**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

И.Т. ХАЛДЫБАЕВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(УЧЕБНИК)

Рекомендован по решению Совета ТашГТУ как
учебник для всех направлений технических вузов

Ташкент – 2024

УДК 517
ББ2.1
Б527 К2

Халдыбаева И.Т. Высшая математика: Учебник. Часть 1– Т.: «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi», 2023, 284 стр.

ISBN 978-9943-

Данный учебник предназначен для студентов младших курсов и преподавателей высших технических учебных заведений.

Первая часть учебника, где изложен традиционный курс первого семестра для технических вузов в лекционной форме, содержит в себе следующие разделы высшей математики: линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальные и интегральные исчисления.

УДК 517
ББ2.1

Рецензенты:
А.А. Томскова – (Университет ИНХА в г.Ташкенте) PhD.;
А. Абдукаримов – (ТашГТУ) к.ф.-м.н. проф.

ISBN 978-9943-8530-5-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из фундаментальных предметов, с которым в первую очередь знакомятся студенты высших технических учебных заведений, является предмет «Высшая математика» – основа всех инженерно-технических наук, спец предметов.

Изучение высшей математики заставляет студента мыслить логически, учит применять её при решении прикладных задач, строить математическую модель технических и экономических задач.

Вместе с тем в связи существенным изменением учебных программ для технических вузов и значительным сокращением времени на курс возникает непростая ситуация в преподавании высшей математики. Студентам необходимо передавать информацию в оптимальном и компактном виде. На лекционных занятиях студенты стараются записать конспекты, при этом зачастую не успевают осмыслить пройденного. Выражаю надежду, что этот учебник послужит восстановлению полного смысла лекций, который утрачен при по спешном ее прочтении и дополнению знаний студентов, так как он полностью соответствует нынешней учебной программе.

Для лучшей фиксации внимания читателя новые понятия выделены курсивом.

В процессе работы мне периодически помогали советами сотрудники кафедры «Высшая математика» ТГТУ, Абдукаримов А., Каюмов Ш., Эсонов Э.Э., Таджибаев Б.Р., Юсупов А.

Всем им выражаю искреннюю признательность.

Отдельную благодарность и признательность выражаю профессору МГУ имени Ломоносова и РЭУ имени Г.В. Плеханова в городе Москва Асташовой Ирине Викторовне, профессору университета ИНХА в городе Ташкент Томсковой Анне Анатольевне за бесценную помощь и советы, которыми автор воспользовалась в период подготовки данного учебника.

Автор с благодарностью примет любые замечания и предложения, способствующие улучшению содержания учебника.

ВВЕДЕНИЕ

Цели и задачи изучения дисциплины «Математика»

Цель преподавания математики в техническом вузе – ознакомить студентов с основными идеями и методами высшей математики, а также ознакомить с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач по специальности, как в процессе обучения, так и в дальнейшей практической деятельности. Необходимо прививать студентам навыки самостоятельной работы с учебной и научной литературой по математике и применения получаемых знаний; развивать логическое мышление и повышать уровень математической культуры; вырабатывать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение сформулировать производственно-техническую задачу на математическом языке.

Задача преподавания курса высшей математики состоит в том, чтобы научить студентов:

1. Владеть математическим аппаратом, необходимым для решения задач по специальности;
2. Выбирать и использовать вычислительные методы;
3. Самостоятельно разбираться в математическом аппарате, используемом в структуре по специальности;
4. Математическая постановка простейших задач из области техники и экономики.

Изначально развитие математической науки на Западе начиналось с 650 г. до н. э. до 400 г.н. э. Этот период известен нам открытиями таких знаменитых ученых-математиков, как Фалес, Пифагор, Евклид, Архимед, Жлоудис, Диаппандос, которых называют математиками первого этапа. Математики второго этапа появились, как нам известно, только через 1000 лет. Самыми известными математиками второго этапа считаются Паскаль, Ньютон, Лейбниц, Бернулли и другие.

В то время, когда на Западе (с 400 по 1400 годы) математическая наука, окутанная «черной ночью», где была угроза забвения, пришла в упадок, восточный мусульманский мир в лице таких математиков, как Аль-Хорезми, Фергани, Эль -Рази, Аль-Фараби, Аль- Беруни, Омар Хайям, Табир ибн-и-Хайян, Эс — Суфи, Эль-Фазари, Эль-Гизхери, показали дорогу идущим в своем столетии и на последующие века.

Если говорить о математиках Средней Азии, то необходимо отметить имя Мухамедда Аль-Хорезми (780–850 гг.). Его именем назван термин «алгоритм». Впервые в его научном труде употреблён термин «алгебра».

“Чему мы должны научиться делать, мы учимся, делая.”
Аристотель

ГЛАВА I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Определители

1.1.1 Основные понятия

Пусть заданы числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ (действительные или комплексные). Рассмотрим таблицу чисел, называемую *квадратной матрицей* размеров 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение. Число $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, соответствующее данной таблице чисел, называется *определителем (или детерминантом*) 2-го порядка. В дальнейшем определитель матрицы А будем обозначать $\det(A)$, $\Delta, |A|, \Delta(A)$.

Итак:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Здесь $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – называются *элементами* определителя. Определитель 2-го порядка имеет две строки и два столбца: a_{11}, a_{12} – элементы первой строки, a_{21}, a_{22} – элементы второй строки, a_{11}, a_{21} – элементы первого столбца и a_{12}, a_{22} – элементы второго столбца. Так же определитель имеет две диагонали: a_{11}, a_{22} – элементы *главной* диагонали, a_{12}, a_{21} – элементы *побочной* диагонали.

Пример. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) = 9.$$

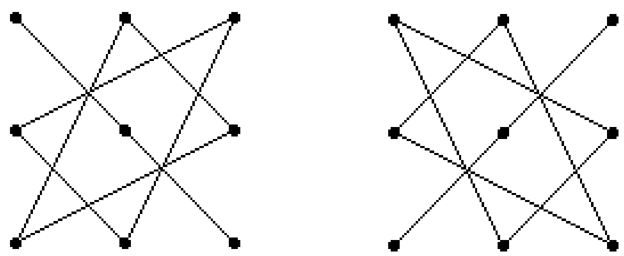
Рассмотрим теперь таблицу чисел, называемую *квадратной матрицей* размеров 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение. Определителем 3-го порядка, соответствующим данной таблице чисел, называется число:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Выражение в правой части получается следующим образом: произведение чисел, расположенных на главной диагонали и два произведения чисел, стоящих на линиях, параллельных главной диагонали на элемент, стоящий в противоположном углу, берутся со знаком плюс. Три произведения, которые строятся по такому же правилу, но относительно побочной диагонали, берутся со знаком минус. Схематически это правило может быть изображено следующим образом:



«+» «-»

Это правило вычисления определителя 3-го порядка называется *«правилом треугольника»*.

Можно вычислить определитель и следующим образом: первый и второй столбцы напишем на месте четвертого и пятого соответственно,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

умножение элементов, стоящих на главной диагонали и на двух других параллельных ей, берем со своими знаками, а параллельные побочной – с противоположными знаками. Это правило вычисления определителя 3-го порядка называется *«правилом Саррюса»*.

Пример. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 9 - 2 + 9 - 1 - 12 = 9.$$

1.1.2 Свойства определителей 3-го порядка.

1. *Транспонирование*, то есть замена строк матрицы со столбцами, не меняет определителя матрицы. Транспонированная матрица обозначается Δ^T.

Доказательство проводится непосредственным вычислением:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

$$\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

Мы видим, что $\Delta = \Delta^T$

2. При перестановке двух строк (или двух столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

Пусть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Δ^1 – определитель, полученный из Δ перестановкой первой и второй строк:

$$\Delta^1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тогда, $\Delta = -\Delta^1$.

Это свойство легко проверяется непосредственным вычислением.

3. Общий множитель элементов какой-либо строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}ka_{13} -$$
$$-ka_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}ka_{11} - ka_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}) =$$
$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. Определитель, у которого все элементы некоторой строки (или столбца) равны нулю, равен 0.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Определитель, имеющий две равные строки (или два равных столбца), равен нулю.

Действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{31} + a_{13}a_{11}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{12}a_{31} - a_{11}a_{13}a_{32} - a_{11}a_{12}a_{33} = 0.$$

Отсюда и из свойства 2 следует требование утверждения.

Для следующих свойств нам понадобятся такие понятия, как минор и алгебраическое дополнение.

Определение. *Минором* определителя третьего порядка, соответствующим некоторому элементу определителя, называется определитель второго порядка, который получится, если вычеркнуть строку и столбец, на пересечении которых стоит данный элемент. Минор, соответствующий элементу a_{ij}, обозначается M_{ij}, где $i, j = \overline{1,3}$.

Например, в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

минор M_{21}, соответствующий элементу a_{21}, будет равен

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32},$$

минор, соответствующий элементу a_{33},

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Определение. *Алгебраическим дополнением* некоторого элемента определителя третьего порядка называется соответствующий ему минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент, чётная, и со знаком минус, если эта сумма – нечетная. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij}.

Таким образом: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Тогда

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -(-5 + 6) = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10.$$

Рассмотрим другие свойства определителей третьего порядка.

6. Сумма произведений элементов некоторой строки (или столбца) на соответствующие алгебраические дополнения равна определителю, а сумма произведений элементов некоторой строки (или столбца) на алгебраические дополнения параллельной строки (или столбца) равна нулю.

Действительно, определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ можно записать в виде:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$
$$-a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) -$$
$$-a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

где $A_{ij} (i, j = \overline{1,3})$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Итак, мы получили, что определитель может быть представлен в виде:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Такое представление называется разложением определителя по элементам первой строки. Аналогичное разложение можно написать по отношению к любой строке или столбцу. Итак, имеет место разложения определителя:

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ по 1-ой строке,
$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ по 2-ой строке,
$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$ по 3-ей строке,
$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ по 1-ому столбцу,

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \text{ по 2-ому столбцу,}$$
$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \text{ по 3-ему столбцу.}$$

Таким образом, определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

Если в определителе Δ – элементы 1-ой строки заменить элементами 2-ой строки, то алгебраические дополнения 1-ой строки не изменятся и мы получим определитель:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}.$$

Но такой определитель будет содержать две одинаковые строки и поэтому по свойству 5 он будет равен нулю:

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0.$$

Аналогично можно получить ряд других равенств, выражающих свойство: сумма произведений элементов некоторой строки (или столбца) на алгебраические дополнения параллельной строки (или столбца) равна нулю.

7. Если элементы некоторой строки (или столбца) представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей: первый из них имеет в указанной строке (или столбце) первые слагаемые, второй – вторые.

Пусть

$$a_{11} = a'_{11} + a''_{11};\ a_{12} = a'_{12} + a''_{12};\ a_{13} = a'_{13} + a''_{13}.$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\Delta = (a'_{11} + a''_{11})A_{11} + (a'_{12} + a''_{12})A_{12} + (a'_{13} + a''_{13})A_{13} =$$
$$= a'_{11}A_{11} + a''_{11}A_{11} + a'_{12}A_{12} + a''_{12}A_{12} + a'_{13}A_{13} + a''_{13}A_{13} =$$
$$= a'_{11}A_{11} + a'_{12}A_{12} + a'_{13}A_{13} + a''_{11}A_{11} + a''_{12}A_{12} + a''_{13}A_{13} =$$
$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторой строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число. Прибавив к элементам второй строки элементы первой, умноженные на k, получим определитель Δ'

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вследствие свойства 7, этот определитель можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\Delta} + k\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\Delta_1} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta.$$

(Определитель $\Delta_1 = 0$, так как имеет две равные строки).

Вышеперечисленные свойства верны для определителей любого порядка.

1.1.3 Определители n-го порядка.

Определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

можно вычислить с помощью разложения по строке или по столбцу.

Например, определитель четвертого порядка есть число, получающееся следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Определители 3-го порядка в правой части равенства – это алгебраические дополнения элементов a_{11}, a_{12}, a_{13} и a_{14}. Аналогично можно записать разложение определителя 4-го порядка по элементам любой строки и столбца.

На практике, используя свойство 8, преобразуют определитель к такому виду, чтобы все элементы некоторой строки или столбца, кроме одного, обратились в нуль. Затем определитель разлагается по элементам этой строки или столбца.

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Получим нули в первой строке. Элементы третьего столбца умножим на один и попарно складываем со вторым, затем умножая на (-2), складываем с первым. Затем разложим данный определитель по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -9 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 7 - 81 - 9 + 84 + 3 = 0.$$

1.2. Матрицы

1.2.1. Основные понятия

Определение. Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m-строк и n-столбцов, называется *прямоугольной матрицей* размеров $m \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа $a_{ij}(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ называются *элементами* матрицы.

Матрицы обозначаются одной заглавной буквой, например:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица, число строк которой равно числу её столбцов, называется *квадратной*. Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица размеров 2×2.

Матрицу, имеющую одну строку, называют *матрицей-строкой*, матрицу, имеющую один столбец, называют *матрицей-столбцом*.

Так, матрица $(1 \quad 3 \quad 4)$ – матрица-строка,

а матрица $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

Матрица, все элементы которой равны 0, называется *0-матрицей*.

Для квадратной матрицы можно вычислить её определитель. Если А – квадратная матрица,

$$\mathrm{A} \ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то определитель этой матрицы – это определитель:

$$\det(\mathrm{A}) = |A| \ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Матрица, определитель которой отличен от нуля, называется *невырожденной*. Если же определитель матрицы равен нулю, то матрица называется *вырожденной*.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ вырожденная, так как определитель этой матрицы: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Две матрицы А и В называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны.

Для матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ выполняется $A=B$, если:

$$a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{12}, a_{13} = b_{13}, a_{21} = b_{21},$$
$$a_{22} = b_{22},\ a_{23} = b_{23} \text{ и т.д.}$$

Квадратная матрица вида $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется *единичной матрицей размеров* 2×2, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – *единичная матрица размеров* 3×3, и так далее. Легко проверить, что $\Delta(E) = 1$.

1.2.2. Действия над матрицами.

Умножением матрицы А на число α называется матрица, все элементы которой умножены на заданное число.

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, то матрица αA определяется так:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \end{pmatrix}.$$

Суммой двух матриц А и В одинаковых размеров называется матрица, элементы которой равны сумме соответствующих элементов А и B. Если

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}.$$

Если *0* – нуль матрица, то для любой матрицы А:

$$A + 0 = A.$$

Сложение матриц имеет следующие свойства:

1) $A + B = B + A$ (*коммутативность*),

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$(*ассоциативность*).

Произведением матрицы А размеров $m \times k$ на матрицу B размеров $k \times n$ называется такая матрица C размеров $m \times n$, что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ik}b_{kj},$$

где $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Пусть: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$.

Тогда произведение матриц А и B определяется следующим образом:

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что можно перемножать такие матрицы А и B, что число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти произведение матриц АB.

Решение. Найдем произведение матриц АB.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Пример. Пусть А $= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, В $= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти произведение матриц АB и BА.

Решение. Найдем произведение матриц АB и BА.

$$\text{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 14 \\ -5 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что произведение А$B \neq B$А, то есть произведение матриц не подчиняется переместительному закону.

Умножение матриц подчиняется распределительному закону умножения относительно сложения:

$$(A + B)C = AC + BC,$$

или

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Легко проверить, что произведение любой квадратной матрицы A на единичную матрицу равно матрице A:

$$AE = EA = A.$$

Для операции транспонирования верны свойства:

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$
$$(AB)^T = B^T A^T.$$

1.2.3. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица, $\det A \neq 0$.

Определение. Матрица B называется *обратной* к матрице A, если:

$$AB = BA = E.$$

Матрица, обратная к матрице A, обозначается A^{-1}, то есть:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Покажем, что если $\det(A) \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Для определенности рассмотрим квадратную матрицу A размеров 3×3. Пусть A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}. Покажем, что обратная матрица имеет вид:

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Найдем произведение:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица A^{-1} имеет вид (2.1).
Свойства обратной матрицы:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$
$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Найти обратную матрицу A^{-1}.
Решение. Найдем определитель матрицы A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 + 3 + 12 = 21 \neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$
$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10,$$
$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$
$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{-10}{21} & \frac{-13}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{-1}{21} & \frac{-1}{21} & \frac{5}{21} \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение AA^{-1}:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{-10}{21} & \frac{-13}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{-1}{21} & \frac{-1}{21} & \frac{5}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

1.2.4. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу A размеров $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выделим в ней k строк и k столбцов, где $k \leq \min(m, n)$. Элементы, находящиеся на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют определитель k-того порядка. Этот определитель называется *минором* заданной матрицы k-того порядка. Таких миноров в матрице несколько, в частности, матрица размеров 3×4 имеет 4 минора третьего порядка и 18 миноров второго порядка. Здесь некоторые миноры могут быть отличным от нуля, некоторые равны нулю.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица имеет четыре минора третьего порядка: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0;$ $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Как видим, они все равны нулю. Но существует минор 2-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

Определение. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом* матрицы. Ранг матрицы обозначается $\boldsymbol{rang\ A}$.

Очевидно, что ранг матрицы не больше наименьшего числа строк или столбцов матрицы.

Прежде чем описать свойства ранга матрицы, введём понятия элементарных преобразований матрицы.

Элементарными преобразованиями матриц называются:

1. Перестановка местами двух строк (или столбцов) матрицы.
2. Умножение на число, отличное от нуля, строки или столбца.
3. Прибавление некоторой строки (или столбца) к другой, умноженной на одно и то же число.

Матрицы А и В называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой на главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такая матрица называется *канонической*.

Свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы её ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы строку или столбец, состоящих только из нулей, то ранг не изменится.
3. При элементарных преобразованиях ранг не меняется.
4. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали.

Пример: Найти ранг матрицы $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&5&3&2\\0&1&0&2&4\\0&0&-7&1&12\\0&0&-9&-2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&5&2\\0&1&2&0&4\\0&0&1&-7&12\\0&0&-2&-9&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&5&2\\0&1&2&0&4\\0&0&1&-7&12\\0&0&0&-23&24\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&5&2\\0&1&2&0&4\\0&0&1&-7&12\\0&0&0&1&\frac{-24}{23}\end{pmatrix}$$

Таким образом, $\mathbf{rang\,A=4}$.

1.3. Системы линейных уравнений

1.3.1. Основные понятия

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

где числа $a_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ называются коэффициентами системы, числа b_i – свободными членами. *Решением* системы называются значения $x_j=c_j, j=\overline{1,n},$ при подстановке которых все уравнения обращаются в верные равенства. Вводя обозначения

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_m\end{pmatrix},$$

можно записать систему в матричной форме $AX = B$. Здесь A– называется матрицей системы, B – столбцом свободных членов и X – столбцом неизвестных.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется *определенной,* если она имеет единственное решение, *неопределенной*, если имеет более одного решения. Совокупность всех решений называется *общим решением*. Две системы называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же общее решение. Эквивалентные системы получаются при элементарных преобразованиях над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Наряду с матрицей A рассматривается так называемая *расширенная матрица*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\, b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\, b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\, b_m \end{pmatrix}.$$

На совместность системы отвечает следующая теорема.

Теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система линейных уравнений $\boldsymbol{AX = B}$ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы.

Доказательство. **Необходимость**. Пусть система совместна, тогда существует решение $x_j = c_j, j = \overline{1, n}$, удовлетворяющее системе. В расширенной матрице из последнего столбца вычитаем первый столбец, умножая на c_1, потом второй столбец, умножая на c_2 и т.д. n– ный столбец, умножая на c_n. Получим эквивалентную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что ранги двух матриц равны, так как убирая последний столбец, получим основную матрицу.

Достаточность. Пусть ранги двух матриц равны. $rang\ A = rang\ \tilde{A} = r$. Пусть ненулевой минор r-го порядка матрицы A расположен в левом верхнем углу, если нет, то этого можно достичь с помощью элементарных преобразований. Этот минор относится и к матрице $\tilde{A}$ тоже. Тогда $r + i$ (где $i \geq 1$)-тые строки матриц состоят из линейной комбинации начальных r–строк. Значит, если некоторые значения неизвестных удовлетворяют начальным r уравнениям, то удовлетворяют и следующим $r + i$ (где $i \geq 1$) уравнениям тоже. Поэтому можно опустить $r + i$ (где $i \geq 1$) уравнений из системы.

Рассмотрим два случая: 1) Пусть $r = n$, тогда число уравнений равно числу неизвестных, определитель отличен от нуля, значит, система имеет единственное решение. 2) Пусть $r < n$, тогда число уравнений меньше числа неизвестных. $r + i$ (где $i \geq 1$)-тых неизвестных можно перевести на правую сторону, давая им произвольные значения, можем найти начальных r неизвестных. В этом случае система имеет бесконечное число решения.

Следствие 1. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Следствие 2. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное число решения.

Следствие 3. Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ является *тривиальным* решением системы.

Пример. Исследовать следующую систему уравнений на совместность

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранги матриц A и $\tilde{A}$, производя элементарные преобразования над ними.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & 5 & -1 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$= \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$rang(A) = 2,$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Будем выполнять те же элементарные преобразования над матрицей $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6\\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10\\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$rang(\tilde{A}) = 2 \text{ Итак, } rang(A) = rang(\tilde{A}).$$

Следовательно, данная система уравнений совместна и имеет бесконечное множество решений $\mathrm{rang}\ (\mathrm{A}) = \mathrm{rang}\ (\widetilde{\mathrm{A}}) = 2 < 4$ (4 – число неизвестных).

1.3.2. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

и матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства матриц, можем записать данную систему в виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, данная система может быть записана в виде:

$$AX = B$$

Это уравнение называется *матричным уравнением*. Если матрица A – невырожденная, то есть $\det(A) \neq 0$, тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части матричного уравнения на A^{-1} с левой стороны.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1} \cdot B.$$

Используя сочетательный закон, мы можем написать:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как $A^{-1}A = E$ и $EX = X$, то получим решение матричного уравнения в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

1.3.3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Матричное равенство $X = A^{-1} \cdot B$ запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$
$$x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$
$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель Δx_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца на свободные члены. Таким образом $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$. Аналогично находятся $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$, где Δx_i получен из Δ путем замены i-ого столбца на свободные члены.

Формулы $x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, i = \overline{1, n}$ называются формулами *Крамера*.

Пример. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$$

Решение: В этой системе $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 2 - 9 - 4 - 2 = -8,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 32 - 2 - 24 - 4 - 4 = -8,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 16 + 6 - 16 - 4 = -16,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24 + 4 + 12 + 18 - 2 - 32 = -24,$$

$$x = \frac{-8}{-8} = 1, y = \frac{-16}{-8} = 2, z = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Методом Крамера можно решать системы n линейных уравнений с n-неизвестными, когда определитель системы не равен нулю.

Если главный определитель равен нулю, но хотя бы один из определителей $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ отличен от нуля, то система не имеет решений.

Если $\Delta = 0, \Delta x_1 = 0, \Delta x_2 = 0, \ldots, \Delta x_n = 0$, то система имеет бесконечное множество решений.

1.3.4 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Рассмотрим систему m-линейных уравнений с n-неизвестными $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Ранее было известно, что системы уравнений, имеющие одинаковые решения, называются *эквивалентными*.

Нетрудно заметить, что следующие преобразования приводят данную систему к эквивалентной:

1. Перемена местами любых двух уравнений.
2. Умножение обеих частей уравнения на одно и то же, не равное нулю, число.
3. Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число.

Эти преобразования называются *элементарными преобразованиями* системы.

Заметим, что элементарные преобразования можно производить над расширенной матрицей системы.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Перестановкой строк можно добиться того, что элемент, стоящий в левом верхнем углу матрицы $\widetilde{A}$, отличен от нуля.

Разделим первую строку матрицы $\tilde{A}$ на a_{11}:

$$\tilde{A} \approx \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}.$$

Из второй строки вычтем первую, умноженную на a'_{21}, из третьей строки вычтем первую, умноженную на a'_{31} и т. д., из m-той строки вычтем первую строку, умноженную на a'_{m1}, в результате чего получим матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a''_{m2} & \cdots & a''_{mn} & b''_m \end{pmatrix}.$$

С матрицей $A_1 = \begin{pmatrix} a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ a''_{32} & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} & b''_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{m2} & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} & b''_m \end{pmatrix}$ произведем преобразования, аналогичные проделанным выше.

Продолжая процесс, мы приведем матрицу $\widetilde{A}$ к одному из следующих видов:

1. $\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots & 1 & \cdots & c_{pn} & \cdots d_p \end{pmatrix}$ – ступенчатая матрица

(p$<n$) или

2. $\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \end{pmatrix}$ – треугольная матрица.

Исходная система приведется к эквивалентной системе:

В случае (1) к виду: $\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 \cdots + c_{1n}x_n = d_{1,} \\ x_2 + c_{23}x_3 \cdots + c_{2n}x_n = d_{2,} \\ \qquad x_3 \cdots + c_{3n}x_n = d_{3,} \\ \qquad \cdots \\ \qquad x_p \cdots + c_{3n}x_n = d_p. \end{cases}$

В случае (2) к виду: $\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 \cdots + c_{1n}x_n = d_{1,} \\ x_2 + c_{23}x_3 \cdots + c_{2n}x_n = d_{2,} \\ \qquad x_3 \cdots + c_{3n}x_n = d_{3,} \\ \qquad \cdots \\ \qquad x_n = d_p. \end{cases}$

В первом случае система имеет бесчисленное множество решений, во втором – единственное решение.

Таким образом, если после элементарных преобразований система уравнений приводится к системе с матрицей ступенчатого вида, то это означает, что данная система совместна и имеет бесконечное множество решений; если же данная система уравнений приводит к системе с треугольной матрицей, то она совместна и имеет единственное решение.

А если же в процессе получится строка, все элементы которой равны нулю, кроме последней, то есть правой части уравнения, система не имеет решения.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Произведем элементарные преобразования над расширенной матрицей системы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 5 & -8 & -14\\ 0 & 3 & -5 & -9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & -5 & -9\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Этой матрице соответствует система

$$\begin{cases}x_1 - x_2 + 2x_3 = 5,\\ x_2 - 2x_3 = -4,\\ x_3 = 3.\end{cases}\quad\begin{cases}x_3 = 3,\\ x_2 = 2x_3 - 4 = 2,\\ x_1 = x_2 - 2x_3 + 5 = 1.\end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 1, x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

1.3.5. Система линейных однородных уравнений

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0.\end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, она имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Из вышеуказанных свойств вытекает следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы система имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был меньше числа неизвестных. В этом случае система имеет бесконечное множество ненулевых решений.

Пример. Решить систему $\begin{cases}x_1 + x_2 - 3x_3 = 0,\\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0.\end{cases}$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, rang\, A = 2.$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$

Система имеет бесконечное множество решений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3x_3, \\ x_1 - 2x_2 = x_3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3x_3, \\ \quad 3x_2 = 2x_3. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{7x_3}{3}, x_2 = \frac{2x_3}{3}, x_3 = x_3.$$

Это *общее* решение. Если положим $x_3 = 3$, то $x_1 = 7, x_2 = 2$, то тогда получим *частное* решение.

1.4. Применение линейной алгебры в экономике

В современной экономике используется множество математических методов, разработанных ещё в 20 веке. Применение линейной алгебры значительно упростило решение многих экономических задач. Покажем основные способы решения задач с помощью элементов линейной алгебры.

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеют большое значение для экономистов, основная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в простой и компактной матричной форме. С помощью матриц удобно описывать различные экономические закономерности.

Например, дана следующая таблица средних розничных цен на автомобили в зависимости от срока их службы (условных единиц).

Таблица 1.1

Продолжительность службы (годы)	Годы		
	2021	2022	2023
1	1881	2120	2445
2	1512	1676	1825
3	1261	1397	1484
4	1054	1144	1218

Предложенную таблицу можно записать в виде матрицы следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1881 & 2120 & 2445 \\ 1512 & 1676 & 1825 \\ 1261 & 1397 & 1484 \\ 1054 & 1144 & 1218 \end{pmatrix},$$

где содержательное значение каждого показателя определяется его местом в матрице. К примеру, число 1825 во второй строке третьего столбца представляет собой цену прослужившего 2 года автомобиля в 2023 году. Аналогичным образом находим, что числа, записанные в строку, характеризуют цены автомобилей, прослуживших один и тот же срок в различные годы, а числа в столбце – цены автомобилей различного срока службы в данном году.

Таким образом, место, занимаемое числом в матрице, характеризует продолжительность использования автомобиля и год, к которому относится цена.

Рассмотрим задачи:

Задача 1. Из определенного листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа A, 300 заготовок типа B и 675 заготовок типа C. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Таблица 1.2

Тип заготовки	Способ раскроя		
	1	**2**	**3**
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Записать в математической форме условия выполнения задания.

Решение: Обозначим через x, y, z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя x листов будет получено $3x$ заготовок типа A, при втором – $2y$, при третьем – z. Для полного выполнения задания по заготовкам типа А должно выполняться равенство:

$$3x + 2y + z = 360.$$

Таким же способом получаем уравнения:

$$x + 6y + 2z = 300,$$
$$4x + y + 5z = 675.$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360 \\ x + 6y + 2z = 300 \\ 4x + y + 5z = 675. \end{cases}$$

Данным уравнениям должны удовлетворять неизвестные x, y, z для того, чтобы выполнить задание по заготовкам A, B, C. Полученная система линейных уравнений и выражает в математической форме условия выполнения всего задания по заготовкам A, B, C.

Решим систему методом Гаусса.

1. Запишем систему в виде матрицы.
2. Составим расширенную матрицу системы.
3. Приведём полученную матрицу к треугольному виду.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 360 \\ 1 & 6 & 2 & 300 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 3 & 2 & 1 & 360 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -16 & -5 & -540 \\ 0 & -7 & 2 & 15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & -14 & 4 & 30 \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 0 & -67 & -4020 \end{pmatrix}$$

Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = 300 \\ 2y + 9z = 570 \\ -67z = -4020. \end{cases}$$

Решая полученную систему, имеем: $x = 90, y = 15, z = 60$.

Вывод: $(90, 15, 60)$ – есть решение системы.

Задача 2: В таблице приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, в условной денежной единице.

Таблица 1.3

Отрасль		**Потребление**		**Конечный продукт**
		Промышленность	**Сельское хозяйство**	
Производство	Промышленность	0,3	0,2	300
	Сельское хозяйство	0,15	0,1	100

Найти: плановые объёмы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей.

Решение:

1. Выпишем матрицу коэффициентов прямых затрат A, вектор конечной продукции Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрица A продуктивна, так как её элементы положительны и сумма элементов в каждом столбце меньше единицы.

2. Найдем матрицу

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}15 & 1 - 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}15 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица полных затрат:

$$S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}33 \\ 0{,}25 & 1{,}17 \end{pmatrix}$$

3. По формуле $X = (E - A)^{-1} \cdot Y = S \cdot Y$ найдем вектор валового продукта X:

$$X = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}33 \\ 0{,}25 & 1{,}17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 483 \\ 192 \end{pmatrix}$$

4. Межотраслевые поставки x_{ij} найдём по формуле

$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_i$

$$x_{11} = 0{,}3 \cdot 483 = 144{,}9$$
$$x_{12} = 0{,}2 \cdot 192 = 38{,}4$$
$$x_{21} = 0{,}15 \cdot 483 = 72{,}45$$

$$x_{22} = 0{,}1 \cdot 192 = 19{,}2.$$

5. Чистая продукция промышленности равна: $483 - 144{,}9 - 72{,}45 = 265{,}65$

Чистая продукция сельского хозяйства: $192 - 38{,}4 - 19{,}2 = 134{,}4$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется определителем второго порядка?
2. Что называется определителем третьего порядка?
3. Что называется определителем высших порядков?
4. Свойства определителей.
5. Что такое минор?
6. Что такое алгебраическое дополнение?
7. Дать определение матрицы.
8. Дать определение транспонированной матрицы.
9. Что такое квадратная матрица?
10. Какие матрицы можно суммировать?
11. Как перемножить две матрицы?
12. Определение и условие существования обратной матрицы.
13. Ранг матрицы.
14. Метод Крамера для систем линейных уравнений.
15. Метод Гаусса для систем линейных уравнений.
16. Метод обратной матрицы для систем линейных уравнений.

“Я принужден сознаться, что положительно
не способен сделать без ошибки сложение.”
Анри Пуанкаре

ГЛАВА II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Векторы и линейные операции над ними

2.1.1. Основные понятия

Величины, встречающиеся при изучении физических, химических и других явлений, можно разделить на два класса. *Скалярные* величины – это те, которые определяются одним числовым значением. Например, объем, масса, температура, плотность и другие. *Векторные* величины определяются не только числовым значением, но и направлением. Примерами векторных величин могут быть скорость, ускорение, сила, напряжение и другие. Векторные величины в математике изображаются с помощью вектора.

Определение. Направленный отрезок прямой называется *вектором*. Вектор обозначается: $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и т.д. A – начало. B, C – конец. Длина вектора называется его *модулем* и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|, |\vec{a}|$. Вектор, начало которого совпадает с его концом, называется *нулевым* вектором и обозначается символом $\vec{o}$. Нулевой вектор не имеет направления.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает направлением вектора $\vec{a}$, называется *ортом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^0$.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они имеют одинаковые модули и одинаковое направление. В этом случае пишут $\vec{a} = \vec{b}$.

Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются *компланарными.* Заметим, что два вектора всегда компланарны.

2.1.2. Линейные операции над векторами

Операции сложения и вычитания векторов и умножение на число, называются *линейными операциями* над векторами.

Умножение вектора на число. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{c} = \lambda\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $\overrightarrow{|c|} = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и направленный в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. Так, например, $2\vec{a}$ есть вектор, направленный в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, и имеющий длину, вдвое большую, чем вектор $\vec{a}$. Вектор $-\frac{1}{2}\vec{a}$ есть вектор, направленный противоположно вектору $\vec{a}$ и имеющий вдвое меньшую длину, чем вектор $\vec{a}$.

Умножение вектора на число подчиняется распределительному и сочетательному законам:

$$\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b},$$
$$(\lambda_1\lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2\vec{a}).$$

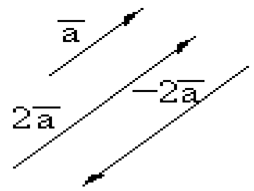


Рис. 2.1.

Сложение векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, затем построим вектор, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, поместив его начало в конце вектора $\vec{a}$.

Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого с концом второго, называется *суммой* этих векторов и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$. Ту же самую сумму векторов можно получить иным способом. Отложим от точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$. Построим на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм $OABC$.

Вектор $\overrightarrow{OB}$, служащий диагональю параллелограмма, является, очевидно, суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

Сумма двух векторов подчиняется переместительному закону:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Это видно из рисунка:

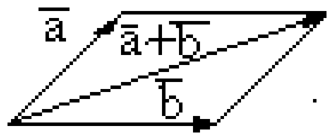


Рис 2.2.

Понятие суммы векторов можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых. Из произвольной точки O откладываем вектор, равный первому слагаемому. В конце первого вектора помещаем начало второго, в конце второго – начало третьего и так далее. Вектор, соединяющий начало первого с концом последнего, является суммой данных векторов.

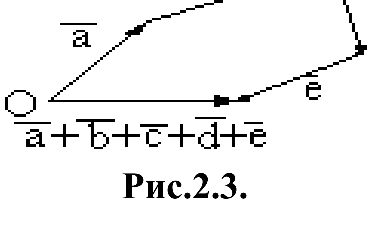


Рис.2.3.

Нетрудно видеть, что сложение векторов подчиняется сочетательному закону:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

Вычитание векторов. *Разностью* $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Из определения сложения векторов вытекает правило построения вектора-разности. Откладываем векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ из общей точки O. Вектор $\overrightarrow{BA}$, направленный от конца $\vec{b}$ к концу $\vec{a}$, является разностью векторов.

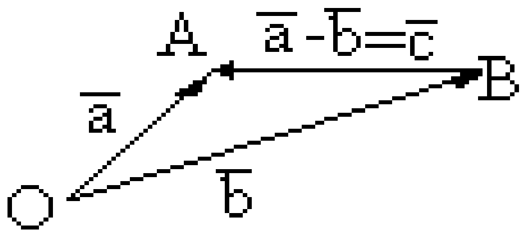


Рис 2.4.

Если на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных из общей точки O построить параллелограмм $OACB$, то вектор $\overrightarrow{OC}$, совпадающий с одной диагональю параллелограмма, равен сумме $\vec{a}+\vec{b}$, а вектор $\overrightarrow{BA}$ совпадающий с другой диагональю – разности $\vec{a}-\vec{b}$.

2.1.3. Проекция вектора на ось

Пусть l – произвольная ось, $\overrightarrow{AB}$ – вектор на плоскости. Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось l. A' – проекция точки A, B' – проекция точки B на ось l. Пусть x_1 – координата точки A', x_2 – координата точки B'.

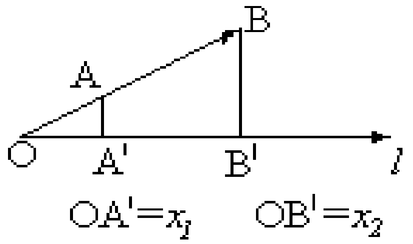


Рис. 2.5.

Разность $x = x_2 - x_1$ между координатами проекций конца и начала вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется *проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на эту ось. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ образует острый угол φ с осью l, то проекция x положительна, если же этот угол тупой, то проекция отрицательна.

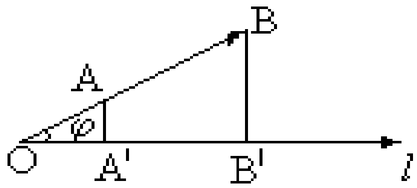


Рис. 2.6.

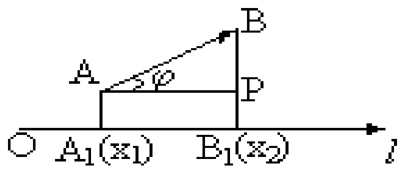


Рис. 2.7.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначается $np_l\overrightarrow{AB}$.

Нетрудно видеть, что $np_l\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot cos\varphi$.

Приведем некоторые свойства проекций:

Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций

$$np_l\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}.$$

При умножении вектора на число его проекция на данную ось умножается на это число

$$np_l(\lambda\vec{a}) = \lambda np_l\vec{a}.$$

Теперь определим направляющие косинусы вектора.

Пусть $\vec{a}$ – вектор в пространстве, начало которого совпадает с началом декартовой системы координат. Пусть α, β, γ – углы, образуемые вектором $\vec{a}$ с координатными осями $Ox,\ Oy,\ Oz$ соответственно. Косинусы углов, образуемых вектором с осями координат, называются *направляющими косинусами* этого вектора.

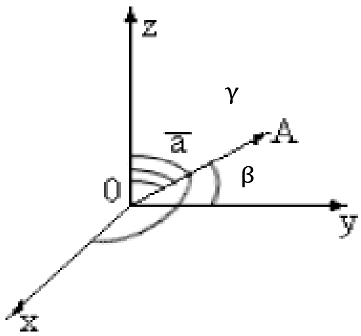


Рис. 2.8.

Обозначим проекцию вектора $\vec{a}$ на ось Ox через X, на ось Oy – через Y, на ось Oz – через Z.

Тогда, как известно $X = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha,\ Y = |\vec{a}| \cdot cos\beta,\ Z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$, откуда мы находим направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{Y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|}.$$

Нетрудно видеть, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Заметим, что проекции единичного вектора $\vec{a}$ ($|\vec{a}| = 1$) совпадают с его направляющими косинусами. $X = cos\alpha, Y = cos\beta, Z = cos\gamma$.

2.1.4. Действия над векторами, заданными в координатной форме

Пусть $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k}$ – единичные векторы, направленные по осям декартовой прямоугольной системы координат; $\vec{a}$ – произвольный вектор в пространстве.

Пусть начало этого вектора совпадает с началом координат. Построим параллелепипед, диагональю которого является вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

Вектор

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM},$$
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath},$$
$$\vec{a} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k},$$

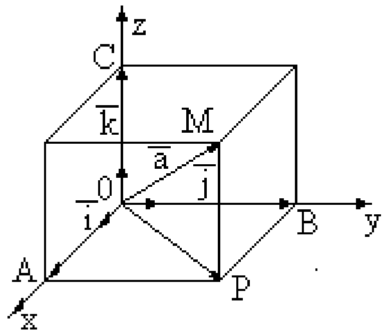


Рис. 2.9.

X, Y, Z – проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz.

Пусть дан вектор $\vec{a} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$, тогда $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot X\vec{\imath} + \alpha \cdot Y\vec{\jmath} + \alpha \cdot Z\vec{k}$. Таким образом, при умножении вектора на число, все его проекции умножаются на это число.

Пусть $\vec{a} = X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{\jmath} + Z_1\vec{k}$, $\quad \vec{b} = X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{\jmath} + Z_2\vec{k}$,
тогда $\quad \vec{a} \pm \vec{b} = (X_1 \pm X_2)\vec{\imath} + (Y_1 \pm Y_2)\vec{\jmath} + (Z_1 \pm Z_2)\vec{k}$.

Таким образом, при сложении векторов соответствующие проекции складываются, при вычитании векторов соответствующие проекции вычитаются. Зная проекции вектора, легко найти выражение для его длины. Так как вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ является диагональю параллелепипеда, то мы можем написать, что

$$|\vec{a}| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OC}\right|^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Таким образом, модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.

Рассмотрим теперь вектор $\overrightarrow{AB}$, начало которого A имеет координаты x_1, y_1, z_1, а конец B имеет координаты x_2, y_2, z_2, т.е. $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$.

Вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

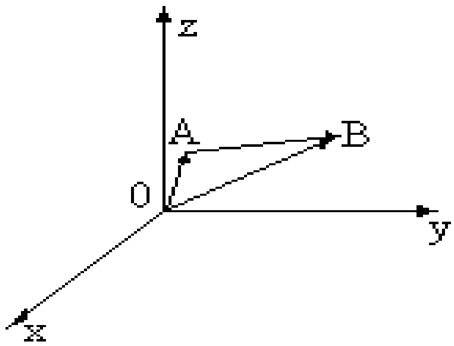


Рис. 2.10.

Но при вычитании векторов соответствующие проекции вычитаются, т.е. $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, (проекции векторов на координатные оси пишем в фигурных скобках, чтобы отделить от точки. А координаты точки пишем в обычных скобках).

Тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Пусть в пространстве даны две точки
$A_1(x_1, y_1, z_1)$; $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Расстояние d между точками A_1 и A_2 находится как модуль вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Итак, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2.1.5. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны 2 точки $A(x_1, y_1,\ z_1)$ и $B(x_2, y_2,\ z_2)$ и точка C на отрезке AB, такая что $\frac{AC}{CB} = \lambda$, т.е. точка C делит отрезок AB в отношении λ.

Требуется найти координаты x, y, z точки C. Очевидно, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

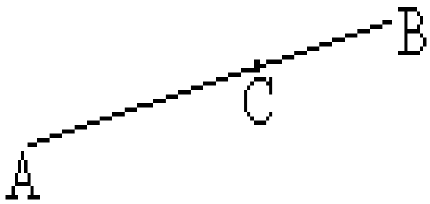


Рис. 2.11.

Найдем

$$\overrightarrow{AC} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \qquad \overrightarrow{CB} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\},$$
$$\{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} = \{\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y), \lambda(z_2 - z)\}.$$

Из равенства векторов следует равенство соответствующих проекций

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y\ , \\ z - z_1 = \lambda z_2 - \lambda z, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2, \\ y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2, \\ z + \lambda z = z_1 + \lambda z_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ – точки на плоскости, то для координат точки C имеют место формулы

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Если C является серединой отрезка AB ($\lambda = 1$), то координаты точки C вычисляются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Аналогично, если точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – точки в пространстве, то для координат точки C имеют место формулы

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Пример. Даны точки $A(3, -1, 2)$, $B(-4, 2, 0)$. Найти координаты точки $C(x, y, z)$, делящей отрезок AB в отношении 3:1.

Решение. $\lambda = \frac{AC}{CB} = 3$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \dfrac{3 + 3(-4)}{1 + 3} = -\dfrac{9}{4}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \dfrac{-1 + 3 \cdot 2}{1 + 3} = \dfrac{5}{4}, \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} = \dfrac{2 + 3 \cdot 0}{1 + 3} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, $C\left(-\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

2.2. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов

2.2.1. Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

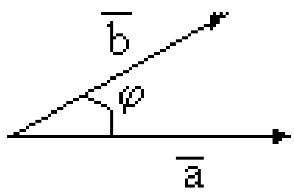


Рис. 2.12.

Итак $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$.

Рассмотрим физическую задачу, решение которой приводит к вычислению скалярного произведения векторов.

Пусть материальная точка M движется по прямой от точки A до точки B. Путь, проходимый при этом, равен S. Допустим, что на точку M действует постоянная по величине и направлению сила F под углом φ к направлению перемещения. Тогда работа $A = FS\cos\varphi = (\vec{F}, \vec{S})$.

Таким образом, работа постоянной силы на прямолинейном участке равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Можно придать формуле для скалярного произведения другой вид.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$

$$|\vec{b}| \cos\varphi = np_a\vec{b} \qquad |\vec{a}| \cos\varphi = np_b\vec{a}$$

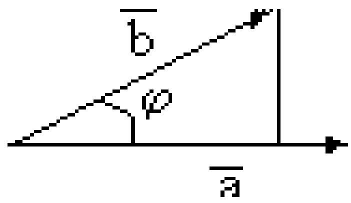


Рис. 2.13.

Следовательно, $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|np_a\vec{b} = |\vec{b}|np_b\vec{a},$ т.е. скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного вектора, умноженному на проекцию другого на направление первого.

Рассмотрим основные *свойства* скалярного произведения:

1. Скалярное произведение векторов обладает переместительным свойством

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a}).$$

2. Скалярное произведение векторов обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя

$$(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b}).$$

3. Скалярное произведение суммы двух векторов на третий вычисляется как

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}).$$

4. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы взаимно перпендикулярны.

5. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$, т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

Пример. Дан вектор $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, причем $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 2$; $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 60^{\circ}$. Найти $|\vec{c}|$.

Решение.

$$|\vec{c}|^2 = \left(\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}\right) = (\vec{a}, \vec{a}) - 4\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + 4\left(\vec{b}, \vec{b}\right) =$$
$$= |\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi + 4\left|\vec{b}\right|^2 = 9 - 12 + 16 = 13.$$

Следовательно, $|\vec{c}| = \sqrt{13}$.

Пусть даны два вектора $\vec{a} = X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{\jmath} + Z_1\vec{k}$, и $\vec{b} = X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{\jmath} + Z_2\vec{k}$, тогда

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{\jmath} + Z_1\vec{k}\right)\left(X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{\jmath} + Z_2\vec{k}\right) =$$
$$X_1X_2(\vec{\imath}, \vec{\imath}) + X_1Y_2(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) + X_1Z_2\left(\vec{\imath}, \vec{k}\right) + Y_1X_2(\vec{\jmath}, \vec{\imath}) +$$
$$+Y_1Y_2(\vec{\jmath}, \vec{\jmath}) + Y_1Z_2\left(\vec{\jmath}, \vec{k}\right) + Z_1X_2\left(\vec{k}, \vec{\imath}\right) + Z_1Y_2\left(\vec{k}, \vec{\jmath}\right) + Z_1Z_1\left(\vec{k}, \vec{k}\right).$$

Заметим теперь, что $(\vec{\imath}, \vec{\imath}) = |\vec{\imath}|^2 = 1$, $(\vec{\jmath}, \vec{\jmath}) = |\vec{\jmath}|^2 = 1, (\vec{k}, \vec{k}) = \left|\vec{k}\right|^2 = 1$. Так как векторы $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ взаимно перпендикулярны, по свойству 4

$$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = (\vec{\jmath}, \vec{\imath}) = \left(\vec{\imath}, \vec{k}\right) = \left(\vec{k}, \vec{\imath}\right) = \left(\vec{\jmath}, \vec{k}\right) = \left(\vec{k}, \vec{\jmath}\right) = 0.$$

Тогда для скалярного произведения имеем

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} = \{1, 0, 1\}, \vec{b} = \{2, -1, 3\}$.

Решение. Найдем вектор $\vec{c} = \{2, 0, 2\} - \{2, -1, 3\} = \{0, 1, -1\}$ и вектор $\vec{d} = \{1, 0, 1\} + \{6, -3, 9\} = \{7, -3, 10\}$. Скалярное произведение

$(\vec{c}, \vec{d}) = 0 \cdot 7 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 10 = -13.$

Пример 2. Даны векторы $\vec{a} = \{1,3,2\}$, $\vec{b} = \{-4,0,3\}$. Найти $np_b\vec{a}$

Решение.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1(-4) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 2,$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2} = 5,$$
$$np_b\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{2}{5}.$$

По определению скалярное произведение

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$. Из этой формулы

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Если

$$\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k},$$

то

$$cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos\varphi = 0$.

Следовательно, условие перпендикулярности двух векторов имеет вид:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Пример. Являются ли векторы $\vec{a} = \{3, 2, -1\}$, $\vec{b} = \{1, -3, -3\}$ перпендикулярными?

Решение. Проверим, выполняется ли условие перпендикулярности:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$
$$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-3) = 0.$$

Значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны, если $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, где α – любое действительное число.

Если $\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$, $\vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$, то

$$\{X_1, Y_1, Z_1\} = \{\alpha X_2, \alpha Y_2, \alpha Z_2\}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$X_1 = \alpha X_2, Y_1 = \alpha Y_2, Z_1 = \alpha Z_2,$$
$$\frac{X_1}{X_2} = \alpha, \frac{Y_1}{Y_2} = \alpha, \frac{Z_1}{Z_2} = \alpha.$$

Так как α – любое число, мы получим условие параллельности двух векторов

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Пример 1. Даны векторы $\vec{a} = \{1,3,5\}, \vec{b} = \{m, 6,10\}$. При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны?

Решение. $\frac{1}{m} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}, \frac{1}{m} = \frac{1}{2}, m = 2.$

Таким образом, $\vec{a} \| \vec{b}$ при $m = 2$.

Пример 2. Дан треугольник с вершинами $A(1, -1, 0), B(2, 1, 3), C(0, 1, 2)$. Найти $\angle ABC$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA} = \{-1, -2, -3\}, \qquad \overrightarrow{BC} = \{-2, 0, -1\}.$$

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} =$$

$$= \frac{-1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{70}}.$$

$$\varphi = arccos\frac{5}{\sqrt{70}}.$$

2.2.2. Векторное произведение векторов

Определение. *Векторным* произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется такой третий вектор $\vec{c}$, который определяется следующим образом

1. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$.

2. Направление вектора $\vec{c}$ таково, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов, то есть, если смотреть с конца вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ видим совершающимся против часовой стрелки.

3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, то есть модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $[\vec{a}, \vec{b}]$.

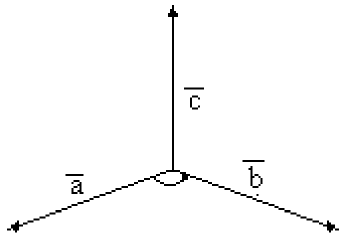


Рис. 2.14.

Рассмотрим основные *свойства* векторного произведения:

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет свой знак на противоположный $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$.

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя

$$[\lambda\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\lambda\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}].$$

3. Векторное произведение обладает распределительным свойством.

$$[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}].$$

4. Векторное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы коллинеарные. Отсюда, в частности, следует, что векторное произведение $[\vec{a},\vec{a}]=0$.

Рассмотрим физическую задачу, решение которой приводит к вычислению векторного произведения векторов.

Пусть к точке A приложена сила $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$ и пусть O – некоторая точка пространства. Из физики известно, что моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется вектор $\vec{M}$, который приложен к точке O и перпендикулярен к плоскости, проходящей через точки O, A, B, численно он равен произведению силы на плечо ON

$$|\vec{M}|=|\vec{F}|\cdot ON=|\vec{F}||\vec{r}|sin\varphi=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{OA}|sin(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{OA}})$$

и образует правую тройку с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Значит, момент силы равен $\vec{M} = \left[\overrightarrow{OA}, \vec{F}\right]$.

Рассмотрим примеры вычисления векторного произведения.

Пример. Известно, что $|\vec{a}| = 1, \left|\vec{b}\right| = 3, \varphi = 30^\circ$.

Найти длину вектора $\left[(2\vec{a} - 3\vec{b}), (\vec{a} + 2\vec{b})\right]$.

Решение. Найдем

$$\left[\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right), \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)\right] = 2[\vec{a}, \vec{a}] - 3\left[\vec{b}, \vec{a}\right] + 4\left[\vec{a}, \vec{b}\right] - 6\left[\vec{b}, \vec{b}\right] =$$
$$= 4\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + 3\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = 7\left[\vec{a}, \vec{b}\right].$$
$$\left|\left[\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right), \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)\right]\right| = \left|7\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = 7|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi =$$
$$= 7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = 10{,}5.$$

Пусть даны два вектора

$\vec{a} = X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{\jmath} + Z_1\vec{k}, \;\; \vec{b} = X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{\jmath} + Z_2\vec{k}.$

Предварительно найдем все попарные векторные произведения единичных векторов $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Так как векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю, то

$$[\vec{\imath}, \vec{\imath}] = [\vec{\jmath}, \vec{\jmath}] = \left[\vec{k}, \vec{k}\right] = 0.$$

Рассмотрим, например, произведение $[\vec{\imath}, \vec{\jmath}]$. Найдем его модуль

$$|[\vec{\imath}, \vec{\jmath}]| = |\vec{\imath}| \cdot |\vec{\jmath}| \cdot \sin 90^\circ = 1.$$

Вектор $[\vec{\imath}, \vec{\jmath}]$ перпендикулярен векторам $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$, то есть направлен вдоль оси Oz. Так как тройка векторов должна быть правой, то он направлен в сторону положительного направления оси Oz. Отсюда следует, что этот вектор совпадает с вектором $\vec{k}$, то есть $[\vec{\imath}, \vec{\jmath}] = \vec{k}$.

Аналогично можно получить, что $\left[\vec{\jmath}, \vec{k}\right] = \vec{\imath}, \left[\vec{k}, \vec{\imath}\right] = \vec{\jmath}$, и следовательно,

$$[\vec{j},\vec{i}]=-\vec{k},[\vec{k},\vec{j}]=-\vec{i},[\vec{i},\vec{k}]=-\vec{j}$$

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left[\left(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}\right),\left(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}\right)\right]=$$

$$=X_1X_2[\vec{i},\vec{i}]+X_1Y_2[\vec{i},\vec{j}]+X_1Z_2[\vec{i},\vec{k}]+Y_1X_2[\vec{j},\vec{i}]+$$

$$+Y_1Y_2[\vec{j},\vec{j}]+Y_1Z_2[\vec{j},\vec{k}]+Z_1X_2[\vec{k},\vec{i}]+Z_1Y_2[\vec{k},\vec{j}]+Z_1Z_1[\vec{k},\vec{k}]=$$

$$=X_1Y_2\vec{k}+X_1Z_2(-\vec{j})+Y_1X_2\left(-\vec{k}\right)+Y_1Z_2\vec{i}+Z_1X_2\vec{j}+Z_1Y_2(-\vec{i})=$$

$$=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\vec{i}-(X_1Z_2-Z_1X_2)\vec{j}+(X_1Y_2-Y_1X_2)\vec{k}.$$

Значит,

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

Полученное выражение справа на основании свойства определителя можно записать следующим образом:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

Пример 1. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$.

Решение.

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+$$

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=7\vec{i}-7\vec{j}-7\vec{k}.$$

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(2,3,1),B(-1,0,1),C(1,-1,0)$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \{-3, -3, 0\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{-1, -4, -1\}.$$

Теперь найдем векторное произведение $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$
$$= 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 9\vec{k}.$$

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Найдем $\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 9^2} = \sqrt{99}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{99} \approx 5$ (кв.ед.).

2.2.3. Смешанное произведение векторов

Определение. *Смешанным* произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется их векторно-скалярное произведение. Здесь первые два вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ умножаются векторно, затем полученный вектор скалярно умножается на третий вектор $\vec{c}$. Обозначается как $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right).$$

Пусть

$$\vec{a} = X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{\jmath} + Z_1\vec{k}, \qquad \vec{b} = X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{\jmath} + Z_2\vec{k},$$
$$\vec{c} = X_3\vec{\imath} + Y_3\vec{\jmath} + Z_3\vec{k}.$$

Найдем

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\vec{k},$$

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left\{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\right\}.$$

Найдем скалярное произведение вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$, то есть смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Используя формулу скалярного произведения, получим

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}X_3-\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}Y_3+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}Z_3.$$

Легко видеть, что полученное выражение является разложением определителя $\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}$ по элементам третьей строки. Итак,

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}$$

то есть смешанное произведение трех векторов равно определителю третьего порядка, в строках которого находятся проекции перемножаемых векторов.

1. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

Действительно, пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. Без ограничения общности можно сказать, что эти векторы лежат в одной плоскости.

Тогда вектор $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$ перпендикулярен плоскости этих векторов и, следовательно он перпендикулярен вектору $\vec{c}$.Тогда скалярное произведение

$$(\vec{d}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = 0,$$

то есть смешанное произведение компланарных векторов равно нулю. И обратный процесс, если смешанное произведение равно нулю, то векторы компланарны. Действительно, если бы эти векторы были бы не компланарны, то на них можно было бы построить параллелепипед ненулевого объема $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

2. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$.

Геометрический смысл смешанного произведения. Предположим, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не лежат в одной плоскости. На этих векторах, как на ребрах, построим параллелепипед. Построим также вектор $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$, модуль которого равен площади S основания параллелепипеда.

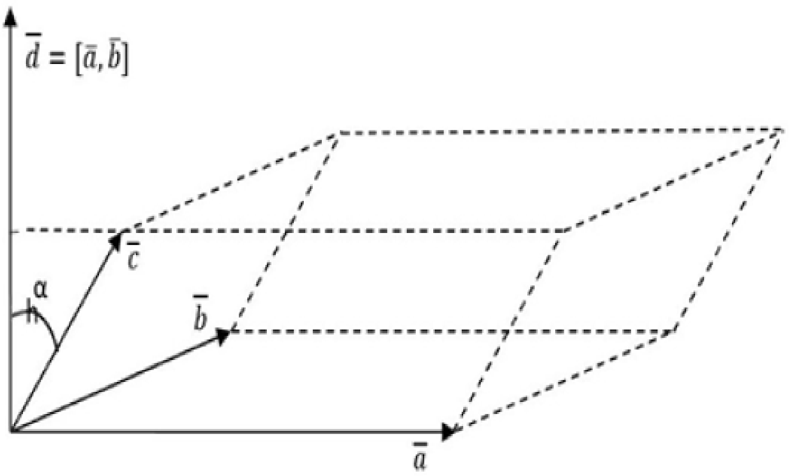


Рис. 2.15.

Смешанное произведение

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = |[\vec{a},\vec{b}]| \cdot |\vec{c}|\cos\varphi = S \cdot |\vec{c}|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{d} = [\vec{a},\vec{b}]$ и $\vec{c}$. Если $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и h высота параллелепипеда, то $h = |\vec{c}|\cos\varphi$.

Таким образом, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = S \cdot h$.

Но объем параллелепипеда $V = Sh$, следовательно, объем параллелепипеда

$$V = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi < 0$ и $|\vec{c}|\cos\varphi = -h$.Следовательно, в этом случае $V = -(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Итак, окончательно получим $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \pm V$, то есть

$$V = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|.$$

Таким образом, смешанное произведение трех векторов с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах. Так как три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, то условие компланарности трех векторов есть равенство нулю их смешанного произведения: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$. Если

$$\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \vec{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\},$$

то в координатной форме условие компланарности трех векторов имеет вид

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Пример 1. Являются ли векторы

$\vec{a} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}, \;\; \vec{b} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}, \;\; \vec{c} = -3\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} + 6\vec{k}$ компланарными?

Решение. Найдем смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 36 + 48 - 18 - 48 - 36 = 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Пример 2. Вычислить объем пирамиды с вершинами $A(1,3,4), B(2,4,0), C(-3,0,1), D(-2,-4,1)$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = \{1,1,-4\}, \;\; \overrightarrow{AC} = \{-4,-3,-3\}, \;\; \overrightarrow{AD} = \{-3,-7,-3\}.$$

Найдем смешанное произведение векторов

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & -3 & -3 \\ -3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 9 - 112 + 36 - 21 - 12 = -91.$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6} \cdot 91 = 15\frac{1}{6} \;\; \text{(куб.ед.)}.$$

2.3. Применение теории векторов в жизни (авиации)

Часто мы замечаем, что самолеты, приближаясь к посадке, принимают не параллельное положение к посадочной полосе, а оказываются под некоторым углом к ней. Давайте попробуем разобраться в причине подобной ситуации, с точки зрения законов векторной алгебры.

Предположим, что ветер дует перпендикулярно к посадочной полосе, то есть вектор скорости ветра находится к ней под углом 90°. Если вектор скорости самолета окажется параллелен к посадочной полосе, тогда результирующий вектор – фактическое направление движения самолета – окажется направлен под неким углом к посадочной полосе, что означает, что самолет вынесет из полосы. Чтобы этого не произошло, самолет принимает положение под углом к посадочной полосе, таким образом, результирующий вектор – сумма вектора скорости ветра и вектора скорости самолета – окажется параллелен к посадочной полосе и движение самолета пойдет, как следует, по полосе.

Теперь попробуем решить задачу.

Пусть самолет летит на северо-запад под углом α со скоростью v_a. Ветер дует на северо-восток под углом β со скоростью v_w. Найдите фактический вектор движения самолета.

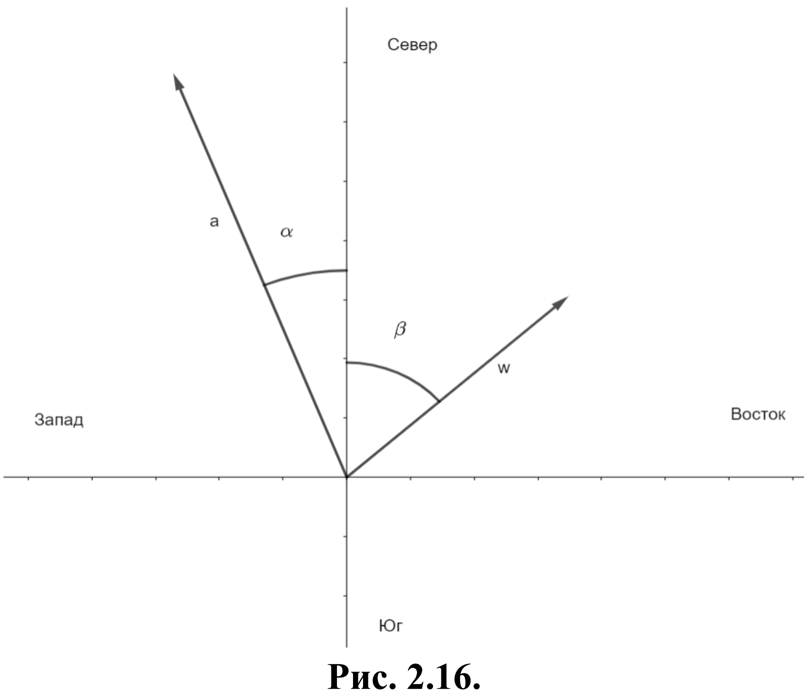


Рис. 2.16.

Тогда координаты векторов будут следующими:

$$\vec{a} = v_a(\cos(90° + \alpha),\ \sin(90° + \alpha)),$$
$$\vec{w} = v_w(\cos(90° - \beta),\ \sin(90° - \beta)).$$

Упростив, получаем

$$\vec{a} = (-v_a \sin\alpha, v_a \cos\alpha),$$
$$\vec{w} = (v_w \sin\beta, v_w \cos\beta).$$

Таким образом, результирующий вектор есть сумма двух заданных векторов.

$$v = (v_w \sin\beta - v_a \sin\alpha, v_a \cos\alpha + v_w \cos\beta).$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется вектором? Что называется модулем вектора?
2. Какой вектор называется нулевым вектором?
3. Какие векторы называются коллинеарными?
4. Какие векторы называются компланарными?
5. Что называется суммой векторов? Что называется разностью векторов?
6. Что называется проекцией вектора на ось?
7. Что называется скалярным произведением векторов?
8. Как определяется скалярное произведение векторов, заданных своими координатами?
9. Как определяется косинус угла между двумя векторами?
10. Что называется векторным произведением векторов?
11. Как определяется векторное произведение векторов, заданных своими координатами?
12. Что называется смешанным произведением векторов?
13. Как определяется смешанное произведение векторов, заданных своими координатами?
14. Каким свойством обладают два вектора, если их векторное произведение равно нулю?

“Теперь я знаю, почему столько людей
на земле охотно колет дрова.
По крайней мере, сразу видишь результаты своего труда.”
Альберт Эйнштейн

ГЛАВА III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Прямая на плоскости

3.1.1. Система координат на плоскости, преобразование координат

Система координат на плоскости позволяет численно описать положение точки на плоскости.

Одна из систем координат – это известная читателю со школьной программы *декартова* прямоугольная система координат. Декартова система координат состоит из двух перпендикулярных прямых, одна из которой называется *осью абсцисс* (горизонтальная), вторая – *осью ординат* (вертикальная). Точка их пересечения называется *началом* координат. Любая точка на плоскости однозначно определяется двумя координатами (x, y), где $(-\infty < x < \infty,$
$-\infty < y < \infty)$

Другой системой координат является полярная система координат. *Полярная система координат* состоит из одной точки, называемой *полюсом* и направления, называемого *полярной осью*. Задавая единичный (масштабный) отрезок, положение точки M определим двумя координатами: первая, расстояние от заданной точки M до полюса – ρ, вторая, угол между заданным направлением и отрезком $OM - \varphi$. Угол измеряется от полярной оси до отрезка против часовой стрелки. Тогда любая точка однозначно определяется двумя координатами (ρ, φ), где $(0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \rho < \infty)$.

Для того, чтобы установить связь между декартовыми и полярными координатами, полюс совместим с началом координат, а полярная ось – с положительной полуосью абсцисс. Пусть x и y – прямоугольные координаты точки M, а ρ и φ – её полярные координаты. Прямоугольные декартовы координаты (x, y) и полярные координаты (ρ, φ) связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi, \\ y = \rho sin\varphi, \end{cases} \text{где } \rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Эти соотношения называются формулами перехода из декартовой к полярной системе координат. Соотношения

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \text{где } -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty,$$

называются формулами перехода из полярной к декартовой системе координат.

3.1.2. Линии на плоскости. Основные понятия

В декартовой системе координат линии задаются уравнением вида: $F(x, y) = 0$. В полярной системе координат – уравнением $G(\rho, \varphi) = 0$. Линии на плоскости можно задать с помощью параметрического уравнения $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где x, y – координаты, а переменная t – параметр.

Простейшим примером линии является прямая.

3.1.3. Разные уравнения прямой.

1. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.

Дана точка $M_1(x_1, y_1)$ и вектор $\vec{n} = \{A, B\}$. Напишем уравнение прямой, проходящей через точку M_1, перпендикулярное вектору $\vec{n} = \{A, B\}$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой.

Очевидно, что векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны:

$$\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{n}.$$

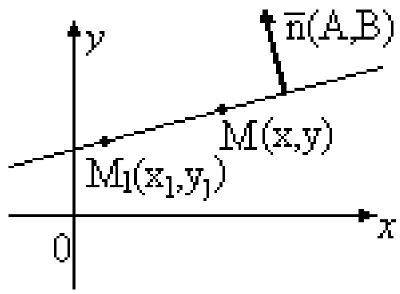


Рис. 3.1

Условие перпендикулярности двух векторов – это равенство нулю их скалярного произведения:

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \vec{n}\right) = 0$$

Так как,

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}, \vec{n} = \{A, B\},$$

скалярное произведение имеет вид:

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \vec{n}\right) = A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

Итак, получим *уравнение прямой, проходящей через заданную точку* $M_1(x_1, y_1)$, *перпендикулярное заданному вектору* $\vec{n} = \{A, B\}$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \tag{3.1}$$

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-2,3)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{3,4\}$.

Решение. Используем уравнение (3.1).

$3(x+2)+4(y-3)=0$. Окончательно: $3x+4y-6=0$.

2.Общее уравнение прямой.

Уравнение (3.1) можно записать в виде, раскрывая скобки,

$$Ax+By+C=0, \tag{3.2}$$

где $C=-Ax_1-By_1$.

Уравнение (3.2) называется *общим уравнением* прямой. Таким образом, коэффициенты A и B в общем уравнении прямой являются координатами вектора, перпендикулярного к этой прямой. Любой вектор, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором* этой прямой. Следовательно, вектор $\vec{n}=\{A,B\}$ является нормальным вектором прямой (3.2).

Исследуем общее уравнение прямой.

Пусть $A=0, B\neq 0$, тогда $By+C=0 \Longrightarrow y=\frac{-C}{B}$. Прямая, определенная уравнением $y=\frac{-C}{B}$, параллельна оси Ox, пересекает ось Oy в точке $(0,\frac{-C}{B})$.

Пусть $B=0, A\neq 0$, тогда $Ax+C=0 \Longrightarrow x=\frac{-C}{A}$. Прямая, определенная уравнением $x=\frac{-C}{A}$, параллельна оси Oy, пересекает ось Ox в точке $(\frac{-C}{A},0)$.

Пусть теперь $C=B=0, A\neq 0$, тогда прямая, определенная уравнением $x=0$, является осью Oy.

Пусть $A=C=0, B\neq 0$, тогда прямая, определенная уравнением $y=0$, является осью Ox.

Если $C=0, A\neq 0, B\neq 0$, то прямая $Ax+By=0$ проходит через начало координат, так как точка $(0,0)$ удовлетворяет данному уравнению.

3. Уравнение прямой «в отрезках».

Если $C \neq 0, A \neq 0, B \neq 0$, то общее уравнение прямой можно привести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad (3.3)$$

где $a = \frac{-C}{A}, b = \frac{-C}{B}$.

Уравнение (3.3) называется уравнением *прямой «в отрезках»*. Данная прямая проходит через две точки, отсекающие на координатных осях Ox и Oy отрезки длинами $|a| = |OA|$ и $|b| = |OB|$, соответственно.

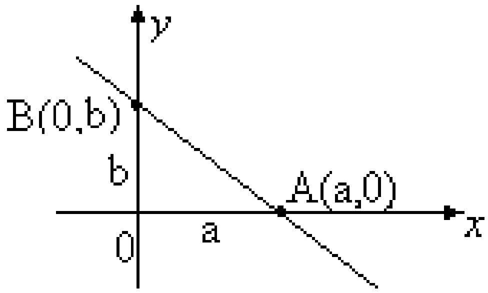


Рис. 3.2.

Заданная прямая проходит через две точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$.

Пример. Дана прямая $2x - 3y - 6 = 0$. Привести это уравнение к уравнению «в отрезках».

Решение.

$$2x - 3y = 6, \frac{2x}{6} - \frac{3y}{6} = 1, \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1, a = 3, b = -2.$$

Искомое уравнение примет вид:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$

4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла наклона этой прямой к оси Ox. Угловой коэффициент обозначается через k и $tg\,\varphi = k$. Если φ – острый угол, то $k > 0$, если φ – тупой угол, то $k < 0$, если $\varphi = 0$, то прямая параллельна оси Ox и $k = 0$, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $tg\frac{\pi}{2} = \infty$, и прямая параллельна оси Oy.

Напишем уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент, равный k и отсекающей отрезок b на оси Oy.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой.

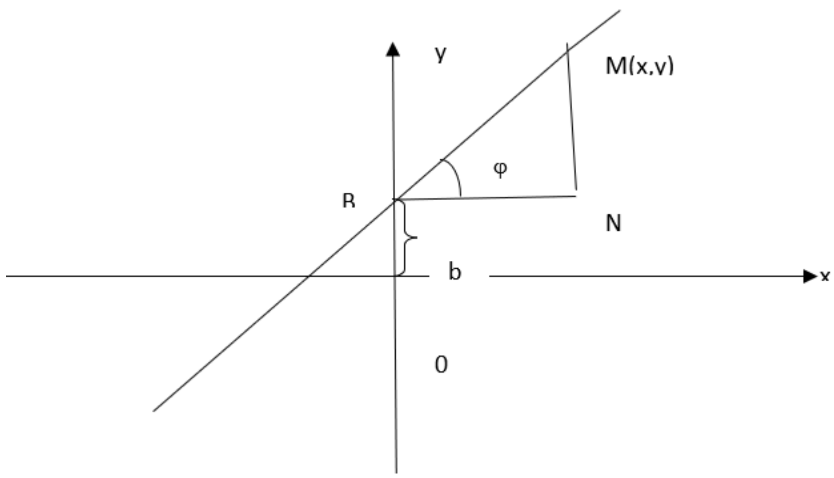


Рис. 3.3.

Рассмотрим треугольник MNB; он прямоугольный. Очевидно, что $\angle MBN = \varphi, tg\varphi = \frac{MN}{BN} = k, MN = y - b, BN = x$. Значит, $\frac{y-b}{x} = k$, откуда получим уравнение

$$y = kx + b \tag{3.4}$$

Это и есть уравнение *прямой с угловым коэффициентом*.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ с угловым коэффициентом k, имеет следующий вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{3.5}$$

Пример. Найти угловой коэффициент прямой

$$5x - 3y + 6 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение прямой в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом: $y = \frac{5}{3}x + 2$. Откуда $k = \frac{5}{3}$.

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-3, 1)$ и образующей угол 135° с положительным направлением оси Ox.

Решение.

Найдем угловой коэффициент искомой прямой:

$$k = tg135^\circ = tg(180^\circ - 45^\circ) = -tg45^\circ = -1.$$

Тогда искомое уравнение примет вид $y - 1 = -1 \cdot (x + 3)$ или

$$x + y + 2 = 0$$

5. *Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, параллельной заданному вектору.*

Дана точка $M_1(x_1, y_1)$ и вектор $\vec{a} = \{m, n\}$. Напишем уравнение прямой, проходящей через точку M_1 , параллельно вектору $\vec{a} = \{m, n\}$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой. Очевидно, что векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{a}$ параллельны:

$$\overrightarrow{M_1M} \parallel \vec{n}.$$

Из условия параллельности этих векторов получим следующий вид уравнения прямой:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} \qquad (3.6)$$

Уравнение (3.6) называется *каноническим уравнением* прямой.

Любой вектор, параллельный прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой. Следовательно, вектор $\vec{a} = \{m, n\}$ является направляющим вектором прямой (3.6).

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Написать уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Угловой коэффициент k определим из треугольника M_2M_1N:

$$k = tg\varphi = \frac{M_2N}{M_1N} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

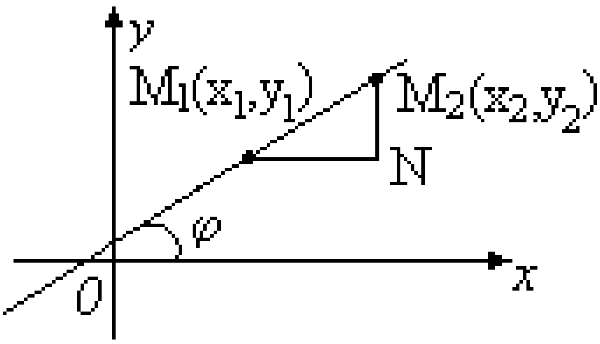


Рис. 3.4.

Подставим полученное значение k в уравнение (3.5):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Разделим обе части уравнения на $y_2 - y_1$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Запишем полученное уравнение в виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (3.7)$$

Это и есть искомое уравнение *прямой, проходящей через две точки*.

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки: $M_1(-2,1)$ и $M_2(1,-4)$.

Решение. Искомое уравнение будет

$$\frac{x+2}{1+2}=\frac{y-1}{-4-1}$$

или

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-5}.$$

7. Нормальное уравнение прямой.

Пусть известно расстояние p от прямой до начала координат, и угол α, образуемый перпендикуляром к прямой и положительным направлением оси Ox. Требуется написать уравнение прямой.

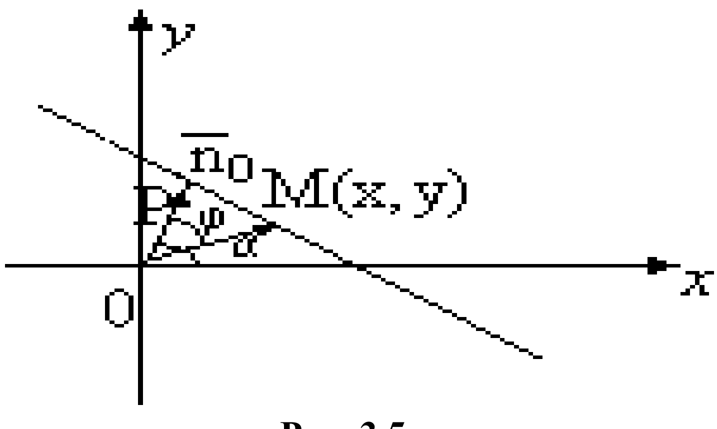


Рис. 3.5.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка прямой, $\vec{n}_0=\{\cos\alpha,$ $\sin\alpha\}$ – единичный нормальный вектор прямой.

Найдем скалярное произведение $(\overrightarrow{OM},\vec{n}_0)$. По определению скалярного произведения: $(\overrightarrow{OM},\vec{n}_0)=|\overrightarrow{OM}|\cdot|\vec{n}_0|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{n}_0$.

Но $|\vec{n}_0| = 1$; $|\overrightarrow{OM}| \cdot cos\,\varphi = np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM}$. Следовательно, мы получим$(\overrightarrow{OM}, \vec{n}_0) = np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM} = p, (\overrightarrow{OM}, \vec{n}_0) = x\cos\alpha + y\sin\alpha$.

Итак, мы получаем уравнение $x\,cos\,\alpha + y\,sin\,\alpha = p$ или, окончательно,

$$x\,cos\,\alpha + y\,sin\,\alpha - p = 0, \tag{3.8}$$

называемое *нормальным уравнением прямой*.

Пусть $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой. Умножим его на некоторый множитель μ: $\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$, чтобы привести его к нормальному виду:

$$\mu A = \cos\alpha\,, \mu B = \sin\alpha.$$

Но $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$. Из этого условия находим множитель μ:

$$\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 = 1, \mu^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}, \mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак перед дробью выбирается противоположным знаку C (для того, чтобы μC было отрицательным).

Пример. Привести уравнение прямой $5x - 12y + 26 = 0$ к нормальному виду.

Решение. Находим множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \pm\frac{1}{13}$$

Выбираем знак минус. Умножим данное уравнение на $\mu = -\frac{1}{13}$: получим нормальное уравнение прямой $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$.

3.1.4. Расстояние от точки до прямой

Дана точка $M_0(x_0, y_0)$ и прямая $Ax + By + C = 0$. Найти расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

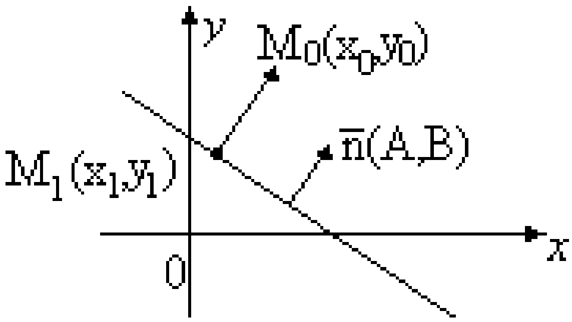


Рис. 3.6.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую. Найдем скалярное произведение $\left(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n}\right) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\varphi = \pm\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cdot |\vec{n}|$, так как $\overrightarrow{M_1M_0} \| \vec{n}$.

$$\left(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n}\right) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1.$$

Точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на прямой. Поэтому $Ax_1 + By_1 + C = 0$; т.е. $-Ax_1 - By_1 = C$;. Итак, имеем $\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}\right) = \left(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n}\right) = \pm|\vec{n}|d =$
$= Ax_0 + By_0 + C$, (d – расстояние от точки M_0 до прямой, то есть $d = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$).

Отсюда

$$d = \pm\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|\vec{n}|} = \pm\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Окончательно получим формулу для вычисления расстояния от точки до прямой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1,0)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины A.

Решение. Длина высоты, опущенной из вершины A на сторону BC – это и есть расстояние от точки A до прямой, проходящей через точки B и C.

Уравнение BC:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{2+1}, \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3}, y+1 = 3(x-2),$$

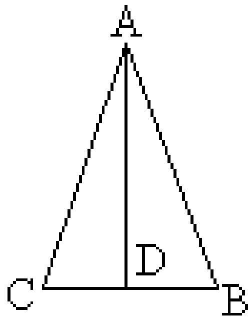


Рис. 3.7.

$3x - y - 7 = 0$ – уравнение BC.

$$d = AD = \frac{|3 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

3.1.5. Угол между двумя прямыми

Пусть на плоскости даны две прямые $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$.

Обозначим через φ – угол между двумя прямыми $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Тогда по известной формуле тригонометрии

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} =$$
$$= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

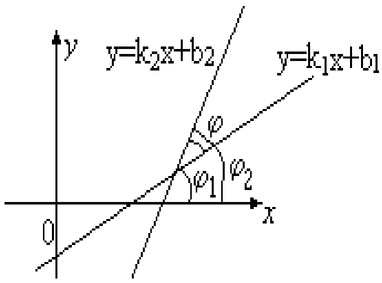


Рис. 3.8.

Итак, тангенс угла между двумя прямыми вычисляется по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Ясно, что две прямые будут параллельны, тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты будут равны, то есть **условие параллельности двух прямых**:

$$k_1 = k_2.$$

Если две прямые перпендикулярны, то есть угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, мы получим

$$tg\varphi = tg\frac{\pi}{2} = \infty.$$

Это будет иметь место, когда $1 + k_1 k_2 = 0$, то есть

$$k_1 k_2 = -1.$$

Итак, **условие перпендикулярности двух прямых**:

$$k_1 k_2 = -1.$$

Пусть прямые заданы общими уравнениями:

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

Вектор $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ – нормальный вектор прямой $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$.

Вектор $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ – нормальный вектор прямой $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

Угол между данными прямыми равен углу между нормальными векторами прямых:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1 \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Окончательно получим

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Прямые будут параллельны, если их нормальные векторы параллельны. Условие параллельности двух прямых будет иметь вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают. Условие перпендикулярности двух прямых – есть условие перпендикулярности нормальных векторов

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1, 3)$, параллельно прямой $2x - 5y + 6 = 0$.

Решение. Так как искомая прямая должна быть параллельна данной, то нормальный вектор данной прямой является нормальным вектором искомой прямой. Зная нормальный вектор $\vec{n} = \{2, -5\}$ и точку $M_0(-1, 3)$, мы можем написать уравнение искомой прямой

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$
$$2(x + 1) - 5(y - 3) = 0.$$

Окончательно получим $2x - 5y + 17 = 0$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-3, 2)$, перпендикулярно прямой $x - 3y - 7 = 0$.

Решение. Условие перпендикулярности двух прямых $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Мы имеем $A_1 = 1, B_1 = -3$. Условие перпендикулярности будет выполнено, если $A_2 = 3, B_2 = 1$. Действительно, $1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$.

Значит, нормальный вектор искомой прямой $\vec{n} = \{3, 1\}$. Уравнение искомой прямой $3(x + 3) + 1(y - 2) = 0$.

Или окончательно $3x + y + 7 = 0$.

3.1.6. Уравнение пучка прямых

Совокупность прямых, проходящих через некоторую точку, называется *пучком прямых* с центром в этой точке.

Если $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ – уравнения двух пересекающихся прямых, то уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где α и β любые числа, не равные нулю одновременно, называется *уравнением пучка прямых*, проходящих через точку пересечения данных прямых, причем при $\alpha = 0$ получаем уравнение второй прямой, при $\beta = 0$ получаем уравнение первой прямой.

Пример. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения прямых $x - 2y + 3 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$, и уравнение прямой, принадлежащей этому пучку, проходящей через точку $M_1(-1, 2)$.

Решение. Уравнение пучка прямых имеет вид

$$\alpha(x - 2y + 3) + \beta(2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - 1) = 0,$$

Разделим обе части уравнения на α; $(\alpha \neq 0)$. Обозначая $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, получим

$$x - 2y + 3 + \lambda(2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - 1) = 0,$$

Так как искомая прямая проходит через точку $M_1(-1, 2)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой.

$$-1 - 2 \cdot 2 + 3 + \lambda(2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 - 1) = 0,$$

$$-2 + \lambda \cdot 3 = 0;\ \lambda = \frac{2}{3}.$$

Подставив полученное значение λ в уравнение пучка, получим $x - 2y + 3 + \frac{2}{3}(2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - 1) = 0$, или $x + 1 = 0$.

3.2. Плоскость и прямая в пространстве

3.2.1. Плоскость в пространстве

1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору.

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку M_0, перпендикулярное вектору $\vec{n}$.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Очевидно, что $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ для любой точки M плоскости. Тогда скалярное произведение

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0. \quad \vec{n} = \{A, B, C\}, \ \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\},$$

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0.$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3.9)$$

Уравнение (3.9) есть искомое уравнение плоскости. Вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ называется *нормальным* вектором плоскости (3.9).

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1, 3,2)$, перпендикулярное вектору $\vec{n} = \{3,4,1\}$.

Решение. Искомое уравнение будет иметь вид

$$3(x + 1) + 4(y - 3) + (z - 2) = 0.$$

Окончательно получим:

$$3x + 4y + z - 11 = 0.$$

2. Общее уравнение плоскости.

Уравнение вида (3.9) может быть приведено к виду:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Покажем, что уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (3.10)$$

где D – любое число, $A \neq 0$, является уравнением плоскости. Представим это уравнение в виде (3.9)

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right) + By + Cz = 0.$$

Это есть уравнение плоскости, проходящей через точку $(-\frac{D}{A}, 0, 0)$ перпендикулярное вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Значит, уравнение (3.10) является уравнением плоскости. Уравнение (3.10) называется *общим уравнением* плоскости.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Пусть даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Составить уравнение, проходящее через эти точки.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Рассмотрим векторы: $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$.

Для любой точки M плоскости эти векторы компланарны, то есть лежат в одной плоскости.

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}.$$

Условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения, то есть

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0.$$

Это условие в координатах можно записать так:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) называется *уравнением плоскости, проходящей через три точки*.

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-3,0,2)$, $M_2(1,4,3)$ и $M_3(2,-1,-1)$.

Решение. Искомое уравнение будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x+3 & y & z-2 \\ 1+3 & 4 & 3-2 \\ 2+3 & -1 & -1-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив этот определитель по первой строке, получим

$$(x+3)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$(x+3)(-12+1) - y(-12-5) + (z-2)(-4-20) = 0,$$
$$-11(x+3) + 17y - 24(z-2) = 0.$$

Окончательно получим: $11x - 17y + 24z - 15 = 0$.

4. *Нормальное уравнение плоскости*.

Найти уравнение плоскости, если расстояние от начала координат до этой плоскости равно p, $\vec{n}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный нормальный вектор плоскости, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к плоскости.

Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости, тогда вектор $\overrightarrow{OM} = \{x,y,z\}$ называется *радиус-вектором* точки M. $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Рассмотрим скалярное произведение $(\overrightarrow{OM}, \vec{n}_0) = (\vec{r}, \vec{n}_0)$.

По определению скалярного произведения

$$(\vec{r}, \vec{n}_0) = |\overrightarrow{OM}| \cdot |\vec{n}_0| \cdot \cos\varphi = np_{n_0}\overrightarrow{OM} = p.$$

(здесь φ – угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{n}_0$).

Таким образом, мы получим,

$$(\vec{r}, \vec{n}_0) = p. \qquad (3.12)$$

Это и есть *нормальное уравнение плоскости в векторной форме*. Напишем его в координатной форме.

Так как $\vec{r} = \{x, y, z\}, \vec{n}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то мы получим уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (3.13)$$

Уравнение (3.13) называется *нормальным уравнением плоскости.* Приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду. Дано уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Чтобы привести к нормальному виду, умножим его на некоторое число μ: $\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$. Обозначим $\mu A = \cos\alpha, \mu B = \cos\beta, \mu C = \cos\gamma, \mu D = -p$, так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, получим $\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 + \mu^2 C^2 = 1$. Откуда находим

$$\mu^2 = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2}$$

или

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Знак перед дробью выбираем противоположным знаку свободного члена D.

Пример. Привести уравнение плоскости $3x + 4y - 12z + 26 = 0$ к нормальному виду.

Решение. Найдем множитель μ:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \pm\frac{1}{13}.$$

Так как $D = 26 > 0$, выбираем знак "минус", и умножим данное уравнение плоскости на $-\frac{1}{13}$.

$$-\frac{3}{13}x - \frac{4}{13}y + \frac{12}{13}z - 2 = 0.$$

Это и есть нормальное уравнение плоскости.

5. *Уравнение плоскости «в отрезках».*

Пусть $Ax + By + Cx + D = 0$ – общее уравнение плоскости. Если $D \neq 0, A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$, то уравнение можно привести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где

$$a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}.$$

Плоскость пересекает координатные оси в точках $(a, 0,0)$, $(0, b, 0), (0,0, c)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.14)$$

Уравнение (3.14) называется *уравнением плоскости "в отрезках"*.

3.2.2. Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Найдём расстояние d от данной точки до данной плоскости.

Пусть M_1– точка пересечения перпендикуляра к плоскости, опущенного из точки M_0. Рассмотрим скалярное произведение нормального вектора плоскости $\vec{n} = \{A, B, C\}$ на вектор $\overrightarrow{M_1 M_0}$.

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}\right) = |\vec{n}_1| \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cdot \cos\varphi = \pm|\vec{n}_1| \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|.$$

Но $|\vec{n}_1| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = d$,

$$\overrightarrow{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}.$$

(Вектор $\vec{n} \| \overrightarrow{M_1M_0}$, поэтому угол $\varphi = \left(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}}\right)$ равен или 0 или 180, и, следовательно, $\cos\varphi = \pm 1$)

Таким образом,

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}\right) = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot d.$$

Но

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}\right) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - -(Ax_1 + By_1 + Cz_1).$$

Так как точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на плоскости, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ или $(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = -D$

Итак, мы получим $\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}\right) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$.

Или

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot d.$$

Откуда

$$d = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Окончательно, получим формулу для расстояния от точки до плоскости

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.15}$$

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(1,-2,3)$ до плоскости

$$2x-2y+z-4=0.$$

Решение. По формуле (3.15):

$$d=\frac{|2\cdot 1-2\cdot(-2)+3-4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{5}{3}.$$

3.2.3. Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ можно вычислить как угол между нормальными векторами этих плоскостей.

$$\varphi=\left(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}\right),$$

$$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\},\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_1|},$$

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (3.16)$$

Пример. Найти угол между двумя плоскостями

$$2x-y+3z-2=0 \text{ и } x+3y-2z+4=0.$$

Решение. Воспользуемся формулой (3.16)

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

где

$$\vec{n}_1=\{2,-1,3\},\vec{n}_2=\{1,3,-2\}.$$

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 3\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\varphi = \pi - arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Две плоскости параллельны, если нормальные векторы этих плоскостей параллельны.

Следовательно, **условие параллельности двух плоскостей** имеет вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.17)$$

Две плоскости перпендикулярны, если нормальные векторы этих плоскостей перпендикулярны. Следовательно, **условие перпендикулярности двух плоскостей** имеет вид:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (3.18)$$

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3,-1,2)$, параллельно плоскости $7x - y + 3z - 12 = 0$.

Решение. Плоскость, параллельная заданной плоскости имеет тот же нормальный вектор $\vec{n} = \{7,-1,3\}$. Тогда получим:

$7(x-3) - (y+1) + 3(z-2) = 0$ или $7x - y + 3z - 28 = 0$.

Пример. Определить, при каком значении l плоскости

$$2x + ly - 3z + 1 = 0 \text{ и } 5x + y - 3z - 2 = 0$$

перпендикулярны.

Решение.

$\vec{n}_1 = \{2,l,-3\}, \vec{n}_2 = \{5,1,-3\}$, тогда из условии перпендикулярности

$$2 \cdot 5 + l \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) = 0,$$
$$10 + 9 + l = 0, l = -19.$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M_1(1, -1, 3)$ и $M_2(-1, 0, 2)$, перпендикулярной к плоскости $2x - y + 3z - 1 = 0$.

Решение. Напишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярное данному вектору.

За данную точку можно взять любую из точек M_1 или M_2, мы берем M_1:

$$A(x - 1) + B(y + 1) + C(z - 3) = 0.$$

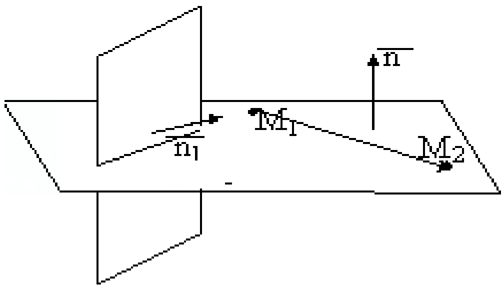


Рис. 3.9.

Ясно, что нормальный вектор искомой плоскости $\vec{n} = \{A, B, C\}$ будет перпендикулярен векторам $\vec{n}_1 = \{2, -1, 3\}$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-2, 1, -1\}$, то есть он будет коллинеарным векторному произведению векторов $\vec{n}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Найдем

$$\vec{n} = [\vec{n}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j}, \vec{n} = \{-2, -4, 0\}.$$

Искомое уравнение будет иметь вид: $-2(x-1)-4(y+1)+0(z-3)=0$. Окончательно получим: $x+2y+1=0$.

3.2.4. Прямая в пространстве

1. *Канонические уравнения прямой в пространстве*. Положение прямой в пространстве можно определить, если задать какую-либо точку M_0 и *направляющий вектор* $\vec{a}$, параллельный этой прямой. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, лежащая на прямой l, а $\vec{a}=\{m, n, p\}$ – направляющий вектор прямой l. Берем скользящую точку $M(x, y, z)$ на прямой и составим вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$. Известно, что если $M(x, y, z)\in l$, то векторы $\vec{a}=\{m, n, p\}$ и $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$ коллинеарны. Из условия коллинеарности векторов получим:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{3.19}$$

Уравнения (3.19) называются *каноническими уравнениями прямой* в пространстве.

2. *Параметрические уравнения прямой в пространстве*. Если ввести параметр t, приравнивая к нему отношения в (3.19)

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

то получим *параметрические уравнения прямой:*

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=t,\\ \dfrac{y-y_0}{n}=t,\\ \dfrac{z-z_0}{p}=t,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt.\end{cases} \tag{3.20}$$

3. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки. Пусть теперь прямая l проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Чтобы составить уравнение прямой, на прямой l берем точку $M(x, y, z) \in l$ и составим вектор

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\},$$

а в качестве направляющего вектора можем взять вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Из условий коллинеарности двух векторов получим уравнение прямой

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3.21}$$

Уравнения (3.21) называются уравнениями *прямой, проходящей через две данные точки*.

4. Общие уравнения прямой в пространстве. В общем случае прямую в пространстве можно задать в виде пересечения двух непараллельных плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Из теории систем линейных уравнений известно, что если ранг основной и расширенной матриц системы равен двум, то система имеет бесконечное множество решений, а плоскости пересекаются по прямой. Уравнения (3.22) называют *общими уравнениями прямой* в пространстве.

От общих уравнений можно перейти к каноническим следующим образом: Зададим координаты точки M_0 на прямой, придав одной из координат произвольное значение, например $x = 1$. Так как прямая перпендикулярна нормальным векторам плоскостей $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$, то направляющий вектор прямой можно получить векторным умножением

$$\vec{a} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Канонические уравнения прямой еще можно получить взяв две точки прямой вышеуказанным способом, и написать уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пример. $\begin{cases} 5x + 2y + z + 1 = 0, \\ x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

Решение. Положим, например, $x = 0$, и решим систему $\begin{cases} 2y + z + 1 = 0, \\ y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

Находим $y = -1, z = 1$, и точку $M_0(0, -1, 1)$.

$$\vec{a} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 11\vec{j} + 3\vec{k} = \{-5, 11, 3\}.$$

Пишем канонические уравнения прямой

$$\frac{x}{-5} = \frac{y + 1}{11} = \frac{z - 1}{3}.$$

5. *Угол между двумя прямыми*. Пусть две прямые заданы уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{m_0}=\frac{y-y_0}{n_0}=\frac{z-z_0}{p_0},$$
$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}.$$

Под углом между двумя прямыми понимаем угол между направляющими их векторами $\overrightarrow{a_0}$ и $\overrightarrow{a_1}$:

$$cos\varphi=\frac{m_0m_1+n_0n_1+p_0p_1}{\sqrt{m_0^2+n_0^2+p_0^2}\cdot\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}. \qquad (3.23)$$

Если прямые параллельны, то коллинеарные их направляющие векторы:

$$\frac{m_0}{m_1}=\frac{n_0}{n_1}=\frac{p_0}{p_1}. \qquad (3.24)$$

Если прямые перпендикулярны, то перпендикулярны их направляющие векторы:

$$m_0m_1+n_0n_1+p_0p_1=0. \qquad (3.25)$$

3.2.5. Прямая и плоскость в пространстве

Пусть заданы плоскость α и прямая l, соответственно, уравнениями:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Углом между прямой и плоскостью называется наименьший угол φ между прямой и ее проекцией на плоскость. Известно, что угол φ и угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой в сумме составляют прямой угол. Отсюда

$$sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (3.26)$$

Если плоскость α и прямая l параллельны, то векторы перпендикулярны. Отсюда **условие параллельности прямой и плоскости**

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (3.27)$$

А если плоскость α и прямая l перпендикулярны, то векторы параллельны. Отсюда **условие перпендикулярности прямой и плоскости**

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (3.28)$$

Точка пересечения прямой и плоскости.

Для нахождения точки пересечения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ надо решить систему их уравнений.

Берем параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$ и подставляем их в общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Найдем параметр

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp},$$

и, подставив его в уравнения прямой, получим точку пересечения.

Если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то, подставляя значение t в уравнение прямой, получим точку пересечения, если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая и плоскость параллельны, а если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит в плоскости.

3.3. Кривые второго порядка

Определение. *Кривой второго порядка* называется геометрическое место точек, заданное уравнением второй степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Это уравнение может задавать окружность, эллипс, гиперболу, параболу, точку, прямую, пару прямых, мнимый эллипс и т.д. Но мы затронем только первые четыре.

3.3.1. Окружность

Определение. *Окружностью* называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от одной заданной точки, называемой центром.

Если точка $C(a, b)$ – центр окружности, $M(x, y)$ – произвольная точка окружности и R – ее радиус, то мы можем написать:

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$$

Отсюда

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{3.29}$$

Уравнение (3.29) называется *общим уравнением окружности*. Если положим $a = 0$ и $b = 0$, то получим уравнение окружности с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пример. Найти радиус окружности $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 = 0$.

Решение. $(x - 4)^2 - 16 + (y - 6)^2 - 36 - 12 = 0$ или окончательно

$$(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 64.$$

Следовательно, радиус окружности $R = 8$.

3.3.2. Эллипс

Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Если F_1 и F_2 – фокусы, M – произвольная точка эллипса, то

$$MF_1 + MF_2 = const.$$

Чтобы вывести уравнения эллипса, введем систему координат следующим образом: проведем ось Ox слева направо через фокусы F_1 и F_2, ось Oy направим перпендикулярно оси Ox через середину отрезка F_1F_2.

Пусть $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса. По определению $MF_1 + MF_2 = const$. Обозначим эту константу через $2a > 2c$, то есть $MF_1 + MF_2 = 2a$.

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2},$$
$$MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}.$$

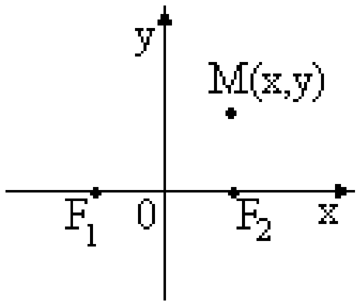


Рис. 3.11.

Тогда $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$.
Избавимся от иррациональности в уравнении:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right)^2.$$

Возводя в квадрат обе части, найдем

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 -$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

или $4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$ то есть

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Возводя снова в квадрат, получим:

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 - cx)^2,$$
$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$
$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

или

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2,$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Разделив обе части на $a^2(a^2 - c^2)$, (это мы можем, так как $a \neq c$) получим:

$$\frac{(a^2 - c^2)x^2}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)} = 1.$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1.$$

Обозначим

$$a^2 - c^2 = b^2, (a^2 - c^2 > 0, 2a > 2c \Rightarrow a > c).$$

Тогда получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.30}$$

Уравнение (3.30) называется *каноническим уравнением* эллипса. Число $2a$ называется *большой осью* эллипса, $2b$ – *малой осью* эллипса, a называется *большой полуосью* эллипса, b – *малой полуосью* эллипса.

Так как координаты x и y входят в уравнение в квадратах, эллипс симметричен относительно осей координат. Оси координат называются *осями симметрии* эллипса.

Найдем y из уравнения эллипса

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

откуда

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Отсюда находим область определения функции y:

$$a^2 - x^2 \geq 0, x^2 \leq a^2, |x| \leq a, D(y) = [-a, a].$$

Если в уравнении эллипса положить $y = 0$, мы имеем

$$\frac{x^2}{a^2} = 1, x = \pm a.$$

Это значит, что эллипс пересекает ось Ox в точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$.

Полагая $x = 0$, мы получим $\frac{y^2}{b^2} = 1$ или $y = \pm b$, то есть эллипс пересекает ось Oy в точках $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$.

Точки A_1, A_2, B_1 и B_2 называются *вершинами* эллипса.

Определение. Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса.

Так как $c < a$ для эллипса, то $\varepsilon < 1$. Эксцентриситет характеризует степень вытянутости эллипса вдоль оси Ox.

Действительно,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2}.$$

Если $b << a$ (значительно меньше, чем a) $\varepsilon \approx 1$.

При $\varepsilon \approx 1$ эллипс значительно вытянут вдоль оси Ox.

Таким образом, чем ближе эксцентриситет к единице, тем эллипс более вытянут вдоль оси Ox.

Если $b = a$, $\varepsilon = 0$, то эллипс вырождается в окружность.

Определение. Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами*.

Так как $\varepsilon < 1, \frac{a}{\varepsilon} > a$ и прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ проходят вне эллипса.

Определение. Расстояние от любой точки M эллипса до фокусов F_1 и F_2 называются *фокальными радиусами* точки M и обозначаются r_1 и r_2.

$$MF_1 = r_1, MF_2 = r_2.$$

Верно следующее утверждение: отношение фокального радиуса точки M к расстоянию до соответствующей директрисы постоянно и равно эксцентриситету

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Пример 1. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что:

а) полуоси его равны $a = 4, b = 2$,

б) расстояние между фокусами 6 и большая полуось равна 5,

в) малая полуось равна 3 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) $a = 4$, $b = 2$,

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

б) расстояние между фокусами $2c = 6$, больш. полуось а $= 5$.

Найдем с $= 3$, $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$.

Значит, каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

в) $b = 3, \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varepsilon = \frac{c}{a}, c^2 = a^2 - b^2, c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{a^2 - 9}{a^2} = \frac{1}{2}, 2a^2 - 18 = a^2, a^2 = 18.$$

Искомое уравнение

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Пример 2. Дано уравнение эллипса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вычислить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет.

Решение. Разделим обе части данного уравнения на 4225:

$$\frac{25x^2}{4225} + \frac{169y^2}{4225} = 1.$$

Получим

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Значит $a = 13, b = 5$.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 25 = 144, c = 12, \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}.$$

Итак, длины осей равны $2a = 26$, $2b = 10$, расстояние между фокусами $2c = 24$, и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

3.3.3. Гипербола

Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Чтобы вывести уравнение гиперболы, введем систему координат таким же образом, как и при выводе уравнения эллипса. Ось Ox направим через фокусы, ось Oy направим перпендикулярно оси Ox через середину отрезка F_1F_2.

Пусть $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – фокусы, $M(x,y)$ – произвольные точки гиперболы. Тогда по определению гиперболы:

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Найдем $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, MF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$.
Тогда $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$.
Избавимся от иррациональности в уравнении:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возводя в квадрат обе части, найдем:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2,$$
$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2,$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} +$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2.$$

Или

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Возводя снова в квадрат, получим:

$$(cx - a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$
$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2),$$
$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2cxa^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Разделив обе части на $a^2(c^2 - a^2)$, (это мы можем, так как $a \neq c$) получим:

$$\frac{(c^2 - a^2)x^2}{a^2(c^2 - a^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(c^2 - a^2)} = 1.$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1.$$

Для гиперболы $2c > 2a$ (разность любых двух сторон треугольника меньше третьей стороны), то есть $c > a$, значит $c^2 - a^2 > 0$. Обозначив $c^2 - a^2 = b^2$, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.31)$$

Уравнение (3.31) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Введем понятие асимптоты кривой.

Прямая линия называется *асимптотой* кривой, если расстояние от переменной точки на кривой до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки кривой от начала координат. Покажем, что прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

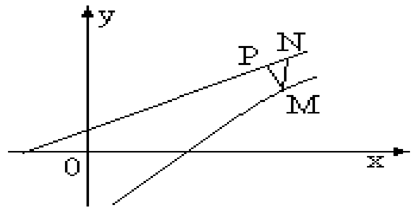


Рис. 3.12.

Из треугольника MPN: $\frac{MP}{MN} = \cos\alpha$, $\mathrm{MP} = \mathrm{MN}\cos\alpha$,

α – постоянный угол для любой точки кривой.

Поэтому расстояние от точки кривой до прямой стремится к нулю, если стремится к нулю разность ординат кривой к прямой. Из уравнения гиперболы находим $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Покажем, что прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой ветви гиперболы $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Найдем предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Аналогично можно показать, что прямая $y = -\frac{b}{a}x$ является асимптотой ветви гиперболы $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

Так как координаты x и y входят в уравнение гиперболы в квадратах, то гипербола симметрична относительно осей координат. Оси координат являются осями симметрии гиперболы.

Выразим y из уравнения гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1, y^2 = \frac{b^2}{a^2}\sqrt{x^2 - a^2}, y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

y определено при $x^2 - a^2 \geq 0$, то есть при $|x| \geq a$.

Таким образом, кривая определена при $|x| \geq a$.

При $\text{y} = 0$ имеем $x = \pm a$. Гипербола пересекает ось Ox в точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$.

Точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ называются *вершинами* гиперболы.

Число $2a$ называется *действительной осью* гиперболы, a – *действительной полуосью*.

При $x = 0$, $\quad y^2 = -b^2$. Это значит, что гипербола не пересекается с осью Oy. Число $2b$ называется *мнимой осью* гиперболы, b – *мнимой полуосью*.

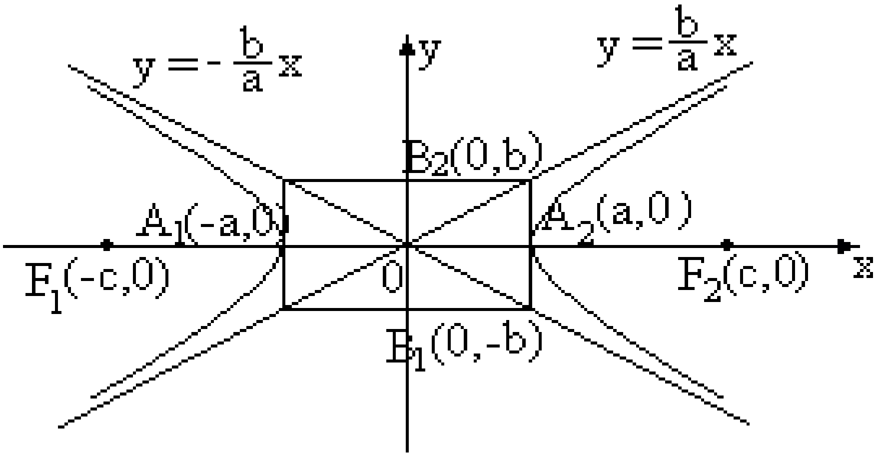


Рис. 3.13.

При $|x| \to \infty, |y| \to \pm\infty$. Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ являются *асимптотами* гиперболы.

Определение. Число, равное $\varepsilon = \frac{c}{a}$, называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon > 1$, так как $c > a$.

Определение. Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Так как $\varepsilon > 1$, директрисы $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ проходят между вершинами A_1 и A_2. $MF_1 = r_1, MF_2 = r_2$ называются *фокальными радиусами* точки M гиперболы.

Если d_1 и d_2 – расстояния от точки M гиперболы до левосторонней и правосторонней директрисс соответственно, то $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Пример 1. Написать каноническое уравнение гиперболы зная, что:

а) полуоси гиперболы равны 4 и 2,

б) действительная ось равна 6, и гипербола проходит через точку *(8; –3),*

в) асимптоты гиперболы $y = \pm 2x$ и расстояние между фокусами равно 10.

Решение. а) $a = 4, \quad b = 2$. Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

б) $2a = 6, \qquad a = 3, \qquad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как гипербола проходит через точку $(8, –3)$, координаты этой точки удовлетворяют уравнению гиперболы

$$\frac{64}{16} - \frac{9}{b^2} = 1, 4 - 1 = \frac{9}{b^2}, 3 = \frac{9}{b^2}, 3b^2 = 9, b^2 = 3.$$

Искомое уравнение

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

в) асимптоты гиперболы $y = \pm 2x \; 2c = 10$.

Уравнения асимптот $y = \pm \frac{b}{a} x$, значит, $\quad \frac{b}{a} = 2$.

Известно $2c = 10$, $\quad$ то есть $c = 5 \quad b^2 = c^2 - a^2$,

$$\begin{cases} b^2 = 25 - a^2, \\ \dfrac{b}{a} = 2. \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений

$$\begin{cases} 4a^2 = 25 - a^2, \\ b = 2a, \end{cases} \begin{cases} 5a^2 = 25, \\ b = 2a, \end{cases} \begin{cases} a^2 = 5, \\ b = 2a, \end{cases} \begin{cases} a = \sqrt{5}, \\ b = 2\sqrt{5}. \end{cases}$$

Искомое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

Пример 2. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Вычислить: а) координаты фокусов,

б) эксцентриситет,

в) записать уравнения асимптот и директрис.

Решение.

а) $a = 3, b = 4, c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25, c = 5$.

Координаты фокусов $F_1(-5, 0)$ и $F_2(5, 0)$.

б) $\varepsilon = \frac{c}{a}, \varepsilon = \frac{5}{3}$.

в) уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$, уравнения директрис $x = \pm\frac{9}{5}$.

3.3.4. Парабола

Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Обозначим расстояние между фокусом F и директрисой через p (p называется параметром параболы).

Введем систему координат следующим образом: пусть ось Ox проходит через фокус F, перпендикулярно директрисе, ось Oy проходит перпендикулярно оси Ox через середину отрезка NF (N – точка пересечения оси Ox с директрисой).

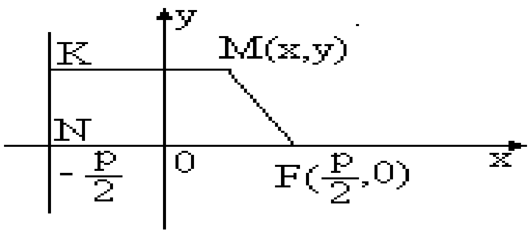


Рис. 3.14.

Если $M(x,y)$ – любая точка параболы, то $MK = MF.$

Найдем

$$MF = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}, MK = \left|x+\frac{p}{2}\right|,$$
$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}\right)^2 = \left(\left|x+\frac{p}{2}\right|\right)^2,$$
$$(x-\frac{p}{2})^2 + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$
$$y^2 = 2px. \qquad (3.32)$$

Уравнение (3.32) называется *каноническим уравнением* параболы.Так как координата y входит в уравнение параболы в квадрате, парабола симметрична относительно оси OX.

При $x = 0, y = 0$, то есть парабола проходит через начало координат. При $x \to \infty, |y| \to \infty$.

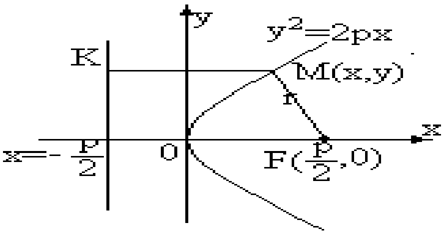


Рис. 3.15.

Определение. Расстояние от любой точки параболы до фокуса называется *фокальным радиусом* точки и обозначается через r.

Пример. Составить уравнение параболы, зная, что парабола симметрична относительно оси Ox и:

а) расстояние фокуса от вершины равно 3,

б) проходит через начало координат и точку $M(1,-4)$.

Решение. а) $y^2 = 2px, \frac{p}{2} = 3, p = 6$

Искомое уравнение $y^2 = 12x$

б) $y^2 = 2px$. Так как точка $M(1,-4)$ принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению параболы. $16 = 2p$, $p = 8$. Искомое уравнение $y^2 = 16x$.

3.4. Поверхности второго порядка

Определение. *Поверхностью второго порядка* называется поверхность, выражающаяся уравнением второй степени

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + ax + by + cz + d = 0, \tag{3.33}$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, C, D, E, F отличен от нуля.

При разных значениях коэффициентов уравнение определяет разные поверхности, например, при $A = B = C = 1, D = E = F = a = b = c = 0, d = -R^2$ уравнение имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. А это уравнение *сферы* с центром в начале координат, с радиусом R. Если центр сферы находится в точке с координатами (x_0, y_0, z_0), то ее уравнение имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \qquad (3.34)$$

Уравнение (3.34) называется *общим уравнением сферы.*

Раскрывая скобки, можно убедиться, что это уравнение вида (3.33) где

$$A = B = C = 1, D = E = F = 0, a = -2x_0, b = -2y_0, c = -2z_0,$$

$d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$. Значит, сфера есть поверхность второго порядка. Рассмотрим некоторые виды поверхностей второго порядка.

3.4.1. Цилиндрические поверхности

Поверхность, образованная параллельным движением некоторой прямой по некоторой кривой линии, называется цилиндрической поверхностью.

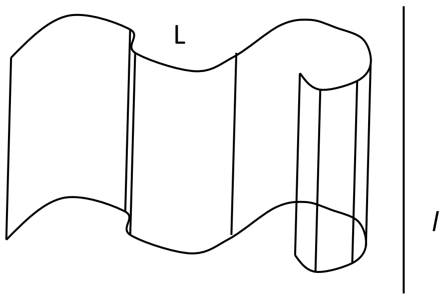


Рис. 3.15

Прямая называется образующей цилиндрической поверхности, а кривая – направляющей. Если образующая параллельна оси Oz, а кривая лежит на плоскости Oxy, то имеем $F(x, y) = 0$. Соответственно, если образующая параллельна оси $0x$, а кривая лежит на плоскости Oyz, то имеем $F(y,z) = 0$, при образующей параллельной оси Oy, а кривая лежит на плоскости Oxz, то имеем $F(x,z) = 0$.

Пример 1. Уравнением $x^2 + y^2 = R^2$ определяется *круговой цилиндр*, с осью параллельной Oz, его направляющая есть окружность с центром в начале координат, с радиусом R на плоскости Oxy.

Пример 2. Уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ определяется *гиперболический цилиндр*, с осью параллельной Oy, его направляющая – гипербола с центром в начале координат на плоскости Oxz.

Таким образом, уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяется эллиптический цилиндр, уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр, а уравнением $y^2 = 2px$ – параболический цилиндр.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad y^2 = 2px$$

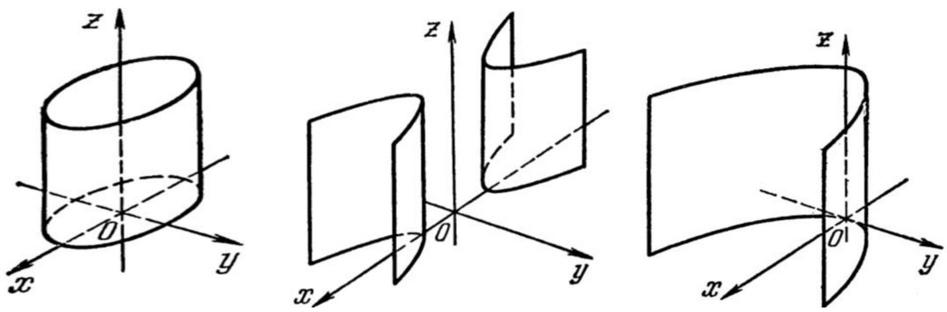


Рис. 3.16.

3.4.2. Поверхности вращения

Поверхность, образованная вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, называется *поверхностью вращения*. Кривая называется медианой, ось – осью вращения.

Часто используется свойство параболоида вращения собирать пучок лучей, параллельных главной оси, в одну точку – фокус, или, наоборот, формировать параллельный пучок излучения от находящегося в фокусе источника. На этом принципе основана работа параболических антенн, телескопов-рефлекторов с параболическим зеркалом, прожекторов, автомобильных фар и так далее.

Мы рассмотрим поверхности, осью вращения которых являются координатные оси.

Пусть поверхность имеет ось вращения Oz, а медиана – плоская кривая на плоскости Oyz, заданная уравнением $\begin{cases} F(y,z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

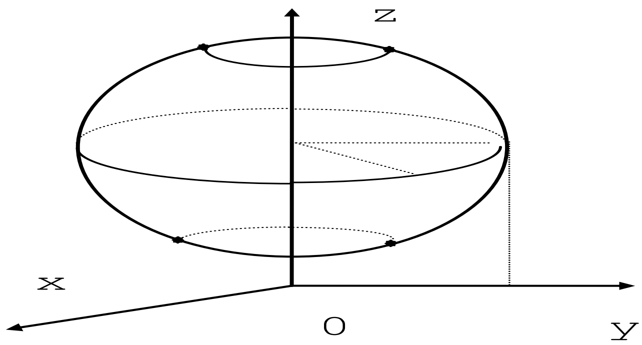


Рис. 3.17.

Пусть $M(x, y, z)$ – любая точка поверхности вращения, через точку $M(x, y, z)$ проводим перпендикулярную плоскость Q к оси $0z$. Центром поверхности вращения на плоскости Q является точка O_1. Тогда $|O_1M| = |O_1P| = |y_1|$.

$$|O_1M_1| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}, y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$F(y_1, z) = 0$, потому что точка $P(0, y_1, z)$ лежит на медиане. Отсюда

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{3.35}$$

(3.35) – уравнение поверхности вращения относительно оси Oz.

Если $F(y,z)=0, x=0$, и медиану вращать вокруг оси Oy, то уравнение имеет вид:

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0. \qquad (3.36)$$

Если $F(y,z)=0, x=0$, и медиану вращать вокруг оси Ox, то уравнение имеет вид:

$$F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0. \qquad (3.37)$$

3.4.3. Эллипсоиды вращения

а) Если вращать эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ заданный на плоскости Oxz вокруг оси Oz, то получим следующий эллипсоид вращения:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3.38)$$

б) Если этот же эллипс вращать вокруг оси Ox, то получим следующий эллипсоид вращения:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3.39)$$

с) Если в (3.38) взять $a=c$, то получим сферу

$$x^2+y^2+z^2=a^2. \qquad (3.40)$$

3.4.4. Общее уравнение эллипсоида

Поверхность, заданная следующим уравнением, называется *эллипсоидом*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3.41}$$

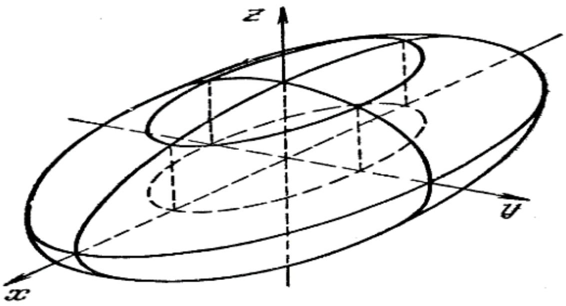


Рис. 3.18.

3.4.5. Однополостные гиперболоиды вращения

а) Если вращать вокруг оси Oz гиперболу, заданную на плоскости Oyz, то получим однополостный гиперболоид вращения, определяемый следующим уравнением:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3.42}$$

б) Если вращать вокруг оси $0y$ гиперболу, заданную на плоскости $0xy$, то получим однополостный гиперболоид вращения, определяемый следующим уравнением:

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.43}$$

с) Если вращать вокруг оси $0z$ гиперболу, заданную на плоскости $0xz$, то получим однополостный гиперболоид вращения, определяемый следующим уравнением:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3.44)$$

3.4.6. Однополостные эллиптические гиперболоиды

Поверхности, заданные следующими уравнениями, называются однополостными эллиптическими гиперболоидами:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (3.45)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (3.46)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3.47)$$

Если пересечь эти поверхности плоскостями $z=h, y=k, x=t$ соответственно, то в сечениях получим эллипсы.

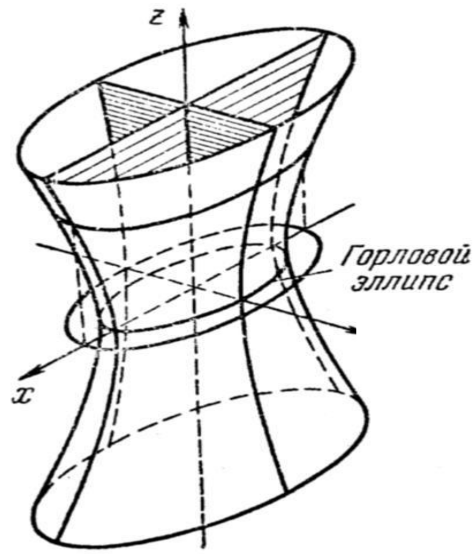


Рис. 3.19.

3.4.7. Двуполостные гиперболоиды вращения

а) Если вращать вокруг оси Oy гиперболу, заданную на плоскости Oyz, то получим двуполостный гиперболоид вращения, определяемый следующим уравнением:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3.48}$$

б) Если вращать вокруг оси Ox и Oz гиперболы, заданные на плоскости Oxy и Oxz соответственно, то получим двуполостные гиперболоиды вращения, определяемые следующими уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{3.49}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3.50}$$

3.4.8. Двуполостные эллиптические гиперболоиды

Поверхности, заданные следующими уравнениями, называются двуполостными эллиптическими гиперболоидами:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{или} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{4.19}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{4.20}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{4.21}$$

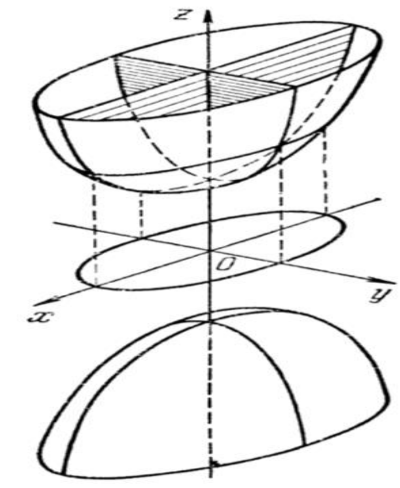


Рис. 3.20.

3.4.9. Параболоиды. Параболоиды вращения

а) Если вращать вокруг оси Ox параболу $y^2 = 2px$, заданную на плоскости Oxy, то получим поверхность, заданную следующим уравнением и называемую параболоидом вращения:

$$y^2 + z^2 = 2px. \tag{3.51}$$

б) Таким же образом, если вращать вокруг оси Oz и Oy, соответственно, параболу $x^2 = 2pz$, заданную на плоскости Oxz, и $z^2 = 2py$, и заданную на плоскости Oyz, то получим поверхности, заданные следующими уравнениями и называемые параболоидами вращения

$$x^2 + y^2 = 2pz. \tag{3.52}$$
$$x^2 + z^2 = 2py. \tag{3.53}$$

3.4.10. Элиптические параболоиды

Поверхности, заданные следующими уравнениями, называются эллиптическими параболоидами:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad \frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y, \quad \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x. \qquad (3.54)$$

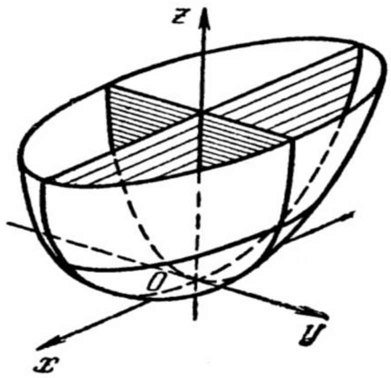


Рис. 3.21.

3.4.11. Гиперболические параболоиды

Поверхности, заданные следующими уравнениями, называются гиперболическими параболоидами

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad \frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2y, \quad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x. \qquad (3.55)$$

Или их можно записать:

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z, \quad \frac{x^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=y, \quad \frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x. \qquad (3.56)$$

Ниже рассмотрим гиперболический параболоид $\frac{y^2}{2q}-\frac{x^2}{2p}=z$. Если взять $z=h$, то получим гиперболу $\frac{y^2}{2qh}-\frac{x^2}{2ph}=1$; если положим $x=0$, то получим параболу $y^2=2qz$, если $y=0$, то получим параболу $x^2=2qz$, а если положим $z=0$, то получим две прямые

$\frac{y^2}{2q} - \frac{x^2}{2p} = 0$ или $\frac{y^2}{q} - \frac{x^2}{p} = 0$, отсюда $\left(\frac{y}{\sqrt{q}} - \frac{x}{\sqrt{p}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{q}} + \frac{x}{\sqrt{p}}\right) = 0$, прямые лежат на плоскости Oxy. $\frac{y}{\sqrt{q}} - \frac{x}{\sqrt{p}} = 0, \frac{y}{\sqrt{q}} + \frac{x}{\sqrt{p}} = 0$ или $y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}x$.

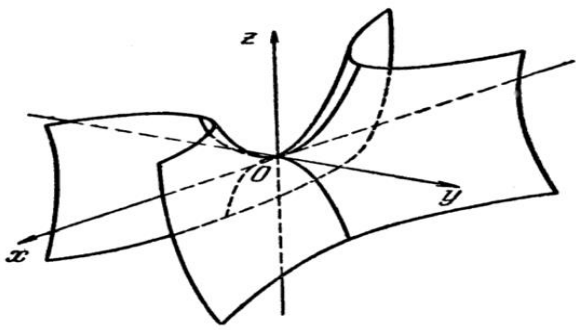


Рис. 3.22.

3.5. Применение аналитической геометрии на производстве

Аналитическая геометрия довольно распространена при решении и визуализации экономических задач на производстве.

Математическое решение задачи оптимального функционирования экономического объекта означает нахождение критерия оптимальности деятельности экономического объекта.

Рассмотрим пример, показывающий, как вычислить наиболее экономичное расстояние для перевозок.

Пример 1. Издержки перевозки двумя транспортными средствами выражаются функциями $y = 20x + 100$ и $y = 25x + 70$, где x – это дальность перевозки в сотнях километров, а y – транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится первое транспортное средство.

Решение. Для нахождения требуемого расстояния приравниваем транспортные расходы: $y = 20x + 100 = 25x + 70$, $x = 6$. Итак, при перевозке на $x = 6$ сотен километров транспортные расходы совпадают и составляют $y = 20 \cdot 6 + 100 = 220$ денежных единиц. Поэтому, начиная с 600 км, более экономичным становится первый вид транспорта.

Рассмотрим вторую задачу, чтобы выяснить разницу между выручкой и издержками.

Точка безубыточности – это такой объём производства, начиная с которого выручка покрывает издержки.

Задача 1. Мебельная фабрика продаёт каждый изготовленный стул по 64 тыс. сумов. При этом издержки составляют 635 тыс. сумов. за 8 стульев и 750 тыс. сумов. за 13 стульев. Найти точку безубыточности, если функция издержек линейная.

Решение. Построим функцию издержек $y(x)$ как прямую, проходящую через точки $M_1(8{,}635)$ и $M_1(13{,}750)$.

$$\frac{y-635}{750-635}=\frac{x-8}{13-8},$$
$$\frac{y-635}{115}=\frac{x-8}{5},$$
$$\frac{y-635}{23}=\frac{x-8}{1},$$
$$y-635=23(x-8),$$
$$y=23x+451.$$

Функция выручки по условию имеет вид $y=64x$. Находим точку безубыточности как абсциссу точки пересечения линий издержек и выручки.

$$23x+451=64x,$$
$$x=11.$$

Вопросы для самопроверки

Уравнения прямой и плоскости

1. Что называется уравнением прямой на плоскости в отрезках?

2. Как найти координаты нормального вектора к прямой на плоскости по ее уравнению?

3. Какова формула расстояния от точки до прямой на плоскости?

4. Что называется уравнением плоскости в отрезках?

5. Как составить уравнение плоскости, проходящей через три точки?

6. Как составить уравнение плоскости, перпендикулярной к данной прямой и проходящей через заданную точку?

7. Как найти координаты нормального вектора к плоскости по ее уравне- нию?

8. Как найти угол между плоскостями?

9. Какими способами можно задать прямую в пространстве?

Кривые и поверхности второго порядка

1. Что такое эллипс?
2. Что такое парабола?
3. Что такое гипербола?
4. Что такое эксцентриситет эллипса?
5. Что такое эксцентриситет параболы?
6. Что такое эксцентриситет гиперболы?
7. Что такое фокусы и фокальные радиусы эллипса?
8. Что такое фокусы и фокальные радиусы гиперболы?
9. Что такое фокус и фокальный радиус параболы?
10. Что такое директриса параболы?
11. Каково уравнение сферы?
12. Что такое цилиндрические поверхности?
13. Что такое поверхности вращения?
14. Что такое эллипсоид?
15. Что такое полуоси эллипсоида?
16. Что такое параболоид?
17. Что такое гиперболоид?

“В математике логика называется анализом,
анализ же — значит разделение, рассечение.”
Анри Пуанкаре

ГЛАВА IV. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ПРЕДЕЛЫ

4.1. Понятие функции. Основные элементарные функции

4.1.1. Переменные и постоянные величины

В математике величины бывают переменными и постоянными. В различных явлениях некоторые величины изменяются, то есть меняются их числовые значения, а в других – сохраняются их числовые значения. Например, при равномерном движении точки время и расстояние меняются, а скорость остается постоянной.

Величина, которая принимает различные числовые значения, называется *переменной* величиной. Переменные величины будем обозначать буквами $x, y, z, t, u, v, \ldots$. Величина, числовые значения которой не меняются, называется *постоянной* величиной. Постоянные величины будем обозначать буквами $a, b, c, k, n, m, \ldots$.

Следует отметить, что в некоторых случаях одна и та же величина в одном явлении может остаться постоянной, а в другом – переменной. Например, скорость равномерного движения есть величина постоянная, а скорость равноускоренного движения – величина переменная. Величины, которые сохраняют свои значения в любых явлениях, называются *абсолютными постоянными*. Например, ускорение свободного падения, отношение длины окружности к ее диаметру есть постоянные величины.

4.1.2. Понятие функции и способы ее задания

Определение. Если каждому значению переменной величины x соответствует определенное значение другой переменной величины y, то переменная y называется *функцией* от переменной x и мы пишем $y = f(x)$.

При этом х называется *независимой* переменной или *аргументом*. А y – *зависимой* переменной или ее *функцией*.

Определение. Совокупность всех значений независимой переменной x, для которых функция y определена, называется *областью определения* этой функции, обозначается $D(f), D(y)$.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \sqrt{9 - x^2}$.

Решение. Эта функция определена при $9 - x^2 \geq 0$, т. е. $x^2 \leq 9$. Отсюда $|x| \leq 3$ или $-3 \leq x \leq 3$.

Определение. Совокупность всех значений зависимой переменной y называется *областью значения* функции и обозначается $E(f), E(y)$.

Функции можно задавать разными способами. Если функциональная зависимость выражена в виде формулы $y = f(x)$, то считают, что она задана *аналитически*.

Например, $y = \sqrt{4 - x}$, $y = ln\,(1 - x)$ и т.д.

Функции в своей области определения можно задавать разными формулами, например: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{если } x \in [-1; +1], \\ 0 \text{ если } x \notin [-1; +1]. \end{cases}$

Функции можно задавать табличным способом:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

В первой строке таблицы – значения аргумента, во второй – соответствующие значения функции.

Функциональная зависимость между X и Y задается в виде графика.

Примером графического изображения функции является так называемая барограмма (запись самопишущего прибора – барографа), дающая графическое изменение атмосферного давления в зависимости от времени.

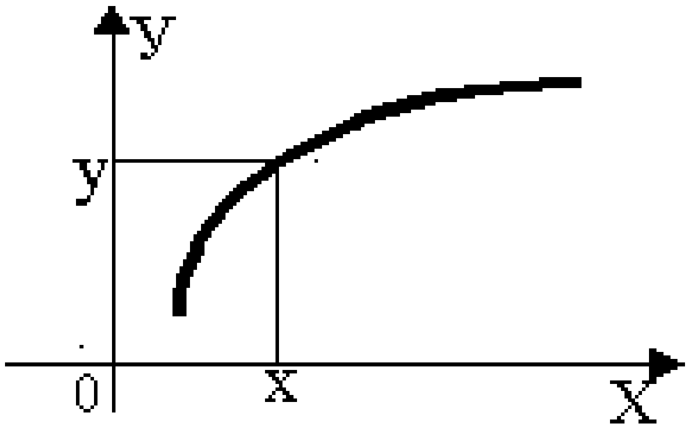


Рис. 4.1.

Теперь рассмотрим **свойства** функций: четность, нечетность, периодичность, возрастание, убывание.

Пусть задана функция $y = f(x)$ в своей области определения $D(f) = [a, b]$.

Определение. Если для любых двух значений $x: x_1 < x_2$ из области определения выполняется $f(x_1) < f(x_2)$, то функция f называется *возрастающей*.

Определение. Если для любых двух значений $x: x_1 < x_2$ из области определения выполняется $f(x_1) > f(x_2)$, то функция f называется *убывающей*.

Пример. Функция $y = 4x - 7$ возрастающая.

Функция $y = x^2$ убывает на $(-\infty, 0)$, и возрастает на $(0, +\infty)$.

Определение. Если для любых двух значений $x: x_1 < x_2$ из области определения выполняется $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция f называется *неубывающей*.

Определение. Если для любых двух значений $x: x_1 < x_2$ из области определения выполняется $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция f называется *невозрастающей*.

Неубывающие или невозрастающие функции называются *монотонными*.

Определение. Если для любого значения x из области определения выполняется условие $f(-x) = f(x)$, то функция называется *четной*, если $f(-x) = -f(x)$, то – *нечетной*, а если существует x такой, что $f(-x) \neq \pm f(x)$, то – *ни четной, ни не четной*.

Определение. Если существует постоянное число T, что для функции $f(x)$ для любого x выполняется $f(x) = f(x \pm T)$, то функция называется *периодической*, а наименьшее из T – ее *периодом*.

4.1.3. Основные элементарные функции

1. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, где α – действительное число.

Если α – целое положительное число, то функция определена на всей числовой оси, то есть $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Графики степенной функции при некоторых значениях α имеют вид:

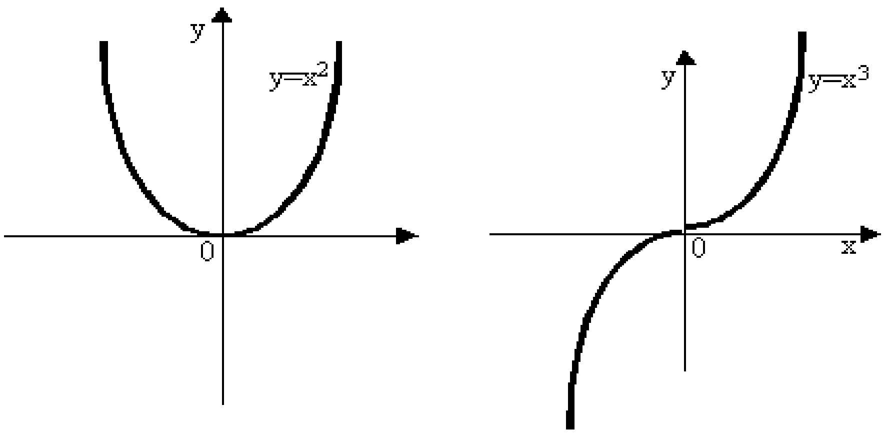


Рис. 4.2.

В случае когда α – целое отрицательное число, функция определена при всех значениях x, кроме $x = 0$, то есть $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

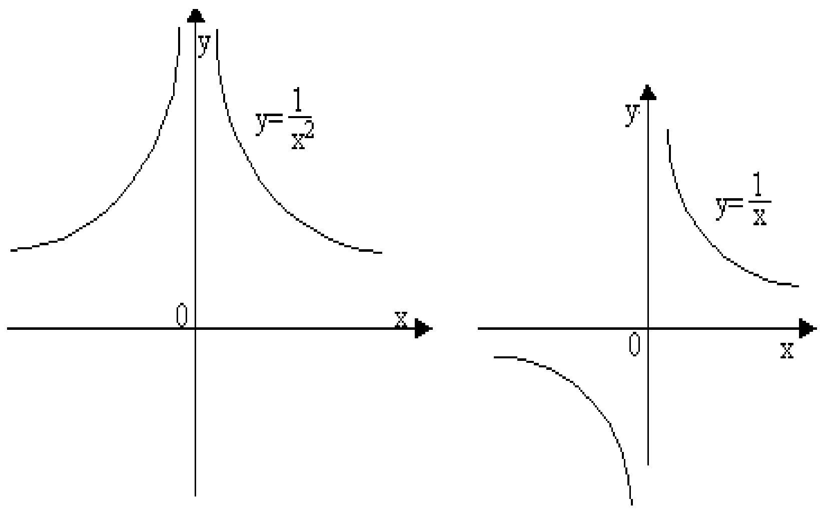


Рис. 4.3.

2. Показательная функция. $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения $D\ (y) = (-\infty; +\infty)$, область значений $E(y) = (0; \infty)$.

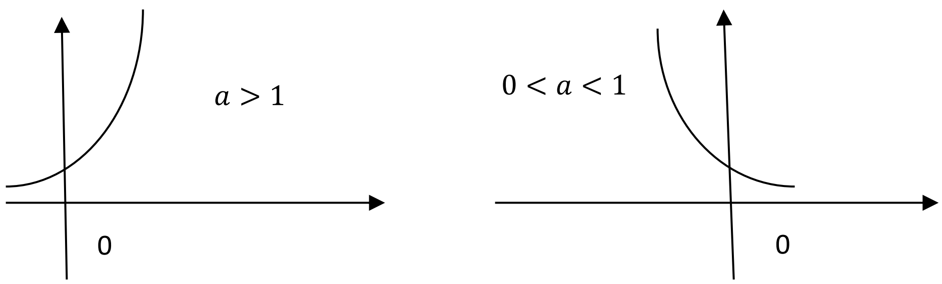


Рис. 4.4.

3. Логарифмическая функция. y $= log_a x, a > 0, a \neq 1$.

Область определения $D(y) = (0;\ \infty)$, область значений $E\ (y) = (-\infty;\ +\infty)$.

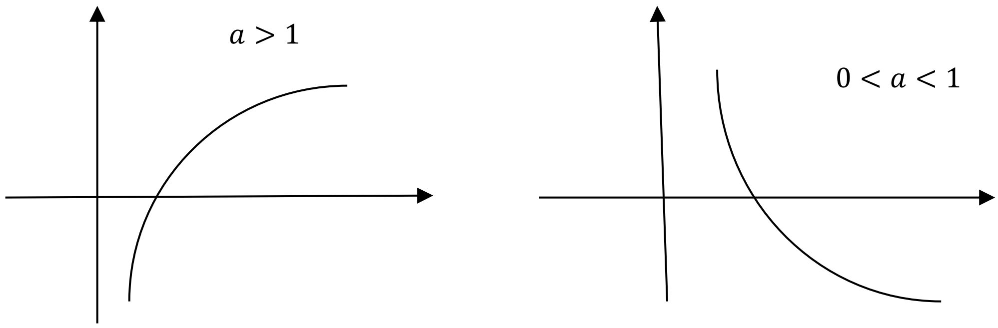


Рис. 4.5.

4. Тригонометрические функции

$$y = sinx, y = cosx,$$
$$y = tgx, y = ctgx.$$

Функции $\sin x$, tgx и $ctgx$ – нечетные, функция $\cos x$ – четная. Функции $\sin x$ и $\cos x$ – периодические с периодом $T = 2\pi$, функции tgx и $ctgx$ периодические с периодом π. Таким образом:

$$sin(x + 2\pi) = sinx, cos(x + 2\pi) = cosx,$$
$$tg(x + \pi) = tgx, ctg(x + \pi) = ctgx.$$

Графики тригонометрических функций

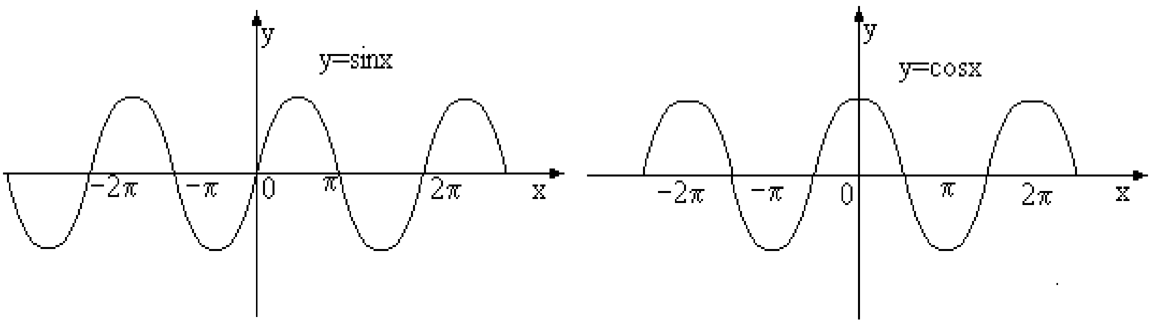


Рис. 4.6.

5. Обратные тригонометрические функции.

1) $y = arcsinx$ – функция, обратная к $y = sinx$. Область определения $D(y) = [-1, 1]$; область значений $E(y) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2) $y = arccosx$ – функция, обратная к $y = cosx$. Область определения $D(y) = [-1, 1]$, область значений $E(y) = [0, \pi]$.

3) $y = arctgx$ – функция, обратная к $y = tgx$. Область определения $D(y) = (-\infty, \infty)$, область значений $E(y) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4) $y = arcctgx$ – функция, обратная к $y = ctgx$. Область определения $D(y) = (-\infty, \infty)$, область значений $E(y) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4.1.4. Сложная функция. Обратная функция

Пусть y – функция от u, то есть $y = f(u)$, а u – есть функция от x, то есть $u = \varphi(x)$. Тогда $y = f\,(\varphi(x))$ называется *сложной* функцией от x. (сложная функция от x – это есть функция от функции от x).

Например: $y = sin^2 x$ здесь $y = u^2$, где $u = sinx$.

Определение. Элементарная функция – это функция, которая может быть представлена в виде одной формулы вида $y = f\,(x)$, где выражение в правой части составлено из основных элементарных функций и констант посредством конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и операции образования сложной функции.

Примеры. $y = tg\sqrt{1+x}$, $y = \frac{cos2x}{ln\,(x^2-x+2)}$ и т.д.

Пусть дана возрастающая (или убывающая) функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a, b). Тогда между значениями x и соответствующими им значениями y устанавливается взаимно однозначное соответствие. Если решить относительно x, то получим функцию x, зависимую от аргумента y: $x = \varphi(y)$.

Функция $x = \varphi(y)$ называется *обратной* для функции $y = f(x)$. Очевидно, что функция $y = f(x)$ называется обратной для функции $x = \varphi(y)$. Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ являются взаимно обратными, то графиками их является одна и та же кривая. А если аргумент обратной функции обозначим снова через x, а функция через y, то получим два различных графика, симметричные относительно биссектрис первого и третьего координатных углов.

4.2. Числовая последовательность. Монотонность, ограниченные последовательности. Предел числовой последовательности

4.2.1. Общие понятия

Определение. Если каждому натуральному числу n соответствует определенное действительное число x_n, то мы считаем, что задана *числовая последовательность* $\{x_n\}$.

Можно сказать, что значения функции с натуральным аргументом есть числовая последовательность $\{x_n\} = \{f(n), n \in N\}$.

Числа x_n $(n \in N)$ называются членами числовой последовательности. Числовая последовательность может быть задана формулой общего члена.

Пример. $x_n = \frac{n}{n+2}$. $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{n}{n+2}, \dots\right\}$.

Мы будем рассматривать бесконечные числовые последовательности.

Определение. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если для любого $n \in N$, существует M так, что выполняется неравенство $x_n < M$. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если для любого $n \in N$, существует m так, что выполняется неравенство $x_n > m$. Последовательность называется *ограниченной,* если она ограничена и сверху, и снизу.

Определение. Если для любого $n \in N$ выполняется $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$, то последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей) последовательностью. Если для любого $n \in N$ выполняется $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)* последовательностью.

Примеры. 1) $\{x_n\} = \{2n\} = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ – возрастающая последовательность, ограниченная снизу.

2) $\{x_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\} = \left\{2, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots, \frac{2}{n}, \dots\right\}$ – убывающая ограниченная последовательность.

3) $\{x_n\} = \{1 - n\} = \{0, -1, -2, \dots, 1 - n, \dots\}$ – убывающая последовательность, ограниченная сверху.

4.2.2. Предел числовой последовательности

Предел — это основное понятие математического анализа. Достаточно напомнить, что ключевым словом в определениях таких известных со школы понятий, как производная и интеграл, является слово предел.

Определение. Число a называется *пределом* числовой последовательности, если для любого как угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, существует такой номер последовательности $N = N(\varepsilon)$ (зависящий от ε), что члены последовательности с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если a – есть предел числовой последовательности $\{x_n\}$, то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ можно записать в виде двойного неравенства: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

С геометрической точки зрения, эти неравенства показывают, что для сколь угодно малой ε – окрестности точки a может быть указан номер N, что члены последовательности с номерами $n > N$ будут находиться внутри интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Вне этого интервала будет конечное число членов числовой последовательности.

Пример. Доказать, что $2/3$ является пределом числовой последовательности $\{ x_n \}$, если $x_n = \frac{2n-3}{3n+2}$.

Пусть ε – любое малое положительное число и $|x_n - a| < \varepsilon$, то есть

$$\left|\frac{2n-3}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon.$$

Решив это неравенство, получим $n > \frac{13}{9\varepsilon} - \frac{2}{3}$ $N = \left[\frac{13}{9\varepsilon} - \frac{2}{3}\right]$. Начиная с $n = N + 1$, члены последовательности x_n удовлетворяют неравенству $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

Последовательность, имеющая конечный предел называется *сходящейся*, а последовательность, имеющая бесконечный предел или не имеющая предела, называется *расходящейся,* например, последовательность

$$\{x_n\} = \{(-1)^{n+1}n\} = \{1, -2, 3, -4, \dots, (-1)^{n+1}n, \dots\}$$

расходится.

Ниже приводим теоремы без доказательств.

Теорема. Всякая неубывающая числовая последовательность, ограниченная сверху, имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $(a < M)$ и всякая невозрастающая числовая последовательность, ограниченная снизу, имеет конечный предел.

Теорема. Если для двух сходящихся последовательностей, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \le y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \le b$.

Теорема. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \le z_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ (эту теорему иногда называют теоремой о двух милиционерах).

4.3. Число e. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно большие функции. Бесконечно малые и их основные свойства. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых

4.3.1. Число e

Рассмотрим числовую последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что эта последовательность возрастает и ограничена сверху. Тогда на основании вышеуказанной теоремы она будет иметь конечный предел. На основании формулы бинома Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + n\frac{(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \\ + \cdots + + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \cdots + x^n$$

Имеем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \\ + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \\ + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \\ + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (4,1)$$

Мы видим, что $x_n \geq 2$ для любого n.

Докажем, что эта последовательность ограничена сверху.

$$x_n \le 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Выражение в скобках представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Итак, $2 \le x_n \le 3$, то есть последовательность $\{x_n\} = \{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ограничена и снизу, и сверху.

Теперь покажем, что эта последовательность монотонно возрастает.

Рассмотрим $x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$. Разложим x_{n+1} по формуле бинома Ньютона и запишем в виде (3.1)

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \\ + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \quad (4.2)$$

Каждое слагаемое в разложении x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в разложении x_n. Причём в (3.2) на одно слагаемое больше (все слагаемые положительны). Следовательно, $x_n < x_{n+1}$.

Итак, последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ возрастает и ограничена. Следовательно, она имеет конечный предел.

Предел этой последовательности обозначается буквой e:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = e.$$

Ясно, что $2 \le e \le 3$. Установлено, что e есть иррациональное число. Его приближённое значение $e \approx 2{,}7182818284 \ldots$

4.3.2. Предел функции в точке

Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная в окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки.

Определение. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого, как угодно малого положительного числа ε, можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Если b есть предел функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

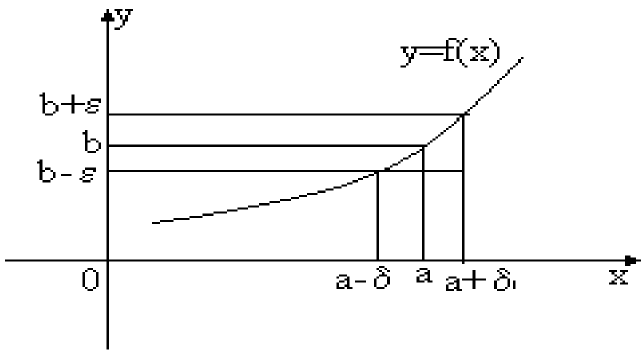


Рис. 4.7.

4.3.3. Геометрическая интерпретация определения предела функции в точке

Неравенство $|x - a| < \delta$ можно записать в виде $-\delta < x - a < \delta$ или $a - \delta < x < a + \delta$. Соответственно, неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству: $-\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon$ или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ то есть, для x, удовлетворяющих неравенству $a - \delta < x < a + \delta$, будет выполняться неравенство $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Таким образом, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то для значений x, лежащих между $a - \delta$ и $a + \delta$, соответствующие значения функции лежат внутри полосы, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$.

4.3.4. Предел функции на бесконечности

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N > 0$, что при $x > N$ $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае пишут

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

Геометрическая интерпретация:

Для x, удовлетворяющих неравенству $x > N$, соответствующие значения функции $f(x)$ удовлетворяют неравенству $|f(x) - b| < \varepsilon$ или

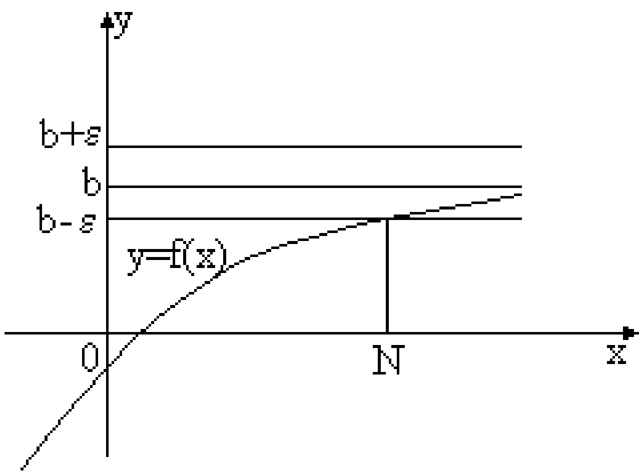


Рис. 4.8.

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Таким образом, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, то для любого положительного числа ε, найдётся такое число N, что при $x > N$ соответствующие значения функции будут находиться в полосе от $b - \varepsilon$ до $b + \varepsilon$.

4.3.5. Бесконечно большие функции

Определение. Функция $y = f(\text{x})$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$, как угодно большого, найдётся такое число $\delta > 0$, что при x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется $|f(x)| > M$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Геометрическая интерпретация:

Неравенство $|x - a| < \delta$ равносильно неравенствам: $-\delta < x - a < \delta$ и $a - \delta < x < a + \delta$.

Итак, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то это значит, что для любого, как угодно большого числа M, найдётся такая окрестность точки

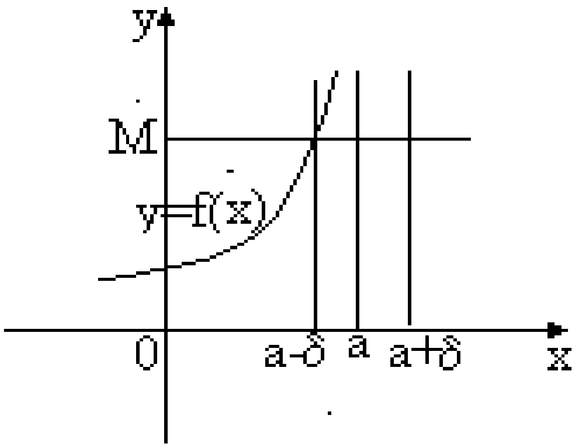


Рис. 4.9.

a: $(a - \delta, a + \delta)$, что при x, лежащих в этой окрестности, соответствующие значения функции будут по абсолютной величине больше M, то есть $|f(x)| > M$.

4.3.6. Ограниченные функции

Определение. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* в некоторой области изменения x, если существует такое число $M > 0$, что для всех x из этой окрестности $|f(x)| \leq M$.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной при x, стремящемся к a, если существует окрестность точки $x = a$, что в этой окрестности функция $f(x)$ ограничена.

Теорема. Функция, имеющая конечный предел при x, стремящемся к a, ограничена при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = b$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ выполняется в δ-окрестности точки $x = a$. Из этого неравенства следует двойное неравенство $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ или $|f(x)| < |b| + \varepsilon$.

Это означает, что $f(x)$ ограничена при x, стремящемся к a.

4.3.7. Бесконечно малые и их свойства

Определение. Функция, предел которой при $x \to a$ (или $x \to \infty$) равен нулю, называется бесконечно малой при $x \to a$ (или $x \to \infty$), то есть $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, если $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Бесконечно малые обозначаются $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и так далее.

Далее приведем несколько свойств бесконечно малых без доказательств.

Теорема 1. Алгебраическая сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая, то есть, если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две бесконечно малые при $x \to a$ (или $x \to \infty$), то $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ (или $x \to \infty$).

Теорема 2. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную при $x \to a$ (или $x \to \infty$), есть бесконечно малая.

Следствие 1. Произведение двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая то есть, если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые, то произведение $\alpha(x)\beta(x)$ – бесконечно малые.

Следствие 2. Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая, то есть, если $\alpha(x)$ – бесконечно малая, то $C\alpha(x)$, где $C = const$, есть бесконечно малая.

Теорема 3. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ (или $x \to \infty$) то $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая.

Теорема 4. Частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ от деления бесконечно малой на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

Теорема 5. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (или $x \to \infty$) то $f(x) = b + \alpha$, где α – бесконечно малая при $x \to a$ (или $x \to \infty$), и обратно, если $f(x)$ может быть представлена в виде: $F(x) = b + \alpha,$ где $b = const$, α – бесконечно малая при $x \to a$ (или $x \to \infty$), то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (или $x \to \infty$).

4.3.8. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций, при условии, что каждый из пределов существует.

$$\lim_{x\to a}\big(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\big) =$$
$$= \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + \cdots + \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Теорема 2. Предел произведения двух, трех и вообще конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, при условии, что каждый из пределов существует, то есть

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)\right)=$$
$$=\lim_{x\to a}f_1(x)\cdot\lim_{x\to a}f_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to a}f_n(x).$$

Пример. Найти $\lim_{x\to 3}(2x^2-7)(x-2)$.

Решение. $\lim_{x\to 3}(2x^2-7)(x-2)=\lim_{x\to 3}(2x^2-7)\cdot\lim_{x\to 3}(x-2)=11\cdot 1=11$.

Теорема 3. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя не равен нулю.

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f_1(x)}{\lim_{x\to a}f_2(x)},$$

если

$$\lim_{x\to a}f_2(x)\neq 0.$$

Теорема 4. Если между соответствующими значениями трех функций выполняются неравенства $f_1(x)\leq f(x)\leq f_2(x)$ в некоторой окрестности точки a, и $\lim_{x\to a}f_1(x)=\lim_{x\to a}f_2(x)=b$, то $\lim_{x\to a}f(x)=b$.

Теорема 5. Если функция $y=f(x)$ неотрицательна, то есть $y\geq 0$ и $\lim_{x\to a}y=b$, то $b\geq 0$.

Теорема 6. Если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют неравенству $f_1(x)\leq f_2(x)$ в некоторой окрестности точки a, и $\lim_{x\to a}f_1(x)=b_1$, $\lim_{x\to a}f_2(x)=b_2$, то $b_1\leq b_2$.

Вычислим следующие пределы:

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x-4}{2x+1}$$

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x-4}{2x+1}=\frac{5-4}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2+x}{2x^3-x+5}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2+x}{2x^3-x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3(2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3})}=\frac{5}{2}.$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2x+1)}{x^3-x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2x+1)}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

4.3.9. Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Функция $f(\mathrm{x})=\frac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$. Найдём предел этой функции при $x\to 0$.

Рассмотрим окружность единичного радиуса.

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Дуга AB численно равна центральному углу x, выраженному в радианах. Из рисунка видно, что площади треугольника AOB, сектора AOB и треугольника AOC удовлетворяют неравенствам

$S_{\Delta AOB} < S_{\text{сект}AOB} < S_{\Delta AOC}$ то есть

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot sin\, x = \frac{1}{2} sin\, x,$

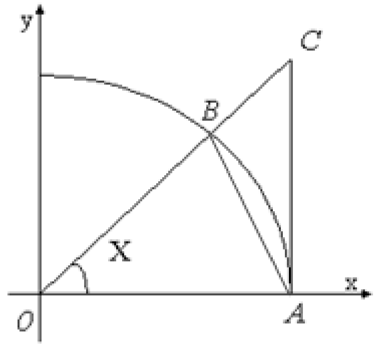


Рис. 4.10.

$s_{\text{сект}AOB} = \frac{1}{2} R^2 x = \frac{1}{2} x, S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} tgx$. Отсюда

$$\frac{1}{2} sin\, x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tgx \text{ или } sin\, x < x < tgx.$$

Разделим все члены на $sin\, x$ ($sin\, x > 0$, так как $0 < x < \frac{\pi}{2}$). Получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $cos\, x < \frac{sin\, x}{x} < 1$. (Это имеет место для x, удовлетворяющих условию $x > 0$). Заметим, что это верно и для $x < 0$.

Действительно, $cos(-\text{x}) = cos\, x$ и $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$.

Но $\lim\limits_{x \to 0} cos\, x = 1, \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$.

Следовательно, функция $\frac{sin\, x}{x}$ заключена между двумя функциями, имеющими один и тот же предел 1. Таким образом, на основании теоремы о пределах

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin\, x}{x} = 1.$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{cos\,x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{1\cdot x}=1$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,3x}{sin\,5x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,3x}{sin\,5x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\,3x\cdot 3x\cdot 5x}{sin\,5x\cdot 3x\cdot 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^3}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}(1+1+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{4x^2}4=\frac{3}{2}.$$

4.3.10. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \text{ (число } e \approx 2{,}7182818\,\ldots)$$

Было доказано, что предел числовой последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ при $n\to\infty$ равен e, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Пусть $x\to+\infty$. Докажем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Каждое действительное значение x заключено между двумя натуральными числами n и $n+1$, то есть $n \le x < n+1$

Тогда будут выполняться неравенства $\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Перейдём к пределу в последних неравенствах:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,$$

(так как при $n\to\infty$ $x\to\infty$).

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Значит и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Пусть $x\to-\infty$. Введём новую переменную $x = -(t+1)$. При $t\to\infty$. $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e.$$

Мы доказали, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

Итак, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

Этот предел называется вторым замечательным пределом.

Ниже приводится график функции

$$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Замечание. Второй замечательный предел в наиболее общей форме можно записать:

$$\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a} = e$$

$$\lim_{\substack{x\to a \\ f(x)\to\infty}}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

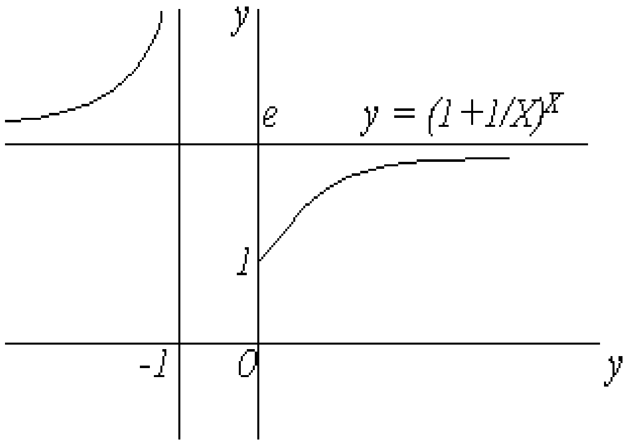


Рис. 4.11.

Пример.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=e^{2}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x+1}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}(2x+1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{5}{x}(2x+1)}=e^{10}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x-4}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x-4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+4}{2x-1}\right)^{3x-4}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\frac{4}{2x-1}(3x-4)}=e^{6}.$$

4.3.11. Натуральные логарифмы

Логарифм по основанию e = 2,7182. называется натуральным логарифмом $log_e\, x = ln\, x$.

Так, если $y\ = ln\, x$, то $x = e^y$. Установим зависимость между натуральными и десятичными логарифмами. Прологарифмируем равенство $x = e^y$ по основанию 10.

$lg\, x = lg\, e^y$, $lg\, x = y \cdot lg\, e$, но $y = ln\, x$, значит $lg\, x = ln\, x \cdot lg\, e$.

Таким образом, если известен натуральный логарифм числа, то можно найти его десятичный логарифм и наоборот.

$M = lg\, e = 0{,}434294$ называется модулем перехода от натуральных логарифмов к десятичным.

Итак, $lg\, x = M \cdot ln\, x$. Натуральные логарифмы выражаются через десятичные, так: $ln\, x = \left(\frac{1}{M}\right) lg\, x$, где $\frac{1}{M}$ = 2,302585.

4.3.12. Сравнение бесконечно малых

Мы знаем, что бесконечно малая – это функция, предел которой равен нулю. Пусть даны две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Определение. Две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, при $x \to a$ (или $x \to \infty$) если

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K, K \neq 0, |K| < \infty.$$

Обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(\mathrm{x})$.

Пример. Пусть $\alpha(x)\ =\ (1 - x), \beta(x)\ =\ 1 - x^2$.

Решение. Найдём

$$\lim_{x\to 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{1 - x^2} = \frac{1}{2}.$$

Это значит, что функции $\alpha(x) = 1 - x$ и $\beta(x) = 1 - x^2$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to 1$.

Определение. Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$, при $x \to a$ (или $x \to \infty$) если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Пример. Пусть $\alpha(x) = sin^2 x$, $\beta(x) = x$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sin\, x \cdot sin\, x}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Значит, $sin^2 x$ бесконечно малая высшего порядка по сравнению с бесконечно малой x, при $x \to 0$.

Определение. Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой k –того порядка относительно бесконечно малой $\beta(x)$ при $x \to a$ если

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = A, A \neq 0, |A| < \infty.$$

Пример. Доказать $sin\, x \sim x$ при $x \to 0$.

Решение. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin\, x}{x} = 1$.

Отсюда следует, что $\arcsin x \sim x$. при $x \to 0$.

$tgx \sim x$, при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{sin\, x}{x\, cos\, x} = 1$.

Следовательно, $arctgx \sim x$ при $x \to 0$.

$ln(1 + x) \sim x$ при $x \to 0$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} ln(1+x) = \lim_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = ln\, e = 1.$$

$e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left|\begin{array}{c} e^x-1=t \\ e^x=t+1 \\ x=\ln(t+1) \\ x\to 0 \ \Rightarrow \ e^x-1=t\to 0 \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{ln(t+1)}{t}\right)^{-1}=1.$$

4.4. Непрерывность функции в точке. Разрывы. Классификация точек разрыва. Теоремы о функциях, непрерывных в точке. Свойства функций, непрерывных на отрезке

4.4.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой точке x_0 и в окрестности этой точки. В точке x_0 значение функции будет $\text{y}=f(x_0)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Новое значение аргумента будет $x+\Delta x$. Функция получит приращение Δy. Это можно записать так:

$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$. Отсюда: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если эта функция определена в какой-нибудь окрестности точки x_0 и если

$$\lim_{\Delta\text{x}\to 0}\Delta\text{y}=0,$$

то есть бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пользуясь выражением для Δy, можно записать также, что

$$\lim_{\Delta\text{x}\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$$

Или иначе,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

Если обозначить $x_0 + \Delta x = x$, последнее равенство можно переписать так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Итак, определение непрерывности функции можно сформулировать следующим образом. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в какой-нибудь окрестности этой точки и если предел функции при $x \to x_0$ существует и равен значению функции при $x = x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция называется *непрерывной в интервале*, если она непрерывна в каждой его точке.

4.4.2. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва

Определение. Если в какой либо точке x_0 функция не является непрерывной, то точка x_0 называется *точкой разрыва* функции, а сама функция разрывной в этой точке.

Пусть x стремится к x_0, $x \to x_0$, оставаясь все время слева от x_0, то есть будучи меньше x_0. Если при этом условии значение функции $f(x)$ стремится к пределу, то он называется *левым пределом* функции $f(x)$ в точке x_0, аналогично определяется и *правый предел*. Левые и правые пределы обозначаются соответственно

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0),$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0 + 0),$$

или

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \text{ и } \lim_{x \to x_0 - 0} f(x_0) = f(x_0 - 0).$$

Для левых и правых пределов, когда они существуют и конечные, возможны случаи:

1) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$,

2) $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$.

Точкой разрыва первого рода функции $f(x)$ называется такая точка x_0, в которой выполняется одно из условий 1) или 2).

Все остальные точки разрыва называются точками разрыва второго рода.

Примеры.

1) Функция $y = \frac{1}{x}$ разрывна при $x = 0$. Действительно, при $x = 0$ функция не определена:

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty; \ \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва второго рода.

2) Функция $y = 2^{\frac{1}{x}}$ разрывна при $x = 0$. Действительно

$$\lim_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty; \ \lim_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0.$$

При $x = 0$ функция не определена. Следовательно, $x = 0$ точка разрыва второго рода.

Ниже приводим некоторые свойства непрерывных функций.

4.4.3. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1. Сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

Доказательство. Пусть f_1(x) и f_2(x) – функции непрерывные на $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0).$$

Следовательно, функция f_1(x) $+$ f_2(x) непрерывна в точке x_0.

Теорема 2. Произведение конечного числа непрерывных функций есть непрерывная функция.

Теорема 3. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция, непрерывная во всех точках, в которых знаменатель не равен нулю.

Теорема 4. Непрерывная функция от непрерывной функции есть также непрерывная функция. Так, если $y = f(u), u = \varphi(x)$. $\varphi(x)$ – функция непрерывная в точке x_0, а функция у $= f(u)$ непрерывная в точке $u = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывная в точке x_0. В силу теоремы 1-4 мы получим, что все элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены.

4.4.4. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение. Если функция $f(x)$ определена в точке a и $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a справа.

Определение. Если функция $f(x)$ определена в точке b и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$, то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке b слева.

Определение. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), а в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева, то функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, то на отрезке $[a, b]$ найдётся по крайней мере одна точка $x = x_1$ такая, что $f(x_1) \geq f(x)$ и найдётся по крайней мере одна точка x_2, что $f(x_2) \leq f(x)$ для любой точки $x \in [a, b]$. Значение $f(x_1)$ будем называть наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а $f(x_2)$ – наименьшим.

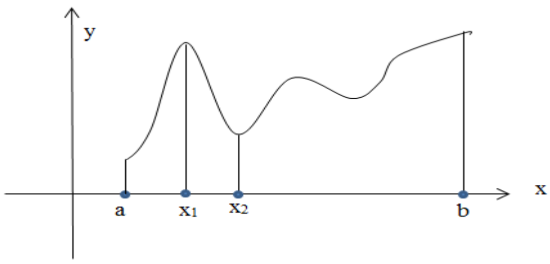


Рис. 4.12.

Кратко эту теорему можно сформулировать так:

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает на этом отрезке свое наибольшее и наименьшее значения.

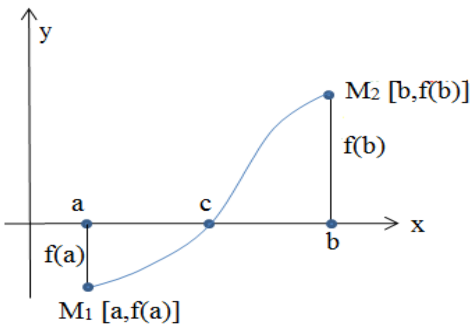


Рис. 4.13.

Обозначим: M – наибольшее, m – наименьшее значение $f(x)$ на $[a, b]$.

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками a и b найдётся хотя бы одна точка $x = c$, в которой значение функции равно нулю, то есть $f(c) = 0$.

Эта теорема имеет простой геометрический смысл. График непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, то есть $f(a)f(b) < 0$, пересекает ось Ox по крайней мере в одной точке.

Теорема 3. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Если на концах этого отрезка функция принимает неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то каково бы ни было число C, между A и B найдется такая точка $x = c$, заключённая между a и b, что $f(c) = C$.

Следствие теоремы 3. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция по крайней мере один раз принимает значение, заключённое между её наименьшим и наибольшим значениями.

4.5. Применение пределов

Пределы применяются в следующем: они помогают измерять напряженность магнитного поля, электрического поля и т. д. Пределы используются для определения наиболее важных фрагментов информации из больших сложных функций.

Рассмотрим несколько примеров на применение пределов в геометрии.

Задача 1. Дан правильный треугольник со стороной a; из трех высот его строится новый правильный треугольник и так n раз. Найти предел суммы площадей всех треугольников при $n \to \infty$.

Решение. Площадь первого треугольника обозначим S_1, и она равна

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Высота внешнего треугольника h_1 равна

$$h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда площадь второго треугольника равна

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \frac{3}{4}.$$

$$h_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}.$$

И так далее

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

Найдем n –ую сумму и перейдем к пределу при $n \to \infty$.

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \left(\frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{3}{4}}\right)$$

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \left(\frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{3}{4}}\right) = a^2\sqrt{3}.$$

Предел суммы площадей всех треугольников равен $a^2\sqrt{3}$.

Задача 2. Исходя из эквивалентности при $x \to 0$ функций $\sqrt{1+x}-1$ и $\frac{1}{2}x$, вычислить приближенно $\sqrt{105}$.

Решение. Докажем эквивалентность.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\frac{1}{2}x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)}{\frac{1}{2}x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(\sqrt{1+x}+1)}=1.$$

$$\sqrt{105}=10\cdot\left(\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{100}}-1+1\right)=$$

$$10\cdot\left(\sqrt{1+0{,}05}-1+1\right)\sim 10\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}05+1\right)=$$

$$=1{,}025\cdot 10=10{,}25.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Что такое предел числовой последовательности?
3. Какими свойствами обладают пределы числовых последовательностей?
4. Что такое предел функции?
5. Какими свойствами обладают пределы функций?
6. Что называется первым замечательным пределом?
7. Что называется вторым замечательным пределом?
8. Какая функция называется непрерывной?
9. Какими свойствами обладает функция, непрерывная на отрезке?
10. На какие типы делятся точки разрыва функций?

“Нам нужна способность, которая позволяла бы видеть цель издали, а эта способность есть интуиция.”
Анри Пуанкаре

ГЛАВА V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5.1. Производная, ее геометрический и механический смыслы. Производные основных элементарных функций

5.1.1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Составим приращение функции в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx:

$$\Delta y = f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0).$$

Определение. *Производной* функции $y = f\,(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к соответствующему приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Производная функции $y = f\,(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$. Итак, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производная функции $f(x)$ в любой точке x некоторого множества обозначается $f'(x)$. Для обозначения производной применяются и другие обозначения $y', y'_x, \frac{dy}{dx}$.

Определение. Нахождение производных функций называется их *дифференцированием*.

Пример. Найти производную функции $y = x^2$, пользуясь определением.

Решение. Находим приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2,$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Пример. Найти производную функции $y = \sin x$, пользуясь определением.

Решение. Находим приращение функции:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$

$$= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

5.1.2. Геометрический смысл производной

Пусть на плоской кривой задана точка M_0. Рассмотрим другую точку M этой кривой и проведем секущую M_0M. Пусть точка

M_0 фиксированная, а точка M перемещается по кривой, неограниченно приближаясь к точке M_0.

Предельное положение секущей называется *касательной*.

Пусть задан график непрерывной функции $y = f(x)$. Рассмотрим секущую, соединяющую неподвижную точку M_0 и точку M, неограниченно приближающуюся к точке M_0. Найдем угловой коэффициент секущей M_0M.

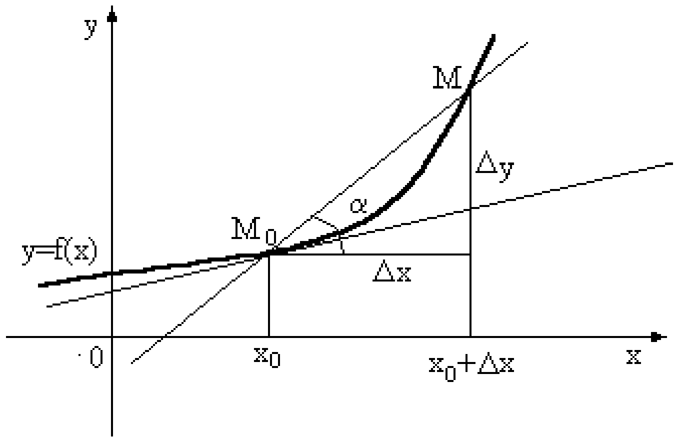


Рис. 5.1.

$$k = tg\,\alpha = \Delta y / \Delta x$$

Угловой коэффициент касательной

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi = f'(x_0)$$

Итак, угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен значению производной этой функции в точке x_0.

Уравнение касательной и нормали. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\ (x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k, имеет вид $y - y_0 = k\,(x - x_0)$.

Так как $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой

$y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$, то уравнение *касательной* будет иметь вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ или}$$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ где } f(x_0) = y_0.$$

Определение: *Нормалью* к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, перпендикулярная к касательной к этой кривой, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0)$.

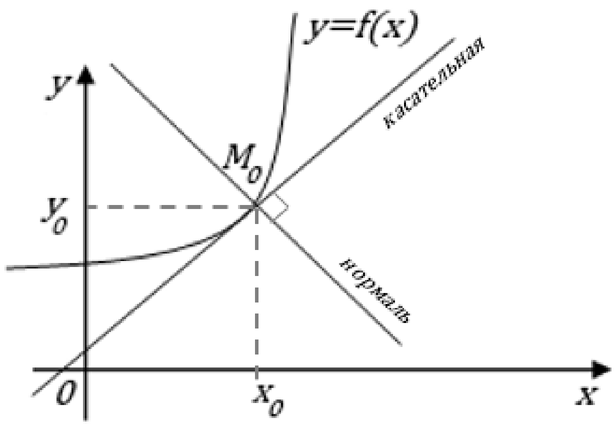


Рис. 5.2.

Так как условие перпендикулярности двух прямых имеет вид $k_1 \cdot k_2 = -1$, (где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты этих прямых), то угловой коэффициент нормали $k = -1/f'(x_0)$. Тогда уравнение нормали будет иметь вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Пример: Написать уравнение касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке $M_0(2; 4)$

Решение: Найдем $f'(x) = 2x, f'(2) = 4, f(2) = 4$.

Уравнение касательной: $y = 4 + 4(x - 2)$ или $y = 4x - 4$.

Уравнение нормали: $y = 4 - \frac{1}{4}(x - 2)$ или $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$.

5.1.3. Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется по закону $S = S(t)$, где t – время, а $S(t)$ – путь, проходимый за время t. Возьмем некоторый момент времени t_0. Путь, проходимый к этому моменту времени $S_0 = S(t_0)$. Пусть требуется определить скорость в момент времени t_0.

Рассмотрим другой момент времени $t = t_0 + \Delta t$. Путь, пройденный к этому моменту, будет $S(t_0 + \Delta t)$. За промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ точка прошла путь

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0).$$

Средняя скорость движения $V_{\text{ср}}$ за промежуток времени Δt, $V_{\text{ср}} = \Delta S / \Delta t$.

Пусть t_0 – фиксированное, а Δt меняется.

Определение: Скоростью V_0 в данный момент t_0 называется предел средней скорости, когда $\Delta t \to 0$, то есть $V(t_0) = V_0 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t_0)$. Таким образом, скорость точки в данный момент t_0 равна производной от пути $S(t)$ по времени t при $t = t_0$.

$$V(t_0) = S'(t_0).$$

5.1.4. Производные основных элементарных функций

Производные функций $y = sinx, y = cosx$. Мы доказали, что производная $sinx$ равна $cosx$, то есть $(sinx)' = cosx$.

Найдем производную функции $y = cosx$. По определению

$$(cosx)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos(x + \Delta x) - cosx}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2sin\frac{x+\Delta x - x}{2} sin\frac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -sinx.$$

Итак, $(cosx)' = -\,sinx.$

Производная логарифмической функции $y = log_a x$.

Найдем $\Delta y = log_a(x + \Delta x) - log_a x$

$$(log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a(x+\Delta x) - log_a x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}(log_a(x+\Delta x) - log_a x) \; =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\Delta x} log_a \frac{x + \Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}} \; =$$

$$\frac{1}{x}\, log_a e = \frac{1}{xlna}.$$

Итак,

$$(\log_a x\,)' = \frac{1}{xlna}.$$

В частности,

$$(lnx)' = \frac{1}{x}.$$

5.1.5. Основные правила дифференцирования

1	$C' = 0,$	$C = const,$
2	$(u \pm v)' = u' \pm v',$	$u = u(x), v = v(x),$
3	$(uv)' = u'v + v'u,$	$u = u(x), v = v(x),$
4	$(Cu)' = Cu',$	$C = const, u = u(x),$

5	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u'v - v'u)}{v^2}$,	$u = u(x), v = v(x)$.

Производные функций $y = tgx,\ y = ctgx$.

1. $y = tgx$, По правилам дифференцирования (5)

$$(tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx - (cosx)'sinx}{cos^2 x} =$$
$$\frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}.$$

Итак,

$$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}.$$

2. $y = ctgx$.

$$\left(\frac{cosx}{sinx}\right)' = \frac{(cosx)'sinx - cosx(sinx)'}{sin^2 x} =$$
$$\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{sin^2 x} = -\frac{1}{sin^2 x}.$$

Итак,

$$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}.$$

5.1.6. Обратная функция

Производная обратной функции. Пусть дана возрастающая или убывающая функция $y = f(x)$. Пусть $f(a) = c, f(b) = d$. Пусть для определенности $f(x)$ – возрастающая функция. Будем рассматривать значения y как значения аргумента, а значения x как значения функции. Получим $x = \varphi(y)$, эта функция называется обратной для функции $y = f(x)$. Верна следующая теорема.

Теорема: Если возрастающая (или убывающая) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то обратная функция $x =$

$\varphi(y)$ будет возрастающей (или убывающей) и непрерывной на отрезке $[c, d]$.

Заметим, что обратная функция находится решением уравнения $y = f(x)$ относительно x.

Теорема (о дифференцировании обратной функции). Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая в рассматриваемой точке y имеет производную $\varphi'(y), (\varphi'(y) \neq 0)$, то в соответствующей точке x функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$, равную $\frac{1}{\varphi'(\mathrm{y})}$, то есть $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$.

Доказательство. Придадим y приращение Δy, тогда функция x получит приращение $\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)$.

При $\Delta y \neq 0, \Delta x \neq 0$, так как $\varphi(y)$ – монотонная функция. Рассмотрим $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{(\frac{\Delta x}{\Delta y})}$.

Так как $\varphi(y)$ – непрерывная функция, то $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Переходя к пределу в последнем равенстве при $\Delta y \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

То есть $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ или $y'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$.

Производные обратных тригонометрических функций.

1. $y = arcsinx.$

Обратная функция $x = siny$. По формуле для производной обратной функции найдем.

$$(arcsinx)' = \frac{1}{(siny)'} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

И так

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

1. $y = arccosx$.
Обратная функция $x = cosy$.

$$(arccosx)' = \frac{1}{(cosy)'} = \frac{1}{-siny} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Таким образом,

$$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $y = arctgx$.
Обратная функция $x = tgy$,

$$(arcctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}} = \frac{1}{1+tg^2y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$(arcctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. $y = arcctgx$.
Обратная функция $x = ctgy$,

$$(arcctgx)' = \frac{1}{(ctgy)'} = \frac{1}{-\frac{1}{sin^2y}} = -\frac{1}{1+ctg^2y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Таким образом,

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Производная показательной функции. $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.

$x = log_a y$ – обратная функция. По формуле для производной обратной функции находим

$$(a^x)' = \frac{1}{(log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{ylna}} = ylna = a^x lna.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x lna.$$

В частности

$$(e^x)' = e^x.$$

5.1.7. Производная сложной функции

Докажем, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 (то есть имеет в этой точке производную), то она непрерывна в этой точке.

Пусть существует $f'(x_0)$. По определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

По теореме о пределе функции $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, где α – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, тогда $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$, найдем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x) = 0.$$

А это означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Производная сложной функции

Пусть $u = \varphi(x), y = f(u)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ есть сложная функция от x.

Теорема. Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x_0, и имеет место формула $y'_x = y'_u \, u'_x$, то есть производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого промежуточного аргумента по конечному аргументу.

Доказательство. Дадим аргументу x_0 приращение Δx. Тогда u получит приращение Δu, а y получит приращение Δy.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Мы можем представить это отношение в виде

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда $\Delta u \to 0$, так как $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, Перейдем к пределу в обеих частях равенства при $\Delta x \to 0$. $(\Delta u \to 0)$

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Производная степенной функции

$$y = x^{\alpha}, (\alpha \in R).$$

Можно записать $y = x^{\alpha} = e^{\alpha ln x}$. Тогда по формуле для производной сложной функции

$$y' = e^{\alpha ln x}(\alpha ln x)' = e^{\alpha ln x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Таким образом, производная степенной функции $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$.

Решение. $y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5.1.8. Гиперболические функции и их дифференцирование

1. Функция

$$y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

называется *гиперболическим синусом*.

Гиперболический синус – функция нечетная

График функции проходит через начало координат.

Можно построить график гиперболического синуса путем графического вычитания графиков $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ и делением на 2 их разности.

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx.$$

2. Функция

$$y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

называется *гиперболическим косинусом*.

График этой функции можно получить путем сложения графиков и деления их на 2.

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx.$$

3. Функция

$$y = thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

называется *гиперболическим тангенсом.*

Свойства функции.

Гиперболический тангенс – нечетная функция.

График симметричен относительно начала координат.

График проходит через начало координат.

Предел этой функции при $x \to 0$ равен 1.

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2x}.$$

4. Функция

$$y = cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

называется *гиперболическим котангенсом.*

Область определения $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Гиперболический котангенс – нечетная функция

График функции симметричен относительно начала координат

Предел функции при $x \to 0$ равен ∞.

Предел функции при $x \to +\infty$ равен 1, при $x \to -\infty$ равен -1.

$$(cthx)' = \frac{1}{sh^2x}.$$

5.1.9. Логарифмическое дифференцирование

Функцию вида $y = u\,(x)^{v(x)}, u(x) > 0$, где и основание и показатель изменяются вместе с независимой переменной, называют *степенно-показательной* функцией.

Найдем $y'(x)$. Для этого прологарифмируем обе части выражения по основанию e, тогда $lny = v(x) \cdot ln\,(u(x))$.

Продифференцировав последнее равенство, получим

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x)\ln\big(u(x)\big) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x).$$

Окончательно имеем

$$y' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln\big(u(x)\big) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

5.1.10. Параметрическое задание функции

Пусть даны два уравнения

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

где $t \in [\alpha, \beta]$. Каждому значению t из отрезка $[\alpha, \beta]$ соответствуют значения x и y, (то есть каждому значению t соответствует определённая точка плоскости). При изменении t от α до β точка описывает на плоскости определенную кривую.

Уравнения называются *параметрическими уравнениями* кривой, t называется *параметром*. Мы видим, что каждому значению x соответствует определенное значение y. Таким образом, уравнения определяют y как функцию от x. Найдем производную функции y по переменной x.

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta.$$

Пусть функции $\varphi(t), \psi(t)$ имеют производные $\varphi'(t), \psi'(t)$, функция $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \xi(x)$, которая также имеет производную. Тогда функция y от x, заданная параметрически, имеет производную

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Докажем эту формулу. Функцию y от x можно рассматривать как сложную функцию от x. Следовательно, $y = \psi(t), y = \psi\big(\xi(x)\big)$ сложная функция от x.

По правилу дифференцирования сложной функции

$y'_x = y'_t \cdot t'_x$.

Но функция $t = \xi(x)$ – обратная к функции $x = \varphi(t)$. Поэтому

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Таким образом, $y'_x = y'_t \frac{1}{x'_t}$, то есть $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Пример 1. Заданы функции $\begin{cases} x = a\, cos^3\, t\,, \\ y = a\, sin^3\, t\,. \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$.

Найти производную y'_x.

Решение. Находим $x'_t = -3a\, cos^2 tsint, y'_t = 3a\, sin^2 tcost$.

По формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ находим $y'_x = \frac{3a\, sin^2 tcost}{-3a\, cos^2 tsint} = -tgt$.

5.1.11. Производная функции, заданной неявно

Неявная функция – это функция, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, где каждому значению x из некоторого множества поставлено в соответствии такое значение y, что $F(x, y) = 0$.

Нахождение производной неявной функции $F(x, y) = 0$ мы рассмотрим на примере.

Пример. Найти производную функции y, заданной неявно уравнением $x^2 y + y^3 + lny = 0$.

Решение. Дифференцируем обе части уравнения, имея в виду, что y есть функция от x

$$(x^2y)' + (y^3)' + (xlny)' = 2xy + x^2y' + 3y^2y' + lny + \frac{xy'}{y} = 0.$$

Откуда

$$y'\left(x^2 + 3y^2 + \frac{x}{y}\right) = -2xy - lny, y' = -\frac{2xy + lny}{x^2 + 3y^2 + \frac{x}{y}}.$$

5.1.12. Таблица производных элементарных функций

$C = const, \alpha, a -$ действительные постоянные, $u = u(x)$ и $v = v(x)$

1. $(C)' = 0,\ (x)' = 1.$
2. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\,u', \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,u'.$
3. $(\log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$
4. $(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5. $(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$
6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
7. $(cos\,u)' = -sin\,u \cdot u'$
8. $(sin\,u)' = cos\,u \cdot u'$
9. $(ctg\,u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10. $(tg\,u)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$
11. $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12. $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13. $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
14. $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$
15. $(shu)' = chu \cdot u'$
16. $(chu)' = shu \cdot u'$
17. $(thu)' = \frac{u'}{ch^2u}.$
18. $(cthu)' = \frac{u'}{sh^2u}.$
19. $(u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v lnu \cdot v'$

5.2. Производные высших порядков. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближённых вычислениях. Инвариантность формы дифференциала. Геометрический смысл дифференциала

5.2.1. Производные высших порядков

Пусть задана дифференцируемая в некотором интервале (a, b) функция $y = f(x)$.

Вообще говоря, значения производной зависят от x, то есть производная $f'(x)$ есть функция от x. Дифференцируя эту функцию, получаем *вторую производную* от функции $f(x)$, то есть $f''(x)$.

Так, если $f(x) = x^4$, то $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.

Производная от второй производной называется производной третьего порядка или третьей производной и обозначается y''' или $f'''(x)$. Вообще, производной n-го порядка от функции $f(x)$ называется производная от $(n-1)$-ой производной, то есть

$$f_x^{(n-1)} = f_x^{(n)}.$$

Производные *n*-го порядка некоторых элементарных функций

1. $f(x) = e^{kx}, f'(x) = ke^{kx}, f''(x) = k^2e^{kx}, \dots, f^{(n)}(x) = k^ne^{kx}$.

2. $f(x) = sinx, f'(x) = cosx = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f''(x) = -sinx = sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), \dots, f^{(n)}(x) = sin(x + \frac{\pi n}{2}).$$

3. $f(x) = cosx,\ f'(x) = -sinx = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f''(x) = -cosx = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), \dots, f^{(n)}(x) = cos(x + \frac{\pi n}{2}).$$

Правила дифференцирования распространяются на случай производных n-го порядка

$$(\mathrm{C}u)^{(n)} = Cu^{(n)}, (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

Производная n-го порядка для произведения двух функций вычисляется по формуле Лейбница. Чтобы вывести эту формулу, мы найдем сначала производные 1,2,3 и 4-го порядков, затем установим закономерность.

$$y = uv, y' = u'v + uv', y'' = u''v + 2u'v' + v''u,$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Закон заключается в следующем: $(u + v)^n$ разлагается по формуле бинома Ньютона и в разложении показатели степеней для u и v заменяются указателями порядка производных, причем нулевые степени u и v означают сами функции u и v. Таким образом,

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' \ldots + uv^{(n)}.$$

Это формула называется формулой Лейбница.

Производные высших порядков функций, заданных параметрически

Пусть $\boldsymbol{y}$, функция от $\boldsymbol{x}$, задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} t \in [\alpha, \beta].$$

Мы знаем, что

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Тогда

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)' t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^2} \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Заметим, что при нахождении y''_{xx}, удобнее воспользоваться тем, что

$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t t'_x$ (не используя полученную выше формулу для второй производной).

5.2.2. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. По определению производная этой функции в некоторой точке отрезка $[a, b]$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

На основании теоремы о пределе функции мы можем написать равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где α – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Умножив обе части последнего равенства на Δx, получим

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Так как в общем случае $f'(x) \neq 0$ слагаемое $f'(x)\Delta x$ – есть бесконечно малая одного порядка с Δx, а слагаемое $\alpha\Delta x$ – есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Таким образом, приращение функции Δy представляется в виде суммы двух слагаемых, из которых первое линейно относительно Δx, а второе – есть бесконечно малая высшего порядка, чем Δx и следовательно, бесконечно малая высшего порядка по сравнению с первым слагаемым.

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ называется *главной частью* приращения функции.

Определение: Выражение $f'(x)\Delta x$ называется *дифференциалом* функции.

Таким образом, дифференциалом функции называется главная часть приращения функции, линейная относительно Δx. Дифференциал функции обозначается dy или $df(x)$. Итак, $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$.

Найдём дифференциал функции

$y = x, dy = x'\Delta x, dy = dx = \Delta x$

То есть: $dx = \Delta x$ Таким образом дифференциал независимого переменного равен его приращению.

Выражение дифференциала любой функции $f(x)$ будет иметь вид:

$$dy = f'(x)dx.$$

Отсюда $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, то есть производная $f'(x)$ – это есть отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Пример. Найти дифференциалы следующих функций при произвольных значениях x и Δx.

1. $f(x) = x^3$.
2. $f(x) = ln^2 x$.

Решение.

1. $df(x) = (x^3)'dx = 3x^2dx$.
2. $df(x) = (ln^2 x)'dx = \frac{2lnxdx}{x}$.

Пример. Найти дифференциал функции:

$y = x^3$ при $x = 1,\ \Delta x = 0{,}1$.

Решение. $dy = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x = 3 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$.

5.2.3. Применение дифференциала в приближённых вычислениях

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то её приращение Δy может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

где $f'(x)\Delta x$ – есть дифференциал функции в точке x

Так как $\alpha\Delta x$ – есть бесконечно малая высшего порядка, чем первое слагаемое, в приближённых вычислениях мы можем заменить приращение функции Δy дифференциалом dy.

$$\Delta y \approx dy, \text{ то есть } f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy.$$

Откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Это формула для приближенного вычисления.

Найти приближённое значение функции, пользуясь дифференциалом.

Пример. Найти приближённое значение $sin\ 31^{\circ}$.

Решение:

$$f(x) = \sin x\,, x = 30^{\circ} = \frac{\pi}{6}, \Delta x = 1^{\circ} = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180},$$

$f'(x) = cos\,x$ по формуле $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, находим

$$\sin 31^{\circ} \approx \sin 30^{\circ} + \cos 30^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180}, \sin 31^{\circ} \approx 0{,}5 + 0{,}015 = 0{,}515.$$

Пример. Найти приближённое значение $\sqrt[3]{28}$.

Решение: $f(x) = \sqrt[3]{x}, x = 27, \Delta x = 1.$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \sqrt[3]{28} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(27)^2}} \cdot 1 = 3 + \frac{1}{27} \approx 3{,}03.$$

5.2.4. Инвариантность формы дифференциала

Пусть $y = f(u), u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция от x. Найдём дифференциал этой функции.

$$dy = f'(\varphi(x)) \cdot u'_x dx, \text{ но } u'_x dx = du.$$

Поэтому $dy = f'(u)du$.

Таким образом, дифференциал сложной функции имеет такой же вид, как и в случае если бы u являлось независимой переменной. Это свойство дифференциала называется *инвариантностью*.

5.2.5. Геометрический смысл дифференциала

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $M(x, y)$.

Рассмотрим график этой функции.

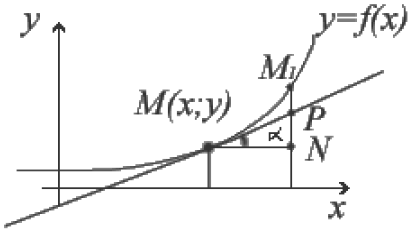


Рис. 5.3.

По определению дифференциал функции $dy = f'(x)\Delta x$.

Из треугольника PMN:

$$\frac{PN}{MN} = tg\alpha, \frac{PN}{MN} = f'(x), PN = f'(x)MN,$$

но

$$MN = \Delta x, PN = f'(x)\Delta x, \text{ то есть } dy = PN.$$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$, соответствующий данным значениям x и dx, равен приращению ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x.

5.2.6. Дифференциалы высших порядков

Определение: Дифференциал от дифференциала функции называется вторым дифференциалом или *дифференциалом второго порядка*. Дифференциал второго порядка обозначается $d^2f(x)$.

Итак,

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx.$$

Так как dx не зависит от x, мы можем написать

$$d^2y = \left(f'(x)\right)'dxdx = f''(x)(dx)^2$$

вместо $(dx)^2$ пишут dx^2.

Третьим дифференциалом или *дифференциалом третьего порядка* функции называется дифференциал от второго дифференциала.

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)(dx)^3.$$

Вообще, *дифференциалом n-порядка*, называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-порядка.

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

5.3. Теоремы о функциях, дифференцируемых в интервале. (Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши). Раскрытие неопределённостей. Формула Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых функций по формуле Маклорена

5.3.1. Теорема Ролля (о корнях производной)

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b) и на концах отрезка принимает значения равные нулю, то есть $f(a) = f(b) = 0$, то найдется, по крайней мере, одна точка $x = c, a < c < b$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, то есть $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Пусть M – наибольшее значение, m – наименьшее значение $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пусть $M = m$. В этом случае $f(x) = const$. Тогда $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка и теорема доказана.

Пусть теперь $M \neq m$. Тогда хотя бы одно из этих значений не равно нулю. Пусть для определённости $M > 0$, и функция принимает своё наибольшее значение при $x = c$, то есть $f(c) = M$. (Заметим, что $c \neq a, c \neq b$, так как $f(a) = f(b) = 0$).

Так как M – наибольшее значение $f(x)$, то $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, как при $\Delta x > 0$, так и при $\Delta x < 0$.

Рассмотрим отношение $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. Ясно, что $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0$ при $\Delta x > 0$, $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0$ при $\Delta x < 0$. По условию $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) и, следовательно, дифференцируема в точке c. По определению производной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0$ при $\Delta x > 0$.

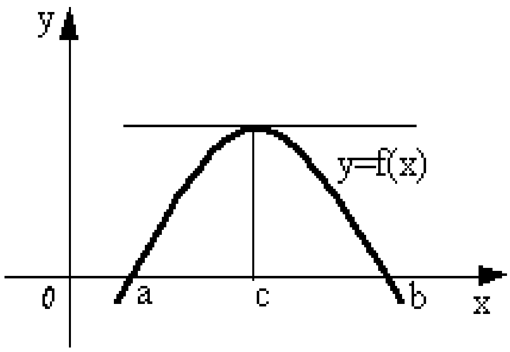


Рис.5.4.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0$ при $\Delta x < 0$. Следовательно, внутри отрезка $[a, b]$ нашлась точка $x = c$, в которой производная равна нулю. Теорема доказана.

Эта теорема называется теоремой о корнях производной.

Геометрический смысл теоремы. Если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке касательную, пересекает ось OX в двух точках: $x = a$ и $x = b$, то найдётся хотя бы одна точка из интервала (a, b), в которой касательная параллельна оси Ox.

Замечание. Теорема остаётся справедливой, если условие $f(a) = f(b) = 0$ заменить условием $f(a) = f(b)$.

5.3.2. Теорема Лагранжа (О конечных приращениях)

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), то внутри отрезка $[a, b]$ найдётся по крайней мере одна точка c, $a < c < b$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доказательство. Обозначим

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q.$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в интервале (a, b) и обращается в нуль на концах отрезка. Рис. 5.5

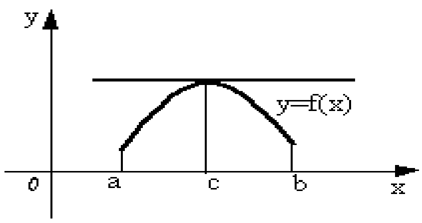


Рис.5.5.

Действительно, $F(a) = f(a) - f(a) - (a - a)Q = 0$,

$$F(b) = f(b) - f(a) - (b - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} =$$
$$= f(b) - f(a) - \big(f(b) - f(a)\big) = 0.$$

Следовательно, найдётся точка c, $a < c < b$, что $F'(c) = 0$, то есть $F'(x) = f'(x) - Q$, $F'(c) = f'(c) - Q = 0$.

То есть $f'(c) = Q$, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Откуда $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Теорема Лагранжа доказана.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = tg\alpha.$$

$tg\alpha$ – угловой коэффициент хорды, соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B\big(b, f(b)\big)$. $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке графика с абсциссой c. Таким образом, геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем:

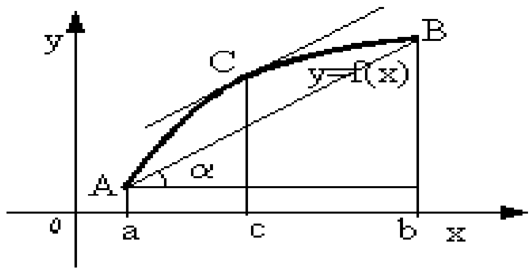


Рис. 5.6.

Если во всех точках дуги AB существует касательная, то на этой дуге найдётся точка C между A и B, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки A и B.

5.3.3. Теорема Коши (Об отношении приращений двух функций)

Теорема. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы в интервале (a, b) и в интервале $\varphi'(x) \neq 0$, то найдётся такая точка $x = c, a < c < b$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доказательство. Обозначим $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=Q$.

Заметим, что $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$, так как в этом случае $\varphi(b)=\varphi(a)$ и по теореме Ролля внутри отрезка $[a,b]$ нашлась бы точка, в которой производная $\varphi'(x)=0$, что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=\big(f(b)-f(a)\big)\varphi(x)-(\varphi(b)-\varphi(a))f(x).$$

Очевидно, что функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема в (a,b) и $F(a)=F(b)$.

По теореме Ролля найдётся точка c, $a<c<b$, что $F'(c)=0$.

Найдём

$$F'(x)=\big(f(b)-f(a)\big)\varphi'(x)-(\varphi(b)-\varphi(a))f'(x).$$

Тогда

$$F'(c)=\big(f(b)-f(a)\big)\varphi'(c)-(\varphi(b)-\varphi(a))f'(c)=0$$

или

$$\big(f(b)-f(a)\big)\varphi'(c)=(\varphi(b)-\varphi(a))f'(c),$$

то есть

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема доказана.

5.3.4. Раскрытие неопределённостей (Правило Лопиталя)

1. Раскрытие неопределённостей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Теорема. (Правило Лопиталя) Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль при $x = a$, то есть $f(a) = \varphi(a) = 0$ и существует конечный предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$, то существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и выполняется равенство.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $x \in [a, b], x \neq a$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)},$$

это верно, так как $f(a) = \varphi(a) = 0$.

Применим формулу Коши:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, a < c < x.$$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, a < c < x.$$

Поэтому при $x \to a$ будем иметь, что $c \to a$. Значит,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Таким образом мы доказали, что $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. И теорема доказана.

Замечание 1. Теорема применима и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены в точке a, но $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

Замечание 2. Если $f(a) = 0, \varphi(a) = 0$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы и $f'(x) = \varphi'(x) = 0$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(c)}{\varphi(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(c)}{\varphi''(c)} \text{ и т. д.}$$

Вычислить следующие пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

Пример.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{tg 2x}.$$

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{tg 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{7\cos 7x}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Пример.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+sin\,x-1}{ln(1+x)}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+sin\,x-1}{ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{\frac{1}{1+x}}=2.$$

Замечание. Правило Лопиталя применимо и в случае, когда $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ и $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$. В этом случае замена $\frac{1}{x}=t$ приводит к рассмотренному случаю.

Пример. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sin\,\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{x}\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\pi.$$

2. Раскрытие неопределённостей типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Теорема (правило Лопиталя) Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы при всех $x \neq a$ в окрестности точки a, причём $\varphi'(x) \neq 0$.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ и существует предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, тогда существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Примем эту теорему без доказательства.

Замечание. Теорема применима для случая $x \to \infty$.

Найти следующие пределы.

Примеры.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0.$$

Примеры.

$$\lim_{x\to 1} \frac{tg\,\frac{\pi x}{2}}{ln(1-x)}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{1-x}(-1)} = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}} = -\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1} \frac{1}{2\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}} = -\infty.$$

Замечание. Другие типы неопределённостей

$$(0\cdot\infty),(0^0),(1^\infty),(\infty\ -\infty)$$

приводятся к неопределённостям типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример. Найти следующий предел.

$$\lim_{x\to 0} xlnx$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0} xlnx = \lim_{x\to 0}\frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

5.3.5. Формула Тейлора и Маклорена

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производные до $n+1$ порядка включительно в окрестности точки $x = a$. Поставим следующую задачу: найти многочлен $P_n(x)$ степени n, значение которого в точке a равно значению функции в этой точке, значения производной данного многочлена до n-го порядка равны значениям соответствующих производных функций $f(x)$, то есть

$$P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), \dots\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \quad (3.1)$$

Будем искать многочлен $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n. \ (3.2)$$

Значения коэффициентов $C_1, C_2, ., C_n$ находятся из условий (3.1)

$$\mathrm{P}_n(a) = C_0 = f(a);\ C_0 = f(a).$$

Найдём

$$P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 +. + nC_n(x-a)^{n-1},$$
$$P_n''(x) = 2C_2 + 6C_3(x-a) + 12C_4(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ n(n-1)C_n(x-a)^{n-2},$$
$$P_n'''(x) = 6C_3 + 24C_4(x-a) +. + n(n-1)(n-2)C_n(x-a)^{n-3},$$
$$P_n^{(n)}(x) = n!\,C_n.$$

Найдём значения $P_n'(a), P_n''(a), P_n'''(a). P_n^{(n)}(a)$.

$$P_n'(a) = C_1, P_n''(a) = 2C_2, P_n'''(a) = 6C_3,.,\ P_n^{(n)}(a) = n!\,C_n,$$
$$C_1 = f'(a), 2C_2 = f''(a), 6C_3 = f'''(a), n!\,C_n = f^{(n)}(a),$$
$$C_0 = f(a), C_1 = \frac{f'(a)}{1!}, C_2 = \frac{f''(a)}{2!}, C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \ldots, C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Таким образом,

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} +$$
$$+ \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

Обозначим разность значений функции и многочлена через $R_n(x)$. Тогда

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

или в развёрнутом виде

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} +$$
$$= \frac{f^{(n)}(a)(x-\mathrm{a})^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ называется остаточным членом. Для тех значений x, при которых $R_n(x)$достаточно мало, многочлен $P_n(x)$ даёт приближённое значение функции.

Одна из форм остаточного члена

$$R(x) = \frac{f^{n+1}(\text{c})(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Эта форма остаточного члена $R_n(x)$ – называется формулой Лагранжа. Здесь c заключено между x и a, то есть

$$c = a + \theta(x-a), \;\; 0 < \theta < 1.$$

Формула

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) +$$
$$+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \frac{f^{n+1}(\text{c})(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

называется *формулой Тейлора* с остаточным членом в форме Лагранжа. В частности, если $a = 0$, то получаем частный случай формулы Тейлора – *формулу Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} +$$
$$\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \frac{f^{n+1}(\text{c})x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

5.3.6. Разложение некоторых функций по формуле Маклорена

1. $f(x) = e^x$.

Найдём

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, .., f^{(n+1)} = e^x.$$
$$f(0) = f'(0) = f''(0) =. = f^{(n)}(0) = 1.$$

Тогда формула Маклорена для функции $f(x) = e^x$ имеет вид

$$\mathrm{e}^x = 1 + x \ + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} +. + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Можно показать, что

$$R_n = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

стремится к нулю, при $n \to \infty$.

Поэтому можно применять формулу Маклорена для e^x для приближённого вычисления значений этой функции.

2. $f(x) = sinx$. Найдём

$$f'(x) = cosx,$$
$$f''(x) = \ -sinx, f'''(x) = \ -cosx, f^{IV}(x) = sinx,$$
$$f^V = cosx, f^{(n)}(x) = sin(x + \frac{n\pi}{2}),$$
$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = \ -1, f^{IV}(0) = 0, f^V = 1,$$
$$f^{(n)}(0) = sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), f^{(n+1)}(c) = \sin{(c + \frac{(n+1)\pi}{2})}.$$

Формула Маклорена

$$\sin x = \ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} +. + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$
$$\frac{sin\left(c + \frac{\pi(n+1)}{2}\right) x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Здесь также

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{sin\left(c + \frac{\pi(n+1)}{2}\right)x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

$f(x) = cosx$. Найдём

$$f'(x) = -sinx, f''(x) = -cosx, f'''(x) = sinx,$$
$$f^{IV}(x) = cosx, f^{V}(x) = -sinx, .., f^{(n)}(x) = cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$
$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0,$$
$$f^{IV}(0) = 1, f^{V}(0) = 0, \dots . f^{(n)}(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$
$$f^{(n+1)}(c) = cos\left(c + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Формула Маклорена

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots . + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{cos\left(c + \frac{\pi(n+1)}{2}\right)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

и в этом случае,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{cos\left(c + \frac{\pi n}{2}\right)x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

5.4. Исследование поведения функции. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты. Полное исследование функций

5.4.1. Исследование поведения функции. Возрастание и убывание

Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* в интервале (a, b), если для любых значений x_1 и x_2 из этого интервала, $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Иными словами, функция $f(x)$ возрастает (убывает) в интервале (a, b), если большему (меньшему) значению аргумента x соответствует большее (меньшее) значение функции.

Теорема (*необходимое условие возрастания*). Если функция $f(x)$, имеющая производную в интервале (a, b), возрастает в этом интервале, то её производная $f'(x) \geq 0$ на (a, b).

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $f(x)$ возрастает на (a, b). Рассмотрим отношение:

$\frac{f\ (x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, так как $f(x)$ возрастает в (a, b), то $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$ при $\Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$ при $\Delta x < 0$. В обоих случаях $\frac{f\ (x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$, но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, то есть $f'(x) \geq 0$, что и требовалось доказать.

Теорема (*достаточное условие возрастания*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ в (a, b), то функция возрастает в (a, b).

Доказательство. **Достаточность**. Пусть теперь $f'(x) > 0$ при всех x $\in (a, b)$.

Рассмотрим два любых значения x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), x_1 < c < x_2$. По условию $f'(c) > 0$, $x_2 > x_1$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$. А это значит, что функция $f(x)$ возрастает в интервале (a, b).

Аналогичным образом доказывается теорема для убывающей функции.

Геометрический смысл теоремы. Если в интервале (a, b) функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке образует острый угол с осью Ox. (в некоторых точках касательная параллельна оси Ox).

Если функция $f(x)$ убывает в интервале (a, b), то угол наклона касательной к кривой $y = f(x)$ – тупой (в некоторых точках этот угол равен 0).

Теорема позволяет определять интервалы возрастания и убывания функции.

Пример. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y = x\sqrt{1 - x^2}$$

Решение. $D(y) = [-1; 1]$. Найдём производную

$$y' = x'\sqrt{1 - x^2} + x\left(\sqrt{1 - x^2}\right)' = \sqrt{1 - x^2} - \frac{x \cdot 2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Приравниваем производную нулю $1 - 2x^2 = 0$, $x^2 = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, в интервале $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ функция убывает, в интервале $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ функция возрастает.

Пример. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$\mathrm{y} = \ln x - arctgx.$$

Решение. $D(y) = (0, \infty)$. Найдём производную

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x}{x(1+x^2)},$$

Приравниваем производную нулю

$$\frac{1+x^2-x}{x(1+x^2)} = 0, \quad 1+x^2-x = 0, \;\; D = 1-4 < 0.$$

Это значит, что $x^2 - x + 1 > 0$ во всей области определения. Следовательно, функция возрастает в интервале $(0, \infty)$.

5.4.2. Экстремумы функции (максимум и минимум)

Определение. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум*, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек x из этой окрестности $(x \neq x_0)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Число $f(x_0)$ называется максимумом функции $f(x)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_1 *минимум,* если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек x из этой окрестности $(x \neq x_1)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_1)$. Число $f(x_1)$ называется минимумом функции $f(x)$.

Определение. Максимумы и минимумы функции $f(x)$ называются ее *экстремумами*.

Теорема (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_1, то ее производная в этой точке равна нулю, то есть $f'(x_1) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум. Тогда при достаточно малой абсолютной величине Δx – $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$.

Рассмотрим отношение $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$. Очевидно, что $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$ и $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$. По определению производной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$.

Таким образом, получим, что $f'(x_1) \geq 0$ при $\Delta x < 0$, и $f'(x_1) \leq 0$ при $\Delta x > 0$ (по теореме о пределе). Так как $f'(x_1)$ есть определенное число, то неравенства $f'(x_1) \geq 0$ и $f'(x_1) \leq 0$ совместимы, если $f'(x_1) = 0$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что если функция имеет производную при всех значениях x, то она может иметь экстремум только в точках, в которых производная равна нулю. Обратное утверждение неверно. Производная от функции может обращаться в нуль в некоторой точке, но функция не имеет в этой точке ни максимума, ни минимума.

Например, функция $y = x^3$ не имеет экстремума при $x = 0$, хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Возможен случай, когда в некоторой точке производная $f'(x)$ не существует, но функция $f(x)$ может иметь в этой точке максимум или минимум. Например, функция $y = |x|$ имеет экстремум в точке $x = 0$, но в этой точке производная не существует. Таким образом, функция может иметь экстремум в точках, где производная существует и равна нулю, и в точках, где производная не существует.

Определение. Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими* точками.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 и дифференцируема во всех точках этого интервала (за исключением, быть может, самой точки x_0). Если при переходе через точку x_0 слева направо производная меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция имеет максимум. Если при переходе через точку x_0 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то в точке x_0 функция имеет минимум.

Доказательство. Пусть при переходе через критическую точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус. Тогда для точек x, достаточно близких к точке x_0, будем иметь:

$$f'(x) > 0 \text{ при } x < x_0;\ f'(x) < 0 \text{ при } x > x_0.$$

Применим теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0)$:

$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где c лежит между x и x_0.

Для $x < x_0, x - x_0 < 0, f'(c) > 0$. Поэтому $f(x) - f(x_0) < 0$, то есть $f(x) < f(x_0)$.

Для $x > x_0, x - x_0 > 0, f'(c) > 0$. Поэтому $f(x) - f(x_0) < 0$, то есть $f(x) < f(x_0)$.

Мы получили, что в точках, близких к точке x_0, слева и справа, значения функции меньше, чем в точке x_0. Значит, в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум. Аналогично доказывается достаточное условие максимума.

На основании рассмотренных теорем можно сформулировать правило для исследования функции на экстремум:

1. Находим первую производную $f'(x)$.
2. Находим критические точки, то есть находим точки, где производная равна нулю или не существует.
3. Исследуем знак производной слева и справа от критической точки.
4. Вычисляем значения функции в критических точках.

Пример. Исследовать функцию $f(x) = x^2(x - 12)^2$ на экстремум.

Решение. 1. Находим производную

$f'(x) = 2x(x - 12)^2 + x^2 2(x - 12) = 4x(x - 12)(x - 6)$.

2. Приравниваем к нулю $f'(x)$. $4x(x - 12)(x - 6) = 0$.

Критические точки $x_1 = 0,\ \ x_2 = 6,\ \ x_3 = 12$.

3. Исследуем знак производной. При переходе через точки $x = 0$ и $x = 12$ слева направо производная меняет знак с минуса на

плюс, а при переходе через точку $x = 6$ производная меняет знак с плюса на минус.

Следовательно, в точках $x = 0$ и $x = 12$ функция имеет минимум, а в точке $x = 6$ функция имеет максимум.

4. Находим значение функции в критических точках:

$$y_{min} = y(0) = y(12) = 0, y_{max} = y(6) = 1296.$$

5.4.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Как мы знаем, непрерывная на отрезке функция принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения.

Допустим, что M – наибольшее значение и m – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции нужно:

1. Найти критические точки, лежащие на отрезке $[a, b]$.
2. Определить значения функции в этих критических точках.
3. Найти значение функции на концах отрезка.
4. Из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее, оно будет наибольшим значением функции на отрезке.

Из всех полученных выше значений функций выбрать наименьшее, оно будет наименьшим значением функции на отрезке.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$.

Решение. Найдем область определения функции, решив неравенство $x(10-x) \geq 0$. Область определения: $D(y) = [0, 10]$. Значит, нужно найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[0, 10]$

1. Находим производную: $y' = \frac{10-2x}{2\sqrt{x(10-x)}} = \frac{5-x}{\sqrt{x(10-x)}} \cdot$ $y' = 0$ при $x = 5$.

2. Находим $y(5) = \sqrt{5(10-5)} = 5$

3. Находим значения функции на концах отрезка $y(0) = y(10) = 0$

4. Наибольшее значение $M = 5$, наименьшее значение $m = 0$.

5.4.4 Выпуклость, вогнутость кривой. Точки перегиба

Определение. Кривая называется *выпуклой вверх* на интервале (a, b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной в этом интервале.

Определение. Кривая называется *выпуклой вниз или вогнутой* на интервале (a, b), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной в этом интервале.

Кривую, выпуклую вверх, будем называть выпуклой, а кривую, выпуклую вниз – вогнутой.

Теорема (Достаточное условие выпуклости). Если в точках интервала (a, b) $f''(x) < 0$, то кривая выпукла в этом интервале.

Доказательство. Пусть x_0 – произвольная точка интервала (a, b). Проведем касательную в этой точке $\big(x_0, f(x_0)\big)$. $y = f(x)$ – это уравнение кривой. Пусть $\overline{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной. Теорема будет доказана, если мы докажем, что разность $y - \overline{y} < 0$. Представим разность $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ в следующем виде: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

(к разности $f(x) - f(x_0)$ мы применили теорему Лагранжа). Здесь c лежит между x и x_0. $y - \overline{y} = \big(f'(c) - f'(x_0)\big)(x - x_0) = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$.

(применили теорему Лагранжа к разности $f'(c) - f'(x_0)$). Точка c_1 лежит между c и x_0. Таким образом, имеем $y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$.

Пусть $x > x_0$. Тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Но в этом случае $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0\, f''(c_1) < 0$ по условию. И мы получим $y - \overline{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$. Тогда $x < c < c_1 < x_0$. Но в этом случае $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0\, f''(c_1) < 0$ по условию. И мы получим $y - \overline{y} < 0$. Таким образом, мы доказали, что любая точка кривой лежит ниже любой ее касательной. Это значит, что кривая выпукла. Аналогично можно доказать, что если в интервале (a, b) производная $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ вогнута в интервале (a, b).

Определение. Точка кривой, отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется *точкой перегиба*.

Теорема (достаточное условие перегиба). Пусть непрерывная кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через значение $x = x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = x_0$ есть точка перегиба.

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда при $x < x_0$ кривая выпукла, а при $x > x_0$ кривая вогнута, значит точка $x = x_0$ – точка перегиба.

Если при $x < x_0, f''(x) > 0$ и при $x > x_0$, $f''(x) < 0$, то при $x < x_0$ кривая вогнута, а при $x > x_0$ выпукла. Тогда точка $x = x_0$ – точка перегиба. Теорема доказана.

Пример. Найти точку перегиба графика функции $y = arctgx - x$.

Решение. Найдем производные y' и y''.

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} - 1 = \frac{1 - 1 - x^2}{1 + x^2} = -\frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$y'' = -\left(\frac{x^2}{1 + x^2}\right)' = -\frac{2x(1 + x^2) - x^2 2x}{(1 + x^2)^2} =$$

$$-\frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1 + x^2)^2} = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

Приравняем y'' к нулю $-\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0, x = 0$

При $x < 0\ y'' > 0$, при $x > 0\ y'' < 0$. Следовательно, при $x = 0$ график функции имеет перегиб.

$$y_{\text{пер}} = y(0) = arctg0 - 0 = 0$$

5.4.5. Асимптоты

Определение. *Асимптотой* кривой называется такая прямая, что расстояние от переменной точки M кривой до прямой при неограниченном удалении точки M от начала координат в бесконечность стремится к нулю.

Асимптоты бывают *вертикальные*, параллельные оси ординат и *наклонные*, не параллельные оси ординат.

Вертикальные асимптоты. Прямая $x = a$ будет вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ или $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Пример. Кривая $y = \frac{x}{x-1}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 1$, так как $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = \infty$

Наклонные асимптоты. Пусть $y = kx + b$ наклонная асимптота, тогда, по условию асимптоты, разница между значениями функции и асимптоты стремится нулю, при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Так как $x \to \infty$, должно выполняться равенство

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

При постоянном b

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0.$$

Следовательно

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=0,$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (4.1)$$

Зная k, b найдём из условия, что $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-xk-b]=0$ то есть

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] \qquad (4.2)$$

Итак, $y=kx+b$, где k и b находятся по формулам (4.1) и (4.2), есть уравнение наклонной асимптоты.

В частности, при $k=0$ мы получаем горизонтальную асимптоту $y=b$.

Пример. Найти асимптоты кривой $y=\frac{x^3}{4x^2-1}$

Решение. Вертикальные асимптоты находим из условия: $4x^2-1=0$ $4\mathrm{x}^2=1$, $x=\pm\frac{1}{2}$. Прямые $x=\pm\frac{1}{2}$ являются вертикальными асимптотами, так как

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{x^3}{4x^2-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^3}{4x^2-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^3}{4x^2-1}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}\frac{x^3}{(4x^2-1)} = \lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}\frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)} = +\infty.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$.

Находим

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(4x^2-1)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{4}.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{4x^2-1} - \frac{1}{4}x\right] =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4(4x^2-1)} == \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4x(4-\frac{1}{x^2})} = 0$$

Наклонная асимптота. $y = \frac{1}{4}x$.

5.4.6. Схема общего исследования функции

Полное исследование функции включает:

1. Нахождение области определения и если возможно, области значения функции.
2. Определение точек разрыва функции.
3. Нахождение интервалов возрастания и убывания функции.
4. Нахождение максимумов и минимумов функции.
5. Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции.
6. Нахождение точек перегиба.
7. Нахождение асимптот графика функции.
8. Построение графика функции.

Замечание. Полезно также предварительно найти некоторые особенности функции (если они имеются): чётность, нечётность, периодичность, а также найти точки пересечения графика функции с осями координат.

Пример. Построить график следующей функции, проведя предварительно её полное исследование.

$$y = \frac{4x}{4 + x^2}.$$

Решение.

1. Область определения $D(y) = (-\infty; \infty)$.
2. Точек разрыва нет.
3. Интервалы возрастания и убывания.

Находим $y' = \frac{16-4x^2}{(4+x^2)^2}$.

Находим критические точки $16 - 4x^2 = 0,\ x = -2, x = 2$.

В интервале $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ функция убывает, в интервале $(-2{,}2)$ возрастает.

4. Находим экстремумы функции $y' = 0$ при $x = \pm 2$.

При переходе через точку $x = -2$ производная меняет знак с минуса на плюс, а при переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, при $x = -2$ функция имеет минимум, а при $x = 2$ функция имеет максимум.

Найдём

$$y_{min} = y(-2) = \frac{4 \cdot (-2)}{4 + (-2)^2} = -1, \qquad y_{max} = y(2) = \frac{4 \cdot 2}{4 + 2^2} = 1.$$

5. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Находим

$$y'' = \left(\frac{16 - 4x^2}{(4 + x^2)^2}\right)' = \frac{-8x(4 + x^2)^2 - (16 - 4x^2) \cdot 2(4 + x^2) \cdot 2x}{(4 + x^2)^4}$$

$$= \frac{-32x - 8x^3 - 64x + 16x^3}{(4 + x^2)^3} = \frac{8x(x^2 - 12)}{(4 + x^2)^3}.$$

$$y'' = 0, 8x(x^2 - 12) = 0, x = 0, x = \pm 2\sqrt{3}.$$

График функции, вогнутый в интервале $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$ и выпуклый в интервале $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0{,}2\sqrt{3})$.

6. При переходе через точки $x = 0$ и $x = \pm 2\sqrt{3}$ вторая производная меняет знак, следовательно, график функции имеет перегиб в этих точках.

Найдём значения функции в этих точках $y(0) = 0, y\left(-2\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Итак, в точках $M_1(0{,}0), M_2(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $M_2(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ график функции имеет перегиб.

7. Вертикальных асимптот нет, так как функция всюду определена. Найдём наклонную асимптоту.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{(4 + x^2)x} = 0, b =$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{(4 + x^2)} = 0.$$

$y = 0 -$ горизонтальная асимптота. Заметим также, что при $x = 0$ и $y = 0$, график функции проходит через начало координат.

Так как $y(-x) = -\frac{4x}{4+x^2} = -y(x)$, то функция нечётная, и её график симметричен относительно начала координат.

При $x > 0, y > 0$, при $x < 0, y < 0$. График функции находится в первой и третьей четвертях.

8. Учитывая все данные исследования, построим график функции.

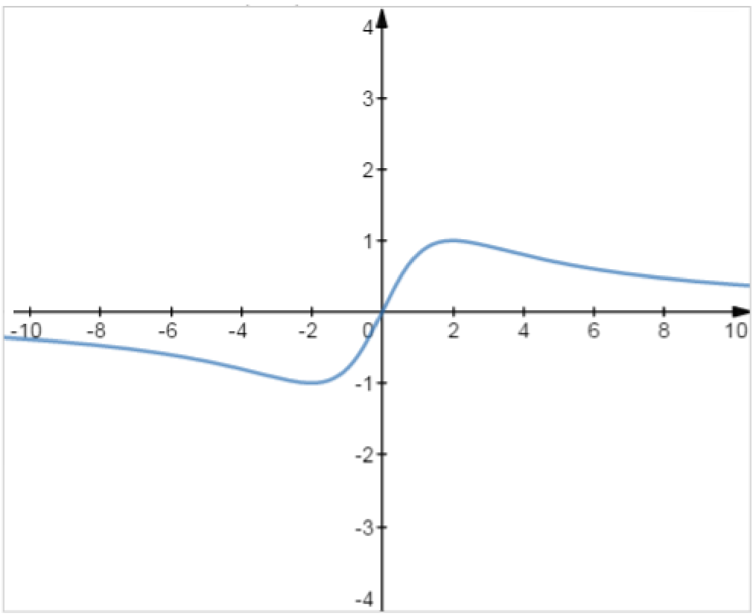


Рис. 5.7.

Вопросы для самопроверки

1. Как вычисляется производная произведения двух функций?
2. Как вычисляется производная частного двух функций?
3. Как вычисляется производная сложной функции?
4. Как вычисляется производная функции, заданной неявно?
5. Как вычисляется производная функции, заданной параметрически?
6. Как вычисляется производная обратной функции?
7. Что называется критической точкой функции?
8. Всегда ли критическая точка является точкой экстремума?
9. Как осуществляется исследование функции на экстремум?
10. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?
11. В чем состоит правило Лопиталя?
12. Какая функция называется выпуклой вверх?
13. Какая функция называется выпуклой вниз?
14. Что называется точкой перегиба?
15. Как найти точки перегиба?
16. Что такое формула Тейлора для функции?

“Каждому, кто хоть когда-нибудь изучал математические теории, знакомо то неприятное чувство, когда вдруг осознаешь, что ровным счетом ничего не понял.
Альберт Эйнштейн

ГЛАВА VI. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6.1. Неопределенный интеграл. Замена переменной. Интегрирование по частям

6.1.1. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке (a,b), если для всех $x \in (a,b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Например, для функции x^2 первообразной будет функция $\frac{x^3}{3}$. Если для $F(x)$ установлено равенство $dF(x) = f(x)dx$, то $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, так как $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$.

Рассмотрим две теоремы, которые называются теоремами об общем виде всех первообразных данной функции.

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на (a,b), то $F(x) + C$, где C – число($const$), тоже первообразная для $f(x)$ на (a,b).

Доказательство. $(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$.

По определению $F + C$ — первообразная для f. Прежде чем рассмотреть теорему 2, докажем две вспомогательные теоремы.

Вспомогательная теорема 1. Если функция $g(x)$ постоянна на (a,b), то $g'(x) = 0$.

Доказательство. Так как $g(x) = C$, то справедливы равенства: $g'(x) = C' = 0$ (здесь, как и ниже, через C обозначено произвольно выбранное число).

Вспомогательная теорема 2 Если $g'(x) = 0$ при всех $x \in (a, b)$, то $g(x) = C$ на (a, b).

Доказательство. Пусть $g'(x) = 0$ во всех точках (a, b). Зафиксируем точку $x_1 \in (a, b)$. Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ по формуле Лагранжа имеем $g(x) - g(x_1) = g'(\xi)(x - x_1)$.

Так как $\xi \in (x, x_1)$, а точки x и x_1 принадлежат промежутку (a, b), то $g'(\xi) = 0$, откуда следует, что $g(x) - g(x_1) = 0$, то есть $g(x) = g(x_1) = const$.

Теорема 2. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на промежутке (a, b), а $G(x)$ – другая первообразная для $f(x)$ на (a, b), то $G = F + C$, где C – число.

Доказательство. Возьмем производную от разности $G - F$: $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. Отсюда следует $G - F = C$, где C – число, то есть $G = F + C$.

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется *неопределенным интегралом* и обозначается $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольное число.

Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется *интегрированием*.

Из определения неопределенного интеграла следует, что каждой формуле дифференциального исчисления $F'(x) = f(x)$ соответствует формула $\int f(x)dx = F(x) + C$ интегрального исчисления. Отсюда получается таблица неопределенных интегралов.

6.1.2. Таблица неопределенных интегралов

1) $\int dx = x + C.$	7) $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C.$
2) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ $(a \neq -1).$	8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
3) $\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert + C.$	9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

4) $\int e^x dx = e^x + C$.	10) $\int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C =$ $= -arcctgx + C$.
5) $\int a^x dx = a^x \log_a e + C$ $(a \neq 1)$.	11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C$.
6) $\int \sin x\, dx = -\cos x\, dx + C$.	12) $\int \frac{dx}{x(a-x)} = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{x}{a-x}\right| + C$.

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$.	4) $\int df(x) = f(x) + C$.
2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$.	5) $\int kf(x)dx = k\int f(x)\, dx$.
3) $d\int f(x)dx = f(x)dx$.	6) $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx =$ $= \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
7) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ $(a \neq 0)$.	

Все эти свойства непосредственно следуют из определения.

6.1.3. Интегрирование методом замены переменной или способ подстановок

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует.

Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив

$$x = \varphi(t), \tag{6.1}$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$. Докажем, что в этом случае имеет место следующее равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (6.2)$$

Доказательство: $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$. Действительно, если правую часть продифференцируем по x как сложную функцию, где t – промежуточный аргумент, то есть $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$, То имеем

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} =$$
$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Следовательно, производные по x от правой и левой частей равенства (6.2) равны. При интегрировании иногда целесообразнее подбирать замену переменной в виде не $x = \varphi(t)$, а $t = \varphi(x)$. Пусть нужно вычислить интеграл $\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}$ здесь удобно,

$\varphi(x) = t, \varphi'(x)dx = dt.$

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + c = ln|\varphi(x)| + c.$$

Пример. Вычислить $\int \sqrt{sin\,x}\,cos\,x\,dx$.

Решение. Заменим переменную $t = sin\,x,$ тогда $dt = cos\,x\,dx.$

$$\int \sqrt{sin\,x}\,cos\,x\,dx = \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \text{C} = \frac{2}{3}sin^{\frac{3}{2}}x + \text{C}.$$

Пример. Вычислить $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Решение. Заменим переменную $t = \frac{x}{a}$, тогда $dt = \frac{1}{a}dx, dx = adt$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$\frac{1}{a}arctgt + C = \frac{1}{a}arctg\,\frac{x}{a} + C.$$

Пример. Вычислить $\int \frac{1+ln\,x}{3+x\,ln\,x}dx$.

Решение. Заменим переменную $t = 3 + x\,ln\,x,$ тогда $dt = (1 + ln\,x)dx$.

$$\int \frac{1+ln\,x}{3+x\,ln\,x}dx = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|3 + x\,ln\,x| + C.$$

6.1.4. Интегрирование по частям

Пусть u и v – две дифференцируемые функции от x. Тогда, как известно, дифференциал произведения uv вычисляется по следующей формуле

$d(uv) = udv + vdu$ отсюда интегрируя, получим

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (6.3)$$

формула (6.3) называется *формулой интегрирования по частям*.

Для применения этой формулы подынтегральное выражение следует представить в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции.

Если под интегралом стоит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на степенную, то есть

$\int P_n(x)\, arcsin\, x\, dx$, $\int P_n(x)\, arccos\, x\, dx$, $\int P_n(x)\, arctg\, x\, dx$, $\int P_n(x)\, arcctg\, x\, dx$ или $\int P_n(x)\, log_a\, x\, dx$, то за u обычно принимают не степенную функцию.

Пример. Вычислить $\int xlnxdx$.

Решение.

$$\int xlnxdx = \begin{vmatrix} u = lnx & dv = xdx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}lnx -$$

$$-\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример. Вычислить $\int arctgxdx$.

Решение.

$$\int arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx & dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = x \end{vmatrix} = xarctgx -$$

$$-\int \frac{xdx}{1+x^2} == xarctgx - \frac{1}{2}ln|1+x^2| + C.$$

Если под интегралом стоит произведение тригонометрической или показательной функции на степенную, то есть

$\int P_n(x)sinaxdx$, $\int P_n(x)cosaxdx$, $\int P_n(x)e^{ax}dx$, то за u обычно принимают степенную функцию.

Пример. Вычислить $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$.

Решение.

$$\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = (x^2-2x+5) & dv = e^{-x}dx \\ du = (2x-2)dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -e^{-x}(x^2-2x+5) + \int (2x-2)e^{-x}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = (2x-2) & dv = e^{-x}dx \\ du = 2dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) - e^{-x}(2x - 2) + 2\int e^{-x}dx =$$
$$= -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) - e^{-x}(2x - 2) - 2e^{-x} + C.$$

Если под интегралом стоит произведение тригонометрической и показательной функции $\int a^{\alpha x} sinbxdx$, $\int a^{\alpha x} cosbxdx$, то за u можно принять любую функцию, два раза интегрируя по частям, можно привести в рекуррентную формулу.

Пример. Вычислить $\int e^x sinxdx$

Решение.

$$\int e^x sinxdx = \begin{vmatrix} u = sinx & dv = e^x dx \\ du = cosxdx & v = e^x \end{vmatrix} =$$
$$= e^x sinx - \int e^x cosxdx =$$
$$= \begin{vmatrix} u = cosx & dv = e^x dx \\ du = -sinxdx & v = e^x \end{vmatrix} = e^x sinx - e^x cosx - \int e^x sinxdx,$$
$$\int e^x sinxdx = \frac{1}{2} e^x (sinx - cosx) + C.$$

6.2. Интегрирование рациональных дробей

6.2.1. Понятие рациональной дроби

Функция вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степеней соответственно m и n называются *дробно-рациональной функцией* или *рациональной дробью*.

1) Если $m < n$, то дробь *правильная*,
2) Если $m \geq n$, то дробь *неправильная*.

Если дробь неправильная, то разделив числитель на знаменатель, можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби. Всякую неправильную, рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_n(x) + \frac{F(x)}{f(x)}.$$

Здесь $M_n(x)$ – многочлен, $\frac{F(x)}{f(x)}$ – правильная дробь.

Интегрирование многочлена не представляет трудности, и вся задача сводится к нахождению интеграла от правильной дроби. Приведем примеры правильных и неправильных дробей:

1) $\frac{x^4+1}{x^4-1}$ – неправильная, 2) $\frac{x^2-2x+9}{(x-1)(x^3+1)}$ – правильная,

3) $\frac{1}{x^2+4x-3}$ – правильная, 4) $\frac{2x^4-5x^3+8x^2-7}{x^3+4x}$ – неправильная.

6.2.2. Простейшие дроби

Определение: Правильные рациональные дроби видов

1) $\frac{A}{x-a}$

2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k-целый положительный $k \geq 2$)

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, то есть $D < 0$)

4) $\frac{Ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ $\left(k \geq 2. \quad \frac{p^2}{4} - q < 0\right)$

называются простейшими дробями I, II, III, IV типов.

Интегрирование простейших дробей типа I, II, III не составляет большой трудности.

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A\, ln|x-a| + \text{C}.$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{1-k} + \text{C}.$

3. $\int \frac{Ax+b}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax+b}{x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q} dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} dx =$

$$= \left| \begin{matrix} x + \frac{p}{2} = t \; q - \frac{p^2}{4} = a^2 \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{t^2 + a^2} dt =$$

$$= A \int \frac{tdt}{t^2 + a^2} + \left(B - A\frac{p}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{A}{2} \ln|t^2 + a^2| +$$

$$+ \left(B - A\frac{p}{2}\right) \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + \mathrm{C} = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| +$$

$$+ \frac{B - A\frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + \mathrm{C}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{3x-4}{x^2+2x+5} dx$.

Решение.

$$\int \frac{3x - 4}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{3x - 4}{(x + 1)^2 + 4} dx = \left| \begin{matrix} x + 1 = t \\ x = t - 1 \\ dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{3(t - 1) - 4}{t^2 + 4} dt = 3 \int \frac{tdt}{t^2 + 4} - 7 \int \frac{dt}{t^2 + 4} =$$

$$= \frac{3}{2} \ln|t^2 + 4| - \frac{7}{2} arctg \frac{t}{2} + \mathrm{C} =$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) - \frac{7}{2} arctg \frac{x + 1}{2} + \mathrm{C}.$$

4. Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа.

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{Ax + B}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^k} dx =$$

$$=\left|\begin{array}{c} x+\dfrac{p}{2}=t \\ x=t-\dfrac{p}{2} \\ dx=dt \\ a^2=q-\dfrac{p^2}{4} \end{array}\right|=$$

$$=\int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{[t^2+a^2]^k}\,dt=\int \frac{At-\frac{Ap}{2}+B}{(t^2+a^2)^k}\,dt=$$

$$=A\underbrace{\int \frac{t}{(t^2+a^2)^k}\,dt}_{I}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\underbrace{\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\,dt}_{J_k}.$$

Каждый интеграл выполним отдельно

Вычислим первый интеграл

$$I=\int \frac{t}{(t^2+a^2)^k}\,dt=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+C=$$

$$=C-\frac{1}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

Вычислим второй интеграл

$$J_k=\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\,dt=\frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[J_{k-1}-\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt\right]=\frac{1}{a^2}J_{k-1}-\frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt,$$

отсюда

$$\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt \Rightarrow \left| \begin{matrix} u = t, dv = \dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^k} \\ du = dt, v = \dfrac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{matrix} \right|,$$

тогда

$$\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} -$$
$$-\frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} =$$
$$\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}.$$

Значит $J_k = \dfrac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \dfrac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \dfrac{1}{2(1-k)}J_{k-1}\right)$

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right)$$

получили рекуррентную формулу.

Подставляя в интеграл 4-го типа найденные интегралы J, J_k получим

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+pz+q)^k}dx = A\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} +$$
$$+\left(B - A\frac{p}{2}\right)\left[\frac{3-2k}{2(1-k)}J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right]\frac{1}{a^2}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$.

Решение.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{(x+1)-2}{((x+1)^2+2)^2}d(x+1) = |x+1=t| =$$

$$= \int \frac{t-2}{(t^2+2)^2}dt = \underbrace{\int \frac{tdt}{(t^2+2)^2}}_{I} - \underbrace{\int \frac{2dt}{(t^2+2)^2}}_{J} = I - J.$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+2}.$$

$$J = \int \frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2}dt = \int \frac{dt}{t^2+2} - \int \frac{t\cdot tdt}{(t^2+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} - \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = \dfrac{tdt}{(t^2+2)^2} & v = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{t^2+2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2}\cdot\frac{1}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{x+1}{(x+1)^2+2} + C.$$

6.2.3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $m < n$, можно разложить в сумму простейших дробей. Это разложение зависит от разложения знаменателя $Q_n(x)$ на линейные и квадратичные множители.

Пусть $Q_n(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu \dots (x^2+Rx+S)^v$

$\alpha + \beta + 2v + 2\mu = n,\ \ a, b, p, q, R, S - const,\ \ \alpha, \beta, \mu, v$ – натуральные числа

Теорема. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $Q_n(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu \dots (x^2+Rx+S)^v$, можно привести к виду:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_a}{(x-a)^a}+\cdots+$$
$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{C_\mu x+D_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}+\cdots+$$
$$+\frac{Ex+D}{x^2+Rx+S}+\frac{E_1x+D_1}{(x^2+Rx+S)^2}+\cdots+\frac{E_vx+D_v}{(x^2+Rx+S)^v}$$

Простым действительным линейным множителям знаменателя соответствуют простейшие дроби I, II типов, а квадратичным множителям соответствуют III и IV типа.

Итак, теперь можно привести правила интегрирования рациональных дробей.

1. Если рациональная дробь неправильная, то путем деления числителя на знаменатель выделить из нее целую часть и записать эту дробь как сумму этой целой части и правильной дроби.
2. Знаменатель правильной дроби разложить на линейные и квадратичные множители.
3. Правильную дробь разложить в сумму простейших дробей с неизвестными коэффициентами.
4. Найти эти неизвестные коэффициенты.
5. Найти интеграл от целой части и от полученных простейших дробей.

Рассмотрим примеры.

Пример. Вычислить $\int\frac{20x^2-25x-25}{(x+2)(x-3)(3x-1)}dx$.

Решение. $Q(x)=(x+2)(x-3)(3x-1)$

Все корни действительные и различные, в этом случае дробь $\frac{F(x)}{Q(x)}$ разлагается на простейшие дроби I типа

$$\int\frac{20x^2-25x-25}{(x+2)(x-3)(3x-1)}dx=$$

$$= \int \frac{A}{x+2}dx + \int \frac{B}{x-3}dx + \int \frac{C}{3x-1}dx.$$

$$\frac{20x^2 - 25x - 25}{(x+2)(x-3)(3x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{3x-1}$$

$$20x^2 - 25x - 25 = A(x-3)(3x-1) +$$

$$+B(x+2)(3x-1) + C(x+2)(x-3).$$

Для нахождения A, B, C применим метод частных значений:

при $x = -2$, $35A = 105, A = 3$.

при $x = 3, 40B = 80, B = 2$.

при $x = \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\left(-\frac{8}{3}\right) C = \frac{20}{9} - \frac{25}{3} - 25, \mathrm{C} = 5$.

$$\int \frac{20x^2 - 25x - 25}{(x+2)(x-3)(3x-1)}dx = 3\int \frac{dx}{x+2} +$$

$$+2\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{3x-1} =$$

$$= 3\,ln|x+2| + 2\,ln|x-3| + \frac{5}{3}ln|3x-1| + \mathrm{C}.$$

Пример. Вычислить $\int \frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}dx$.

Решение. $Q(x) = (x-2)^2(x+3)$.

Корни знаменателя действительны, причем некоторые из них кратные

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

$$x^2 + 2x + 2 = A(x-2)^2 + B(x-2)(x+3) + C(x+3).$$

Метод частных значений:

$$A(x-2)^2 + B(x-2)(x+3) + C(x+3) = x^2 + 2x + 2.$$

При $x = 2,\ 5C = 10, C = 2$, при $x = -3,\ 25A = 5, A = \frac{1}{5}$.

При $x = 0\ \ 4A - 6B + 3C = 2,\ \ \frac{4}{5} - 6B + 6 = 2,\ \ B = \frac{4}{5}$.

$$\int \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+3} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2} =$$
$$= \frac{1}{5} ln|x+3| + \frac{4}{5} ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

Пример. Вычислить $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$.

Решение. $Q_n(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$ В числе корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся (то есть различные).

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x-1}.$$
$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(Ax + B)(x-1) + C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}.$$
$$x = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1),$$
$$x = Ax^2 + x(B - A) + Cx^2 + C - B,$$

полагая $x = 1,\ 2C = 1,\ C = \frac{1}{2}$ полагая $x = 0,\ C - B = 0,\ B = C,\ B = \frac{1}{2}$.

$$x^2\text{:}\ \ A + C = 0, \qquad A = -C, \qquad A = -\frac{1}{2}.$$
$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} arctgx + \frac{1}{2}\ln|x - 1| + C.$$

Из всего вышеизложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно через логарифмическую функцию – в случае I типа, через рациональную функцию – в случае II типа, через логарифмическую и обратно тригонометрическую – в случае III типа, через рациональную и обратно тригонометрическую – в случае IV типа.

6.3. Интегралы от тригонометрических функций

6.3.1. Универсальная подстановка

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(sinx, cosx)dx, \tag{6.4}$$

где $R(sinx, cosx)$ рациональная функция относительно тригонометрических функций.

Такие интегралы приводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановки $tg\frac{x}{2} = t$ (универсальная подстановка). Выразим $\sin x$, $\cos x$, и dx через t.

$$\frac{x}{2} = arctgt, \qquad x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$sinx = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$cos\,x = \frac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\int R(sinx, cosx)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример. Вычислить $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left| \begin{matrix} tg\,\frac{x}{2} = t & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[\frac{8t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} + 5\right]} =$$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[\frac{8t+3-3t^2+5+5t^2}{1+t^2}\right]} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} = \int \frac{dt}{t^2+4t+4} = \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C =$$

$$= -\frac{1}{tg\,\frac{x}{2}+2} + C.$$

Итак, интеграл вида (6.4) всегда может быть приведен к интегралу от рациональной функции с помощью универсальной подстановки.

6.3.2. Некоторые частные случаи

Но вычисление этих интегралов с такой подстановкой приводит к сложным преобразованиям. Покажем некоторые простые подстановки:

1) Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, то подстановка $sinx = t$, $\cos x\,dx = dt$ приводит этот интеграл к виду: $\int R(t)\,dt$.

2) Если интеграл имеет вид: $\int R(\cos x)\sin x\,dx$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой

$\cos x = t, \quad \sin x\,dx = -dt.$

3) Если подынтегральная функция зависит только от tgx, то замена $tgx = t, x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2}$ приводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции: $\int R(tgx)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$.

4) Если подынтегральная функция имеет вид: $R(\sin x, \cos x)$, но $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях, то применяется та же подстановка. $tgx = t$, так как $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через tgx:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2x} = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1}{1+ctg^2x} =$$
$$= \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример. Вычислить $\int \frac{sin^3x}{2+cosx}dx$.

Решение.

$$\int \frac{sin^3x}{2+cosx}dx = \int \frac{sin^2xsinx}{2+cosx}dx = -\int \frac{1-cos^2x}{2+cosx}d(cosx) =$$
$$= |cosx = t| = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \left((t-2) + \frac{3}{t+2}\right)dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln(t+2) + C = \frac{cos^2x}{2} - 2cosx + 3\ln(cosx+2) + C.$$

5) Если подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$, то есть $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяем замену $t = \cos x$.

6) Если подынтегральная функция четная относительно и $\sin x$, и $\cos x$, то есть $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяем замену $t = tgx$.

Пример. Вычислить $\int \frac{sin^3x}{\sqrt[5]{cos^4x}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{sin^3x}{\sqrt[5]{cos^4x}}dx = \left|\begin{matrix}\text{нечетная относит.}\, sinx \\ t = cosx\ dt = -sinxdx\end{matrix}\right| = \int \frac{t^2-1}{\sqrt[5]{t^4}}dt =$$
$$= \int t^{\frac{6}{5}}dt - \int t^{-\frac{4}{5}}dt = \frac{5}{11}t^{\frac{11}{5}} - 5t^{\frac{1}{5}} + C =$$
$$= \frac{5}{11}cos^{\frac{11}{5}}x - 5cos^{\frac{1}{5}}x + C.$$

Рассмотрим интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$.

7) числа m и n – целые и положительные, и хотя бы одно из них нечетное число. Пусть $m = 2k+1, t = \cos x\ \ \sin x\, dx = -dt$.

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{\mathrm{n}} x\, dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x\, dx =$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x\, dx = -\int (1-t^2)^k t^n dt$$

Пример. Вычислить $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\sin^4 x} = \left|\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx\end{matrix}\right| =$$
$$= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}\cos x\, dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}dt =$$
$$= \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + \mathrm{C} = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + \mathrm{C}.$$

8) m и n –целые положительные и четные. Применяем формулы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Пример. Вычислить $\int \cos^4 x\, dx$.

Решение.

$$\int \cos^4 x\, dx = \left|\cos^2 x = \frac{1 + cos2x}{2}\right| = \int \left(\frac{1 + cos2x}{2}\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x +$$
$$+ \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx =$$
$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + \mathrm{C} =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \mathrm{C}.$$

9) m и n –четные и хотя бы одно из них отрицательное. Здесь следует сделать замену $tgx = t$ или $ctgx = t$.

Пример: Вычислить $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \left| \begin{array}{c} t = tgx\ 1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= \int tg^2 x\,(1 + tg^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2\,(1 + t^2) dt =$$
$$= \int t^2\, dt + \int t^4\, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

10) Произведения подынтегральной функции преобразуют в сумме по известным формулам:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m - n)\, x + \cos(m + n)\, x).$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)\,x).$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)\,x + \sin(m+n)\,x).$$

$$\int \sin kx\, dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C, \int \cos kx\, dx = \frac{1}{k}\sin kx + C.$$

Пример. Вычислить $\int \sin 2x \cos 6x\, dx$.

Решение.

$$\int \sin 2x \cos 6x\, dx = \int \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 4x)dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{8}\cos 4x + \text{C}.$$

Пример. Вычислить $\int \cos 3x \cos x\, dx$.

Решение.

$$\int \cos 3x \cos x\, dx = \int \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + \text{C}.$$

Не всякая первообразная, даже тогда, когда она существует, выражается в конечном виде через элементарные функции.

Например:

$\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона, $\int \cos x^2\, dx$ – интеграл Френеля,

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ – интегральный косинус,

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм, $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Лапласа, все эти интегралы в конечном виде не выражаются и находят их приближенным способом.

6.4. Интегралы от иррациональных функций

6.4.1. Интеграл вида

$$\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})\, dx.$$

Рассмотрим интеграл $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})\, dx$, где R – рациональная функция. Пусть k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$. Сделаем подстановку $x = t^k, dx = kt^{k-1}dt$. Тогда каждая дробная степень x выражается через целую степень t и, следовательно, подинтегральная функция, преобразуется в рациональную функцию от t.

Пример. Вычислить $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}$.

Решение.

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = \begin{bmatrix} x = t^4 & x^{\frac{1}{2}} = t^2 \\ dx = 4t^3dt & x^{\frac{3}{4}} = t^3 \end{bmatrix} = \int \frac{t^2 4t^3 dt}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5 dt}{t^3+1} =$$

$$= 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt = 4\int t^2 dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + \mathrm{C} =$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right| + \mathrm{C}.$$

6.4.2. Интеграл вида $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}} \dots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx$.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}} \dots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью следующей подстановки:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

где k – общий знаменатель $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$. Из этой замены найдем x и dx

$$ax + b = cxt^k + dt^k, x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}.$$

$$dx = \frac{kdt^{k-1}(a - ct^k) + ckt^{k-1}(dt^k - b)}{(a - ct^k)^2} dt =$$

$$= \frac{kt^{k-1}(da - dct^k + cdt^k - cb)}{(a - ct^k)^2} dt = \frac{kt^{k-1}(da - cb)}{(a - ct^k)^2} dt$$

Заменяя x, dx и дробное выражение, получим интеграл от рациональной функции.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-3}}$.

Решение.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-3}} = \left| \begin{matrix} x - 3 = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \\ t = \sqrt[3]{x-3} \end{matrix} \right| = \int \frac{(t^3+3)3t^2 dt}{t} = 3\int (t^4 + 3t)dt =$$

$$= \frac{3}{5}t^5 + \frac{9}{2}t^2 + \text{C} = \frac{3}{5}(x-3)\sqrt[3]{(x-3)^2} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{(x-3)^2} + \text{C}.$$

6.4.3. Эйлеровы подстановки

Рассмотрим интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной с помощью следующих подстановок Эйлера.

1. Первая подстановка Эйлера

Если $a > 0$, то полагаем $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t$. Для определенности перед корнем берем знак плюс и возводим обе части в квадрат $ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2$ $x\left(b - 2\sqrt{a}t\right) = t^2 - c$.

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}, dx = \frac{2t\left(b - 2\sqrt{a}t\right) + 2\sqrt{a}(t^2 - c)}{\left(b - 2\sqrt{a}t\right)^2} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t = \sqrt{a}\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t} + t$$

Подставляя $x, \sqrt{ax^2 + bx + c}$ и dx в интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$, мы сведем его к интегралу от рациональных функций от t.

2. Вторая подстановка Эйлера. Если $c > 0$, то полагаем

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$. Для определенности перед корнем берем знак плюс и возводим обе части в квадрат

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c \qquad |: x$$

$$ax + b = xt^2 + 2t\sqrt{c}$$

$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}$$

$dx = \frac{2\sqrt{c}\left(a - t^2\right) + 2t(2\sqrt{c}t - b)}{(a - t^2)^2} dt$. Подставляя $x, \sqrt{ax^2 + bx + c}$ и dx в интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$, мы сведем его к интегралу от рациональных функций от t.

Пример. Вычислить $\int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{x^2\sqrt{1 + x + x^2}} dx$.

Решение.

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$$
$$1+x+x^2 = x^2t^2+2xt+1$$
$$1+x = xt^2+2t, \qquad x = \frac{2t-1}{1-t^2}$$
$$dx = \frac{2(1-t^2)+2t(2t-1)}{(1-t^2)^2}dt = \frac{2-2t^2+4t^2-2t}{(1-t^2)^2}dt =$$
$$= \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt.$$
$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{2t-1}{1-t^2}\cdot t+1 =$$
$$= \frac{2t^2-t+1-t^2}{1-t^2} = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}.$$
$$1-\sqrt{1+x+x^2} = 1-\frac{t^2-t+1}{1-t^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$
$$\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int\frac{\frac{-2t^2+t}{1-t^2}}{\left(\frac{2t-1}{1-t^2}\right)^2\frac{t^2-t+1}{1-t^2}}\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt =$$
$$= 2\int\frac{-2t^2+t}{(2t-1)^2}dt = -2\int\frac{t}{2t-1}dt = -\int\frac{2t-1+1}{2t-1}dt =$$
$$= -t-\frac{1}{2}ln|2t-1|+C = \left|t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right| =$$
$$= -\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}-\frac{1}{2}ln\left|2\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}-1\right|+C.$$

3. Третья подстановка Эйлера.

Пусть α и β – действительные корни трехчлена ax^2+bx+c. Полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$

Так как $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, то

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t, \qquad a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2,$$

$$x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}, \qquad dx=\frac{-2\alpha t(a-t^2)+2t(a\beta-\alpha t^2)}{(a-t^2)^2}dt.$$

Подставляя $x, \sqrt{ax^2+bx+c}$ и dx в интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, мы сведем его к интегралу от рациональных функций от t.

6.4.4. Интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Рассмотрим интеграл $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int \frac{Ax+B}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c}}dx=$$

$$=\int \frac{A\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{Ab}{2a}+B}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c}}dx=$$

$$=A\int \frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c}}dx+$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c}}dx.$$

Если в этих интегралах произведем замену $x+\frac{b}{2a}=t$, то первый из них приводится к интегралу от степенной функции

$$I_1 = \left| \begin{matrix} t = x + \dfrac{b}{2a} \\ dt = dx \end{matrix} \right| = A \int \frac{\frac{1}{2a} d\left(at^2 - \frac{b^2}{4a} + c\right)}{\sqrt{at^2 - \frac{b^2}{4a} + c}} =$$

$$= \frac{A}{a} \sqrt{at^2 - \frac{b^2}{4a} + c} = \frac{A}{a} \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c} =$$

$$= \frac{A}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c},$$

а второй – к табличному интегралу.

Пример. Вычислить $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Решение.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \int \frac{(x + 2) - 2}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1}} dx = \left| \begin{matrix} t = x + 2 \; x = t - 2 \\ dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 + 1}} - 2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \sqrt{t^2 + 1} - 2 \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 1} \right| + C.$$

6.4.5. Тригонометрические преобразования

Во многих случаях для вычисления интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ $(a \neq 0)$ пользуются тригонометрическими преобразованиями. Для этого из квадратного трехчлена выделяем полный квадрат и произведем замену $t = x + \frac{b}{2a}$. Тогда $\sqrt{ax^2 + bx + c} == \sqrt{at^2 + (c - \frac{b^2}{4a})}$.

Рассмотрим все возможные случаи:

1. $a > 0, c - \frac{b^2}{4a} > 0$. В этом случае введем обозначения $a = p^2, c - \frac{b^2}{4a} = q^2$, тогда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{p^2t^2 + q^2}$.

2. $a > 0, c - \frac{b^2}{4a} < 0$. В этом случае введем обозначения $a = p^2,\ c - \frac{b^2}{4a} = -q^2$, тогда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{p^2t^2 - q^2}$.

3. $a < 0, c - \frac{b^2}{4a} > 0$. В этом случае введем обозначения $a = -p^2, c - \frac{b^2}{4a} = q^2$ тогда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{q^2 - p^2t^2}$.

4. $a < 0, c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Тогда $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ не имеет смысла.

Таким образом, интеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ сводится к одному из интегралов $\int R\left(t, \sqrt{p^2t^2 + q^2}\right) dt$ $\int R\left(t, \sqrt{p^2t^2 - q^2}\right) dt$ $\int R\left(t, \sqrt{q^2 - p^2t^2}\right) dt$.

Первый интеграл приводится к интегралу рациональной функции от $\sin z$ и $\cos z$ с помощью замены $t = \frac{q}{p} tgz$, второй – $t = \frac{q}{p}\frac{1}{\cos z}$, а третий – $t = \frac{q}{p} \sin z$.

6.4.6. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

В этом случае поможет избавиться от иррациональности замена $x - \alpha = \frac{1}{t}$. Тогда $x = \frac{1}{t} + \alpha, dx = -\frac{dt}{t^2}$.

Пример. Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2-6x-1}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2 - 6x - 1}} = \left| x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = -\int \frac{t \cdot tdt}{t^2\sqrt{7 - 6t - t^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{16 - 6t - t^2 - 9}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4^2 - (t+3)^2}} = -arcsin \frac{t+3}{4} +$$

$$+C = -arcsin \frac{1+3x}{4x} + C.$$

6.5. Определённый интеграл. Задачи, приводящие к определённому интегралу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определённом интеграле. Интегрирование по частям

6.5.1 Задачи, приводящие к определённому интегралу

Требуется найти площадь любой плоской фигуры, ограниченной замкнутой линией. Пусть фигура ограничена прямыми $x = a, x = b$, осью Ox и кривой $y = f(x)$, причём $f(x) \geq 0$. Такая фигура называется криволинейной трапецией. Отрезок $[a, b]$ разобьём на n частей точками $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$. Через точки деления проведём прямые, параллельные оси Oy и получим n криволинейных трапеций. Пусть $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_n$ – площади соответствующих трапеций

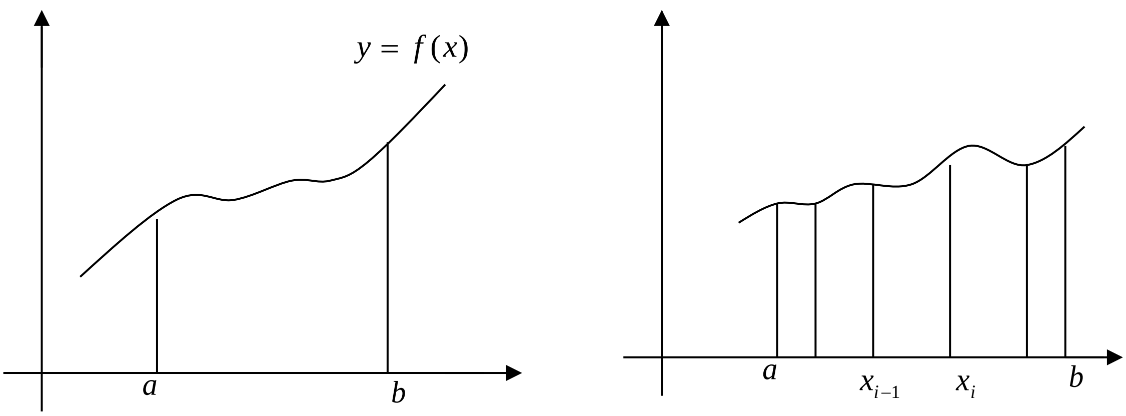


Рис. 6.1.

Найдем площадь ΔS_i. Длина отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ считается настолько малой, что $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ξ_i – произвольная точка, взятая из $[x_{i-1}, x_i]$. Составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

6.5.2. Определение определённого интеграла

Пусть дана непрерывная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Выполним следующие действия:

1. Разобьём отрезок на n – частей

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <. < x_n = b.$$
$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], ., [x_{n-1}, x_n].$$

2. В каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольно по точке ξ_i. Находим значение функции в этих точках как $f(\xi_i)$.

Составим произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Пусть $n \to \infty, n$ – число малых отрезков, причём $\max|\Delta x_i| \to 0$.

$$\lim_{max|\Delta x| \to 0} s_n = \lim_{max|\Delta x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определение. Конечный предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на n- частей и от выбора точек ξ_i в каждой из них, называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$\lim_{max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Здесь x – интегральная переменная, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, a – нижняя граница интегралов или нижний предел, b – верхняя граница или верхний предел.

Определение. Функция $y = f(x)$, для которой существует интеграл, называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Теорема. (О существовании определённого интеграла).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Условия непрерывности функции являются достаточными для существования определённого интеграла.

В общем случае, если функция ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет конечное число точек разрыва, то она интегрируема.

6.5.3. Свойства определённого интеграла

1. Если поменять местами пределы интегрирования, то интеграл изменит свой знак

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

4. Определённый интеграл от суммы или разности двух функций равен сумме или разности двух интегралов от этих функций

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

5. Если $[a, b]$ разбит на части точкой с, где $a < c < b$, то определённый интеграл по отрезку $[a, b]$ равен сумме определённых интегралов по его частям

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство: Так как разбиение $[a, b]$ выполняется произвольно, то и c можно взять за $c = x_k$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$$
$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Если функция не отрицательна на $[a, b]$, то определённый интеграл также

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Доказательство: Так как $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то $f(\xi_i) \geq 0, f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$, отсюда

$$\lim_{max|\Delta x_i| \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0.$$

7. Если $f(x) \geq \varphi(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Доказательство: Пусть $f(x) \geq \varphi(x) \Rightarrow f(x) - \varphi(x) \geq 0$ по свойству 6.

$$\int_a^b \big(f(x) - \varphi(x)\big)dx \geq 0.$$

по свойству 4.

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0 \ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

8. **Теорема о среднем**. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то внутри этого отрезка существует хотя бы одна точка c, для которой справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$$

Доказательство: Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то эта функция имеет наибольшее и наименьшее значения. M – наибольшее значение, m – наименьшее значение для всех $x \in [a, b], m \leq f(x) \ \leq M$.

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx\,, m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Так как функция непрерывная, то существует точка c, для которой

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c).$$

$m \le\ f\ (c\ ) \le M, f(\text{c})$ – среднее значение функции.

Так как функция непрерывна, то она принимает все значения, заключённые между m и M, следовательно, для значения c найдется ξ такая $(a < \xi < b)$, что $c = f(\xi)$.

Определённый интеграл $\int f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции. $f(c)\ (b-a)$ – площадь прямоугольника с основанием равным длине отрезка $[a, b]$ и высотой равной значению функции в некоторой точке. Итак, площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием.

В этом заключается геометрический смысл теоремы о среднем.

6.5.4. Производная от интеграла по переменной верхней границе

Пусть дан $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$- заданная непрерывная функция на $[a, b]$. Этот интеграл зависит от границ интегрирования.

Пусть a – закреплена, а b –меняется. Обозначим b через x, а переменную интегрирования через t.

$$\int_a^x f(t)dt = I(x)$$

Функция $I(x)$ называется интегралом по переменной верхней границе.

Теорема: Производная интеграла по переменной верхней границе равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена верхней границей:

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x).$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Доказательство: По определению $I'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x}$.

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Применим к последнему интегралу теорему о среднем

$$\Delta I = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x,$$

$$c \in [\, x, x + \Delta x \,],$$

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{при } \Delta x \to 0 \\ c \to x \end{bmatrix} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x).$$

Итак, $I'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$.

Доказанная теорема является одной из основных в курсе математического анализа. Эта теорема устанавливает связь между определённым интегралом и производной.

6.5.5. Формула Ньютона-Лейбница

Вычислить определённые интегралы непосредственно по определению сложно даже для простейших функций. На практике определённые интегралы находят по формуле Ньютона-Лейбница.

Пусть задан $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема. Если $F(x)$ – одно из первообразных для $f(x)$, то справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница читается*: Определённый интеграл равен приращению первообразной на отрезке интегрирования***.**

Доказательство. По вышеуказанной теореме функция $\int_a^x f(t)dt$ есть так же первообразная от $f(x)$. Но две любые первообразные данной функции отличаются на постоянную C.

$$I(x) = F(x) + C.$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C. \tag{6.5}$$

Для определения постоянного C предположим $x = a$, тогда

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0.$$

$C = -F(a)$, следовательно,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$, получим формулу Ньютона-Лейбница,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Пример. Вычислить $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx|_{-1}^{1} = arctg1 - arctg(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример. Вычислить $\int_1^4 \frac{dx}{2x-1}$.

Решение.

$$\int_1^4 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} ln|2x-1|\,|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{2}[ln\,7 - ln\,1] = \frac{ln\,7}{2}.$$

6.5.6. Замена переменной в определённом интеграле

Пусть задан определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывная на $[a, b]$ и пусть $x = \varphi(t)$.

Теорема. Если $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывно при $t \in [\alpha, \beta]$ то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + \text{C}. \tag{6.6}$$

$$\int f(\varphi(t)\varphi'(t))dt = F\big(\varphi(t)\big) + \text{C}. \tag{6.7}$$

Из (6.5) получим

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Из (6.6) получим

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t)\big)|_\alpha^\beta = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Пример. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t \; x = 0 \; t = 0 \\ x = t^2 \; x = 1 \; t = 1 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int_0^1 \frac{2tdt}{1+t} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{dt}{t+1} = 2t \mid_0^1 -$$

$$-2\,ln|t+1| \mid_0^1 = 2 - 2\,ln\,2 = 2 - ln\,4.$$

Пример. Вычислить $\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx$.

Решение.

$$\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx = \left| \begin{matrix} t = \ln x + 1 \; x = 1 \; t = 1 \\ dt = \dfrac{dx}{x} \; x = e \; t = 2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_1^2 \sqrt[4]{t} dt = \frac{4t^{\frac{5}{4}}}{5} \mid_1^2 = \frac{4}{5}\left(2^{\frac{5}{4}} - 1^{\frac{5}{4}}\right) = \frac{4}{5}\left(2\sqrt[4]{2} - 1\right).$$

6.5.7. Интегрирование по частям в определённом интеграле

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на $[a,b]$ и $d(uv) = udv + vdu$, тогда справедлива следующая формула, которая называется формулой интегрирования по частям

$$\int_a^b udv = uv \mid_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x \;\; \cos x dx = dv \\ du = dx \; v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x \mid_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= x\sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример. Вычислить $\int_1^2 (ln\,x)^2 dx$.

Решение.

$$\int_1^2 (ln\,x)^2 dx = \begin{vmatrix} u = (ln\,x)^2 \; du = 2\,ln\,x\cdot\frac{1}{x}dx \\ dv = dx \; v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x(ln\,x)^2\,\Big|_1^2 - 2\int_1^2 ln\,x\,dx.$$

$$\int_1^2 ln\,x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \;\; dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx \; v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\ln x\,\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}x\,dx = x\ln x\,\Big|_1^2 - x\,\Big|_1^2.$$

$$\int_1^2 (ln\,x)^2 dx = x(ln\,x)^2\,\Big|_1^2 - 2\left(x\ln x\,\Big|_1^2 - x\,\Big|_1^2\right) =$$

$$= 2ln^2 2 - 4ln2 + 2.$$

6.6. Применение определенного интеграла

6.6.1. Площадь плоской фигуры

а) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и положительна $f(x) > 0$, то определённый интеграл от этой функции на отрезке $[a, b]$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4x - x^2, x = 3, y = 0.$$

Решение.

$$\int_0^3 (4x - x^2)dx = \left(4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^3 = 9.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2, y = -x$.

Решение. Построим фигуру по её границам

$$y = 2x - x^2, \text{y} = 1 - 1 + 2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2.$$

Ветви параболы направлены вниз, вершина в точке $(1,1)$.

Решая систему, получим

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow -x = 2x - x^2 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3$$

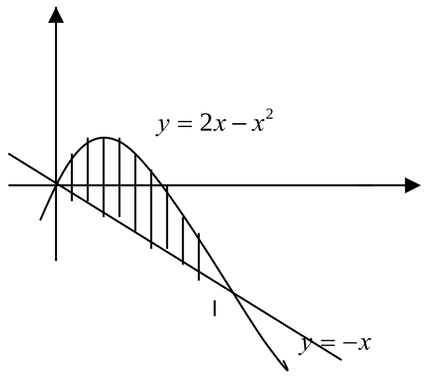


Рис. 6.2.

$$\int_0^3 (2x - x^2 + x)dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$y = e^x, y = e^{-x}, x = 2.$$

Решение.

$$S = \int_0^2 (e^x - e^{-x})dx = e^x \,|_0^2 + e^{-x} \,|_0^2 =$$

$$= e^2 - 1 + \frac{1}{e^2} - 1 = \frac{e^4 - 2e^2 + 1}{e^2} = \frac{(e^2 - 1)^2}{e^2} = \left(e - \frac{1}{e}\right)^2.$$

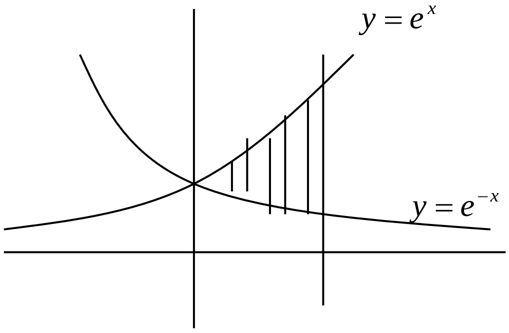


Рис. 6.3.

б) Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \ \alpha \le t \le \beta \ S = \int_a^b y dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \\ x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом.

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}$$

Решение. Вычислим площадь верхней половины эллипса и удвоим. Здесь x изменяется от $-a$ до a, следовательно t изменяется от π до 0.

$$S = 2\int_{\pi}^{0} bsint\,(-asint)dt = -2ab\int_{\pi}^{0} \frac{1-cos2t}{2}dt =$$
$$= ab\left(t - \frac{sin2t}{2}\right)_{0}^{\pi} = \pi ab.$$

в) Если кривая задана в полярной системе координат уравнением

$$\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta,$$

тогда

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $r = sin4\varphi$.

Решение. Эта фигура называется четырёхлепестковой розой. Так как $r \ge 0$, то $sin4\varphi \ge 0$ при $0 \le 4\varphi \le \pi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sin^2 4\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-cos\,8\varphi}{2}d\varphi =$$
$$= \frac{1}{4}\varphi\,\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{32}sin\,8\varphi\,\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \pi. S = 4\pi.$$

6.6.2. Длина дуги кривой

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, непрерывной на $[a, b]$. Найдем длину дуги $\breve{AB}$ этой кривой, где $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$. Делим дугу $\breve{AB}$ на n частей с помощью точек

$$A = M_0\big(a, f(a)\big), M_1\big(x_1, f(x_1)\big), \ldots,$$
$$M_i\big(x_i, f(x_i)\big), \ldots, M_n\big(x_n, f(x_n)\big) = B$$

и проведем хорды $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Тогда получим ломаную, вписанную в дугу. Длина дуги определяется как предел вписанной в неё ломаной, когда $n \to \infty$ и длина максимальной из её звеньев стремится к нулю.

$$\breve{AB} = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}$$

По теореме Лагранжа $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i$.

$$\Delta s_i = \Delta x_i \sqrt{1 + \frac{(f'(c_i)\Delta x_i)^2}{(\Delta x_i)^2}} = \Delta x_i \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2},$$

где $x_{i-1} < c_i < x_i$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Если $f'(x)$ непрерывно на $[a, b]$, то $\sqrt{1 + f'(x)}$ также непрерывно, отсюда

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

Пример. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками (0,0) и (4,8).

Решение.

$$y = \sqrt{x^3}.$$

Функция $y(x)$ определена для $x \geq 0$. Поскольку данные точки лежат в первой четверти $y = x^{\frac{3}{2}}$. Отсюда

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}. \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

Следовательно:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x dx} = \frac{4}{9}\int_0^4 \sqrt{1+\frac{4}{9}xd}\left(1+\frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+\frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^4 =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3} \Big|_0^4 = \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3}-1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой у $= lncosx$, заключенной между точками с абсциссами $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

$$y'(x) = -tgx, \text{ то } \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+tg^2x} = \frac{1}{\cos x};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = ln\, tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = ln\, tg\,\frac{3\pi}{8}.$$

Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями.

Теорема. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме

$x = \varphi(t), y = \psi(t)$ $\alpha \le t \le \beta$ и производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то длина дуги кривой выражается интегралом

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Доказательство.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \left| \begin{matrix} dx = \varphi'(t)dt \\ a = \varphi(\alpha)\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \\ b = \psi(\beta) \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 - \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Пример. Вычислить длину астроиды

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t. \end{cases}$$

Решение: $x'_t = -3\,acos^2\,t \cdot sint, y'_t = 3\,asin^2\,t \cdot cost$.
Отсюда

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{9a^2\,cos^4\,t \cdot sin^2\,t + 9a^2\,sin^4\,t \cdot cos^2\,t} =$$
$$= \sqrt{9a^2\,cos^2\,t \cdot sin^2\,t\,(cos^2\,t + sin^2\,t)} =$$
$$= 3a \sin t \cdot cos\,t = \frac{3}{2} asin\,2t.$$

$$l = 4 \cdot \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,2tdt = -4 \cdot \frac{3a}{2 \cdot 2} \cdot cos\,2t\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a(-1-1) = 6a.$$

Длина дуги в полярной системе координат. Пусть кривая задана в виде $r = r(\theta)\ \theta_1 \le \theta \le \theta_{2.}$ Запишем уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = r(\theta)cos\theta\ x'(\theta) = r'(\theta) \cdot cos\,\theta - r(\theta) \cdot sin\,\theta \\ y = r(\theta)sin\theta\ y'(\theta) = r'(\theta) \cdot sin\,\theta + r(\theta) \cdot cos\,\theta \end{cases}$$

$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2}$ показать самостоятельно

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2}\, d\theta.$$

6.6.3 Вычисление объёма тела вращения

Пусть кривая AB задана непрерывным на $[a, b]$ уравнением $y = f(x) \ge 0.$

Найдём объём тела, образованный вращением кривой AB вокруг оси Ox. Отрезок $[a, b]$ разделим на n частей, в каждой из них берём произвольным образом по точке x_i, и составим следующую сумму:

$$V_n = \sum_{i=0}^{n} \pi(f(x_i))^2\, \Delta x_i,$$

так как $\pi(f(x_i))^2$ определяет площадь сечения в точке x_i.

Если перейти к пределу при стремлении $n \to \infty$ и $max\Delta x_i \to 0$, то получим объём тела вращения:

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n} \pi(f(x_i))^2\, \Delta x_i = \pi \int_a^b (f(x_i))^2 dx.$$

Таким образом, объём тела, образованный вращением кривой AB, заданной непрерывным на $[a, b]$ уравнением $y = f(x) \ge 0$ вокруг оси Ox, равен

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Аналогично, если тело образованно вращением кривой AB, заданной непрерывным на $[c,d]$ уравнением $x=\varphi(y)\geq 0$ вокруг оси Oy, то объём тела равен

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy.$$

Пример. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{2}, x=0, x=2\sqrt{2}$ вокруг оси 1) Ox, 2) Oy.

Решение.

1) По формуле

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{x^4}{4}\,dx=\pi\frac{x^5}{20}\Big|_0^{2\sqrt{2}}=\pi\frac{32\sqrt{2}}{5}(\text{куб. ед.}).$$

2) Если $x=0,$ то $y=0,$ $x=2\sqrt{2},$ то $y=4.$

По формуле

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_0^4 2ydy=\pi y^2|_0^4=16\pi(\text{куб. ед.}).$$

6.6.4. Вычисление работы (переменной силы)

Пусть под действием некоторой силы F материальная точка M движется по прямой DS, причем направление силы совпадает с направлением движения.

Задача. Найти работу, совершенную силой F при перемещении точки M из положения $s = a$ в положение $s = b$.

1. Если сила F постоянна, то работа выражается произведением силы F на длину пути, то есть

$$A=F\cdot(b-a).$$

1. Предположим, что сила непрерывно меняется в зависимости от положения материальной точки, то есть представляет собой функцию $F(s)$, непрерывную на отрезке $a \leq s \leq b$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей с длинами

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots \dots, \Delta s_n$$

затем в каждом частичном отрезке $[s_{i-1}, s_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и заменим работу силы $F(s)$ на пути $\Delta s_i, i = \overrightarrow{1, n}$ произведением $F(\xi_i) \cdot \Delta s_i$

Это значит, что в пределах каждого частичного отрезка мы принимаем силу F за постоянную, а именно $F = F(\xi_i)$.В таком случае выражение $F(\xi_i) \cdot \Delta s_i$ при достаточно малом Δs_i дает нам приближенное значение работы силы F на пути Δs_i, а сумма

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \cdot \Delta s_i$$

будет приближенным выражением работы силы F на всем отрезке $[a, b]$. Очевидно A_n представляет собой интегральную сумму, составленную для функции $F = F(s)$ на отрезке $[a, b]$. Предел этой суммы при $max(\Delta s_i) \to 0$ существует и выражает работу силы $F(s)$ на пути от точки $s = a$ до точки $s = b$.

$$A = \int_a^b F(s) ds.$$

6.7. Несобственные интегралы I и II родов

6.7.1. Несобственные интегралы I рода. (Интегралы с бесконечными пределами)

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена и непрерывна на полупрямой $\alpha \leq x < +\infty$

Рассмотрим также интеграл

$$I(R) = \int_{a}^{R} f(x)dx,$$

который имеет смысл при любом $R > a$, при изменении R интеграл изменяется, он является непрерывной функцией от R.

Исследуем вопрос о предельном значении функции $I(R)$при $R \to +\infty$, то есть вопрос о существовании предела

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$$

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx,$$

то этот предел называется *несобственным интегралом I рода* от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначается

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

Следовательно, по определению, имеем

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$$

В этом случае будем считать, что несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

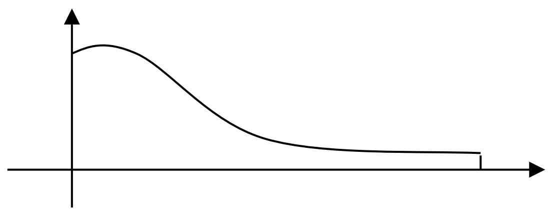
существует или *сходится.*

Если $I(R)$ при $R \to +\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

не существует или *расходится*.

Геометрически, если в случае $f(x) \geq 0$, определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ выражает площадь области, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и ординатами $x = a$, $x = b$, то естественно считать, что несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной области (бесконечной), заключенной между линиями $y = f(x), x = a$ и осью абсцисс



Аналогично, определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Последнее равенство следует понимать так, если каждый из несобственных интегралов, стоящих справа, существует, то существует (сходится) по определению, интеграл, стоящий слева.

Пример. Вычислить $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x}dx$.

Решение.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x}dx = \lim_{R\to\infty}\int_e^R \frac{dx}{x\ln^3 x}dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\ln^2 e} - \frac{1}{2\ln^2 R}\right] = \frac{1}{2}.$$

Пример. Установить, при каких значениях α интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится и при каких расходится.

Решение. По определению для заданного интеграла имеем

$$\alpha = 1, \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty}[\ln R - \ln 1] = \infty.$$

Следовательно, при $\alpha=1$ несобственный интеграл расходится.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R\to\infty}\frac{R^{-\alpha+1}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\alpha} \text{ если } \alpha > 1, \\ \infty \text{ если } \alpha < 1. \end{cases}$$

Следовательно, мы получили, что несобственный интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Замечание. Для несобственных интегралов I рода при определенных условиях действуют формулы замены переменных и интегрирования по частям.

Во многих случаях бывает достаточно установить, сходится ли данный интеграл или расходится, и оценить его значения.

Сформулируем теоремы, которые будут полезны в этом исследовании.

Теорема. Если для всех x $(x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, и если

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

сходится, то и

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

также сходится, при этом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Теорема. Если для всех x $(x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, причем

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

расходится, то расходится и интеграл

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Определение. Если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx,$ то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*.

Определение. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а интеграл $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ расходится.

Теорема. Если $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

6.7.2. Несобственные интегралы II рода (от разрывной функции)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна для $a \leq x < b$, а в точке $x = b$ функция либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае интеграл $\int_a^b f(x)dx$ может не существовать, так как $f(x)$ не непрерывна на отрезке $[a, b]$. И говорить о нем как о пределе интегральных сумм, нельзя.

Определение. Будем считать, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$, разрывной в точке $x = b$, сходится, если предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

существует и он конечен. В противном случае, интеграл от разрывной функции расходится. Интеграл называется *несобственным интегралом II рода*.

Если функция терпит разрыв в левом конце, (то есть при $x = a$), то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Теорема. Пусть на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ терпят бесконечный разрыв в точке $x = c$ и во всех точках отрезка $[a, b]$, кроме $x = c$, выполняется неравенство $\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$. Тогда:

Если интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)dx$$

сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$.

Теорема. Если $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Также можно показать, что как в случае первого типа

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha < 1. & \textit{сходится} \\ \alpha \geq 1. & \textit{расходится} \end{cases}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется первообразной функции?
3. Что называется неопределенным интегралом?
4. Какими свойствами обладают неопределенные интегралы?
5. Что такое интегрирование подстановкой?
6. Что такое интегрирование по частям?
7. Что называется простейшей дробью?
8. Как выделить целую часть рациональной дроби?
9. Как разложить дробь на простейшие?
11. Что такое определенный интеграл?
12. Какими свойствами обладает определенный интеграл?

13. Что такое формула Ньютона-Лейбница?

14. Как осуществляется замена переменной в определенном интеграле?

15. Как осуществляется интегрирование по частям в определенном интеграле?

17. Как найти площадь плоской фигуры?

18. Как найти длину дуги отрезка кривой, заданной явно?

19. Как найти длину дуги отрезка кривой на плоскости, заданной параметрически?

ГЛОССАРИЙ

(комментарии к основным понятиям, встречающимся в учебнике, на узбекском, русском и английском языках)

№	Термин	Комментарий на узбекском языке	Комментарий на русском языке	Коммента-рий на ан-глийском языке
1.	Absissa Absitsts Абсцисса	Nuqtaning dekart koordi-natalaridan bi-rinchisi. (*OX* o'qi)	Первая из декарто-вых координат точки	The first of the Cartesian co-ordinates of a point
2.	Aksioma Axiom Аксиома	Isbotsiz qabul qilinadigan tasdiq.	Заведомо истинное утверждение, при-нимаемое без дока-зательства	Obviously true statement, accepted with-out proof
3.	Algebra Algebra алгебра	Turli miqdorlar ustida amallarni hamda ana shu amallar bilan bog'liq bo'lgan tenglamalarni echishni o'rganuvchi ma-temetika bo'limi.	Раздел математики, посвящённый изу-чению операций над элементами множества произ-вольной природы, обобщающий обыч-ные операции сло-жения и умножения чисел	A branch of mathematics devoted to the study of operations on the elements of an arbitrary nature, which generalizes the usual operations of addition and multiplication of numbers
4.	Algebraik to'ldiruvchi The algebraic addition Алгебраичес кое дополнение	Ishora aniqligidagi mi-nor.	Минор с точностью до знака	Minor up to sign
5.	Analiz Analysis Анализ	Noma'lumdan ma'lumni, ma'lumdan ma'lum tahlil	Метод исследова-ния математических объектов путём вы-	Method of in-vestigating mathematical

№	Термин	Комментарий на узбекском языке	Комментарий на русском языке	Комментарий на английском языке
		asosida isbotlovchi usul.	деления и рассмотрения их отдельных частей	objects by isolation and consideration of their individual parts
6.	Analitik geometriya Analytic geometry Аналитическая геометрия	Geometric obrazlarni algebra vositasidagi koordinatalar usulida asoslovchi matematematika bo'limi.	Раздел математики, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры	Section of Mathematics, in which geometric shapes and their properties are investigated by means of algebra
7.	Aniqlovchi (determinant) Determinant Опредилитель	Kvadrat matritsaga ma'lum qoidalar bo'yicha mos qo'yilgan son.	Запись чисел в виде квадратной таблицы, в соответствие которой ставится другое число	Rrecord numbers in the form of a square table, in which conformity is put another number
8.	Aniqmas integral The indefinite integral Неопределённый интеграл	Differensiallashga teskari matematik amal.	Совокупность всех первообразных данной функции	The set of all primitives of the function
9.	Applikata Applicate Аппликата	Uch o'lchovli fazodagi nuqtaning dekart koordinatalaridan uchinchisi	Третья из декартовых координат точки	The third of the Cartesian coordinates of a point
10.	Asimptota Asymptote Асимптота	Shunday to'g'ri chiziqki,egri chiziq nuqtasi cheksizga intilganda uning grafigi shu to'g'ri chiziqqa	Прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки	Straight, with the property that the distance from the curve to the straight line tends to zero

№	Термин	Комментарий на узбекском языке	Комментарий на русском языке	Коммента-рий на ан-глийском языке
		yetarlicha yaqin-lashadi.	вдоль ветви в бес-конечность	at the point of removal along the branch to infinity
11.	Argument Argument Аргумент	Erkli o’zgaruvchi	Независисмая пере-менная	Independent variable
12.	Aylana Circle Окружность	Tekislikda berilgan nuqtadan teng masofalarda joylashgan nuqtalarining geometrik o`rni.	Это геометрическое место точек, кото-рое состоит из всех точек на плоскости, равноудаленных от данной точки.	It is the locus of points, which consists of all points in a plane equi-distant from a given point.
13.	Bazis Basis Базис	Berilgan vektorni birlik vektorlar bo`yi-cha yoyish.	Упорядоченное множество таких векторов простран-ства, что любой вектор этого про-странства может быть единственным образом представ-лен в виде линей-ной комбинации векторов из этого множества	Ordered set of vectors of the space that any vector of this space can be uniquely rep-resented as a linear combi-nation of vec-tors in this set
14.	Birlik matrisa The identity matrix Еди-ничная мат-рица	Diagonal ele-mentlari birlardan iborat bo’lgan diagonal matrisa	Диагональная мат-рица, все элементы диагонали которой равны единице	A diagonal matrix with all the diagonal elements are equal to unity
15.	Birlik vector The unit vec-tor Единич-ный вектор	Uzunligi birga teng vector.	Вектор, длина кото-рой равна единице	The vector whose length is equal to one
16.	Burchak Plane angle Плоский угол	Bir nuqtadan chiquvchi ikki nur bilan chega-ralangan ge-ometrik shakl.	Геометрическая фи-гура, образованная двумя лучами (сто-	Geometric fig-ure formed by two rays (the

№	Термин	Комментарий на узбекском языке	Комментарий на русском языке	Коммента-рий на ан-глийском языке
			ронами), выходя-щими из одной точки	parties), ema-nating from a single point
17.	Grafik Schedule График	Berilgan funksi-yaning chizma ko`rinishidagi ifodasi.	Понятие в матема-тике, которое даёт представление о геометрическом об-разе функции	Concept in mathematics, which gives an idea of the geometric im-age functions
18.	Davriy кacr Repeater Периодическ ая дробь	Cheкsiz o’nli кasr	Бесконечная деся-тичная дробь	The infinite decimal
19.	Darajali funкsiya Power function Степенная функция	$y = x^n$ кo’rinishidagi funкsiya.	Функция вида $y = x^n$	Function type $y = x^n$
20.	Differensial Differential Дифферен-циал	Funksiya orttir-masining bosh chiziqli qismi.	Главная линейная часть приращения функции	The principal linear part of the increment function
21.	Differensial tenglama Dif-ferential equa-tion Диффе-ренциальное уравнение	Erkli o’zgaruvchi, no’malum funksiya va uning hosilalarini bog’lovchi munosabat.	Равенство- связыва-ющее значение про-изводной функции с самой функцией, значениями незави-симой переменной, числами	Equality – binding value of the derivative function with the function, the values of the independent variable numbers
22.	Differensial hisob Differ-ential calculus Дифферен-циальное ис-числение	Funksiyani hosila ba differ-ensiall tushun-chalari yordamida tek-	Раздел математиче-ского анализа, в ко-тором изучаются понятия производ-ной и дифференци-ала и способы их	Section of mathematical analysis, which exam-ines the con-

№	Термин	Комментарий на узбекском языке	Комментарий на русском языке	Комментарий на английском языке
		shiruvchi matematika bo'limi.	применения к исследованию функций	cepts of derivative and differential and methods of their application to the study of functions
23.	Diagonal matrisa Diagonal matrix Диагональная матрица	Diagonal elementlaridan boshqa elementlari noll bo'lgan kvadrat matrisa.	Квадратная матрица все элементы которой, кроме элементов главной диагонали, равны нулю	A square matrix all of whose elements except the main diagonal elements equal to zero
24.	Ellipsning katta yarim o'qi Semi-major axis of the ellipse Большая полуось эллипса	Uning fokuslari yotuvchi simmetriya o'qi.	Ось симметрии, на которой лежат фокусы	The axis of symmetry which lie tricks
25.	Ekstremum Extremum Экстремум	Funksiyaning maksimum va minimumlari	Точки максимума и минимума функции	Maximum points and minimum functions
26.	Integral hisob Integral calculus Интегральное исчисление	Matematik analizning integrallar, ularning hossalari, hisoblash usullari va tadbiqlarini o'rganadigan bo'limi	Раздел математического анализа, в котором изучаются понятия интеграла, его свойства и методы вычислений	Section of mathematical analysis, which examines the concept of integral, its properties and calculation methods
27.	Isbot	Tasdiqning to'g'riligi	Цепь рассуждений с целью обоснования	The chain of reasoning to

№	Термин	Комментарий на узбекском языке	Комментарий на русском языке	Комментарий на английском языке
	Evidence доказательство	aniqlanadigan mushohadalar zanjiri	истинности какого-либо утверждения	substantiate the truth of any statement
28.	Formula Formula Формула	Masalani matematik ko`rinishi.	Математическая запись высказываний, суждений	Mathematical recording statements, judgments
29.	Kanonik tenglama The canonical equation Каноническое уравнение	Sodda tenglama	Простейшее уравнение кривых второго порядка	The simplest equation of second-order curves
30.	Kolleniar vektorlar Collinear vectors Коллинеарные векторы	Bir to’g’ri chiziqda yoki parallel to’g’ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar	Векторы, лежащие или параллельные одной прямой	Vectors or lying parallel to one straight
31.	Komplanar vektorlar coplanar vectors Компланарные векторы	Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar	Векторы, лежащие или параллельные одной плоскости	Vectors or lying parallel to one plane
32.	Kvadrat matrisa A square matrix Квадратная матрица	Satrlar soni ustunlari soniga teng matrisa.	Матрица, у которой число строк и столбцов равны	The matrix in which the number of rows and columns are equa
33.	Limit Limit Лимит	Agar o’zgaruvchi miqdor o’zining o’zgarish jarayonida a soniga cheksiz yaqinlashsa,u holda a soni x o’zgaruvchining limitidir	Постоянное значение, которому неограниченно приближается переменная, зависящая от другой переменной, при определенном изменении последней	A constant value, which is infinitely variable approaches depending on another variable, with a certain change in the last

№	Термин	Комментарий на узбекском языке	Комментарий на русском языке	Комментарий на английском языке
34.	Matematik iqtisod Mathematical economics Математическая экономика	Iqtisodiy ob’ektlar va jarayonlarning matematik modellari va ularni tadqiq etish usullari bo’lgan nazariy fan.	Дисциплина, предметом которой являются модели экономических объектов и процессов и методы их исследования	Discipline, which are the subject of the model of economic objects and processes and methods of their study
35.	Matrisa Matrix Матрица	Elementlari ixtiyoriy, to’g’ ri to’rtburchak shaklidagi jadval.	Прямоугольная таблица с произвольными элементами	A rectangular table with arbitrary elements
36.	Minor Minor Минор	Element turgan satr va ustunni o’chirishdan hosil bo’lgan determinant	Определитель, полученный вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент	The determinant obtained by deleting the row and column at the intersection of which is an element of
37.	Normal Normal Нормаль	Chiziqning berilgan nuqtasigan shu nuqtadagi urinmaga perpendikulyar o’tuvchi to’g’ri chiziq.	Прямая, перпендикулярная к касательной, проведенной к кривой через данную точку	Perpendicular line to the tangent to the curve through this point
38.	Ordinata Ordinate Ординаты	Nuqtaning dekart koordinatalaridan ikkinchisi. (*Oy* o’qi)	Вторая из декартовых координат точки	The second of the Cartesian coordinates of a point
39.	Oshkormas funksiya Releases Неявная функция	Noma`lumlarga nisbatan aniqlanmagan tenglik.	Функция, где зависимость между переменными задана неявно	Function, where the relationship be-

№	Термин	Комментарий на узбекском языке	Комментарий на русском языке	Комментарий на английском языке
				tween the variables defined implicitly
40.	Sonlar o’qi Numeric axis Числовая ось	Yo`nalishga ega bo`lgan masshtab birligi tanlangan to’g’ri chiziq.	Это прямая, на которой выбраны: начало отсчёта; положительное направление, масштаб, то есть единица измерения длин.	This straight line on which is selected: the reference point; the positive direction, the scale, that is a unit of length measurement.
41.	Sfera Sphere Сфера	Fazoda berilgan nuqtadan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning geometrik o`rni.	Это геометрическое место точек, которое состоит из всех точек на пространстве, равноудаленных от данной точки.	It is the locus of points, which consists of all points in space equidistant from a given point.
42.	Skalyar ko’paytma Scalar product Скалярное произведение	Ikki vektorlarning uzunliklarini ko`paytmasi bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko`paytmasiga teng skalyar miqdordir	Число, равное произведению модулей двух векторов, умноженного на косинус угла между ним	The number of units equal to the product of two vectors multiplied by the cosine of the angle between them
43.	Teorema Theorem теорема	Isbot talab qiluvchi mulohaza.	Утверждение, требующее доказательства	Adoption requires proof
44.	To`gri chiziq Straight Прямая	Geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri. Dastlabki tushuncha sifatida qabul qilinadi	Одно из фундаментальных понятий геометрии. Принимается за одно из исходных понятий, которое лишь косвенным образом	One of the fundamental concepts of geometry. Accepted for one of the basic concepts,

№	Термин	Комментарий на узбекском языке	Комментарий на русском языке	Коммента-рий на ан-глийском языке
			определяется аксио-мами геометрии.	which only in-directly deter-mined by the axioms of ge-ometry.
45.	Vektor Vector Вектор	Yo'naltirilgan kesma	Направленный от-резок	Directed by segment
46.	Vektor fazo – (uch o'lchovli) space Vector Векторное пространство	Fazo tushunchasining umumlashmasi.	Обобщение понятия пространства	The generali-zation of the concept of space
47.	Xosmas inte-gral Improper integrals Не-собственные интегралы	Chegarasi che-ksiz yoki inte-gral ostidagi funksiya beril-gan intervalda ikkinchi tur uz-ilishga ega bo'lgan integral.	Интеграл с беско-нечными границами или интеграл от разрывной функции второго рода	Integral with infinite bound-aries, or the integral of a discontinuous function of the second kind
48.	Hosila The derivative (the point function) Производная (функции в точке)	Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati argument orttirmasi nolga intilgandagi limiti.	Предел отношения приращения функ-ции к приращению аргумента при стремлении прира-щения аргумента к нулю	Limit ratio in-crement of the function to the increment of the argument tends to zero, the increment of the argu-ment
49.	Zaruriy va yetarli shartlar Necessary and sufficient conditions Необходи-мые и доста-точные усло-вия	Teoremalarni yozish va talqin qilish shakli.	Один из видов за-писи и интерпрета-ции теорем	One type of recording and interpreting theorems

№	Термин	Комментарий на узбекском языке	Комментарий на русском языке	Коммента-рий на ан-глийском языке
50.	Zaruriy shart The necessary conditions Необходи-мые условия	Xulosadan shart kelib chiqadi	Условия, без со-блюдения которых утверждение не мо-жет быть истин-ным.	Conditions, without complying with that statement can not be true.
51.	Yetarli shart Sufficient conditions Достаточные условия	Shartdan xulosa kelib chiqadi	Условия, при нали-чии которых утвер-ждение является ис-тинным	The conditions under which the statement is true
52.	Yo’naltiru-vchi kosi-nuslar The direction cosines Направляю-щие коси-нусы	Berilgan vektorning koordinata o`qlari bilan Tashkil etgan burchak kosinuslari.	Косинусы углов вектора Составляющие с ко-ординатными осями	Cosines of the vector components Of the coordinate axes
53.	Cheksiz kichik miqdor The infinitely small (value) Бесконечно малая (вели-чина)	Argumentning biror songa intilgandagi limiti nolga teng bo`lgan funksiya.	Числовая функция или последователь-ность, которая стре-мится к нулю	Real function or a sequence that tends to zero

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Gerd Bauman, Mathematics for Engineers II. 2010. Munchen
2. Claudio Canute, Anita Tabacco, Mathematical Analysis I. Milan, 2008
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб. для вузов, 6-е изд., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. – М.: Айрис-Пресс, 2005. – 288 с.
5. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2009. – 570 с.
6. Луканин Г.Л. и другие. Высшая математика: Учебник для студентов высших технических учебных заведений. – М.: Высшая школа, 2009. – 583 с.
7. Alimov Sh., Ashurov R. Matematik analiz. 1-qism. – Toshkent: Mumtozso’z, 2018. – 584 b.
8. Narmanov A. Ya. Analitik geometriya. Darslik – Toshkent: TURON-IQBOL, 2008. – 256 c.
9. Axmedov A.B., Shamsiyev R.N., Shamsiyev D.N., Pirmatov Sh.T. Oliy matematika. 1-qism. Darslik. – T.: «Fan va texnologiya», 2018. – 392 b.
10. Абдукаримов А., Шамсиев Д.Н., Халдыбаева И.Т. Математика. Конспект лекций – Ташкент. ТГТУ, 2018. – 154 с.
11. Халдыбаева И.Т. Высшая математика. Учебное пособие. Часть 1 – Т.: «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi» 2021, 316 стр.

Сборники задач и упражнений

12. Лунгу К.Н., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. – М.: Из-во: Айрис-Пресс, 2017. – 576 с.
13. Кузнецов А.А. Сборник заданий по высшей математике. – М. Изд-во: «Ozon»; 2008. – 240 с.

14. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 22-е изд.перераб. – М.: Лань, 2008. – 432 с.

15. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для ВТУЗ-ов. В 4-х частях. 6-е издание. – М.: ООО «Издательский дом Альянс», 2010. – 368 с.

16. Ryabushko A.R., Barxatov V.V., Derjavets V.V., Yurut I.E. Oliy matematikadan individual topshiriqlar to’plami. 1-qism. – T.: O’zbekiston milliy ensiklopediyasi, 2014. – 345 b.

17. Вигура М.А., Кеда О.А., Рыбалко А.Ф., Рыбалко Н.М. Математический анализ. – Екатеринбург, 2015. – 120 с.

18. Смирнов Ю.М. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М: Логос, 2005. – 372 с.

19. Bobodjanov A.A., Bobodjanova M.A., Xaldibayeva I.T., Safonov V.F. Oliy matematika. Individual topshiriqlar: O‘quv qo‘llanma. – T.: «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi» 2022 – 210 b.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК

И.Т. ХАЛДЫБАЕВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(УЧЕБНИК)

Ташкент – «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi» – 2024

Редактор:	
Технический редактор:	**М. Турсунов**
Художник:	**Ш. Зохидова**
Корректор:	**Л. Ибрагимов**
Компьютерная вёрстка:	**Ш. Нуруллаев**

Лицензия издательство № 1400

E-mail: nashr2019@inbox.ru Тел: +99899920-90-35
Изд.лиц. 3226-275f-3128-7d30-5c28-4094-7907, 08.10.2020.
Разрешено в печать . .2024.
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура «Times New Roman».
Офсетная печать. Усл. печ.л. 18,25. Изд. печ.л. 17,75.
Тираж 50. Заказ № 85.

Отпечатано в типографии
«Инновацион ривожланиш нашриёт-матбаа уйи».
100174, г. Ташкент, ул. Талабалар, 96-1.