бакалавриат

А. В. Лежнёв

Учебник

Высшая математика для экономистов:

теория пределов и приложения

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов России

магистр

А. В. Лежнёв

Высшая математика для экономистов: теория пределов и приложения

Учебник

Рекомендовано УМО по образованию
в области прикладной информатики
в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 080800
«Прикладная информатика (по областям)»
и другим экономическим специальностям

Москва
магистр
ИНФРА-М
2014

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73-1
Л40 5

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. *В. И. Чижиков*;
д-р экон. наук, проф. *Е. О. Горецкая*

Лежнёв А. В.

Л40 Высшая математика для экономистов: теория пределов и приложения : учебник / А. В. Лежнёв — М. : Магистр : Инфра-М, 2014. — 240 с. (Бакалавриат)

ISBN 978-5-9776-0307-2 (в пер.)
ISBN 978-5-16-009565-3
Агентство CIP РГБ

В учебнике изложен необходимый теоретический материал, раскрыты все вопросы, обязательные при изучении данной темы студентами вузов, обучающимися по экономическом направлениям.

Особенности учебника состоят в постепенном повышении уровня сложности, «дозированном» использовании формальных определений, большом количестве детально разбираемых примеров, включении элементов доказательств для простейших пределов, геометрической интерпретации ключевых результатов, наличии примеров применения теории пределов для анализа и решения различных задач экономического содержания.

Для студентов вузов, обучающихся по экономическим направлениям подготовки. Будет полезен студентам других направлений, изучающим дисциплины «Математика» и «Математический анализ».

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73-1

ISBN 978-5-9776-0307-2
ISBN 978-5-16-009565-3

Содержание

Предисловие

Экономика передовых стран современного мира стремительно движется по пути формирования нового технологического уклада. Нарастает поток инноваций практически во всех сферах деятельности человека. Процессы глобализации, стирая внешние различия, крайне обостряют экономические, политические и иные противоречия между странами, корпорациями, слоями общества.

Сложившиеся реалии ставят жесткие условия по модернизации национального хозяйства нашей страны, его глубинного и качественного преобразования. Столь масштабные задачи предопределяют, в том числе, важность и перспективность повышения качества подготовки выпускников высшей школы. В полной мере это положение относится и к подготовке специалистов, бакалавров и магистров экономики по математическим дисциплинам. Данная стратегическая линия прослеживается и в действующих на настоящий момент ФГОС ВПО третьего поколения, в которых для экономического направления подготовки предусмотрен определенный рост доли основной образовательной программы, отводимой на изучение дисциплин математического и естественнонаучного цикла.

В структуре высшей математики одним из ключевых разделов является теория пределов, лежащая в основе широкого класса фундаментальных математических понятий и методов. При этом в большинстве курсов математики для экономистов данная тема излагается чрезмерно кратко, сжато и конспективно. Подобный подход к преподаванию теории пределов в значительной степени предопределен самой целью обучения и разъяснен классиками отечественной науки: владение некоторым инструментом – а именно этим выступает математика для экономистов – не предполагает умения изготавливать сам инструмент (к чему как раз и причастна теория пределов).

В то же время неизбежная краткость изложения не должна приводить к заметной потере качества преподнесения материала, особенно на самых первых шагах освоения математического анализа. Весьма важно избежать поверхностного и излишне формализованного изложения и попытаться раскрыть всю глубокую, продуктивную, изящную и, в общем-то, не слишком сложную логику построения пределов. Укрепив данное звено в цепочке математического образования, мы делаем весомый вклад в формирование четкого, гибкого и аналитического мышления, которое обладает исключительной ценностью для представителей всех специальностей, в том числе экономических.

Принятая точка зрения предопределила стиль изложения материала. Особенности учебника состоят в постепенном повышении уровня сложности, «дозированном» использовании формальных определений, большом количестве детально разбираемых примеров, включении элементов доказательств для простейших пределов, геометрической интерпретации ключевых результатов, наличии примеров применения теории пределов для анализа и решения различных задач экономического содержания. В тексте не приводятся доказательства теорем и лемм (их можно найти в любом учебнике для математиков); это обстоятельство, обыкновенное для курсов математики, предназначенных экономистам, позволяет достичь гармоничного сочетания доступности, лаконичности и строгости изложения материала.

В учебнике изложен необходимый теоретический материал, раскрыты все вопросы, ставшие обязательными при изучении данной темы студентами-экономистами. В гл. 1 приводятся основные сведения о числовых множествах и функциях, изучаются классические понятия предела и непрерывности функции. В гл. 2 рассматриваются замечательные пределы и основные виды неопределенностей, рассматривается широкий круг примеров. В гл. 3 излагаются простые и естественные обобщения понятия предела – односторонние пределы, пределы в бесконечности, приводится классификация пределов. В гл. 4 изучается правило Лопиталя, рассматриваются некоторые важные пределы, асимптоты графиков функций, изучаются свойства непрерывных на отрезке функций, приводится классификация точек разрыва. В гл. 5 рассматриваются числовые последовательности и их пределы. В гл. 6 рассматриваются приложения теории пределов к решению ряда экономических задач.

Наличие в каждой главе контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения позволит студентам закрепить полученные теоретические знания, обрести навык решения задач и подготовиться к любой форме контроля, а преподавателям даст возможность использовать учебник на практических занятиях. В список основной литературы включен ряд учебников и учебных пособий, имеющих грифы Министерства образования и науки или учебно-методических объединений по образованию в области экономических наук; остальные издания приведены в списке дополнительной литературы. Оба списка, конечно, не претендуют на исчерпывающую полноту. Ряд приложений поясняет, расширяет и углубляет материал основной части учебника.

Действующие ФГОС ВПО не устанавливают жестких тематических рамок для преподаваемых дисциплин и обязательного состава дидактических единиц. Предлагаемый учебник вполне согласуется с подобной концепцией и содержит материал, собранный с некоторым «запасом» и по объему, и по глубине. Это позволит сделать обучение более гибким, учитывать различия в уровне подготовки обучающихся, предлагать хорошо успевающим студентам более сложные и содержательные вопросы на факультативное изучение и, в итоге, более свободно, разнообразно и творчески подойти к преподаванию такой сложной дисциплины, как математика.

В современных условиях важным источником и хранилищем различной информации – в том числе и по математическим дисциплинам – является сеть Интернет. Прогрессирует и качество информационных услуг: растет число Интернет-ресурсов, позволяющих оперативно, в режиме реального времени, on-line решать многие стандартные математические задачи, в том числе и на вычисление пределов. Ясно, что при всём удобстве получаемых возможностей для эффективного обучения чрезмерное и некритичное их использование не сможет способствовать продвижению в понимании существа предмета.

Задачи, выдвигаемые передовой экономической практикой, как правило, исключительно сложны. И чем сложнее они становятся, тем выше потенциальная эффективность математики как инструмента решения подобных задач. Без всякого преувеличения, рациональное применение математических методов может дать весомый экономический эффект, многократно окупающий затраты на постановку и исследование задачи управления, разработку или адаптацию метода ее решения и его компьютерную реализацию. В то же время имеющийся потенциал не реализуется автоматически, а требует подготовки математически грамотных специалистов. Конечно, излишне требовать от экономистов умения полностью находить законченные решения всего спектра возникающих задач – может оказаться слишком велик «калибр» используемых для этого математических средств. Однако само инициирование подобных работ, участие в постановке задач, определение различных условий, ограничений и критериев экономического содержания, анализ полученных решений вполне могут находиться в сфере компетенции современного экономиста. Подчас и не совсем глубокой математической подготовки достаточно, чтобы понять, на каком направлении деятельности предприятия или организации могут быть полезны математические модели, оценки, прогнозы и оптимизация. Напротив, недостаточный уровень подготовки и понимания возможностей математики не позволит увидеть даже «лежащие на поверхности» точки ее приложения в случаях, когда они заведомо смогут выявить скрытые резервы и дать значительный экономический эффект.

Данные обстоятельства и определяют актуальность учебника, основная цель которого заключается в достижении развёрнутого, систематизированного и доступного для студентов-экономистов изложения теории пределов и отдельных её приложений в области экономики.

Учебник разработан на основе опыта преподавания дисциплин «Математика» и «Математический анализ» в Краснодарском филиале Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова и предназначен главным образом для студентов, обучающихся по экономическим специальностям и направлениям подготовки. Содержание учебника и уровень сложности излагаемого материала в целом соответствуют требованиям ФГОС ВПО, примерным основным образовательным программам, типовым рабочим программам. Впрочем, излагаемый материал не имеет жесткой привязки к экономической тематике и может быть полезен читателям широкого круга иных специальностей.

Для понимания излагаемого в учебнике материала достаточно знаний, получаемых в рамках базового школьного курса математики. В частности, предполагается знание основных элементарных функций, свойства которых широко используются в учебнике.

При оформлении приняты следующие соглашения. Вновь вводимые понятия и термины выделены в тексте ***полужирным курсивом***. Наиболее важные и принципиальные фрагменты текста, на которые следует обратить особое внимание при изучении материала, записаны в р а з р я д к у. Нумерация формул и рисунков – локальная в каждой главе, нумерация примеров и замечаний – локальная в каждом параграфе.

Автор приносит благодарность рецензентам д-ру физ.-мат. наук, проф. В. И. Чижикову и д-ру экон. наук, проф. Е. О. Горецкой за ценные замечания.

Глава 1
ПОНЯТИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

В настоящей главе приводятся базовые сведения о пределах числовых функций и их свойствах.

§ 1.1. Числовые множества и функции

В данном учебном пособии изучаются свойства функций, характеризующие их поведение при определенных процессах изменения аргумента. Всюду в пособии рассматриваются числовые функции, у которых и область определения, и множество значений являются числовыми множествами.

Следует отметить, что само понятие числа является первичным, изначальными, основополагающим в математике; это понятие не подлежит строгому определению и считается интуитивно ясным и понятным либо поясняется на примерах. К подобным понятиям относятся также понятия множества и элемента. Множество следует понимать как набор, совокупность, собрание элементов, сгруппированных по определенному признаку, не предполагающее обязательного наличия какой-либо внутренней структуры (в частности, упорядоченности). Множество связано со своими элементами отношением принадлежности: элементы принадлежат множеству, а множество содержит свои элементы; это обозначается записью $s \in S$, где s – элемент, S – множество. Задаются множества либо перечислением их элементов, либо указанием правила, по которому определяется принадлежность элемента множеству. На основе этих и ряда других основополагающих понятий (точки, прямой, плоскости) строится всё здание математической науки.

Над произвольными множествами можно определить различные операции, в частности, объединение (обозначаемое символом «$\cup$») и пересечение (обозначаемое символом «$\cap$») множеств. Два множества X и Y равны, если они поэлементно совпадают; это обозначается записью $X = Y$. Множество X включается во множество Y, если каждый элемент множества X является элементом множества Y; это обозначается записью $X \subset Y$. Равенство $X = Y$ равносильно справедливости двух противоположных включений $X \subset Y$ и $Y \subset X$.

Исходным числовым множеством является множество натуральных чисел

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

используемых при счете предметов. На этом множестве известным образом определены арифметические операции сложения и умножения чисел. В то же время, операция вычитания (обратная для операции сложения) выводит за рамки данного множества; например, результат операции «$1-2$» не является натуральным числом. Подобная «узость» множества натуральных чисел приводит к рассмотрению множества целых чисел

$$\boldsymbol{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\},$$

«расширяющего» множество натуральных чисел таким образом, чтобы операция вычитания не выводила за его пределы. При этом операция деления (обратная для операции умножения) всё ещё может выводить за рамки множества целых чисел; например, результат операции «$1/2$» не является целым числом. Соответственно формируется более широкое множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел, представимых в виде отношений m/n, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Данное множество можно формально записать в виде

$$\boldsymbol{Q} = \{m/n \mid m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}\}$$

(здесь и далее вертикальная черта в описании множеств означает «при условии, что...»). Во множестве $\boldsymbol{Q}$ операция деления не выводит за его пределы, и каждому рациональному числу соответствует некоторая точка числовой прямой, которую можно определить простым геометрическим построением (например, на основании теоремы Фалеса*). Рациональные числа расположены «всюду плотно» на числовой оси, но к их множеству не принадлежат такие важные для математической теории числа, как $\sqrt{2}$ (длина диагонали единичного квадрата) и π (длина окружности единичного диаметра). Соответст-

* Фалес Милетский – древнегреческий математик, астроном и философ VII-VI вв. до н. э.

венно множество $\boldsymbol{Q}$ дополняется таким образом, чтобы не только каждому числу соответствовала некоторая точка прямой, но и наоборот, каждой точке числовой прямой можно было сопоставить некоторое число. Получаемые числа называются действительными, или вещественными, а их множество обозначается через $\boldsymbol{R}$. Связь между действительными числами и точками числовой прямой настолько тесна, что в теории пределов эти термины часто употребляются как синонимы.

Ко множеству действительных чисел $\boldsymbol{R}$ относятся все положительные и отрицательные, целые и дробные, рациональные и иррациональные числа. Действительное число можно представлять как десятичную дробь, конечную или бесконечную, вида

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

где a_0 – целое число, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – десятичные знаки, или цифры, от 0 до 9, показывающие, сколько десятых, сотых, тысячных и т. д. долей единицы содержит десятичная дробь (если пользоваться традиционной десятичной системой счисления). Например,

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots, \quad \pi = 3{,}141592653589793\ldots,$$

причем многоточия означают, что последовательности десятичных знаков в представлениях этих чисел не полны и имеют бесконечное продолжение.

Таким образом, построен ряд базовых числовых множеств

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}.$$

Для теории и практики важно, что любое действительное число можно с любой степенью точности приблизить рациональными числами. Всюду далее в данном пособии действительные числа будем называть просто числами.

В математике часто используются следующие простые числовые множества и их обозначения:

– числовая прямая $(-\infty; +\infty) = \boldsymbol{R}$;

– открытые полупрямые

$$(-\infty; a) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < a\} \quad \text{и} \quad (a; +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x > a\};$$

– замкнутые полупрямые (иначе говоря, лучи)

$$(-\infty; a] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \le a\} \quad \text{и} \quad [a; +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \ge a\};$$

– ***интервал*** $(a; b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$;

– ***отрезок*** $[a; b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x \le b\}$;

– множества вида $(a; b]$ и $[a; b)$, часто называемые ***полуотрезками***;

здесь a и b – некоторые числа, $a < b$.

В теории пределов используются также следующие простые множества со специальными названиями. Пусть a – некоторое число (точка на числовой оси). ***Окрестностью*** точки a называется любой интервал, содержащий эту точку (возможно, несимметричный). Иначе говоря, окрестность точки a имеет вид $(a'; a'')$, где числа a' и a'' таковы, что $a' < a < a''$. ***Проколотой окрестностью*** точки a называется любая ее окрестность, из которой исключена сама точка a. Другими словами, проколотая окрестность представляется в виде $(a'; a) \cup (a; a'')$, где $a' < a < a''$. ***Правой полуокрестностью*** точки a называется множество вида $[a; a'')$, где $a < a''$. ***Левой полуокрестностью*** точки a называется множество вида $(a'; a]$, где $a' < a$. Далее, ε***-окрестностью*** точки a называется симметричный интервал вида $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ – некоторое число (ε – греческая буква «эпсилон»). Отметим, что через ε в теории пределов традиционно принято обозначать некоторое положительное число, которое в различных рассуждениях можно выбирать сколь угодно малым, т. е. близким к 0.

Точка называется ***внутренней*** для некоторого множества, если существует окрестность данной точки, целиком располагающаяся в данном множестве. Точка называется ***граничной*** для некоторого множества, если в любой окрестности данной точки существуют точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие данному множеству. Например, для интервала $(0; 1)$ и отрезка $[0; 1]$ внутренними являются все точки самого интервала $(0; 1)$, а граничными – точки 0 и 1; как видно из этого примера, граничные точки некоторого множества могут как принадлежать, так и не принадлежать данному множеству.

Числовое множество называется ***ограниченным сверху*** (***ограниченным снизу***), если существует такое число M (число m), что каждый элемент x данного множества удовлетворяет неравенству $x \le M$ (неравенству $x \ge m$). Числовое множество называется ***ограниченным***, если оно является ограниченным одновременно сверху и снизу. Числовое множество называется ***неограниченным***, если оно не является ограниченным.

В настоящем учебном пособии широко используются следующие функции:

– степенные x^a;
– показательные a^x;
– логарифмические $\log_a x$;
– тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;
– обратные тригонометрические

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x;$$

указанные функции называются ***основными элементарными функциями***. Предполагается, что читатель знаком с этими функциями и их свойствами из уже пройденных курсов математики. Полезно понимать, что показательная функция характеризует такие процессы, при которых скорость изменения некоторой величины прямо пропорциональна значению самой величины. Тригонометрические функции характеризуют периодические и сезонные явления и процессы. Оба типа процессов имеют широкое распространение в естествознании, технике и экономике. Отметим также, что функции могут иметь различное аналитическое представление (т. е. могут быть заданы разными формулами) на различных подмножествах своей области определения; например, функция «модуль числа» задается в виде

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Оперируя с функциями, необходимо контролировать их области определения; они могут быть весьма экзотичны. Например, функция $\sqrt{-x^2}$ определена только при $x = 0$, область определения функции $\sqrt{\ln\cos x}$ представляет собой бесконечное множество изолированных точек вида $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а выражения $\ln(-x^2)$, $\ln(\sin x - 1)$ и $1/\sqrt{\cos x - 1}$ вообще не определены ни при каких значениях переменной (т. е. соответствующие формальные записи не представляют собой каких-либо функций). Область определения функции $f(x)$ часто обозначается через $D(f)$, множество значений функции – через $E(f)$. Записывая формально,

$$E(f)=\{y \mid y=f(x), x\in D(f)\}.$$

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** (***ограниченной снизу***) на множестве $X\subset D(f)$, если множество $\{f(x)\mid x\in X\}$ является ограниченным сверху (снизу). Функция называется ***ограниченной***, если она является ограниченной одновременно сверху и снизу. Функция, не являющаяся ограниченной на множестве X, называется ***неограниченной*** на множестве X.

Функция $f(x)$ называется ***неубывающей*** (***невозрастающей***) на множестве X, если для любых двух значений аргумента $x'\in X$ и $x''\in X$, связанных неравенством $x'<x''$, выполняется соотношение $f(x')\le f(x'')$ (соотношение $f(x')\ge f(x'')$). Неубывающие и невозрастающие функции называются общим термином ***монотонные***. Если неравенства в определении монотонности являются строгими, то такие функции называются ***возрастающими*** (***убывающими***), или ***строго монотонными***.

В дальнейшем нам потребуются следующие простые функции. Прежде всего, для любого натурального числа n определяется ***факториал*** $n!$ как произведение всех целых чисел от 1 до n включительно:

$$n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n;$$

по определению принимается, что $0!=1$. Далее, функция аргумента x, называемая ***целой частью числа*** и обозначаемая через $[x]$, определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x; иными словами, выполняются неравенства

$$[x]\le x,\quad x<[x]+1. \tag{1.1}$$

Следовательно, для любого числа x значение $[x]+1$ представляет наименьшее целое число, большее x. Полезным является и следующее свойство: $[x+1]=[x]+1$. Наконец, символами $\min\{a;b\}$ и $\max\{a;b\}$ будем обозначать минимальное (наименьшее) и максимальное (наибольшее) среди двух чисел a и b.

В отдельных рассуждениях мы будем использовать знаки логического следования «$\Rightarrow$» и равносильности «$\Leftrightarrow$»; например, $x>1\Rightarrow x>0$, $x>1\Leftrightarrow x-1>0$.

§ 1.2. Предел функции в точке

Обратимся к важнейшему понятию предела, или предельного значения функции в точке. Начнем с формулировки общего предположения, выполнение которого дает возможность ввести классическое понятие предела. Именно, будем предполагать, что рассматриваемая функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Данное условие выполняется, в частности, для каждой внутренней точки области определения функции.

Замечание 1. Важно сразу подчеркнуть, что определение предела в точке a не требует, чтобы функция $f(x)$ была задана в самой точке a. Этим допускается отсутствие (в самом общем случае) связи между пределом функции в точке и конкретным значением функции в этой точке. Наличие подобной связи является дополнительным условием и приводит к возникновению новых содержательных понятий, в частности, понятия непрерывности, рассматриваемого в параграфе 1.6.

Прежде всего, дадим простое и доступное для восприятия понятие предела функции, и, далее, сформулируем строгое определение предела.

Понятие предела функции. Функция $f(x)$ имеет в точке a ***предел***, равный числу b, если при неограниченном приближении значений аргумента x к числу a соответствующие значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к числу b.

Предел функции иногда называют ***предельным значением***.

Тот факт, что число b является пределом функции $f(x)$ точке a, обозначается записью

$$\lim_{x\to a} f(x)=b;$$

иначе пишется, что $f(x)\to b$ при $x\to a$.

Символ «$\to$» в математике часто означает «неограниченное приближение» или «стремление». Говорить о процессе стремления функции $f(x)$ к пределу b возможно только при соотнесении его с процессом стремления аргумента x к некоторому числу a.

Поскольку в данном случае пределом функции является число, то при этом говорят о конечном пределе функции в точке; бесконечные пределы функций будут рассмотрены в следующих параграфах.

В приведенном понятии предела могут вызвать неясность слова о «неограниченном приближении» значений аргумента или функции к некоторому числу. Следующее строгое формальное определение предела функции вполне конкретизирует ситуацию, хотя и является достаточно сложным и необычным для тех, кто читает его впервые (в формулировке традиционно используется δ – греческая буква «дельта»).

Определение предела функции. Функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный числу b, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условиям $x \neq a$, $|x-a|<\delta$, выполняется соотношение $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Поясним данное определение. Число ε характеризует близость значений функции $f(x)$ к пределу b, число δ – близость значений аргумента x к точке a. Ключевым моментом в определении является то, что число $\varepsilon>0$ можно задавать сколь угодно малым (например, равным 0,01, 0,001 или любым другим, не обязательно «круглым»). Число $\delta>0$ зависит, вообще говоря, от выбора ε, что часто записывается в виде $\delta=\delta(\varepsilon)$; как правило, чем меньше заданное значение ε, тем меньшим необходимо выбирать подходящее значение δ. Приближение значений функции $f(x)$ к пределу b понимается как малость отклонения $f(x)$ от b (или, что равносильно, малость модуля их разности $|f(x)-b|$). Это отклонение становится меньшим любого изначально заданного числа $\varepsilon>0$ (каким бы малым оно ни было выбрано), если только аргумент x находится в достаточной близости к точке a. Мера этой «достаточной близости» определяется числом $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, условие достаточной близости – выполнение неравенства $|x-a|<\delta$.

Замечание 2. Поскольку условие $x \neq a$ равносильно условию $|x-a|>0$, то оба ограничения на значения аргумента x могут быть записаны в виде одного двустороннего неравенства $0<|x-a|<\delta$. Это неравенство выражает принадлежность аргумента x проколотой δ-окрестности точки a.

Приведем равносильное определение предела функции в точке, вообще не содержащее математических соотношений.

Функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный числу b, если для любой окрестности числа b (сколь угодно малой) найдется такая п р о к о л о т а я окрестность точки a, что для всех значений аргумента из этой проколотой окрестности соответствующие значения функции лежат в выбранной окрестности числа b.

Отметим, что значение предела не зависит от обозначения аргумента функции, фигурирующего в записи предела.

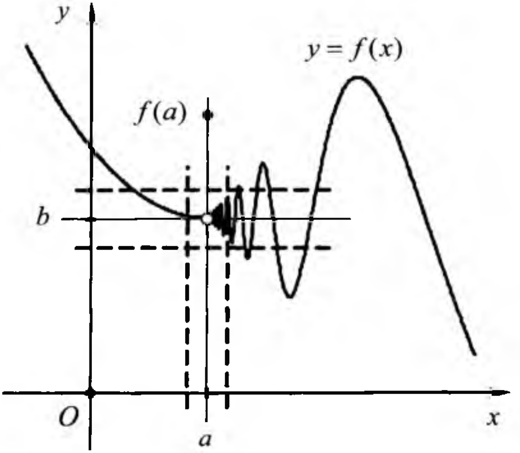

Рисунок 1.1

Г е о м е т р и ч е с к а я   и н т е р п р е т а ц и я понятия предела представлена на рисунке 1.1. На нём показано, что характер стремления функции $f(x)$ к числу b может быть совершенно произвольным. Изображенный на рисунке график функции показывает, что слева от точки a (т. е. со стороны меньших значений аргумента) функция приближается к предельному значению b, монотонно убывая. Напротив, справа (т. е. со стороны больших значений аргумента) функция приближается к предельному значению сложным образом, совершая неограниченное число колебаний. При этом в точке a функция $f(x)$ принимает значение $f(a)$, отличное от b. Штриховыми линиями обозначены границы некоторых окрестностей точек a и b.

Функция, имеющая в некоторой точке предел, равный 0, называется ***бесконечно малой*** в данной точке.

Рассмотрим простейшие примеры пределов. Читателям рекомендуется понять приводимые далее несложные рассуждения; аналогичная логика многократно повторяется при построении теории пределов, разборе примеров и решении задач.

Пример 1. Постоянная функция $f(x)=c$, равная некоторому числу c во всех точках числовой оси, имеет в каждой точке a числовой оси предел, равный c:

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

В данном случае, очевидно, для всех x справедливо соотношение $|f(x)-c|=0$.

Пример 2. Функция $f(x)=x$ имеет предел в каждой точке a числовой прямой, причем

$$\lim_{x\to a} x = a. \tag{1.2}$$

Действительно, если значения аргумента x неограниченно приближаются к числу a, то и значения функции $f(x)=x$, равные тем же значениям аргумента, так же неограниченно приближаются к числу a; это и выражается равенством (1.2).

Проверим это равенство строго, опираясь на формальное определение предела. Фиксируем произвольное число a и выберем любое число $\varepsilon>0$. По определению предела требуется установить выполнение неравенства

$$|f(x)-a|<\varepsilon \tag{1.3}$$

для всех значений x, удовлетворяющих условию

$$0<|x-a|<\delta \tag{1.4}$$

при некотором надлежаще выбранном значении δ. Поскольку $f(x)=x$, то требуемое неравенство (1.3) принимает вид $|x-a|<\varepsilon$.

Следовательно, если выбрать $\delta = \varepsilon$, то из условия (1.4) данное неравенство будет вытекать непосредственно:

$$(1.4) \Rightarrow |x-a|<\delta \Leftrightarrow |x-a|<\varepsilon \Leftrightarrow (1.3).$$

Тем самым, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдено число $\delta = \varepsilon$, которое гарантирует справедливость неравенства (1.3) при выполнении условия (1.4). Существование предела (1.2) доказано строго по определению.

Пример 3. Докажем равенство

$$\lim_{x\to 5} 2x = 10. \qquad (1.5)$$

В данном случае, очевидно, $f(x) = 2x$, $a = 5$, $b = 10$. Действуя строго по определению предела, выберем и фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Необходимо установить, что выполняется неравенство

$$|2x-10|<\varepsilon, \qquad (1.6)$$

если только значение аргумента x выбрано достаточно близким к числу 5, т. е. выполняется условие

$$|x-5|<\delta. \qquad (1.7)$$

Неравенство (1.6) делением на 2 приводится к следующему эквивалентному виду:

$$|x-5|<\varepsilon/2. \qquad (1.8)$$

Следовательно, если выбрать число $\delta = \varepsilon/2$, то из условия (1.7) будет вытекать неравенство (1.6):

$$|x-5|<\delta \Leftrightarrow |x-5|<\varepsilon/2 \Leftrightarrow |2x-10|<\varepsilon.$$

В итоге, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдено число $\delta = \varepsilon/2$, которое гарантирует справедливость требуемого неравенства (1.6) при выполнении условия (1.7). Справедливость равенства (1.5) доказана строго по определению.

Замечание 3. В последнем примере число δ можно выбрать и меньшим, например, принять $\delta = \varepsilon/3$. В этом случае из (1.7) также будет следовать (1.6).

Более сложный пример доказательства существования предела приведен в приложении 4.

В заключение параграфа подчеркнем, что многие математические понятия и конструкции таковы, что 1) определяются на основе теории пределов и 2) имеют важное практическое значение. Для таких случаев отметим, что размерность предела с о в п а д а е т с размерностью функции, для которой берется предел (размерность понимается в «натуральном» выражении: метр, килограмм, секунда, денежная единица и т. д.).

§ 1.3. Примеры отсутствия пределов функции

Важно понимать, что предел функции может не существовать.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$, называемую з н а к о м ч и с л а x (от латинского слова «signum» – знак) и определяемую формулой

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

График данной функции показан на рисунке 1.2. Стрелки на графике функции обозначают, что «крайние» точки линии графика, указываемые стрелками, к самому графику не относятся. Действительно, значение функции в точке 0 равно 0 и отмечено жирной точкой в начале координат.

Ясно, что в л ю б о й сколь угодно малой окрестности точки 0 найдутся числа, для которых значения функции равны как $+1$, так и -1 (для положительных и отрицательных значений аргумента соответственно). Следовательно, ни к какому общему пределу п р и п р о и з в о л ь н о м стремлении аргумента к 0 значения функции приближаться не могут, так что предел данной функции в точке 0 не существует.

Отметим, что для н е н у л е в ы х значений a предел данной функции, очевидно, существует:

$$\lim_{x\to a}\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & a<0\\ +1, & a>0\end{cases}.$$

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно проверить данный факт.

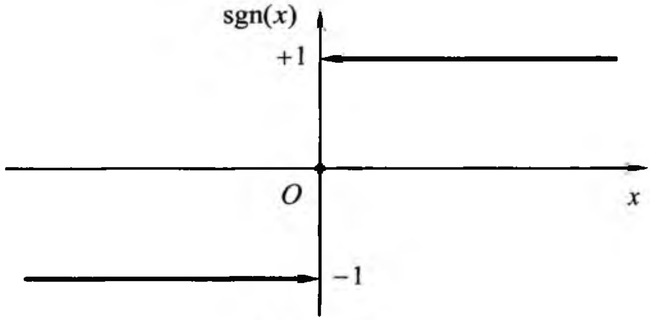

Рисунок 1.2

Пример 2. Более сложный классический пример отсутствия предела в точке 0 представляет функция

$$\sin\frac{1}{x},$$

определенная при всех $x \neq 0$. Действительно, сколь бы малым ни было выбрано число $\delta > 0$, при достаточно большом по модулю целом n числа

$$x' = \frac{1}{2\pi n} \quad \text{и} \quad x'' = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$$

лежат в окрестности $(-\delta; \delta)$ точки 0 (в частности, для выполнения условия $|x'| < \delta$ достаточно выбрать $n > 1/2\pi\delta$). Для этих чисел

$$\sin\frac{1}{x'} = \sin 2\pi n = 0,$$

$$\sin\frac{1}{x''} = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = \sin(\pi/2) = 1.$$

Таким образом, в любой близости от точки 0 существуют такие пары точек, в которых функция принимает р а з л и ч н ы е ф и к с и р о в а н н ы е значения 0 и 1. Эти рассуждения доказывают, что данная функция предела в точке 0 не имеет.

§ 1.4. Бесконечный предел функции в точке

В теории пределов исключительно важным является случай, когда конечный предел функции в точке не существует, но существует бесконечный предел, понимаемый и определяемый вполне естественным образом.

Предположение, при котором формулируется понятие бесконечного предела функции в точке, – то же, что и для конечного предела: функция $f(x)$ должна быть определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Для разнообразия изложения понятие и строгое формальное определение бесконечного предела представим в виде следующей таблицы.

Понятие	**Определение**
Функция $f(x)$ имеет в точке a ***бесконечный предел***, если …	
… при неограниченном приближении значений аргумента x к числу a соответствующие значения функции $f(x)$ по модулю неограниченно увеличиваются.	… для любого числа $B > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условиям $x \neq a$, $\|x-a\| < \delta$, выполняется соотношение $\|f(x)\| > B$.

Отметим, что число B может быть взято сколь угодно большим, а число δ зависит, вообще говоря, от выбора B, т. е. $\delta = \delta(B) > 0$.

Тот факт, что функция $f(x)$ имеет точке a бесконечный предел, обозначается записью

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty;$$

иначе пишется, что $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

Функция, имеющая в точке a бесконечный предел, называется ***бесконечно большой*** в точке a.

Пример 1. Функция $f(x)=1/x$ имеет в точке $x=0$ бесконечный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty. \tag{1.9}$$

Действительно, если значения аргумента x неограниченно приближаются к 0, то значения функции $1/x$, взятые по модулю, неограниченно увеличиваются; в этом убеждает и вид гиперболы, являющейся графиком функции $y=1/x$.

Более строго, действуя по определению предела, выберем произвольное число $B>0$. Требуется установить выполнение неравенства

$$\left|\frac{1}{x}\right|>B$$

для всех x из некоторой проколотой окрестности точки 0. Записанное неравенство эквивалентно условиям $x\neq 0$, $|x|<1/B$. Следовательно, если выбрать $\delta=1/B$, то из условия $0<|x|<\delta$ требуемое неравенство будет вытекать непосредственно:

$$\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}>\frac{1}{\delta}=B.$$

Тем самым, равенство (1.9) доказано строго по определению, а функция $1/x$ является бесконечно большой в точке 0.

В отдельных случаях поведение функции в точке можно уточнить, вводя понятия бесконечных пределов о п р е д е л е н н о г о з н а к а.

Положительный бесконечный предел. Функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный $+\infty$ (как говорят, «плюс бесконечности»), если при неограниченном приближении значений аргумента x к числу a соответствующие значения функции $f(x)$ становятся положительными и неограниченно увеличиваются.

Тот факт, что функция $f(x)$ имеет точке a предел, равный $+\infty$, обозначается записью

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty;$$

иначе пишется, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$.

Отрицательный бесконечный предел. Функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный $-\infty$ (минус бесконечности), если при неограниченном приближении значений аргумента x к числу a соответствующие значения функции $f(x)$ становятся отрицательными и по модулю неограниченно увеличиваются.

Замечание. При формулировке последнего понятия преднамеренно не используются слова «неограниченно уменьшаются», поскольку они могут быть поняты как «уменьшение к нулевому значению» и требуют дополнительного пояснения.

Наличие у функции $f(x)$ в точке a предела, равного $-\infty$, обозначается записью

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

или, иначе, $f(x) \to -\infty$ при $x \to a$.

Отметим, что наличие положительного и отрицательного бесконечных пределов требует вместо неравенства $|f(x)| > B$ (см. предыдущую таблицу) выполнения более конкретных неравенств $f(x) > B$ и $f(x) < -B$ соответственно. Строгие формальные определения положительного и отрицательного бесконечных пределов приведены в приложении 1.

Пример 2. Установим справедливость равенства

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Выберем произвольное число $B > 0$. Определение положительного бесконечного предела требует выполнения неравенства

$$\frac{1}{x^2} > B$$

для всех x из некоторой проколотой окрестности точки 0. Данное неравенство равносильно двум соотношениям $x \neq 0$, $|x| < 1/\sqrt{B}$. Следовательно при выборе числа $\delta = 1/\sqrt{B} > 0$ требуемое неравенство выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x| < \delta$. Тем самым заданное равенство доказано строго по определению.

Пример 3. Установим справедливость равенства

$$\lim_{x \to 0} \ln|x| = -\infty .$$

Выберем произвольное число $B > 0$. Неравенство

$$\ln|x| < -B,$$

выполнение которого требуется в определении отрицательного бесконечного предела, равносильно условиям $x \neq 0$, $|x| < e^{-B}$. Следовательно, при выборе числа $\delta = e^{-B} > 0$ требуемое неравенство выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x| < \delta$, что и доказывает справедливость заданного равенства.

Задание. Предлагаем читателям построить графики функций

$$y = \frac{1}{x^2} \text{ и } y = \ln|x|$$

и, тем самым, получить геометрическую интерпретацию рассмотренных бесконечных пределов.

§ 1.5. Основные свойства пределов

Пределы функций обладают рядом следующих важных и естественных свойств.

1. Единственность предела: если предел функции существует, то он единственный.

2. Если функция имеет в некоторой точке конечный предел, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности данной точки.

3. Следующие свойства часто называются теоремами о пределах и кратко (и несколько упрощенно) читаются так: «предел суммы равен сумме пределов», «предел разности равен разности пределов» и т. д. Более точно: если в некоторой точке a существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существуют пределы суммы, разности, произведения и отношения этих функций, причем справедливы формулы

$$\lim_{x\to a}\bigl(f(x)+g(x)\bigr)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x);$$

$$\lim_{x\to a}\bigl(f(x)-g(x)\bigr)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x);$$

$$\lim_{x\to a}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\quad (\text{при } g(x)\neq 0,\ \ \lim_{x\to a}g(x)\neq 0).$$

4. Вычисление пределов степенно-показательных выражений вида $f(x)^{g(x)}$ проводится по следующему правилу: если в точке a существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a}f(x)=b>0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a}g(x)=c,$$

то существует предел

$$\lim_{x\to a}\Bigl(f(x)^{g(x)}\Bigr)=b^c.$$

5. Имеет место следующая простая связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями: если функция $f(x)$ является бесконечно малой в некоторой точке и $f(x)\neq 0$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно большой в той же точке. Данный факт иллюстрируется соотношениями (1.2) и (1.9) при $a=0$.

Справедливо и аналогичное «симметричное» утверждение: если функция $f(x)$ является бесконечно большой в некоторой точке, то функция $1/f(x)$ является бесконечно малой в той же точке.

6. Если $f(x)$ – функция, бесконечно малая в некоторой точке a, $g(x)$ – функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки a, то произведение $f(x)g(x)$ является бесконечно

малой в точке a функцией. Важным в этом свойстве является то, что второй сомножитель – функция $g(x)$ – не обязан иметь предел.

7. Предельный переход в неравенствах: если для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) \ge c$, где c – некоторое число, и существует предел функции в данной точке, то выполняется неравенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) \ge c$.

8. Принцип двусторонней ограниченности: если для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a имеет место неравенство

$$f_0(x) \le f(x) \le f_1(x),$$

функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ имеют в точке a равные пределы:

$$\lim_{x \to a} f_0(x) = \lim_{x \to a} f_1(x) = b,$$

то и функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный b, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Данное свойство можно рассматривать как достаточное условие существования предела функции в точке.

9. Замена переменной под знаком предела: предел сложной функции $g(f(x))$ можно вычислить по формуле

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to b} g(y),$$

в которой применена замена $y = f(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $f(x) \ne b$ при $x \ne a$. Последнее условие, выраженное в виде неравенств, важно для случаев, когда «внешняя» функция $g(y)$ не определена в точке $y = b$.

К указанным свойствам приведем ряд замечаний, пояснений и дополнений.

Замечание 1 (к свойству 2). Данное свойство не устанавливает ни размер окрестности, в которой функция ограничена, и саму границу функции; тем самым, это свойство носит преимущественно теоретический характер.

Замечание 2 (к свойству 3). Представленные формулы понимаются так: из существования пределов в правой части записанных равенств (пределов функций по отдельности) следует существование пределов в левой части (пределов комбинации функций). Обратное может быть не верно. Например, функции $f(x) = \text{sgn}(x)$ и $g(x) = -\text{sgn}(x)$ пределов в точке $x = 0$ не имеют (см. параграф 1.3), однако сумма этих функций тождественно равна 0 и, очевидно, имеет нулевой предел в любой точке числовой оси.

Замечание 3 (к свойству 3). Некоторые из представленных формул можно обобщить на случай, когда один из пределов является бесконечным. Пусть, например,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty.$$

Тогда

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \infty, \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Если при этом $b \neq 0$, то

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \infty;$$

если же $b = 0$, то предел произведения может принимать произвольные значения и даже не существовать. Данные равенства могут быть уточнены, если предел функции $g(x)$ является бесконечным определенного знака (равным $+\infty$ или $-\infty$).

Замечание 4 (к свойству 4). Если предел b бесконечен, т. е. $b = +\infty$, то значение искомого предела равно $+\infty$ при $c > 0$ и равно 0 при $c < 0$. Это можно символически записать в виде

$$(+\infty)^c = \begin{cases} +\infty, & c > 0 \\ 0, & c < 0 \end{cases},$$

который вполне согласуется с известными свойствами степенных функций. Промежуточный случай $c = 0$ является наиболее сложным для исследования, а соответствующий предел может принимать произвольные неотрицательные значения. Один из примеров, иллюстрирующих данную ситуацию, рассмотрен в приложении 5.

Если предел c бесконечен, то значение искомого предела определяется по следующей таблице, естественным образом обобщающей результаты для случая конечных пределов.

Интервал значений b	**Значение** c	
	$+\infty$	$-\infty$
$b \in (0, 1)$	0	$+\infty$
$b \in (1, +\infty)$	$+\infty$	0

Промежуточный случай $b = 1$ является наиболее сложным, и его рассмотрение мы на некоторое время отложим.

Замечание 5 (к свойству 6). Важный пример, иллюстрирующий данное свойство, представляет функция

$$x \cdot \sin \frac{1}{x},$$

которая является бесконечно малой в точке 0 несмотря на то, что второй сомножитель в данной точке предела не имеет (см. параграф 1.3). Это справедливо по той причине, что функция x является бесконечно малой в точке 0, а синус всегда ограничен по модулю значением 1.

Замечание 6 (к свойству 7). При предельном переходе строгие неравенства, вообще говоря, не сохраняются; например, $x^2 > 0$ при всех $x \neq 0$, но $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. Однако, если записать неравенство «с запасом» в виде $x^2 > -1$ (т. е. снизить его точность или, как говорят, сделать более «грубым»), то строгое неравенство может сохраниться.

Замечание 7 (к свойству 7). Справедливо утверждение, в некотором смысле обратное к рассматриваемому свойству: если $\lim\limits_{x \to a} f(x) > c$, то и для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a выполняется строгое неравенство $f(x) > c$.

Замечание 8 (к свойству 8). Указанное свойство часто применяется для доказательства существования предела и установления его значения в случаях, когда функция $f(x)$ является «сложной», но заключена между «простыми» функциями $f_0(x)$ и $f_1(x)$. Примеры, иллюстрирующие данный прием, будут рассмотрены в настоящем пособии далее (см. параграфы 2.1, 5.1, 6.5 и приложение 10).

Замечание 9 (к свойству 8). Аналог данного свойства справедлив и для бесконечных пределов определенного знака. Именно, если для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a имеет место неравенство

$$f_0(x) \le f(x),$$

то

$$\lim_{x\to a} f_0(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty .$$

Вполне аналогично утверждение и для $-\infty$:

$$f(x) \le f_1(x), \quad \lim_{x\to a} f_1(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty .$$

§ 1.6. Непрерывность функций

Понятие непрерывности является исключительно важным и продуктивным в математике. Его изучение начнем с самых простых примеров.

Ранее в параграфе 1.2 был вычислен предел функции $f(x) = x$:

$$\lim_{x\to a} x = a .$$

Следовательно, по основным теоремам о пределах из предыдущего параграфа

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x \cdot x) = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a \cdot a = a^2 .$$

Аналогично, для любого натурального числа n справедливо

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n .$$

Далее, для любого многочлена (полинома) $P(x)$ вида

$$P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0, \tag{1.10}$$

степень которого равна n при условии $p_n \neq 0$, справедливо:

$$\lim_{x \to a} P(x) = \lim_{x \to a} (p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0) =$$

$$= \lim_{x \to a} (p_n x^n) + \lim_{x \to a} (p_{n-1} x^{n-1}) + \ldots + \lim_{x \to a} (p_1 x) + \lim_{x \to a} p_0 =$$

$$= p_n \lim_{x \to a} x^n + p_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + \ldots + p_1 \lim_{x \to a} x + p_0 =$$

$$= p_n a^n + p_{n-1} a^{n-1} + \ldots + p_1 a + p_0 = P(a).$$

Таким образом, для многочленов $P(x)$ в любой точке $a \in (-\infty; +\infty)$ справедливо ключевое равенство

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a), \tag{1.11}$$

и задача вычисления предела сводится к гораздо более простой задаче вычисления значения многочлена в единственной точке – той, в которой ищется предел.

Далее, для дробно-рациональной функции вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1.12}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены,

$$Q(x) = q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \ldots + q_1 x + q_0 \tag{1.13}$$

(степень многочлена $Q(x)$ равна m при $q_m \neq 0$), при условии $Q(a) \neq 0$ справедливо аналогичное свойство:

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} P(x)}{\lim\limits_{x \to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}. \tag{1.14}$$

Следовательно, и для любой дробно-рациональной функции предел в точке, входящей в ее область определения, равен значению функции в данной точке.

Пример 1. Вычислим пределы:

$$\lim_{x \to 1} (3x^2 - 2x + 5) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 6;$$

$$\lim_{x\to 1}(2x^3-4x^2+6x-7)=2\cdot 1^3-4\cdot 1^2+6\cdot 1-7=-3;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x+5}{2x^3-4x^2+6x-7}=\frac{6}{-3}=-2.$$

Естественное обобщение свойств (1.11) и (1.14) приводит к уже упомянутому понятию непрерывности.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** a, если ее предел в данной точке существует и равен значению функции в точке a:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Таким образом, для вычисления предела непрерывной функции в точке достаточно просто вычислить значение функции в этой точке (как для многочленов и дробно-рациональных функций), что является существенно более простой операцией.

Удобная интерпретация свойства непрерывности функции в точке состоит в том, что символы функции и предела можно менять местами:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x).$$

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** $(c;d)$, если она является непрерывной в каждой точке данного интервала.

Таким образом, любой многочлен $P(x)$ является функцией, непрерывной на всей числовой оси $(-\infty;+\infty)$, а дробно-рациональная функция (1.12) непрерывна всюду кроме тех точек, в которых ее знаменатель $Q(x)$ обращается в 0.

Полезно представлять, что график непрерывной на интервале функции можно нарисовать, не отрывая ручки от листа бумаги.

В параграфе 1.1 приведен известный перечень основных элементарных функций. Важно, что все они, подобно многочленам и дробно-рациональным функциям, обладают свойством непрерывности во всех внутренних точках своей области определения.

Данное общее свойство поясним на примерах.

Пример 2. В силу непрерывности основных элементарных функций выполняются следующие предельные соотношения:

– для степенной функции

$$\lim_{x\to a} x^p = a^p,$$

p – любое число, $a > 0$; для целых положительных значений p число a может быть любым;

– для показательной функции

$$\lim_{x\to a} c^x = c^a,$$

$c > 0$, a – любое число;

– для логарифмической функции

$$\lim_{x\to a} \log_c x = \log_c a,$$

$c > 0$, $c \neq 1$, $a > 0$;

– для синуса и косинуса

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a,$$

a – любое число;

– для тангенса

$$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \sin x}{\lim\limits_{x\to a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$$

при тех значениях a, для которых $\cos a \neq 0$, т. е. при $a \neq \pi/2 + \pi n$, n – целое число. Последнее условие представляет собой область определения тангенса;

– для котангенса, аналогично,

$$\lim_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$$

при $\sin a \neq 0$, т. е. при $a \neq \pi n$;

– для обратных тригонометрических функций

$$\lim_{x\to a} \arcsin x = \arcsin a, \quad \lim_{x\to a} \arccos x = \arccos a,$$

$|a| < 1$;

$$\lim_{x\to a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a\,, \quad \lim_{x\to a} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} a\,,$$

a – любое число.

Вполне логично, что сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных функций также являются функциями непрерывными. Именно, если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (последняя в случае $g(a)\neq 0$) также являются непрерывными в точке a. Сложная функция, составленная из непрерывных функций, также является функцией непрерывной. Точнее, если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $b=f(a)$, то сложная функция $g(f(x))$ тоже непрерывна в точке a.

Будем называть ***элементарной функцией*** любую функцию, составленную из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций сложения, вычитания, умножения, деления и операции составления сложных функций.

Утверждение. Любая элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения.

Пример 3. Рассмотрим следующий ряд элементарных функций:

– элементарная функция $\sin(\ln x)$ определена при $x>0$, и для всех $a>0$ справедливо:

$$\lim_{x\to a} \sin(\ln x) = \sin(\ln a)\,;$$

– элементарная функция $\ln(\sin x)$ определена при $\sin x>0$, т. е. при $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, n – целое число; для всех a из этого множества

$$\lim_{x\to a} \ln(\sin x) = \ln(\sin a)\,.$$

Отметим, что формально область определения рассматриваемой функции можно записать как объединение бесконечного числа интервалов вида

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}(2\pi n;\, \pi + 2\pi n) \quad \text{или} \quad \bigcup_{n \in Z}(2\pi n;\, \pi + 2\pi n)\,;$$

– функция $3^{\arccos x} \cdot \log_2 x$ определена при совместном выполнении неравенств $|x| \le 1$ и $x > 0$, т. е. при $0 < x \le 1$; следовательно, для всех $a \in (0;1)$ справедливо:

$$\lim_{x \to a}\left(3^{\arccos x} \cdot \log_2 x\right) = 3^{\arccos a} \cdot \log_2 a\,.$$

Замечание. Число $a = 1$ входит в область определения последней функции, $3^{\arccos 1} \cdot \log_2 1 = 0$, но не является внутренней точкой данного множества. Следовательно, говорить о пределе данной функции точке 1 в том понимании, которого мы сейчас придерживаемся, невозможно. Соответствующие обобщения будут рассмотрены в главе 3.

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются точками разрыва функции. Детальное рассмотрение точек разрыва проведено в параграфе 4.6.

Контрольные вопросы

1. Назовите и охарактеризуйте основные числовые множества, используемые в математической теории.

2. Дайте определение окрестности, проколотой окрестности, полуокрестности и ε -окрестности точки.

3. Что такое внутренняя и граничная точки множества, принадлежат ли они данному множеству?

4. Сформулируйте основные понятия, касающиеся свойства ограниченности функции на множестве.

5. Сформулируйте основные понятия, касающиеся свойства монотонности функции на множестве.

6. Какие функции относятся к основным элементарным функциям?

7. Как определяется факториал натурального числа?

8. Как определяется и какими свойствами обладает целая часть числа?

9. Какие условия должны выполняться для возможности введения классического понятия предела функции в точке?

10. Дайте понятие и строгое определение предела функции в точке.

11. Приведите пример функции, у которой не существует предела в точке.

12. Дайте определение бесконечно малой функции в точке. Приведите примеры.

13. Дайте понятие и строгое определение бесконечного предела функции в точке. Приведите примеры.

14. Дайте определение бесконечно большой функции в точке. Приведите примеры.

15. Дайте понятие положительного и отрицательного бесконечного предела функции в точке. Приведите примеры.

16. Сформулируйте основные теоремы о пределах. При каких условиях они выполняются?

17. Как вычисляются пределы степенно-показательных выражений?

18. Каким свойством обладает произведение бесконечно малой и ограниченной функций?

19. Может ли быть так, что слагаемые (сомножители) пределов не имеют, а сумма (произведение) имеет предел? Приведите примеры.

20. В чём заключается принцип двусторонней ограниченности?

21. Как и при каких условиях проводится замена переменной под знаком предела?

22. Дайте определение непрерывности функции в точке и на интервале. Приведите примеры.

23. Дайте определение элементарной функции. Приведите примеры.

24. Что можно сказать о непрерывности элементарных функций?

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найдите внутренние и граничные точки областей определения функций.

1). $f(x) = x^2$. 2). $f(x) = 1/x$.

3). $f(x) = \ln x$. 4). $f(x) = (x^2 - 1)^{-1}$.

5). $f(x) = \operatorname{tg} x$. 6). $f(x) = 1/\arcsin x$.

1.2. Приведите пример неограниченного числового множества, ограниченного сверху.

1.3. Приведите пример неубывающей функции, не являющейся строго монотонной.

1.4. Приведите пример основной элементарной функции, монотонной на некотором множестве, но не являющейся монотонной на более широком множестве.

1.5. Для числа $\varepsilon = 0{,}001$ найдите такое число $\delta > 0$, чтобы для всех $|x| < \delta$ выполнялось неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

1). $f(x) = x^2$. 2). $f(x) = \lg(1+x)$.

3). $f(x) = \sin x$. 4). $f(x) = 2^x - 1$.

1.6. Докажите, что функции $f(x)$ из задания 1.5 являются бесконечно малыми в точке 0.

1.7. Опираясь только на определение предела, докажите следующие равенства.

1). $\lim\limits_{x\to 3} 4x = 12$. 2). $\lim\limits_{x\to 5} (3x - 7) = 8$.

3). $\lim\limits_{x\to -1} (x^2 - 3x + 5) = 9$. 4). $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{1}{x} = -0{,}2$.

1.8. Для числа $A = 10\,000$ найдите такое число $\delta > 0$, чтобы для всех $x \neq 0$, $|x| < \delta$ выполнялось неравенство $|f(x)| > A$.

1). $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$. 2). $f(x) = 0{,}01^{-\frac{1}{|x|}}$.

3). $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x}$. 4). $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

1.9. Докажите, что функции $f(x)$ из задания 1.8 являются бесконечно большими в точке 0.

1.10. Вычислите следующие пределы, используя основные свойства пределов и свойство непрерывности элементарных функций.

1). $\lim\limits_{x \to 5}(x^2 - 4x - 3)$. 2). $\lim\limits_{x \to -2}(3x^2 - 5x - 7)$.

3). $\lim\limits_{x \to -3}(x^3 - 3x^2 - 5x + 4)$. 4). $\lim\limits_{x \to 4}(-x^3 + 2x^2 - 8x + 15)$.

5). $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x^2 - 5x - 2}{3x^2 - x - 2}$. 6). $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 16x - 12}{2x^2 - 7x - 30}$.

7). $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{2x + 3}$. 8). $\lim\limits_{x \to -4} \sqrt{-2x + 7}$.

9). $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}}{3x^2 + 5x - 2}$. 10). $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{3+2x}}{x^2 - 2}$.

11). $\lim\limits_{x \to -2}(x+3)^{x-5}$. 12). $\lim\limits_{x \to 3}(4x - 10)^{\sqrt{x+6}}$.

13). $\lim\limits_{x \to -3} \lg(x^2 + 1)$. 14). $\lim\limits_{x \to -2} \log_{3-x}(17 + 2x^2)$.

15). $\lim\limits_{x \to 3} \sin\dfrac{\pi}{x}$. 16). $\lim\limits_{x \to 2} \cos\dfrac{\pi x}{x^2 - 1}$.

17). $\lim\limits_{x \to -1} \arcsin 2^x$. 18). $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \arccos x^{-1}$.

19). $\lim\limits_{x \to 4} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x^2 - 5x}$. 20). $\lim\limits_{x \to -2} \operatorname{arctg}\sqrt{1 - x}$.

Глава 2
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ И РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

В настоящей главе приводятся ключевые пределы математической теории, рассматриваются основные проблемы, возникающие при вычислении пределов, разбирается широкий круг примеров.

§ 2.1. Первый замечательный предел

Данный предел играет важнейшую роль в математической теории и позволяет сопоставить поведение синуса и линейной функции локально в окрестности точки 0. Для этого составим отношение

$$\frac{\sin x}{x};$$

полученная функция определена при всех $x \neq 0$. По теореме об отношении пределов и в силу непрерывности функции синус при всех $a \neq 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \sin x}{\lim\limits_{x \to a} x} = \frac{\sin a}{a}.$$

Однако при $a = 0$ такой прием не применим (знаменатель обращается в 0), и вычисление данного предела требует привлечения существенно более сложных аналитических средств. В итоге надлежащих расчетов получается следующий фундаментальный результат.

Утверждение. Существует предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2.1}$$

Данное равенство называется ***первым замечательным пределом***.

Геометрическая интерпретация первого замечательного предела представлена на рисунке 2.1. На нём в области $|x| < \pi/2$ показан график функции $y = \sin x$. Как видно на рисунке, в окрестности точки 0 график синуса близок к прямой $y = x$, а в самой точке 0 он касается данной прямой; это касание и представляет собой основной геометрический смысл данного предела.

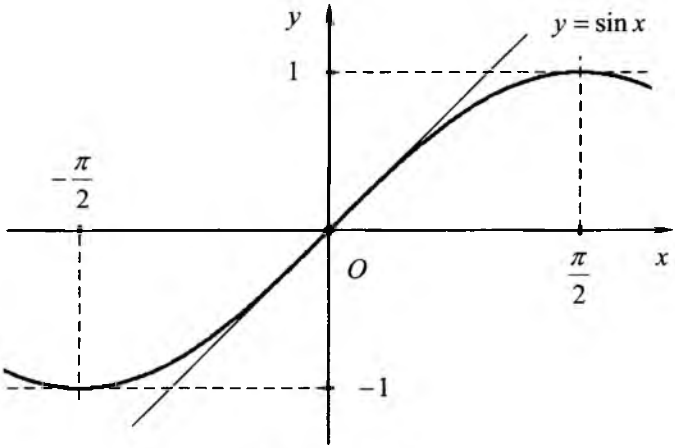

Рисунок 2.1

Пример 1. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}.$$

Первый способ вычисления данного предела состоит в применении известной тригонометрической формулы

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

В соответствии с ней и по теореме о пределе произведения справедливы равенства

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos x.$$

В полученном произведении пределов первый предел равен 1 как первый замечательный, а второй предел равен 1 по свойству непрерывности косинуса (см. параграф 1.6):

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1\,.$$

Таким образом, данный предел равен 2.

Второй способ вычисления данного предела состоит в замене переменной под знаком предела (см. параграф 1.5) по формуле $y = 2x$. Поскольку

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

и $y \neq 0$ при $x \neq 0$, то в результате получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{\sin 2x}{2x}\right) = 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 2\,.$$

Отметим, что данный способ применим и в том случае, когда под знаком синуса вместо целочисленного множителя 2 фигурирует любое дробное число, и простые тригонометрические формулы не применимы; например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1{,}2345x)}{x} = 1{,}2345\,.$$

Пример 2. Вычислим часто встречающийся предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\,. \tag{2.2}$$

Применить теорему о пределе отношения непосредственно не удается, т. к. знаменатель дроби обращается в 0 при $x = 0$. Используем известную тригонометрическую формулу

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

и проведем замену переменной вида $y = x/2$, в условиях которой $y \to 0$ при $x \to 0$:

Геометрическая интерпретация первого замечательного предела представлена на рисунке 2.1. На нём в области $|x| < \pi/2$ показан график функции $y = \sin x$. Как видно на рисунке, в окрестности точки 0 график синуса близок к прямой $y = x$, а в самой точке 0 он касается данной прямой; это касание и представляет собой основной геометрический смысл данного предела.

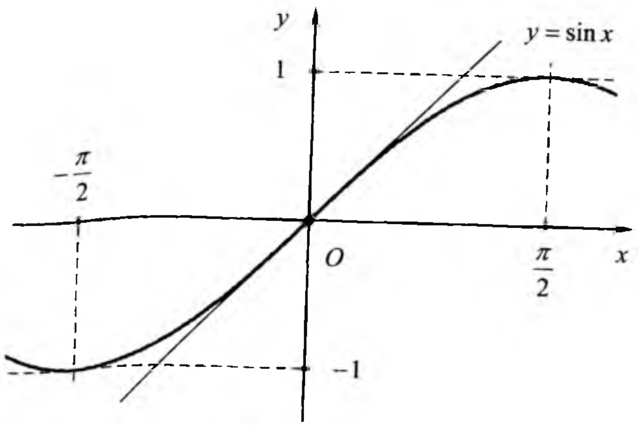

Рисунок 2.1

Пример 1. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}.$$

Первый способ вычисления данного предела состоит в применении известной тригонометрической формулы

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

В соответствии с ней и по теореме о пределе произведения справедливы равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x.$$

В полученном произведении пределов первый предел равен 1 как первый замечательный, а второй предел равен 1 по свойству непрерывности косинуса (см. параграф 1.6):

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1 .$$

Таким образом, данный предел равен 2.

Второй способ вычисления данного предела состоит в замене переменной под знаком предела (см. параграф 1.5) по формуле $y = 2x$. Поскольку

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

и $y \neq 0$ при $x \neq 0$, то в результате получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{\sin 2x}{2x}\right) = 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 2 .$$

Отметим, что данный способ применим и в том случае, когда под знаком синуса вместо целочисленного множителя 2 фигурирует любое дробное число, и простые тригонометрические формулы не применимы; например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1{,}2345x)}{x} = 1{,}2345 .$$

Пример 2. Вычислим часто встречающийся предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} . \qquad (2.2)$$

Применить теорему о пределе отношения непосредственно не удается, т. к. знаменатель дроби обращается в 0 при $x = 0$. Используем известную тригонометрическую формулу

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

и проведем замену переменной вида $y = x/2$, в условиях которой $y \to 0$ при $x \to 0$:

Геометрическая интерпретация первого замечательного предела представлена на рисунке 2.1. На нём в области $|x| < \pi/2$ показан график функции $y = \sin x$. Как видно на рисунке, в окрестности точки 0 график синуса близок к прямой $y = x$, а в самой точке 0 он касается данной прямой; это касание и представляет собой основной геометрический смысл данного предела.

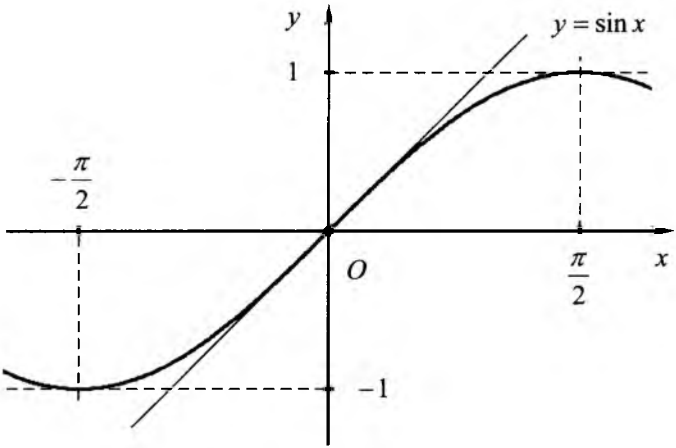

Рисунок 2.1

Пример 1. Вычислим предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}.$$

Первый способ вычисления данного предела состоит в применении известной тригонометрической формулы

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

В соответствии с ней и по теореме о пределе произведения справедливы равенства

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cos x}{x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \cos x.$$

В полученном произведении пределов первый предел равен 1 как первый замечательный, а второй предел равен 1 по свойству непрерывности косинуса (см. параграф 1.6):

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1\,.$$

Таким образом, данный предел равен 2.

Второй способ вычисления данного предела состоит в замене переменной под знаком предела (см. параграф 1.5) по формуле $y = 2x$. Поскольку

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

и $y \neq 0$ при $x \neq 0$, то в результате получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{\sin 2x}{2x}\right) = 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 2\,.$$

Отметим, что данный способ применим и в том случае, когда под знаком синуса вместо целочисленного множителя 2 фигурирует любое дробное число, и простые тригонометрические формулы не применимы; например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1{,}2345x)}{x} = 1{,}2345\,.$$

Пример 2. Вычислим часто встречающийся предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\,. \tag{2.2}$$

Применить теорему о пределе отношения непосредственно не удается, т. к. знаменатель дроби обращается в 0 при $x = 0$. Используем известную тригонометрическую формулу

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

и проведем замену переменной вида $y = x/2$, в условиях которой $y \to 0$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y^2}.$$

Используем свойство непрерывности квадратичной функции и первый замечательный предел:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y^2}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\right)^2=1^2=1.$$

Окончательно получаем, что искомый предел (2.2) равен 1/2.

Более сложные примеры, вычисляемые с использованием первого замечательного предела, разобраны в параграфе 2.5.

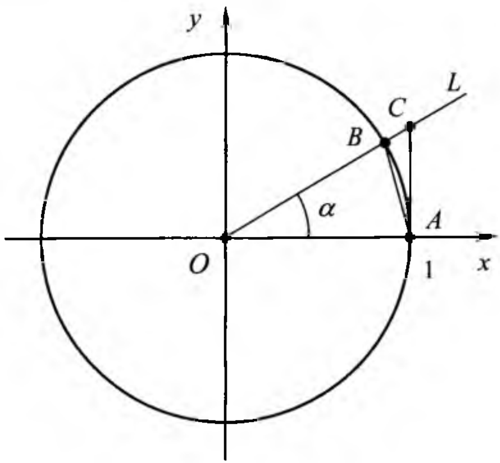

Рисунок 2.2

Проведем рассуждения геометрического характера, которые можно трактовать как доказательство справедливости первого замечательного предела (рисунок 2.2). Предварительно напомним, что при измерении углов часто используется радианная мера. Радиан (от латинского слова «radius» – спица колеса, луч) – величина центрального угла круга, соответствующего дуге, длина которой равна радиусу; 1 радиан равен примерно 57°, а точное соотношение таково: 2π радиан равно 360°. При исчислении величин углов в радианах многие свойства тригонометрических функций становятся наиболее простыми.

Рассмотрим на координатной плоскости единичную окружность с центром в начале координат. Вершину угла величиной α радиан, $0<\alpha<\pi/2$, поместим в начало координат. Одну из сторон угла направим вдоль положительной полуоси Ox, вторая сторона угла представит собой некоторый луч L, проведенный в первой координатной четверти. При этом определяются три точки: A – точка пересечения оси Ox с единичной окружностью, B – точка пересечения луча L с единичной окружностью, и C – точка пересечения луча L с перпендикуляром к оси Ox, восстановленным в точке A. Координаты построенных точек: $A(1;0)$, $B(\cos\alpha;\sin\alpha)$, $C(1;\operatorname{tg}\alpha)$. Рассмотрим треугольники AOB (равнобедренный), AOC (прямоугольный) и круговой сектор AOB (граница сектора состоит из отрезков OA и OB и дуги AB окружности); обозначим данный сектор символом «$\triangleleft$». Очевидно, что круговой сектор содержит треугольник AOB и содержится в треугольнике AOC; следовательно, между площадями данных фигур имеет место соотношение:

$$S_{AOB}<S_{\triangleleft}<S_{AOC}.$$

Площади треугольников имеют следующие значения:

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$S_{AOC}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|AC|=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Площадь сектора представляется формулой

$$S_{\triangleleft}=\frac{1}{2}\alpha \qquad (2.3)$$

(пояснения к ней приведены в замечании, данном ниже). Следовательно,

$$\frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha ,$$

или

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha .$$

Деля на $\sin\alpha > 0$, получаем

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha},$$

что равносильно

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1 .$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для отрицательных значений α. При малых углах α, т. е. при $\alpha \to 0$, справедливо: $\cos\alpha \to \cos 0 = 1$. Следовательно, по принципу двусторонней ограниченности (см. параграф 1.5), отношение $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ тоже стремится к 1 при $\alpha \to 0$.

Замечание. Формулу (2.3) можно пояснить с помощью следующей таблицы площадей фигур, располагающихся в круге радиуса R.

Фигура	**Угол**	**Площадь**
Круг	2π	$\pi R^2 = \dfrac{2\pi}{2} R^2$
Полукруг	π	$\dfrac{\pi}{2} R^2$
Сектор	α	$\dfrac{\alpha}{2} R^2$

В графе «Угол» таблицы приведены значения в радианах ц е н т р а л ь н ы х у г л о в, соответствующих указанным фигурам.

§ 2.2. Второй замечательный предел

Данный предел также играет важнейшую роль в математической теории и позволяет сопоставить поведение показательной, логарифмической и линейной функций локально в окрестности точки 0. Рассмотрим степенно-показательное выражение

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Данная функция определена при всех $x \neq 0$, $x > -1$ (последнее строгое неравенство необходимо в силу того, что отрицательные числа в произвольную нецелую степень не возводятся). Ясно, что при всех значениях a из указанной области определения в силу свойств степенно-показательных выражений справедливо соотношение

$$\lim_{x \to a}(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+a)^{\frac{1}{a}}.$$

Более того, точка 0 имеет проколотую окрестность, полностью входящую в область определения функции; тем самым, можно ставить вопрос о существовании предела данной функции в точке $a = 0$. Вычисление соответствующего предела требует привлечения сложных аналитических средств, применение которых приводит к следующему фундаментальному результату.

Утверждение. Существует предел

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{2.4}$$

Данное равенство называется ***вторым замечательным пределом***.

Число e является важнейшей математической константой и называется ***основанием натуральных логарифмов***, или ***числом Эйлера****. Число e является иррациональным, т. е. никакая простая или конечная десятичная дробь не может представить данное число

* Эйлер Леонард – выдающийся российский математик, механик и физик швейцарского происхождения XVIII в.

абсолютно точно. С точностью 15 десятичных знаков (чего с избытком достаточно для решения большинства практических задач) справедливо представление

$$e \approx 2{,}718281828459045\,;$$

для оценочных и приближенных расчетов можно взять $e \approx 2{,}72$. Значение числа e исключительно велико в математике. В частности, показательная функция e^x (иначе называемая экспонентой и иногда обозначаемая как $\exp(x)$) и логарифмическая функция по основанию e (натуральный логарифм $\ln x \equiv \log_e x$) имеют свойства, выражающиеся наиболее просто среди всех показательных и логарифмических функций.

Отметим, что выражение, стоящее под знаком данного предела, иногда читается как «единица плюс малая добавка в степени, обратной малой добавке».

Пример 1. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}.$$

Для этого преобразуем тождественно данную функцию следующим образом:

$$(1+3x)^{\frac{1}{2x}} = (1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3}{2}} = \left((1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Далее проведем замену переменной $y = 3x$. В новом преобразованном пределе переменная y стремится к 0: $y \to 0$ при $x \to 0$, и $y \neq 0$ при $x \neq 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^{\frac{3}{2}} = \lim_{y\to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Пользуясь непрерывностью полукубической функции (т. е. степенной функции с показателем 3/2), завершаем вычисление данного предела:

$$\lim_{y\to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Пример 2. Вычислим два следующих важных предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Первый из них сводится ко второму замечательному пределу с использованием свойства непрерывности логарифмической функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1. \tag{2.5}$$

Второй предел вычисляется с помощью замены $y=e^x-1$, при которой

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}(e^x-1)=e^0-1=0,$$

$x=\ln(1+y)$ и $y\neq 0$ при $x\neq 0$. Данная замена позволяет привести рассматриваемый предел к только что вычисленному пределу (2.5):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\right)^{-1}=1. \tag{2.6}$$

Более сложные примеры, вычисляемые с использованием второго замечательного предела, разобраны в параграфе 2.6.

Геометрическая интерпретация второго замечательного предела представлена на рисунке 2.3. На нём в области $|x|<0{,}9$, $|y|<0{,}9$ показаны графики функций $y=\ln(1+x)$ и

$y = e^x - 1$ (соответственно выпуклая вверх и выпуклая вниз кривые). Как видно на рисунке, в окрестности точки 0 графики обеих функций близки к прямой $y = x$ (это свойство – непосредственная иллюстрация только что вычисленных пределов (2.5) и (2.6), тесно связанных со вторым замечательным), а в самой точке 0 обе кривые касаются данной прямой; это касание и представляет собой основной геометрический смысл второго замечательного предела.

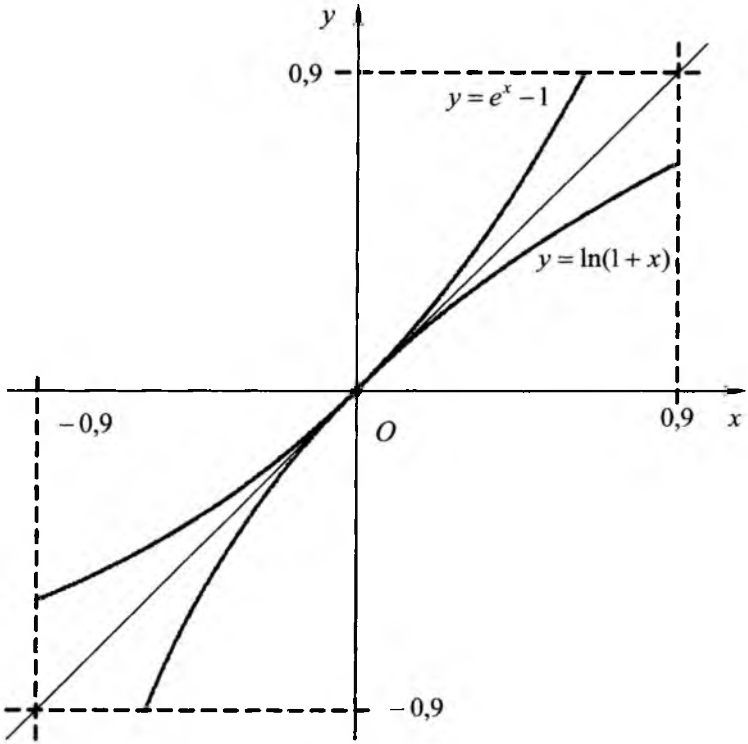

Рисунок 2.3

Замечание 1. Графики функций $y = \ln(1+x)$ и $y = e^x - 1$, представленные на рисунке 2.3, симметричны относительно прямой

$y = x$. Это означает, что данные функции являются взаимно обратными (как, например, $y = \log_a x$ и $y = a^x$). Иначе говоря, последовательное применение двух этих функций в любом порядке приводит к исходному значению:

$$\ln(1 + \underline{\underline{e^x - 1}}) = \ln(e^x) = x,$$

$$\exp(\underline{\underline{\ln(1 + x)}}) - 1 = 1 + x - 1 = x$$

(подчеркиванием отмечены «внутренние» функции, первыми примененные к аргументу x). При этом, как и должно быть для взаимно обратных функций, область определения D одной функции совпадает с множеством значений E другой функции:

$$D(e^x - 1) = (-\infty; +\infty) = E(\ln(1 + x)),$$

$$D(\ln(1 + x)) = \{x \mid 1 + x > 0\} = (-1; +\infty) = E(e^x - 1).$$

Замечание 2. Важно отметить, что второй замечательный предел допускает содержательную финансовую интерпретацию, изложенную в приложении 7.

§ 2.3. Понятие и виды неопределенностей

В наиболее стандартных ситуациях вычисление пределов проводится с применением основных теорем о пределах. В ряде случаев указанные теоремы неприменимы, и при вычислении пределов возникают определенные сложности. Это бывает, в частности, когда требуется вычислить предел вида

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{2.7}$$

причем предел знаменателя равен 0, т. е. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. При этом, если предел числителя конечен и не равен нулю, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$, то особых вопросов не возникает: предел (2.7) равен ∞. Тот же вывод тем более справедлив, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Наиболее сложным остается случай, когда равны 0 пределы и числителя, и знаменателя:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0\,. \tag{2.8}$$

Такие случаи носят название неопределенностей. Более строго: отношение функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой ***неопределенность*** вида $\dfrac{0}{0}$ при $x \to a$, если выполняется условие (2.8). (Для компактности иногда будем использовать запись $0/0$). Конечно, здесь предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a, причем $g(x) \neq 0$.

Раскрыть неопределенность означает вычислить предел (2.7).

Классическим примером неопределенности вида $0/0$ является первый замечательный предел (2.1).

Пример. Вычислим важный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\,. \tag{2.9}$$

Отношение под знаком предела представляет собой неопределенность вида $0/0$, поскольку

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-1\right) = \sqrt{1}-1 = 0, \quad \lim_{x\to 0} x = 0\,.$$

Проведем тождественные преобразования данного выражения, умножив числитель и знаменатель дроби на величину $\sqrt{1+x}+1$, сопряженную к разности $\sqrt{1+x}-1$; это позволит применить формулу для разности квадратов и сократить множитель $x \neq 0$ (что выполняется в проколотой окрестности точки 0). В результате получим:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{(\sqrt{1+x})^2-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\,.$$

Полученное преобразованное выражение уже не представляет собой неопределенности в точке 0 – она исчезла при сокращении на x. Следовательно, используя непрерывность в точке 0 знаменателя последней дроби, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

Геометрическая интерпретация предела (2.9) представлена на рисунке 2.4.

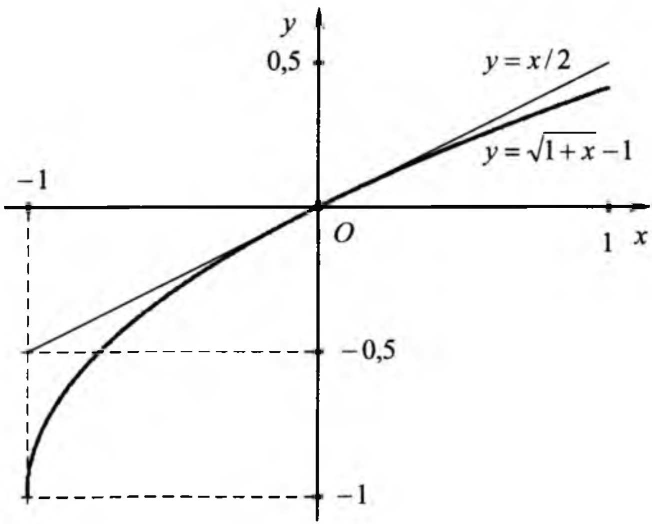

Рисунок 2.4

На нём на показан график функции $y=\sqrt{1+x}-1$ отрезке $[-1;1]$. Данный график представляет собой классический график функции $y=\sqrt{x}$, смещенный влево по x на 1 и вниз по y на 1 (иными словами, одну ветвь параболы, направленной горизонтально воль оси Ox). Как видно на рисунке, в окрестности точки 0 график данной функции близок к прямой $y=x/2$, а в самой точке 0 касается данной прямой;

это касание и представляет собой основной геометрический смысл рассмотренного предела.

Помимо неопределенности вида $0/0$, существуют следующие основные виды неопределенностей:

– аддитивная неопределенность $\infty-\infty$;

– мультипликативные неопределенности

$$\frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty;$$

– степенно-показательные неопределенности

$$1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$$

(уже рассмотренная неопределенность $0/0$ относится к мультипликативному виду).

Все неопределенности определяются по аналогии с неопределенностью вида $0/0$. Напомним: аддитивность и мультипликативность (от латинских слов «additivus» – прибавляемый и «multiplico» – умножать, увеличивать) означают свойства, связанные с операциями сложения и умножения соответственно.

Мультипликативные неопределенности сводятся к классической неопределенности $0/0$ простейшими тождественными преобразованиями. Именно:

– если отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность вида ∞/∞, то в записи $\dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$ оно представляет собой неопределенность вида $0/0$;

– если произведение $f(x)g(x)$ представляет собой неопределенность вида $0\cdot\infty$, то в записи $\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ оно представляет собой неопределенность вида $0/0$, а в записи $\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ – неопределенность вида ∞/∞.

Степенно-показательные неопределенности преобразуются к неопределенности вида $0 \cdot \infty$ логарифмированием, что можно символически записать в следующем виде:

$$1^{\infty} \mapsto \ln(1^{\infty}) \sim \infty \cdot \ln 1 \sim \infty \cdot 0;$$

$$0^{0} \mapsto \ln(0^{0}) \sim 0 \cdot \ln 0 \sim 0 \cdot \infty;$$

$$\infty^{0} \mapsto \ln(\infty^{0}) \sim 0 \cdot \ln \infty \sim 0 \cdot \infty;$$

в этих записях символ «$\mapsto$» обозначает применение операции логарифмирования, а символ «~» – тождественное преобразование полученных выражений на основании обычных свойств логарифмов. После раскрытия полученной мультипликативной неопределенности $0 \cdot \infty$ к результату необходимо применить операцию, обратную операции логарифмирования, т. е. потенцирование (вычисление экспоненты).

Классическим примером неопределенности вида 1^{∞} является второй замечательный предел (2.4).

Примеры раскрытия неопределенности вида 1^{∞} приведены в параграфе 2.6; примеры неопределенностей вида 0^{0} и ∞^{0} рассмотрены в параграфе 4.2.

Замечание. Отметим, что из символов «0», «1», «∞» можно составить, помимо упомянутых, и другие формальные степенно-показательные выражения, например, 0^{∞}, ∞^{1}, ∞^{∞} (во всех этих выражениях необходимо ограничиться случаем $+\infty$). Важно, что ни одно из них не представляет какой-либо неопределенности. Покажем, например, что всегда $+\infty^{+\infty} = +\infty$. Это означает, что из существования следующих двух пределов должен вытекать третий:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = +\infty. \qquad (2.10)$$

Действуя по определению, фиксируем любое (сколь угодно большое) число $B > 0$. Определим число $C = \max\{B; 1\} \geq 1$. При этом:

– в силу первого из пределов в (2.10) существует такое число $\delta_1 > 0$, что для всех $x \neq a$, $|x - a| < \delta_1$ выполняется неравенство

$$f(x) > C;$$

– в силу второго из пределов в (2.10) существует такое число $\delta_2 > 0$, что для всех $x \neq a$, $|x-a| < \delta_2$ выполняется неравенство

$$g(x) > 1.$$

Выберем число $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\} > 0$. Тогда при всех $x \neq a$, $|x-a| < \delta$ выполняются оба полученных неравенства; следовательно, для указанных значений аргумента с учетом свойств основных элементарных функций и неравенства $C \geq 1$ справедливо:

$$f(x)^{g(x)} > C^{g(x)} \geq C^1 = C \geq B.$$

Построенная цепочка неравенств показывает, что в проколотой δ-окрестности точки a функция $f(x)^{g(x)}$ принимает значения, большие наперед выбранного числа $B > 0$. Это и означает, что имеет место третий предел из (2.10).

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно установить, что справедливы формальные соотношения $0^{+\infty} = 0$, $+\infty^1 = +\infty$.

В завершение параграфа перечислим основные приемы, с использованием которых проводится практическое вычисление пределов:

– применение теорем о пределах;
– проведение тождественных преобразований функций;
– использование свойства непрерывности элементарных функций;
– использование замечательных пределов.

Кроме того, действенным приемом раскрытия неопределенностей при вычислении пределов является так называемое правило Лопиталя, детально рассмотренное в главе 4.

§ 2.4. Примеры вычисления пределов дробно-рациональных и иррациональных функций

Рассмотрим ряд примеров вычисления пределов функций. Напомним, что дробно-рациональные функции рассматривались нами в параграфе 1.6. ***Иррациональными*** называются функции, представляющие комбинации корней целой степени ($\sqrt[n]{\ldots}$, $n = 2, 3, \ldots$) и дробно-рациональных выражений.

1). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right).$$

Выражение под знаком предела представляет собой аддитивную неопределенность вида $\infty-\infty$, поскольку обе заданные дроби являются бесконечно большими величинами:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3}{1-x^3}=\infty, \quad \lim_{x\to 1}\frac{2}{1-x^2}=\infty.$$

Следовательно, теорема о сумме или разности пределов непосредственно неприменима. Проведем следующий ряд тождественных преобразований функции, стоящей под знаком предела:

$$\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{2}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\frac{1}{1-x}\left(\frac{3}{1+x+x^2}-\frac{2}{1+x}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-x}\left(\frac{-2x^2+x+1}{(1+x+x^2)(1+x)}\right)=\frac{1}{1-x}\left(\frac{(1-x)(2x+1)}{(1+x+x^2)(1+x)}\right)=$$

$$=\frac{2x+1}{(1+x+x^2)(1+x)}.$$

В ходе преобразований проведено сокращение на множитель $1-x\neq 0$ в числителе и знаменателе дроби, который и обусловливал наличие неопределенности при $x\to 1$. После сокращения неопределенность «исчезла», и преобразованный предел вычисляется элементарно по свойству непрерывности дробно-рациональной функции:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{(1+x+x^2)(1+x)}=\frac{3}{3\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

2). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-5x-6}.$$

Выражение под знаком предела является дробно-рациональной функцией и представляет собой неопределенность вида $0/0$, поскольку

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)=2^2-3\cdot 2+2=0,$$

$$\lim_{x\to 2}(x^3+2x^2-5x-6)=2^3+2\cdot 2^2-5\cdot 2-6=0. \qquad (2.11)$$

Следовательно, теорема о пределе частного непосредственно неприменима. Проведем разложение на множители многочленов в числителе и знаменателе данной дроби. Корни квадратного уравнения $x^2-3x+2=0$ легко вычисляются и равны 1 и 2, так что справедливо представление

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

Решить явно к у б и ч е с к о е уравнение $x^3+2x^2-5x-6=0$ не просто, но поскольку данный кубический многочлен обращается в 0 при $x=2$ (это установлено только что при вычислении предела (2.11)), то один из его корней равен 2. Следовательно, данное кубическое выражение делится нацело (без остатка) на $x-2$ (этот факт – следствие теоремы Безу *). Деление можно провести «уголком», как и для обычных чисел:

$$\begin{array}{rr|l}
-\!\!\! & x^3+2x^2-5x-6 & x-2 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^3-2x^2} & x^2+4x+3 \\
 & -\;4x^2-5x & \\
 & \underline{4x^2-8x} & \\
 & -\;3x-6 & \\
 & \underline{3x-6} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

В результате получаем разложение

* Безу Этьен – французский математик XVIII в.

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x^2 + 4x + 3),$$

используя которое, завершаем вычисление предела:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x^2 + 4x + 3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{15}.$$

3). Вычислим предел иррациональной функции

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 1}.$$

Отношение под знаком предела представляет собой в точке 1 неопределенность вида $0/0$, поскольку

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{x} - 1) = 0, \quad \lim_{x\to 1}(x^3 - 1) = 0.$$

Проведем следующие тождественные преобразования:

– умножим числитель и знаменатель дроби на величину $\sqrt{x} + 1$, сопряженную к разности $\sqrt{x} - 1$;

– применим формулу для разности квадратов:

$$(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = x - 1;$$

– разложим разность кубов на произведение:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1);$$

– сократим числитель и знаменатель дроби на величину $x - 1 \neq 0$ (что выполняется в проколотой окрестности точки $x = 1$);

– используем свойство непрерывности квадратного корня в точке 1.

В результате получим следующую цепочку равенств:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x^3 - 1)(\sqrt{x} + 1)} =$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{3\cdot 2}=\frac{1}{6}.$$

4). Вычислим предел иррациональной функции

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{7x-5}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}.$$

Выражение под знаком предела представляет собой неопределенность вида $0/0$, поскольку

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{4x+1}-\sqrt{7x-5})=\sqrt{4\cdot 2+1}-\sqrt{7\cdot 2-5}=0,$$

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2})=\sqrt{2+2}-\sqrt{3\cdot 2-2}=0.$$

Преобразуем числитель, умножая и деля его на сопряженное выражение:

$$\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{7x-5}\right)\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{7x-5}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{7x-5}}=$$

$$=\frac{4x+1-(7x-5)}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{7x-5}}=\frac{-3x+6}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{7x-5}}.$$

Аналогично преобразуем и знаменатель:

$$\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}=$$

$$=\frac{2+x-(3x-2)}{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}=\frac{-2x+4}{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}.$$

В результате получим:

$$\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{7x-5}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}=$$

$$=\frac{-3x+6}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{7x-5}}\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}{-2x+4}=$$

$$=\frac{-3x+6}{-2x+4}\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{7x-5}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{7x-5}}.$$

Преобразованное выражение уже не содержит неопределенности. Завершаем вычисление предела применением свойства непрерывности квадратного корня:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{7x-5}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{7x-5}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{6}=1.$$

§ 2.5. Примеры вычисления пределов, приводимых к первому замечательному пределу

1). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

Имеющаяся неопределенность вида $0/0$ легко раскрывается путем умножения числителя и знаменателя на x с последующим простым приведением к первому замечательному пределу, применяемому дважды:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}\cdot\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg} 5x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{tg} 5x}\right)=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{\operatorname{tg} 5x}\right)=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x\cos 5x}{\sin 5x}\right)=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)\lim_{x\to 0}\cos 5x=$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^{-1}\cos 0=\frac{3}{5}.$$

2). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right).$$

В данном примере непосредственно применить теоремы о пределах невозможно, причем без преобразования функции не удается даже явно указать вид неопределенности под знаком предела. Проведем следующие тождественные преобразования:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{1-\cos x}{x\sin x}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}.$$

Используя вычисленный ранее предел (2.2) и первый замечательный предел, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)=\frac{1}{2}.$$

3). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1}.$$

Для этого проведем замену переменной $y=x-1$, при которой $\lim\limits_{x\to 1}y=0$ и $y\neq 0$ при $x\neq 1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y}{y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{\cos y}\cdot\frac{1}{y}\right)=$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{\cos y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y} = 1.$$

4). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}. \tag{2.12}$$

Выражение под знаком предела представляет собой неопределенность вида $0/0$. Проведем замену переменной $y = \operatorname{arctg} x$, при которой $x = \operatorname{tg} y$,

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}\operatorname{arctg} x = 0$$

и $y \neq 0$ при $x \neq 0$. Следовательно, в новом пределе переменная y будет стремиться к 0. В результате получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\sin y}\cos y\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y = 1.$$

5). Вычислим предел

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\pi - x}.$$

Для раскрытия имеющейся неопределенности вида $0/0$ проведем замену $y = \pi - x$, при которой $\lim\limits_{x\to\pi} y = 0$. С учетом периодичности и нечетности тангенса получаем:

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(2(\pi - y)) = \operatorname{tg}(2\pi - 2y) = \operatorname{tg}(-2y) = -\operatorname{tg}(2y).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\pi - x} = -\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2y}{y} = -\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{y\cos 2y} =$$

$$= -\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos 2y} = -2\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{2y}\cdot\frac{1}{\cos 0} = -2.$$

6). Вычислим предел

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{(2x-\pi)^2}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to\pi/2}\cos x=\cos(\pi/2)=0,$$

то имеется неопределенность вида $0/0$. Воспользуемся заменой $y=x-\pi/2$, при которой $\lim\limits_{x\to\pi/2} y=0$ и

$$\cos x=\cos(y+\pi/2)=-\sin y.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{(2x-\pi)^2}=\lim_{y\to0}\frac{-\sin y}{4y^2}=-\frac{1}{4}\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y^2}=$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to0}\frac{1}{y}=\infty.$$

§ 2.6. Примеры вычисления пределов, приводимых ко второму замечательному пределу

Следующий ряд пределов представляет собой неопределенности вида 1^∞. Для их раскрытия прежде всего преобразуются выражения в основании степени с выделением бесконечно малой добавки к 1, а затем в показателе формируется аналогичное выражение.

1). Вычислим предел

$$\lim_{x\to0}(1-4x^2)^{\frac{7}{x}}.$$

Малая добавка к 1 в основании данного выражения уже явно выделена и равна $-4x^2$; преобразуем надлежащим образом показатель:

$$\frac{7}{x}=-\frac{1}{4x^2}\cdot\frac{-7\cdot4x^2}{x}=-\frac{1}{4x^2}\cdot(-28x).$$

Следовательно,

$$(1-4x^2)^{\frac{7}{x}} = (1-4x^2)^{-\frac{1}{4x^2}\cdot(-28x)} = \left((1-4x^2)^{-\frac{1}{4x^2}}\right)^{-28x}.$$

С учетом предельных свойств степенно-показательных выражений (см. параграф 1.5) и второго замечательного предела получаем:

$$\lim_{x\to 0}(1-4x^2)^{\frac{7}{x}} = \lim_{x\to 0}\left((1-4x^2)^{-\frac{1}{4x^2}}\right)^{-28x} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}(1-4x^2)^{-\frac{1}{4x^2}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}(-28x)} = e^0 = 1.$$

Отметим, что в данном примере основание представляет собой разность квадратов: $1-4x^2 = (1-2x)(1+2x)$, так что вычисление предела можно провести следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}(1-4x^2)^{\frac{7}{x}} = \lim_{x\to 0}\left((1-2x)(1+2x)\right)^{\frac{7}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((1-2x)^{\frac{7}{x}}(1+2x)^{\frac{7}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{7}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{7}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right)^{-14}\cdot\lim_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{14} = e^{-14}\cdot e^{14} = 1.$$

Полученные результаты, безусловно, совпадают.

2). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}(1+2x+3x^2)^{\frac{5}{x}}.$$

В основании степени выражение $y(x) = 2x + 3x^2$ является малой при $x \to 0$ добавкой к 1. Соответственно преобразуем показатель:

$$\frac{5}{x}=\frac{5(2+3x)}{x(2+3x)}=\frac{5(2+3x)}{y(x)}.$$

Следовательно,

$$(1+2x+3x^2)^{\frac{5}{x}}=(1+y(x))^{\frac{5(2+3x)}{y(x)}}=\left((1+y(x))^{\frac{1}{y(x)}}\right)^{5(2+3x)}.$$

По свойствам степенно-показательных выражений получаем:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x+3x^2)^{\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+y(x))^{\frac{1}{y(x)}}\right)^{5(2+3x)}=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}(1+y(x))^{\frac{1}{y(x)}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}5(2+3x)}=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{10}=e^{10}.$$

3). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{5-3x}{5+4x}\right)^{\frac{2}{x}}.$$

Преобразуем выражение в основании, выделяя из него 1 и некоторую добавку:

$$\frac{5-3x}{5+4x}=1+\frac{5-3x}{5+4x}-1=1+\frac{5-3x-5-4x}{5+4x}=1+\frac{-7x}{5+4x},$$

причем полученная добавка

$$y(x)=-\frac{7x}{5+4x}$$

действительно является малой:

$$\lim_{x\to 0}y(x)=0.$$

Надлежащим образом преобразуем и показатель:

$$\frac{2}{x}=\frac{2}{x}\cdot\frac{-7x}{5+4x}\cdot\frac{5+4x}{-7x}=\frac{-14}{5+4x}\cdot\frac{1}{y(x)} .$$

Следовательно,

$$\left(\frac{5-3x}{5+4x}\right)^{\frac{2}{x}}=\left(1+y(x)\right)^{\frac{1}{y(x)}\cdot\frac{-14}{5+4x}}=\left(\left(1+y(x)\right)^{\frac{1}{y(x)}}\right)^{\frac{-14}{5+4x}},$$

и по свойствам степенно-показательных выражений получаем:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{5-3x}{5+4x}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left(\left(1+y(x)\right)^{\frac{1}{y(x)}}\right)^{\frac{-14}{5+4x}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to0}\left(1+y(x)\right)^{\frac{1}{y(x)}}\right)^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-14}{5+4x}}=\left(\lim_{y\to0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{-14}{5}}=e^{-\frac{14}{5}}.$$

4). Вычислим предел:

$$\lim_{x\to0}(1-\sin x)^{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to0}(1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left((1-\sin x)^{\frac{1}{-\sin x}}\right)^{-\cos x}=\left(\lim_{x\to0}(1-\sin x)^{\frac{1}{-\sin x}}\right)^{\lim\limits_{x\to0}(-\cos x)}=$$

$$=e^{-\cos 0}=e^{-1}.$$

5). Вычислим предел

$$\lim_{x\to0}(e^x+\sin x)^{1/x}.$$

В силу равенства

$$\lim_{x\to0}(e^x+\sin x)=e^0+\sin 0=1$$

данный предел представляет собой неопределенность вида 1^∞. Выделяем в основании 1 и малую добавку:

$$e^x+\sin x=1+(e^x-1+\sin x)=1+y,$$

где использовано обозначение

$$y = e^x - 1 + \sin x. \tag{2.13}$$

Следовательно,

$$(e^x + \sin x)^{1/x} = (1+y)^{\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{x}} = \left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{y}{x}}.$$

Ясно, что

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0}(e^x - 1) + \lim_{x\to 0}\sin x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + \sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 + 1 = 2.$$

Следовательно, по свойствам степенно-показательных выражений вычисление данного предела завершается следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}(e^x + \sin x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{y}{x}} = \left(\lim_{x\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x}} = e^2.$$

Подчеркнем, что в данном примере ф о р м а л ь н а я замена переменной (2.13) не приводит к цели, поскольку является весьма сложной и не позволяет явно выразить x через y и подставить нужное выражение для x в показатель. Подобные сложности были обойдены путем надлежащего тождественного преобразования показателя и применения предельных свойств степенно-показательных выражений.

§ 2.7. Примеры вычисления пределов общего вида

1). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x}, \quad a > 0. \tag{2.14}$$

Отметим, что данный предел представляет собой обобщение предела (2.6) и совпадает с ним при $a = e$. Выражение под знаком предела является неопределенностью вида $0/0$. Пусть $a \neq 1$; проведем замену переменной по формуле $y = a^x - 1$, при которой

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} (a^x - 1) = 0$$

и $y \neq 0$ при $x \neq 0$. Следовательно, в новом пределе переменная y будет стремиться к 0. Выразим x через y с использованием свойств логарифмов:

$$x = \log_a (1+y) = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}.$$

В результате с учетом предела (2.5) получаем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \left(\ln a \frac{y}{\ln(1+y)} \right) =$$

$$= \ln a \cdot \lim_{y \to 0} \left(\frac{\ln(1+y)}{y} \right)^{-1} = \ln a .$$

При $a = 1$ полученный результат также имеет место, поскольку в этом случае $a^x = 1^x = 1$, выражение под знаком предела (2.14) тождественно равно 0, и предел тоже равен $0 = \ln 1 = \ln a$.

2). Вычислим предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x}. \tag{2.15}$$

Данный предел представляет собой обобщение предела (2.9) и совпадает с ним при $a = 1/2$. Выражение под знаком предела представляет собой неопределенность вида $0/0$. Пусть $a \neq 0$; проведем следующую сложную замену переменной по формуле $(1+x)^a = e^y$. В силу этой замены

$$x = e^{y/a} - 1, \quad y = \ln\left((1+x)^a\right) = a \ln(1+x),$$

$$\lim_{x \to 0} y = a \lim_{x \to 0} \ln(1+x) = a \ln 1 = 0$$

и $y \neq 0$ при $x \neq 0$. Следовательно, в новом пределе переменная y будет стремиться к 0. В результате преобразований с использованием предела (2.6) и еще одной элементарной замены $y/a = z$ получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{e^{y/a}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\frac{y}{e^{y/a}-1}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^{y/a}-1}=1\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^{y/a}-1}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{az}{e^z-1}=a\cdot\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^{-1}=a\,.$$

При $a=0$ выражение под знаком предела тождественно равно 0; конечно, в этом случае предел тоже равен 0.

Геометрическая интерпретация предела (2.15) при $a=3/2$ представлена на рисунке 2.5, на котором на интервале $-1<x<1$ показан график функции $y=(1+x)^{3/2}-1$ (выпуклая вниз кривая, называемая полукубической параболой).

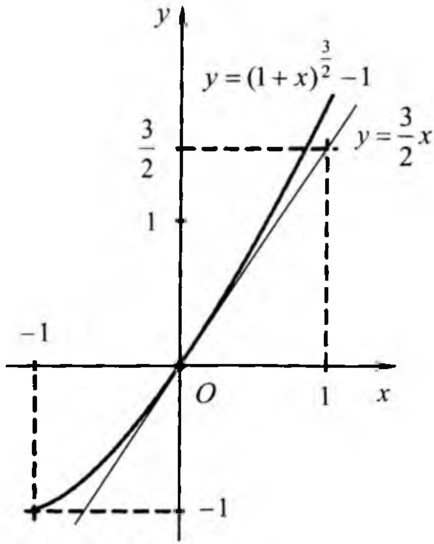

Рисунок 2.5

Как видно из рисунка, в окрестности точки 0 график функции близок к прямой $y=\frac{3}{2}x$, а в самой точке 0 кривая касается данной прямой; это касание и представляет геометрический смысл рассматриваемого предела.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно дать геометрическую интерпретацию рассматриваемого предела при $a=2/3$.

3). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{3^x-1}.$$

Умножая и деля выражение под знаком предела на x, используя вычисленные пределы (2.5) и (2.14), получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\cdot\frac{x}{3^x-1}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{x}\right)^{-1}=\frac{2}{\ln 3}.$$

4). Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{4^{5x}-5^{4x}},$$

представляющий неопределенность вида $0/0$. «Разобьем» его на два предела следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{4^{5x}-5^{4x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^{3x}-3^{2x}}{x}\cdot\frac{x}{4^{5x}-5^{4x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{4^{5x}-5^{4x}}.$$

Преобразуем выражение под знаком первого предела:

$$\frac{2^{3x}-3^{2x}}{x}=\frac{2^{3x}-1-(3^{2x}-1)}{x}=\frac{2^{3x}-1}{x}-\frac{3^{2x}-1}{x}.$$

С учетом значения предела (2.14) и с применением элементарных замен $y=3x$ и $z=2x$ получаем:

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^{3x}-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-1}{x}=$$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{2^{3x}-1}{3x}-2\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-1}{2x}=3\lim_{y\to0}\frac{2^{y}-1}{y}-2\lim_{z\to0}\frac{3^{z}-1}{z}=$$

$$=3\ln2-2\ln3.$$

Аналогично,

$$\frac{4^{5x}-5^{4x}}{x}=\frac{4^{5x}-1-(5^{4x}-1)}{x}=\frac{4^{5x}-1}{x}-\frac{5^{4x}-1}{x},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{4^{5x}-5^{4x}}{x}=5\lim_{x\to0}\frac{4^{5x}-1}{5x}-4\lim_{x\to0}\frac{5^{4x}-1}{4x}=5\ln4-4\ln5.$$

Следовательно, второй предел равен:

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{4^{5x}-5^{4x}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{4^{5x}-5^{4x}}{x}\right)^{-1}=\frac{1}{5\ln4-4\ln5}.$$

Окончательно получаем:

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{4^{5x}-5^{4x}}=\frac{3\ln2-2\ln3}{5\ln4-4\ln5}.$$

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в том, что знаменатель последней дроби не равен 0.

5). Вычислим предел

$$\lim_{x\to1}(1-x)\log_x(1+3x).$$

Функция под знаком предела определена при $x>0$, $x\neq1$, $1+3x>0$, что равносильно условию $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$; следовательно, вопрос о существовании предела в точке 1 правомочен. Используя известные свойства логарифма, его непрерывность, проводя замену $y = x - 1$ и применяя предел (2.5), получаем:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\log_x(1+3x) = \lim_{x\to 1}\left((1-x)\frac{\ln(1+3x)}{\ln x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{\ln x}\cdot\ln(1+3x)\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}\cdot\lim_{x\to 1}\ln(1+3x) =$$

$$= -\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\ln 4 = -\ln 4\cdot\lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right)^{-1} = -\ln 4.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое первый замечательный предел?

2. Приведите геометрическую интерпретацию первого замечательного предела.

3. Проведите геометрические рассуждения, поясняющие справедливость первого замечательного предела.

4. Что такое второй замечательный предел?

5. Какова область определения функции, стоящей под знаком второго замечательного предела?

6. Приведите геометрическую интерпретацию второго замечательного предела.

7. Дайте понятие неопределенности. Укажите виды неопределенностей. Приведите примеры.

8. Что означает раскрыть неопределенность?

9. Каким образом преобразуются мультипликативные неопределенности?

10. Каким образом преобразуются степенно-показательные неопределенности?

11. В чём заключаются основные приемы, применяемые при вычислении пределов?

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Вычислите пределы методом тождественного преобразования.

1). $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-x^2-4x-3}{x+3}$.

2). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}$.

3). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-5x-2}{3x^2-x-2}$.

4). $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{3x^2-16x-12}{2x^2-7x-30}$.

5). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+2}{4x^3-5x-1}$.

6). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^3-1}$.

7). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-3x^2-5x+4}{-2x^3+7x^2+9x-20}$.

8). $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-2x^3-3x^2+10x+3}{x^3+2x^2-8x-15}$.

9). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6}$.

10). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x^3+3x^2+2x-2}{2x^3+x^2+1}$.

11). $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt{2x+3}-2}{2x-1}$.

12). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$.

13). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{\sqrt{x}-1}$.

14). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-x^2+5x-4}{\sqrt{x}-2}$.

15). $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{6x}}{3x^2+5x-2}$.

16). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-2x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}$.

17). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{3+2x}}{x^2-1}$.

18). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{4+x}}{x^2+2x-8}$.

19). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+4x^2}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-2x}}$.

20). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-3}}$.

2.2. Вычислите пределы, преобразуя их к первому замечательному пределу.

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin 2x}{x}$. 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$. 4). $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$.

5). $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}$. 6). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg}4x}$.

7). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{\sin 5x-\sin 2x}$. 8). $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{\cos 5x-\cos 2x}$.

9). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{\sin^2 x}$. 10). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 6x}{\cos x-\cos 5x}$.

2.3. Вычислите пределы, преобразуя их ко второму замечательному пределу.

1). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+7x}{4-2x}\right)^{\frac{3-x}{x}}$. 2). $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{3x}{4-x}\right)^{-\frac{2}{x}}$.

3). $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-2}{2x-5}\right)^{\frac{1-x}{x-3}}$. 4). $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{3x+10}{2-x}\right)^{\frac{x-2}{x+2}}$.

5). $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x}\right)^{\frac{x+1}{1-x}}$. 6). $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+3\right)^{\frac{(x-4)(x+5)}{(x-2)(x+3)}}$.

7). $\lim\limits_{x\to 1}x^{-\frac{x}{\ln x}}$. 8). $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}3x}$.

9). $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{3-x}{x}}$. 10). $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{tg}3x)^{\frac{2}{x}}$.

2.4. Вычислите пределы.

1). $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{2}{x+3}-\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right)$. 2). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{\sin^2 2x}$.

3). $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos 2x+\cos x}{\sin 5x}$. 4). $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1+\cos 3\pi x}$.

5). $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{2\sin^3 2x}$. 6). $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{\sin 2x}$.

7). $\lim\limits_{x\to 2}\sin \pi x\cdot \mathrm{tg}\frac{\pi x}{4}$. 8). $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{ctg} 2\pi x\cdot \cos\frac{\pi x}{2}$.

9). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2-\sqrt{3x+4}}$. 10). $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{\sqrt{x}-4}$.

11). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x\sin 3x}-1}{x^2}$. 12). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}$.

13). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{2x+9}}{\sin 4x}$. 14). $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\mathrm{tg}(x+2)}{x^2-4}$.

15). $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\pi-2x)\mathrm{tg}x$. 16). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sin 7x}$.

17). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{4^{8x}-8^{4x}}$. 18). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-e^{3x}}{\sin 4x+\mathrm{tg}5x}$.

19). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin x}{4^{4x}-5^{5x}}$. 20). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-2^x}{3^x-\cos 2x}$

Глава 3
ОБОБЩЕНИЯ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА

В настоящей главе изучаются различные важные и естественные обобщения понятия предела и непрерывности функции.

§ 3.1. Односторонние пределы функции в точке

Постановка и решение широкого круга задач требует введения понятия односторонних пределов функции в точке – именно, пределов справа и слева. Эти понятия аналогичны классическому понятию предела функции в точке, изученному в главе 1.

Начнем с рассмотрения предела функции в точке справа. Прежде всего, сформулируем предположение, выполнение которого позволяет ввести данное понятие. Именно, будем предполагать, что функция $f(x)$ определена в некоторой правой полуокрестности точки a, за исключением, возможно, самой точки a; это равносильно тому, что область определения рассматриваемой функции содержит интервал вида $(a; a'')$, где a'' – некоторое число, большее a. Ясно, что интервал указанного вида примыкает к точке a справа.

Функция $f(x)$ имеет в точке a справа предел, равный числу b, если при неограниченном приближении значений аргумента x к числу a со стороны значений, больших a, соответствующие значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к числу b.

Предел функции в точке справа иначе называется ***правым предельным значением***.

Тот факт, что число b является пределом функции $f(x)$ в точке a справа, обозначается записью

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b;$$

иначе пишется, что $f(x)\to b$ при $x\to a+0$, или, совсем кратко, $b = f(a+0)$.

Строгие формальные определения односторонних пределов функции в точке приведены в приложении 1.

Пример 1. Рассмотрим функцию $\sqrt{x}$. Сразу отметим, что в точке 0 предела в обычном понимании данная функция не имеет, поскольку ее область определения $[0;+\infty)$ не содержит ни одной проколотой окрестности точки 0. В то же время, если ограничиться стремлением аргумента к 0 со стороны только положительных значений, то данная функция будет иметь в точке 0 предел справа, равный 0:

$$\lim_{x \to 0+0} \sqrt{x} = 0 .$$

Для установления этого факта поступим так же, как и в параграфе 1.2 при доказательстве существования обычного классического предела. В соответствии с определением данного предела выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и установим, при каких условиях выполняется неравенство $|\sqrt{x}| < \varepsilon$, выражающее малость отклонения $\sqrt{x}$ от 0 (конечно, в данном неравенстве модуль можно опустить, поскольку квадратный корень всегда неотрицателен). Это неравенство эквивалентно условиям $x \geq 0$, $x < \varepsilon^2$. Следовательно, если определить число δ равенством $\delta = \varepsilon^2$, то из условия $0 < x < \delta$ будет гарантированно вытекать требуемое неравенство:

$$0 < x < \delta \;\Rightarrow\; \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} < \varepsilon ;$$

это доказывает существование указанного одностороннего предела и равенство его 0.

Аналогично вводится понятие предела функции в точке слева. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой левой полуокрестности точки a, за исключением, возможно, самой точки a (иначе говоря, область определения функции содержит интервал вида $(a'; a)$, где a' – некоторое число, меньшее a).

Функция $f(x)$ имеет в точке a слева предел, равный числу b, если при неограниченном приближении значений аргумента x к числу a со стороны значений, меньших a, соответствующие значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к числу b.

Предел функции в точке слева иначе называется ***левым предельным значением***.

Равенство предела функции $f(x)$ в точке a слева числу b обозначается записью

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b;$$

иначе пишется, что $f(x) \to b$ при $x \to a-0$, или $b = f(a-0)$.

Пример 2. Функция $\operatorname{sgn}(x)$ («знак числа», см. параграф 1.3) имеет следующие односторонние пределы в точке 0:

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sgn}(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sgn}(x) = -1;$$

это видно из графика данной функции (рисунок 1.2) и может быть легко доказано непосредственно. В остальных точках $a \neq 0$ числовой оси односторонние пределы данной функции существуют, равны между собой и принимают значение 1 для $a > 0$ или −1 для $a < 0$.

Пример 3. Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ определены на отрезке $[-1; 1]$ и непрерывны во всех внутренних точках отрезка (см. параграф 1.6). При этом для граничных точек −1 и 1 отрезка существуют односторонние пределы

$$\lim_{x \to -1+0} \arcsin x = -\pi/2, \quad \lim_{x \to 1-0} \arcsin x = \pi/2,$$

$$\lim_{x \to -1+0} \arccos x = \pi, \quad \lim_{x \to 1-0} \arccos x = 0.$$

Как и обычные пределы, односторонние пределы функций могут не существовать. Примером может служить функция

$$\sin\frac{1}{x},$$

рассмотренная в параграфе 1.3; в нём показано, что данная функция в точке 0 предела не имеет. Полностью аналогичные рассуждения показывают, что данная функция не имеет в точке 0 ни левого, ни правого односторонних пределов.

Замечание 1. Важно подчеркнуть, что для конечных односторонних пределов остаются в силе все изученные выше в параграфе 1.5 свойства и теоремы.

Задание. Предлагаем читателям по аналогии с параграфом 1.5 самостоятельно сформулировать основные свойства односторонних пределов.

Замечание 2. Существование предела функции в точке равносильно существованию обоих односторонних пределов и их равенству. Этот факт можно кратко записать в следующем виде:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b \end{cases};$$

при этом фигурная скобка указывает, что оба равенства рассматриваются совместно (как и в обозначениях систем уравнений).

Если существуют конечные односторонние пределы функции в точке, то в этой точке может быть определен ***скачок функции*** как разность правого и левого предельных значений:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) - \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a+0) - f(a-0).$$

Ясно, что непрерывные в точке функции имеют в этой точке нулевой скачок.

Замечание 3. В отдельных учебных пособиях обозначения $x \to 0+0$ и $x \to 0-0$ одностороннего стремления аргумента к 0 используются в сокращенном виде как $x \to +0$ и $x \to -0$; в настоящем пособии такие сокращения используются.

§ 3.2. Односторонние бесконечные пределы функции в точке

Как и обычные пределы, односторонние пределы могут быть бесконечны. Строгие формальные определения односторонних бесконечных пределов приведены в приложении 1. Рассмотрим сначала бесконечные пределы функции в точке справа.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой правой полуокрестности точки a, за исключением, возможно, самой точки a.

Функция $f(x)$ имеет в точке a справа бесконечный предел, если при неограниченном приближении значений аргумента x к числу a со стороны значений, больших a, соответствующие значения функции по модулю неограниченно увеличиваются.

Тот факт, что функция $f(x)$ имеет в точке a справа бесконечный предел, обозначается записью

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty;$$

иначе пишется, что $f(x) \to \infty$ при $x \to a+0$, или $f(a+0) = \infty$.

Пример 1. Функция $1/x$ имеет в точке 0 справа бесконечный предел:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Вполне аналогично формулируются и понятия ***бесконечных пределов определенного знака в точке справа***: функция $f(x)$ имеет в точке a справа предел, равный $+\infty$ (равный $-\infty$), если при неограниченном приближении значений аргумента x к числу a со стороны значений, больших a, соответствующие значения функции $f(x)$ неограниченно увеличиваются (становятся отрицательными и по модулю неограниченно увеличиваются).

Пример 2. Очевидно, что равенство, приведенное в примере 1 настоящего параграфа, может быть уточнено следующим образом:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Пример 3. Имеет место равенство

$$\lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty.$$

Аналогичным образом вводятся понятия бесконечных пределов функции в точке слева. Для этого требуется, чтобы функция $f(x)$

была определена в некоторой левой полуокрестности точки a, за исключением, возможно, самой точки a.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно сформулировать понятия пределов данного типа.

Пример 4. В дополнение к примерам 1 и 2 отметим, что

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Пример 5. В соответствии с известными свойствами основных элементарных функций справедливы следующие бесконечные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0+0} x^{-a}=+\infty,\quad a>0;$$

$$\lim_{x\to 0+0}\log_c x=\begin{cases}+\infty, & 0<c<1\\ -\infty, & c>1\end{cases};$$

$$\lim_{x\to\pi/2-0}\operatorname{tg} x=+\infty,\qquad \lim_{x\to\pi/2+0}\operatorname{tg} x=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 0+0}\operatorname{ctg} x=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0-0}\operatorname{ctg} x=-\infty;$$

учитывая периодичность функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ с периодом π, можно утверждать, что для них имеют место аналогичные пределы и в точках, смещенных относительно указанных на πn, где n – целое число.

§ 3.3. Условие существования односторонних пределов

Укажем важное достаточное условие существования односторонних пределов функции в точке. Это условие – монотонность функции (см. параграф 1.1). Для определенности рассмотрим случай предела слева. Именно, пусть функция $f(x)$ определена и монотонна на некотором интервале $(a';a)$, где $a'<a$ (данный интервал представляет собой левую полуокрестность

точки a без самой точки a). Тогда существует предел функции $f(x)$ в точке a слева.

Данное общее свойство можно уточнить следующим образом: если на интервале $(a'; a)$ функция $f(x)$

1) монотонно не убывает и ограничена сверху

или

2) монотонно не возрастает и ограничена снизу,

то предел функции $f(x)$ в точке a слева является конечным. Говоря кратко, в рассмотренных условиях ограниченность функции гарантирует конечность предела.

Аналогичные утверждения имеют место и для правого одностороннего предела.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно сформулировать условие существования предела монотонной функции в точке справа.

Из проведенных рассмотрений следует, что монотонная на некотором интервале функция имеет в каждой точке интервала конечные односторонние пределы; их значения, вообще говоря, могут не совпадать.

В заключение параграфа для полноты изложения отметим, что условие монотонности не является необходимым для существования односторонних пределов. Иными словами, существуют функции, имеющие в некоторой точке односторонние пределы, но не являющиеся монотонными ни на одном интервале, примыкающем к данной точке. Рассмотрим соответствующий пример. Как показано выше в параграфе 1.5, функция

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

имеет в точке $x = 0$ предел, равный 0; тем самым, и оба соответствующих односторонних предела тоже равны 0. Рассмотрим числа

$$x' = \frac{1}{-\pi/2 + 2\pi n} \quad \text{и} \quad x'' = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n},$$

где n – некоторое натуральное число. Для любых натуральных n оба знаменателя положительны, так что $x' > 0$ и $x'' > 0$, причем

$$\sin\frac{1}{x'} = \sin(-\pi/2 + 2\pi n) = \sin(-\pi/2) = -1,$$

$$\sin\frac{1}{x''} = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = \sin(\pi/2) = 1.$$

Следовательно,

$$f(x') = x'\sin\frac{1}{x'} = -x' < 0, \quad f(x'') = x''\sin\frac{1}{x''} = x'' > 0.$$

Ясно, что чем больше значение n, тем ближе к 0 расположены числа x' и x''. Таким образом, в любой близости от точки 0 справа существуют такие пары точек, в которых функция $f(x)$ принимает значения разных знаков – положительные и отрицательные. Это и означает, что данная функция не является монотонной ни на одном сколь угодно малом интервале, примыкающем к точке 0 справа.

§ 3.4. Пределы функции в бесконечности

Исключительно важное значение для теории и практики имеют пределы функции в бесконечности.

Пусть функция $f(x)$ определена для всех достаточно больших по модулю значений аргумента x, т. е. при $|x| > M$, где M – некоторое число.

Функция $f(x)$ имеет в бесконечности предел, равный числу b, если при неограниченном увеличении значений аргумента x по модулю соответствующие значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к числу b.

Тот факт, что число b является пределом функции $f(x)$ в бесконечности, обозначается записью

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b;$$

иначе пишется, что $f(x) \to b$ при $x \to \infty$.

Строгие формальные определения пределов данного типа приведены в приложении 1.

Пример 1. Функция $f(x) = 1/x$ имеет в бесконечности предел, равный 0:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

Действительно, выберем произвольное число $\varepsilon>0$. Неравенство $|1/x|<\varepsilon$, выражающее малость отклонения функции от 0, равносильно условию $|x|>1/\varepsilon$ при $x\neq 0$. Следовательно, для всех значений аргумента, удовлетворяющих последнему неравенству, выполняется условие малости функции $1/x$. Это и доказывает существование данного предела и равенство его 0.

Пример 2. Замена переменной $y=1/x$ позволяет преобразовать второй замечательный предел к пределу в бесконечности

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e\,;$$

данный вид второго замечательного предела удобен и широко применяется в теории.

Предел функции в бесконечности может не существовать. В качестве примера можно рассмотреть функцию $\sin x$. Как известно, для точек вида $\pi/2+2\pi n$, где n – любое целое число, синус принимает значение 1, а для точек вида $-\pi/2+2\pi n$ принимает значение –1. Оба множества точек имеют своих «представителей» как угодно далеко от начала координат. Следовательно, как бы «далеко в бесконечность» ни стремился аргумент, функция синус принимает по меньшей мере два различных фиксированных значения 1 и –1 и, тем самым, не может в бесконечности неограниченно приближаться ни к какому числу, т. е. предела не имеет. Аналогичное заключение справедливо и для функции косинус.

Предел функции в бесконечности может быть бесконечным (в частности, бесконечным определенного знака). Например, справедливы следующие равенства:

$$\lim_{x\to\infty}x^2=+\infty\,,\quad \lim_{x\to\infty}x^3=\infty\,,\quad \lim_{x\to\infty}(-x^4)=-\infty$$

(во втором пределе кубическая функция может принимать сколь угодно большие по модулю значения произвольного знака).

Понятие предела в бесконечности допускает, что аргумент функции может принимать значения любого знака – как положительные, так и отрицательные. Если же ограничиться рассмотрением значений аргумента одного знака, то это естественным образом приведет к понятию предела функции в бесконечности определенного знака. Данные понятия вводятся вполне аналогично уже рассмотренному понятию предела в бесконечности. Рассмотрим сначала предел в положительной бесконечности (часто кратко говорится «в плюс бесконечности»).

Пусть функция $f(x)$ определена для всех достаточно больших значений аргумента x, т. е. при $x > M$, где M – некоторое число.

Функция $f(x)$ имеет в плюс бесконечности предел, равный числу b, если при неограниченном увеличении значений аргумента x соответствующие значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к числу b.

Тот факт, что число b является пределом функции $f(x)$ в плюс бесконечности, обозначается записью

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b;$$

иначе пишется, что $f(x) \to b$ при $x \to +\infty$. Иногда используется запись $f(+\infty) = b$.

Аналогичным образом вводится понятие предела функции в минус бесконечности. Для этого требуется, чтобы функция $f(x)$ была определена для всех отрицательных достаточно больших по модулю значений аргумента x, т. е. при $x < M$, где M – некоторое число.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно сформулировать понятие предела функции в минус бесконечности.

Конечно, каждый из рассмотренных пределов может не существовать или быть бесконечным.

Пример 3. Для основных элементарных функций в соответствии с известными их свойствами имеет место ряд пределов в бесконечности, приведенных в приложении 2.

Замечание. Пределы функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ в бесконечности (как определенного знака, так и произвольного) не могут быть определены в классическом смысле, поскольку как угодно далеко от начала координат имеются точки, не принадлежащие областям определения этих функций (для функции $\operatorname{tg} x$ это точки вида $\pi/2+\pi n$, для функции $\operatorname{ctg} x$ – точки вида πn, где n – любое целое число).

§ 3.5. Классификация пределов функции

Видимое разнообразие пределов побуждает ввести определенную их классификацию. Ее можно провести по двум признакам:

– по поведению аргумента;

– по поведению функции.

Рассмотрим оба направления классификации.

1. Классификацию пределов по поведению аргумента функции представим в виде следующей таблицы. В графе «Условие» таблицы приведены неравенства, которым должны удовлетворять значения аргумента x в строгих определениях пределов (см. приложение 1).

Стремление аргумента		**Обозначение**	**Условие**	**Пояснение**
К точке a	произвольно	$x \to a$	$0<\lvert x-a\rvert<\delta$	$\delta>0$ – «малое» число
	справа	$x \to a+0$	$0<x-a<\delta$	
	слева	$x \to a-0$	$-\delta<x-a<0$	
К бесконечности	произвольно	$x \to \infty$	$\lvert x\rvert>A$	$A>0$ – «большое» число
	к $+\infty$	$x \to +\infty$	$x>A$	
	к $-\infty$	$x \to -\infty$	$x<-A$	

2. Классификацию пределов по поведению функции представим в виде следующей графической схемы (рисунок 3.1). В данной схеме записью «$\lim\limits_{x\to *}$» обозначен предел функции $f(x)$ при каком-либо из видов стремления аргумента, разобранных в предыдущей таблице.

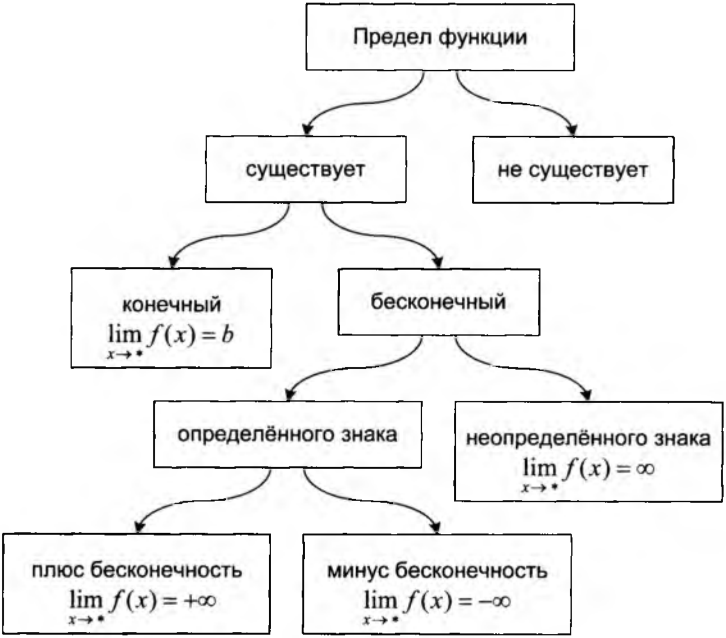

Рисунок 3.1

Важно еще раз подчеркнуть, что для любого из видов стремления аргумента остаются в силе все изученные выше в параграфе 1.5 свойства и теоремы о пределах.

§ 3.6. Примеры вычисления пределов функций в бесконечности

Вычисление пределов функций в бесконечности проводится по тем же правилам, что и обычных пределов в точке. При этом часто применяются пределы элементарных функций в бесконечности, приведенные в приложении 2.

1). Вычислим предел:

$$\lim_{x\to\infty}(2x^3-5x^2+3x-7)=\lim_{x\to\infty}\left(x^3(2-5x^{-1}+3x^{-2}-7x^{-3})\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\lim_{x\to\infty}(2-5x^{-1}+3x^{-2}-7x^{-3})=\lim_{x\to\infty}x^3\times$$

$$\times(2-5\lim_{x\to\infty}x^{-1}+3\lim_{x\to\infty}x^{-2}-7\lim_{x\to\infty}x^{-3})=2\lim_{x\to\infty}x^3=\infty\,.$$

Обобщая данный пример, придем к выводу, что для любого многочлена $P(x)$ вида (1.10) степени $n\geq 1$ справедливо соотношение

$$\lim_{x\to\infty}P(x)=\infty\,.$$

Более того, если степень n многочлена $P(x)$ четная, то его предел имеет определенный знак, совпадающий со знаком старшего коэффициента $p_n\neq 0$ (см. (1.10)):

$$\lim_{x\to\infty}P(x)=\begin{cases}+\infty, & p_n>0\\ -\infty, & p_n<0\end{cases}.$$

2). Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5x-1}{x^2-4x+3}\,.$$

В соответствии с предыдущим примером дробно-рациональная функция под знаком предела представляет собой неопределенность вида ∞/∞, однако она легко раскрывается путем деления на аргумент в максимальной степени знаменателя (здесь на x^2):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5x-1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+5x^{-1}-x^{-2}}{1-4x^{-1}+3x^{-2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(-3+5x^{-1}-x^{-2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-4x^{-1}+3x^{-2})}=\frac{-3+5\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}-\lim\limits_{x\to\infty}x^{-2}}{1-4\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}+3\lim\limits_{x\to\infty}x^{-2}}=-3\,.$$

3). Вычислим предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-17}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^{-1}-17x^{-2}}{1-4x^{-1}+3x^{-2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(5x^{-1}-17x^{-2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-4x^{-1}+3x^{-2})}=\frac{5\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}-17\lim\limits_{x\to\infty}x^{-2}}{1-4\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}+3\lim\limits_{x\to\infty}x^{-2}}=\frac{0}{1}=0.$$

4). Вычислим следующий предел, деля числитель и знаменатель дроби на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+3x-7}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-5+3x^{-1}-7x^{-2}}{1-4x^{-1}+3x^{-2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2x-5+3x^{-1}-7x^{-2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-4x^{-1}+3x^{-2})}=\lim_{x\to\infty}(2x-5+3x^{-1}-7x^{-2})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(2x-5)+\lim_{x\to\infty}(3x^{-1}-7x^{-2})=\lim_{x\to\infty}(2x-5)=\infty;$$

здесь учтено, что предел в знаменателе последней дроби равен 1.

Обобщая последние три примера, получим, что для любой дробно-рациональной функции вида (1.12) справедливо соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & n<m\\ \dfrac{p_n}{q_m}, & n=m,\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены вида (1.10) и (1.13) степеней n и m.

5). Вычислим следующий предел посредством элементарных тождественных преобразований с учетом непрерывности степенных функций:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+10)^{30}}{(x^{30}+5)^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+10)^{30}}{x^{60}}\cdot\frac{x^{60}}{(x^{30}+5)^2}\right)=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+10)^{30}}{(x^2)^{30}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(x^{30})^2}{(x^{30}+5)^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+10}{x^2}\right)^{30} \times$$

$$\times \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^{30}+5}{x^{30}}\right)^{-2} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{10}{x^2}\right)^{30} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x^{30}}\right)^{-2} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{10}{x^2}\right)\right)^{30} \cdot \left(\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x^{30}}\right)\right)^{-2} = 1^{30} \cdot 1^{-2} = 1 .$$

6). Предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$$

равен 0 как предел произведения бесконечно малой при $x \to \infty$ функции $1/x$ и ограниченной функции $\sin x$.

7). Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) .$$

Функция под знаком предела определена при всех неотрицательных значениях аргумента, так что вопрос о существовании предела правомерен. Ясно, в данном случае имеет место неопределенность вида $\infty - \infty$ (точнее, $(+\infty) - (+\infty)$), так что теорема о пределе разности непосредственно неприменима. Преобразуем тождественно функцию под знаком предела. Умножая и деля ее на выражение $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$, сопряженное к разности корней, получаем:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} ;$$

следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0 .$$

Последний предел равен 0 по той причине, что знаменатель дроби является бесконечно большой величиной:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})=+\infty\,.$$

8). Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})\,.$$

Предел каждого из синусов, входящих в данное выражение, по отдельности не существует, так что теорема о пределе разности неприменима.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в этом, проводя рассуждения, аналогичные проведенным в параграфе 3.1.

Воспользуемся одной из основных тригонометрических формул

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,;$$

в соответствии с ней преобразуем первый синус:

$$\sin\sqrt{x+1}=\sin((\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+\sqrt{x})=$$

$$=\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cos\sqrt{x}+\cos(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\sin\sqrt{x}\,.$$

Следовательно, функция под знаком предела принимает вид

$$\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cos\sqrt{x}+(\cos(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-1)\sin\sqrt{x}\,,$$

и искомый предел равен

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cos\sqrt{x})+$$

$$+\lim_{x\to+\infty}(\cos(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-1)\sin\sqrt{x}\,. \tag{3.1}$$

Поскольку $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\to 0$ при $x\to+\infty$ (см. предыдущий предел 7), то с помощью замены $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{y\to 0}\sin y=0\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-1)=\lim_{y\to 0}\cos y-1=\cos 0-1=0\,.$$

Следовательно, в выражении (3.1) оба предела равны 0 как пределы произведений бесконечно малых функций на ограниченные. Таким образом, и искомый предел также существует и равен 0. Тем самым, получен еще один содержательный пример, когда пределы слагаемых не существуют, а предел суммы – существует.

9). Вычислим пределы в $+\infty$, $-\infty$ и ∞ функции

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Функция определена при всех $|x|>1$, так что вопрос о существовании пределов правомерен. Прежде всего, вычислим предел в $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1-x^{-2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-1}}{\sqrt{1-x^{-2}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^{-1})}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-x^{-2}}}=1.$$

Вычислим предел в $-\infty$; для этого учтем, что при отрицательных значениях аргумента выполняется равенство

$$\sqrt{x^2-1}=|x|\sqrt{1-1/x^2}=-x\sqrt{1-1/x^2}.$$

В результате получаем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{1-1/x^2}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\sqrt{1-1/x^2}}=-1.$$

Поскольку пределы в $+\infty$ и $-\infty$ различны, то предел данной функции в ∞ не существует.

10). Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+5x-9}-\sqrt{3x^2-7x+1}).$$

Функция под знаком предела определена для всех достаточно больших по модулю значений аргумента, поскольку под корнями стоят квадратичные выражения с положительными коэффициентами при старшей степени. Иначе говоря, в силу справедливости пределов

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2+5x-9)=\lim_{x\to\infty}(x^2(3+5x^{-1}-9x^{-2}))=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\lim_{x\to\infty}(3+5x^{-1}-9x^{-2})=3\lim_{x\to\infty}x^2=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2-7x+1)=\ldots=+\infty$$

(результат аналогичен пределу 1 настоящего параграфа и уточняет его в отношении знака бесконечности) подкоренные выражения положительны для всех достаточно больших значений $|x|$. Конечно, несложно было бы и точно найти область определения данной функции, решив систему

$$\begin{cases}3x^2+5x-9\ge 0\\ 3x^2-7x+1\ge 0\end{cases},$$

но в этом нет необходимости – для уяснения правомерности вопроса о существовании предела проведенных рассуждений вполне достаточно. Приступим к вычислению предела, применяя деление на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+5x-9}-\sqrt{3x^2-7x+1})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+5x-9)-(3x^2-7x+1)}{\sqrt{3x^2+5x-9}+\sqrt{3x^2-7x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-10}{|x|(\sqrt{3+5/x-9/x^2}+\sqrt{3-7/x+1/x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-10}{|x|}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3+5/x-9/x^2}+\sqrt{3-7/x+1/x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{12x}{|x|}-\frac{10}{|x|}\right)\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{|x|}-\lim_{x\to\infty}\frac{10}{|x|}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(12\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}-0\right)=2\sqrt{3}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}.$$

Последний предел в полученной цепочке равенств не существует, поскольку следующие два предела в $+\infty$ и в $-\infty$ различны:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1;$$

следовательно, исходный предел также не существует. Отметим, что при этом существуют пределы в бесконечности определенного знака:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{3x^2+5x-9}-\sqrt{3x^2-7x+1})=\pm 2\sqrt{3}\,.$$

11). Вычислим следующий предел, деля числитель и знаменатель дроби на x^2, проводя надлежащие тождественные преобразования и применяя теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x+4}-3x^2}{\sqrt{2x^4+5x+7x-6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\dfrac{\sqrt{x+4}}{x}-3}{\sqrt{2+5x^{-3}}+7x^{-1}-6x^{-2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\sqrt{x+4}}{x}-3\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+5x^{-3}}+7x^{-1}-6x^{-2}\right)}=\frac{2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+4}}{x}-3}{\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}};$$

здесь учтено, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x}}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

12). Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}.$$

Обсудим корректность вопроса о существовании данного предела. Область определения функции, стоящей под знаком предела, выражается соотношением $x+\cos x\neq 0$. Решить данное неравенство в явном виде затруднительно. Однако нетрудно убедиться, что искомая область определения заведомо включает множество $|x|>1$. Действительно, любое число x, не входящее в область определения данной функции, обращает в 0 знаменатель дроби:

$$x+\cos x=0.$$

Для таких чисел

$$x=-\cos x.$$

откуда следует:

$$|x|=|\cos x|\leq 1.$$

Тем самым, все числа, не входящие в область определения данной функции, сосредоточены на отрезке $[-1;+1]$. Следовательно, функция заведомо определена вне этого отрезка, т. е. при $|x|>1$, и вопрос о существовании предела поставлен правомерно.

Сами вычисления не вызывают трудностей:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+(\sin x)/x}{1+(\cos x)/x}=\frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x)/x}{1+\lim\limits_{x\to\infty}(\cos x)/x}=1,$$

поскольку пределы в числителе и знаменателе последней дроби равны 0 (см. предел 6 данного параграфа).

13). Вычислим предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x(1+e^{-x}))}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x+\ln(1+e^{-x})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln(1+e^{-x})}{x}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln(1+e^{-x})}{x}\right) = 1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{-x})}{x} =$$

$$= 1+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}\cdot\frac{1}{e^{x}x}\right) = 1+\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}x} =$$

$$= 1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}x} = 1.$$

При вычислении использована замена $y = e^{-x} \to 0$ при $x \to +\infty$. Самый последний предел равен 0, поскольку в знаменателе дроби стоит произведение двух бесконечно больших при $x \to +\infty$ функций, также являющееся бесконечно большой величиной.

14). Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-7}\right)^{4x+1}.$$

Выражение под знаком предела представляет собой неопределенность вида 1^{∞}, которая может быть раскрыта выделением в основании 1 и малой добавки и соответствующим преобразованием показателя:

$$\frac{3x-5}{3x-7} = 1+\frac{2}{3x-7},$$

$$4x+1 = (4x+1)\cdot\frac{2}{3x-7}\cdot\frac{3x-7}{2} = \frac{3x-7}{2}\cdot\frac{8x+2}{3x-7}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{3x-5}{3x-7}\right)^{4x+1} = \left(\left(1+\frac{2}{3x-7}\right)^{\frac{3x-7}{2}}\right)^{\frac{8x+2}{3x-7}}.$$

С учетом предельных свойств степенно-показательных выражений получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-7}\right)^{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3x-7}\right)^{\frac{3x-7}{2}}\right)^{\frac{8x+2}{3x-7}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x-7}\right)^{\frac{3x-7}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x+2}{3x-7}}=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{8}{3}}=e^{\frac{8}{3}}.$$

Здесь использована очевидная замена $y=\dfrac{2}{3x-7}$, для которой $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$.

15). Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-5}{x^2-4x+6}\right)^{2x+7}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-5}{x^2-4x+6}=1,\quad \lim_{x\to\infty}(2x+7)=\infty,$$

то выражение под знаком предела представляет собой неопределенность вида 1^∞. Приведем его ко второму замечательному пределу. Сначала преобразуем числитель так, чтобы из дроби выделить 1:

$$x^2+3x-5=(x^2-4x+6)+7x-11;$$

следовательно,

$$\frac{x^2+3x-5}{x^2-4x+6}=1+\frac{7x-11}{x^2-4x+6}.$$

Отметим, что второе слагаемое представляет собой при $x\to\infty$ бесконечно малую величину («малую добавку»), которую удобно обозначить через y:

$$y=\frac{7x-11}{x^2-4x+6},\quad \lim_{x\to\infty} y=0.$$

Преобразуем показатель степени, выделяя в нём сомножитель, равный этой малой добавке:

$$2x+7=\frac{x^2-4x+6}{7x-11}\cdot\frac{(2x+7)(7x-11)}{x^2-4x+6}.$$

При этом исходный предел преобразуется к следующему виду и может быть окончательно вычислен с учетом предельных свойств степенно-показательных выражений:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-5}{x^2-4x+6}\right)^{2x+7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{7x-11}{x^2-4x+6}\right)^{\frac{x^2-4x+6}{7x-11}}\right)^{\frac{(2x+7)(7x-11)}{x^2-4x+6}}=$$

$$=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+7)(7x-11)}{x^2-4x+6}}=e^{14}.$$

§ 3.7. Примеры вычисления односторонних пределов

Разберем ряд примеров вычисления односторонних пределов функций; при этом часто находят применение пределы в бесконечности основных элементарных функций, приведенные в приложении 2.

1). Вычислим односторонние пределы в точке 0 функции $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, определенной при всех $x\neq 0$. Вводя замену $y=\frac{1}{x}$ и учитывая, что $y\to+\infty$ при $x\to 0+0$ и $y\to-\infty$ при $x\to 0-0$, получаем:

$$\lim_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{y\to+\infty}\operatorname{arctg}y=\pi/2,$$

$$\lim_{x\to 0-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{y\to-\infty}\operatorname{arctg}y=-\pi/2.$$

Отметим, что когда вычисление предела не связано с громоздкими тождественными преобразованиями, а функция под знаком предела представляет результат последовательного применения к аргументу основных элементарных функций (как и в настоящем примере), то вычисление такого предела можно выразить следующей *логической цепочкой*:

$$x \to 0+0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \to \pi/2,$$

$$x \to 0-0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \to -\pi/2.$$

2). Вычислим односторонние пределы в точке 0 функции

$$2^{-\frac{1}{x}},$$

определенной при всех $x \neq 0$. Вводя замену $y = -1/x$ и учитывая, что $y \to -\infty$ при $x \to 0+0$ и $y \to +\infty$ при $x \to 0-0$, получаем:

$$\lim_{x\to 0+0} 2^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} 2^y = 0, \quad \lim_{x\to 0-0} 2^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} 2^y = +\infty. \quad (3.2)$$

Графики двух рассмотренных функций показаны на рисунке 3.2. Каждый из графиков содержит две непрерывные ветви – для положительных и отрицательных значений аргумента.

3). Вычислим односторонние пределы в точке 5 функции

$$\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-5}}}.$$

Данная функция определена при всех $x \neq 5$. Прежде всего, вычислим предел справа *знаменателя*, вводя последовательно замены $y = x-5$, $z = 1/y$ и учитывая характер стремления новых переменных:

$$\lim_{x\to 5+0}\left(1+3^{\frac{1}{x-5}}\right) = 1 + \lim_{y\to 0+0} 3^{\frac{1}{y}} = 1 + \lim_{z\to +\infty} 3^z = +\infty.$$

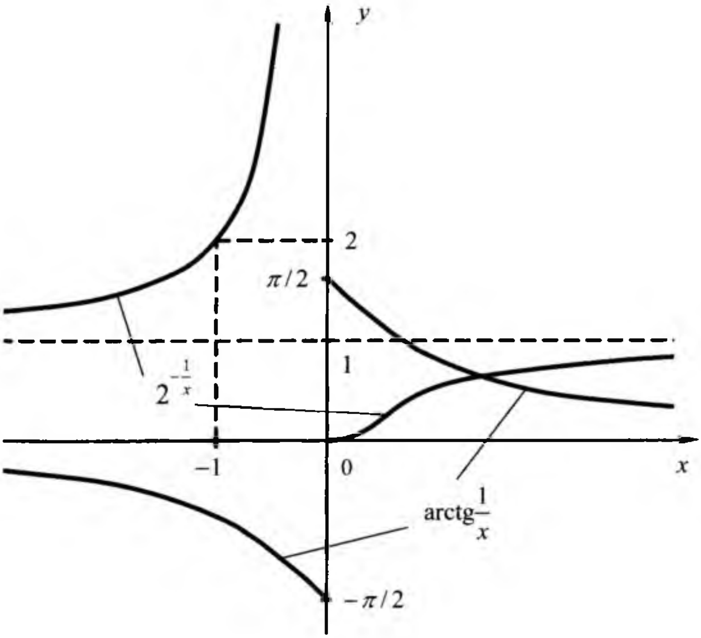

Рисунок 3.2

Поскольку знаменатель дроби является бесконечно большой величиной, а числитель постоянен и равен 1, то сама дробь будет величиной бесконечно малой:

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-5}}}=0\,.$$

Вычислим предел слева, используя те же замены:

$$\lim_{x\to 5-0}\left(1+3^{\frac{1}{x-5}}\right)=1+\lim_{y\to 0-0}3^{\frac{1}{y}}=1+\lim_{z\to -\infty}3^{z}=1\,,$$

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-5}}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 5-0}\left(1+3^{\frac{1}{x-5}}\right)}=1.$$

Представим вычисление заданных пределов посредством логических цепочек:

$$x\to 5+0 \;\Rightarrow\; x-5\to 0+0 \;\Rightarrow\; 1/(x-5)\to +\infty \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3^{\frac{1}{x-5}}\to +\infty \;\Rightarrow\; 1+3^{\frac{1}{x-5}}\to +\infty \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-5}}}\to 0;$$

$$x\to 5-0 \;\Rightarrow\; x-5\to 0-0 \;\Rightarrow\; 1/(x-5)\to -\infty \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3^{\frac{1}{x-5}}\to 0 \;\Rightarrow\; 1+3^{\frac{1}{x-5}}\to 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-5}}}\to 1.$$

4). Вычислим односторонние пределы в точке 0 функции

$$(1-4x)^{\frac{7}{x^2}}$$

(сравните с примером 1 из параграфа 2.6). Область определения данной функции включает все значения аргумента, для которых $x\neq 0$ и $1-4x\geq 0$, т. е. $x\in(-\infty,0)\cup(0,1/4]$. Следовательно, вопрос о существовании односторонних пределов в точке 0 правомерен. С учетом элементарного равенства

$$\frac{7}{x^2}=\frac{1}{-4x}\cdot\frac{-28}{x}$$

получаем для предела справа:

$$\lim_{x\to 0+0}(1-4x)^{\frac{7}{x^2}}=\lim_{x\to 0+0}\left((1-4x)^{\frac{1}{-4x}}\right)^{-\frac{28}{x}}.$$

Вычислим отдельно пределы основания и внешнего показателя:

$$\lim_{x\to 0+0}(1-4x)^{\frac{1}{-4x}} = e > 1, \quad \lim_{x\to 0+0}\frac{-28}{x} = -\infty .$$

С учетом предельных свойств степенно-показательных выражений (параграф 1.5) окончательно получаем:

$$\lim_{x\to 0+0}(1-4x)^{\frac{7}{x^2}} = 0 .$$

Аналогично, с учетом равенства

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{-28}{x} = +\infty$$

получаем:

$$\lim_{x\to 0-0}(1-4x)^{\frac{7}{x^2}} = \lim_{x\to 0-0}\left((1-4x)^{\frac{1}{-4x}}\right)^{-\frac{28}{x}} = +\infty .$$

Поскольку значения односторонних пределов различны, то обычный предел в точке 0 у данной функции не существует.

Контрольные вопросы

1. Какие условия должны выполняться для возможности определения одностороннего предела функции в точке?

2. Дайте понятие пределов функции в точке справа и слева. Приведите примеры.

3. Приведите пример функции, у которой не существует односторонних пределов в точке.

4. Какие условия гарантируют существование односторонних пределов функции в точке?

5. Как соотносятся существование предела функции в точке и существование односторонних пределов в точке?

6. Что такое скачок функции в точке?

7. Дайте понятие бесконечного предела функции в точке справа и слева. Приведите примеры.

8. Какие основные элементарные функции имеют в отдельных точках бесконечные односторонние пределы? Приведите примеры.

9. Какие условия должны выполняться для возможности определения предела функции в бесконечности?

10. Дайте понятие предела функции в бесконечности. Приведите примеры.

11. Дайте понятие бесконечного предела функции в бесконечности. Приведите примеры.

12. Какие основные элементарные функции имеют в бесконечности конечные или бесконечные пределы? Приведите примеры.

13. Проведите классификацию пределов функций.

14. В чём заключаются основные приемы, применяемые при вычислении односторонних пределов и пределов в бесконечности?

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Вычислите пределы в $+\infty$, $-\infty$ и ∞ следующих функций.

1). $\dfrac{3x^2-16x-12}{2x^2-7x-30}$. 2). $\dfrac{x^3+5x^2-7}{4x^3+x^2+10}$.

3). $\dfrac{10x^4-3x^2+5}{2x^4+x^3+x-10}$. 4). $\dfrac{7x^5+x^4-3x^2+5}{x^5-x^3+5x+21}$.

5). $\dfrac{3x^2-16x-12}{x^5-x^3+5x+21}$. 6). $\dfrac{x^3+5x^2-7}{2x^4+x^3+x-10}$.

7). $\dfrac{10x^4-3x^2+5}{2x^2-7x-30}$. 8). $\dfrac{7x^5+x^4-3x^2+5}{4x^3+x^2+10}$.

9). $x\sin\dfrac{1}{x}$. 10). $\sqrt[3]{x^3+1}\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

11). $\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$.
12). $\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-x-1}$.

13). $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$.
14). $\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{\sqrt{x^2-4}}$.

15). $\left(\frac{5x-6}{5x+2}\right)^{4x}$.
16). $\left(\frac{3x-4}{3x+4}\right)^{x/3}$.

17). $x(\sqrt{x^2+1}-x)$.
18). $x(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1})$.

19). $x(\ln(x+1)-\ln x)$.
20). $\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^{10}+1)}$.

3.2. Вычислите правый и левый односторонние пределы функции $f(x)$ в точке a; если значение a явно не указано, то предполагается, что $a=0$.

1). $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2}}$.
2). $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3}}$.

3). $f(x)=\frac{1}{x-5}$, $a=5$.
4). $f(x)=\frac{1}{(x-5)^2}$, $a=5$.

5). $f(x)=\frac{1}{x^2-5^2}$, $a=5$.
6). $f(x)=\frac{1}{x^2-5^2}$, $a=-5$.

7). $f(x)=\frac{1}{x^3-5^3}$, $a=5$.
8). $f(x)=\frac{1}{\ln x}$, $a=1$.

9). $f(x)=\log_x 10$, $a=1$.
10). $f(x)=10^{\log_x 10}$, $a=1$.

11). $f(x)=x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$.
12). $f(x)=\frac{\sin|x|}{x}$.

13). $f(x)=(1+|x|)^x$.
14). $f(x)=(\cos x)^{-\frac{1}{x^3}}$.

15). $f(x) = \arccos\left(x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$.

16). $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$.

17). $f(x) = x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+2} - \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$.

18). $f(x) = 0{,}1^{-\frac{1}{x+0{,}1}}$, $a = -0{,}1$.

19). $f(x) = \dfrac{1}{10+10^{\log_x 10}}$, $a = 1$.

20). $f(x) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}$, $a = -1$.

Глава 4
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРЕДЕЛАХ

В настоящей главе приводятся сведения, дополняющие материал по теории пределов, изложенный в предыдущих главах.

§ 4.1. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

Методы вычисления пределов, в том числе и раскрытия неопределенностей, были весьма детально изучены в предыдущих главах. Тем не менее, существуют неопределенности, раскрытие которых – если пользоваться только рассмотренными выше средствами – представляет значительные трудности. К таким неопределенностям относятся, в частности, пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \tag{4.1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}. \tag{4.2}$$

Данную проблему во многом решает весьма мощный и изящный инструмент, называемый ***правилом Лопиталя*** *. Поскольку это правило опирается на использование производных функций, то изучение материала данного параграфа предполагает знакомство читателя с основами дифференциального исчисления.

Формулируется правило Лопиталя следующим образом.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что:

1) они определены и имеют конечную производную всюду в некоторой проколотой окрестности точки a;

* Гильом де Лопиталь – французский математик второй половины XVII - начала XVIII вв.

2) отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность вида $0/0$ в точке a, т. е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0;$$

3) производная $g'(x)$ отлична от 0 всюду в указанной окрестности.

Тогда, если в данной точке существует предел отношения производных (конечный или бесконечный), то существует и предел отношения самих функций, причем эти пределы равны:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.3}$$

Отметим, что данное равенство – как и классические теоремы о пределах (параграф 1.5) – записано так, что из существования предела в правой части следует существование предела в левой.

Пример 1. Рассмотрим приведенные выше пределы (4.1) и (4.2). Оба они представляют собой неопределенности вида $0/0$, причем все условия применения правила Лопиталя выполняются. С помощью данного правила и с учетом пределов (2.6) и (2.2) указанные пределы могут быть вычислены, образно говоря, «в одну строчку» следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = -\frac{1}{6}.$$

Отметим, что вычисление данных пределов без применения правила Лопиталя является исключительно трудной задачей; некоторые из способов вычисления первого из данных пределов представлены в приложении 10.

Пример 2. Рассмотрим вычисленные ранее пределы (2.12), (2.14), (2.15). Все они представляют собой неопределенности вида $0/0$ и с помощью правила Лопиталя могут быть вычислены весьма просто:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{arctg}x)'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{1/(1+x^2)}{1}=1;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(a^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{a^x\ln a}{1}=\ln a;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{((1+x)^a-1)'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{a(1+x)^{a-1}}{1}=a.$$

Приведем примеры б е с к о н е ч н ы х пределов, представляющих собой неопределенности вида $0/0$; их вычисление не представляет сложностей:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$$

(применен первый замечательный предел),

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{(x-1)^2}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\lim_{y\to0}\frac{1}{y}=\infty$$

(применена замена $y=x-1$ и предел (2.5)).

Правило Лопиталя позволяет провести вычисления иным способом:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x^2)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x^2)\cdot2x}{3x^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\cos x^2}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\cos x^2\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty;$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{((x-1)^2)'}=\lim_{x\to1}\frac{1/x}{2(x-1)}=$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \infty .$$

К правилу Лопиталя необходимо сделать ряд замечаний.

Замечание 1. Для применения правила Лопиталя необходимо убедиться, что под знаком предела действительно имеется неопределенность; в противном случае правило неприменимо. В качестве примера рассмотрим простейший предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1} = 1,$$

который не представляет собой неопределенность, и отношение производных числителя и знаменателя дает в пределе другое значение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)'}{(x+1)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{1} = 0 \neq 1 .$$

Замечание 2. Правило Лопиталя можно применять многократно. Например, применительно к пределам (4.1) и (4.2) это дает:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}.$$

Естественно, эти вычисления приводят к тем же результатам, что были получены выше.

Замечание 3. Правило Лопиталя является мощным и удобным средством, но действует оно не всегда. Иными словами, имеются такие пары функций, для которых предел отношения существует, а предел отношения производных не существует. Например, следующий предел, формально представляющий собой неопределенность вида $0/0$, вычисляется элементарно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0;$$

последнее равенство справедливо, поскольку при $x\to 0$ функция x является бесконечно малой, а функция синус ограничена (см. параграф 1.5, замечание 5). Рассмотрим отношение производных этих функций:

$$\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{x'}=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

В правой части последнего равенства предел первого слагаемого вычислен только что и равен 0, а предел второго слагаемого не существует (по той же причине, что и предел, рассмотренный в примере 2 параграфа 1.3). Следовательно, предела правой части данного равенства в целом не существует; тем самым, и предела л е в о й части равенства, т. е. предела отношения производных, также не существует.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в том, что функция $\cos\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке 0.

§ 4.2. Раскрытие степенно-показательных неопределенностей

Правило Лопиталя допускает естественные обобщения в следующих случаях:

– при наличии неопределенности вида ∞/∞ вместо неопределенности $0/0$;

– при одностороннем стремлении аргумента к точке;

– при стремлении аргумента к бесконечности.

Конечно, при таких обобщениях видоизменяются и условия применения правила Лопиталя, относящиеся к областям определения и дифференцируемости функций.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно сформулировать правило Лопиталя для указанных случаев.

Указанные обобщения правила Лопиталя могут применяться для раскрытия степенно-показательных неопределенностей. В параграфе 2.3 было упомянуто, что неопределенности данного вида преобразуются логарифмированием к мультипликативной неопределенности вида $0 \cdot \infty$ с выполнением последующей обратной операции – потенцирования. Проиллюстрируем на примере данную методику.

Пример 1. Рассмотрим классический предел

$$\lim_{x \to 0+0} x^x , \tag{4.4}$$

представляющий собой неопределенность вида 0^0. Для ее раскрытия вычислим предварительно предел логарифма данной функции:

$$\ln(x^x) = x \ln x .$$

Выражение $x \ln x$ представляет в точке 0 неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Преобразуем ее к неопределенности вида ∞ / ∞, записав в виде

$$x \ln x = \frac{\ln x}{1/x} .$$

Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0+0} x \ln x = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \to 0+0} \frac{1/x}{-1/x^2} =$$

$$= - \lim_{x \to 0+0} x = 0 .$$

Вычислив предел от логарифма, проводим потенцирование:

$$x^x = \exp(\ln(x^x)) = \exp(x \ln x) .$$

С учетом непрерывности экспоненциальной функции $e^x = \exp(x)$ окончательно получаем:

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} \exp(x\ln x) = \exp(\lim_{x\to 0+0} x\ln x) = e^0 = 1.$$

Замечание. Здесь уместно отметить, что при ненадлежащем преобразовании неопределенности вида $0\cdot\infty$ к неопределенности $0/0$ или ∞/∞ попытка применения правила Лопиталя может не привести к желаемому результату. Например, выражение $x\ln x$, только что рассмотренное в предыдущем примере, можно преобразовать к неопределенности вида $0/0$, записав его в виде

$$x\ln x = \frac{x}{1/\ln x}.$$

При этом

$$(1/\ln x)' = \frac{-1/x}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2},$$

и применение правила Лопиталя дает:

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{1/\ln x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x'}{(1/\ln x)'} = -\lim_{x\to 0+0} x(\ln x)^2.$$

Очевидно, что вновь полученный предел является ничуть не более простым, чем исходный, и данный подход к конкретному результату не привел.

Таким образом, в отдельных случаях применение правила Лопиталя может привести не к упрощению задачи вычисления предела, а к ее усложнению. В этом нет противоречия, поскольку при указанных условиях правило Лопиталя гарантирует р а в е н с т в о пределов, но не указывает, какой из них вычисляется проще. В данном примере запись неопределенности в «неудачном» виде как раз и привела к усложнению вычисляемого предела.

Пример 2. Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}},$$

представляющий собой простейший пример неопределенности ∞^0, до сих пор не рассматривавшейся нами. Данный предел может быть вычислен элементарно путем замены переменной $y = 1/x \to 0+0$ с учетом только что рассмотренного предела (4.4):

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0+0}\left(\frac{1}{y}\right)^y = \lim_{y\to 0+0}\frac{1}{y^y} = 1. \tag{4.5}$$

Другой вариант вычисления предела – логарифмирование функции под знаком предела и применение правила Лопиталя.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно провести вычисление последнего предела указанным способом.

§ 4.3. Некоторые важные пределы

Вычислим следующие два предела, важные для различных приложений:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}, \tag{4.6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}; \tag{4.7}$$

в каждом пределе параметры принимают значения $a > 1$, $p > 0$. Данные пределы позволяют сопоставить скорости роста на бесконечности логарифмической, степенной и показательной функций.

1. Рассмотрим предел (4.6). Поскольку по свойствам основных элементарных функций

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^p = +\infty$$

(см. приложение 2), то имеет место неопределенность вида ∞/∞. Она может быть легко раскрыта по правилу Лопиталя, все условия применения которого выполняются:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_a x)'}{(x^p)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/(x\ln a)}{px^{p-1}} =$$

$$= \frac{1}{p \ln a} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} = 0;$$

последнее равенство справедливо силу того, что при $p > 0$ функция x^p является бесконечно большой при $x \to +\infty$. Вычисленный предел свидетельствует о том, что логарифмическая функция растет на бесконечности медленнее, чем степенная функция с любым положительным показателем. Иллюстрацией применения данного предела на практике может служить задача поиска информации по таблице базы данных, рассмотренная в параграфе 6.5.

Замечание 1. Заданный предел можно вычислить и без применения правила Лопиталя, но расчет этот является весьма сложной аналитической задачей.

2. Рассмотрим предел (4.7). Поскольку по свойствам основных элементарных функций

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x^p = +\infty,$$

то опять имеет место неопределенность вида ∞ / ∞. Она может быть раскрыта либо путем подходящей замены переменной и сведением к первому пределу, либо многократным применением правила Лопиталя, либо их комбинацией. Разберем некоторые варианты.

1). Выберем замену $a^x = y$, при которой $x = \log_a y$, $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Следовательно, справедлива цепочка равенств:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{(\log_a y)^p} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y^{1/p}}{\log_a y} \right)^p =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{\log_a y}{y^{1/p}} \right)^{-p} = \lim_{z \to 0+0} z^{-p} = +\infty; \qquad (4.8)$$

здесь применена вторая замена

$$z = \frac{\log_a y}{y^{1/p}}$$

и учтено, что в силу (4.6) при $y \to +\infty$ имеет место стремление $z \to 0$, а функция z^{-p} при $p > 0$ является бесконечно большой в точке 0.

2). Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^p)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{px^{p-1}} = \frac{\ln a}{p}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^{p-1}}.$$

В результате получаем предел, аналогичный исходному, со степенью на 1 меньше. Если изначально было $p \le 1$, то данный предел равен $+\infty$ как предел произведения бесконечно большой в $+\infty$ функции a^x и функции x^{1-p}, которая обладает следующими свойствами:

– при $p < 1$ является бесконечно большой в $+\infty$;

– при $p = 1$ тождественно равна 1.

Если же изначально было $p > 1$, то неопределенность ∞/∞ остается, и выполняются все условия для повторного применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^{p-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(a^x)'}{(x^{p-1})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{(p-1)x^{p-2}} =$$

$$= \frac{\ln a}{(p-1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^{p-2}}.$$

В результате снова получаем аналогичный предел со степенью на 2 меньше исходной. Если изначально было $1 < p \le 2$, то данный предел равен $+\infty$. Если же изначально было $p > 2$, то снова выполняются все условия для применения правила Лопиталя. Применяя данное правило нужное число раз, устанавливаем, что предел (4.7) равен $+\infty$.

3). Весьма эффективными могут быть приемы вычисления пределов, сочетающие применение правила Лопиталя и уже известных методик. Покажем это на рассматриваемом примере (4.7). Представим данное отношение в следующем виде:

$$\frac{a^x}{x^p} = \frac{a^{\frac{x}{p}\cdot p}}{x^p} = \left(\frac{a^{x/p}}{x}\right)^p = \left(\frac{(a^{1/p})^x}{x}\right)^p = \left(\frac{b^x}{x}\right)^p,$$

где введено обозначение $b = a^{1/p}$, причем $b > 1$ в силу условий $a > 1$ и $p > 0$. Следующий вспомогательный предел вычисляется элементарно однократным применением правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(b^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} b^x \ln b = \ln b \lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty .$$

Тем самым, и искомый предел вычисляется весьма просто с применением замены $y = \dfrac{b^x}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b^x}{x}\right)^p = \lim_{y\to+\infty} y^p = +\infty .$$

Вычисленный различными методами предел (4.7) свидетельствует о том, что показательная функция растет на бесконечности быстрее, чем степенная функция с любым положительным показателем. Иллюстрацией применения данного предела на практике может служить задача сопоставления скорости роста простых и сложных процентов, рассмотренная в параграфе 6.2.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно вычислить значения указанных пределов при других значениях параметров a, p; для этого надлежит использовать свойства основных элементарных функций и уже рассмотренные пределы.

§ 4.4. Асимптоты графика функции

Асимптота графика функции – прямая, к которой неограниченно приближается график функции. Знание асимптот полезно, поскольку упрощает построение графика функции и зрительный анализ ее поведения. Определение и правила нахождения асимптот тесно связаны с пределами функций в точке и в бесконечности.

Различаются вертикальные и наклонные асимптоты; основанием для различия является сам вид асимптоты. Соответственно различаются условие существования асимптоты и форма записи уравнения прямой на координатной плоскости. Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная асимптота.

Изложение начнем с вертикальных асимптот. Напомним, что на координатной плоскости (x, y) уравнение вертикальной прямой (т. е. параллельной оси ординат Oy) записывается в виде $x = a$. В это уравнение переменная y не входит явно, т. е. она может принимать любые значения; напротив, переменная x жестко фиксирована.

Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если в точке a хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a-0} f(x)$$

равен $+\infty$ или $-\infty$.

Ясно, что вертикальные асимптоты не могут существовать в точках непрерывности функций, поскольку в этих точках оба односторонних предела конечны и равны значению функции в данной точке. Учитывая свойство непрерывности элементарных функций, можно утверждать, что элементарные функции могут иметь вертикальные асимптоты только в точках, граничных для их областей определения.

Пример 1. Функция $f(x) = 1/x$ имеет в точке 0 вертикальную асимптоту, поскольку оба односторонних предела равны бесконечности с определенным знаком:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Иных вертикальных асимптот данная функция не имеет, поскольку является непрерывной при всех $x \neq 0$.

Пример 2. Функция $f(x) = \ln x$ также имеет в точке 0 вертикальную асимптоту, поскольку соответствующий правый односторонний предел равен минус бесконечности:

$$\lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty.$$

Иных вертикальных асимптот данная функция тоже не имеет: при $x < 0$ она вообще не определена, а при $x > 0$ является непрерывной.

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f(x) = 2^{-\frac{1}{x}}, \tag{4.9}$$

определенную на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$. Любая точка $x \neq 0$ является внутренней для области определения заданной элементарной функции; следовательно, в этих точках данная функция непрерывна. Таким образом, вертикальную асимптоту эта функция может иметь только в точке $x = 0$. Соответствующие односторонние пределы уже были вычислены ранее (см. (3.2)):

$$\lim_{x \to 0+0} 2^{-\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \to 0-0} 2^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

В силу бесконечности второго предела данная функция действительно имеет вертикальную асимптоту в точке 0. График данной функции показан на рисунке 3.2.

Изучим наклонные асимптоты. На координатной плоскости (x, y) прямая, не являющаяся вертикальной, может быть задана известным уравнением $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент наклона, b – начальная ордината; при $k = 0$ прямая является горизонтальной (параллельной оси абсцисс Ox). Будем предполагать, что функция $f(x)$ определена при всех достаточно больших значениях аргумента.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или, как говорят, в плюс бесконечности), если

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (kx + b)\big) = 0.$$

Иными словами, расстояние по вертикали между точками графика функции и его асимптоты стремится к 0 при неограниченном увеличении аргумента x.

Совершенно аналогичным является определение наклонной асимптоты при $x \to -\infty$.

Пример 4. График функции

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$$

имеет при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = x + 1$. Действительно, опираясь на определение асимптоты, получаем:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x} - (x+1) \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Легко проверить, что эта же прямая является асимптотой графика данной функции и при $x \to -\infty$.

Утверждение. График функции $f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx + b$ в том и только том случае, когда существуют два к о н е ч н ы х предела

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Совершенно аналогичное утверждение справедливо и для случая $x \to -\infty$.

Пример 5. Найдем наклонные асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$. Рассмотрим асимптоты в $+\infty$. Вычислим необходимые пределы:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{(x-2)x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x} = 1 = k,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2} - \frac{x(x-2)}{x-2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + 4}{x - 2} = -1 = b.$$

Поскольку оба требуемых предела существуют и конечны, то в $+\infty$ наклонная асимптота графика данной функции существует и задается уравнением $y = x - 1$. Эта же прямая является асимптотой графика данной функции и в $-\infty$.

Отметим, что для данной «не слишком сложной» функции существование асимптот можно установить и путем тождественных преобразований, направленных на выделение из данной функции линейной части. Прежде всего, преобразуем числитель к виду, подобному виду знаменателя, с помощью представления $x = (x-2)+2$:

$$x^2 - 3x + 4 = ((x-2)+2)^2 - 3((x-2)+2) + 4 =$$

$$= (x-2)^2 + (x-2) + 2,$$

так что

$$f(x) = \frac{(x-2)^2 + (x-2) + 2}{x-2} = x - 2 + 1 + \frac{2}{x-2} = x - 1 + \frac{2}{x-2}.$$

Первые два слагаемых в полученном выражении представляют линейное уравнение прямой, а третье слагаемое является бесконечно малым при бесконечно больших значениях аргумента:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x-2} = 0.$$

Следовательно, непосредственно по определению прямая $y = x - 1$ является наклонной асимптотой графика данной функции как в $+\infty$, так и в $-\infty$; этот результат, конечно, совпадает с полученным ранее.

Для полноты исследования отметим, что данная функция имеет вертикальную асимптоту в точке 2; предлагаем читателям установить этот факт самостоятельно.

Замечание 1. Существование горизонтальной асимптоты графика функции $f(x)$ в $+\infty$ равносильно существованию конечного предела

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b;$$

аналогичный факт справедлив и для асимптоты в $-\infty$.

Пример 6. График функции (4.9) имеет в $+\infty$ и в $-\infty$ горизонтальную асимптоту $y=1$, поскольку с учетом замены $z=\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} 2^{-\frac{1}{x}} = \lim_{z\to 0} 2^{-z} = 1 .$$

Замечание 2. Наклонные асимптоты в $+\infty$ и $-\infty$ могут существовать независимо друг от друга. Например, график основной элементарной функции $f(x)=2^x$ имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ в $-\infty$ и не имеет наклонной асимптоты в $+\infty$. Далее, график основной элементарной функции $f(x)=\operatorname{arctg} x$ имеет асимптоту $y=\pi/2$ в $+\infty$ и асимптоту $y=-\pi/2$ в $-\infty$.

Замечание 3. Наклонная асимптота может пересекать график функции, даже бесконечное число раз. Например, график функции

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

имеет в $+\infty$ асимптоту $y=0$, пересекая ее в точках π, 2π, 3π, ...

§ 4.5. Непрерывность функции на отрезке

В параграфе 1.6 были введены понятия непрерывности функции в точке и на интервале. Рассмотренные в главе 3 односторонние пределы приводят к дальнейшему важному развитию данных понятий.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой правой полуокрестности точки a.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной справа*** в точке a, если она имеет в этой точке предел справа, равный значению функции в данной точке:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) .$$

Аналогично дается понятие непрерывности функции в точке слева.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно сформулировать соответствующее определение.

Ясно, что обычная непрерывность функции в точке равносильна непрерывности функции в точке справа и слева одновременно. Этот факт кратко можно записать в следующем виде:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a) \\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a) \end{cases}.$$

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[c; d]$, если она определена на этом отрезке, непрерывна во всех внутренних точках отрезка (иначе говоря, на интервале $(c; d)$), непрерывна справа в точке c и непрерывна слева в точке d.

Сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных на отрезке функций также являются функциями, непрерывными на данном отрезке (конечно, если знаменатель не обращается в 0 на этом отрезке).

Непрерывные на отрезке функции обладают рядом важных свойств. Именно, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[c; d]$, то:

– она ограничена на данном отрезке;

– на данном отрезке существуют точки, в которых функция принимает свои максимальное и минимальное значения;

– функция принимает все промежуточные значения (точнее, для любого числа b, лежащего между минимальным и максимальным значениями функции, найдется такая точка a отрезка, что $f(a) = b$).

Пример 1. Рассмотрим функцию, определенную на отрезке $[0; 1]$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}.$$

Данная функция непрерывна во всех внутренних точках отрезка (как основная элементарная), непрерывна в точке $x = 1$ слева и только в единственной точке $x = 0$ теряет свойство непрерывности справа, поскольку

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty \neq 0 = f(0).$$

При этом данная функция не обладает ни одним из трех перечисленных свойств:

– функция не ограничена на отрезке $[0;1]$ сверху (график функции на интервале $(0;1)$ является фрагментом гиперболы, которая неограниченна на данном интервале);

– поскольку функция не ограничена сверху, то не существует и ее максимального значения; при этом бессмысленно говорить о точке, в которой это значение может приниматься;

– функция ни в одной точке не принимает значения 1/2, лежащего между $f(0)=0$ и $f(1)=1$.

Пример 2. Рассмотрим функцию, определенную на отрезке $[0;1]$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x=0 \\ x, & 0<x\le 1 \end{cases}.$$

Данная функция, очевидно, непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна в точке $x=1$ слева и теряет свойство непрерывности только в точке $x=0$ справа, поскольку

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x = 0 \neq 2 = f(0).$$

При этом данная функция является ограниченной на отрезке $[0;1]$, но не обладает остальными свойствами:

– поскольку на интервале $(0;1)$ выполняется равенство $f(x)=x$, то функция принимает сколь угодно малые положительные значения. Следовательно, ее м и н и м а л ь н о е значение – если только оно существует – может быть либо равным 0, либо отрицательным. Но данная функция всюду на отрезке $[0;1]$ положительна. Следовательно, у данной функции не существует минимального значения вообще и, соответственно, точки, в которой это значение принимается;

– функция ни в одной точке не принимает значения 3/2, лежащего между $f(0)=2$ и $f(1)=1$.

Замечание. Практически важная задача поиска максимума или минимума непрерывной на отрезке функции решается обычно средствами дифференциального исчисления и в настоящем учебном пособии не рассматривается.

§ 4.6. Точки разрыва функции и их классификация

Как уже сказано выше (см. заключение параграфа 1.6), точками разрыва функции называются точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности. Точнее, пусть функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Точка a называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$, если в точке a функция либо не определена, либо определена, но не является непрерывной; в этом последнем случае должно выполняться одно из следующих трех взаимно исключающих условий:

– предел функции в точке a не существует;

– предел функции в точке a существует и бесконечен;

– предел функции в точке a существует, конечен, но не равен значению $f(a)$.

В принятой классификации выделяются следующие непересекающиеся классы точек разрыва функций:

1) точки устранимого разрыва;

2) точки разрыва 1-го рода;

3) точки разрыва 2-го рода.

Рассмотрим детально указанные пункты классификации.

1. Точка a называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$, если существует конечный предел функции в данной точке, причем функция $f(x)$ или не определена в точке a, или ее значение в точке a не равно этому пределу.

Название данного вида точек разрыва объясняется тем, что при наличии устранимого разрыва функцию $f(x)$ можно определить или переопределить в единственной точке a так, что «исправленная» функция станет непрерывной в точке a.

Пример 1. Рассмотрим следующий ряд функций.

1). Функция

$$|\operatorname{sgn}(x)| = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

определена и равна 0 в точке 0, но ее предел в данной точке равен 1:

$$\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1;$$

следовательно, точка 0 является точкой устранимого разрыва для данной функции. Действительно, если данную функцию переопределить в точке 0 так, чтобы она при $x = 0$ обращалась в 1, то такая «переопределенная» функция станет непрерывной.

2). Функция

$$f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}-1}$$

не определена в точке 1, поскольку при $x = 1$ обращается в 0 знаменатель дроби. Вычислим соответствующий предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x-1}(\sqrt{x}+1)\right) =$$

$$= -\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = -2.$$

Поскольку предел существует и конечен, то точка 1 является точкой устранимого разрыва для данной функции.

3). Функции

$$\frac{\sin x}{x} \text{ и } (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

не определены в точке 0, но имеют в данной точке конечные пределы (именно, первый и второй замечательные пределы); следовательно, и для данных функций точка 0 является точкой устранимого разрыва.

2. Точка a называется ***точкой разрыва 1-го рода*** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы: $f(a+0) \neq f(a-0)$.

При этом в самой точке a функция $f(x)$ может быть либо определена, либо нет.

Пример 2. Рассмотрим следующие функции.

1). Функция $\operatorname{sgn}(x)$ имеет в точке 0 правый и левый пределы, равные $+1$ и -1 (см. параграф 1.3); поскольку эти пределы конечны и не равны, то точка 0 является точкой разрыва 1-го рода данной функции.

2). Функция

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

имеет в точке 0 правый и левый пределы, равные $\pi/2$ и $-\pi/2$ (см. параграф 3.7); поскольку эти пределы конечны и не равны, то точка 0 является точкой разрыва 1-го рода данной функции.

3). Функция

$$\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-5}}}$$

не определена только в точке 5 и имеет в данной точке следующие односторонние пределы (см. параграф 3.7):

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-5}}}=0,\quad \lim_{x\to 5-0}\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-5}}}=1;$$

поскольку пределы конечны и не равны, то точка 5 является точкой разрыва 1-го рода данной функции.

3. Точка a называется ***точкой разрыва 2-го рода*** функции $f(x)$, если в этой точке по крайней мере один из односторонних пределов бесконечен или не существует.

Пример 3. Рассмотрим следующий ряд функций.

1). Функция $1/x$ в точке 0 имеет бесконечные односторонние пределы, так что точка 0 является точкой разрыва 2-го рода данной функции.

2). Функция $2^{-\frac{1}{x}}$ в точке 0 имеет правый и левый односторонние пределы, равные 0 и $+\infty$ (см. (3.2)); следовательно, для данной функции точка 0 является точкой разрыва 2-го рода.

3) Функция $\sin\frac{1}{x}$ в точке 0 не имеет односторонних пределов (см. параграф 3.1); следовательно, и для данной функции точка 0 является точкой разрыва 2-го рода.

§ 4.7. Эквивалентность, убывание и рост функций

Определение предела оставляет открытым вопрос о том, насколько быстро или медленно происходит стремление функции к пределу. Вводимый далее ряд понятий в некоторой степени отвечает на данный вопрос.

Всюду в данном параграфе предполагается, что рассматриваемые функции определены в некоторой п р о к о л о т о й окрестности точки a.

Две бесконечно малые в точке a функции называются ***эквивалентными***, если предел их отношения в данной точке равен 1.

Совершенно аналогичное определение может быть отнесено и к бесконечно большим функциям в точке.

Формально определение эквивалентных в точке a функций $f(x)$ и $g(x)$ записывается в виде предела

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

При этом не следует забывать о требовании к функциям быть бесконечно малыми или бесконечно большими. Например, функции $f(x)=1+x$ и $g(x)=1-x$ в точке $a=0$ не называются эквивалентными, хотя и предел их отношения равен 1; это объясняется тем, что в точке 0 эти функции не являются ни бесконечно малыми, ни бесконечно большими.

Эквивалентность функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a обозначается записью $f(x)\sim g(x)$, $x\to a$. Исходя из вычисленных выше пределов (2.2), (2.5), (2.6), (2.9), можно сказать, что в точке $x=0$ справедливы следующие соотношения:

$$\sin x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x,$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x.$$

Все представленные функции являются бесконечно малыми в точке 0. Приведем примеры бесконечно больших функций, эквивалентных в точке 0:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \sim \frac{2}{\ln(1+x)}, \quad \operatorname{ctg} x \sim \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{\arcsin x} \sim \frac{1}{x}.$$

Эквивалентность функций связана с другим менее жестким отношением между функциями.

Две бесконечно малые в точке a функции имеют одинаковый ***порядок малости***, если предел их отношения в точке a конечен и не равен 0.

Очевидно, что функции, эквивалентные в точке, имеют в этой точке одинаковый порядок малости или роста. Обратное может и не иметь места. Например, функции $\sqrt{1+x}-1$ и x в точке 0 не эквиваленты, но имеют одинаковый порядок малости. Аналогичное замечание можно сделать и для пары функций $1-\cos x$ и x^2.

Простейшими функциями, бесконечно малыми в точке a, являются степенные функции вида $(x-a)^n$, где n – целое положительное число. В сравнении с этими функциями вводятся следующие понятия.

Бесконечно малая в точке a функция $f(x)$ имеет порядок малости, равный n, если существует конечный и не равный 0 предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n}.$$

Пример 1. С учетом рассмотренных ранее пределов можно утверждать, что в точке 0 справедливы следующие свойства:

1) функции

$$x, \quad \sin x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \arcsin x, \quad \ln(1+x), \quad e^x - 1, \quad \sqrt{1+x} - 1$$

имеют первый порядок малости;

2) функции

$$x^2,\ 1-\cos x,\ e^x-1-x$$

имеют второй порядок малости (вывод относительно последней функции следует из (4.1));

3) функции

$$x^3,\ \sin x - x$$

имеют третий порядок малости (вывод относительно последней функции следует из (4.2)).

Аналогичные понятия вводятся и для бесконечно больших функций. Именно, две бесконечно большие в точке a функции имеют одинаковый ***порядок роста***, если предел их отношения в точке a конечен и не равен 0. Далее, бесконечно большая в точке a функция $f(x)$ имеет порядок роста, равный n, если существует к о н е ч н ы й и н е р а в н ы й 0 предел

$$\lim_{x\to a} f(x)(x-a)^n .$$

Например, функция x^{-3} имеет в точке 0 третий порядок роста.

Пример 2. Установим, что функция $\operatorname{tg} x$ имеет в точке $\pi/2$ первый порядок роста. Действительно, данная функция является бесконечно большой в точке $\pi/2$:

$$\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \sin x \cdot \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{\cos x} = \infty ,$$

поскольку $\sin(\pi/2)=1$, $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x = \cos(\pi/2)=0$. Следовательно, вопрос о порядке роста функции правомочен. Вычислим надлежащий предел, используя замену $y = x - \pi/2$, простейшие свойства синуса и косинуса и первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to\pi/2} \left(\operatorname{tg} x \cdot (x-\pi/2)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y+\pi/2)}{\cos(y+\pi/2)} \cdot y =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\cos y}{-\sin y} \cdot y = -\lim_{y\to 0} \cos y \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = -1 .$$

Полученный предел конечен и не равен 0; следовательно, данная функция действительно имеет в данной точке первый порядок роста.

Замечание 1. Понятия эквивалентности, порядка малости и порядка роста функции можно аналогично определить и при одностороннем стремлении аргумента к точке, и при стремлении аргумента к бесконечности.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно сформулировать данные понятия.

Замечание 2. При одностороннем стремлении аргумента к точке справа ($x \to a+0$) функции $(x-a)^n$ определены при любых нецелых значениях показателя n; в этом случае порядок малости и порядок роста функции могут принимать произвольные не обязательно целые значения. Например, функция $x^{3/2}$ имеет при $x \to 0+0$ порядок малости, равный 3/2.

Замечание 3. Следует понимать, что существуют бесконечно малые функции, которые в указанном смысле вообще не имеют определенного порядка малости. Например, рассмотрим функцию $x \ln x$, $x > 0$. Она является бесконечно малой в точке 0 справа, как показано в параграфе 4.2. Если $n > 0$ – искомый порядок малости данной функции, то предел

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{x \ln x}{x^n}$$

должен быть конечным и отличным от 0. Рассмотрим возможные варианты. При $n = 1$ имеем:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{x \ln x}{x^1} = \lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty .$$

Если $n < 1$, то, используя замену переменной $z = 1/x$ и предел (4.6), получаем:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{x \ln x}{x^n} = -\lim_{z \to +\infty} \frac{z^n \ln z}{z} = -\lim_{z \to +\infty} \frac{\ln z}{z^{1-n}} = 0.$$

Если же $n > 1$, то получаем произведение двух бесконечно больших функций:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x\ln x}{x^n} = \lim_{x\to 0+0} x^{1-n} \ln x = -\infty .$$

Таким образом, при любых значениях $n > 0$ данный предел равен 0 либо $-\infty$; соответственно функция $x\ln x$ не обладает каким-либо порядком малости в принятом нами смысле.

Пример 3. Вычислим порядок малости функции $(1+x)^x - 1$ в точке $x = 0$. Вопрос правомерен, поскольку заданная функция является бесконечно малой в данной точке:

$$\lim_{x\to 0}((1+x)^x - 1) = \lim_{x\to 0}(1+x)^x - 1 = 1^0 - 1 = 0 .$$

Выберем параметр $n > 0$, зафиксируем его значение и рассмотрим отношение

$$\frac{(1+x)^x - 1}{x^n},$$

представляющее собой неопределенность вида $0/0$. Поскольку параметр n, вообще говоря, может быть и дробным, то ограничимся только положительными значениями аргумента. Раскроем данную неопределенность по правилу Лопиталя. Для этого, используя тождество

$$(1+x)^x = \exp(\ln((1+x)^x)) = \exp(x\ln(1+x)) ,$$

вычислим производную числителя:

$$((1+x)^x - 1)' = \left(\exp(x\ln(1+x))\right)' =$$

$$= \exp(x\ln(1+x))(x\ln(1+x))' =$$

$$= \exp(x\ln(1+x))\left(\ln(1+x) + x\frac{1}{1+x}\right) =$$

$$= (1+x)^x\left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right).$$

Вычисляем требуемый предел:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{(1+x)^x-1}{x^n}=\lim_{x\to 0+0}\frac{((1+x)^x-1)'}{(x^n)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{(1+x)^x}{nx^{n-1}}\left(\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0+0}(1+x)^x\cdot\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^{n-2}}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{1}{1+x}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^{n-2}}\cdot\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{1}{1+x}\right)=\frac{2}{n}\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^{n-2}};$$

последнее равенство получено с учетом (2.5). Следовательно, для существования к о н е ч н о г о отличного от 0 предела (как того требует определение порядка малости) предел функции $\dfrac{1}{x^{n-2}}$ в точке 0 справа также должен быть конечен и не равен 0. Это возможно только при $n=2$ (при $n<2$ предел равен 0, а при $n>2$ равен $+\infty$). Поскольку для ц е л о ч и с л е н н о г о значения параметра n нет необходимости ограничиваться односторонним стремлением аргумента к точке справа, то можно рассматривать обычный предел. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x^2}=1,$$

и порядок малости данной функции в точке 0 равен 2.

Контрольные вопросы

1. Какие условия должны выполняться для возможности применения правила Лопиталя?

2. Неопределенности какого вида могут быть раскрыты с помощью правила Лопиталя?

3. Можно ли применять правило Лопиталя, если вычисляемый предел не является неопределенностью?

4. Всегда ли неопределенность может быть раскрыта с помощью правила Лопиталя?

5. Какой предел позволяет сопоставить скорости роста на бесконечности логарифмической и степенной функций?

6. Какой предел позволяет сопоставить скорости роста на бесконечности показательной и степенной функций?

7. Что такое асимптота графика функции? Какие существуют типы асимптот?

8. Какое уравнение имеет вертикальная асимптота и в чём заключается условие ее существования?

9. В каких точках заведомо не может существовать вертикальная асимптота элементарной функции?

10. Какое уравнение имеет наклонная асимптота и в чём заключается условие ее существования?

11. Может ли непрерывная функция иметь различные асимптоты в плюс и минус бесконечности?

12. Может ли наклонная асимптота пересекать график функции?

13. Дайте определение непрерывности функции в точке справа и слева.

14. Как соотносятся непрерывность функции в точке и непрерывность функции в точке справа и слева?

15. Дайте определение непрерывности функции на отрезке. Приведите примеры.

16. Перечислите наиболее важные свойства непрерывных на отрезке функций.

17. Дайте классификацию точек разрыва функции.

18. Дайте определение точки устранимого разрыва функции и приведите примеры.

19. Дайте определение точки разрыва первого рода и приведите примеры.

20. Дайте определение точки разрыва второго рода и приведите примеры.

21. Дайте определение эквивалентности функций в точке. Приведите примеры.

22. Дайте определение порядка малости и порядка роста функции в точке. Приведите примеры.

23. Всегда ли бесконечно малая в точке функция имеет определенный порядок малости?

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Вычислите пределы посредством применения правила Лопиталя (если обычный предел не существует, рассмотрите односторонние пределы).

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$. 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg} x}{x^3}$.

3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$. 4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

5). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{\sin x-x}$. 6). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$.

7). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(\ln x)^2}$. 8). $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

9). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. 10). $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

11). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos^2 x}}$. 12). $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

4.2. Найдите все асимптоты графиков следующих функций.

1). $\dfrac{x-4}{x^2}$. 2). $\dfrac{x^2}{x-4}$.

3). $\dfrac{x^3}{x^2+1}$. 4). $\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

5). $\dfrac{5-3x}{2x+1}$. 6). $2^{\frac{1}{x}}$.

7). $\dfrac{x^3+4x^2-2x-3}{-x^2+2x-1}$. 8). $\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{-x^2+2x-1}$.

9). $3x+2-\dfrac{1}{x}$. 10). $3x+2-\dfrac{\sin x}{x}$.

4.3. Найдите и классифицируйте все точки разрыва функции $f(x)$.

1). $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. 2). $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$.

3). $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$. 4). $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

5). $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{1+x}}$. 6). $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$.

7). $f(x)=0{,}3^{\frac{3}{x}}$. 8). $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

9). $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x<1\\ 3x+2, & x>1\end{cases}$.

10). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$.

Глава 5
ПРЕДЕЛЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В настоящей главе приводятся основные сведения о сходимости и пределах числовых последовательностей, рассматриваются примеры вычисления пределов.

§ 5.1. Понятие числовой последовательности

Числовая последовательность – простейший математический объект, на котором естественным образом вводятся и изучаются фундаментальные понятия предела, предельного перехода и сходимости*.

Числовой последовательностью называется бесконечное множество пронумерованных чисел вида

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

где ***номера***, или ***индексы*** $n = 1, 2, \dots$ – числа из натурального ряда. Числа x_n называются ***членами***, или ***элементами*** числовой последовательности. Кратко числовая последовательность обозначается записью $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$, $\{x_n, n \geq 1\}$ или просто $\{x_n\}$.

Числовую последовательность можно понимать как функцию $x_n = f(n)$, определенную на множестве натуральных чисел $n = 1, 2, \dots$. Числовая последовательность обычно задается формулой, представляющей в общем виде значения членов последовательности. Для краткости числовую последовательность часто называют просто последовательностью.

Замечание 1. В ряде случаев элементы числовой последовательности нумеруются, начиная не с 1, а с других номеров (например, с 0); основными причинами этого являются удобство записи некото-

* В профессиональных курсах математики (точнее, математического анализа) построение теории пределов берёт начало именно с числовых последовательностей. В настоящем пособии принят иной порядок изложения, что связано с лучшим знакомством выпускников школ с функциями, нежели с бесконечными последовательностями, и наличием привычного наглядного графического представления функций.

рых формул и конкретный практический смысл элементов последовательности. Например, числовая последовательность, заданная формулой

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n-10}},$$

определена только при $n \geq 11$. Далее, если рассматривается динамика некоторого экономического показателя (обозначим его через x) за 5 лет, то удобно обозначить через x_0 его значение в начале срока, через x_1 – значение в конце 1-го года, через x_2 – в конце 2-го года и т. д.

Замечание 2. В отдельных случаях рассматриваются ***конечные*** числовые последовательности, в которых присутствует лишь конечное число элементов; таковыми являются, например, конечные арифметические и геометрические прогрессии, последовательность 1, 2, …, 12 порядковых номеров месяцев года. С точки зрения теории пределов такие последовательности представляются малосодержательными.

Пример 1. Рассмотрим следующие примеры числовых последовательностей:

– постоянная числовая последовательность

$$1, 1, ..., 1, ... \qquad (5.1)$$

задается формулой $x_n = 1$;

– натуральный ряд чисел

$$1, 2, ..., n, ... \qquad (5.2)$$

задается формулой $x_n = n$;

– знакочередующаяся числовая последовательность

$$1, -1, 1, -1, ... \qquad (5.3)$$

задается соотношением $x_n = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, ...$, или $x_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, ...$;

– числовая последовательность

$$1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ... \qquad (5.4)$$

задается формулой $x_n = 1/n$;

– арифметическая прогрессия

$$a, a+d, a+2d, ..., a+nd, ... \tag{5.5}$$

задается формулой $x_n = a + (n-1)d$, $n = 1, 2, ...$; здесь a – первый член прогрессии, d – разность прогрессии;

– геометрическая прогрессия

$$b, bq, bq^2, ..., bq^n, ... \tag{5.6}$$

задается формулой $x_n = bq^{n-1}$, $n = 1, 2, ...$; здесь b – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии;

– последовательность частичных сумм первых n членов геометрической прогрессии

$$S_n = b + bq + bq^2 + ... + bq^{n-1} \tag{5.7}$$

при $q \neq 1$ может быть задана формулой

$$S_n = b\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{5.8}$$

В отдельных случаях числовые последовательности задаются ***рекуррентными*** соотношениями, связывающими несколько (чаще всего два соседних) членов последовательности. Например, арифметическая прогрессия (5.5) может быть задана рекуррентным соотношением

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n + d;$$

геометрическая прогрессия (5.6) может быть задана рекуррентным соотношением

$$x_1 = b, \quad x_{n+1} = x_n \cdot q;$$

факториал может быть задан рекуррентным соотношением

$$0! = 1, \quad n! = n \cdot (n-1)!;$$

во всех приведенных соотношениях предполагается, что $n = 1, 2, ...$

Над числовыми последовательностями естественным образом определяются операции сложения, вычитания, умножения и деления. Именно, если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две числовых последовательности, то числовые последовательности вида $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$,

$\{x_n / y_n\}$ называются соответственно суммой, разностью, произведением и частным (отношением) двух данных последовательностей (в случае отношения требуется, чтобы $y_n \neq 0$).

Следующий ряд понятий, относящийся к числовым последовательностям, полностью аналогичен соответствующим понятиям для функций, сформулированным в параграфе 1.1. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной сверху*** (***ограниченной снизу***), если существует такое число M (число m), что каждый элемент данной последовательности удовлетворяет неравенству $x_n \leq M$ (неравенству $x_n \geq m$). Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если она является ограниченной одновременно сверху и снизу, т. е. если существуют такие числа m и M, что каждый элемент данной последовательности удовлетворяет неравенству $m \leq x_n \leq M$. Числовая последовательность называется ***неограниченной***, если она не является ограниченной. Более конструктивно: числовая последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного числа A (сколь угодно большого) найдется такой номер N (зависящий, вообще говоря, от выбора A, т. е. $N = N(A)$), что выполняется соотношение $|x_N| > A$.

Пример 2. Проанализируем введенные выше числовые последовательности:

– постоянная числовая последовательность (5.1), знакочередующаяся последовательность (5.3) и последовательность (5.4) являются ограниченными сверху и снизу, т. е. просто ограниченными;

– натуральный ряд чисел (5.2) является ограниченным снизу и неограниченным сверху;

– арифметическая прогрессия (5.5) является ограниченной только при $d = 0$; при $d > 0$ арифметическая прогрессия ограничена снизу числом a и неограничена сверху, а при $d < 0$ – ограничена сверху числом a и неограничена снизу;

– геометрическая прогрессия (5.6) при $b \neq 0$ является ограниченной при $|q| \leq 1$ и неограниченной при $|q| > 1$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неубывающей*** (***невозрастающей***), если для всех номеров n справедливо неравенство $x_{n+1} \geq x_n$ (неравенство $x_{n+1} \leq x_n$). Неубывающие и невозрастающие последовательности называются общим термином ***монотонные*** последовательности. Если неравенства в определении монотонности являются строгими, то такие последовательности называются ***возрастающими*** (***убывающими***), или ***строго монотонными***.

Пример 3. Относительно свойства монотонности рассмотренных числовых последовательностей можно сказать следующее:

– постоянная числовая последовательность (5.1) является одновременно и неубывающей, и невозрастающей (но не строго монотонной);

– натуральный ряд чисел (5.2) является возрастающей последовательностью;

– знакочередующаяся последовательность (5.3) монотонной не является;

– последовательность (5.4) являются убывающей;

– арифметическая прогрессия (5.5) является возрастающей последовательностью при $d>0$ и убывающей при $d<0$.

§ 5.2. Бесконечно малые последовательности

Рассмотрим важнейшее понятие бесконечно малой числовой последовательности; его можно представлять как свойство неограниченного уменьшения элементов последовательности, взятых по модулю, при неограниченном увеличении их номеров. Строгое определение формулируется следующим образом.

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если для любого положительного числа ε найдется такой номер N, что для всех номеров $n \geq N$ выполняется соотношение $|x_n| < \varepsilon$.

Поясним данное определение. Ключевым моментом в нём является то, что число ε можно задавать сколь угодно малым. Упомянутый в определении номер N зависит, вообще говоря, от выбора ε, что часто записывается в виде $N = N(\varepsilon)$; как правило, чем меньше заданное значение ε, тем больше необходимо выбрать значение N.

Замечание 1. Убывание элементов бесконечно малых последовательностей не обязано быть монотонным. Например, последовательность

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \ldots$$

является бесконечно малой, но не является монотонной.

Среди рассмотренных выше числовых последовательностей бесконечно малыми являются только:

- числовая последовательность (5.4);
- геометрическая прогрессия (5.6) при $|q|<1$.

Покажем, как установить данное свойство этих последовательностей. Отметим, что приводимые здесь рассуждения аналогичны проведенным ранее в параграфе 1.2 при рассмотрении пределов функций.

Пример 1. Установим, что числовая последовательность (5.4) является бесконечно малой. Действуя по определению, выберем произвольное положительное число ε и зафиксируем его. Требуемое в определении общее неравенство $|x_n|<\varepsilon$ запишется в виде

$$|1/n|<\varepsilon, \tag{5.9}$$

что равносильно соотношению

$$n>1/\varepsilon. \tag{5.10}$$

Выберем номер N так, чтобы выполнялось неравенство

$$N>1/\varepsilon.$$

Например, по свойству (1.1) целой части числа достаточно выбрать

$$N=[1/\varepsilon]+1;$$

очевидно, что данное значение N зависит от числа ε, т. е. $N=N(\varepsilon)$. При этом для всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство (5.10):

$$n \geq N=[1/\varepsilon]+1>1/\varepsilon.$$

Вместе с ним выполняется и требуемое неравенство (5.9). Тем самым бесконечная малость числовой последовательности (5.4) установлена.

Пример 2. Установим, что геометрическая прогрессия (5.6) является бесконечно малой при $|q|<1$. Будем считать, что $b \neq 0$, иначе все элементы последовательности равны 0, и бесконечная малость очевидна. При $q=0$ все члены прогрессии кроме первого равны 0, и последовательность также является бесконечно малой. Рассмотрим случай $q \neq 0$. Выберем произвольное положительное число ε и зафиксируем его. Для доказательства бесконечной малости геометрической прогрессии необходимо найти такой номер N, чтобы для всех номеров $n \geq N$ выполнялось неравенство

$$|bq^{n-1}| < \varepsilon. \tag{5.11}$$

Данное неравенство равносильно каждому из следующих соотношений:

$$|b| \cdot |q|^{n-1} < \varepsilon, \quad |q|^{n-1} < \varepsilon / |b|.$$

Логарифмируем по основанию $|q|$:

$$\log_{|q|}\left(|q|^{n-1}\right) > \log_{|q|}(\varepsilon / |b|)$$

(при логарифмировании знак неравенства изменен по той причине, что по условию основание логарифма $|q|$ меньше 1, а логарифм с таким основанием – убывающая функция своего аргумента). Последнее неравенство равносильно следующему:

$$n - 1 > \log_{|q|}(\varepsilon / |b|),$$

которое запишем в виде

$$n > 1 + \log_{|q|}(\varepsilon / |b|). \tag{5.12}$$

Выберем номер N из следующих условий:

1) номер N больше значения правой части неравенства (5.12);

2) номер N не меньше 1 (поскольку элементы прогрессии нумеруются начиная с 1). В силу свойства (1.1) целой части достаточно выбрать

$$N = \max\{1;\, 2 + [\log_{|q|}(\varepsilon / |b|)]\};$$

при этом неравенство (5.12) будет выполняться для всех $n \geq N$:

$$n \geq N \geq 2 + [\log_{|q|}(\varepsilon / |b|)] > 1 + \log_{|q|}(\varepsilon / |b|).$$

Следовательно, будет выполняться и требуемое неравенство (5.11). Тем самым строго доказано, что при $|q| < 1$ геометрическая прогрессия (5.6) является бесконечно малой.

Замечание 2. При доказательстве бесконечной малости геометрической прогрессии с неравенством (5.11) проводятся действия, очень напоминающие ход его решения. Однако, исключительно важно подчеркнуть, что целью проводимых действий является не точное определение множества всех чисел n, являющихся решением (5.11), а лишь установление такого «порогового» значения номера N, начиная с которого это неравенство становится заведомо верным для всех n. При этом значение N может быть выбрано не точно, а «с запасом». Как правило, решение неравенства – задача гораздо более сложная, чем установление надлежащего «порога». В то же время, для столь простого неравенства, как (5.11), разница в решении неравенства и поиске порогового значения не слишком велика. Аналогичное замечание можно сделать и относительно последовательности (5.4) примера 1.

Замечание 3. В рассмотренных простых примерах нам удалось найти явное выражение для числа N в зависимости от ε; в более сложных примерах сделать это зачастую не удается, и доказательство ограничивается лишь установлением факта существования некоторого числа N, удовлетворяющего требуемым условиям. Примеры, поясняющие данные замечания, требуют привлечения несколько более сложных аналитических средств и приведены в приложении 6.

Бесконечно малые числовые последовательности обладают следующими простыми свойствами, аналогичными свойствами бесконечно малых функций:

– бесконечно малая последовательность ограничена;

– сумма, разность и произведение двух бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми;

– произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Отметим, что частное двух бесконечно малых последовательностей может не быть бесконечно малой; например, последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при $x_n = y_n = 1/n$ являются бесконечно малыми, а частное $x_n / y_n = 1$ не является бесконечно малой последовательностью.

§ 5.3. Бесконечно большие последовательности

Обратимся к рассмотрению понятия, в некотором смысле «противоположного» понятию бесконечной малости.

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если для любого положительного числа A найдется такой номер N, что для всех номеров $n \geq N$ выполняется соотношение $|x_n| > A$.

Ключевым моментом в данном определении является то, что число A можно задавать сколь угодно большим. Номер N зависит, вообще говоря, от выбора A, что часто записывается в виде $N = N(A)$; как правило, чем больше заданное значение A, тем больше необходимо выбрать значение N.

Сопоставляя это определение с определением неограниченной последовательности, можно утверждать, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной; напротив, неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой. Например, последовательность

$$0, 1, -1, 0, 2, -2, 0, 3, -3, ..., 0, n, -n, ...$$

является неограниченной сверху и снизу, но не является бесконечно большой, поскольку содержит равные 0 элементы с неограниченно большими номерами.

Пример 1. Вернемся анализу рассмотренных выше числовых последовательностей:

– натуральный ряд чисел (5.2) является бесконечно большой числовой последовательностью;

– арифметическая прогрессия (5.5) является бесконечно большой при $d \neq 0$;

– геометрическая прогрессия (5.6) является бесконечно большой при $b \neq 0$, $|q| > 1$.

Установим, что геометрическая прогрессия (5.6) является бесконечно большой при $b \neq 0$, $|q| > 1$. Действуя по определению, выберем произвольное положительное число A. Для доказательства необходимо найти такой номер N, что для всех номеров $n \geq N$ будет выполняться неравенство

$$|bq^{n-1}| > A, \tag{5.13}$$

которое равносильно соотношению

$$n > 1 + \log_{|q|}(A/|b|).$$

Выберем

$$N = \max\{1; 2 + [\log_{|q|}(A/|b|)]\}.$$

При этом в силу свойств целой части для всех $n \geq N$ выполняется неравенство

$$n \geq 2 + [\log_{|q|}(A/|b|)] > 1 + \log_{|q|}(A/|b|);$$

следовательно, справедливо и требуемое неравенство (5.13). Тем самым строго доказано, что при $|q| > 1$ геометрическая прогрессия (5.6) является бесконечно большой последовательностью.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно установить, что арифметическая прогрессия (5.5) при $d \neq 0$ является бесконечно большой. Рекомендуем отдельно рассмотреть случаи $d > 0$ и $d < 0$.

Отметим, что произведение двух бесконечно больших последовательностей является бесконечно большой последовательностью. При этом сумма, разность и отношение двух бесконечно больших последовательностей м о г у т н е б ы т ь бесконечно большими; например, последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при $x_n = n$ и $y_n = -n$ являются бесконечно большими, а их сумма $x_n + y_n = 0$ и отношение $x_n / y_n = -1$ бесконечно большими не являются.

Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности связаны следующим очевидным образом:

– если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно малая, то последовательность $\{1/x_n\}$ является бесконечно большой;

– если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то последовательность $\{1/x_n\}$ является бесконечно малой

(здесь предполагается, что $x_n \neq 0$).

Данные свойства полностью аналогичны рассмотренным ранее свойствам бесконечно малых и бесконечно больших функций (параграф 1.5).

§ 5.4. Предел числовой последовательности

Обратимся к важнейшим понятиям сходимости и предела числовой последовательности. Приведем три равносильных определения, располагая их в порядке возрастания сложности формулировок.

Числовая последовательность $\{x_n\}$ ***сходится*** к числу a, если ...

1) ... числовая последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой,

или

2) ... в любой ε -окрестности числа a находятся все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера $N = N(\varepsilon)$,

или

3) ... для любого положительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq N$ выполняется соотношение $|x_n - a| < \varepsilon$.

При этом число a называется ***пределом*** числовой последовательности $\{x_n\}$.

Как и для бесконечно малых последовательностей, в приведенных определениях число ε можно задавать сколь угодно малым, а номер N зависит, вообще говоря, от выбора ε, т. е. $N = N(\varepsilon)$.

Тот факт, что числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a, обозначается записью

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a;$$

иначе пишется, что $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Числовая последовательность, не являющаяся сходящейся, называется ***расходящейся***.

Пример 1. Из рассмотренных выше числовых последовательностей сходящимися являются:

– постоянная числовая последовательность (5.1), для которой

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1;$$

– последовательность (5.4), для которой

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0;$$

– геометрическая прогрессия (5.6) при $|q| < 1$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} bq^{n-1} = 0.$$

Последовательности (5.2), (5.3) и (5.5) при $d \neq 0$ являются расходящимися.

Отметим следующие простые факты:

– бесконечная малость некоторой последовательности равносильна наличию у нее предела, равного 0;

– изменение к о н е ч н о г о числа элементов не влияет на сходимость последовательности и на величину ее предела.

Важно подчеркнуть, что пределы числовых последовательностей обладают всеми свойствами, аналогичными свойствам пределов функций и рассмотренными в параграфе 1.5. Эти свойства широко применяются как в теоретических рассмотрениях, так и при решении соответствующих задач.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно сформулировать соответствующие свойства для числовых последовательностей.

Пример 2. Последовательность (5.7) частичных сумм членов геометрической прогрессии является сходящейся при $|q| < 1$, причем в силу (5.8) получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{b}{1-q}(1 - \lim_{n\to\infty} q^n) = \frac{b}{1-q}.$$

В данной цепочке равенств мы последовательно воспользовались тем, что 1) постоянный множитель можно выносить за знак предела, 2) предел разности равен разности пределов и 3) при $|q| < 1$ геометрическая прогрессия является бесконечно малой, т. е. имеет нулевой предел.

Исключительно важным для теории является следующий факт.

Утверждение. Неубывающая ограниченная сверху (невозрастающая ограниченная снизу) последовательность сходится.

Данное утверждение выражает одно из достаточных условий существования предела последовательности, сформулированное в терминах свойств исключительно самой последовательности. В некоторой степени оно является аналогом свойства существования одностороннего предела монотонной ограниченной функции (см. параграф 3.3).

Пример 3. Числовая последовательность $\{x_n\}$ с элементами

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

монотонно возрастает и ограничена сверху (это не очевидно, но может быть строго доказано); ее предел существует и равен числу e:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{5.14}$$

Как нам уже известно, это – второй замечательный предел в одной из его основных форм записи.

§ 5.5. Вычисление пределов числовых последовательностей

Обратимся к методам вычисления пределов числовых последовательностей и дополним содержательными примерами рассмотренную в предыдущих параграфах теорию. Как уже отмечено выше, для вычисления пределов последовательностей можно применять все те свойства и приемы, которые приведены для функций в параграфе 1.5. Во многих случаях можно использовать следующую очевидную связь между пределами числовых последовательностей и пределами функций в бесконечности: если функция $f(x)$ определена для всех $x \geq 1$, то из существования ее предела в $+\infty$ вытекает существование предела числовой последовательности $\{f(n), n=1,2,...\}$ и равенство пределов:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

В частности, после подобного перехода от дискретного аргумента n к непрерывному аргументу x в соответствующих случаях можно применять правило Лопиталя, относящееся только к функциям с непрерывным аргументом.

Подчеркнем, что из существования предела в левой части данного равенства не следует существование предела в правой части. Предлагаем читателям самостоятельно построить соответствующий пример на основе функции $f(x) = \sin \pi x$.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Вычислим с помощью типовых приемов следующие пределы, каждый из которых, в принципе, может быть сведен к вычислению предела функции непрерывного аргумента. С учетом знаний и опыта вычисления пределов функций пояснения к проводимым действиям требуются минимальные.

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1000n}{n^2+1} = 1000 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1/n} = 1000 \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1/n)} = 0;$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+7}{2n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+7/n^2}{2-1/n^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+7/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2-1/n^2)} = \frac{3}{2};$$

3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(\sqrt{n}+1)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{(\sqrt{n}+1)^4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1+1/n^2) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n})^4}{(\sqrt{n}+1)^4} =$$

$$= (1+\lim_{n\to\infty} 1/n^2) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/\sqrt{n})^4} = 1 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/\sqrt{n})^4} =$$

$$= \frac{1}{(1 + \lim\limits_{n\to\infty}(1/\sqrt{n}))^4} = \frac{1}{(1+0)^4} = 1;$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1+n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1+n}\right)} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+n}} = \frac{1}{1+0} = 1;$$

5) $$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0;$$

6) $$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{2^n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n/2^n}{1 + 3/2^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2^n}{1 + 3\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty;$$

7) $$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n + (-3)^n}{4^{n-1} + (-2)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-3)^n/4^n}{4^{-1} + (-2)^{n-1}/4^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-3/4)^n}{4^{-1} + (-2/4)^{n-1}/4} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1 + (-3/4)^n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(4^{-1} + (-1/2)^{n-1}/4)} =$$

$$= \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty}(-3/4)^n}{4^{-1} + 4^{-1}\lim\limits_{n\to\infty}(-1/2)^{n-1}} = \frac{1+0}{4^{-1} + 4^{-1}\cdot 0} = 4;$$

8) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+5}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+n-3}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{6}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+n-3}{n+1}\cdot\frac{6}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{6}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{6}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{6}\cdot\frac{6(n^2+n-3)}{(n+1)(2n-1)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{6}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{6}}\right)^{\frac{6(n^2+n-3)}{(n+1)(2n-1)}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{6}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{6}} \right)^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6(n^2+n-3)}{(n+1)(2n-1)}} = e^3 ;$$

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$;

последнее равенство получено с учетом предела (4.5).

Следующие три предела характерны тем, что они не могут быть сведены к пределу функции $f(x)$ непрерывного аргумента, поскольку выражения $(-1)^n$ и $n!$ не определены для нецелых значений.

Пример 2. Предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

равен 0 как предел произведения ограниченной последовательности $\left\{ (-1)^n \right\}$ и бесконечно малой последовательности $\left\{ \dfrac{1}{n+1} \right\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пример 3. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^m}{n^m},$$

где $m = 1, 2, \ldots$ – фиксированное натуральное число. Выражение C_n^m встречается в различных разделах математики, называется ***числом сочетаний*** из n элементов по m и определяется как число всех подмножеств (без учета порядка элементов внутри подмножества), содержащих ровно m элементов исходного объемлющего множества, состоящего из n различных элементов. Тем самым, должно выполняться соотношение $m \le n$, так что данная числовая последовательность определена только при этом условии. Сочетания и их свойства изучаются в ***комбинаторике*** – разделе математики, посвященном исследованию свойств множеств с конечным числом элементов. Число сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!};$$

напомним, что факториал определен в параграфе 1.1. В частных случаях,

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$$

Приступим к вычислению предела, для чего запишем один из факториалов в следующем виде:

$$n! = (n-m)!\cdot(n-m+1)\cdot\ldots\cdot n$$

(в правой части после факториала имеется ровно m сомножителей). С учетом данного равенства преобразуем выражение под знаком предела:

$$\frac{C_n^m}{n^m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!\cdot n^m} =$$

$$= \frac{1}{m!}\cdot\frac{(n-m)!\cdot(n-m+1)\cdot\ldots\cdot n}{(n-m)!\cdot n^m} = \frac{1}{m!}\cdot\frac{(n-m+1)\cdot\ldots\cdot n}{n^m} =$$

$$= \frac{1}{m!}\cdot\frac{n-m+1}{n}\cdot\frac{n-m+2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^m}{n^m} = \frac{1}{m!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-m+1}{n}\cdot\frac{n-m+2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{m!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-m+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-m+2}{n}\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}.$$

В последнем выражении перемножаются $m-1$ пределов, причем каждый из них равен 1, т. к. при всех $k = 1, 2, \ldots, m-1$ справедливо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-k}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right) = 1 - k\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1.$$

Окончательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^m}{n^m}=\frac{1}{m!}.$$

Пример 4. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

Введем обозначение $x_n=\dfrac{2^n}{n!}$ и рассмотрим цепочку равенств:

$$x_n=\frac{2\cdot 2^{n-1}}{n\cdot(n-1)!}=\frac{2}{n}\cdot\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{2}{n}x_{n-1}.$$

Поскольку при всех $n\geq 3$ выполняется неравенство $\dfrac{2}{n}\leq\dfrac{2}{3}$, то при всех указанных значениях n имеет место неравенство

$$x_n\leq\frac{2}{3}x_{n-1}.$$

Повторяя данное неравенство многократно, получим:

$$x_n\leq\frac{2}{3}x_{n-1}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^2 x_{n-2}\leq\ldots\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}x_2=2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

Тем самым, при всех $n\geq 3$ получаем двустороннее неравенство

$$0<x_n\leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,$$

то в соответствии с принципом двусторонней ограниченности получаем:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

Таким образом, предел данной последовательности существует и равен 0.

Вычисленный предел показывает, что при $n \to \infty$ факториал $n!$ растет быстрее, чем показательная функция 2^n (которая, как известно из результатов параграфа 4.3, растет в бесконечности быстрее и степенной, и логарифмической функций). Некоторые значения этих функций и их отношения представлены в следующей таблице. Из таблицы видно, что даже при небольших значениях аргумента показательная функция и факториал являются практически несопоставимыми. Аналогично можно установить, что в бесконечности факториал растет быстрее, чем показательная функция a^n с любым основанием $a > 1$.

n	2^n	$n!$	$\dfrac{2^n}{n!}$
5	32	120	$\approx 0{,}267$
10	1 024	3 628 800	$\approx 0{,}282 \cdot 10^{-3}$
15	32 768	1 307 674 368 000	$\approx 0{,}251 \cdot 10^{-7}$
20	1 048 576	2 432 902 008 176 640 000	$\approx 0{,}431 \cdot 10^{-12}$

Пример 5. В заключение вычислим предел

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln n .$$

Преобразуем выражение под знаком предела:

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \ln n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \ln n .$$

Поскольку $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, $\ln n \geq 0$, то при всех $n \geq 1$ получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \ln n \leq \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} .$$

Следовательно, имеет место двустороннее неравенство

$$0 \le (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln n \le \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}.$$

Поскольку $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$ (см. предел (4.6) из параграфа 4.3), то по принципу двусторонней ограниченности искомый предел существует и равен 0.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение числовой последовательности. Приведите примеры.

2. Что такое рекуррентное соотношение? Приведите примеры.

3. Дайте определение ограниченной числовой последовательности. Приведите примеры.

4. Дайте определение монотонной числовой последовательности. Приведите примеры.

5. Дайте определение бесконечно малой числовой последовательности. Приведите примеры.

6. Дайте определение бесконечно большой числовой последовательности. Приведите примеры.

7. Сформулируйте основные совместные свойства бесконечно малых, бесконечно и ограниченных последовательностей.

8. Дайте определение сходящейся числовой последовательности и ее предела. Приведите примеры.

9. Сформулируйте основные свойства сходящих числовых последовательностей.

10. Какие основные приемы применяются для вычисления пределов числовых последовательностей?

11. Каким образом при вычислении пределов числовых последовательностей можно осуществить переход от дискретного аргумента к непрерывному?

12. Какой предел позволяет сопоставить скорости роста на бесконечности показательной функции и факториала?

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Запишите значения первых пяти членов последовательности $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$, задаваемой следующими формулами.

1). $x_n = \dfrac{2}{n}$. 2). $x_n = \dfrac{n-1}{n^2}$.

3). $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. 4). $x_n = 3^{-n}$.

5). $x_n = \dfrac{1}{n!}$. 6). $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+5}}$.

7). $x_n = 2^{-\frac{1}{n}} - 1$. 8). $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 4n - 2}}$.

9). $x_n = \log_{\frac{1}{7}} \dfrac{n+1}{n}$. 10). $x_n = \sin \dfrac{1}{n+3}$.

5.2. Выясните, какие последовательности из задания 5.1 являются монотонными.

5.3. Для числа $\varepsilon = 0{,}001$ найдите такое число N, чтобы для всех $n \ge N$ выполнялось неравенство $|x_n| < \varepsilon$; здесь $\{x_n\}$ – последовательности из задания 5.1.

5.4. Докажите, что последовательности $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ из задания 5.1 являются бесконечно малыми.

5.5. Докажите, что заданные числовые последовательности $\{x_n\}$ определены при в с е х достаточно больших значениях номеров n, и вычислите их пределы.

1). $x_n = \dfrac{-4n-5}{n+3}$. 2). $x_n = \dfrac{3n+1}{2n-7}$.

3). $x_n = \dfrac{4n^2 - 5n - 2}{3n^2 - n - 2}$. 4). $x_n = \dfrac{3n^2 - 16n - 12}{2n^2 - 7n - 30}$.

5). $x_n = \dfrac{n^3 - 3n^2 - 5n + 4}{-3n^3 + 7n^2 + 9n - 20}$.

6). $x_n = \dfrac{2n^3 - 3n^2 + 10n + 3}{n^3 + 2n^2 - 8n - 15}$.

7). $x_n = \dfrac{2n + 3}{4n^2 - 5n - 1}$.

8). $x_n = \dfrac{2n^2 + 3n - 5}{n^3 - 1}$.

9). $x_n = \dfrac{n^3 - 3n + 2}{-5n + 6}$.

10). $x_n = \dfrac{-n^3 + 3n^2 + 2n - 2}{2n^2 + n + 1}$.

11). $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1}$.

12). $x_n = \dfrac{\sqrt[2]{n^3}}{n + 1}$.

13). $x_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\sqrt{n+1}$.

14). $x_n = \dfrac{4^{\sqrt{n}}}{5^{\sqrt{n-1}}}$.

15). $x_n = \sqrt{n} \sin \dfrac{1}{n}$.

16). $x_n = n \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

17). $x_n = n \ln(1 - 1/n)$.

18). $x_n = n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

19). $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$.

20). $x_n = n\left(\operatorname{ctg}\dfrac{1}{n} - n\right)$.

Указание к примеру 20): следует перейти к непрерывному аргументу $x \to +\infty$, сделать замену $y = 1/x \to 0 + 0$, провести тождественные преобразования

$$\frac{1}{y}\left(\operatorname{ctg} y - \frac{1}{y}\right) = \frac{y\cos y - \sin y}{y^2 \sin y} = \frac{y(\cos y - 1) + y - \sin y}{y^2 \sin y}$$

с использованием первого замечательного предела и пределов (2.2) и (4.2).

Глава 6
НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

В настоящей главе рассматривается ряд примеров применения теории пределов к анализу отдельных экономических задач и процессов.

§ 6.1. Модели потребительского спроса

Отметим прежде всего, что в современной науке исключительно широко применяются термины «модель», «моделирование», трактуемые следующим образом. ***Модель*** (от латинского слова «modulus» – мера) – общенаучное понятие, означающее объект (материальный или идеальный), анализ которого или наблюдение за которым позволяет познавать существенные характеристики объекта исследования. В качестве объекта исследования могут выступать различные объекты, системы, явления или процессы реального мира, в частности, экономического характера. ***Моделирование*** – один из основных способов научного познания, состоящий в изучении объектов исследования путем построения и изучения их моделей.

Моделирование – мощный инструмент исследования, прогнозирования и управления. Актуальность применения моделей для исследования экономических процессов обусловлена рядом факторов, в том числе сложностью объектов исследования и высокой ценой ошибок при принятии неправильных управленческих решений. Применение моделей позволяет провести глубокое детализированное изучение объектов исследования, значительно снизить стоимость и риск, связанные с изучением, использованием и управлением реальными системами и процессами, вследствие чего получить существенный экономический эффект. В общем случае к моделям предъявляется множество требований, главное из которых – адекватность, т. е.

достаточная степень соответствия модели объекту исследования, для изучения которого она построена.

Важным классом моделей являются математические модели, в которых объекты исследования и их свойства представлены в виде различных математических объектов и отношений (чисел, переменных, функций, уравнений и неравенств). Применение математических моделей – подчас единственный приемлемый подход к изучению сложных экономических систем, явлений и процессов. Именно такие модели рассматриваются в настоящей главе. Отметим также, что в современных условиях моделирование сложных систем различной природы проводится с применением компьютерной техники и соответствующего программного обеспечения.

В экономической теории важное место занимает анализ потребительского спроса на различные группы товаров. Величина спроса моделируется известными ***функциями Торнквиста***, выражающими зависимость от величины дохода потребителей I их спроса $Q(I)$ на следующие группы товаров:

– малоценные товары,

$$Q_0(I)=\frac{aI(I+b)}{I^2+c}, \quad I>0;$$

– товары первой необходимости,

$$Q_1(I)=\frac{aI}{I+b}, \quad I>0;$$

– товары второй необходимости (товары относительной роскоши),

$$Q_2(I)=\frac{a(I-c)}{I+b}, \quad I>c;$$

– предметы роскоши,

$$Q_3(I)=\frac{aI(I-c)}{I+b}, \quad I>c.$$

В данных формулах a, b, c – некоторые положительные параметры, различные для разных функций спроса.

Замечание. В задачах, имеющих конкретную экономическую направленность, обозначения переменных и функций могут существенно отличаться от уже привычных обозначений, принятых в математической теории.

Для уточнения поведения этих функций построим их графики, предварительно выяснив, существуют ли асимптоты у графиков данных функций.

Отметим, что вертикальных асимптот у данных функций нет. Действительно, как установлено в параграфе 4.4, вертикальные асимптоты у элементарных функций могут существовать только в граничных точках их областей определения. Первые две функции определены при $I \in [0; +\infty)$, и их пределы в точке $I = 0$ справа, очевидно, нулевые:

$$\lim_{I \to 0+0} Q_0(I) = \lim_{I \to 0+0} \frac{aI(I+b)}{I^2 + c} = 0,$$

$$\lim_{I \to 0+0} Q_1(I) = \lim_{I \to 0+0} \frac{aI}{I+b} = 0.$$

Третья и четвертая функции определены при $I \in (c; +\infty)$, и их пределы в точке $I = c$ справа также нулевые:

$$\lim_{I \to c+0} Q_2(I) = \lim_{I \to c+0} \frac{a(I-c)}{I+b} = 0,$$

$$\lim_{I \to c+0} Q_3(I) = \lim_{I \to c+0} \frac{aI(I-c)}{I+b} = 0.$$

Следовательно, данные функции вертикальных асимптот не имеют, поскольку для их существования необходимо, чтобы указанные пределы были бесконечными.

Рассмотрим вопрос существования наклонных асимптот; с целью избежать коллизии в обозначениях параметров общее уравнение асимптоты запишем в виде $Q = KI + B$, где K – угловой коэффициент наклона, B – начальная ордината. Ясно, что наклонные асимптоты для данных функций могут рассматриваться только в $+\infty$.

Вычисляем соответствующие пределы (см. параграф 4.4) для первой функции (спрос на малоценные товары):

$$K = \lim_{I\to+\infty}\frac{Q_0(I)}{I} = \lim_{I\to+\infty}\frac{aI(I+b)}{(I^2+c)I} = a\lim_{I\to+\infty}\frac{I+b}{I^2+c} = 0,$$

$$B = \lim_{I\to+\infty}(Q_0(I)-KI) = \lim_{I\to+\infty}\frac{aI(I+b)}{I^2+c} = a\lim_{I\to+\infty}\frac{I^2+bI}{I^2+c} = a.$$

Следовательно, наклонная асимптота в $+\infty$ у данной функции существует и выражается формулой $Q = a$ (фактически является горизонтальной).

Вычисляем пределы для второй функции (спрос на товары первой необходимости):

$$K = \lim_{I\to+\infty}\frac{Q_1(I)}{I} = \lim_{I\to+\infty}\frac{aI}{(I+b)I} = a\lim_{I\to+\infty}\frac{1}{I+b} = 0,$$

$$B = \lim_{I\to+\infty}(Q_1(I)-KI) = \lim_{I\to+\infty}\frac{aI}{I+b} = a\lim_{I\to+\infty}\frac{I}{I+b} = a.$$

Следовательно, у данной функции наклонная асимптота в $+\infty$ тоже существует и выражается формулой $Q = a$.

Для третьей функции (спрос на товары второй необходимости):

$$K = \lim_{I\to+\infty}\frac{a(I-c)}{(I+b)I} = a\lim_{I\to+\infty}\frac{I-c}{I^2+bI} = 0,$$

$$B = \lim_{I\to+\infty}\frac{a(I-c)}{I+b} = a\lim_{I\to+\infty}\frac{I-c}{I+b} = a.$$

Таким образом, и у данной функции наклонная асимптота в $+\infty$ существует и выражается формулой $Q = a$.

Наконец, для четвертой функции (спрос на предметы роскоши):

$$K = \lim_{I\to+\infty}\frac{aI(I-c)}{(I+b)I} = a\lim_{I\to+\infty}\frac{I-c}{I+b} = a,$$

$$B = \lim_{I\to+\infty}\left(\frac{aI(I-c)}{I+b} - aI\right) = a\lim_{I\to+\infty}\left(\frac{I(I-c)}{I+b} - \frac{I(I+b)}{I+b}\right) =$$

$$= a\lim_{I\to+\infty}\left(\frac{-cI-bI}{I+b}\right) = -a(b+c).$$

Следовательно, у данной функции наклонная асимптота в $+\infty$ существует и выражается формулой $Q = aI - a(b+c)$.

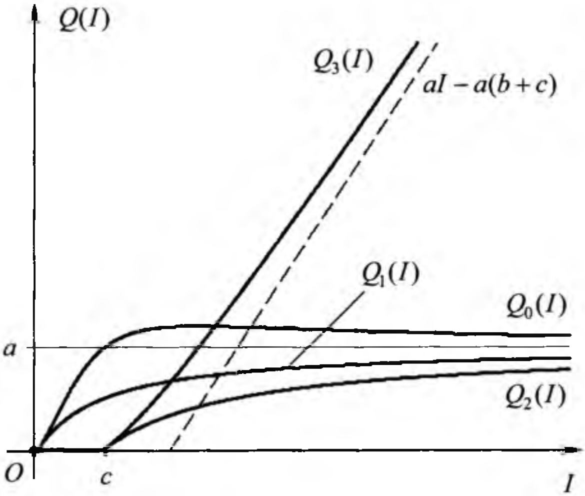

Рисунок 6.1

Графики всех функций Торнквиста вместе с их асимптотами приведены на рисунке 6.1.

§ 6.2. Сопоставление скорости роста простых и сложных процентов

Отметим прежде всего, что в настоящем параграфе используется ряд терминов из области финансов (они выделены в тексте шрифтом в р а з р я д к у); детальное пояснение всех терминов можно найти в специальной литературе и соответствующих словарях (например, [21, 22]), в том числе и электронных, размещенных в сети Интернет.

Всё многообразие видов финансовых операций, связанных с выделением ссуд, кредитованием, передачей денежных сумм в долг, ипотекой, в вычислительном аспекте сводится к расчетам по двум основным схемам начисления процентов: схеме простых процентов и схеме сложных процентов. Начисление по схеме простых процентов предполагает, что первоначальная сумма, являющаяся базой для начисления процентов, с течением времени не меняется (например, если проценты периодически выплачиваются). Начисление по схеме сложных процентов предполагает, что начисленные проценты периодически присоединяются к первоначальной сумме (происходит капитализация процентов).

Пусть P – первоначальная сумма, на которую производится начисление процентов, i – процентная ставка (называемая также ставкой процента, нормой процента, нормой прибыли, ростом, доходностью), приуроченная к некоторому периоду начисления (обычно – 1 год). Процентная ставка может выражаться в арифметических процентах (так удобнее человеку) либо в долях единицы (так проще записывать формулы), например, 15 % или 0,15. В приводимых ниже в данном параграфе формулах процентная ставка i выражена в долях единицы и безразмерна; при исчислении процентной ставки в арифметических процентах следует провести ее пересчет в доли единицы. Через n обозначим временной фактор, характеризующий длительность финансовой операции, – количество периодов начисления в сроке начисления (например, если период начисления равен 1 кварталу, срок начисления – 1 году, то $n = 4$). Число n может быть дробным. Обозначим через $S_0(n)$ и $S_1(n)$ наращенные суммы, определенные по схеме простых и сложных процентов соответственно. Они рассчитываются по известным формулам

$$S_0(n) = P(1+in), \quad S_1(n) = P(1+i)^n.$$

Сопоставим величины наращенных сумм, рассчитываемых по обеим схемам, в зависимости от временного фактора n. Рассмотрим отношение

$$\frac{S_0(n)}{S_1(n)} = \frac{P(1+in)}{P(1+i)^n} = \frac{1+in}{(1+i)^n}$$

и вычислим его предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_0(n)}{S_1(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+in}{(1+i)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+i)^n} + i \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(1+i)^n}.$$

Первый предел в полученном выражении равен 0 по свойствам показательной функции a^x, где $a = 1 + i > 1$, и $a^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Равенство 0 второго предела следует из соотношения (4.8) при $p = 1$. Таким образом,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_0(n)}{S_1(n)} = 0.$$

Полученное соотношение можно трактовать так, что при больших временных интервалах простые проценты несоизмеримо меньше сложных. Это показывают и графики рассматриваемых функций, приведенные на рисунке 6.2.

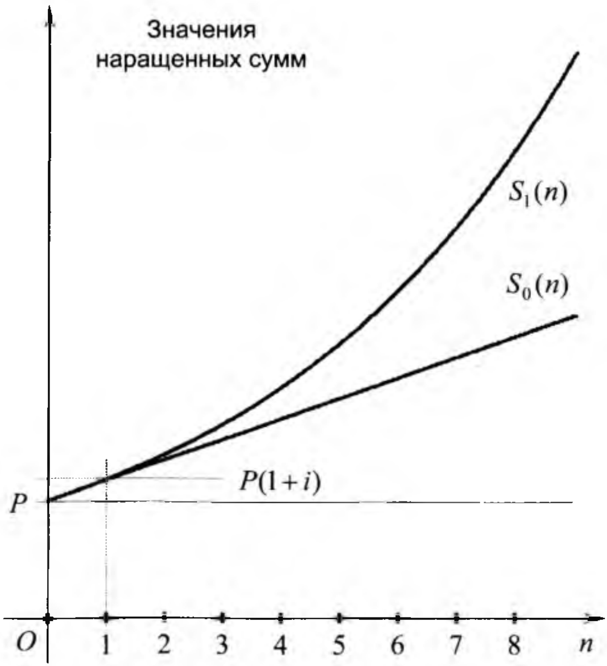

Рисунок 6.2

Замечание 1. Когда срок начисления меньше периода начисления, т. е. при $0 < n < 1$, простые проценты больше сложных. Этот факт можно доказать строго аналитически. Например, для $n = 1/2$ доказательство сводится к установлению неравенства

$$(1+i)^{1/2} < 1 + i/2 .$$

Возводя в квадрат обе его части, получаем равносильное неравенство

$$1 + i < 1 + i + i^2/4 ,$$

которое является очевидным и полностью доказывает требуемое свойство.

Поскольку при указанных значениях n и реальных процентных ставках различие между двумя суммами весьма мало, то на приведенном графике при выбранном масштабе этого различия не видно.

Замечание 2. Быстрый рост сумм, рассчитываемых по схеме сложных процентов, может быть проиллюстрирован рядом ярких примеров. Как известно (см. [20]), остров Манхэттен был выменян за 24 доллара. Через 350 лет (к середине 70-х годов XX века) стоимость земли на Манхэттене оценивалась в 40 млрд. долларов. Таким образом, первоначальная сумма увеличилась в 1,67 млрд. раз. Показательно, что столь огромный рост достигается при сложной годовой процентной ставке, равной всего лишь 6,25 %. Для обеспечения такого же роста по простой процентной ставке последняя должна иметь гигантское абсолютно нереальное значение.

§ 6.3. Метод половинного деления и его применение в анализе инвестиционных проектов

Материал данного параграфа логично изложить в двух частях: 1) математические основы метода половинного деления; 2) применение данного метода для расчета отдельных важных экономических показателей.

1. Решение широкого класса естественнонаучных, технических и экономических задач сопряжено с поиском корней уравнения

$$f(x) = 0 , \tag{6.1}$$

где аргумент x и функция $f(x)$ могут иметь совершенно различный смысл в зависимости от той предметной области, задачи которой привели к данному уравнению. Один из примеров такой функции в области финансовой оценки инвестиционных проектов будет рассмотрен ниже, а сейчас обратимся к математической постановке задачи и методу ее решения.

Будем считать, что на отрезке $[a; b]$, $a < b$, задана непрерывная функция $f(x)$, причем $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Тогда, согласно свойствам непрерывных на отрезке функций (см. параграф 4.5), на интервале $(a; b)$ существует такое число x_0, которое является корнем уравнения (6.1), т. е. $f(x_0) = 0$. Отметим, что если функция $f(x)$ строго монотонна на отрезке, то корень уравнения является единственным.

В общем случае уравнение (6.1) может иметь несколько (и даже бесконечно много) корней, и один из них может быть найден с помощью следующей процедуры, называемой методом половинного деления, или методом деления отрезка пополам, или ***дихотомией*** (от греческих слов, означающих «сечение на две части»). Остановимся на основных идеях метода, не проводя излишней формализации изложения.

Возьмем середину отрезка $[a; b]$, т. е. точку $c = (a+b)/2$. Вычислим значение функции $f(x)$ в данной точке: $y = f(c)$. Если выполняется условие $y = 0$, то корень уравнения найден и равен c, – можно завершать решение. Но практически полное совпадение с искомым корнем x_0 некоторой серединной точки бывает исключительно редко; следовательно, вероятнее всего, что $y \neq 0$. Тогда возможны два взаимно исключающих варианта: 1) $y > 0$ и 2) $y < 0$. В первом случае имеем: $f(c) = y > 0$, $f(a) < 0$ (по условию); следовательно, по тем же свойствам непрерывных функций корень уравнения (6.1) существует на отрезке $[a; c]$. Во втором случае имеем: $f(c) = y < 0$, $f(b) > 0$; следовательно, корень уравнения (6.1) существует на отрезке $[c; b]$. Таким образом, поиск корня на «большом» отрезке $[a; b]$ сведен к поиску корня на отрезке, вдвое меньшем исходного и полностью содержащемся в нём. Проводя описанную процедуру достаточное количество раз, можно установить расположение искомого корня (или, как говорят, локализовать корень) сколь угодно точно.

Отметим, что набор действий или операций, многократно повторяющихся в ходе решения какой-либо задачи, часто называется

итерацией (от латинского слова «iteratio» – повторение). Иначе итерации называются последовательными приближениями. Таким образом, переход от отрезка, содержащего корень, к меньшему вложенному отрезку можно рассматривать как итерацию метода половинного деления.

Если исходный отрезок $[a; b]$ обозначить для единообразия через $[a_0; b_0]$, а последующие вложенные отрезки через $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, ... (теоретически получается бесконечная последовательность отрезков), то для всех $n \geq 1$ справедливы соотношения

$$a_n \leq x_0 \leq b_n,$$

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \ldots = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n},$$

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0.$$

По самому способу построения числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ являются ограниченными и монотонными: первая – неубывающей, вторая – невозрастающей; значит (см. утверждение параграфа 5.4), обе они имеют конечные пределы при $n \to \infty$, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq x_0 \leq \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = (b-a)\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

и в силу непрерывности функции

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0,$$

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

В итоге получаем, что $f(x_0) = 0$, т. е. x_0 – решение уравнения (6.1).

Замечание 1. Вполне аналогичная процедура может применяться для поиска корня в случае, когда функция имеет на концах отрезка знаки, противоположные рассмотренным выше, т. е. при $f(a)>0$, $f(b)<0$. Предлагаем читателям самостоятельно определить, какие коррективы должны быть внесены в изложенный выше алгоритм в данном случае.

Замечание 2. Конечно, практически описанная процедура не может повторяться до бесконечности. Обычно задается абсолютная погрешность, с которой должен быть найден искомый корень. Абсолютная погрешность характеризуется числом $\varepsilon>0$, при котором должно быть достигнуто неравенство $|x_0-\tilde{x}|<\varepsilon$, где x_0 – искомый неизвестный корень, $\tilde{x}$ – известное приближенное значение корня, определяемое в ходе вычислений. В данной процедуре в качестве приближенных значений корня можно взять числа a_n, b_n или их среднее. В силу приведенных выше предельных соотношений для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ можно найти приближенный корень уравнения, удовлетворяющий сформулированному требованию точности.

2. Рассмотрим следующий пример приложения метода половинного деления в сфере оценки финансовой эффективности инвестиционных проектов. Ряд экономических терминов, используемых далее в настоящем пункте, считается интуитивно понятным и поясняется кратко; их смысл и трактовка могут быть уточнены в специальной литературе, словарях (см., например, [21, 22]) и Интернет.

Инвестиционный проект – обоснование экономической целесообразности, объема и сроков осуществления капитальных вложений, а также описание практических действий по осуществлению инвестиций. Инвестиции – денежные средства, ценные бумаги, технологии, машины, оборудование, кредиты, имущество, в том числе имущественные права, иные права, имеющие денежную оценку, интеллектуальные ценности, вкладываемые в объекты предпринимательской и иной деятельности в целях получения прибыли и достижения иного полезного эффекта. Капитальные вложения – инвестиции в основной капитал (основные средства).

Инвестиционные проекты подлежат отбору на основе ряда количественных критериев, основанных на показателях финансовой, бюджетной и экономической эффективности; методики применения критериев и расчета указанных показателей разрабатываются и согласуются Министерствами Российской Федерации.

При всём разнообразии методик оценки эффективности инвестиционных проектов, в их основе лежит ряд общих принципов, одним из которых является учет фактора времени. Он выражается, в частности, в неравноценности одинаковых по номиналу, но разновременных доходов и расходов (естественно, считаются более предпочтительными более ранние доходы и более поздние расходы). Учет фактора времени осуществляется посредством пересчета, или приведения всех доходов и расходов к одному моменту времени – обычно к моменту начала проекта. Приведение всех будущих доходов и расходов к текущему моменту времени называется дисконтированием. Дисконтирование осуществляется по специальной процентной ставке, называемой ставкой приведения, или нормой дисконта. Ставка приведения обозначается обычно через i и приурочивается к некоторому периоду времени (обычно к 1 году). Дисконтирование денежных сумм ведется по формуле

$$P = \frac{S}{(1+i)^n},$$

где P – текущая сумма (называемая еще приведенной, современной, капитализированной, дисконтированной), S – будущая сумма, n – временной фактор (точнее, число периодов, к которому приурочена ставка приведения, в сроке, на который проводится дисконтирование). Предлагаем читателям сопоставить данную формулу с формулой вычисления наращенных сумм по схеме сложных процентов, параграф 6.2.

Основными показателями финансовой эффективности инвестиционных проектов являются:

- чистый дисконтированный доход;
- внутренняя норма доходности (ВНД);
- дисконтированный срок окупаемости;
- индекс доходности.

Остановим внимание на расчете ВНД – такой процентной ставки, дисконтирование по которой всех будущих денежных платежей (положительных и отрицательных, доходов и расходов) приводит к равной 0 суммарной приведенной стоимости этих платежей. Иными словами, эта ставка подбирается так, чтобы «уравновесить» все доходы и расходы учетом их распределения во времени. По существу ВНД – это максимальный «порог» банковской процентной ставки по вкладам, превышение которого делает проект убыточным (в таком случае потенциальному инвестору выгоднее вложить имеющиеся средства в банк, а не в подобный проект). Тем самым, если ВНД ниже банковской процентной ставки по вкладам, то в коммерческом отношении такой инвестиционный проект считается неэффективным, и его реализация в плане получения прибыли нецелесообразна. Отметим, что ВНД – относительная характеристика эффективности инвестиционного проекта, не учитывающая его масштабов. Иногда ВНД называют внутренней ставкой доходности.

Рассмотрим простейший с точки зрения финансового анализа инвестиционный проект, заключающийся в единовременном инвестировании в проект некоторой суммы K (расход) и далее в последовательном получении доходов в размере A в конце каждого из N фиксированных временных периодов. Для простоты примем, что ставка приведения приурочена именно к этому периоду времени (что часто выполняется на практике). Соотношение

$$NPV = -K + \sum_{n=1}^{N} \frac{A}{(1+i)^n}$$

представляет собой формулу для вычисления чистого дисконтированного дохода (первого из указанных выше показателей); общепринятое сокращение NPV идет от английского названия данного показателя – Net Present Value. Ясно, что NPV зависит от ставки приведения i, т. е. $NPV = NPV(i)$. При этом ВНД – обозначим ее значение через i^* – по определению вычисляется из условия

$$NPV(i^*) = 0,$$

которое и является частным случаем общего уравнения (6.1). Проводя замену переменной по формуле

$$x = \frac{1}{1+i^*},$$

где $0 < x < 1$ при $i^* > 0$, получаем уравнение

$$-K + A\sum_{n=1}^{N} x^n = 0,$$

или

$$x + x^2 + ... + x^N - K / A = 0.$$

Полученное уравнение является алгебраическим уравнением N-й степени относительно новой переменной x. При $N = 2$ квадратное уравнение решается элементарно. При $N = 3$ и $N = 4$ уравнения 3-й и 4-й степени могут быть решены аналитически, но с существенными сложностями. Однако при $N \geq 5$ не существует формулы, которая позволяет явно с использованием радикалов (т. е. корней некоторой целой степени $\sqrt[m]{...}$) выразить корни уравнения степени N через его коэффициенты (это – фундаментальный математический результат 30-х годов XIX века). В то же время, в реальных проектах значения N могут быть значительно больше 5. В этих условиях единственной возможностью является численное решение подобных уравнений, в частности, рассмотренным выше методом половинного деления.

Проверим применимость данного метода к решению задачи расчета ВНД. Определим функцию

$$f(x) = x + x^2 + ... + x^N - K / A;$$

она является непрерывной (как элементарная функция) и монотонно возрастающей (как сумма возрастающих степенных функций) на отрезке $[0; 1]$, причем

$$f(0) = -K / A < 0, \quad f(1) = N - K / A.$$

Для выполнения условий существования корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $N - K / A > 0$, или $K < AN$. Последнее условие является вполне естественным и означает, что сумма первоначальных инвестиций K меньше суммарного дохода за N периодов по A в каждом, вычисленного чисто бухгалтерским способом, без учета дисконтирования. При выполнении указанного условия существует единственный искомый корень x_0; по найденному методом половинного деления значению x_0 окончательно рассчитывается ВНД по формуле

$$i^* = \frac{1}{x_0} - 1.$$

Замечание 1. В силу формулы (5.8) для суммы элементов геометрической прогрессии справедливо представление

$$x + x^2 + ... + x^N = x(1 + x + ... + x^{N-1}) = x\frac{1 - x^N}{1 - x},$$

позволяющее при вычислении $f(x)$ заменить расчет сумм с большим числом слагаемых работой с более компактным выражением.

Замечание 2. Внутренняя норма доходности может быть вычислена с помощью встроенной финансовой функции «ВСД» табличного процессора Microsoft Office Excel.

§ 6.4. Паутинообразная модель ценообразования

Рассмотрим одну из известных классических моделей экономической динамики, описывающую процесс установления на рынке равновесных цен и называемую паутинообразной моделью. Название данной модели происходит из того, что графическая интерпретация процесса установления равновесной цены (см. рисунок 6.3) напоминает паутину.

Будем считать, что некоторый товар или группа товаров пользуется определенным спросом со стороны потребителей, а объем его на рынке определяется предложением со стороны производителей. И спрос, и предложение товара зависят от его цены – будем обозначать ее через p (конечно, $p > 0$). Основной закон спроса состоит в том, что при повышении цен на товар и неизменных прочих условиях спрос на товар снижается. Соответственно формируется функция спроса $D(p)$ – положительная монотонно убывающая непрерывная функция (ее обозначение происходит от английского слова «Demand» – спрос). Аналогично, основной закон предложения состоит в том, что при повышении цен на товар и неизменных прочих условиях предложение товара повышается. Таким образом, формируется функция предложения $S(p)$ – положительная монотонно возрастающая непрерывная функция (ее обозначение происходит от английского слова «Supply» – предложение). Вообще говоря, законы спроса и предложения могут допускать исключения, но эти исключения не играют решающей роли в общем объеме товарооборота.

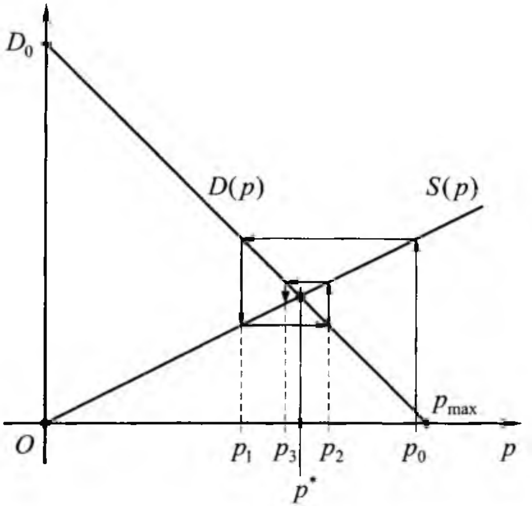

Рисунок 6.3

Равновесная цена – будем обозначать ее через p^* – это такая цена, при которой значения функций спроса и предложения совпадают, т. е.

$$D(p^*) = S(p^*). \tag{6.2}$$

В этом случае нет ни перепроизводства, ни дефицита товаров, спрос покупателей полностью удовлетворен, все произведенные товары реализованы.

Механизм установления равновесных цен носит пошаговый характер и реализуется следующим образом. Всякое производство обладает некоторой «инерцией», выражающейся, в частности, в том, что между планированием производства и появлением на рынке товаров, произведенных в результате данного производственного цикла, всегда существует некоторый временной промежуток (запаздывание, часто называемое ***лагом***). Производитель, приступая к планированию производства на следующий производственный цикл, может принимать во внимание ряд различных факторов. В рассматриваемой модели производитель исходит из того, что по окончании очередного производственного цикла цены на товар сохранятся. В данном предположении производитель планирует и выпускает товар в объеме $S(p)$, где p – цены на товар в начале производственного цикла. Далее в рассматриваемой модели предполагается, что все произведенные товары потребляются, однако при этом с учетом спроса потребителей формируется н о в а я ц е н а товара $\hat{p}$, определяемая из условия

$$D(\hat{p}) = S(p)$$

(т. е. новая цена позволяет потребителям приобрести все товары). Данный процесс повторяется многократно, и в результате формируется последовательность цен $p_0, p_1, p_2, ..., p_n, ...$, соответствующих моментам начала очередного производственного цикла и удовлетворяющих следующему основному соотношению данной модели:

$$D(p_n) = S(p_{n-1}), \quad n = 1, 2, ... \tag{6.3}$$

Проанализируем простейший случай, когда функции спроса и предложения являются линейными:

$$D(p) = D_0 - dp, \quad S(p) = sp,$$

где D_0 – спрос при «нулевой цене», d и s – некоторые положительные параметры. Учитывая общую формулу (6.3), получим:

$$D_0 - dp_n = sp_{n-1},$$

или

$$p_n = \frac{D_0 - sp_{n-1}}{d}. \tag{6.4}$$

Применим последнее соотношение многократно:

$$p_n = \frac{D_0}{d} - \frac{s}{d}p_{n-1} = \frac{D_0}{d} - \frac{s}{d}\left(\frac{D_0}{d} - \frac{s}{d}p_{n-2}\right) =$$

$$= \frac{D_0}{d}\left(1 - \frac{s}{d}\right) + \left(-\frac{s}{d}\right)^2 p_{n-2} =$$

$$= \frac{D_0}{d}\left(1 - \frac{s}{d}\right) + \left(-\frac{s}{d}\right)^2 \left(\frac{D_0}{d} - \frac{s}{d} p_{n-3}\right) =$$

$$= \frac{D_0}{d}\left(1 - \frac{s}{d} + \left(-\frac{s}{d}\right)^2\right) + \left(-\frac{s}{d}\right)^3 p_{n-3} = \ldots =$$

$$= \frac{D_0}{d}\left(1 - \frac{s}{d} + \left(-\frac{s}{d}\right)^2 + \ldots + \left(-\frac{s}{d}\right)^{n-1}\right) + \left(-\frac{s}{d}\right)^n p_0 . \qquad (6.5)$$

Выясним, при каких условиях существует предел последовательности цен. Для суммы элементов геометрической прогрессии со знаменателем $-\dfrac{s}{d}$ справедливо равенство

$$1 - \frac{s}{d} + \left(-\frac{s}{d}\right)^2 + \ldots + \left(-\frac{s}{d}\right)^{n-1} = \frac{1 - (-s/d)^n}{1 + s/d} .$$

Следовательно,

$$p_n = \frac{D_0}{d+s} + \left(p_0 - \frac{D_0}{d+s}\right) \cdot \left(-\frac{s}{d}\right)^n . \qquad (6.6)$$

Тогда при $\left|-s/d\right| < 1$ или, с учетом положительности параметров, при

$$s < d \qquad (6.7)$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} (-s/d)^n = 0 .$$

Переходя к пределу в равенстве (6.6), получаем значение равновесной цены:

$$p^* = \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{D_0}{d+s}$$

и соотношение (6.2), вытекающее в силу непрерывности функций $D(p)$ и $S(p)$ из (6.3) при переходе в нём к пределу при $n \to \infty$.

Вывод: в паутинообразной модели ценообразования при заданных линейных функциях спроса и предложения цены на товар устанавливаются к равновесной цене при выполнении условия (6.7). В этом случае говорят, что равновесие носит устойчивый характер. Применительно к виду графиков функций спроса и предложения условие (6.7) означает, что график функции спроса $D(p)$ должен быть более крутым, чем график функции предложения $S(p)$ (рисунок 6.3). Иными словами, функция спроса должна быть более чувствительной к изменению цен, чем функция предложения.

Замечание. В экономической теории графики функций спроса и предложения принято изображать так, чтобы цена p откладывалась по вертикальной оси ординат, а объемы производства и потребления товаров – по горизонтальной оси абсцисс. В нашем изложении мы не отступаем от предпочтений элементарной математики, в которой значения аргумента откладываются по оси абсцисс, а значения функции – по оси ординат.

С точки зрения теории пределов весьма общим и показательным является следующий подход к анализу данной модели. Проведем его в два этапа.

1. Предположим, что предел последовательности цен существует:

$$p^* = \lim_{n\to\infty} p_n .$$

Тогда, переходя к пределу в равенстве (6.4), получим

$$p^* = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{D_0 - sp_{n-1}}{d} = \frac{D_0 - sp^*}{d},$$

откуда

$$p^* = \frac{D_0}{d+s}.$$

Таким образом, если предел цен существует, то он может быть равен только указанному значению (это значение уже было получено ранее другим способом).

2. Покажем теперь, что предел действительно существует. Рассмотрим следующую разность и преобразуем ее с учетом основного соотношения (6.4):

$$p_n - p^* = \frac{D_0 - sp_{n-1}}{d} - p^* = \frac{D_0 - sp_{n-1}}{d} - \frac{D_0}{d+s} =$$

$$= \frac{D_0}{d} - \frac{D_0}{d+s} - \frac{s}{d} p_{n-1} = D_0 \frac{s}{d(d+s)} - \frac{s}{d} p_{n-1} =$$

$$= \frac{s}{d} \cdot \left(\frac{D_0}{d+s} - p_{n-1} \right) = -\frac{s}{d}\left(p_{n-1} - p^*\right).$$

Следовательно,

$$\left|p_n - p^*\right| = \frac{s}{d}\left|p_{n-1} - p^*\right|.$$

Применяя последнее равенство многократно, получим:

$$\left|p_n - p^*\right| = \left(\frac{s}{d}\right)^n \left|p_0 - p^*\right|.$$

При выполнении условия (6.7) получаем, что $\left|p_n - p^*\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Это и означает, что искомый предел цен существует и равен p^*.

§ 6.5. Поиск информации в базах данных

Функционирование современных экономических структур сопряжено с обработкой больших объемов информации. Такая информация хранится, как правило, в виде компьютерных *баз данных* (БД) различных моделей и структур. Основными элементами БД являются *таблицы* данных, состоящие из *записей* (иначе говоря – строк); графы таблицы БД называются *полями*. Примером БД может служить совокупность всех каталогов библиотеки (алфавитный, систематический, новых поступлений); при этом аналогом таблицы является картотека, аналогом записи – отдельная карточка.

Одной из задач, наиболее часто возникающих при работе с БД, является поиск по таблице определенных данных. Решение (как процесс) задачи поиска заключается в определении той записи в таблице, которая содержит искомые данные; решение (как результат) задачи представляет собой номер нужной записи либо сообщение о том, что искомые данные в таблице не содержатся. Чтобы работа информационных систем была возможна в режиме реального времени, задача поиска должна решаться максимально быстро; данное требование во многом является ключевым критерием при разработке современных информационных систем.

Данные, содержащиеся в таблице БД, в зависимости от их типа можно упорядочить (отсортировать) различными способами:

- данные текстового типа – по алфавиту;
- данные числового типа – по их значениям;
- данные типа даты – по дате и времени.

В настоящем параграфе мы выясним, как влияет на скорость решения задачи поиска наличие или отсутствие упорядоченности данных в таблице БД.

Итак, пусть имеется таблица БД, содержащая N записей. Все записи пронумерованы от 1 до N, и по заданному номеру запись определяется быстро и однозначно. Обозначим через $K_0(N)$ и $K_1(N)$ такое количество обращений к таблице (точнее, операций считывания отдельных ее записей), которое позволит д о с т о в е р н о решить задачу поиска заданной информации по неупорядоченной и по упорядоченной таблице соответственно. Цель наших рассуждений – сопоставить функции $K_0(N)$ и $K_1(N)$ при больших значениях N.

Вычислим функцию $K_0(N)$. При полном отсутствии какой-либо информации о порядке записей в таблице одним из способов поиска является полный последовательный перебор всех записей от первой до последней (можно перебирать записи и от последней к первой, но это не является принципиально лучшей альтернативой при случайном, хаотичном порядке записей). Конечно, может случиться, что искомые данные будут найдены уже при первом обращении к таблице (потребуется 1 обращение); но столь же вероятно, что искомые данные будут найдены лишь при последнем обращении (потребуется N обращений). Для достоверного решения задачи поиска следует ориентироваться именно на это значение, т. е.

$$K_0(N) = N.$$

Оценим функцию $K_1(N)$. При этом мы будем считаем, что записи в таблице отсортированы по значениям, среди которых проводится поиск. В этом случае последовательный перебор уже не является рациональным. Более целесообразно действовать следующим образом. Выбираем запись из «середины» таблицы; если в таблице нечетное число записей, то номер этой записи определен однозначно и равен $(N+1)/2$. Если же число записей в таблице четное, то из двух записей, наиболее близких к середине, можно взять любую (например, при 4-х записях двумя «средними» являются записи с номерами 2 и 3). Если после обращения к таблице данные не найдены, то, сопоставляя искомые данные и данные в прочитанной записи и учитывая наличие упорядоченности в таблице, можно однозначно определить и исключить из дальнейшего рассмотрения ту часть таблицы, которая заведомо не содержит искомых данных. (Пусть, например, числа в таблице упорядочены по возрастанию, искомым является число 100, а прочитанная запись содержит число 50. При этом ясно, что часть таблицы с номерами записей, меньшими, чем прочитанная, не может содержать числа 100). Тем самым объем поиска снижается примерно вдвое. Данный метод поиска также называется д и х о т о м и е й (см. параграф 6.3).

Для решения задачи поиска указанным способом потребуется количество обращений к таблице $K_1(N)$, удовлетворяющее неравенству

$$K_1(N) \le 2 + [\log_2(N-1)]; \tag{6.8}$$

здесь $N \ge 2$, а квадратные скобки обозначают целую часть числа. Вывод данного соотношения приведен в приложении 11.

Приступим к сопоставлению функций $K_0(N)$ и $K_1(N)$, т. е. выясним, насколько поиск по упорядоченной таблице быстрее, чем по неупорядоченной (что это так, ясно и на интуитивном уровне). Рассмотрим отношение $\dfrac{K_1(N)}{K_0(N)}$ и вычислим предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{K_1(N)}{K_0(N)} \le \lim_{N\to\infty} \frac{2+[\log_2(N-1)]}{N}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}=0,\quad \lim_{N\to\infty}\frac{N-1}{N}=1,$$

используя свойство (1.1) целой части и применяя теоремы о пределах, получаем:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2+[\log_2(N-1)]}{N}\le\lim_{N\to\infty}\frac{2+\log_2(N-1)}{N}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{N}+\frac{\log_2(N-1)}{N}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{2}{N}+\lim_{N\to\infty}\frac{\log_2(N-1)}{N}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{\log_2(N-1)}{N}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\log_2(N-1)}{N}\cdot\frac{N-1}{N-1}\right)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{\log_2(N-1)}{N-1}\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{N-1}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\log_2(N-1)}{N-1}=0.$$

Последнее равенство справедливо по причине полной аналогии последнего предела пределу (4.6) при $a=2$, $p=1$, который равен 0. Следовательно, по принципу двусторонней ограниченности предел отношения $\dfrac{K_1(N)}{K_0(N)}$ также равен 0.

Тем самым, в пределе при $N\to\infty$ функция $K_1(N)$ оказывается ничтожно малой по сравнению с функцией $K_0(N)$. Это позволяет сделать следующий вывод: при больших объемах данных поиск по упорядоченным таблицам проводится *несоизмеримо быстрее*, чем по неупорядоченным. Данный факт объясняет ту ситуацию, что современные информационные системы работают, как правило, на основе упорядоченных (точнее говоря, *индексированных*) таблиц БД. Индексирование можно понимать как *условное упорядочивание* записей в таблице, при котором сами таблицы могут быть заполнены хаотично, но отдельно в специальных *индексных файлах* хранится нужный порядок записей (который был бы при их действительном упорядочивании). Преимущество индексации состоит в том, что одну и ту же таблицу можно проиндексировать по нескольким различным элементам данных (в отличие от реальной картотеки, в которой физически возможен только *один* определенный порядок карточек). При этом даже неизбежные дополнительные затраты ресурсов на поддержание индексации (усложнение алгоритмов поиска, необходимость хранения индексных файлов) многократно оправдываются. В этом заключается одно из направлений повышения эффективности работы информационных систем.

§ 6.6. Вычисление площадей фигур с криволинейными границами

Представим, что участок земли примыкает к извилистому ручью таким образом, что три стороны участка являются прямыми линиями – две боковые, параллельные между собой, и одна фронтальная, перпендикулярная боковым. Примыкает к ручью дальняя граница участка, противоположная фронтальной стороне. В плане такой участок (см. рисунок 6.4) имеет форму криволинейной трапеции, фронтальная сторона которого располагается на оси Ox между некоторыми координатами a и b, $a<b$, боковые стороны – на вертикальных прямых $x=a$ и $x=b$, а дальняя граница представляется графиком некоторой функции $f(x)$, описывающей форму береговой линии ручья. (Напомним, что ***криволинейной трапецией*** называется фигура, ограниченная сверху графиком положительной непрерывной функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$ числовой оси, снизу – осью Ox, слева и справа – отрезками вертикальных прямых $x=a$ и $x=b$ соответственно).

Предположим, что для некоторых хозяйственных целей (например, для определения цены участка или для решения спора между хозяйствующими субъектами) возникает необходимость точно вычислить площадь участка земли. Вопрос решался бы элементарно, если бы ручей протекал совершенно прямолинейно и параллельно фронтальной стороне; в этом случае участок земли имел бы форму прямоугольника, площадь которого вычисляется перемножением длин фронтальной и боковой сторон (в этом случае боковые стороны равны). Если бы ручей был просто прямолинейным, то участок имел бы форму трапеции, площадь которой тоже вычисляется элементарно перемножением длины фронтальной стороны (как высоты трапеции) и полусуммы боковых сторон (как оснований трапеции).

Ясно, что рассмотренные упрощенные ситуации не представляются реалистичными, и для случая криволинейных границ такие простые приемы не подходят – можно получить отклонение от действительного значения площади как в меньшую, так и в большую сторону. В этих условиях исключительно продуктивной, вполне прозрачной и интуитивно понятной является следующая идея по вычислению искомой площади.

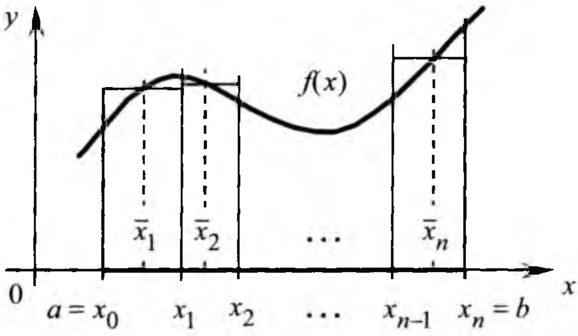

Рисунок 6.4

Разделим мысленно весь измеряемый участок линиями, проведенными параллельно боковым сторонам, на некоторое число полос; при этом разные полосы могут иметь разную ширину. Поскольку полосы, на которые разбивается участок, не перекрываются, то его площадь равна сумме площадей всех полос. Если полосы выбраны достаточно узкими, то в пределах каждой из них ручей извивается «не слишком сильно», так что каждая полоса приближенно имеет форму прямоугольника, и ее площадь, тоже приближенно, может быть вычислена как произведение ширины полосы на ее высоту. Конечно, высота полосы может меняться в зависимости от того, к каком месте полосы она проведена, но это изменение незначительно – ручей не меняет существенно свое русло на столь коротком участке, как ширина полосы. Сумма всех рассчитанных площадей полос приближенно равна искомой площади участка. Интуитивно представляется верным, что чем более узкими выбирать полосы, тем более точно будет вычислена площадь участка. В пределе при неограниченном сужении всех полос получается точное значение площади измеряемого участка земли.

Математически описанную процедуру можно представить следующим образом. Пусть береговая линия представляется функцией $f(x)$ (точнее, функция $f(x)$ равна расстоянию от точки с координатой x на фронтальной стороне по перпендикуляру к ней до береговой линии). Отрезок $[a; b]$ (представляющий в плане фронтальную сторону) разобьем точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, где

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

на некоторое число n подотрезков вида $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. Подотрезки могут быть разной длины, которую будем обозначать через $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Через Δ обозначим максимальную длину подотрезков разбиения:

$$\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n\}.$$

На каждом из подотрезков разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ выберем некоторую промежуточную точку $\bar{x}_i$. При этом значение $f(\bar{x}_i)$ равно высоте прямоугольника, имеющего с соответствующей полосой общее основание, а произведение $f(\bar{x}_i)\Delta_i$ равно площади прямоугольника. «Ступенчатая» фигура, составленная из этих прямоугольников, «близка по расположению» к данной криволинейной трапеции, а площадь $\tilde{S}$ этой фигуры равна сумме площадей всех прямоугольников:

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i .$$

Очевидно, что площадь S криволинейной трапеции приближенно равна площади $\tilde{S}$ построенной ступенчатой фигуры:

$$S \approx \tilde{S} .$$

Составленная сумма $\tilde{S}$ называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Отметим, что эта сумма зависит от выбора и точек разбиения x_i, и промежуточных точек $\bar{x}_i$, хотя это явно и не указано.

Интуитивно ясно, что приведенное приближенное равенство тем точнее, чем меньше максимальная длина подотрезков разбиения Δ и, соответственно, более узкими выбраны вспомогательные прямоугольники. Это замечание приводит к понятию предела интегральных сумм и площади криволинейной трапеции.

Пределом интегральных сумм $\tilde{S}$ при неограниченном уменьшении длин всех подотрезков (т. е. при $\Delta \to 0+0$) называется число I, удовлетворяющее следующему условию: для любого числа $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого) существует такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения отрезка $[a; b]$ на подотрезки, максимальная длина Δ которых меньше δ, независимо от выбора промежуточных точек $\bar{x}_i$ выполняется неравенство

$$|\tilde{S} - I| < \varepsilon .$$

Факт существования такого предела можно обозначить записью

$$I = \lim_{\Delta \to 0+0} \tilde{S} .$$

Предел I интегральных сумм называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx ,$$

где a и b – нижний и верхний пределы интегрирования. Этот же предел принимается и в качестве площади S рассматриваемой криволинейной трапеции:

$$S = I .$$

Приведенное соотношение выражает основной геометрический смысл определенного интеграла, состоящий в его равенстве площади соответствующей криволинейной трапеции.

Важно еще раз отметить, что интегральная сумма $\tilde{S}$ не определяется однозначно только значением Δ, поскольку зависит еще от точек x_i и $\bar{x}_i$. Иными словами, каждому значению Δ может соответствовать не одно значение $\tilde{S}$, а множество различных значений (чаще всего даже бесконечное). Таким образом, рассмотренный предел при $\Delta \to 0+0$ является некоторым обобщением классического понятия предела функции.

Построенный данным образом интеграл носит название интеграла Римана*. В курсе интегрального исчисления доказывается, что определенный интеграл (т. е. предел указанного вида) существует для любой непрерывной и любой монотонной на отрезке функции.

Контрольные вопросы

1. Что такое модель по научной терминологии?
2. Что такое математическая модель?
3. Чем обусловлена актуальность применения математических моделей для исследования экономических процессов?
4. Спрос на какие группы товаров моделируется функциями Торнквиста?
5. Какой экономический смысл имеет аргумент функций Торнквиста?
6. В чём состоит различие между схемой простых процентов и схемой сложных процентов?
7. По каким формулам проводится расчет наращенных сумм и процентов по схемам простых и сложных процентов?
8. Приведите пример функции, заданной на некотором отрезке, принимающей значения разных знаков на концах отрезка и не имеющей корня на данном отрезке. (Пояснение: функция не должна быть непрерывной на отрезке).
9. Приведите пример функции, заданной и непрерывной на некотором отрезке, принимающей значения разных знаков на концах отрезка и имеющей два различных корня на данном отрезке.
10. Что такое дихотомия?
11. Что означает «локализовать» корень уравнения?
12. Что такое дисконтирование и по какой формуле оно осуществляется?

* Риман Георг – немецкий математик середины XIX в.

13. Как определяется внутренняя норма доходности и каким образом она характеризует эффективность инвестиционного проекта?

14. Что представляет собой простейший с точки зрения финансового анализа инвестиционный проект?

15. Как определяется чистый дисконтированный доход?

16. По какой формуле вычисляется чистый дисконтированный доход простейшего инвестиционного проекта?

17. Из какого соотношения определяется внутренняя норма доходности простейшего инвестиционного проекта?

18. Выполнение какого условия обеспечивает существование внутренней нормы доходности простейшего инвестиционного проекта?

19. Каков экономический смысл функций спроса и предложения в паутинообразной модели установления равновесных цен на рынке?

20. Какими свойствами должны обладать функции спроса и предложения в паутинообразной модели?

21. В чём состоит процесс установления равновесных цен на рынке в паутинообразной модели?

22. Что такое равновесная цена?

23. Какое соотношение связывает начальную и новую цены товара в паутинообразной модели?

24. Какие требования к виду графиков функций спроса и предложения в паутинообразной модели должны выполняться для обеспечения устойчивого характера равновесия и существования равновесной цены?

25. Поясните, как применяется принцип двусторонней ограниченности при вычислении предела отношения функций, характеризующих число обращений к таблице БД при различных вариантах поиска данных. Какой вывод позволяет сделать полученное значение данного предела?

26. Что такое криволинейная трапеция?

27. Как определяется площадь криволинейной трапеции?

28. Дайте определение предела интегральных сумм.

29. В чём состоит особенность определения предела интегральных сумм по сравнению с классическим определением предела функции в точке?

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Установите аналитически, пересекают ли графики функций Торнквиста свои асимптоты. Результаты сопоставьте с приведенным рисунком.

6.2. Предположим, что функции Торнквиста определены для всех значений аргумента, при которых имеют смысл выражения, представляющие данные функции. Найдите при этом условии асимптоты графиков полученных функций в минус бесконечности.

6.3. Выясните, существуют ли асимптоты у квадратов функций Торнквиста.

6.4. Для функции Торнквиста, представляющей спрос на товары первой необходимости, известны пределы

$$\lim_{I\to 0+0}\frac{Q_1(I)}{I}=k>0 \quad \text{и} \quad \lim_{I\to +\infty}Q_1(I)=m>0\,.$$

Вычислите параметры a и b данной функции.

6.5. Первоначальная сумма равна 100 усл. ден. единицам. Вычислите наращенную сумму по схемам простых и сложных процентов для случаев:

1). $i=10\,\%$, $n=10$; 2). $i=20\,\%$, $n=5$.

6.6. Какое значение должна иметь годовая процентная ставка, чтобы за 5 лет первоначальная сумма удвоилась при наращении по схемам простых и сложных процентов?

6.7. Докажите, что простые проценты больше сложных для случая, когда срок начисления равен 2/3 периода начисления.

6.8. Пусть $S>P$, $i>0$ – некоторые параметры, $n_0(S)$ – корень уравнения $S=P(1+in)$, $n_1(S)$ – корень уравнения $S=P(1+i)^n$ относительно переменной n. Докажите, что

$$\lim_{S\to+\infty}\frac{n_0(S)}{n_1(S)}=+\infty\,.$$

Дайте содержательную интерпретацию введенных величин $n_0(S)$ и $n_1(S)$ и рассмотренного предела.

6.9. Пусть $S>P$, $n>0$ – некоторые параметры, $i_0(S)$ – корень уравнения $S=P(1+in)$, $i_1(S)$ – корень уравнения $S=P(1+i)^n$ относительно переменной i. Докажите, что

$$\lim_{S\to+\infty}\frac{i_0(S)}{i_1(S)}=\begin{cases}0, & n<1\\ 1, & n=1\\ +\infty, & n>1\end{cases}.$$

Дайте содержательную интерпретацию введенных величин $i_0(S)$ и $i_1(S)$ и рассмотренного предела.

6.10. Пусть $S>P$, $n>0$ – некоторые параметры, $i_0(n)$ – корень уравнения $S=P(1+in)$, $i_1(n)$ – корень уравнения $S=P(1+i)^n$ относительно переменной i. Вычислите предел отношения

$$\frac{i_0(n)}{i_1(n)}\,.$$

при $n\to0+0$ и $n\to+\infty$.

6.11. По приведенному в тексте словесному описанию составьте алгоритм поиска корня уравнения с заданной абсолютной погрешностью.

6.12. Вычислите чистый дисконтированный доход простейшего инвестиционного проекта, рассчитанного на 1 год, с инвестируемой суммой 100 усл. ден. единиц, ежемесячным доходом 10 усл. ден. единиц в конце месяца и ставкой приведения 1 % в месяц.

6.13. Рассматривается простейший инвестиционный проект, рассчитанный на 1 год, с инвестируемой суммой 100 усл. ден. единиц и ежемесячным доходом 10 усл. ден. единиц в конце месяца. Вычислите внутреннюю норму доходности данного проекта методом половинного деления, проведя 5 итераций. Предварительно подберите подходящий отрезок, содержащий искомое значение внутренней нормы доходности.

6.14. Вычислите значения параметров D_0 и d функции спроса $D(p) = D_0 - dp$, если известны функция предложения $S(p) = 2p$, равновесная цена $p^* = 5$ и значение $D(p^* / 2) = 20$.

6.15. Таблица содержит числа 84, 11, 36, 99, 57, 45, 72, 68, 23 в приведенном порядке. Проведите поиск по данной таблице чисел 45 и 46 двумя способами: 1) методом полного последовательного перебора; 2) методом дихотомии после упорядочивания чисел в данной таблице по возрастанию.

6.16. Таблица БД содержит 100 000 записей. Поиск по таблице в случае ее упорядоченности занимает не более 1 секунды. Оцените, сколько времени может занять поиск по той же таблице в случае, если она неупорядочена.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Карасёв А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для экономических вузов. Часть I. Основы высшей математики: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.

2. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. Под. ред. проф. Кремера Н. Ш. – 2-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 471 с.

3. Кузнецов Б. Т. Математика: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000). – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 719 с.

4. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г. Математика в экономике: Учебник. В 2-х ч. Ч. 2 – М.: Финансы и статистика, 2007 – 560 с.

5. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 575 с.

7. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2009. – 464 с.: ил.

8. Малыхин В. И. Высшая математика: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2012. – 365 с.

Дополнительная литература

9. Большой энциклопедический словарь. Математика. – М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия», 2000. – 848 с.

10. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Часть 1. Учебник для вузов. – 5-е изд. – М.: Наука, 2000. – 616 с.

11. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Учеб. для студентов университетов и вузов. Т. 1. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.

12. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1. Учебник для вузов. – 4-е изд. – М.: Наука, 1990. – 528 с.

13. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – СПб.: Лань, 1997. – 608 с.

14. Кириллов А. А. Пределы. – М.: Наука, 1973. – 96 с.

15. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2003. – 558 с.

16. Шипачев В. С. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1994. – 192 с.

17. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2006. – 240 с.

18. Шершнев В. Г. Математический анализ: Учебное пособие. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 288 с.

19. Шершнев В. Г. Математический анализ: сборник задач с решениями: Учебное пособие. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 164 с.

20. Четыркин Е. М. Финансовая математика: Учебник. – М.: Дело, 2002. – 400 с.

21. Райзберг Б. А., Лозовский Л. Ш., Стародубцева Е. Б. Современный экономический словарь. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 496 с.

22. Российский торгово-экономический словарь / Под ред. С. Н. Бабурина. – М.: Экономисть, 2005. – 525 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1.
Строгие формальные определения пределов функций

В данном приложении приведены строгие определения всех пределов, рассмотренных в настоящем пособии, за исключением определений, уже данных ранее в основном тексте. Чтобы подчеркнуть единообразие формулировок, добиться лаконичности и систематичности изложения и, возможно, лучшего усвоения материала, использованы следующие приемы:

1) некоторые из определений собраны вместе и представлены в табличной форме;

2) в приводимых определениях использован знак «//» (двойная косая черта), означающий, что из двух слов, символов или формул, соединенных данных знаком, во всём определении выбирается только та часть, которая стоит либо до этого знака, либо после него; аналогично трактуется и запись с тремя компонентами вида « ... // ... // ... » (последние два определения).

Бесконечный определенного знака предел функции в точке.

Функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный $+\infty$ // $-\infty$, если для любого числа $B > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условиям

$$x \neq a, \quad |x - a| < \delta,$$

выполняется соотношение

$$f(x) > B \quad // \quad f(x) < -B .$$

Конечный односторонний предел функции в точке.

Функция $f(x)$ имеет в точке a слева // справа предел, равный числу b, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условиям

$$|x - a| < \delta, \quad x < a \;//\; x > a,$$

выполняется соотношение

$$|f(x) - b| < \varepsilon .$$

Бесконечные односторонние пределы функции в точке.

Функция $f(x)$ имеет в точке a слева // справа предел, равный		
$-\infty$,	∞,	$+\infty$,
если для любого числа $B>0$ найдется такое число $\delta>0$, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условиям $\lvert x-a\rvert<\delta$, $x<a$ // $x>a$, выполняется соотношение		
$f(x)<-B$	$\lvert f(x)\rvert>B$	$f(x)>B$

Конечный предел функции в бесконечности.

Функция $f(x)$ имеет в $-\infty$ // ∞ // $+\infty$ предел, равный числу b, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $A>0$, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию

$$x<-A \;//\; \lvert x\rvert>A \;//\; x>A,$$

выполняется соотношение $\lvert f(x)-b\rvert<\varepsilon$.

Бесконечные пределы функции в бесконечности.

Функция $f(x)$ имеет в $-\infty$ // ∞ // $+\infty$ предел, равный		
$-\infty$,	∞,	$+\infty$,
если для любого числа $B>0$ найдется такое число $A>0$, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $x<-A$ // $\lvert x\rvert>A$ // $x>A$, выполняется соотношение		
$f(x)<-B$	$\lvert f(x)\rvert>B$	$f(x)>B$

В приведенных определениях, как обычно, принято следующее:

– число ε может быть выбрано сколь угодно малым (в определении конечных пределов);

– число B может быть выбрано сколь угодно большим (в определении бесконечных пределов);

– числа δ и A выбираются в зависимости от чисел ε и B; как правило, число δ является «малым», а число A – «большим» (см. классификацию пределов, параграф 3.5).

Приложение 2.
Предельные свойства основных элементарных функций

В следующей таблице приведены пределы в бесконечности основных элементарных функций, непосредственно следующие из свойств данных функций.

Пределы	**Значения параметров**
Степенная функция	
$\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$	$n = 1, 2, \ldots$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	$n = 1, 2, \ldots$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$	$n = 2, 4, \ldots$ (n – четное)
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$	$n = 1, 3, \ldots$ (n – нечетное)
$\lim\limits_{x\to\infty} x^{-n} = 0$	$n = 1, 2, \ldots$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-a} = 0$	$a > 0$
Показательная функция	
$\lim\limits_{x\to+\infty} c^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} c^x = 0$	$c > 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} c^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} c^x = +\infty$	$0 < c < 1$

Пределы	Значения параметров
Логарифмическая функция	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_c x = +\infty$	$c > 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_c x = -\infty$	$0 < c < 1$
Обратные тригонометрические функции	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$	–
$\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$	–

Приложение 3. Сводка основных пределов

В следующей таблице приведены основные рассмотренные в пособии пределы, не вытекающие непосредственно из свойств основных элементарных функций.

Предел	Параграф	Формула	Комментарий
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	2.1	(2.1)	Первый замечательный предел
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$	2.1	(2.2)	–
$\lim\limits_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	2.2	(2.4)	Второй замечательный предел
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$	2.2	(2.5)	–

Предел	Параграф	Формула	Комментарий
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	2.2	(2.6)	–
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$	2.3	(2.9)	–
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$	2.7	(2.14)	$a>0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$	2.7	(2.15)	a – любое
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$	4.1	(4.1)	–
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$	4.1	(4.2)	–
$\lim\limits_{x\to 0+0} x^x=1$	4.2	(4.4)	–
$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\log_a x}{x^p}=0$	4.3	(4.6)	$a>1, \quad p>0$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a^x}{x^p}=+\infty$	4.3	(4.7)	$a>1, \quad p>0$

Приложение 4. Пример доказательства существования предела функции в точке

В параграфе 1.2 приведены непосредственные доказательства существования простейших пределов. В настоящем приложении разберем несколько более сложный пример.

Установим справедливость равенства

$$\lim_{x\to 5} x^2 = 25 .$$

Действуя по определению предела, выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и фиксируем его. Нам необходимо установить справедливость неравенства

$$|\, x^2 - 25 \,| < \varepsilon \tag{П4.1}$$

при условии, что аргумент x достаточно близок к числу 5 и $x \neq 5$. Условие близости, как мы знаем, записывается в виде неравенства

$$|\, x - 5 \,| < \delta \tag{П4.2}$$

при некотором подходящем значении $\delta > 0$. Доказательство требуемого равенства проведем двумя способами.

1 способ. Запишем неравенство (П4.1) в виде

$$-\varepsilon < x^2 - 25 < \varepsilon ,$$

или

$$25 - \varepsilon < x^2 < 25 + \varepsilon .$$

В определении предела выбор числа ε можно подчинить дополнительному условию $\varepsilon \leq 1$; при этом ограничении последнее двустороннее неравенство следует из неравенства

$$\sqrt{25 - \varepsilon} < x < \sqrt{25 + \varepsilon} ,$$

которое равносильно соотношению

$$\sqrt{25 - \varepsilon} - 5 < x - 5 < \sqrt{25 + \varepsilon} - 5 .$$

Левая часть полученного неравенства отрицательна, правая – положительна. Исходя из вида этих частей неравенства, выберем число δ следующим образом:

$$\delta = \min\left\{5 - \sqrt{25 - \varepsilon}; \sqrt{25 + \varepsilon} - 5 \right\} > 0 .$$

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно установить, что из неравенства (П4.2) при указанном значении δ следует требуемое неравенство (П4.1).

На этом доказательство первым способом завершается.

2 способ. Неравенство (П4.2) равносильно двустороннему неравенству

$$-\delta < x-5 < \delta .$$

Прибавляя 10 ко всем частям этого неравенства, получим:

$$10-\delta < x+5 < 10+\delta . \qquad (П4.3)$$

Поскольку в определении предела нет никаких ограничений на значение числа δ (кроме его положительности), то можно подчинить его выбор дополнительному условию

$$\delta \le 1 . \qquad (П4.4)$$

Действительно, если неравенство (П4.1) справедливо для всех значений x, удовлетворяющих (П4.2), то оно будет тем более справедливо при $|x-5| < \min\{\delta; 1\}$ (данное условие – более жесткое). Поэтому число δ можно сразу выбирать так, чтобы выполнялось (П4.4). Данное ограничение облегчит нам дальнейшую работу с неравенством.

Именно, при этом дополнительном условии из неравенства (П4.3) следует:

$$9 < x+5 < 11 .$$

Поскольку величина $x+5$ положительна, то $x+5 = |x+5|$, и

$$|x+5| < 11 . \qquad (П4.5)$$

Таким образом, из неравенства (П4.2) при условии (П4.4) следует (П4.5).

Преобразуя левую часть (П4.1) по формуле разности квадратов

$$x^2-25 = (x-5)(x+5) ,$$

с учетом (П4.5) получаем оценку

$$|x^2-25| = |x-5|\cdot|x+5| \le 11|x-5| . \qquad (П4.6)$$

Последнее соотношение показывает, что каждое решение неравенства

$$11|x-5| < \varepsilon \qquad (П4.7)$$

является также и решением (П4.1) (т. е. при условии (П4.4) неравенство (П4.7) «сильнее», чем (П4.1)). Кроме того, неравенство (П4.7) проще (П4.1), легко решается и может быть записано в виде

$$|x-5|<\varepsilon/11.$$

Выберем $\delta=\min\{\varepsilon/11;1\}>0$, так что $\delta\le\varepsilon/11$ и $\delta\le 1$. Тогда при выбранном δ для любого значения аргумента x, удовлетворяющего условию (П4.2), с учетом (П4.6) следует выполнение неравенства (П4.1):

$$|x^2-25|\le 11|x-5|<11\cdot\delta\le\varepsilon.$$

Тем самым, требуемое равенство доказано и вторым способом.

Замечание. Даже для столь простого предела соответствующее доказательство, выполняемое строго по определению, требует проведения ряда развернутых арифметических и логических операций. Это еще раз подчеркивает действенность основных теорем о пределах, рассмотренных в параграфе 1.5.

Приложение 5.
Пример предела степенно-показательной функции

В дополнение к материалу параграфа 1.5 покажем, что предел, символически записанный в виде $(+\infty)^0$, может принимать произвольные положительные значения. Для этого рассмотрим элементарное тождество

$$z=e^{\ln z},$$

выполняющееся для всех $z>0$. Подставляя в него $z=1/x^2$, $x\ne 0$, получим равенство

$$\frac{1}{x^2}=e^{-\ln x^2},$$

из которого после возведения в степень $-1/\ln x^2$ следует:

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{\ln x^2}}=e$$

(знаменатель не должен обращаться в 0, так что дополнительно требуем, чтобы $\ln x^2\ne 0$, т. е. $|x|\ne 1$). Полученное равенство возведем в произвольную степень $p\in(-\infty;+\infty)$:

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{p}{\ln x^2}} = e^p .$$

Полученное тождество выполняется для всех значений аргумента x при $x \neq 0$, $|x| \neq 1$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{p}{\ln x^2}} = e^p .$$

Правая часть последнего равенства в силу свойств показательной функции может быть любым положительным числом в зависимости от значения параметра p. Левая часть этого равенства как раз и представляет предел вида $(+\infty)^0$, поскольку может быть записана в виде

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)},$$

где

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = -\frac{p}{\ln x^2},$$

причем

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -p\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln x^2} = -p\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\ln|x|} = 0 .$$

Полученные соотношения завершают иллюстрацию того, что предел вида $(+\infty)^0$ может принимать любые положительные значения.

Приложение 6.
Примеры доказательств бесконечной малости последовательностей

В продолжение материала параграфа 5.2 исследуем некоторые числовые последовательности и установим их бесконечную малость. Рассмотрим два примера.

Пример 1. Проведем анализ числовой последовательности $\{x_n\}$ с элементами

$$x_n = \frac{1}{n^3 - n + 1}.$$

Поскольку при $n \geq 1$ справедливо $n^2 \geq 1$, то $n^3 \geq n$ и $n^3 - n + 1 \geq 1$; тем самым, знаменатель данной дроби не обращается в 0 ни при каких натуральных n, и числовая последовательность $\{x_n\}$ определена корректно. Для установления бесконечной малости заданной последовательности достаточно для любого положительного числа ε найти такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{1}{n^3 - n + 1}\right| < \varepsilon .$$

Последнее неравенство в силу положительности знаменателя равносильно условию

$$n^3 - n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}, \tag{П6.1}$$

которое представляет собой кубическое неравенство относительно n. Как известно, непосредственное решение кубического неравенства представляет собой существенные сложности. С другой стороны, для достижения поставленной цели – доказательства бесконечной малости заданной последовательности – точное решение полученного неравенства не является необходимым. Вполне достаточно лишь установить надлежащее «пороговое» значение N, начиная с которого это неравенство становится верным. Имея это в виду, преобразуем неравенство (П6.1) следующим образом. Пусть $n \geq 2$; тогда $n^2 \geq 4$, откуда $n^3 \geq 4n$, $n^3 - n \geq 3n$ и

$$n^3 - n + 1 \geq 3n + 1. \tag{П6.2}$$

Левую часть неравенства (П6.1) заменим заведомо меньшим либо равным значением $3n + 1$ и рассмотрим новое неравенство

$$3n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{П6.3}$$

Ключевыми в проведенной замене являются следующие два момента, определяющие ее общий эффект:

– каждое число $n \geq 2$, являющееся решением неравенства (П6.3), в силу оценки (П6.2) является также решением неравенства (П6.1); как говорят, неравенство (П6.3) является более «сильным», чем неравенство (П6.1);

– полученное неравенство (П6.3) решается элементарно и равносильно условию

$$n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right).$$

Поскольку число n – целое, то по свойству (1.1) целой части числа для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы

$$n \geq \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1.$$

Учитывая, что все упрощения справедливы при $n \geq 2$, проведем выбор «порогового» значения N следующим образом:

$$N = \max\left\{2; \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1\right\}.$$

В результате такого выбора получаем, что при всех $n \geq N$ справедливы неравенства

$$n \geq N \geq \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1 > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right).$$

Следовательно, для этих значений n выполняется (П6.3) и, соответственно, неравенство (П6.1), представляющее собой условие бесконечной малости заданной числовой последовательности. Тем самым поставленная задача решена. Отметим еще раз, что незначительное усложнение проводимых рассуждений позволило нам избежать необходимости решения кубического неравенства – весьма трудной алгебраической задачи.

Далее, существуют простые примеры числовых последовательностей, при исследовании которых возникают неравенства, вообще не разрешимые в явном виде.

Пример 2. Рассмотрим числовую последовательность с элементами

$$x_n = \frac{1}{2^n - n}$$

и установим ее бесконечную малость. Для этого, прежде всего, методом математической индукции (см., например, [9]) докажем неравенство

$$2^n \geq 2n \tag{П6.4}$$

для всех $n \geq 1$. Очевидно, что для $n = 1$ данное неравенство справедливо. Предположим, что это неравенство выполняется для некоторого натурального $n = k$, т. е.

$$2^k \geq 2k .$$

С учетом данного индуктивного предположения справедлива следующая цепочка неравенств:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot 2k = 2(k+k) \geq 2(k+1) .$$

Следовательно, неравенство (П6.4) справедливо и для $n = k + 1$. Принцип математической индукции устанавливает, что неравенство (П6.4) действительно справедливо для всех натуральных n. Из неравенства (П6.4), в частности, следует, что

$$2^n - n \geq n , \tag{П6.5}$$

знаменатель дроби в определении x_n не обращается в 0 ни при каких натуральных n, и числовая последовательность $\{x_n\}$ определена корректно.

Для установления бесконечной малости заданной последовательности достаточно для любого числа $\varepsilon > 0$ найти такой номер N, что для всех номеров $n \geq N$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{2^n - n} < \varepsilon ,$$

равносильное условию

$$2^n - n > \frac{1}{\varepsilon} . \tag{П6.6}$$

Точное решение неравенства (П6.6) в явном виде выразить невозможно. Для продолжения решения заменим сложное неравенство (П6.6) более «сильным» и существенно более простым неравенством

$$n > \frac{1}{\varepsilon};$$

действительно, в силу (П6.5) любое решение последнего неравенства является решением (П6.6). Поскольку число n – целое, то по свойству (1.1) целой части числа для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы

$$n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = N,$$

где через N обозначено надлежащее «пороговое» значение. В результате такого выбора получаем, что при всех $n \geq N$ справедливо неравенство (П6.6), равносильное условию бесконечной малости заданной числовой последовательности.

Приложение 7. Финансовая интерпретация второго замечательного предела

В настоящем приложении (как и выше в параграфе 6.2, посвященном смежной тематике), используется ряд терминов из области финансов (они записаны вразрядку); пояснение всех терминов можно найти в специальной литературе, соответствующих словарях (например, [21, 22]) и в Интернет.

Предположим, что некоторый банк A предлагает клиентам разместить в нём денежные средства на депозит под процентную ставку 100 % годовых. Это означает, что, разместив в банке некоторую первоначальную сумму P руб., клиент по истечении года получит от банка как саму первоначальную сумму, так и процент I руб., составляющий 100 % от первоначальной суммы. Всего от банка клиент получит наращенную сумму S руб. в размере $P+I$ руб., равную в данном случае

$$S = P + I = P + P = 2P.$$

При этом отношение наращенной и первоначальной сумм – обозначим его через K_1 – является величиной безразмерной, называется множителем, или коэффициентом наращения:

$$K_1 = \frac{S}{P} = 2.$$

Отметим, что в данном случае срок начисления (т. е. промежуток времени, в течение которого деньги использовались банком) и период начисления (т. е. промежуток времени, к которому приурочена процентная ставка) равны 1 году.

Далее, пусть другой банк B предлагает клиентам разместить в нём депозит под процентную ставку 50 % за полгода. В этом случае клиент, получив за первое полугодие наращенную сумму в размере

$$S = P + P\frac{50\,\%}{100\,\%} = P + 0{,}5P = 1{,}5P,$$

сможет закрыть вклад и использовать эту сумму вновь в качестве начальной на второе полугодие; по истечении 1 года новая наращенная сумма будет равна

$$1{,}5P + 1{,}5P\frac{50\,\%}{100\,\%} = 1{,}5P + 0{,}5 \cdot 1{,}5P = 1{,}5 \cdot 1{,}5P = 1{,}5^2 P.$$

При этом множитель наращения за весь год равен

$$K_2 = 1{,}5^2 = 2{,}25 > K_1.$$

В данном примере срок начисления процентов равен одному году, а период начисления – половине года, так что в сроке начисления укладывается ровно 2 периода начисления; это число и указано в качестве индекса у множителя K.

Далее, пусть третий банк C предлагает клиентам разместить в нём депозит под процентную ставку 25 % за квартал. Действуя аналогично, клиент при данной схеме начисления процентов получит за год сумму

$$S = 1{,}25^4 P,$$

а множитель наращения за год примет значение

$$K_4 = 1{,}25^4 = 2{,}44140625 > K_2.$$

Просчитав множители наращения за 1 год при аналогичных схемах начисления процентов для периодов начисления в 1 месяц и 1 день (365 дней в невисокосном году), получим следующие значения:

$$K_{12}=\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\approx 2{,}61303,$$

$$K_{365}=\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}\approx 2{,}71456$$

(значения приведены с точностью 5 десятичных знаков с округлением в меньшую сторону). Очевидны соотношения:

$$K_{365}>K_{12}>K_4>K_2>K_1.$$

В общем случае множители наращения вычисляются по формуле

$$K_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

которая представляет числовую последовательность (5.14), имеющую при бесконечном уменьшении периода начисления предел, равный основанию натуральных логарифмов e:

$$\lim_{n\to\infty}K_n=e.$$

Таким образом, формальное определение числа e через предел (5.14) тесно связано с реальными применяемыми практически схемами финансовых операций.

Замечание 1. Во избежание непродуктивной работы, связанной с переоформлением вкладов по окончанию периода начисления, банки вынуждены проводить начисление процентов по сложной ставке, при которой начисленные и не выплаченные проценты автоматически присоединяются к первоначальной сумме, и дальнее сумма процентов исчисляется из уже увеличенной суммы. Операция присоединения процентов к основной сумме называется *капитализацией процентов*.

Замечание 2. Ставка 100 % годовых представляется нереальной в стабильных экономических условиях; она принята такой для упрощения расчетов и получения более наглядных результатов. В то же время, на отдельных (обычно кризисных) этапах экономических преобразований могут использоваться и боле высокие значения процентной ставки. Например, ставка рефинансирования, устанавливаемая Центральным Банком Российской Федерации, с конца марта 1993 г. по август 1996 г. превышала 100 %, а с октября 1993 г. по июнь 1994 г. – 200 % годовых.

В дополнение отметим, что на практике широко распространена схема начисления процентов с их промежуточной капитализацией, проводимой некоторое число раз (обозначим его через m) в течение срока начисления (обычно принимаемого равным 1 году). При такой схеме наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^m,$$

где i – номинальная годовая процентная ставка, выраженная в долях единицы. С ростом m наращенная сумма S увеличивается, причем

$$\lim_{m\to\infty} S = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^m = P\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}}\right)^i =$$

$$= P\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}}\right)^i = Pe^i,$$

а множитель наращения в этом случае равен e^i. Начисление по данной схеме называется непрерывным начислением процентов, а эффективная годовая процентная ставка данного процесса наращения равна $e^i - 1$. Следовательно, и финансовая схема непрерывного начисления процентов тесно связана с числом e, определяемым вторым замечательным пределом.

Замечание 3. Интуитивно ясно, что эффективная и номинальная годовая процентная ставки должны быть связаны соотношением $e^i - 1 > i$. Можно строго доказать, что это действительно справедливо.

Замечание 4. Столь частая капитализация процентов – вплоть до ежедневной – действительно встречалась в мировой финансовой практике, когда в условиях законодательных ограничений сверху на номинальную годовую процентную ставку увеличение числа операций по капитализации процентов позволяло несколько повысить эффективную процентную ставку, чем в большей степени привлечь клиентов.

Приложение 8.
Типовые примеры из Интернет-тестов

В настоящем приложении собраны задания, относящиеся к тематике учебного пособия и предлагавшиеся в последние годы на Интернет-тестах студентов экономических специальностей. Тесты приведены с минимальными изменениями без прямого заимствования. Разные тесты выдержаны в различных стилях, так что отдельные тестовые задания не снабжены вариантами ответов.

Тестовое задание	Варианты ответов	Правильный ответ
$\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}\right)=\ldots$	а) 1/28 б) 1/43 в) 1/48 г) 1/24	г)
$\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x^2-9}{x^3-3^3}\right)=\ldots$	а) 1/8 б) 1/9 в) 1 г) 0,2 д) 2/9	д)
$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{3x}\right)=\ldots$	а) 1/2 б) 2/3 в) 4/3 г) 1	б)
$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}\right)=\ldots$	а) 1/2 б) 2 в) 1 г) 0	б)

Тестовое задание	Варианты ответов	Правильный ответ
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-13x+42}{9x+x^2-90}=\ldots$	а) –1/21 б) ∞ в) 7/15 г) 1	г)
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-17x+66}{14x+x^2-120}=\ldots$	а) ∞ б) 11/20 в) 1 г) –5/26	в)
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^6-32x+36}{7x^6-32x^5+36}=\ldots$	а) –1/32 б) 12/7 в) ∞ г) 1	б)
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^{11}+3x^9+36}{3x^{11}+18x+36}=\ldots$	а) ∞ б) 6 в) 1 г) –1/22	б)
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=\ldots$	а) 1 б) $\sqrt{e}$ в) 1/2 г) e^3 д) e^{-3}	г)
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x}\right)^{x}=\ldots$	а) 0 б) 7 в) e^7 г) 1	в)
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x}\right)^{x}=\ldots$	а) e^9 б) 1 в) 0 г) 9	в)
$\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-4x}=\ldots$	а) – 4 б) 0 в) ∞ г) 4	б)

Тестовое задание	Варианты ответов	Правильный ответ
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-6x}{x^3-x}=\ldots$	–	1
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}=\ldots$	–	3
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{x^2}=\ldots$	–	2
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\ldots$	–	0
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2x}=\ldots$	–	1
$\lim\limits_{x\to0+}x\ln x=\ldots$	–	0
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x}=\ldots$	–	2
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^3}=\ldots$	–	4
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+8x}{4x^2+1}=\ldots$	–	1
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-2x^4+\ldots}{-7x^5+5x^4+\ldots}=\ldots$	–	–3/7
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sqrt{1-2x}-2}{x}=\ldots$	–	–2
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-17n+52}{13n+n^2-68}=\ldots$	а) 13/17 б) 1 в) –3/7 г) $+\infty$	б)

Тестовое задание	Варианты ответов	Правильный ответ
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{12n^3 - 24n + 34}{5n^3 - 11n^2 + 34} = \ldots$	а) 1 б) –1/24 в) 12/5 г) ∞	в)
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^n = \ldots$	а) 1 б) 0 в) 5 г) e^5	г)
$\lim\limits_{x\to -3-0} 3^{\frac{-3}{x+3}} = \ldots$	а) $+\infty$ б) 3 в) 0 г) –3 д) 1	а)
Примером неограниченной последовательности является последовательность	а) $-1, 2, -1, 2, -1, \ldots$ б) $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4,$ в) $1, 2, 1, 3, 1, 4, \ldots$ г) $1, 1, 1, 1, \ldots$	в)
Примером бесконечно малой последовательности является последовательность	а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ б) $1, -1, 1, -1, \ldots$ в) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ г) $3, 2, 1, 0, -1, \ldots$	а)
Примером бесконечно большой последовательности является последовательность	а) $1, -1, 1, -1, \ldots$ б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ в) $0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, \ldots$ г) $-1, -2, -3, -4, \ldots$	г)

Тестовое задание	**Варианты ответов**	**Правильный ответ**
Примером сходящейся последовательности является последовательность	а) $1, -1, 1, -1, \ldots$ б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ в) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ г) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots$	б)
Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 3a_n - 5$, $a_1 = 4$. Тогда третий член этой последовательности a_3 равен …	а) 5 б) 8 в) 16 г) 21	в)
Общий член последовательности $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{11}, \frac{3}{18}, \ldots$ имеет вид …	а) $a_n = \frac{n-1}{n^2+1}$ б) $a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$ в) $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$ г) $a_n = \frac{n-1}{n^2+2}$	г)
Три итерации метода половинного деления при решении уравнения $x^3 - 50 = 0$ на отрезке $[-4; 4]$ требуют последовательного вычисления значений функции $f(x) = x^3 - 50$ в точках …	а) $x_1 = -4$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4$ б) $x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $x_3 = -4$ в) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$ г) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$	в)

Тестовое задание	Варианты ответов	Правильный ответ
Конечный предел при $x \to -\infty$ имеют следующие функции …	а) $f(x)=\dfrac{-x^2+4x+3}{5x+1}$ б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}$ в) $f(x)=\dfrac{5-4x^2}{x^2-3}$ г) $f(x)=\dfrac{2x^2-x^3+1}{7x^2-3x+10}$	б), в)
Установите соответствие между пределом и его значением 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{2x^2+3x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+7}{-x^3+4x+5}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+6x^2-x-2}{x^2-x+8}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x-5}{3x^3+x^2+5}$	а) ∞ б) 3/2 в) 2/3 г) 0 д) −1/3 е) 1	1) – б) 2) – г) 3) – а) 4) – в)

Приложение 9.
Примеры олимпиадных заданий

В настоящем приложении разбираются отдельные задачи по теории пределов, близкие к предложенным на олимпиадах по математике для студентов ВУЗов. Подобные задания представлены, в частности, на сайте Оргкомитета Открытых международных студенческих Интернет-олимпиад в сфере профессионального образования (адрес Интернет-ресурса: http://www.i-olymp.ru). Как и любые олимпиадные задания, они характеризуются повышенным уровнем сложности.

Задача 1. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right).$$

Решение. Обозначим через S_n сумму, стоящую под знаком предела:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)}.$$

Преобразуем тождественно общий член суммы:

$$\frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{k+2-k}{k\,(k+1)\,(k+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k\,(k+1)}-\frac{1}{(k+1)\,(k+2)}\right).$$

Следовательно,

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Окончательно получаем:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}.$$

Ответ. Заданный предел равен 1/4.

Задача 2. Вычислить предел последовательности

$$p,\ \sqrt{1+p},\ \sqrt{1+\sqrt{1+p}},\ \ldots,$$

где p – некоторое положительное число.

Решение. Если ввести обозначения

$$x_1=p,\ \ x_2=\sqrt{1+p},\ \ x_3=\sqrt{1+\sqrt{1+p}}$$

и т. д., то заданная числовая последовательность может быть представлена в следующей рекуррентной форме:

$$x_1=p,\ \ x_{n+1}=\sqrt{1+x_n},\ \ n\geq 1. \qquad (\text{П}9.1)$$

Вычисление предела проведем в два этапа.

1). Предположим, что предел заданной последовательности существует:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=L.$$

Выясним, какие значения может принимать этот предел. Поскольку $x_n>0$, то по свойству 7 пределов (параграф 1.5) обязательно $L\geq 0$. Перейдем к пределу при $n\to\infty$ в рекуррентном соотношении (П9.1):

$$L=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+x_n}=\sqrt{1+L}.$$

Решая полученное уравнение относительно L, находим:

$$L^2 = 1 + L\,,\quad L^2 - L - 1 = 0\,,\quad L_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Знак «–» в последнем равенстве не является допустимым, поскольку $1 - \sqrt{5} < 0$. Следовательно, предел последовательности – если только он существует – может принимать единственное значение

$$L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2). Докажем, что предел последовательности $\{x_n\}$ действительно существует. Рассмотрим разность между x_{n+1} и предполагаемым пределом L и преобразуем ее:

$$|x_{n+1} - L| = \left|\sqrt{1+x_n} - L\right| = \frac{\left|\sqrt{1+x_n} - L\right| \cdot \left|\sqrt{1+x_n} + L\right|}{\sqrt{1+x_n} + L} =$$

$$= \frac{\left|1 + x_n - L^2\right|}{\sqrt{1+x_n} + L}.$$

Из соотношения $L^2 = 1 + L$ вытекает равенство

$$|x_{n+1} - L| = \frac{|x_n - L|}{\sqrt{1+x_n} + L}.$$

Оценим знаменатель полученной дроби снизу с учетом неравенства $x_n > 0$:

$$\sqrt{1+x_n} + L > 1 + L = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 + \frac{1+\sqrt{4}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Следовательно,

$$|x_{n+1} - L| \le \frac{2}{5}|x_n - L|.$$

Повторяя последнее неравенство многократно, получаем:

$$|x_{n+1}-L|\le\left(\frac{2}{5}\right)^n|x_1-L|=\left(\frac{2}{5}\right)^n|p-L|.$$

Поскольку $(2/5)^n\to0$ при $n\to\infty$, то и $|x_{n+1}-L|\to0$. Полученное соотношение и означает, что искомый предел действительно существует и равен указанному выше значению L.

Ответ. Предел заданной числовой последовательности существует и равен $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ независимо от числа p.

Замечание. Этапы 1) и 2) решения данной задачи подобны двум этапам вычисления предела последовательности цен в паутинообразной модели ценообразования, параграф 6.4.

Задача 3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left((1+x)(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}}\cdot\ldots\cdot(1+2012x)^{\frac{1}{2012}}-1\right).$$

Решение. Введем обозначение

$$f_k(x)=(1+kx)^{\frac{1}{k}},$$

$k=1,2,\ldots,2012$; функция $f_k(x)$ заведомо определена при $1+kx>0$, т. е. при $x>-1/k$. Следовательно, все эти функции определены при $x>-1/2012$, и выражение под знаком предела определено в проколотой окрестности $\{0<|x|<1/2012\}$ точки 0. Посредством функций $f_k(x)$ искомый предел может быть записан в виде

$$\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_{2012}(x)-1}{x}.$$

В силу свойств введенных функций имеют место равенства

$$\lim_{x\to0}f_k(x)=1,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f_k(x)-1}{x}=k\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^{\frac{1}{k}}-1}{y}=k\frac{1}{k}=1, \qquad (\text{П}9.2)$$

причем второй предел вычислен с помощью замены $y = kx$ и с учетом предела (2.15). Рассмотрим равенство

$$f_1(x)f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_k(x) - 1 =$$
$$= f_k(x)\big(f_1(x)f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_{k-1}(x) - 1\big) + \big(f_k(x) - 1\big).$$

С учетом пределов (П9.2) при всех $k = 2, 3, \ldots$ получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_k(x) - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} f_k(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_{k-1}(x) - 1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{f_k(x) - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_{k-1}(x) - 1}{x} + 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_{2012}(x) - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_{2011}(x) - 1}{x} + 1 =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_{2010}(x) - 1}{x} + 2 = \ldots =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{f_1(x) - 1}{x} + 2011 = 2012.$$

Ответ. Заданный предел равен 2012.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно провести вычисление заданного предела с помощью правила Лопиталя.

Задача 4. Функция $\sin_n(x)$, где n – натуральное число, определена равенством

$$\sin_n(x) = \sin(\sin(\ldots(\sin x)\ldots)),$$

в правой части которого функция синус применяется n раз. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin_{2010}(x)-x}{x^3}.$$

Решение. Отметим, прежде всего, что функция $\sin_n(x)$ может быть определена рекуррентным соотношением вида

$$\sin_1(x)=\sin x,\quad \sin_{n+1}(x)=\sin_n(\sin x),\quad n\ge 1.$$

Рассмотрим равенство

$$\frac{\sin_{n+1}(x)-x}{x^3}=\frac{\sin_n(\sin x)-x}{x^3}=$$

$$=\frac{\sin_n(\sin x)-\sin x+\sin x-x}{x^3}=$$

$$=\frac{\sin_n(\sin x)-\sin x}{x^3}+\frac{\sin x-x}{x^3}=$$

$$=\frac{\sin_n(\sin x)-\sin x}{(\sin x)^3}\cdot\frac{(\sin x)^3}{x^3}+\frac{\sin x-x}{x^3}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin_{n+1}(x)-x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin_n(\sin x)-\sin x}{(\sin x)^3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}.$$

С применением замены $y=\sin x$, учетом первого замечательного предела и предела (4.2) получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin_{n+1}(x)-x}{x^3}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin_n(y)-y}{y^3}-\frac{1}{6},$$

причем из существования предела в правой части вытекает существование предела в левой. Поскольку значение предела не зависит от обозначения переменной, по которой происходит переход к пределу, то окончательно приходим к следующему результату:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin_{2010}(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin_{2009}(x)-x}{x^3}-\frac{1}{6}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin_{2008}(x)-x}{x^3}-\frac{2}{6}=\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{\sin_1(x)-x}{x^3}-\frac{2009}{6}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}-\frac{2009}{6}=-\frac{2010}{6}=-335\,.$$

Ответ. Заданный предел равен -335.

Приложение 10. Примеры вычисления пределов без применения правила Лопиталя

В данном приложении проводятся примеры вычисления двух пределов без применения правила Лопиталя. Используемые методы вычисления пределов опираются исключительно на те математические средства, которые изложены в данном пособии, однако являются технически сложными; тем читателям, кто не чувствует себя подготовленным в достаточной степени, чтение данного материала можно пропустить.

1. Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x},$$

представляющий собой неопределенность вида ∞/∞, без применения правила Лопиталя. Введем функцию

$$f(x)=\frac{x}{e^x}$$

и ограничимся рассмотрением таких значений аргумента, что $x\geq 1$. На отрезке $[1;2]$ функция $f(x)$ может быть легко оценена сверху, поскольку на этом отрезке $x\leq 2$ (числитель), и в силу монотонного возрастания экспоненты $e^x\geq e^1=e$ (знаменатель):

$$f(x) \leq \frac{2}{e}. \tag{П10.1}$$

Замечание. Средствами дифференциального исчисления нетрудно установить, что функция $f(x)$ убывает при $x \geq 1$, так что фактически справедливо более точное неравенство $f(x) \leq f(1) = 1/e$. Однако, во-первых, точное значение постоянной для нас не существенно, и, во-вторых, мы ставим целью вычислить предел вообще без применения производных в каком-либо виде.

Рассмотрим равенство

$$f(x+1) = \frac{x+1}{e^{x+1}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{x+1}{e^x}.$$

Поскольку $x \geq 1$, то $x+1 \leq x+x = 2x$; следовательно, при всех $x \geq 1$ имеет место соотношение

$$f(x+1) \leq \frac{1}{e} \cdot \frac{2x}{e^x} = \frac{2}{e} \cdot \frac{x}{e^x} = \frac{2}{e} f(x). \tag{П10.2}$$

Пусть $m = [x] - 1$ – целое число; ясно, что $m \geq 0$ при $x \geq 1$. С учетом свойства (1.1) целой части числа получаем цепочку равносильных неравенств:

$$0 \leq x - [x] < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x - [x] + 1 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x - m < 2.$$

Повторяя соотношение (П10.2) последовательно m раз, получаем:

$$f(x) \leq \frac{2}{e} f(x-1) \leq \left(\frac{2}{e}\right)^2 f(x-2) \leq \ldots \leq \left(\frac{2}{e}\right)^m f(x-m).$$

В силу (П10.1) имеет место неравенство $f(x-m) \leq 2/e$; следовательно,

$$f(x) \leq \left(\frac{2}{e}\right)^m f(x-m) \leq \left(\frac{2}{e}\right)^m \cdot \frac{2}{e} = \left(\frac{2}{e}\right)^{m+1} = \left(\frac{2}{e}\right)^{[x]}.$$

Поскольку $\frac{2}{e} < 1$, то $\left(\frac{2}{e}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $\left(\frac{2}{e}\right)^n < \varepsilon$. Таким образом, неравенство

$$f(x) < \varepsilon$$

справедливо при всех $[x] \geq N$ и, тем более, при всех $x > N+1$, т. к. с учетом свойства (1.1) справедливо:

$$x > N+1 \quad \Rightarrow \quad [x] > x-1 > N \quad \Rightarrow \quad [x] \geq N\,.$$

Поскольку $f(x) > 0$, то для всех $x > N+1$ выполняется неравенство

$$|f(x)| < \varepsilon\,.$$

На этом и завершается строгое доказательство того, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0\,.$$

Заметим, что правило Лопиталя позволяет решить данный пример в одну строчку:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0;$$

тем самым еще раз подчеркивается высокая эффективность данного правила.

2. Обратимся еще раз к пределу (4.1) и проведем его вычисление без применения правила Лопиталя, причем двумя различными способами. Предварительно проведем следующие рассмотрения.

Обозначим через $f(x)$ функцию под знаком данного предела:

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2};$$

она определена при всех $x \neq 0$. В соответствии со вторым замечательным пределом для каждого фиксированного значения параметра x имеет место равенство

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n;$$

следовательно,

$$f(x)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n-1-x}{x^2}=\lim_{n\to\infty}F(n,x),$$

где для краткости введено обозначение

$$F(n,x)=\frac{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n-1-x}{x^2};$$

в последнем пределе при $n\to\infty$ аргумент x считается фиксированным параметром. Применим известную формулу ***бинома Ньютона*** *

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n,$$

справедливую для произвольных чисел a и b (напомним, что определение и простейшие необходимые нам свойства числа сочетаний приведены в параграфе 5.5). В силу данной формулы для всех $n\geq 5$ справедливо равенство

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=C_n^0+C_n^1\frac{x}{n}+C_n^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+\ldots+C_n^{n-1}\left(\frac{x}{n}\right)^{n-1}+C_n^n\left(\frac{x}{n}\right)^n,$$

из которого с учетом равенств $C_n^0=1$ и $C_n^1=n$ и введенного обозначения последовательно получаем:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+C_n^2\frac{x^2}{n^2}+C_n^3\frac{x^3}{n^3}+\ldots+C_n^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n^{n-1}}+C_n^n\frac{x^n}{n^n},$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1-x=x^2\left(\frac{C_n^2}{n^2}+\frac{C_n^3}{n^3}x+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{n^{n-1}}x^{n-3}+\frac{C_n^n}{n^n}x^{n-2}\right),$$

$$F(n,x)=\frac{C_n^2}{n^2}+\frac{C_n^3}{n^3}x+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{n^{n-1}}x^{n-3}+\frac{C_n^n}{n^n}x^{n-2}.$$

Вычислим первое слагаемое в правой части последней формулы:

* Ньютон Исаак – выдающийся английский математик, механик и астроном 2-й половины XVII в. - 1-й половины XVIII в.

$$\frac{C_n^2}{n^2}=\frac{n!}{n^2(n-2)!\cdot 2!}=\frac{(n-2)!(n-1)n}{2n^2(n-2)!}=\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

Следовательно,

$$F(n,x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+\frac{C_n^3}{n^3}x+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{n^{n-1}}x^{n-3}+\frac{C_n^n}{n^n}x^{n-2}. \quad (\text{П}10.3)$$

Далее в упомянутых выше двух способах вычисления предела начинают сказываться различия.

1). Действуя первым способом, вычтем значение 1/2 из обеих частей формулы (П10.3):

$$F(n,x)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2n}+\frac{C_n^3}{n^3}x+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{n^{n-1}}x^{n-3}+\frac{C_n^n}{n^n}x^{n-2}=$$

$$=-\frac{1}{2n}+x\left(\frac{C_n^3}{n^3}+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{n^{n-1}}x^{n-4}+\frac{C_n^n}{n^n}x^{n-3}\right).$$

Полученное выражение оценим по модулю с использованием известного неравенства треугольника $|a+b|\le|a|+|b|$, справедливого для произвольных чисел a и b:

$$\left|F(n,x)-\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2n}+x\left(\frac{C_n^3}{n^3}+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{n^{n-1}}x^{n-4}+\frac{C_n^n}{n^n}x^{n-3}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2n}+\left|x\left(\frac{C_n^3}{n^3}+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{n^{n-1}}x^{n-4}+\frac{C_n^n}{n^n}x^{n-3}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2n}+|x|\cdot\left(\frac{C_n^3}{n^3}+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{n^{n-1}}|x|^{n-4}+\frac{C_n^n}{n^n}|x|^{n-3}\right).$$

Поскольку мы вычисляем предел при $x\to 0$, то можем ограничиться значениями x, достаточно близкими к 0; например, можно рассматривать только $|x|<1$. При этом условии из последнего неравенства следует:

$$\left|F(n,x)-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2n}+|x|\cdot\left(\frac{C_n^3}{n^3}+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{n^{n-1}}+\frac{C_n^n}{n^n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2n}+|x|\cdot\sum_{k=3}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}.$$

Оценим сверху слагаемые в последней сумме:

$$\frac{C_n^k}{n^k}=\frac{n!}{n^k(n-k)!\,k!}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{(n-k)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{n^k(n-k)!}=$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{n-k+2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}\right)\le\frac{1}{k!}.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку в скобках все сомножители не превосходят 1. Следовательно,

$$\left|F(n,x)-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2n}+|x|\cdot\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Оценим сумму в полученном соотношении. При $k\ge 3$ справедливо неравенство

$$k!=\underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}_{k}>\underbrace{2\cdot\ldots\cdot 2}_{k-1}=2^{k-1};$$

следовательно,

$$\left|F(n,x)-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2n}+|x|\cdot\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2n}+2|x|\cdot\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Полученная сумма представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем 1/2; применяя надлежащую формулу (5.8), получаем:

$$\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1-(1/2)^{n-2}}{1-(1/2)}\le\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-1/2}=\frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$\left|F(n,x)-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2n}+\frac{|x|}{2}.$$

Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|F(n,x)-\frac{1}{2}\right|\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{|x|}{2}\right)=\frac{|x|}{2}.$$

С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty}\left|F(n,x)-\frac{1}{2}\right|=\left|\lim_{n\to\infty}F(n,x)-\frac{1}{2}\right|=\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\le\frac{|x|}{2},$$

которое можно записать в виде

$$-\frac{|x|}{2}\le f(x)-\frac{1}{2}\le\frac{|x|}{2},$$

или

$$\frac{1}{2}-\frac{|x|}{2}\le f(x)\le\frac{1}{2}+\frac{|x|}{2}.$$

По принципу двусторонней ограниченности в пределе при $x\to 0$ с учетом элементарного соотношения $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ получаем:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, искомый предел существует и равен $1/2$. Вычисления первым способом закончены.

2). Действуя вторым способом, проведем вычисление предела в 3 шага.

2.1). На первом шаге ограничимся рассмотрением положительных значений аргумента x и установим ограниченность снизу и монотонность функции $f(x)$ при $x>0$. Для этого заметим, что в формуле (П10.3) все слагаемые, содержащие множитель x, положительны. Следовательно,

$$F(n,x) > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n},$$

причем при переходе к пределу получаем:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} F(n,x) \ge \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, функция $f(x)$ ограничена снизу при $x > 0$ числом 1/2.

Далее, в правой части формулы (П10.3) стоит сумма с положительными коэффициентами степенных функций, возрастающих по переменной x при $x > 0$; следовательно, и вся сумма тоже возрастает. Это означает, что для любых двух положительных чисел x' и x'', связанных соотношением $0 < x' < x''$, при всех $n \ge 5$ справедливо неравенство

$$F(n,x') < F(n,x''),$$

переходя в котором к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$f(x') = \lim_{n\to\infty} F(n,x') \le \lim_{n\to\infty} F(n,x'') = f(x'').$$

Следовательно, функция $f(x)$ монотонно не убывает при $x > 0$.

Из монотонности и ограниченности функции $f(x)$ следует (параграф 3.3), что существует конечный предел справа

$$L = \lim_{x\to 0+0} f(x).$$

2.2). На втором шаге вычислим значение L. Для этого рассмотрим следующею цепочку равенств:

$$f(2x) = \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{4x^2} = \frac{(e^{2x} - 2e^x + 1) + (2e^x - 2 - 2x)}{4x^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{4x^2} + \frac{e^x - 1 - x}{2x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 + \frac{1}{2} f(x).$$

Переходя в данном равенстве к пределу при $x \to 0+0$ с учетом очевидного соотношения

$$\lim_{x\to 0+0} f(2x) = \lim_{y\to 0+0} f(y) = L$$

и предела (2.6), получаем:

$$L = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}L,$$

откуда следует, что $L = 1/2$.

2.3). На третьем шаге установим, что существует предел функции $f(x)$ в точке 0 слева, и вычислим его. Для этого при $x > 0$ рассмотрим $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2},$$

откуда

$$f(x) + f(-x) = e^{-x} \cdot \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2} = e^{-x}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2,$$

или

$$f(-x) = e^{-x}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 - f(x).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} f(-x) = \lim_{x\to 0+0}\left(e^{-x}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 - f(x)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} e^{-x}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 - \lim_{x\to 0+0} f(x) = 1 - L = 1/2.$$

В результате всех проведенных рассмотрений получаем, что в точке 0 оба односторонних предела функции $f(x)$ существуют и равны $1/2$. Следовательно, и обычный предел функции в данной точке существует и равен $1/2$. Вычисления вторым способом закончены.

Оба представленных способа вычисления данного предела, естественно, приводят к одному результату, который был получен выше в параграфе 4.1 с использованием правила Лопиталя в одну строчку. Отметим значительную сложность аналитических средств и некоторую искусственность приемов (второй способ), использованных при вычислении данного предела. Это обстоятельство очередной раз подтверждает высокую эффективность раскрытия неопределенностей по правилу Лопиталя.

Приложение 11. Оценка трудоемкости поиска данных в упорядоченных таблицах

Пусть предстоит провести поиск в упорядоченной таблице из n записей, пронумерованных от 1 до n; номер очередной записи, считываемой с целью решения задачи поиска, обозначим через $p(n)$. Действуя, как указано в параграфе 6.5, примем

$$p(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right];$$

при этом $p(1)=1$, $p(2)=1$, $p(3)=2$, $p(4)=2$ и т. д. Иными словами, считывается либо центральная запись (при нечетном n), либо ближняя к середине запись с меньшим номером (при четном n). Если при этом искомая информация не найдена, то останется провести поиск либо в «верхней» части таблицы (по записям с номерами, меньшими номера считанной), либо в «нижней» (по записям с номерами, большими номера считанной). В «верхней» части таблицы остается $p-1$ запись, в «нижней» – $n-p$ записей. Если n' – число оставшихся записей, то в любом случае

$$n'\le \max\{p-1, n-p\}.$$

Оценим сверху полученное выражение. С учетом свойства (1.1) целой части получаем:

$$p-1=\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\le\frac{n+1}{2}-1=\frac{n-1}{2},$$

$$n-p=n-\left[\frac{n+1}{2}\right]<n-\left(\frac{n+1}{2}-1\right)=\frac{n+1}{2}.$$

Следовательно,

$$n'\le\frac{n+1}{2}. \qquad (\text{П}11.1)$$

Пусть теперь n_k обозначает количество записей в той части таблицы, по которой надлежит проводить поиск в случае, когда искомые данные не найдены после k обращений к таблице БД. Ясно, что $n_0=N$, причем из (П11.1) следует:

$$n_k\le\frac{n_{k-1}+1}{2}.$$

Применяя многократно (m раз) это рекуррентное соотношение, получаем:

$$n_k\le\frac{1}{2}(n_{k-1}+1)=\frac{1}{2}n_{k-1}+\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(n_{k-2}+1)+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}n_{k-2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\le\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(n_{k-3}+1)+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{8}n_{k-3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\le\ldots\le\frac{1}{2^m}n_{k-m}+\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2^m}n_{k-m}+1-\frac{1}{2^m}=\frac{n_{k-m}-1}{2^m}+1.$$

Полагая $m=k$, получаем:

$$n_k\le\frac{n_0-1}{2^k}+1. \qquad (\text{П}11.2)$$

Если после k обращений к таблице оставшаяся часть таблицы содержит не более 3-х записей, т. е.

$$n_k\le 3, \qquad (\text{П}11.3)$$

то решение задачи поиска может быть завершено не более чем за 2 дополнительных обращения к таблице (выбираем среднее значение и далее, при необходимости, одно из оставшихся). Следовательно, для таких значений k справедливо:

$$K_1(N) \le 2 + k\,. \tag{П11.4}$$

С учетом (П11.2) условие (П11.3) заведомо выполняется при

$$\frac{N-1}{2^k} + 1 \le 3\,,$$

что равносильно цепочке неравенств

$$\frac{N-1}{2^k} \le 2\,, \quad N - 1 \le 2^{k+1}\,, \quad \log_2(N-1) \le k + 1\,,$$

$$k \ge \log_2(N-1) - 1\,.$$

Поскольку число обращений k – целое, то достаточно взять

$$k = [\log_2(N-1) - 1] + 1 = [\log_2(N-1)]\,.$$

Иными словами, при описанном способе выбора считываемых записей указанного числа k обращений к таблице достаточно, чтобы оставшаяся часть таблицы содержала не более 3-х записей. С учетом (П11.4) получаем неравенство (6.8), что и требовалось установить.

Приложение 12.
Пределы и непрерывность функций многих переменных

Теория пределов функций одной переменной, рассматривавшаяся всюду в данном пособии, является, безусловно, основой всего математического анализа. В то же время, высокий теоретический интерес и большую практическую значимость имеет изучение функций многих переменных. Действительно, значительная часть природных, технических и экономических процессов характеризуется не одним, а многими факторами; их изучение и приводит к рассмотрению функций многих переменных. В настоящем приложении мы изложим элементы теории пределов таких функций.

Математически функция многих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (именно, переменных в количестве n) обычно записывается в виде $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В настоящем пособии мы рассмотрим функции двух переменных x, y; при этом все особенности функций многих переменных будут учтены, теория будет менее громоздкой, а отдельные вопросы теории могут быть проиллюстрированы геометрически.

Областью определения функции $f(x, y)$ двух переменных является некоторое множество на координатной плоскости (x, y). Эти множества могут иметь совершенно различную структуру.

Пример 1. Рассмотрим области определения следующих функций:

– функция $x^2 + y^2$ определена для всех точек (x, y);

– функция $\dfrac{x+y}{x-y}$ определена при $x \neq y$, т. е. на всей координатной плоскости за исключением точек, лежащих на биссектрисе I и III координатных углов (квадрантов);

– функция $\dfrac{1}{1-xy}$ определена при $xy \neq 1$, т. е. на всей координатной плоскости за исключением точек, лежащих на г и п е р б о л е $y = \dfrac{1}{x}$;

– функция $\sqrt{y - x^2}$ определена при $y \geq x^2$, т. е. во внутренней части п а р а б о л ы $y = x^2$;

– функция $2^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$ определена при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ одновременно, т. е. на всей координатной плоскости за исключением точек, лежащих на одной из координатных осей;

– функция $\ln(1 - x^2 - y^2)$ определена при $x^2 + y^2 < 1$, т. е. в круге с центром в начале координат радиусом 1 без граничной окружности;

– функция $\arccos\dfrac{y}{x}$ определена при $\left|\dfrac{y}{x}\right| \leq 1$, что равносильно условиям $x \neq 0$, $|y| \leq |x|$ (это множество представляет собой два вертикальных прямых угла с общей вершиной в начале координат и биссектрисами на оси абсцисс за исключением самого начала координат);

– наконец, областью определения функции $\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ является множество, представляющее собой круг $x^2+y^2 \le \pi$ в объединении с бесконечным множеством колец с центрами в начале координат вида $2\pi n \le x^2+y^2 \le \pi + 2\pi n$, где $n = 1, 2, \ldots$ – натуральные числа.

Введем начальные понятия теории пределов функций двух переменных. ***Окрестностью точки*** (x_0, y_0) на координатной плоскости (x, y) называется любой круг с центром в точке (x_0, y_0) без граничной окружности (иначе называемый ***открытым кругом***). Если δ – положительное число, то δ-окрестностью точки (x_0, y_0) называется открытый круг радиуса δ; он задается строгим неравенством

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2.$$

Если ввести точки $M(x, y)$ и $M_0(x_0, y_0)$ и определить расстояние $|M-M_0|$ между ними по обычной формуле

$$|M-M_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

то последнее неравенство может быть записано в форме

$$|M-M_0|<\delta,$$

более компактной и похожей на одномерный случай.

Понятие и определение предела функции двух переменных вполне аналогичны одномерному случаю.

Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) за исключением, возможно, самой этой точки.

Понятие предела функции. Функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) предел, равный числу b, если при неограниченном приближении значений аргументов (x, y) к точке (x_0, y_0) соответствующие значения функции $f(x, y)$ неограниченно приближаются к числу b.

Определение предела функции. Функция $f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ предел, равный числу b, если для любого положительного числа ε (сколь угодно малого) найдется такое положительное число δ (зависящее, вообще говоря, от выбора ε, т. е. $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$), что для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условиям $M \neq M_0$, $|M - M_0| < \delta$, выполняется соотношение $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Тот факт, что число b является пределом функции $f(x, y)$ точке (x_0, y_0), обозначается записью

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b \quad \text{или} \quad \lim_{M \to M_0} f(M) = b .$$

Ясно, что приведенные понятие и определение относятся к случаю к о н е ч н о г о предела функции в точке.

Как и в одномерном случае, пределы функций двух переменных могут не существовать или быть бесконечными.

Аналогичным образом можно ввести понятие предела функции двух переменных в бесконечности.

Задание. Предлагаем читателям самостоятельно сформулировать указанное понятие.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 2. Предел функции

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

в точке $(0, 0)$ не существует. Действительно, на координатных осях вне точки $(0, 0)$ данная функция равна 0; следовательно, и предел функции в данной точке – если только он существует – может быть равен только 0. Однако, если рассмотреть данную функцию на прямой $x = y$, т. е. на биссектрисе I и III координатных углов, то в этом случае функция будет равна

$$\frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} .$$

Следовательно, и предел функции в д о л ь э т о й п р я м о й равен $1/2 \neq 0$. Р а з л и ч н ы е значения, полученные при различных видах стремления аргументов к точке $(0, 0)$ (по осям и по биссектрисе), свидетельствуют о том, что данная функция в точке $(0, 0)$ предела не имеет.

Пример 3. Имеет место предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{|x|+|y|} = +\infty .$$

Это означает, что для любого фиксированного числа $B>0$ неравенство

$$\frac{1}{|x|+|y|} > B$$

должно выполняться для любых точек (x, y), достаточно близких к началу координат. Проверим этот факт. Из элементарного неравенства

$$0 \le (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

вытекает, что

$$\pm 2xy \le x^2 + y^2 ,$$

или

$$2|xy| \le x^2 + y^2 .$$

Следовательно,

$$\left(|x|+|y|\right)^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \le 2(x^2 + y^2),$$

откуда следуют неравенства

$$|x|+|y| \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$$

и

$$\frac{1}{|x|+|y|} \ge \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Выберем любое число $B>0$, и пусть $\delta = 1/\sqrt{2}B$. Тогда для любых (x, y), удовлетворяющих условию $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ (иными словами, из проколотой δ-окрестности начала координат), справедливо:

$$\frac{1}{|x|+|y|} > \frac{1}{\sqrt{2}\delta} = B .$$

Тем самым, бесконечность предела данной функции строго доказана.

Пример 4. Функция

$$\frac{1}{x^2+|y|}$$

имеет в бесконечности предел, равный 0. Для установления данного факта проведем предварительные несложные рассмотрения. Пусть $A>\sqrt{2}$ – некоторое число. Тогда из условия $x^2+y^2>A^2$ следует, что выполняется хотя бы одно из двух неравенств $x^2>A^2/2$ и $y^2>A^2/2$, второе из которых равносильно неравенству $|y|>A/\sqrt{2}$. В случае справедливости первого из неравенств имеем:

$$x^2+|y|\ge x^2>A^2/2=A(A/2)>A(\sqrt{2}/2)=A/\sqrt{2},$$

а в случае справедливости второго из неравенств

$$x^2+|y|\ge|y|>A/\sqrt{2}.$$

Таким образом, в обоих случаях справедливо неравенство

$$x^2+|y|>A/\sqrt{2},$$

из которого вытекает, что

$$\frac{1}{x^2+|y|}<\sqrt{2}/A.$$

В соответствии с определением предела функции выберем произвольное число $\varepsilon>0$, и пусть $A=A(\varepsilon)=\sqrt{2}\max\{1;1/\varepsilon\}\ge\sqrt{2}$. Тогда в соответствии с проведенными рассуждениями при всех $x^2+y^2>A^2$ справедливо

$$\left|\frac{1}{x^2+|y|}\right|=\frac{1}{x^2+|y|}<\sqrt{2}/A=1/\max\{1;1/\varepsilon\}\le\varepsilon.$$

Таким образом, для любой точки $M(x,y)$, достаточно удаленной от начала координат (т. е. при $|M|>A$), функция принимает значения, по модулю меньшие ε; это и означает, что заданная функция имеет в бесконечности предел, равный 0.

Для вычисления пределов функций двух переменных применяются те же приемы, что и для функций одной переменной, с соответствующими поправками.

Понятие непрерывности функции двух переменных вводится вполне аналогично одномерному случаю. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Функция $f(x, y)$ называется ***непрерывной в точке*** (x_0, y_0), если ее предел в данной точке существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad \text{или} \quad \lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Как и в одномерном случае, сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных функций также являются функциями непрерывными (конечно, частное при знаменателе, отличном от 0). Сложная функция, составленная из непрерывных функций многих переменных, также является непрерывной функцией многих переменных.

Отметим, что непрерывность функции по совокупности переменных не следует из ее непрерывности по каждой из переменных в отдельности. Более того, функция двух переменных может быть непрерывна на каждой прямой, проходящей через некоторую точку координатной плоскости, но при этом не быть непрерывной в данной точке.

Задачи на вычисление пределов функций многих переменных, как правило, достаточно сложны и в настоящем учебном пособии не рассматриваются. Для ознакомления с ними можно обратиться к соответствующей литературе (например, [10, 11, 12, 13, 15]).

Учебное издание

Лежнёв Алексей Викторович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ:
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебник

Подписано в печать 29.11.2013. Формат $60 \times 90^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 15.
Тираж 500 экз. Заказ №9621.

Издательство «Магистр»
101000 Москва, Колпачный пер., 9а
Тел.: (495) 625-45-05
E-mail: magistr-book@mail.ru

Отпечатано с готовых файлов заказчика
в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

Официальным дистрибьютором Издательства «МАГИСТР»
является ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»:
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1

Опт, розница, книга — почтой, доставка:

Телефоны: (495) 363-42-60 (многоканальный);
(495) 363-42-60 доб. 215 (справки о наличии);
(495) 363-42-60 доб. 246 (книга — почтой);
(495) 363-42-60 доб. 251 (заключение договоров)
Факс: (495) 363-92-12
E-mail: books@infra-m.ru. Internet: www.infra-m.ru