asridan, ya'ni paleolitdan boshlanadi. Ma'lumki, kishilar bir necha yillar g'orlarda yashagan, hayot uchun zaruriy narsalarni bevosita tabiatdan yig'ib olishgan. Ov uchun toshdan asboblar yasashgan. Oldinlari ular bir-birlari bilan imo-ishora orqali muomala qilishgan, keyinchalik mehnat jarayonida til paydo bo'lgan. Sezgi organlari rivojlana boshlagan, miya esa hisoblash va o'lchash uchun abstraksiya hosil qilgan.

Son va figura tushunchalarining tarixini o'rganish faqat matematika tarixi uchun emas, balki insoniyat tarixi uchun zarur.

Ba'zi olimlar sodda matematik tushunchalar hayvonlarda ham mavjud, deb tasdiqlashadi va o'z da'volarini dalillash uchun misollar keltirishadi. Masalan, nemis matematigi M.Kantor: «O'rdaklar ham o'z bolalarini sanaydi»-deydi. Ba'zilari esa hayvonlarda ham figura tushunchasi mavjud deb hisoblashadi va bunga misol qilib, asalarilarning in yasashlarini keltirishadi. Ma'lumki, asalarilarning inlari muntazam oltioyoqli prizmaga o'xshaydi. Demak, ular fazoni muntazam oltioyoqli prizmalar bilan to'ldirishni bilishsa, ularning oliy matematikadan ham xabari bor ekanda!

Rus olimi Pavlovning ta'limotiga ko'ra hayvonlarda abstraksiya hosil bo'lmaydi, ulardagi «ko'p», «kam» tushunchalari instinkt va reflekslar natijasida hosil bo'ladi.

Biz yuqorida misol qilib keltirgan tosh asboblar fikrlashsiz hosil bo'lmagan, albatta. Ammo shuni aytish lozimki, bu fikrlashlar o'sha sha-roitda chekli bo'lgan. Ibtidoiy jamiyat odami uchun 2 va 3 dan ortiq son ko'p edi. Ular o'zlarining ovchi itlarini sanamagan, balki ularning biror belgisini yodda tutgan. Ma'lumki, yunon, semit tillarida ikkilik son saqlanib qolgan. Masalan, arab tilida bitta kitob-kitob, ikkita kitob-kitoboni.

Avstraliyadagi bitta qabila birni-guna deb, ikkini-barkula deb ataydi, uchni barkula-guna, to'rtni-barkula – barkula deyishadi. Demak, ko'plik birlikni takrorlash bilan hosil qilinadi. Bunday sanash hozirgi hindistonliklarda ham mavjud. Masalan, ular do'stni bixay deyishadi, do'stlarni esa bixay-bixay deydi.

Keltirilgan misollarning hammasi sanoq sistemaning asta-sekinlik bilan rivojlanganligidan dalolat beradi. Dastlab kishilar ikkigacha, so'ngra beshgacha, undan keyin o'ngacha, o'n besh va yigirmagacha sanashni o'rganishgan. O'zbeklarning «ikki o'n besh bir o'ttiz» degan maqolining tagida ham bir vaqtlar bizda o'n beshlik sanoq sistemasi mavjud bo'lganligidan dalolat beradi. Yaqin-yaqinlarda ham qishloqlarda qariyalar 40 o'rniga ikki yigirma deyishar edi.

Umuman, xalqlardagi sonlarning turli belgilar yordamida yozilishi (1,2 va 3-jadvallarga qarang) va aytilishi quyidagi 3 prinsipga amal qiladi:

1. Additivlik (additio-lotincha so'zdan olingan bo'lib, qo'shish degan ma'noni beradi). Misol: Rim raqamida 2, 3 ni yozilishi.

2. Substraktivlik (substactio-ayirish). Masalan: Rim raqamidagi 4 va 9 ni yozish.

3. Multiplikativlik (multiplicatio-ko'paytirish). Masalan o'z-bek tilida 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 va hokazolarning aytilishi.

Sanoqning yuqori chegarasi keyinchalik sanoq sistemasining asosi uchun qabul qilingan. Unga o'nli sanoq sistemasi misol bo'la oladi.

Geometrik figuralar haqidagi tushunchalarning paydo bo'lishi va rivojlanishi insoniyatning mehnat faoliyati ya'ni dehqonchilik, kulolchilik, to'quvchilik va qurilish ishlarining rivojlanishi bilan bog'liq bo'lgan. Masalan, dehqonchilikda yerlarni ekishga tayyorlash, yig'ib olingan donlarni saqlash muammolari geometriyaning ba'zi faktlarini yuzaga chiqaradi. Qurilish ishlarida esa qadimgi binolarning formalarini - konus, silindr va prizma ko'rinishda yoki uning peshtoqlariga solingan turli xil ornament va figuralar, ularning tengligi, o'xshashligi va simmetriyasini ko'ramiz.

Umuman geometriyada dastlab geometrik etalonlar (masalan: koptok-sharsimon predmetlar uchun, qarag'ay mevasi-uchli jismlar uchun), keyinchalik abstrakt geometrik figuralar nomlari hosil bo'ldi. Masalan: «chiziq» - linea (lotincha) so'zdan olingan bo'lib, «kanop ip», «arqon» degan ma'noda keladi.

2-§. Quldorlik jamiyatida matematika

Tarixdan dastlabki davrlarda odamlar toshdan turli xil qurol va aslahalar yasagani ma'lum bo'lsa, keyinchalik mis va bronzadan va nihoyat, temirdan qurol-aslahalar yasashgani ma'lum. Temir qurollar vujudga kelganidan so'ng, eramizdan oldingi VI asrda quldorlik jamiyati vujudga keldi. U esa o'z navbatida xususiy mulkchilikni keltirib chiqardi. Quldorlar boylik orttirish yo'liga o'tishdi. Jamiyat tarixidan quldorlik jamiyati dastlab Misr, Bobil, Xitoy va Hindistonda vujudga kelganligini, G'arbiy yarim sharda esa ancha keyin maya va ink qabilalarida paydo bo'lganligini bilamiz.

Hunar va savdo-sotiqning rivojlanishi tufayli shaharlar vujudga keldi. Shaharlar qurilish texnikasini rivojlantirishni taqozo qildi. Quldorlar boyib ketishi natijasida, boshqa elatlarning yer va shaharlariga ko'z olaytira boshlashdi. Bu esa urushsiz bo'lmas edi. Urush uchun esa texnika kerak edi. Ma'lumki, o'z navbatida harbiy texnikalar bilimsiz vujudga kelmaydi.

Xuddi mana shu davrda arifmetik qoidalar bilan bir qatorda ba'zi bir amaliy masalalarni yechish usullari ham vujudga keldi. O'lchashga doir masalalardan asta-sekin nazariy geometriya hosil bo'ldi.

Juda qadim zamondagi bu ma'lumotlar qayerdan olingan?

Bobilda matematik ma'lumotlar, turli xil jadvallar va boshqa yozuvlar loydan yasalgan taxtachalarga yozilib xumdonda pishirib olingan. Shu sababli bu ma'lumotlarning yozilganiga bir necha asrlar o'tganligiga qaramay ular bizgacha hech qanday o'zgarishsiz yetib kelgan. Biz keyinroq bobilliklarning matematik ma'lumotlaridan, ularning matematik bilimlari haqida ancha to'liq tasavvurga ega bo'lamiz. Qadimgi Misrda matematik qoidalar, jadvallar va boshqa yozuvlar papirusga, ya'ni papirus daraxti po'stlog'i tilimiga yozilgan.

Bu material turli xil tabiiy sharoitlarga chidamsizligidan misrliklarning matematik ma'lumotlari va bilimlari haqida kamroq ma'lumotga egamiz. Xitoyda esa matematik ma'lumotlar bambukka yozilgan. Xitoy matematikasi haqida ham ma'lumot juda oz. Nega turli ma'lumotlar turli narsalarga yozilgan? Qog'oz yo'q edimi?, -degan savol tug'iladi. -Qog'oz yo'q edi, u bizning eramizning II asrida Xitoyda kashf etilgan. Keyingi asrlarda Samarqandda ham qog'oz tayyorlangan.

3-§. Misr matematikasi

Misrning mashhur piramidalari qadimgi podsholik davri (e.o. 3600-2700) da qurilgan. Bu piramidalarning ostiga Misr shoh (firavn)larining maqbaralari joylashgan. Bu piramidalar o'sha qadimgi davrda ham, Misrda matematika ancha yuqori darajada bo'lganligidan dalolat beradi, chunki bunday qurilishlar anchagina murakkab arifmetik amallarni va geometrik o'lchashlarni talab qiladi. Bundan tashqari, tarixdan o'sha davrda Misrda kanallar, to'g'onlar va suv omborlari qurilganligi haqida ma'lumotlar bor, ular ham quruvchilardan katta matematik ma'lumot talab etar edi. Podshoh o'z dehqonlariga yerlarni bo'lib berardi, demak uning maxsus tanobchilari bor edi. O'sha yerlarga mos qilib, ulardan o'lpon olishardi, demak, hisobchilar darkor edi. Dehqonchilik ishlarini yaxshi olib borish uchun yaxshi tuzilgan taqvim (kalendar) lozim edi. Bu talab astranomiyani, shu bilan birga matematikani rivojlantirishni talab qiladi.

Shunday qilib, qadimgi Misrda matematika bilim ancha yuqori darajada bo'lgan deyish mumkin. Bizgacha qadimgi Misrning arxitektori, me'mori va matematigi Imxotepning nomi yetib kelgan. Ammo bu davrdan faqat sonlarning yozilishi, ba'zi bir o'lchovlargina saqlanib qolgan. Biz Misrning qadimgi podsholigi davri matematikasi haqida ana shular bo'yicha hukm chiqaramiz.

Misrliklarning sanoq sistemasi

Bizgacha yetib kelgan ma'lumotlar misrliklarda o'nli sanoq sistemasi mavjud bo'lganligini bildiradi. Ulardagi ba'zi belgilar 1 dan 10^7 gacha borgan. Ular birni o'lchov cho'pi, o'nni bo'yunturuq, yuzni o‘lchov arqoni, mingni nilufar guli, o‘n mingni ko‘rsatgich barmoq, yuz mingni qushcha, millionni hayratdagi odam, o‘n millionni quyosh ko‘rinishida yozishgan (1-jadval, 1-ustunga qarang).

Ular jadvalda keltirilgan belgilarni takrorlash bilan istalgan sonni yoza olishgan.

Misrliklarning yozuvi turli belgilardan tuzilgan-iyeroglif, iyeratik va demotik yozuv turlaridan iborat bo‘lgan. Keyinchalik ular bu belgilarni harflarga almashtirishgan. Shunga ko‘ra sonlarning belgilari ham o‘zgargan. Sonlar yuqori xona birligidan boshlab yozilgan.

Misr piramidalarining o‘lchamlari butun sonlarda |»tirsak»| ifodalangan. Ular qurilish ishlarida butun sonlardan foydalanishgan, yer ustida o‘lchashlarda esa kasr sonlar ham uchraydi.

Misrda matematik ma’lumotlarni va boshqa yozuvlarni qayd qilib boruvchi kitoblar bo‘lgan. O‘rta podshohlik davriga (er.avv. 2000-1700) doir turli xil xo‘jalik yozuvlari bizning davrimizgacha yetib kelgan. Ular orasida matematik yozuv bilan birga kichkina maxsus matematik qo‘llanma ham bor. Bu qo‘llanma kotiblarga mo‘ljallangan. Shunday matematik papiruslardan ikkitasi saqlanib qolgan.

1. London papirusi, kotibi Axmes, shuning uchun uni Axmes papirusi, ya’ni papirusning londonlik egasi Rayndning nomi bilan «Raynd papirusi» ham deyishadi. Papirusning bo‘yi 5,25 m, eni 33 sm, unda 84 ta matematik masala bo‘lib, u e.o. 2000 yillarda yozilgan.
2. Moskva papirusi-bo‘yi 5,44m, eni 8 sm, unda 25 ta masala bor. Bu papirus ham Misrning o‘rta podshohlik davri (e.o.2000-1700 yillar) ga to‘g‘ri keladi.

London papirusi Eyzenlor va Baboninlar o‘rganishgan. Moskva papirusini esa akademiklar B.A.Turayev va V.V.Struvelar tatbiq qilishgan va 1930 yili rus tilida nashr qilishgan.

Arifmetik amallar

Yuqorida eslatilgan papiruslardan misrliklar musbat sonlar ustidagi to‘rt amalni qanday bajarganliklarini bilamiz. Oldin eslatganimizdek, ularda o‘nli sanoq sistemasi mavjud bo‘lganidan qo‘shish amalini bajarish hozirgi bizning qo‘shish amalini bajarishimizdan hech ham farq qilmaydi. Ular ham bir xil xona birliklarini qo'shib, bunday birliklar soni 10 dan ortib ketsa, yuqori xona birligini bittaga orttirib qolganini birliklar xonasida qoldirgan.

Ayirish amali ham hozirgi bizning usulda bajarilgan, ammo hamma vaqt katta sondan kichigi ayrilgan, chunki manfiy son tushunchasi bo'lmagan.

Qo'shish va ayirish amallari uchun maxsus iyerogliflar bo'lgan: ^ (qo'shish), ^ (ayirish). Bu iyerogliflar ilgari bir tomonga qarab «yurish»ni bildirgan.

Ko'paytirish amali boshqacharoq bajarilgan. Ko'paytirishda ular sonlarni ikki hissa orttirishdan foydalanishgan. Ko'paytirish usulini biz quyidagi misolda namoyish qilamiz. 12 ni 12 ga ko'paytirish lozim bo'lsa, ular ushbu jadvalni tuzishgan:

1	12
2	24
/4	48
/8	96
Birgalikda	144

Bu jadvalning har biri keyingi qatoridagi son o'zidan oldingi sonni o'z-o'ziga qo'shishdan yoki uni ikkiga ko'paytirishdan hosil bo'lgan.

12×12 ko'paytmani topish uchun chap tomondagi ustundan yig'indisi 12 ni beradigan sonlarni qidirmoq kerak. Bunday sonlar 4 va 8. Bu satrlardagi 48 va 96 sonlarning yig'indisi $12\times12=144$ ni beradi.

Bo'lish amalini ular ko'paytirishga teskari amal deb qarashgan (albatta, ular qoldiqsiz bo'lish bilan shug'ullanishgan). London papirusining 69-misolida 1120 ni 80 ga bo'lish qaralgan. Uni yechish uchun quyidagicha ko'rsatma berilgan:

«80 ni 1120 hosil bo'lguncha ko'paytir». Demak,

1	80
/2	160
/4	320
/8	640
Birgalikda	1120

Jadvalning chap ustunida oldiga chiziqcha qo‘yilgan sonlar (2,4,8)ning yig‘indisi 14 soni 1120 ni 80 ga bo‘lganda hosil bo‘ladigan bo‘linmani beradi.

Misrlik kotiblar o‘zlarining xo‘jalik ishlarini yuritishlarida ikkiga bo‘lish amalidan ham keng foydalanishgan. Masalan, $2:8$ amalini bajarish uchun quyidagicha ish tutishgan:

1	8
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2

Demak, $2:8=1/4$.

Misr matematikasida kasrlar

Kasrlar asosan yer maydonlarini o‘lchash, bu maydonlarni qismlarga ajratish natijasida vujudga kelgan. Shu sababli ham kasr birlikning qismini ifoda etgan. Belgilanganda ham birlikning qismi sifatida belgilangan. Eng qadimgi kasrlar-ikkilangan kasrlar $(1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32)$ hisoblanadi. Bu kasrlar uchun maxsus belgilar ham bo‘lgan. Keyinchalik $1/3$ va $2/3$ kabi kasrlar paydo bo‘lgan. Borib-borib $1/n$ ko‘rinishdagi kasrlar ham qarala boshlagan. Bu kasrlar uchun (og‘iz) iyeroglifi ishlatilgan. Uning ostiga maxrajni ko‘rsatuvchi son yozilgan. Masalan, $1/10$ ni ular ko‘rinishda tasvirlashgan.

Misrda kasr sonlarning keyingi rivojlanishiga kalendar yordam bergan. Ular bir yilni hammasi ham 30 kundan bo‘lgan 12 oyga bo‘lgan. 12 oy tugashi bilan yilga 5 ta qo‘shimcha sutkani qo‘shib qo‘yishgan. Misrliklar oyning kunlarini oyning qismi sifatida qarashgan. Masalan, 1 kun = $1/30$ oy , 3 kun $=1/10$ oy, 24 kun $=4/5$ oy va hokazo.

Misrliklar $1/n$ ko‘rinishdagi kasrlarga va $2/3$ ko‘rinishdagi kasrga ega bo‘lsa ham, har bir butun sonni qismlarga ajratishni bilishgan. Masalan, 28 ni 5 ga bo‘lish uchun yuqorida ko‘rsatilgani kabi javdali tuzgan:

/1	5
2	10
/4	20
birgalikda	25

28 ga teng emas, ya'ni unga teng bo'lish uchun 3 yetishmaydi. Shuning uchun misrliklar o'ng ustundagi sonni ikki hissalamasdan, 5 ning 1/5 va 2/5 sini topishga kirishadi:

/ 1/5	1
/ 2/5	2

Endi chap ustundagi hamma belgilangan sonlarni qo'shadi:

$$1+4+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=5\frac{3}{5}$$

IZOH: Misrliklar 2/5 kasrni 1/3+1/15 kasr ko'rinishida tasvirlashadi.

«AXA» ga doir masalalar

London va Moskva papiruslarida «axa» -»to'da» ga doir masalalar uchraydi. London papirusning 33 masalasida «axa»ga doir masalaning xususiy holi bo'lgan va uni hozirgi zamon belgilashlarida $x+ax+bx+cx+...=p$ ko'rinishda bo'ladigan birinchi darajali bir noma'lum tenglama uchraydi.

Bundan:

$$x=\frac{p}{1+a+b+c+...}.$$

O'sha London papirusidagi 26 - masala quyidagicha: «Miqdor va uning to'rtdan biri 15 ga teng». O'sha miqdorni topish lozim.

YECHILISHI: papirusda quyidagi ishlar bajarilgan: «4 dan hisobla; uning to'rtdan biri - bir. 4 bilan birgalikda 5». Keyin esa 15 5 ga bo'lingan va 3 hosil qilingan. 3 ni 4 ga ko'paytirish bilan oxirgi natija 12 hosil qilingan.

Bu masalani yechishda hozirgi zamon algebrasi belgilashlaridan foydalansak, uni $x+x/4=15$ ko'rinishidagi bir noma'lumli birinchi darajali tenglama bilan ifodalagan va uni quyidagicha yechgan bo'lar edik:

$$x+x/4=15$$
$$5x=60,\ x=12$$

<u>IZOH</u>: u davrda misrliklarda tenglama tushunchasi bo'lgan emas.

Misrliklar yuqoridagi masalani yechishga qo'llagan metodni keyinchalik yevropaliklar «Yolg'on faraz» metodi deb atashgan.

Yolg'on faraz metodiga ko'ra, aslida x ni biror miqdorga bo'lishdan p bo'linma hosil bo'lsa, yolg'on farazda esa x_1 miqdorni bo'lib, p_1 bo'linma hosil qilingan. Demak, bizning belgilashlarimizda u quyidagicha bo'ladi:

$$x:x_1=p:p_1 \text{ bundan } x=\frac{p}{p_1}x_1.$$

Misrliklar mana shu «Yolg'on faraz» metodi yordamida $ax^2=b$ ko'ri-nishdagi ikki hadli kvadrat tenglamalarni ham yecha bilishgan: «Eni bo'yining $\frac{3}{4}$ ga teng, yuzi esa 12 ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning tomonlari topilsin».

<u>YECHILISHI</u>. Hozirgi zamon belgilashlarida quyidagicha:

$$1^2:x^2=\frac{3}{4}:12,$$
$$\frac{3}{4}x^2=1\cdot12; \qquad x^2=12\cdot\frac{1}{3/4},$$
$$x^2=12\cdot\frac{4}{3}=16, \qquad x=4.$$

To'g'ri to'rtburchakning bo'yi 4, eni esa uning $\frac{3}{4}$ ga teng: 3. Bu sonlarning ko'paytmasi 12, ya'ni to'g'ri to'rtburchakning yuziga teng.

Progressiyalar

Misrliklarning arifmetikaga doir masalalari orasida, hozirgi zamon terminlari bilan aytadigan bo‘lsak, arifmetik va geometrik progressiyalarga doir masalalar ham uchraydi. Arifmetik progressiyaga doir masalalarda biror turdagi g‘allani yoki moddiy boylikni bir necha kishi orasida « u odam va keyingi odam orasidagi farq» berilgan miqdorga teng bo‘ladigan qilib taqsimlash lozim.

Masalan, London papirusida arifmetik progressiyaga doir mana bunday masala bor: «Har bir kishi orasidagi ayirma $1/8$ o‘lchovga teng bo‘lsa, 10 o‘lchov g‘allani 10 ta odamga bo‘l!».

Bu hadlarning yig‘indisi $(s_n = 10)$, hadlarning ayirmasi $(d = 1/8)$, hadlarning soni $(n = 10)$ berilgan arifmetik progressiyaning hadlari $(a_1 a_2, ... a_n)$ ni topish zarur.

Misrliklarning geometrik progressiyaga doir masalasi bizning hazil masalaga o‘xshaydi (keyinchalik mana shu masala boshqacharoq ko‘ri-nishda italiyalik matematiki Pizanskiyda va XI asrda yashagan Iroqlik matematik Ibn al-Xaysomda ham sal boshqacharoq ko‘rinishda uchraydi): «7 uy, 7 mushuk, 7 sichqon, 7 boshoq, 7 o‘lchov g‘alla; hammasi qancha?»

Bu masalani quyidagicha tushunmoq kerak: 7 ta uy bo‘lib, ularning har birida 7 tadan mushuk bor, har bir mushuk 7 tadan sichqon yeydi; agar ular tirik qolganida, har biri 7 tadan boshoq yegan bo‘lar edi, endi har bir boshoqni sepsak, 7 o‘lchovdan g‘alla beradi, jami sonlar miqdorini, ya’ni $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$yig‘indini topish lozim.

Misrda geometriya

Tarixchilarning guvohlik berishicha, geometriya bundan 4000 yil oldin Misrda vujudga kelgan ekan. Bizning eramizdan oldingi V asrda yashagan yunon tarixchisi Geradot geometriyaning vujudga kelishi haqida quyidagicha yozadi: Misr shohi Ssoyetros har misrlikka qur'a bo‘yicha yer maydoni ajratib berar va yer egasidan shu maydonga mos soliq undirar edi. Agar Nil daryosi toshib biror kishining yerini yuvib ketsa, u shohga xabar berar va shoh o‘z tanobchilarini yuborib, uning yeri qanchagacha kamayganligini aniqlatar hamda o'sha kamayishga mos ravishda soliqni ham kamaytirar edi. Mana geometriya qanday paydo bo'lgan va Yunonistonga o'tgan».

Geradotning xabaridan uchta narsa ma'lum bo'ladi. Birinchidan, «geometriya» atamasining ma'nosi, ya'ni «geo» -yer, «metriya» - o'lchash, ya'ni «geometriya»-»yer o'lchash» degan, ikkinchidan, soliqlardagi o'zgarishlarni hisoblash proporsiya tuzishga olib keladi, demak, geometriya matematikaning boshqa sohalari bilan bog'liq ekanini ko'rsatadi. Uchinchidan, geometriya yunonlarga Misrdan o'tganligini ko'rsatadi.

Geradotning fikrini undan keyin yashagan yunon matematigi Yevdem (e.o. IV asr) ham tasdiqlaydi: «Geometriyani misrliklar kashf etgan, u yer o'lchash natijasida vujudga kelgan. Bu o'lchashlar doim yerlarning chegarasini yuvib ketuvchi Nil daryosining toshqinlari tufayli hosil bo'lgan. Bu fan ham boshqa fanlar singari kishilarning ehtiyoji tufayli vujudga kelgan».

Geometriya Misrda vujudga kelgan bo'lsa ham ulardan bizgacha yetib kelgan geometrik ma'lumotlar juda oz va ular yuzlar va hajmlarni hisoblash bilan bog'liq. Qadimda geometriya matematikaning ayrim tarmog'i bo'lmagan. Ixtiyoriy to'rtburchakning yuzini ular qarama-qarshi tomonlari o'rta arifmetigining ko'paytmasi sifatida, ya'ni bizning belgilashlarimizda quyidagi ko'rinishda topgan:

$$S_4 = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

Uchburchakning yuzi uchun formulani hosil qilishda ular S_4 formulada $d=0$ deb olingan, ya'ni

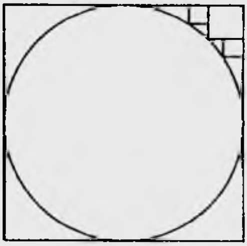
$$S_\Delta = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b}{2}$$

Misrliklar tomonlari 3, 4 va 5 sonlardan iborat bo'lgan uchburchak to'g'ri burchakli ekanini bilgan bo'lishlari kerak, chunki ular yer ustida to'g'ri burchak yasash uchun 12 ta tugunli arqondan foydalanishgan: $12=3+4+5$. Tomonlari butun 20,21 va 29 sonlaridan iborat ikkinchi to‘g‘ri burchakli uchburchakni to‘g‘ri burchakli ekanini ko‘z darrov ilg‘amaydi, ammo misrliklar uning shu xossaga ega ekanligini bilishgan.

Doiraning yuzi uchun ularda hozirgi bizning belgilashlarimizda

$$S_{doira}=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

formula mavjud bo‘lgan, bu formuladagi d-doiraning diametri. Demak, misrliklar doiraning yuzi tomonlari doira diametrining $8/9$ ga teng kvadratning yuzi bilan bir xil deb hisoblangan. London papirusidagi 50-masalada $\pi=4\left(\frac{8}{9}\right)^2\approx 3{,}1605$ deb olingan.



1-rasm

Doira yuzi uchun hosil qilingan formula qanday vujudga kelgani haqida matematika tarixchisi A.Ye. Raik quyidagicha ilmiy gipoteza yuritgan: «Avval tomoni doira diametriga teng bo‘lgan kvadratning yuzidan uning uchlarida hosil bo‘lgan tomoni diametrining $1/6$ ga teng to‘rtta kvadratni ayirib tashlagan. So‘ngra qolgan yuzdan tomoni diametrining $1/9$ ga teng 8 ta kvadratning yuzi ayrilgan (1-rasmga qarang)».

Yuqorida so‘zlar bilan ifodalangan gipotezani belgilashlar yordamida amalga oshiramiz:

I $S=d^2-4\left(\frac{1}{6}d\right)^2=d^2\left(1-\frac{1}{9}\right)$

II. $S_{doira}\approx d^2\cdot\frac{8}{9}-8\left(\frac{d}{9}\right)^2=d^2\left(\frac{8}{9}-\frac{8}{9^2}\right)=d^2\left(\frac{72-8}{9^2}\right)=d^2\frac{64}{9^2}=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$

Haqiqatan, $S_{doira}=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$

Bundan tashqari, Misr papiruslarida (Moskva papirusidagi 14-masala) kesik piramidaning hajmini hisoblashga doir masala uchraydi. U masala yechilishi bilan birga quyidagicha:»Uchsiz piramida hajmini hisoblash formasi; agar senga berilgan balandligi 6 (tirsak), pastki asosining tomoni 4 (tirsak) va ustki asosining tomoni 2(tirsak) bo'lgan uchsiz piramidani aytishsa; o'sha 4 dan boshlab hisobla, uni kvadratga oshirib 2 dan boshlab hisobla, uni kvadratga ko'tarib, to'rt hosil qilasan; 16 ni 8 bilan va 4 bilan qo'sh, 28 hosil bo'ladi; 6 ning 1G'3 ni hisobla, 2 hosil bo'ladi, 28 ni ikki marta hisobla, 56 hosil bo'ladi; qara, u 56 bo'ladi. Sen to'g'ri topding».

Papirusda kesik piramidaning chizmasi teng yonli trapetsiya ko'ri-nishida tasvirlangan. Yuqorida keltirilgan hisoblash formasi bizning belgilashlarimizda muntazam kesik piramidaning hajmini hisoblash uchun ishlatiladigan formulamizni beradi:

$$V_{kesik\ pir}=\frac{h}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$$

bunda h - kesik piramidaning balandligi, a^2 -pastki asosning yuzi, b^2-ustki asosning yuzi, $a\cdot b$ -ko'paytma ustki va ostki yuzlarning o'rta geometrik qiymati.

XULOSA. Yuqorida aytilganlarga qarab, eramizdan oldingi XX asrlarda Misrda fan shaklidagi matematika elementlari vujudga kela boshlagan, deya olamiz. Bu elementlarning vujudga kelishida asosiy rolni amaliy masalalar o'ynagan. Ko'rinib turibdiki, hisoblash texnikasi juda sodda, masalalarni yechish usullari esa xilma-xil. Har safar masala yechishda boshqa-boshqa usullar qo'llaniladi. Ammo, bu ikki papirusning materiali bilan Misr matematikasi haqida uzul-kesil hukm chiqarish unchalik to'g'ri emas. Bundan tashqari, bu papiruslar o'sha zamon kotiblariga mo'ljallangan elementar qo'llanma vazifasini o'tagan bo'lishi kerak. Misrliklar ba'zi matematik qoidalarni tajriba yo'li bilan topgan bo'lishsa-da, ular ba'zi matematik qoidalarga fikrlash yo'li bilan kelishgan bo'lishi lozim. Masalan, kesik piramidaning hajmini hisoblash qoidasiga empirik yo'l bilan kelish juda qiyin, shubha yo'qki unga fikrlash orqali kelingan. Shunday qilib, yangi podsholik davrida misrliklarga hozirgi elementar matematikaning juda ko'p teoremalari va qoidalari ma'lum bo'lgan.

4-§. Qadimgi bobil matematikasi

Eramizdan oldingi XXIV asrlarda Yevfrat va Tigr daryolari oralig'ida ikki quldorlik-Janubda Shumerlar, shimolda Akkadlar davlati vujudga keldi. Ularning asosiy mashg'ulotlari sug'oriladigan yerlardagi dehqonchilik edi. Madaniyat dastlab janubda-Shumerlarda rivojlandi. Shaharlar, qasrlar va boshqa turdagi binolarning qurilishi, savdo-sotiq, kasb-hunarning ravnaqi fanlarning, eng avvalo matematika fanining vujudga kelishiga sharoit yaratadi. Hozirgacha yetib kelgan mixxatlarni ham Shumerlar kashf etishgan. Mixxatlar g'allani yoki mollarni topshirish haqidagi axborotlar Shumerlarda 60 li sanoq sistemasi mavjud bo'lganidan dalolat beradi.

Eramizdan oldingi XXIII asrda Sargan I Shumerlar davlati bilan Akkadlar davlatini birlashtirgan. Lekin oradan uzoq yillar o'tishi bilan, Shumerlar xalq sifatida yo'qolib ketgan. E.o. XIX-XVIII asrlarda bu davlatning poytaxti Bobil shahri bo'lgan, davlat uchun ham ana shu nom saqlanib qolgan. Qadimgi Bobil shahri hozirgi Iroq Respublikasining poytaxti Bog'dod shahri hisoblanadi. Bobilning u davrdagi aholisi forslar, yahudiylar, yunonlar va hindlardan iborat bo'lgan. Trigonometriyaning boshlang'ich tushunchalari mana shu yerda vujudga kelgan va ular birinchi bo'lib burchakni o'lchashga erishgan.

Bobilliklarning mixxatlari o'tgan asrning o'rtalarida kashf etildi. Ammo ko'pgina olimlar bu jadvallar diniy bo'lsa kerak degan aqida bilan ularga unchalik ahamiyat berishmadi. Lekin e.o. VII asrga taalluqli shoh Ashshurbanipapalning kutubxonasi topilgach, unga qiziqish ortdi. Topilgan 20 mingga yaqin jadvallar orasida, matematikaga taalluqli jadvallar ham anchagina ekan.

1916-yildan boshlab, fransuz olimi F.Tyuro-Danjen (1872-1944), 1929-yildan boshlab nemis matematika tarixchisi

O.Neygebauerlar matematik mixxatlarini o‘qib, ma’nosini ochib berdi. O‘sha topilgan jadvallardan 300 dan ortiqrog‘i o‘qilgan. Bobil matematikasi haqida ana shular mazmuniga qarab fikr yuritamiz.

Bobilliklarning sanoq sistemasi

Shumerlar sonlarni loydan yasalgan taxtachaga uchqurlangan tayoq-chani bosish bilan yozishgan. Agar tayoqchaning doira shaklidagi uchini og‘maroq holda bosilsa, Ellips ⬭ hosil bo‘ladi, bu birning belgisi; to‘g‘ri burchak ostida bosilsa, doira O hosil bo‘ladi, bu o‘nning belgisi. Keyinchalik tayoqchaning o‘tkir uchidan foydalaniladigan bo‘ldi, u holda birning belgisioddiy pona 𒁹 shaklida bo‘lib qoladi. O‘nning belgisi ‹ prizma shaklidagi tayoqchani og‘maroq bosishdan hosil bo‘ladi (1-jadval, 4-ustunga qarang).

Shumerlar hisoblashlarda 60li sanoq sistemasidan, boshqa hollarda esa o‘nli sanoq sistemasidan foydalanishar edi. Matematik va astronomik matnlardagina sonlar o‘lchovlarida aralash yozuv ishlatilar edi. Masalan, 225 ni «2 me 25» deb atashadi, bunda «me» yuzni anglatadi.

Avval o‘nning katta qilib yozilgan belgisi 100, 60 li sistemada esa 60 ni bildirgan. Bir-biriga qarama-qarshi qo‘yilgan ‹ › ikki belgi 120 ni; agar orasida yana bitta o‘n belgisi bo‘lsa -‹ 𒁹 › 1200 ni bildirgan. 100 - 𒁹 ›kabi, 1000 – ‹ 𒁹 ›kabi, 10000-‹ ‹ 𒁹 ›kabi belgilangan. Keyinchalik yozuvning soddalashuvi, bir xil ko‘rinishga kela borish bilan katta va kichik belgining ahamiyati qolmadi va nihoyat, 𒁹 va ‹ ikki belgigina qoldi. Natijada turli xona birliklarini turli belgilar bilan yozish yo‘qoldi, bu esa o‘z navbatida pozitsion sistemani vujudga keltirdi.

Bu sistemada hamma sonlar 𒁹 va ‹ belgilarni takrorlash bilan yozilar edi; masalan, 21 quyidagicha yoziladi: ‹ ‹ 𒁹 Bu yerda qo‘shishdan foydalanilsa, boshqa joyda ayirishdan foydalanilar edi; 19 ni 20-1 ko‘ri-nishida, ya’ni ‹ ‹ 𒁹 𒇲 kabi yozishgan, bu yerdagi 𒇲 belgi «lal» bizning «siz» qo‘shimchamizga to‘g‘ri keladi. Belgini «birsiz 20» deb o‘qish lozim, u 19 degani. Bobilliklar borib-borib belgilarni gruppalaydigan bo‘ladilar. Masalan, 19ni  ko‘rinishda yozgan.

Bobilliklarda $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ kasrlar uchun maxsus belgilar bor edi: $\frac{1}{2}=$ , $\frac{1}{3}=$ , $\frac{2}{3}=$ 

Bobilliklarning *60* li sanoq sistemasi kasrlar ustida amallar bajarishda qulay edi, qo‘shimcha qoida talab etmas edi. Bunda oxirgi natijada xona birligi ko‘rsatilsa bas!

Hozir biz burchaklarni, vaqtni o‘lchashda ishlatiladigan 60 li sistema bobillik astronomlardan kelgan (bir soat 60 daqiqa, daqiqa 60 soniya). Matematika tarixchilarining aytishlaricha, o‘lchovlar orasida eng qadimgisi og‘irlik o‘lchovi, keyingisi esa yuz o‘lchovi hisoblanadi. Birinchi bo‘lib oziq-ovqat, ikkinchi bo‘lib maydonlar o‘lchangan. Bu ma’lum yerga ketadigan urug‘ni bilishga, shuningdek, ma’lum yerdan olinadigan hosilni bilishga xizmat qilgan.

Dehqonchilik vujudga kelishi bilan, to‘g‘ri to‘rtburchakli maydonlar qadamlab, boshqa formadagi maydonlar esa ular perimetrlarining uzunligi bilan o‘lchangan. Keyinchalik maydonlarning atrofiga to‘g‘ri to‘rtburchak yasab, uning bo‘yi bilan enini ko‘paytirishgan. Hosil bo‘lgan yuzdan ortiqcha joylarini ayirib tashlagan. Ortiqcha joylarni to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘lchashmagan balki sepish uchun ketadigan g‘alla miqdori bo‘yicha aniqlangan. Ular aniq uzunlikdagi jo‘yakka ketadigan urug‘ miqdorini ol-dindan bilgan.

Arifmetik amallar

Oldin ko‘rganimizdek, misrliklar amallarni qanday bajarish lozimligini sxematik ko‘rsatishgan bo‘lsa, bobilliklar to‘g‘ridan-to‘g‘ri uning natijasini yozib qo‘ya qolishadi. Masalan, ular «1 10 va 26 40 qo‘shilgan va 1 36 40 hosil bo‘lgan» deb yozsa, uni quyidagicha tushunmoq zarur: "$1\times60^2+10\times60+26\times60+40=1\times60+36\times60+40$".

Ular ayirish amalini ham qo‘shish amaliga teskari amal singari bajargan.

Bobilliklar ko'paytirish amalini hozir biz qanday bajarsak, shunday, ya'ni xona birliklarini ko'paytirish bilan amalga oshirishgan. Ko'paytirishda ular 2×2 dan 59×59 gacha ko'paytirish jadvalini yodda tutishi zarur bo'lgan. Bu esa, 1770 ta ko'paytmadan iborat va uning hammasini yodda tutish mushkul, shu sababli ular ko'paytirishning tayyor jadvalidan foydalanishgan.

Bobilliklarda ko'paytirish jadvallaridan tashqari, unga teskari jadvallar ham mavjud bo'lgan.

O'sha jadvalda 7 ning teskari qiymati uchun 60li sanoq sistemasida quyidagi davriy qiymat berilgan:

8 34 17 8 34 17, ya'ni

$$3/60+34/60^2+17/60^3+8/60^4+34/60^5+17/60^6$$

Bundan tashqari, jadvalda *11, 13, 14* va *17larning* ham teskari qiymati uchraydi.

Jadvallarda teskari qiymatlarning ortig'i va kami bilan olinganlari ham qaraladi. Masalan, *8 34 16 59* kasr *7* ning teskari qiymatidan kichik, *8 34 18* esa *7* ning teskari qiymatidan katta deyiladi.

Teskari qiymatlar nega kerak edi? – degan haqli savol tug'iladi. Bobilliklar ular yordamida bo'lish amalini bajarishgan. Jadvaldan bo'luvchining teskari qiymati izlangan, so'ngra u bo'linuvchiga ko'paytirilgan, natijada bo'linma hosil bo'lgan. Masalan, *104* ni *8* ga bo'lish kerak bo'lsin, u holda *8* ning teskari qiymati $1/8$ yoki *0,125* topilgan va uni *104* ga ko'paytirilgan: $104\times0{,}125=13$

Keyinroq bobilliklar xonalar bo'yicha hozirgi bizning bo'lishlarimiz singari bo'lishga o'tgan.

Bobilliklarda ko'paytirish jadvali, teskari qiymatlar jadvallari bilan bir qatorda kvadratlar, kvadrat ildizlar va kub ildizlar, berilgan son kvadrati va kublari yig'indilari jadvallari bo'lgan.

Arifmetik masalalar

Mixxatlarda uchraydigan masalalar deyarli eradan oldingi 1500-yillarga taalluqli va o'zining mazmuni hamda hal etilishi bo'yicha ham turlicha. Ba'zi jadvallarda masala juda yaxshi ifodalangan va yechib ko'rsatilgan bo'lsa, ba'zilarida masalaning mazmunigina berilgan. Ba'zi loy taxtachalarning har ikkala tomonida juda ko'p masala uchraydi. Masalan, 8x4sm kattalikdagi taxtachada 200 ta masala bor.

Masalalardagi sonlar tajribadan olingan. Ismsiz sonlar esa guruhlab qo'yilgan, ya'ni bitta tipga keltirilgan.Masalan, $x\cdot y=600$, $x+y=50$ bo'ladigan masalalar uchraydi. Hatto quyidagicha masala ham bor:

$$(3x+2y)^2+\frac{2}{13}\left\{4\left[\frac{1}{2}(x+y)-\left(\frac{1}{2}+1\right)(x-y)\right]^2+(x+y)^2\right\}=17100$$

Bizning fikrimizcha, bunday masalalarni keltirishdan maqsad kotiblarning e'tiborini masalani echish usulini yaxshiroq o'zlashtirishga qaratishdir.

Bobilliklar $x+y$ yig'indisi «bo'yi bilan enning» yig'indisi deb, $x\cdot y$ ko'paytmani esa «yuz» deb atashgan. Bunday masalalarda deyarli hamma hollarda $x>y$ bo'lgan.Bu masalalarda «en» faqat en bo'lmay biror ismsiz narsa bo'lishi ham mumkinku, deydigan bo'lsak, ularda abstrakt tushunchalar ancha rivojlangan deya olamiz.

Arifmetik masalalar orasida foydaga qarz pul berishga doir masalalar ham uchraydi. (Ma'lumki, bu masalalar keyinchalik, qadimgi Rim va Venetsiyada «protsent» nomini olgan).

Algebraik usullar

Shoh Xammurapi (er.avv.XVIII asr) zamonida bobilliklar bir noma'lumli birinchi va ikkinchi darajali tenglamalarni hamda ikki noma'lumli tenglamalar sistemasini yecha olishganliklari haqida ma'lumotlar bor.

Tenglama ikkita noma'lumga ega bo'lsa, ular bir noma'lumni «bo'yi», ikkinchi noma'lumni esa «eni» deb atashgan.Agar $x\cdot y$ ko'paytma uchrasa, uni «yuz» deb atagan. Oldin eslatganimizdek, ularda hamma vaqt $x>y$ bo'lgan.Uchinchi darajali tenglamalarga keladigan masalalarda uchinchi noma'lumni «chuqurlik» deyishgan. $x\cdot y\cdot z$ ko'paytmani esa «hajm» deb atagan.

Albatta, bobilliklarda bizning hozirgi «tenglama» terminimiz bo'lgan emas.

Bizgacha etib kelgan mixxatlardan birida ushbu sistema uchraydi:

$$\begin{cases} \frac{y}{4}+x=7 \\ x+y=10. \end{cases}$$

Kvadrat tenglamalar

Bobilliklar manfiy sonni ham, kompleks sonni ham bilishmagan. Binobarin. ular $ax^2+bx+c=0$ ko‘rinishdagi tenglamalarni yechishda manfiy illizlarni hisobga olmagan.

Bizgacha etib kelgan ma’lumotlarga qaraganda, ular quyidagi ko‘rinishdagi kvadrat tenglamalarni yechishni bilishgan:

$$ax^2+bx=c \quad (1)$$

$$ax^2+c=bx \quad (2)$$

$$ax^2=bx+c \quad (3)$$

yoki

$$x^2+px=q \quad (1')$$

$$x^2+q=px \quad (2')$$

$$x^2=px+q \quad (3')$$

Lekin mixxatlarda $ax^2-bx=c$ yoki $x^2-px=q$ ko‘rinishdagi tenglamalar ham uchraydi. Bobilliklar bu tenglamalarning ildizlarini

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}+\frac{p}{2}$$

orqali ifodalashadi.

Matematika tarixchilari bobilliklar $x^2+px=q$ tenglamani yechishda

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

ayniyatlan foydalanishgan bo‘lsa kerak deb faraz qilishadi. U holda

$$\frac{x+y}{2}=\frac{p}{2} \text{ va } \frac{x-y}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ bo‘ladi.}$$

Demak, bobilliklar $(a\pm b)=a^2\pm 2ab+b^2$ formulalarni ham bilishgan deb xulosa chiqarishga haqlimiz.

Shu munosabat bilan ularda tenglamalar sistemasi qanday vujudga kelgan?-degan savol tug‘ilishi mumkin.Ehtimol, bu masala to‘g‘ri to‘trburchakning yuzi va perimetrini hisoblash bilan bog‘liq bo‘lgandir.Darhaqiqat, agar to‘g‘ri to‘rtburchakning eni va bo‘yi x va y ma’lum bo‘lsa, u holda uning yuzi $S=xy$, perimetri esa $2x+2y=P$ bo‘ladi.

Bundan $S=xy$ va $x+y=\frac{P}{2}$ sistema hosil bo‘ladi.Shuningdek, to‘g‘ri burchakli uchburchaklarning yuzi va gipotenuzasi ularning katetlari bo‘yicha quyidagicha hisoblashgan:

$$\begin{cases} xy=a \\ x^2+y^2=b. \end{cases}$$

Bobilliklar to‘liq kvadrat bo‘lmagan sondan kvadrat ildiz chiqarishni ham bilgan. Bunday hisoblashlar uchun ularda ushbu formula mavjud bo‘lgan:

$$\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a}.$$

Misol: $\sqrt{2}=1{,}25, \sqrt{3}=1{,}45, \sqrt{10}=3{,}10$ (tekshiring).

Bobilliklar geometriyasi

Bobilliklar ba’zi geometrik figuralarning yuzlari va ba’zi geometrik jismlarning hajmlarini hisoblashni bilishgan.Ularda ba’zan aytilgan hisoblashlar uchum maxsus umumiy qoidalar ham uchraydi.Ularning mixxatlarida esa ba’zi geometrik tushunchalarning ta’riflari. ayrim teoremalar ham bor.Ular ko‘proq muntazam ko‘pburchaklarning, segmentlarning yuzlarini va kesik piramidalarning hajmlarini o'rganishgan.Ularda taqribiy formulalar ham uchrab turadi.Masalan, ixtiyoriy to'rtburchakning yuzi uchun

$$S=\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$$

formula bor, bunda a,b,c,d-lar to'rtburchakning tomonlari.Muntatazam kesik piramidaning hajmi uchun

$$V_{kesik.pir}=\frac{a^2+b^2}{2}\cdot h$$

formula mavjud, bunda a^2-piramida ostki asosining, b^2- piramida ustki asosining yuzi, h-piramidaning balandligi.

Doiraning yuzi $S=\frac{c^2}{12}$ formula orqali hisoblangan, bunda c-doira aylanasining uzunligi.

Bu formula doira yuzini uning aylanasi bilan bog'lagani uchun ham diqqatga sazovor.Chunki bu bog'lanishda aylana uzunligining o'z diametriga nisbati, yani π ning qiymati taxminan 3 ga teng deb olingan.Lekin shuni eslatish lozimki, boshqa bir sopol taxtachada $\pi\approx 3{,}125$ deb olingan, chunki doiraning yuzi uchun $S=c\cdot\frac{d}{4}$ formula berilgan, bundagi d-doiraning diametri va $d=\frac{c}{3}$.

Xammurapi davriga doir bir mixxatda hozirgi biz «Pifagor teoremasi» deb ataydigan teoremaning butun sonlardagi uchliklari mavjud, ya'ni

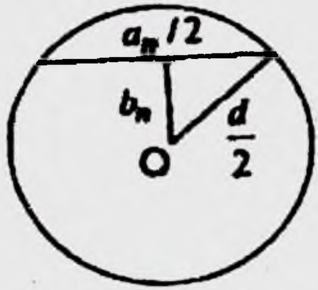
$$a^2+b^2=c^2$$

tenglikni qanoatlantiruvchi uchliklari – 60, 45 va 75; 72, 65 va 97; 3456, 3367 va 4825 va boshqa butun sonlar bor. Ma'lumki, bunday sonlarning eng birinchisi: 3, 4 va 5.

Bobilliklar muntazam beshburchak, oltiburchak va ettiburchak-larnnig yuzlarini hisoblashni bilishgan.Bunday ishlar uchun ularda maxsus jadvallar bo'lgan, u jadvallar $a_n\approx\frac{c}{n}$ taqribiy hisoblashga asoslanib tuzilgan, bunda a_n-muntazam n burchakning tomoni, c –

ko'pburchakka tashqi chizilgan aylananing uzunligi, n –ko'pburchak tomonlarining soni.

U holda $S = n \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{2} = \frac{n}{2} \cdot a_n \cdot \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$ (2-rasmga qarang).



2-rasm

Bu formuladagi d-doira diametri va u taxminan $\frac{c}{3}$ ga teng.

Ularning bu formulasining qanchalik to'g'ri ekanini aylanaga ichki chizilgan kvadrat misolida tekshirib ko'rishingiz mumkin.

$$\left(a_4 = R\sqrt{2}, b_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}, S = 4 \cdot \frac{R\sqrt{2} \cdot R\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 2R^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \right)$$

Endi bobilliklarning ba'zi geometrik masalalarini ham qaraylik.

1-masala. Doiraga teng yonli uchburchak ichki chizilgan.Uning yon tomoni b ga, asosi 2a ga teng.Doiraning radiusi topilsin(3-rasm).

Bu masalani keltirishdan maqsadimiz qadimda ham mana shu mazmundagi masalalar bor ekanligini o'quvchilarga yana bir karra eslatib qo'yishdan iborat. Bobilliklarning echimi hozirda biz ishlatadigan belgilashlarsiz va ancha uzundan-uzoq, shu sababli biz uning yechimini o'zimizning belgilashlarimizda keltiramiz.

3-rasm

$$\Delta ABD \text{ dan: } BD=h=\sqrt{b^2-a^2}$$

$$OD=h-R$$

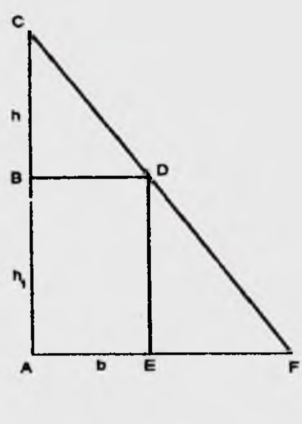
$$\Delta ADO \text{ dan } R^2=a^2+(h-R)^2 \Rightarrow R^2=a^2+h^2-2Rh+R^2$$

$$\text{yoki } a^2-2R\sqrt{b^2-a^2}+b^2-a^2=0 \Rightarrow -2R\sqrt{b^2-a^2}=-b^2;$$

$$R=\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}$$

2-masala. Ma'lum qalinlik va ma'lum balandlikdagi devorning tepasiga h balandlikdagi tayoq tik o'rnatilgan.Tayoqning ustki uchi ko'rinishi uchun devor yonida turgan odam devor ostidan qancha masofaga uzoqlashishi kerak?

Bu masalaning yechimi bizning belgilashlarda, lekin ularning yechish usulida quyidagicha (4-rasm):



4-rasm

h_1 -devorning balandligi, b-devorning qalinligi. h-tayoqning balandligi, x-odam devoriing tagidan siljishi lozim bo‘lgan masofa (bunda odamning bo‘yi e’tiborga olinmaydi).

$$S_{ACF} = S_{4<ABDF} + S_{BCD} + S_{FDE} ,$$

ya’ni $$\frac{1}{2}(b+x)(h_1+h) = bh_1 + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}xh ,$$

Bundan bh$_1$+bh+xh$_1$+xh=2bh$_1$+bh+xh$_1$.

Demak, $xh = bh_1$ yoki $x = \frac{bh_1}{h}$

Bu masalani hozirgi maktab o‘quvchisiga tavsiya etsak, u masalani yechishga, albatta uchburchaklarning o‘xshashligin itatbiq etgan bo‘lar edi. Darhaqiqat: $\Delta BCD \cong \Delta FDE$ dan $\frac{x}{h_1} = \frac{b}{h}$ yoki $x = \frac{bh_1}{h}$

5-§. Qadimgi yunon matematikasi

Qadimgi Yunonistonga hozirgi Yunoniston territoriyasidan tashqari O‘rta Er dengizidagi orollar va Kichik Osiyoning qirg‘oqlari ham kirar edi.Eradan oldingi VI-IV asrlarda Yunonistonda fan va madaniyat misli ko‘rilmagan darajada rivojlanib ketdi.Buning asosiy sababi quldorlik tuzumining quldorlik demokratiyasi tuzumi bilan almashishi edi.Bu demokratiyada faqat erkaklar qatnashar edi, qullar va ayollar qatnashmas edi.Mana shu davrda yunon matematiklari elementar geometriyani, butun va ratsional sonlar arifmetikasini yaratdi, nisbatlar nazariyasining asosini berishdi,yuzlar va hajmlarni hisoblash metodi bo‘lgan «qamrash metodini» va limitlarning elementar nazariyasini yaratishdi.

E.o.V asrning o‘rtalarida o‘lchovdosh bo‘lmagan miqdorlarning mavjudligi kashf etildi.Mana shu asrning oxirida hozir biz «algebra» deb ataydigan fan yaratildi va birinchi marta irratsionalliklar sinflashtirildi. Pergamlik Appoloniy xuddi shu davrda konus kesimlar (ikkinchi tartibli egri chiziqlar)ni kashf qildi va uni rivojlantirdi.

Yunonistonda matematika miqdor jihatidan emas, balki sifat jihatidan ham o‘sdi.Matematikaga qatiy mantiqiy isbot kiritildi, uning ayrim bo‘limlari esa deduktiv qurildi.

Yunonistonda fan va madaniyatning bunchalik tez o‘sishi e.o.VI-IV asrlarda bu erda ishlab chiqarishning haddan tashqari o‘sib ketishi bilan bog‘liq.Mana shu asrlarda Yunonistonda grajdanlar va harbiy qurilishlar juda katta yutuqlarga erishdi.Masalan, e.o.VI asrda Samos orolida suv o‘tkazgich qurildi. Bu qurilish o‘zining quyidagi qiyinchiliklari bilan diqqatga sazovor edi. Birinchidan, suv o‘tkazgich bir kilometrlik tunel orqali o‘tishi, ikkinchidan, qazish ishlari o‘sha bir kilometrlik tunelning har ikki tomonidan boshlab olib borilishi zarur edi. Bu qurilish muvaffaqiyatli ado etildi, quruvchilar to‘g‘ri va aniq uchrashishdi.

Bunday ishlarni bajarishda triangulyatsiya metodidan foydalanish zarur ekanimi keyinchalik aleksandriyalik matematik Geron (I asr) bayon qilib berdi.

IZOH. Triangulyatsiya - geodezik punktlarning holatini Er ustida yonma-yon joylashgan uchburchaklar sistemasi yasash bilan aniqlash. Bu uchburchaklar bitta tomonining uzunligi va bitta burchagi o‘lchanadi,qolgan tomonlari esa trigonometriya yordamida topiladi.

E.o.V asrdagi fors-yunon urushidan so‘ng Afinada katta qurilish ishlari boshlab yuborildi, chunki o‘sha urushda Afinaning markazi kuyib kulga aylangan edi.V-1V asrlarda yoylar, toshlarni otish uchun katapult(manjani?)lar, yadro (to‘p o‘qlari)ni irg‘itish uchun ballistlar (o‘q harakati qonuni) kashf etildi.

Janubiy Italiyaning Tarent shahridan chiqqan Arxitni artileriya sohasidagi birinchi injener (muhandis) deb atash mumkin.

E.o.VI-IV asrlarda Yunonistonda ilmiy astronomiya, mexanikaning rivojlanishi va nazariy fizikaning ba’zi masalalarini vujudaga kelishi matematika tarixi uchun muhim ahamiyatga ega. Dastlab astronomiya aniq vaqtni topish uchun kerak edi, chunki dengizga suzish ana shuni taqozo qilar edi.Kalendar tuzish ham oson ish emas edi,chunki qanchadan-qancha hisoblash ishlari o‘tkazish lozim edi. Qadaimgi yunon astronomi Meton (e.o.V asr) 235 oy 19 quyosh yiliga barobar ekani aytdi.

E.o. VI asrda Pifagor maktabida Yerning shakli hakidagi goyalar olga surildi. E.o. IV asrla Evdoks quyosh sistemasining birinchi geometrik modelini tuzdi. Yunonistonda qurilgan birinchi astronomik observatoriyaning rahbari ham Evdoks bo'lsa ajab emas. Osmon yoritgichlarini sistemali kuzatish birinchi marta mana shu observatoriyada boshlangan.

Mexanikaning rivojlanishi ham ana shu davrga to'gri keladi Mexanika dastlab sodda mashinalar – pushang, tarozi va bloklarni o'rgangan. E.o. V asrning oxirlarida mexanikaga matematika tadbiq qilina boshlangan. Bunday deyishimizning sababi e.o. IV asrla Aristotel maktabida «Mexanika muammolari» deb nomlanuvchi to'plam yaratilgan .Unda statikaning asosiy jumlalari bayon etilgan.

Yunoniston matematikasi manbaalari

Yuqorida bayon etilganlardan e.o.VI-IVasrlarda matematika tarixi bizning fanimiz uchun katta ahamiyatga ega ekanligi ko'rinadi. Shunisi borki, biz qaramokchi bulgan davrga tegishli adabiyotlar hammasi ham bizgacha etib kelmagan. Masalan. uchinchi va ikkinchi darajali irratsionalliklar nazariyasining birinchi asoschisi Teetet (e.o.V asr)ning asarlari, nisbatlar umumiy nazariyasining asoschisi, «Qamrash metodi»ning kashfiyotchisi Evdoks (e.o. IVasr)larning asarlari butunlay yuqolib ketgan. Arxit (e.o.V asr), Gippokrat (e.o. V asrning o'rtalari) ning asariarilan ayrim parchalar ulardan so'ng, ular vaqtida yashagan matematiklarning asarlari orasida saqlangan.

Yunoniston matematikasining manbaalari quyidagilar hisoblanadi:

1. Evklidning «Negizlar»i (taxminan e.o. 300-yil.)
2. Aristotel (e.o.384-322-yillar) va Platon(e.o.429-348-yillar) ning asarlari.
3. Papp (e. III asri), Prokl (e. V asri) va Simplikiy (e.VI asri) asarlari.

Sanab o'tilgan asarlar orasida eng muhimi Evklidning «Negizlar» asari hisoblanadi. Lekin shuni eslatib o'tish lozimki, «Negizlar»ning barcha materiallari Evklid tomonidan qayta ishlangan bo'lishi mumkin.

Ma'lumki, Aristotel va Platonlar matematik emas, ammo ular o'zlarini ko'pgina falsafiy fikrlarini matematika yordamida bayon etishgan. Aristotel esa matematikaning aksiomalari va boshqa obyektlariga o'z munosabatini bildirgan.

Papp, Prokl va Simplikiylarning asarlari ulardan oldin yashagan matematiklarning asarlariga suyanishi, ayrim o'rinlarda ularning asarlaridan katta-katta parchalar keltirishlari bilan ahamiyatli.

Sanoq sistemasi (tizimi)

Yunonlarda sanoq sistemasi (tizimi) mavjud bo'lgan.Ammo ular qadimgi davrlarda kichik sonlarni barmoqlarda, katta sonlarni esa toshlar («psefos»lar) yordamida hisoblashgan. 1000 dan yuqori sonlar «juda ko'p» deb atalgan. Albatta, barcha xalqlardagi singari yunonlarda ham katta sonlar bilan amallar bajarish va ularni tasavvur qilish oson bo'lgan emas. E.o. III asrda Arximed «qum donalarini hisoblash» («Psammit») nomli asar yozib «eng kata son»ning mavjud emasligini ko'rsatib berdi.

Yunonlar hisoblash vositasi sifatida abakdan foydalagan. Qadimgi xalqlar bir narsani hisoblaganda hisoblashning turli xil vositalari (tosh, suyak va boshqalar)dan foydalanishgan. Abstrakt hisobning vujudga kelishida kishilar barmog'i katta rol o'ynagan. Demak, barmoqlar hisoblashning birinchi vositasi bo'lgan.

Keyinchalik, kishilar katta sonlarni hisoblashni o'rgan-ganlaridan so'ng barmoqlar bu talabga javob bermay qo'ygan, uning o'rnini ancha takomillashgan asbob- abak egallagan. Bu asbob barcha xalqlarning amaliy hisoblashlarning rivojlanishida ijobiy rol o'ynaydi.

Abak so'zi yunoncha bo'lib, u «chang» degan ma'noni bildiradi. Abak asbobi esa hisoblash taxtasidan iborat. Uning takomillashgan formasi hozirda hisobchilar ishlatadigan cho't.

Uning «chang» degan ma'noni berishining sababi qadimgi yaxudiylar va arablar katta sonlar ustida arifmetika amallarini bajarishda taxta olib uning ustiga tuproq sepgan va sonlarni cho'p yordamida taxtaga yozib amallar bajargan. Hosil bo'lgan raqamlarning keraksizlarini o'chirib yuborishgan. Shunday asbob yordamida hisoblashlarni bajarishga bag'ishlab, Eron va

Ozarbayjondan chiqgan olim Abu Jafar Muhammad ibn Muhammad ibn Xasan Nasriddin at-Tusiy (1201-1274), «Taxta va tuproq yordamida hisoblash» nomli asar yozgan.

Umuman ishlatilayotgan hisoblash sistemasining xona birliklari uchun joy ajratilgan har qanday asbobni abak deb atash mumkin.

Professor I.N.Veselovskiyning fikricha abak qadimgi Bobilda ham mavjud bo'lgan.

Rimliklar tuproq sepilgan va ayrim ustunchalarga bo'lingan taxtadan foydalanishgan.Ustunchalarning tepasiga o'ngdan chapga qarab birlar, o'nlar, yuzlar va hokazo, ya'ni $L, X, C, M, \ldots$ yozilgan.

Abakning yunonlarda ham ma'lumligi haqida e.o. V asrda yashagan tarixchi Geradot habar beradi. 1846-yili yunonlarning Salamini orolidan 105x75sm o'lchamli marmar abak topilgan. Yunonlarda sonlarnining belgilashning ikki usuli mavjud edi.

1. Attik (er.avv. VI asr) (1-jadval, 8-ustun)

1=1; 5=Г; 10=Δ; 100=N; 1000=M.

Bu belgilar yordamida istalgan sonni ifoda eta olishgan. Masalan, 325 =NNNΔΔГ ; 500=$Г^{н}$,5000=$Г^{x}$ va hokazo.

2. Ioniyaliklar sonlarni belgilashda yunon alifbosining 27 ta harfidan foydalanishgan (2-jadval, 1-ustunga qarang).

Ioniyaliklar tekstda sonni so'zdan farqlash uchun sonni ifodalovchi harfning ustiga chiziqcha tortib qo'yishgan. Masalan, yuqoridagi 325 ioniyaliklar belgilashida $\overline{\tau\kappa\varepsilon}$ ko'rinishida bo'lar edi.

6-§. Yunonistonda nazariy fanlarning vujudga kelishi

Yunonistonda fanning vujudga kelishini odatda ioniya naturfilasofiya maktabi (e.o. VI asr) bilan bog'lashadi. Bu maktabning asoschisi miletlik Fales, uning o'quvchilari-Anaksimen, Anaksimindrdir.

Anaksimen «Er silindr shaklida» degan g'oyani aytgan. Bu o'sha davr fani uchun juda ham katta olg'a siljish edi.

Falesning o'zi esa e.o.585 yilning 28 mayida ro'y berishi lozim bo'lgan quyosh tutilishini oldindan aytib bergan.

Anaksimandr birinchi bo'lib geografik karta tuzgan. Geometriya bilan birinchi bo'lib shug'ullangan ham ioniyaliklar bo'lgan. Fales quyidagi ikki muammoni hal qilib bergan:

1) Qirg'oqdan dengizdagi kemagacha bo'lgan masofani aniqlash usulini;

2) Narsaning balandligini uning soyasiga qarab aniqlashni.

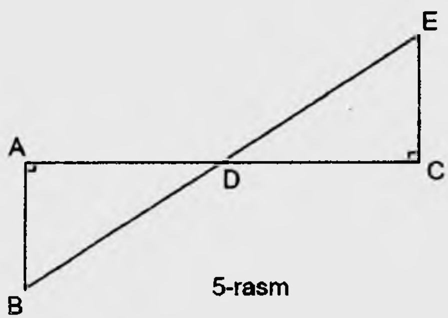
U narsaning soyasini quyosh nurlari 45 daraja burchak ostida tushganda, ya'ni predmetning balandligi uning o'z soyasiga teng bo'lgan paytda o'lchagan.

Birinchi muammo quyidagicha hal qilingan: qirg'oqda A nuqta tanlangan, undan dengizdagi AB (hayoliy)to'g'ri chiziq o'tkazilgan (5-rasm). Shu A nuqtadan AB to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib AC to'g'ri chiziq o'tkazilgan. C nuqtadan $CE \perp CA$ yasagan va AC ning o'rtasi D nuqtaga o'lchov tayog'i o'rnatilgan. CE to'g'ri chiziq bo'ylab E,D,B nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotguncha yurilgan. Shunda $\angle DCE = \angle DBA$ bo'lgan, $\angle C = \angle B = 90^0, \angle CDE = \angle ADB$ - vertikal burchaklar va $CD = DA$. EDC va BAD uchburchaklar tengligiga ko'ra $CE = AB$ bo'ladi.

410-485-yillarda yashagan Prokl quyidagi teoremalarning isbotlarini ham birinchi bo'lib Fales berganligini yozadi.

1. Teng yonli uchburchaklarning asoslaridagi burchaklari tengdir.

2. Bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagi ikkinchi uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga mos ravishda teng bo'lsa, bu uchburchaklar tengdir.



5-rasm

3.Ikki to'g'ri chiziqning kesishishidan hosil bo'lgan vertikal burchaklar tengdir.

4.Doiraning diametri uni teng ikki qismga ajratadi.

Ioniyaliklarning naturfilosofiya maktabi e.o. 494-yilgacha ishlab turdi. E.o. 530-yili esa Yuionistonda ikkinchi yangi naturfilosofiya maktabi vujudga keldi. Bu mashhur matematik Pifagor maktabi edi. Maktabning asoschisi Pifagor (e.o. VI asr) Samos orolida tug'ilgan va e.o. 530 yili Kroton (Janubiy Italiya)ga ko'chib kelgan va shu erda pifagorchilar ittifoqini tuzgan. Bu ittifoq ilmiy, diniy va siyosiy uyushmadan iborat bo'lgan. Ittifoq yaratgan kashfiyotlar sir tutilgan va ularning ittifok boshlig'i Pifagorning nomiga yozilgan.

Pifagorchilar astronomiya, geometriya, arifmetika (asosan sonlar nazariyasi), garmoniya (musiqa nazariyasi) bilan shug'ullanishgan.

Geometriyada ular to'g'ri chiziqli figuralar-to'g'ri to'rtburchak, uchburchak, parallelogramm va trapetsiyalarning xossalari va shu figuralarning yuzlarini hisoblash bilan shug'ullanishgan. «Pifagor teoremasi» deb ataluvchi teoremani isbotlashgan.

Prokl pifagorchilarning matematika sohasidagi yutuqlarini ta'riflab mana bunday yozadi: «Pifagor bu fanni (ya'ni geometriyani) erkin ta'lim formasiga aylantirdi. Pifagor bu fanni uning asosidan o'rgandi va teoremalarni sof mantiqiy hosil qilishga urindi. U irratsionallikni va beshta kosmik jismni kashf etdi».

Dastlab pifagorchilar hamma kesmalar umumiy o'lchovga ega, ya'ni qandaydir ixtiyoriy ikki kesma olmang ularning nisbatini butun sonlarda ifodalash mumkin deb o'ylashar edi. Demak, ularning fikrichametrik geometriya ratsional sonlar arifmetikasidan iborat edi.

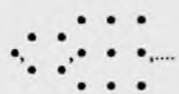
Pifagor kashf etgan beshta kosmik jism – beshta muntazam ko'p yoqli – tetraedr (muntazam uchburchakli piramida; to'rtta yog'i, oltita qirrasi. To'rtta uchi bor), oktaedr (sakkizta uchburchakli yog'i, o'n ikkita qirrasi va oltita uchi bor), geksaedr (kub-oltita yog'i, o'n ikkita qirrasi va sakkizta uchi bor), ikosaedr (yigirmata uchburchakli yog'i. O'ttiztaga qirrasi va o'n ikkita uchi bor) va dodekaedr (beshburchakli o'n ikkita yog'i, o'ttizta qirrasi va yigirmata uchi bor).

Pifagorchilar musiqa nazariyasi bilan shug'ullanib, ovozlarning sifati tor uzunligining miqdoriy farqiga bog'liq degan xulosaga kelgan. Agar tor uzunliklari 1/2 ,2/3 va 4/3 kabi nisbatda bo'lsa, musiqiy oraliqlar yaxshi, ovozlar jarangdor, boshqa hollarda jarangdor emas. Ular o'rgangan garmoniyada butun sonlar va ularning nisbatlari qatnashishi ko'rinib turibdi.

Ular mana shu garmoniyani o'rganish natijasida olamning qonuniyatlarini sonlar yordamida ifodalash mumkin degan xulosaga kelgan. Ularning arifmetikaga qiziqishlarining sababi ham mana shunda.

Butun sonlar arifmetikasi

Pifagorchilar ta'rifiga ko'ra son birliklar yig'indisidan iborat, ya'ni faqat musbat butun son mavjud. Birlik bo'linmas va u nuqta bilan tasvirlanadi. Shu sababli ham pifagorchilar maktabida «figurali sonlar» tushunchasi paydo bo'lgan. Masalan, «kvadrat sonlar»- 1, 4, 9.. . . quyidagicha tasvirlangan:



U hozirgi bizning belgilashlarimizda quyidagicha ifodalanuvchi sonlar:

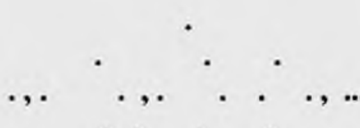
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

«Uchburchakli sonlar» 1,3,6,... quyidagicha tasvirlangan;

Bu sonlarning hozirgi ifodasi mana bunday:

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

«Ko'pburchakli sonlar». Masalan, «Beshburchakli sonlar»- 1,5,12... quyidagicha:



Umumiy ifodasi:

$$1+4+7+...+(3n-2)=\frac{(3n-1)n}{2}$$

Albatta, pifagorchilar sonlarning xossalarini o'rganayotib birinchi bo'lib ularning juft-toqligiga, tub yoki murakkabligiga ahamiyat berishdi va ularning xossalarini o'rganishdi.Ular abc ko'rinishdagi sonlarni «yassi sonlar» deb, uchta – abc sonlarning ko'paytmasi tarzida ifodalash mumkin bo'lgan sonlarga «jismoniy sonlar» deb atashadi. Ko'paytma tarzida ifolalash mumkin bo'lgan sonlarni ular «chiziqli sonlar» deb atashgan. Pifagorchilar birinchi bo'lib juft va toq sonlar nazariyasini, ya'ni ikkiga bo'linish nazariyasini yaratdi: ikki sondan hech bo'lmasa biri ikkiga bo'linsa, ularning kўpaytmasi ham ikkiga bo'linadi .

Demak, ular ixtiyoriy butun N sonni $N=2^K N_1$, ko'rinishda tasvirlash mumkin ekanini ko'rsatishdi, bunda N_1-toq son, k=0,1,2,... Pifagorchilar mukammal sonlar o'z bo'luvchilarining yig'indisiga teng sonlar bilan ham shug'ullangan. Masalan, $6=1+2+3;;28=1+2+7+14$

Pifagordan so'ng yashagan Evklid o'zining «Negizlar» nomli asarida (VII- kitob) ungacha mukammal sonlar to'rttga bo'lganini yozadi: 6; 28; 496; 8128.

Evklid $2^{n+1}-1$ -ko'rinishdagi son tub son bo'lsa, $2^n(2^{n+1}-1)$ ko'rinishdagi son mukammal son bo'lishini isbotlagan.

L.Eyler esa bu sonlar bilan shug'ullanib $2^n(2^{n+1}-1)$ ko'rinishdagi mukammal sonlar juft son ekanini isbotladi.

Eylerdan so'ng ham mukammal sonlarga qiziquvchilar ko'p bo'lgan. Hozirgi kunda mukammal sonlardan 24 tasi aniqlangan:

1. $2(2^2-1)=2.3=6$
2. $2^2(2^3-1)=4.7=28$
3. $2^4(2^5-1)=16.31=496$
4. $2^6(2^7-1)=64.127=8128$
5. $2^{12}(2^{13}-1)=2^{12}.8191$

---

17. $2^{2280}(2^{2281}-1)$
18. $2^{3216}(2^{3217}-1)$

24-mukammal son 1978-yili elektron hsoblash mashinasida topilgan. Mashina uni hisoblashga 40 minut vaqt sarflagan. Uning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$2^{19136}\left(2^{19137}-1\right)$$

Bu sonning raqamlarini yozish uchun 228 kilometrli qog'oz lenta sarflangan ekan.

Bunlan tashqari, pifagorchilar inoq sonlar deb atalgan sonlar bilan ham shug'ullanishgan. Agar ikki sondan birining bo'luvchilarining yig'indisi (unga sonning o'zi kirmaydi) ikkinchi songa, ikkinchi son bo'luvchilarning yig'indisi (bunda ham sonning o'zi kirmaydi) birinchi songa teng bo'lsa, bu sonlar inoq sonlar deb aytiladi, masalan, 220 bilan 284.

220 ning bo'luvchilarining yig'indisi

1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284.

284 ning bo'luvchilarining yig'indisi: 1+2+4+71+142=220.

Keyinchalik inoq sonlar masalasi bilan juda ko'p yirik matematiklar shug'ullanishgan.Jumladan, Ferma (1601-1665), Dekart (1596-1650), Eyler (1707-1783).

Ikkinchi juft inoq sonlarni Ferma topgan 17 296 va 18 416.

Uchinchi juftini esa Dekart aniqlagan: 9 363 584 va 9 437 056.

1867-yili 16 yoshli N.Paganini (mashhur skripkachi Paganining otdoshi) Ferma va Dekartdek buyuk matematiklar sezmay qolgan bir juft inoq sonni topgan: 1184 bilan 1210.

Inoq sonlar masalasiga qiziquvchilar hozir ham ko'p. Shu kungacha topilgan inoq sonlar jufti 600 ga yaqin.

Pifagorchilar $x^2+y^2=z^2$ aniqmas tenglamani butun sonlardagi juda ko'p yechimlarini ham topishgan. Ular bu eechimlarni «Qanday topishgan?»- degan savol tug'iladi. Matematika tarixchilarining gipotezalariga qaraganda ular o'z yechimlarini quyidagi qoidaga ko'ra topgan bo'lishlari, ehtimol:

$$x=\frac{1}{2}\left(m^2-1\right), y=m; z=\frac{1}{2}\left(m^2+1\right)$$

Bunda m – butun toq son.

Pifagorchilarga ikki butun sonning o'rta arifmetik qiymati: $c = \frac{a+b}{2}$

O'rta geometrik qiymati: $q = \sqrt{a \cdot b}$

O'rta garmonik qiymati: $k = \frac{2ab}{a+b}$ ham ma'lum edi.

Ma'lumki, ikki sonning o'rta arifmetik qiymati arifmetik pogressiya bilan bog'liq, chunki $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Pifagorchilar arifmetik va geometrik progressiyalarning dastlabki n ta hadlari yig'indisi uchun formulalarni ham bilishar edi.

O'lchovdosh bo'lmagan kesmalar

O'lchovdosh bo'lmagan kesmalarning kashf etilishi matematikada muhim burilish bo'ldi. U Pifagor sistemasiga, ya'ni olamning asosini sonlar tashkil qilishiga va faqat butun sonlar mavjud degan aqidaga zarba berdi. Bu esa matematikada yangi juda ham nozik nazariyalarning yaratilishiga olib keldi. O'lchovdosh bo'lmagan kesmalarning kashf etilishi XIX asrda N.I.Lobachevskiy (1792-1856) tomonidan kashf etilgan noevklid geometriya bilan yoki XX asrda A.Eynshteyn (1879-1955) kashf etgan nisbiylik nazariyasi bilan taqqoslash mumkin.

Aristotel o'zining «Birinchi analitika» nomli asarida; «Agar kvadratning tomoni va dioganali umumiy o'lchovli deb faraz qilinsa, toq son juft songa teng bo'lib qolar edi», - deb yozadi.

Aristotelning bu gaplaridan o'lchovdosh bo'lmaganlik, ya'ni ikki kesmaning umumiy o'lchoviga ega emasligini yo'sha paytda ham teskarisini faraz qilish bilan isbot etganligi ko'rinadi. Bu isbot juft-toqlikka asoslanganligi uchun uni Pifagor maktabiga tegishli deyish mumkin.

Faraz qilaylik, AB va AC kesmalar umumiy o'lchovli bo'lsin (6-rasm).

6-rasm

U holda bu kesmalarning nisbati ikkita butun sonning nisbati kabi bo'ladi: AC:AB= m:n

Bunda m ham n ham juft emas, ya'ni ular ikkiga qisqarmaydi.

$$AC^2 \div AB^2 = m \div n$$

Pifagor teoremasiga ko'ra ΔABC dan:

$$AC^2 = 2AB^2$$

Demak, $m^2 = 2n^2$ (1)

Binobarin, m -juft, u holla n ham juft. Demak, n toq. Juft m ni 2t desak va uni (1) tenglikka olib borib qo'ysak:

$$4t^2 = 2n^2$$

Bundan n^2ning juft ekani kelib chiqadi.Demak, n ham juft ekan.Biz qarama-qarshilikka duch keldik, chunki biz kesmalar umumiy o'lchovli deb faraz qigan edik, bu noto'g'ri, ular o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar ekan.

Geometrik algebra

O'lchovdosh bo'lmaganlikning kashf etilishi Yunoniston matematikasiga arifmetika bilan geometriya orasidagi munosabatni qayta qarab chiqishni taqozo qilib qoldi.Yunon arifmetikasi butun sonlarga asoslangan edi. Ratsional sonlar esa butun sonlar jufti deb qaralarlar edi.

Ikkita kesma nisbatini ikkita butun sonning nisbati deb qarab bo'lmaslik pifagorchilarning sistemasini barbod etdi. Endi bundan qutulishning chorasini topish lozim edi.Buning uchun quyidagi imkoniyatlar mavjud edi:

1) son tushunchasini har qanday ikki kesma nisbatini ifodalaydigan darajada kengaytirish;

2) matematikani ratsional sonlar arifmetikasi asosida emas, balki geometriya asosida qurish. Bu holda albatta, geometrik kattaliklar uchun algebraik amallarni oldindan aniqlab olinadi;

3) o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar haqidagi nazariyani mantiqiy tuzishdan voz kechish va unchalik qat'iy bo'lmagan irratsionallik bilan amallar bajarishga o'tish lozim edi.

Birinchi imkoniyat o'sha davr yunon matematikasi uchun qiyin edi.

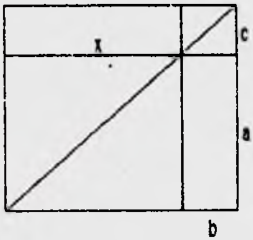
Uchinchi imkoniyat yunonlar uchun qulay emas edi, chunki bu imkoniyat ularni matematikani deduktiv qurishdan voz kechtirar edi.

Yunonlar ikkinchi yo'lni tanlashdi. Bu esa strategiya nuqtai-nazaridan noto'g'ri edi.Chunki dastlab matematika biroz rivojlandi. Masalan, figurali sonlar hosil bo'ldi, Evklid «Negizlar» kitobining ikkinchisi vujudga keldi. Keyinchalik esa rivojlanmadi.

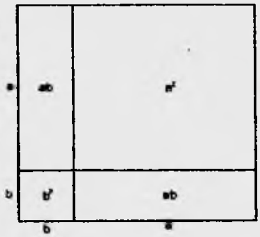
Dastlab kesmalar ustida amallar o'rnatildi. Ikki kesmani qo'shish bir kesmaning davomiga ikkinchi kesmani qo'yish deb qaralsa, bir kesmadan ikkinchi kesmani ayirish katta kesmadan kichigiga teng qismni tashlab yuborish deb qaraldi. Kesmalarni ko'paytirish ikki o'lchovli obrazga olib keldi, ya'ni *ab*; *a* va *b* kesmalarning ko'paytmasi deb tomonlari *a* va *b* ga teng to'g'ri to'rtburchakning yuzi qaraldi.Uchta kesmaning ko'paytmasi parallelepipedning hajmini berar edi.Yunon matematikasida bundan ko'p kesmaning ko'paytmasi qaralmas edi. Bo'lish bo'linuvchi kesma bo'luvchi kesmadan katta bo'lgandagina mumkin edi. Bu amal yuzlarni yonma-yon qo'yish masalasiga teng kuchli edi.

Masalan, ular *ab* kesmani *c* kesmaga bo'lish uchun c kesmaga yuzi *ab* to'g'ri to'rtburchakning yuziga tengdosh to'g'ri to'rtburchakning yuzini yonma-yon qo'yish deb bilgan.Bu masala *ab* va *bc* to'g'ri to'rtburchaklarning (7-rasm) yonma-yon qo'yish va *bc* to'g'ri to'rtburchakning diagonalini *b* tomonning davomi bilan kesishguncha davom ettirishdan hosil bo'lgan yangi to'g'ri to'rtburchakni yasashdan iborat. U holda *ab* va *cx* to'g'ri to'rtburchaklar tengdosh va masala hal bo'ldi: $ab=cx$.

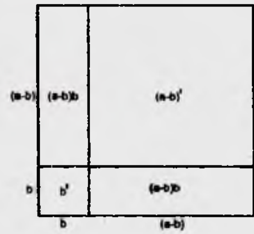
Yuzlarini yonma-yon qo‘yish metodi chiziqli tenglamalarga keltiriladigan masalalarni yechish imkonini berdi va parabolik masala deb yuritildi. Chunki parabola yunoncha so‘zidan olingan bo‘lib, yuzlarini yonma-yon qo‘yish yoki tirkab qo‘yish ma’nosini anglatadi.



7-rasm.



8-rasm.



9-rasm.

Algebraik ayniyatlarni asoslash ham geometrik algebraga taaluqli edi. Masalan, 8,9 - rasmlarda $(a+b)=a^2+2ab+b^2$ va $(a-b)=a^2-2ab+b^2$ ayniyatlar tasvirlangan.

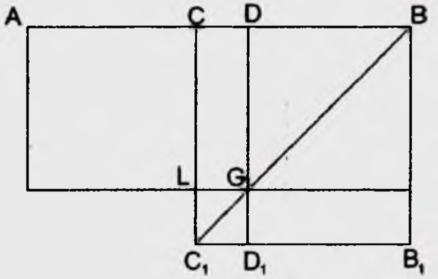
Kvadrat tenglamaga teng kuchli masalalarni yechish

Yuzlarini yonma-yon qo‘yish metodi kvadrat tenglamaga olib keluvchi masalalarga ham tadbiq qilingan. Bunday masalalarga qadimdan ma’lum bo‘lgan «oltin kesim» deb atalgan masala, ya’ni a kesmani $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$ tenglikni qanoatlantiradigan ikki x va a-x kesmaga ajratish, muntazam ko‘pburchakli figuraning qirrasini unga tashqi chizilgan sharning diametri orqali ifodalash va boshqa masalalar kiradi.

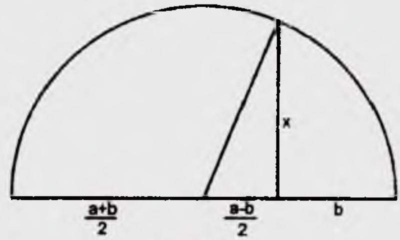
Biz quyidagi masalalarni qaraylik:

1) berilgan *ab* to‘g‘ri to‘rtburchakka tengdosh kvadrat yasalsin.

Masalaning mohiyati *ab* to‘g‘ri to‘rtburchakni ushbu kvadratlar ayirmasi $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ ga almashtirish, so‘ngra Pifagor teoremasini qo‘llashdan iborat(10-rasm).



10-rasm.



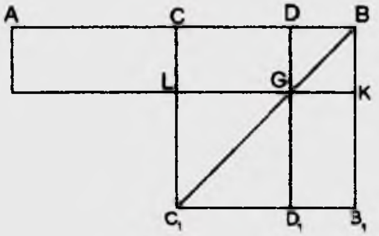
11-rasm.

$$AD \cdot DG = CLGD_1B_1BC = CB^2 - LG^2$$

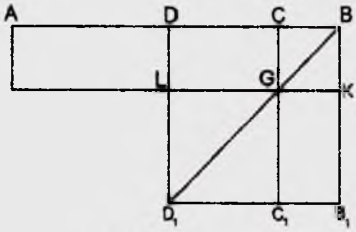
Bu yerda AD $=a$, DG$=b$ va LG$=LC_1$=x

Izlanayotgan x kesmani yasash quyidagi chizmadan yaqqol ko'rinadi (11-rasm), Bu yasash ham a:x=b:x o'rta geometrik miqdorni yasashga asoslangan.

2) berilgan (AB=a) kesmaga yuzi ma'lum ($S=b^2$) to'g'ri to'rtburchakni shunday qo'yish lozimki, yuzning (AK) to'liq to'g'ri to'rtburchak uchun etishmaydigan qismi ($DK=x^2$) kvalratlan iborat bo'lsin (12-rasm).



12-rasm.



13-rasm.

Masala shartidan: $b^2=(a-x)x$ ammo $(a-x)x=CLGD_1B_1BC$

Pifagor teoremasi yordamida avval $\frac{a}{2}-x$ kesma, so'ngra x kesma izlanadi. Yuzlarini yonma-yon qo'yishning bu holi elliptik hol deyiladi. Chunki ellips so'zi yunoncha ἔλλειψις so'zidan olingan bo'lib, «yetishmaslik» ma'nosini anglatadi.

3) berilgan ($AB=a$) kesmaga (13-rasm) yuzi (S=b^2) ma'lum bo'lgan (AK) to'g'ri to'rtburchakni shunday qo'yish lozimki

(AG) to'g'ri to'rtburchakdan ortiq ($BK=x^2$) yuz kvadratdan iborat bo'lsin.

Demak, $b^2=(a+x)x$, ammo $(a+x)x=CLGB_1D_1DC=(\frac{a}{2}+x)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$, binobarin $b^2=(\frac{a}{2}+x)^2-(\frac{a}{2})^2$. Bundan avval Pifagor teoremasiga ko'ra $\frac{a}{2}+x$ va x kesmalarni yasaladi. Yuzlarini yonma-yon qo'yishning bu holi giperbolik hol deyiladi. Chunki giperbola so'zi yunoncha υπερβολη' so'zidan olingan bo'lib, «ortiqchalik» ma'nosini anglatadi. O'z-o'zidan ma'lumki, masalaning yechimi kesmalar bilan bog'liq bo'lganidan, kvadrat tenglamaning musbat yechimi topiladi. Mana shu hol ko'pincha masala shartiga chegara qo'yishga olib keladi. Demak, geometrik algebrani tatbiq etish sohasi juda tor, obyektning o'lchovi ikkidan yuqori emas. Masalalarni yechish vositasi esa chizg'ich va sirkul. Bu asboblarning yasashga doir masalalarni yechishdagi imkoniyat juda kam.

7-§. Chizg'ich va sirkul yordamida yechib bo'lmaydigan qadimgi uch masala

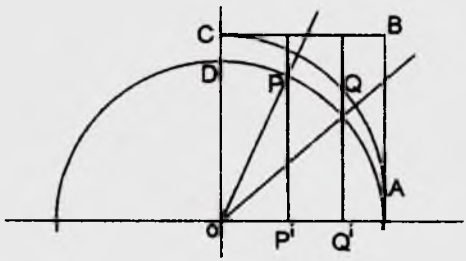
Sirkul va chizg'ich yordamida yechib bo'lmaydigan qadimdan bizga ma'lum uch masala mavjud. Ulardan birinchisi, ixtiyoriy burchakni teng uch bulakka ajratish, bu masalani burchak triseksiyasi ham deb atashadi. Ikkinchisi – doirani kvadratlash, ya'ni yuzi berilgan doraning yuziga teng kvadrat yasash. Uchinchisi esa kubni ikki hissalash, ya'ni hajmi berilgan kub hajmidan ikki marta ortiq deb kub yasash.

BIRINCHI MASALA. Berilgan ixtiyoriy burchak teng uch qismga ajratilsin.

IZOH: yuqorida aytilgan «masalalarni yechib «bo'lmaydi» deganda «chizg'ich va sirkul yordamida aniq yechib bo'lmaydi», - deb tushunmoq kerak. Bu masalalarni chizg'ich va sirkuldan tashqari qo'shimcha masalalar ishlatish bilan taqribiy yechish mumkin. Quyida biz ana shunday qo'shimcha vositalar yordamida yechishga urinishlar va ularning taqribiy yechimlarini keltiramiz.

Birinchi bo'lib, bu masalani Gippiy (e.o. V asrda yashagan yunon matematigi) kvadratrisa deb atalgan egri chiziqni tatbiq etish bilan yechishga harakat qilgan.

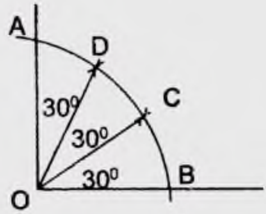
Agar AB to'g'ri chiziq OC holatni olguncha o'z-o'ziga parallel qolib harakatlansa, bu vaqt orasida OA nur ham O nuqta atrofida harakatlansa, bu to'g'ri chiziq bilan nurning kesishishi nuqtalarining geometrik o'rni kvadratrisa (14-rasm) bo'ladi. Aniqrog'i bu kvadratrisaning bir qismidan iborat bo'ladi.



14-rasm.

Agar $OA = a$ deyilsa, kvadratrisaning to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasidagi tenglamasi $y = x \cdot ctg\frac{\pi x}{2a}$ bo'ladi, bundan $y = OD = \lim\limits_{x \to 0} ctg\frac{\pi x}{2a} = \frac{2a}{\pi}$ hosil bo'ladi. Bu egri chiziqni tatbiq etib ROA burchakni teng uch qismga bo'lish uchun OA ga PP' perpendikularni tushiramiz, so'ngra $AQ' = \frac{1}{3}AP'$ kesmani yasaymiz, $QQ' \parallel PP'$ ni kvadratrisa bilan Q nuqtada kesishguncha o'tkazamiz. U holda $\angle QOA = \frac{1}{3}\angle POA$ bo'ladi.

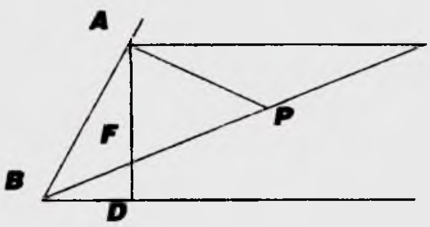
Shu o'rinda o'quvchilarga to'g'ri burchakni chizg'ich va sirkul yordamida aniq uch qismga ajratish mumkinligini eslatib o'tamiz (15-rasm).



15-rasm

Buning uchun to‘g‘ri burchakning uchiga sirkul oyog‘ini qo‘yib, ma’lum oraliq bilan burchak tomonlarini kesadigan yoy chizamiz. Tsirkul oralig‘ini o‘zgartirmasdan yoyning burchak tomonlari bilan kesishish nuqtalariga sirkul uchini qo‘yib, oldingi yoyni kesamiz. Kesishish nuqtalarini burchak uchi bilan tutashtiramiz. Burchak teng uchga bo‘linadi.

Ixtiyoriy burchakni teng uch qismga ajratishning ikkinchi (qo‘shimcha vositali) usuli «qo‘yish» usuli deb ataladi. «Qo‘yish» deganda uchlari berilgan kesmalarda bo‘lib, berilgan nuqtalardan o‘tadigan (yoki uning davomi o‘sha nuqtalardan o‘tadigan) kesmani yasashga aytiladi. Mana shu metod yordamida ABC burchakni teng uch qismga ajratamiz (16-rasm).



16-rasm

Burchakning bir tomonida BA kesma ajratamiz, A nuqtadan BC ga parallel qilib AE to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz va unda BA ga teng AE kesma ajratamiz. A nuqtadan BC tomonga AD perpendikularni tushiramiz. Endi belgilari, ya’ni bo‘limlari bo‘lgan chizg‘ichda 2BA ga teng FE kesmani belgilaymiz va chizg'ichdagi bitta belgini E nuqtaga qo'yib ikkinchi belgi AD perpendikularning biror nuqtasi bilan ustma-ust tushguncha harakatlantiramiz, aytaylik, chizg'ichning bitta belgisi AD kesmaning F nuqtasiga tushsin. Endi F nuqtani burchakning uchi B nuqta bilan tutashtiramiz. FE ning o'rtasi P ni A nuqta bilan tutashtiramiz. U holda CBE burchak berilgan ABC burchakning uchdan biriga teng bo'ladi.

Haqiqatdan ham shunday ekanini isbotlaymiz. AE||BS ekanidan $\angle FBD = \angle PEA$. *APE* uchburchak teng yonli va uning asosidagi burchaklari teng. Uning tashqi burchagi ARB o'ziga qo'shni bo'lmagan ikki burchakning yig'indisiga teng, ya'ni $\angle BPA = \angle PAE + \angle AEP$. ammo ABP uchburchak ham teng yonli shu sababli uning asosidagi burchaklari ham teng, ya'ni $\angle ABP = \angle PAE + \angle AEP$. Shunday qilib, FBD burchak berilgan ABC burchakning uchdan biriga teng ekan. Masala hal bo'ldi.

Ixtiyoriy burchakni teng uch qismga ajratish masalasi bilan Abu Rayxon Beruniy (973-1048) ham shug'ullangan. U «Qonun Mas'udiy» asarining uchinchi maqolasida ixtiyoriy burchakni teng uch qismga ajratishning yaqribiy usulini bayon qilgan.

IKKINCHI MASALA: berilgan doira kvadratlansin, ya'ni yuzi doiraning yuziga teng kvadrat yasalsin.

Qadimgi yunon matematiklari bu masalani aniq va taqribiy hal etishga urinishgan. Bu masalani taqribiy yechish uchun doiraga ichki va tashqi chizilgan muntazam ko'pburchaklarning yuzlarini hisoblash kerak. Bu esa o'z navbatida π sonining taqribiy qiymatini bilishni talab qiladi. Demak, yasalishi lozim bo'lgan kvadratning tomoni transsendent son bilan ifodalanadi. Shu sababli ham uni chizg'ich va sirkul yordamida yasashga urinishlar befoyda bo'ldi.

Haqiqatan berilgan doira radiusini r desak, u holda doiraga tengdosh kvadratning tomoni $x = r \cdot \sqrt{\pi}$ bo'ladi, chunki

$$S_{doira} = \pi r^2; \qquad S_{кв} = x^2; \qquad x^2 = \pi r^2$$

Demak, masala r kesmani $\sqrt{\pi}$ marta orttirishga keltiriladi. Ma'lumki, agar kesma ko'paytiriladigan son kvadrat radikallarda yechiladigan butun koeffitsyentli tenglamaning algebraik ildizidan iborat bo'lsagina, bu amalni bajarish mumkin bo'ladi. Binobarin, doirani kvadraturalash masalasi π sonining arifmetik xossasi ochilgan taqdirdagina qat'iy hal bo'ladi. π ning ratsional son emasligini XVIII asrning oxirida fransuz matematiklari I.Lambert (1728-1777) va A.Lejandr (1752-1833) lar isbotlab berishdi.

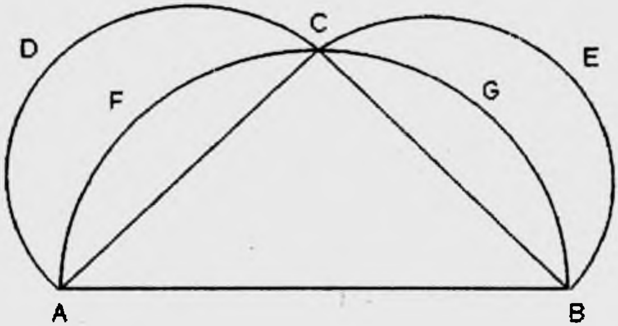
π sonning transsendent ekanini, ya'ni u hech qachon hech qanday butun koeffitsiyentli algebraik tenglamaning ildizi bo'la olmasligini 1882-yili F.Lindemann (1852-1939) isbotladi. Qadimgi matematiklar π sonining tabiatini bilmagan holda doirani kvadratlash masalasini aniq yechishga urinishgan. Lekin ularning urinishlari bekorga ketmagan. Matematika fani yangi-yangi faktlar bilan boyib borgan. Masalan, Yevdoks (taxm. 408 – 335) o'z g'oyasiga ko'ra hozirgi limitlar nazariyasiga yaqin «qamrash» metodini kashf etdi. Bu masalani hal etishga turli xil transsendent egri chiziqlar, jumladan, kvadratrisa tatbiq etildi va nihoyat, yuzasini kvadratlash mumkin bo'lgan egri chiziqli figuralar, masalan, Gippokrat (e.o. V asr) oychalari kashf qilindi.

Quyidagi uchta kashfiyotni xioslik Gippokratga yozishadi.

Birinchidan, Gippokrat doiralarining yuzlari ularning diametrlariga yasalgan kvadratlarning yuzlariga proporsional ekanini isbotladi.

Ikkinchidan, u doirani kvadratlash masalasi bilan shug'ullanib chizg'ich va sirkul yordamida egri chiziqli figuraga tengdosh, ammo to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan figura yasash mumkinligini kashf etdi.

Gippokratning kvadratlanadigan oychalari orasida eng soddasi quyidagicha yasaladi; ACB yarim doiraga ACB ichki teng yonli uchburchak chiziladi. Uning katetlariga ADC va CEB tashqi yarim doiralar yasaladi (17-rasm).



17-rasm

Gippokrat kashf etgan doiralar yuzlarining ular diametrilarining kvadratlariga proporsionalligi haqidagi teoremaga ko'ra, birining yuzidan ikki marta katta, demak,

$$S_{ADC}+S_{CEB}=S_{ACB} \tag{1}$$

Agar (1) tenglikning har ikkala tomonidan, ular uchun umumiy bo'lgan $S_{AFC}+S_{CGB}$ yig'indini ayirsak:

$$S_{ADCF}+S_{CEBG}=S_{\Delta ACB} \tag{2}$$

yoki

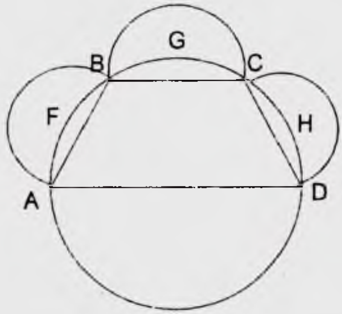
$$S_{ADCF}=\frac{1}{2}S_{\Delta ACD}$$

Ikkinchi xil kvadratlanadigan oycha tomonlari 1,1,1 va $\sqrt{3}$ga teng bo'lgan trapetsiyaga tashqi aylana va $\sqrt{3}$ga teng vatarga boshqa vatralar bilan hosil qilingan segmentlarga o'xshash segment yasashdan iborat (18-rasm).

Oychaning yuzi $S_{AFBGCHD}=S_{TP.\ ABCD}$

Gippokratning uchinchi kashfiyoti berilgan kub hajmini ikki hissaga orttirish masalasi bilan bog'liq, u haqda kubni ikki hissalash masalasini qaragan paytimizda to'xtaymiz.

Albatta, bunday oychalarni kashf etilishi juda ko'p savollarning paydo bo'lishiga sababchi bo'ldi. Masalan, yuzlari kvadratlanadigan oychalar sinfi qancha? «Hamma kvadratlanadigan oychalar topilganmi?» va hokazo.



18-rasm

1840-yili nemis matematigi T. Klauzen (1801-1885) Gippokrat oychalaridan farq qiladigan yana ikkita oycha topdi.

Sobiq Ittifoq matematiklari N. G. Chebotaryov (1894-1947) va A. V. Dorondov, YE. Galua (1811-1832) nazariyasini oychalarni tekshirishga tadbiq etib, oychalarning ichki va tashqi yoylarining burchak o‘lchovi umumiy bo‘lsa, u holda topilgan oychalardan boshqa kvadratlanadigan oychalar mavjud emasligini ko‘rsatishdi.

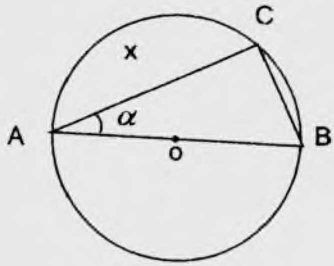
Doirani kvadratlashning taqribiy usuli

Lekin ba’zi maxsus vositalardan foydalanilsa, bu masalani taqribiy yechish mumkin. Shunday taqribiy yechish usulini 1836-yili rus muhandisi Bing taklif etgan. U quyidagicha: yuzasi kvadratlanadigan doiraga ichki ABC uchburchak chizilgan. Bunda uchburchakning eng katta tomoni doiraning diametri qilib olingan.

$\angle CAB=\alpha$, $AC=x$ deymiz va α burchakni AC vatar doiraga tengdosh kvadratning tomoni bo‘ladigan qilib tayinlaymiz (19-rasm).

Buning uchun $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{X}{AB} = \frac{X}{2R}$ munosabatdan foydalanamiz. $x^2 = \pi R^2$ yoki $4R^2\cos^2\alpha = \pi R^2$ ekanidan

$\cos^2\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0{,}886$. Trigonometrik jadvaldan: $\alpha = 27^\circ 36'$



19-rasm

<u>**UCHINCHI MASALA**</u>**: Berilgan kubning hajmini ikki hissaga orttirilsin.**

Bu masalani Delos masalasi deb atashadi. U quyidagi afsona bilan bog'liq: O'rta yer dengizidagi Delos oroliga vabo tarqaydi. Orolda yashovchilar* orakul Appolonga «Vaboni qanday qaytarish mumkin?»-deb murojaat qilishadi. Orakul cherkovdagi xudo yo'liga qurbonlik uchun qo'yilgan oltin kubning hajmini ikki hissa orttirish lozimligini aytadi. Orolliklar cherkovdagi kub ustiga xuddi o'shanday oltindan yasalgan o'sha hajmdagi kubni yasab olib borib qo'yishadi, ammo vabo qaytmaydi; odamlar yana o'z orakullariga murojaat qilib vaboning to'xtamayotganidan shikoyat qilishadi. Orakul esa «vaboning to'xtamaganligini sababi masala shartini noto'g'ri bajarilganligida», ya'ni «qurbonlikning shaklini o'zgartirmasdan uning hajmini ikki hissaga orttirish lozim edi»,-deydi.
Kub hajmini ikki hissalash masalasi mana shunday vujudga kelgan deyishadi. Hozirgi zamon belgilashlarida bu masala quyidagicha yechiladi: $x3 = 2\alpha^3$ tenglamani tuzamiz va uning ildizi $x = \alpha\sqrt[3]{2}$ topamiz.

Bu yechim qadimgi geometrlarni qanoatlantirmas edi, chunki ular α soning ma'lum qiymatiga ko'ra x ni chizg'ich va sirkul yordamida yasashlari lozim edi.

Oldin eslatganimizdek, bu masalaning taqribiy yechimini birinchi bo'lib Gippokrat topgan, u kub hajmini ikki hissa orttirishni

---

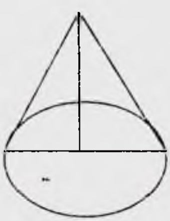
* Orakul - qadimgi yunonlar va rimliklarda aytgan hamma gaplari haqiqat va har doim amalga oshadigan kishi yoki yunonlar va rimliklarning payg'ambari.

berilgan ikki ***a*** va ***b*** kesmalarga o‘rta proporsional bo‘lgan ikki kesmani yasashga keltirgan:

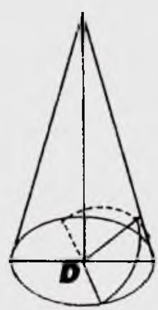
$$a:x=x:y=y:2a;\quad x^2=ay;\quad y^2=2ax;\quad X^4=a^2y^2;\quad \frac{x^4}{a^2}=2ax;\quad x^3=2a^3$$

(biz qaragan holda $b=2a$).

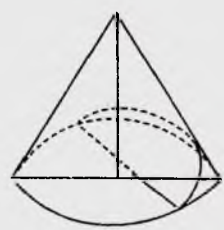
Delos masalasini yechishga urinishlar yangi geometrik o‘rinlar-konus kesimlarini kashf etishga olib keldi. Bu kashfiyot Menexm (e.o.IV asr)ga tegishli. Ma’lumki, to‘g‘ri burchakli uchburchak biror kateti atrofida aylantirilsa, konus hosil bo‘ladi (20-rasm). Qo‘zg‘almas katetga yopishgan o‘tkir burchak to‘g‘ri burchakning yarmisiga teng, ya’ni 45^0 bo‘lishi, yarmisidan kichik bo‘lishi, xuddi shuningdek, yarmisidan katta bo‘lishi mumkin. Birinchi holda to‘g‘ri konus (20-rasm), ikkinchi holda o‘tkir burchakli (21-rasm), uchinchi holda o‘tmas burchakli konus hosil bo‘ladi (22-rasm).



20-rasm



21-rasm



22- rasm

Endi mana shu hosil bo‘lgan konuslarni ularning yasovchilariga perpendikular tekislik bilan kessak, mos ravishda parabola $(y^2=2px)$, ellips $\left(\frac{б^2}{a^2}+\frac{б^2}{a^2}=1\right)$ va giperbola $\left(\frac{б^2}{a^2}-\frac{б^2}{a^2}=1\right)$ hosil bo‘ladi.

Bu uchala kesim Menexm triadasi deb atalar edi. E.o. II asrdan boshlab ular konus kesimlari deyila boshlandi. Menexm uchala konus kesimlaridan $(x^2=ay;\ y^2=ax;\ xy=2a^2)$ ixtiyoriy ikkitasi kesishish nuqtasining abssissasi Delos masalasining yechimi bo‘lishini ko‘rsatgan.

8-§. Nisbatlar nazariyasi

Nisbatlar nazariyasining kashfiyotchisi knidlik Yevdoks (tax. e.a. 408-355) hisoblanadi. U yirik matematik va astronom edi. Ba'zi ma'lumotlarga qaraganda u astronomiyani Misrga qilgan sayohati chog'ida (taxminan 380-yil) o'rganib kelgan. Yevdoks Knidda observatoriya qurdiradi va birinchi bo'lib sayyoralar harakatlarining matematik nazariyasini yaratadi. Yevdoks yaratgan matematik nazariyalar orasida eng muhimi nisbatlar nazariyasidir. Umumiy o'lchovsiz kesmalarning kashf etilishi, oldin ikkita butun sonning nisbati deb qaraladigan ikki kesmaning nisbati endi geometrik masalalarni yechishga yaramay qoldi. Shu sababli geometrlar nisbatlar nazariyasini iloji boricha boshqa metodlarga almashtirishga harakat qilishdi. Bu holni Yevklidning «Negizlar» asarida ham ko'rish mumkin. U o'z asarining birinchi to'rtta kitobida nisbatlar nazariyasidan foydalanmay, balki uni boshqa metodlarga almashtiradi. U IV kitobida Yevdoksning nisbatlar nazariyasi tushuntirilgandan so'ng, VI kitobida nisbatlar nazariyasini ham umumiy o'lchovli, ham umumiy o'lchovsiz kesmalarga tatbiq etadi.

Demak, nisbatlar nazariyasining vujudga kelishiga sabab, ikki umumiy o'lchovsiz kesmani sonlarda ifodalashning mumkin emasligi, ya'ni irratsional son o'rniga «nisbat» termini ishlatish bo'ldi. Bu terminsiz esa kesmalarning proporsionalligini, demak, uchburchak va ko'pburchaklarning o'xshashligini ham o'rganib bo'lmas edi.

«Negizlar» da (U kitob) nisbat tushunchasi uchta ta'rif bilan beriladi:

<u>Birinchidan,</u> ikki miqdor biror nisbatda bo'lishi uchun ular bir jinsli bo'lishi zarur.

<u>Ikkinchidan,</u> hamma bir jinsli miqdorlar (masalan A va V) ham nisbatga ega bo'lavermaydi; ular nisbatga ega bo'lishi uchun, $A>V$ bo'lganda $A<nV$,bo'ladigan n soni mavjud bo'lishi zarur;

<u>Uchinchidan,</u> nisbatlarning tengligi quyidagicha aniqlanadi: Agar ixtiyoriy m va n butun sonlar uchun $mA \geq nV$ dan $mC \geq nD$ va $mA \leq nV$ dan $mC \leq nD$ ekani hosil bo'lsa, u holda A miqdorning V miqdorga nisbati S miqdorning D miqdorga nisbatiga teng bo'ladi.

Yevdoks nisbatlar nazariyasini yaratgan bo'lsa-da, yunonlar nisbatlar ustida arifmetik amallar bajarishga ehtiyoj sezishmadi. Bu masala bilan islom mamlakatlari matematiklari keng shug'ullanishdi. Ular Yevdoks nisbatlaridan ham murakkabroq «Murakkab nisbatlar» nazariyasini yaratishdi. Bu masala Yevklidning «Negizlar» asarida nisbatlarning xususiy holi ko'rinishida «ikki karrali» yoki nisbatlarning kvadrati deb qaralgan edi. Islom matematiklari uni uchta va undan ortiq nisbatlar uchun rivojlantirishdi.

Abul Vafo tomonidan «Murakkab nisbatlar» nazariyasini asoslashga urinish miqdorlar nisbatiga son tushunchasini nazariy tatbiq etishga olib keldi. Bu degani son tushunchasini musbat haqiqiy sonlargacha kengaytirish degani edi. Bunday dadil qadamni birinchi bo'lib, shoir va astronom, faylasuf va matematik Umar Xayyom (1040-1123) qo'ydi. U o'zining «Yevklid kitoblarining kirish qismidagi qiyinchiliklarga sharh» nomli risolasining uchinchi qismi «Nisbatlar tuzish va ularni tekshirish» da qaradi. Xayyom Yevklidning murakkab nisbatlardagi kamchiliklarini tugatish uchun nisbatlarga son tushunchasini tatbiq qildi.

Qadimgi va O'rta asrlardagi nisbatlar nazariyasi hozirgi zamon haqiqiy sonlar nazariyasiga o'xshab ketadi. Masalan, Dedekind (1831-1916) kesimlarini qaraylik: $a \gtrless b$ nisbatda qatnashuvchi har bir a va v miqdorlar jufti Yevdoks nazariyasiga ko'ra butun sonlarning m va n juftini sinflarga ajratadi. $ma>nb$ tengsizlik o'rinli bo'lgan juftlar bitta sinfga, $ma<nb$ tengsizlik o'rinli bo'lgan juftlar ikkinchi sinfga kiritiladi. $m_0a=n_0b$ tenglikni hosil qiluvchi m, n juftni oldingi sinflardan biriga kiritish lozim. Lekin Yevdoks nazariyasida uzluksizlikka e'tibor berilmaydi.

Nisbatlar nazariyasidagi kamchilik shuning o'zidangina iborat emas. Yevdoks nazariyasida butun sonlar jufti sinflarga ajraladi-yu, ammo uning aksi isbotlanmaydi, ya'ni har bir shu kabi ajratishga shu ajratishni aniqlovchi biror miqdorlar jufti mos kelishi isbotlanmaydi. Undan tashqari, ajratishning sinflari bo'ladigan butun sonlar juftlari to'plamining shartlari, ya'ni bo'sh bo'lmaslik, kesishmaslik, bir to'plam elementining boshqa to'plam elementiga nisbatan bir tomonlamalik elementga ega bo'lib qolmaslik shartlari aniqlanmagan.

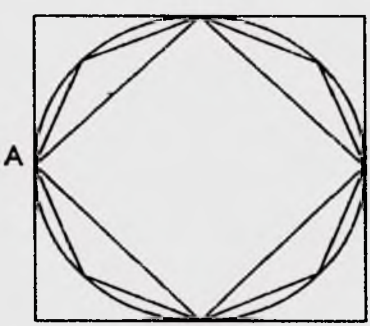
Nihoyat, Dedekindda to‘rttala arifmetik amal ham aniqlangan. Yevdoksda esa bittagina amal aniqlangan, butun sonlar jufti to‘plami tartiblanmagan. Boshqacha aytganda, Dedekindning haqiqiy sonlari maydon hosil qiladi. Yevdoksniki esa gruppa tashkil qiladi.

Oldin eslatganimizdek, nisbatlar nazariyasining keyingi rivojlanishi nisbatlarni umumlashtirilgan son deb qarash va ularni kasrlar bilan taqqoslash yo‘lidan bordi. Masalan, Arximed, Geron o‘rta asrlarda esa Umar Xayyom va boshqa olimlar shu yo‘ldan borishgan.

9-§. Yevdoksning qamrash nazariyasi

Qamrash nazariyasi quyidagi jumlaga asoslanadi: doiralar yuzlarining nisbati ularning diametriga yasalgan kvadratlar yuzlarining nisbati kabi bo‘ladi (23-rasm.)

Shunday ekanini isbotlash uchun diametrlari d va d_1 bo‘lgan doiralarga yuzlari a va A bo‘lgan ichki kvadratlar yasaymiz. U holda $\frac{a}{A}=\left(\frac{d}{d_1}\right)^2$ munosabatga ega bo‘lamiz, bu esa oldin isbotlanganiga ko‘ra ichki chizilgan U kvadratning yuzi unga tashqi chizilgan D doira yuzining yarmisidan katta, chunki U kvadrat D doiraga tashqi chizilgan kvadratning yarmisiga teng, tashqi chizilgan kvadratning yuzi esa D doira yuzidan katta. Bu narsa A kvadrat va unga tashqi chizilgan D doiraga ham taalluqli.



23-rasm.

Endi har ikkala doiraga ham v va V ichki muntazam sakkiz burchaklar chizamiz. Yuqorida yuritilgan muhokama yordamida kvadratga qo'shilgan har bir uchburchakning yuzi shu uchburchakka tashqi chizilgan D doira segmenti yuzining yarmisidan katta bo'lishini isbotlash mumkin. Binobarin, v sakkizburchakning yuzi D doira yuzining to'rtdan uchidan katta. Xuddi shu singari, $B > \frac{3}{4}D$.

Bunda v va V yuzlar uchun ham $\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{d_n}\right)^2$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar biz bu jarayonni davom ettirsak, ya'ni doiralarga avval s va S ichki muntazam 16 burchak, keyin esa e va E ichkimuntazam 32 burchak va hokazo chizsak, birinchidan, ularning yuzlari uchun $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{e}{E} = \ldots = \left(\frac{d}{d_n}\right)^2$ nisbat saqlanadi, ikkinchidan, ichki chizilgan muntazam ko'pburchaklar d va D doiralar yuzlarini ko'proq qamraydi.

Endi Yevdoksning lemmasiga ko'ra agar biror M miqdordan avval M ning yarmisidan katta miqdorni, qoldiqdan uning yarmisidan katta miqdorni va hokazo ayirib borilsa, u holda yetarlicha sondagi qadamdan so'ng qoldiqni oldindan berilgan ixtiyoriy m miqdordan kichik qilish mumkin. Demak, doiralarning ortib qoladigan yuzlarini istagancha kichiklashtirish mumkin.

Yuqorida keltirilgan muhokamadan Yevdoksning o'z nazariyasida limitlar tushunchasidan foydalanganligini ko'ramiz, ammo Yevdoks zamonida limitlar nazariyasi yo'q edi.

Shu sababli ham faqat doiraga ichki chizilgan tomonlarining soni ortib boruvchi muntazam ko'pburchaklar yuzlarining nisbatlari doiralar diametrlarining kvadrati kabi bo'lmay, ularga tashqi chizilgan doiraning yuzlari nisbatlari ham shunday bo'lishini isbotlash uchun teskarisini faraz qilishdan foydalanishgan.

Avvallari qamrash metodi boshqa metodlar bilan, masalan, bo'linmaslar yordamida isbotlangan teoremalarning to'g'riligini tekshirish uchun qo'llanilgan. Keyinchalik uni Arximed mukammallashtirib yuzlar va hajmlarni aniqlaydigan turli-tuman masalalarga tatbiq etgan.

10-§. Ellinizm davrida matematikani deduktiv tuzish

Eramizdan oldingi III asrga kelib Yunonistonda juda ko'p matematik faktlar to'planib qoldi. Bu ma'lumotlarning ko'pchiligi abstrakt tushunchalar edi. Yunonlar matematikaga isbotlash metodini kiritishdi. Endi ana shu yig'ilgan ma'lumotlarni sistemaga solib bayon etish lozim edi. Bu ishni ular amalga oshirishdi va bunday sistemali matematik asarlarga «Negizlar» deb nom qo'yishdi. Shunday asar yozgan birinchi matematik xioslik Gippokrat edi. «Negizlar» nomli asar yozgan Yunonistonlik ko'plab matematiklarning nomi ma'lum, ammo Yevklidning «Negizlar» nomli asari vujulga kelgach, oldingi asarlar yo'qolib ketgan.

Har bir matematik fanni ilmiy asosda tuzishda yoki bayon etishda maksimal ketma-ketlik, mantiqiy bog'liqlik va aniqlik talab etiladi. Shu sababli, aksioma, ta'rif va teorema deb ataluvchi barcha ma'lumotlarni aniq ifodalangan jumlalarga ajratish lozim bo'ladi. Ana shu jumlalarning roli va ahamiyatini geometriya misolida ko'rsataylik.

Geometrik tushunchalarining xossalari va munosabatlari biror jumla ko'rinishida ifodalanadi, uning to'g'riligi esa isbot yordamida o'rnatiladi. Isbotning mohiyati shundaki, biz qarayotgan jumlaning to'g'riligini mantiq qonunlariga asosan tuzilgan muhokamalar yordamida o'rnatamiz. Boshqacha aytganda, biz isbotlash lozim bo'lgan jumlaning to'g'riligini oldin o'rnatilgan boshqa jumlalardan ularning mantiqiy xulosasi sifatida keltirib chiqaramiz. Ma'lumki, biz tayangan bu jumlalar ulardan oldingi jumlalarning mantiqiy xulosasidir. Bu ketma-ketlikni esa cheksiz davom ettirib bo'lmaydi. Qandaydir jumlalarni mantiqiy asoslashning asosi uchun qabul qilishga to'g'ri keladi.

Asos sifatida isbotsiz qabul qilinadigan matematik jumlalar aksiomalar yoki postulatlar deyiladi, aksiomalarga asosan isbotlanadigan barcha qolgan jumlalar teoremalar deyiladi.

Matematikani deduktiv tuzishda ta'riflarning roli qanday?

Ma'lumki, biz matematikani o'rganish davomida bir qancha matematik tushunchalarga duch kelamiz. Ularni esa kundalik hayot va tajriba o'rtaga olib chiqdi. Aytaylik, aylana va o'xshashlikning kundalik hayotimiz uchun qanchalik zarur ekanini hammaga bayon etish lozim. Shu sababli bir nechta tushunchadan iborat tushunchani bitta maxsus termin bilan atashga harakat qilinadi. Masalan, aylananing markazi orqali o'tuvchi vatar diametri deyiladi. Bunda «diametr» bir nechta tushunchalar guruhidan iborat: «aylana», «markaz», «orqali o'tadi», «vatar». Demak, yangi matematik terminning ma'nosini o'rnatuvchi, yangi tushunchaning ma'nosini oldin ma'lum bo'lgan tushunchalar yordamida ochib beruvchi jumla ta'rif deyiladi.

Shunday qilib, ta'rif yordamida yangi tushuncha oldin ma'lum bo'lgan sodda yoki murakkab tushunchalarga keltiriladi. Ular ham o'z navbatida oldingi tushunchalarga keltiriladi va hokazo.

Ammo, geometriyaning barcha tushunchalarini ana shunday xatosiz ta'riflab bo'lmaydi, qandaydir tushunchalarni ta'rifsiz asos uchun qabul qilish-
ga to'g'ri keladi.

Bayon etishning boshida ta'rifsiz qabul qilinadigan tushunchalar asosiy yoki dastlabki tushunchalar deyiladi.

Qolgan barcha tushunchalar albatta, asosiy tushunchalar va oldin ta'riflangan tushunchalar yordamida ta'riflanishi shart. Ana shunday tushunchalar hosilaviy tushunchalar deyiladi.

Shunday qilib, geometriyaning barcha jumlalari - aksiomalar va teoremalar, tushunchalari - asosiy va hosilaviy tushunchalarga bo'linadi.

Geometriyaning qat'iy ilmiy asosda tuzish quyidagicha: geometrik tushunchalar haqidagi har qanday muhokama yo aksiomalar qatoriga kiritilishi, yoki aksiomalar va oldin isbotlangan teoremalar yordamida isbotlanishi, har qanday tushuncha esa yo asosiy tushunchalar qatoriga kiritilishi yoki asosiy tushunchalar va oldin ta'riflangan tushunchalar yordamida ta'riflanishi zarur.

Matematikani ana shu prinsipga asosan bayon etish uni deduktiv yoki aksiomatik bayon etish deyiladi, chunki u butun bir ilmiy nazariyaning mazmunini deduksiya yordamida, ya'ni kam sondagi aksiomalar va boshlang'ich tushunchalar yordamida mantiqiy keltirib chiqarishga asoslangan.

Shunday qilib, matematikani deduktiv bayon etish sxemasi quyidagicha:

1) asosiy tushunchalar ro'yxati beriladi,

2) barcha aksiomalar bayon etiladi,

1) teoremalar ifodalanadi,

4) har bir teoremaning isboti keltiriladi,

5) yangi kiritilgan barcha tushunchalarning ta'rifi beriladi.

Yevklid o'zining «Negizlar»ini yozishda yuqorida biz sanab o'tgan prinsipga amal qilgan.

Yevklidning hayoti haqidagi bizgacha juda kam ma'lumot yetib kelgan. U bizning eradan oldingi 300 yillarda yashagan. Uning ijodi ellinistik madaniyat va fanning Aleksandriya davriga to'g'ri keladi. Aleksandr Makedonskiy (Iskandar Zulqarnayn) vafotidan so'ng, uning g'oyat katta imperiyasi bo'linib ketgandan keyin iqtisodiy, siyosiy va madaniy mohiyatga ko'ra Misrning yangi poytaxti Aleksandriya shahri birinchi o'ringa chiqib oldi. Yevklid mana shu davrdagi eng ko'zga ko'ringan matematik hisoblanadi. U shoh Ptolemey davrida Aleksandriyada matematika o'qitadi va Ptolemey asos solgan muzeyda matematika bo'limini tashkil qiladi. Yevklid haqida ba'zi bir afsonalar ham saqlanib qolgan. Ulardan biri quyidagicha: kunlardan bir kun shoh Ptolemey Yevklidga «Geometriyani o'rganishning «Negizlar» da bayon etilganidan qisqaroq yo'l yo'qmi?» - deb so'ragan. Yevklid esa: «Geometriyada maxsus shohona yo'l yo'q» -deya javob bergan. Yevklidning «Negizlar» dan tashqari «Ma'lumotlar», «Figuralarni bo'laklarga ajratish», «Optika» va bitta astronomik risolasi bizgacha yetib kelgan. Uning anchagina asarlari bizgacha yetib kelmagan. Shunday asarlaridan biri «Konus kesimlari» deb atalgan.

«Negizlar» 13 ta kitobdan iborat. Ba'zan bu kitoblarga boshqa mualliflar yozgan, ammo mazmuniga ko'ra Yevklidning oxirgi kitoblariga o'xshab ketadigan 14 nchi va 15 nchi kitoblar ham qo'shiladi. «Negizlar» ning I-VI kitoblari planimetriyaga bag'ishlangan, VII-IX arifmetika, X umumiy o'lchovsiz miqdorlar, XI-XIII stereometriya.

BIRINCHI KITOB kesmalar, uchburchakning tomonlari haqida, uchburchaklarni yasash, perpendikular va parallel to'g'ri chiziqlar, parallelogrammlar, uchburchaklar va parallelogrammlarning yuzlari, Pifagor teoremasi haqida.

IKKINCHI KITOB ning mazmuni butunlay birinchi kitobning natijalariga asoslanadi va geometrik algebra masalalariga bag'ishlangan. Masalan, unda oldin uchratgan algebraik ayniyat $\left[(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\right]$ geometrik usulda yechish namunasi bilan tugaydi.

UCHINCHI KITOB aylana va doira haqida, aylanaga o'tkazilgan

urinma va kesuvchi, ular hosil qiladigan burchaklar haqida.

TO'RTINCHI KITOB ichki va tashqi chizilgan ko'pburchaklar haqida, muntazam to'rtburchak, beshburchak, oltiburchak va o'n besh burchak yasash haqida.

BESHINCHI KITOB Yevdoksning nisbatlar nazariyasiga bag'ishlangan. Bu nazariya geometriyaga umumiy o'lchovsiz kesmalarni yoqlash uchun kiritilgan.

OLTINCHI KITOB nisbatlar nazariyasining o'xshashliklariga tatbiqi. Bu kitobda ana shu tatbiq geometrik algebraning sohasini biroz kengaytiradi.

«Negizlar» ning keyingi uch kitobi -VII, VIII va IX arifmetikaga bag'ishlangan.

YETTINCHI KITOB to'rtta guruhga bo'lingan: birinchi guruh ikki va uchta sonning eng katta umumiy bo'luvchisini topish, Yevklid algoritmi deb ataluvchi qoida mana shu guruhda. Ikkinchi guruh proporsiyalar nazariyasi va proporsiyaning ba'zi teoremalari haqida. Masalan, 31-jumlasi quyidagicha: «Har qanday murakkab son biror boshlang'ich son bilan o'lchanadi». Bu jumlani Yevklid mana bunday isbotlaydi: agar A murakkab son bo'lsa, u holda A ning bo'luvchisi bo'lgan V son mavjud. Agar V tub son bo'lsa, teorema isbot bo'ladi. Agar V ham murakkab son bo'lsa, u holda V ning bo'luvchisi bo'lgan S son mavjud. Agar S tub son bo'lsa, teorema isbot bo'ldi. Agar S ham murakkab bo'lsa, yuqoridagi jarayonni davom ettiramiz va A, V, S, . . . , sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz, ular A >V >S . . . tartibda joylashadi. Ammo, ma'lum qadamdan so'ng, biz tub son bo'lgan R bo'luvchiga kelamiz va teorema isbot bo'ladi.

SAKKIZINCHI KITOB da 27 jumla bo'lib, u «uzluksiz proporsiyalar» deb ataladi, boshqacha aytganda, geometrik progressiyalarga bag'ishlangan.

TO'QQIZINCHI KITOB da 36 ta jumla bor. 14-20 jumlalar tub sonlar nazariyasiga bag'ishlangan. Tub sonlarning asosiy teoremasi: har qanday murakkab sonni faqat bir xildagi tub ko'paytuvchilarga ajratish mumkinligi ham mana shu kitobda berilgan. Tub sonlar to'plamining cheksizligi haqidagi 20 jumla quyidagicha: «Birinchi sonlar»* taklif qilingan har qanday miqdordagi birinchi sonlardan ko'proq mavjud». Bu jumlaning isbotini Yevklid teskarisini faraz qilish bilan ko'rsatgan. Agar A, B, C sonlari tub bo'lsa, ularinng ko'pytmasi bir birlikka orttirilsa (ABC+1), u yo tub son, yoki murakkab son bo'ladi. Agar ko'paytma va I tub son bo'lsa, teorema isbot bo'ldi, ya'ni tub sonlar soni oldindan beriilgan tub sonlar miqdoridan ko'p ekan. Agar murakkab son bo'lsa, u holda ko'paytma va I biror H soniga bo'linishi kerak. Ammo H oldin berilgan tub sonlar bilan bir xil bo'la olmaydi. Aytaylik, agar u A bilan bir xil bo'lsa, u ABC +I sonning bo'luvchisi, ham uning ABC ko'paytmasining bo'luvchisi bo'lib qoladi. Bu bema'nilik. Binobarin, A, B, C lardan tashqari yana H tub son bor ekan.

O'NINCHI KITOBDA 115 ta jumla bor. «Negizlar» ning orasida anchagina yaxshi o'rganilgan kitob mana shu o'ninchisi. Ratsional koeffitsyentli kvadrat tenglamalarni va kvadrat tenglamalarga keltiriladigan bikvadrat tenglamalarni yechishda hosil bo'ladigan irratsionalliklarni sinflarga ajratadi. U 13 xil irratsionallikni keltiradi. Ularning hammasi $(x^2 \pm 2ax)(c \pm bc)$ yoki $(x^4 \pm 2ax^2)(c^2 \pm bc^4) = 0$ tenglamalarning musbat ildizlari bo'ladi, bunda s -ratsional kesma, a va b lar koeffisiyentlar.

Kvadrat tenglamalarga va bikvadrat teglamalarga keltiriladigan masalalarning yechimini ratsional sonlar va berilgan kesmalarda ifodalash mumkin emas. Shu sababli ham Yevklid irratsionalliklarni sinflashtirishga urindi. Ammo uning irratsionallik sinflari barcha irratsionalliklarni o'z ichiga ola olmas edi. Chunki barcha irratsionalliklarni chizg'ich va sirkul bilan yasab bo'lmaydi.

«Negizlar» ning IX, XII va XIII kitoblari stereometriyaga bag'ishlangan. Unda 28 ta'rif bor. Eng avval jism ta'riflanadi: «uzunlik, kenglik (en) va chuqurlikka ega narsa». Sirtni esa jismning chegarasi deb ta'riflaydi. Keyin esa streometriya uchun zarur bo'lgan

---

* Birinchi sonlar – tub sonlar.

to‘g‘ri chiziqning tekislikka perpendikularligi, ikki tekislikning perpendikularligi va hokazolar ta’riflanadi. so‘ngra geometrik jismlar - piramida, prizma, sfera, konus, silindr, qub, oktaedr, ikosaedr va dodekaedralar ta’riflanadi va hokazo.

O‘N BIRINCHI KITOB 39 ta jumladan iborat. Odatdagi stereometriya darsliklari kabi to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklarning perpendikularligi, parallelligi, tekisliklar va ular hosil qiladigan burchaklar bilan boshlanadi. So‘ngra parallelepiped va prizma o‘rganiladi.

O‘N IKKINCHI KITOB da 18 ta jumla bor. Unda piramida, konus, silindr kabi jismlar hajmlarining nisbatini o‘rganishga qamrash metodi tatbiq qilingan.

Qizig‘i shundaki, Yevklid hech yerda doira yuzini yoki shar hajmini hisoblashni keltirmaydi. Bundan Yevklid ularni hisoblashni bilmagan degan xulosa chiqmaydi. Bu ishlar geometriyaga emas, balki amaliy geodeziyaga taalluqli bo‘lgan.

O‘N UCHINCHI KITOB da 18 ta jumla bor. Bunda biroz IX kitob materiallari- muntazam ko‘pburchaklarni doriaga ichki chizishga qaytadi, chunki bu materiallar unga muntazam ko‘pyoqlilarni tushuntirish uchun zarur bo‘ladi. Yevklid beshta muntazam ko‘pyoqlilarni sferaga ichki chizilgan kabi qaraydi.

Xulosa sifatida shularni aytish kerakki, «Negizlar» ning mazmuni bu asar qadimgi matematika asoslari sistemasidan iborat, u elementar geometriya, ratsional sonlar nazariyasi asoslari, miqdorlar nisbatan umumiy nazariyasi asoslari va unga asoslanuvchi kvadrat va bikvadrat irratsionalliklar, geometrik algebra va qamrash metodlaridan iborat. «Negizlar» ning xarakterli tomonlaridan biri hozirgi zamon matematik nazariyasini aksiomatik tuzishning qadimgi usuli bilan tanishtirishdir. «Negizlar» ning mantiqiy tuzilishi matematik nazariyalarning eng soddadan (masalan, geometrik alebradan) juda murakkabgacha (masalan, nisbatan nazariyasi, qamrash metodi, irratsionalliklarni sinflarga ajratish) shakllanib borishni aks ettiradi.

Yevklidning bu asari ikki ming yildan ortiq davr ichida matematikani qat'iy ilmiy tuzishning namunasi bo‘lib kelgan bo‘lsada, uning kamchiliklari mavjud edi. Birinchi kachilik uning ta’riflariga taalluqli.

Ta’riflarini keltiraylik:

1. Nuqta -kesmalarga ega emas narsa.
2. Chiziq - eni yo‘q uzunlik.
3. Chiziqning chegarasi nuqtadir.
4. To‘g‘ri chiziq o‘zining nuqtalariga nisbatan bir xilda joylashgan chiziqdir.
5. Sirt faqat uzunlik va kenglikka (enga) ega narsadir.
6. Sirtning chegarasi chiziqdir.
7. Tekislik -o‘zida yotgan hamma to‘g‘ri chiziqlarga nisbatan bir xilda joylashgan sirtdir.
8. Burchak - bir tekislikda yotib, ammo bitta to‘g‘ri chiziqda yotmasdan uchrashuvchi ikki chiziqning o‘zaro og‘ishishidir va hokazo.

Yevklid ta’riflaridagi kamchiliklarni ko‘rishimiz uchun, avvalo, ta’rflarga qo‘yiladigan talablarni bilishimiz kerak.

Birinchidan, geometrik tushunchalar ikki guruhga -asosiy va hosilaviy tushunchalarga bo‘linishi lozim.

Ikkinchidan, ta’rif ta’riflanadigan tushunchaning ma’nosini ochib berish bilan ta’riflanadigan tushunchaning boshqa hamma xossalarini mantiqiy chiqarish uchun tayanch bo‘lishi kerak. Masalan, aylana diametrining ta’rifi diametr aylanani teng ikkiga bo‘lishni isbotlash yoki diametriga tiralgan burchak to‘g‘ri burchakligini isbotlash imkonini beradi.

Uchinchidan, har bir ta’rif yangi tushunchani tanish tushunchaga keltirish bilan ma’lum mantiqiy prinsip, jins va turni ko‘rsatish orqali tuziladi. Masalan, diametrning ta’rifi uni umumiyroq tushuncha vatarga keltiradi.

To‘rtinchidan, ta’rif ortiqcha belgilarga ega bo‘lmasligi lozim. Masalan, burchak bissektrisasi nuqtalari burchak tomonlaridan barobar uzoqlikda yotuvchi, burchakni teng ikiga bo‘luvchi to‘g‘ri chiziq deb ta’riflash ortiqcha belgilarga ega.

Beshinchidan, ayni bir tushunchaga ikki xil ta’rif berilsa, ularning teng kuchli ekanini isbotlash lozim.

Ana endi Yevklidning kamchiliklariga to‘xtaylik: u asosiy tushunchalar ro‘yxatini bermagan. Biz ta’riflanmaydigan tushunchalar - nuqta, to‘g‘ri chiziq, tekislik va sirtga ta’rif bergan. Yevklid hamma geometrik tushunchalarni ta’riflashga uringan. Buning esa iloji yo‘q, albatta. Masalan, u nuqta, to‘g‘ri chiziq, sirtni «qism», «uzluksiz», «kenglik» tushunchalari orqali ta’riflaydi. Boshqa joyda esa, chiziq va nuqtani «chegara» tushunchasi orqali ta'riflaydi. Ba'zi ta'riflari tushunarsiz. Masalan, to'g'ri chiziqning ta'rifini oling.

Yevklidda hosilaviy tushunchalarning ta'riflari yaxshi, ammo ular ham ortiqchalikka ega. Masalan, «Doiraning diametri markaz orqali o'tuvchi ikki tomonidan doira aylanasi bilan chegaralangan to'g'ri chiziqdir, u doirani teng ikkiga bo'ladi». Ta'rifning ikkinchi qismi ortiqcha, uni teorema sifatida isbotlash mumkin.

Endi Yevklidning postulatlari va aksiomalarini qaraylik.

Aksiomalar.

1. Alohida-alohida uchinchi (narsa) ga teng (narsa) lar o'zaro teng.
2. Va agar teng (narsalar) ga teng (narsalar) qo'shilsa, teng (narsa) lar hosil bo'ladi.
3. Va agar teng (narsalar) dan teng (narsa) lar ayirilsa, teng (narsalar) lar hosil bo'ladi.
4. Va agar teng emas (narsalar) ga teng (narsalar) ni qo'shsak, teng emas (narsa) lar hosil bo'ladi.
5. Va agar teng emas (narsalar) dan teng (narsa) larni ayirsak, teng emas (narsa) lar hosil bo'ladi.
6. Va agar teng (narsa) ni ikki hissaga orttirsak, teng (narsa) hosil bo'ladi.
7. Va teng (narsalar) ning yarimlari ham o'zaro teng.
8. Va ustma-ust tushadigan obrazlar o'zaro teng.
9. Va butun o'z qismidan katta.
10. Va ikki to'g'ri chiziq fazo hosil qila olmaydi.

POSTULATLAR.

1. Har bir nuqtadan har qanday ikkinchi nuqtagacha to'g'ri chiziq o'tkazish mumkingligi talab qilinadi.
2. Va har bir chegaralangan to'g'ri chiziqni cheksiz davom ettirish mumkinligi talab qilinadi.
3. Va har qanday nuqtani markaz qilib, ixtiyoriy radiusli aylana chizish mumkinligi talab qilinadi.
4. Va hamma to'g'ri burchaklar o'zaro teng bo'lishi talab qilinadi.

5. Va har doim to‘g‘ri chiziq ikki to‘g‘ri chiziqni kesganda hosil bo‘lgan ichki bir tomonli burchaklarining yig‘indisi qaysi tomonda ikki to‘g‘ri burchakdan kichik bo‘lsa, ularning usha tomonda kesishishi talab qilinadi.

Aksiomalar bilan postulotlarning farqi bormi? Ba’zi matematiklarning fikriga qaraganda postulotlarda geometrik yasashlar qatnashadi. Lekin hozirgi zamon matematikasi nuqtai-nazaridan qaraganda aksiomalar bilan postulotlarning farqi yo‘q, ularni aksiomalar deb atasa ham bo‘ladi.

Yevklid aksiomalar sistemasining eng muxim kamchiligi ularning to‘liq emasligidir. Shu sababli ham u birinchi teoremalarini isbotlashdayoq «O‘z-o‘zidan ravshan»tasdiqlardan foydalaniladi. Ular esa aksiomalar ro‘yxatida yo‘q. Bu esa matematikani tuzishdagi qattiylik printsipiga xilof. Bundan tashqari, Yevklidda aksiomalar sistemasi to‘liq emas. Unda xarakat aksiomasi, uzluksizlik va tartib aksiomalari yetishmaydi.

Shu aytilganlardan, Yevklid birinchi bo‘lib matematikani aksiomatik tuzishga uringanini va ma’lum muvafaqqiyatlarga erishganini ko‘ramiz.

Matematikaning o‘sib borayotgan talablariga javob beruvchi aksiomalar sistemasiga XIX asrning oxirlaridagina erishildi. Uni Pash (1882-yil), Peano (1889-yil) va Piyeri (1899-yil) o‘z asarlarida e’lon qilishdi. Hozirgi kunda keng tarqalgan va ko‘pchilik tan oladigan aksiomalar sistemasi D. Gilbert ga (1862-1943) taalluqli. Uning aksiomalar sistemasi 1899-yilda nashr etilgan «Основания геометрии» asariga kiritilgan. Keyinchalik Gilbert o‘z aksiomalariga qo‘shimchalar kiritgan, mukammalashtirgan. Hozirgi kunda beshta aksiomalar sistemasi bilan ish ko‘riladi.

BIRINCHI GURUH AKSIOMALAR. Bog‘lanishlilik va tegishlilik aksiomalari (ular 8 ta).

IKKINCHI GURUH AKSIOMALAR. Tartib aksiomalari (ular 4 ta).

UCHINCHI GURUH AKSIOMALAR. Kongruentlik yoki harakat aksiomalari (ular 5 ta).

TO‘RTINCHI GURUH AKSIOMALAR. Parallellik aksiomasi (u 1ta)

BESHINCHI GURUH AKSIOMALAR. Uzluksizlik aksiomasi (u 1ta).

Mana shu guruh aksiomalar geometriyaning asosiy obyektlari – nuqta, to‘g‘ri chiziq, tekislikni hamda bu obyektlar orasidagi tegishli, orasida va kongruent so‘zlari bilan ifodalanuvchi munosabatlarni kiritadi.

Hozir matematikada izomorfizm g‘oyasi keng qo‘llaniladi, aksiomatik geometriya o‘zi o‘rganayotgan obyektning sifatiy hususiyatlarini qaramaydi, balki ular orasida mavjud bo‘lgan mantiqiy bog‘lanishlarni tekshiradi. Bunda nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekislik deb ularga o‘xshamaydigan narsalar va obyektlarnigina emas, butunlay nogeometrik narsalarni ham atash mumkin.

Yevklidning «Negizlari» 2000-yil davomida geometriyadan namunaviy darslik vazifasini o‘tab keldi. «Negizlarda» geometriyaning algebra, trigonometriya va limitlar nazariyasi tatbiq etilmaydigan bo‘limlari juda yaxshi rivojlantirilgan. Yevklidning bundan ortiq imkoniyati yo‘q edi.

Ellinizm davrining buyuk matematik va mexaniklaridan yana biri Arximed (tax. E.o. 287-212). Biz endi Arximedning ijodi haqida to‘xtaymiz. U Sitsiliya orolining Sirakuzi shahrida tug‘ilgan. Tarixdagi ma’lumotlarga qaraganda, Arximed o‘sha davrda Sirakuzini boshqargan shoh Giyeronga qarindosh bo‘lsa ham qashshoqlikda yashagan. Arximedning otasi Fidey astronom va matematik bo‘lgan. Dastlabki ma’lumotni u o‘z otasidan olgan. Keyin Aleksandriyaga safar qilib, Yevklidning o‘quvchilari bilan tanishgan, vataniga qaytganidan so‘ng ham ular bilan yozishib turgan. Arximed olgan bilimlarini Sitsiliyaning iqtisodini ko‘tarishga va o‘z ona shahri Sirakuzini tashqi dushmanlardan mudofaa qilishga tatbiq qilgan. U dalalarni sug‘orish uchun suv ko‘taruvchi mashina (Arximed vinti) kashf qilgan. U kashf etgan, hozir «Arximed qonuni» deb ataluvchi gidrostatikaning asosiy qonunini ochishi haqidagi afsona diqqatiga sazovor.

Aytishlaricha, Sirakuzining boshqaruvchisi Giyeron zargarlarga oltin toj buyuradi va unga yarasha oltin ham beradi. Ammo, tojni olgach, uning sof oltindan ekaniga shubha qiladi va Arximedni chaqirib, «tojning sof oltindanmi yoki unga kumush aralashganmi», aniqlab berishini so‘raydi. Arximed tojning sof oltinmi, yoki oltin emas ekanini qanday aniqlash haqida ko'p o'ylab yuradi, ammo topa olmaydi. Kunlardan bir kun u yuvinish uchun suv to'latilgan vannaga o'tiradi va vannadagi suvning bir qismining to'kilib ketganini ko'radi. Sevinchidan «Evrika!», «Evrika!» deb qichqirib ko'chaga chiqib ketadi. Gidrostatikaning bu qonuniga ko'ra suyuqlikka botirilgan jismga yuqoriga yo'nalgan va jism siqib chiqargan suyuqlikning og'irligiga teng kuch ta'sir etadi.

Shundan so'ng, Arximed tojning og'irligini topib, uning sof oltindan ekanini aniqlaydi.

Arximed og'ir yuklarni ko'tarish uchun pushanglar, bloklar, polispaslar va vintlardan, ularning sistemalaridan foydalanadi.

Ikkinchi Punich urushi davrida Arximed demokratik partiya tomonidan turib rimliklardan Sirakuzini himoya qilishga boshchilik qiladi. Rim askarboshisi Martsyel ikki yilgacha Sirakuzini ishg'ol qila olmaydi. Uning hiyla ishlatib quruqlik orqali qilgan hujumi eramizdan oldingi 212 yili g'alaba keltiradi. Rimliklar Sirakuziga bostirib kirganda Arximed qumga qandaydir geometrik figuralar chizib o'tirgan ekan. Rim askari unga yaqinlashib qilich ko'targanda, u «Mening doiralarimga tegma» – degan.

Arximedning qabrini keyinchalik qidirib topgan Sisyeron uning qabr toshida shar va unga tashqi chizilgan silindr tasvirlanganini yozadi. Arximed ana shu jismlar hajmlari va sirtlarining nisbati butun sonlarda ifodalanishini topgan.

Arximed juda buyuk kashfiyotchi hisoblanadi. Aytishlaricha, «Agar tayanch nuqtasini ko'rsatsangiz, yerni ham o'z o'rnidan qo'zg'ata olaman», – degan da'vo ham Arximedniki ekan. Haqiqatan, u quruqlikda og'ir yuk bilan turgan kemani pushanglar yordamida bir o'zi suvga tushirib yuborgan deyishadi.

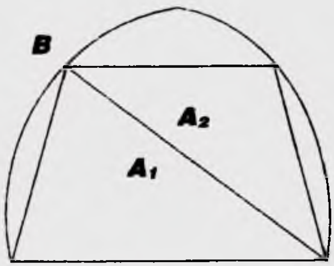
U tekislikdagi egri chiziq bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini, egri sirt bilan chegaralangan jismlarning hajmlarini hisoblash usulini topgan, bu integral hisobning boshlanishi edi. Arximedning metodini 2000 yildan so'ng Kepler (1571-1630), Kavalyeri (1598-1647), Ferma (1601-1665), Leybnis (1646-1716) va Nyuton (1642-1727) lar anchagina takomillashtirishdi.

Arximedning quyidagi asarlari ma'lum: 1. Tekisliklarning muvozanati haqida (2 ta kitob). 2. Parabolani kvadratlash. 3. Geometrik masalalarni mexanika metodi bilan yechish haqida Eratosfenga (e.o.

276-194) xat. 4. Shar va silindr haqida kitob (2 ta). 5. Spirallar haqida. 6. Konoidalar va sferaoida haqida. 7. Suzuvchi jismlar haqida (2 ta kitob). 8. Doirani o'lchash. 9. Qum donalarini hisoblash («Psammit»).

Arximed egri chiziqli figuralarning yuzlarini hisoblashda quyidagi bosqichlarni e'tiborga olgan:

1) Arximed B figurani (24-rasm) kvadraturalash zarur bo'lsa, B ga ichki A_1, A_2, ... A_n, ... figuralar ketma-ketligi chiziladi. Bu figuralarning yuzlari monoton o'sib boradi va ularni hisoblash mumkin;



24-rasm

2) A_k figura B–A_k ayirma istalgancha kichik bo'ladigan qilib tanlanadi;

3) Tashqi chizilgan figuralarning mavjudligini va yasalishi faktidan ichki chizilgan «qamrovchi» figuralar ketma-ketligining yuqoridan chegaralanganligi haqida hukm chiqariladi;

4) Oshkormas holda, boshqa muhokamalar yordamida, ichki chizilgan figuralar ketma-ketligining limiti A izlanadi;

5) Har qanday masala uchun $A=B$, ya'ni ichki chizilgan figuralar ketma-ketligining limiti berilgan figuraning yuziga tengligi isbotlanadi;

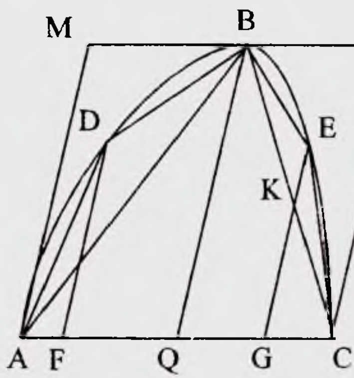
Isbot teskarisini faraz qilish metodi bilan olib boriladi.

Faraz qilaylik, $A \neq B$, u holda yo B>A, yoki B<A. Agar B>A desak, shunday A_n topamizki, B-A_n < B-A bo'ladi, bu har qanday belgilangan B-A ayirma uchun mumkin. U holda A_n>A bo'lishi lozim. Buning esa bo'lishi mumkin emas, chunki haqiqatan, har qanday n uchun A>A_n. Shu bilan teorema isbot bo'ldi. $A \neq B$ deganimiz noto'g'ri, $A=B$.

Qamrash metodi limitining yagona ekanini isbotlaydi, ammo u limitning mavjudligini ko‘rsatib bera olmaydi.

Arximed qamrash metodini tatbiq etgan ushbu masalani qaraylik: AD vatar bilan hosil bo‘ladigan ABD qiyshiq parabolik segmentning yuzini topish talab qilinadi.

BO diametrining B nuqtasiga o‘tkazilgan urinma AD vatarga qo‘shma va parallel, ya’ni CBN||AD (25-rasm).



25-rasm

«Qamrovchi» figuralar ketma-ketligidagi birinchi figura A_1, bu ΔABC, ikkinchi figura A_2 ΔABC ga ΔADB va ΔBCE uchburchaklarni qo‘shish bilan hosil bo‘ladi. Bu figurani hosil qilish uchun AC vatar 4 ga teng bo‘lakka ajratiladi va bo‘linish nuqtalaridan DF||OB va EG||OB o‘tkaziladi. A_3, A_4, . . . A_n, . . . figuralar ham ana shu kabi yasaladi. Parabolaning xossasidan:

$$\Delta ABC = 4\cdot(\Delta ADB + \Delta BEC)$$

Haqiqatan, agar biz hozirgi qiyshiq burchakli koordinatalarni tatbiq etsak va OB ni x lar o‘qi, MN ni y lar o‘qi desak, $E\left(\xi, \frac{y}{2}\right)$ nuqtaning koordinatalari $\left(\frac{y}{2}\right)^2 = m\cdot\xi$ shartni qanoatlantiradi, bundan

$$\xi = \frac{y^2}{4\cdot m}; \quad GE = x - \xi = \frac{y^2}{m} - \frac{y^2}{4\cdot m} = \frac{3}{4}\cdot\frac{y^2}{m} = \frac{3}{4}\cdot x = \frac{3}{4}\cdot OB$$

Lekin $GK=\frac{1}{2}OB$ bo'lgani uchun $KE=\frac{1}{4}\cdot OB$ va $GK=2\cdot KE$. Endi uchburchaklarning yuzlarini solishtiramiz:

$\Delta CKG=2\cdot\Delta KCE=\Delta BCE$; $\Delta OBC=4\cdot\Delta GKC=4\cdot\Delta BCE$ Shunga o'xshash mulohazalar bilan $\Delta AOB=4\cdot\Delta ABD$ ekanini topamiz. Shu bilan parabolaning yuqorida aytilgan xossasi isbotlandi.

Shunday qilib, agar $A_1=\Delta$, u holda

$$A_2=\Delta+\frac{\Delta}{4};\quad A_3=\Delta+\frac{\Delta}{4}+\frac{\Delta}{4^2};\ldots;A_n=\Delta+\frac{\Delta}{4}+\frac{\Delta}{4^2}+\ldots+\frac{\Delta}{4^{n-1}}$$

Endi figuralarning ketma-ketligi haqiqatan ham parabolik segmentni «qamrab» olishni, ya'ni $S-A_n<\varepsilon$ ekanini ko'rsatish kerak, bunda $n=n(\varepsilon)$

Isbotlash uchun ABC segmentga tashqi AMNC parallelogramm chizamiz. Unda $A_1=\frac{1}{2}\cdot S_{AMNC}$, ammo $S<S_{AMNC}$; demak,

$$A_1>\frac{1}{2}S_{AMNC}\quad \text{va}\quad S\text{-}A_1<\frac{1}{2}S$$

A_1 figura S yuzning yarmisidan ortig'ini qamraydi. Keyingi figuralar ham qolgan izlarning yarmisidan ko'pini qamraydi. Shunday qilib, qamrash metodining asosiy lemmasi qanoatlantiriladi.

Lemma quyidagicha: agar berilgan miqdordan uning yarmisidan ortig'i ayrilsa, qolgan miqdordan shu qolgan miqdorning yarmisidan kattasi ayrilsa va hokazo davom ettirilsa, u holda qoldiqni istalgancha kichik qilish mumkin.

Mantiqan qaraganda hamma mualliflar ham yuqoridagi ishlardan so'ng ichki chizilgan figuralar ketma-ketligining limitini topishni ko'rsatishlari lozim edi. Ammo ko'pchilik mualliflar bunday qilishmaydi. Faqat Arximed yuqoridagi misolda limitni topishni tushuntiradi: $A_n=\Delta+\sum_{K=1}^{n}\frac{\Delta}{4^K}=\frac{4}{3}\Delta-\frac{1}{3}\cdot\frac{\Delta}{4^{n-1}}$ ayriluvchini istagancha kichik qilib olish mumkin bo'lsa, u $S=\frac{4}{3}\Delta$ deydi. Bunday xulosa chiqarish uchun u ushbu teoremani isbotlaydi:

Faraz qilaylik, $S=A+B+C+D+E$ va $A:B=B:C=C:D=D:E=4:1$ kabi bo'lsin. U holda $S=\frac{4}{3}A-\frac{1}{3}E$ bo'ladi.

Isboti:

$$\frac{4}{3}S=\frac{4}{3}\cdot(A+B+C+D+E)=\frac{4}{3}A+\frac{1}{3}(A+B+C+D+E)-\frac{1}{3}E;$$

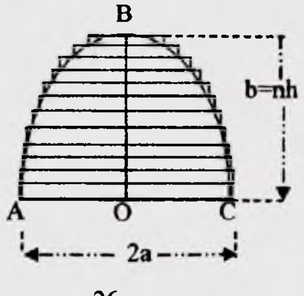
$$\frac{4}{3}S=\frac{4}{3}A+\frac{1}{3}S-\frac{1}{3}E \qquad \text{ёки} \qquad S=\frac{4}{3}A-\frac{1}{3}E$$

Bu teoremani istalgan sondagi qo'shiluvchilarga tatbiq qilish mumkin.

Bu metodni matematikada boshqacha infinitizimal metod deyishadi. Bu metod Arximedning boshqa asarlarida ham uchraydi. Ariximed «Konoida va sferoidalar haqida» nomli asarida aylanish ellipsoidining hajmini hisoblaydi. Hisoblashni bajarish uchun u aylanish jismiga ichki va tashqi jismlar chizadi. Ma'lumki, bunda tashqi chizilgan jismlar hajmlarining yig'indisi ichki chizilgan jismlar hajmlarining yig'indisidan katta bo'ladi. Endi Arximed ana shu ayirmaning istalgancha kichik qilish mumkinligini ko'rsatadi. Buning uchun ellipsoidga ichki va tashqi chizilgan silindrchalarni oladi. Avval ushbu lemma qaraladi:

Agar o'qqa perpendikular tekislik bilan kesilgan konoida yoki o'sha usulda kesilgan sferoid berilgan bo'lsa, ularga tashqi chizilgan figura ichki chizilgan figuradan har qanday jismoniy miqdordan kichik bo'ladigan qilib figura chizish mumkin.

Faraz qilaylik, ABC aylanish jimi va $\varepsilon>0$ jismoniy miqdor berilgan bo'lsin (26-rasm).



26-rasm

Arximed BO ni n ta teng bo'lakka bo'ladi va ichki va tashqi chizilgan silindrlar yasaydi. Tashqi silindrlar hajmining yig'indisini V_T bilan, ichki chizilgan silindrlar hajmlarining yig'indisini V_u bilan belgilaydi. Ularning ayirmasi AA_1 silindrchaning hajmiga teng, ya'ni $\pi a^2 \frac{b}{n}$. Ma'lumki, n ni istalgancha katta qilib olib, bu hajmni istagancha kichik qilish mumkin.

Endi 26-rasmda aylanish ellipsoidi tasvirlangan va uning hajmini hisoblash talab qilinadi deyish mumkin. U holda

$$Y_T = \pi ha^2 + \pi hx_1^2 + \pi hx_2^2 + \ldots + \pi hx_{n-1}^2 = \pi \cdot h\sum_{K=0}^{n-1} x_K^2; \qquad x_0 = a$$

Masala sonlar kvadratlarning yig'indisini topishga keltirildi. So'ngra Arximed quyidagicha analitik almashtirishlarga mos keluvchi geometrik almashtirishlar o'tkazadi:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bo'lganidan $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$ bo'ladi. U holda har bir kesim uchun

$$x_1^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - h^2)$$

$$x_2^2 = \frac{a^2}{b^2}\left[b^2 - (2h)^2\right]$$

....

....

$$x_{n-1}^2 = \frac{a^2}{b^2}\left\{b^2 - [(n-1)h]^2\right\}$$

bo'ladi, bundan

$$V_T = \sum_{k=0}^{n-1} h\pi x_k^2 = \frac{a^2 h\pi}{b^2}\left[nb^2 - h^2\sum_{\gamma=1}^{n-1}\gamma^2\right],$$

bunda γ - ketma - ket natural sonlar. Arximed ketma - ket natural sonlar kvadratlarining yig'indisini topish uchun quyidagi ko'rinishdagi geometrik baholashdan foydalangan:

$$\frac{n^3h^2}{3} < \sum_{\gamma=1}^{n-1}(\gamma h)^2 < \frac{(n-1)^3h^2}{3}$$

Bu baholash metodi uning «Spirallar haqida» degan asaridan olingan. Aslida esa u

$$\frac{n^3h^3}{3} < \sum_{r=1}^{n}(hr)^2h < \frac{(n+1)^3h^3}{3}$$

geometrik baholashni keltirgan, bundan $nh = b$ bo‘lgani uchun

$$\frac{b^3}{3} < \sum_{r=1}^{n}(hr)^2h < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} + \frac{b^3}{n^2} + \frac{b^3}{3n^3}$$

bu esa $\int_a^b x^2 dx$ ni baholashga ekvivalent. Mana shu baholashdan

$$V_T > \pi\frac{a^2}{b^2}h\left[nb^2 - \frac{n^3}{3}h^2\right] = \pi a^2 b(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\pi a^2 b$$

hosil bo‘ladi. Xuddi shu singari $V_u < \frac{2}{3}a^2\pi b$ hosil qilinadi. Ichki va tashqi chizilgan jismlar hajmlari haqidagi lemmaga ko‘ra $V_T - V_u < \varepsilon$, u holda $V = \frac{2}{3}\pi a^2 b$ ya’ni asosi va balandligi segmentning asosi va balandligi bilan bir xil bo‘lgan konus hajmining ikki hissasiga teng.

Bu limitning yagonaligi hamma hollardagi singari teskarisini faraz qilish bilan isbotlanadi.

Keltirilgan misoldan qadimgi matematikada aniq integralning Darbu (1842-1917) integral yig‘indisiga o‘xshash yuqori va pastki integrallar yig‘indisi vujudga kelganini ko‘ramiz.

Ellinizm davrining (Yevklid va Arximeddan so‘ng) uchinchi yirik matematigi Kichik Osiyoning Pergi shahrilik Appoloniydir. U taxminan e. o. 262-yilda tug‘ilib, tax. 200-yilda vafot etgan. Appoloniy asosan Aleksandriyada yashagan va o‘sha yerda Yevklid ishining davom ettiruvchilaridan ta’lim olgan. Appoloniy o‘sha davrdagi yunon madaniyatining markazi - Kichik Osiyoning shimoliy- g‘arbidagi Pergam shahriga safar qilib, u yerda Yevdem (e.o. III asr) bilan tanishgan.

Appoloniyning eng muhim asarlaridan biri «Konus kesimlari». U haqida keyinroq to‘xtaymiz. Ikkinchi asari «Nisbatlarda bo‘lish haqida». Bu asar arab tiliga qilingan tarjimasida saqlangan. Uning ikki tomdan iborat «Aniq bo‘lishlar haqida» deb ataluvchi asari ham bo‘lgan. Undan ayrim parchalar saqlangan. Mana bu masala o‘sha kitoblarga tegishli bo‘lgan: bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi to‘rtta A,B,C va D nuqta berilgan, shu to'g'ri chiziqda yotuvchi shunday R nuqta topingki, AR:CR:BR:DR berilgan qiymatga ega bo'lsin. Yuqoridagi asarida Appoloniy masalaning yechilish sharti va yechimlar sonini tekshirgan.

Appoloniyning «Urinishlar haqida» deb atalgan asari haqida Papp (III asr) quyidagilarni yozadi: «Har biri bitta to'g'ri chiziqning nuqtalari yoki doiralari bo'la oladigan uchta predmet berilgan; berilgan nuqtalarning har biridan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqlar va doiralarga urinuvchi doira yasang».

Bunda o'nta turli hol mavjud. Appoloniy ana shu o'nta holning birini qaraydi va masalani chizg'ich hamda sirkul yordamida yechadi.

U «Yassi o'rinlar» nomli ikki tomli asarida «yassi o'rinlar»-to'g'ri chiziq bilan aylananing tasnifini beradi. Pappning aytishicha, Appoloniy bu asarida birinchi bo'lib yassi o'rinlarning yassi o'rinlarga o'tkazuvchi geometrik almashtirishlar - inversiya va gomotetiyani qaraydi.

Appoloniy «Qo'yishlar» nomli asarida (u ikkita kitobdan iborat)quyidagi xossali kesmani yasash nazariyasini o'rganadi: kesma yotgan to'g'ri chiziq berilgan nuqtadan o'tsin va kesmaning uchlari berilgan ikki to'g'ri chiziqda yotsin.

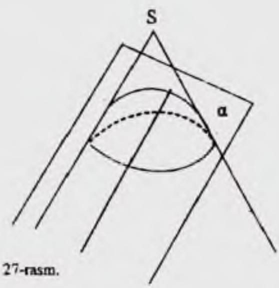
Pappning aytishiga qaraganda Appoloniy geometriyaga tatbiq etish qulay bo'lgan hamda chizg'ich va sirkul yordamida yechiladigan uchta masalani qarash bilan chegaralangan.

Konus kesimlari

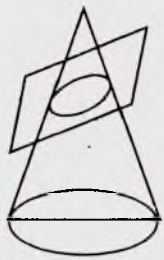
Prokl (410-485)ning fikriga qaraganda konus kesimlari haqidagi ma'lumotlar Menexm (tax. e.o. 350 y.) ga ma'lum bo'lgan. U konus kesimlaridan kubning hajmini ikki hissalash masalasini yechishda foydalangan. Undan so'ng konus kesimlari haqida Aristey (e.o. IV asr) va Yevklid (e.o. III asr) maxsus asarlar yozgan, ammo ularning asarlari bizgacha saqlanib qolmagan. Shu mavzudagi saqlanib qolgan birinchi asar Appoloniyning «Konus kesimlari» (yunonchada «Konika») dir.

«Konus kesimlari» sakkizta kitobdan iborat, uning to'rttasi original tili - yunonchada, keyingi uchtasi yunonchadan arab tiliga Sobit ibn Qurro (836-901) qilgan tarjimada yetib kelgan. Oxirgi sakkizinchi kitob yo‘qolgan. O‘sha sakkizinchi kitobning mazmunini tiklash bilan arab matematigi Ibn al-Xaysam (965-1039) shug‘ullangan. XVIII asrning boshida esa E. Galiley (1812-1910) bu kitobning o‘zi yozgan variantini tavsiya qilgan.

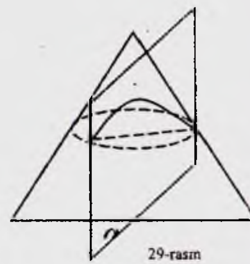
Geometriyaga birinchi bo‘lib parabola (yunoncha-παραβ0λη- tirkab qo‘yish, 27 - rasm), ellips (yunoncha-ελλε ιφις- yetishmaslik, 28 - rasm)



27-rasm.



28-rasm



29-rasm

va giperbola (yunoncha-χπερβ0λη- ortiqchalik, 29 - rasm) terminlari Appoloniyning «Konus kesimlari» asari orqali kirgan.

<u>BIRINCHI KITOB</u>. Og‘ma doiraviy konus va uning ta’rifi. Appoloniyning konusni uning uchidan har ikki tomonda qaraydi. Konus kesimlari nazariyasining asosiy tushunchalari - konusning uchi, diametri, qo‘shma diametri va o‘qining ta’rifi beriladi.

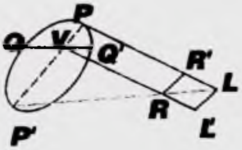
O‘sha ta’riflardan ba’zilarini keltiramiz: «Men konus deb, doira va uch hamda doira aylanasi orasida joylashgan konik sirt bilan chegaralangan figurani; konusning uchi deb, uning sirtining uchi bo‘lgan nuqtani; konusning o‘qi deb, konusning uchidan doira markaziga o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqni; asos deb, doirani atayman.

Ikkinchi tomondan, men konuslar orasida o‘qlari asoslariga perpendikularlarini to‘g‘ri deb, asoslariga perpendikular emaslarini og‘ma deb atayman.

Men tekislikda joylashgan har qanday egri chiziqning diametri deb, egri chiziqda biror berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib o‘tkazilgan barcha to‘g‘ri chiziqlarni teng ikkiga bo‘ladigan to‘g‘ri chiziqni; chiziqni uchi deb, bu to‘g‘ri chiziqning egri chiziqdagi uchini ataymani va nihoyat, diametrga tartibi bilan o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq deb, har bir parallelni atayman.

... Men egri chiziqning va ikki egri chiziqning qo‘shma diametri deb, har biri diametr bo‘lgan holda ikkinchisiga parallel to‘g‘ri chiziqlarni teng ikkiga bo‘luvchi ikki to‘g‘ri chiziqni atayman». To‘g‘ri doiraviy konusni yasovchisiga perpendikular tekislik bilan kesilsa, parabola hosil bo‘ladi. O‘tkir burchakli to‘g‘ri konusni yasovchisiga perpendikular tekislik bilan kesilsa, ellips hosil bo‘ladi. O‘tmas burchakli konusni xuddi shunday kesishdan giperbola hosil bo‘ladi.

Bu uchchala egri chiziqning xossalarini Appoloniy qiyshiq burchakli koordinatalardan foydalanib topadi: ixtiyoriy RR' diametr va unga qo‘shma QQ’ vatar koordinata o‘qlari uchun qabul qilinadi (30-rasm), koordinatalar boshi R egri chiziqda yotadi.



30-rasm.

Hozirgi belgilashlarda u quyidagicha bo‘ladi:

$$y^2 = 2px \pm \frac{p}{a}x^2$$

bunda minus ishora ellipsga, plus ishora giperbolaga to‘g‘ri keladi; parabola bo‘lganda o‘ng tomondagi ifodaning bitta hadi nolga teng; R esa egri chiziqning parametri.Bunda $y = QV;\ x = PV;\ 2a = PP';\ 2P = PL$. Appoloniy bu egri chiziqlarning xossasini geometrik algebra orqali bergan.

Birinchi kitobning anchagina qismi konus kesimlarining xossalari diametrning tanlab olinishiga bog‘liq emasligiga bag‘ishlangan.

IKKINCHI KITOB. Giperbolaning asimptotalari, qo'shma giperbolalar, konus kesimlariga o'tkazilgan urinmalarning xossalari haqida. Shuningdek, turli shartlarda urinmalarni yasashga doir masalalar qaralgan.

UCHINCHI KITOB. Kitobning birinchi qismi konus kesimlariga o'tkazilgan urinmalar va kesuvchilardan tuzilgan to'g'ri chiziqli figuralar yuzlarining tengligi haqidagi jumlalardan iborat. Qutb va polyaralarning garmonik xossasi haqidagi jumla har bir hol uchun alohida-alohida isbotlanadi.

Ellips va giperbolaning fokusi va fokusning xossasi haqidagi jumlalar ham mana shu kitobda. Fokus tushunchasidan so'ng normal haqida tushuncha kiritiladi, ammo kitobda direktrisa haqida ma'lumot yo'q.

TO'RTINCHI KITOB. Konus kesimlarining aylana bilan kesishish nuqtalari, o'zaro kesishish nuqtalari va ikki konus kesimining urinishi masalalari qaralgan. Ma'lumki, ularning o'zaro kesishish nuqtalari yunonlar uchun qadimgi masalalar-burchak triseksiyasi va kubning hajmini ikki hissaga orttirish uchun zarur bo'lgan.

BESHINCHI KITOB. Bu kitobda Appoloniy turli nuqtalardan konus kesimlariga o'tkazilgan normalni qaraydi. Kitobning kirish qismida Appoloniy ungacha ekstremal masofalar bilan shug'ullangan geometrlar diorizm tufayli-u yoki bu masalaning yechilishi shartini aniqlash uchun shug'ullanganini, u ham bo'lsa, unchalik to'liq emasligini aytadi. Shu kitobning oxirida egri chiziqning yaqin qismiga hamma vaqt normal o'tkazish mumkin bo'lgan nuqta (egrilik markazi)larni, bu nuqtalar o'rinlarining o'zgarishi (konus kesimlarining evolyutalari) va egri chiziqni teng yonli giperbola bilan kesish yordamida ixtiyoriy nuqtadan egri chiziqqa normal o'tkazishni qaraydi.

OLTINCHI KITOB. Ikkita o'xshash to'g'ri konusning kongruent va o'xshash kesimlari qaraladi. Shu kitobda berilgan kesimga kongruent kesim yasash masalasi, shuningdek, berilgan konusga o'xshash va berilgan kesimga ega bo'lgan kesimli to'g'ri doiraviy konus yasash masalasi qaraladi.

YETTINCHI KITOB. Bu kitobda bizgacha yetib kelmagan sakkizinchi kitobni yozishga tayyorgarlik ko'riladi. Unda qo'shma diametrlarga parallel vatarlar va qo'shma diametrlar kvadratlarining yig'indisi hamda ularga yasalgan parallelogrammlar yuzlarining o'zgarmasligi haqida teorema kiritilgan.

«Konus kesimlari»da Appoloniy 387 teorema va bir nechta masalalar qaragan. U qo'llagan metodlar analitik geometriya metodlaridan ustun turadi. Ammo Appoloniyda koordinatalar yo'q edi, shunga qaramasdan unda koordinata chizig'i, koordinata burchagi tushunchalari bor.

Yo'qolgan sakkizinchi kitob masalasiga kelsak, ba'zi matematika tarixchilari u oldingi yettita kitobda uchragan nazariy bilimlarni tadbiq etishga mo'ljallangan masalalar to'plamidan iborat bo'lgan, degan fikrni olg'a surishadi.

Darhaqiqat, sakkizinchi kitobni tiklashga uringan arab matematigi Ibn al-Xaysam (XI asr) ham, angliyalik astronom Edmund Galle (XVIII asr) ham sakkizinchi kitobni tiklashda yuqoridagi fikrni asos qilib olgan. Eng qizig'i shundaki, ikkala olim yashagan davr orasi 700 yil bo'lishiga qaramay ular tiklagan kitoblar bir-biridan deyarli farq qilmaydi.

Appoloniyning yo'qolgan 8-kitobining Ibn al-Xaysam tomonidan tiklangan nusxasini Turkiya olimi Nozim Terzi o'g'li Istanbulda arab tilida nashr etgan.

Matematika tarixchisi A. Abdukabirov E. Galle va Ibn al-Xaysamlarning asarlarini o'rganib, bir-biri bilan taqqoslab yuqoridagi xulosaga kelgan.

11-§. Rim saltanati davrida Aleksandriya matematika maktabi

Dastlab butun O'rta Yer dengizi rimliklarning qo'l ostida edi. Keyin ular ellinizm davri davlatlari-Yunoniston, Ptolemey va Selevkid podshohliklarini bosib oldi. Ular Misrning Ptolemey podshohligiga qaraydigan qismini e.o. 30-yili bosib oldi, ammo Aleksandriya Rim saltanati davrida ham o'zining ilmiy markazlik mavqeini saqlab qoldi. Yunon tili o'sha davrda ham xalqaro ilmiy til bo'lib qoldi. Keyinchalik lotin tili katolik dini uchun asosiy tilga aylangandan so'ng xalqaro ilmiy til darajasiga ko'tarildi.

Shuni ham eslatish joizki, Rim saltanati davridagi Aleksandriya matematika maktabi ellinizm davridagi Aleksandriya matematika maktabidan tubdan farq qiladi. Buning asosiy sababi Aleksandriya maktabi tomonidan Bobil matematiklari astronomlari an'analarining qabul qilinishida.

Ma'lumki, an'analarni o'zlashtirish juda uzoq davrni o'z ichiga oladi, ammo Rim urushi vaqtidagi Misr va Bobilning o'zaro hamkorligi bu jarayonni tezlashtirib yubordi. Natijada Aleksandriyada matematikani, ayniqsa, hisoblash matematikasini amaliyotga tatbiq etish kengaydi. Jumladan, matematika (trigonometriya) astronomik hisoblashlarga qo'llanila boshlandi.

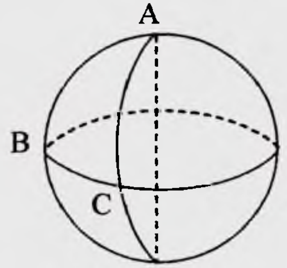
Rim saltanati davrida Aleksandriyada yashab ijod etgan olimlardan biri Gipparx (e.o. II asrning 2-yarmi). U ko'proq astronomiya bilan shug'ullangan.

Shunday olimlardan ikkinchisi Posidoniy (tax. e.o.150-50 yillar). U Yerning kattaligini, Quyoshning diametrini hisoblash bilan shug'ullangan.Proklning aytishicha, Posidoniy geometriya bilan ham qiziqqan. U parallel to'g'ri chiziqlarni bir-biridan bir xil masofada yotuvchi chiziqlar deb qaraydi. (Bu Yevklidning V postulatiga ekvivalent jumlalardan biri). Posidoniyning ta'rifi quyidagicha: «Parallel to'g'ri chiziqlar deb, shunday to'g'ri chiziqlarga aytiladiki, ular bir tekislikda yotib, bir-birlariga yaqinlashmaydi ham, bir-biridan uzoqlashmaydi ham, ularning birining nuqtalaridan ikkinchisiga o'tkazilgan perpendikularlar o'zaro teng».

«To'g'ri chiziqdan baravar uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o'rni to'g'ri chiziqdir» deyilgan jumla, Yevklidning V postulatiga teng kuchli, demak, Posidoniy Yevklidning bu postulati bilan shug'ullangan, ya'ni unga qiziqqan.

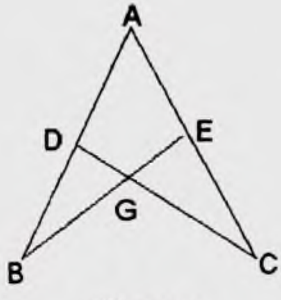
Shu davrning matematiklaridan yana biri-Menelay (1 asr) dir. U mashhur «Sferika» asarining muallifi. Menelayning bu asari bizga faqat arab tilida yetib kelgan. Uning «Geometriya elementlari» va «Uchburchaklar haqida» deb nomlangan ikki asari ham faqat arab tilida saqlanib qolgan.

Menelayning «Sferika»si uchta kitobdan iborat. Unda sferik geometriyaning dastlabki asosiy tushunchalariga ta'rif beriladi. Jumladan, sferik uchburchakka (31-rasm) sfera uchta katta doiralarining kesishishidan hosil bo'lgan *ABC* figura deb ta'rif berilgan. «Sferika»ning anchagina qismi sferik uchburchaklarning xossalariga bag'ishlangan. Demak, Menelay sferik trigonometriya asoslarini yaratuvchilaridan hisoblanadi.



31-rasm

Trigonometriya tarixida «Menelay teoremasi» deb ataluvchi teorema (III kitob, birinchi teorema) muhim rol o'ynaydi. Bu teorema tekis uchburchaklar uchun quyidagicha: o'zaro juft-jufti bilan kesishib ACGB shakl hosil qiluvchi AB, AC, BE, va CD to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin (32-rasm);

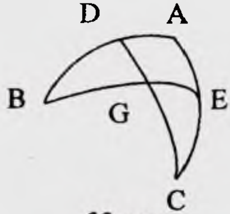


32-rasm

u holda quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\frac{CE}{AE}=\frac{CG}{DG}\frac{DB}{AB};\quad \frac{CA}{AE}=\frac{CD}{DG}\frac{GB}{BE}$$

Sfera ustida hosil bo'lgan shunday figura qaralsa, yunon matematikasida ikki hissa orttirilgan yoyga mos vatar qaraladi. Agar sfera katta doiralari yoylarining kesishishidan hosil bo'lgan ACGB (33-rasm)

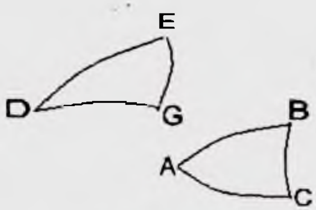


33-rasm

figura berilgan bo'lsa, ushbu munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\frac{vatar2CE}{vatar2AE}=\frac{vatar2CG}{vatar2DG}\frac{vatar2DB}{vatar2AB}$$
$$\frac{vatar2AC}{vatar2AE}=\frac{vatar2CD}{vatar2DG}\frac{vatar2GB}{vatar2BE}$$

Menelay o'z asarida sferik trigonometriyaning keyingi rivojlanishiga katta ta'sir ko'rsatgan ko'pgina teoremalarni isbotlagan. «To'rtta miqdor qoidasi» deb ataluvchi teorema ana shunday teoremalar jumlasiga kiradi: agar ikkita ABC va DEG sferik uchburchak berilgan bo'lib (34-rasm),

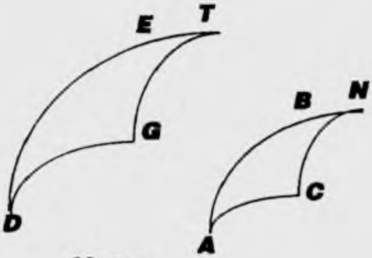


34-rasm

ularning A va D, C va G burchaklari teng (yoki birgalikda 180^0 tashkil qilsa), u holda

$$\frac{vatar2AB}{vatar2BC}=\frac{vatar2DE}{vatar2DG}$$

«Sferika»ning III kitobidagi «Tangenslar qoidasi» deb ataluvchi jumla quyidagicha: agar ikkita to‘g‘ri burchakli ABC va DEG sferik uchburchaklar berilgan bo‘lib (35-rasm) va ularda $\angle A = \angle D = 90^0$, $\angle C = \angle E \neq 90^0$ bo‘lsa va N hamda T nuqtalar AC va DG katta



35-rasm

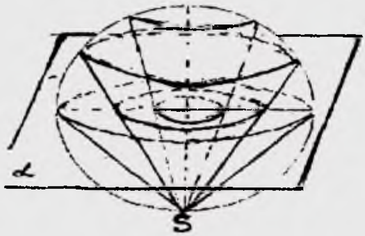
doiralarning qutblari (ya’ni $AN=DT=90^0$) bo‘lsa,u holda

$$\frac{\text{vatar}2AB}{\text{vatar}2AC}=\frac{\text{vatar}2ED}{\text{vatar}2DG}\frac{\text{vatar}2AH}{\text{vatar}2DT}$$

Mana shu davrning buyuk matematiklaridan biri - Klavdiy Ptolemey (II asr) dir. Ptolemey matematik, astronom, geograf va fizik (optik) edi. U 127 yildan 151 yilgacha Aleksandriyada astronomik kuzatishlar olib borgani va 168 yili vafot etgani haqida ma’lumotlar bor. Ptolemey o‘z kuzatishlari asosida «O‘n uch kitobdan iborat matematik to‘plam» deb atalgan asar yozgan. Arabchada u «Almagest» (to‘g‘rirog‘i «Almajistiy») deb ataladi. Ptolemeyning bu asari o‘sha davrdagi barcha astronomik ma’lumotlarni o‘z ichiga oladi.

Ptolemey «Almagest»dan tashqari, astronomiyaga doir «Analemma» («Yordamchi figura») hamda «Planisfera» degan asarlar yozgan. U oxirgi asariga matematikani keng qo‘llagan, chunki «Planisfera» da osmon sferasi o‘zaro perpendikular uchta tekislikka – meridian tekisligi, gorizont va birinchi vertikal doira tekisligiga proyektsiyalanadi. Mana shu proyeksiya yordamida astronomiyaning juda ko‘p masalalari hal etiladi. Masalan, ma’lum geografik kenglik uchun tayin kun va soatda Quyoshning gorizontdan balandligi topiladi.

Ptolemeyning bu asari arabchadan lotin tiliga tarjima qilingan. U asarda osmon sferasining stereografik proyeksiyasi ham bor. Stereografik proyeksiyada osmon shimoliy yarim sharining ekvator tekisligiga janubiy qutbga joylashtirilgan nuqtadan proyeksiyalash bayon etilgan (36-rasm).



36-rasm

Stereografik proyeksiyada doiralar yana doiralarga almashadi, ammo Ptolomey ining isbotini bermaydi. Stereografik proyeksiyaning muhim xossalaridan biri-burchaklarning o'z kattaligini saqlashi haqida ham Ptolemeyda hech gap yo'q.

12-§.Trigonometriyaning vujudga kelishi

E.o. II asrda astronomiyadan anchagina ma'lumot to'planib qoldi. Unga matematik ma'no berish zarur edi. Ularga ishlov beradigan olimlar ham bor edi. Trigonometriya astronomiyaning ehtiyoji tufayli vujudga keldi. Bu yerda shuni ham qayd qilish kerakki, trigonometriyaning «sferik trigonometriya» deb ataluvchi bo'limi tekislikdagi trigonometriyaga nisbatan oldin vujudga keldi.

Ma'lumki, trigonometriya uchburchaklarni yechish bilan shug'ullanadi. O'z vazifasiga ko'ra geometriya tarkibida bo'lishi kerak. Ammo yunonlar geometriyani aralashtirishni xohlamas edi. Shu sababli trigonometriya astronomiya tarkibida qoldi. U uzoq obyektlarni o'lchaydigan astronomiyaga bilvosita xizmat qilishi, ya'ni o'lchangan narsaga mos ammo to'g'ridan to'g'ri o'lchab bo'lmaydigan kattaliklarni o'lchashi lozim edi. Keyingi o'lchashlarni birinchisi bilan funkional bog'lash lozim edi.

Demak, uzoqlik, to'g'ri chiziq, burchak biror figuralarning elementi bo'lishi, trigonometriya esa shu figuraning xossalari va bu xossalar orasidagi bog'lanishni o'rganishi kerak edi.

Masalan, qandaydir uchta burchak bitta uchburchakka tegishli bo'lsa, u holda ularning yig'indisi 180^0 bo'ladi. Shu sababli ulardan ixtiyoriy ikkitasini o'lchab uchinchisini topish mumkin. Bundan tashqari, ixtiyoriy to'g'ri chiziqli figurani uchburchaklarga ajratish mumkin.

Demak, u kabi figurani o'rganish uchun ham uchburchaklar elementlari orasidagi bog'lanishlarni bilish kifoya. Shuningdek, ixtiyoriy uchburchakni ikkita to'g'ri burchakli uchburchakka ajratish mumkin. Mana shu to'g'ri burchakli uchburchaklarni yechish trigonometriyaning eng birinchi masalalaridan hisoblanadi.

Agar to'g'ri burchakli uchburchakning AB gipotenuzasi va A o'tkir burchagi berilgan bo'lsa, uni to'la aniqlash mumkin, ya'ni shu elementlar bo'yicha uni yasash, boshqacha esa yechish mumkin, chunki $\angle B=180^0-\angle A-\angle C$, $\angle A$ ma'lum bo'lsa, $\frac{BC}{AB}$ ni qarshisidagi katetning gipotenuzaga nisbatini topamiz va hokazo (37-rasm):

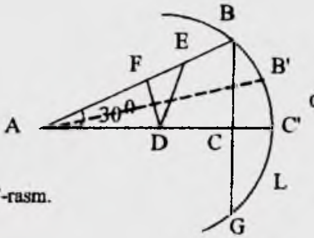
$$\frac{ED}{AE}=\frac{FD}{AD}=\frac{BC}{AB}$$

Lekin burchakning qiymati o'zgarsa, nisbatning qiymati ham o'zgaradi. Masalan, $\frac{B'C''}{AB'}<\frac{BC}{AC}$, chunki

$$\angle B'AC'<\angle A \text{ va } AB=AB'.$$

Shunday qilib, qarshidagi katetning gipotenuzaga nisbati o'sha burchakning funksiyasi ekan. Hozir biz bu funksiyani *sinus* deb ataymiz.

Qadimgilar mana shu sinusni hisoblashning aniqlik darajasini geometriya yordamida topishgan.



37-rasm.

Masalan, $\angle A=30^0$ (37-rasm) bo'lsa, A ni markaz qilib AB radiusli aylana chizgan. BC kesma davom ettirilsa, u aylana bilan G nuqtada kesishgan. $AC \perp BC$ ekanidan $CG=BC$, $\smile BL=\smile LG$, $\angle GAL=30^0$. Binobarin, BG vatar aylanaga ichki chizilgan muntazam oltiburchakning tomoni, uning radiusga nisbati bir; bundan

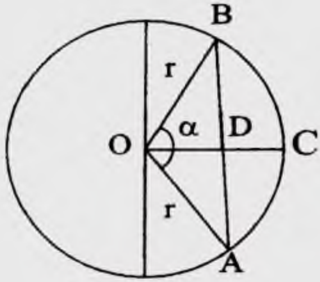
$$\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}=\sin 30^0$$

Shunday qilib, sinuslarni aniqlash Yevklid «Asoslari»ning teoremalari bilan bog'liq, ya'ni muntazam ko'pburchaklarning tomonlari unga tashqi chizilgan aylanalarning radiuslari orqali ifodalanadi.

Mana shu masalalarni hisoblashni qadimda, ya'ni e.o. II asrda Gipparx kiritgan.

Trigonometriyaning keyingi rivojlanishi Ptolemey (II asr) ning «Almagest» (arabchada «Almajistiy») asari bilan bog'liq.

U «Almagest»ning birinchi kitobida yunonlarning vatarlar bilan bog'liq bo'lgan trigonometriyasini to'liq bayon etib berdi. U faqat bitta trigonometrik funksiyaning, ya'ni biror yoyni tortib turuvchi vatarni qaradi. Ptolemeyning ikki hissali burchaklar vatarlarining jadvali hozirgi bizning sinuslar jadvalimiz bilan bir xil, chunki α markaziy burchakli r radiusli doira vatarining uzunligi $2r\sin\frac{\alpha}{2}$ ga teng (38-rasm).



38-rasm.

Uni quyidagicha yozamiz: $vatara\,p\,\alpha = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$

Biroq, vatarlar trigonometriyasini amaliyotga tatbiq etish hozirgi trigonometriyadan anchagina noqulay. Ptolemey trigonometriyaning hamma teoremalarini ham geometriyaga asosan isbotlagan. U hozirgidek, doirani 360 ta teng bo'laklarga ajratgan, diametrini esa 120 ta teng bo'laklarga bo'lgan. U holda radius 60 qism (60r) ga bo'linadi, har bir qism 60 minut (60')ga, har bir minut 60 sekund (60'')ga, har bir sekund 60 tersiya (60''')ga, har bir tersiya 60 kvarta (60^{IV})ga bo'linadi va hokazo. Bu oltmishli sanoq sistemasida hisoblashlarni bajarish trigonometriyadan foydalanishni osonlashtiradi.

Ptolemeyni turli burchaklar vatarlarining son qiymati qiziqtiradi, shu sababli u ichki chizilgan muntazam 3, 4, 5, 6 va 10 burchaklarning tomonlarini yoki 120^0, 90^0, 72^0, 60^0, 36^0 li burchaklar vatarlarining son qiymatlarinin hisoblaydigan bir nechta geometrik jumla qaraydi.

So'ngra u $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ munosabatga teng kuchli (vatar $\alpha)^2$+ [vatar $(180-\alpha)]^2 = d^2$ munosabatni topadi. Bu munosabat yordamida u to'ldiruvchi burchakning vatarini hisoblaydi. Masalan, u 36^0 li burchakning ma'lum vatari bo'yicha 144^0 li burchakning vatarini topadi.

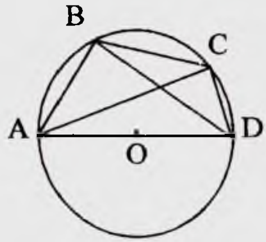
Keyinchalik Ptolemey uning nomini olgan o'z lemmasi yordamida ikki burchak ayirmasining sinusi formulasiga teng kuchli munosabatni hosil qiladi.

U quyidagi teoremadan iborat: Faraz qilaylik, doiraga ABCD to‘rtburchak ichki chizilgan bo‘lsin.

Lemma. AC va BD dioganallardan hosil bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi berilgan to‘rtburchak qarama - qarshi tomonlaridan hosil bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzlarining yig‘indisiga teng deydi, ya’ni

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Bu lemmani AD tomoni doiraning diametridan iborat bo‘lgan ichki chizilgan ABCD to‘rtburchakka tadbiq etamiz (39-rasm).



39-rasm

$$BC = \frac{AC \cdot BD - AB \cdot CD}{AD}$$

Agar $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle AOB = 2\beta$ va r=1 desak, yuqoridagi munosabat ushbu ko‘rinishda bo‘ladi :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Masalan, yuqoridagi munosabatdan bizga ma’lum 72^0 va 60^0 li vatarlardan 12^0 li vatarni topish mumkin.

So‘ngra Ptolemey berilgan yoy yarmisiga teng yoy vatarini topadi, boshqacha

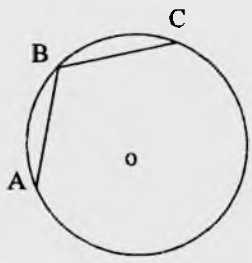
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

formulaga teng kuchli munosabatni aniqlaydi. Bu munosabat yordamida oldin hisoblangan vatarlarning qiymatlaridan foydalanib, juda ko‘p vatarlar qiymatlarini hisoblash mumkin. Masalan, 12^0 li vatar ma’lum bo‘lsa, 6^0, 3^0, $1{,}5^0$ va hokazo vatarlar qiymati topiladi.

Bu hisoblashlar «Ptolemeyga nega kerak edi?«- degan savol tug‘ilishi mumkin. Uning maqsadi $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ dan oralatib vatarlar jadvalini tuzish edi. Uni tuzish uchun $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$li vatarning qiymatini bilish kerak.

«Uni qanday bajarish kerak?« Masalan, u uchun $\left(1\frac{1}{2}\right)^\circ$burchakni teng uch qismga ajratish kerak. Ptolemey bu masala kubik tenglamaga olib kelinishini bilar edi. Shu sababli ham u boshqa yo‘llardan bordi. Vatar $\left(1\frac{1}{2}\right)^0 = 1^P34'15'$ va vatar $0^\circ45' = 0^P47'8''$ ekanidan foydalanib, vatar 1^0 ning taqribiy qiymatini topdi va yuqoridagi yarim burchak vatari munosabatidan foydalanib, $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$vatarning taqribiy qiymatini hisobladi.

O‘z hisoblashlarida u quyidagi teoremadan foydalandi: agar AB va BC lar ixtiyoriy yoylar (40-rasm) va $\breve{AB} < \breve{BC}$ bo‘lsa, u holda $BC:AB < \breve{BC}:\breve{AB}$ bo‘ladi.



40-rasm

Agar $\breve{AB} = \left(\frac{3}{4}\right)^\circ, \breve{BC} = 1^\circ$ desak, $BC:AB < 4:3$, ya’ni $BC < 4AB:3$, bundan vatar

$$1^\circ < \frac{4}{3}0^P47'8'' = 1^0 2'(50\frac{2}{3}'').$$

Agar AB$=1^0$, $\breve{BC} = \left(1\frac{1}{2}\right)^\circ$ bo‘lsa, u holda $AB > \frac{2}{3}BC$, binobarin, vatar

$1^\circ > \frac{2}{3}1^P34'15'' = 1^P2'50''$

Shunday qilib, vatar 1^0 ning taqribiy qiymati $1^p2'50''$ topildi. Demak, vatar $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ning taqribiy qiymati $0^p31'25''$ aniqlandi.

Mana shunga asosan Ptolemey doiradagi vatarlarning $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ dan 180^0 gacha qiymatlarini $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ dan oralatib hisobladi. Bu $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ dan oralatib hisoblangan $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ dan 90^0 gacha sinuslar jadvalining o'zi edi. Ptolemey jadvali hozirgi sinuslar jadvali bilan taqqoslansa, o'nli kasrlardagi verguldan so'nggi beshinchi raqami ham yaroqli ekani ko'rinadi.

Yuqorida bayon etilganlardan qadimgi yunonlar tekislikdagi trigonometriyani boshlab bergan bo'lsalar-da, unga katta ahamiyat berilmaydi, chunki uni sferik trigonometriya ko'proq tatbiq etiladigan astronomiyaga qo'llab bo'lmas edi. Faqat vatarlar jadvali va boshqa trigonometrik ma'lumotlar sferadagi trigonometrik hisoblashlar uchun qo'shimcha vosita bo'lib qoladi.

«Algamest» birinchi kitobining XIII bobi sferik trigonometriyaga bag'ishlangan. U avval sharga taalluqli teoremalarni isbotlashda qo'l keladigan bir nechta jumlani qaraydi. Ular orasida tekislikdagi va sferadagi to'la to'rt tomonlikka doir Menelay teoremasi ham bor. Shuningdek, agar 180^0 dan kichik ikki yoy vatarlarining nisbati yoki shu vatarlarning yig'indisi yoki ayirmasi berilsa, yoylarni ham topish mumkinligi ko'rsatilgan.

Mana shu ma'lumotlardan foydalanib, Ptolemey sfera katta doiralarining yoylaridan hosil bo'lgan figuraning ba'zi ma'lum elementlariga ko'ra noma'lum elementlarini topish bilan shug'ullanadi. Bu figura ko'proq to'g'ri burchakli sferik uchburchakdan iborat. Agar uchburchak o'tmas burchakli bo'lsa, u ikkita to'ri burchakli uchburchakka keltiriladi.

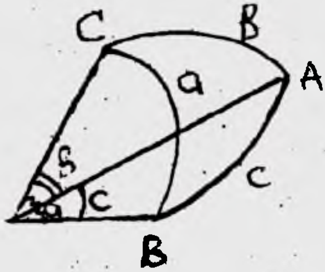
Agar Ptolemeyning aytganlarini hozirgi matematik belgilar tiliga o'tkazsak, ular quyidagicha bo'ladi: faraz qilaylik, ABC sferik uchburchak berilgan bo'lsin (41-rasm), uning tomonlari a, b, c yoylar, C burchagi to'g'ri , u holda :

1) $\sin a = \sin C \sin A$

2) $tga = \sin b tgA$

3) $\cos c = \cos a \cos b$

4) $tgb = tgc \cos A$



41-rasm

Ptolemey quyidagi ikki munosabatni bilmagan, chunki ularni Menelay teoremasidan hosil qilib bo'lmaydi:

$$\cos A = \cos a \sin B$$

$$\cos c = ctgB ctgA$$

Sferik uchburchak bilan bog'liq bo'lgan masalalar hozir uchburchakning tomonlari bilan burchaklari orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan teoremalar yordamida yechiladi. Ptolemey uni yechishda to'la to'rt tomonli figuradan foydalangan. Lekin, u sferik uchburchaklarning deyarli hamma holini yechgan, faqat uchta tomoni berilgan holgina qolgan.

Shunday qilib, Ptolemey trigonometriya sohasida o'z o'tmishdoshlaridan ancha o'zib ketgan. Eng asosiy xizmati u trigonometriyani astronomiyani turli masalalarini yechishga muvaffaqiyatli tatbiq etgan.

13-§. Rim saltanati davrida algebra va sonlar nazariyasi

Rim saltanatida fan asosan Yuliy Sezar (e.o.104-44) davrida Aleksandriya matematika maktabi ta'sirida rivojlandi. E.o. I asrda rimliklarning quldorlik davlati mislsiz rivojlanib ketdi. Jamiyat rivojlanishi harbiy texnikani, geografiyani, gidrotexnikani, arx-itek-turani va matematikani rivojlantirdi.

Yuliy Sezar «Yulduzlar haqida» degan asar yozdi. Kalendar (taqvim)ni isloh qildi, u e.o. 45 yili amalga oshirildi. Endi bir yil 365 $\frac{1}{4}$ sutka deb olindi, har to‘rt yilda bir sutka qo‘shib qo‘yiladigan bo‘ldi. Oldingi kalendarda bir yil 355 sutka edi. Sezar Rim saltanati davlatining hamma yerini o‘lchab chiqishni buyurdi. Bu ish Sezar vafotidan so‘ng Avgust (e.o.63 yildan bizning eraning 14 yiligacha) zamonida amalga oshirildi. Mana shu topshiriq natijasida rimliklar aleksandriyaliklarning yer o‘lchash bo‘yicha ishlari bilan, ge-odeziyasi bilan hamda Geronning geometriyasiga doir ishlari bilan tanishdi.

Shunday qilib, Yuliy Sezardan Trayangacha bo‘lgan davrda (tax. 150 yil) rimliklar aleksandriyaliklarning arifmetikasi va alge-braik metodlari bi lan tanishishdi. Natijada ular yunonlarning hatto lotin tiliga tarjima qilingan asarlarini ham unutib yuborishdi.

Ular arifmetik masalalarning mavqei haqida meros taqsim-lashga doir ushbu masala tasavvur beradi. Bir kishi vafoti oldidan quyidagicha vasiyatnoma qoldirdi. «Agar xomilador xotinim o‘g‘il tug‘sa, o‘g‘limga hamma boyligimning $\frac{2}{3}$ qismini, xotinimga esa $\frac{1}{3}$ qismini vasiyat qilaman; agar qiz tug‘sa, qizim boyligimning $\frac{1}{3}$ qis-mini, xotinim esa $\frac{2}{3}$ qismini olsin».

Ammo uning xotini egizak-bir o‘g‘il va bir qiz tug‘di. Endi u kishining boyligini uch kishi orasida qanday taqsimlash lozim?

Rim saltanati davrida yashagan buyuk matematiklardan Geron (II asr), Papp (IIIasr) va Diofant (tax. 250 yillar) larni eslash lozim. Geron o‘zining o‘lchashlarga doir «Metrika» asari bilan mashhur.

Diofant Aleksandriyada yashagan. Yunon antologiyasida uning qancha umr ko‘rganini ifodalovchi she’r bo‘lib, uning mazmuni quyidagicha: yoshligi uning butun umrining $\frac{1}{6}$ qismini tashkil qiladi, umrining yana $\frac{1}{12}$ qismidan so‘ng soqol qo‘yadi, yana $\frac{1}{7}$ qismidan keyin uylanadi, besh yildan keyin o‘g‘il ko‘rishadi, o‘g‘il otasining yarim yoshiga kiradi, undan to‘rt yil o‘tgach, otasi vafot etadi. Bu aytilganlardan Diofantning yoshini topish mumkin bo'lgan quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$$

Bu tenglamani yechsak, x=84. Demak, Diofant 84 yil umr ko'rgan ekan.

Bizgacha Diofant asarlaridan ikkitasi yetib kelgan. Ulardan biri «Arifmetika», ikkinchisi «Ko'pburchakli sonlar haqida». Shuni aytish kerakki, bu asarlarning birortasi ham to'liq emas. «Arifmetika»ning so'z boshida Diofant u 13 ta kitobdan iborat ekanini yozgan, bizga esa uning oltitaginasi ma'lum.

«Ko'pburchakli sonlar haqida» asarining ham oxirgi qismi yo'qolgan. «Arifmetika»da sonli to'plamlar haqida gap borganda Diofant o'zining «Porizm» nomli asarini eslaydi. Ammo, «Porizm» alohida kitobmi, yo'qmi bu noma'lum. Bizgacha esa Diofantning sonli to'plamlar haqidagi birorta ham jumlasi yetib kelmagan.

«Arifmetika»da Diofant geometrik algebraning klassik formasidan voz kechadi. Ammo u shartli ravishda «kvadrat», «tomonlar» va «yuzlar» haqida gapiradi. Endi Diofant yuzlarni geometrik miqdor deb emas, balki son deb qaraydi.

Diofant geometrik belgilashlardan voz kechib, matematikaga harfiy belgilashlarni kiritadi. Bu bilan u matematikaga yangi til-harfiy hisoblashlarni kiritdi. Algebra noma'lum kattaliklar bilan ma'lum kattaliklar orasida bajariladigan amallardan boshlangan edi. Algebraik belgilashlar nimadan boshlandi? Demak, simvolika ham noma'lumni belgilashdan boshlanadi.

Diofant noma'lumning birinchi oltita musbat va manfiy darajalari uchun belgilashlarni kiritdi. Noma'lumning birinchi darajasini ag'darilgan sigmaga o'xshash ς harf bilan, noma'lumning kvadratini Δ^v bilan, kubini K^v bilan, to'rtinchi darajasini $\Delta\Delta^v$ bilan, beshinchi darajasini ΔK^v bilan va oltinchi darajasini KK^v bilan belgiladi. Bu belgilashlardan birinchi uchtasi alohida bo'lib, keyingi uchtasi esa o'zaro bog'liq, ya'ni to'rtinchi daraja-»kvadratu-kvadrat», beshinchi daraja- «kvadratu-kub», oltinchi daraja-»kubu-qub». U manfiy darajalarni surati birga teng o'sha darajalar bilan belgilaydi. Diofant ozod hadni bir - M^0 ko'rinishida tasvirladi. Bundan tashqari, unda ayirish belgisi $\uparrow$ va qisqartirish belgisi, tenglik belgisi i bor edi. Diofant asarida hozirgi bizning belgilashlarda

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$$

ko'rinishda bo'ladigan tenglama ham bor.

Shuni qayd qilish lozimki, Diofantdan so'ng qariyb 1200 yil davomida noma'lumni, uning darajalarini, ular ustida amallarni belgilash va bu belgilashlarni takomillashtirish ustida ish olib borildi. Ixtiyoriy o'zgarmas miqdorni belgilashni XVI asrda yashagan Viyet asarlarida ko'ramiz.

Diofant o'z asarida ko'phadlarni qo'shish, ayirish va ko'paytirish qoidalarini berdi. Ana shu yerda uning ishoralar qoidasi ham uchraydi: «ayriluvchiga ko'paytirilgan ayriluvchi qo'shiluvchini beradi». Shundan so'ng u tenglamalarni qaraydi va quyidagi ikki qoidani beradi:

1) tenglamaning hadini tenglamaning bir qismidan ikkinchi qismiga teskari ishora bilan olib o'tish qoidasi (bu qoidani keyinchalik al-Xorazmiy «al-jabr» termini bilan atadi);

2) tenglamaning o'xshash hadlarini ixchamlash (uni al-Xorazmiy «al-muqobala» deb atagan).

Diofantning «Arifmetika»sida o'rtaga tashlangan asosiy masala noaniq tenglamalarni ratsional sonlarda yechish edi. Odatda Diofant yechimni bitta parametrli ratsional funksiya ko'rinishida tasvirlaydi. U o'zi topgan yechim tenglamaning hamma yechimlarini beradimi yo'qmi, u bilan qiziqmaydi. Diofant asarida birinchi, ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi darajali aniqmas tenglamalar bor.

Uning ba'zi masalalarini hozirgi belgilashlarda keltiramiz:

1) noma'lumning $a^2x^2 + bx + c = y^2$ yoki $ax^2 + bx + c^2 = y^2$ ifodani to'liq kvadratga aylantiruvchi qiymatlarini toping.

Birinchi holda $y = ax + z$ deb, ikkinchi holda esa $y = zx + c$ deb oladi. Ana shunda x noma'lum z orqali ratsional ifodalanadi. Hozirgi kunda integral hisobida ana shunday o'rniga qo'yishdan foydalaniladi.

«Arifmetika»ning ikkinchi kitobida Diofant ikkinchi darajali ikkita tenglamalar sistemasini tuzishga keladigan masalalar bilan shug'ullanadi.

2) masalalarni yechishda Diofant ko'pincha $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ formuladan foydalanadi.

Masalan, «Berilgan ikki songa ayni bitta shunday son qo'shingki, ularning har biri kvadratga aylansin», ya'ni

$$\begin{cases} x+a=y^2 \\ x+b=z^2 \end{cases}$$

sistemani yechish lozim. Diofant $a=2$, $b=3$ deb oladi.

So'ngra $(x+3)-(x+2)=1$ ayirmani tuzadi va ko'paytmasi mana shu ayirmaga teng bo'ladigan ikki son (4 va $\frac{1}{4}$) ni qidiradi. Keyin $x+2=\left(\frac{4-\frac{1}{4}}{2}\right)^2$ yoki $x+3=\left(\frac{4+\frac{1}{4}}{2}\right)^2$ deb olib, $x=\frac{97}{64}$ ekanini topadi.

Bunda Diofant $b-a=z^2-y^2$ yoki $b-a=(z-y)(z+y)=uv$ ekanidan foydalangan. Keyin esa $u=z+y$, $v=z-y$ undan

$$z=\frac{u+v}{2};\quad y=\frac{u-v}{2},\ \text{ya'ni}\ x+a=\left(\frac{u-v}{2}\right)^2;\quad x+b=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$$

3) Ikkinchi kitobning sakkizinchi masalasi quyidagicha: «Berilgan kvadrat sonni ikkita son kvadratining yig'indisiga yoying».

Diofant berilgan son deb 16 ni oladi, izlangan kvadratlardan biri $x2$ bo'lsin, u holda ikkinchi $(2x-4)^2$ va $x^2+(2x-4)^2=16$ $5x^2-16x+16=16$; $5x^2=16x$; $x=16/5$. Demak, kvadratlardan biri $256/25$, ikkinchi $144/25$.

Keyinchalik mana shu masalaga Fermanning bergan izohi ma'lum: «Aksincha, kubni kublar yig'indisiga, bikvadratni bikvadratlar yig'indisiga, umuman kvadratdan katta har qanday darajani shunday ikkita darajaning yig'indisiga yoyish hech ham mumkin emas. Men unga haqiqatan ham ajoyib isbot topdim, ammo kitobning hoshiyasi bu uchun juda tor».

Hozir Fermanning katta teoremasi deb ataluvchi mana shu teorema umumiy holda isbotlangan.

4) sonlar nazariyasi bilan bog'liq bo'lgan yana bitta misol keltiramiz:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \pm i = \left(i=1,2,3,4)^2\right)$$

Bu Diofant Arifmetikasi ikkinchi kitobning 22-masalasi. Diofant to'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadratidan katetlar ko'paytmasining ikki hissasi ayirilsa, yoki unga qo'shilsa, u kvadratligicha qolishini topdi, ya'ni $c^2 \pm 2a\textit{в} = a^2 + \textit{в}^2 \pm 2a\textit{в} = (a \pm \textit{в})^2$. Shu sababli, oldin u gipotenuzasi bir xil bo'lgan to'rtta uchburchak qidirdi. Bu masala ushbu masalaga ekvivalent: shunday kvadrat topish lozimki, uni to'rt xil ko'rinishda ikkita kvadratning yig'indisi shaklida ifodalash mumkin bo'lsin.

Bu masalani yechish uchun Diofant avval tomonlari 3, 4, 5 va 5, 12, 13 butun sonlar bilan ifodalangan ikkita to'g'ri burchakli uchburchak oladi. Birinchi uchburchakning hamma tomonini ikkinchi uchburchakning gipotenuzasiga uchburchakning hamma tomonini birinchi uchburchakning gipotenuzasiga ko'paytirib, 39, 52, 65 va 25, 60, 65 sonlarini hosil qiladi. Gipotenuzasi bir xil bo'lgan ikkita uchburchak topildi. Bunda 65 ni ikki xil ko'rinishda ikkita kvadratning yig'indisi sifatida tasvirlash mumkin:

$$65 = 16 + 49 = 1 + 64.$$

Diofantning bu yoyishi quyidagi ikki formaning kompozitsiyasidan tuziladi:

$$\left(a^2+\textit{в}^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac+\textit{в}d)^2 + (ad-\textit{в}c)^2 = (ac-\textit{в}d)^2 + (ad+\textit{в}c)^2$$

Shu sababli ham Diofant gipotenuzalari ikki kvadratning yig'indisidan iborat ikkita uchburchak oladi: $5=1+4$ va $13=9+4$.

Endi aniqmas tenglamalarni yechish formulalaridan foydalansak:

$$x^2+y^2=z^2,$$

$$z=p^2+q^2, \quad x=2pq, \quad y=p^2-q^2$$

65 ni to‘rt xil ko‘rinishida ikki kvadratning yig‘indisi sifatida ifodalashning osonligini ko‘ramiz. Buning uchun $p=4$ va $q=7$ ham $p=1$ va $q=8$ deb olish yetarli. Ular quyidagilar: 39, 52, 65; 25, 60, 65; 33, 56, 65; 16, 63, 65.

Bu masalaga Ferma quyidagicha izoh bergan: $4n+1$ ko‘rinishidagi ixtiyoriy tub son, shuningdek, uning kvadrati yagona usulda ikki kvadratning yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlanadi, $4n+1$ tub sonning uchinchi va to‘rtinchi darajalari ikki xil usulda ikki kvadratning yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlanadi, beshinchi va oltinchi darajasi uch xil usulda tasvirlanadi va hokazo. $4n+1$ ko‘rinishdagi ikki tub sonning ko‘paytmasi ikki xil usulda ikkita kvadratning yig‘indisi sifatida tasvirlanadi.

Diofantning bu asari matematika tarixida juda katta ahamiyatga ega. U o‘rta asr Sharq matematiklarining ishlarida algebraning rivojlanishiga, ular orqali XVI-XVII asr Yevropa matematiklari ishiga ham katta ta’sir ko‘rsatdi. Diofantning «Arifmetika» si Ferma ijodiga o‘z ta’sirini ko‘rsatadi. U o‘zining sonlar nazariyasiga doir kashfiyotlarini bevosita shu asar ta’sirida qildi.

14-§. Sharq (Xitoy) matematikasi

Ellinizmning ta’siriga qaramay, Yaqin Sharqning qadimiy madaniyati yo‘qlab ketmadi. Aleksandriya fanida esa, ham Sharqning, ham Yunonlarning ta’siri saqlanadi. Aytaylik, Konstatinopol ham, Hindiston ham, Sharq bilan G‘arb aloqasida muhim rol o‘ynadi.

395-yili Feodosiy I Vizantiya davlatini tuzdi. Uning tarkibiga Bolqon yarim oroli, Kichik Osiyo, O‘rta Yer dengizining janubiy sharqiy qismi kirar edi. Poytaxti Konstantinopol - yunon shahri edi, ammo bu yerdagi aholining bir qisminigina yunonlar tashkil qilardi. Bu yerda suriyaliklar, qopitlar, armanlar va boshqa xalqlar yashardi. Bu davlat juda uzoq yillar yunon madaniyatini himoya qilib keldi.

Bobil tezgina rimliklarning ham, yunonlarning ham ta’siridan chiqib ketdi. Inda daryosi atroflari ham eramizning I asrigacha yunonlar qo‘l ostida bo‘ldi. Ular o‘rniga qolgan hind qirollari Forslar va G‘arb bilan aloqa bog‘ladi.

Yaqin Sharqda islomning vujudga kelishi yunonlarni bu yerlardan ham mahrum etdi. Endi madaniyat markazi Xitoy va Hindiston tomonga ko‘chdi.

Xitoy matematikasi

Biz Xitoy matematikasi haqida e.o. II asrlarga taalluqli materiallarni bilamiz. Ular asosida taqvim (kalendar) bilan bog‘liq, chunki Xitoyliklarning ham asosiy mashg‘uloti dehqonchilik bo‘lgan va ular sholichillik bilan shug‘ullanishgan. Taqvim esa ularga sholini o‘z vaqtida sepish va xirmonni o‘z vaqtida ko‘tarish uchun zarur edi. Eramizning XIV asrida ham astronomlar OY taqvimi bilan QUYOSH taqvimini moslashtirish bilan mashg‘ul edilar. Ma’lumki, oy yili 364 sutka bo‘lib, u tropik yildan II sutkaga qisqa va dehqonchilik ishlari uchun juda noqulay. Mana shu noqulaylikni bartaraf etish uchun xitoylik astronomlar tropik yilini qabul qilishdi va uning davomliligini 365-u, chorak sutkaga teng deb hisoblashdi.

Matematikaga doir asosiy ma’lumotlar «To‘qqiz kitobdan iborat matematika» nomli asarda berilgan. Bu asar Xan sulolasi davrida, ya’ni e.o. 206 yillar atrofida yozilgan. Xitoydagi juda katta qurilishlar-buyuk Xitoy devori, gidrotexnik inshootlar qurilishi mana shu Xan sulolasi davriga to‘g‘ri keladi.

Eramizning I va II asrlarida yashagan astronom Chjan Xen globus yasagan, planetariy qurgan, yerning kattaligini hisoblagan va π sonining tarkibiy qiymatini hisoblash bilan shug‘ullangan.

Eramizning I asridan boshlab Xitoy matematiklari «To‘qqiz kitobdan iborat matematika» ta’sirida asarlar yarata boshlashgan. Ba’zilari esa o‘sha asarni sharhlash bilan mashg‘ul bo‘lgan. Aga shu kabi matematiklar jumlasiga Lyu Xuey (III asr), Sun-Szu (III-IV asr), Chun-Chji (V asr), Lyu Chji (VI asr) va boshqalar kiradi.

Ilgari eslatganimizdek, II asrda Xitoyda qog‘oz kashf qilindi. VIII asrda Xitoyning janub va shimolini bog‘lovchi uzunligi 1700 km bo‘lgan buyuk kanal qurilishi boshlandi va u XIII asrda qurib bitkazildi. Xitoyliklar II asrdan boshlab Xindiston, Indoneziya, O‘rta Osiyo va Arabiston bilan savdo-sotiqni yo‘lga qo‘ydi. O‘rta Osiyo orqali Yevropa bilan aloqa qila boshladi.

Eng qadim zamonlardan boshlab Xitoyda bolalar tarbiyasiga alohida ahamiyat berilishini qayd etish lozim. Chjou sulolasi davrida (1027-249) bolalarga 6-8 yoshidan boshlab arifmetikani o'rgatishni ishlab chiqilgan ekan.

Ular bajargan ishlardan eng muhimi, chizimcha yordamida Yer meridianining bir gradusining uzunligini o'lchash hisoblanadi. Bu masalani 600 yili Lyu Chjo o'rtaga tashlagan, uni 725 yili astronom Nan Gusho bajargan.

X-XIII asrlarda xitoyliklar kemasozlikni yo'lga qo'yishdi, dengizda suzishda kompasdan foydalana boshlashdi, magnit millari xossasini o'rganishdi. Butun dunyo xaritasi chizildi. Tenglamalarni yechish va tekshirish buyicha matematiklar Sin Szyu, Li YE va boshqalar katta tashabbus ko'rsatishdi.

Qadimgi xitoy nomeratsiyasi

Xitoyliklarning qadimgi nomeratsiyasi haqida folbinlar ishlatgan e.o. XIV- XI asrlarga taalluqli, suyaklar va tangalar asosida hukm chiqaramiz. Ulardagi raqamlarga qaraganda sanoq sistemasining asosi o'nli xarakterga ega (3- jadval 1, 2 va 3 ustunga qarang).

Sonlarning yozilishi addativ va multiplikativ xossalarga ega, ya'ni qo'shilish va ko'paytirish xossalariga ega. Masalan. 20 ≠ bu 2*10 degani, yoki 40╪, bu 4*10.

Jadvaldan ko'rganimizdek, 100 va 1000 sonlari uchun alohida belgilar bor, ammo ularda iyerogliflar ham mavjud va bu iyerogliflar ham multiplikativ xossaga ega. Masalan, 325 ni iyeroglif yordamida yozish uchun 3 ning ostiga 100 ning belgisi, 2 ning ostiga 20 ning belgisi qo'yiladi va 5 ning o'zi yoziladi.

Raqam-tayoqchalar yordamida sonlar quyidagicha yoziladi. Masalan, 6728. 𝍮𝍦𝍪𝍧

Bundan, sonlar qatorga yuqorixona birliklaridan boshlab yozilishini payqash qiyin emas (Jadval bilan solishtiring).

II asrda Xitoyda uchta hisob sistemasi – «yuqori», «o'rta» va «quyi» sinflari mavjud bo'lgan:

	Yuqori hisob	O‘rta hisob	Quyi hisob
Van	10^4	10^4	10^4
I	10^8	10^8	10^5
Chjao	10^{16}	10^{12}	10^6
Szin	10^{32}	10^{16}	10^7

Arifmetik amallar

Qo‘shish. Hozirgi bizning raqamlarda yozilgan 9876 va 5647 sonlarini xitoycha usulda qo‘shishni qaraymiz:

1 5 5 2 3	
1 5 5 1 6	7
1 5 4 7 6	47
1 4 8 7 6	6 4 7
9 8 7 6	5 6 4 7

Bu sxemadan ham sonlar yuqori xona birliklaridan boshlab qo‘shilganligini ko‘ramiz.

Ko‘paytirish. Misol, 234 va 24 ga ko‘paytirishda ko‘paytuvchining quyi xonasi 24, ko‘payuvchining yuqori xonasi tagiga yoziladi va ko‘paytuvchi 2 ga ko‘paytiriladi. Hosil bo‘lgan 48 o‘rta qatorga yoziladi. So‘ngra ko‘paytuvchi bir xona o‘ngga suriladi. Ko‘payuvchidagi 2 raqam tashlab yuboriladi. Ko‘paytuvchi 3 ga ikki marta ko‘pay-tiriladi: avval 2 ni 3 ga ko‘paytirib, 6 ni 48 ga qo‘shiladi, so‘ngra 4 ni 3 ga ko‘paytirib, 12 ni 540 ga qo‘shiladi, natijada 552 hosil bo‘ladi va hokazo:

Xitoyda I asr boshlaridayoq 2x1 dan 9x9 gacha ko‘paytirish jadvali bo‘lgan.

Bo‘lish. Xitoyliklar bo‘lishini ko‘paytirish amaliga teskari amal sifatida qarashgan. Misol tariqasida hozirgina ko‘rgan misolimizning teskarisini, ya’ni 5616 ni 24 ga bo‘lish sxemasini qaraymiz:

2	2	23	23		234	234
5616	5616	1616		816	216	96
24	24	24	24		24	24

Kasrlar. $\frac{m}{n}$ ko‘rinishidagi kasrlar xitoyliklarga juda qadim zamonlardan ma’lum bo‘lgan. Ularning maxsus belgisi bo‘lmagan, ular «m ning n - qismi» deb yozilgan. Juda ko‘p ishlatiladigan kasrlar uchun iyerogriflar bo‘lgan. Masalan, «To‘qqiz kitobdan iborat matematika» da $\frac{1}{2}$ (ban) 半 iyeroglif bilan, (shao/ban) 少半 iyeroglif bilan, $\frac{2}{3}$ (tayban) 太半 bilan ko‘rsatilgan. Butun sonni kasrga ko‘paytirish birinchi marta Xitoy matematikasida uchraydi. Kasrni kasrga bo‘lishni o‘rta asrlarda xitoyliklar quyidagicha bajarishgan:

$$\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=\frac{4}{3}:\frac{3}{4}=\frac{4\cdot 4}{3\cdot 3}=\frac{16}{9}$$

Hozirgi kasrlarni bo‘lishda biz qo‘llaydigan qoidani M. Shtifel (1486-1576) 1547 yili taklif etgan.

O‘nli kasrlar. O‘nli kasrlar xitoyliklarning uzunlik va og‘irlik o‘lchovlarida uchraydi. II asrga taalluqli uzunlik o‘lchovlari quyidagilar: 1 chi (fut) = 10 sun, 1 sun =10 fen, 1 fen = 10 li, 1 li = 10 fa, 1fa=10 xao.

X asrda quyidag og‘irlik o‘lchovlari mavjud bo‘lgan: 1 lan =10 syan, 1 syan = 10 fen, 1 fen = 10 li, 1 li=10 xao, 1 xao=10 so‘, 1 so‘ =10xu.

Xitoyliklar V asrda π soni uchun taxminan, 3, 14 15 92 7 qiymat topishgan.

O‘nli kasrlar ustida amallar bajarishga doir misollar XIII asrda yashagan xitoylik algebrachi Yan Xueyda uchraydi. U figuralarning yuzlarini hisoblashda o‘nli kasrlarni ham ishlatadi. Ammo, xitoyliklarning o‘nli kasrlari asosan uzunlik, og‘irlik va boshqa o‘lchovlar bilan bog‘liq edi.

O‘lchovlarga bog‘liq bo‘lmagan o‘nli kasrlar va ular ustida bajariladigan amallarni Ulug‘bek Samarqand astronomiya matkabining vakili G‘iyosiddin Jamshid al-Koshiy (XIV- XV asrlar) va gollandiyalik matematik Simon Stevin (1548-1620) lar rivojlantirgan.

«**To‘qqiz kitobdan iborat matematika**». Bu asar Xitoy matematiklarining bir necha yuz asrlar davomida qilgan ishlarining yakuni hisoblanadi. Kitob tanobchilar, quruvchilar, savdogarlar va hunarmandlarga mo'ljallangan. Materiallarni kitoblar bo'yicha taqsimlashda u qaysi kasbdagi kishilarga mo'ljallanganligiga e'tibor berilgan. Masalan, birinchi kitobda yuzlarni hisoblash, beshinchi kitobda hajmlarni hisoblash berilgan bo'lsa, to'qqizinchi kitobda to'g'ri burchakli uchburchaklarning xossalarini tatbiq etib, yechiladigan masalalar va Pifagor teoremasi tatbiq etiladigan masalalar keltirilgan.

Kitobda materiallarni bayon etish usuli eskicha, ya'ni dogmatik, 246 ta masala kirish so'zisiz va hech qanday tushuntirishsiz quyidagi tartibda tavsiya qilinadi: masalaning sharti ifodalanadi, javobi beriladi va qisqacha yechiladi.

BIRINCHI KITOB. «Dalalarni o'lchash» deb ataladi. Unda ba'zi to'g'ri chiziqli figuralarning hamda doir va doira bo'laklarining yuzlarini hisoblash qoidalari, kasrlar va ular ustida bajariladigan amallar berilgan.

IKKINCHI KITOB. «Turli xil donlar hajmlari orasidagi munosabatlar» deyiladi. Bu kitob bir don miqdorining ikkinchi xil donning qanchasiga almashtirish haqidagi jadval bilan ochiladi. So'ngra biror don miqdorini ikkinchi xil don miqdoriga ayriboshlashga doir 31 ta masala beriladi.

UCHINCHI KITOB. «Darajalar bo'yicha bo'lish» deb nomlangan. Kitobning nomidan ham u miqdorlarni berilgan sondagi proporsional bo'laklarga bo'lishdan iborat ekani ko'rinadi. Kitobning birinchi masalasida beshta bug'i go'shtini turli darajadagi mansabdorlar orasida 5:4:3:2:1 nisbatda bo'lish talab qilinadi.

TO'RTINCHI KITOB. Uning xitoycha nomi «Shao guan». U to'g'ri to'rtburchakning yuzi va bir tomoni bo'yicha ikkinchi tomonini topish, kvadratning tomonini uning yuzi bo'yicha topish, kubning qirrasini uning hajmi bo'yicha topish, doira yuzi va sharning hajmi bo'yicha ular diametrini topish kabi masalalarga bag'ishlangan. Demak, kitobda berilgan sonlardan kvadrat va kub ildizlar chiqarish usuli ko'rsatiladi.

BESHINCHI KITOB. «Ishlarni baholash». Devor, kanal, to'g'onlarning hajmini hisoblash. Ma'lum bir ishni bajarish uchun zarur ishchilar sonini aniqlash kabi masalalardan iborat.

OLTINCHI KITOB. «Proporsional taqsimlash». Bu kitobga chiziqli masalalar to'plangan. Masalan, bir-biriga qarab yuruvchilar orasidagi masofani yoki orqama-ketin ketayotgan piyodalarning bosgan yo'lini topish kabi masalalar. Aytilganlardan tashqari, arifmetik progressiyaga doir bitta masala ham yechilgan.

YETTINCHI KITOB. «Ortiqchalik va yetishmovchilik» deb ataladi. Bu kitobda birinchi darajali ikki noma'lum tenglamalar sistemalarini yechish usullari tavsirlangan. Bu usullardan biri biz Misr matematikasini bayon etganimizda eslatilgan «yolg'on faraz» metodi ham bor.

SAKKIZINCHI KITOB. «Fan chen». Bu kitob bir necha noma'lumli tenglamalar sistemasini yechish algoritmidan iborat.

TO'OOIZINCHI KITOB. «Gou-gu» deb ataladi. Unga to'g'ri burchakli uchburchaklarni tatbiq etib yechiladigan masalalar to'plangan. Bu masalalar turlicha: ularning ba'zilar haqiqatan ham amaliy ahamiyatga ega, ba'zilari esa anchagina abstrakt xarakterda.

Chiziqli tenglamalar sistemasini va yetishmovchilik metodi bilan yechish

Bu metod qo'llab yechiladigan masalalardan bir turi bizning belgilashlarimizda quyidagi sistemaga keladi:

$$\begin{cases} a_1x = y + d_1, \\ a_2x = y - d_2, \ (a_1 > a_2) \end{cases}$$

bunda a_1, a_2 norma, d_1 -ortiqchalik, d_2-yetishmovchilik.

Yechish: $(a_1 - a_2)x = d_1 + d_2$ yoki

$$x = \frac{d_1 + d_2}{a_1 - a_2}$$

Ikkinchi noma'lumni topish uchun birinchi noma'lum uchun aniqlangan ifodani sistemaning biror tenglamasiga olib borib qo'yamiz:

$$y = a_1x - d_1 = a_1\frac{d_1 + d_2}{a_1 - a_2} - d_1 = \frac{a_1d_1 + a_1d_2}{a_1 - a_2} - d_1 =$$
$$= \frac{a_1d_1 + a_1d_2 - a_1d_1 + a_2d_1}{a_1 - a_2} = \frac{a_1d_2 + a_2d_1}{a_1 - a_2}$$

Tenglamalar sistemasidagi d_1 va d_2 larning har ikkalasi ham ortiqcha bo'lsa, yechim quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} a_1x = y + d_1, & (a_1 > a_2) \\ a_2x = y + d_2, \end{cases}$$

$$(a_1 - a_2)x = d_1 - d_2 \text{ yoki}$$

$$x = \frac{d_1 - d_2}{a_1 - a_2} \quad \text{va} \quad y = \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1 - a_2}$$

Bu masalaning boshqa turlari, masalan d_1 va d_2 yetishmovchi, biri ortiqcha-yu, ikkinchisi muvozanatda bo'lgan hollari, ya'ni

$$\begin{cases} a_1x = y + d_1 \\ a_2x = y \end{cases}$$

yoki sistema tenglamasining birinchisi yetishmovchi-yu, ikkinchisi muvozanatda bo'lgan

$$\begin{cases} a_1x = y - d_1 \\ a_2x = y \end{cases}$$

hollari qaraladi.

Bir necha noma'lumli tenglamalar sistemasi

Sakkizinchi kitobda keltirilgan n noma'lumli tenglamalar sistemasining yechish metodini ko'rib, u kanonik sistemalarga taalluqli ekanini payqaymiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right| \qquad (1)$$

Sistemaning matritsasi quyidagicha tuziladi:

$$\left.\begin{array}{r} a_{1n},\ldots,a_{21},a_{11} \\ a_{2n},\ldots,a_{22},a_{12} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn},\ldots,a_{2n},a_{1n} \\ b_n,\ldots,b_2,b_1 \end{array}\right| \qquad (2)$$

(1) sistema matritsasining o‘ngdan birinchi ustun elementlarini ikkinchi, uchinchi va hokazo ustunlarning a11 ga ko‘paytirilganidan ayirish bilan o‘zgartiramiz. Ayirish birinchi ustunda a11 dan boshqa element qolmaguncha davom etadi.

$$\left.\begin{array}{r} a_{11} \\ a_{n2}^{(1)},\ldots,a_{22}^{(1)},a_{12} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{(1)},\ldots,a_{2n}^{(1)},a_{1n} \\ b_n^{(1)},\ldots,b_2^{(1)},b_n \end{array}\right| \qquad (3)$$

Bu jarayonni davom ettirib, nihoyat, quyidagi jadvalga kelinadi:

$$\left.\begin{array}{r} a_{n1} \\ a_{22}^{(1)}\ a_{12} \\ a_{33}^{(1)}\ a_{23}^{(1)},a_{13} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{(1)},\ldots,a_{3n}^{(1)},a_{2n}^{(1)},a_{1n} \\ b_n^{(n-1)},\ldots,b_3^{(2)},b_2^{(1)},b_n \end{array}\right| \qquad (4)$$

Yordamchi sistema tuziladi:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2 \\ a_{33}^{(2)}x_2+\ldots+a_{3n}^{(2)}x_n=b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n=b_n^{(n-1)} \end{array}\right| \qquad (5)$$

Endi x_n, x_{n-1}, ..., x_1 noma’lumlar (4) jadval vositasida ketma-ket hisoblab topiladi.

ANIQMAS TENGLAMALAR. Xitoy matematikasida aniqmas tenglamalarni butun sonlarda yechish lozim bo'lgan tenglamalarga keluvchi ko'pgina matematik masalalar uchraydi. O'shanday masalalardan biri va uning hozirgi matematik belgilashlarda yechilishini keltiramiz.

MASALA. 78 ta katta va kichik diametrli bambuk 576 syan turadi. (Masala shartida kichik diametrli bambuklar katta diametrli bambuklardan 1 syan arzon turishi aytilmagan. Bundan tashqari, baholar butun sonlarda ekani haqida ham hyech narsa deyilmaydi). Bambuklarning narxini toping.

YECHISH. Katta diametrli bambuklarni x dona va bahosi u syan desak, kichik diametrli bambuklarni y dona va bahosini v syan desak, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=78 \\ ux+vy=576 \\ v=u+1 \end{array}\right\}$$

Bu sistemani o'rniga qo'yish usuli bilan yechamiz:

$$x=78-y\ ;\ u(78-y)+vy=576;$$
$$78u-uy+vy=576;\ 78u-uyQ(u+1)y=576;$$
$$78u-uy+uy+y=576;\ 78u+y=576;$$

$u+\frac{y}{78}=7+\frac{30}{78}$; Demak $u=7$, $y=30$ u holda $v=8$ va $x=48$.

Kvadrat tenglamaga keladigan masalalar

«To'qqiz kitobdan iborat matematika»da to'g'ri to'rtburchakning tomonlari shu tomonlar ayirmasi va dioganalining uzunligi bo'yicha topishga doir masala bor.

Masala shartida $x-y=6,8$ va $d=\sqrt{x^2+y^2}=10$ ekani berilgan. Natijasi oradagi hisoblashlarsiz quyidagi formula bilan topilgan:

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2-2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}-\frac{l}{2}=2{,}8$$

$$x=\sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2-2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}+\frac{l}{2}=9{,}6$$

Oradagi hisoblashlar bizning belgilashlarda quyidagicha bo‘lgan:

$$\begin{cases} x^2+y^2=d^2 \\ x-y=l \end{cases} \qquad (1)$$

(1) ning ikkinchi tenglamasidan $x=l+y$ ni topib, birinchi tenglamaga qo‘yamiz:

$$(l+y)^2+y^2=d^2,\ l^2+2ly+y^2+y^2=d^2,$$
$$2y^2+2ly+l^2=d^2\ (2)$$

(2) tenglamaning har ikkala qismidan $\left(\frac{l}{2}\right)^2$ ni ayiramiz va ikkiga bo‘lamiz:

(3)

$$\left(y+\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left[d^2-2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]$$

bundan

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2-2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}-\frac{l}{2}$$

$$x=\sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2-2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}+\frac{l}{2}$$

Xitoy matematikasida kvadrat tenglamaga keladigan

$$\begin{cases} x\pm y=a \\ xy=b \end{cases}$$

ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasi ham bor.

Bu aytilganlardan tashqari, ular kvadrat va kub ildiz chiqarish usullarini bilishar edi. Xitoyda astronomiya anchagina rivojlangan, shu sababli sferik trigonometriya ham ancha yuqori darajada edi. Ular chekli sondagi ketma-ketliklarning yig'indisini ham bilishar edi.

GEOMETRIK BILIMLAR. Dastlabki geometrik tushunchalar e.o. XIII-XI asrlarga taalluqli. Ular uy-ro'zg'or buyumlariga chizilgan muntazam 5, 7, 8, 9 burchaklardir. To'g'ri burchakli uchburchak tomonlari orasidagi munosabatlarga ham xitoylik matematiklar erta e'tibor bergan.

Masalan, «Chjou-bi-suan-s'in» (chjau-bi-gnomon, miqyos) 3, 4 va 5 sonlari uchun Pifagor teoremasi bor.

Xitoyliklarning «To'qqiz kitobdan iborat matematika» nomli asarining IX kitobi masalalar yechishga bag'ishlangan. Masalalar orasida geometriyaga doirlari ham anchagina, masalan, 4-masalada daraxt g'o'lasidan to'rtburchakli prizma yo'nish talab etiladi. Ma'lumki,uni yechishga Pifagor teoremasi zarur. Shu yerda (oshkormas holda) diametrga tiraluvchi burchak to'g'ri burchak ekanidan foydalaniladi.

15 va 16 masalalarda berilgan to'g'ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan kvadratning tomonini, doiraning esa radiusini topish talab qilinadi.

O'sha asarning 1-kitobida to'g'ri to'rtburchak, uchburchak, trapetsiya, doira, sektor va segment hamda doiraviy halqalarning yuzlarini hisoblash qoidalari mavjud. C doira uchun quyidagi formula bor:

$$S = \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{cd}{4} = \frac{dd}{4} \cdot 3 = \frac{cc}{12}$$

(bunda $\pi \approx 3$)

$S_{sek} = \frac{ds^*}{4}$, bunda S^*-sektor yoyining uzunligi.

$S_{dk} = \frac{c_1 + c_2}{2} \cdot \frac{d_1 - d_2}{2}$ bunda c_1 va c_2-halqa aylanalari uzunligi, d_1 va d_2 o'sha aylanalarning diametri

$$S_{seg} = \frac{lh + h^2}{2}$$

bunda *l*-segment vatarining uzunligi, h-uning balandligi, ko'rinib turibdiki, bu formula ancha taqribiy.

π uchun VI asrning boshida $3{,}1415926<\pi<3{,}1415927$ qiymat uchraydi. Hajmlar uchun ham formulalar bor:

$$V_{цил}=\frac{-^2}{12}\cdot h;\ V_{кон}=\frac{c^2}{12}\cdot\frac{h}{3};\quad V_{kk}=\frac{(c_1c_2+c_1^2+c_2^2)h}{12}$$

$$V_{шар}=\frac{9}{16}d^3$$

bunda c_1 va c_2 lar pastki va ustki asoslarga tashqi chizilgan aylanalar uzunligi.

Biroq, XIV asrdan XVI asrgacha Xitoy matematikasida tushkunlik ro‘y berdi. Faqat XVI asrning oxirida Xitoyga Yevropa matematiklarining trigonometriya va algebra sohasida qilgan kashfiyotlari kirib kela boshladi. Ana shundan so‘ng Xitoy matematikasida jonlanish paydo bo‘ldi. Hozir esa Xitoyda anchagina ko‘zga ko‘ringan matematiklar bor.

15-§. Hindiston matematikasi

Moxenjorado tepaligi atrofida olib borilgan arxeologik qazilmalar e.o. XIX asrlarda mana shu atroflarda qadimgi davlat bo‘lganligini tasdiqladi. Ammo, bu davrdagi matematik bilimlar haqida bizgacha yetib kelgan ma’lumotlar yo‘q. Shunday bo‘lsada, binolarning qoldiqlari, kanallarning izlariga qarab hamda chig‘onoqdan yasalgan chizg‘ichning o‘nli bo‘limlariga qarab, qadimgi Hindistonda ma’lum matematik bilimlar bo‘lgan deb xulosa chiqara olamiz.

Hindiston matematikasi haqida bizgacha yetib kelgan birinchi yozma ma’lumotlar e.o. VII-X asrlarga to‘g‘ri keladi. E.o. IX asrda hindlar Bobil davlati bilan aloqa bog‘laganligi haqida ma’lumotlar bor.

Hindistonda fan va madaniyat IV-V asrlarda rivojlandi. Shu davrda astronomiya va matematikaga doir mashhur «Sidxanta» yozildi. V-VI asrlarda mashhur matematiklar Ariabxatta va Varaxa-Mixra yashadi. VII asrning birinchi yarmisida Udjeynda Braxmagupta ishladi. Hindistonda o‘nli sanoq sistemasining takomillashtirishi ham mana shu davrga to‘g‘ri keladi.

VII-VIII asrlarda Hind matematikasi va astronomiyasi Xitoydagi observatoriya(rasadxonalar)da ham ishlay boshlashdi. VIII asrda Inda daryosining quyi oqimi xalifaligi ta'sirida edi.

XI asrning boshlarida Hindistonni g'aznaviylar bosib olishdi. 1206-yili Dehli sultonligi vujudga keldi. 1398-yili bu sultonlikni Amir Temur bosib oldi.

Hind matematikasi mana shunday qiyin bir tarixiy sharoitda rivojlandi.

ASOSIY MANBALAR. Hindlar matematikaga juda qadim-qadimdan hurmat bilan qarashgan.Ba'zi ma'lumotlarga qaraganda Hindistonda bolalar sakkiz yoshida yozuvga, so'ngra esa matematikaga o'rgatilgan.

Matematikadan eng qadimgi ma'lumot ularning diniy-falsafiy asari «Veda» («Bilimlar») da uchraydi. Shu kitobning bir qismi-»Sulva-sutra» («Arqon qoidasi») deb ataladi, unda geometrik yasashlarga doir masalalardan tashqari, hisoblashga doir qator masalalar ham bor. Ko'pchilik tadqiqotchilarning fikriga qaraganda «Sulva-sutra» e.o. VII-V asrlarda yozilgan.

Agar «Sulva-sutra» ni hisobga olmasak, asosiy asrlar V-XVI asrlar oralig'ida yozilgan. Bu asarlarda matematika astronomiyaning bir qismi sifatida bayon etilgan. Bu asarlarning tili o'sha davrdagi Hindiston fanining tili sanskritda yozilgan.

V-XVI asrlarga taalluqli asosiy asarlar quyidagilar:

1. Muallifi noma'lum IV-V asrlarda yozilgan «Surya siddixanta» («Quyosh ilmi»). Bu Quyosh haqidagi bilim emas, balki Quyosh tomonidan yuborilgan bilim ma'nosida. Shunga o'xshash ilmlardan yana to'rttasi ma'lum. Ulardan biri «Pulisi siddxanta» («Pulisi ilmi») ikkinchisi «Pancha siddxanta» («Besh bilim»)dir.

2. Poeziyada bitilgan astronomiya va matematikaga doir «Ariabxattiam» deb ataluvchi asar. U 499-yili 24 yoshli Ariabxatti tomonidan yozilgan. Unda arifmetika, geometriya va trigonometriyaga doir ma'lumotlar bor. Algebradan axQbyqc ko'rinishdagi noaniq tenglamalarni butun sonlarda yechish metodi berilgan. π sonining qiymati taxminan 3,1416.

3. «Braxmaning mukammallashtirilgan bilimi». U 628-yili yozilgan va 20 ta kitobdan iborat. Shulardan 12-kitob arifmetikaga-arifmetik qoidalar va yuzlarni hisoblashlarga bag'ishlangan. 18-kitob

algebra haqida bo'lib, asosan birinchi va ikkinchi darajali aniq va noaniq tenglamalarni yechish usullari qaralgan.

4. «Arifmetikaning qisqa kursi». Muallifi Magoviri, taxminan 850-yili yozilgan.

5. VI-VIII asrlarda yozilgan, muallifi noma'lum asar. U arifmetika va algebraga bag'ishlangan.

6. XI asrga doir «Arifmetika kursi».

7. «Bilimlar toji». Muallifi Bxaskara II (1114-yili tug'ilgan, vafotini 1178-yildan so'ng deb taxmin qilinadi). Bu asar to'rt qismdan iborat. Birinchi qism «Lilavati» («Go'zal») deb ataladi, u arifmetika haqida. Ikkinchi qism-»Bijaganita»(Ildizlarni qisoblash haqida)-algebraga doir. «Bilimlar toji»ning qolgan uchinchi va to'rtinchi qismlari astronomiyaning turli sohalarini o'z ichiga oladi.

Quyida biz o'sha asarning yuqorida qayd etilgan ikki qismining mazmuniga to'xtaymiz. «Lilavati» o'n uchta paragrafdan iborat: 1-§. Metrlar jadvali. 2-§. Butun va kasr sonlar ustida hamda kvadrat va kub ildizlar ustida amallar. 3-§. Arifmetik amallarni yechish usullari. 4-§. Hovuz haqidagi masala. 5-§ Ba'zi arifmetik qatorlarning yig'indisi. 6-§. Planimetriyaga doir masalalar. 7-11-§§. Geometrik masalalar, bu masalalarning ko'pchiligi hajmlarni hisoblashga doir. 12-§. Diofant tenglamalari. 13-§. Kombinatoriyaga doir masalalar.

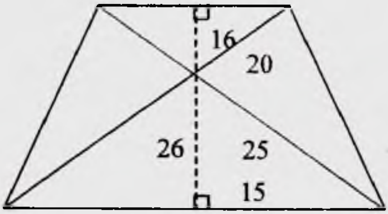
«Bijaganita» sakkizta paragrafdan iborat: 1-§.Musbat va manfiy sonlar ustida amallar qoidalari. 2-3-§§. ax-byqc tenglamani butun sonlarda yechish. 4-§. Ko'p noma'lumli tenglamalar sistemasini yechish. 5-§. Kvadrat tenglamalarni yechish.
6-§. Aniq va noaniq tenglamalar sistemalariga keladigan masalalar.
7-8-§§. Ikkinchi darajali noaniq tenglamalar.

Hindlarning geometrik bilimlari haqida tasavvur hosil qilish uchun ularning «Arqon qoidasi» nomli asaridan olingan ushbu masalalar bilan tanishaylik.

1-Masala. Tomonlari butun sonlardan iborat bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchaklardan teng tomonli trapetsiya yasang.

Masalaning shartidan to'g'ri burchakli uchburchakning tomonlari Pifagorning uchlik sonlarini, ya'ni $a^2+b^2=c^2$ tenglikni qanoatlantirishi lozim.
Shunday trapetsiyalardan biri 42-rasmda tasvirlangan.

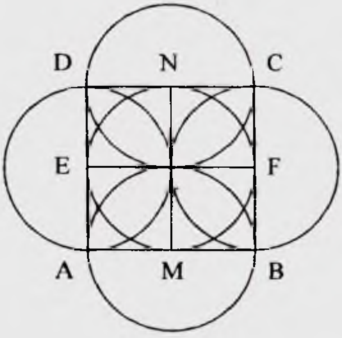
$$20^2 = 16^2 + 12^2;$$
$$25^2 = 15^2 + 20^2$$



42-rasm

2-Masala. Tomoni 2a ga teng kvadrat yasalsin.

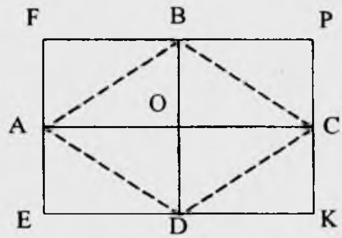
Bu masalaning yechilishi quyidagicha: avval a radiusli aylana chiziladi, so‘ng uning EF diametri o‘tkaziladi, keyin esa bu diametrga perpendikular ikkinchi MN diametr chiziladi. Diametrlarning aylana bilan kesishgan nuqtalari-M, N, E va F larni markaz qilib (43-rasm), a radiusli to‘rtta aylana chiziladi. Bu aylanalarning kesishish nuqtalari-A, B, C va D talab etilgan kvadratning uchlari bo‘ladi.



43-rasm

3-Masala. Berilgan ABCD kvadratning yuzi ikki hissaga orttirilsin.

Bu masala Pifagor teoremasi yordamida yechiladi,chunki berilgan kvadrat yuzini ikki hissa orttirish uchun uning dioganaliga kvadrat yasash lozim (44-rasm),



44-rasm

ya'ni

$$2S_{AOBF} = S_{ABCD}.$$

Chiziqli va kvadrat tenglamalar

Ariabxattiamning «Ariabxattiam» nomli asaridan olingan ikki yoritgichning tezligi va oralaridagi masofasi bo'yicha ularning uchrashish vaqtini aniqlashga doir masala juda qiziqarli.

Ariabxattiamning aytishicha, agar yoritgichlar bir-birlariga qarab yursa, ular orasidagi masofa tezliklar yig'indisiga, bir tomonga qarab yursa, tezliklar ayirmasiga bo'linadi. Bunda bo'linma yoki kelajakdagi uchrashish vaqtini beradi. Agar masofa a, tezliklar v_1 va v_2 bo'lsa, yoritgichlar bir tomonga harakatlangandagi vaqt

$$t = \frac{a}{v_1 - v_2}$$

ko'rinishida bo'ladi. $v_1 < v_2$ shart bajarilsa, uchrashuv oldin bo'lganligini bildiradi. Ammo Ariabxatta chiziqli tenglamalarning manfiy ildizlarini qaragan yoki qaramaganligi haqida aniq bir fakt mavjud emas.

Ariabxattaning shu asaridagi bitta masalada arifmetik progressiyaning n ta hadlarining yig'indisi S, birinchi hadi a va hadlarining ayirmasi d ga ko'ra uning hadlarining sonini topish talab qilinadi. U esa quyidagi to'liq kvadrat tenglamaga keladi:

$$an^2 + (2a - d)n = 2S$$

Tenglamaning ritorik, ya'ni so'zlarda berilgan yechimi hozirgi bizning belgilashlarimizda radikallarda yechilgan musbat ildizga teng kuchli.

Kvadrat tenglamalar haqidagi to'liq ma'lumot Braxmaguptaning asarida uchraydi. U kanonik ko'rinishdagi

$$ax^2 + bx = c$$

kvadrat tenglamalarni yechish qoidasini asoslab beradi. Bunda b va c lar musbat va manfiy sonlar bo'lishi mumkin.

Braxmagupta manfiy va musbat sonlarni qo'shish va ayirish qoidasini ham beradi. U musbat sonni «boylik», manfiy sonni «qarz» deb ataydi.

QO'SHISH QOIDASI: «Boylik» + «boylik» = «boylik», «Qarz» + «qarz» = «qarz», «Boylik» + «qarz», agar «boylik» > «qarz» bo'lsa «boylik», agar «boylik» = «qarz» bo'lsa «nol», agar «boylik» < «qarz» bo'lsa, «qarz».

AYIRISH QOIDASI, bunda kichigi kattasidan ayriladi, «boylik» – «boylik», «qarz» – «qarz», agar kattasi kichigidan ayrilsa, ayirmaning ma'nosi o'zgaradi. Noldan ayrilgan «qarz» «boylik»ka aylanadi, noldan ayrilgan «boylik» «qarz»ga aylanadi. «Qarz»dan «boylik»ni yoki «boylik»dan «qarz»ni ayirish uchun ularning yig'indisini tuzish lozim.

Braxmagupta manfiy sonlarning «katta» yoki «kichik» ligi haqida gapirganida, u ularning absolut qiymatlarini nazarda tutadi.

Manfiy sonlarni ko'paytirish va bo'lish birinchi marta Bxaskarada uchraydi.

«Boylik»x»boylik»=«boylik», «Qarz»x»qarz»=«Boylik». «Boylik»x»qarz» = «qarz».

Bo'lish amalini bajarishda ham ko'paytirish amalidagi qoidalar saqlanadi. Bundan tashqari, Bxaskarada musbat sondan kvadrat ildiz chiqarish qoidasi bor. U «musbat sondan kvadrat ildiz chiqarganda, bitta «boylik», bitta «qarz» chiqadi»,-deydi. Yana manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarib bo'lmasligini aytadi. Sabab qilib «qarz» kvadrat bo'la olmaydi»-deydi.

Bxaskara masalasi. Maymunlar to‘dasi o‘ynashmoqda; ularning sakkizdan birining kvadrati o‘rmonda, qolgan o‘n ikkitasi tepalikda qichqirishmoqda. Maymunlarning hammasi nechta ekanini ayt.

Hozirgi belgilashlarda hamma maymunlar sonini x desak, o‘rmonda o‘ynayotganlarining soni $(x/8)^2$ ga teng bo‘ladi. Masala shartidan: $\frac{x^2}{64}+12=x$ yoki $x^2-64x+768=0$ kvadrat tenglama hosil bo‘ladi. Ammo, Bxaskara bu tenglamani

$$(x-32)^2=256$$

ko‘rinishga keltiradi va $32>\sqrt{256}$ bo‘lganidan kvadrat ildizni musbat ham manfiy ham qilib olish mumkin deydi. Shunga ko‘ra biz Bxaskara kvadrat tenglamaning ikkita ildizi bo‘lishi, ulardan biri musbat va biri manfiy bo‘lishi mumkin ekanini bilgan, ammo kvadrat tenglamalarni yechishda manfiy ildizni hisobga olmagan deya olamiz.

Hind matematiklari yuqori darajali tenglamalarni yechishda unchalik katta yutuqlarga ega bo‘lmagan. Bxaskara II da ildizlari oldindan tanlab olingan uchinchi va to‘rtinchi darajali tenglamalar uchraydi. Ularning butun ildizlari sodda algebraik almashtirishlar yordamida topiladi.
Masalan,

$$x^3-6x^2+12x=35$$

tenglamada, ifoda to‘liq kub bo‘lishi uchun chap tomonda -8 yetishmaydi:

$$(x-2)^3=27$$

Ma’lumki, bu tenglamaning ratsional ildizi bitta, ya’ni

$$x-2=3;\ x=5$$

$$x^4-2x^2-400x=999$$

tenglamani yechish uchun Bxaskara uning har ikkala tomoniga $4x^2+400x+1$ ni qo'shadi:

$$(x^2+1)^2=(2x+100)^2$$

Bu tenglamani yechish esa kvadrat tenglamani yechishdan iborat.

Hindlarda trigonometriya asoslari

Hindlarga ellinistik mamlakatlarning trigonometriya sohasidagi yutuqlari ma'lum edi, ammo ular trigonometriyaga muhim bir yangilik kiritishdi, ya'ni ular vatarlarni sinuslarga almashtirishdi. Yuzaki qaraganda, bu o'zgartirish unchalik katta ahamiyatga ega emasdek tuyuladi, chunki α yoyning vatari ikki hissa ortgan yoy sinusiga teng, ya'ni sinusdan umumiy ko'payuvchi 2 bilan farq qiladi. Ammo vatardan yarim vatarga o'tish to'g'ri burchakli uchburchakning tomonlari va burchaklari bilan bog'liq bo'lgan turli trigonometrik funksiyalarni keltirib chiqarish imkoniyatini yaratdi.

Demak, Hindistonda trigonometrik kattaliklar haqidagi trigonometriyaga asos solindi.

«Ariabxattiam»da sinus, kosinus va sinus-verzus, ya'ni radius bilan kosinus orasidagi farq uchraydi. Ariabxatti sinuslar chizig'ini «ardxajiva» («ardxa»-yarim, «jiva»-vatar) deb ataydi. Keyinchalik sinus «jiva» deb ataladi. Arablar ana shu atamani «jayb» deb tarjima qilishadi.

IX asrning birinchi yarmisida bu «jayb» atamasi Muso al-Xorazmiy va Hosib al-Xabashda (tax. 770-870) uchraydi.

1145-yili Robert Chesterskiy Xorazmiy asarlarini lotin tiliga tarjimasida sinus atamasini ishlatadi.

Hindlarda trigonometriyaning quyidagi asosiy munosabatlari uchraydi:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad (1)$$

$$\sin^2\alpha+\sin vers^2\alpha=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \text{ yoki } \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad (2)$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

Bunda shuni aytish lozimki, Hindlar trigonometrik kattaliklarni faqat birinchi chorakdagina o‘rganishgan.

«Ariabxattiam»da sinuslar va sinus-verzuslar jadvali bor.

16-§. Islom mamlakatlarida matematika

VII asrda Arabistonning beqiyos rivojlanib ketishidan butun dunyo hayratda qoldi. VI-VII asrlarda Araviya siyosiy va iqtisodiy tanglikni boshidan kechirar edi. 622-yili Muhammad payg‘ambarimiz o‘zining siyosiy muxoliflaridan qochib, Makkadan Yasrib (Madina)ga o‘tdi va Yasribda islom(yakka xudolik) dinini yaratdi. O‘sha shaharda islomni qabul qilganlarning ittifoqini tuzdi. Ittifoq a’zolari Muhammadni payg‘ambar deb tan olishdi. O‘sha 622-yil musulmon kalendarining, ya’ni hijriy yil hisobining boshi uchun qabul qilindi, 630-yili Muhammad Makkaga qaytib keldi va o‘z muxoliflari ustidan g‘alaba qozondi. U 632-yili esa vafot etdi. Uning o‘rinbosarlari-xaliflar dinsizlarga islom dinini qabul qildirish shiori ostida Sharq va G‘arb mamlakatlariga bir necha harbiy yurishlar uyushtirishdi. Ular salkam yuz yil ichida dunyoning juda ko‘p qismini bosib olishdi. Ular 711-yili Afrika bo‘g‘ozi orqali Yevropaga hujum qildi. 712-yili Xorazm va Panjobni zabt etdi.

VIII asrning o‘rtalarida arablar Afrikaning O‘rta Yer dengizi sohillaridagi mamlakatlarida, Yaqin Sharqda, Kichik Osiyoda, Kavkazda, O‘rta Osiyoda va Inda vodiysining bir qismida hukmronlik qilar edi.

Omoiydlar davrida (635-yil) xalifalikning markazi Damashqda edi. Abbosiylar davrida (732-yil) al-Mansur poytaxtni Bag‘dodga ko‘chirdi.

Arab xalifaligida arab tili fan va davlat tili edi. Arablar bosib olgan yurtlarda ular o‘zlarining madaniyatidan yuqoriroq madaniyatga duch kelishdi. Ular avval o‘sha xalqlarning fani va madaniyatini o‘rgandi, o‘zlashtirdi, keyin esa yerli xalqlar bilan birgalikda o‘ziga xos yangi madaniyat kashf etishdi. Ko‘pgina hollarda yerli xalqning madaniyatini butunlay yo‘qotib yuborishdi. Ikkinchi xalifa Umar(634-644) Eronni bosib olgach, u yerdagi kitoblarni yo‘qotib yuborganligi haqida ma’lumotlar bor. U «agar bu kitoblarda haqiqatga eltuvchi biror narsa bo‘lsa, biz haqiqatga yanada yaxshi eltadigan(ko‘rsatmalar) ni Ollohdan olamiz, agar ularda yolg‘on narsalar bo‘lsa, ular bizga kerak emas»*,-deydi.

Abu Rayhon Beruniy(973-1048) o‘zining «Qadimgi xalqlardan qolgan yodgorliklar» nomli asarida Xorazmning qadimiy madaniyatini arablar qanday qilib yo‘q qilib yuborishgani haqida afsuslanib yozadi: «Qutayba Xorazm yozuvini, ularning ijodini yaxshi biladiganlarni, xorazmliklarda mavjud bo‘lgan bilimlarga o‘rgatadiganlarni yo‘q qilib yubordi va turli qiynoqlarga soldi, natijada bu ijodlar shunchalik maxfiylashdiki, endilikda islom qabul qilingandan keyin ham nimalar ro‘y berganligini aniq o‘rnatish mumkin emas»**.

Haqiqatan ham Bag‘doddagi «Hikmatlar uyi» ning juda ko‘p olimlari Xorazmdan chiqqanligiga qaramay, biz Xorazmning qadimgi fani, yozuvi, urf-odati haqida hech ma’lumotga ega emasmiz. O‘sha davrlarda ilm almashishning muhim vositasi savdo-sotiq edi. Arablar esa Hindiston, Xitoy, Vizantiya, Rossiya, Markaziy Afrika davlatlari, hatto Madagaskar bilan savdo-sotiq ishlarini olib borar edi.

Xalifalikning birinchi yirik shahri va markazi Bag‘dod edi.VII-IX asrlarda Bag‘dodga turli yurtlardan juda ko‘p olimlar, tarjimonlar to‘plandi. Qadimgi yunon olimlarining asarlari suriya tiliga tarjima qilindi. Xalif al-Mansur (754-775), Xorun ar-Rashid (776-809) lar tabiiy fanlarni, jumladan matematikaning rivojlanishiga katta ahamiyat berdi. Xalif al-Ma’mun (813-833) olimlarni birlashtirib, Bag‘dodda «Hikmatlar uyi» («Bayt al-hikmat») ni ochdi. Bu o‘sha davrning o‘ziga xos Fanlar Akademiyasi edi. «Hikmatlar uyi» ning qoshida yaxshi jihozlangan rasadxona (observatoriya) va kutubxona bor edi. Turli davrlarda bu yerda O‘rta Osiyodan chiqqan olimlar-Muhammad Muso al-Xorazmiy (783-850), Abul Vafo al-Buzjoniy (940-998) va boshqalar ishlashdi.

Dastlab «Hikmatlar uyi»ning olimlari astronomiya va geografiya bilan shug‘ullanishdi. Al-Mansur zamonida ishlagan birinchi uchta astronomning nomi ma’lum. Ular Abu Isoq Ibrohim al-Fazoriy (tax.777 yili vafot etgan), u asturlob (astrolabiya) yasash bilan shug‘ullangan, uning o‘g‘li Muhammad (800 yili vafot etgan) va

---

* А.П.Юшкевич. История математики в средние века. Гос. издат. физика-математическое литературы, М. стр.69. (448) 1961.

** Abu Rayxon al-Beruniy, O‘tmish halqlaridan qolgan yodgorliklar. T. O‘zSSR Fanlar Akademiyasi nashriyti, 19.

sferik trigonometriya kashfiyotchisi hamda bir necha jadvallar muallifi Yaqub ibn Tariq (tax.796 yili vafot etgan)dir.

Bag'dod matematika maktabi 200 yilga yaqin ishladi. Bu yerda qadimgi yunon olimlari-Yevklid, Arximed, Apolloniy, Menelay va Geronlarning asarlari arab tiliga tarjima qilindi va sharhlandi.

Arablar qo'l ostidagi mamlakatlarda matematikaning rivojllanishiga Hindiston, Xorazm, Fors davlatlari, Movaraunnahrlardan olingan ma'lumotlar katta ta'sir ko'rsatdi.

«Hikmatlar uyi»ning matematiklari ko'proq astronomiya, kalendar, savdo arifmetikasi, figuralarning yuzlarini o'lchash, trigonometriya, algebra, ilmiy asboblar-astrolabiya va suv soati yasash bilan shug'ullanishdi. Bundan tashqari, linzalarni o'rganish uchun ham matematika kerak edi.

Ular dastlab o'zlarining matematik bilimlaridan yuqoriroq bilimlarni o'zlashtirgan bo'lsa, IX asrga kelib matematikadan o'zlarining mahsulotlarini bera boshlashdi. X-XV asrlarda matematik kashfiyotlar juda ham kuchaydi, ayrim arab mamlakatlarida astronomiya va matematika sohasida kashfiyotlar butun dunyoga yoyildi. Masalan, Ulug'bek (1394-1449) ning Samarqand fanlar akademiyasidagi ilmiy ishlar natijalari shular jumlasidandir.

Bag'dod arab xalifaligidagi yagona ilmiy markaz emas edi. Shu kabi ilmiy markazlar Damashq va boshqa shaharlarda ham mavjud bo'lgan. Yefratdagi Raka shahri rasadxonasida al-Battoniy (tax.850-929), Reyda xo'jandlik Hamid ibn Xidr al-Ho'jandiy (tax.1000 yili vafot etgan) ilmiy ishlar olib borishgan.

Boshqa feodal davlatlari singari arab xalifaligi ham siyosiy jihatdan mustahkam emas edi. Shu sababli VIII asrning oxiridayoq, Ispaniya va Afrika, keyinroq esa Shimoliy Afrika undan ajralib ketdi. IX asrda Misr, Eron, Tojikiston va Kavkaz ajraldi. Hozirgi Eron, Tojikiston va Afg'oniston territoriyasida mustaqil davlat-Somoniylar (875-999) davlati vujudga keldi. Uning poytaxti Buxoro shahri edi. Keyinroq Afg'oniston va Panjob territoriyasida G'aznaviylar (962-1186) davlati vujudga keldi. Uning poytaxti Afg'onistonning G'azna shahri edi.

Turkmanlarning saljuqiylar qabilasi O'rta Osiyoning janubiy qismi, Eron, Iroq, Kichik Osiyoning bir qismi va Kavkaz ortidan iborat saljuqiylar (1038-1157) davlatini tuzdi. 1055-yili ular Bag'dodni ham bosib olishdi. Saljuqiylar davrida Rey, Marv va Isfaxon shaharlarida fan va madaniyat rivojlandi.

Turli davrlarda bu hududda turli yirik shaharlar ilmiy markaz vazifasini o'tab kelgan. Masalan, Buxoro, Ko'na Urganch, G'azna, Rey va boshqalar. Ko'na Urganch va G'aznada uzoq yillar Beruniy, Buxoro va Isfaxonda Xayyom, Marog'oda (bu shahar Tabrizdan janubroqda bo'lgan) Nasriddin Tusiy (1201-1274) ishlagan.

Olimlarga ko'proq Ulug'bek (1394-1449) homiylik qilgan. U Samarqandga juda ko'p olimlarni yig'ib o'zining «Astronomiya maktabi»ni tashkil qildi. Bu maktabda mashhur matematiklar G'iyosiddin Jamshid al-Koshiy (XIV-XV asrlar), Qozizoda ar-Rumiy(XIV-XV asrlar), Aloviddin Qushchi (tax.1575-yili vafot etgan) va boshqalar ishlashgan.

Ulug'bek sultongina bo'lib qolmay, yirik astronom ham bo'lgan. Uning «Ziji-jadidi Kuragoniy» asari bunga dalildir.

Arab xalifaligining boshqa o'lka va yurtlarida ham bir qancha olimlar ishlashgan. 900 yillar atrofida Qohirada algebrachi Abu Komil (tax.850-930) ishlagan. X asrning oxirida Qohirada Misr Fanlar Akademiyasi ish boshlagan. Unda astronom Ibn Yunis (950-1009), fizik va astronom hamda matematik Abdurahmon al-Xaziniy (XII asr) ijod qilgan.

O'nli (vaziyatli tizim) pozision sistema

O'nli pozision (vaziyatli tizim) sistema haqida gap ketganda eng avvalo Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning «Hind hisobi» («Hisob al-Hind») kitobi tilga olinadi.

Xorazmiyning ota-onasi haqida, datlabki ma'lumotni qayerda, kimdan olgani haqida ma'lumot yo'q. Ammo, ba'zi fan tarixchilarining ma'lumotlariga qaraganda u yoshligidan juda iste'dodli bo'lgan, tabiiy fanlardan tashqari anchagina xorijiy tillarni ham bilgan. Xorazmiyning yoshlik davri arablar zabt etgan, Xorazmning fan va madaniyatida tushkunliu ro'y bergandavrga to'g'ri keladi. Shu tufayli ham ilm-fanga chanqoq Xorazmiy o'z davrining ilg'or fanlari markazi Bag'dodga keladi. Bu paytda Bag'dodda al-Ma'munning «Hikmatlar uyi» («Bayt al-hikmat») tashkil qilingan edi. Xorazmiy bu yerda avval qadimgi Misr va Yunon olilarining ishlari bilan tanishadi, so'ngra esa o'zi matematika, astronomiya, geografiya, tarix va tibbiyot ilmi bo'yicha butun O'rta Sharqda mashhur bo'lib ketadi. U «Hikmatlar uyi» dagi kutubxonaga, rasadxonaga va barcha ilmiy tekshirish ishlariga rahbarlik qiladi.

Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning arifmetika va algebra sohasida qilgan ishlari matematikaning rivojlanishiga katta hissa qo'shdi. Uning «Hind hisobi» nomli arifmetik risolasida arab tilida birinchi marta o'nli pozitsion (vaziyatli) sistema va unga asoslangan amallar qoidasi bayon etilgan. Xorazmiyning bu asari bizga XII asrda lotin tiliga qilingan tarjimada yetib kelgan. Mana shu tarjimaning XIV asr o'rtalariga to'g'ri keladigan bitta qo'lyozmasi Kembrij (Angliya) universitetining kutubxonasida saqlanadi. Kitobning boshida Xorazmiy to'qqizta raqam va bitta «kichkina doiraga o'xshash harf 0» yordamida Hindlarning hisoblash usulini ko'rsatmoqchi ekanini, bu usul bilan har qanday son oson va qisqacha belgilanishini, uning yordamida har qanday arifmetik amallarni bajarish juda yengil ekanini aytadi. Keyin esa o'nli pozitsion sistemada sonlarni Hind belgilari orqali yozish usulini ko'rsatadi. Bunda asosiy e'tibor raqamlarni to'g'ri yozish, sonlarni to'g'ri o'qish, «kichkina doirachaga o'xshash harf 0»ni ishlatishga qaratiladi. Ba'zan bu doiracha o'rniga nuqta ishlatiladi. Sonlarni to'g'ri o'qishga misol qilib quyidagi sonni keltiradi: 1 180 703 051 492 863. Bu sonni Xorazmiy bergan usuli ancha noqulay: «Ming ming ming ming ming besh marta va yuz ming ming ming ming to'rt marta va sakson ming ming ming ming to'rtta va keyin yetti yuz ming ming ming uch marta va uch ming ming ming uch marta va ellik bir ming ming ikki marta va to'rt yuz ming va to'qson ikki ming va sakkiz yuz oltmish uch»*.

Sonlarning o'qilishidan keyin arifmetik amallarni bajarishning hindcha usuli bayon etiladi. Xorazmiy usulida amallarni bajarish yuqori xona birligidan boshlanadi. Xorazmiy so'zi bilan aytganda, amallarni bunday bajarish «ham qulay, ham foydali».

* A.Abduraxmonov. Al-Xorazmiy – buyuk matematik. T. «O'qituvchi» , 1983, 21-bet (112).

Natija noto‘g‘ri chiqib qolmasligi uchun, nolni yozishni unutmaslik kerak. Xorazmiy asarida oltita amal-qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish, darajaga ko‘tarish va kvadrat ildiz chiqarish bor. U ikki marta orttirish va ikkiga bo‘lishlarni alohida amallar deb qaraydi.

Ayirish amalini kamayuvchining yuqori xona birligidan ayriluvchining yuqori xona birligini ayirish bilan boshlaydi.

Ko‘paytirishda ham ko‘payuvchining yuqori xona birligi ko‘paytuvchiga ko‘paytiriladi va hokazo.

Xorazmiy sonlardan kvadrat ildiz chiqarishni ikki had yig‘indisini kvadratga ko‘tarib yoyish asosida ko‘rsatgan. Misol uchun 1296 sonidan kvadrat ildiz chiqarish lozim bo‘lsin. U holda Xorazmiyning usuliga ko‘ra bu sonning ildizi (bizning belgilashlarimizda) $10x+u$ ko‘rinishdagi ikki xonali son bo‘ladi. Demak,

$$\sqrt{1296} = 10x + u \quad (1)$$

$$1296 = (10x+u)^2$$

bundan

$$1296 = (10x)^2 + 2(10x)u + u^2 \quad (2)$$

$$1296 = (10.3)^2 + 2(10.3)u + u^2$$

$$1296 - 900 = 2(30)u + u^2$$

$$396 = (2.30 + u)u \quad (3)$$

Mana shu (3) tenglikdagi u topiladi. Bundan ildizdan chiqadigan sonning birliklar xonasi aniqlanadi. Ma’lumki, u 6 ga teng. Demak,

$$\sqrt{1296} = 36$$

Xorazmiy to‘liq kvadratdan iborat bo‘lmagan sonlardan kvadrat ildiz chiqarishning quyidagi formulasini tavsiya etadi:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

bunda N-kvadrat ildiz chiqarish lozim bo‘lgan son, a-o‘sha sonning to‘liq kvadrat bo‘ladigan qismi, b-o‘sha sonning to‘liq kvadratdan qolgan qismi.

Xorazmiy ishlatgan raqamlarning shakli quyidagicha:

٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

Arablar qo‘l ostidagi mamlakatlarda hozirda «arab raqamlari» deb ataluvchi, aslida esa hind raqamlari bo‘lgan biz yuqorida keltirgan raqamlar va sanoq sistemasidan tashqari IX asr boshlarida o‘zlarining harfiy raqamlariga ham ega bo‘lgan. Uni bizda «abjad hisobi» deb atashadi.

Abjad Hisobi

O‘rta Osiyodan chiqqan yana bitta buyuk matematik Abu Rayhon al-Beruniy (973-1048) «Astronomiya ilmidan boshlang‘ich ma’lumot beruvchi kitob» («Kitob at-tafhim lil-avail sina’ at-tanjim») nomli asarida abjad hisobi haqida to‘xtalib mana bunday savol qo‘yadi va o‘zi unga javob beradi: «Sonlar arab harflari yordamida qanday yoziladi?». Javob: «Bu ular(sonlar)ning shartli tartibdagi vaziyatidir. Alifbo harflarining odatdagi tartibi ا (alif), ب (be), ت (te), ث (se) ... lardan ham foydalanish mumkin edi. Bunda to‘qqiz birlik, to‘qqiz o‘nlik, to‘qqiz yuzlik va to‘qqiz minglik (bor) deb hisoblash lozim edi, chunki ularning hammasi yigirma sakkizta. Lekin bu harflar tartibiga «jummal» harflarining tartibi olingan, chunki bu tartib arablardan oldin kitob ahliga* ma’lum bo‘lgan. Harflarning son xossalari 2-jadval 6-ustunda ko‘rsatilgan.

Beruniy «Kitob at-tafhim»ning keyingi savollarida bu harflarni ishlatishdan ko‘zda tutilgan maqsad, ular orasidagi farq va bu harflar yordamida sonlarni yozish qoidalarini tushuntiradi: »Agar son birliklar, o‘nliklar yuzliklar xonasi birlashtiriladigan bo‘lsa, (avval) eng kattasi, ya’ni yuzlik, so‘ngra o‘nlik, undan so‘ng birlik qo‘yiladi. Misol: (bir) yuz o‘n besh (قيه) kabi ustida chiziqcha bilan yoziladi, chiziqcha uning so‘z emas, son ekanini ko‘rsatadi.».

O‘rta asrlarda zijlar (astronomiya va trigonometriyaga oid jadvallar)da ham abjad hisobidan va arab raqamlaridan foydalanilgan.

Jadvallar raqamlar bilan tuzilganda, sonlarning xona birliklari teskari tartibda, ya’ni hozir biz sonlarni qaysi tartibda yozsak, o‘sha tartibda yozilgan. Bu esa ba’zan tushunmovchilik va chalkashliklarga

*»Kitob ahli» - Tavrot, Qur'on, Injil singari muqaddas kitoblarga ega bo‘lgan xalqlardir.

olib kelgan. «Kitob at-tafhim»da Beruniy ana shunday tushunmovchiliklar ro'y bermasligi uchun abjad hisobidan foydalanish tartib va qoidalarini ham bayon etgan.

KASRLAR. Xorazmiy «Hind hisobi» asarining anchagina qismi kasrlarga bag'ishlangan. U eng avval «bosh kasr» lar deb ataladigan kasrlarga to'xtaydi: $1/2$-nisf, $1/3$-suls, $1/4$-rub', $1/5$-xums, $1/6$-suds, $1/7$-sub', $1/8$-sumn, $1/9$-tusa, $1/10$-ushr.

Bir taqsim ikkidan boshqa barcha kasrlar nomining o'zagi arabcha butun sonlarning atalishidan olingan. Masalan, $1/3$-suls, salasadan; $1/5$-xums, xamsadan va hokazo.

m/n- kasrning nomi hozirgi bizning atashimizdan farq qilgan; arabchada «beshdan uch» bo'lgan, ammo «o'n yettidan uch» demagan, uning o'rniga «o'n yettidan uch qism» deyilgan. Yoki «o'n yetti qismdan uch» deyilgan.

Keyin Xorazmiy oltmishli kasrlar va ular ustida amallarni bayon etgan. U birinchi o'ringa ko'paytirish amalini qo'yadi. Kasrni kasrga yoki kasrni aralash kasrga ko'paytirishda har bir ko'paytuvchini uning quyi xona birligiga keltirib olishni, so'ngra esa ko'paytirishni bajarishni tavsiya etadi. Demak, bunda ko'paytirish butun sonlarni ko'paytirishga keltiriladi va natija oltmishli kasrga aylantiriladi.

Bo'lishda ham bo'linuvchi va bo'luvchi o'zlarining quyi xona birliklarida ifodalab olinadi; agar bo'linuvchining pastki xona birligi bo'luvchining xona birligidan kam bo'lsa, u yana quyi xona birligiga keltiriladi.

Kitobda keyin qo'shish, ayirish, oltmishli kasrlarni ikki hissa orttirish va ikki hissaga kamaytirish amallari keltirilgan.

Kitobning oxirida oddiy kasrlar va ular ustida amallar bayon etilgan. Xorazmiy oddiy kasrlar ustida amallarga to'xtab bu amallar ham oltmishli kasrlar ustidagi amallarga o'xshash ekanini aytadi.

Bu sxemada Xorazmiy zamonida ham oddiy kasrlar ustida amallar bajarish uchun ularni birlik qismlarining yig'indisiga keltirib olinganligini ko'rish mumkin. Bu usul ilgari Misr va Bobilda mavjud edi.

Oddiy kasrlarni bo'lishda har ikkala kasr umumiy maxrajga keltiriladi, so'ngra amal bajariladi.

Maxraji to‘liq kvadrat bo‘lmagan kasrdan kvadrat ildiz chiqarishda $\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}$ qoidadan foydalaniladi. Agar kasr $\frac{m}{60^{2k-1}}$ ko‘rinishda bo‘lsa, uning surat va maxraji 60 ga ko‘paytiriladi.

Kasrlar haqidagi bilimlar Abul Vafo Buzjoniy (940-998) ning «Kotiblar, savdogarlar va boshqalar arifmetika ilmidan nimalarni bilishlari lozimligi haqida kitob» nomli asarida ancha mufassal bayon etilgan.

Abul Vafo kasrlarni uch gruppaga bo‘ladi:

1) bosh kasrlar-$1/2$ dan $1/10$ gacha olingan birning qismlari;

2) m/n ko‘rinishdagi murakkab kasrlar, $m<n\leq10$, ular orasida $2/3$ muhim o‘rin tutadi.

3) birlashtirilgan kasrlar-$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{p}$ ko‘rinishdagi bosh kasrlarning ko‘paytmasi (eng bosh kasrlar bunga kirmaydi).

Abul Vafo asosiy kasrlarni hamda asosiy kasrlarning yig‘indisi yoki ko‘paytmasi ko‘rinishida tasvirlanadigan kasrlarni «ifodalanadigan» va «ifodalanmaydigan» kasrlarga ajratadi. Ifodalanadigan kasrlarning maxraji 2,3,5,7 sonlaridan iborat ko‘paytuvchilarga ega; ifodalanmaydigan kasrlarning maxraji 7 dan katta.

Asosiy kasrlar va asosiy kasrlarning yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash mumkin bo‘lgan kasrlarni Abul Vafo «ifodalanadigan», qolgan kasrlarni esa «ifodalanmaydigan» kasrlar deb ataydi. Ifodalanadigan kasrlarning maxraji 2, 3, 5, 7 ko‘paytuvchilariga ega bo‘ladi; «ifodalanmaydigan» kasrlarning maxraji 7 dan katta ko‘paytuvchiga ega bo‘ladi.

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4};\quad \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10};\quad \frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}$$

Abul Vafo bu yoyishlardan boshqa kasrlarni yoyish uchun foydalanadi.

I. $n/60$ nisbat, bunda n butun son va 60 dan kichik. Kasrlarni yoyish quyidagi qoidalar asosida olib boriladi:

a) $n=10k+5$ uchun, bunda $k=2,3,4,5$, suratda 15 ajratiladi, ya’ni quyidagi almashtirish qo‘llaniladi

$$\frac{n}{60}=\frac{n-15}{60}+\frac{1}{4}$$

b) $n=10k+2$ va $n=10k+7$, bunda $k=2,3,4,5$,suratda 12 ajratiladi, ya'ni ushbu almashtirishdan foydalaniladi

$$\frac{n}{60}=\frac{n-12}{60}+\frac{1}{5}$$

c) $k=6,7,8,9$ uchun, $n=10k+1$, $n=10k+3$, $n=10k+6$, $n=10k+8$ da suratda 6 ajratiladi, ya'ni quyidagicha bo'ladi

$$\frac{n}{60}=\frac{n-6}{60}+\frac{1}{10}$$

g) $n=10k+4$ va $n=10k+9$ uchun suratda 4 ajratiladi, ya'ni

$$\frac{n}{60}=\frac{n-4}{60}+\frac{1}{15}$$

Misol, $49/60=45/60+4/60=30/60+12/60+6/60=1/2+1/4+2/3\cdot(1/10)$

II. $\frac{n+\alpha}{60}$ nisbat, bunda $n<60$ va $\alpha\cdot p/q$ ko'rinishga ega, yoki $p/q\cdot 1/k$, $1\leq p\leq q\leq k\leq 10$

III. Boshqa xil nisbatlar. Bunda yoyish 60 ga ko'paytirish va ketma-ket oltmishga keltirish yo'li bilan amalga oshiriladi. Misollarda Abul Vafo quyidagi almashtirishdan foydalanadi

$$\frac{s}{t}=\left(\frac{s\cdot 60}{t}\right):60=\frac{n+\alpha}{60}.\quad n<60,\ \alpha<1$$

Maxrajda qisqarmaydigan tub ko'paytuvchilar uchrab qolsa, Abul Vafo yoyishni birinchi qadamdayoq to'xtatadi, masalan,

$$\frac{3}{17}=\frac{180}{17}:60=\frac{10+\frac{10}{17}}{60}$$

$$\frac{3}{17}\approx\frac{11}{60}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}$$

Oddiy kasrlarni birning qismlari yig'indisi yoki ko'paytmasi ko'rinishida tasvirlashni Abul Vafodan keyin yashagan ko'pgina mualliflarning arifmetik qo'llanmalarida ko'ramiz: xaliflikning

Sharqida-al-Karojiyda, G'arbda-Abu Bakr Muhammad al-Xassar va al-Kalasadiyda.

O'rta Osiyo va Eron xalqlari orasida birlik qicmlarining juda ko'p turi mavjud bo'lgan. Masalan, dang, tasuj va ashair. Bu kasrlar haqida G'iyosiddin al-Koshiy (XIV-XV) o'zining «Arifmetika kaliti» nomli asarida batafsil to'xtaydi. Dang, tasuj va ashairlar o'rta asrlardagi og'irlik va pul o'lchovlari bo'lib, ular quyidagilarga teng: 1 / 6; 1 / 24; 1 / 96. Ularning asosiy birliklari dinar, dirxam va boshqalar.

Al-Koshiy avvalo oddiy kasrlarni danglar, tasujlar va ashairlarga va aksincha o'tkazishni o'rganadi. Kasrlarni danglar va boshqalarga o'tkazishda 60 ko'paytuvchi o'rniga 6, 4 va 6 lar keladi. Misol,

$$\frac{5}{17}=\frac{30\quad 7}{6}=\frac{4}{7}+\frac{8\cdot 7}{24}=\frac{4}{6}+\frac{1}{24}+\frac{4\cdot 7}{96}=49my\frac{4}{7}sh$$

bu sistemada tasvirlangan kasrlarni ko'paytirish va bo'lish uchun elementar kasrlarni bir biriga ko'paytirishdan hosil bo'lgan maxsus jadvallardan foydalanishgan.

17-§. Xorazmiy algebrasi

Algebra fanining mustaqil fan sifatida rivojlanishida Xorazmiyning roli juda katta. «Algebra» atamasining o'zi Xorazmiyning «al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob» nomli asaridagi «al-jabr» so'zining latincha yozilishidagi buzilgan shakli. Bu asar bizgacha 1342-yili ko'chirilgan arabcha nusxada yetib kelgan. U Oksford (Angliya) universiteti kutubxonasida saqlanadi. Bu asar juda ko'p Yevropa tillariga tarjima qilingan. Ulardan eng qadimgisi 1145-yili ingliz Robert Chester va 1160 yili italiyalik Gererdo qilgan lotincha tarjimalar hisoblanadi.

1486-yili Iogan Viddman birinchi marta Leypsig (Germaniya) universitetida algebra kursidan ma'ruza o'qiydi va algebradan darslik yozadi, Viddman darslikning ko'p qismini Xorazmiyning yuqorida nomi tilga olingan risolasidan oladi.

Shuni ham eslatib qo'yish kerakki, o'rta asrlarda yozilgan algebra qo'llanmalarining ko'pchiligida Xorazmiyning algebraga doir kitobidagi misol va masalalar uchraydi.

Xorazmiyning bu asari rus tiliga ham, o'zbek tiliga ham tarjima qilingan. Ruscha tarjimasini 1964 yili B.A.Rozenfeld o'zbekcha tarjimasini 1983-yili Ashraf Ahmedov bajargan.

Xorazmiy bu asarni nega yozganligini asarning bosh qismida quyidagicha izohlaydi: «Men arifmetikaning sodda va murakkab masalalarini o'z ichiga oluvchi al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob yozdim, chunki u odamlarga meros taqsimlashda, vasiyatnoma yozishda, boyliklarni bo'lishda va adliya ishlarida, savdo-sotiqda, turli xil munosabatlarda, kanal qazishda va geometrik hisoblashlarda juda ham zarur»*.

Kitobning yozilishidan maqsad ma'lum bo'ldi, undagi «al-jabr», «va-l-muqobala» atamalari arabcha bo'lib, quyidagi ikki amalni anglatadi: «al-jabr»-»to'ldirish»-tenglamaning biror qismidagi ayriluvchi hadni uning ikkinchi qismiga qo'shiluvchi qilib o'tkazish. Masalan, $3x^2-4x+2=2x^2+7$ tenglamaga «al-jabr» amalini qo'llasak, tenglama ushbu ko'rinishga keladi:

$$3x^2+2=2x^2+4x+7$$

«Al-muqobala»-»qarama-qarshi qo'yish»-tenglamaning har ikkala qismidagi teng qo'shiluvchilarni o'zaro yeyishtirish. Masalan, yuqoridagi oxirgi tenglamaga «al-muqobala» amalini ishlatsak, u quyidagi ko'rinishni oladi: $x^2=4x+5$

Xorazmiy bu kitobda «ildiz», «kvadrat», «sodda son» kabi atamalarni (albatta, arab tilida, chunki Xorazmiy zamonida fan tili arab tili bo'lgan) ishlatadi. «Ildiz»-noma'lum biz uni x orqali belgilaymiz. «Kvadrat»-»ildiz»ning kvadrati, ya'ni x^2, «sodda son»-natural son. Xorazmiy bu munosabatlar orasida quyidagi oltita munosabat borligini aytadi:

1) kvadratlar ildizlarga teng: $ax^2=bx$
2) kvadratlar songa teng: $ax^2=c$
3) ildizlar songa teng: $bx=c$

---

* A.Abduraxmonov Al-Xorazmiy – buyuk matematik. T.: «O'qituvchi», 1983, 32-bet (112bet).

4) kvadratlar va ildizlar songa teng: $ax^2+bx=c$

5) ildizlar kvadratlar va songa teng: $bx=ax^2+c$

6) kvadratlar ildizlar va songa teng: $ax^2=bx+c$

Xorazmiy o‘z kitobining oltita bobida yuqoridagi tenglamalarni yechish usullarini bayon etadi. Masalan, to‘rtinchi bobda $x^2+10x=39$ tenglama qaraladi. Xorazmiyning yechishi hozirgi bizning yozuvda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}=\sqrt{25+39}-5=\sqrt{64}-5=8-5=3,\ x=3;\ x^2=9$$

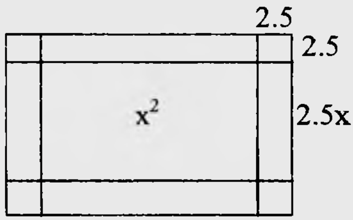
Beshinchi bobda $x^2+21=10x$ tenglama yechiladi:

$$x^2+21=10x;\quad x=\frac{10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-21}=5\pm\sqrt{25-21}=5\mp\sqrt{4}=5\mp 2,$$

$$x_1=3,\ x_1^2=9,\ x_2=7,\ x_2^2=49$$

Shu bobda Xorazmiy keltirilgan kvadrat tenglama uchun ikkita ildiz topadi. Bu haqda u quyidagicha yozadi: «Agar senga shu bobga tegishli masala uchrab qolsa, uning to‘g‘ri yechimini qo‘shish yordamida topishga harakat qil, bordi-yu, to‘g‘ri chiqmasa, ayirishing zarur bo‘ladi».

Xorazmiy o‘zining bergan yechimining to‘g‘riligini geometrik usulda isbotlaydi. U $x^2+10x=39$ tenglama uchun quyidagicha:tomoni x ga teng kvadrat oladi va uning tomonlarida balandligi $10/4$ ga teng to‘rtta to‘rtburchak yasaydi (45-rasm).



45-rasm

Bu shaklning burchaklariga tomoni 10/4 ga teng to‘rtta kvadratcha qo‘shiladi. Hosil bo‘lgan shakl kvadrat bo‘lib, uning yuzi $39+4\left(\frac{10}{4}\right)^2=64$ ga teng, uning tomoni $x+2\cdot\frac{10}{4}=8$, ya’ni $x=3$.

Demak, $x^2+px=q$ ko‘rinishdagi kvadrat tenglama berilganda uning geometrik isboti quyidagi algebraik almashtirishlarga mos keladi:

$$x^2+4\left(\frac{p}{2}x\right)+4\left(\frac{p}{4}\right)^2=q+4\left(\frac{p}{4}\right)^2.$$

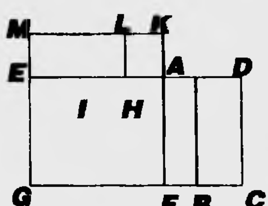
$$\left(x+2\cdot\frac{p}{4}\right)^2=q+4\left(\frac{p}{4}\right)^2;x+2\cdot\frac{p}{4}=\sqrt{q+4\left(\frac{p}{4}\right)^2}$$

$$x+2\cdot\frac{p}{4}=\sqrt{q+\left(\frac{p}{2}\right)^2}\quad x=\sqrt{q+\left(\frac{p}{2}\right)^2}-\frac{p}{2}$$

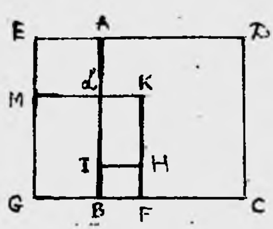
Xorazmiy o‘z kitobining keyingi boblarida har xil ko‘rinishdagi tenglamalarni yechish usullarini ko‘rsatadi.

$x^2+21=10x$ tenglama uchun ikkita ildiz hosil bo‘ladigan hollarning geometrik isbotini Xorazmiy quyidagicha isbotlaydi.

Avval birinchi $x=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ hol qaraladi.Tomonlari GC=p va CD=x bo‘lgan GCDE-to‘g‘ri to‘rtburchak (46-rasm).



46-rasm



47-rasm

ABCD=x^2 kvadrat unga yondosh qilib yasalgan GBAE= (p-x)x= q to‘g‘ri to‘rtburchakdan hosil qilingan. GC ning o‘rtasi F nuqtadan FH perpendikular o‘tkazilib, u K nuqtagacha davom ettirilgan: $HK = AH = \frac{p}{2} - x GFKM = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ va $IHKL = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2$ kvadratlar yasalgan. Yasalishiga ko‘ra EILM va FBAH to‘g‘ri to‘rtburchaklar teng, chunki ularning mos tomonlari o‘zaro teng. Shu sababli IHKL kvadrat GFKM kvadratdan GFHE va EILM to‘g‘ri to‘rtburchaklar yig‘indisining ayirmasiga yoki GFKM va GBAE kattaliklarning ayirmasiga teng, ya’ni $\left(\frac{p}{2}-x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Bundan $IH = AH = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ izlangan tomon esa AD=HD-HA ya’ni

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Ikkinchi $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ hol uchun geometrik isbot 47-rasmda ko‘rsatilgan, bunda GC=p tomonning o‘rta nuqtasi F BC=x kesmaning ichida yotadi, AB=BC. Tomoni BF=x-p/2 ga teng BFHI kvadrat GFKM=$(p/2)^2$ kvadrat bilan GBLM va IHKL to‘g‘ri to‘rtburchaklar yig‘indisining ayrilganiga teng. O‘z navbatida GBAE=q, unda $BF = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ va $x = CF + FB$,

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Xorazmiyning «al-jabr va-l-muqobala» asaridagi meros taqsimlashga doir masalalar

Kitobning anchagina qismi Xorazmiy yashagan davrning talabi va islom huquq normalariga ko‘ra merosxo‘rlar o‘rtasida mulk taqsimlashga doir turli xil murakkab masalalarning yechimiga bag‘ishlangan. Shu masalalardan ba’zilariga to‘xtalamiz.

1-Masala. Bir kishi vafot etadi va undan to‘rt o‘g‘il qoladi. Otadan qolgan mulkdan har bir o‘g‘il baravar hissa olishi kerak. U o‘limidan oldin bir odamga o‘g‘illarimning har biriga tegadigan hissani, ikkinchi bir odamga mulkning uchdan bir bo‘lagidan bir o‘g‘il hissasini ayirib, ayirmaning to‘rtdan bir bo‘lagini olishlarini vasiyat qilgan.

Masalaning mazmunidan bir kishi vafot etib, undan qolgan mulk o‘g‘illari orasida taqsimlangan. Biz o‘sha mulkni va vafot etgan kishi o‘g‘illariga tegadigan hissani topishimiz kerak.

Xorazmiy yechimini hozirgi belgilashlarda ko‘rsatamiz.

Agar vafot etgan kishi mulkini x, bitta o‘g‘liga tegadigan hissani y desak, masala shartidan

$$x = 4y + y + 1/4(x/3 - y)$$

tenglama hosil bo‘ladi, uni ixchamlasak, ushbu ko‘rinishga keladi:

$$x = (57/11)y \quad (2)$$

1. Hissasiz uchdan bir mulkning to‘rtdan biri to‘rtdan bir hissasiz uchdan bir mulkning to‘rtdan biriga teng, ya’ni

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3} - y\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{3} - \frac{1}{4}y$$

2. Hissadan to‘rtdan bir hissani ayirsang, to‘rtdan uch hissa qoladi:

$$y - \frac{1}{4}y = \frac{3}{4}y$$

3. Mulkdan o‘n ikkidan bir mulkni ayirsang, o‘n ikkidan o‘n bir mulk qoladi:

$$x - \frac{1}{12}x = \frac{11}{12}x$$

4. To‘rt hissaga to‘rtdan uch hissaning qo‘shsang, o‘n ikkidan o‘n bir mulkka teng bo‘ladi:

$$4y + \frac{3}{4}y = 4\frac{3}{4}y = \frac{11}{12}x$$

5. Mulkni butunga aylantirsang, besh butun o‘n birdan ikki hissaga teng bo‘ladi:

$$\frac{11}{12}x=4\frac{3}{4}y \text{ dan } x=4\cdot\frac{3}{4}y\cdot\frac{12}{11}=\frac{19\cdot 12}{44}y=\frac{19\cdot 3}{11}y=\frac{57}{11}y=5\cdot\frac{2}{11}y$$

Demak, (2) tenglama hosil bo‘ladi. Bu ikki noma’lumli birinchi darajali aniqmas tenglama. Xorazmiy uni yechish uchun y=11, ya’ni har bir o‘g‘ilning hissasi 11 ga teng deb oladi.U holda mulk 57, ya’ni x=57, birinchi vasiyat qilingan mablag‘:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3}-y\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{57}{3}-11\right)=\frac{1}{4}(19-11)=\frac{1}{4}\cdot 8=2$$

Umuman vasiyat qilingan mablag‘:

$$y+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3}-y\right)=11+\frac{1}{4}\cdot 8=11+2=13$$

Demak, hamma mulk 57 birlik bo‘lsa, shuning 13 birligi taqsimlashga qoldirilgan.

2-Masala. Bir xotin vafot etgach, undan ikki qiz, onasi va eri qolgan.U bir odamga onasiga tegadigan hissani, boshqa bir odamga hamma mulkning to‘qqizdan bir qismini vasiyat qilgan.

Masalaning mazmunidan qizlariga, onasiga va eriga mulkning qanday qismi tegishini topish lozimligi ko‘rinadi.

Xorazmiy tavsiya etgan yechish usuli:

«Zarur mulkning bo‘laklari(soni)ni top, o‘n uch bo‘lak,bundan ikki bo‘lagi onasiga. Endi sen vasiyat qilingan ikki bo‘lak va butun mulkning to‘qqizdan bir bo‘lagi ekanini bilasan. Undan merosxo‘rlarga ikki bo‘laksiz to‘qqizdan sakkiz mulk qoladi. Ikki bo‘laksiz to‘qqizdan sakkizni o‘n uch bo‘lak deb hisoblab, o‘z mulkingni to‘ldir, ya’ni unga ikki bo‘lakni qo‘sh, undan o‘n beshga teng to‘qqizdan sakkiz mulk hosil bo‘ladi. So‘ngra unga sakkizdan birni, o‘n beshga esa uning sakkizdan biri, ya’ni bir va sakkizdan yettini qo‘sh. Kimga to‘qqizdan bir vasiyat qilingan bo‘lsa, unga bir va sakkizdan yetti bo‘lak(tegadi). Boshqasiga, (ya’ni) kimga onasining bo‘lagi vasiyat qilingan bo‘lsa, unga ikki qism (tegadi). O‘n uch bo‘lak qoladi, u esa merosxo‘rlar orasida ularning qismlari bo‘yicha(bo‘linadi). Agar bir yuzu, o‘ttiz besh bo‘lak bo‘lsa, u butun bo‘ladi».

Onasi butun mulkning $1/6$ qismini, eri esa $1/4$ qismini olishi kerak bo‘lgani uchun butun mulkni 12 qismga bo‘lish lozim. Undan 2 qismini onasi, 3 qismini eri oladi, u holda har bir qiziga 3,5 qismdan tegadi. Xorazmiy kasrdan qochib, butun mulkni 13 qismga bo‘ladi, ammo oldingi 12 qismga bo‘lgani kabi onasi 2 qismni, eri 3 qismni olaveradi, har bir qiziga esa 4 qismdan tegadi. Shuning uchun birinchi vasiyat qilingan mablag‘-onasining qismi-2 bo‘lakka teng, ikkinchi vasiyat qilingan mablag‘ hamma mulkning $1/9$ qismiga, yoki butun qolgan mulkning $1/8$ qismiga, ya’ni $\frac{1}{8}\cdot 15=\frac{15}{8}$ qismga teng. Umumiy bo‘laklar soni $16\frac{7}{8}=\frac{135}{8}$ ga teng. Hamma mulk 135 qismdan iborat deb, onasi 16 bo‘lakni, eri 24 bo‘lakni, har bir qizi 32 bo‘lakdan olishini topamiz.

Birinchi vasiyat qilingan mablag‘ 16 qism, ikkinchi vasiyat qilingan mablag‘ esa 15 qism bo‘ladi.

Xorazmiyning meros taqsimlash, vasiyatnoma tuzishga doir masalalarini to‘rtta guruhga birlashtirish mumkin.

Birinchi guruhga kiruvchi masalalar $ax+by=0$ ko‘rinishdagi birinchi darajali bir jinsli aniqmas tenglamalar bilan ifodalanadi.

Ikkinchi guruhga kiruvchi masalalar $ax+by=c$ ko‘rinishdagi aniqmas tenglamalar orqali hal etiladi. Bu masalalarda masalaning butun yechimlari, parametr butun bo‘lganda topiladi.

Uchinchi guruh masalalari $ax=b$ ko‘rinishdagi birinchi darajali bir noma’lumli tenglamalar bilan yechiladi.

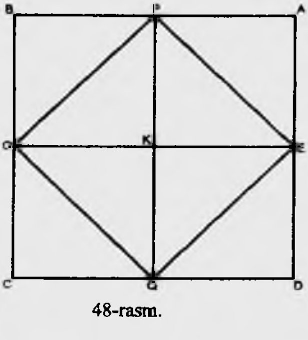
To‘rtinchi guruhga kiruvchi masalalar sof arifmetik usulda yechiladi.

Bu xildagi masalalar yangi masala emas, bunday masalalar qadimgi Misr, Bobil va Gretsiyada ham qaralgan, ammo Xorazmiy bu masalalarni islom huquq normalari asosida meros taqsimlashning nazariy va amaliy asoslarining matematik usulini birinchi bo‘lib ishlab chiqdi. Xorazmiyning algebraik risolasida bayon etilgan ilmiy yo‘nalish keyingi davr olimlarining ijodiga ham ta’sir etgan.

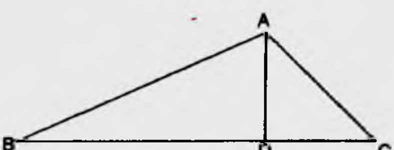
Xorazmiydan so‘ng yashagan Sharq matematiklari – Ibn Turk al-Xuttaliy, Al-Karxiy, an-Nasaviy, Abu Komil, Sirojiddin Sijovandiy, Nasiriddin at-Tusiy, G‘iyosiddin Jamshid al-Koshiy va boshqalar ham meros taqsim-lashga doir masalalar bilan shug'ullanishgan. Masalan, XII asrda yashagan matematik va huquqshunos olim Sirojiddin Sijovandiyning algebraga doir asarlarida va 1203-yili yozilgan meros taqsimlashga doir maxsus «Sirojiddinning vorislik huquqi» nomli asarida meros taqsimlashning umumiy ilmiy va amaliy nazariyasi berilgan. Mirzo Ulug'bekning «Samarqand astronomiya maktabi» vakili Jamshid al-Koshiyning «Arifmetika kaliti» nomli XV asrda yozilgan asarida ham meros taqsimlashga doir turli masalalar uchraydi.

18-§. Xorazmiy geometriyasi

Xorazmiyning «Al-jabr va-l-muqobala» asariningg geometriyaga taalluqli qismi «O'lchashlar haqida» deb ataladi. Unda Xorazmiy figuralar yuzlarini o'lchash qoidalarini beradi va uchburchaklarning elementlari orasidagi munosabatlarga algebrani tatbiq etadi. U o'zining ba'zi qoidalarini isbotsiz, ba'zilarini esa isboti bilan birga keltiradi.
U bo'limning boshida yassi figuralar-to'rtburchaklar, uchburchaklar va doiralarni qaraydi. Uchburchaklarning klassifikatsiyasini beradi. Xorazmiy Pifagor teoremasini teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak uchun geometrik usulda isbotlaydi (48-rasm).



48-rasm.



49-rasm.

So'ngra to'rtburchaklar, ularning turlari, rombning yuzi qaraladi. Shu bo'limda tomoni 10 ga teng bo'lgan teng tomonli uchburchakning yuzini hisoblashga doir, asosi 12 ga, yon tomonlari 10 ga teng bo'lgan teng yonli uchburchakka ichki chizilgan kvadratga doir va tomonlari mos ravishda 13, 14 va 15 ga teng o'tkir burchakli uchburchakning yuzini topishga doir masalalar bor.

Xorazmiyning uchala tomon berilgan uchburchakning yuzini hisoblash qoidasi bizning belgilashlarda quyidagicha: berilgan uchburchak ABC, AC=13, BC=14, AB=15 bo'lsin(49-rasm).

$$\Delta ADC \text{ dan: } AD^2=13^2-x^2$$
$$\Delta ABD \text{ dan: } AD^2=15^2-(14-x)^2;\ 13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$$
$$169-x^2=29+28x-x^2\ ;\ 28x=140\ ;\ x=5$$
$$(1) \text{ dan } AD^2=13^2-5^2=169-25=144\ ;\ AD=12$$
$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}14\cdot 12=84$$

Xorazmiy π uchun $22/7$ va $10/3$ qiymatlarni tavsiya qiladi. Unda doira yuzini hisoblash uchun quyidagi formula bor:

$$S_{\partial}=d^2-\frac{1}{7}d^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}d^2=d^2\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)=\frac{11}{14}d^2$$

Xorazmiyda segmentning yuzini doira yoyining l uzunligi, Q vatari va h balandligi bo'yicha hisoblash qoidasi mavjud. Buning uchun Xorazmiy avval diametrni $d=\frac{a^2}{4h}+h$ orqali ifodalab oladi, u holda yarim doiradan kichik segment uchun

$$Q=\frac{d}{2}\cdot\frac{l}{2}-\left(\frac{d}{2}-h\right)\frac{a}{2}$$

formula, yarim doiradan katta segment uchun esa

$$Q=\frac{d}{2}\cdot\frac{l}{2}+\left(h-\frac{d}{2}\right)\frac{a}{2}$$

formula tavsiya qilinadi.

Bu bo'limda kesik piramidaning hajmini hisoblash qoidasi berilgan. Bunda muntazam kesik piramidaning pastki va ustki asoslarining tomonlari mos ravishda 4 va 2 birlikka, balandligi 10 birlikka teng, uning hajmini hisoblash lozim. Buning uchun Xorazmiy avval to'liq piramidaning hajmini hisoblab, undan kesik piramida uchida hosil bo'lgan kichik piramidaning hajmini ayirib tashlaydi:

$$\frac{10}{H+10}=\frac{4-2}{4}$$

bunda H-kichik piramidaning balandligi va u 10 birlikka teng. Katta piramidaning balandligi esa 20 birlik. Demak,

$$V_{katta}=\frac{1}{3}\cdot 16\cdot 20=106\frac{2}{3}$$

$$V_{kichik}=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 10=13\frac{1}{3}$$

Kesik piramidaning hajmi:

$$V_{katta}-V_{kichik}=106\frac{2}{3}-13\frac{1}{3}=93\frac{1}{3}$$

19-§. Sonlar nazariyasiga oid masalalar

Chiziqli va noma'lumlar soni tenglamalardan ko'p bo'lgan tenglamalar sistemasini butun sonlarda yechishga bag'ishlangan maxsus asarni oldin eslatilgan Abu Komil yozgan. Uning nomi «Arifmetikadan noyob kitob». Bu asarning so'z boshida Abu Komil bunday masalalarni butun sonlarda yechganda javob bittagina bo'lishi, javob bir nechta bo'lishi, birorta ham javobga ega bo'lmasligi mumkinligini aytadi. Keyin u o'z so'zini mustahkamlash uchun har uchchala holga doir misollar keltiradi. Bunday masalalarni qushlar haqidagi masala orqali beradi. Dastlab u quyidagi sistemani yechib oladi:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+\dfrac{y}{20}+z=100 \end{cases}$$

U bu sistemada z ni yo'qotadi va y ni x orqali belgilab oladi:

$$\begin{cases} 100-x-y=100-5x-\dfrac{y}{20} \\ y=4x+\dfrac{4}{19}x \end{cases}$$

bundan $x=19, y=80, z=1$ ekanini topadi. Keyin shunga o‘xshash sistemaning oltita yechimini topadi:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{2z}{3}=100 \end{cases}$$

Abu Komilning asaridagi ushbu sistema juda ajoyib:

$$\begin{cases} x+y+z+u+v=100 \\ 2x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{u}{4}+v=100 \end{cases}$$

Bunda $x=\frac{y}{2}+\frac{2}{3}z+\frac{3}{4}u$ va $\breve{o}+\acute{o}+z+4=\frac{3}{2}x+\frac{5}{3}y+\frac{7}{4}u<100$

Abu Komil bu sistema uchun ikki guruh yechimlar to‘plamini topadi. Avval u uchun 1, 3, 5 va hokazo z uchun 3, 6, 9 va hokazo u uchun 2, 6, 10 va hokazo qiymatlar olinadi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi kombinatsiyalar qaraladi:

$$y\leq 59,\ z\leq 54,\ u\leq 50$$

Bu 1443 ta yechim beradi. Keyin y uchun 2, 4, 6, ... ; z uchun 3, 6, 9,... ; u uchun 2, 4, 6,... ; qiymatlar olinadiva quyidagi shartlar qo‘yiladi: $y\leq 58,\ z\leq 51,\ u\leq 52$.Bu esa yana 1233 ta yechim beradi. Demak, yechimlar soni 2676!

Al-Karojiyning «Al-Faxriy» nomli asarida beshta noma’lumli to‘rtta tenglamalar sistemasi uchraydi:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{3}(x+y+v)=5 \\ y+\frac{1}{4}(z+u+x)=5 \\ z+\frac{1}{5}(u+x+y)=5 \\ u+\frac{1}{6}(x+y+z)=5 \end{cases}$$

Sonlar nazariyasi masalalari bilan O‘rta Osiyolik olimlar ham shug‘ullanishgan. Shulardan biri mashhur tabib, faylasuf va matematik Abu Ali Ibn Sinodir. U 980 yili Buxoro viloyatining hozirgi Peshk tumanida joylashgan Afshona qishlog‘ida dunyoga kelgan.

Ibn Sino arifmetika va sonlar nazariyasiga doir maxsus asar yozmagan, ammo u «Donishnoma», «Bilim» va «Ash-shifo» kitoblarining ayrim bo‘limlari arifmetikaga bag‘ishlangan. Bu bo‘limlarda u natural sonlar qatorinin ba’zi xossalari, mukammal sonlar hamda figurali sonlar bilan bog‘liq masalalarni bayon etgan.

Abu Ali Ibn Sinoning natural sonlar ustidagi amallar xossalarini to‘qqiz yordamida tekshirishi diqqatga sazovor. U «Ash-shifo» kitobining arifmetikaga tegishli bo‘limida natural sonlar qatoridagi barcha sonlar alohida-alohida kvadratga ko‘tarilsa, hosil bo‘lgan sonlarning birlar xonasida hamma vaqt 1, 4, 5, 6, 9 raqamlaridan biriga teng son hosil bo‘lishini aytadi. Masalan,

$$11^2=121\ ,\ 12^2=144\ ,\ 15^2=225\ ,\ 14^2=196\ ,\ 13^2=169\ ,\ \text{yoki}\ 21^2=441\ ,$$
$$22^2=484,\ 25^2=625,\ 24^2=575,\ 23^2=529\ \text{va hokazo.}$$

Ibn Sinoning qo‘shish amalini to‘qqiz yordamida tekshirish haqidagi qoidasini bizning hozirgi belgilashlarimizda quyidagicha yozsa bo‘ladi, ya’ni ushbu natural sonlar berilgan bo‘lsin:

$$N=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_0$$
$$M=b_m10^m+b_{m-1}10^{m-1}+\ldots+b_0$$
$$N_1=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_0$$
$$M_1=b_m+b_{m-1}+b_{m-2}+\ldots+b_0$$

U holda shu sonlarning yig‘indisi $N+M=(N_1+M_1)(mod9)$ kabi yoziladi. Endi 15 va 16 sonlari kvadratlarining yig‘indisini 9 yordamida tekshirishni yozib ko‘rsataylik:

$$15^2=225=2.10^2+2.10+5$$
$$16^2=256=2.10^2+5.10+6$$

U holda $225+256=(2+2+2+5+5+6)(mod9)\ =22(mod9)$.

Ibn Sino sonlarning kvadratlari va kublarini to‘qqiz yordamida tekshirishga ham to‘xtaydi. Bu qoidalarni bizning belgilashlarimizda quyidagicha yozish mumkin:

$$[(9n\pm1)^2-1]:9;\ [(9n\pm2)^2-1];\ [(9n\pm3)^2-9]:9;$$
$$[(9n\pm4)^2-7]:9;\ [(9n\pm5)^2-7];\ [(9n\pm6)^2-9]:9;$$
$$[(9n\pm7)^2-4]:9;\ [(9n\pm8)^2-1];\ [(9n\pm9)^2-9]:9;$$
$$[(9n\pm1)^2-1]:9;\ [(9n\pm2)^2-8];\ [(9n\pm3)^2-9]:9;$$
$$[(9n\pm4)^2-1]:9;\ [(9n\pm5)^2-8];\ [(9n\pm6)^2-9]:9;$$
$$[(9n\pm7)^2-8]:9;\ [(9n\pm8)^2-8];\ [(9n\pm9)^2-9]:9;$$

ifodalar butun sonlardir.

20-§. Ildiz chiqarish va Nyuton binomi

Qator islom mamlakatlari matematiklari sonlardan ildiz chiqarish, sonlar yig‘indisi yoki ayirmalarini natural darajaga ko‘tarish masalalari bilan shug‘ullanishgan.

Sonlardan kub ildiz chiqarishning hozirda biz Ruffini-Gorner usuli deb ataydigan usul bilan bir xil usulini birinchi marta Ahmad an-Nasaviy bayon etgan. Abul Vafo Buzjoniy esa sonlardan uchinchi, to‘rtinchi va yettinchi darajali ildiz chiqarish haqida, Abu Rayhon al-Beruniy esa sonlardan uchinchi va undan yuqori darajali ildiz chiqarish haqida asar yozishgan. Ammo bu kitoblar bizgacha yetib kelmagan. Butun sondan istalgan natural darajali ildiz chiqarish qoidasini birinchi bo‘lib Umar Xayyom bergan, ammo uning ham bu masalaga bag‘ishlangan «Arifmetika qiyinchiliklari» («Mushkulot al-hisob») nomli asari yo‘qolgan. Umar Xayyom o‘zining algebraga doir asarida hindlarning sonlardan kvadrat va kub ildiz chiqarishga doir qoidasiga ikki hadning kvadrati va kubiga asoslangan formulalarni tatbiq etib uni isbotlaganini yozadi. Agar Umar Xayyomning bu so‘zlari rost bo‘lsa, u «Nyuton binomi» formulasini butun ko‘rsatgichlar uchun bilgan bo‘ladi.

Butun sonlardan ildiz chiqarishning umumiy usuli G‘iyosiddin Jamshid al-Koshiyning «Arifmetika kaliti» asarida bayon etilgan. Al-Koshiy bayon etgan usul hozirgi Ruffini-Gorner usuli bilan bir xil. U o'z asarida ikki hadni istalgan natural darajaga ko'tarish qoidasini beradi. Koshiy bu qoidani butun sondan irrasional ildiz chiqarishda uning kasr qismini hisoblashga ishlatadi. U binomial koeffisientlarni daraja ko'rsatgichlarining elementlari, deb ataydi. Koshiy bo'yicha kvadrat bitta daraja ko'rsatgichi elementiga, kub ikkita elementga ega va hokazo.

Al-Koshiy bizning $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ formulaga mos keluvchi koeffisientlarni ketma-ket hisoblash qoidasini jadval tarzida keltirgan.

Al-Koshiy binom qoidasini 5 daraja uchun ifodalagan, u hozirgi tanish formuladan bir oz farq qiladi:

$$(a+b)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} b + C_2^{n-2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n va$$

$$(a+1)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} + C_2^{n-2} a^{n-2} + \cdots + 1$$

Koshiy asarida to'liq kvadrat bo'lmagan sondan n-darajali ildiz chiqarishning taqribiy formulasi bor:

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

Bu formula kvadrat ildiz uchun ushbu ko'rinishga keladi:

$$\sqrt{a^n + r} \approx a + \frac{r}{2a+1}$$

O'z asarida u misol tariqasida 44240899506197 sonidan 5-darajali ildiz chiqarib ko'rsatadi:

$$\sqrt[5]{44240899506197} \approx 536 + \frac{21}{41423774028}$$

Bunday formulalar an-Nasaviyda quyidagi ko'rinishda uchraydi:

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a+1}; \quad \sqrt[3]{a^3 + r} = a + \frac{1}{3a^2 + 3a + 1}$$

XII asrda yashagan Abu Zakariya Muhammad ibn Abdullo al-Xasarda quyidagicha: $\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^3}{\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$

Bu metodlar Yevropada 8-daraja uchun P.Apianda (1527 yil), umumiyroq formada M.Shtifelda (1544 yil) uchraydi.

21-§. Trigonometriyaning rivojlanishi

Oldin qayd etganimizdek, VIII asrning boshlarida arablar zabt etgan mamlakatlarning Bag'dod va Damashq kabi yirik shaharlarida o'sha zamonga xos akademiyalar, ya'ni «Hikmatlar uyi» lari tashkil topdi. Bu «akademiya»larda olimlar qadimgi yunonlarning asarlarini arab tiliga tarjima qilish va ularga sharhlar yozish bilan shug'ullanishdi. Bu «Hikmatlar uylari» da Hindistondan chiqqan olimlar ham ishlashdi. Keyinchalik Yaqin va O'rta Sharq matematik olimlari o'zlarining asarlarini ham e'lon qilisha boshlashdi. Bu asrlarning ko'pchiligi «Zijlar» bo'lib, (u forscha zij-jadval so'zidan olingan) astronomiya va trigonometriya jadvallardan iborat edi. «Zij»larda ularning tuzilishiga ko'ra nazariy dasturlar bayon etilmaydi, teoremalar isbotlanmaydi, balki nazariy fikrlar qoida tarzida beriladi. Hozirgi kunda VIII-XV asrlarda tuzilgan shunday zijlarning 100 dan ortig'i ma'lum. Ular orasida eng birinchilari ham, XV asrda yaratilganlari ham bor. Masalan, Al-Xorazmiy ziji eng birinchilardan bo'lsa, Ulug'bekning ziji XV asrda tuzilgan. Oradagi zijlardan Abdurahmon al-Xaziniyning XII asrda tuzilgan «Ziji al-Sanjariy» sini eslatish mumkin.

Musa al-Xorazmiy o'z zijida Yaqin va O'rta Sharqda birinchi bo'lib, sinus va teskari sinus tushunchalaridan foydalandi. U sinuslar jadvali va undan foydalanish yo'llarini bayon etdi. U ko'rsatgan yoy bo'yicha sinusni va teskari sinusni, shuningdek, sinus bo'yicha yoyni topish qoidalari ham juda ixcham va chiroyli. Bu amallarni bajarishda Xorazmiy doira radiusini 60 birlikka teng deb olgan, sinusning jadval qiymatlari oltmishli kasrlarda berilgan.

Teskari sinusning Xorazmiy bergan qoidasini hozirgi bizning belgilashlarda quyidagicha yozish mumkin: α yoyning teskari sinusi chizig'ini sin versα deb belgilasak, u holda

$$\alpha<90^0 \text{ da } \sin vers\alpha=60-\sin(90^0-\alpha)$$

$$\alpha>90^0 \text{ da } \sin vers\alpha=60+\sin(\alpha-90^0)$$

Agar hozirgidek, doira radiusini birga teng deb olsak, u quyidagicha bo'ladi:

$$\sin vers\alpha=1-\cos\alpha$$

Xorazmiy zijining al-Majritiy (tax.1007 yili vafot etgan) qayta ishlagan variantida kotangens («to'g'ri soya») va tangens («teskari son») jadvallari bor. Bundan tashqari, o'rta asrlarda Xabash al-Hosib (tax.770-tax. 870)ning ziji ham anchagina mashhur bo'lgan. α burchakning kotangensini topish qoidasi hozirgi bizning belgilashlarimizda quyidagicha:

$$ctg\alpha=\frac{\sin(90^0-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot 12$$

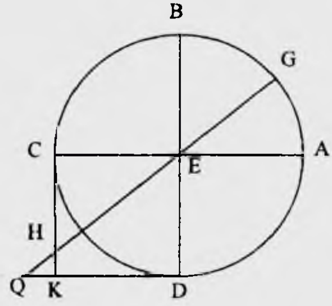
Bu yerdagi 12 gnomonning birliklardagi uzunligi.

α burchak tangensini ham shunga o'xshash: $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sin(90^0-\alpha)}$

Xabash al-Xosibning zijida sinus, tangens, kotangens, sekans va kosekanslarning bir gradusdan oralatib bergan jadvali bor.

O'rta Osiyodan chiqqan va trigonometriyaning rivojiga ma'lum hissa qo'shgan olimlardan biri Abu Nasr al-Forobiy (870-950). U o'zining «Almagest kitobiga ilova» nomli asarida trigonometrik funksiyalarning gnomonika bilan aloqasidan voz kechadi. Forobiy o'sha asarda Quyoshning balandligini aniqlashda tangens va kotangens chiziqlaridan quyidagicha foydalanadi: «ABCD (50-rasm) balandlik doirasi, E esa doiraning markazi, DI-balandlik doirasi tekisligi bilan ufq tekisligining kesishish chizig'i bo'lsin; DE-ufq tekisligidagi D nuqtaga perpendikular qo'yilgan gnomon, CK-balandlik tekisligi bilan C nuqtada gorizontga perpendikular turgan tekislikning kesishishi, CE esa o'sha tekislikda turgan gnomon. Boshqa balandlik

AG ni qaraymiz. GEF ni, ya'ni gnomonning uchi bilan soyaning oxirini tutashtiruvchi nur o'tkazamiz; DF gnomon DE ning soyasi, u yassi soya, yoki AG balandlikning ikkinchi soyasi deyiladi. CH-gnomon, CE ning soyasi, u AG balandlikning teskari soyasi yoki birinchi soyasi deyiladi»*.



50-rasm.

Forobiy Quyoshning balandligi ortishi bilan birinchi soya (tangens)ning ortishini, ikkinchi soya (kotangens)ning kamayishini aytadi.

Ko'rib turganingizdek, bu parchada trigonometrik chiziqlarni aniqlash gnomonika bilan bog'liq. Endi yuqoridagi parchani quyida keltiriladigan parcha bilan solishtiring:

«AB yoy F markazli balandlik doirasida (51-rasm) bo'lsin, uning diametri AEA, AB esa balandlik yoyi. EBG chiziqni o'tkazamiz; AE ga AG perpendikularni qo'yamiz. Xuddi shu singari AE ga BC perpendikularni tushiramiz; AG balandlik AB ning birinchi soyasi. Men uni ma'lum deb hisoblayman. Bu uning isboti: GA va BC lar AE ga perpendikular, shu sababli ular parallel, GA ning AE ga nisbati BC ning CE ga nisbati kabi. Ammo AE biz faraz qilgan biror bo'laklarda gnomonga teng yarim diametr, BC esa AB yoyning sinusi, CE uning kosinusiga teng, demak, AG ma'lum».

Bunda BC-sinus chizig'i, CE-kosinus chizig'i, GA-tangens chizig'i, AE=r-doiraning radiusi.

Yuqorida GA/AE=BC/CE haqida gap boradi.

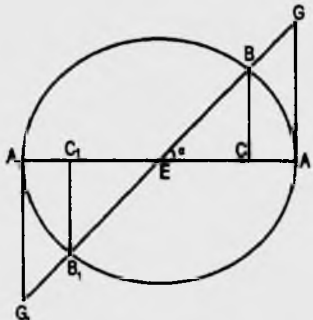
---

* Аль-Фараби. Математические трактаты. Алма-ата, «Наука», 1972 (73-бет).

$$GA/AE = GAr = tg\alpha; \; BC/r = \sin\alpha; \; CE/r = \cos\alpha$$

Demak, $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Trigonometriyaning rivojiga hissa qo'shgan olimlardan biri al-Battoniy (tax.858-929). U trigonometrik chiziqlarni doiradagi 0° dan 180° gacha ora- liqda qaradi (shu vaqtga qadar faqat birinchi chorakda qaralar edi).U ikkinchi chorakda sinusni $\cos\alpha = \sin(90+\alpha)$ kabi aniqladi, chunki al-Battoniy kosinusni 90° gacha to'ldirilgan burchakning sinusi deb qaradi. Sababi uning zamonida manfiy son tushunchasi yo'q edi.



51-rasm.

Abu Rayhon Beruniyning «Mas'ud Qonuni» asaridagi trigonometrik ma'lumotlar o'z bayoniga ko'ra juda aniq va to'liq. Beruniy trigonometriyani bayon etishni asosiy vatarlarni aniqlashdan boshlaydi. Buning uchun u doiraga ichki chizilgan muntazam ko'pburchaklarning tomonlarini topish bilan shug'ullanadi. Ularning yordamida $\sin 60^{\circ}$, $\sin 45^{\circ}$, $\sin(22{,}5)^{\circ}$ va $\sin 18^{\circ}$ ni aniqlaydi.

Beruniy hozirgi bizning atamalarda ikki hissalangan burchak va yarim burchak sinusi, ikki burchak yig'indisi va ayirmasining sinusi haqidagi teoremalarni ifodalaydi.

Beruniyning xizmatlaridan yana biri yoyni ketma-ket bo'lishdan hosil bo'ladigan vatarlarni topish qoidasidir. Bu qoidalar bizning belgilashlarda quyidagicha:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\alpha}$$
$$\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\alpha}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\cos\alpha}}}$$

....

«Mas'ud qonuni» ning to‘rtinchi kitobida Beruniy 1° li yoyning vatarini topishni qaraydi. Ma’lumki, bu trigonometrik jadvallar tuzish uchun juda ham zarur. Bu masalani hal etish oldin eslatganimiz singari, burchak triseksiyasi bilan bog‘liq. Masalani hal etishga turli vaqtlarda turli olimlar har xil usullarni tatbiq etishgan. Beruniy esa uch gradusli burchakka triseksiyani tatbiq qilgan. Triseksiyada qadimgi «qo‘yish metodi» dan foydalangan.

Beruniyning ikkinchi usuli doiraga ichki chizilgan muntazam to‘qqiz burchak va o‘n burchaklarning tomonlarini topishga asoslangan, ya’ni 40° li va 36° li vatarlarni qarash bilan bog‘liq. U 40° $-36^{\circ}=4^{\circ}$ li vatarning qiymatini topadi, so‘ng qoidaga ko‘ra vatar 2°, vatar 1° larni, ya’ni $2\sin 1^{\circ}$; $2\sin(0,5)^{\circ}$ ni topadi. 60 li sanoq sistemasida u quyidagicha:

$$1^{\circ}=0^{P}1^{I}2^{II}49^{III}42^{IV}39^{V}$$

u π uchun oltmishli sanoq sistemasida

$$3^{P}8^{I}30^{II}17^{III}17^{IV}$$

yoki o‘nli sanoq sistemasida

$$3,14\ 17\ 60$$

qiymat hosil qilgan.

Beruniy asarida so‘zlarda ifodalangan quyidagi formulalar mavjud:

$$\mathrm{cosec}^2\alpha=\mathrm{ctg}^2\alpha+1$$
$$\sec^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha+1$$
$$\frac{1}{\mathrm{cosec}\,\alpha}=\sin\alpha;\quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha;\quad \frac{1}{\sec\alpha}=\cos\alpha;\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Sharqdagi trigonometriyaning keyingi rivoji Nasiriddin at-Tusiy(1201-1274)ning ishlari bilan bog'liq.

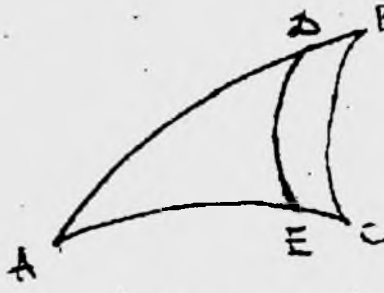
Trigonometriyaning XV asrdagi rivojlanishiga Ulug'bekning Samarqand Fanlar Akademiyasi xodimlari salmoqli hissa qo'shishdi.

Yaqin va O'rta Sharq matematiklari sferik trigonometriyani alohida fan sifatida rivojlantirishdi. Agar ular VIII-IX asrlarda Menelayning «Sferika»sini arab tiliga tarjima qilgan va qayta ishlagan bo'lsa, X asrga kelib bu fan haqida o'z fikr va mulohazalariga ega edi.

Menelay Osmon sferasidagi biror yoyni hisoblashni talab etuvchi har bir masalani to'liq to'rt tomonlik (sfera yoylaridan tuzilgan to'rtburchak)ni yasashga keltirar va unga o'zining teoremasini tatbiq etar edi.

O'rta Osiyodan chiqqan matematiklar-Ibn Iroq, al-Ho'jandiy, Abul Vafo al-Buzjoniylar to'la to'rt tomonlikni sferik uchburchakka almashtirishdi va uning tomonlari bilan burchaklari orasidagi bog'lanish o'rnatishdi.

O'rta va Yaqin Sharq matematiklarining yana bitta katta yutug'i-sinuslar teoremasining isboti edi.



52-rasm

Agar ABC sferik uchburchakda (52-rasm) uning tomonlari a, b, s lar bilan, ya'ni $\breve{BC}=a$, $\breve{AC}=b$, $\breve{AB}=c$ bilan belgilangan bo'lsa, quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

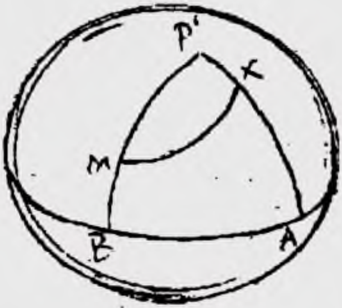
Demak, har qanday sferik uchburchakda biror tomon sinusining shu tomon qarshisidagi burchak sinusiga nisbati o‘zgarmas sondir.

Mana shu teoremaning isboti sferik astronomiya masalalarini yechishda to‘liq to‘rt tomonlikdan voz kechishga olib keldi. Endi sferik astronomiyaning turli masalalarini yechish sferik uchburchakni yechishga keltiriladi.

Abul Vafo Buzjoniy 52-rasmdagi ABC va ADE sferik uchburchaklar uchun tangenslar teoremasini isbotladi:

$$\frac{tgBC}{tgDE}=\frac{\sin AC}{\sin AE}$$

Islom dinidagi qiblani, ya’ni Makkai Mukarramadagi Ka’baga yo‘nalishni aniqlash masalasi sferik astronomiya va sferik trigonometriya rivojlanishi uchun asos bo‘lganlardan biri. Bu masalaga har bir musulmon kishi bir sutkada besh marta duch keladi. Bunda u turli geografik punktlarda bo‘lishi mumkin. Shahar yoki qishloqda bo‘lsangiz yaxshi, u holdagi masjiddagi mehrobga yoki bir marta bir belgilab olgan narsangizga qarab nomozingizni o‘qib ketaverasiz. Bordi-yu, biror keng dala yoki sahroda bo‘lsangiz nima qilasiz?



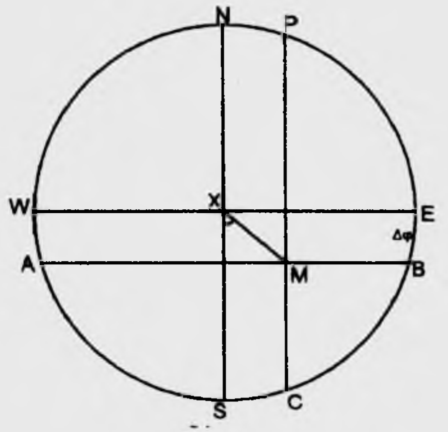
53-rasm

Sferik astronomiya va matematik geografiya bu masalani quyidagicha hal etadi. Faraz qilaylik, K-shimoliy qutb(53-rasm) bo‘lsin, AB-ekvator, M-nuqta Makkai Mukarramani ko‘rsatadi, X-kuzatuvchining holati, KMB va KXA yoylar Makka va X punktning meridian yoylari. Makkaning X punkt uchun azimutini, ya’ni KXA meridian va X hamda M nuqtalarni tutashtiruvchi katta doiraning XM yoyi orasidagi KXM burchakni topish talab qilinadi.

Demak, X punktda turib qiblaning yo'nalishini aniqlash uchun KXM sferik uchburchakni yechish lozim. Bunda biz turgan punktning geografik kengligi φ=XA ni, Makkaning kengligi φ=MB ni, shuningdek, M va X uzunliklarining farqini bilish zarur, u $\Delta L = L - L_m$

Qiblani aniqlash masalasi turli trigonometrik va geografik metodlar bilan yechilgan. Ammo bunda hamma uchun qulay bo'lgan sodda usullarga ko'proq e'tibor berilgan. IX-XIX asrlarda keng tarqalgan eng sodda va taqribiy metod Abu Abdullo Muhammad ibn Jobir al-Battoniy (850-929) ga tegishli.

Faraz qilaylik, markazida kuzatuvchi turgan gorizontal doirada tush chizig'i NS va g'arb-sharq chizig'i WE o'tkazilgan bo'lsin. Shuningdek, $\Delta\varphi$-Makka va kuzatuvchi joyining kengliklari ayirmasi, ΔL esa ular uzunliklarining farqi bo'lsin (54-rasm).



54-rasm.

Doira aylanasining sharq nuqtasi YE va janub nuqtasi S dan EB $=\Delta\varphi$ va SC$=\Delta L$ yoylar ajratiladi. B nuqta orqali WE ga parallel AB to'g'ri chiziq; C nuqta orqali esa NS ga parallel CD chiziq o'tkaziladi. Bu to'g'ri chiziqlar M nuqtada kesishadi deylik, u holda Makkaga yo'nalish $\angle SXM = q$ kabi aniqlanadi.

Agar biz M ni koordinata boshida deb qarasak, u holda

$x = RM = \sin\Delta L$, $y = MT = \sin\Delta\varphi$ va

$$q^I = 90^o - q = \arcsin\frac{R\sin\Delta\varphi}{\sqrt{\sin^2\Delta L + \sin^2\Delta\varphi}}$$

Hozirgi bizning belgilashlarda esa

$$q^I = 90^o - q = arctg\frac{\sin\Delta\varphi}{\sin\Delta L}$$

Shunday qilib, $q = 90^0 - arctg\dfrac{\sin\Delta\varphi}{\sin\Delta L}$

Shuni e'tirof etish lozimki, hamma davrlarda olimlar, ayniqsa matematiklarni hayotiy masalalar qiziqtirib kelgan. Bunday masalalarni hal etish faqat iqtisodiy foyda keltiribgina qolmay, ilm ahliga, oddiy mehnatkash ommaga g'oyaviy boylik ham keltirgan.

IKKINCHI QISM

O'RTA ASRLARDA YASHAGAN ISLOM MAMLAKATLARI BA'ZI MATEMATIKLARINING HAYOTI VA ILMIY FAOLIYATI

1-§. Ibn Iroq

O'rta asrlarda hozirgi O'zbekiston Respublikasi hududida Qoraqalpg'istonning hozirgi Beruniy shahrida yashab ijod etgan matematiklardan biri Abu Nasr Mansur ibn Iroqdir. Olimning tarjimayi holi haqida batafsil ma'lumot yo'q, ammo uning zamondoshlarining asarlarida, undan keyin yashagan matematiklarning biri Ibn Iroqning tarjimayi holiga doir uzuq-yuluq ma'lumotlar mavjud.

Shu kabi ma'lumotlarga ko'ra, Ibn Iroq Abu Rayhon al-Beruniydan 10-15 yoshlar katta bo'lgan. Demak, u taxminan 960-yillarda tug'ilgan. U shahzodalardan bo'lgan degan ma'lumotlar bor: Beruniyning ona shahri Kotning Beruniy zamonidagi shohi Abu Abdullo Muhammad ibn Ahmad ibn Iroq Abu Nasrning tog'asi, Ali Ibn Iroq esa Abu Nasrning otasi edi.U boshlang'ich ma'lumotni Xorazmdashoh saroyida olgan bo'lishi ehtimoldan holi emas. Keyinchalik Abu Nasr ota-onasidan erta yetim qolgan Abu Rayhon Beruniyni o'z tarbiyasiga olgan. Shu sababdan bo'lsa kerak, Beruniy Ibn Iroqni ustozim deb hurmat bilan tilga olgan. Manba'lar Mahmud G'aznaviy 1017-yili Xorazmni bosib olgach, Ibn Iroq va Beruniyni asir olib G'aznaga olib ketganini ko'rsatadi.

Abu Nasr ko'proq astronomiya va trigonometriya bilan shug'ullangan, uni ko'proq sferada sodir bo'ladigan trigonometriya, ya'ni sferik trigonometriya qiziqtirgan. U qadimgi yunon matematigi Menelay (I-II asr)ning «Sferika « nomli asariga sharh yozgan. Ibn Iroqning bu asari 1007-1008-yillari yozilgan. Astronomiyadan sferik trigonometriyani birinchi bo'lib ajratgan matematik o'sha Menelay hisoblanadi. Ammo, deyarli 100 yildan so'ng bu asarga Ibn Iroq tomonidan yozilgan bu sharh ham katta ahamiyatga ega, chunki Ibn

Iroq sharhda Menelay teoremalarini tushuntiribgina qolmay, balki sferik trigonometriya sohasida o'zi erishgan yutuqlarni ham bayon etadi.

Sharh uchta kitob yoki bobdan iborat. Ibn Iroq avval sferik uchburchakning ta'rifini beradi. Uning burchaklarini, ularning tenglik alomatlarini ta'riflaydi.

Birinchi kitobda sferik uchburchaklarning tenglik alomatlari ko'rsatiladi va teng yonli sferik uchburchaklarda ham asosdagi burchaklari tengligi haqidagi, sferik uchburchaklarda ham teng tomonlar qarshisida teng burchaklar va aksincha yotishi, uchburchak ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan kattaligi, sferik uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180 gradusdan katta ekani haqidagi teoremalar isbotlanadi va hokazo.

Ikkinchi kitobda sferadagi parallel doiralar aylanalari sistemasini katta doiralarning turli aylanalari bilan kesganda hosil bo'ladigan xossalar o'rganiladi.

Uchinchi kitobga kirishda keyingi isbotlar uchun ishlatiladigan murakkab nisbat haqida tushuncha beriladi. Bu kitobning birinchi teoremasi Menelayning to'la to'rt tomonligi haqida. Bu figura sferadagi ikkita katta doira aylanalarining kesishishidan hosil bo'ladi. Qadimgi yunonlar bu figura yordamida sferadagi deyarli barcha hisoblarni bajarishgan. Bizga ma'lumki, o'rta asr Markaziy Osiyo matematiklari qadimgi matematiklarning bu metodlarini o'zlashtirib, uni amaliyotga tatbiq etishgan. Ammo, Menelayning to'la to'rt tomonligi yordamidagi hisoblashlar juda uzun edi. Bu esa X-XI asrlarda yashagan Markaziy Osiyolik matematiklarni o'sha to'rt tomonlikni sferik uchburchakka almashtirish g'oyasiga olib keldi. O'sha olimlar bu uchburchak tomonlari va burchaklari orasidagi munosabatlarni ham o'rnatishdi. Shu munosabatlardan eng muhimi, sfera uchun sinuslar teoremasi hisoblanadi.

Sferik uchburchak uchun sinuslar teoremasi (shuningdek, tekis uchburchaklar uchun ham sinuslar teoremasi) ning kashfiyotchilari deb matematika tarixida Ibn Iroq, Abdul Vafo al-Buzjoniy (940-998) va Abu Mahmud al-Xo'jandiy (tax.1000 yilda vafot etgan, hozirgi Tojikiston Respublikasining Xo'jand shahridan chiqqan olim)lar hisoblanadi. Lekin Ibn Iroq Menelay «Sferika» siga yozgan sharhning uchinchi kitobida o'zi taklif etgan «to'la to'rt tomonlidan ozod etuvchi teorema» haqida va bu teoremaning soddaligi va chiroyliligi haqida yozadi. Shunday qilib, Ibn Iroq tekislik va sferadagi sinuslar teoremasining kashfiyotchisi hisoblanadi.

Ibn Iroq matematikaning boshqa sohalarida ham asarlar yozgan. Uning yunon matematigi Yevklid (e.o.III asr) ning «Negizlar» asari 13 kitobining qiyin joylarini tushuntirish haqida» va «Geometriyaning ba'zi savollariga javoblar» nomli asarlari ma'lum.

Bundan tashqari, Beruniy o'zining «Aylana vatarini unga ichki chizilgan siniq chiziqning xossasi yordamida aniqlash» asarida geometriyaning Ibn Iroq tomonidan isbotlangan bir necha teoremasini keltirdi.

Ammo Ibn Iroq ko'proq astronomiya bilan shug'ullangan, uning bu sohaga tegishli 20 ga yaqin asari bizgacha yetib kelgan.

2-§. Abul Vafo Buzjoniy

X asr Bag'dod matematika maktabining yirik namoyondalaridan biri Abul Vafo Muhammad al-Buzjoniydir. Buzjon Xirot bilan Nishopur orasida (Hozirgi Turkmanistonning Kushka shahri yaqinida) joylashgan shahar bo'lgan. Abul Vafo 940 yili shu shaharda tug'ilgan.

X asrda Bag'dod arab xalifaligining poytaxti, o'sha davrning fan va madaniyat markazi bo'lgani uchun fanga qiziqqan Abul Vafo ham Bag'dodga o'qishga kelgan va shu yerda yashab, ijod qilib qolgan. U Bag'dodda 998 yili vafot etgan.

Abul Vafo yunon geometrlarining asarlarini arab tiliga tarjima qilgan va sharhlagan arab mamlakati olimlaridan eng keyingisi hisoblanadi. U Geron (e.o.I asr), Gipparx (e.o.II asr), Diofant (e.o.III asr) larning asarlarini tarjima qilgan va sharhlagan. Shuningdek, buyuk o'zbek matematigi Muhammad Xorazmiy (783-850) ning «Al jabr va-l-muqobala amallaridan qisqacha kitob» iga ham sharh yozgan. Ammo, bu tarjima va sharhlar bizning kunlargacha yetib kelmagan. Uning bizgacha yetib kelgan asarlari orasida eng mashhurlari ikkita: birinchisi «Hunarmandlar geometrik yasashlardan nimalarni bilishlari haqida kitob», ikkinchisi esa «O'lpon yig'uvchilar va kotiblar hisoblash san'atidan nimalarni bilishlari zarurligi haqida risola».

Abul Vafoning birinchi kitobi fors tiliga ham tarjima qilingan. Tarjimani Abu Is'hoq ibn Abdullo bajargan. Ba'zi matematika tarixchilari Abul Vafoning geometrik yasashlarida Hind matematiklarining yasashlariga o‘xshash yasashlar borligini ta’kidlashadi. Shunday bo‘lishi mumkin, qadim-qadimlardan boshlab, arab mamlakatlari xalqlari, jumladan O‘rta Osiyo xalqlari Hindiston bilan aloqada bo‘lib kelgan. Yuqoridagi fakt ular orasida matematik aloqalar ham bo‘lganligidan dalolat beradi.

Abul Vafo «Hunarmandlar geometrik yasashlardan nimalarni bilishlar haqida kitobi» da 176 ta turli xil yasashlarni bajargan. Ular 11 bobga joylashtirilgan.

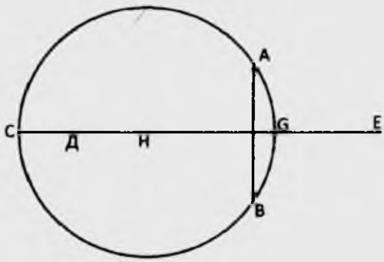
Birinchi bobda avtor chizg‘ich, sirkul va go‘niya haqida gapiradi, to‘g‘ri burchakni qanday yasash lozimligini, kesmaning uchidan perpendikular chiqarishni ko‘rsatadi va nihoyat, berilgan burchakning to‘g‘ri burchak ekanligiga qanday qilib ishonch hosil qilishni aytadi.

Ikkinchi bobda, hozirgi geometrik yasashlar tili bilan aytilganda, eng sodda geometrik yasashlarga to‘xtaladi. Muallif uni birinchi navbatda bilish lozim bo‘lgan prinsiplar deb ataydi. Unda, berilgan kesmani berilgan bo‘laklarga ajratish, berilgan burchakka teng burchak yasash, berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish, markazi noma’lum doiraning markazini topish kabi masalalar bor.

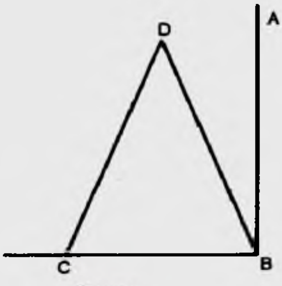
Abul Vafo oxirgi masalani quyidagicha yechadi: «Doira aylanasida ikkita A va B nuqtalarni belgilaymiz va AB masofa bilan ikkita teng yoylar yasaymiz, ular D va E nuqtalarda kesishadi. DE chiziqni o‘tkazamiz va uni aylana bilan C hamda G nuqtalarda kesishguncha davom ettiramiz, so‘ngra GE kesmani N nuqtada teng ikkiga ajratamiz. U holda N nuqta doiraning markazida bo‘ladi» (55-rasm).

Shu bobdagi o‘quvchilarga qiziq masalalardan to‘g‘ri va to‘g‘ri burchakdan kichik burchakni teng uch qismga ajratish masalalari hisoblanadi. Quyida ana shu masalalardan Abul Vafo keltirgan yechimlarini keltiramiz.

To‘g‘ri burchakni teng uch qismga ajratish: «Agar ABC to‘g‘ri burchakni teng uch qismga ajratish lozim bo‘lsa, BC chiziqda DBC teng tomonli uchburchak yasaymiz. U holda ABD burchak to‘g‘ri burchakning uchdan biriga teng bo‘ladi, qolgan DBC burchak esa to‘g‘ri burchakning uchdan ikki qismi. Bu uning chizmasi». (56-rasm).



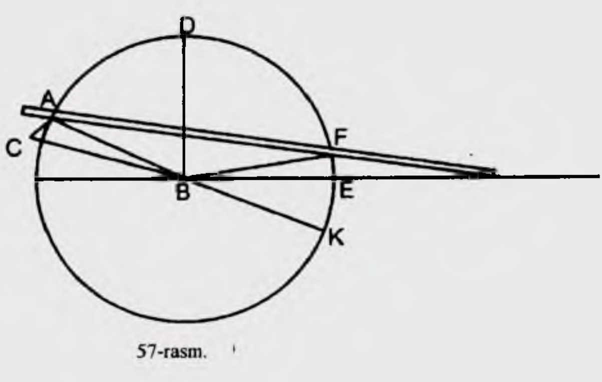
55-rasm.



56-rasm.

Abul Vafo masalani to‘g‘ri yechganmi? O‘ylab ko‘ringchi?

To‘g‘ri burchakdan kichik burchakni teng uch qismga ajratish:»Agar berilgan ABC burchak to‘g‘ri burchakdan kichik bo‘lsa, B nuqtani markaz qilib, BA masofa bilan BAC doirani chizamiz. BD ni BC bilan to‘g‘ri burchak hosil qiladigan qilib joylashtiramiz va CB ni doira aylanasi bilan E nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. Chizg‘ichni A nuqtaga qo‘yamiz va uni CDE doira aylanasi bo‘yicha DB perpendikular va DE yoy orasidagi NF chiziq DB chiziqqa teng bo‘lguncha harakatlantiramiz, bunda chizg‘ich A nuqtadan toyib ketmasligi kerak. So‘ng EF ga teng EK yoyni yasaymiz. KB ni o‘tkazamiz va u L nuqtada doira aylanasi bilan kesishguncha davom ettiramiz. U holda LBC burchak ABC burchakning uchdan biriga teng bo‘ladi. So‘ng ABL burchakni teng ikkiga ajratamiz. Bu uning chizmasi»(57-rasm).



57-rasm.

Keling o‘zimizda bor bilim bilan Abul Vafo bu masalani to‘g‘ri yechganmi, yo‘qmi tekshirib ko‘raylik. Buning uchun chizmadagi G‘ va B nuqtalar tutashtirilgan, deb faraz qilamiz, BG‘M hamda MBA uchburchaklarni qaraymiz. Bu holda BG‘M uchburchak teng yonli bo‘lib, uning asosidagi B va M burchaklari teng. BG‘A burchak BG‘M uchburchakka nisbatan tashqi burchak va u B hamda M burchaklarning yig‘indisiga teng. Endi AG‘B uchburchakni qaraymiz, u ham teng yonli va asosidagi A va G‘ burchaklari o‘zaro teng. Berilgan ABC burchak esa MBA uchburchak uchun tashqi burchak va u BMA va MAB burchaklarning yig‘indisiga teng. Boshqacha,

$$\angle ABC = 3\angle FBM, \quad \angle LBC = \frac{1}{3}\angle ABC \ .$$

Abul Vafo yasashni to‘g‘ri bajargan ekan.

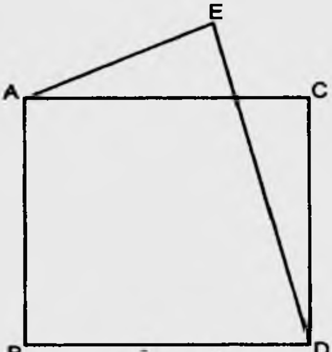
Kitobning keyingi boblaridagi teng tomonli figuralar yasash (masalan, tomoni berilgan muntazam o‘nburchak yasash) doiraga ichki chizilgan muntazam figuralar yasash, figuralarga ichki va tashqi aylanalar chizish, bir figuraga ichki bir figurani chizish, uchburchak va to‘rtburchaklarni bo‘laklarga ajratish kabi masalalar qaraladi. Birinchi xil masalalarning o‘zi ikki guruhga bo‘linadi. Birinchi guruh: Agar kvadratlar soni n kvadrat son bo‘lsa, ya’ni $n=a^2$ bo‘lsa, masala oson hal qilinadi. Agar $n=a^2+b^2$ bo‘lsa, masala quyidagi algebraik almashtirishga asoslanadi: $a^2+b^2=(a+b)^2+4ab/2$ Bunday masalalarni quyidagi turlarga bo‘lish mumkin:

1) berilgan kvadratni kvadrat sondagi kvadratlarga ajratish;
2) kvadrat sondagi kvadratlardan kvadrat yasash;
3) kvadratlarning soni ikkita teng kvadrat sondan iborat kvadratlardan kvadrat yasash;
4) yig‘indisi ikkita teng bo‘lmagan kvadratlardan iborat ma’lum sondagi kvadratlardan kvadrat yasash;
5) kvadratni kvadratlar soni ikkita teng kvadrat sonlar yig‘indisidan iborat kvadratlarga ajratish;
6) kvadratni soni ikkita teng bo‘lmagan kvadrat sonlar yig‘indisidan iborat kvadratlarga ajratish.

Abul Vafo bu masalalarni ko‘pchiligini juda sodda qilib yechgan, hatto Pifagor (e.o.VI asr) teoremasidan ham foydalanmagan.

Abul Vafo qaragan ikkinchi guruh masalalarin sodda qilib yechgan. Bunday masalalarni yechishda Pifagor teoremasiga murojaat qiladi.

Ana shunday masalalardan biri uchta teng kvadratdan kvadrat yasash. Bu haqda Abul Vafo quyidagilarni yozadi: «Biz har biri ABCD kvadratga teng uchta kvadratdan kvadrat yasamoqchimiz. AD dioganalni o‘tkazamiz, u holda AD ikkita teng kvadratdan yasalgan kvadratning tomoni, so‘ngra A nuqtadan AD chiziqqa AC ga teng AE perpendikularni tushiramiz. U holda ED har biri ABCD kvadratga teng uchta kvadratdan tuzilgan kvadratning tomoni bo‘ladi. Bu uning chizmasi» (58-rasm).



58-rasm.

Masala to‘g‘ri hal qilinganmi? O‘ylab ko‘ring.

Abul Vafoning ikkinchi asari «O‘lpon yig‘uvchilar va kotiblar hisoblash san'atidan nimalarni bilishi zarur» deb ataladi.

Bu asar yettita kitobdan iborat, har bir kitob o‘z navbatida yettita bobdan, har bir bob bir necha bo‘limdan iborat. Kitoblarning mazmuni quyidagicha: birinchi kitob turli xil kasrlar haqida, ikkinchi kitob kasrlarni qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish haqida, uchunchi kitob tekis figuralar va masofalarni ulchash haqida, to‘rtinchi kitob turli xildagi o‘lponlar va ularni hisoblashga doir amallar haqida, beshinchi kitob tuyalar podasi, g‘alla, yer va ularni taqsimlash haqida, oltinchi kitob savdo, oltinlar va tangalarni almashtirish haqida, askarlarga haq to'lash va oltin buyumlar hamda kiyim-kechaklar haqida, yettinchi kitob savdo-sotiqda uchraydigan sonlar ustida amallar bajarish to'g'risida.

Bundan tashqari Abul Vafo $x^3=a$, $x^4=a$, $x^4+ax^3=b$ ko'rinishdagi tenglamalarni geometrik yasash bilan ham shug'ullangan. Shunday bo'lishi mumkin, chunki tenglamalar ildizlarini geometrik yasash bilan juda ko'p arab matematiklari shug'ullanishgan.

U Arximed (e.o 287-212) ning «Doirani o'lchash haqida»gi asarini o'rganish paytida aylana uzunligining uning diametriga nisbati bilan, ya'ni π sonining aniq qiymatini hisoblash bilan qiziqib qolgan. Uning qiymatini doiraga ichki muntazam 720 burchaklik chizish bilan topgan. Abul Vafo hisoblashiga ko'ra $\pi=3{,}14156815$. Hozir esa biz $\pi=3{,}14159265$ deb olamiz. Demak, π ning hozirgi qiymati bilan Abul Vafo topgan qiymati orasidaga farq $1/400000$ ga teng.

Abul Vafo trigonometriya sohasida ham katta kashfiyot qilgan matematik hisoblanadi, u tekis va sferik uchburchaklar uchun sinuslar teoremasini, ya'ni

$$\frac{a}{SinA}=\frac{b}{SinB}=\frac{c}{SinC}=2R$$

$$\frac{Sina}{SinA}=\frac{Sinb}{SinB}=\frac{Sinc}{SinC}$$

formulalarni birinchi bo'lib isbotlagan.

3-§. Beruniyning hayoti va ilmiy faoliyati

Beruniyning o'z so'zlariga qaraganda, U 973-yilning sentabr oyida qadimgi Xorazmning poytaxti Qiyotda tug'ilgan. Qiyot Amudaryoning o'ng qirg'og'ida-hozirgi Qoraqalpog'istonning Beruniy shahri o'rnida bo'lgan (Beruniy shahri avval Shabboz deb atalgan).

O'sha davrda Qiyot gullab yashnagan shahar bo'lgan. U shimolga-sharqiy Yevropa xalqlariga, janubga Buxoro, Eron, Hindiston va Xitoyga olib boruvchi chorrahada joylashganligidan O'rta Osiyoning ichki va tashqi savdosida katta rol o'ynagan.

Shu sababli shaharda boshqa yurtdan kelgan mehmonlar ko'p bo'lar va ular o'sha davrning madaniy, siyosiy va hatto ilmiy axborotning manbai hisoblanar edi.

Beruniyning yoshlik va bolalik yillari o'sha shaharda o'tgan. Bu yerda Qiyotni Iroqiylar sulolasining oxirgi vakili xorazmshoh Abu Abdulloh Muhammad ibn Ahmad ibn Iroq boshqarar edi.

Xorazmshoh amakisining o'g'li Abu Nasr ibn Iroq o'sha davrning mashhur matematigi va bilimdon kishisi edi. Menelayning «Sferik» nomli asarini yunon tilidan arab tiliga tarjima qilgan, sferik uchburchaklar uchun sinuslar teoremasini birinchi bo'lib isbotlagan ham Ibn Iroq hisoblanadi.

Ibn Iroq yosh Beruniyning iste'dodi haqida eshitib qolib, uni o'ziga shogirdlikka oladi. Beruniy saroyda trigonometriya, kimyo, astrologiya va boshqa fanlar bilan shug'ullandi.

Beruniy 995-yilgacha, ya'ni Qiyotni Xorazmning ikkinchi poytaxti Gurganjning amiri Ma'mun ibn Muhammad bosib olguncha saroyda yashaydi. 995-yili Rey(Eron)ga keladi. U vaqtda Reyni Faxr ad-Davla idora qilar edi. Uning saroyida esa Xo'jandiy ishlar edi. Beruniy Reyda Xo'jandiy bilan tanishadi. U bilan bo'lgan suhbat ta'sirida «Al-Faxriy sekstanti» nomli asar yozdi.

997-yilda Beruniy Reydan Qiyotga qaytdi. Uning o'z vataniga qaytishi sababli quyidagilar: birinchidan, faxr ad-Davla vafot etdi, taxt uning yoshgina o'g'li Majid ad-Davlaga qoldi va Reyda Somoniylarga qarshi kayfiyat vujudga keldi, ikkinchidan, Xorazmda o'zgarishlar yuz berdi: Ma'mun ibn Muhammad o'lib, taxt uning vorisi Ali ibn Ma'munga qoldi. Ali ibn Ma'mun ancha ma'lumotli kishi bo'lib, o'z saroyiga olimlar va shoirlarni yig'di hamda ularga homiylik qildi.

997-998-yillari Beruniy Qiyotda bo'lib, 998-yilning oxirida Jurjonga keldi. Bu paytda Jurjonda Qobus ibn Vashmagir podshoh edi. Beruniy Jurjonda 1004 yilning boshlarigacha yashadi va ijod qildi. O'zining o'n beshga yaqin asarini shu yerda yozdi. Jumladan, uning «O'tmish xalqlaridan qolgan yodgorliklar» nomli mashhur asari ham shu yerda 1000 yili yozilgan

1004-yilning bahorida Beruniy Jurjondan Xorazmga qaytadi. Bu paytda Xorazmning poytaxti Gurganj (hozirgi ko'hna Urganch) edi. Beruniy Urganchda oy tutilishini kuzatganligini aytadi.

Beruniy Gurganchga kelganidan keyin Ali ibn Ma'munning saroyida Abu Saxl Masixi, atoqli tabib Abul Xayr Xammar, Beruniyning ustozi mashhur matematik va astronom Abu Nasr ibn Iroqlar bilan birga ishlaydi. Bir yildan so'ng, 1005-yili Buxorodan mashhur tabib Abu Ali Ibn Sino ham Gurganjga keladi.

1009-yili Ali ibn Ma'mun o'z ajali bilan vafot etadi va taxtga Abul Abbos o'tiradi. Abul Abbos Beruniyni o'ziga yaqinlashtira boshlaydi. Ko'p vaqt o'tmasdan Xorazmning boshiga qora kunlar yog'iladi. Bu yerdagi ichki kelishmovchiliklarni G'aznada kuzatib turgan Mahmud G'aznaviy ana shu kelishmovchiliklar uchun Xorazmni bosib olish uchun qulay payt ekanini sezadi.

Mahmud Xorazmga elchi yuborib, Xorazmni barcha katta maschidlarida uning nomiga hutba o'qitishni, ya'ni Mahmudni Xorazmning buyuk kishisi deb e'lon qilinishini aytadi.

Hutba o'qildi degani, «Xorazm sizning izmingizda, biz taslim bo'ldik «,-degani edi. O'qitmay desa, Abul Abbos Maxmudning g'azabidan qo'rqar edi. Shunday bo'lsa-da, xorazmshoh ancha paytgacha maschitlarda hutba o'qitmaydi, chunki bunga Xorazmning mansabdor kishilari, askarlar ham rozi bo'lmas edi. Ammo, Mahmud ham bo'sh kelmaydi. U hutba o'qitishni talab qilib xorazmshohga ikkinchi elchisini yuboradi. Abul Abbos bu talabdan qo'rqib ketadi va Xorazmning chekka shaharlari Nasa va Farovada amir Mahmud nomiga hutba o'qish uchun farmon beradi.

Bu farmon askarlarni g'azablantirib yuboradi va ular 1017-yilning mart oyida qo'zg'olon ko'tarib, Gurganj qal'asini egallaydi, unga o't qo'yib, Abul Abbosni o'ldiradi. Taxtga Abul Abbosning akasi Ali ibn Ma'munning o'g'li Abul Xaris Muhammad ibn Alini o'tqazishadi.

Mahmud xuddi shuni kutib turgan edi. Bu voqealardan u Xorazmni bosib olish uchun foydalanadi va 1017-yilning yozida Xorazmni zabt etib, Abul Xaris va qo'zg'oln boshliqlarining hammasini qatl ettiradi.

Mahmud Beruniyni o'z muxolifi va asiri sifatida G'aznaga olib ketadi. Bu ishi bilan Mahmud «bir o'q bilan ikki quyonni uradi». Birinchidan, u Beruniyni Xorazmdagi ishlarga bevosita ishtirok etishidan mahrum etadi. Ikkinchidan, o'z saroyiga mashhur olimni olib keladi.

G‘azna hozirgi Afg‘onistonning poytaxti Qobul shahridan janubiy- g‘arbda joylashgan bo‘lib, undan 120 kilometrcha masofadagi kichkina shaharcha edi.

G‘aznaviylar davlati X asrda vujudga kelgan. XI asrda G‘aznani butun sharq tanir, G‘aznadan Butun sharq qo‘rqar edi. XI asrning birinchi choragida g‘aznaviylar davlati tarkibiga Isfaxon, Xorazm, Turkmanistonning barcha hududi, Eron Hurosoni, Afg‘oniston hududi va g‘arbiy Hindistonning bir qismi kirar edi.

Beruniy G‘aznaga yangi kelgan davrida ahvoli ancha yomon bo‘ladi, ammo ikki yil o‘tgach, ya’ni 1019-yilda biroz yaxshilanadi va ilmiy ish bilan shug‘ullanish darajasiga yetadi.

1022-1024-yillari Beruniy Mahmud G‘aznaviyning Hindistonga qilgan yurishida unga hamroh bo‘lgan va Panjobdagi Nandna qal'asi yaqinida Yer shari meridiani bir gradusining uzunligini o‘lchagan va uni 55,887 milga teng deb topgan. Uni metrlarga aylantirsak, 112 194,5 metrga teng bo‘ladi. Bu natijani hozirgi ma’lumotlar bilan taqqoslab, Beruniy 620 metrga xato qilganligini ko‘ramiz.

Beruniy 1023-1027-yillari Hindistonda yashadi va eski Hind tili-sanskritni o‘rgandi hamda bo‘lajak kitobi «Hindiston tarixi uchun material to‘pladi. U «Hindiston tarixi» ni 1030 yilning aprel oyida Mahmud G‘aznaviy vafot etdi. Uning vasiyatiga ko‘ra taxtga uning kichik o‘g‘li Muhammad chiqadi. Muhammad taxtga o‘tirishi bilan Mahmudning katta o‘g‘li Ma’sud davlatni qurol kuchi bilan bosib olish uchun tayyorgarlik ko‘ra boshlaydi. Biroq, ish qurolli to‘qnashuvgacha borib yetmaydi, chunki Muhammadning askarlari ham Ma’sud tomoniga o‘tib ketadi. Buni ko‘rgan Muhammad taxtdan voz kechadi.

Mas'ud otasi vasiyatiga zid ish tutganidan, otasining muholiflari orasidan o‘ziga homiylar qidiradi. Beruniyni otasi davrida aziyat chekkanlardan hisoblab, unga iltifotlar ko‘rsatadi va ilmiy ish bilan shug‘ullanish uchun sharoit yaratib beradi. Shu davrda Beruniy o‘zining astronomiyaga oid shohona asarini yozadi va uni Mas'udga bag‘ishlab «Qonuni Mas'udiy» deb ataydi.

Ma’lumotlarga qaraganda Mas'ud bilimdon, ilm ahlini sevadigan shaxs bo‘lgan, ammo uning amaldorlari xalqni qattiq ezgan. Mas'ud amirligida Turkmanlar qattiq ta’qib ostiga olingan, natijada ular tez-tez g‘alayonlar ko‘tarib turishgan. 1040 yili u Dan-danakon yonidagi jangda turkmanlardan qattiq talofat ko'rgan va asta-sekin o'z mavqeini yo'qotib borgan. Shundan so'ng, u Hindistonga qilgan bir safari paytida askarlari g'alayon ko'tarib, taxtga uning ukasi Muhammadni chiqarishgan. Biroq Muhammad taxtda bir necha oy o'tirgan, chunki askarlar uni ham taxtdar tushirib, uning o'rniga Mas'udning o'g'li Mavdudni taxtga o'tqazishgan. Mavdud 1048-yili kasallikdan vafot etgan. O'sha yili Beruniy ham vafot etgan.

Beruniyning 150 taga yaqin asari ma'lum. Ular orasida bizgacha yetib kelganlaridan eng muhimlari: «Hindiston», «Yodgorliklar», «Qonuni Mas'-udiy», «Geodeziya», «Farmakognokiya» va «Tafhim» lardir*.

Uning qolgan asarlarini quyidagicha guruhlarga bo'lish mumkin: astronomiyaning ba'zi masalalariga doir asarlari-32 ta; astronomiya asboblari haqidagi asarlari-10 ta; matematikaga doir asarlari-22 ta; astrologiyaga doir asarlari-21 ta; turli fanlar (fizika, minerologiya, adabiyot, tarix va boshqalar) ga taalluqli asarlari-38 ta; tarjima asarlari-21 ta; Afsuski Beruniyning ma'lum asarlaridan ham 30 taga yaqini bizgacha yetib kelmagan. Qolganlari yo'qolib ketgan yoki hali dunyo kutubxonalari ro'yhatidan topilmagan.

Beruniyning matematikaga doir eng muhim asarlari

Uning matematikaga doir maxsus asarlaridan quyidagilari bizgacha yetib kelgan:

1. «Vatarlar»-»Doira vatarini unga ichki chizilgan ichki chiziqlarning xossasi yordamida aniqlash haqida risola».
2. «Rashika» - Hind rashiklari haqida risola.
3. «Proyeksiyalash»-Yulduzlar turkumlarini tekislikka proyeksiyalash va (Yerdagi)joylarni tekislikda tasvirlash haqida.
4. «Sfera»-Sfera sirtida sodir bo'ladigan (shakllar)haqida astronomiya kaliti kitobi.
5. Abu Rayxonning Abu Saidga xati.
6. Sfera sirti haqida marvarid kitob.

---

* Aslida bu asarlar boshqacha ataladi, biroq sharqshunoslar ularni qisqacha ana shunday atashka kelishib olishgan.

7. Fikr va aql uchun mashq.

8. Bulardan tashqari, Beruniyning astronomiyaga doir asarlarining katta-katta bo‘limlari, hatto butun boblari matematikaga bag‘ishlangan. Bu boblar va boshqa sohalarga tegishli asarlarida ham ajoyib matematik ma’lumotlarga duch kelamiz.

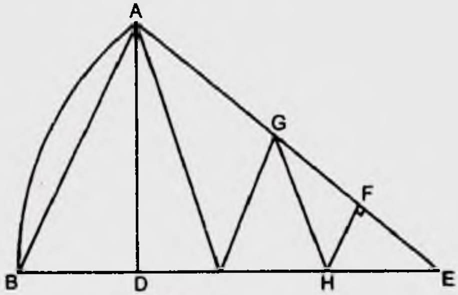
Beruniyning «at-tafhim» (Astronomiya san'atidan boshlang‘ich ma’lumot beruvchi kitob) nomli asari savol-javob tarzida yozilgan bo‘lib, unda 530 ta savol-javobning anchagina qismini matematika-arifmetika, algebra, geometriya va trigonometriya tashkil qiladi. Arifmetikaga doir qismida natural son, tub son, figurali sonlarga ta’rif beriladi va misollar keltiriladi. Keyin arifmetik amallar va kasr sonlarga, sanoq sistemalari (o‘nli, oltmishli va harfiy yoki abjad) ga to‘xtaydi. Uchlik qoida va nisbat nima ekanini tushuntiradi.

Algebraga doir savol-javoblarda «al-jabr val-muqobala» nima, noma’lum va uning darajalari, chiziqli va kvadrat tenglamalar, ularni yechish haqida gapiradi.

«Al-tafhim» da geometriyaga doir ham qator savol-javoblar bor.

Beruniy «Qonuni Mas'udiy» ning uchinchi maqolasida $x^3+1=3x$ ko‘rinishdagi kubik tenglamani yechadi. Bu tenglama muntazam to‘qqiz burchakning tomonini hisoblash, tufayli vujudga kelgan.

Buning uchun Beruniy ABE uchburchakni (59-rasm) yon tomonlari AB=a18 bo‘lgan teng yonli uchburchakka ajratadi. Bu uchburchaklarning asosidagi burchaklari mos ravishda 80^0, 60^0, 40^0, 20^0 dan bo‘ladi.



59-rasm.

To‘g‘ri burchakli AED va FEF uchburchaklarning o‘xshashligidan Beruniy ushbu $\frac{EH}{EF}=\frac{AE}{ED}$ proporsiyani hosil qiladi. AE=1, EH=x, EF=

$\frac{1}{2}$-(1-x) va $ED=1-\frac{x}{2}$ bo‘lgani uchun $2x-x^3=1-x$ hosil bo‘ladi. Bu tenglamaga «al-jabr» va «al-muqobala» hisoblashlari tatbiq qilingandan so‘ng u quyidagi ko‘rinishga keladi: $x^3+1=3x$

Beruniy bu tenglamani ildizini tanlash yo‘li bilan topadi. Shunday qilib, a_{18} ning oltmishli sistemadagi taqribiy qiymati: 0; 20 50 41 61 ga teng. Bundan a_9 ni osongina topish mumkin.

U «at-Tafhim» da geometriyaning asosiy tushunchalariga to‘xtaladi. Jism, sirt, to‘g‘ri chiziq, nuqtaga ta’rif beriladi.

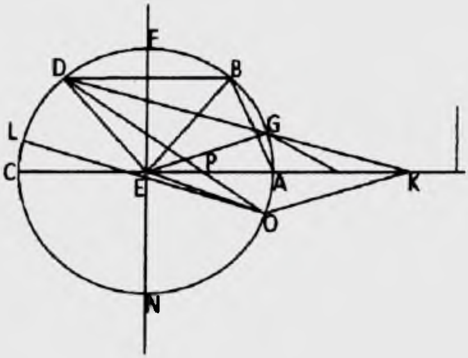
Beruniyning bu ta’riflaridan u Aristotel va al-Farobiyning izidan borganligi ko‘rinadi.

Aristotel va al-Farobiyning falsafasiga ko‘ra sirt, to‘g‘ri chiziq, nuqta faqat jismda mavjud. Shu sababli ham geometrik tushunchalarning ta’rifi jismning ta’rifidan boshlanadi.

Geometrik figuralardan doira, diametr, vatar, uchburchak, uning turlari va elementlari, burchak va ularning turlari, parallel to‘g‘ri chiziqlarning ta’riflari berilgan. Aylana, doira, doiraga ichki chizilgan muntazam ko‘pburchaklarning tomonlarini hisoblash qoidalari, ixtiyoriy burchakni teng uch qismga bo‘lish kabi masalalar «Qonuni Mas'udiy» asarida berilgan.

Beruniy «Qonuni Mas'udiy» asari uchinchi maqolasining to‘rtinchi bobida ixtiyoriy burchak triseksiyasini, ya’ni uni teng uchta qismga ajratishning o‘n ikkita usulini keltirgan. Shulardan bittasini keltiramiz:»Eng avval berilgan burchakni qanday qilib teng uch bo‘lakka bo‘lishni ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, berilgan burchak doira markazidagi AEB burchak bo‘lsin (60-rasm);

AEC diametrga parallel qilib BD chiziqni o‘tkazamiz, u vaqtda DEC burchak AEB burchakka teng bo‘ladi. Diametrga perpendikular qilib EF chiziqni o‘tkazamiz va uni yo‘nalish bo‘yicha N nuqtagacha davom ettiramiz. Agar DGK chiziqda ajratilgan GK kesma yarim diametrga teng bo‘lsa, bu burchakni uch bo‘lakka bo‘lish mumkin. Bunday chiziq o‘tkazilgan G va E nuqtalarni tutashtiramiz. U vaqtda GKE va GEK burchaklar teng va bu burchaklarning yig‘indisi EGD burchakka teng. Shuning uchun EDG burchak GKE burchakning ikki hissasiga teng. Ammo DEC burchak birgalikda olingan EDK va EKD burchaklarga teng.



60-rasm.

Shuning uchun DKE burchak DEC burchakning uchdan biri, ya'ni GEA burchak AEB burchakning uchdan biriga teng. Bu berilgan burchakni uchta teng bo'lakka ajratishning usullaridan biridir».

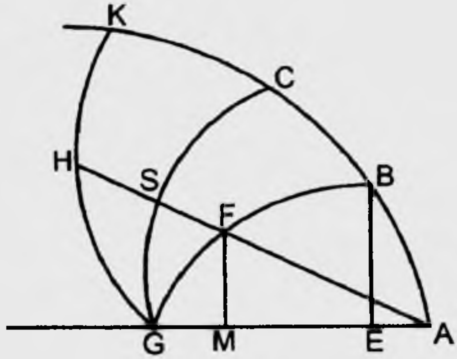
Beruniy asaridan olingan bu parchaning mazmuni ustida bir mulohaza yuritib ko'raylikchi u to'g'ri ish qilganmikin?

Darhaqiqat, $\angle GKE = \angle GEK$, chunki ΔEGK teng yonli va $\angle EGD = \angle GKE + \angle GEK$, chunki EGD burchak ΔEGK ning tashqi burchagi $\angle EDG = 2\angle GKE$, chunki u teng yonli EDG uchburchakning asosidagi burchagi. $\angle EDC = \angle EDK + \angle EKD$, chunki u DKE uchburchakning tashqi burchagi. Shuning uchun $\angle DKE = \frac{1}{3}\angle DEC$ yoki $\angle GEA = \frac{1}{3}\angle AEB$. Isbot to'g'ri.

Trigonometriyaga doir ma'lumotlar Beruniyning «at-tafhim», «Soyalar», «Qonuni Mas'udiy» ning uchinchi maqolasida berilgan. «At-Tafhtim»da asosiy trigonometrik funksiyalarga ta'riflar, «Soyalar»da esa trigonometrik chiziqlar orasidagi munosabatlar, «Qonuni-Mas'udiy»da esa ikki argument yig'indisi va ayirmasining sinusi, ikkilangan burchak sinusi, yarim burchak sinusini aniqlash, tekis va sferik uchburchaklar uchun sinuslar teoremasi berilgan.

Misol tariqasida sferik uchburchaklar uchun sinuslar va tangenslar teoremalarini keltiramiz:»Qonuni Mas'udiy» kitobi uchinchi maqolasining to'qqizinchi bobida Beruniy sferik uchburchak uchun sinuslar teoremasini chiqarishda to'la to'rt tomonli (shakl al-qit'a)-Beruniy ta'rifiga ko'ra har ikkitasi bir nuqtada kesishuvchi to‘rtta katta doira aylanasining kesishishidan hosil bo‘lgan figuradan foydalanadi.

Teorema Beruniy ifodasida quyidagicha: «Biz shuni qayd qilamizki, katta doira yoylaridan hosil bo‘lgan uchburchaklar ham, biz oldin ko‘rgan to‘g‘ri chiziqli uchburchaklardagi singari, yoydan hosil bo‘lgan tomonlarning sinuslari shu tomonlar qarshisidagi burchaklarning sinuslariga proporsio-naldir».



61-rasm.

Beruniy ACGF to‘la to‘rt tomonlini qaraydi (61-rasm) va ushbu yordamchi jumlani isbotlaydi:

«ACGF to‘la to‘rt tomonli katta doiralarining choraklaridan tuzilgan bo‘lsin. Men GF sinusining FD sinusiga nisbati, FB sinusining BC sinusiga nisbati kabi ekanini tasdiqlayman».

Buni isbotlash uchun Beruniy B va G nuqtalarni sfera markazi bilan tutashtiradi (59-rasm). CK va BC yoyga teng bo‘lishi uchun ABC yoyni K nuqtagacha davom ettiradi. GHK yoy doiraning choragi. So‘ngra u G qutbdan GF masofada FCH yoy chizadi. BK va FH larni to‘g‘ri chiziq yordamida tutashtirib, u FM va BE parallel to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazadi. M nuqta FCH doiraning markazi, FM esa uning radiusi. BCK va FCH yoylar o‘xshash, shu sababli, ammo

$$\frac{BK}{2} = SinBC; \frac{HF}{2} = SinFD, MF = CosBF = SinGF\,.$$

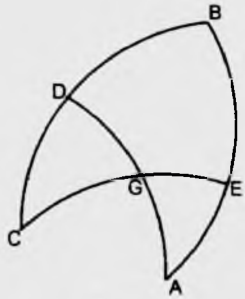
Bundan:

$$\frac{SinGF}{SinFD}=\frac{SinFB}{SinBC}$$

Xuddi shuni isbotlash kerak edi.

Sferik uchburchaklar uchun tangenslar teoremasi

Beruniy «Soyalar» risolasining «Soyalarni to'la to'rt tomonlik va astronomiya fanining hisoblashlariga tatbiqi» deb ataluvchi 27 - bo'limida sferik trigonometriyaning tangenslar teoremasini quyidagicha ifodalaydi:



62-rasm.

«Agar GCD uchburchak (62-rasm) sfera katta doirasining yoylaridan yasalgan bo'lsa, va uning biror burchagi, masalan, GDC burchagi to'g'ri bo'lsa, u vaqtda to'g'ri burchak qarshisidagi tomon tangensining ikkinchi tomoni sinusiga nisbati birinchi tomon qarshisidagi burchak tangensining to'g'ri burchakning sinusiga nisbati kabidir». GCD to'g'ri burchagi D dan iborat to'g'ri burchakli sferik uchburchak bo'lsin. U holda Beruniy tomonidan berilgan sferik trigonometriyaning tangenslar teoremasining ifodasi bizning hozirgi belgilashlarimizda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{tgGD}{SinDC}=\frac{tgGCD}{SinGDC}$$

bunda $Sin\ GDC=1,\quad tgGD=Sin\ DC\ tg\ C$

Bu teorema «Qonuni Mas'udiy» uchinchi maqolasining o'ninchi bobida ham isbot etilgan.

Trigonometrik jadvallar haqida

«Qonuni Mas'udiy» uchinchi maqolasining oltinchi va sakkizinchi boblarida 15 dan oralatib berilgan sinuslar jadvali va 1^0 dan oralatib berilgan tangenslar jadvali mavjud. Beruniy mana shu bobda jadvallarni interpolyasionlash masalasi bilan shug'ullanib ularning qoidalarini bergan. Beruniyning sinuslar jadvali uchun bergan chiziqli va kvadratik interpolyasiyalash qoidasi bizning belgilash-larimizda quyidagicha:

$$Sinx = Sinx_0 + (x - x_0)\frac{Sin(x_0 + 15') - Sinx_0}{15'}$$

$$Sinx = Sinx_0 + (x - x_0)\frac{Sin(x_0 + 15') - Sinx_0}{15'} - (x - x_0)^2\frac{Sinx_0 + Sin(x_0 - 15') - Sin(x_0 + 15') - Sinx_0}{15'}$$

Tangenslar jadvali uchun esa quyidagicha:

$$tgx = tgx_0 + (x - x_0)\frac{tg(x_0 + 1^0) - tgx_0}{1^0}$$

$$tgx = tgx_0 + (x - x_0)\frac{tg(x_0 + 1^0) - tgx_0}{1^0} +$$

$$+ (x - x_0)^2\frac{\dfrac{tg(x_0 + 1^0) - tgx_0}{1^0} - \dfrac{tgx_0 - tg(x_0 - 1^0)}{1^0}}{1^0}$$

4-§. Umar Xayyom

Xayyomning matematik ekanini yaqin-yaqingacha matematika tarixchilari ham, sharqshunos olimlar ham bilishmas edilar, chunki ular shoir Umar Hayyom boshqa-yu, matematik, olim Umar Xayyom boshqa deb o'ylashar edilar. Ma'lum bo'lishicha, bu ikki Xayyom bitta shaxs ekan. Uning to'liq ismi G'iyosiddin Abul Fatx Umar ibn Ibrohim al-Xayyomi Nishopuriydir. Ma'nosi: «G'iyosiddin»-dinning yordamchisi, «Abul Fatx»-Fatxning otasi (o'g'lining nomi Fatx bo'lishi shart emas, bu taxallusdek bir narsa), «Umar ibn Ibrohim»-Ibrohimning o'g'li Umar, «al-Xayyomi»-taxallus «Chodrachi» (Xayyomning avlodida chodrachi usta bo'lgan deb taxmin qilinadi), «Nishopuriy»-Nishopurlik.

Xayyomning tug'ilgan yili ma'lum emas, ammo tarixchi Boyhaqi Umar Xayyomning tolenomasini tuzib qoldirgan:»Uning tolenomasi Javzo yulduz turkumida edi. Quyosh va Merkuriy» Javzoning uchinchi darajasiga to'g'ri kelar edi. Merkuriy quyosh bilan bog'liq bo'lib, Yupiter ularning har ikkalasiga nisbatan trigonal holatda edi».

Kishilarning tolenomasi bo'lsa, ularning tug'ilgan vaqti, ya'ni tug'ilgan yili va oyi, kunini aniqlash mumkin.

Ma'lumki, Quyosh o'zining ko'rinma harakatida, burjlarning har birini bir oyda bosib o'tadi va sutkasiga taxminan bir darajaga yaqin yo'l yuradi. Shunga ko'ra, sobiq SSSR FA amaliy astronomiya instituning katta ilmiy xodimi Shafiqa Sharaf Umar Xayyomning tug'ilgan vaqtini aniqlagan, u 18 may 1048 yilga to'g'ri kelar ekan.

Manba'larning xabar berishicha, Xayyom dastlabki ma'lumotni Nishopurda oladi va 17 yoshida barkamol faylasuf darajasiga erishadi. U tabiiy fanlarni Ibn Sino (980-1037)ning «Kitob ash-Shifo» va «Donishnoma» sidan o'rgangan, ular orqali Aristotelning «Metafizika», Yevklidning «Negizlar», Apolleniyning «Konus kesimlar», Ptolemeyning «Almajistiy» asarlarining arabcha tarjimalari bilan tanishgan.

Xayyomning arifmetika va algebraga doir asarlarining vujudga kelishida shubhasiz al-Xorazmiyning «Hisob al-Hind» va «Kitob muxtasar fi amal al-jabr val-muqobala» asarlari, Ahmad al- Nasafiyning (X-XI asr) «Kitob kifoya fi hisob al-Hind» asari muhim rol o'ynagan.

Umar Xayyom arifmetikaga doir «Mushkilot al-Hisob» nomli risola yozgan, ammo uning qo'lyozmasi hanuzgacha topilmagan. Algebradan esa «Risola al-burxon fi ma oil al-jabr va l-muqobala» (Al-jabr val-muqobala masalalarining isboti haqida risola) degan asari bor.

Uning geometriyaga doir asari «Sharh ma ashkola fi musadarat kitob Uqlidis» («Yevklid kitobining qiyin joylariga sharx») deb ataladi. Xayyomning fizikaga doir kitobi «Muxtasar fi tabiyot» («Tabiyot haqida qisqacha kitob») deb ataladi, ammo uning qo'lyozmasi ham topilmagan. Fizikaga doir ikkinchi kitobi-»Mezon al-Hikmat» («Aql tarozisi»)ning qo'lyozmasi jahonning ko'pgina kutubxonalarida uchraydi.

Xayyom 1074-yildan so‘ng Isfaxon rasadxonasida o‘tkazgan ilmiy kuzatishlari asosida «Ziji Malikshohi» asarini yozgan.

Umar Xayyomning yoshligi Xurosonni saljuqiylar zabt etgan davrga to‘g‘ri keladi. 1040-yilda saljuqiylar boshlig‘i To‘g‘rulbek (u 1063-yili vafot etgan) Merv ostonalarida Mahmud G‘aznaviyning o‘g‘li Mas'udning qo‘shinini tor-mor qildi. G‘aznaviylar saltanati shundan so‘ng tarqalib ketdi. To‘qrulbek o‘zini Xurosonning amiri deb e’lon qildi. So‘ng saljuqiylar Xorazmni, Eronni, Ozarbayjonni bosib oldi. 1055-yili esa arab xalifaligi poytaxti Bag‘dodni zabt etishdi. Shundan so‘ng To‘g‘rulbek sulton mansabiga ega bo‘ldi.

Shu davrda Xayyom Movaraunnahrda yashadi. Movaraunnahr u davrda Qoraxoniylar qo‘lida edi. Ular poytaxt uchun Buxoroni tanlashgan edi. Keyin poytaxtni Samarqandga ko‘chirishdi.

Qoraxoniylar hoqoni 1024-1067-yillarda Ibrohim tamgachxon, 1067-1079 yillarda uning o‘g‘li Shams al-Mulk edi.

Qoraxoniylar bilan saljuqiylar doimo o‘zaro nizolashib kelgan. Saljuq Alp Arslon 1072 yili Shams al-Mulkka qarshi yurishi vaqtida halok bo‘ladi. Alp Arslonning o‘g‘li Malikshoh Shams al-mulkka qarshi yurishni davom ettiradi, bu yurishdan qo‘rqqan Shams al-Mulk o‘zini malikshohni vassali deb e’lon qilgan. Keyin ular orasida qudaandachilik vujudga kelgan. Shams al-Mulk saljuq xonzodalaridan biriga, Malikshoh esa Shams al-Mulkning jiyani Turkmanxotunga uylangan.

Shamsal-Mulk 1079-yili vafot etadi, uning o‘rniga ukasi Xizirxon hoqon bo‘ladi. 1080-yili davlat Xizirxonning o‘g‘li Ahmadxonga o‘tadi. Poytaxtni Samarqandga o‘sha Ahmadxon ko‘chirgan edi. Ana shu yillari Xayyom Samarqandda yashaydi.

Keyin malikshoh Xayyomni Isfaxonga taklif etadi. O‘sha yerda u «Isfaxon kalendarini» yozadi.

Xayyom algebraga doir asarida uchinchi darajali tenglamalarni tasniflash va ularni yechish usullari bilan shug‘ullangan. U uchinchi darajali tenglamalarni quyidagi 14 turini keltiradi:

1. $x^3=qr$;
2. $x^3+px^2=r$;
3. $x^3+r=px$;
4. $x^3+r=px^2$;

8. $x^3=px^2+qx+r$;
9. $x^3+qx+r=px^2$;
10. $x^3+px^2+r=qx$;
11. $x^3+px^2+qx=r$;

5. $x^3+qx=r$;

6. $x^3=px^2+r$;

7. $x^3=qx+r$;

12. $x^3+px^2=qx+r$;

13. $x^3+qx=px^2+r$;

14. $x^3+r=px^2+qx$.

Xayyom bu turdagi tenglamalarni yechish uchun konus kesimlari, ya'ni ikkinchi tartibli egri chiziqlardan foydalanadi. Masalan, to'rtinchi turdagi tenglamani yechishda $y^3=\sqrt[3]{r}(p-x)$ parabola va $xy=\sqrt[3]{r^2}$ teng tomonli giperboladan foydalangan.

Mana shu egri chiziqlarning kesishishi, urinishi, kesishmasligiga qarab tenglamani ildizlari soni haqida fikr yuritadi.

Yuqoridagi $x^3+r=px^2$ tenglama yechimga ega yoki ega emasligini bilish uchun u tenglamadagi noma'lum koeffisient bilan ozod had orasidagi bog'lanishning quyidagi uch holini qaraydi:

$$1).\sqrt[3]{r}=\frac{p}{2};2).\sqrt[3]{r}>\frac{p}{2};3).\sqrt[3]{r}<\frac{p}{2}$$

Buning uchun $x=p-\sqrt[3]{r}$ da parabola hamda teng tomonli giperbolaning ordinatalarini taqqoslaydi: agar $\sqrt[3]{r}=\frac{p}{2}$ bo'lsa, $y_{gip}=y_{par}=\sqrt[3]{r}$ bo'ladi va egri chiziqlar bitta nuqtada kesishadi. Demak, tenglama bitta musbat ildizga ega. Misol tariqasida $x^3+125=10x^2$ tenglamani qarash mumkin.

2) Agar $\sqrt[3]{r}>\frac{p}{2}$ bo'lsa, $x=p-\sqrt[3]{r}<\sqrt[3]{r}$ va $y_{gip}=\frac{\sqrt[3]{r}}{p-\sqrt[3]{r}}>y_n=\sqrt[3]{r}$.

Bunda giperbola va parabola tarmog'i o'ng tomonda kesishadi, urinadi yoki kesishmaydi.

Misol: $x^3+216=10x^2$; $\sqrt[3]{216}>5$, lekin $x=6$

3) $\sqrt[3]{r}<\frac{p}{2}$ bo'lsa $x=p-\sqrt[3]{r}>\sqrt[3]{r}$ va $y_{gip}<y_p$. Giperbolani ba'zi nuqtasi parabolaning ichida yotadi va egri chiziqlar ikkita nuqtada kesishadi.

Misol: $x^3+64=10x^2;\sqrt[3]{64}<5=\frac{10}{2}$ (63-rasm)

$$y^2 = \sqrt[3]{64}(10-x) = 4(10-x)$$

$$xy = \sqrt[3]{64} = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{x}$$

$$y^2 = 4(10-x)$$

$$x = 10; y = 0$$

$$x = 8; y^2 = 8 \Rightarrow y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x = 6; y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$$

$$x = 4; y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 2; y^2 = 32 \Rightarrow y = 4\sqrt{2}$$

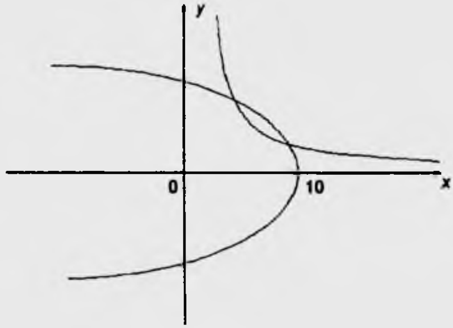
$$x = 0; y^2 = 40 \Rightarrow y = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$y = \frac{16}{x}$$

$$x = 2; y = 8;$$

$$x = 4; y = 4;$$

$$x = 8; y = 2$$



63-rasm

Umar Xayyom «Sharh va ashkola musadarot fi kitob Uqlidis» kitobida Yevklidning V postulatiga to‘xtaydi. Xayyom uning to‘g‘riligiga shubha qilmaydi, ammo uni juda aniq emas deb hisoblaydi va to‘g‘ri ekanini ko‘rsatish uchun faylasufdan, ya’ni Aristoteldan olingan beshta prinsipni keltiradi.

1. Miqdorlarni cheksiz bo‘lish mumkin, ya’ni ular bo‘linmaslardan tashkil topmagan.

2. To‘g‘ri chiziqni cheksiz davom ettirish mumkin.

3. Har qanday kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq ochiladi va kesishish burchagi uchidan masofasi ortgani sari bir-biridan uzoqlashadi.

4. Yaqinlashuvchi ikki to‘g‘ri chiziq kesishadi, ular yaqinlashish yo‘nalishida uzoqlashishi mumkin emas.

5. Ikki teng emas, chegaralangan miqdordan kichigini shunday tanlab olish mumkinki, u kattasidan katta bo‘ladi.

I, II va III prinsiplar Aristotelniki, IV prinsip esa unda yo‘q. U prinsip esa Arximed aksiomasi deyiladi.

Xayyom V postulatning to‘g‘riligini isbotlashda eng avval bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikular ikki to‘g‘ri chiziq kesishmasligini isbotlaydi. Aks holda bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zlari tik bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning har ikkala tomonida kesishishlari mumkin edi.

II prinsipga ko‘ra ular bir-biridan uzoqlashmaydi, agar uzoqlashsa, to‘g‘ri chiziqning har ikkala tomonida uzoqlashadi.

So‘ngra u 8 ta jumla isbotlaydi. Bu jumlalar uning $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ hamda CD kesmalardan yasalgan to‘rtburchakning burchaklari uchun kerak(64-rasm).

1-jumlada to‘rtburchakning yuqoridagi burchaklarining tengligi isbotlanadi.

2-jumlada to‘rtburchak pastki asosining o‘rtasiga o‘tkazilgan perpendikular uning ustki asosiga ham tik va uning teng ikki bo‘lakka ajratishi isbotlanadi.

3-jumlada yuqoridagi burchaklar ham to‘g‘ri burchak ekani isbotlanadi.
ACDB to‘rtburchak asosining o‘rtasi E nuqtada ustki CD asosni uning o‘rta nuqtasi G nuqtada kesuvchi EG perpedikulyar o‘tkaziladi (65-rasm), EG kesma EG=GK gacha davom ettiriladi. K nuqtada $EK \perp NF$ o‘tkaziladi (N va F lar tikning DF va CH tomonlar bilan kesishish nuqtalari). CHFD to‘rt-burchakning ACBD to‘rtburchakka teng ekani ko‘rsatiladi.

Agar $\angle ACD$ va $\angle BDC$ lar to‘g‘ri bo‘lsa, u haqiqat. Agar unday bo‘lmasa, ular yo burchakdan katta, yoki to‘g‘ri burchakdan kichik. Faraz qilaylik, ular to‘g‘ri burchakdan kichik bo‘lsin. Agar CHFD yassi figurani ACDB yassi figuraga qo‘ysak, GK kesma EG kesma ustiga, NF kesma AB kesma ustiga tushadi. Bunda HF=CH bo‘ladi, chunki $\angle HCG > \angle ACG$; HF>AB. Shuningdek, CN va FD chiqlar davom ettirilsa, ular bir-biridan uzoqlashadi. Demak, AC va BD lar uzoqlashuvchi chiziqlar (65-rasm). Faraz qilaylik, ACD va BDC burchaklar to‘g‘ri burchakdan katta bo‘lsin. U holda yuqoridagi figurani pastdagi figuraga joylashtirsak; NFLM bo‘ladi va LM<AB.

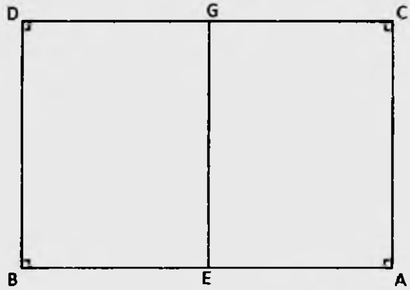
Demak, AC va BD chiziqlar yaqinlashuvchi.

Shunday qilib, o‘tkir va o‘tmas burchak gipotezalari zidlikka keltirildi va to‘g‘ri burchak gipotezasi qoldi.

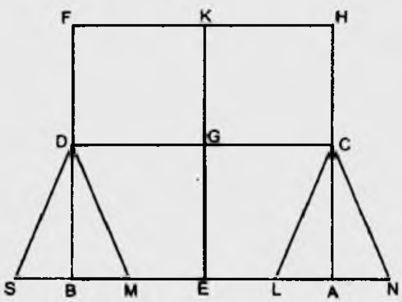
4-jumlada to‘g‘ri to‘rtburchaklarda qarama-qarshi tomonlarning tengligi isbotlanadi.

5-jumlada esa Yevklidning V postulati isbotlanadi:

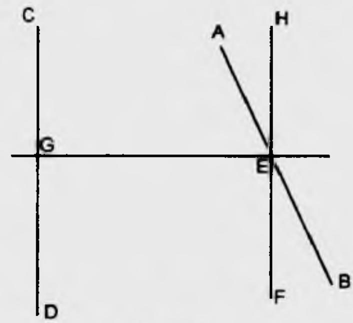
BG-to‘g‘ri chiziq EA va GC to‘g‘ri chiziqlarni yig‘indisi ikki burchakdan kichik AEG va CGE burchaklar hosil qilib kesadi (66-rasm).



64-rasm.



65-rasm.



66-rasm.

Agar $\angle AEG < \angle CGE$ bo‘lsa, EGD burchakka teng GEH burchak yasaladi. U holda $EH \parallel GC$ bo‘ladi. «Agar ikki to‘g‘ri chiziq bitta to‘g‘ri chiziqqa tik bo‘lsa, ular parallel bo‘ladi» degan jumlaga ko‘ra EH va GC to‘g‘ri chiziqlar orasi o‘zgarmas. GC va EA to‘g‘ri chiziqlar esa bir-biriga yaqinlashadi. Xayyom prinsipiga ko‘ra ular kesishadi.

Shunday qilib Yevklidning V postulati isbot bo‘ldi.

Umar Xayyom astronomiya bilan ham shug‘ullangan. Shu sababli Malikshoh uni 1074-yildan so‘ng Eron Quyosh kalendarini isloh qilish uchun Xamadonga taklif etgan. Bu haqda tarixchi Ibn al-Asir quyidagilarni yozadi:»Bu yil Nizom al-Mulk va sulton Malikshoh uchun rasadxona quriIdi. Uni tashkil qilishda eng yaxshi astronomlar-Umar ibn Ibrohim al-Xayyom, Abul Muzaffar al-Isfizoriy, Maymun

Najib al-Vasatiy va boshqalar ishtirok etishdi. Rasadxona tashkil qilishga juda ko‘p mablag‘ sarf qilindi».

Umar Xayyom zamonida saljuqiylar ikki kalendar-Quyosh va Oy kalendaridan foydalanishar edilar.

Quyosh kalendarining asosini Quyosh yili, ya’ni Yerning Quyosh atrofini to‘liq bir marta aylanib chiqish davri tashkil qiladi. U 365,2422 sutkaga teng, ya’ni 365 sutka 5 soat 48 daqiqa 46 soniyaga teng.

Oy kalendarining asosini esa oy, ya’ni Oyning Yer atrofini to‘liq bir marta aylanib chiqish davri tashkil qiladi. U 25,5306 sutkaga, ya’ni 29 sutka 12 soat 44 daqiqa 3 soniyaga teng. Demak, Oy yili 354 sutka 8 soat 48 daqiqa 36 soniyaga teng.

Xayyom Hamadonga kelgach, kalendar isloh qilish bilan shug‘ullandi. Bu haqda ulug‘ o‘zbek astronomi Mirzo Ulug‘bek quyidagilarni yozadi: «Malikshoh erasini bilish haqida. Bu era sulton Jamoliddin Malikshoh ibn Arslon saljuquy nomi bilan atalgan. Ba’zi ma’lumotlarga qaraganda u 468 hijriy yil sha’bon oyining beshinchisi - yakshanba kuni boshlanadi. Boshqa ma’lumotlarga ko‘ra 471 hijriy yili ramazon oyining uchinchisi-juma kuni boshlanadi. Ular 1097 kun (sutka)ga farq qiladi. Buning sababi bizga noma’lum. Ikkinchi ma’lumot ko‘proq tarqalganidan, biz shunga amal qilamiz. Eraning yil boshi-Quyosh jadiyga kirgan kunning tush paytiga, oylar esa Quyosh har bir yulduz turkumiga kirishiga to‘g‘ri keladi... Bu yil hisobi oylarining nomi fors oylari nomi bilan bir xil, faqat bu oylarni jaloliy oylari deyiladi, ular esa qadimgi Isfandarmuz oyining oxiriga qo‘shimcha besh kun qo‘shib hosil qilinadi. Har to‘rt yilda yana bir kun qo‘shiladi. Kabisa yili har to‘rt yilda o‘tkazilganidan, olti yoki yetti kabisa yilidan keyin kabisa yili besh yildan so‘ng bir marta o‘tkaziladi».

Ulug‘bek keltirgan ma’lumotga qaraganda Xayyom kalendari 33 yillik siklga ega ekani ko‘rinadi, bunda 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 va 33 yillar kabisa yili bo‘ladi.

Agar o‘sha aytilganlarga amal qilinsa, Xayyom kalendari dunyodagi mavjud kalendarlar orasida eng anig‘i hisoblanadi, chunki undagi bir sutkaga chetlanish, haqiqiy quyosh yilidan o‘zib ketishi 5000-yilda ro‘y beradi.

Hozir biz foydalanadigan kalendarning haqiqiy quyosh yilidan chetlashishi 0,0003 sutkaga teng, demak, bunda 3333 yilda bir sutka yig'iladi.

5-§. Ulug'bek va uning akademiyasi

1393-yili Temur Eron va yaqin sharqqa yurish qildi. U odatiga ko'ra, o'z yurishlarida saroy ahlini ham olib ketar edi. Ular yo'lda Sultoniya shahrida to'xtab qolishdi. Shu shaharda Temurning kichik o'g'lining xotini Gavhar Shod 22 mart 1394-yili o'g'il tug'adi. Chaqaloqqa Muhammad Tarag'ay deb ism qo'yishadi. Keyinchalik unga «Buyuk bek», ya'ni «Ulug'bek» degan taxallus berildi.

Ulug'bek harbiy yurishlarni unchalik yoqtirmaydi, u zarurat yuzasidan, ya'ni davlatning u yer bu yerida janjal-to'polon bo'lganida yurish qiladi. U ko'proq ilm-fan bilan, shahar va qishloqlarni obodonlashtirish ishlari bilan band bo'ladi. Masalan, u 1417-yili Buxoroda, 1420-yili Samarqandda, 1432-1433-yillari G'ijduvonda madrasa-o'sha davrning oliy bilimgohlarini qurdiradi.
«Bibixonim masjidi», «Go'ri Amir» maqbarasi, «Shohi Zinda» ansambllari qurilishi ham Ulug'bek davrida nihoyasiga yetkaziladi. U 1425-1428-yillari Samarqand yaqinida rasadxona barpo qiladi.

Ulug'bek 1428-1429-yillari Samarqand yaqininidagi Obi-Rahmat tepaligiga rasadxona qurdirdi. Bino to'garak shaklida bo'lib, uning diametri 46,40 metr, balandligi 30 metrcha, uch qavatli edi. Bu haqda Zahiriddin Muhammad Bobur ham o'zining «Boburnoma» asarida ma'lumot beradi. Rasadxona haqida tarixchi Abdurazzoq Samarqandiy quyidagicha yozadi:»Samarqandning shimoliy tomonida sal sharqqa og'ishgan joy tanladi, mashhur munajjimlar bu ishni boshlash uchun yulduz ko'rsatgan xayrli kunni aniqlab berdilar. Bino qudrat asosi, ulug'vorlik negizidek pishiq qurildi. Poydevor va ustunlar tog' asosidek shunday mustahkam qurildiki, ular to mashhar kunigacha na joyidan jilar va na qular edi. Baland qurilgan bu muhtasham bino xonalarining ichiga solingan rasm va beqiyos suratlarda to'qqiz falakning daraja, daqiqa, soniya va soniyaning o'ndan bir ulushlari ko'rsatilgan yetti qavat osmon gardishi, yetti sayyora va turg'un yulduzlar tasvirlangan osmon gumbazi, iqlimlar, tog'lar, daryolar, sahrolar, olamga tegishli hamma narsalar tasvirlangan edi.

Shundan keyin Quyosh va sayyoralarning harakatini kuzatish, ko‘rganlarni yozish va qayd qilishni boshlab yuborishga farmon berildi».

Vaqt o‘tishi bilan hamda temuriylar davlatining inqirozi tufayli ana shunday ulkan bino yo‘qolib ketdi. Uni 1908-yili rus arxeologi V.L.Vyatkin tasodifan topib oldi. U vakfga tegishli bir hujjatni o‘rganayotganida uning yerlari Ulug‘bekning rasadxonasiga borib taqalashiga duch keldi. Keyingi arxeologik tekshirishlar hujjatni to‘g‘riligini tasdiqladi.

Rasadxonaning asosiy quroli-burchak o‘lchaydigan juda ulkan asbob (vertikal doira) dan iborat bo‘lib, uning radiusi 40,212 m, yoyining uzunligi 63 metrga teng edi. Bu Vyatkin inshoot qoldig‘i «katta kvadrantning bir qismidan boshqa narsa emas, uning yarmisi ufqdan past bo‘lib, ikkinchi yarmisi ufqdan chiqib turar edi» degan fikrga olib keladi.

G. Jalolov va akademik Qori Niyoziyning fikricha bu asbob kvadrant emas, balki sekstantdir. U janubdan shimolga qaratib meridian chizig‘i bo‘yicha anchagina aniq o‘rnatilgan. Ularning bu fikrini astronomlar B.N.Kostelskiy va V.P.Sheglovlar ham tasdiqlaydi.

Asbobning hozirgi kungacha saqlanib qolgan qismi tepalik ostidagi qoya toshga o‘yib ishlangan torgina chuqur ariqchaga tushirilgan ekan. Ariqchaga pishiq g‘isht terib, ikkita parallel yoy ishlangan va ganch eritmasi quyib sementlangan. Yoyning ustiga 10-20 sm. li qalin marmar tosh taxtachalari qoplangan. G‘arbiy yoyga tegishli belgilar arab harflari bilan qavariq qilib yozilgan. Marmar toshni yoylarga daqiqa va soniya bo‘limlari qayd qilingan mis tasma ishlangan. Bu mis tasma yoritkichning meridiandan o‘tgan vaqtini aniq o‘lchash uchun xizmat qiladi.

Samarqand astronomlarining mahorati asosiy asbobning juda katta bo‘lishi va konstruksiyasining mustahkamligining ta’minlanishidir. Bu esa Quyosh, Oy va boshqa sayyoralarni kuzatishni anchagina katta aniqlikda olib borish imkonini beradi.

Mana shu rasadxonada o‘tkazilgan kuzatishlar asosida va Ulug‘bek rah- barligida «Ulug‘bek ziji» yaratildi. O‘zbekiston Fanlar Akademiyasi Tarix va arxeologiya institutining professori V.A.Shishkin rahbarligida uzoq yillar tekshirish ishlari olib borildi va rasadxonaning o‘rni sinchiklab o‘rganildi. Natijada Boburning «Boburnoma»da keltirgan ma’-lumotlari to‘g‘ri degan xulosaga kelindi. Lekin arxitektor V.A.Nilson boshqacha fikrda: rasadxona silindr shaklida bo‘lgan.

O‘zbekiston hukumati yodgorlikning qoldiqlarini o‘rganish va saqlab qolihga katta e’tibor berdi. 1949-yili rasadxona o‘rniga marmar toshdan monument o‘rnatildi. 1964-yili esa Ulug‘bek nomli me’morial muzey qurib tugallandi va tantanali ravishda ochildi.

Ulugbek ziji

Ulug‘bek akademiyasining muhim ishlaridan biri «Ulug‘bek ziji», «zij»-forscha «zik» so‘zidan olingan va u «jadval» degan ma’noni beradi. Zijni fors tilida yozishgan. U kirish, ya’ni nazariy (bu qism qoida sifatida beriladi, unda isbot bo‘lmaydi), rasadxonada o‘tkazilgan kuzatishlar asosida tuzilgan jalvallardan iborat. Ular yil hisobi, trigonometrik jadvallar, sayyoralar jadvali (ular beshta-Venera (Zuhro), Merkuriy (Utorud), Mars (Mirrix), Yupiter (Mushtariy) va Saturn (Suhayl)) va yulduzlar katalogini o‘z ichiga oladi.

Yil hisobi tarix va astronomiya uchun juda muhim, shu sababli zijdan hijriy, yunon, Yezdigard eralari, ularni hisoblash usullari, bu eralar orasidagi munosabatlar, Malikshoh erasi, Xitoy va Uyg‘ur eralari o‘rin olgan.

Yil hisobida kabisa yilini topish masalasi qaralgan. Zijda ko‘rsati-lishicha, har 30 yilga 11 ta kabisa yili to‘g‘ri keladi.

Trigonometrik jadvallar 10 ta o‘nli xona aniqligida hisoblangan, bu o‘sha davr uchun juda yuqori aniqlik. Shu sababli Ulug‘bek akademiyasida hisoblash markazi bo‘lgan, unda bir necha hisobchi hisoblashning turli vositalaridan foydalanib hisoblash ishlari olib borishgan degan faraz qilishimiz mumkin. Jadval bir minutdan oralatib tuzilgan. Ular sinuslar va tangenslar jadvallari. Ular bir daraja sinusini hisoblashga ko‘ra tuzilgan. Ulug‘bekning bir daraja sinusini hisoblashga doir maxsus risolasi bo‘lgan, ammo bu risola bizgacha yetib kelmagan. Bu haqda «Ulug‘bek ziji»ning sharhlovchisi Husayn Birjandiy habar beradi.

Umuman, bir daraja sinusini hisoblash

$$4x^3=3x+a \text{ yoki } 4cos^3x=3cosx+a$$

kubik tenglamani yechishga keltiriladi.

Zijning amaliy astronomiyaga tegishli qismida elliptikaning ekvatorga og‘maligi, osmon yoritgichlarining koordinatalarini aniqlash, yerdagi ixti-yoriy punktning uzunligi va kengligini aniqlash, yulduzlar va sayyoralar orasidagi masofalarni aniqlash masalalari qaralgan.

Sayyoralar harakati nazariyasiga taalluqli qismida «vaqt tenglamasi»-xaqiqiy Quyosh to‘g‘ri chiqishi bilan o‘rtacha Quyosh to‘g‘ri chiqishi orasidagi farq yoki muayyan vaqt uchun o‘rtacha vaqt bilan xaqiqiy vaqt orasidagi farq qaraladi. Ma’lumki, bu farq ikki sababga ko‘ra: birinchidan, Quyoshning elliptika bo‘ylab notekis harakatidan, ikkinchidan, elliptikaning ekvatorga og‘maligi ($23^0 30$)dan har kuni o‘zgarib turadi. Shu bo‘limda Ulug‘bek ixtiyoriy davr uchun o‘rtacha uzoqlikni aniqlash, sayyoralarning osmon sferasidagi xaqiqiy o‘rnini aniqlash, Quyosh va Oy tutilishlari masalalarini ham qaraydi. U Quyosh va Oy tutilishlarini ikki xil usulda-jadval yordamida va bevosita hisoblash bilan topish mumkin ekanini aytadi.

Zijning yulduzlar katalogi ham diqqatga sazovor, u 1018 ta yulduzdan iborat bo‘lib, ularning har biri yulduz turkumlari bo‘yicha joylashtirilgan. Yulduz turkumlari har bir yulduzining nomeri, qisqacha ta’rifi, ularning 1437-yildagi teng kunlik nuqtasiga keltirilgan uzunlik va kengligi berilgan.

«Zij»ning ilmiy nujumga taalluqli bo‘limida sayyoralarning turlicha turishlariga qarab kishilarning tole’nomasini tuzish, sayyoralarning turli-tuman joylashuvining kishilar taqdiriga ta’siri masalalari qaralgan.

«Ulug‘bek ziji» dunyo kutubxonalari va shaxsiy yig‘uvchilar orasida eng ko‘p tarqalgan asar desak xato qilmagan bo‘lamiz, chunki hozirgi kunda bu asarning 150 dan ortiq nusxasi ma’lum.

Xulosa qilib shuni ta’kidlash lozimki, «Ulug‘bek ziji» VIII-IX asrlarda boshlangan zij tuzish an'anasini davom ettirgan bo‘lsa-da, o‘zining ilmiyligi va aniqligi nuqtayi nazaridan o‘zidan oldin tuzilgan zijlardan bir pog‘ona yuqori turadi. Shu tufayli ham u dunyo kutubxonalarida ham juda ko‘p uchraydi.

Ulug'bekning Samarqand akademiyasi*

Transaksianada uning (ya'ni Temurning) o'rniga taxtga chiqqan mashhur Ulug'bek Samarqandda birinchi akademiyaga asos solgan.

Volter

«Akademiya» atamasi yangi emas. Akademiya ba'zi ilmiy va o'quv tashkilotlarining nomi. Fan tarixida akademiyalar juda ko'plab tuzilgan. Masalan, qadimgi yunon faylasufi va matematigi Aflotun ((Platon) eradan oldingi 429-348-yillarda yashagan) akademiya tashkil qilgan va bu akademiyaning peshtoqiga « Bu yerga geometriyani bilmaganlar kirmasin» deb yozdirib qo'ygan.

«Akademiya» atamasi afsonaviy qahramon Akadema nomidan hosil qilingan. Uning nomi bilan Afina yaqinidagi bir shahar ham Akademiya deb atalgan.

Keyingi akademiya arab xalifaligi davrida tashkil topgan, uni xalif al-Ma'mun (813-833) Bag'dodda tashkil etgan. U arablarda «Baytul hikma», ya'ni «Hikmatlar uyi» deb atalgan. Manba'larning guvohlik berishicha bu akademiya qoshida boy kutubxona, yaxshigina jihozlangan rasadxona bo'lgan. Bu akademiyada juda ko'plab yo'nalishlar bo'yicha ilmiy izlanishlar olib borilgan: akademiya olimlar qadimgi yunon olimlarining tabiiy va boshqa fanlarga doir ilmiy ishlarini arab tiliga tarjima qilishgan va bu asarlarga sharhlar yozgan. Rasadxonada esa sayyoralar va qo'zg'almas yulduzlar kuzatilgan. Yer meridiani bir darajasining uzunligini hisoblash bo'yicha xalifalik sahrolariga ilmiy ekspeditsiyalar tashkil etilgan.

Bu akademiya qariyib 200 yil faoliyat ko'rsatgan. Unda o'zbek olimlaridan Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy (783-850) va Muhammad ibn Nasr al-Farg'oniy(IX-X) va ko'pgina Markaziy Osiyolik

---

* Akademik T.N.Qori Niyoziy Ulug'bekning ilmiy tashkilotini «Ulug'bekning Samar-qanddagi astronomiya maktabi» deb atagan edilar. Biz Ulug'bekning tashkiloti a'zolari astronomiyadan boshqa fanlarga ham qo`shgan hissalari hisobga olib, hamda keyingi tadqiqotlarga suyanib, Farangistonlik olim va yozuvchi Volterning bahosiga qo'shildik.

olimlar arab do'stlari bilan yelkama-yelka turib faoliyat ko'rsatishgan. Xorazmiy esa akademiyaning ilmiy ishlarini, kutubxona va rasadxonada olib borilgan ishlarni boshqarib turgan.

Akademiya xodimlari faqat yunon olimlari asarlarini tarjima qilish va sharhlash bilan band bo'lishmagan, ular keyinchalik o'zlarining original asarlarini yarata boshlashgan. Bu bilan ular jahon fani xazinasiga, ayniqsa, Markaziy Osiyoda fanning turli sohalarining rivojlanishiga katta hissa qo'shishgan.

Taxminan 1000-yillar atrofida Bag'dod akademiyasi kabi akademiyani xorazmshoh Ali ibn Ma'mun Xorazmning o'sha paytdagi poytaxti Gurganchda tashkil qildi va o'z akademiyasiga shoir va tabiblardan tashqari, o'sha davrning buyuk faylasuflari va olimlari-al-Masixiy, al-Xammar, Abu Ali ibn Sino va Abu Rayhon Beruniylarni taklif etdi.

Yaqin va O'rta Sharq va Markaziy Osiyoda ilmiy ishlarni akademiya shaklida tashkil etish an'anaga aylandi. O'rta Osiyoda bu jarayon keyin ham davom etdi. XV asrda Samarqandda Ulug'bek o'zining akademiyasini tashkil qildi. Fan tarixiga bu ilmiy markaz «Ulug'bekning Samarqand akademiyasi» va «Ulug'bekning Samarqand astronomiya maktabi» nomi bilan kirdi. Birinchi nomni fransuz faylasufi va yozuvchisi Volter (1694-1778) bergan bo'lsa, ikkinchi nomni marhum akademik Qori Niyoziy berdilar.

Ulug'bekning ilmiy dargohi haqiqiy akademiya edi, chunki uning qoshida yaxshi jihozlangan rasadxona, boy kutubxona va o'z davrining oliy o'quv yurti-madrasa bor edi. Rasadxona yerli ziyolilar bilan bir qatorda turli yurt va elatlardan taklif etilgan mashhur astronomlar hamda matematiklar xizmat qilishar edilar. Astronomlar sayyoralar va yulduzlarning Osmon Kurrasidagi holatini kuzatishar, olingan ma'lumotlarga esa ilmiy dargoh qoshidagi matematiklardan iborat hisobdonlar matematik ishlov berishar edilar. Ana shu tariqa astronomik va trigonometrik jadvallar vujudga kelar edi.

Rasadxona xodimlari, jumladan Ulug'bekning o'zi ham, madrasada ham dars berishar edilar. Madrasada diniy-Qur'oni Karim, hadis va tafsir fanlaridan tashqari tabiiy fanlar-riyoziyot, handasa, ilmi hay'at, ya'ni astronomiya, tibbiyot, ya'ni meditsina, surat al-ard, ya'ni geografiya kabilar o'qitilar edi.

Ulug‘bek akademiyasida mashhur olimlar-Qozi-Zoda Rumiy (1435-yilning fevralida vafot etgan), G‘iyosiddin Jamshid al-Koshiy (tug‘ilgan va vafot etgan vaqtlari aniqlanmagan) va Ali Qushchi (u 1475-yili Istambulda vafot etgan) lar xizmat qilishgan. Keyinchalik bu akademiyada Hasan Chalabiy ibn Muso ibn Mahmud Qozi Zoda Rumiy (Salohiddin Muso Qozi Zoda Rumiyning o‘g‘li), Mu'iniddin al-Koshiy, Mansur ibn Mu'iniddin al-Koshiy va boshqa olimlar ishlashgan. Olib borilgan astronomik kuzatishlar asosida «Ulug‘bek ziji» vujudga kelgan. Akademiya xodimlari tomonidan bir qancha matematik risolalar bitilgan.

Ulug‘bek kutubxonasi va uning keyingi taqdiri

Yozma manbalarning guvohlik berishicha Ulug‘bekning bobosi Temur va uning otasi Shohruh kamyob kitoblar ishqibozi bo‘lgan. Temur Kichik Osiyoni bosib olganida Bursa shahrida juda qadimgi va boy kutubxonaga duch kelgan va bu kitoblarni Samarqandga o‘z kutubxonasiga yuborgan. Ma’lumki, Bursa va Pergam shaharlari qadimgi Madaniyat markazlaridan hisoblanadi. Masalan, Pergamdan Apolloniy (tax. bizning eradan oldingi 265-170 yillar) singari buyuk matematik va faylasuf Antigonlar yetishib chiqqan. Apolloniyning «Konus kesimlari» va «Berilgan nisbatda bo‘lish» nomli asarlari o‘rta maktab o‘quvchilari orasida ham mashhur. Bursa ham Pergam singari madaniyat markazi bo‘lgan. Pergamdan keltirilgan kitoblar ham keyinchalik, Temur vafotidan so‘ng, Ulug‘bek ixtiyoriga o‘tgan. Bu yerda shuni ta’kidlash lozimki, O‘rta Osiyo xalqlarining kitob sevarligi, kutubxonachilik bilan shug‘ullanishi Temur va Ulug‘bek zamonida yangilik emas edi. Ma’lumki, Abu Ali Ibn Sino (980-1037) o‘sha davrda Buxoroda ajoyib kitob bozori bo‘lgani, undan Abu Nasr Muhammad ibn Muhammad ibn O‘zlag‘ ibn Tarxan al-Farobiy (tax. 870-950) ning Aristotel «Metafizika» siga yozgan sharhini sotib olganini va qanday qilib Buxoro amiri saroyidagi kutubxona kitoblaridan foydalanishga ruxsat olgani haqida yozadi. «Men ko‘p xonali uyga kirdim: har bir xonada bir-birining ustiga taxlab qo‘yilgan kitob to‘la sandiqlar ko‘p edi; bir xonada arabcha va she’riyatga doir, ikkinchi xonada musulmon huquqiga doir kitoblar bor va hokazo har bir xonada biror fan haqidagi kitoblar bor edi. Men qadimgi (mualliflar) kitoblarining ro‘yxatini o‘qidim va o‘zimga keragini so‘radim. Men hatto nomlari ko‘pgina kishilarga noma’lum bo‘lgan kitoblarni ko‘rdim; men bunchalik ko‘p kitoblarni oldin ham, keyin ham ko‘rmaganman. Men bu kitoblarni o‘qidim, ulardan foydalandim va har bir kishining o‘z fani sohasidagi ahamiyatini tushunib yetdim».

Kutubxonaning Ulug‘bek vafotidan so‘nggi taqdiri noma’lum. Ba’zi rivoyatlarga qaraganda kitoblar saqlanib qolgan. Ularni Ulug‘bekning sodiq shogirdi Ali Qushchi saqlab qolgan. Oldin eslatganimizdek, Ali Qushchi Samarqanddan Ulug‘bek vafotidan keyinoq ketmagan, ancha muddat Samarqand yaqinidagi Hazrat Bashir qishlog‘ida bekinib yotgan. Qulay fursat topib Samarqanddan Ulug‘bek kutubxonasini o‘sha qishloqqa ko‘chirgan. Lekin, kutubxonadagi kitoblarning hammasini olib kela olganmi yo‘qmi u haqda ma’lumot yo‘q, chunki ba’zi manbalarda ko‘rsatilishicha Ulug‘bek kutubxonasidagi kitoblar soni 15 ming jilddan ziyodroq bo‘lgan.

Yana rivoyatlarga qaraganda Qushchi kutubxona kitoblarini Hazrat Bashir qishlog‘idan uncha uzoq bo‘lmagan Niyoztepadagi g‘orlardan biriga yashirgan. Qushchi o‘z vaqtida Ulug‘bek bilan birga Samarqand atrofidagi ovlarda qatnashganidan, bu yerlarni juda yaxshi bilgan.

Bizning davrimizda ham Ulug‘bek kutubxonasini topishga urinishlar bo‘lgan. Shunday fidoyilardan biri Navoiy nomli Samarqand davlat uni-ver-siteti professori Ahmed Xatipov edi. Ammo bu ishni davom ettirishda o‘ziga hamkorlar topa olmagan va qidiruv ishlarini tez to‘xtatgan. Ulug‘bek kutubxonasi kitoblarini qidirishni tashkil etish masalasini ham o‘ylab ko‘rish lozim.

Ulug‘bek akademiyasi ishining davom etttiruvchilari

Ulug‘bek akademiyasi ilmiy ishlari an'analarini davom ettiruvchilaridan biri uning «Farzandi arjumandi» Ali ibn Muhammad Qushchidir. U Ulug‘bek vafotidan so‘ng Eronning Kormon shahriga keladi va shu yerda saroy olimi lavozimida ishlaydi hamda madrasada matematika va astronomiya fanlaridan dars beradi. Kormonda o‘zining ilmiy maktabini tashkil etadi va Samarqand akademiyasi ilmiy izlanishlari an'anasini davom ettiradi. Ali Qushchi maktabi o‘n yilga yaqin faoliyat ko‘rsatadi. Bu davr ichida Ali Qushchi Mirim

Chalabiy, Husayn Birjandiy va boshqalar singari bir necha shogirdlarni tarbiyalab voyaga yetkazdi.

Ali Qushchi Istambulda yashagan chog'ida ham Ayya Sofiya madrasasi olimlarini o'z atrofiga to'playdi va Turkiyada ham fanning turli sohalarining rivojlanishiga o'z hissasini qo'shadi.

Ulug'bek akademiyasi an'analarini davom ettiruvchilardan ikkinchisi-otasi bo'yicha Salohiddin Qozi Zoda Rumiyning, onasi bo'yicha Ali Qushchining nabirasi-Muhammad ibn Muso ibn Mahmud Qozi Zoda Rumiy, taxallusiga ko'ra «Mirim Chalabiy» dir. «Mirim» yoki «Miriam» forsiy bo'lib, «Bizning dunyo yoki davr» ma'nosini, «Chalabiy» turkiy bo'lib, «tarbiyali yoki tarbiya ko'rgan» ma'nosini bildiradi.

Demak, Mirim Chalabiy taxallusi «Davrimizning tarbiyali kishisi» degan ma'noni berar ekan. Chalabiy taxminan 1430-1435-yili Samarqandda tug'ilgan, oliy ma'lumotni ham Samarqand madrasasida olgan.

1451-yili Ali Qushchi bilan Kormon shahriga kelgan. Uning ilmiy va pedegogik faoliyati mana shu shaharda boshlangan. So'ng bobosi bilan Istambulga kelgan. 1475-yilgacha Istambulda yashagan. Istambulda juda ko'p ustozlarining ishlariga sharhlar yozgan, ustozlari tugata olmagan risolalarni oxiriga yetkazgan. U 1475-yildan so'ng Kichik Osiyoning turli shaharlarida yashagan. Umrining oxirida Chalabiy Anatoliyada sulton Salim (1512-1520) ning saroyida qozi lavozimida xizmat qilgan. XVI asrning boshida Sulton Boyazid II (1481-1512)ning iltimosiga ko'ra «Ziji jadidi Guragoniy»ning sharhidan iborat «Amallar qoidasi va jadvallarni to'g'rilash» («Dastur al-amal va tashxix al-jadval») asarini yozgan. U 1525 yili Turkiyada vafot etgan.

Chalabiyning «Dastur al-amal tashxix al-jadval» asaridan bir daraja sinusni hisoblashning G'iyosiddin Jamshid al-Koshiy metodi ham o'rin olgan. Ammo Chalabiy uchinchi darajali tenglamalarni yechishga al-Koshiy usulidan boshqacharoq usulni tatbiq etgan, Mirimning yana bir asari bobosi Ali Qushchining «Fatxiya» nomli risolasiga sharh. Chalabiy sharhni fors tilida yozgan. Ma'lumki, Ali Qushchi o'z asari «Fatxiya» ni astronomiyadan o'quv qo'llanmasi sifatida yaratgan va uni sulton Muhammad II ga bag'ishlagan. Chalabiyning yana bir asari «Vatar va sinus haqida risola» deb ataladi, ammo bu asarning qo'lyozmasi hozircha topilgan emas. U turli xil astronomik asboblar to‘g‘risida ham risolalar yozgani haqida ma’lumotlar bor.

Xorijiy fan tarixchilari, jumladan nemis olimi German Gankel va A.Bruniyullerlar Mirim Chalabiyning ilmiy faoliyatini tatbiq etib, unga yuksak baho berishgan.

Samarqand akademiyasi ilmiy ishlari an'analarini davom ettiruvchilardan yana biri Mullo Abuali Najmiddin ibn Muhammad ibn Husayn Birjandiydir. U XV asrning ikkinchi yarmisida Eronning Birjand shahrida tug‘ilgan. Matematika va astronomiyaga taalluqli ilmlarni Ali Qushchidan o‘rgangan. Avval Eronning turli shahar va viloyatlarida yashagan, keyin esa Hirotda vazir Habibullaxon saroyida xizmat qilgan. Birjandiy yunon, hind olimlari, shuningdek, o‘z ustozlarining asarlariga sharxlar bitgan. O‘zi ham matematika va astronomiyaga doir original asarlar yaratgan. U Hirot madrasasida dars berib, atrofiga iqtidorli yoshlarni to‘plab ular bilan birgalikda ilmiy ishlar olib borgan. Birjandiy madrasa toliblari uchun matematika va astronomiyadan o‘quv qo‘llanmalari ham yaratgan. U 1528 yili vafot etgan.

Hozirgi kunda Birjandiyning o‘nga yaqin asarining qo‘lyozmasi ma’lum. U ko‘proq astronomiyaga doir asboblarni yasash va ulardan foydalanish usullari bilan qiziqqan.

U yozgan sharhlar orasida eng muhimlari-Ptolemey «Almagesti» ning Nasiriddin Tusiy tomonidan arabchasiga yozilgan sharh: Ulug‘bek zijiga sharh: Chag‘ishniy risolasiga sharh va boshqalardir. Chag‘ishniy risolasiga sharh tarixi juda qiziq: Chag‘ishniy o‘z asarini XII asrda yozgan, XV asrning boshida bu asarga Qozi Zoda Rumiy sharh yozgan, XVI asrning oxirida esa Birjandiy Qozi Zodaning sharhiga sharh bitgan.

Ulug‘bek akademiyasi ishlarining Ovro‘pada o‘rganilishi va uning Ovro‘pada astronomiya va matematikaning rivojlanishiga ta’siri

Ovro‘pada Sharq matematikasiga qiziqish Muso al-Xorazmiy (783-850) ning «al-jabr va al-muqobala amallaridan qisqacha kitob» asarining angliyalik Robert Chesterskiy va italiyalik Gerarde Kormonskiylar tomonidan 1145 yili lotin tiliga tarjima qilinishidan boshlangan bo'lsa-da, ular Samarqand akademiyasining ilmiy ishlari bilan XVI asrning oxiri XVII asrning boshlaridan boshlab qiziqa boshlandi. Bunga asosiy sabab xuddi shu davrda Ovro'pada astronomiya fanining tez sur'atlar bilan rivojlanayotgani edi.

1643-yildan boshlab Oksford universitetining professori Djon Grivs «Ulug'bek ziji»ni ilmiy tatqiq qilishni boshladi va uning yulduzlar katalogidan olingan 98 ta yulduzning holatini e'lon qildi. 1648 yili esa «Ulug'bek ziji»ning geografiya qismini alohida nashr etdi. Angliyalik sharqshunos Tomas Hayd (1636-1703) 1665-yili «Ulug'bek ziji»ning lotin va tojik tillaridagi nashrini e'lon qildi.

Ovro'palik olimlar Ulug'bek akademiyasining faqat astronomiyaga oid ishlari bilan qiziqibgina qolmasdan, akademiya xodimlarining matematik merosini ham o'rgana boshladi. Albatta, bu tadqiqotlar izsiz ketmadi. X.Xunnor va K.Fogellarning ta'kidlashlaricha Konstantinopol yunonlari ular yurtini turklar boshqara boshlaganidan buyon o'nli kasrlardan foydalanishar ekanlar. Demak, G'iyosiddin al-Koshiyning bu kashfiyoti Konstantinopolga Ali Qushchi kelganidan so'ng tarqalgan.
Marhum G.Sobirov Yan Vidman 1489-yili arifmetika va algebradan tuzgan o'quv qo'llanmasida Ali Qushchi kashf etgan «musbat» va «manfiy» terminlarini ishlatganligini yozadi.

XVIII-XIX asrlarda Samarqand akademiyasi ilmiy merosini o'rganish yanada jadallandi. XVIII asrda Gurjiston shohi Vaxtang VI (1703-1724) «Ulug'bek ziji»ni o'rganishga kirishadi va natijada uni gurji tilidagi nushasini e'lon qiladi.

Bu akademiya-ota va bola Sediyolar (J.D.Sediyo (1777-1876) va YE.A.Sediyo (1808-1876)) ning xizmatlari juda katta.

Ulug'bekning Samarqand akademiyasi olimlarining geometriya sohasida qilgan ishlari noyevklid geometriyasining vujudga kelishida ozmi-ko'pmi ta'sir ko'rsatgan, chunki Samarqand olimlari tomonidan Yevklidning «Negizlari» ga yozilgan sharh 1587 yili Turkiya tomonidan Ispaniyaga sotilgan edi. Bu sharh orasida Yevklidning V postulatini isbot qilishga urinishlar ham bor edi.

Ulug'bek va uning akademiyasining G'arbiy Yevropada qanchalik mashhur bo'lganligini chex astronomi Yan Geveleyning

«Astronomiya darakchisi» asariga bitilgan gravyuradan ham bilish mumkin.

Shunday qilib, Ulug'bek akademiyasi va uning xodimlari tomonidan amalga oshirilgan ishlar Turkiya orqali Italiya va Ispaniyaga, undan G'arbiy Ovro'paga o'tgan va G'arbiy Ovro'pada astronomiya va matematikaning rivojlanishiga salmoqli hissa qo'shgan.

G'iyosiddin Jamshid Al-Koshiy

Ulug'bek akademiyasi olimlaridan G'iyosiddin Jamshid al-Koshiy alohida o'ringa ega. Uning tarjimayi holi haqida deyarli ma'lumot yo'q. U Ulug'bek akademiyasidagi asosiy matematik hisoblanadi. U taxminan 1436-yili vafot etgan. Bizga ma'lum bo'lgan asarlari-»Arifmetika kaliti» (Miftax al-hisob) va «Aylana haqida risola» (Risola fil-muhitiya)dir.

Muallifning aytishicha, «Arifmetika kaliti» tajribali hisobchilar uchun, ularning haqiqatan bilmaganliklari uchunmi yoki uni sinab ko'rish uchunmi bergan savollariga javob tariqasida yozilgan va Ulug'bek kutubxonasiga taqdim qilingan. Kitob kirish va beshta maqoladan iborat. Kirishda arifmetikaga ta'rif beriladi, sonlar va ularning turlari haqida gapiriladi. Birinchi maqola olti bobdan iborat va u butun sonlar arifmetikasiga bag'ishlangan. Ikkinchi maqola 12 bob va u kasr sonlar haqida. Shu maqolaning 12-bobi dang, tasuj va ashoirlar haqida. Dang, tasuj va ashoirlar o'rta asrlardagi Markaziy Osiyo xalqlarining og'irlik o'lchovi va pul birligi. Bir dang oltin bilan o'lchansa 1/6 dinarga, kumush bilan o'lchansa, 1/6 dirxamga va ixtiyoriy og'irlikdagi 1/6 misqolga teng. Bir tasuj 1/4 dang, 1/24 dinar, dirxam yoki misqol. Bir ashair 1/4 tasuj, 1/16 dang, 1/96 dinar, dirxom yoki misqol.

Ruschadagi «denga» atamasining o'zagi o'sha «dang»dan olingan, dastlab u 1/2 tiyin yoki 1/6 oltinga teng pul birligini bildirgan.

Koshiy bu atamalardan kasr sifatida foydalangan, bunda dinar 1 dang=1/6, tasuj=1/24, shair=1/96.

Uchinchi maqola astronomik hisoblashlarga bag'ishlangan va u olti bobdan iborat. To'rtinchi maqola kirish va to'qqiz bobdan iborat bo'lib, u o'lchashlar haqida. Beshinchi maqola al-jabr va-l-muqobala, ikki xato qoidasi va boshqa arifmetik qoidalar asosida noma'lumni topish. U to'rt bobdan iborat. Bu maqolaning to'rtinchi bobi misollar haqida deb ataladi va al-Koshiy 10 ta masalani keltiradi. Shulardan namunalar ko'rsatamiz.

1-misol. Bir necha kishi boqqa kirdi, birinchisi bitta, ikkinchisi ikkita, uchinchisi uchta va hokazo anor oldi. So'ng hamma anorlarni jamlab, o'rtada bo'lgan edi har biriga oltitadan anor tegdi. Boqqa necha kishi kirgan?

Koshiyning yechish usuli bizning belgilashlarda quyidagicha: noma'lumni x orqali belgilaydi va unga birni qo'shadi, uni 2 ga ko'paytiradi, bu hamma anorlar sonini beradi. So'ngra x ni 6 ga ko'paytiradi. Bu hamma anorlarning umumiy sonini beradi. Har ikki ifoda tenglashtirilib yechiladi:

$$x(x-11)=0$$

$x=0,\ x=11$. Javob 11 kishi.

Koshiyning bu masalasi birinchi hadi, hadlarining ayirmasi va hadlari yig'indisi (agar hadlari sonini n desak, u 6n berilgan arifmetik progressiyadan iborat bo'lib, hadlari sonini topish lozim.

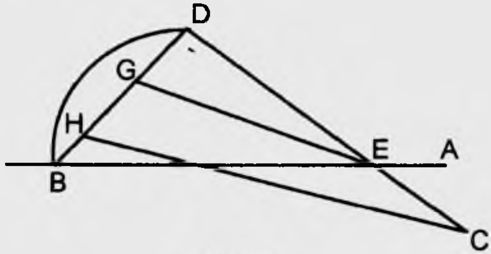
2-misol. Uch xil-oltin, gavhar va zumraddan yasalgan bezak bor. Uning og'irligi uch misqol, bahosi 60 dinar, bir misqol oltin 4 dinar, gavhar-20 dinar, zumrad-30 dinar. Ular har birining og'irligini bilmoqchimiz.

Koshiy bu masalani yechishning uch xil usulini beradi. Biz u ko'rsatgan uchinchi usulni hozirgi belgilashlarda keltiramiz: oltinning og'irligini x, gavharning og'irligini u,zumradning og'irligini 3-(x+u) bilan belgilaydi, biz uni z deymiz va masala mazmuniga ko'ra tenglama tuzamiz:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 4x+20y+30z=60 \end{cases}$$

Noaniq tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. U cheksiz ko'p yechimlarga ega. Ammo u u≤0 bo'lib qolmasligi uchun x≥30/26 shart bajarilishi lozim.

Uchinchi bo'limning ikkinchi masalasi quyidagicha:Nayzaning bir qismi suv ichida uch gazi esa suvdan tashqarida. U og'ma holatda. Keyin uni shamol suvdan chiqib turadigan uchini suv sathiga tegadigan holatga keltirdi. Nayzaning dastlabki suvdan chiqib turgan o'rni bilan keyingi o'rni orasi 4 gaz, uning dastlabki uchi bilan suv sathidagi keyingi uchigacha bo'lgan masofa 3 tirsak. Nayzaning uzunligini bilmoqchimiz.



67-rasm.

Yechish. AB-suv sathi, CD-nayza, ED-uning suvdan chiqib turgan qismi, EB-dastlabki va keyingi holatlari orasidagi masofa, DB-dastlabki uchi va suvga botgandagi uchlari orasidagi masofa (67-rasm). E nuqtadan DB ga EG tik tushiramiz, C nuqtadan CH perpendikularni o'tkazamiz, u DB ni teng ikki bo'lakka ajratadi. To'g'ri burchakli GDE uchburchakdan:

$$GD = DE\cos D = \frac{DB^2 + DE^2 - BE^2}{2 \cdot BD} = \frac{9+9-16}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

DGE va DHC uchburchaklarning o'xshashligidan

$DG/DE = DH/DC$, bundan $DC = DH \cdot DE/DG = 1 \cdot 1/2 \cdot 3 : 1/3 = 13\frac{1}{2}$

AYLANA HAQIDA RISOLA. Bu asarni Koshiy «arifmetika kaliti» dan oldin yozgan, chunki u bu asarini «Arifmetika kaliti» da boshqa asarlari qatorida eslaydi.

Asarning asosiy maqsadi π sonini, ya'ni aylana uzunligining uning diametriga nisbatini o'zigacha ma'lum bo'lgan aniqlikdan aniqroq hisoblashdan iborat. Ma'lumki,

qadimgi Misrda $\pi = (16/9)^2 = 256/81 = 3{,}1604$;

qadimgi Bobilda $\pi = 25/8 = 3,125$;
Arximed asarlarida $\pi = 22/7 = 3,142$;
Appoloniyda $\pi = 3,1416$;
Ptolomey (II asr)da $\pi = 3,1416$;
Ariabxatti (V asr) da $\pi = 3,1416$;
Xitoyda (e.o. III asr) $\pi = 3$;
Al-Xorazmiyda $\pi = 22/7 = 3,142$.

Risola quyidagi bo‘limlardan iborat:

1. Yoyning yarim doiragacha to‘ldiruvchi yoyning vatarini aniqlash to‘g‘risida.
2. Doiraga ichki chizilgan ixtiyoriy ko‘pburchakning perimetrini va unga o‘xshash, ammo doiraga tashqi chizilgan ko‘pburchakning perimetrini aniqlash haqida.
3. Aylanani necha qismga bo‘lish va qaysi oltmishli xonagacha amal bajarish lozimki, hosil bo‘lgan perimetr berilgan doira aylanasidan qilcha ham ortiq bo‘lmasin.
4. Amallar haqida.

Demak, Koshiy π ning qiymatini aylanaga ichki chizilgan muntazam ko‘pburchaklar perimetrlarini aylananing uzunligi bilan solishtirish orqali topgan. U 2π uchun o‘nli sanoq sistemasida 6,2831853071795865 qiymatni hosil qilgan. Uni yodda saqlash oson bo‘lsin uchun arab va fors tillarida ikki misradan she’r ham bergan. Forsiysi:shash va do hasht va ze yek hasht va panj va ze sefra, bahavt va yekra haft va neh panj va hasht va shash panj ast.Ma’nosi:olti va ikki, sakkiz va o‘ttiz bir, sakkiz va besh va uchu nol, yetti va bir, yetti va to‘qqiz, besh va sakkiz va oltiyu, besh.

Koshiyning π uchun topgan qiymati 1597 yili Van Romen tomonidan 2^{30} tomonli muntazam ko‘pburchakli yordamida qayta topilgan. Undan keyin ham π ning o‘nli qiymatlarini yanada katta aniqlikda topishga urinishlar davom etgan. 1873 yili U.Shenke π ning 708 ta o‘nli xonasini hisoblagan. Hozirgi paytda EHM yordamida π ning 2000 ta xonasi hisoblangan.

Koshiyning matematika sohasida qilgan kashfiyotlaridan eng muhimi o‘nli kasrlar hisoblanadi. Uning asosiy maqsadi hisoblash uchun oltmishli kasrlardan qulayroq kasrlar sistemasini topish edi. Shu sababli u «Arifmetika kaliti» asari ikkinchi maqolasining birinchi bobida kasrlar va kasrlarning turlarini bayon etdi. Mana shu yerda birinchi marta o'nli kasrlar sistemasini va ular bilan bajariladigan amallar qoidalarini kiritdi.

Koshiy «Aylana haqida risola» sida ham π sonining qiymatini avval oltmishli kasrlarda so'ng esa o'nli kasrlarda berdi.

Koshiy o'nli kasrlar ustida amallar bajarish, hosil bo'lgan natijada butun va kasr qismlarini ajratish qoidasi, o'nli kasrni oltmishli kasrga va aksincha, oltmishli kasrni o'nli kasrga almashtirish hamda taqribiy hisoblash qoidalarini keltirdi.

Ovrupoda o'nli kasrlarni birinchi bo'lib 1585-yili S.Steven ishlatgan. Uning avval golland, keyin esa fransuz tilida nashr qilingan «Kishilarning ishlarida uchraydigan hamma hisoblashlarni kasrsiz butun sonlar yordamida oson o'rgatadigan o'nliklar» nomli kitobi edi. Bu Koshiy kashfiyotidan 150 yil keyin edi.

6-§. Bir daraja sinusini hisoblash

Masala mohiyati, uning qiyinchiligi haqida Qozi Zoda Rumiy bunday deydi: «Bu masala bilan shug'ullangan buyuk kishilar bunday masalalar yechishning metodlari va ularga e'tibor ko'p bo'lishiga qaramay, bizning davrimizgacha bu tekshirishlarni oxirigacha yetkazmadilar, balki qo'pol yaqinlashish metodini qo'llab, uni aniqlashtirish bilan cheklandilar».*

Biz Mirim Chalabiyning «Amallar qoidalari va jadvallarni to'g'rilash» nomli risolasidan olingan bir daraja sinusini hisoblashga bag'ishlangan parchani qaraymiz.

M markazli R radiusli doira va unda har biri 2^0 ga teng AB, BC, CD(68-rasm) yoylar qaraladi.

MA radiusning o'rtasi K nuqtani markaz qilib AB, AC, AD vatarlar bilan E, G, H nuqtalarda kesishuvchi kichik yarim doiradan ajratilgan AE, EG va GH yoylar ham o'zaro teng va ularning har biri 2^0 dan.

Faraz qilaylik, AH yoy berilgan bo'lsin. Izlanayotgan AE yoy AH ning uchdan biriga teng bo'lsin.

---

* Г.Ж.ал-Коши Ключи арифметики. Трактат об окружности. М.: Гостехиздат, 1956, стр. 311-319.

AEGH to‘rtburchakka Ptolemey teoremasini tatbiq qilib, ushbuni topamiz:

$$AE^2 + AE \cdot AH = AG^2 \qquad (1)$$

AE=EG=GH va AG=EH bo‘lganidan Yevklid teoremasiga ko‘ra (va AG=GH bo‘lganidan)

$$AG^2 = BG\,(2R - BG) \qquad (2)$$

Bundan

$$AG^2 + BG^2 = BC \cdot 2R$$

$$AB^2 = BG \cdot 2R\,,\ BG = AB^2 / 2R$$

AB=2AE bo‘lganidan,

$$BG = (2 \cdot AE^2) / R \qquad (3)$$

(3)ni (2) tenglikka olib borib qo‘ysak,quyidagi hosil bo‘ladi:

$$AG^2 = 4AE^2 = (4AE^4) / R \qquad (4)$$

U holda (I) va (4) ifodalardan quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$4AE^2 + R^2 AH = 3R^2 AE \qquad (5)$$

Bu burchak triseksiyasining tenglamasi. Darhaqiqat,agar

$\breve{AH} = 6\alpha$ deyilsa , u holda $\breve{AE} = 2\alpha$ va

$$AH = R\sin 3\alpha\,, AE = R\sin\alpha$$

Bundan

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^2\alpha$$

(5) tenglikdagi R ni 60 desak

$$AE = 60\sin 1^{\circ} = x$$

$\sin 3^{\circ}$ ni ma’lum deb (chunki uni aylanaga ichki muntazam beshburchak va muntazam oltiburchak tomonlarining sinuslari ayirmasi va yarim burchakning sinusi formulalari yordamida hisoblash mumkin), Chalabiy al-Koshiydan so'ng oltmishli sanoq sistemasida quyidagi ko'rinishdagi tenglamani hosil qildi:

$$px = x^3 + q \quad \text{yoki} \quad x = \frac{q + x^3}{p}$$

tenglamaning oltmishli sistemadagi yechimini Koshiy ushbu usul ko'rinishda izlaydi

$$x = a + d + c + ..$$

p q ga nisbatan juda kichik bo'lgani uchun x juda kichik bo'lmog'i kerak. Shu sababli $\tilde{o}^3$ ning qiymatini hisobga olmaslik va birinchi yaqinlashishni

$$\tilde{O}_1 = \frac{q}{p}$$

deyishimiz mumkin.
Bo'lishni bajarib birinchi yaqinlashishni topamiz:

$$Q = ap + rx_1 \approx a$$

Faraz qilaylik, x ning aniq qiymati $\alpha + \beta$ bo'lsin.

Uni yuqoridagi tenglikka qo'ysak,

$$x = \alpha + \beta = (q + (\alpha + \beta)^3)/p = a + (r_1 + (\alpha + \beta)^3)/p$$

Yoki taqriban

$$x \approx a + (r_1 + \alpha^3)/p$$

bo'lishni bajarib topamiz:

$$r_1 + \alpha^3 = pv + r_2: r_1 = pv$$

bundan $x \approx a + b + r_2 / p$

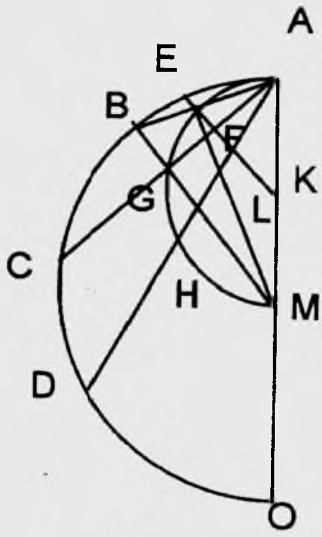
Shunday qilib, ikkinchi yaqinlashishni topamiz:

$$\tilde{o}_2 = \grave{a} + \hat{a}$$

so'ngra $x = a + b + ..$ deb olib, uchinchi yaqinlashishni topamiz va hokazo. Bu jarayon esa chekli ekanini ko'rsatish mumkin.

Bir daraja sinus uchun Koshiy o'nli kasrlarda hosil qilgan qiymat quyidagicha:

$$\text{Sin}1^0 = 0{,}017452406437283571.$$



68-rasm.

TURLI XALQLARNING SON BELGILARI

	Misrliklar			Ussuriya-Bobil	Finiklar	Suriyaliklar	Palmirliklar	Yunon Gerodon	Rimliklar
	Ierog-lif	Ierotik	Demotik						
1	I	I	I		I	I	I	I	I
2	II				II		II	II	II
3	III				III		III	III	III
4	IIII						IIII	IIII	IV
5							Y	Γ	V
6								ΓI	VI
7								ΓII	VII
8								ΓIII	VIII
9								ΓIIII	IX
10	∩					7	⊃	Δ	X
11	∩I							ΔI	XI
15								ΔΓ	XV
20	∩∩					O	3	ΔΔ	XX
30	∩∩∩					7O	⊃3	ΔΔΔ	XXX
40	∩∩∩∩					OO	33	ΔΔΔΔ	XL
50						7OO	⊃33	𐅄	L
60						OOO	333	𐅄Δ	LX
70						7OOO	⊃333	𐅄ΔΔ	LXX
80						OOOO	3333	𐅄ΔΔΔ	LXXX
90						7OOOO	⊃3333	𐅄ΔΔΔΔ	XC
100								H	C
200								HH	CC
400								HHHH	CD
500								𐅅	D
1000								X	M
10000								M	
10^5									
10^6									
10^7									

(1-jadval)

SONLARNING HARFIY BELGILANISHI

	Yunonlar	Slavyanlar: Kiril-lisey	Slavyanlar: Gla-go-lisey	Yahudiylar	Suriyaliklar	Arablar	Gruzinlar	Armanlar
1	α̅	а̅	ⰰ	א	ܐ	ا	ა	Ա
2	β	в̅	ⰱ	ב	ܒ	ب	ბ	Բ
3	γ̅	г̅	ⰲ	ג	ܓ	ج	გ	Գ
4	δ̅	д̅	ⰳ	ד	ܕ	د	დ	Դ
5	ε̅	є̅	ⰴ	ה	ܗ	ه	ე	Ե
6	ς̅	ѕ̅	ⰵ	ו	ܘ	و	ვ	Զ
7	ζ̅	з̅	ⰶ	ז	ܙ	ز	ზ	Է
8	η̅	и̅	ⰷ	ח	ܚ	ح	ჱ	Ը
9	θ̅	ѳ̅	ⰸ	ט	ܛ	ط	თ	Թ
10	ι̅	і̅	ⰺ	י	ܝ	ي	ი	Ժ
20	κ̅	к̅	ⰻ	כ	ܟ	ك	კ	Ի
30	λ̅	л̅	ⰼ	ל	ܠ	ل	ლ	Լ
40	μ̅	м̅	ⰽ	מ	ܡ	م	მ	Խ
50	ν̅	н̅	ⰾ	נ	ܢ	ن	ნ	Ծ
60	ξ̅	ѯ̅	ꙉ.м	ס	ܣ	س	ჲ	Կ
70	ο̅	о̅	ⱀ	ע	ܥ	ع	ო	Հ
80	π̅	п̅	ⱁ	פ	ܦ	ف	პ	Ձ
90	ϙ̅	ү.ч	ⱂ	צ	ܨ	ص	ჟ	Ղ
100	ρ̅	р̅	ⱃ	ק	ܩ	ق	რ	Ճ
200	σ̅	с̅	ⱄ	ר	ܪ	ر	ს	Մ
300	τ̅	т̅	ⱅ	ש	ܫ	ش	ტ	Յ
400	υ̅	ѵ̅	ⱆ	ת	ܬ	ت	ჳ	Ն
500	φ̅	ф̅	ⱇ.ф	תק		ث	ფ	Շ
600	χ̅	х̅	ⱈ	תר		خ	ქ	Ո
700	ψ̅	ѱ̅	ⱉ	תש		ذ	ღ	Չ
800	ω̅	ѡ̅	ⱊ	תת		ض	ყ	Պ
900	ϡ	ц̅	ⱋ	ץ		ظ	შ	Ջ
1000	͵α̅	҂а̅	ⱌ	א̈		غ	ჩ	Ռ
2000	͵β	҂в̅				بغ	ც	Ս
3000	͵γ̅	҂г̅				جغ	ძ	Վ
4000	͵δ̅	҂д̅				دغ	წ	Տ
5000	͵ε̅	҂є̅				هغ	ჭ	Ր
6000	͵ς	҂ѕ̅				وغ	ხ	Ց
7000	͵ζ	҂з̅				زغ	ჴ	Ւ
8000	͵η̅	҂и̅				حغ	ჯ	Փ
9000	͵θ	҂ѳ̅				طغ	ჰ	Ք
10000	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$	Ⓐ				يغ	ჵ	Օ
20000	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$	Ⓑ				كغ		Ֆ

(2-jadval)

TURLI XALQLARNING SON BELGILARI

	Xitoyliklar			Karoshti raqamlari	Kazik g'ori raqamlari	Asteklar raqamlari	Maya qabilasi raqamlari
	Qadimgi	Savdo-sotiqda	Ilmiy				
0		○	○				⬬
1	一	〡	I	I	—	•	•
2	二	〢	II	II	=	••	••
3	三	〣	III	III	≡	∴	•••
4	四	〤	IIII	X	[illegible]	∷	••••
5	五	〥	IIIII	IX	[illegible]	⁙	—
6	六	〦	T	IIX	[illegible]	[illegible]	$\overset{\cdot}{—}$
7	七	〧	╥		7	[illegible]	$\overset{\cdot\cdot}{—}$
8	八	〨	╥╥	XX	[illegible]	[illegible]	$\overset{\cdot\cdot\cdot}{—}$
9	九	〩	╥╥╥		?	[illegible]	$\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{—}$
10	十	十	I○	7	∝; ∝	◇	=
15	十五	十〥	I≡			◇⁙	≡
20	二十	〢十	II○	3	θ	ℙ	
30	三十	〣十	III○			ℙ◇	
40	四十	〤十	IIII○		x	ℙℙ	
50	五十	〥十	IIIII○	733		ℙℙ◇	
60	六十	〦十	T○	333		ℙℙℙ	
70	七十	〧十	╥○	7333	[illegible]	ℙℙℙ◇	
80	八十	〨十	╥╥○			ℙℙℙℙ	
90	九十	〩十	╥╥╥○			ℙℙℙℙ◇	
100	百	百	I○○	⅄I	7	[illegible]	
200	二百	〢百	II○○	?II	7	[illegible]	
400	四百	〤百	IIII○○			[illegible]	
500	五百	〥百	IIIII○○		[illegible]	[illegible]	
1000	千	千	I○○○		9	[illegible]	
8000	八千	〨千	╥╥╥○○○		97	[illegible]	
10000	萬	万	I○○○○				

(3-jadval)

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Араго Ф. Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Том 1,2,3. -ИЖЕВСК: НИЦ, 2000, 496 стр.

2. Abduraxmonov A. *Al-Xorazmiy-buyuk matematik.* T.: «O'qituvchi», 1983. (Kirill yozuvida)

3. Abduraxmonov A. *Maktabda geometriya tarixi.* T.: «O'qituvchi», 1992. (Kirill yozuvida)

4. Abduraxmonov A. *Algebra tarixidan.* T.: «Universitet», 1996. (Kirill yozuvida)

5. Абу Али ибн Сина. *Математические главы «Книги знания».* («Донишнома»), Душанбе, «Ирфон», 1967.

6. Абул Вафо Бузжаний. *Книги о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений.* В книге «Физико-математические науки в странах Востока», Москва, «Наука».

7. Александрова Н. *Математические термины.* Москва, «Высшая школа», 1978.

8. Axmedov S., Otajonova Z., Abduraxmonov A. *Beruniy asarlarida maktabbop masalalar.* T.: «O'qituvchi», 1975. (Kirill yozuvida)

9. Беруний. *Избранные произведения , IV. Книга вразумления начаткам науки о звёздах.* Перевод Б.А.Розенфельда и А.Ахмедова при участии М.М.Рожанской, А.А.Абдурахманова и Н.Д.Сергеевой, Т.: «Фан», 1975.

10. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М., 1963.

11.Beruniy. *Tanlangan asarlar V. «Qonuni Mas'udiy».* Tarjimon A.Rasulov, T.: «Fan», 1973. (Kirill yozuvida)

12.Вашченко-Захарченко М. *История математики. Краткий очерк развития геометрии.* Киев, 1883.

13.Выгодский М. *Арифметика и алгебра в древнем мире.* М.: «Наука», 1967.

14.Гельфанд М., Павлович В. *Внеклассная работа по математике.* М.: «Просвещение», 1965.

15.Глейзер Г. *История математики в школе (IV-VI классы).* Москва, «Просвещение», 1981.

16.Глейзер Г. *История математики в школе (VII-VIII классы).* М.: «Просвещение», 1982.

17.Глейзер Г. *История математики в школе (ШХ-Х классы).* М.: «Просвещение», 1983.

18.Колман Э. *История математики в древности.* Москва, изд. Физико-математической литературы, 1961.

19.Колосов А. *Книга для внеклассного чтения по математике.* М.: «Просвещение», 1983.

20.Матвиевская Г. *Учение о числе на средневековом Востоке.* Т.: «Фан», 1967.

21.Малыгин К. *Элементы историзма в преподавании математики в средней школе.* М.: «Учпедгиз», 1958.

22.Паршин *А.Н.* Путь. Математика и другие миры. М., 2002.

23.Otajonova Z. *Matematika o'qitishda O'rta Osiyolik olimlarning ijodidan foydalanish.* T.: «O'qituvchi», 1981. (Kirill yozuvida)

24.Pogorelov A.V. *Geometriya, 7-11.* T.: «O'qituvchi», 1992.

25.Sidiqov X. *O'rta Osiyo, Yaqin Sharq olimlarining ishlarida geometriya.* T.: «Fan», 1981. (Kirill yozuvida)

26.Sobirov M. *Matematik fanlardan ruscha-o'zbekcha lug'at.* T.: «O'qituvchi», 1983. (Kirill yozuvida)

27.Чистяков Д. *Старинные задачи по элементарной математике.* М.: «Вышейшая школа», 1978.

28.Юшкевич А. *История математики в средние века.* М.: изд. Физико-математической литературы, 1961.

MUNDARIJA

BIRINCHI QISM

BOSHLANG'ICH MATEMATIK TUSHUNCHALAR, ELEMENTAR MATEMATIKA BO'LIMLARINING PAYDO BO'LISHI VA RIVOJLANISHI HAQIDA

IKKINCHI QISM
O'RTA ASRLARDA YASHAGAN ISLOM MAMLAKATLARI BA'ZI MATEMATIKLARINING HAYOTI VA ILMIY FAOLIYATI

A.ABDURAXMONOV, A.NARMONOV, N.NARMURATOV

MATEMATIKA TARIXI

Toshkent – «Fan va texnologiya» – 2016

Muharrir: Sh.Kusherbayeva
Tex. muharrir: M.Holmuhamedov
Musavvir: D.Azizov
Musahhih: N.Hasanova
Kompyuterda sahifalovchi: Sh.Mirqosimova

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Tel: 245-57-63, 245-61-61.
Nashr.lits. AI№149,14.08.09. Bosishga ruxsat etildi: 27.12.2016.
Bichimi 60x84 1/16. «Time Uz» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi. Shartli bosma tabog'i 12,5.
Nashriyot bosma tabog'i 12,75. Tiraji 400. Buyurtma №277.

«Fan va texnologiyalar Markazining
bosmaxonasi»da chop etildi.
100066, Toshkent sh., Olmazor ko'chasi, 171-uy.

ISBN 978-9943-11-351-0

FAN VA TEXNOLOGIYALAR