И.А. ЗАЙЦЕВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ВЫСШАЯ ШКОЛА

И.А. ЗАЙЦЕВ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

И.А. ЗАЙЦЕВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации в качестве учебника
для студентов высших сельскохозяйственных
учебных заведений

Москва
«Высшая школа»
1998

УДК 517
ББК 22.11
З 17

Зайцев И.А.

З 17 Высшая математика. Учеб. для с/х вузов.— 2-е изд., испр. и доп.— М.: Высш. шк., 1998. — 409 с.: ил.

ISBN 5-06-003485-2

Профессионально ориентированный учебник (1-е изд. — 1991 г.) содержит вопросы аналитической геометрии на плоскости, основы математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление), элементы теории вероятностей и математической статистики. Все основные понятия сопровождаются большим количеством примеров из практики работы специалистов сельского хозяйства.

Для студентов сельскохозяйственных вузов. Учебник может быть использован студентами других высших учебных заведений, а также техникумов и колледжей.

ISBN 5-06-003485-2

Оглавление

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Предисловие

Сельскохозяйственные науки, в частности агрономическая и зоотехническая, строятся на анализе зависимостей, существующих в природе, и на статистических и иных законах. Математика является тем универсальным средством, с помощью которого можно описать реально существующие зависимости и использовать их в дальнейшем для научных прогнозов явлений и процессов.

Специалисты сельского хозяйства, как и другие специалисты, используют методы математической статистики. Здесь существенное значение имеет правильный выбор математической модели изучаемого явления, т. е. так называемой производственной функции, отражающей основные особенности рассматриваемого процесса. Дальнейшее исследование этой функции позволяет найти скорость ее изменения, решить задачи наилучшего использования ресурсов, получения максимального урожая, определения максимальной прибыли и минимума затрат на производство единицы продукции и другие задачи.

Для успешного овладения сельскохозяйственными специальностями также важно знать законы физики, генетики, биологии, химии, экономики. Все эти науки в той или иной мере используют математику, что лишний раз свидетельствует в пользу серьезного изучения курса высшей математики.

Настоящая книга написана в соответствии с программой по высшей математике, рассчитанной на 100—120 часов, и предназначена для студентов биологических факультетов сельскохозяйственных институтов. Основная цель книги — помочь будущим агрономам, зоотехникам и ветврачам приобрести основы знаний по высшей математике, привить интерес к ее изучению.

В основу работы положен опыт преподавания высшей математики в сельскохозяйственном институте, а также опыт работы родственных кафедр других институтов. Ознакомление с курсами специальных дисциплин — земледелия, растениеводства, кормления сельскохозяйственных животных, животноводства — и отдельными монографиями позволило автору включить в книгу много примеров и задач прикладного содержания, иллюстрирующих основные положения курса, а также материалы нетрадиционного содержания. В большинстве случаев в пособии новые понятия предваряются примерами и задачами, связанными с особенностями будущей профессиональной деятельности студентов. Материал изложен в доступной форме, но с достаточной строгостью. Следует особо отметить, что формулировки отдельных определений и изложение всего материала в целом сознательно упрощены.

Все главы заканчиваются обобщающими таблицами, которые играют важную роль для систематизации и запоминания изученного. Они могут использоваться как справочный материал и опорные схемы по содержанию каждой главы.

Во втором издании учтены замечания читателей, перераспределены местами некоторые упражнения, устранены замеченные опечатки, внесены изменения в оглавление, осуществлены стилистические уточнения, обобщение содержания отдельных параграфов оформлено в виде кратких правил. Написана новая глава: «О линейном программировании».

Автор выражает признательность доктору физико-математических наук, профессору А. В. Зарелуа за ценные предложения и замечания, высказанные им при рецензировании рукописи, а также старшему преподавателю Г. Н. Лапиной, принявшей участие в подборе ряда примеров прикладного содержания.

Автор приносит благодарность рецензентам книги А. Б. Крыгину, Л. А. Кузнецову, Л. М. Павлоцкой, В. В. Тихомирову, Чудесенко В. Ф., внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим полезные предложения и замечания.

Автор

Часть первая

Элементы аналитической геометрии

Аналитическая геометрия — область математики, в которой геометрические задачи решаются алгебраическим способом на основе метода координат. Впервые метод координат ввел французский ученый — философ, физик и математик Р. Декарт (1596—1650), поэтому метод носит его имя.

Глава 1

Метод координат. Векторы

В главе рассматривается сущность метода координат и на его основе устанавливается соответствие между точками и числами. С помощью этого соответствия изучение геометрических свойств точек и их взаимного расположения сводится к рассмотрению соотношений между числами. Вводится понятие вектора и скалярного произведения.

§ 1.1. ЧИСЛОВАЯ ОСЬ. МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ НА ПРЯМОЙ, НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Представление о числовой оси даст обычная линейка. Любому положительному числу в пределах длины линейки можно поставить в соответствие точку. Чем больше число, тем дальше соответствующая точка от начала линейки.

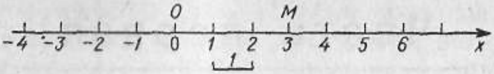


Рис. 1

Определение. *Прямая, на которой указана начальная точка O, положительное направление и единица длины, называется Числовой осью. Обычно положительное направление выбирают слева направо* (рис. 1).

Возьмем на числовой оси точку M. Измерив длину отрезка OM, получим число $m>0$. Введем **число x: 1) если M правее 0, то $x=m$, 2) если M** левее 0, **то $x=-m$, 3) если M совпадает с точкой 0, то $x=0$.**

Число x называется координатой точки M. Координата записывается в круглых скобках рядом с обозначением самой точки: $M(x)$. Двум различным точкам M_1 и M_2 отвечают два различных числа x_1 и x_2 — их координаты. Таким образом, каждая точка числовой оси определяет действительное число.

Пусть теперь дано число x. Отложим от точки O отрезок длиной x ед. вправо, если $x>0$, и $|x|$ ед. влево, если $x<0$. В конце отрезка получим точку, обозначим ее M. Двум различным числам x_1 и x_2 отвечают две различные точки M_1 и M_2.

Из изложенного делаем вывод: между точками числовой оси и действительными числами существует взаимно однозначное соответствие.

Пусть даны две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Если длину отрезка с концами A и B обозначить $|AB|$, то для точек $A(x_1)$ и $B(x_2)$ $|AB|=|x_2-x_1|$.

● **Пример.** Даны две точки $A(2)$ и $B(6)$. Тогда $|AB|=|6-2|=|4|=4$.

Отрезку AB сопоставляется положительное действительное число — его длина. ●

1. Прямоугольные координаты на плоскости. Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси с одинаковой единицей длины. Обозначим их Ox и Oy (рис. 2). За начало отсчета по обеим осям примем точку их пересечения O. При этом ось Ox называется *осью абсцисс*, Oy — *осью ординат*. Тем самым составим систему координат на плоскости. Из произвольной точки M опустим перпендикуляры MN и MP на Oy и Ox.

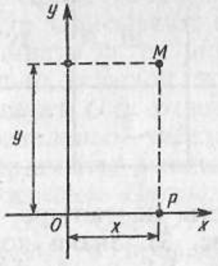


Рис. 2

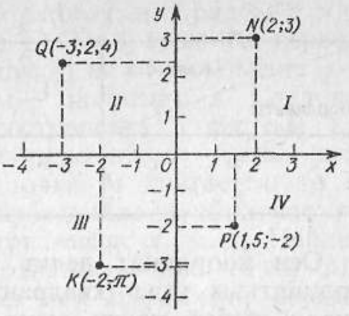


Рис. 3

Пусть x — координата точки P на оси Ox, y — координата точки N на оси Oy.

Число x называется *абсциссой*, y — *ординатой* точки, оба числа вместе — *координатами* точки M. Координаты записывают рядом с обозначением точки: $M(x;\ y)$. При этом на первом месте в скобках пишут абсциссу точки.

Следовательно, каждой точке на плоскости в системе прямоугольных координат отвечает «упорядоченная» пара действительных чисел $(x,\ y)$, т. е. таких чисел, для которых известно, какое считается первым, а какое — вторым. Если точка M совершает движение по плоскости Oxy, то ее координаты будут меняться.

Справедливо и обратное утверждение: упорядоченная пара действительных чисел определяет на плоскости точку. Пусть даны два числа x и y. Отложим по оси Ox от точки O отрезок длиной x ед. вправо, если $x>0$, или $|x|$ ед. влево, если $x<0$. Получим точку P. Из точки P восставим перпендикуляр к оси Ox; откладывая от O отрезок длиной y ед. вверх, если $y>0$, или $|y|$ ед. вниз, если $y<0$, получим точку Q, через которую проводим перпендикуляр к оси Oy. Точка пересечения перпендикуляров является искомой точкой M.

Из изложенного делаем вывод: между парами действительных чисел и точками плоскости в системе координат Oxy имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому принято говорить: «дана точка» вместо «даны координаты точки», «найти точку M» вместо «найти координаты точки M».

Таблица 1.1

Квадрант / Координаты	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

Оси координат делят плоскость на четыре координатных угла (квадранты) (рис. 3). Знаки координат любой точки даны в табл. 1.1.

Прямоугольные координаты точек $N(2;\ 3)$, $P(1{,}5;\ -2)$, $K(-2;\ \pi)$, $Q(-3;\ 2{,}4)$ изображены на рис. 3.

2. Прямоугольные координаты в пространстве. Возьмем три взаимно перпендикулярные числовые оси, пересекающиеся в точке O; обозначим их Ox, Oy, Oz (рис. 4). Выберем на каждой из них положительное направление; противоположное направление будем считать отрицательным. Тем самым определяется система прямоугольных координат в пространстве.

Пусть M — некоторая точка пространства. Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные осям Ox, Oy и Oz. В результате получим точки пересечения плоскостей с осями — M_x, M_y, M_z. Точка M_x — проекция точки M на ось Ox, точки M_y и M_z — проекции точки M на оси Oy и Oz соответственно.

Пусть x — координата точки M_x на оси Ox, y — координата точки M_y на оси Oy, z — координата точки M_z на оси Oz.

Число x называется абсциссой точки, y — ординатой, а z — *аппликатой*. Три числа x, y, z называются

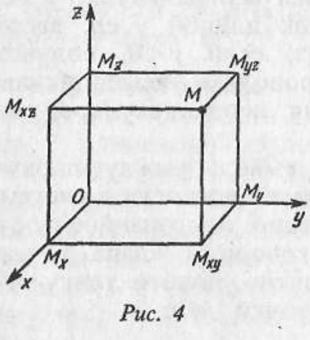


Рис. 4

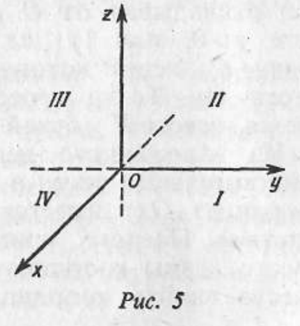


Рис. 5

координатами точки M, их записывают рядом с обозначением точки: $M(x;\ y;\ z)$. При этом на первом месте записывают x — абсциссу, на втором месте y — ординату и на последнем — аппликату z. Следовательно, каждой точке пространства в системе координат Oxy отвечает «упорядоченная» тройка действительных чисел. Если точка M двигается, то ее координаты меняются. Справедливо и обратное утверждение. Пусть даны три числа x, y, z. Найдем на осях Ox, Oy, Oz соответствующие точки M_x, M_y, M_z и проведем через них плоскости, перпендикулярные осям. Получим единственную точку пересечения плоскостей — $M(x;\ y;\ z)$.

Из изложенного делаем вывод: в системе прямоугольных координат в пространстве между упорядоченными тройками действительных чисел и точками пространства устанавливается взаимно однозначное соответствие. Оси Ox, Oy и Oz определяют три взаимно перпендикулярные плоскости Oxy, Oyz и Oxz, которые делят пространство на восемь трехгранных углов (октантов). Плоскость Oxy делит все пространство на два полупространства — нижнее и верхнее; плоскость Oyz — на два полупространства — переднее и заднее; плоскость Oxz делит пространство на правое и левое полупространства.

Координаты точек, находящиеся в верхнем, переднем и правом полупространствах положительны.

Нумерация октантов для верхнего полупространства показана на рис. 5. V, VI, VII и VIII октанты находятся соответственно под I, II, III и IV октантами. Знаки координат точек определяются таблицей 1.2.

Таблица 1.2

Октанты / Координаты	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	−	+	+	−	−	−	−

● **Пример.** Постройте треугольник с вершинами в точках $M_1(1;\ 2;\ -4)$, $M_2(1;\ -2;\ 3)$, $M_3(-1;\ 3;\ 0)$.

Решение. Отложим от точки O в положительном направлении на оси Ox отрезок длиной, равной одной ед. и проведем через его конец линию, параллельную оси Oy. Вдоль этой линии отложим вправо отрезок длиной две ед., обозначим его конец точкой P. Через точку P проведем линию, параллельную оси Oz, и отложим вниз отрезок длиной четыре ед. Конец этого отрезка и определит точку $M_1(1;\ 2;\ -4)$. Аналогично строятся точки M_2 и M_3. ●

§ 1.2. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ, УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА СКАЛЯР

Попробуем ответить на следующие вопросы: 1) каков возраст известного вам человека?; 2) какова масса животного по кличке «Янтарь»?; 3) какова высота растения?; 4) сколько кормовых ед. содержится в 100 кг сена, взятого из данного стога? 5) какова температура воздуха в помещении для животных? 6) какова масса одного зерна пшеницы? Можно видеть, что ответ на каждый из этих вопросов вполне определяется одним числом.

Величины, определяемые одним числом, называются *скалярными* или *скалярами*.

Существуют величины другого типа. При перемещении на тележку с грузом действует сила, тележка движется в определенном направлении, проходит определенный путь с некоторой скоростью и ускорением. Для характеристики этих величин необходимо кроме их числового значения знать еще направление. Такие величины называются *векторными*. Векторную величину изображают геометрическим вектором, или просто вектором, т. е. отрезком прямой, определяемым упорядоченной парой точек.

Определение. *Вектором называется отрезок данной длины и данного направления — направленный отрезок.*

Вектор обычно задается упорядоченной парой точек (A, B); A — начало, B — конец вектора. Обычно $(AB)=\overrightarrow{AB}$. В конце отрезка стрелкой указывается направление вектора. Иногда вектор обозначают одной буквой, напечатанной жирным шрифтом $\mathbf{a}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$. В этом случае пишут: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$. Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной* или *модулем*. Модуль обозначается теми же буквами, напечатанными светлым шрифтом: AB, или $|\overrightarrow{AB}|$, или a.

Нулевым $\bar{0}$ называют вектор, начало и конец которого совпадают; $\overrightarrow{AA}$ — нулевой вектор. Модуль нулевого вектора равен нулю. Вектор $\vec{a}$, модуль которого равен 1, называют *единичным* и обозначают $\vec{a}^0$.

Два вектора называются *коллинеарными*, если изображающие их направленные отрезки параллельны или хотя бы один из них равен нулю.

Три вектора называются *компланарными*, если изображающие их направленные отрезки параллельны одной плоскости (или расположены в одной плоскости) или если хотя бы один из них равен нулю.

Определение. *Два вектора* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *называются равными* (*пишут* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$), *если они коллинеарны и имеют одинаковую длину и направление.*

Из этого ясно, что вектор можно переносить, оставляя его параллельным самому себе, а начало вектора помещать в любой точке пространства.

В настоящем курсе мы не будем указывать, в каких единицах измеряются длины векторов, а сами векторы будем считать свободными, т. е. допускающими их перемещение в пространстве при сохранении модуля и направления. Вектор в математике — более сложное понятие по сравнению с понятием числа.

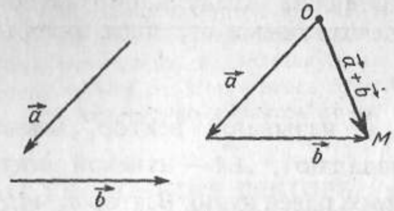
Определим операции сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число.

1. Сложение векторов. Возьмем два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 6, *а*). Совместим начало вектора $\vec{a}$ с произвольной точкой O, к его концу приложим начало вектора $\vec{b}$. Конец вектора $\vec{b}$ обозначим точкой M.

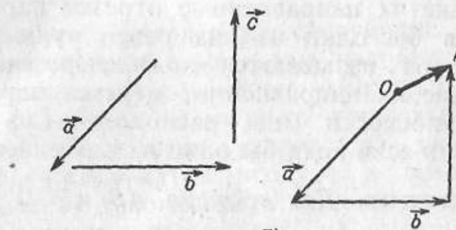
Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$. Кратко пишут

$$\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\vec{b}.$$

Чтобы найти сумму трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, необходимо к концу вектора $\vec{a}$ приложить начало



а)



б)

Рис. 6

вектора $\vec{b}$, к концу вектора $\vec{b}$ — начало вектора $\vec{c}$. Вектор, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{c}$, и является суммой $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ (рис. 6, *б*). Из определения суммы двух векторов следует, что вектор $\overrightarrow{OM}$ можно найти как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах. Вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ является вектором-диагональю параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на ребрах.

2. Вычитание векторов.

Определение. *Вектор $\vec{c}$ называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.*

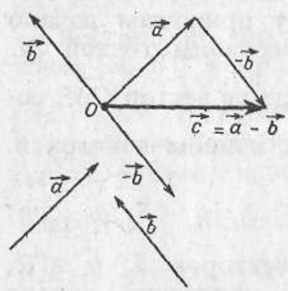


Рис. 7

Вычитание вектора $\vec{b}$ из вектора $\vec{a}$ заменяют сложением вектора $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$ (рис. 7).

3. Определение. *Произведением $m\vec{a}$ или $\vec{a}m$ вектора $\vec{a}$ на число m называется новый вектор, длина которого равна $|m||\vec{a}|$, а направление совпада-*

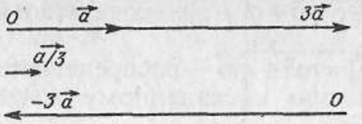


Рис. 8

ет с направлением $\vec{a}$ *при* $m>0$ *и противоположно* $\vec{a}$, *если* $m<0$ (рис. 8).

При этом, если $m=0$, то $m\vec{a}=\vec{0}$, и если $\vec{a}=\vec{0}$, то $m\vec{a}=\vec{0}$.

Замечания. 1. Любой вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде произведения двух сомножителей — его длины $|\vec{a}|$ и единичного вектора $\vec{a}^0$, т. е. $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0=a\vec{a}^0$.

2. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}\neq\vec{0}$, то существует единственное число λ такое, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. Другими словами, один вектор можно выразить через другой, коллинеарный ему, с помощью скалярного множителя.

Действительно, $\vec{b}=b\vec{b}^0$ $\vec{a}=a\vec{a}^0$, тогда в силу коллинеарности $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем $\vec{b}^0=\pm\vec{a}^0$, $\vec{b}=\pm b\vec{a}^0=\pm\frac{b}{a}\vec{a}$.

Обозначая $\pm\frac{b}{a}=\lambda$, имеем $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Действия сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число называются *линейными операциями*. Имеют место следующие 8 легко проверяемых свойств линейных операций над векторами.

1^0. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — перестановочное свойство (рис. 9, *а*);

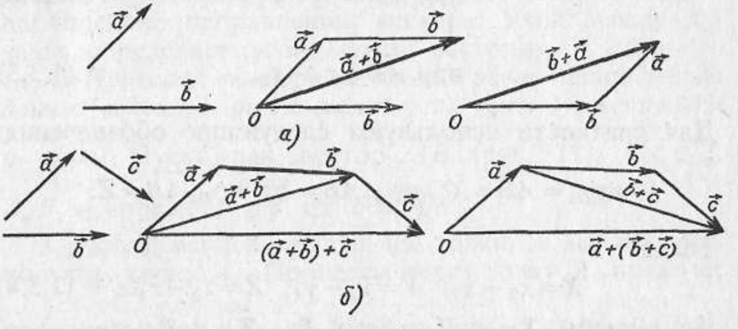


Рис. 9

2^0. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — сочетательное свойство (рис. 9, *б*);

3^0. $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$ — распределительное свойство по отношению к скалярному множителю;

4^0. $\vec{a}+0=\vec{a}$;

5^0. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

6^0. $\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$;

7^0. $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$, m и n — действительные числа;

8^0. $(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})=n(m\vec{a})$.

Из этих свойств следует, что над суммой векторов можно выполнять те же действия, что и над суммой чисел.

§ 1.3. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА И ИХ СВОЙСТВА

Пусть в декартовых координатах $Oxyz$ вектор $\overrightarrow{AB}$ задан двумя точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Определение. *Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox называется разность между абсциссами конца и начала вектора $\overrightarrow{AB}$.*

Проекцию вектора на ось Ox обозначают $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}$. Аналогично определяются проекции вектора на оси Oy и Oz. Таким образом,

$$\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}=x_2-x_1; \tag{1.3.1}$$

$$\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{AB}=y_2-y_1; \tag{1.3.2}$$

$$\text{пр}_{Oz}\overrightarrow{AB}=z_2-z_1. \tag{1.3.3}$$

Для краткости используют следующие обозначения:

$$\text{пр}_{Ox}=\overrightarrow{AB}=X;\ \ \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{AB}=Y;\ \ \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{AB}=Z.$$

Тогда

$$X=x_2-x_1;\ \ Y=y_2-y_1;\ \ Z=z_2-z_1. \tag{1.3.4}$$

На рис. 10 $X=A_xB_x$, $Y=A_yB_y$, $Z=A_zB_z$.

Из формул (1.3.1) — (1.3.3) следует, что проекция вектора на любую ось есть длина отрезка между основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и B на эту же ось, взятая со знаком «+», если направления отрезка и оси совпадают, и со знаком «−», если они противоположны.

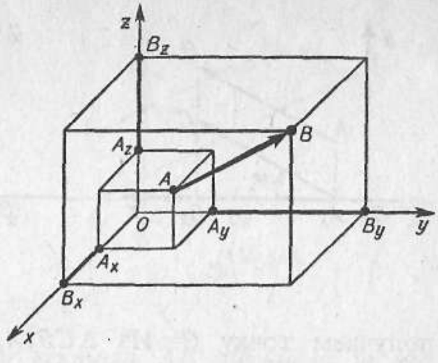


Рис. 10

Можно доказать, что: а) если проекции вектора заданы, то они однозначно определяют сам вектор; б) если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то они имеют равные проекции. Поэтому проекции вектора на оси координат называют его координатами. Их записывают рядом с обозначением вектора в круглых скобках: $\overrightarrow{AB}=(X;\ Y;\ Z)$.

1. Некоторые свойства проекции вектора на ось. Для определенности будем рассматривать эти свойства относительно оси Ox. Естественно, что свойства проекции вектора на другие оси формулируются аналогично.

Предположим, что вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}\neq 0$ образует с осью Ox угол φ. Угол между вектором $\vec{a}$ и осью определим следующим образом. Через произвольную точку пространства проведем два луча — один параллельно положительному направлению Ox, а другой — параллельно направлению вектора. Угол между лучами определяет угол между вектором и осью.

а) *Проекция вектора на ось Ox равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью.* Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 11). $\varphi<\pi/2$, A_xB_x — проекция $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox.

Опуская перпендикуляр из точки A на ось Ox, получим точку A_x. Проведем через точку A_x прямую, параллельную $\overrightarrow{AB}$, до пересечения с прямой BB_x,

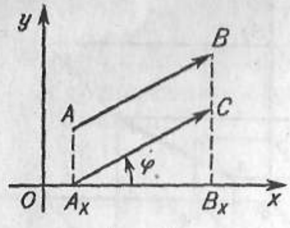


Рис. 11

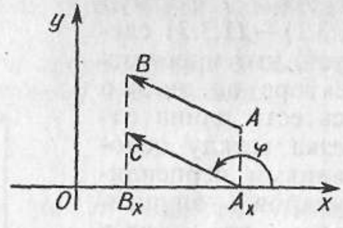


Рис. 12

получаем точку C. Из ΔCB_xA_x имеем

$$\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}=A_xB_x=|\overrightarrow{A_xC}|\cos\varphi=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi. \quad (1.3.5)$$

Если $\varphi>\pi/2$ (рис. 12), то из ΔA_xB_xC получаем

$$\text{пр}_{Ox}\overleftrightarrow{AB}=-|B_xA_x|=-|\overrightarrow{A_xC}|\cos(\pi-\varphi)=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi. \quad (1.3.6)$$

б) *Проекция суммы нескольких векторов на ось равна сумме проекций складываемых векторов на ту же ось* (рис. 13). Пусть даны три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$. Складывая их, получаем

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$

так что

$$\text{пр}_{Ox}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+CD)=\text{пр}_{Ox}AD=|A_xD_x|. \quad (1.3.7)$$

Из рис. 13 видно, что

$$\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}+\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{BC}+\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{CD}=$$

$$=|A_xB_x|+|B_xC_x|+(-|C_xD_x|)=|A_xD_x|. \quad (1.3.8)$$

Так как правые части (1.3.7) и (1.3.8) равны, имеем

$$\text{пр}_{Ox}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+CD)=\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}+\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{BC}+\text{пр}_{Ox}CD.. \quad (1.3.9)$$

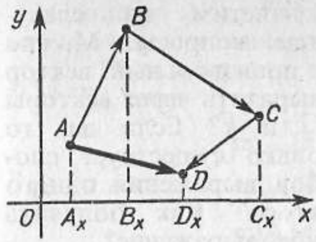


Рис. 13

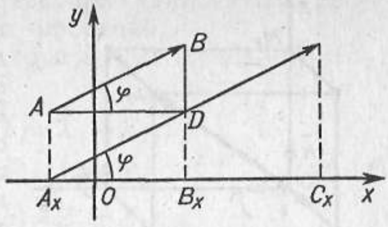


Рис. 14

в) *При умножении вектора $\overrightarrow{AB}$ на число m его проекция умножается на m.* При доказательстве ограничимся случаем $m>0$.

Вектор $m\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_xC}$ образует с осью Ox тот же угол φ, что и вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 14). Из $\triangle A_xB_xD$ и $\triangle A_xC_xC$ имеем

$$\frac{|A_xC_x|}{A_xB_x}=\frac{A_xC}{A_xD}=\frac{m|\overrightarrow{AB}|}{|A_xD|}.$$

Но $|A_xD|=|\overrightarrow{AB}|$, поэтому

$$\frac{|A_xC_x|}{|A_xB_x|}=\frac{m|AB|}{|\overrightarrow{AB}|}=m, \text{ а } |A_xC_x|=m|A_xB_x|.$$

Кратко говорят: при «растяжении» вектора в m раз во столько же раз «растягивается» и его проекция.

2. Разложение вектора по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Возьмем прямоугольную систему координат в пространстве и вместе с нею три единичных вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Условимся, что:

1) начало векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ совмещено с началом координат;

2) векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ имеют одинаковое направление с положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Определение. *Система трех векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ называется декартовым прямоугольным базисом.*

$+\overrightarrow{M_{xy}M}$. Но $\overrightarrow{OM_x}=OM_x\vec{i}=X\vec{i}$; $\overrightarrow{M_xM_{xy}}=OM_y\vec{j}=Y\vec{j}$; $\overrightarrow{M_{xy}M}=OM_z\vec{k}=Z\vec{k}$, поэтому

$$\overrightarrow{OM}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}. \qquad (1.3.10)$$

Представление вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ в виде суммы $X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$ называется *разложением* вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Векторы $X\vec{i}$, $Y\vec{j}$, $Z\vec{k}$ называются *составляющими* вектора $\vec{a}$.

Таким образом, доказана **теорема:** *каким бы ни был вектор $\vec{a}$ его всегда можно разложить по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, т. е.*

$$\vec{a}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k},$$

где X, Y, Z — координаты вектора $\vec{a}$.

Как доказывается в подробных курсах аналитической геометрии, такое разложение единственно.

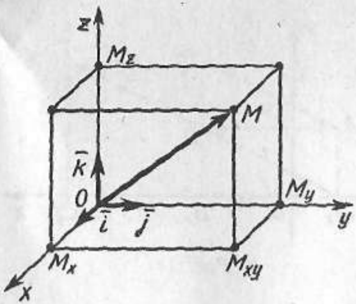


Рис. 15

Ответим на следующие вопросы. Можно ли произвольный вектор $\vec{a}$ выразить через векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$? Если да, то сколько существует способов выражения одного вектора? Как получить такое выражение?

Перенесем вектор $\vec{a}$ параллельно самому себе так, чтобы начало вектора $\vec{a}$ совпадало с началом координат (рис. 15). Конец вектора обозначим буквой M. Из точки M опустим на плоскость Oxy перпендикуляр, его основание обозначим M_{xy}. Из точки M_{xy} опустим на оси Ox и Oy перпендикуляры, их основания обозначим соответственно M_x и M_y. Проведем, наконец, через точку M прямую, параллельную прямой (OM_{xy}). Эта прямая пересечет ось Oz в точке M_z. Непосредственно из рис. 15 следует:

$$OM_x = X, \quad OM_y = X, \quad OM_z = Z; \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{M_x M_{xy}} +$$

Свойства координат вектора аналогичны сформулированным свойствам проекций.

1^0. Если даны два вектора $\vec{a}=(X;\ Y;\ Z)$ и $\vec{b}=(X_2;\ Y_2;\ Z_2)$, то

$$\begin{aligned} \text{пр}_{Ox}(\vec{a}\pm\vec{b}) &= X_1+X_2; \\ \text{пр}_{Oy}(\vec{a}\pm\vec{b}) &= Y_1\pm Y_2; \\ \text{пр}_{Oz}(\vec{a}\pm\vec{b}) &= Z_1\pm Z_2; \end{aligned} \qquad (1.3.11)$$

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(X_1\pm X_2)\vec{i}+(Y_1\pm Y_2)\vec{j}+(Z_1\pm Z_2)\vec{k}. \qquad (1.3.12)$$

Таким образом, при сложении двух векторов их координаты складываются.

● **Пример.** Найдите сумму векторов $\vec{a}=5\vec{i}+10\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$. Имеем

$$\vec{a}+\vec{b}=(5+1)\vec{i}+(10+2)\vec{j}+(-2+6)\vec{k}=6\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}. \text{ ●}$$

2^0. Учитывая распределительное свойство умножения на скаляр, можно записать

$$m(X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k})=mX\vec{i}+mY\vec{j}+mZ\vec{k}.$$

Например,

$$\frac{1}{5}(5\vec{i}+10\vec{j}-15\vec{k})=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}.$$

Следовательно, при умножении вектора на число m его координаты умножаются на то же число.

3^0. Условие коллинеарности двух векторов. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, т. е. $\vec{a}=m\vec{b}$. Пусть по-прежнему $\vec{a}=(X_1;\ Y_1;\ Z_1)$, $\vec{b}=(X_2;\ Y_2;\ Z_2)$, тогда

$$\vec{a}=m(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k})=mX_2\vec{i}+mY\vec{j}+mZ_2\vec{k}. \qquad (1.3.13)$$

Но $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$, поэтому $mX_2=X_1$; $mY_2=Y_1$; $mZ_2=Z_1$, откуда следует, что

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}. \qquad (1.3.14)$$

Таким образом, условие коллинеарности двух векторов состоит в пропорциональности их координат. Для того чтобы равенства (1.3.14) были применимы в случае, когда хотя бы одно из чисел X_2, Y_2, Z_2 равно нулю, условие коллинеарности записывают в виде

$$X_1Y_2-X_2Y_1=0,\quad Y_1Z_2-Y_2Z_1=0.$$

● **Пример.** Проверить, коллинеарны ли векторы $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}$ и $\vec{b}=-2i-4\vec{j}+16\vec{k}$. Имеем

$$\frac{X_1}{X_2}=-\frac{1}{2},\ \frac{Y_1}{Y_2}=-\frac{1}{2};\ \frac{Z_1}{Z_2}=\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}.$$ ●

§ 1.4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

В физике и механике приходится вычислять работу силы $\vec{F}$, под действием которой тело перемещается на расстояние, определяемое вектором $\vec{S}$ (рис. 16).

Если все точки тела переместятся по направлению действия силы, то работа силы равна произведению силы $\vec{F}$ на пройденный путь $\vec{S}$, т. е. $A=|\vec{F}||\vec{S}|$. Если же тело движется под углом φ к направлению вектора $\vec{F}$, то будет действовать лишь составляющая силы $\vec{F}$, направленная вдоль вектора $\vec{S}$, а перпендикулярная составляющая уравновешивается силой сопротивления. Проектируя силу на направление вектора пути $\vec{S}$, получаем $\text{пр}_{\vec{S}}\vec{F}=|\vec{F}|\cos\varphi$. Следовательно, работа

$$A=|\vec{F}|\cos\varphi\,|\vec{S}|=|\vec{F}||\vec{S}|\cos\varphi.$$

В результате получается скаляр A, равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Определение. *Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначение $\vec{a}\cdot\vec{b}$) называется произведение их длин на косинус угла между ними:*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}). \tag{1.4.1}$$

По определению, если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то $\vec{a}\cdot 0=\vec{0}\vec{b}=0$.

Знак скалярного произведения определяется величиной $(\vec{a}\wedge\vec{b})$. Если $(\vec{a}\wedge\vec{b})\in[0;\pi/2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, если

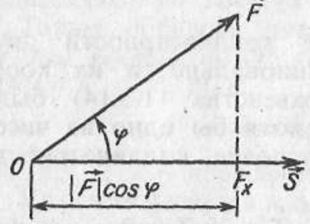


Рис. 16

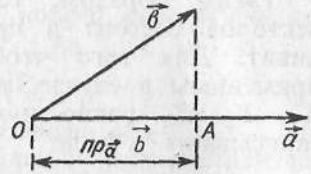


Рис. 17

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \in (\pi/2; \pi)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$. Скалярное произведение определяется только для двух векторов.

1. Свойства скалярного произведения.

1^0. *Скалярное произведение двух векторов равно длине одного вектора, умноженной на проекцию второго вектора на ось, определяемую первым вектором.*

Действительно, согласно (1.3.6) и рис. 17, имеем

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = |\vec{b}| \cos\varphi; \tag{1.4.2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\varphi = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}. \tag{1.4.3}$$

Проектируя вектор $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$, находим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

2^0. *Скалярное произведение перестановочно, т. е.*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b}\vec{a}. \tag{1.4.4}$$

Доказательство. Имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}),$$
$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos(\vec{b} \wedge \vec{a}).$$

Так как $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{b} \wedge \vec{a})$ и $|\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{b}||\vec{a}|$, то правые части этих равенств равны, следовательно,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

3^0. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны друг к другу или хотя бы один из них равен нулю, то*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \tag{1.4.5}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Доказательство. Пусть $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \pi/2$; тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\frac{\pi}{2} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$$

Пусть далее $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; тогда $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$. Отсюда следует, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:

$$|\vec{a}| = 0, \ |\vec{b}| = 0, \ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \pi/2.$$

Учитывая свойство (1.4.5), получаем

$$\vec{i}\,\vec{j} = \vec{j}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{i} = 0. \tag{1.4.6}$$

4^0. Если m — *действительное число, то для любых векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m\vec{a}\cdot\vec{b},$$

$$\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m\vec{a}\cdot\vec{b}. \qquad (1.4.7)$$

Свойство проверяется на основании определения скалярного произведения.

5^0. *Скалярное произведение подчиняется распределительному закону относительно суммы*

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}. \qquad (1.4.8)$$

Действительно, воспользовавшись тем, что $\vec{a}+\vec{b}$ — вектор, обозначим $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$, тогда, учитывая (1.4.2), имеем

$$\vec{d}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,\text{пр}_{\vec{c}}\vec{d}=|\vec{c}|\,\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Принимая во внимание (1.3.9), запишем

$$|\vec{c}|\,\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\,\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\,\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на $\vec{a}$ называется скалярным квадратом и равно квадрату длины вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2=a^2. \qquad (1.4.9)$$

Отсюда ясно, что $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\,\vec{j}=\vec{k}\,\vec{k}=1. \qquad (1.4.10)$

Для вычисления скалярного произведения векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ попарно удобно помнить таблицу.

Таблица 1.3

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

2. Скалярное произведение векторов, заданных координатами. Пусть даны два вектора $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$ и $\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$. Вычислим

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k})\cdot(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}).$$

Применяя свойства (1.4.7) и (1.4.8), получим

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2\vec{i}\,\vec{i}+X_1Y_1\vec{i}\,\vec{j}+X_1Z_2\vec{i}\,\vec{k}+$$
$$+Y_1X_2\vec{j}\,\vec{i}+Y_1Y_2\vec{j}\,\vec{j}+Y_1Z_2\vec{j}\,\vec{k}+$$
$$+Z_1X_2\vec{k}\,\vec{i}+Z_1Y_2\vec{k}\,\vec{j}+Z_1Z_2\vec{k}\,\vec{k}. \qquad (1.4.11)$$

Учитывая, что $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные, попарно перпендикулярные векторы, запишем: $\vec{i}\,\vec{i}=\vec{j}\,\vec{j}=\vec{k}\,\vec{k}=1$, $\vec{i}\,\vec{j}=\vec{i}\,\vec{k}=\vec{j}\,\vec{k}=0$ (табл. 1.3). В правой части равенства (1.4.11) останется только три слагаемых, т. е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1Y_1+X_2Y_2+Z_1Z_2. \qquad (1.4.12)$$

● **Пример 1.** Найти скалярное произведение векторов

$$\vec{a}=2\vec{j}-6\vec{j}+4\vec{k} \text{ и } \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

Решение. Имеем: $X_1=2$, $Y_1=-6$, $Z_1=4$, $X_2=1$, $Y_2=2$, $Z_2=1$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1+(-6)\cdot2+4\cdot1=-6.$$

Знак «минус» указывает, что угол между векторами — тупой [см. (1.4.1)]. ●

● **Пример 2.** Проверить, перпендикулярны ли векторы

$$\vec{a}=\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k} \text{ и } \vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}.$$

Решение. Находим

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-2)+6\cdot1+(-4)1=6-6=0.$$

Таким образом, $\vec{a}\perp\vec{b}$. ●

§ 1.5. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ, НА ПЛОСКОСТИ И НА ПРЯМОЙ

Пусть вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ задан координатами точек $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Координаты вектора таковы:

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1,\quad Z=z_2-z_1. \qquad (1.5.1)$$

Найдем скалярный квадрат вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}^2=a^2.$$

С другой стороны, $\vec{a}^2=X^2+Y^2+Z^2$. Извлекая корень квадратный из $\vec{a}^2$, получим длину вектора или расстояние между точками A и B:

$$a=|AB|=\sqrt{a^2}=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Заменим координаты вектора его значениями из (1.5.1). Имеем

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1.5.2)$$

Предположим, что A и B лежат на плоскости Oxy, тогда $z_1=0$, $z_2=0$ и

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (1.5.3)$$

Наконец, если точки A и B лежат на числовой оси, например на оси Ox, то $z_1=z_2=0$, $y_1=y_2=0$ и

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|. \qquad (1.5.4)$$

Получен тот же результат, что и (1.3.1).

● **Пример.** Даны точки $A(1;\ -1;\ -2)$ и $B(3;\ 0;\ -4)$. Расстояние между точками A и B

$$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(0+1)^2+[(-4)-(-2)]^2}=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3. \text{ ●}$$

Угол между двумя векторами. Зная правило определения скалярного произведения, можно найти косинус угла между векторами ($\cos\varphi$). Имеем

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=ab\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{ab}.$$

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a}=(X_1;\ Y_1;\ Z_1)$, $\bar{b}=(X_2;\ Y_2;\ Z_2)$, то

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \qquad (1.5.5)$$

§ 1.6. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

● **Задача.** Даны точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. На прямой (AB) найти точку $C(x_C;\ y_C)$, делящую отрезок AB следующим образом:

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}. \qquad (1.6.1)$$

Изобразим задачу схематически (рис. 18, *а*, *б*). Если точка C находится между A и B, то отрезки AC и CB имеют одинаковое направление, отношение $\lambda=\frac{AC}{CB}$ принимается положительным (см. рис. 18, *а*); если точка C расположена на продолжении отрезка AB, то отрезки AC и CB противоположно направлены, число $\lambda=\frac{AC}{CB}$ принимают отрицательным.

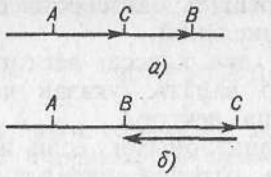


Рис. 18

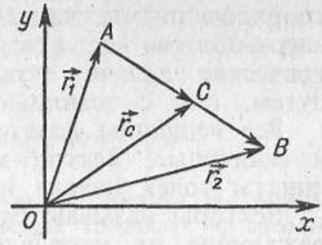


Рис. 19

Введем систему координат Oxy и построим радиусы-векторы точек A, C и B (рис. 19).

Имеем

$$\overrightarrow{AC}=\vec{r}_C-\vec{r}_1, \quad \overrightarrow{CB}=\vec{r}_2-\vec{r}_C. \tag{1.6.2}$$

Из (1.6.1) и (1.6.2) имеем $\vec{r}_C-\vec{r}_1=\lambda(\vec{r}_2-\vec{r}_C)$. Решая это уравнение относительно $\vec{r}_C$, получаем

$$\vec{r}_C=\frac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}. \tag{1.6.3}$$

Из (1.6.3), учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, находим

$$x_C=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \tag{1.6.4}$$

$$y_C=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1.6.5}$$

● **Пример.** Найти точку C, делящую отрезок AB в отношении 1:2, если известно, что $A(-4; 2)$, $B(5; 14)$.

Решение. Имеем $x_1=-4$, $x_2=5$, $y_1=2$, $y_2=14$. $\lambda=1/2$. Далее находим

$$x_C=\frac{-4+1/2\cdot 5}{1+1/2}=\frac{-3/2}{3/2}=-1;$$

$$\frac{2+1/2\cdot 14}{1+1/2}=\frac{9}{3/2}=6.$$

Таким образом, $C(-1; 6)$. ●

§ 1.7. ВЫВОДЫ

С помощью метода координат положение точки на прямой, на плоскости и в пространстве можно задать соответственно одним, двумя и тремя упорядоченными числами; утверждения о точках «переводятся» в утверждения о числах; геометрические задачи можно решать алгебраическим путем, т. е. с помощью вычислений.

Все величины делятся на два класса: векторные и скалярные. Вектор можно задать, указав координаты точек начала и конца вектора.

Векторы называются коллинеарными, если изображающие их направленные отрезки параллельны или хотя бы один из них нулевой.

Векторы называются компланарными, если изображающие их направленные отрезки параллельны одной плоскости, или хотя бы один из них равен нулю.

Декартовым прямоугольным базисом называется система трех взаимно перпендикулярных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ с общим началом и длиной каждого равной единице.

В базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ любой вектор представляется в виде равенства

$$\overrightarrow{AB}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k},$$

где $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — начало вектора, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — конец вектора,

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1,\quad Z=z_2-z_1.$$

Числа X, Y, Z — координаты вектора.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}).$$

Равенство нулю скалярного произведения ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является необходимым и достаточным признаком перпендикулярности этих векторов.

Скалярное произведение векторов, заданных в декартовом прямоугольном базисе, равно сумме произведений их одноименных координат. С помощью скалярного произведения легко найти угол между векторами. Используя скалярное произведение вектора самого на себя, можно получить формулы для вычисления расстояния между двумя точками на прямой, на плоскости и в пространстве.

Расстояние между двумя точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей их одноименных координат. Имеются формулы для вычисления координат точки, делящей отрезок в данном отношении.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение аналитической геометрии как науки.

2. Сформулируйте сущность метода координат на прямой, на плоскости и в пространстве.

3. Дайте определение скалярных и векторных величин.

4. Что называется вектором?

5. Сформулируйте правила сложения, вычитания двух векторов и умножения вектора на число.

6. Какие векторы называются компланарными, коллинеарными; какие векторы называются равными, противоположными?

7. Что называется проекцией вектора на ось?

8. Дайте определение декартова прямоугольного базиса.

9. Как записывается вектор в декартовом прямоугольном базисе?

10. Что называется скалярным произведением векторов и каковы его свойства?

11. Напишите формулы для вычисления расстояния между двумя точками на прямой, на плоскости и в пространстве.

12. Напишите формулы деления отрезка в данном отношении.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите координаты точек, симметричных относительно начала координат с точками $A(3;\ 0)$, $B(0;\ -4)$; $C(-2;\ 3)$; $D(-4;\ 3)$. Постройте эти точки.

2. Прямоугольный участок земли имеет размеры 30×20 м. Определите координаты его вершин, если принять, что ось Ox проходит параллельно длинной стороне через середину короткой стороны, а ось Oy совмещена с короткой стороной.

3. Постройте треугольник с вершинами $A(-4;\ 2)$, $B(0;\ -1)$ и $C(3;\ 3)$ и определите его периметр.

4. Даны точки $A(2;\ 6)$, $B(0;\ 2)$. Постройте вектор $\overrightarrow{AB}$, его проекции на осях и вычислите $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}$, $\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|$.

5. Найдите углы ΔABC с вершинами в точках $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1;\ 1;\ 1)$, $C(0;\ 0;\ 5)$.

6. Найдите длину медиан треугольника с вершинами $A(2;\ 1)$, $B(-2;\ 3)$, $C(0;\ 3)$.

7. Даны точки $M_1(1;\ 3)$, $M_2(2;\ 4)$, $M_3(0;\ -2)$, $M_4(3;\ 5)$.

Найдите координаты векторов: а) $\overrightarrow{M_1M_2}$; б) $\overrightarrow{M_2M_4}$; в) $\overrightarrow{M_1M_3}$; г) $\overrightarrow{M_4M_3}$.

8. Даны вершины треугольника $A(1;\ 5)$, $B(3;\ -7)$, $C(-5;\ 1)$. Определите косинусы его внутренних углов, середины его сторон.

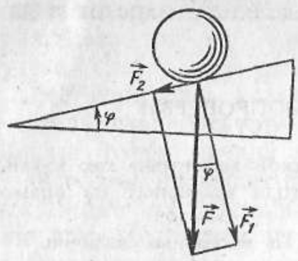


Рис. 20

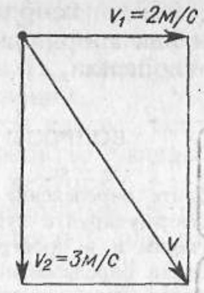


Рис. 21

9. Дана точка $A(1;\ 2)$. Точка $M(x;\ y)$ двигается по плоскости Oxy. Найдите условия, которым должны удовлетворять x и y для того, чтобы вектор $\overrightarrow{AM}$ был перпендикулярен вектору $\vec{N}=(3;\ 4)$.

10. Дана точка $A(1;\ 2;\ 3)$. Точка $M(x;\ y;\ z)$ двигается в пространстве. Напишите условие, которому должны удовлетворять x, y, z, для того, чтобы вектор $\overrightarrow{AM}$ был перпендикулярен вектору $\vec{N}=(3;\ 4;\ 5)$.

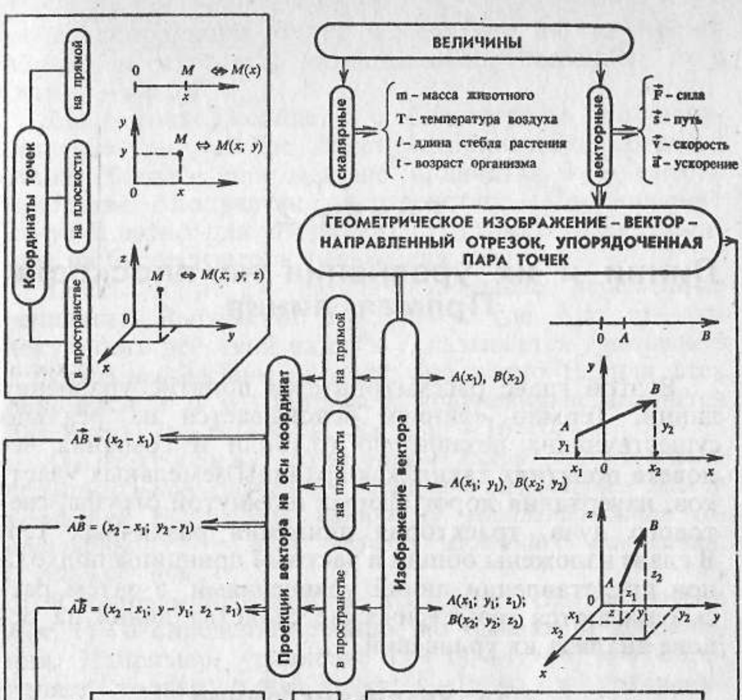
11. Вычислите работу, произведенную силой $\vec{F}=(5;\ 2;\ 1)$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из начала координат в точку $M_1(2;\ 1;\ 4)$.

12. Вычислите, какую работу производит сила $\vec{F}=(3;\ 2;\ 4)$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $M_1(2;\ -5;\ 4)$ в положение $M_2(7;\ -1;\ 3)$.

13. Камень массой m лежит на склоне, тангенс угла которого равен 1/6. Найдите составляющую вертикальной силы, действующей в направлении, перпендикулярном поверхности земли (рис. 20).

14. С самолета при высоте полета 30 м проводится подкормка посевов. Ветер, дующий горизонтально в направлении, перпендикулярном направлению движения самолета, сносит удобрения со скоростью $v_1=2$ м/с (рис. 21).

Частицы удобрения под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха падают вертикально вниз со скоростью $v_2=3$ м/с. Определить величину и направление сноса удобрений относительно линии, над которой летит самолет. Под каким углом к поверхности земли падают частицы удобрения? Найдите вектор пути $\vec{s}$, пройденного частицей удобрения при ее падении на землю. Смещением массы падающего удобрения за счет скорости движения самолета пренебречь.


ВЕЛИЧИНЫ
скалярные
m – масса животного
T – температура воздуха
l – длина стебля растения
t – возраст организма
векторные
F – сила
s – путь
v – скорость
a – ускорение
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ – ВЕКТОР – НАПРАВЛЕННЫЙ ОТРЕЗОК, УПОРЯДОЧЕННАЯ ПАРА ТОЧЕК
Координаты точек
на прямой
M ⇔ M(x)
на плоскости
M ⇔ M(x; y)
в пространстве
M ⇔ M(x; y; z)
Изображение вектора
Проекции вектора на оси координат
на прямой
A(x1), B(x2)
на плоскости
A(x1; y1), B(x2; y2)
в пространстве
A(x1; y1; z1); B(x2; y2; z2)
AB = (x2 – x1)
AB = (x2 – x1; y2 – y1)
AB = (x2 – x1; y – y1; z2 – z1)
В декартовом прямоугольном базисе
Запись вектора
AB = (x2 – x1)i + (y2 – y1)j + (z2 – z1)k = Xi + Yj + Zk
AB = (x2 – x1)i + (y2 – y1)j = Xi + Yj
AB = (x2 – x1)i = Xi
СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ
a = X1i + Y1j + Z1k, b = X2i + Y2j + Z2k
a·b = ab cos(a^b) = X1X2 + Y1Y2 + Z1Z2
a ⊥ b ⇔ a·b = 0 ⇔ X1X2 + Y1Y2 + Z1Z2 = 0
cos(a^b) = a·b / ab = (X1X2 + Y1Y2 + Z1Z2) / (√(X1² + Y1² + Z1²) √(X2² + Y2² + Z2²))
СКАЛЯРНЫЙ КВАДРАТ a·a = a² = X1² + Y1² + Z1²
Длина вектора = расстоянию между двумя точками
на прямой
на плоскости
в пространстве
|AB| = |x2 – x1|
|AB| = √((x2 – x1)2 + (y2 – y1)²)
|AB| = √((x2 – x1)² + (y2 – y1)² + (z2 – z1)²)

Глава 2

Линии и их уравнения на плоскости. Прямая линия

В этой главе рассматривается понятие уравнения линии. Термин «линия» основывается на реально существующих независимо от воли и сознания человека понятиях таких, как границы земельных участков, начертания дорог, форма натянутой струны, светового луча, траектория движения различных тел. В главе изложены общий и частный принципы подхода при представлении линий уравнениями, а затем рассматриваются геометрические свойства линий на основе анализа их уравнений.

§ 2.1. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

Понятие «линия на плоскости» будем считать интуитивно ясным, хотя определение линии довольно сложно и мы его рассматривать не будем.

Как установлено в гл. 1, между упорядоченной парой действительных чисел и точкой на плоскости в декартовых координатах устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Существует ли аналогичное соответствие между более сложными геометрическими формами, в частности линиями, и более сложными алгебраическими понятиями — уравнениями? Чтобы ответить на вопрос, начнем с примера.

Рис. 22

Проведем в системе координат Oxy биссектрису I и III координатных углов (рис. 22). Отметим на ней произвольную точку $M(x; y)$. Если точка M движется по биссектрисе, то ее координаты будут изменяться, но не произвольно, а оставаясь связанными соотношением $x=y$ (или $x-y=0$).

Если точка «сойдет» с биссектрисы, то соотношение $x-y=0$ не будет выполняться, абсцисса станет больше или меньше ординаты, т. е. вместо равенства получится неравенство. Соотношение $x-y=0$ верно для координат $(x;\ y)$ всех точек, лежащих на биссектрисе, и только для них.

Пусть x и y — две произвольные переменные величины. Выражение $F(x;\ y)=0$, где $F(x;\ y)$ — совокупность действий над x и y, называется *уравнением с двумя неизвестными*, если оно верно не для всех пар чисел x и y. Например, уравнениями являются равенства $2x-6y+4=0$, $8x^2+y^2-16=0$.

Определение. *Уравнением линии относительно прямоугольной системы координат называется такое уравнение $F(x;\ y)=0$, которому удовлетворяют координаты x, y всех точек, лежащих на линии, и только они.*

Как правило, в системе координат Oxy уравнение $F(x;\ y)=0$ определяет линию, но бывают и исключения. Например, уравнение $(x+1)^2+(y-4)^2=0$ определяет только одну точку $(-1;\ 4)$, а уравнение $2x^2+3y^2+6=0$ не имеет никакого геометрического образа. В уравнении $F(x;\ y)$ символы x и y называют текущими координатами.

Используя определение уравнения линии, можно установить, проходит ли данная линия через данную точку $(x_0;\ y_0)$, не прибегая к геометрическим построениям. Для этого достаточно в уравнение линии $F(x;\ y)=0$ вместо текущих координат подставить координаты данной точки $(x_0;\ y_0)$. Если получается числовое равенство (тождество), то линия проходит через точку (точка лежит на линии), если тождество не имеет места, то линия через точку не проходит.

В данном курсе будут рассмотрены некоторые линии, определяемые в прямоугольной системе координат алгебраическими уравнениями первой и второй степеней:

1) $Ax+By+C=0$;
2) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

● **Пример.** Центр окружности радиуса R совмещен с точкой $O_1(x_1;\ y_1)$, записать уравнение окружности.

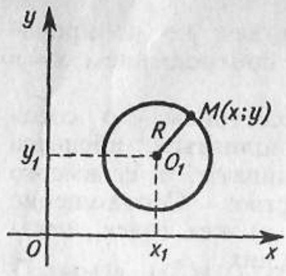


Рис. 23

Решение. Построим окружность в системе Oxy (рис. 23). Для любой точки $M(x; y)$, лежащей на окружности, имеем $|O_1M|=R$, или $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)}=$ $=R$. Возводя обе части равенства в квадрат, получим

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)=R. \qquad (2.1.1)$$

Выражение (2.1.1) и является уравнением окружности в выбранной системе координат. Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности принимает вид

$$x^2+y^2=R^2. \bullet \qquad (2.1.2)$$

§ 2.2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ. УГОЛ НАКЛОНА И УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Пусть в системе координат Oxy задана прямая l.

Определение 1. *Углом наклона* φ *прямой называется наименьший угол, отсчитываемый от положительного направления оси* Ox *против часовой стрелки до данной прямой* (рис. 24).

Угол $\varphi\in[0; \pi)$.

Если $\varphi=0$, *то* $l \parallel Ox$; *если* $\varphi=\pi/2$, *то* $l\perp Ox$ *или* $l\parallel Oy$.

Характеристика наклона прямой, выраженная в градусной или радианной мере, неудобна при вычислениях, поэтому желательно ввести безразмерный показатель наклона.

Определение 2. *Тангенс угла наклона прямой называется угловым коэффициентом* k, *т. е.* $\operatorname{tg}\varphi=k$.

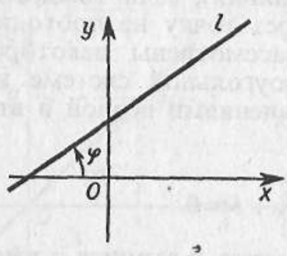


Рис. 24

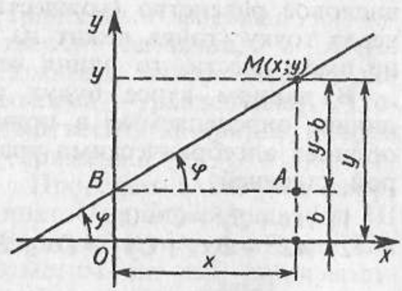


Рис. 25

Из определения 2 следует, что

1) $k \in (-\infty; +\infty)$;

2) *если* $\varphi < \pi/2$, *то* $k > 0$;

3) *если* $\varphi > \pi/2$, *то* $k < 0$;

4) *каждому значению углового коэффициента соответствует одно значение угла* $\varphi \in [0; \pi)$;

5) *прямая, параллельная оси* Oy, *не имеет углового коэффициента.*

Угловой коэффициент определяет величину наклона прямой по отношению к оси Ox, так что термины «наклон прямой» и «угловой коэффициент» обычно отождествляют.

Положение прямой в системе координат Oxy можно задать различными условиями, в частности прямая определена, если задан угол наклона φ и точка $B(0; b)$, лежащая на прямой (рис. 25). Как по этим данным найти уравнение прямой? Ограничимся случаем, когда угол наклона φ острый, $b > 0$. Возьмем на прямой точку $M(x; y)$. Из треугольника BAM следует, что точка M лежит на прямой в том и только в том случае, если

$$y - b = x \operatorname{tg} \varphi.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} \varphi = k$, имеем

$$y - b = kx, \text{ или } y = kx + b, \tag{2.2.1}$$

где k — угловой коэффициент; b — отрезок, отсекаемый прямой на оси Ox; x, y — текущие координаты.

§ 2.3. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Пусть даны две пересекающиеся прямые l и m с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 соответственно.

Определение. *Углом* θ *между прямыми* l *и* m *называется угол, отсчитываемый от прямой с угловым коэффициентом* k_1, *против хода часовой стрелки — до прямой с угловым коэффициентом* k_2.

Из рис. 26 видно, что $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$. По формулам, известным из тригонометрии, имеем

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1}.$$

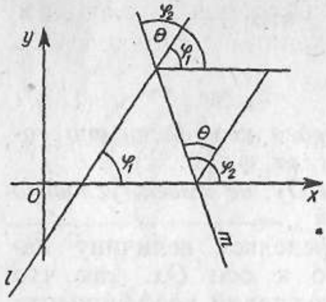


Рис. 26

Учитывая, что $\operatorname{tg}\varphi_1=k_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2=k_2$, получаем

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \quad (2.3.1)$$

Если $l\parallel m$, то обе прямые имеют равные углы наклона:

$$\varphi_1=\varphi_2\Leftrightarrow\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}\varphi_2\Leftrightarrow k_1=k_2. \quad (2.3.2)$$

Равенство (2.3.2) является *необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых.* Если $l\perp m$, то

$$\varphi_1=\varphi_2\pm\pi/2\Leftrightarrow\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}(\varphi_2\pm\pi/2)=-\operatorname{ctg}\varphi_2=$$
$$=-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_2}\Leftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}. \quad (2.3.3)$$

Равенство (2.3.3) является *необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух прямых.*

● **Пример.** Среди прямых 1) $y=2x-3$; 2) $y=\frac{1}{4}x+2$; 3) $y=2x+3$; 4) $y=-4x-6$ указать параллельные и перпендикулярные.

Решение. Находим угловые коэффициенты. Имеем $k_1=2$, $k_2=1/4$ $k_3=2$, $k_4=-4$. Так как $k_1=k_3$, то прямые 1) и 3) параллельны. Из того, что $k_2=-1/k_4$, следует, что прямые 2) и 4) перпендикулярны. ●

§ 2.4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ДАННОМУ ВЕКТОРУ

Положение прямой l на плоскости Oxy может быть определено, если задана точка $M_1(x_1;\ y_1)\in l$ и вектор $\vec{N}=(A;\ B)$, перпендикулярный l. Вектор $\vec{N}$ называется *нормальным*. Найдем уравнение прямой l. Возьмем на прямой точку $M(x;\ y)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$ (рис. 27). Согласно условию $\vec{N}\perp\overrightarrow{M_1M}$, поэтому скаляр-

Рис 27

ное произведение $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1 M} = 0$. Переходя к скалярному произведению векторов, заданных координатами, имеем

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \tag{2.4.1}$$

Этому соотношению удовлетворяют координаты x, y любой точки, лежащей на прямой l, и только они. Из (2.4.1) следует, что

$$Ax + By - (Ax_1 + By_1) = 0. \tag{2.4.2}$$

Введем обозначение

$$-(Ax_1 + By_1) = C. \tag{2.4.3}$$

Тогда

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.4.4}$$

где A и B — координаты нормального вектора; x, y — текущие координаты; C — свободный член. Соотношение (2.4.4) называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Таким образом, *прямая на плоскости может быть представлена уравнением первой степени относительно x и y.*

Можно показать, что всякое уравнение первой степени с двумя неизвестными x и y определяет прямую на плоскости Oxy. Для этого надо «обратить» предыдущие рассуждения, т. е. из (2.4.4) получить соотношение (2.4.1).

Проанализируем уравнение (2.4.4).

1) Если $A = 0$, то $\vec{N} \perp Ox$, а $l \parallel Ox$.

Уравнение прямой принимает вид $By + C = 0$, или $y = -\frac{C}{B}$. Используя обозначение $-\frac{C}{B} = b$, запишем

$$y = b. \tag{2.4.5}$$

2) Если $B = 0$, то $\vec{N} \perp Oy$, $l \parallel Oy$, а уравнение прямой имеет вид $Ax + C = 0$, или $x = -\frac{C}{A}$.

Используя обозначение $-\frac{C}{A} = a$, запишем

$$x = a. \tag{2.4.6}$$

3) Если $A = C = 0$, то $By = 0$, $y = 0 \Leftrightarrow l \in Ox$;

$$y = 0 \tag{2.4.7}$$

— уравнение оси Ox.

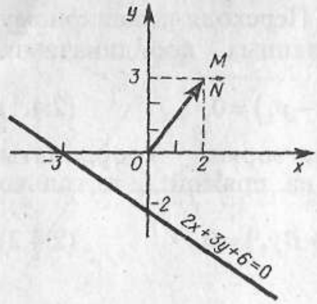


Рис. 28

4) Если $B=C=0$, то $Ax=0$, $x=0$, $\Rightarrow l \in Oy$, следовательно,

$$x=0 \qquad (2.4.8)$$

— уравнение оси Oy.

● **Пример.** Построить прямую $2x+3y+6=0$ и ее нормальный вектор $\vec{N}$.

Решение. Чтобы построить прямую, достаточно найти координаты каких-нибудь двух точек, лежащих на прямой. Составляем следующую таблицу:

x	0	3
y	-2	0

Одну из текущих координат берем произвольно, другую вычислим из уравнения прямой. Построив точки $A(0;\ -2)$ и $B(-3;\ 0)$ и проведя через них прямую, решим первую часть задачи. Нормальный вектор имеет координаты $\vec{N}=(2;\ 3)$. Совместим начало вектора $\vec{N}$ с началом координат, тогда конец его совпадает с точкой $M(2;\ 3)$ $\overrightarrow{OM}=\vec{N}$ (рис. 28).

§ 2.5. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ДАННЫЕ ТОЧКИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ В ДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ

Пусть даны две точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Проведем через них прямую l и выберем на ней текущую точку $M(x;\ y)$ (рис. 29). Установим соотношение между текущими координатами $(x;\ y)$ и координатами точек A и B. Запишем координаты векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$. Имеем $\overrightarrow{AM}=(x-x_1;\ y-y_1)$, $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$. Векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ расположены на одной прямой, следовательно, они коллинеарны. Учитывая (1.3.14), найдем

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \qquad (2.5.1)$$

где x_1, y_1 — координаты первой данной точки; x_2, y_2 — координаты второй данной точки; x, y — текущие координаты. Получено уравнение прямой, проходящей через две точки.

Из (2.5.1) имеем

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{2.5.2}$$

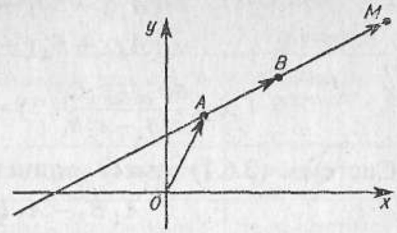


Рис. 29

Здесь число $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ равно угловому коэффициенту прямой. Обозначая $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$ и подставляя это значение в (2.5.2), имеем

$$y-y_1=k(x-x_1), \tag{2.5.3}$$

где x_1, y_1 — координаты данной точки; x, y — текущие координаты, k — угловой коэффициент. Получено уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

● **Пример.** Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-4;\ 6)$ и $M_2(2;\ -1)$. Найти ее угловой коэффициент.

Решение. Подставим в уравнение (2.5.1) $x_1=-4$, $x_2=2$, $y_1=6$, $y_2=-1$. Имеем

$$\frac{y-6}{-1-6}=\frac{x+4}{2+4}, \text{ или } \frac{y-6}{-7}=\frac{x+4}{6}.$$

После упрощения получаем

$$7x+6y-8=0;$$

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-6}{2+4}=-\frac{7}{6}. \text{ ●}$$

§ 2.6. ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПРЯМЫХ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы соответственно уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$. Найдем точку их пересечения. Точка пересечения, если она существует, является общей для обеих прямых, следовательно, ее координаты x, y должны обращать в тождество оба уравнения. Очевидно, что числа x, y являются решением системы

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2=0; \end{cases} \tag{2.6.1}$$

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad y=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Система (2.6.1) имеет единственное решение, если

$$A_1B_2-A_2B_1\neq 0. \tag{2.6.2}$$

Соотношение (2.6.2) означает, что прямые пересекаются.

Рассмотрим случай, когда

$$A_1B_2-A_2B_1=0,$$

$$B_1C_2-B_2C_1\neq 0 \text{ или } (A_2C_1-A_1C_2\neq 0). \tag{2.6.3}$$

Предположим, что решение системы (2.6.1) существует в виде пары чисел x_0, y_0. Подставляя их в (2.6.1), имеем

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0;$$

$$A_2x_0+B_2y_0+C_2=0.$$

Умножив первое из уравнений на A_2, а второе — на A_1 и вычитая из первого уравнения второе, получаем $A_2C_1-A_1C_2=0$, что противоречит условию. Система решений не имеет, следовательно, у прямых l_1 и l_2 нет общих точек, т. е. $l_1 \parallel l_2$. Условия (2.6.3) — условия параллельности двух прямых.

Наконец, возможен случай, когда $A_1B_2-A_2B_1=0$, $A_2C_1-A_1C_2=0$, $B_1C_1-B_2C_1$. Из этих равенств следует, что $A_2=\mu A_1$, $B_2=\mu B_1$, $C_2=\mu C_1$, или

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\mu,$$

где μ — некоторое число.

Коэффициенты уравнений пропорциональны. Система уравнений (2.6.1) равносильна одному уравнению, так как второе уравнение можно получить из первого, умножая его на μ. Уравнение $A_1x+B_1y+C_1=0$ имеет бесконечное множество решений

$$x=\frac{-B_1y-C_1}{A_1},$$

где y — любое число. В этом случае прямые l_1 и l_2 совпадают.

Оформим краткие выводы в виде таблицы

Таблица 2.1.

Зависимость между коэффициентами уравнений прямых	Взаимное расположение прямых	Количество рещений
$A_1B_2-A_2B_1\neq 0$	Прямые пересекаются	Одно
$A_1B_2-A_2B_1=0$ $B_1C_2-B_2C_1\neq 0$ $(A_2C_1-A_1C_2\neq 0)$	Прямые параллельны	Не существует
$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	Совпадают	Бесконечное множество

● **Пример**. Найти точку пересечения прямых

$$l_1: 2x+3y-16=0;$$
$$l_2: 3x-y-2=0.$$

Решение. Имеем: $A_1=2$, $B_1=3$, $A_2=3$, $B_2=-1$. Далее получаем

$$A_1B_2-A_2B_1=2(-1)-3\cdot 3=-11\neq 0.$$

Следовательно, прямые пересекаются.

Составляем систему

$$\begin{cases}2x+3y-16=0,\\3x-y-2=0.\end{cases}$$

Умножая первое из уравнений на 3, а второе на -2 и почленно складывая, получаем

$$\begin{array}{r}6x+9y-48=0,\\-6x+2y-4=0,\\\hline 11y-44=0\Leftrightarrow y=4.\end{array}$$

Умножая первое из уравнений на 1, а второе — на 3 и почленно складывая, получаем

$$\begin{array}{r}2x+3y-16=0,\\9x-3y-6=0,\\\hline 11x-22=0\Leftrightarrow x=2.\end{array}$$

Таким образом, точка пересечения прямых $M(2;\ 4)$.

§ 2.7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Рассмотрим уравнение оси Ox

$$y=0. \qquad (2.7.1)$$

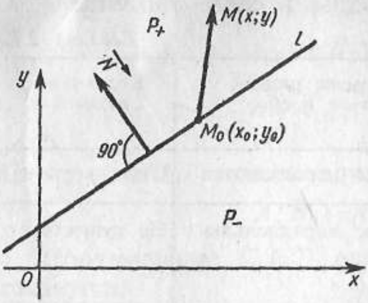


Рис. 30

Ось Ox делит плоскость Oxy на две полуплоскости — нижнюю, для всех точек которой $y<0$, и верхнюю, все точки которой имеют $y>0$. Неравенству $y<0$ удовлетворяют координаты всех точек нижней полуплоскости, тогда как неравенству $y>0$ удовлетворяют координаты всех точек верхней полуплоскости. Отсюда делаем вывод: неравенство вида $y>0$ или $y<0$ определяет полуплоскость.

Пусть дано уравнение

$$x=a. \tag{2.7.2}$$

Соответствующая прямая плоскость Oxy на две полуплоскости: левую и правую. Для всех точек левой полуплоскости $x<a$, а для правой полуплоскости $x>a$. Неравенство вида $x<a$ или $x>a$ определяют в системе декартовых координат полуплоскость.

Пусть теперь дано уравнение

$$Ax+By+C=0, \ (A^2+B^2 \neq 0). \tag{2.7.3}$$

Соответствующая прямая делит плоскость Oxy на две полуплоскости. Равенство (2.7.3) имеет место только для координат точек, лежащих на прямой. Если подставить координаты точки $M(x;\ y)$, которая лежит в какой-либо полуплоскости (т. е. не лежит на прямой) в (2.7.3), то равенство (2.7.3) перейдет в неравенство

$$Ax+By+C<0 \text{ или } Ax+By+C>0.$$

И в общем случае можно показать, что при подстановке координат точек одной полуплоскости в (2.7.3) получается неравенство одного смысла, а для координат точек другой полуплоскости имеет место неравенство противоположного смысла. Докажем это.

Пусть прямая L задана уравнением $Ax+By+C=0$ (рис. 30). Прямая L разбивает плоскость Oxy на три части:

1) открытую полуплоскость P_+ (без точек L);

2) открытую полуплоскость P_- (без точек L);

3) саму прямую L.

На полуплоскость P_+ указывает вектор $\vec{N}$.

Теорема. *Точка* $M(x;\ y)\in P_+$ *тогда и только тогда, когда* $Ax+By+C>0$.

Доказательство. Возьмем на прямой L точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и точку $M(x;\ y)\in P_+$. Рассмотрим вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0)$. Ясно, что $M(x;\ y)\in P_+\Leftrightarrow(\overline{M_0M}\ \widehat{}\ \overline{N})$ — острый $\Leftrightarrow \overline{M_0M}\cdot\overline{N}>0\Leftrightarrow A(x-x_0)+$ $+B(y-y_0)>0\Leftrightarrow Ax+By>Ax_0+By_0\Leftrightarrow Ax+By+C>Ax_0+By_0+C$.

Так как $M_0(x_0;\ y_0)\in L$, то $Ax_0+By_0+C=0$. Таким образом,

$$Ax+By+C>0.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказываются следующие утверждения:

1) $M(x;\ y)\in P_-\Leftrightarrow Ax+By+C<0$;

2) $M(x;\ y)\in P_+\cup L\Leftrightarrow Ax+By+C\geqslant 0$;

3) $M(x;\ y)\in P_-\cup L\Leftrightarrow Ax+By+C\leqslant 0$.

Вывод: в системе координат Oxy неравенства

$$Ax+By+C<0 \text{ и } Ax+By+C>0$$

определяют полуплоскости.

Определение. *Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству* $Ax+By+C\lesseqgtr 0$, *называется областью его решений.*

Областью решений является полуплоскость. Для неравенств вида $Ax+By+C\leqslant 0$ или $Ax+By+C\geqslant 0$ в область решений входит и разделяющая прямая.

Правило. *Чтобы построить область решений неравенства, необходимо*:

1) *построить прямую*

$$Ax+By+C=0; \tag{2.7.3}$$

2) *вместо текущих координат x и y подставить в* (2.7.3) *координаты точки* $O(0;\ 0)$.

Если неравенство удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая точку $O(0;\ 0)$. Если неравенство не удовлетворяется, то областью решений служит другая полуплоскость. Короче, если в неравенстве $Ax+By+C\lesseqgtr 0$ знак свободного члена совпадает со смыслом неравенства, то полуплоскость, содержащая точку $O(0;\ 0)$, является областью решений неравенства.

Область решений неравенства $Ax+By\lesseqgtr 0$ строится аналогично, только вместо координат точки $O(0;\ 0)$ надо подставлять координаты точки, лежащей в одной из полуплоскостей.

● **Пример.** Построить в системе декартовых координат область решений неравенства

$$2x+3y-6>0.$$

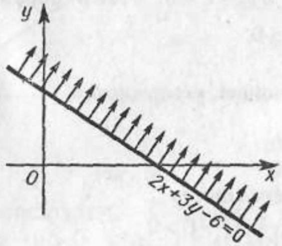


Рис. 31

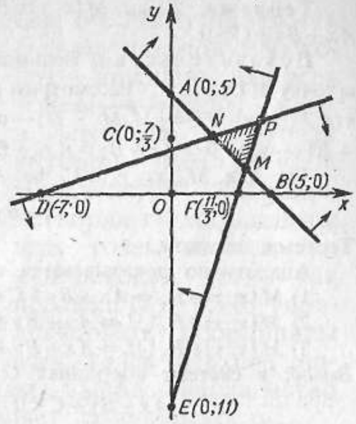


Рис. 32

Решение. Строим прямую $2x+3y-6=0$. Знак свободного члена противоположен смыслу знака неравенства. Следовательно, область решений не содержит начала координат (на рис. 31 показана штриховкой). Прямая линия не входит в область решений. ●

Пусть в декартовых координатах Oxy дана система n неравенств

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1<0, \\ A_2x+B_2y+C_2>0, \\ A_3x+B_3y+C_3<0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_nx+B_ny+C_n>0. \end{cases} \qquad (2.7.4)$$

Определение. *Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам* (2.7.4), *называется областью решений системы.*

Область решений — это общая часть всех полуплоскостей, определяемых каждым неравенством, отдельно, т. е. система неравенств вида (2.7.4) определяет пересечение полуплоскостей. В этом состоит геометрический смысл системы (2.7.4).

● **Пример.** Построить область решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+y-5>0, \\ -x+3y-7<0, \\ 3x-y<11. \end{cases}$$

Решение. Строим соответствующие прямые $x+y-5$, $-x+3y-7=0$, $3x-y=11$ (рис. 32).

Итак, областью решений является часть плоскости внутри треугольника. Стороны треугольника в эту область не входят. ●

§ 2.8. ЗАДАЧИ ИЗ АГРОНОМИЧЕСКОЙ И ЗООИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКИ

При составлении задач (условных) данного параграфа понятие функциональной зависимости считалось известным читателю из школьного курса.

Рассмотрим некоторые простейшие математические модели задач, связанных с сельскохозяйственным производством. Как известно, модель задачи должна отражать прежде всего главные, основные, особенности и свойства, определяющие условия протекания процесса или явления.

При увеличении числа принимаемых во внимание условий математическая модель усложняется, изучать такую модель труднее, но полученные результаты будут более значимыми, а прогноз хода процесса окажется более точным.

Наиболее простой математической моделью является уравнение первой степени — уравнение прямой линии.

Задача 1. Масса y 1 м^3 сена, соломы и других грубых кормов определяется при прочих равных условиях продолжительностью x времени хранения после складирования. Пусть через месяц после укладки 1 м^3 сена природных сенокосов весил 52 кг, а через три месяца — 62 кг. Предполагая, что в промежутке времени от 0 до 3 месяцев зависимость между x и y графически выражается прямой*, записать уравнение этой прямой и построить ее график. Определить массу 1 м^3 сена после 1,5; 2 и 2,5 месяцев ее хранения, сначала по графику, а затем с помощью вычислений.

Решение. Найдем уравнение прямой, проходящей через две точки $A(1; 52)$ и $B(3; 62)$. Имеем

---

* Строго говоря, такое предположение является условным. В первые дни после складирования масса 1 м^3 сена возрастает заметно, с течением времени возрастание замедляется и затем практически прекращается. Для учета этих условий потребовалась бы более сложная математическая модель.

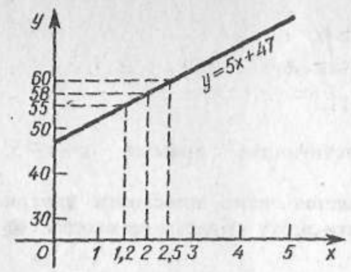


Рис. 33

$$\frac{y-52}{62-52}=\frac{x-1}{3-1}, \text{ или } \frac{y-52}{10}=\frac{x-1}{2}.$$

Умножая обе части равенства на 2 и на 10 и уединив y, окончательно имеем

$$y=5x+47. \qquad (2.8.1)$$

Уравнение (2.8.1) является математической моделью изучаемого процесса с учетом принятых допущений. График (2.8.1) изображен на рис. 33.

Если $x=1{,}5$, то $y=5\cdot1{,}5+47=54{,}5$;
если $x=2$, то $y=5\cdot2{,}0+47=57$;
если $x=2{,}5$, то $y=5\cdot2{,}5+47=59{,}5$.

Из графика находим: $y=55$ при $x=1{,}5$; $y=58$ при $x=2$; $y=60$ при $x=2{,}5$. ●

● **Задача 2.** Масса y подстилочного навоза от одной головы крупного рогатого скота при одинаковых условиях содержания зависит от длительности стойлового периода x. Так, при стойловом периоде в 180 дн масса навоза на 1 голову составляла 4,5 т, а при длительности периода 240 дн — 8 т.

Какой выход навоза можно ожидать при стойловом периоде 210 дн, 225 дн, если на основании изучения условий производства можно считать, что в данном промежутке времени масса навоза возрастала пропорционально продолжительности стойлового периода?

Решение. График зависимости величин y и x — прямая, проходящая через точки $A(180; 4{,}5)$ и $B(240; 8)$.

Запишем уравнение прямой (AB):

$$\frac{y-4{,}5}{8-4{,}5}=\frac{x-180}{240-180}, \text{ или } \frac{y-4{,}5}{3{,}5}=\frac{x-180}{60}.$$

Окончательно получаем $y=0{,}058x-6$.
Если $x=210$, то $y=0{,}058\cdot210-6\approx6{,}2m$,
если $x=240$, то $y=0{,}058\cdot225-6\approx7{,}0m$. ●

● **Задача 3.** Для некоторых сортов вики установлено, что при прочих равных условиях продуктивность (урожайность зеленой массы, сена, семян) зависит от массы 1000 семян посевного материала.

Так, если масса 1000 зерен составляет 27,5 г, то урожайность зеленой массы составляет 150 ц/га и семян 8 ц/га, а если масса 1000 зерен равна 42,5 г, то соответственно 225 и 15 ц/га.

Считая, что графиком зависимости урожайности зеленой массы и семян от массы 1000 семян на интервале [27,5; 42,5] является прямая, найти уравнения этих прямых и определить урожайность зеленой массы и сена при массе 1000 семян в 30 г.

Решение. Уравнение пропорциональной зависимости имеет вид

$$y=kx+b. \tag{2.8.2}$$

Прямая (2.8.2) проходит через точки $A(27{,}5;\ 150)$ и $B(42{,}5;\ 225)$. Для урожайности зеленой массы имеем уравнение

$$\frac{y-150}{225-150}=\frac{x-27{,}5}{42{,}5-27{,}5}, \text{ или } y=5x+12{,}5. \tag{2.8.3}$$

Математическая модель урожайности семян в зависимости от массы 1000 семян получается аналогично. Прямая (2.8.2) проходит через точки $C(27{,}5;\ 8)$ и $D(42{,}5;\ 15)$. Имеем

$$\frac{y-8}{15-8}=\frac{x-27{,}5}{42{,}5-27{,}5}, \text{ или } y=0{,}4(6)x-4{,}8(3), \text{ или } y\approx 0{,}5x-4{,}8. \tag{2.8.4}$$

По формулам (2.8.3) и (2.8.4) можно найти приближенное значение урожайности зеленой массы вики и семян при любой массе 1000 семян, $x\in[27{,}5;\ 42{,}5]$.

Так, при $x=30$ г урожайность зеленой массы

$$y=5\cdot 30+12{,}5=162{,}5 \text{ (ц/га)}.$$

Урожайность семян

$$y=0{,}5\cdot 30-4{,}8=11{,}2 \text{ (ц/га)}.$$

Полученные результаты следует считать приближенными, их точность зависит от того, на сколько точно отражает выбранная модель реальный биологический процесс. ●

● **Задача 4.** Посевной агрегат с шириной захвата 4 м при сплошном рядовом посеве полевой культуры совершает прямолинейное движение в северо-восточном направлении под углом 60° к направлению меридиана. Приняв, что ось Oy совпадает с направлением меридиана и что точка начала движения совпадает с началом координат, записать уравнения прямолинейных участков траектории движения агрегата (рис. 34).

Решение. Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом ($y=kx+b$). В данном случае

$$k=\operatorname{tg}(90^\circ-60^\circ)=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Уравнение начальной траектории имеет вид

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

Из треугольника ABO имеем

$$|AO|=\frac{|BO|}{\cos 30^\circ}=\frac{2\cdot 4}{\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

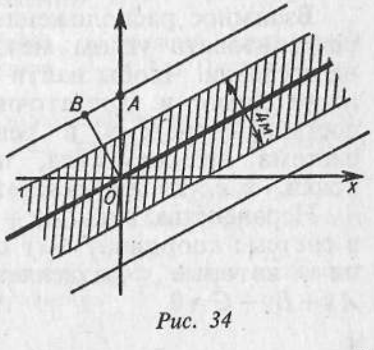


Рис. 34

Для линии движения агрегата, совпадающей с отрезком BA, имеем

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Для всех других траекторий уравнение имеет следующий вид:

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+n\frac{8}{\sqrt{3}}, \text{ где } n\in Z. \bullet$$

§ 2.9. ВЫВОДЫ

С помощью системы декартовых прямоугольных координат Oxy устанавливается взаимно однозначное соответствие между линиями на плоскости и уравнениями вида $F(x, y)=0$.

Прямая линия выражается уравнением первой степени относительно x и y. Уравнение первой степени вида $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$ определяет в системе координат Oxy прямую линию. Положение прямой на плоскости и соответствующее ей уравнение могут быть найдены, если известно любое одно из следующих условий:

1) угол наклона прямой и точка ее пересечения с осью Oy;

2) координаты точки, лежащей на прямой, и вектор $\vec{N}$, перпендикулярный прямой (нормальный вектор);

3) координаты двух точек, лежащих на прямой;

4) координаты одной точки, лежащей на прямой, и ее угловой коэффициент;

5) координаты одной точки, лежащей на прямой, и уравнение прямой, параллельной или перпендикулярной искомой прямой.

Могут быть и другие условия, использование которых приводит к перечисленным.

Взаимное расположение двух прямых можно охарактеризовать углом между прямыми и точкой их пересечения. Чтобы найти точку пересечения прямых, необходимо и достаточно из уравнений прямых составить систему и решить ее. В случае, если система не совместна, прямые не имеют общей точки, т. е. не пересекаются.

Неравенства вида $Ax+By+C<0$ и $Ax+By+C>0$ в системе координат Oxy определяют полуплоскости, на которые разделяется плоскость прямой $Ax+By+C=0$.

Система линейных неравенств с двумя неизвестными определяет ту часть плоскости Oxy, координаты точек которой удовлетворяют всем неравенствам.

Уравнение вида $y=kx+b$ или $Ax+By+C=0$ применяется для изучения простейших процессов в сельскохозяйственном производстве, где можно допустить, что величины x и y изменяются пропорционально.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение уравнения линии на плоскости.
2. Напишите общее уравнение прямой.
3. Укажите различные случаи положения прямой относительно осей координат и соответствующие им уравнения.
4. Как проверить, лежит ли данная точка на данной прямой?
5. Что называется углом наклона прямой?
6. Что называется угловым коэффициентом прямой, каков его геометрический смысл?
7. Чему равен угловой коэффициент прямой, параллельной оси Ox?
8. Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
9. Напишите уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки, общее уравнение прямой.
10. Напишите формулу тангенса угла между двумя прямыми.
11. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
12. Как определить точку пересечения двух прямых?
13. В чем состоит геометрический смысл неравенства первой степени с двумя неизвестными?
14. В чем состоит геометрический смысл системы неравенств первой степени с двумя неизвестными?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(1; -4)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=(2; 6)$. Постройте эту прямую.
2. Постройте вектор $\vec{N}(3; 4)$, выходящий из начала координат, и прямую l: $3x+4y-12=0$. Под каким углом к вектору $\vec{N}$ проходит прямая?
3. Постройте прямые $2x-6=0$, $4y+12=0$, $x-6y=0$, $6x-y=0$. Найдите нормальные векторы и угловые коэффициенты этих прямых.
4. Постройте прямую, проходящую через начало координат и точку $(-2; 3)$, напишите ее уравнение.

5. Уравнение прямых имеют вид: $2x-3y=6$, $2x+3y=0$, $y=-3$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$, приведите их к уравнениям с угловым коэффициентом и определите параметры k и b.

6. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 3)$ и $B(4; -2)$.

7. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $C(2; 4)$ перпендикулярно прямой (AB) (см. задачу 6).

8. Определите вершины угла треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $x+3y=0$, $x=3$, $x-2y+3=0$. Найдите систему неравенств, для которой областью решений являются точки, лежащие внутри треугольника.

9. Среди прямых: 1) $3x-2y+7=0$, 2) $6x-4y-9=0$, 3) $6x+4y-5=0$, 4) $2x+3y-6=0$ найдите параллельные и перпендикулярные. Постройте эти прямые и их нормальные векторы, исходящие из начала координат.

10. Луч света направлен по прямой $y=\frac{2}{3}x-4$. Дойдя до оси абсцисс, он от нее отразился. Определите точку встречи луча с осью и уравнение отраженного луча.

11. Постройте область решений отдельно каждого из следующих неравенств:
1) $3x-y+1>0$; 2) $3x-y+1<0$; 3) $2x+y-4\geqslant 0$; 4) $2x+y-4<0$.

12. Постройте область решений системы неравенств:

1) $\begin{cases}3x-y+6>0,\\ x>0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-y+6>0,\\ x<0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+y-6>0,\\ x<0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x+y-6<0,\\ x>0;\end{cases}$

5) $\begin{cases}3x-2y+6\geqslant 0,\\ 3x-2y-6\leqslant 0;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}3x-2y\leqslant 0,\\ 3x-2y-6\geqslant 0;\end{cases}$

7) $\begin{cases}5x+y-7\leqslant 0,\\ 2x-3y-13\leqslant 0,\\ 7x-2y-3\geqslant 0;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}2x-3y-6\leqslant 0,\\ 4x-2y+8\geqslant 0,\\ x+2y-10<0;\end{cases}$

9) $\begin{cases}x-2y-5\leqslant 0,\\ 5x-3y+9\geqslant 0,\\ 2x+3y-11\leqslant 0;\end{cases}$ 10) $\begin{cases}4x+5y-8\leqslant 0,\\ 3x-y+7\geqslant 0,\\ 4x+5y-12<0.\end{cases}$

13. Зависимость урожая картофеля y (ц/га) от фотосинтетического потенциала x (%) выражается прямой, проходящей через начало координат и точку $A(2; 450)$. Запишите уравнение зависимости.

14. Зависимость величины общей сухой биомассы y (г/м^2) картофеля от нарастающей суммы испарения $x=\sum E$ (мм) выражается прямой, проходящей через точки $A(160; 0)$ и $B(300; 1100)$.

Запишите уравнение прямой (AB). Угловой коэффициент прямой выражает наибольший эффект орошения в период интенсивного роста картофеля.

15. Издержки производства 100 ед. некоторого товара составляют $y_1=300$ руб., а 500 единиц стоят $y_2=600$ руб. Определите функцию издержек производства и стоимость 400 единиц товара при условии, что функция линейная.

16*. После того как были убраны 12 га силосных культур, силосоуборочный комбайн продолжал работать, убирая за каждый час по 1,7 га. Определите графически, сколько гектаров силосных культур было убрано через x часов работы, запишите формулу данной зависимости.

17. Данные о массе зерна x(г) и содержании (%) в нем жира приведены в следующей таблице:

N	x	y
1	32,5	6,85
2	42,5	6,42
3	52,5	5,00

Постройте точки и по ним приближенно определите уравнение линейной зависимости y от x.

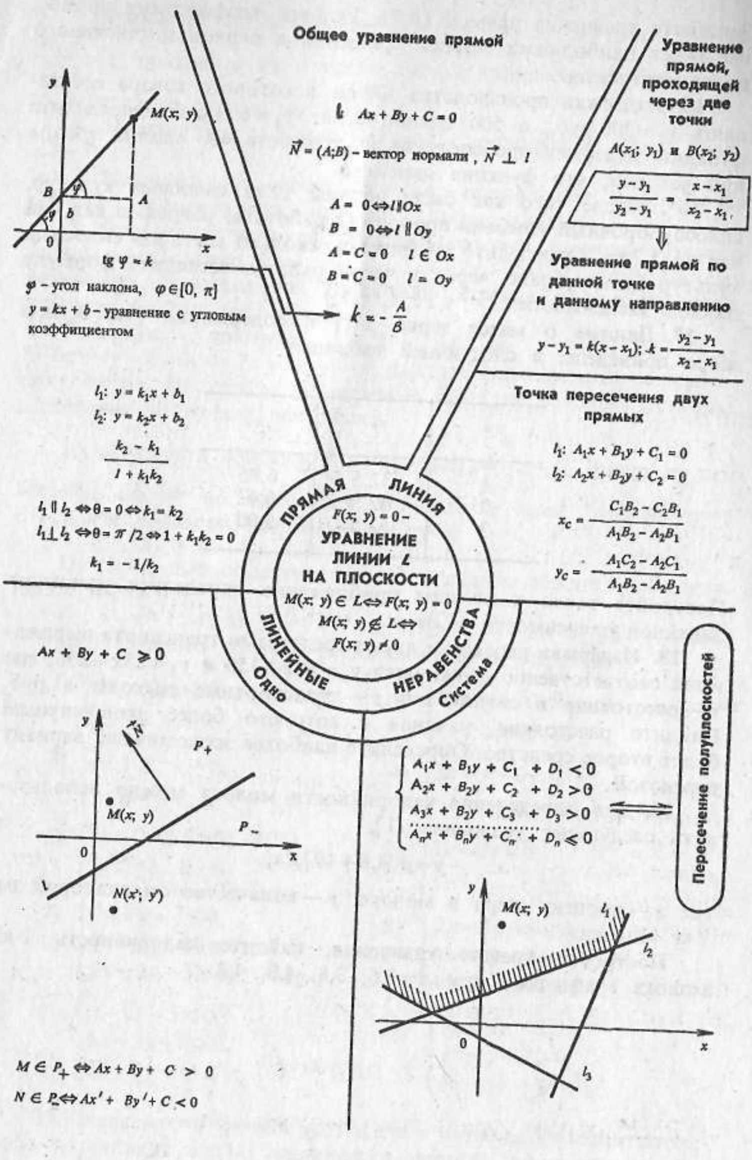
18. Издержки перевозки двумя средствами транспорта выражаются соответственно функциями $y_1=50x+150$ и $y_2=25x+250$, где x — расстояние в сотнях км, y — транспортные расходы в руб. Найдите расстояние, начиная с которого более экономичным будет второе средство. Определите наиболее экономичный вариант перевозок.

19. Для определения калорийности молока можно использовать следующее уравнение [1]:

$$y=304{,}8+107{,}2x,$$

где x — процент жира в молоке; y — количество килокалорий на 1 кг молока.

Постройте график уравнения, найдите калорийность 1 кг молока графически при $x=3{,}6,\ 3{,}8,\ 4{,}0,\ 4{,}2$.



Общее уравнение прямой
l: $Ax + By + C = 0$
$\vec{N} = (A;B)$ – вектор нормали, $\vec{N} \perp l$
$A = 0 \Leftrightarrow l \parallel Ox$
$B = 0 \Leftrightarrow l \parallel Oy$
$A = C = 0 \quad l \in Ox$
$B = C = 0 \quad l = Oy$
$k = -\dfrac{A}{B}$
y
$M(x;\ y)$
B
A
φ
b
0
x
$\operatorname{tg} \varphi = k$
φ – угол наклона, $\varphi \in [0,\ \pi]$
$y = kx + b$ – уравнение с угловым коэффициентом
Уравнение прямой, проходящей через две точки
$A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$
$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
Уравнение прямой по данной точке и данному направлению
$y - y_1 = k(x - x_1);\ k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
l_1: $y = k_1x + b_1$
l_2: $y = k_2x + b_2$
$\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$
$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2$
$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \theta = \pi/2 \Leftrightarrow 1 + k_1k_2 = 0$
$k_1 = -1/k_2$
Точка пересечения двух прямых
l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$
l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$
$x_C = \dfrac{C_1B_2 - C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$
$y_C = \dfrac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$
ПРЯМАЯ ЛИНИЯ
$F(x;\ y) = 0$ –
УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ L НА ПЛОСКОСТИ
$M(x;\ y) \in L \Leftrightarrow F(x;\ y) = 0$
$M(x;\ y) \notin L \Leftrightarrow F(x;\ y) \neq 0$
ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
Одно
Система
$Ax + By + C \geq 0$
y
$\vec{N}$
P_+
$M(x;\ y)$
P_-
0
x
$N(x';\ y')$
$M \in P_+ \Leftrightarrow Ax + By + C > 0$
$N \in P_- \Leftrightarrow Ax' + By' + C < 0$
$A_1x + B_1y + C_1 + D_1 < 0$
$A_2x + B_2y + C_2 + D_2 > 0$
$A_3x + B_3y + C_3 + D_3 > 0$
$A_nx + B_ny + C_n + D_n \leq 0$
Пересечение полуплоскостей
y
$M(x;\ y)$
l_1
l_2
l_3
0
x

Глава 3

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе продолжено изложение основ аналитической геометрии на плоскости. Показано преимущество изучения геометрических свойств линий более сложных, чем прямая, с помощью анализа их уравнений. В конце главы приведены примеры использования уравнений линий второго порядка к задачам сельскохозяйственного производства.

§ 3.1. ПОНЯТИЕ О ПОРЯДКЕ ЛИНИИ

Определение 1. *Алгебраическим уравнением второй степени называется уравнение вида*

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (3.1.1)$$

где A, B, C, D, E, F—действительные числа и по крайней мере одно из чисел A, B, C не равно нулю.

Определение 2. *Линии, которые в системе декартовых координат определяются алгебраическими уравнениями второй степени, называются линиями второго порядка.*

Рассмотрим четыре линии: окружность, эллипс, параболу и гиперболу. С уравнением окружности читатель уже знаком.

§ 3.2. ЭЛЛИПС

Рассмотрим уравнение окружности

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (3.2.1)$$

Каждой точке (x, y), лежащей на этой окружности, поставим в соответствие точку $(x; \lambda y)$. Если $0<\lambda<1$, то окружность равномерно сжимается в направлении, параллельном оси Oy, к оси Ox; если $\lambda>1$, то

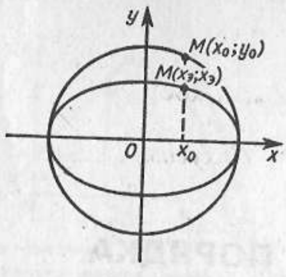


Рис. 35

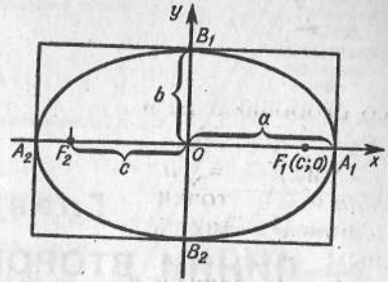


Рис. 36

равномерно растягивается в направлении оси Oy от оси Ox.

Полученная линия называется *эллипсом.*

Пусть $M_1(x_э; y_э)$ — произвольная точка эллипса, $M(x_0; y_0)$ — соответствующая точка на окружности (рис. 35)

$$x_э = x_0 \Leftrightarrow x_0 = x_э,$$

$$y_э = \lambda y_0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{y_э}{\lambda}.$$

Подставив значения x_0 и y_0 в (3.2.1), получим

$$x_э^2 + \left(\frac{y_э}{\lambda}\right)^2 = R^2$$

или

$$\frac{x_э^2}{R^2} + \frac{y_э^2}{\lambda^2 R^2} = 1.$$

Используя обозначения $R^2 = a^2$, $\lambda^2 R^2 = b^2$ и опустив индекс «Э», получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Определение. *Множество точек плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3.2.2)$$

называется эллипсом.

Числа a и b — полуоси эллипса. Из (3.2.2) следует:

1) эллипс — это линия, симметричная относительно осей Ox и Oy;

2) эллипс пересекает ось Ox в точках $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, а ось Oy — в точках $B_1(0; b)$ и $B_2(0; -b)$; точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами* эллипса;

3) эллипс — фигура, вписанная в прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям (рис. 36).

Число $c=\sqrt{a^2-b^2}$ называется *фокусным расстоянием*, а точки $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$ — *фокусами* эллипса*. Эллипс — линия, обладающая замечательным свойством: *сумма расстояний от любой ее точки до фокусов есть величина постоянная*.

Принимая это свойство за определение эллипса, можно получить уравнение (3.2.2).

§ 3.3. ПАРАБОЛА

Множество точек плоскости, координаты которых по отношению к системе декартовых координат удовлетворяют уравнению

$$y=ax^2, \tag{3.3.1}$$

где x, y — текущие координаты, a — некоторое число, называется *параболой*.

Установим форму параболы по ее уравнению.

1. Парабола проходит через начало координат, так как при $x=0$ имеем $y=0$, точка $O(0; 0)$ — вершина параболы.

2. Если $a>0$, то и $y \geqslant 0$ — парабола лежит выше оси Ox, кроме точки $O(0; 0)$. Если $a<0$, то $y \leqslant 0$ — график лежит ниже оси Ox.

3. Если $M(x; y)$ лежит на параболе, то точка $M(-x; y)$ также лежит на параболе, следовательно, осью симметрии параболы (3.3.1) является ось Oy. Ось симметрии называют осью параболы.

4. Если $|x|$ возрастает, то при $a>0$ y возрастает, а при $a<0$ убывает (абсолютное значение y возрастает).

5. Чем больше $|a|$, тем круче ветви параболы.

График параболы $y=ax^2$ изображен на рис. 37, $a>0$. Несложно проверить, что линия, определяемая

---

* Если $b>a$, то $c=\sqrt{b^2-a^2}$, фокусы лежат на оси Oy: $F_1(0; c)$, $F_2(0; -c)$.

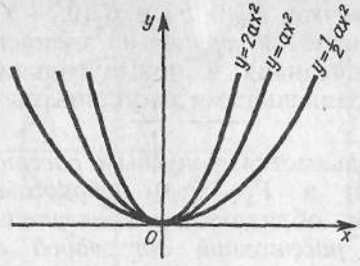


Рис. 37

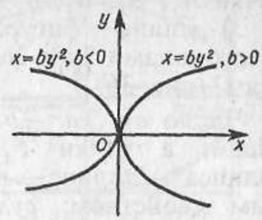


Рис. 38

уравнением

$$x=by^2, \qquad (3.3.2)$$

где b — число, это парабола, симметричная относительно оси Ox. Ее ветви направлены вправо при $b>0$ и влево при $b<0$ (рис. 38).

Уравнение параболы со смещенной вершиной. Рассмотрим параболу, ось симметрии которой параллельна оси Oy и не совпадает с ней, а вершина находится в точке $O_1(x_1; y_1)$ (рис. 39).

Через точку $O_1(x_1; y_1)$ проведем оси O_1X и O_1Y_1, параллельные осям Ox и Oy. Соответственно систему координат O_1XY назовем новой по отношению к старой системе Oxy. Уравнение параболы имеет вид

$$Y=aX^2. \qquad (3.3.3)$$

Найдем уравнение параболы в старой системе, координат для чего воспользуемся следующими соотношениями *

$$x=X+x_1, \quad y=Y+y_1, \quad X=x-x_1, \quad Y=y-y_1. \qquad (3.3.4)$$

Заменив в (3.3.3) X и Y их значениями из (3.3.4), получим

$$y-y_1=a(x-x_1)^2.$$

В результате преобразований имеем

$$y=ax^2-2ax_1x+ax_1^2+y_1. \qquad (3.3.5)$$

Полагая в (3.3.5) $-2ax_1=b$, $ax_1^2+y_1=c$, запишем

$$y=ax^2+bx+c.$$

---

* Соотношения очевидны, если точка O_1 находится в I квадранте, но можно показать, что они справедливы и при любом положении точки O_1.

Вывод. Уравнение параболы со смещенной вершиной, у которой ось симметрии параллельна оси Oy, имеет вид

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (3.3.6)$$

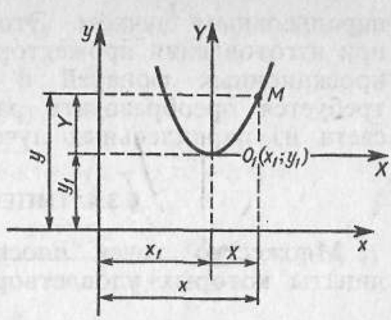


Рис. 39

Можно показать, что всякое уравнение вида (3.3.6) $(a \neq 0)$ определяет параболу с осью симметрии, параллельной оси Oy. Рассмотрим пример.

● **Пример.** Показать, что уравнение $y = 4x^2 - 8x + 15$ определяет параболу.

Решение. Имеем

$$y = 4x^2 - 8x + 16 - 1, \quad y = 4(x^2 - 2x + 4) - 1,$$
$$y = 4(x-2) - 1, \quad y + 1 = 4(x-2)^2.$$

Вершина параболы лежит в точке $D_1(2; -1)$.

Полагая $y = Y - 1$, $x = X + 2$, получаем $Y = 4X^2$, а это и есть уравнение параболы. ●

Отметим без доказательства, что линия, определяемая уравнением $x = ay^2 + by + c$, где a, b, c — действительные числа $(a \neq 0)$, определяет параболу, ось которой параллельна оси Ox. Парабола обладает рядом интересных свойств. Существует одна точка — фокус параболы — и одна прямая — ее директрисса — такие, что каждая точка параболы равноудалена от фокуса и от директриссы (рис. 40); фокусом является точка $F(p/2; 0)$, а директриссой — прямая $x = -p/2$. Это свойство можно принять за определение параболы и исходя из него получить уравнение параболы в виде $y^2 = 2px$, или $x = \dfrac{1}{2p}y^2$.

В результате вращения параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси симметрии получается тело вращения, называемое *параболоидом*. Если внутреннюю поверхность параболоида покрыть светоотражающим слоем, то получим вогнутое зеркало. Лучи от точечного источника света, помещенного в фокусе, отразившись от поверхности, пойдут

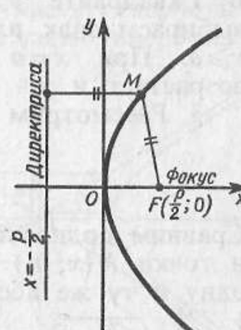


Рис. 40

параллельным пучком. Это свойство используется при изготовлении прожекторов, автомобильных фар, проекционных фонарей и других устройств, где требуется преобразовать рассеянный свет в пучок света из параллельных лучей.

§ 3.4. ГИПЕРБОЛА

Множество точек плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3.4.1}$$

где x, y — текущие координаты, a и b — некоторые постоянные числа, называется *гиперболой*.

Уравнение (3.4.1) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Установим форму гиперболы по ее уравнению.

1. Уравнение (3.4.1) содержит текущие координаты в четной степени. Это означает, что если точка $M(x; y)$ лежит на гиперболе, то точки $M_1(x; -y)$, $M_2(-x; -y)$, $M_3(-x; y)$ также лежат на гиперболе. Из этого делаем вывод: гипербола — это линия, симметричная относительно осей Ox и Oy. Можно исследовать форму части кривой, расположенной в I квадранте.

2. Решим уравнение (3.4.1) относительно y. Имеем

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{3.4.2}$$

В I квадранте $y>0$, поэтому в равенстве (3.4.2) выбираем знак плюс. Значения y определены, если $x\geqslant a$. При $x=a$ $y=0$. Если $|x|$ возрастает, то возрастает и y.

3. Рассмотрим прямую

$$Y=\frac{b}{a}x. \tag{3.4.3}$$

Сравним ординаты точки $M(x; y)$ гиперболы (3.4.2) и точки $N(x; Y)$ прямой (3.4.3). Обе точки имеют одну и ту же абсциссу x. Нетрудно убедиться, что $\frac{b}{a}x>\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ и, следовательно, $Y>y$.

Найдем расстояние между точками M и N. Имеем

$$|MN| = Y - y.$$

Из (3.4.2) и (3.4.3) следует, что

$$|MN| = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}. \quad (3.4.4)$$

Далее находим

$$\lim_{x\to+\infty} |MN| = \lim_{x\to+\infty} (Y-y) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = 0.$$

Опустим из точки M перпендикуляр на прямую $Y = \frac{b}{a}x$, и обозначим его основание через P (рис. 41). Треугольник MPN — прямоугольный, MP — катет, MN — гипотенуза, поэтому $|MP| < |NM|$. Если $|MN| \to 0$, то $|MP| \to 0$. Если $x \to +\infty$, то точка M, двигаясь по гиперболе, также уходит в бесконечность.

Вывод. Если переменная точка M стремится к бесконечности, двигаясь по гиперболе, расположенной в I квадранте, то $|MP| \to 0$. Прямая $y = \frac{b}{a}x$ называется *асимптотой*. Так как гипербола симметрична относительно координатных осей, то прямая $y = -\frac{b}{a}x$ также является асимптотой. Из (3.4.4) видно, что в I квадранте график гиперболы лежит «ниже» асимптоты.

Также «ниже» асимптоты лежит часть гиперболы во II квадранте. Получив остальные части гиперболы

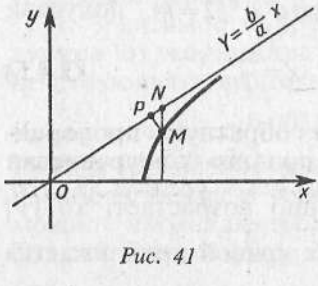


Рис. 41

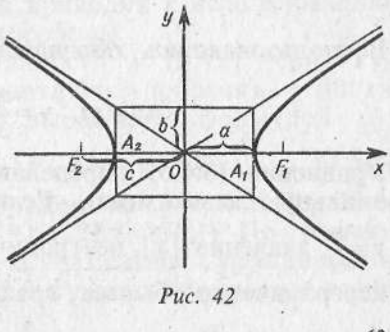


Рис. 42

с помощью преобразования симметрии, построим кривую (рис. 42). Для построения гиперболы целесообразно сначала построить ее асимптоты. Строят прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей Ox и Oy. Диагонали этого прямоугольника, неограниченно продолженные, являются асимптотами.

Рассмотрим основные элементы гиперболы.

Гипербола пересекает ось Ox в точках $A_1(a; 0)$ и $A_2(-a; 0)$ — *вершинах гиперболы*. Отрезок A_1A_2 длиной $2a$ называется *действительной осью*, отрезок OA_1, длиной a — *действительной полуосью*; b — *мнимая полуось*.

Гипербола, определяемая уравнением (3.4.2), не пересекает ось Oy, так как множество решений системы $\begin{cases} y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \\ x=0 \end{cases}$ пусто.

Определение. *Гипербола с равными полуосями* ($a=b$) *называется равносторонней.*

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1,$$

или

$$x^2-y^2=a^2.$$

Асимптотами равносторонней гиперболы служат прямые $y=x$ и $y=-x$. Доказано, что если асимптоты равносторонней гиперболы принять за оси системы декартовых координат, то гипербола определяется уравнением

$$xy=\frac{a^2}{2}.$$

Воспользовавшись обозначением $a^2/2=m$, получим:

$$xy=m, \quad y=\frac{m}{x}, \quad x=\frac{m}{y}. \tag{3.4.5}$$

Уравнения (3.4.5) определяют обратную пропорциональную зависимость. Если при $m>0$ в уравнении $y=\frac{m}{x}$ значение $|x|$ неограниченно возрастает, то $|y|$ неограниченно убывает, график кривой приближается к оси Ox. Если в уравнении $x=\frac{m}{y}$ при $m>0$ величина $|y|$ неограниченно возрастает, то $|x|$ неограниченно убывает, график функции приближается к оси Oy. Отсюда делаем вывод: оси Ox и Oy являются асимптотами гиперболы $xy=m$ (рис. 43). Графики обратной пропорциональной зависимости используют при анализе опытных данных.

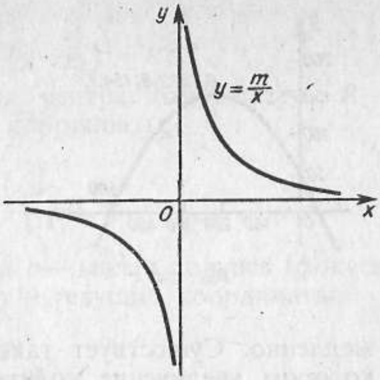


Рис. 43

Гиперболу можно определить как множество точек плоскости, разность расстояний каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $\pm 2a$.

Поместив фокусы в точках $F_1(c;\,0)$ и $F_2(-c;\,0)$ и используя определение, можно получить уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=c^2-a^2$.

§ 3.5. ПРИМЕРЫ ИЛЛЮСТРАЦИИ ПРОЦЕССОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Изучение зависимостей между различными показателями в сельском хозяйстве, в частности, в земледелии, растениеводстве, животноводстве, в экономике и других отраслях, часто приводит к использованию уравнений параболы и гиперболы.

1. Зависимость урожайности y (ц/га) зерна кукурузы от количества азотного удобрения x (кг/га действующего вещества) выражается формулой

$$y=-0{,}0021x^2+0{,}936x+49{,}84. \qquad (3.5.1)$$

График уравнения изображен на рис. 44. Вершина параболы лежит в точке O_1 (222,8; 154,1). По графику можно проанализировать изменение урожайности. Так, вблизи точки $x=222{,}8$ функция изменяется очень

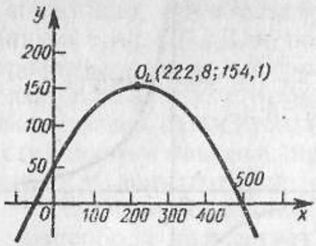


Рис. 44

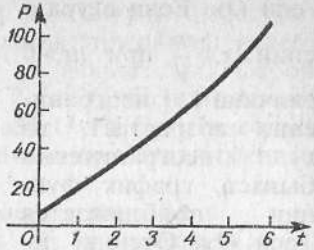


Рис. 45

медленно. Существует такое значение $x<222{,}8$, при котором увеличение количества азотных удобрений становится невыгодным. Это значение x зависит от соотношений цен на кукурузу и удобрение. Решение задачи приведено в [22].

2. Пусть y — стоимость произведенного продукта, x — затраты на его производство. Тогда $y-x$ — прибыль $П$. Если прибыль разделить на затраты x, то получим следующее выражение для рентабельности:

$$R=\frac{П}{x}. \tag{3.5.2}$$

Чем меньше издержки производства, тем выше рентабельность. Формула (3.5.2) определяет обратную пропорциональную зависимость, ее графиком является равносторонняя гипербола (см. рис. 43).

3. Расходы (в руб.) на откорм одного животного определяются формулой

$$P(t)=0{,}6(t-2)^2+14{,}2(t-2)+34,$$

где t — время откорма в месяцах, $t>0$. Графиком этой функции является парабола (рис. 45).

§ 3.6. ВЫВОДЫ

Линии на плоскости, которые в декартовых координатах определяются алгебраическими уравнениями второй степени относительно x, y, называются *линиями второго порядка*.

Мы рассмотрели 4 линии второго порядка: окружность, эллипс, гиперболу и параболу.

Простейшие уравнения второго порядка имеют такой вид:

1) для окружности

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2,$$

где x_1, y_1 — координаты центра окружности; R — радиус; x, y — текущие координаты;

2) для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a — большая полуось; b — малая полуось (фокусы лежат на оси Ox), x, y — текущие координаты;

3) для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a — действительная полуось, b — мнимая полуось; x, y — текущие координаты;

4) для параболы

$$y^2=2px \quad \text{или} \quad x^2=2gy,$$

где g, p — параметры, определяющие «крутизну» ее ветвей; x, y — текущие координаты.

Уравнение вида

$$y=ax^2+bx+c,$$

где x, y — текущие координаты, a, b, c — числа, $a\neq 0$, на плоскости Oxy определяет параболу, с осью, параллельной оси Oy.

Уравнение гиперболы, асимптотами которой служат оси координат, имеет вид

$$y=\frac{m}{x},$$

где m — параметр; x, y — текущие координаты.

Уравнения линий второго порядка используются при описании и анализе производственных процессов в качестве их математических моделей.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение линии второго порядка.

2. Какие линии второго порядка Вы знаете?

3. Выведите уравнение окружности с центром в точке $C(1; 2)$ и радиусом $R=4$.

4. Дайте определение эллипса.

5. Какую форму имеет эллипс? Укажите на чертеже и назовите его основные элементы.

6. Что представляет собой эллипс, если его полуоси равны?

7. Дайте определение параболы.

8. Какую форму имеет парабола, определяемая уравнением $y^2=2px$, или $x^2=2gy$? Как влияют параметры p и g на форму параболы?

9. Что представляет собой на графике в системе координат Oxy линия, заданная уравнением $y=ax^2+bx+c$?

10. Дайте определение гиперболы.

11. Какую форму имеет гипербола? Укажите на чертеже и назовите ее основные элементы.

12. Напишите уравнения асимптот гиперболы.

13. Напишите уравнение равносторонней гиперболы, асимптотами которой являются оси координат.

14. Приведите примеры использования уравнений линий второго порядка для изучения конкретных зависимостей.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Напишите уравнение окружности, центр которой лежит в начале координат, а радиус $R=4$. Постройте окружность. Как изменится уравнение, если центр окружности поместить в точку $C(0; 4)$?

2. Даны две точки $A(5; 3)$ и $C(2; 1)$. Напишите уравнение окружности с центром в точке C и радиусом $R=|AC|$. Постройте точки A, C и окружность.

3. Напишите каноническое уравнение эллипса, полуоси которого $a=5$, $b=3$. Определите фокусы эллипса и постройте кривую.

4. По заданным уравнениям определите название соответствующей линии второго порядка и постройте их. Найдите координаты вершин, координаты фокусов, уравнения асимптот *.

а) $9x^2+25y^2-225=0$;	б) $16x^2-9y^2=144$;
в) $6x-y^2=0$;	г) $xy=4$;
д) $10x^2+7y^2=140$;	е) $2x^2+y=0$;
ж) $4x^2-y^2-16=0$;	з) $2xy+3=0$.

5. Ординаты всех точек окружности $x^2+y^2=25$ уменьшены в 5 раз. Напишите уравнение соответствующей линии, постройте ее и установите название.

6. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ и точка $M(3; y)$. Найдите ординату точки M при условии, что точка лежит на эллипсе.

7. Составьте каноническое уравнение эллипса, если эллипс проходит через точки $M(4; 0)$, $N(2; 3)$.

---

* Курс высшей математики для техникумов / Под ред. Матвеева Н. М., М., 1977, с. 391.

8. Даны уравнения асимптот $y = \pm 2x$ и точка $M(5; 8)$, лежащая на гиперболе. Составьте уравнение гиперболы и постройте ее.

9. Напишите уравнение равносторонней гиперболы, проходящей через точку $M(2; -6)$, если точка пересечения ее асимптот лежит в начале координат. Постройте гиперболу.

10. Средний урожай люцерны в зависимости от глубины орошения x характеризуется уравнением $y = 0{,}0028x^2 + 0{,}253x + 3{,}520$, x — в см., y — в ц/га.

Постройте кривую урожайности на интервале [0; 30]. Определите по графику, при каких значениях x урожай будет наибольшим на заданном интервале.

11. Зависимость урожая зерна кукурузы y от запасов продуктивной влаги x выражается уравнением $y = -0{,}006x^2 + 1{,}100x - 4{,}200$. Постройте соответствующую кривую. Определите приближенно (по графику), при каких значениях x урожайность равна нулю.

12. Зависимость суточного удоя y (в литрах) от возраста коров x (лет) выражается уравнением

$$y = -9{,}53 + 6{,}86x - 0{,}49x^2.$$

Постройте график зависимости на интервале [2; 14]. Определите по графику, при каком возрасте коров удой максимален.

13. Зависимость прироста высоты растений ежи сборной от исходной влажности до полива в пределах 25—60% наименьшей влагоемкости почвы выражается [25] уравнением

$$y = -215 + \frac{12\,940}{x},$$

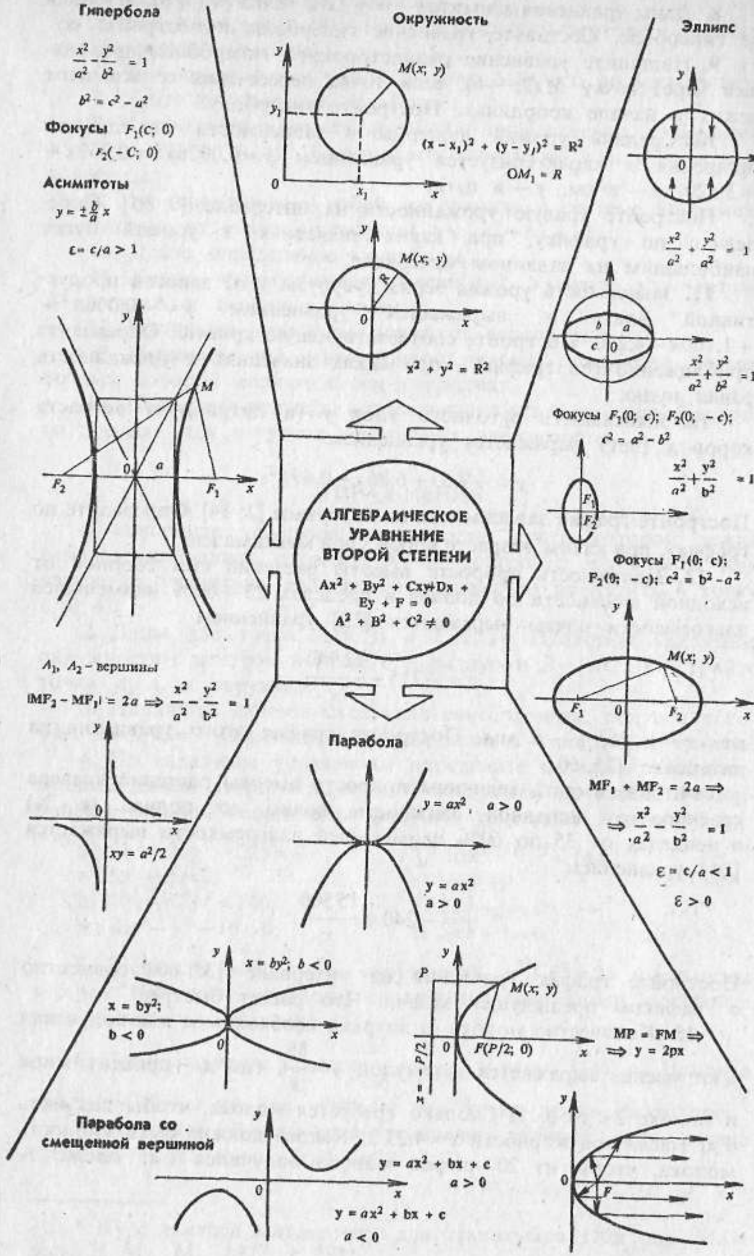
где x — в %, y — в мм. Постройте график этого уравнения на интервале [25, 60].

14. Зависимость величины прироста высоты растений клевера красного от исходной влажности почвы до полива (в %) в пределах от 35 до 60% наименьшей влагоемкости выражается [24] уравнением

$$y = -240 + \frac{15\,500}{x}.$$

Постройте график уравнения на интервале [25; 60] совместно с графиком предыдущей задачи. Что растет быстрее?

15. Количество молока (в литрах), необходимое для получения 1 кг масла, выражается формулой $y = \dfrac{88}{x}$, где x — процент жира в молоке $2 < x < 6$. 1) Сколько требуется молока, чтобы получить 5 кг масла при жирности $x = 4{,}2$? 2) Какова должна быть жирность молока, чтобы из 20 литров молока получился 1 кг масла?


Гипербола
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$b^2 = c^2 - a^2$
Фокусы $F_1(c;\ 0)$
$F_2(-c;\ 0)$
Асимптоты
$y = \pm \frac{b}{a} x$
$\varepsilon = c/a > 1$
$A_1,\ A_2$ – вершины
$|MF_2 - MF_1| = 2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$xy = a^2/2$
Окружность
$M(x;\ y)$
$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$
$OM_1 = R$
$x^2 + y^2 = R^2$
Эллипс
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Фокусы $F_1(0;\ c)$; $F_2(0;\ -c)$;
$c^2 = a^2 - b^2$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Фокусы $F_1(0;\ c)$;
$F_2(0;\ -c)$; $c^2 = b^2 - a^2$
$MF_1 + MF_2 = 2a \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$\varepsilon = c/a < 1$
$\varepsilon > 0$
АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ
$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$
$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$
Парабола
$y = ax^2,\ a > 0$
$y = ax^2$
$a > 0$
$x = by^2;\ b < 0$
$x = by^2;$
$b < 0$
$M(x;\ y)$
$F(P/2;\ 0)$
$x = -P/2$
$MP = FM \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 2px$
Парабола со смещенной вершиной
$y = ax^2 + bx + c$
$a > 0$
$y = ax^2 + bx + c$
$a < 0$

Глава 4

Плоскость

В главе дается понятие о простейшем виде поверхности — плоскости, в результате изучения которого станет ясным геометрический смысл системы неравенств первой степени с тремя неизвестными.

§ 4.1. ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ

Понятие поверхности будем считать интуитивно ясным. Можно говорить о поверхностях шара, призмы, параллелепипеда, дна и стенок некоторого сооружения или о поверхности участка поля, поверхности стола, пола и т. д.

В аналитической геометрии всякая поверхность рассматривается как множество точек пространства, координаты которых $(x; y; z)$ при переходе от одной точки к другой меняются, но не произвольно, а будучи связанными определенным соотношением. Если точка движется по поверхности, то это соотношение между x, y и z остается верным, если точка отрывается от поверхности, то соотношение нарушается.

Определение. *Уравнением поверхности в декартовой системе координат называется уравнение*

$$F(x; y; z)=0, \tag{4.1.1}$$

которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности.

Смысл выражения «координаты точек удовлетворяют уравнению» состоит в том, что при подстановке в (4.1.1) вместо x, y, z значений координат точки x_0, y_0, z_0 получается верное равенство.

● **Пример.** Пусть дано уравнение поверхности Q:

$$x-y+z-12=0. \qquad (4.1.2)$$

Установим, лежат ли на этой поверхности точки $A(1;1;8)$, $B(10;2;4)$?

Решение. Для точки A имеем: $x_0=1$, $y_0=1$, $z_0=1$. Подставляя эти числа в уравнение (4.1.2), получаем $1-1+8-12=-4$; $-4\neq 0 \Rightarrow A\notin Q$. Для точки B имеем $x_0=10$; $y_0=2$; $z_0=4$. В результате подстановки этих чисел в (4.1.2) имеем: $10-2+4-12=0$, $0=0$. Таким образом, точка B лежит на поверхности. ●

Простейшей поверхностью является плоскость.

§ 4.2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ДАННОМУ ВЕКТОРУ

Пусть даны вектор $\vec{N}=(A;B;C)$, перпендикулярный плоскости Q, и точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$, которая лежит на этой плоскости (рис. 46). Представим вектор $\vec{N}$ направленным отрезком $\overrightarrow{M_1P}$. Выберем на плоскости Q точку $M(x;y;z)$, назовем ее текущей, а x, y, z — текущими координатами.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M}$. Его координаты равны $(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$ [см. формулу (1.3.4)], т. е. $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$. Векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны, следовательно

$$\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_1M}=0, \qquad (4.2.1)$$

Выразим скалярное произведение векторов, заданных координатами. В соответствии с (1.4.12) имеем

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \qquad (4.2.2)$$

где A, B, C — координаты нормального вектора, x_1, y_1, z_1 — координаты данной точки, x, y, z — текущие координаты. Равенство (4.2.2) называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору*.

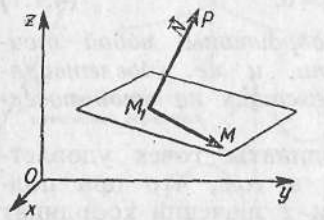


Рис. 46

Преобразуем уравнение (4.2.2); раскрывая скобки, получим

$$Ax+By+Cz-$$
$$-(Ax_1+By_1+Cz_1)=0.$$

Принимая обозначение $-(Ax_1+By_1+Cz_1)=D$, записываем

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (4.2.3)$$

где A, B, C — координаты нормального вектора; x, y, z — текущие координаты; D — свободный член. Уравнение (4.2.3) называется *общим уравнением плоскости*.

Вывод. В системе прямоугольных координат в пространстве всякая плоскость определяется уравнением первой степени относительно текущих координат.

Покажем, что имеет место и обратное предложение: всякое уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ определяет в системе прямоугольных координат $Oxyz$ некоторую плоскость $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$.

Полагая, что в (4.2.3) по крайней мере один из коэффициентов не равен нулю, например $C\neq 0$, запишем (4.2.3) в виде

$$A(x-0)+B(y-0)+C\left(z+\frac{D}{C}\right)=0. \qquad (4.2.4)$$

Уравнение (4.2.4) равносильно уравнению (4.2.3). Сравнивая уравнение (4.2.4) с уравнением (4.2.2), видим, что оно, а, значит, и равносильное ему уравнение (4.2.3) являются уравнением плоскости с нормальным вектором $\vec{N}=(A;\ B;\ C)$, проходящим через точку $M_1\left(0;\ 0;\ -\frac{D}{C}\right)$. Утверждение доказано.

● **Пример.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 $(-1;\ 1;\ 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=(2;\ 2;\ 3)$. Проверить, лежат ли на плоскости точки M_2 $(-2;\ 0;\ 8)$ и M_3 $(1;\ 1;\ 1)$.

Решение. Имеем $A=2$, $B=1$, $C=3$; $x_1=-1$; $y_1=4$; $z_1=6$. Подставляем эти данные в (4.2.2). Получаем

$$2(x+1)+1(y-4)+3(z-6)=0$$

или

$$2x+y+3z-20=0. \qquad (4.2.5)$$

Подставим в (4.2.5) вместо текущих координат координаты точки M_2. В результате получаем

$$2\cdot(-2)+0+3\cdot 8-20=0,\ \ 0=0\Rightarrow M_2\in Q.$$

Для точки $M_3(1;\ 1;\ 1)$ имеем

$$2\cdot 1+1\cdot 1+3\cdot 1-20=-14,\ \ 14\neq 0\Rightarrow M_3\notin Q. \ ●$$

Заметим, что геометрическая задача решена без построений, а только с помощью вычислений.

Положение плоскости (4.2.3) относительно осей координат определяется значениями коэффициентов A, B, C, D. В частности, если $D=0$, то уравнению (4.2.3) удовлетворяет точка O (0; 0; 0). Следовательно, плоскость, заданная уравнением $Ax+By+Cz=0$, проходит через начало координат.

Можно доказать, что если даны уравнения двух плоскостей, отличающихся только свободным членом D, т. е.

$$Ax+By+Cz+D_1=0, \quad Ax+By+Cz+D_2=0,$$

то плоскость, у которой больше модуль свободного члена, дальше отстоит от начала координат.

Отметим без доказательства, что расстояние от начала координат до плоскости (4.2.3) определяется формулой

$$d=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Так, например, начало координат удалено от плоскости $3x-4y+2z-\sqrt{29}=0$ на расстояние

$$d=\frac{|-\sqrt{29}|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=1.$$

Частные случаи положения плоскости (4.2.3) при различных значениях A, B, C, D иллюстрирует табл. 4.1.

Таблица 4.1

Значения коэффициентов	Уравнение плоскости	Положение нормального вектора	Положение плоскости
$D=0$	$Ax+By+Cz=0$		Плоскость проходит через начало координат
$A=0,\ D\neq 0$	$By+Cz+D=0$	$\vec{N}\perp Ox$	$Q\parallel Ox$ (строго)
$B=0,\ D\neq 0$	$Ax+Cz+D=0$	$\vec{N}\perp Oy$	$Q\parallel Oy$ (строго)
$C=0,\ D\neq 0$	$Ax+By+D=0$	$\vec{N}\perp Oz$	$Q\parallel Oz$ (строго)

Значения коэффициентов	Уравнение плоскости	Положение нормального вектора	Положение плоскости
$A=0,\ D=0$	$By+Cz=0$	$\vec{N}\perp Ox$	$Ox\in Q$
$B=0,\ D=0$	$Ax+Cz=0$	$\vec{N}\perp Oy$	$Oy\in Q$
$C=0,\ D=0$	$Ax+By=0$	$\vec{N}\perp Oz$	$Oz\in Q$
$A=B=0,\ D\neq 0$	$Cz+D=0$	$\vec{N}\perp Ox\bigcup\vec{N}\perp Oy$	$Q\perp Oz$
$B=C=0,\ D=0$	$Ax+D=0$	$N\perp Oy\bigcup\vec{N}\perp Oz$	$Q\perp Ox$
$A=C=0,\ D\neq 0$	$By+D=0$	$\vec{N}\perp Ox\bigcup\vec{N}\perp Oz$	$Q\perp Oy$
$A=B=D=0$	$z=0$		$Q=Oxy$
$A=C=D=0$	$y=0$		$Q=Oxy$
$B=C=D=0$	$x=0$		$Q=Oyz$

Взаимное положение двух плоскостей

$$Q_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$Q_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

можно описать тремя случаями:

1) если $Q_1||Q_2$ (не строго), то

$$\vec{N}_1\uparrow\downarrow\vec{N}_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}; \qquad (4.2.6)$$

2) если $Q_1\perp Q_2$, то

$$\vec{N}_1\perp\vec{N}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0; \qquad (4.2.7)$$

3) если плоскости пересекаются, то они образуют четыре попарно равных двухгранных угла, один из которых равен углу между нормальными векторами $\vec{N}_1=(A_1;\ B_1;\ C_1)$ и $\vec{N}_2=(A_2;\ B_2;\ C_2)$. Обозначив этот угол через φ, имеем

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (4.2.8)$$

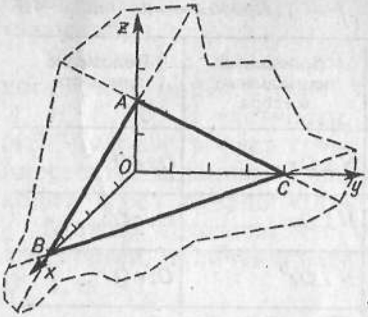


Рис. 47

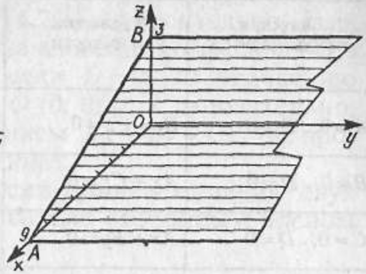


Рис. 48

● **Пример 1.** Построить плоскости $z=0$, $y=0$, $x=0$.

Решение. Плоскость $z=0$ — это плоскость Oxy, плоскость $y=0$ есть плоскость Oxz, а плоскость $x=0$ является плоскостью Oyz.

● **Пример 2.** Построить плоскость

$$2x+3y+6z-12=0.$$

Решение. Для построения плоскости по уравнению достаточно построить три ее точки, не лежащие на одной прямой. Две координаты точки берут произвольно, а третью определяют из уравнения. Легче всего определить точки пересечения плоскости с осями координат.

Составим таблицу значений x, y, z для трех точек.

Строим точки $A(0;\ 0;\ 2)$, $B(6;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 4;\ 0)$ и соединяем их прямыми линиями (рис. 47).

● **Пример 3.** Построить плоскость

$$2x+6z-18=0.$$

Решение. Так как $B=0$, то $\bar{N}\perp Oy$, т. е. плоскость параллельна оси Oy. Найдем точки пересечения ее с осями Ox и Oz. Составим таблицу.

x	y	z
9	0	0
0	0	3

Строим точки $A(9;\ 0;\ 0)$ и $B(0;\ 0;\ 3)$; далее проводим из точек A и B линии, параллельные оси Oy (рис. 48).

§ 4.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Рассмотрим уравнение $y=0$. В системе декартовых координат в пространстве оно определяет плоскость Oxz. Плоскость Oxz делит пространство на два полупространства; левое, для всех точек которого $y<0$, и правое, для всех точек которого $y>0$. Иными словами, неравенству $y<0$ удовлетворяют координаты всех точек левого полупространства и только они, тогда как неравенству $y>0$ удовлетворяют координаты точек правого полупространства и только они. Отсюда делаем вывод: неравенство вида $y<0$ или $y>0$ в системе $Oxyz$ определяет полупространство.

Пусть теперь дано уравнение $x=0$. В системе декартовых координат в пространстве оно определяет плоскость Oyz. Плоскость Oyz делит все пространство на два полупространства: «переднее», для всех точек которого $x>0$, и «заднее», для всех точек которого $x<0$. Другими словами, неравенству удовлетворяют координаты всех точек «переднего» полупространства и только они, а неравенству $x<0$ удовлетворяют координаты точек «заднего» полупространства и только они. И в этом случае неравенство вида $x>0$ и $x<0$ определят два взаимно дополняющих полупространства.

Наконец, рассмотрим уравнение $z=0$. В системе декартовых координат в пространстве оно определит плоскость Oxy. Плоскость Oxy делит все пространство на две полуплоскости: нижнее, для всех точек которого $z<0$, и верхнее, для всех точек которого $z>0$. Иначе говоря, неравенству $z<0$ удовлетворяют координаты всех точек нижнего полупространства и только они, а неравенству $z>0$ удовлетворяют координаты всех точек верхнего полупространства и только они. Если неравенства нестрогие, то в соответствующее полупространство включают и саму разделяющую плоскость.

Пусть теперь дано уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Соответствующая плоскость делит все пространство на два полупространства. Согласно определению

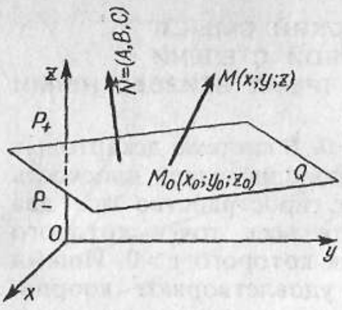


Рис. 49

уравнению (4.2.3) удовлетворят координаты всех точек на плоскости и только они. Если координаты точек, не лежащих на плоскости, подставить вместо текущих координат в (4.2.3), то левая часть не будет равна нулю, а станет больше или меньше нуля, т. е. равенство (4.2.3) перейдет в неравенство $Ax+By+Cz+D<0$ или $Ax+By+Cz+D>0$. При этом, как и в рассмотренных частных случаях, для координат точек из разных полупространств получается неравенство противоположного смысла, т. е. для координат точек одного полупространства имеем

$$Ax+By+Cz+D<0,$$

а для координат точек другого полупространства получаем

$$Ax+By+Cz+D>0.$$

Докажем это утверждение. Пусть плоскость Q задана уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0,\ \vec{N}=(A;\ B;\ C)\perp Q.$$

Плоскость Q разбивает пространство на три части:

1) открытое полупространство P_+ (без точек Q);
2) открытое полупространство P_- (без точек Q);
3) саму плоскость Q.

На полупространство P_+ указывает вектор $\vec{N}$.

Теорема. *Точка $M(x;\ y;\ z)\in P_+$ тогда и только тогда, когда $Ax+By+Cz+D>0$.*

Доказательство. Возьмем две точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)\in Q$ и $M(x;\ y;\ z)\in P_+$ (рис. 49) и составим вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$. Имеем $M(x;\ y;\ z)\in P_+\Leftrightarrow(\overrightarrow{M_0M}\,\widehat{\ }\,\vec{N})$ — острый $\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}\times\vec{N}>0\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)>0\Leftrightarrow Ax+By+Cz>Ax_0+By_0+Cz_0$.

Но $Ax_0+By_0+Cz_0=-D$, следовательно,

$$Ax+By+Cz+D>0.$$

Аналогично доказываются следующие утверждения:

1) $M(x;\ y;\ z)\in P_{-}\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D<0$;

2) $M(x;\ y;\ z)\in P_{-}\bigcup Q\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D\leqslant 0$;

3) $M(x;\ y;\ z)\in P_{+}\bigcup Q\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D\geqslant 0$.

Заметим, что $M(x;\ y;\ z)\in Q\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$.

Таким образом, неравенство первой степени относительно неизвестных x, y, z в системе $Oxyz$ определяет полупространство. Различать одно полупространство от другого будем в зависимости от того, содержит ли одно из них начало координат, или нет. Так, если в неравенстве $Ax+By+Cz+D<0$ или $Ax+By+Cz+D>0$ знак свободного члена D и смысл неравенства совпадают, то соответствующее полупространство содержит начало координат, если эти знаки не совпадают, то полупространство не содержит начала координат.

Пусть теперь в декартовых координатах $Oxyz$ дана система неравенств

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1>0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2<0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3\geqslant 0. \end{cases} \qquad (4.3.2)$$

Определение. *Множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют* (4.3.2), *называется областью решений системы.*

Область решений системы — это общая часть всех полупространств, определяемых отдельно каждым неравенством. Таким образом, *система неравенств вида (4.3.2) определяет пересечение полупространств, задаваемых каждым неравенством.* В этом и состоит геометрический смысл системы (4.3.2). В случае, если неравенства нестрогие, в область решений включаются и сами разделяющие плоскости.

● **Пример.** Построить область решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3x+2y+z-6<0, \\ x>0, \\ y>0, \\ z>0. \end{cases}$$

Решение. Для построения плоскости $3x+2y+z-6=0$ найдем точки пересечения плоскости с осями координат: $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 3;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 6)$. Знак свободного члена совпадает со смыслом неравенства, поэтому неравенство $3x+2y+z-6<0$ определяет полупространство, содержащее начало координат. Это условие

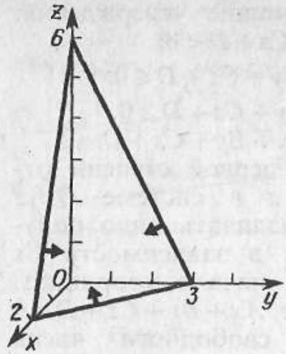


Рис. 50

отмечено на рис. 50 стрелками. Неравенства $x>0$, $y>0$, $z>0$ определяют первый октант, т. е. тот, который лежит в переднем правом и верхнем полупространстве.

Таким образом, областью решений является часть пространства, заключенная внутри тетраэдра (см. рис. 50). ●

В специальной литературе при рассмотрении прикладных задач, в частности экономических, систему неравенств записывают в несколько ином виде, различая коэффициенты системы и неизвестные с помощью индексов.

Например, система (4.3.2) в других обозначениях может иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+b_1<0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{22}x_3+b_2>0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+b_3\geqslant 0, \end{cases}$$

где $a_{ij}(i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$ — известные коэффициенты, $x_i(i=1, 2, 3)$ — неизвестные, $b_i(i=1, 2, 3)$ — свободные члены.

§ 4.4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ К ЗАДАЧАМ ОПТИМИЗАЦИИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

Проблема принятия наилучшего решения, когда результаты должны быть получены при минимальных затратах ресурсов определенного вида или когда при заданных ограниченных возможностях должно быть произведено максимальное количество некоторого продукта — одна из важных проблем, стоящих перед человеком. В таких случаях говорят, что необходимо найти оптимальное решение (оптимум — наилучший). В различных условиях оптимальными могут быть разные решения.

Например, если требуется решить, сколько и какие виды удобрений необходимо приобрести, то можно формулировать условия так: при заданной стоимости удобрений количество действующего вещества должно быть наибольшим, или при заданной стоимости удобрений уровень повышения кислотности почвы после их внесения должен быть наименьшим.

Если требуется решить задачу, каким должен быть рацион кормления данной группы животных, то можно поставить задачу минимизации стоимости кормов при заданных ценах на корма или задачу получения максимальных удоев при ограниченных средствах на приобретение кормов.

Как видим, в практической деятельности понятие оптимальный выражается количественно: минимум затрат, максимум урожая, прибыли и т. д.

Приведем решения некоторых задач на оптимизацию, связанных с сельскохозяйственным производством. Все задачи условные.

● **Задача 1.** Хозяйству требуется приобрести два вида азотных удобрений: A — аммиачную селитру и B — сульфат аммония. Удобрения A необходимо иметь не более 15 т, а удобрения B — не более 10 т. Содержание действующего вещества для A и B равно 35 и 20% соответственно. Отпускная оптовая цена удобрения A и удобрения B — соответственно равна 53 и 35 руб. за тонну. Хозяйство может выделить на приобретение удобрений 600 руб.

Сколько тонн каждого вида удобрений следует приобрести, чтобы общая масса действующего вещества была максимальной?

Решение. Обозначим через x_1 — массу удобрения A, x_2 — массу удобрения B.
Условие задачи можно записать так:

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 15, \\ x_2 \leqslant 10, \\ 53x_1 + 35x_2 \leqslant 600, \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4.4.1)$$

Обозначим количество действующего вещества через L. Тогда

$$L = 0{,}35x_1 + 0{,}20x_2. \qquad (4.4.2)$$

Минимальное значение L соответствует значениям $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Функция L, определяемая равенством (4.4.2), называется линейной формой от x_1 и x_2. Построим область решений системы неравенств (4.4.1) и линейную форму при $L = 0$.

Областью решений системы является множество точек плоскости Ox_1x_2 внутри пятиугольника $OABCD$ (рис. 51).

Если прямую $0{,}35x_1 + 0{,}20x_2 = 0$ перемещать вправо, оставляя ее параллельной самой себе, то значение $L = 0{,}35x_1 + 0{,}20x_2$ для всех точек в области решений системы (4.4.1) будет возрастать. Крайним положением является прямая, проходящая через точку C. Здесь линейная форма принимает наибольшее значение, так как прямая максимально удалена от начала координат.

$$\begin{cases} x_1+0{,}25x_2 \geqslant 10, \\ 0{,}08x_1+0{,}04x_2 \geqslant 1{,}2,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.4.3}$$

Суточная стоимость рациона

$$L=5x_1+2x_2. \tag{4.4.4}$$

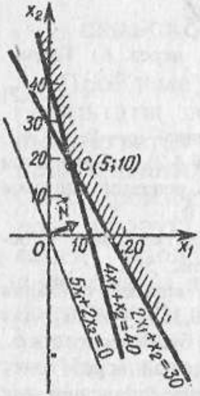


Рис. 52

Построим в системе координат Ox_1x_2 область решений неравенств (4.4.3), предварительно заменив их равносильными (первое из них умножим на 4, а второе — на 25):

$$\begin{cases} 4x_1+x_2-40 \geqslant 0, \\ 2x_1+x_2-30 \geqslant 0. \end{cases}$$

Построим граничные прямые $4x_1+x_2=40$, $2x_1+x_2=30$, прямую l: $5x_1+2x_2=0$ и вектор $\vec{N}=(5;\ 2)$. Областью решений является бесконечный угол с вершиной в точке C (на рис. 52 область решений заштрихована). Точка C также принадлежит области решений.

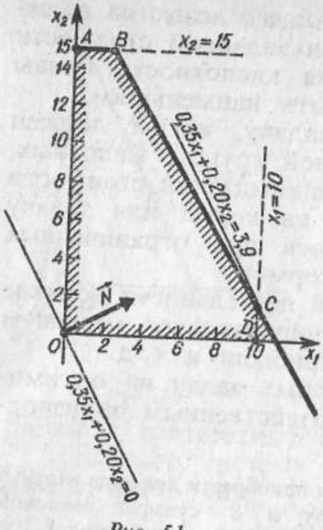


Рис. 51

Найдем координаты точки C. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x_1=10, \\ 53x_1+35x_2=600, \end{cases} x_1=10,\ x_2=\ 2.$$

Значение $L=0.35\cdot 10+0{,}20\cdot 2=3{,}5+$ $+0{,}4=39$ т.

Таким образом, хозяйству необходимо 10 т аммиачной селитры и 2 т сульфата аммония. ●

● **Задача 2.** Пусть для кормления животных используется 2 вида кормов: грубые и концентраты, причем в 1 кг грубых кормов содержится 0,25 кормовых единиц и 0,04 кг протеина, а в 1 кг концентратов — 1 кг кормовых единиц и 0,08 кг протеина. Суточный рацион одного животного должен содержать не менее 10 кг кормовых единиц и не менее 1,2 кг протеина. Каков должен быть рацион животного, чтобы суточная стоимость кормов была минимальной, если известно, что стоимость концентратов — 5 руб. за 1 кг, а стоимость грубых кормов — 2 руб. за 1 кг?

Решение. Обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество концентратов и грубых кормов в рационе (кг). Тогда в соответствии с условием задачи

При перемещении прямой l параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{N}$ значение *линейной формы* L *возрастает*. Первое допустимое положение прямой имеет место в случае, когда прямая проходит через точку C. Дальнейшее движение прямой нецелесообразно, так как при этом линейная форма возрастает, а нам необходимо найти ее минимальное значение. Очевидно, что минимуму линейной формы отвечает положение прямой, проходящей через точку C. Координаты точки C найдем, решив систему

$$\begin{cases} 4x_1+x_2=40, \\ 2x_1+x_2=30, \end{cases} x_1=5,\ x_2=20.$$

Итак, суточный рацион должен содержать 5 кг концентратов и 20 кг грубых кормов. Его стоимость

$$L=5\cdot 5+20\cdot 2=65 \text{ (руб.)}. \quad \bullet$$

● **Задача 3.** Хозяйство должно приобрести два вида кормов: A и B, причем корма A не более 100 т, корма B не более 200 т. Известно, что 1 т корма A содержит 700 кг кормовых единиц, его цена — 50 руб. за тонну; одна тонна корма B содержит 800 кг кормовых единиц, его цена 60 руб. за тонну. Хозяйству отпущено на покупку кормов 7000 руб. Какое количество каждого корма необходимо приобрести, чтобы получить максимальное количество кормовых единиц?

Решение. Обозначим через x_1 — массу корма A (т), x_2 — массу корма B (т).

Тогда в соответствии с условием задачи имеем

$$\begin{cases} x_1\leqslant 100, \\ x_2\leqslant 200, \\ 50x_1+60x_2\leqslant 7000, \\ x_1\geqslant 0, \\ x_2\geqslant 0. \end{cases} \tag{4.4.5}$$

Запишем эквивалентную систему, разделив третье из неравенств на 10. Имеем

$$\begin{cases} x_1\leqslant 100, \\ x_2\leqslant 200, \\ 5x_1+6x_2\leqslant 700, \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

Общее количество кормовых единиц

$$L=700x_1+800x_2 \tag{4.4.6}$$

Найдем область решений системы неравенств (4.4.5), для чего построим граничные прямые $x_1=0$, $x_2=0$, $x_1=100$, $x_2=200$, $5x_1+6x_2=700$.

Областью решений являются внутренние точки четырехугольника $OBCD$, включая и его границы (рис. 53). Построим прямую l:

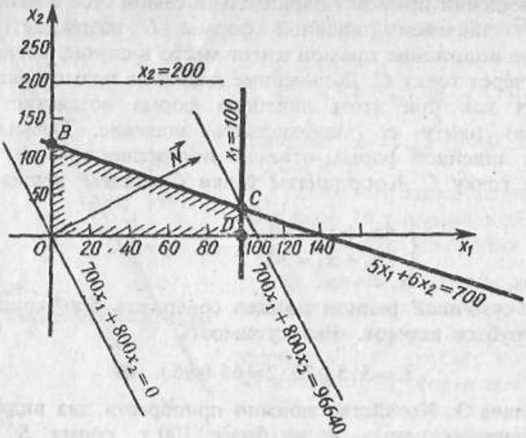


Рис. 53

$70x_1+80x_2=0$ и нормальный вектор $\vec{N}=(7;\ 8)$. При перемещении прямой l параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{N}$ значение линейной формы L возрастает. Наибольшее перемещение соответствует положению прямой, проходящей через точку C. Дальнейшее движение прямой невозможно, так как в этом случае ее положение будет вне области решения системы (4.4.5). Следовательно, максимуму линейной формы (4.4.6) соответствует положение прямой l, проходящей через точку C, координаты которой найдем из решения системы

$$\begin{cases} x_1=100, \\ 5x_1+6x_2=700, \end{cases} \quad x_1=100, \quad x_2=33{,}3.$$

Таким образом, наибольшая питательная ценность приобретаемых кормов имеет место, если хозяйство приобретет 100 т корма A и 33,3 т корма B. При этом $L=700\cdot 100+800\cdot 33{,}3=96\,640$ кг кормовых единиц. ●

§ 4.5. ВЫВОДЫ

Уравнением поверхности в системе прямоугольных координат называется уравнение

$$F(x;\ y;\ z)=0,$$

которому удовлетворяют координаты точек, лежащих на поверхности, и только они. Простейшим видом поверхности является плоскость.

В декартовой системе координат всякая плоскость определяется уравнением первой степени относительно $x,\ y,\ z$:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (4.5.1)$$

Всякое уравнение, вида (4.5.1), если хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от 0, определяет в декартовой системе координат плоскость. В уравнении (4.5.1) A, B, C — координаты вектора $\vec{N}$, перпендикулярного плоскости, D — свободный член, пропорциональный расстоянию начала координат от данной плоскости.

Чтобы построить плоскость по ее уравнению, достаточно построить какие-нибудь три ее точки, не лежащие на одной прямой.

Неравенство первой степени с тремя неизвестными в системе декартовых координат определяет полупространство. Совокупность точек пространства, координаты которых удовлетворяют данному неравенству, называется областью его решений.

Система неравенств первой степени с тремя неизвестными в декартовой системе координат определяет часть пространства, являющуюся пересечением соответствующих каждому неравенству полупространств. Совокупность точек пространства, координаты которых удовлетворяют данной системе неравенств, называется областью ее решений.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение уравнения поверхности.

2. Запишите уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N}=(A; B; C)$.

3. Запишите общее уравнение плоскости. Каков геометрический смысл входящих в него коэффициентов и свободного члена?

4. Укажите различные случаи положения плоскости и соответствующие им уравнения относительно системы декартовых координат $Oxyz$.

5. *В чем состоит геометрический смысл неравенства первой степени с тремя неизвестными?*

6. В чем состоит геометрический смысл системы неравенств первой степени с тремя неизвестными?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте плоскости, заданные следующими уравнениями:
1) $3x+2y+4z-8=0$; 2) $2x+3y-6=0$;
3) $2z-3=0$ 4) $2x+3y=0$;
5) $2x-y+3z=0$.

2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;\ 2;\ -1)$ и перпендикулярной вектору $\overline{N}=(3;\ 0;\ 2)$.

Составьте уравнение плоскости, отсекающей на оси Oy отрезок $OB=5$ и перпендикулярной вектору $\overline{N}=(3;\ -2;\ 4)$.

3. Запишите уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $(1;\ 2;\ -3)$.

4. Найдите расстояние:

1) точки $A(1;\ -1;\ 2)$ от плоскости $4x-4y+2z+30=0$;

2) точки $B(-2;\ 3;\ 5)$ от плоскости $x-8y+4z=0$.

5. Постройте в системе координат неравенства:

1) $2x-3y+4z-12<0$, 2) $x+3y+2z-6>0$,

3) $-2x+3y-z-6<0$, 4) $2x-3y-4z+12>0$.

6. Постройте в системе координат систему неравенств

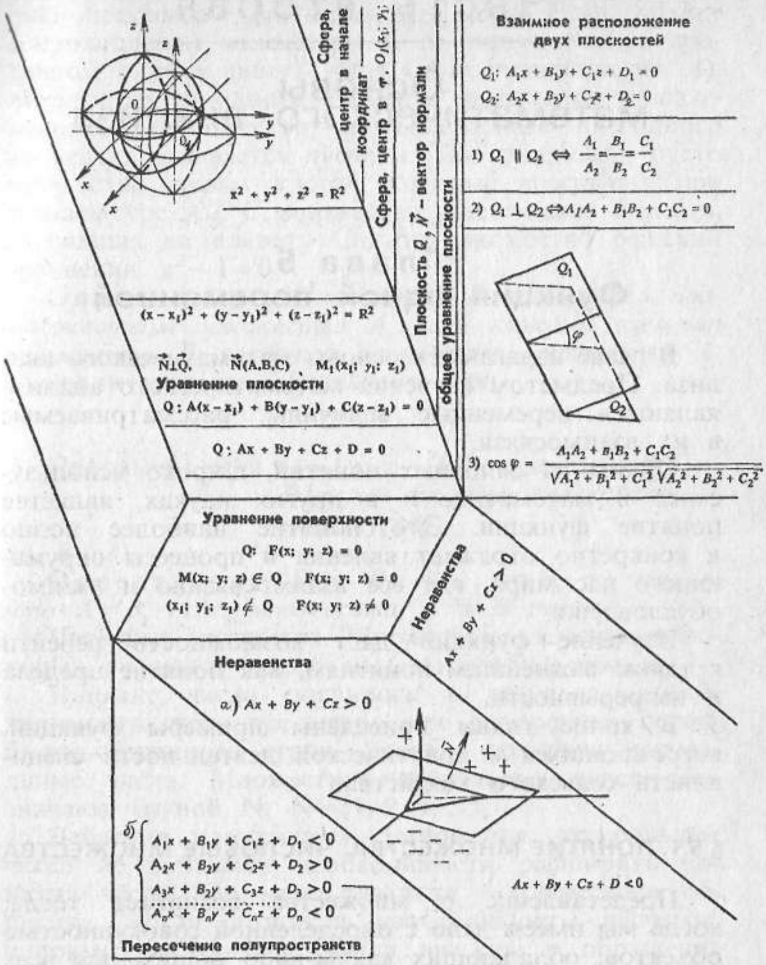
$$\begin{cases} 2x+3y+4z-12<0, \\ x>0, \\ y>0, \\ z>0. \end{cases}$$

7. Постройте в системе координат систему неравенств

$$\begin{cases} x-2y+z-8<0, \\ x-2>0, \\ y+1<0, \\ z-1>0. \end{cases}$$

8. Хозяйству выделено для закупки два вида азотных удобрений: аммиачной селитры (A) не более 70 т и карбомина (B) не более 50 т. Содержание действующего вещества в удобрении A — 20%, а в удобрении B — 46%. Оптовая цена 1 т удобрения — A — 53 руб., удобрения B — 80 руб. Хозяйство может выделить для закупки удобрений 3500 руб. Сколько удобрений каждого вида следует приобрести, чтобы общая масса действующего вещества была максимальной?

9. Для кормления скота используются грубые корма и концентраты. 1 кг концентрата содержит 0,8 кг кормовых единиц и 0,09 протеина, 1 кг грубых кормов — 0,3 кг кормовых единиц и 0,05 протеина. Суточный рацион должен содержать не менее 12 кг кормовых единиц и не менее 1,5 кг кормовых единиц протеина. Составьте рацион таким образом, чтобы его стоимость была наименьшей, если 1 кг концентрата стоит 10 руб., 1 кг грубых кормов — 4 руб.



Взаимное расположение двух плоскостей
Q_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
Q_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
1) $Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
2) $Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
Q_1
φ
Q_2
3) $\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
Сфера, центр в начале координат
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
Сфера, центр в т. $O_1(x_1; y_1; z_1)$
$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$
Плоскость Q, $\vec{N}$ – вектор нормали
общее уравнение плоскости
$\vec{N} \perp Q$, $\vec{N}(A, B, C)$ $M_1(x_1; y_1; z_1)$
Уравнение плоскости
$Q: A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$
$Q: Ax + By + Cz + D = 0$
Уравнение поверхности
Q: $F(x; y; z) = 0$
$M(x; y; z) \in Q$ $F(x; y; z) = 0$
$(x_1; y_1; z_1) \notin Q$ $F(x; y; z) \neq 0$
Неравенства
$Ax + By + Cz > 0$
Неравенства
а) $Ax + By + Cz > 0$
$Ax + By + Cz + D < 0$
б) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 < 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 > 0 \\ A_3x + B_2y + C_3z + D_3 > 0 \\ \ldots \\ A_nx + B_ny + C_nz + D_n < 0 \end{cases}$
Пересечение полупространств

Часть вторая

Основы математического анализа

Глава 5
Функция одной переменной

В главе излагаются основы математического анализа. Предметом изучения математического анализа являются переменные величины, рассматриваемые в их взаимосвязи.

Одним из основных понятий, широко используемых в математике и в других науках, является понятие функции. Это понятие наиболее полно и конкретно отражает явления и процессы окружающего нас мира, где все взаимосвязано и взаимообусловлено.

Изучение функций даст возможность перейти к таким важнейшим понятиям, как понятие предела и непрерывности.

В конце главы приведены примеры функций, встречающихся в практической деятельности специалиста сельского хозяйства.

§ 5.1. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Представление о множестве возникает тогда, когда мы имеем дело с определенной совокупностью объектов, обладающих каким-либо общим для всех них свойством. В ряде случаев множество определяется его названием. Примерами множеств являются: множество деревьев в лесу, множество животных в стаде, множество растений ячменя на 1 м^2 посева, множество страниц в книге, множество точек на прямой, множество четных чисел и т. д. Объекты, образующие множество, называются его *элементами*, их обозначают малыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$, а соответствующие множества — большими буквами $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$.

Множество записывают с помощью фигурных скобок, например: $A=\{a_1; a_2; a_3; ...; a_n\}$. Если объект a принадлежит множеству A, то пишут $a\in A$, в противном случае пишут $A\notin A$ (a не принадлежит A). Множество из одного элемента называется *одноэлементным*. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Так, например, пусто множество живых клеток, которые выживают при температуре 500° С, множество человеческих существ, ступивших на планету Сатурн, множество решений уравнения $x^2+1=0$ *.

Определение. *Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.* Символически это обозначают так:

$$B\subset A.$$

Например, если $A=\{x\colon x$ — все студенты курса$\}$,
$B\{x\colon x$ — все студенты женского пола курса$\}$,
то $B\subset A$.

Определение. *Если $B\subset A$ и $A\subset B$, то пишут что $A=B$, т. е. множества A и B равны.*

Числовые множества. Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*.

Понятие числа появилось в результате необходимости счета предметов еще во времена первобытно-общинного строя. Вначале возникли натуральные числа. Множество натуральных чисел обозначают буквой **N**, $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, ...\}$.

Действия сложения и умножения натуральных чисел не вызывали необходимости расширить понятия числа. По мере развития человеческого общества, когда возникла необходимость расчетов, например в торговле, были введены в обращение отрицательные числа, ноль и дроби, как отношения двух целых чисел.

Множество целых чисел обозначается буквой **Z**,

$$\mathbf{Z}=\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Числа целые и дробные, положительные и отрицательные, а также число 0 составляют *множество*

* В области действительных чисел.

рациональных чисел **Q**. Всякое рациональное число выражается отношением двух целых чисел или бесконечной периодической десятичной дробью.

В практической деятельности человека возникали задачи, когда результаты наблюдений или вычислений нельзя было отнести ни к одному из упомянутых выше множеств (например, результат вычислений длины диагонали квадрата со стороной, равной a). Возникло *множество иррациональных чисел*. Иррациональные числа выражаются бесконечной непериодической десятичной дробью.

Множества рациональных и иррациональных чисел составляют *множество действительных чисел* **R**.

Между множествами **N**, **Z**, **Q** и **R** существует соотношение

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Множество действительных чисел дополняют двумя элементами, обозначаемыми $+\infty$ и $-\infty$ и называемыми *плюс бесконечность* и *минус бесконечность*.

Множество **R**, дополненное элементами $+\infty$ и $-\infty$, называется *расширенным множеством действительных чисел* (расширенной числовой прямой) и обозначается $\overline{\mathbf{R}}$. Бесконечности $+\infty$ и $-\infty$ называют еще *бесконечно удаленными точками*. Порядок в $\overline{\mathbf{R}}$ естественный: всякое действительное число меньше $+\infty$ и больше $-\infty$, т. е. если $x \in \mathbf{R}$, то $-\infty < x < +\infty$.

Полезно представлять, что $-\infty$ на числовой прямой находится левее всех чисел, а $+\infty$ правее всех чисел. Иногда множество действительных чисел дополняют одним элементом (бесконечность), называемым также бесконечно удаленной точкой.

При вычислениях иррациональные числа заменяют приближенными им рациональными. Например, диагональ прямоугольника со сторонами 30 и 10 м

$$d = \sqrt{30^2 + 10^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$$

может быть заменена левыми или правыми частями неравенств $31{,}6 < 10\sqrt{10} < 31{,}7$, $31{,}62 < 10\sqrt{10} < 31{,}63$, $31{,}622 < 10\sqrt{10} < 31{,}623$, $31{,}6227 < 10\sqrt{10} < 31{,}6228$ и т. д. в зависимости от того, какая требуется точность вычислений.

§ 5.2. ВЕЛИЧИНА. ПОСТОЯННЫЕ И ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Понятие величины встречается в научной, учебной литературе и в других печатных изданиях. Мы свободно оперируем понятием величины в повседневных разговорах.

Площадь земельного участка, масса животного, урожайность сельскохозяйственных культур, себестоимость продукции, процент жира в молоке, количество животных в стаде и т. д.— все это примеры величин. Каждая из величин может быть измерена с помощью прибора или вычислена, в результате чего получают число, называемое числовым значением величины.

Итак, под величиной будем понимать все то, что выражает свойства предмета, явления или процесса **с помощью числа.**

Величины выражаются в определенных единицах. Такие величины называются *размерными.* Каждой величине свойственна своя единица. Единицы величин образуют систему. Общепринятой является Международная система (СИ). Ее основными единицами являются:

метр (м) — единица длины;
килограмм (кг) — единица массы;
секунда (с) — единица времени,
кельвин (к) — единица температуры,
кандела (кд) — единица силы света,
моль — единица количества вещества.

Единицы других величин являются производными. Величины могут быть *безразмерными.* Так, например, процент жира в молоке, доля опытов, в которых наблюдаемое явление произошло,— величины безразмерные.

1. Постоянные и переменные величины. Когда мы наблюдаем какой-нибудь процесс или явление из области физики, экономики, агрономии, зоотехники или другой области знаний, то видим, что одни величины сохраняют свои значения, другие же принимают различные значения. Например, высота стебля гороха в период вегетации или масса животного в период откорма меняются, изменяются и соответствующие им числа. Высоту стебля в момент полной зрелости, так же как и массу взрослого животного в условиях стационарного содержания, можно с некоторой оговоркой принять за величины постоянные.

Таким образом, некоторые величины в одних условиях являются постоянными, а в других — переменными. Постоянные величины обозначают (если специально не оговорено) первыми буквами латинского алфавита a, b, c, d, ..., а на числовой прямой — неподвижными точками.

Переменные величины обозначают последними буквами латинского алфавита x, y, z, t, ...

Существуют и абсолютно постоянные величины, такие, как отношение длины окружности к диаметру (π), предел последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}=e$, сумма внутренних углов плоского треугольника (2π), скорость света в пустоте (299 800 км/с), ускорение силы тяжести на широте 45° (9,81 м/с^2) и др.

Переменная величина y называется *ограниченной сверху*, если в процессе изменения она остается меньше некоторой постоянной величины b, $y<b$. Аналогично определяется переменная величина, ограниченная снизу, $y>a$.

В математике для общности рассуждений иногда постоянную величину принимают за переменную, полагая при этом, что рассматриваемая величина в процессе своего изменения принимает одно и то же числовое значение.

2. Абсолютная величина действительного числа. Абсолютной величиной действительного числа x называется число, обозначаемое через $|x|$ и определяемое равенством

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Так, например, $|5|=5$, $|-5|=5$. Из определения следует, что $x\leqslant|x|$. Приведем некоторые свойства абсолютных величин.

1^0. *Абсолютная величина суммы двух чисел не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых*

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|. \qquad (5.1.1)$$

Доказательство. Положим $x+y>0$, $x\leqslant|x|$ и $y\leqslant|y|$, поэтому $|x+y|\leqslant|x|+|y|$. Пусть теперь

$x+y<0$. Тогда $|x+y|=-x-y$, но $-x\leqslant|x|$, $-y\leqslant|y|$ и $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

Формула (5.1.1) называется *неравенством треугольника*. Его следствием является неравенство

$$|x+y+z|\leqslant|x|+|y|+|z|.$$

2^0. *Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел*

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

Действительно, положим $x-y=z$. Тогда $x=z+$ $+y\Rightarrow|x|=|z+y|\leqslant|z|+|y|\leqslant|x-y|+|y|$, или $|x|-$ $-|y|\geqslant|x-y|$.

3^0. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

4^0. $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

Свойства 3^0 и 4^0 следуют из определения абсолютной величины действительного числа.

3. Интервалы. *Интервалами* называют подмножества всех действительных чисел, имеющие следующий вид:

$[a,\ b]=\{x:\ a\leqslant x\leqslant b\}$ — замкнутый интервал,

$[a,\ b)=\{x:\ a\leqslant x<b\}$

$(a,\ b]=\{x:\ a<x\leqslant b\}$ — полуоткрытые интервалы;

$(a,\ b)=\{x:\ a<x<b\}$ — открытый интервал;

$(-\infty,\ b]=\{x:\ x\leqslant b\}$,

$(-\infty,\ b)=\{x:\ x<b\}$,

$[a,\ +\infty)=\{x:\ x\geqslant a\}$,

$(a,\ +\infty)=\{x:\ x>a\}$,

$(-\infty,\ +\infty)=\{x:\ -\infty<x<+\infty\}$

— бесконечные интервалы.

Существенным для дальнейшего изложения является понятие интервала, называемого *окрестностью* конечной или бесконечно удаленной точки.

Если a — число, т. е. $a\in\mathbf{R}$, то для любого $\varepsilon>0$ ε-окрестностью $U(a,\ \varepsilon)$ точки a называется интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, т. е., по определению, $U(a,\ \varepsilon)=(a-\varepsilon,$ $a+\varepsilon)$. Поэтому, если $x\in U(a,\ \varepsilon)$, то $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ или $|x-a|<\varepsilon$.

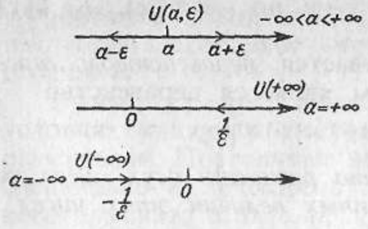


Рис. 54

Иногда рассматривается ε-окрестность $\mathring{U}(a, \varepsilon)$ — интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, из которого «вынута» точка a.

Если $x \in \mathring{U}(a, \varepsilon)$, то $0<|x-a|<\varepsilon$.

Окрестностью символа $-\infty$ называется любой интервал $(-\infty, -1/\varepsilon)$, а окрестностью символа $+\infty$ — любой интервал $(1/\varepsilon, +\infty)$. Во всех случаях с уменьшением ε соответствующая окрестность уменьшается. Любую ε-окрестность точки $a \in \bar{\mathbf{R}}$ называют ее окрестностью (рис. 54).

§ 5.3. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. ОБЛАСТЬ ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

К понятию функции приводит изучение разнообразных явлений в окружающем нас мире. Так, например, ясно, что:

1) каждому значению длины грани куба соответствует его объем;

2) каждому значению радиуса окружности соответствует ее длина и площадь круга;

3) каждому моменту времени в данной местности соответствует определенная температура воздуха;

4) каждому значению возраста животного соответствует его масса;

5) некоторой дозе внесенных микроэлементов при прочих равных условиях соответствует определенный прирост урожайности;

6) породе животного соответствует средняя величина в процентах жира в молоке (если породы занумеровать, то номеру породы отвечает процент жира в молоке);

7) каждому показателю рентабельности соответствует определенная величина прибыли.

Во всех этих примерах общим является то, что каждому числовому значению одной величины сопоставляется определенное числовое значение другой.

Пусть даны два числовых множества X и Y.

Определение. *Правило f, сопоставляющее каждому числу $x \in X$ единственное число $y \in Y$, называется* *числовой функцией, заданной на множестве X и принимающей значения в множестве Y.*

Числовые функции будем называть просто функциями.

Задать функцию — значит задать три объекта: 1) множество X, 2) множество Y, 3) правило f. О функции f говорят, что она действует из X в Y и пишут: $f\colon X \to Y$.

Правило, сопоставляющее одному числу другое, может быть разным. Например, можно сопоставить каждому числу его куб, т. е. $x \to x^3$, если $x \to y$, то $y = x^3$. В общем случае, если $x \to y$, то пишут $y = f(x)$, или $y = F(x)$, или $y = y(x)$.

Замечания. Функцией называют также уравнение $y = f(x)$, т. е. формулу, где y выражено через x с помощью правила f.

2. В уравнении $y = f(x)$ «x» называют *независимой переменной* или *аргументом*, а y — *зависимой переменной*, или *функцией* от «x». О величинах x и y говорят, что они связаны функциональной зависимостью.

Определение. *Множество всех значений независимой переменной, для которых определена функция, называется областью определения или областью существования этой функции, обозначается $D(f)$.*

Обычно $D(f)$ представляет собой интервал — открытый, замкнутый, бесконечный, или их сумму.

● **Пример 1.** Пусть функция имеет вид $x \to x^2$ или $f(x) = x^2$. Эта функция сопоставляет числу 2 число 4, а числу 6 число 36; $D(f)$: $(-\infty, +\infty)$. ●

● **Пример 2.** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Найти $f(4)$. Имеем

$$f(4) = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Данная функция числу 4 сопоставляет число 0,6. ●

Выше дано определение функции одной независимой переменной. Более часто встречаются функции двух и большего числа переменных. В этой главе рассматриваются функции одной переменной, причем $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.

1. Способы задания функции. Имеется несколько способов задания функции.

1) *Аналитический способ.* Соответствие между x и y задается в виде формулы. Например, $y = \dfrac{2x}{\cos x}$,

$y=2x^2-6x+4$. Этот способ удобен для выполнения над функцией математических действий, но не всегда нагляден.

В приложениях математики удобны функции, заданные несколькими формулами.

Так, например, скорость увеличения линейных размеров корнеплодов моркови характеризуется [25] выражением

$$v=\begin{cases} c, & \text{если } 0\leqslant t<6 \\ \dfrac{v_{\max}-v_0}{4}t-\dfrac{3v_{\max}-5v_0}{2}, & \text{если } 6\leqslant t<10, \\ \dfrac{v_1-v_{\max}}{11}t-\dfrac{10v_1-21v_{\max}}{11}, & \text{если } 10\leqslant t<21, \\ \dfrac{v_0-v_1}{3}t+8v_1-7v_0, & \text{если } 21\leqslant t<24, \end{cases} \qquad (5.3.1)$$

где v_0 — скорость роста в полуденные часы, $v_0\approx\approx-0{,}05$ мм/ч; v_1 — скорость роста в 7—8 ч утра, $v_1=\pm0{,}04$ мм/ч; $v_{\max}$ — скорость роста в 20—22 ч, $v_{\max}\approx+0{,}06$ мм/ч; t — время в ч.
График функции 5.3.1 приведен на рис. 55.

Анализируя график, можно сказать, что скорость роста имеет наибольшее значение в 10 ч, затем она снижается, и в промежутке от 24 до 6 ч утра имеет отрицательное значение, в этот период корни уменьшаются в размере со средней скоростью 0,04—0,05 мм/ч.

Соответствие между переменными величинами x и y не всегда удается записать в виде формулы. Во многих случаях формула бывает неизвестной или искать и писать формулу оказывается нецелесообразным. Для выражения функциональной зависимости могут оказаться более удобными другие способы.

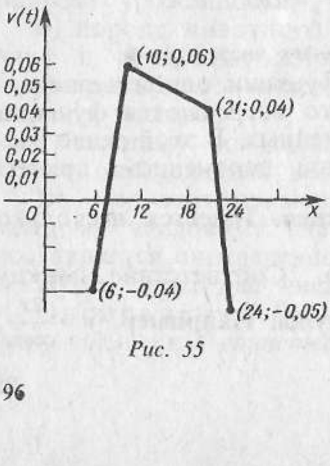


Рис. 55

2. *Табличный способ.* Этот способ является наиболее простым. В одном столбце записывают все значения аргумента (числа), а во втором — значения $f(x)$, соответствующие каждому x.

● **Пример 1.** Всем знакомы таблицы тригонометрических функций, логарифмов, квадратов, кубов, чисел, таблицы обратных величин, таблицы железнодорожных тарифов. ●

● **Пример 2.** Через каждые 10 дней измеряли диаметр d, мм, коробочки хлопчатника. В результате получена следующая таблица:

Таблица 5.1

d	0	27	37	38	39	39	40	40
Дни	0	10	20	30	40	50	60	70

Табличный способ удобен для использования, он особенно широко применяется при регистрации результатов опытов, лабораторных анализов, при подсчетах объема грубых кормов в скирдах и т. д. К недостатку способа относится то, что представление о функциональной зависимости здесь не является полным, так как невозможно поместить в таблице все значения аргумента. Но все же полезно представлять функцию как бесконечное множество столбцов, или строк такой таблицы.

3. *Графический способ.* Посещая метеорологическую станцию, можно наблюдать работу приборов-самописцев, регистрирующих величины атмосферного давления, температуры воздуха, его влажности в любой момент времени суток. Прибор электрокардиограф вычерчивает график — кривую электрических импульсов сердца, по которой можно проследить изменение импульсов и найти их значение в тот или иной момент времени.

● **Пример.** График формирования зрелого почвенного профиля изображен на рис. 56, где 0 — нуль-момент — начало почвообразования, t_m — время образования зрелого почвенного профиля; t_v — момент наблюдения, p — толщина почвенного слоя. ●

Здесь имеет место графический способ задания функциональной зависимости. Этот способ очень нагляден, но точность его невелика, поэтому графический способ задания функции чаще всего применяют в сочетании с аналитическим и табличным.

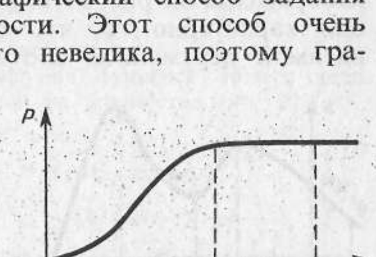


Рис. 56

Существует еще один способ задания функции, возникший в связи с развитием и внедрением в

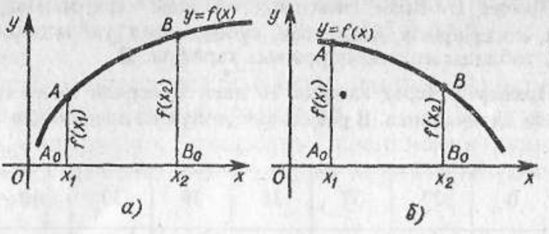


Рис. 57

производство ЭВМ. Этот способ состоит в указании программы для вычисления значений функций на ЭВМ.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, т. е. таких, координаты которых обращают выражение $y=f(x)$ в тождество. График является как бы полной таблицей функции. В нем содержится вся информация о функции. Имея перед собой график функции или его часть, мы как бы «видим» функцию.

2. Возрастающие и убывающие функции.

Определение 1. *Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (неубывающей) на интервале $(a, b)=\{x: a<x<b\}$, если для всех точек этого интервала при $x_1<x_2$ имеет место неравенство $f(x_1)<f(x_2)$; $(f(x_1)\leqslant f(x_2))$.*

Определение. 2. *Функция $y=f(x)$ называется убывающей (невозрастающей) на интервале $(c, d)=\{x: c<x<d\}$, если для всех точек этого интервала при $x_1<x_2$ справедливо неравенство*

$$f(x_1)>f(x_2), \quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)).$$

Графики возрастающей и убывающей функций изображены на рис. 57, *а*, *б*. Для возрастающей функции характерно то, что бо́льшим значениям независимой переменной соответствуют бо́льшие значения функции, а для убывающей, наоборот, бо́льшим значениям независимой переменной соответствуют ме́ньшие значения функции.

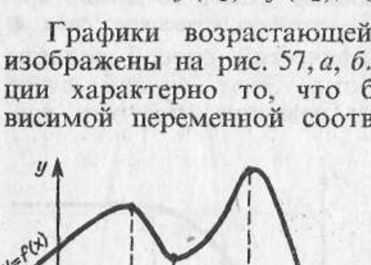


Рис. 58

Из рис. 58 видно, что если x возрастает, то функция $f(x)$ на множестве $(-1; 2)$ возрастает, затем на множестве $(2; 3)$ функция убывает, а на множестве $(3; 5)$ снова возрастает и при $x>5$ функция убывает очень быстро (линия идет круто вниз).

3. Четные и нечетные функции. Функция $y=f(x)$ называется *четной* на множестве X, если:

1) для всякого $x \in X \Rightarrow (-x) \in X$, т. е. X — симметрично относительно $D(f)$.

2) $f(x)=-f(x)$ для всякого $x \in X$.

Например, $y=x^2$ — четная функция.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной* на множестве X, если:

1) для всякого $x \in X \Rightarrow (-x) \in X$;

2) $f(-x)=-f(x)$ для всякого $x \in X$.

Например, $y=x^3$ — нечетная функция.

График четной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 59). График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 60).

Функция, не являющаяся четной или нечетной, называется *функцией общего вида*.

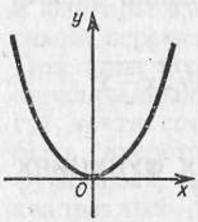


Рис. 59

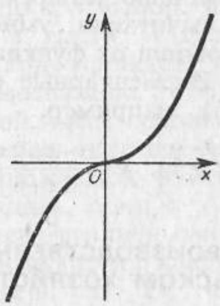


Рис. 60

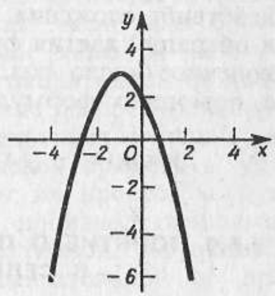


Рис. 61

● **Пример**. Установить, является ли функция $f(x)=-(x+1)^2+3$ четной, нечетной или функцией общего вида. Построить график этой функции на множестве $[-4; 2]$.

Решение. Имеем

$$f(x)=-(x+1)^2+3, \quad D(f)=(-\infty, +\infty),$$

$$f(-x)=-(-x+1)^2+3, \quad -f(x)=(x+1)^2-3.$$

Из этих равенств видим: $f(x) \neq f(-x)$ и $-f(x) \neq f(-x)$. Следовательно, $f(x)=-(x+1)^2+3$ — функция общего вида. Для построения графика составим следующую таблицу:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-6	-1	2	3	2	-1	-6

Построим точки $A_1(-4; 6)$; $A_2(-3; -1)$; $A_3(-2; 2)$; $A_4(-1; 3)$ и т. д. Соединив точки A_i $(i=1, 2; 3, ...)$ плавной линией, получим приближенное изображение графика функции (рис. 61). Точное изображение получить нельзя, так как для этого потребовалось бы построить все точки, лежащие на графике.

4. Основные элементарные функции. Основными элементарными функциями являются:

1) степенная $f(x)=x^{\alpha}$ (α — действительное число);
2) показательная $f(x)=a^x$, $a\neq 1$, $a>0$;
3) логарифмическая $f(x)=\log_a x$, $a\neq 1$, $a>0$;
4) тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;
5) обратные тригонометрические функции, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

5. Элементарные функции. К элементарным относят все функции, полученные из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий: сложения, вычитания, умножения, деления и операций взятия функции от функции, примененных конечное число раз. Элементарные функции задают с помощью формулы, например,

$$y=\lg(x^3-\sqrt{x^2+1}), \quad y=\frac{1-\sin 2x}{2x+6}+\sqrt[5]{2x-5}.$$

§ 5.4. ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

Определение. *Функции, в которых задается соответствие между величинами, характеризующими ход конкретного процесса или явления в сельском хозяйстве, называются производственными.*

Производственная функция тем точнее характеризует исследуемый процесс, чем выше уровень развития математического аппарата и чем полнее знания об изучаемом процессе или объекте.

Известно, что биологические процессы, протекающие в растениях и живых организмах, в которых участвует большое число взаимосвязанных элементов, очень сложны. Их точное описание если и можно выразить в виде формулы, то она будет невероятно громоздкой и использовать ее было бы нецелесообразно.

Производственные функции получают в результате изучения и обработки числовых данных результатов хозяйственной деятельности или на основе специально поставленных экспериментов. Важно, что при построении производственной функции главное внимание обращается на то, чтобы функция, заданная в виде формулы, отражала бы наиболее важные, существенные закономерности исследуемого процесса. Таким образом, производственная функция отражает процесс приближенно, является его математической моделью. Производственные функции дают возможность прогнозировать результаты деятельности человека, давать научные рекомендации, причем прогноз тем точнее, чем лучше составлена функция. Расчеты, произведенные с помощью производственных функций, должны рассматриваться как средние показатели в том смысле, что если регистрировать опыт, то полученные данные будут колебаться около расчетных и близки к ним лишь после вычисления средних показателей. Вопрос о выборе вида функции подробно рассмотрен в гл. 14. Так как число факторов, определяющих ход процесса или явления, велико и факторы взаимосвязаны, то функция одной независимой переменной имеет небольшое распространение. При этом поскольку графики различных функций на ограниченных множествах изменения аргумента могут почти совпадать, один и тот же процесс может быть представлен различными производственными функциями, в частности, квадратичной, «функцией квадратный корень из x», показательной и др. Примеры производственных функций уже встречались в гл. 1 и 3. Приведем еще несколько примеров.

1. В рационе кормления свиней содержится несколько видов кормов. Если их отношение считать постоянным, т. е. если с увеличением нормы одного вида корма увеличивается и норма другого, то нет необходимости производить подсчет всех видов кормов. В этом случае изучение процесса можно свести к анализу производственной функции одной переменной [23].

Пусть y — привес одной головы (кг) в начале откорма, x — потребление кукурузы (кг) в начале откорма. Тогда в рационе с 10%-ным содержанием белка квадратичная функция имеет следующий вид:

$$y=-0,480+0,335x-0,0001x^2,$$

функция квадратный корень из x — вид

$$y=-2,334+0,278x+0,411\sqrt{x},$$

показательная функция — вид

$$y=0,330x^{1,026}.$$

С помощью этих формул можно подсчитать и сравнить привесы.

2. Живая масса двухлетних телок y, кг выражается функцией

$$y=578,4-244e^{-0,000148x},$$

где x — потребление полностью усвояемого питательного вещества, кг.

3. Живая масса телят до одного года y, (кг) выражается функцией

$$y=378,4-419,6e^{-0,0001x},$$

где x — потребление полностью усвояемого питательного вещества, кг.

§ 5.5. ПОНЯТИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим табл. 5.2 и 5.3. В первой из них приведена зависимость массы животного от его возраста при факторостатных условиях (условия содержания поддерживаются на постоянном уровне, кроме объема кормления).

В табл. 2 указано соответствие между среднесуточным привесом и массой животного.

Таблица 5.2

Возраст в месяцах после отъема	Живая масса (среднее значение), кг
1	15
2	22
3	32
4	46
5	65
6	88
7	110

Таблица 5.3

Живая масса (среднее значение), кг	Среднесуточный привес, кг
25	0,250
35	0,350
55	0,450
75	0,650
95	0,750
105	0,750

Таким образом, среднесуточный привес (кг) можно считать функцией возраста животного: каждому значению возраста соответствует определенное значение среднесуточного привеса. Привес зависит от массы, а масса — от возраста. Для сельскохозяйственного производства такая зависимость является характерной; например, фотосинтетическая активная радиация зависит от продолжительности солнечного дня и является функцией числа солнечных дней в вегетационный период.

Рассмотрим задачу в общем виде. Пусть даны две функции $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, при этом множество значений второй функции входит в область определения первой. Тогда любому $x \in D(f)$ в силу правила φ соответствует определенное число u, а числу u функция $y=f(u)$ сопоставляет число y. Ясно, что в этом случае правила f и φ сопоставляют каждому x одно значение y, т. е.

$$y=f[\varphi(x)]=F(x).$$

Здесь имеет место функция от функции или сложная функция, x — независимая переменная; u — промежуточная переменная. Например, функции $y=\sin 2x$ и $y=(\sqrt{x}+6)^5$ можно рассматривать как сложные и представить в виде цепочки простых: $y=\sin u$, $u=2x$; $y=u^5$, $u=\sqrt{x}+6$.

§ 5.6. ВЫВОДЫ

В главе кратко изложены понятия множества и числовых множеств. На основе понятия множества введено понятие функции. Функция — это закон, соответствие, по которому каждому элементу одного числового множества отвечает один элемент другого числового множества. Функция может быть задана при помощи: а) формулы, б) таблицы, в) графика, г) программы для ЭВМ. Каждый способ удовлетворяет определению функции.

С помощью функций записывается соответствие между величинами, определяющими ход процесса или явления в сельском хозяйстве. Такие функции называются производственными. Правильно составленная производственная функция, изучение и анализ графиков дает возможность более глубоко познать соответствующий процесс и, следовательно, грамотно им управлять.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Приведите примеры множеств и числовых множеств.

2. Укажите соотношение между множествами натуральных чисел, целых чисел, рациональных чисел, действительных чисел.

3. Дайте определение величины, приведите примеры постоянных и переменных величин.

4. Приведите примеры интервалов: замкнутых, открытых, полуоткрытых, бесконечных.

5. Дайте определение функции. Приведите примеры. Что такое область определения функции, заданной формулой?

6. Перечислите способы задания функции, их достоинства и недостатки.

7. Дайте определение четной и нечетной функций.

8. Что такое производственная функция? Каковы ее особенности? Для чего нужны производственные функции?

9. Приведите примеры производственных функций.

УПРАЖНЕНИЯ

1. На какие подмножества можно разбить множество животных дойного стада коров?

2. Среди животных одного стада имеются больные. На какие два множества можно разбить множество животных всего стада?

3. На какие подмножества можно разбить множество работников молочного комплекса?

4. Дана функция $f(x)=4x-5$. Найдите: 1) $f(2)$; 2) $f(0)$, 3) $f(-1)$.

5. Дана функция $f(x)=3x^2+2$. Найдите: 1) $f(-2)$; 2) $f(5)$; 3) $f(a-1)$; 4) $f(2a)$; 5) $f(x+\Delta x)$.

Дана функция x^2+3. Найдите: 1) $f(0)$; 2) $f(1)$; 3) $f(-2)$; 4) $f(\sqrt{2})$; 5) $f(\sqrt{2}+1)$.

6. а) Покажите, что для функции $f(x)=2x^4-x^2+1$ имеет место равенство $f(-3)=f(3)$. Четная или нечетная эта функция?

б) Установите, является ли каждая из следующих функций четной, нечетной или функцией общего вида:

1) $y=2x^2-6$; 2) $y=t^3-t$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$; 4) $y=\sqrt{x^3+1}$.

7. Дана функция $f(x)=x^3-x$. Докажите, что $f(-2)$ и $-f(2)$ и $f(-x)=-f(x)$.

8. Найдите корни функции $f(x)=x^2-5x+6$.

9. Найдите области определения функций $-D(f)$.

1) $y=\dfrac{1}{1+x}$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; 3) $y=\sqrt{x-1}$; 4) $y=\sqrt{1-x}$; 5) $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$; 6) $y=e^x$; 7) $y=\arcsin x$.

10. Даны сложные функции:

1) $y=\sqrt{x^2-1}$; 2) $y=\sin 2x$; 3) $y=e^{x^2}$; 4) $y=\lg\cos 2x$.
Представьте эти функции в виде цепочки простых.

11. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

12. Тождественны ли следующие функции:

1) $f(x)=\frac{x}{x}$ и $g(x)=1$;

2) $f(x)=\lg x^2$ и $g(x)=2\lg x$;

3) $f(x)=\sqrt{x^4}$ и $g(x)=x^2$;

4) $f(x)=\frac{x^2}{x}$ и $g(x)=x$;

5) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ и $g(x)=1$?

13. Размер популяции насекомых в момент t (в днях) задается функцией

$$P(t)=10\,000-9000(1-t).$$

Вычислите начальную популяцию.

14. У годовалых лососей потребление кислорода с повышением скорости плавания возрастает экспоненциально*. Найдите зависимость между $y(v)$ — величиной потребления кислорода в час годовалым лососем — и скоростью плавания v (м/с), если известно, что $y(0)=100$ мг/ч, $y(3)=800$ мг/ч.

Найдите $y(1)$ и $y(2)$.

15. Содержание каротина k (в промилле, т. е. в г на 1 кг сухого вещества) в скошенной массе люцерны через t ч выражается зависимостью $k=pe^{ct}$.

По данным опыта получена следующая таблица:

t	0	18
k, ‰	0,24	0,08

найдите параметры p и c, составьте таблицу и постройте график найденной зависимости, взяв t от 0 до 24 ч.

16. Содержание белка (%) в скошенной траве через t (ч) выражается зависимостью $B=pe^{ct}$. Найдите параметры p и c по данным опыта.

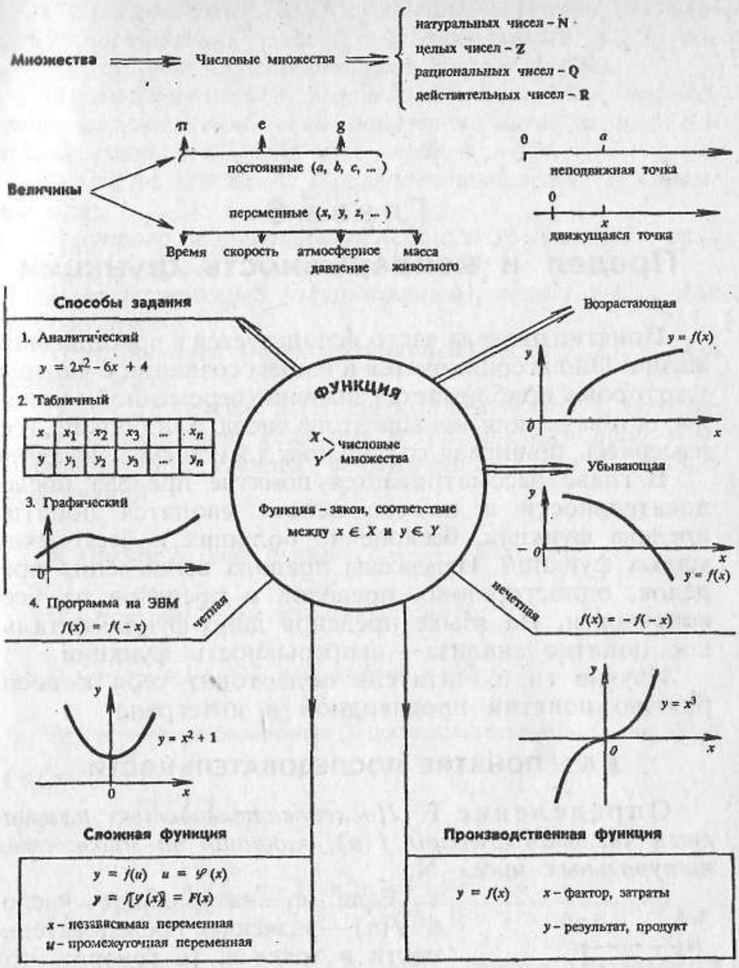
---

* Экспоненциальная функция имеет вид $y=Ae^{bv}$, A и b — параметры.

t, ч	0	12
B, %	15,4	10,4

Составьте таблицу найденной зависимости, взяв точки t через 1 ч от 0 до 24 ч и постройте график.

17. Функция $x(t) = 1000 + 500(1 - 2^{-t})$ соответствует непрерывному росту популяции бактерий от начального размера $x(0) = 1000$ до предельного $x(t) = 1500$. Чему равны численные значения популяции в моменты времени $t = 1, 2, 3, ..., 10$. Постройте график.


Множества
Числовые множества
натуральных чисел – N
целых чисел – Z
рациональных чисел – Q
действительных чисел – R
π
e
g
постоянные (a, b, c, ...)
Величины
переменные (x, y, z, ...)
Время
скорость
атмосферное давление
масса животного
0
a
неподвижная точка
0
x
движущаяся точка
Способы задания
1. Аналитический
y = 2x² – 6x + 4
2. Табличный
x x₁ x₂ x₃ ... xₙ
y y₁ y₂ y₃ ... yₙ
3. Графический
0
4. Программа на ЭВМ
ФУНКЦИЯ
X
Y
числовые множества
Функция – закон, соответствие между x ∈ X и y ∈ Y
Возрастающая
y = f(x)
y
0
x
Убывающая
y
0
x
y = f(x)
четная
f(x) = f(– x)
y
y = x² + 1
0
x
нечетная
f(x) = – f(– x)
y
y = x³
0
x
Сложная функция
y = f(u) u = φ(x)
y = f[φ(x)] = F(x)
x – независимая переменная
u – промежуточная переменная
Производственная функция
y = f(x)
x – фактор, затраты
y – результат, продукт

Глава 6

Предел и непрерывность функции

Понятие предела часто используется в повседневной жизни. Оно ассоциируется в нашем сознании с числом, к которому приближается значение переменной величины, оставаясь или меньше этого числа, или больше, или изменяясь, принимая то большие, то меньшие значения.

В главе рассматривается понятие предела последовательности и на его основе вводятся понятия предела функции, бесконечно больших и бесконечно малых функций. Изложены правила вычисления пределов, односторонних пределов и пределов на бесконечности. На языке пределов дано фундаментальное понятие анализа — непрерывность функции.

Изучив гл. 6, читатель подготовит себя к восприятию понятий производной и интеграла.

§ 6.1. ПОНЯТИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. *Последовательностью называется числовая функция* $f(n)$, *заданная на множестве натуральных чисел* $\mathbf{N}$.

Если n — натуральное число, а $f(n)$ — значение последовательности в точке n, то говорят, что n — это номер числа $f(n)$, а само число $f(n)$ называют n-м членом последовательности. В дальнейшем вместо $f(n)$ будем писать f_n.

● **Пример 1.** Пусть $f_n = 3n - 1$. Имеем

$$f_1 = 2,\ f_2 = 5, \ldots f_{100} = 299 \text{ и т. д.}$$

Графиком последовательности $f_n = 3n - 1$ является некоторое изолированное множество точек, часть которого показана на рис. 62. ●

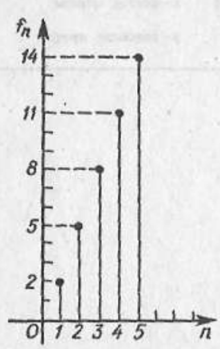


Рис. 62

Определение 2. *Последовательность f_n называется постоянной, если $f_n = C$ для любого $n \in \mathrm{N}$, где C — некоторое действительное число* $(C \in \mathrm{R})$.

Определение 3. *Последовательность f_n называется ограниченной, если найдутся числа m и $M \in R$ такие, что $m \leqslant f_n \leqslant M$ для любого $n \in \mathrm{N}$.*

Определение 4. *Последовательность f_n называется:*

1) *строго возрастающей (строго убывающей), если $f_n < f_{n+1}$ $(f_n > f_{n+1})$ для любого $n \in \mathrm{N}$;*

2) *возрастающей (неубывающей), если $f_n \leqslant f_{n+1}$ для любого $n \in \mathrm{N}$;*

3) *убывающей (невозрастающей), если $f_n \geqslant f_{n+1}$ для любого $n \in \mathrm{N}$.*

Определение 5. *Последовательность f_n называется монотонной, если она возрастающая либо убывающая, либо строго возрастающая, либо строго убывающая.*

● **Пример 2.** Дана функция $f_n = \dfrac{n+1}{n}$. Находим:

1) $f_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} > 1$ для любого $n \in \mathrm{N}$;

2) $f_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \leqslant 2$ для любого $n \in \mathrm{N}$;

3) $f_n = \dfrac{n+1}{n}$ — ограниченная последовательность, так как $1 < f_n \leqslant 2$;

4) $f_{n+1} = \dfrac{(n+1)+1}{n+1}$;

$$f_n - f_{n+1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

для любого $n \in N \Rightarrow f_n > f_{n+1} \Rightarrow f_n$ — строго убывающая последовательность.

§ 6.2. СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧИСЛО e. НАТУРАЛЬНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

● **Пример 1.** Пусть

$$f_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

С ростом номера n число $f_n = 1 + \frac{1}{n}$ (n-й член последовательности) становится все ближе к 1, но $f_n \neq 1$ ни при каких натуральных n. ●

Рассмотрим такие последовательности, у которых с ростом номера «n» n-й член f_n приближается к некоторому числу a, $a \in \mathbb{R}$.

Определение 1. *Число a есть предел последовательности f_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число n_0, что при всех $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$, $|f_n - a| < \varepsilon$.*

Если это условие выполняется, то пишут $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = a$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

В определении сходимости и предела последовательности нет ясного указания на то, как проверять сходимость и как находить предел. Естественно, возникают три вопроса.

1. Дана последовательность f_n. Как выяснить, сходится ли она или нет?

2. Если f_n сходится, то сколько она имеет пределов?

3. Как найти все пределы последовательности?

На первый вопрос ответ дают так называемые теоремы существования, которые называют еще признаками сходимости.

Теорема 1. *Если последовательность f_n ограничена и монотонна, то она сходится.*

Иллюстрация теоремы дана на рис. 63

Пусть $f_n = \frac{n+1}{n}$. Эта последовательность строго убывающая и ограниченная. Проведем две линии, параллельные оси n на расстоянии от нее на 1 и 2 единицы. С возрастанием n соответствующие точки будут приближаться сверху к линии $f_n = 1$.

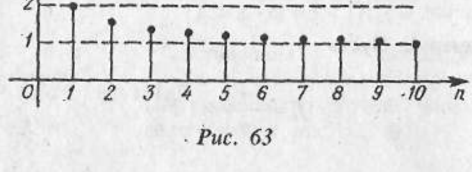


Рис. 63

Теорема 2. *Пусть дана постоянная числовая последовательность f_n, $f_n = C$ для любого $n \in \mathrm{N}$, $C \in \mathrm{R}$. Тогда последовательность f_n сходится и*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = \lim_{n \to +\infty} C = C$$

(классическая формулировка: предел постоянной равен постоянной).

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть n_0 — любое число ($n_0 \in \mathrm{R}$). Тогда для любого $n > n_0$, $n \in \mathrm{N}$, $|f_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть дана последовательность f_n, $f_n = \frac{1}{n^\alpha}$, ($\alpha > 0$, $\alpha \in R$). Тогда последовательность f_n сходится и*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $n_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$. Тогда для любого $n > n_0$, $n \in \mathrm{N}$,

$$|f_n - 0| = \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n_0^\alpha} = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\right)^\alpha} = \varepsilon \Rightarrow |f_n - 0| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Если $|g| < 1$, $g \in R$, то последовательность $f_n = g^n$ сходится и*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = \lim_{n \to +\infty} g^n = 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $n_0 = \frac{\lg \varepsilon}{\lg g}$. Тогда для любого $n > n_0$, $n \in \mathrm{N}$,

$$|f_n - 0| = g^n < g^{\frac{\lg \varepsilon}{\lg g}} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Число e. Натуральные логарифмы. В подробных курсах математического анализа, например [26], доказывается, что последовательность $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ строго возрастающая и ограниченная. Поэтому она сходится и имеет предел, который обознача-

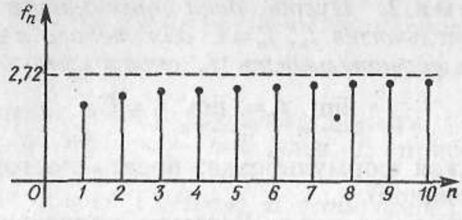


Рис. 64

ется e, т. е.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{6.2.1}$$

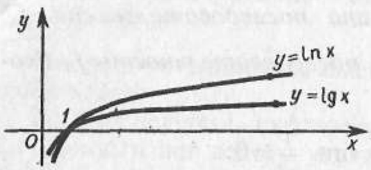


Рис. 65

График последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ изображен на рис. 64. Число e хорошо изучено. Известно, что это число иррациональное; наряду с числом π ему принадлежит в математике большая роль. В книге: Кречмер В. А. Задачник по алгебре (М., Наука, 1968) приведено значение e, содержащее 2500 знаков после запятой. Мы укажем десять знаков: $e=2{,}7182818284\ldots$

Логарифмы чисел по основанию e называются *натуральными* и обозначаются $\ln x$.

Легко проверить, что между десятичными и натуральными логарифмами существует связь:

$$\ln x=\ln 10\lg x=2{,}303\lg x,$$
$$\lg x=\lg e\ln x=0{,}4343\ln x.$$

Графики функций $y=\ln x$ и $y=\lg x$ изображены на рис. 65.

§ 6.3. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $\bar{R}$ — расширенное множество действительных чисел. Как известно, $\bar{R}$ состоит из всех действительных чисел и двух «бесконечно удаленных» точек $(-\infty)$ и $(+\infty)$.

● **Пример 1.** Рассмотрим последовательность $f_n=n^2$. Интуитивно ясно, что n-й член последовательности с возрастанием n становится все больше и больше, при этом, начиная с некоторого номера, f_n превышает любое действительное число. Естественно написать, что

$$\lim_{n\to+\infty} f_n=+\infty.$$

Вместе с тем n-й член «перевернутой» последовательности $g_n=\frac{1}{f_n}$ с возрастанием n приближается к 0, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n=0$.

Поясним сказанное следующей таблицей:

n	1	2	10	100	10^4	10^8
f_n	1	4	100	10 000	10^8	10^{16}
$g_n=\frac{1}{f_n}$	1	0,25	0,01	0,0001	10^{-8}	10^{-16}

● **Пример 2.** $f_n=(-1)^n n$.

С возрастанием n значение $|f_n|=|(-1^n n)|$ становится все больше и больше, но f_n не приближается ни к какому числу. Если n четное, то f_n приближается к $+\infty$, а если n нечетное, то к $-\infty$. Перевернутая последовательность

$$g_n=\frac{1}{f_n}=\frac{1}{(-1)^n n}\to 0.$$

Для того чтобы f_n приближалась к $+\infty\,(-\infty)$, необходимо, чтобы начиная с некоторого номера имело место неравенство $f_n>0$ $(f_n<0)$ и, конечно,

$$g_n=\frac{1}{f_n}\to 0 \text{ при } n\to+\infty. \text{ ●}$$

Определение. *Пусть дана последовательность f_n и выполнены следующие условия:*

1) $f_n>0$ *при всех* $n>n_0$, *где* n_0 — *некоторое число;*

2) перевернутая *последовательность* $g_n=\frac{1}{f_n}$ *сходится, и*

$$\lim_{n\to+\infty} g_n=0.$$

Тогда говорят, что последовательность f_n стремится к $+\infty$ и пишут

$$\lim_{n\to+\infty} f_n=+\infty. \tag{6.3.1}$$

Если же хотя бы одно из двух условий не выполнено, то говорят, что бесконечно удаленная точка $+\infty$ не является пределом последовательности

● **Пример 3.** Дана функция $f_n=n^2$, $f_n=n^2>0$ при $n\in\mathbb{N}$, $g_n=\frac{1}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$.

Аналогично можно дать определение последовательности, стремящейся к $-\infty$. Кратко пишут

$$\lim_{n\to+\infty} f_n=-\infty. \bullet \tag{6.3.2}$$

Пример 4. Дана функция $f_n=-\sqrt{n}$ при всех $n\in\mathbb{N}$, $-\sqrt{n}<0$. Перевернутая последовательность $g_n=\frac{1}{f_n}=-\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, поэтому

$$\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n})=-\infty. \bullet$$

Классификация последовательностей.

Класс 1. Состоит из всех сходящихся последовательностей таких, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=a$, где a — число, $a\neq\pm\infty$.

Если $a=0$, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=0$, то последовательность называется *бесконечно малой*.

Класс 2. Состоит из всех последовательностей f_n таких, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=+\infty$.

Класс 3. Состоит из всех последовательностей f_n таких, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=-\infty$.

Если последовательность f_n входит в один из этих трех классов, то будем говорить, что она имеет предел $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=a$ (a — число или один из символов $\pm\infty$).

Класс 4. Состоит из всех последовательностей, не попавших в первые три класса, т. е. тех, которые не имеют предела.

Можно доказать, что, например, последовательности $(-1)^n$, $\sin n$ не имеют предела.

Если $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=a$, $a=+\infty$ или $a=-\infty$, то говорят, что f_n — бесконечно большая последовательность.

Приведем еще несколько легко проверяемых утверждений:

1) если f_n — бесконечно большая последовательность, то перевернутая последовательность $g_n=\frac{1}{f_n}$ — бесконечно малая;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(-f_n)=-\infty$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(-f_n)=+\infty$.

§ 6.4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Сформулируем семь теорем о пределах последовательностей, которые для удобства будем называть правилами. При этом в первых пяти правилах пределы последовательностей конечны (или f_n и g_n сходятся).

Правило 1.

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n\pm g_n)=\lim_{n\to+\infty} f_n\pm\lim_{n\to+\infty} g_n \tag{6.4.1}$$

(*предел алгебраической суммы равен той же сумме пределов*).

Приведем точную формулировку: *если последовательности f_n и g_n сходятся, то сходится последовательность $f_n\pm g_n$ и справедлива формула* (6.4.1).

Правило 2.

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n g_n)=\lim_{n\to+\infty} f_n \lim_{n\to+\infty} g_n$$

(*предел произведения равен произведению пределов*).

Правило 3.

$$\lim_{n\to+\infty}(Cf_n)=C\lim_{n\to+\infty} f_n,$$

где C — некоторое число.

(*Постоянную величину можно выносить за знак предела.*)

Правило 4.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f_n}{g_n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} g_n},\ \text{\textit{если}}\ \lim_{n\to+\infty} g_n\neq 0$$

(*предел отношения равен отношению пределов*).

Правило 5.

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n)^m=\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^m,\ m\in\mathbf{N}.$$

Правило 6.
Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n=0$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=C\neq 0$. *Тогда*

1) *если* $\frac{f_n}{g_n}>0$ *при всех* $n\geqslant n_0$, *то* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f_n}{g_n}=+\infty$;

2) *если* $\frac{f_n}{g_n}<0$ *при всех* $n\geqslant n_0$, *то* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f_n}{g_n}=-\infty$.

Правило 7. *Пусть* f_n — *бесконечно малая последовательность, т. е.* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=0$, *а* g_n — *ограниченная последовательность. Тогда* $f_n g_n$ — *бесконечно малая последовательность, т. е.*

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n g_n)=0.$$

Ограничимся доказательством правила 1 для случая предела суммы. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n=b$. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Тогда существуют числа n_1 и n_2 такие, что при всех $n>n_1$

$$|f_n-a|<\varepsilon/2,$$

при всех $n>n_2$

$$|g_n-b|<\varepsilon/2.$$

Пусть n_3 — число, большее, чем n_1 и n_2. Тогда при $n>n_3$ последние два неравенства истинны одновременно. Поэтому

$$|(f_n+g_n)-(a+b)|=|(f_n-a)+(g_n-b)|\leqslant$$
$$\leqslant|f_n-a|+|g_n-b|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

(использовано неравенство треугольника для модулей см. § 5.2).

Следовательно, последовательность f_n+g_n сходится и

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n+g_n)=a+b=\lim_{n\to+\infty} f_n+\lim_{n\to+\infty} g_n.$$

Остальные правила доказываются аналогично.

Замечание. В правилах 1 и 2 можно взять любое конечное число слагаемых (множителей).

Правила 1—7 дают ответ на третий вопрос из § 6.2.

Сформулированные правила связывают операцию предельного перехода с арифметическими операциями. Они позволяют вычислять пределы последовательностей во многих случаях. Для этого надо выполнить тождественные преобразования n-го члена последовательности так, чтобы правила 1—7 сводили вычисление исходного предела к известным пределам.

● **Примеры.**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=1+0=1.$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-1}{1+2n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3n^2-1}{n^2}}{\dfrac{1+2n^2}{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+2}=$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+2\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}3-\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to+\infty}2}=\frac{3+0}{0+2}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin(n+1)=0,$ так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=0,$ $-1\leqslant\sin(n+1)\leqslant 1$ (правило 7).

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{n^3+1}{n^3}}{\dfrac{n^2}{n^3}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n}};$

$f_n=1+\dfrac{1}{n^3},$ $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}=1+0=1;$

$g_n=\dfrac{1}{n},$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}g_n=0;$

$\dfrac{f_n}{g_n}>0$ при любом $n\in\mathbf{N}$. По правилу, 6 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3+1}{n^2}=+\infty.$ ●

§ 6.5. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть a — число. Функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x, т. е. $x\in(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. Точка a не обязательно входит в $D(f)$.

Рассмотрим ряд последовательностей x_n, значения которых лежат в области определения $f(x)$, $x_n\neq a$ для любого $n\in\mathbf{N}$ и таких, что $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\ (x_n\to a)$.

Для каждой такой последовательности x_n построим новую последовательность $y_n=f(x_n)$. Возможны следующие два случая.

Случай 1. Все последовательности y_n имеют пределы, эти пределы совпадают между собой и равны некоторому A (A — число или один из символов $+\infty$, $-\infty$). В этом случае говорят, что функция $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), имеет предел, равный A. Кратко пишут

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \text{ или } f(x)\underset{x\to a}{\to} A. \qquad (6.5.1)$$

Определение 1. *Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, если для любой числовой последовательности x_n, сходящейся к a ($x_n\in D(f)$, $x_n\neq a$ при любом n), последовательность соответствующих значений функций $y_n=f(x_n)$ сходится и ее предел равен A*:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

Случай 2. Положение, описанное в случае 1, невозможно:

1) хотя бы одна из последовательностей y_n не имеет предела;

2) все последовательности y_n имеют пределы, но есть, как минимум, два разных.

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ при $x\to a$ не имеет предела.

● **Пример 1.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$.

Решение. Возьмем любую последовательность x_n, $x_n\neq 0$, такую, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$. Построим последовательность $y_n=f(x_n)=\frac{1}{x_n^2}$ и покажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=+\infty$.

Так как $y_n=\frac{1}{x^2}>0$, то достаточно показать, что перевернутая последовательность $\frac{1}{y_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Находим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to+\infty} x_n^2=\lim_{n\to+\infty}(x_n)^2=0^2=0. \quad ●$$

● **Пример 2.** Доказать, что функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x\to 0$.

Решение. Рассмотрим две последовательности $x'_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ и $x''_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$. Ясно, что $x'_n \neq 0$, $x''_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x''_n = 0$. Построим соответствующие последовательности $y'_n = \sin 2\pi n = 0$ и $y''_n = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$. Вычислим их пределы: $\lim\limits_{n\to+\infty} y'_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y''_n = 1$. Имеет место случай 2. Функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$. ●

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то его часто удается достаточно легко вычислить, удачно выбрав последовательность x_n $x_n \to a$, $x_n \neq a$, таким образом, чтобы предел последовательности $y_n = f(x_n)$ был заранее известен или легко вычислялся. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Существует другое определение предела функции, эквивалентное определению 1, в котором не используется понятие предела последовательности.

Определение 2. *Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ (или в точке $x = a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Доказательство эквивалентности определений 1 и 2 приводится в более подробных курсах математического анализа, например [3].

Дадим геометрическое толкование определения предела функции. Пусть график функции, имеющей предел в точке $x = a$, изображен на рис. 66. Проведем две прямые $x = a$ и $y = A$. Выберем $\varepsilon > 0$ и построим прямые $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если найдется δ-окрестность точки a такая, что часть графика функции $f(x)$, для которой $x \in [a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$, попадает внутрь полосы, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. В этом случае $|f(x) - A| < \varepsilon$.

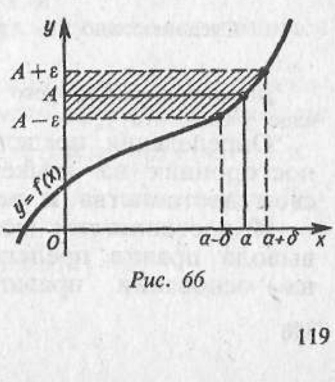


Рис. 66

1. Односторонние пределы. Если в определении 1 предела функции дополнительно потребовать, чтобы любая последовательность $x_n \to a$, $x_n < a$ (a — число или символ $+\infty$) при любом $n \in \mathbf{N}$, то функция $f(x)$ при $x \to a$ (слева) имеет левый односторонний предел

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = A.$$

Достаточно потребовать при этом, чтобы функция $f(x)$ была определена в открытом интервале (c, a), т. е. левее точки a.

Если при определении предела функции дополнительно потребовать, чтобы любая последовательность $x_n \to a$, $x_n > a$ (a — число или символ — ∞) при любом $n \in \mathbf{N}$, то функция $f(x)$ при $x \to a$ (справа) имеет правый односторонний предел

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = A.$$

Достаточно потребовать при этом, чтобы функция $f(x)$ была определена в некотором интервале (a, b), т. е. правее точки a.

● **Пример 3.** Доказать, что:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$.

Решение. Пусть x_n — последовательность, и $x_n < 1$, $x_n \to 1$.

Последовательность $y_n = \dfrac{1}{x_n - 1} < 0$, так как $x_n < 1$. Покажем, что перевернутая последовательность $\dfrac{1}{y_n} \to 0$.

Имеем

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{y_n} = \lim_{n \to +\infty} (x_n - 1) = \lim_{n \to +\infty} x_n - \lim_{n \to +\infty} 1 = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно [см. равенство (6.3.2)], $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$.

Доказательство второго равенства аналогично, только здесь надо учесть, что $y_n > 0$.

Определения пределов функции обычного и односторонних на языке последовательностей имеют свои достоинства и недостатки.

К достоинствам можно отнести: а) возможность вывода правил предельного перехода для функций на основании правил для последовательностей;

б) возможность доказательства того, что функция в точке не имеет предела (см. пример 2).

Недостаток состоит в том, что надо перебирать теоретически бесконечно много последовательностей x_n, поэтому нельзя дать четкого правила вычисления пределов функций. Естественно желание получить правила для вычисления пределов функций, основанные на правилах вычисления последовательностей, но «минуя» сами пределы последовательностей.

Теорема. *Известно, что $f(x)$ имеет в точке a (a —* число*) односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ и $f(a-0)=f(a+0)=A$ (A — число или один из символов $\pm\infty$). Тогда $f(x)$ имеет в точке a обычный (двусторонний) предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a-0)=A$ (рис. 66).

Если односторонние пределы различны (рис. 66), т. е. $f(a-0)\neq f(a+0)$, то не существует и предела функции при $x\to a$.

● **Пример 4.** Доказать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ при $x\to 1$ не имеет предела.

Решение. Из примера 3 следует, что $f(1-0)=-\infty$; $f(1+0)=+\infty$, $-\infty\neq+\infty\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ при $x\to 1$ не имеет предела. ●

Практически при отыскании пределов функций нет необходимости убеждаться в том, существует предел или нет. Наличие или отсутствие предела устанавливается в процессе вычислений.

2. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Определение бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей приведено в § 6.3. Обобщенное определение предела функции дано в § 6.5, причем там рассмотрены и случаи, когда

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

Ввиду важности этих двух случаев остановимся на них подробнее.

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ (a — число или один из символов $+\infty$, $-\infty$), если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.*

Определение 4. *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$ (a — число или один из символов $+\infty$, $-\infty$), если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.*

Замечание. Если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то в силу определения 2 предела функции получим, что разность $f(x)-A$ — бесконечно малая функция, т. е. из равенства $\lim\limits_{x\to A}f(x)=A$ следует, что

$$f(x)-A=\alpha(x) \quad \text{при} \quad x\to a,$$

или

$$f(x)=A+\alpha(x), \tag{6.5.2}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$.

С другой стороны, если для функции $f(x)$ имеет место равенство (6.5.2), то число A — предел функции $f(x)$ при $x\to a$.

Теперь можно дать еще одно определение предела функции. *Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, если $f(x)-A=\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x\to a$.*

§ 6.6. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Сформулируем ряд теорем о пределах, которые для удобства будем называть правилами (в первых пяти правилах предполагается, что существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$ (a — число или $\pm\infty$).

Правило 1. *Предел алгебраической суммы двух функций равен сумме пределов тех же функций.*

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x).$$

Правило 2. *Предел произведения равен произведению пределов.*

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\,g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x).$$

Правило 3. *Постоянную можно выносить за знак предела.*

$$\lim_{x\to a}\left(C\,f(x)\right)=C\lim_{x\to a}f(x),$$

где C — некоторое число.

Правило 4. *Предел отношения равен отношению пределов*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\quad \text{если}\quad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

Правило 5. *Предел степени равен степени предела*

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^m=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^m,\quad \text{где}\quad m\in\mathbf{N}.$$

Правило 6. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C\neq 0$. *Тогда:*

1) *если* $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ *при всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x-a|<\varepsilon$, *где* $\varepsilon>0$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$;

2) *если* $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ *при всех* x, *удовлетворяющих условию* $|x-a|<\varepsilon$, *где* $\varepsilon>0$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

Правило 7. *Пусть* $f(x)$ — *бесконечно малая функция, а* $g(x)$ — *ограниченная функция,* $|g(x)|<M$, где $M>0$. *Тогда* $[\lim(f(x)g(x))=0]$, *т. е. произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая.*

Приведем еще три правила, для которых не сформулированы соответствующие правила для последовательностей.

Правило 8. *Если между соответствующими значениями трех функций* $f(x)$, $\varphi(x)$ *и* $g(x)$ *выполняется неравенство* $f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant g(x)$ *для всех* x *из некоторой окрестности точки* a *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$. Теорема имеет простое геометрическое толкование. Если пределом функций $f(x)$ и $g(x)$ является число b, то движущиеся точки $f(x)$ и $g(x)$ на числовой прямой при $x\to a$ попадут внутрь

Рис. 67

ε-окрестности точки b и далее там останутся. Учитывая неравенства $f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x)$, заключаем, что точка $\varphi(x)$ попадает внутрь ε-окрестности точки b, а это и означает что $|\varphi(x)-b|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)=b$ (рис. 67).

Правило 9. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, $g(x)\neq b$, *при любом* x *из окрестности точки* a $(x\neq a)$ *и* $\lim\limits_{y=b} f(y)=A$. *Тогда*

$$\lim_{x\to a} f[g(x)] = \lim_{y\to b} f(y) = A.$$

(Замена переменной при переходе к пределу; b и A — числа, или бесконечно удаленные точки.)

Правило 10. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $f(x)$ *определены в окрестности точки* a, *для всех* x, *достаточно близких к* a $(x\neq a)$, *имеет место неравенство* $f(x)<\varphi(x)$ *и функции имеют пределы при* $x\to a$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$.

В частности, если $f(x)<0$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leqslant 0$; *если* $f(x)>0$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geqslant 0$.

Правила 1—7 доказываются на основе использования соответствующих правил для последовательностей.

Докажем, например, правило 1.

Возьмем произвольную последовательность x_n, $x_n\to a$, $x_n\neq a$, $x_n\in D(f)$ и $x_n\in D(g)$. Имеем $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+$ $+g(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)+\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) =$ $=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Замечание. В правилах 1 и 2 вместо двух слагаемых (множителей) можно брать любое конечное их число.

С помощью правил 1—9 мы будем далее вычислять пределы функций.

Замечательные пределы.

1). *Первый замечательный предел.* При вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции, часто используется предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (6.6.3)$$

Учитывая, что $\sin x$ — функция нечетная, т. е. $\sin(-x) = -\sin x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, получаем $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Теорема доказана.

2) *Второй замечательный предел.*

В § 6.2 приведен пример сходящейся последовательности

$$f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

В полных курсах математического анализа доказано, что предел функции $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \pm\infty$ равен e, т. е.

* Доказательство равенства дано в § 6.8 [см. формулу (6.8.1)].

Теорема.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (6.6.1)$$

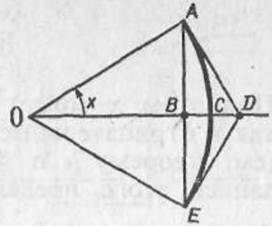


Рис. 68

Для доказательства (6.6.1) воспользуемся неравенствами

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,\ 0<x<\pi/2, \quad (6.6.2)$$

которые следуют из рассмотрения рис. 68, где $\sin x = AB$, $x=\breve{AC}$, $\operatorname{tg} x = AD$, $(OA=OC=1)$.

Из (6.6.2) имеем

$$\frac{\sin x}{x}<1, \qquad x\cos x<\sin x.$$

Следовательно, при $0<x<\pi/2$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \qquad (6.6.3)$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ *, $\lim\limits_{x\to 0} 1=1$, то отношение $\frac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ заключено между двумя величинами, имеющими один и тот же предел, поэтому (см. правило 8),

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}. \qquad (6.6.4)$$

При этом x может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Полагая $x=1/\alpha$ $(\alpha\to 0)$ (см. теорему 7 в § 6.6), получаем другую форму записи этого предела:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\mathrm{e}.$$

§ 6.7. ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ И НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА ИНТЕРВАЛЕ

● **Пример 1.** При измерении длины стебля льна 10.07 было получено значение 75 см, 2.08 измерение дало 94 см. Определить продолжительность времени между двумя измерениями в днях и в прирост стебля льна.

Решение. Пусть $x_0=10.07$, $x_1=2{,}08$. Продолжительность между измерениями $x_1-x_0=31+2-10=23$ дн.

Пусть y_0 — первоначальное значение длины, y_1 — новое (наращенное) значение. Тогда $y_1-y_0=94-75=19$ (см). ●

Определение 1. *Пусть x — переменная величина. В некоторый начальный момент $x=x_0$, в другой момент $x=x_1$. Тогда разность $\Delta x=x_1-x_0$ называется приращением (или изменением) переменной x. Ясно, что $x_1=x_0+\Delta x$.*

Определение 2. *Пусть в окрестности точки x_0 задана функция $y=f(x)$. Назовем $y_0=f(x_0)$ исходным (начальным) значением функции.* Положим, что $x_1=x_0+\Delta x$ — новое, наращенное значение независимой переменной; $y_1=f(x_1)=f(x_0+\Delta x)$ — новое наращенное значение функции $y=f(x)$.

Разность $\Delta y=y_1-y_0=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ называется приращением функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Приращение функции Δy зависит от двух величин: x_0 и Δx, при фиксированном x_0 приращение Δy зависит только от Δx. Геометрический смысл величин Δx и Δy ясен из рис. 69.

Замечание. Не следует считать, что всегда $\Delta x>0$ и $\Delta y>0$. Знаки Δx и Δy могут быть любыми и возможен случай, когда $\Delta x=0$ и $\Delta y=0$.

● **Пример 2.** Урожайность сахарной свеклы y (т/га) в зависимости от количества вносимых минеральных удобрений

x (ц/га) выражается функцией $y=5{,}4x-2{,}9$, $x>1$. На сколько увеличится урожайность сахарной свеклы, если количество удобрений увеличить с 4 до 6 ц/га?

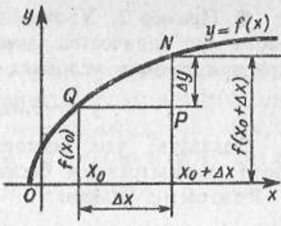


Рис. 69

Решение. Имеем $x_0=4$ — начальное значение x; $x_1=6$ — новое (наращенное) значение x; $y_0=5{,}4\cdot 4-2{,}9=18{,}7$ — начальное значение y; $y_1=5{,}4\cdot 6-2{,}9=29{,}5$ — новое (наращенное) значение y. Приращение урожайности

$$\Delta y=y_1-y_0=29{,}5-18{,}7=10{,}8 \text{ (т)}.$$ ●

Непрерывность функции в точке. Непрерывность — весьма важное свойство функции. Рассмотрим примеры. Поставили кипятить воду. С течением времени температура воды повышается. Повышается, но как? Постепенно, т. е. за малый промежуток времени температура повысится незначительно. Другой пример. Будем измерять высоту стебля растения в период роста. На рост влияют многочисленные факторы, действующие во времени, поэтому независимой переменной будем считать время. И здесь та же картина, подтверждаемая опытом многовековой деятельности человека: малым промежутком времени соответствуют малые изменения высоты растения.

Аналогично, небольшим промежуткам времени отвечают малые изменения температуры воздуха. Никто еще не наблюдал, чтобы температура воздуха изменялась моментально, например от $+15$ до $-45°$. Малым изменениям времени соответствуют малые привесы животных, содержащихся на откорме.

Определение. *Пусть функция $y=f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0, Δy — приращение этой функции в точке x_0, соответствующее приращению независимой переменной Δx. Известно, что*

1) *функция Δy при $\Delta x\to 0$ имеет предел;*
2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Тогда функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=x_0$, а само число x_0 — точкой непрерывности.

Кратко это определение формулируется так: *функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=x_0$, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.*

● **Пример 2.** Урожайность зерна кукурузы (ц/га) в зависимости от количества внесенного в почву азотного удобрения (кг) при прочих условиях выражается формулой

$$y=-0{,}0021x^2+0{,}936x+49{,}840.$$

Доказать, что бесконечно малым изменениям количества азота, соответствуют бесконечно малые изменения урожайности.

Решение. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-0{,}0021(x_0+\Delta x)^2+0{,}936(x_0+\Delta x)+\right.$$
$$\left.+49{,}840+0{,}0021x_0^2-0{,}936x_0-49{,}840\right]=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-0{,}0042x_0\,\Delta x+0{,}93\Delta x-0{,}0021(\Delta x^2)\right]=0.$$

Здесь применены правила 1—3 (см. § 6.6).

Таким образом, функция непрерывна. ●

Теорема 1. *Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда:*

1) *функция $y=f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0;*

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=0.$$

Выполним замену переменной (правило 9): $x=x_0+\Delta x$; если $\Delta x\to 0$, то $x\to x_0$. В этом случае $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$, откуда имеем равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{6.7.1}$$

Проведя рассуждения в обратном порядке, приходим к равенству $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Теорема доказана.

● **Пример 3.** Доказать, что функция $f(x)=x^2$ непрерывна при $x\in\mathbf{R}$.

Доказательство. Имеем

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} x^2=(\lim_{x\to x_0} x)^2=x_0^2=f(x_0).\ ●$$

При вычислении пределов часто используется следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $y=f(x)$ — элементарная и известно, что она задана в окрестности точки x_0. Тогда $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, т. е.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Замечания: 1. Последние две теоремы дают основание сформулировать следующее правило: *при вычислении предела функции, непрерывной в точке* x_0, *при* $x \to x_0$ *надо вместо* x *в выражение* $f(x)$ *подставить* x_0. *Полученное число и является пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$.

2. Если x_0 — граничная точка из области определения функции, то вместо обычного (двустороннего) предела в формуле (6.7.1) надо писать знак одностороннего предела.

● **Пример 4.** Имеем

а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2^x+3)^2}{\sin(\pi/2)x} = \dfrac{(2^1+3)^2}{\sin(\pi/2)1} = \dfrac{25}{1} = 25;$

б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0.$ ●

Из условия (6.7.1) непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 при произвольном значении Δx имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0). \tag{6.7.2}$$

Полагая, что Δx может иметь как положительный, так и отрицательный знак, соотношение (6.7.2) можно записать в развернутом виде:

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0), \tag{6.7.3}$$

где

$$f(x_0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} f(x_0+\Delta x); \quad f(x_0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} f(x_0+\Delta x).$$

Получено еще одно (третье) определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0: *функция непрерывна в точке* x_0, *если она имеет односторонние пределы, равные между собой и равные, в свою очередь, значению функции в точке* x_0.

● **Пример 5.** Дана функция

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ x^2, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 2, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Исследовать ее на непрерывность при любом $x \in \mathbf{R}$, построить график.

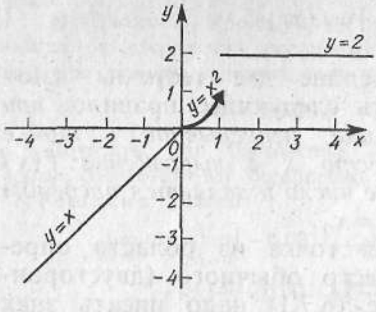


Рис. 70

Решение. 1) Пусть $x=x_0$, $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq 1$. Тогда функция $f(x)$ вблизи x_0 тождественно совпадает с одной из следующих элементарных функций: $y=x$, $(x<0)$; $y=x^2$, $(0 \leqslant x_0 < 1)$, $y=2$ $(x \geqslant 1)$. Поэтому x_0 — точка непрерывности.

2) Разрыв может быть при $x=0$ и при $x=1$;

$$f(0)=0^2=0;\ f(0-0)= = \lim_{x\to 0,\, x>0} f(x)= \lim_{x\to 0,\, x<0} x=0;$$

$$f(0+0)= \lim_{x\to 0,\, x>0} f(x)= \lim_{x\to 0,\, x>0} x^2=0^2=0;$$

$$f(0)=f(0-0)=f(0+0)=0.$$

Значит, $x=0$ — точка непрерывности.

3) $x=1$. В этом случае

$$f(1)=2;\ f(1-0)= \lim_{x\to 1,\, x<1} f(x)= \lim_{x\to 1,\, x<1} x^2=1;\ f(1+0)= = \lim_{x\to 1,\, x>1} 2=2.$$

Так как $1 \neq 2$, то условие (6.7.3) нарушено и точка $x=1$ не является точкой непрерывности (рис. 70). ●

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.*

§ 6.8. ТАБЛИЦА ИЗВЕСТНЫХ ПРЕДЕЛОВ. ПРАКТИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Приведем таблицу известных пределов, дополнив ее пределами элементарных (основных) функций в точках, не входящих в область определения, но лежащих на границе области определения, в том числе и при $x \to \pm\infty$.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, где $f(x)$ непрерывная в точке a функция, a — число;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, $f(x)$ — элементарная функция, определенная вблизи (в некоторой окрестности) точки a, a — число.

В частности, $\lim\limits_{x\to a} x=a$, $\lim\limits_{x\to a} C=C$, $\lim\limits_{x\to a} x^2=a^2$ и т. п. Если a — точка, $a \in D(f)$ и $f(x)$ задана при

$x \geqslant a$ (вблизи a), то $\lim\limits_{x \to a\, x > a} f(x) = f(a)$, если $f(x)$ задана при $x \leqslant a$ (вблизи a), то $\lim\limits_{x \to a,\, x < a} f(x) = f(a)$;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, если a — число, $a > 1$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, если a — число, $0 < a < 1$;

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$, если $\alpha > 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$, если $\alpha < 0$;

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} \ln x = -\infty$;

7′) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} \log_a x = -\infty$, $a > 1$, a — число;

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = +\infty$, если $0 < a < 1$;

9) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty$;

10) $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{artg} x = +\pi/2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$;

11) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

12) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Как правило, при вычислении пределов функций при $x \to a$ выполняют тождественные преобразования выражения $f(x)$ вблизи (в некоторой окрестности) точки $a\,(x \neq a)$ так, чтобы, применяя правила 1—7, свести вычисление исходного предела к известным или легко находящимся пределам.

Может оказаться, что при отыскании предела частного двух функций $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to a$ числитель и знаменатель вместе стремятся к 0, или числитель и знаменатель стремятся к ∞. Будем говорить, что эта дробь при $x \to a$ представляет собой *неопределенность* вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, а нахождение предела дроби назовем *раскрытием неопределенности*.

Приведем несколько примеров.

● **Пример 1.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$.

Числитель и знаменатель дроби при $x=1$ равны 0. Выполним тождественные преобразования:

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4); \quad x^2-3x+2=(x-1)(x-2);$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)}.$$

Функции $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$ и $\dfrac{x-4}{x-2}$ совпадают в окрестности точки $x=1$, $(x\neq 1)$, поэтому их пределы равны при $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-2}=\frac{-3}{-1}=3. \text{ ●}$$

● **Пример 2.** Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2+3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{замена;}\\ x=\dfrac{1}{y},\\ y=\dfrac{1}{x}->0;\ y>0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\frac{1/y^2+1}{1/y^2+3/y+2}=\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\frac{y^2+1}{2y^2+3y+1}=\frac{0^2+1}{2\cdot 0^2+3\cdot 0+1}=1. \text{ ●}$$

● **Пример 3.** Имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{замена:}\\ \sqrt{x-1}=y,\\ x-1=y^2,\\ x=1+y^2,\\ y\to 1 \text{ при } x\to 2\end{array}\right|=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^2-1}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}. \text{ ●}$$

● **Пример 4.** Непрерывное изменение численности популяции выражается функцией времени

$$x(t)=80+\frac{100t}{1+t^2}.$$

Найти предельный размер популяции и начальную популяцию.

Решение. Получаем

$$\lim_{t\to+\infty}\left(80+\frac{100t}{1+t^2}\right)=\lim_{t\to+\infty}80+\lim_{t\to+\infty}\frac{100t}{1+t^2}=$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{замена:} \\ t=\frac{1}{x}, \\ x=\frac{1}{t}\to 0, \\ x>0 \end{array} \right| = 80+\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{100/x}{1+1/x^2} = 80+\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{100x}{x^2+1} = 80+\frac{100\cdot 0}{x^2+1} = 80$$

— предельный размер популяции, $x(0)=80$. ●

§ 6.9. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ НА ЗАМКНУТОМ ИНТЕРВАЛЕ. ТОЧКИ РАЗРЫВА

1°. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$ и $f(a)f(b)<0$, т. е. знаки $f(a)$ и $f(b)$ противоположны, то на (a, b) найдется хотя бы одна (не меньше, чем одна) точка $x=c$ такая, что $f(c)=0$ (свойство имеет простое геометрическое истолкование (рис. 71)). Действительно, пусть $f(a)<0$, $f(b)>0$; построим точку $A(a, f(a))$ и точку $B(b; f(b))$. Если точка x движется по оси Ox от точки a к точке b, то значения функции изменяются. График функции $y=f(x)$ при этом пересечет ось Ox в точке $x=c$, в которой значение функции $f(x)$ равно 0.

2°. **Теорема Вейерштрасса***. *Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она достигает на этом интервале своего наибольшего M и своего наименьшего m значения, т. е. на $[a, b]$ существуют такие точки x_1 и x_2, что для всех $x\in[a, b]$ имеют место неравенства $f(x_1)\geqslant f(x)$ и $f(x_2)\leqslant f(x)$.*

Так, из рис. 72 видно, что $|AA_0|=f(x_1)$ больше, а $|BB_0|=f(x_2)$ меньше всех других значений, принимаемых функцией на интервале $[a, b]$. На рис. 73 $|AA_0|=f(a)$ больше, а $|BB_0|=f(b)$ меньше всех других значений, принимаемых функцией на интервале $[a, b]$.

3°. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то, переходя от одного значения к другому, она принимает каждое промежуточное значение. Свойство означает, что если число μ удовлетворяет неравенствам $f(x_1)<\mu<f(x_2)$, где $x_1\in[a, b]$ и $x_2\in[a, b]$, то на

---

* К. Т. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

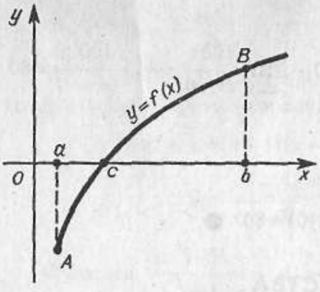


Рис. 71

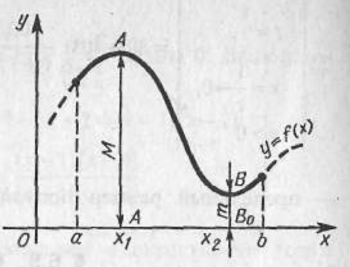


Рис. 72

$[x_1, x_2]$ найдется такая точка c, $x_1<c<x_2$ $(x_1>c>x_2)$, что $f(c)=\mu$.

Свойство 3 имеет геометрическое представление, данное на рис. 74.

Точка, в которой не выполняется условие непрерывности, называется *точкой разрыва*. Пусть x_0 — точка разрыва.

Определение 1. *Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если функция имеет конечные левосторонний $f(x_0-0)$ и правосторонний $f(x_0+0)$ пределы. Число $|f(x_0-0)-f(x_0+0)|$ называется скачком функции в точке x_0.*

Определение 2. *Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.*

● **Пример 1.** Рассмотрим функцию

$$y=f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x\leqslant 3, \\ x+2 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

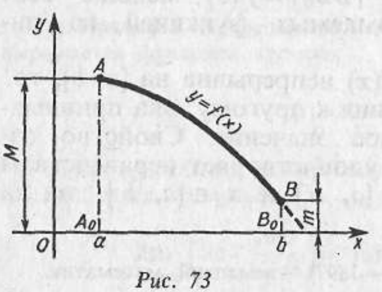


Рис. 73

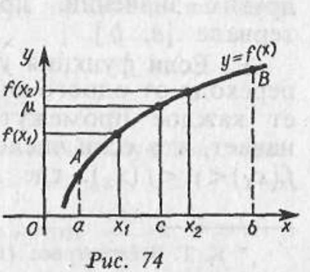


Рис. 74

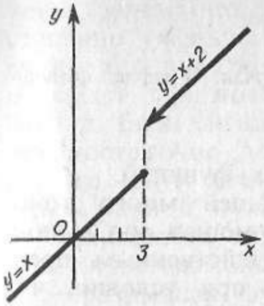


Рис. 75

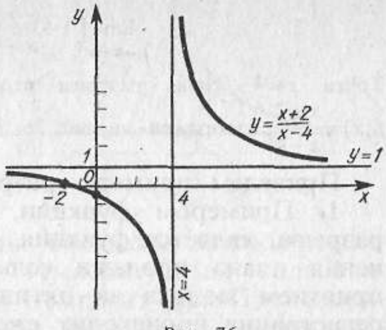


Рис. 76

Функция $f(x)$ совпадает с одной из элементарных функций при $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 3$. Разрыв может быть при $x=3$. Построим ее график. Из рис. 75 видно, что график функции нельзя нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

Вычислим односторонние пределы

$$f(3-0)= \lim_{x\to 3-0} f(x)= \lim_{x\to 3-0} x=3;$$

$$f(3+0)= \lim_{x\to 3+0} f(x)= \lim_{x\to 3+0} (x+2)=5.$$

В точке $x=3$ функция терпит разрыв:

$$|f(3-0)-f(3+0)|=|+3-5|=2.$$

Функция имеет скачок в 2 единицы. Точка $x=3$ — точка разрыва первого рода. ●

● **Пример 2.** Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{x+2}{x-4}=1+\frac{6}{x-4}.$$

Эта функция не определена при $x=4$. Если $x\to 4$, оставаясь меньше 4, то в знаменателе дроби $\frac{6}{x-4}$ получается бесконечно малая функция со знаком минус $(x-4<0)$, числитель же — величина постоянная. Второе слагаемое стремится к $-\infty$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to 4-0}\left(1+\frac{6}{x-4}\right)=-\infty.$$

Если $x\to 4$, оставаясь в процессе изменения больше 4, то в знаменателе дроби $\frac{6}{x-4}$ получается бесконечно малая функция со знаком плюс $(x-4)>0$. В результате имеем

$$\lim_{x\to 4+0}\left(1+\frac{6}{x-4}\right)=+\infty.$$

Точка $x=4$ — точка разрыва второго ряда. График функции $f(x)=\dfrac{x+2}{x-4}$ изображен на рис. 76. ●

Приведем примеры разрывных функций.

1. Примером функции, имеющей много точек разрыва, является функция, отражающая ход выполнения плана продажи сельскохозяйственным предприятием молока за пятидневку при условии, что регистрация происходит ежедневно, $f(x)$ — в литрах, x — в дн. Формула для описания подобной функции может быть следующей.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant x<1,\\ 4000 & \text{при } 1\leqslant x<2,\\ 8500 & \text{при } 2\leqslant x<3,\\ 12800 & \text{при } 3\leqslant x<4,\\ 16000 & \text{при } 4\leqslant x<5,\\ 21000 & \text{при } 5\leqslant x<6.\end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 77.

2. Зависимость возбуждения E (например, нервных клеток мышц и т. д.) от времени при внешнем воздействии изображается разрывной функцией. Если величину возбуждения выразить в каких-либо единицах, то график функции $E(t)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 78. В момент t_0 клетка получает сигнал. Возбуждение происходит в момент $t_1>t_0$. Замкнутый интервал $[t_0,\ t_1]$ называется *латентным периодом*. Возбуждение клетки в момент $t=t_1$ происходит мгновенно до максимальной вели-

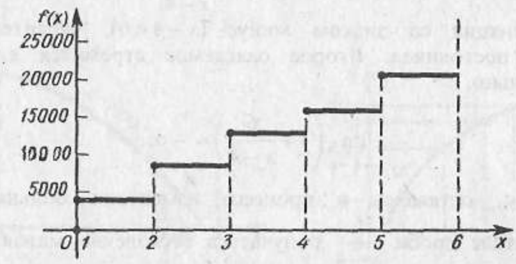


Рис. 77

чины, затем оно постепенно уменьшается до тех пор, пока не будет дан новый сигнал. Если сигнала нет достаточно долго, то $E(t)$ становится равной нулю.

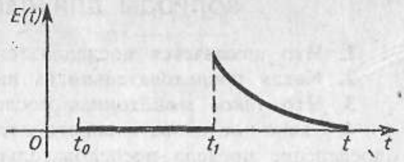


Рис. 78

Зависимость изменения биомассы микроорганизмов, чувствительных к температурным колебаниям,— разрывная функция температуры. При возрастании температуры общая биомасса m увеличивается. Однако, когда температура очень высокая, вся колония погибает. Величина m скачкообразно меняясь, становится равной 0. Функция Хевисайда [26] описывает мгновенное включение какого-либо воздействия на объект или переход из одной среды в другую:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant 0,\\ 1, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

§ 6.10. ВЫВОДЫ

Понятие предела переменной величины является в анализе основным. С его помощью вводится понятие бесконечно малой и бесконечно большой функций. Предельный переход открывает новые возможности математики, в частности возможность изучения отношения двух бесконечно малых и двух бесконечно больших функций. С понятием предела тесно связано такое фундаментальное понятие, как непрерывность функции в точке и непрерывность на интервале.

В окружающем нас мире процессы и явления, в которых участвуют многочисленные взаимосвязанные факторы, обычно непрерывны. Непрерывность процесса или явления означает, что бесконечно малые изменения одних величин вызывают столь же бесконечно малые изменения других. Таковы процессы роста высоты растения, изменение массы животного при кормлении, процесс накопления биомассы, изменение величины урожая в зависимости от доз внесенных удобрений.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется последовательностью?
2. Какая последовательность называется ограниченной?
3. Что такое монотонная последовательность?
4. Какие последовательности называются сходящимися? Дайте определение предела последовательности.
5. Сформулируйте признак существования предела последовательности.
6. Сформулируйте понятие бесконечно большой последовательности.
7. **Основные теоремы о пределах последовательностей.**
8. **Дайте определение предела функции.**
9. **Что такое односторонние пределы функции?**
10. **Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.**
11. **Что такое первый и второй замечательные пределы?**
12. **Дайте определение непрерывности функции в точке, на интервале.**
13. **Что такое точка разрыва? Точки разрыва первого и второго рода.**
14. **Основные свойства непрерывных функций.**

УПРАЖНЕНИЯ

1. Напишите значения последовательностей при $n=1, 2, 3, 4$:

$$x_n=\frac{1}{n}; \quad x_n=\frac{n}{2n-1}; \quad x_n=n^2; \quad x_n=\frac{1}{3n-1}.$$

2. Докажите, что следующие последовательности бесконечно малые при $n\to\infty$:

а) $x_n=\frac{1}{n}$; б) $x_n=\frac{1}{n_2}$; в) $x_n=\frac{1}{n^2+n}$.

3. Докажите, что следующие переменные есть бесконечно большие:

а) $x_n=n$; б) $x_n=\frac{n^2}{n+1}$; в) $x_n=n^2$; г) $x_n=4^n$.

4. Напишите значения последовательностей при $n=1, 2, 3, 4$;

а) $x_n=\frac{n}{n+1}$; б) $x_n=\frac{n+1}{n}$; в) $x_n=\frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}$; г) $x_n=\frac{n+1}{n^2}$;

д) $x_n=\sqrt{n}$.

Существует ли предел каждой последовательности и чему он равен?

5. Найдите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+7)$;

д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-1}{2x^3+6x^2-5}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+3x-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-4}{3x^2+x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3+2x^2-3}{3x}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x-2}{x^3-3x^2+4}$.

6. Найдите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x/2)}{2x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x/3)}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$;

7. Дана функция $y=\dfrac{2x}{x-1}$ и два значения аргумента $x_1=1$, $x_2=2$.

1) Проверьте, является ли данная функция непрерывной или разрывной при данных значениях аргумента.

2) Найдите односторонние пределы в точках разрыва.

3) Постройте график функции на интервале $[-6,\ 6]$.

8. а) Найдите точку разрыва функции $y=\dfrac{4}{x-2}$. Вычислите $\lim\limits_{x\to 2-0} y$, $\lim\limits_{x\to 2+0} y$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ и постройте кривую по точкам $x=-2$; 0; 1; 3; 4; 6.

б) Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента. Найдите односторонние пределы и скачок функции в точке разрыва. Постройте график функции на интервале $[-4,\ 4]$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4 \text{ при } x\leqslant 2,\\ 6-2x \text{ при } x>2.\end{cases}$$

9. Дано $\ln N=2{,}7129$. Найдите $\lg N$ и число N.

10. Функция $x(t)=1000+500(1-2^{-t})$ соответствует непрерывному росту популяции бактерий от начального размера $x(0)=1000$ до предельного размера. Найдите предельный размер популяции.

11. **Численность популяций** $x(t)$ выражается функциями от t:

а) $x(t)=100+\dfrac{100}{1+t^2}$; в) $x(t)=90+10t^2$;

б) $x(t)=100+100e^{-t}$; г) $x(t)=10e^{t/10}$.

В каждом случае найдите предельные размеры популяций и начальную популяцию $x(0)$.

12. Популяция бактерий увеличивается от начального размера до размера $p(t)$ в момент t (дни) согласно уравнению

$$p(t)=\frac{1000e^t}{1+0{,}1\left(e^t-1\right)}.$$

Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$ — равновесную популяцию.

13. При вливании глюкозы ее содержание в крови больного спустя $t_ч$ составляет $c(t)=10-8e^{-t}$. Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} c(t)$ — равновесное состояние содержания глюкозы в крови.

Последовательность
$f(n) = f_n$ **– числовая функция**

Для любого $n \in N$

Ограниченная сверху
$f_n \leqslant M$

Ограниченная снизу
$f_n \geqslant m$

Ограниченная
$m \leqslant f_n \leqslant M$

$f_n = C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ постоянная

Бесконечно малые

$\lim f_n = 0$
|Если $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = \pm\infty \Leftrightarrow$
$\lim\limits_{n \to \infty} 1/f_n = 0$|

Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

$f_n > 0,\ \lim\limits_{n \to \infty} 1/f_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f_n = +\infty$

$f_n < 0,\ \lim\limits_{n \to \infty} 1/f_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f_n = -\infty$

Сходящаяся

$\lvert f_n - a\rvert < \varepsilon \Leftrightarrow f_n \to a$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f_n = a,\quad a \in R$
$\lim\limits_{n \to \pm\infty} (1 + 1/n)^n = e$ $e = 2{,}71828182\ldots$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Правый односторонний

$x_n \to a \quad x > a$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a+0) = A$

Левый односторонний

$x_n \to a,\quad x < a$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a-0) = A$

A – предел функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любой $x_n \to a$ ($x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$) соответствующие последовательности $y_n = f(x_n)$ сходятся к A

Бесконечно большие функции

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Бесконечно малые функции

$\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e \Leftrightarrow \lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

($f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \to a$)

1. $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
2. $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
3. $\lim cf(x) = c \lim f(x)$
4. $\lim f(x)/g(x) = \lim f(x)/\lim g(x)$ $\lim g(x) \neq 0$
5. $\lim [f(x)]^m = [\lim f(x)]^m$

Независимая переменная		*Функция*
x_0	начальное значение	$f(x_0)$
x_1	новое, наращенное	$f(x_1)$
$x_1 - x_0 = \Delta x$	приращение	$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

$f(x)$ непрерывна на $(a;\ b)$

$\Updownarrow$

Для любого $x \in (a,\ b)$

$f(x)$ непрерывна

Определение

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f(x_0)$ – число

непрерывна в точке x_0

3. Существуют $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$

Свойства

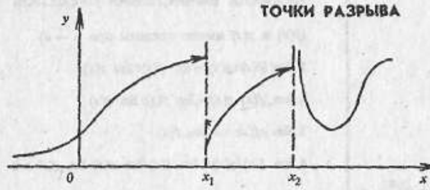
Основные элементарные функции непрерывны в точках $x \in D(f)$

Для замкнутых интервалов $[a,\ b]$

1. Если $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0,\ a < c < b$
2. Функция достигает наименьшего m и наибольшего значения M $(m \leqslant f(x) \leqslant M)$
3. Функция при переходе от одного значения к другому принимает все промежуточные значения

Элементарные функции непрерывны в точках $x \in D(f)$

ТОЧКИ РАЗРЫВА



x_1 – точка разрыва первого рода

$$f(x_1 - 0) \neq f(x_1 + 0)$$

x_2 – точка разрыва второго рода

$$f(x_2 + 0) = +\infty$$

Глава 7
Производная и дифференциал функции

В этой главе рассматривается одно из основных понятий математического анализа — понятие производной. Изложено понятие производной, способы ее вычисления, а также применение этого понятия при решении прикладных задач. Понятие производной в отличие от простых и естественных понятий функции и предела достаточно сложно, однако ввиду его многочисленных приложений, приводящих к краткому и изящному решению практических задач, оно заслуживает серьезного рассмотрения и овладения в объеме данного курса.

Всякий процесс или явление, протекающее во времени, характеризуется наряду с другими показателями такой важной характеристикой, как скорость. Можно говорить о задаче нахождения скорости неравномерного движения, о скоростях накопления биомассы, изменения линейных размеров растения, изменения урожайности (прирост урожайности на единицу затрат), химической реакции, нагревания и остывания нагретого тела и т. д. Все эти задачи приводят к однотипным вычислениям, результат которых называют производной.

К понятию производной приводит задача вычисления скорости неравномерного движения в данный момент, а также задача о проведении касательной к плоской кривой в некоторой ее точке. Впоследствии с помощью производной были решены многочисленные задачи физики, биологии, сельского хозяйства и других областей знания.

§ 7.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. Задача о скорости движения. Рассмотрим уравнение неравномерного прямолинейного движения

$$S=f(t), \tag{7.1.1}$$

определенное на множестве $(\alpha,\ \beta)$.
Зафиксируем последовательно два момента времени t_0 и t_1, $(t_{0,\,1}\in(\alpha,\ \beta))$ и обозначим $\Delta t=t_1-t_0$.

Средней скоростью движения, соответствующей некоторому промежутку времени Δt, называется отношение пройденного за этот промежуток пути ΔS к Δt:

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Средняя скорость не характеризует движение в определенные моменты времени. Для того чтобы найти скорость движения в данный момент t_0, необходимо уменьшать промежуток времени $\Delta t=t_1-t_0$. Чем меньше промежуток Δt, тем меньше средняя скорость отличается от скорости в данный момент, т. е. от мгновенной. Точное значение скорости $v_{\text{мгн}}$ равно пределу $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$, т. е.

$$v_{\text{мгн}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{7.1.2}$$

Так, для уравнения движения свободно падающего (в пустоте) тела, определяемого формулой $S=\frac{gt^2}{2}$, получим

$$v_{\text{мгн}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)^2-gt^2}{2}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{gt^2+2gt\Delta t+(\Delta t)-gt^2}{2}=gt.$$

Если $t=3$ с, то $v=9{,}8\cdot 3\approx 29{,}4$ м/с.

2. Задача о наклоне касательной. Пусть на множестве $(a,\ b)=\{x\colon\ a<x<b\}$ задана функция $y=f(x)$. Отметим в системе декартовых координат Oxy ее график в виде кривой K (рис. 79). Возьмем две точки $M_0(x_0;\ f(x_0))$ и $M_1(x_1;\ f(x_1))$ и проведем через них секущую M_0M_1; ее угол наклона обозначим через α_1. Тогда, если точка

M_1, двигаясь по кривой, будет приближаться к точке M_0, остающейся неподвижной, то положение секущей изменяется. Когда точка M_1 совместится с точкой M_0, секущая превратится в касательную. В этом случае $\lim\limits_{\substack{M_1 \to M_0 \\ x \to x_0}} \alpha_1 = \alpha_0$, где α_0 — угол наклона касательной. Из рис. 79 видно, что

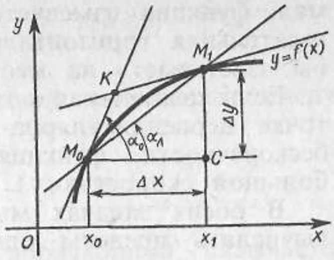


Рис. 79

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{|CM_1|}{|CM_0|} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Так как $x_1 - x_0 = \Delta x$ (приращение аргумента), $f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$ (приращение функции), то

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{7.1.3}$$

Осуществим предельный переход, кода $M_1 \to M_0$, и, следовательно, $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\substack{M_1 \to M_0 \\ \Delta x \to 0}} \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \lim_{\substack{\alpha_1 \to \alpha_0 \\ \Delta x \to 0}} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_0. \tag{7.1.4}$$

Учитывая, (7.1.3), имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{7.1.5}$$

Итак, тангенс угла наклона $\operatorname{tg} \alpha$ касательной равен пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Тангенс угла наклона касательной показывает, во сколько раз быстрее изменяется функция по сравнению с изменением аргумента в точке касания, т. е. характеризует скорость процесса или явления, описываемого кривой K. Зная тангенсы углов наклона касательных к графику функции в двух различных точках, можно сравнивать «крутизну подъема» графика. Так, в точке $(x_0, f(x_0))$ (см. рис. 79) касательная расположена «круто», т. е. тангенс угла наклона большой, функция изменяется быстро, тогда как в точке $(x_1, f(x_1))$ тангенс угла наклона касательной мал, функция изменяется медленно. В точках, где касательная горизонтальна ($\operatorname{tg}\alpha_0=0$), функция как бы «застывает» на месте.

Если касательная к графику функции в некоторой точке перпендикулярна оси Ox, то наклон равен бесконечности, функция изменяется с бесконечно большой скоростью.

В обеих задачах мы пришли к необходимости вычислять пределы одного типа. Чтобы придать общность рассуждениям, отвлечемся от конкретного смысла рассматриваемых примеров и сформулируем задачу в общем виде.

3. Производная функции.

Пусть на множестве $(a,\ b)$ задана функция $y=f(x)$. Будем считать, что $f(x)$ допускает существование конечных пределов вида $\lim\limits_{x_1\to x_0}\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ в любой точке множества $(a,\ b)$, поэтому индексы 1 и 0 опустим, полагая, что $x_0=x$, $x_1=x+\Delta x$.

Выполним следующие операции.

1) Придадим аргументу x приращение Δx, получим новое значение аргумента $x+\Delta x$ и подставим его в функцию. В результате имеем новое значение функции $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

2) Вычислим приращение функции Δy. Для этого из нового значения функции вычтем ее первоначальное значение

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

3) Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

которое определит среднюю скорость изменения функции при изменении аргумента на единицу.

4) Найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (7.1.6)$$

Определение. *Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, т. е. предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Для обозначения производной используют следующие краткие записи:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Действие нахождения производной называется *дифференцированием функции*. Перечень приведенных операций называется *общим правилом дифференцирования*. Значение аргумента x, которое фиксируется на первой операции, есть точка дифференцирования.

Если функция при данном значении x имеет производную, т. е. если $y'(x)$ — число, то говорят, что функция дифференцируема в точке x.

Функция, дифференцируемая во всех точках множества $(a,\ b)=\{x\colon\ a<x<b\}$, называется *дифференцируемой на этом множестве*.

● **Пример.** Проверить, дифференцируема ли функция $y=x^3$ в точке $x=2$.

Решение. Имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2;\quad y'(2) = 3\cdot 2^2 = 12.$$

Таким, образом заданная функция дифференцируема в точке $x=2$. ●

§ 7.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРИМЕРЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРОИЗВОДНОЙ В БИОЛОГИИ И ЭКОНОМИКЕ

1. Геометрический смысл производной. Учитывая равенство (7.1.5) и определение производной (7.1.6), делаем вывод, что производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$, т. е. угловому коэффициенту касательной

$$f'(x_0) = k. \tag{7.2.1}$$

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

[ср. с формулой (2.5.3)].

● **Пример.** Найти угловые коэффициенты касательных к графику функции $y=x^2$ в точках $A(2; 4)$ и $B(3; 9)$.

Решение. Имеем $k_1=f'(2)$, $k_2=f'(3)$, далее получаем

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x;$$

$$f'(2)=4,\ f'(3)=6. \text{ ●}$$

В точке B «крутизна» графика в $6/4=1{,}5$ раза больше, чем в точке A.

2. Механический смысл производной. Учитывая равенство (7.1.2) и определение производной, заключаем, что производная от пути по времени равна скорости неравномерного прямолинейного движения в данный момент t_0, т. е. мгновенной скорости при $t=t_0$.

● **Пример.** Пусть движение определяется уравнением $S=2t^2-t+1$ (t, с; S, м). Найти скорость движения, при $t=5$ с. В какой момент времени скорость была равна нулю?

Получаем

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(t+\Delta t)^2-(t+\Delta t)+1-2t^2+t-1}{\Delta t}=4t-1,$$

$$v(5)=4\cdot 5(\text{м/с}).$$

Если $v=0$, то $4t-1=0\Rightarrow t=1/4$ с. ●

3. Биологический смысл производной. Пусть зависимость между числом особей популяции микроорганизмов y и временем t (с) ее размножения задана уравнением

$$y=p(t).$$

Пусть Δt — промежуток времени от некоторого начального значения t до $t+\Delta t$. Тогда $y+\Delta y=p(t+\Delta t)$ — новое значение численности популяции, соответствующее моменту $t+\Delta t$, а $\Delta y=p(t+\Delta t)-p(t)$ — изменение числа особей микроорганизмов.

Отношение $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ является средней скоростью размножения или, как принято говорить, средней производительностью жизнедеятельности популяции. Вычисляя $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$, получаем $y' = p'(t)$, или производительность жизнедеятельности популяции микроорганизмов в момент времени t.

● **Пример.** Пусть популяция в момент t насчитывает $p(t)$ особей (t — в с) [7]

$$p(t) = 3000 + 100t^2.$$

Найти скорость роста популяции: *а)* в произвольный момент t; б) в момент $t = 1$ с.

Решение. Имеем

$$v = p'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3000 + 100(t+\Delta t)^2 - 3000 - 100t^2}{\Delta t} = 200t, \quad p'(1) = 200. \; ●$$

4. Пример из экономики. Возьмем производственную функцию, определяющую соответствие между величиной затрат x и величиной получаемого продукта

$$y = f(x).$$

Обозначим через Δx изменение затрат от некоторого значения x до величины $x + \Delta x$. Тогда $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ — новое значение массы продукта, соответствующее затратам в размере $x + \Delta x$, а $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ — добавочный продукт, полученный в результате роста затрат на величину Δx. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения величины продукта, или средняя отзывчивость производственной функции, соответствующая величине затрат в размере Δx.
Вычислим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Этот предел определяет скорость изменения массы продукта при данной величине затрат (массу продукта, получаемую на единицу затрат) или, кратко, отзывчивость производственной функции при данном уровне затрат. В этом и состоит экономический смысл производной. В экономической литературе $f'(x)$ называют *предельным продуктом*, считая, что $f(x)$ — масса продукта, x — затраты на его производство.

● **Пример.** Привес животного y (кг) в зависимости от скормленной массы кукурузы c (кг) (при 12%-ном уровне содержания белка в рационе) определяется формулой [23]

$$y=-3{,}062+0{,}433\ c-0{,}000\ c^2.$$

Найти величину привеса (отзывчивость), приходящуюся на единицу массы зерна кукурузы, если масса скормленного зерна $c=50$ кг.

Решение: Имеем:

1) Вычислим значение функции при условии, что масса скормленного зерна равна $c+\Delta c$. Имеем

$y+\Delta y=-3{,}062+0{,}433\,(c+\Delta c)-0{,}0001\,(c+\Delta c)^2$.

2) Найдем Δy. Получим

$\Delta y=-3{,}062+0{,}433\,(c+\Delta c)-0{,}0001\,(c+\Delta c)^2+3{,}062-0{,}433c+$ $+0{,}0001\,c^2=0{,}433\,\Delta c-0{,}0002c\,\Delta c+0{,}0001\,(\Delta c)^2$.

3) Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta c}=0{,}433-0{,}0002c-0{,}0001\,\Delta c$.

4) Найдем производную $y'=\lim\limits_{\Delta c\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta c}=\lim\,(0{,}433-0{,}0002c-$ $-0{,}0001\,\Delta c)=0{,}433-0{,}0002c$.

5) Определим $y'(50)=0{,}433-0{,}0002c=0{,}423$ кг. ●

§ 7.3. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Вычисление производной функции по ее определению приводит к громоздким преобразованиям. Используя общее правило дифференцирования, можно получить результаты, позволяющие значительно упростить нахождение производных.

Итак, зная, что производная функции

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

где $f(x+\Delta x)$ — новое (наращенное) значение функции; $f(x)$ — исходное (начальное) значение функции; $f(x+\Delta x)-f(x)$ — приращение функции; Δx — приращение аргумента; выведем ряд формул для дифференцирования функций.

1. Производная постоянной величины. Пусть дана функция $f(x)=C$. Тогда $f(x+\Delta x)=C$,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C-C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Производная постоянной величины равна нулю

$$(C)' = 0. \tag{7.3.1}$$

Поясним формулу (7.3.1). График функции $f(x) = C$ — прямая, параллельная оси Ox. Касательная к графику функции совпадает с самим графиком, значит, $y' = 0$.

2. Дифференцирование функции $y = x$. Пусть $y = x$, тогда $\Delta y = \Delta x$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Таким образом, *производная функции $y = x$ равна единице*:

$$y' = (x)' = x' = 1. \tag{7.3.2}$$

3. Дифференцирование суммы и разности двух функций. Пусть $y = u(x) + v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — дифференцируемые на множестве X функции. Имеем

$$y' = [u(x) + v(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Для функции $y = u(x) - v(x)$, рассуждая аналогично, получаем

$$y' = u'(x) - v'(x),$$

или, кратко,

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

Итак, *производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных*. Правило легко распространить и на случай суммы большего числа функций, а именно:

$$(u(x) + v(x) - w(x)) = u'(x) + v'(x) - w'(x). \tag{7.3.3}$$

4. Дифференцирование произведения. Пусть $y=u(x)\cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — две дифференцируемые на множестве X функции. Если x получает приращение Δx, то его новое значение равно $x+\Delta x$, новое значение функции $y+\Delta y$, функции $u(x)$ и $v(x)$ получат соответственно приращения Δu и Δv и их новые значения таковы: $u+\Delta u$ и $v+\Delta v$, $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$. Далее имеем

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-u\cdot v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right)=uv'+vu'+u'\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как для непрерывной функции $v(x)$ $\Delta v\to 0$, если $\Delta x\to 0$. Следовательно,

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x). \tag{7.3.4}$$

Итак, *производная произведения равна произведению производной первого сомножителя на второй, плюс произведение производной второго сомножителя на первый.* В случае большего числа перемножаемых дифференцируемых функций имеем

$$\begin{aligned}(uvw)'=[(uv)\cdot w]'=(uv)'w+w'(uv)=\\ =u'ww+v'uw+w'uv,\end{aligned} \tag{7.3.5}$$

т. е. *производная произведения нескольких сомножителей равна сумме произведений производной каждой функции на все остальные.* В частности, если $y=x^n=$ $=\underbrace{x\cdot x\cdot x\ldots x,}_{n\text{ раз}}$ то

$$y'=x'\underbrace{(x\cdot x\cdot x\ldots x)}_{n-1\text{ раз}}+xx'\underbrace{(x\cdot x\cdot x\ldots x)}_{n-2\text{ раз}}+\ldots+$$
$$+\underbrace{(x\cdot x\cdot x\ldots x)}_{n-1\text{ раз}}x'=nx^{n-1}.$$

Мы получили формулу для дифференцирования степенной функции при n целом и положительном.

Так, если $y=x^5$, то $y'=5x^4$, или $(x^5)'=5x^4$.

Следствие. Пусть $y = Cf(x)$, C — постоянная величина. Учитывая правило дифференцирования произведения (7.3.4), имеем

$$(Cf(x))' = C'f(x) + Cf'(x),$$

но $C' = 0$, поэтому

$$(Cf(x))' = Cf'(x). \tag{7.3.6}$$

Следовательно, *постоянный множитель можно выносить за знак производной.* Например, $y = \sqrt{2}x^2 \Rightarrow y' = 2\sqrt{2}x$.

5. Дифференцирование частного. Пусть $y = \frac{u(x)}{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ — функции аргумента x, имеющие производные $u'(x)$ и $v'(x)$, $v(x) \neq 0$. Далее вместо $u(x)$ и $v(x)$ будем писать u и v. Если x получит приращение Δx, то и функции y, u, v также получат приращения Δy, Δu, Δv соответственно, а их «наращенные» значения равны $y + \Delta y$, $u + \Delta u$, $v + \Delta v$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

При вычислении $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v\Delta v$ было учтено, что v — ограниченная функция и что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, так как v — непрерывная функция.

Окончательно имеем,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \tag{7.3.7}$$

Производная дроби равна производной числителя, умноженной на знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель, и все это деленное на квадрат знаменателя.

● **Пример.** Найти производную функции $y = \frac{5x^2}{2x^3 + 4}$ и вычислить ее значение при $x = 2$.

Решение. Имеем

$$y'=\left(\frac{5x^2}{2x^3+4}\right)'=\frac{(5x^2)'(2x^3+4)-(2x^3+4)'5x^2}{(2x^3+4)^2}=$$

$$=\frac{10x(2x^3+4)-6x^2\cdot 5x^2}{(2x^3+4)^2}=\frac{20x^4+40x-30x^4}{(2x^3+4)^2}=\frac{-10x^4+40x}{(2x^3+4)^2};$$

$$y'(2)=\frac{-10\cdot 2^4+40\cdot 2}{(2\cdot 2^3+4)^2}=-\frac{80}{400}=-0{,}2. \bullet$$

Следствие. Пусть дана функция $y=x^n$, n — целое и отрицательное. Обозначим $n=-m$, $m=-n$, $x^n=x^{-m}=\frac{1}{x^m}$. Имеем

$$(x^n)'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=\frac{1'x^m-mx^{m-1}}{x^{2m}}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=$$

$$=-mx^{-2m+m-1}=-mx^{-m-1}.$$

Заменим теперь m на $-n$, тогда $(x^n)'=nx^{n-1}$. Получен тот же результат, что и в случае, когда n — целое и положительное.

6. Производная сложной функции. Определение сложной функции дано в п. 5.5. Умение распознавать сложную функцию и разбивать ее на несколько простых достигается решением большого количества примеров. Например, функцию $y=(x^4-2x^2)^9$ можно «разделить» так: $y=u^9$, $u=x^4-2x^2$; $y=\cos 2x \to y=\cos u$, $u=2x$.

Пусть даны две функции $u=\varphi(x)$ и $y=f(u)$. При этом множество значений первой функции входит в область определения второй. Положим, что функция $u=\varphi(x)$ дифференцируемая в точке x, а $y=f(u)$ дифференцируемая в точке u, соответствующей точке x. Искомая производная y'_x есть предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$. Перепишем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Находим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

В первом сомножителе правой части в равенстве $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ в силу непрерывности функции $u=\varphi(x)$ заменим условие $\Delta x \to 0$ эквивалентным ему условием $\Delta u \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Индекс u означает, что производная берется по промежуточной переменной.

Второй из сомножителей по определению производной равен u'_x. Следовательно,

$$y'_x = y'_u u'_x. \qquad (7.3.8)$$

Итак, *производная сложной функции равна произведению производных функций, из которых она состоит.*

Замечание. При доказательстве формулы (7.3.8) предполагалось, что $\Delta u \neq 0$ в окрестности точки x.

Формулу (7.3.9) можно пояснить простым рассуждением: y'_u — скорость изменения функции при данном значении u, u'_x — скорость изменения u при данном значении x; если y изменяется, например, в 3 раза быстрее, чем u, а u изменяется в 2 раза быстрее, чем x, то ясно, что y изменяется в $3 \cdot 2 = 6$ раз быстрее, чем x.

В частности, если $y=u^n$, $u=\varphi(x)$, то

$$y'_x = nu^{n-1} u'_x. \qquad (7.3.9)$$

● **Пример.** Найти производную функции $y=(x^4-2x^2)^9$ и вычислить ее значение при $x=-1$.

Решение. Эта функция сложная, последним действием вычисления значения функции является действие возвышения в степень. В девятую степень возводится функция $\varphi(x)=x^4-2x^2$. Разбиваем функцию $y=(x^4-2x^2)$ на цепочку простых: $y=u^9$, $u=x^4-2x^2$. Дифференцируя $y=(x^4-2x)^9$ прежде всего как степенную функцию, получаем $y'_u=9(x^4-2x)^8$. Остается умножить y'_u на $u'_x=(x^4-2x^2)'=4x^3-4x$.

Окончательно имеем

$$y'_x=9(x^4-2x^2)^8(4x^3-4x),$$
$$y'(-1)=9((-1)^4-2(-1)^2)(4(-1)^3-4(-1)).$$

Второй сомножитель равен $-4+4=0$, поэтому $y'(-1)=0$. Вычисляем $y(-1)=((-1)^4+2(-1)^2)^9=-1$. В точке $(-1;\ 1)$ касательная к графику данной функции параллельна оси Ox. При достаточном навыке запись y'_u и u'_x не используют, а пишут сразу:

$$y'=9(x^4-2x^2)^8(x^4-2x^2)'=9(x^4-2x^2)^8(4x^3-4x). \quad ●$$

7. Дифференцирование тригонометрических функций.

1) *Производная функции* $y=\sin x$.

Применяем общее правило дифференцирования

I. $$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x).$$

II. Вычитаем из нового значения функции ее начальное значение

$$\begin{array}{r} y+\Delta y=\sin(x+\Delta x) \\ -\ y=\sin x \\ \hline \Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x. \end{array}$$

Преобразуем правую часть равенства по формуле разности синусов

$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

III. Вычисляем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}.$$

IV. Переходим к пределу при $\Delta x\to 0$, применяя теорему о пределе произведения функций:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2};$$

далее находим

а) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=\cos x;$

б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=1$ (первый замечательный предел).

Окончательно имеем

$$(\sin x)'=\cos x. \qquad (7.3.10)$$

2) *Производная функции* $y=\cos x$.

Преобразуем данную функцию по формуле приведения. Имеем

$$\cos x=\sin(\pi/2-x).$$

Тогда $(\cos x)'=\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)'$. Обозначив $\pi/2-x=u$ и применив формулу (7.3.8), получим

$$(\cos x)' = (\sin u)' = \cos u u' = \cos(\pi/2 - x)(\pi/2 - x)' =$$
$$= -\cos(\pi/2 - x).$$

Использовав те же формулы приведения $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \right.$ $\left. = \sin x\right)$, окончательно запишем

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad (7.3.11)$$

Если дана функция $y = \cos v$, $v = \varphi(x)$, то

$$(\cos v)' = -\sin v \cdot v'. \qquad (7.3.11а)$$

Вывод формул для производных функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ в качестве упражнения предоставляем читателю. Докажите, что:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 x}; \qquad (7.3.12)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}. \qquad (7.3.13)$$

8. Производная функции $y = \ln x$. Воспользуемся общим правилом дифференцирования. Имеем:

I. $y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$;

II. $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$;

III. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

Умножив и разделив правую часть равенства на x, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Здесь использовано следующее свойство логарифмов: $a \ln b = \ln b^a$. Обозначим $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$. Если $\Delta x \to 0$, то и $\alpha \to 0$.

IV. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \alpha \to 0}} \left(\frac{1}{x} \ln(1 + \alpha)^{1/\alpha}\right) =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \lim\limits_{\alpha \to 0} \ln(1 + \alpha)^{1/\alpha}$.

Первый из сомножителей

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Второй сомножитель

$$\lim_{\alpha \to 0} \ln(1+\alpha)^{1/\alpha} = \ln \lim_{\alpha \to 0} \ln(1+\alpha)^{1/\alpha} = \ln e = 1.$$

Таким образом,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (7.3.14)$$

Если $y = \ln u$, $u = \varphi(x)$, то по правилу дифференцирования сложной функции (7.3.8)

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{u'}{u}. \qquad (7.3.14\text{а})$$

9. Производная функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Перейдем от основания a к основанию e по известной из школьного курса формуле

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Тогда

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

Таким образом,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (7.3.15)$$

В случае сложной функции

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}. \qquad (7.3.15\text{а})$$

Производная функции $\mathbf{y = e^x}$. По определению показательной функции из того, что $y = e^x$, следует, что $x = \ln y$. Найдем производные по аргументу x от обеих частей этого равенства. Имеем $x' = (\ln y)'$, или $1 = \frac{1}{y} y'$, откуда $y' = y$. Учитывая, что $y = e^x$, получаем

$$y' = e^x.$$

Окончательно имеем

$$(e^x)' = e^x. \tag{7.3.16}$$

Для сложной функции $y = e^u$

$$(e^u) = e^u \cdot u'. \tag{7.3.16a}$$

Пусть теперь дана функция $y = a^x$. Имеем

$$x = \log_a y, \quad x' = \frac{1}{y \ln a} y', \quad y' = y \ln a. \tag{7.3.17}$$

10. Производные обратных тригонометрических функций. Пусть дана функция $y = \arcsin x$, определенная на множестве $[-1, 1]$, причем, как известно, $y \in \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Так как $y = \arcsin x$, то $x = \sin y$.

Найдем производные по аргументу x от обеих частей этого равенства: $x' = (\sin y)'_x$, или $1 = \cos y y'$, откуда $y' = \frac{1}{\cos y}$, но $\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$.

В интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ функция $\cos y > 0$, поэтому при замене $\cos y$ на $\pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$ берем знак «+». Окончательно получаем

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{7.3.18}$$

Нетрудно показать, что если $y = \arccos x$, то

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{7.3.19}$$

Для сложных функций имеем

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}; \tag{7.3.18a}$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}. \tag{7.3.19a}$$

Остановимся теперь на выводе производных функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$. Поскольку $y = \operatorname{arctg} x$, имеем $x = \operatorname{tg} y$. Найдем производные по аргументу x от обеих частей этого равенства. Имеем $(x)' = (\operatorname{tg} y)'$, или $1 = \frac{1}{\cos^2 y} y'$, откуда $y' = \cos^2 y$. Учитывая, что $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$, получаем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (7.3.20)$$

Несложно доказать, что если $y = \operatorname{arcctg} x$, то

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (7.3.21)$$

В случае сложных функций формулы (7.3.20) и (7.3.21) имеют вид

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}; \qquad (7.3.20\text{a})$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}. \qquad (7.3.21\text{a})$$

11. Логарифмическое дифференцирование. *Логарифмической производной* называется производная от логарифма функции по независимой переменной.

Если дана функция $y = f(x)$, $y > 0$, то $\ln y = \ln f(x)$ и

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} y' = \frac{y'}{y}. \qquad (7.3.22)$$

Теперь можно легко доказать формулу дифференцирования степенной функции $y = x^\alpha$, где α — действительное число. Найдем натуральный логарифм от обеих частей равенства $y = x^\alpha$:

$$\ln y = \alpha \ln x.$$

Продифференцируем по x левую и правую части этого равенства, учитывая (7.3.22). Получаем $\frac{y'}{y} = \alpha \frac{1}{x}$, откуда

$$y' = y\alpha \frac{1}{x}. \qquad (7.3.23)$$

Вместо y подставим в (7.3.23) его выражение через x

$$y' = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}. \qquad (7.3.24)$$

Как видим, получена та же формула, что и для случая, когда показатель степени целое число.

Таблица формул дифференцирования

№ п/п	Вид функции	Формулы для дифференцирования элементарных функций	Формулы для дифференцирования сложных функций
1	Постоянная функция $y=C$	$(C)'=0$	$(C)'=0$
2	Степенная функция $y=x^\alpha$	$(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$
3	Показательная функция		
	$y=a^x$	$(a^x)'=a^x \ln a$	$(a^u)'=a^u u' \ln a$
	$y=e^x$	$(e^x)=e^x$	$(e^u)'=e^u u'$
4	Логарифмическая функция		
	$y=\log x$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)'=\frac{u'}{x \ln a}$
	$y=\ln x$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$
5	Тригонометрические функции		
	$y=\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u \cdot u'$
	$y=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\, u'$
	$y=\operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$
	$y=\operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$
6	Обратные тригонометрические функции		
	$y=\arcsin x$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
	$y=\arccos x$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
	$y=\operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}$
	$y=\operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}$

§ 7.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

В приложениях математики к решению конкретных задач приходится иметь дело с величинами, числовые значения которых получены путем измерений и, следовательно, точное их значение неизвестно. Если исходные данные содержат погрешности измерений, то применение точных методов вычислений нецелесообразно. Для упрощения и облегчения вычислений в таких случаях лучше использовать приближенные методы. Теоретической основой одного из простейших приемов приближенных вычислений является понятие дифференциала. Мы уже использовали (см. гл. 1) приближенные вычисления, заменяя некоторую плоскую кривую отрезком прямой. Ясно, что чем меньше расстояние между двумя точками, лежащими на дуге, тем точнее эта часть кривой представляется прямой линией.

Пусть дана дифференцируемая на (a, b) функция $y=f(x)$, $x_0 \in (a, b)$. Запишем определение производной функции

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

При малых $|\Delta x|$ само отношение $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ сколь угодно мало отличается от $f'(x_0)$ [см. (6.5.2)], т. е. можно принять, что

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0),$$

или

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (7.4.1)$$

Левая часть (7.4.1) есть приращение функции Δy, поэтому имеем

$$\Delta y \approx f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (7.4.2)$$

Это приближенное значение приращения функции (чем меньше Δx, тем точнее будет вычислено Δy) называется *дифференциалом функции* и обозначается dy:

$$dy=f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (7.4.3)$$

Определение. *Дифференциалом функции называется произведение производной функции на приращение независимой переменной.*

Если $y=x$, то $dy=dx=1\cdot\Delta x$. Будем называть дифференциалом независимой переменной дифференциал функции $y=x$. Тогда приращение независимой переменной и ее дифференциал равны между собой: $\Delta x=dx$, поэтому

$$dy=f'(x_0)\,dx. \qquad (7.4.4)$$

Из (7.4.1) и (7.4.3) получаем

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy, \qquad (7.4.5)$$

или, учитывая (7.4.4),

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,dx. \qquad (7.4.5а)$$

Следовательно, новое (наращенное) значение функции приближенно равно ее начальному значению плюс дифференциал функции. Формулы (7.4.2) и (7.4.5а) применяют в приближенных вычислениях.

Вычислять дифференциалы функций достаточно просто. Следует найти производную функции и умножить ее на дифференциал аргумента.

1. Геометрический смысл дифференциала. Пусть дана функция $y=f(x)$. Построим ее график (рис. 80). Из ΔNCM_0 имеем

$$\frac{NC}{M_0C}=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)\Leftrightarrow NC=f'(x_0)\,M_0C;$$

$$M_0C=\Delta x,\quad NC=f'(x_0)\,\Delta x\Leftrightarrow NC=dy.$$

Из рис. 80 видно, что NC есть изменение ординаты касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0,\,f(x_0))$, при изменении x_0 на величину Δx. В этом состоит геометрический смысл дифференциала.

Замена приращения функции ее дифференциалом означает замену части графика функции $\overset{\frown}{M_0M}$ отрезком касательной M_0N. Чем меньше $|\Delta x|$, тем меньше касательная отклоняется от графика функции, тем точнее приближенная формула (7.4.5а).

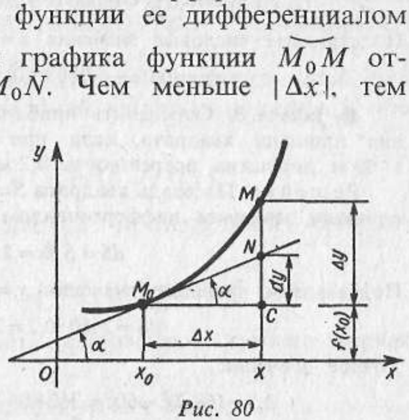


Рис. 80

● **Задача 1.** Вычислить приближенно объем сферического слоя, если известно, что радиус внутренней поверхности $R=0{,}5$ м, а толщина равна 0,1 м.

Решение. Объем шара

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Объем сферического слоя есть приращение объема шара, вызванное изменением радиуса от 0,5 до 0,6 м. Приращение объема шара заменяем дифференциалом:

$$\Delta V\approx dv=\frac{4}{3}\pi 3R^2dR=4\pi R^2dR.$$

Подставим числовые значения $R=0{,}5$, $dR=0{,}1$. Имеем

$$\Delta V\approx 4\cdot 3{,}14\cdot 0{,}25\cdot 0{,}01=0{,}314(\text{м}^3).$$

Точное значение объема слоя

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(0{,}60^3-0{,}5^3)=0{,}381(\text{м}^3).$$

Относительная ошибка

$$\frac{|0{,}314-0{,}381|}{0{,}381}=\frac{0{,}067}{0{,}381}=0{,}174. \bullet$$

● **Задача 2.** Закон накопления сухой биомассы у винограда сорта Шасла определяется уравнением

$$y=0{,}03x=0{,}0004x^2, \tag{7.4.6}$$

где x — число дней от распускания почек, y — накопление биомассы в кг на 1 куст. Равенство (7.4.6) отражает зависимость величин x и y как средний результат массовых наблюдений. Выяснить, как изменится сухая биомасса куста при изменении x от 50 до 60 дн?

Решение. Изменение биомассы — это приращение биомассы, заменим его дифференциалом:

$$\Delta y\approx dy=(0{,}03x-0{,}0004x^2)'\,dx=(0{,}03-0{,}0008x)\,dx.$$

Подставляем числовые значения $x=50$, $dx=10$. Имеем

$$dy=(0{,}03-0{,}0008\cdot 50)\cdot 10=0{,}01(\text{кг}).$$

● **Задача 3.** Определить приближенно погрешность вычисления площади квадрата, если при измерении длины стороны в 60 м допущена погрешность 0,2 м.

Решение. Площадь квадрата $S=x^2$. Погрешность вычисления площади заменяем дифференциалом площади:

$$dS=S'dx=2xdx.$$

Подставляем числовые значения $x=60$, $dx=0{,}2$. Имеем

$$dS=2\cdot 60\cdot 0{,}2=24\ (\text{м}^2).$$

Точное значение

$$\Delta S=(60{,}2)^2-60^2=3624{,}04-3600=24{,}04\ (\text{м}^2).$$

Относительная погрешность

$$\frac{|24{,}04-24|}{24}=\frac{0{,}04}{24}=0{,}0017. \ ●$$

● **Задача 4.** Опытным путем установлено, что массу животного при установившемся режиме откорма можно считать функцией времени откорма t, $t \geqslant 49$ дн,

$$P=5\sqrt{t},$$

где P — масса, кг, t — время, дн. Найти привес животного за 10 дн, начиная с 64-го дня кормления.

Решение. Привес животного равен приращению массы ΔP, которое заменяем дифференциалом dP:

$$\Delta P \approx dP = P'dt = \frac{5}{2\sqrt{t}}\,dt, \quad dP=\frac{5\cdot 10}{2\cdot 8}=\frac{50}{16}=3{,}125 \text{ (кг)}. \ ●$$

2. Вычисление дифференциалов. Подобно таблице производных, можно составить таблицу дифференциалов основных элементарных функций.

1. $d(C)=C'dx=0\cdot dx=0.$
2. $d(u\pm v)=(u'\pm v')\,dx=u'dx\pm v'dx=du\pm dv.$
3. $d(u\cdot v)=(u\cdot v)'dx=u'dv+v'du.$ (7.4.7)
4. $d(\ln x)=(\ln x)'\,dx=\dfrac{dx}{x}.$
5. $d(\sin x)=(\sin x')\,dx=\cos x\,dx$ и т. д.

§ 7.5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Производная $y'=f'(x)$ является в общем случае новой функцией от x, поэтому от нее можно при необходимости взять производную.

Определение. *Производная от производной функции называется производной второго порядка и обозначается* y'':

$$y''=(y')'=(f'(x))'=f''(x).$$

Точно также определяется производная третьего порядка.

$$y'''=(y'')'=(f''(x))'=f'''(x).$$

● **Пример.** $y=x^4$. Найти производную третьего порядка в точке $x=1/8$. Имеем

$$y'=(x^4)'=4x^3, \quad y''=(4x^3)'=12x^2,$$

$$y''' = (12x^2)' = 24x, \quad y'''\left(\frac{1}{8}\right) = 24 \cdot \frac{1}{8} = 3. \bullet$$

Механический смысл производной второго порядка. Было показано, что первая производная от пути по времени есть скорость движения в данный момент. Если движение равномерное, то скорость постоянна и, следовательно, тело движется без ускорения, так как ускорение — это изменение скорости в единицу времени.

Если движение неравномерное, то скорость зависит от времени, т. е. является функцией времени: $v = \varphi(t)$. Например, для уравнения $S = 5t^2 - 6t + 1$ скорость $v = S' = 10t - 6$ — функция времени, тело движется с ускорением. Среднее ускорение за промежуток времени от t, до $t + \Delta t$ равно

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Ускорение в данный момент определяется аналогично вычислению скорости в данный момент

$$a_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Это предел отношения приращения функции к приращению аргумента t при $\Delta t \to 0$, т. е. производная от скорости по времени

$$a_{\text{мгн}} = (v)' = v'.$$

Подставим вместо v его значение $v = S'$. Имеем

$$a_{\text{мгн}} = (S')' = S''.$$

Вторая производная от пути по времени равна ускорению движения в данный момент.

● **Пример.** Дано уравнение колебательного движения точки

$$S = A \sin kt, \tag{7.5.1}$$

где A — амплитуда колебаний, k — частота, t — величина угла в радианах. Тогда скорость

$$v = S' = Ak \cos kt; \tag{7.5.2}$$

ускорение

$$a = S'' = -Ak^2 \sin kt. \tag{7.5.3}$$

Из (7.5.1) — (7 5.3) видно, что путь, пройденный телом, которое совершает колебательное движение, скорость и ускорение движения изменяются периодически и с одинаковым периодом колебания $2\pi/k$.

§ 7.6. ТЕОРЕМЫ О ВОЗРАСТАНИИ И УБЫВАНИИ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

В § 5.3 дано определение возрастающей и убывающей функций. На рис. 81 изображен график возрастающей, а на рис. 82 — график убывающей функции. Из рис. 81 видно, что если функция возрастает, то угол наклона касательной к любой точке графика острый и изменяется на множество $[0, \pi/2)$, $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 0$ и $y' \geqslant 0$. Если функция убывает, то, наоборот, угол наклона касательной в любой точке кривой тупой, т. е. изменяется на множестве $(\pi/2, \pi)$; $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 0 \Rightarrow y' \leqslant 0$.

Теорема 1. Необходимый признак возрастания (убывания) функции. *Если дифференцируемая функция возрастает (убывает) на некотором интервале, то ее производная неотрицательна (неположительна) на этом интервале.*

Теорема 2. Достаточный признак возрастания (убывания) функции. *Если производная функции на некотором интервале положительна (отрицательна), то функция возрастает (убывает) на этом интервале.*

Строгое доказательство этих теорем дается в более подробных курсах математического анализа, например [7].

● **Пример.** Найти интервалы возрастания и убывания функций: 1) $y=-3x$; 2) $y=2x^2$; 3) $y=\frac{1}{4}x^3$.

Если $y=-3x$, то $y'=-3$. Производная не зависит от x, следовательно, $y=-3x$ убывает при всех значениях x (рис. 83). Если $y=2x^2$, то $y'=4x$. Решаем неравенство: $4x<0 \Rightarrow x<0$ — функция убывает; если $4x>0$, $x>0$, то функция возрастает (рис. 84). Если

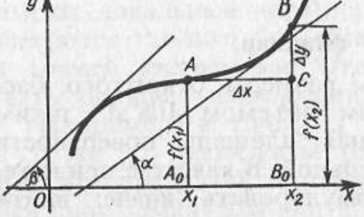


Рис. 81

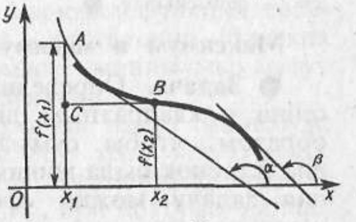


Рис. 82

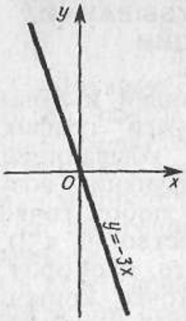


Рис. 83

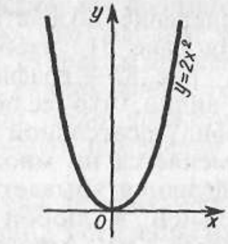


Рис. 84

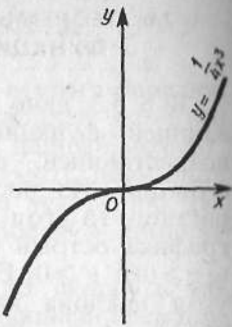


Рис. 85

Рис. 86

$y=\frac{1}{4}x^3$, то $y'=\frac{3}{4}x^2$, $y'\geqslant 0$ при любых значениях x. Функция возрастает всюду (рис. 85).

Рассмотрим более сложный **пример.** Определить поведение функции $y=2x^3-3x^2-12x+7$ в точках $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=4$.

В какой из этих точек функция изменяется с «самой большой» и в какой с **«самой малой» скоростью?**

Решение. Имеем

$$f'(x)=6x^2-6x-12.$$

Функция возрастает, если $6x^2-6x-12>0$, или $x^2-x-2>0$. Неравенство решаем методом интервалов (рис. 86). Корни квадратного трехчлена $\varphi(x)=x^2-x-2$ таковы: $x_1=-1$, $x_2=2$. Вычисляем $\varphi(-2)=4$, $\varphi(0)=-2$, $\varphi(3)=4$. Поэтому на интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$ функция возрастает, на интервале $(-1, 2)$ функция убывает.

Решаем вторую часть задачи. Вычислим $f'(2)$, $f'(0)$, $f'(1)$ и $f^4(4)$. Имеем $f'(2)=6\cdot 2^2-6\cdot 2+12=0$; $f'(0)=-12$; $f'(1)=6\cdot 1^2-6\cdot 1-12=-12$, $f'(4)=6\cdot 4^2-6\cdot 4-12=60$.

При $x=4$ скорость изменения функции наибольшая, при $x=2$ — наименьшая. ●

Максимум и минимум функции.

● **Задача.** Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 108 м³ таким образом, чтобы суммарная площадь поверхности дна и стенок была минимальной. В качестве приложения задачу можно сформулировать иначе: найти такие размеры силосного сооружения с квадратным

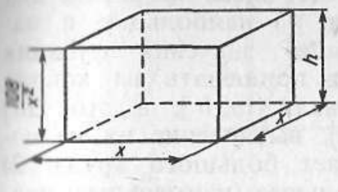


Рис. 87

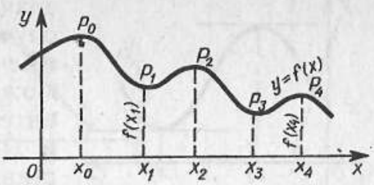


Рис. 88

дном, чтобы при заданном объеме 108 м^3 на облицовку дна и стенок было израсходовано наименьшее количество материала.

Решение. Обозначим сторону основания через x; тогда высота или глубина сооружения равна $108/x^2$. Функция суммарной площади поверхности дна и стенок $S=S(x)$ имеет вид (рис. 87):

$$S=x^2+4\frac{108}{x^2}x=x^2+\frac{432}{x}, \quad x\neq 0.$$

Каждому значению x соответствует одно значение S. Можно предположить существование такого значения x, при котором S имеет самое меньшее из всех возможных значений. Задача состоит в том, чтобы найти это значение. ●

Определение. *Говорят, что функция $y=f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ строгий максимум (минимум), если $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$ для всех x, достаточно близких к x_0; x_0 — точка максимума (минимума).*

Максимум и минимум функции называются экстремумами функции, а точка x_0 — точкой экстремума.

Максимумам и минимумам функции $y=f(x)$ соответствуют «гребни» и «впадины» графика, изображенного на рис. 88. В точке x_0, x_2 и x_4 функция имеет максимум, а в точках x_1 и x_3 — минимум. По определению максимум и минимум функции имеют локальный характер: значения функции сравниваются только в точках, достаточно близких к точкам экстремума. Отдельные минимумы могут быть больше максимумов функции.

Например, в точке x_1 функция имеет минимум, в точке x_4 — максимум (рис. 88), хотя $f(x_1)>f(x_4)$. Как же определить те значения аргумента x, принадлежащие замкнутому интервалу, при которых данная функция $y=f(x)$ имеет наибольшее (наименьшее)

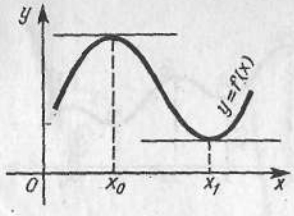


Рис. 89

значение? Здесь возможны два случая: 1) наибольшее и наименьшее значения функция может принимать на концах интервала $[a, b]$, а это $f(a)$ и $f(b)$, вычисление их не составляет большого труда; 2) наибольшее (наименьшее) значение функция может принимать в точках экстремума. Как найти точки экстремума? Из рис. 89 видно, что касательная к графику дифференцируемой функции в точках экстремума должна быть горизонтальной. Ее угол наклона равен нулю, поэтому $f'(x)=0$.

Теорема 1. Необходимое условие существования экстремума. *Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в некоторой точке, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.*

Доказательство. Пусть при $x=x_0$, $x_0 \in (a, b)$ функция $y=f(x)$ имеет максимум. На основании определения максимума для всех достаточно малых по абсолютной величине Δx

$$f(x_0)>f(x_0+\Delta x)$$

и

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0.$$

Если $\Delta x<0$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}>0, \qquad (7.6.1)$$

а если $\Delta x<0$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}<0. \qquad (7.6.2)$$

Предел отношения (7.6.1) не может быть отрицательным, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} \geqslant 0$, или $y'(x_0) \geqslant 0$, если $\Delta x<0$. Предел отношения (7.6.2) не может быть положительным*, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} \geqslant 0$, или $y'(x_0) \geqslant 0$, если $\Delta x>0$. В силу того, что производная в точке x_0 существует, эти пределы должны быть равны одному числу, т. е.

$$y'(x_0)=0 \text{ или } f'(x_0)=0. \qquad (7.6.3)$$

---

* См. § 6.6 правило 10.

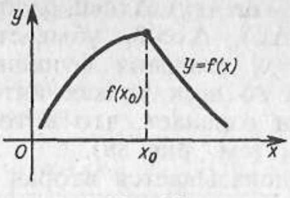


Рис. 90

Для случая, когда $y=f(x)$ имеет минимум, доказательство аналогично приведенному.

Условие (7.6.3) означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $f(x)$ наклон касательной к ее графику равен нулю, касательная параллельна оси Ox (рис. 89).

Тот факт, что в точке экстремума непрерывной функции производная может не существовать, поясняет пример функции, график которой имеет излом (рис. 90).

Условие $f'(x)=0$ не является достаточным. Можно привести примеры функций, когда условие соблюдается, а экстремума нет. Например, для функции $y=\frac{1}{4}x^3$, $y'=\frac{3}{4}x^2$ при $x=0$ имеем $y'=0$. Из графика (см. рис. 85) видно, что в точке $x=0$ экстремума нет, касательная пересекает кривую.

Значения аргумента, при которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими*. Таким образом, если функция имеет экстремум, то он может быть только в критических точках.

Теорема 2. Достаточные условия существования экстремума. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала, кроме, быть может, самой точки x_0. Если при переходе аргумента слева направо через точку x_0 производная $f'(x_0)$ меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет максимум; если знак меняется с минуса на плюс, то функция имеет минимум.*

Доказательство. Пусть x_0 — критическая точка и при переходе аргумента через точку x_0 знак производной изменяется с плюса на минус. На основании теорем 1 и 2 (см. § 7.6) заключаем, что на интервале $(x_0-\Delta x,\ x_0)$, $\Delta x>0$, функция возрастает, а на $(x_0,\ x_0+\Delta x)$, $\Delta x>0$, убывает. Следовательно, в точке $x=x_0$ значения функции $f(x)$ больше, чем ее значения во всех точках интервала $(x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x)$, а это и означает, что в точке x_0 функция имеет максимум (см. рис. 89).

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Достаточные условия существования экстремума можно проверить и с помощью второй производной, если только исследуемая функция дифференцируема не менее двух раз.

Пусть $f'(x_0)=0$ при $x=x_0$. Допустим теперь, что $f''(x_0)<0$. Это означает, что в окрестности критической точки x_0 $f'(x)$ убывает. Но $f'(x_0)=0$, поэтому $f'(x)>0$ при $x<x_0$, а при $x>x_0$ имеем $f'(x)<0$.

Производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус. Следовательно, если в критической точке $f''(x_0)<0$, то функция имеет максимум.

Если $f''(x_0)>0$, то это означает, что $f'(x)$ возрастает в окрестности точки $x=x_0$. Но $f'(x_0)=0$, поэтому $f'(x)<0$ при $x<x_0$, $f'(x)>0$ при $x>x_0$. Производная функции $y'=f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, если в критической точке производная положительна, то в этой точке функция имеет минимум.

Если $f''(x_0)=0$, то факт наличия экстремума и его характер с помощью второй производной установить нельзя.

Нахождение точек экстремума и значений функции в этих точках называется исследованием функции на экстремум.

Правило. *Исследование дифференцируемой функции на экстремум предусматривает выполнение следующих операций.*

1. *Найти производную функции:* $y'=f(x)$.

2. *Найти те значения x, которые обращают эту производную в нуль. Для этого надо решить уравнение с одним неизвестным*

$$f'(x)=0.$$

3. *Установить знак производной вблизи критических точек и определить характер экстремума.*

4. *Вычислить значение функции в точках максимума и минимума.*

Исследование заканчивается построением графика.

● **Задача 1.** Исследовать на экстремум функцию $f(x)=2x^2+4x$.

1. $f'(x)=4x+4$;
2. $f'(x)=0 \Rightarrow 4x+4=0 \Leftrightarrow x=-1$;
3. Составляем таблицу:

	$-\infty<x<-1$	-1	$-1<x<+\infty$
x	-2		0
$f'(x)$	-4	0	4
$f(x)$	$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$

4. $f(-1)=2(-1)^2+4(-1)=-2$.

Таким образом, при $x=-1$ функция имеет минимум. ●

§ 7.7. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ

В научных исследованиях и производственных испытаниях результаты опытов чаще всего изображают в виде таблиц и графиков, из которых можно сразу увидеть, при каких значениях регулируемых человеком факторов достигается желательный максимум (минимум) изучаемой величины.

Так, например, зависимость урожая (ц/га) листьев и черенков винограда от доз (кг/га действующего вещества) удобрений изображается графиком, приведенным на рис. 91. Но если данные опыта подвергнуть математической обработке (см. гл. 14), то такую зависимость можно выразить формулой с определенными погрешностями, так как при вычислениях подобного рода стремятся учесть только факторы, определяющие наиболее существенные особенности изучаемого процесса. Получаемая при этом производственная функция, которая уже была рассмотрена (см. § 5.4), имеет дополнительные ограничения, отражающие условия производства и особенности динамики самих процессов. В интересах производства важно знать такие значения независимой

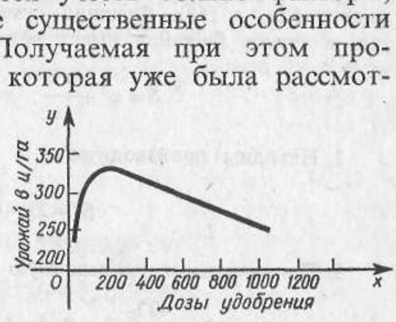


Рис. 91

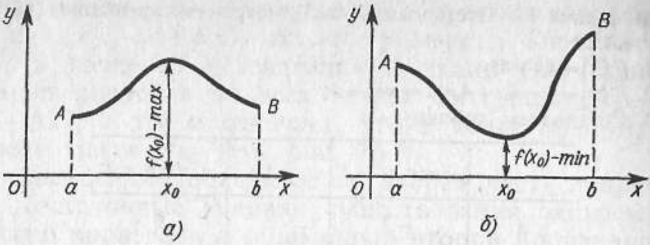


Рис. 92

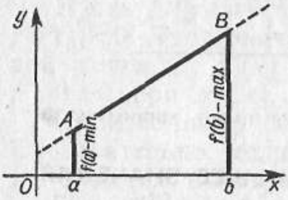


Рис. 93

переменной (фактора), при которых производственная функция как некоторый результат в виде числа имеет наибольшее (наименьшее) значение. Наибольшее (наименьшее) значение функция может принимать как на концах области определения, так и во внутренней точке области. Из рис. 92, *а*, *б*, заключаем: если функция на интервале $[a, b]$ имеет один максимум (минимум), то это и есть наибольшее (наименьшее) ее значение при $x \in (a, b)$. Утверждение сформулировано на уровне наглядной интуиции, но мы будем его использовать при решении задач, не приводя строгих рассуждений. Если же функция не имеет экстремума на интервале, как например линейная функция, то наибольшее (наименьшее) ее значение будет в граничных точках, что отмечено на рис. 93, где $f(a)$ — наименьшее значение, $f(b)$ — наибольшее значение функции.

● Теперь вернемся к решению сформулированной выше задачи (см. с. 168). Функция суммарной площади поверхности дна и стенок бассейна имеет вид

$$S = x^2 + \frac{432}{x}, \quad x \neq 0, \quad x > 0.$$

1. Находим производную

$$S' = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

2. Приравниваем производную нулю

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 432 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 216.$$

Уравнение имеет один действительный корень $x=6$ м, тогда $h=108/36=3$ (м).

3. Устанавливаем знак производной вблизи точки $x=6$. Имеем

$$S'(5)=-\frac{432}{25}=10-17{,}28\approx-7{,}28<0,$$

$$S'(7)=7\cdot 2-\frac{432}{49}=14-8{,}82\approx 5{,}18>0.$$

4. Находим

$$S(6)=36+\frac{432}{6}=37+72=108\ (\text{м}^2).$$

Таким образом, $x=6$, $h=3$ (м). Выполнение достаточных условий здесь можно не проверять, поскольку по смыслу задачи функция имеет один минимум, он же и является наименьшим значением, т. е. $S_{\text{наим}}=108$. ●

Рассмотрим несколько примеров производственных функций.

● **Задача 1.** Исследуем на наибольшее и наименьшее значения производственную функцию, отражающую зависимость урожая кукурузы (ц/га) от количества азотного удобрения (кг/га). Функция имеет вид

$$y=-0{,}0021x^2+0{,}936x+49{,}84.$$

Областью определения данной функции естественно считать бесконечный интервал $[0, +\infty)$. Графиком функции является парабола, обращенная ветвями вниз. Поэтому функция имеет один экстремум — максимум:

$$y'=-0{,}0048x+0{,}936;\quad -0{,}0042x+0{,}936=0\Rightarrow x=222{,}86;$$

$$y(222{,}86)=-0{,}0021\,(222{,}86)^2+0{,}936\cdot 222{,}86+49{,}84=154{,}16\ (\text{ц/га}).$$

Очевидно, что 154,16 — наибольшее значение урожайности. Искать наименьшее значение функции не имеет смысла, так как естественная область определения функции — бесконечный интервал. По условию задачи наименьшее значение равно нулю. ●

● **Задача 2.** Зависимость суточного удоя y в литрах от возраста коров x в годах определяется уравнением

$$y=-9{,}53+6{,}86x-0{,}49x^2,\quad x>2.$$

Найти возраст дойных коров, при котором суточный удой будет наибольшим.

Имеем:

1. $y'=6{,}86-0{,}98x$;

2. $6{,}86-0{,}98x=0\Rightarrow x=\dfrac{6{,}86}{0{,}98}=7$;

3. $y'(6)=6{,}86-0{,}98\cdot 6=6{,}86-5{,}88\approx 0{,}98>0$,

$y'(8)=6{,}86-0{,}98\cdot 8=6{,}86-7{,}84\approx-0{,}98<0$.

При $x=7$ функция имеет максимум.

Итак, при $x=7$ суточный удой будет наибольшим, $y(7)=$ $=14,48$. ●

В более сложных случаях, когда функция имеет не менее двух экстремумов, правило нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на $[a, b]$ состоит в следующем:

1. Находят все критические точки функции на интервале $[a, b]$ и вычисляют значение функции в этих точках, не выясняя характера экстремума.

2. Вычисляют значения функции на концах интервала.

3. Записывают полученные значения функции в порядке возрастания. Первое число является наименьшим значением $f(x)$, а последнее — наибольшим.

● **Пример.** Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=0,5x^3-6x$ на интервале $[-4,5, 3]$.

1. Находим критические точки в заданном интервале:

$$f'(x)=1,5x^2-6;\ 1,5x^2-6=0 \Rightarrow x=-2;\ x_2=2.$$

Вычислим значения функции в этих точках:

$$f(-2)=0,5(-2)^3-6(-2)=-4+12=8;$$
$$f(2)=0,5(2)^3-6(-2)=4-12=-8.$$

2. Вычислим значения функции на концах интервала:

$$f(-4,5)=0,5(-4,5)^3-6(-4,5)=-45,5625+27=-18,5625,$$
$$f(3)=0,5\cdot 3^3-6\cdot 3=13,5-18=-4,5.$$

3. Запишем полученные значения в порядке возрастания: $-18,5625$; -8; $-4,5$; 8.

Таким образом, наибольшее значение $f_{\text{наиб}}=8$ достигается в точке $x=-2$, наименьшее значение $f_{\text{наим}}=-18,5625$ функция имеет на левом конце интервала. ●

§ 7.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ОТКОРМОЧНОГО ПЕРИОДА В СВИНОВОДСТВЕ [22]

Слово оптимальный происходит от латинского слова optimum — наилучший. Сформулируем допущения, отражающие наиболее важные особенности изучаемого процесса. Предположим, что масса одного животного при надлежащих условиях его содержания есть функция времени $m=p(t)$. Допустим далее, что затраты S на откорм одной головы выражается линейной функцией от времени

$$S=a+bt,$$

где a — цена молодняка, приобретенного откормочным хозяйством; b — затраты в единицу времени.

Определим оптимальный срок откорма по критерию максимума прибыли. Прибыль П равна стоимости произведенного продукта $\varphi(t)$ минус стоимость затрат S:

$$\Pi=\varphi(t)-(a+bt),$$

где $\varphi(t)=m(t)p(t)$, а $m(t)$ — цена единицы массы, которую для общности будем считать изменяющейся во времени. Функция прибыли П определена для всех $t>0$, поэтому наибольшее значение прибыли (если оно существует) совпадает с максимумом прибыли. Применяя необходимое условие экстремума, имеем

$$\frac{d\Pi}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}-b=0. \tag{7.8.1}$$

Решая это уравнение, находим, что максимуму прибыли соответствует продолжительность откормочного периода $t=t^*$. Это и есть оптимальный срок.

Из (7.8.1) имеем

$$\frac{d\varphi}{dt}-b=0,\ \frac{d\varphi}{dt}=b. \tag{7.8.2}$$

Следовательно, значение t^* — это такой момент времени, для которого угловой коэффициент касательной к графику функции стоимости продукта $\varphi(t)$ равен угловому коэффициенту прямой — графика функции затрат $\left(\frac{dS}{dt}=b\right)$. Оптимальный срок откорма соответствует точке $t=t^*$, в которой касательная к графику функции $\varphi(t)$ параллельна прямой затрат $S=a+bt$. Можно легко составить правило отыскания числа t^* графическим способом (рис. 94).

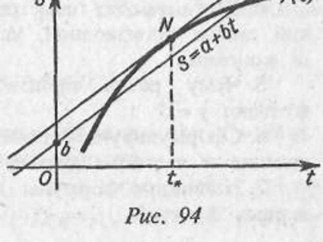


Рис. 94

§ 7.9. ВЫВОДЫ

Одним из важнейших понятий математического анализа является производная функции. Производная характеризует скорость изменения функции по отношению к изменению независимой переменной. В геометрии производная характеризует крутизну графика, в механике — скорость неравномерного прямолинейного движения, в биологии — скорость размножения колонии микроорганизмов, в экономике — отзывчивость производственной функции (выход продукта на единицу затрат).

Действие нахождения производной называется дифференцированием. Общее правило дифференцирования дает возможность получить готовые формулы для нахождения производных основных элементарных функций. Используя это правило, а затем правило дифференцирования сложной функции, мы получили формулы для производных сложных функций.

Среди многих задач, решаемых с помощью производных, наиболее важной является задача нахождения экстремума функции и связанная с ней задача нахождения наибольшего (наименьшего) значения производственных функций, в частности задача отыскания оптимального срока откормочного периода.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение средней скорости неравномерного прямолинейного движения, скорости в данный момент.

2. Что называется средней скоростью изменения функции, скоростью изменения функции при данном значении независимой переменной?

3. Дайте определение производной функции, приведите обозначения производной. Сформулируйте общее правило дифференцирования.

4. В чем состоит геометрический смысл производной, механический смысл производной, каков смысл производной в биологии, в экономике?

5. Чему равна производная от постоянной функции, от функции $y=x$?

6. Сформулируйте правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций.

7. Напишите формулы дифференцирования основных элементарных функций.

8. Приведите правило дифференцирования сложной функции.

9. Дайте определение дифференциала функции и укажите его геометрический смысл.

10. Напишите формулу приближенного вычисления значения функции с помощью дифференциала.

11. Сформулируйте правило вычисления дифференциалов функций.

12. Дайте определение производной второго порядка и укажите ее механический смысл.

13. Сформулируйте признаки возрастания (убывания) функции на интервале.

14. Дайте определение максимума (минимума) функции.

15. В чем состоит необходимое условие существования экстремума?

16. В чем состоят достаточные условия существования экстремума?

17. Сформулируйте общее правило исследования функций на экстремум.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y=2x^3$ в точках, где абсцисса равна: 1) $x=1$; 2) $x=-2$; 3) $x=-1$; 4) $x=0$. Постройте кривую и касательную. В каких из приведенных точек график функции имеет самый большой наклон?

2. Найдите угол наклона касательной к линии $y=2x^2$ в точке, абсцисса которой равна 1/4.

3. К линии $y=3x^2+x$ в точке с абсциссой $x=-1$ проведена касательная. Напишите ее уравнение.

4. Найдите производные функции:

а) $y=3$; б) $f(x)=ax$; в) $y=x^5$; г) $y=\frac{2}{n+1}x^{n+1}$; д) $y=2x^3-3x$; е) $S=\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2+2t$; ж) $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+1$. Найдите $f'(3)$.

5. При каких значениях x производная функции $y=x^3-2x^2-4x-5$ равна: 1) 0?, 2) 3?

6. К кривой $y=3x^2-6x+5$ проведена касательная, параллельная оси Ox. Найдите точку касания.

7. Привес животного y (кг) в зависимости от количества скормленного зерна кукурузы C (кг) при 12%-ном содержании белка определяется формулой

$$y=-3{,}062+0{,}433C-0{,}0001C^2.$$

Найдите отзывчивость производственной функции при $C=50$ кг.

8. Найдите производные следующих функций:

а) $y=(x+2)^4$; б) $y=(x^2-5)^5$; в) $y=(x^2-2x)^3$; г) $y=2\sqrt{1+2x-x^2}$; д) $S=(t^2-t+1)^4$; е) $f(u)=5(3u^2-u+4)^4$; ж) $y=$

$=\sqrt{R^2-x^2}$; з) $y=(x+1)^2(\sqrt{x}-1)$; и) $y=\frac{5x^3}{(5x-4)^3}$; к) $y=x-\sin 2x$;

л) $y=\frac{1}{4}\cos 2x$; м) $y=\frac{1}{2}\sin^2 x$; н) $y=\sqrt{\sin 2\varphi}$.

Найдите производные следующих функций:

а) $y=x\ln x$; б) $y=\lg 2x$; в) $y=\ln^2 x$; г) $f(x)=\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$;

д) $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$; е) $y=\ln^3 \sin x$; ж) $y=\ln\cos 2x$; з) $y=xe^x-e^x$;

и) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x}$; к) $S=e^{\ln t}$; л) $f(t)=\sin e^t$; м) $f(x)=xe^{2x}$; н) $f(t)=e^{2\sin t}$.

9. При сокращении мышцы на x см затрачивается энергия $E=A+Px+ax^2$, где A, P, a — постоянные величины. Определите мощность, развиваемую мышцей при сокращении.

10. Смещение в ответ на одиночное мышечное сокращение (единичный импульс) описывается уравнением $x=te^{-t^2/2}$. Найдите скорость и ускорение в зависимости от t. (x в см, t в с).

11. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением

$$x=A\left(1+e^{-kt}\right). \qquad (x \text{ г}, t \text{ с}).$$

Определите скорость реакции в момент времени t.

12. Найдите в указанные моменты времени t скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону, заданному следующими уравнениями:

а) $s=t^3+2t^2$ при $t=2$;

б) $s=2-t^2$ при $t=1$;

в) $s=2\sin t$ при $t=\pi/4$;

г) $s=3\cos(\pi t/3)$ при $t=1$.

13. Движение тела по прямой определяется законом

$$s=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t. \qquad (s \text{ м}, t \text{ с})$$

Определите скорость и ускорение движения тела в виде функции времени t. В какие моменты времени тело меняет направление движения?

14. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x=A\left(1+e^{-kt}\right)$, где A — начальное количество вещества. Определите скорость химической реакции в зависимости от наличия действующего вещества.

15. Найдите силу F, действующую на материальную точку массы m, которая движется прямолинейно по закону, заданному одним из следующих уравнений:

1) $s=2t^3-t^2$ при $t=2$;

2) $s=\sin 2t$ при $t=\pi/8$;

3) $s=e^{2t}$ при $t=0$.

Указание. Сила, действующая на материальную точку массы m, равна произведению массы точки на ускорение ее движения, т. е. $F=ma$.

16. Точка массы m совершает колебательное движение около положения равновесия O по закону

$$x = a\sin 2\pi\nu t,$$

где x — расстояние точки от точки O, a и ν — постоянные величины. Показать, что действующая сила пропорциональна расстоянию от точки O.

17. Дана функция $y=2x^2$. Определить, возрастает она или убывает в точках: 1) $x=1$; 2) $x=-1$. Постройте график и проверьте результат.

18. Возрастает или убывает функция $y=-x^2+x-1$ в точках: 1) $x=1$; 2) $x=-1$; 3) $x=2$. Проверьте полученный результат по графику.

19. Найдите максимум и минимум функций:

1) $y=x^2-2x$; 2) $y=-x^2+4x$; 3) $y=2x^2+3x+4$; 4) $\frac{1}{3}x^3-2x^2+$ $+3x-1$; 5) $y=\frac{x}{1+x^2}$.

20. Найти скорость изменения популяции бактерий, если в момент времени t (ч) она насчитывает $p(t)=3000+100t^2$ особей.

21. Масса дрожжей в сахаре увеличивается за каждый час на 3%. Если начальная масса составляет 1 г, то после t ч роста масса равна $m(t)=1{,}03^t$. Найдите приближенное значение массы: а) после $t=10$ мин; б) после $t=20$ мин роста.

22. Зависимость между возрастом коров x (лет) и среднесуточным удоем y (л) выражается производственной функцией

$$y=-9{,}53+6{,}86x-0{,}49x^2.$$

Вычислите приближенно, на сколько изменится среднесуточный удой коров, если возраст их увеличился с 3 до 5 лет.

23. Урожай сахарной свеклы (т/га) в зависимости от количества вносимых минеральных удобрений (ц/га) выражается производственной функцией $y=5{,}4x-2{,}9$, $0{,}6<x\leqslant 6$. На другом множестве значений x формула имеет другой вид. Подсчитайте приближенно, как изменится урожай сахарной свеклы, если количество вносимых удобрений увеличить с 4 до 6 ц/га.

24. Радиус основания бурта картофеля конической формы равен 5 м. Как изменится вес картофеля в бурте, если его высота увеличится на 1,5 м? (1 $м^3$ картофеля весит примерно 4 ц).

25. Требуется вырыть силосную яму объемом $V=32$ $м^3$ с квадратным дном таких размеров, чтобы на облицовку ее дна и стен пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы?

26. Скорость роста y популяции x задана формулой $y=0{,}001x(100-x)$. При каком размере популяции эта скорость максимальна? Какова равновесная популяция, т. е. популяция, для которой скорость равна нулю?

27. Зависимость между урожаем озимой пшеницы y (ц/га) и нормой посева семян x (млн. зерен/га) выражается производственной функцией

$$y=5{,}6+8{,}1x-0{,}7x^2.$$

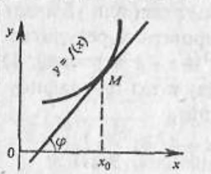
Найдите оптимальную норму посева семян для того, чтобы получить максимальный урожай.

$$\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow y'(x) \Leftrightarrow \boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \Leftrightarrow f'(x) \Leftrightarrow \frac{df(x)}{dx}$$

Δx – приращение независимой переменной

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – соответствующее приращение функции

Геометрический смысл



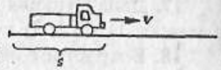
$y'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$ – угловой коэффициент касательной

в(·) $M(x_0;\ f(x_0))$

Определение

Механический смысл

Уравнение движения $s = f(t)$



$s' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta s / \Delta t = v(t)$ – мгновенная скорость

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

ФУНКЦИЯ y = f(x)

Экономический смысл

$y = f(x)$ – производственная функция

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – отзывчивость при данном уровне затрат

Пример из биологии

$y = P(t)$ – закон размножения популяции

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta P / \Delta t$ – производительность популяции в данный момент

Общее правило дифференцирования

1. $x \to x + \Delta x \to y + \Delta y = f(x + \Delta x)$
2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = y'(x)$

Таблица производных

Производная сложной функции

$y = f(u),\ u = \varphi(x)$

$y'x = y'u \cdot u'x$

Дифференциал

$dy = df(x) = f'(x)\ dx$

dx – приращение независимой переменной

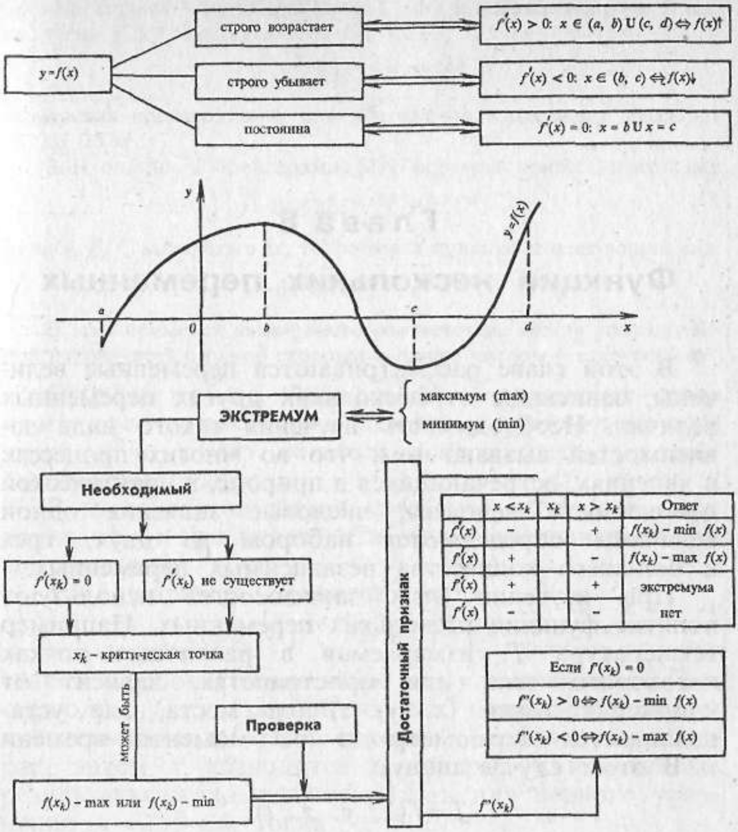
$dy \approx \Delta y \Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + dy$

Вторая производная

$$y'' = (y')' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

y'' – ускорение движения

1. $dC = 0$
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$
3. $d(u \cdot v) = u\ dv + v\ du$
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u\ dv - v\ du}{v^2}$
5. $d(\lg x) = \left(\dfrac{dx}{x}\right)$
6. $d(\sin x) = \cos x\ dx$
7. $d(\cos x) = -\sin x\ dx$
8. $d(\operatorname{tg} x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
9. $d(\operatorname{ctg} x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
10. $d(x^n) = nx^{n-1}\ dx$
11. $d(e^x) = e^x\ dx$
12. $d(a^x) = a^x \ln a\ dx$
13. $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
14. $d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
15. $d(\operatorname{arctg} x) = -\dfrac{dx}{1 + x^2}$



	$x < x_k$	x_k	$x > x_k$	Ответ
$f'(x)$	–		+	$f(x_k)$ – min $f(x)$
$f'(x)$	+		–	$f(x_k)$ – max $f(x)$
$f'(x)$	+		+	экстремума
$f'(x)$	–		–	нет

Глава 8

Функции нескольких переменных

В этой главе рассматриваются переменные величины, зависящие от нескольких других переменных величин. Необходимость изучения такого вида зависимостей вызвана тем, что во многих процессах и явлениях, встречающихся в природе, в практической деятельности человека, числовые значения одной величины определяются набором из двух, трех и большего количества независимых переменных.

При изучении этих зависимостей используют понятие функции нескольких переменных. Например температура T, измеряемая в различных точках некоторого тела или пространства, зависит от координат точки (x, y, z) (от места, где устанавливается термометр) и от момента времени t. В этом случае пишут

$$T = f(x, y, z, t).$$

В главе рассматривается только случай функций двух переменных, их дифференцирование и приложение к решению некоторых задач сельскохозяйственного производства. Выводы, полученные при этом, можно легко распространить на функции от большего числа переменных.

§ 8.1. ФУНКЦИЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

● **Примеры.**

1. Площадь прямоугольного участка земли S зависит от длин его сторон a и b. Соответствующая функция имеет вид

$$S = ab.$$

2. В результате опытов при кормлении свиней для вычисления привеса животного y (кг) в зависимости от двух видов потребляемых кормов — зерна кукурузы C (кг) и соевых жмыхов P (кг) получена [23]* формула

$$y=1{,}243C^{0,547}P^{0,289}.$$

Измерения производились при достижении животными массы от 14 до 25 кг.

3. В опытах с бройлерами [23] формула привеса имеет вид

$$y=0{,}9922C^{0,5537}P^{0,3371}.$$

Если y, P, C выразить в кг, то формула принимает следующий вид:

$$y=0{,}8977C^{0,5537}P^{0,33н}.$$

В этих примерах имеет место соответствие между упорядоченной парой чисел с одной стороны и одним числом — с другой. ●

Определение. *Функция двух переменных — это правило, сопоставляющее каждой упорядоченной паре чисел x и y (из области допустимых значений) определенное число z.*

В этом случае пишут $z=f(x;\,y)$ и читают: «зэт равно эф от икс игрек». Символ f обозначает закон соответствия.

Так, например, уравнения вида

$$z=x^2+y^2,\ z=x-y,\ z=xy$$

ставят в соответствие паре x, y значение z. Под символом f для первой из них понимается последовательность действий: сначала x возводится в квадрат, затем y возводится в квадрат и полученные результаты складываются. Пусть для первого уравнения $x=2$, $y=4$; тогда

$$z\Big|_{\substack{x=2\\y=4}}=f(2;\,4)=2^2+4^2=20,$$

а при $x=1$, $y=1$

$$z\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f(1;\,1)=1^2+1^2=2.$$

Следовательно, z является функцией от x и y.

Определение. *Множество A пар чисел x, y, на котором определена функция $z=f(x;\,y)$ (значение функции есть число), называется областью определения функции $D(f)$.*

---

* В книге приведена формула $y=1{,}445C^{0,547}P^{0,289}$, где y, c, P даны в фунтах. Перевод в систему СИ сделан автором.

В простейших случаях область может иметь вид прямоугольника $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ или круга с границей, задаваемой уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Область с точками на границе называется *замкнутой*. В других случаях $D(f)$ — вся плоскость Oxy или более сложная фигура. Так, например, для функции $z=x^2+y^2$

$$D(f): x \in \mathbf{R},\ \ y \in \mathbf{R},$$

а для функции $z=\frac{1}{x-2y+1}$ областью определения $D(f)$ является вся плоскость Oxy, кроме точек на прямой $x-2y+1=0$.

§ 8.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

Пусть дана функция $z=f(x, y)$. Построим прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 95). Каждой точке $(x, y) \in D(f)$ соответствует одно значение $z=f(x, y)$. Тем самым определяется упорядоченная тройка чисел $(x, y, f(x, y))$ или точка пространства $P(x, y, f(x, y))$. Таких точек можно определить сколь угодно много. Предположим, что точка (x, y), двигаясь в плоскости Oxy, поочередно совмещается со всеми точками $(x, y) \in D(f)$, или, как говорят, точка (x, y) «пробегает» всю область $D(f)$. Тогда соответствующая точка $P(x, y; f(x, y))$ будет описывать в пространстве некоторую поверхность, называемую графиком функции. Таким образом, соотношение $z=f(x, y)$ в системе декартовых координат в общем случае определяет поверхность. Напомним, что в аналитической геометрии каждой поверхности ставится в соответствие уравнение $F(x, y, z)=0$ или $z=f(x, y)$.

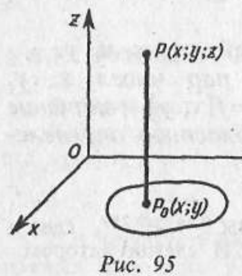


Рис. 95

Поверхность, являющаяся графиком производственной функции от двух факторов, называется *производственной поверхностью*.

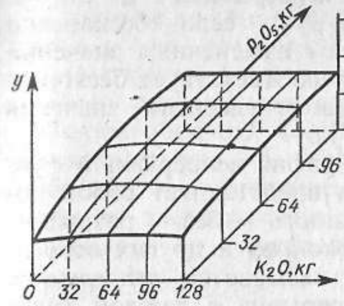


Рис. 96

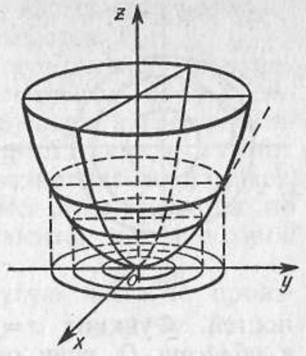


Рис. 97

Так, для производственной функции

$$y=1{,}084+1{,}31\cdot 10^{-2}K+8{,}00\cdot 10^{-3}P-$$
$$-4{,}3\cdot 10^{-7}P^2+7{,}8\cdot 10^{-6}KP,$$

где K соответствует удобрению K_2O, кг/га; P — удобрению P_2O_5, кг/га, y — урожайность клевера, т/га, соответствующая поверхность изображена на рис. 96. Мы видим, что при больших количествах одного или обоих видов удобрений производственная поверхность сравнительно плоская. При очень больших количествах P_2O_5 урожайность уменьшается.

Представление о форме поверхности и, в частности, о форме производственной поверхности, может дать метод линий уровня. Геометрическое место точек плоскости, в которых функция $z=f(x, y)$ принимает постоянное значение, называется *линией уровня*. Это линия пересечения поверхности $z=f(x, y)$ плоскостью $z=C$ и ортогонально спроектированная на плоскость Oxy. Сделав несколько таких сечений плоскостями $z=C$, которые отстоят одна от другой на равное расстояние, и вычертив линии уровня, можно составить представление о самой поверхности. Там, где линии проходят близко друг к другу, поверхность поднимается круто, а значит, и функция изменяется быстрее по сравнению с изменением функции в тех местах, где расстояние между соседними линиями больше. Поверхность, определяемая уравнением $z=x^2+y^2$, изображена на рис. 97, а соответствующие линии уровня — на рис. 98.

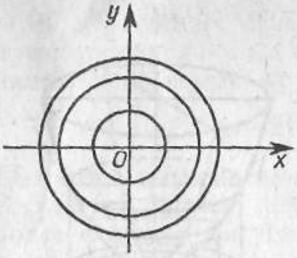


Рис. 98

Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $P_0(x_0, y_0)$, если бесконечно малым изменениям значений x и y соответствует бесконечно малое изменение значения $f(x, y)$.

График непрерывной функции представляет собой поверхность без разрывов, «проколов» и других особенностей. Функция $z=f(x, y)$ называется *непрерывной в области* D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

§ 8.3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Рассмотрим функцию $z=f(x, y)$. Пусть независимая переменная y приняла постоянное значение $y=y_0$, а переменная x изменяется. Тогда из функции двух переменных получим функцию одной независимой переменной $z=f(x, y_0)$. Ее графиком является линия пересечения поверхности $z=f(x, y)$ и плоскости $y=y_0$ (рис. 99).

Найдем далее производную от функции $z=f(x, y_0)$ в точке $x=x_0$ (будем считать, что производная существует). Эта производная является частной производной от функции $z=(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ и обозначается символом $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x, или $f'_x(x)$. Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

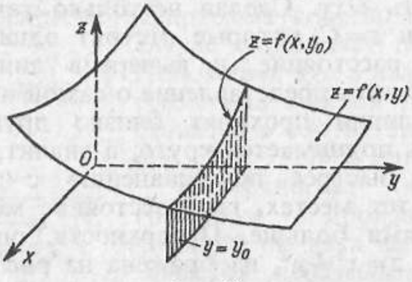


Рис. 99

Разность $f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$ называется *частным приращением* функции и обозначается $\Delta_x z$.

Определение. *Частной производной функции $z=f(x, y)$ по аргументу x называется предел отношения частного приращения функции к соответствующему приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$.*

Таким образом, частная производная показывает, во сколько раз «быстрее» изменяется функция по сравнению с изменением аргумента, когда второй аргумент зафиксирован.

Аналогично определяют другую частную производную $\frac{\partial z}{\partial y}$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Как и в случае функции одной переменной, $\frac{\partial z}{\partial x}$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $z=f(x, y_0)$, $y=y_0$, в точке $P(x_0, y_0)$, т. е. тангенсу угла между касательной и линией, параллельной оси Ox и проходящей через точку $P(x_0, y_0)$. Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial x}$ дает возможность оценить «крутизну» поверхности $z=f(x, y)$ в точке P_0, или скорость изменения функции по направлению, параллельному оси Ox, что очень важно. Находя частные производные от производственных функций, можно найти отзывчивость функции выхода продукта, т. е. количество продукта (как результата деятельности), приходящееся на единицу величины одного фактора, при условии, что второй фактор остается постоянным.

Предположим, что производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ можно найти в каждой точке области $D(f)$. Тогда $P_0(x_0, y_0)$ можно рассматривать как переменную точку и опустить индекс 0. Частные производные станут новыми функциями двух переменных. Обозначим их символами $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$. При необходимости от этих функций можно найти частные производные, причем от каждой из них как по переменной x, так и по переменной y.

Определение. *Частная производная от частной производной функции называется частной производной второго порядка.*

Производные второго порядка в общем случае также являются функциями двух переменных, их будет уже четыре. Для производных второго порядка приняты следующие обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xx}=f''_{xx}(x,\ y)$$

— функция дифференцируется по x последовательно два раза;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xy}=f''_{xy}(x,\ y)$$

— функция сначала дифференцируется по x, а результат затем дифференцируется по y;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yy}-f''_{yy}(x,\ y)$$

— функция последовательно дифференцируется по y два раза;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z'_{yx}=f''_{yx}(x,\ y)$$

— функция сначала дифференцируется по y, а результат дифференцируется по x.

Частные производные находят по правилам и формулам, аналогичным формулам для обычных производных. Надо только помнить, по какой переменной производится дифференцирование, считать эту величину изменяющейся, а остальные — постоянными.

● **Пример.** Найти частные производные второго порядка от функции

$$z=x^3y^2+2y-6x+1.$$

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-6,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2yx^3+2;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xx}=(3x^2y^2-6)'_x=6xy^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xy}=(3x^2y^2-6)'_y=6x^2y;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yx}=(2yx^3+2)'_x=6x^2y;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yy}=(2yx^3+2)'_y=2x^3.$$

Как видим, в данном случае $z''_{xy}=z''_{yx}=6x^2y$. ●

Отметим, что частные производные второго порядка z''_{xy} и z''_{yx} не зависят от порядка дифференцирования, т. е. $z''_{xy}=z''_{yx}$ при условии, что они непрерывны.

§ 8.4. ЗАДАЧА, ПРИВОДЯЩАЯ К ПОНЯТИЮ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

● **Задача.** Рассчитать размеры параллелепипеда так, чтобы при заданном объеме $V=32$ м^3 суммарная площадь основания и боковых граней была минимальной. В качестве приложения эту задачу можно сформулировать иначе: рассчитать размеры силосного сооружения с прямоугольным основанием так, чтобы при заданном объеме на облицовку дна и стенок ушло минимальное количество материала. В § 7.6 приведена почти такая же задача, но там указано, что основание — квадрат. Здесь такого ограничения нет.

Решение. Обозначим через x и y (рис. 100) размеры основания, тогда высота h вычислится из соотношения $32=xyh$, т. е. $h=\frac{32}{xy}$. Составим функцию площади

$$S=xy+2y\frac{32}{xy}+2x\frac{32}{xy}=xy+64\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),\quad x\neq 0,\quad y\neq 0.$$

Можно предположить, что существуют такие x и y, при которых S достигает наименьшего значения. Задача состоит в том, чтобы найти эти числа. ●

Для того чтобы легко и просто решать эту и другие подобные задачи, необходимо построить соответствующий математический аппарат.

1. Максимум и минимум функции двух переменных.

Определение. *Пусть функция $z=f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Говорят, что функция $z=f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) строгий максимум (минимум), если*

Рис. 100

$f(x, y)<f(x_0, y_0)$ $(f(x, y)>f(x_0, y_0))$ для всех точек (x, y), достаточно близких к x_0; y_0. Точка (x_0, y_0) — точка максимума (минимума).

Максимум и минимум функции будем, как и в случае функции одной переменной, называть экстремумами или экстремальными значениями.

Понятие экстремума носит локальный смысл. Значения функции сравниваются только для точек (x, y), достаточно близких к точкам (x_0, y_0).

Ответ на вопрос, существует ли способ отыскания значений независимых переменных, при которых функция имеет экстремум и в чем состоит такой способ, дают следующие две теоремы.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). *Если дифференцируемая функция $z=f(x, y)$ имеет экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т. е.**

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y}=0. \qquad (8.4.1)$$

Доказательство. Зафиксируем независимую переменную y, придав ей значение y_0. Тогда $z=f(x, y_0)$ — функция одной переменной x; эта функция имеет экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$. Как известно, необходимым условием этого является равенство нулю ее производной, т. е. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0.$

Аналогично можно показать, что $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0.$ Теорема доказана.

В системе уравнений (8.4.1) число неизвестных равно числу уравнений. Решив систему, получим координаты точек, в которых может быть экстремум. Точки $P_{0i}(x_{0i}, y_{0i})$, в которых частные производные обращаются в нуль, называются *критическими*.

Таким образом, если функция имеет экстремум в некоторой точке, то он может быть только в критической точке.

Теорема 2 (достаточные условия существования экстремума). *Пусть функция $z=f(x, y)$ непрерывна*

---

* Приведем полную формулировку теоремы: *если дифференцируемая функция $z=f(x, y)$ имеет экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю или не существуют.*

в $D(f)$ вместе со своими частными производными первого и второго порядков и точка $P(x_0, y_0)$ является критической.

Найдем в точке P_0 производные второго порядка и примем следующие обозначения:

$$A=\left(z''_{xx}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad B=\left(z''_{xy}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad C=\left(z''_{yy}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

Если $AC-B^2>0$, то функция имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум: максимум при $A<0$ и минимум при $A>0$.

Если $AC-B^2<0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ нет экстремума.

Если $AC-B^2=0$, то заключения об экстремуме сделать нельзя. В этом случае требуется дополнительное исследование.

В практических задачах часто бывает так, что характер экстремума определяется смыслом задачи (без проверки выполнения достаточных условий).

Вернемся к задаче, сформулированной в начале параграфа. Исследуем на экстремум функцию

$$S=xy+64\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

1. Найдем частные производные:

$$S'_x=y+64\left(-\frac{1}{x^2}\right)=y-\frac{64}{x^2},\quad x\neq 0;$$

$$S'_y=x+64\left(-\frac{1}{y^2}\right)=x-\frac{64}{y^2},\quad y\neq 0.$$

2. Приравняем нулю частные производные и составим систему

$$\begin{cases} y-64/x^2=0,\\ x-64/y^2=0.\end{cases}$$

Подставим $y=\frac{64}{x^2}$, найденное из первого уравнения, во второе уравнение. Имеем

$$y=64/x^2,$$
$$x=64x^4/(64)^2,$$

или

$$\begin{cases} y=64/x^2\\ 64x-x^4=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=64/x^2,\\ 4^3-x^3=0.\end{cases}$$

На множестве действительных чисел система имеет одно решение: $x=4$, $y=4$; тогда $h=\frac{32}{xy}=\frac{32}{4\cdot 4}=2$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$S''_{xx}=\frac{128}{x^3},\quad S''_{xx}\Big|_{x=4}=\frac{128}{64}=2,\ A=2;$$

$$S''_{yy}=\frac{128}{y^3},\quad S''_{yy}\Big|_{y=4}=\frac{128}{64}=2,\ C=2;$$

$$S''_{xy}=1\quad S''_{xy}\Big|_{\substack{x=4\\y=4}}=1,\ B=1,\ AC-B^2=3>0.$$

В точке (4; 4) функция имеет минимум:

$$S\Big|_{\substack{x=4\\y=4}}=4\cdot 4+64\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=16+32=48\ (\text{м}^2).$$

● **Пример 1.** Исследовать на экстремум функцию

$$z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8.$$

1. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-2x+1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x-4y+10.$$

2. Приравняем нулю частные производные и составим систему

$$\begin{cases} y-2x+1=0,\\ x-4y+10=0.\end{cases}$$

Найдем из первого уравнения $y=2x-1$ и подставим во второе:

$$\begin{cases} x-4(2x-1)+10=0,\\ y=2x-1,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x-8x+14=0,\\ y=2x-1,\ x=2,\ y=3.\end{cases}$$

3. Найдем частные произведения второго порядка:

$$z''_{xx}=-2,\ z''_{xy}=1,\ z''_{yy}=-4.$$

Как видим, частные производные второго порядка равны постоянным величинам в любой точке, в том числе и в точке P_0 (2; 3). Поэтому $A=-2$, $B=1$, $C=-4$. Далее находим $AC-B^2=(-2)(-4)-1=7>0$. Следовательно, в точке P_0 (2; 3) функция имеет максимум

$$z(2;3)=2\cdot 3-2^2-2\cdot 3^2+2+10\cdot 3-8=8.\ ●$$

2. Абсолютный экстремум функции. Теорема Вейерштрасса. Рассмотрим функцию $z=f(x, y)$, заданную на некоторой области D. Точка M называется *внутренней для области D*, если $M \in D$ вместе с некоторой своей окрестностью (рис. 101). Точка N называется *граничной для области D*, если в любой ее окрестности имеются точки, как принадлежащие области, так и не принадлежащие ей. Точка N может не принадлежать области D. Множество всех граничных точек называется границей Г.

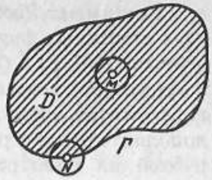


Рис. 101

Определение 1. *Область D называется открытой, если все ее точки — внутренние.*

Область D, включающая граничные точки, называется замкнутой.

Определение 2. *Область называется ограниченной, если она целиком содержится внутри круга достаточно большого радиуса.*

Определение 3. *Наименьшее (наибольшие) значение функции в данной области называется абсолютным экстремумом функции (соответственно абсолютным минимумом или абсолютным максимумом) в этой области.*

Теорема Вейерштрасса. *Если функция непрерывна в ограниченной и замкнутой области, то она достигает в этой области своего наименьшего и наибольшего значений.*

По теореме Вейерштрасса в области D найдется по крайней мере одна точка (x_0, y_0), в которой функция имеет наибольшее (наименьшее) из всех значений. Если точка (x_0, y_0) лежит внутри области D, то в ней функция имеет абсолютный максимум (минимум). Но функция $z=f(x, y)$ может достигать абсолютного экстремума и на границе области. Поэтому для нахождения наибольщего (наименьшего) значения функции $z=f(x, y)$ в области D необходимо найти:

1. Значения функции в критических точках внутри области.
2. Наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области.
3. Сравнить полученные числа и выбрать наибольшее (наименьшее) из них.

● **Пример 2.** Рассмотрим [2] производственную функцию

$$z=15{,}63x^{0{,}372}y^{0{,}158}, \tag{8.4.2}$$

где z — урожай кукурузы, ц/га; x — затраты на удобрения, руб/га ($x>0$); y — затраты на семена, руб/га, ($y>0$).

При каких значениях x и y функция достигает наибольшего значения?

Решение. Рассматриваемая функция является произведением двух степенных функций. Она достигает минимума, равного нулю, в точках $P(0, y)$ и $Q(x, 0)$, где x и y — любые положительные числа, и возрастает с возрастанием x и y. О максимуме здесь можно говорить только тогда, когда по условиям производства необходимо учитывать дополнительные ограничения. Пусть это суммарные затраты в сотнях рублей на приобретение удобрений и семян, например,

$$x+y=2. \tag{8.4.3}$$

Таким образом, учитывая (8.4.3), делаем вывод, что область определения функции (8.4.2) треугольник, заданный неравенствами $x>0$, $y>0$, $x+y\leqslant 2$. Наибольшего значения функция достигает на границе области.

Выразим из (8.4.3) y через x и подставим полученное значение в (8.4.2). Имеем

$$z=15{,}63x^{0{,}372}(2-x)^{0{,}158}.$$

Получена функция одной переменной. Исследуем ее на экстремум

$$z'_x=15{,}63\,(0{,}372x^{-0{,}628}(2-x)^{0{,}158}+0{,}158\,(2-x)^{-0{,}842}(-1)\,x^{0{,}372})=$$
$$=15{,}63x^{0{,}372}(2-x)^{-0{,}842}(0{,}372x^{-1}(2-x)-0{,}158).$$

Из того, что $z'=0$, имеем $x=0$ и $0{,}372(2-x)-0{,}158=0$, а если $z'_x=\infty$, то $2-x=0\Rightarrow x=2$.

При $x=0$ имеем $y=2$, а при $x=2$ имеем $y=0$. Найдем значения функции:

$$z\Big|_{\substack{x=0\\y=2}}=0,\quad z\Big|_{\substack{x=2\\y=0}}=0.$$

В точках (0; 2) и (2; 0) функция имеет минимум.

Из уравнения $0{,}372(2-x)-0{,}158x=0$ имеем $0{,}530x=0{,}744$, $x=1{,}404$. Тогда $y=2-x=2-1{,}404=0{,}596$.

Вычислим значение функции z в точке (1,404; 0,596):

$$z\Big|_{\substack{x=1{,}404\\y=0{,}596}}=15{,}63\cdot 1{,}404^{0{,}372}\cdot 0{,}596^{0{,}198}=16{,}33.$$

Итак, $z=0$ при $x=0$, $z=16{,}33$ при $x=1{,}404$, $z=0$ при $x=2$.

Таким образом, функция при $x=1{,}404$, $y=0{,}596$ имеет абсолютный максимум. ●

§ 8.5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ОДНОЙ И ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ К ЗАДАЧАМ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

● **Задача 1.** Рассчитать размеры цилиндрического бака для водонапорной башни при условии, состоящем в том, чтобы при заданной полной площади поверхности S его объем был наибольшим.

Решение. Обозначим радиус основания цилиндра через R, а высоту — h (рис. 102). Тогда его объем равен

$$V=\pi R^2 h. \tag{8.5.1}$$

Из того, что полная площадь поверхности $S=2\pi R^2+2\pi Rh$, следует, что $h=\frac{S-2\pi R^2}{2\pi R}$. Подставим значение h в (8.5.1). Имеем

$$V=\pi R^2\frac{S-2\pi R^2}{2\pi R}=\frac{SR-2\pi R^3}{2},\quad V'=\frac{1}{2}(S-6\pi R^2).$$

Необходимое условие экстремума дает $S=6\pi R^2$ или $R=\sqrt{S/6\pi}$. Вторая производная $V''=-6\pi R<0$. Следовательно, при $R=\sqrt{S/6\pi}$ функция имеет максимум.

Найдем h. Имеем

$$h=\frac{S-2\pi(S/6\pi)}{2\pi\sqrt{S/6\pi}}=\frac{\frac{2}{3}S}{2\pi\sqrt{S/6\pi}}=2\sqrt{S/6\pi}.$$

Таким образом, бак цилиндрической формы при заданной полной площади поверхности имеет наибольший объем, если диаметр основания $2R$ равен его высоте h. ●

● **Задача 2.** Определить размеры пленочной теплицы с прямоугольным основанием так, чтобы ее объем был наибольшим, если она должна иметь вид, изображенный на рис. 103, а площадь поверхности равна S.

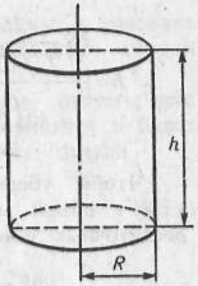
Решение. Обозначим размеры основания через x и y, а высоту через h. Тогда

$$V=\left(xh+\frac{x}{6}\frac{x}{2}\right)y=\left(xh+\frac{x^2}{12}\right)y. \tag{8.5.2}$$

Воспользуемся тем, что площадь поверхности всех стенок, крыши и двух «фронтонов» равна

$$S=2xh+2yh+2\frac{x}{6}\cdot\frac{x}{2}+\frac{2x}{6}\sqrt{10}\,y=$$

$$=2h(x+y)+\frac{x^2}{6}+\frac{xy\sqrt{10}}{3}. \tag{8.5.2}$$



Найдем высоту h и подставим в (8.5.2). Имеем

$$h=\frac{S-x^2/6-xy\sqrt{10}/3}{2(x+y)}. \tag{8.5.3}$$

Тогда

Рис. 102

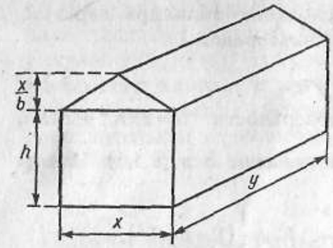


Рис. 103

$$V=\left(x\frac{S-x^2/6-xy\sqrt{10}/3}{2(x+y)}+\frac{x^2}{12}\right)\times$$
$$\times\, y=\frac{6xyS-2x^2y^2\sqrt{10}+x^2y^2}{12(x+y)}=$$
$$=\frac{6xyS+x^2y^2(1-2\sqrt{10})}{12(x+y)}.$$

Найдем частные производные V'_x и V'_y и приравняем их нулю. Запишем следствие:

$$\begin{cases} 6Sy^2-4xy^3\sqrt{10}+2xy^3+x^2y^2(1-2\sqrt{10})=0, \\ 6Sx^2-4yx^3\sqrt{10}+2x^3y+x^2y^2(1-2\sqrt{10})=0. \end{cases} \tag{8.5.4}$$

Второе уравнение получается из первого, если в нем заменить y на x, а x на y, из этого следует, что $x=y$. Учитывая этот факт, первое из уравнений из (8.5.4) можно записать в виде

$$6Sx^2-4x^4\sqrt{10}+2x^4+x^4(1-2\sqrt{10})=0,$$

или

$$3x^2(2S-2x^2\sqrt{10}+x^2)=0.$$

Приравниваем каждый из сомножителей нулю. Имеем $x^2=0$, откуда находим: $x_{1,2}=0$. По смыслу задачи эти значения не могут служить решениями системы. Вторую пару решений получаем из уравнения $2S-2x^2\sqrt{10}+x^2=0$, откуда $x^2(2\sqrt{10}-1)=2S$, $x=\pm\sqrt{\dfrac{2S}{2\sqrt{10}-1}}$. Так как $x>0$, то $x=\sqrt{\dfrac{2S}{2\sqrt{10}-1}}$, учитывая, что $x=y$, получаем

$$y=\sqrt{\frac{2S}{2\sqrt{10}-1}}. \tag{8.5.5}$$

Принимая во внимание (8.5.3) и (8.5.5), находим

$$h=\frac{6S\dfrac{2S}{2\sqrt{10}-1}-2\dfrac{2S}{2\sqrt{10}}\sqrt{10}}{12\left(2\sqrt{\dfrac{2S}{2\sqrt{10}-1}}\right)}=\frac{S(\sqrt{10}-1)\sqrt{2\sqrt{10}-1}}{3\sqrt{2S}(2\sqrt{10}-1)}.$$

Чтобы убедиться в том, что при найденных значениях x и y объем максимален, необходимо проверить выполнение достаточных условий:

$$V''_{xx}=-\frac{4y^4\sqrt{10}+12Sy^2-2y^4}{12(x+y)^3}=-\frac{2y^4(2\sqrt{10}-1)+12Sy^2}{12(x+y)^3},$$

$$V''_{yy}=-\frac{4x^4\sqrt{10}+12Sx^2-2x^4}{12(x+y)^3}=-\frac{2x^4(2\sqrt{10}-1)+12Sx^2}{12(x+y)^3},$$

$$V''_{xy}=\frac{2x^2(6S-(2\sqrt{10}-1)5x^2)}{12(x+y)^3}.$$

Для нахождения V''_{xx}, V''_{yy} и V''_{xy} примем обозначение $2\sqrt{10}-1=a^2$. Имеем

$$A=V''_{xx}\Big|_{x=y=\sqrt{2S/a^2}}=-\frac{2\dfrac{(2S)^2}{a^2}a^2+12S\dfrac{2S}{a^2}}{12\cdot 2\dfrac{2S}{a^2}\dfrac{\sqrt{2S}}{a}}=-\frac{2Sa}{3\sqrt{2S}},$$

$$B=V''_{xy}\Big|_{x=y=\sqrt{2S/a^2}}=\frac{\dfrac{2\cdot 2S}{a^2}\left(6S-a^2\dfrac{5\cdot 2S}{a^2}\right)}{12\cdot 2\dfrac{2S}{a^2}\dfrac{\sqrt{2S}}{a}}=\frac{\dfrac{16S^2}{a^2}}{\dfrac{48S\sqrt{2S}}{a^3}}=\frac{Sa}{3\sqrt{2S}},$$

$$C=V''_{yy}\Big|_{x=y=\sqrt{2S/a^2}}=-\frac{2Sa}{3\sqrt{2S}},$$

$$AC-B^2=\frac{4S^2a^2}{9\cdot 2S}-\frac{a^2S^2}{a^2S}=\frac{3a^2S^2}{18S}=\frac{a^2S}{6}>0.$$

В результате имеем: $A<0$, $AC-B^2>0$, следовательно, функция $V=V(x, y)$ в точке $\left(\sqrt{\dfrac{2S}{2\sqrt{10}-1}}, \sqrt{\dfrac{2S}{2\sqrt{10}-1}}\right)$ имеет максимум.

Пусть, например, $S=48$ м^2. Тогда $x=\sqrt{\dfrac{2\cdot 48}{5{,}32}}=\sqrt{18}=4{,}24$ (м), $y=4{,}24$ (м),

$$h=\frac{48(3{,}16-1)\sqrt{5{,}32}}{3\sqrt{2\cdot 48}\,5{,}32}=\frac{48\cdot 2{,}16\cdot 2{,}31}{3\cdot 9{,}8\cdot 5{,}32}=\frac{240}{156{,}5}=1{,}53 \text{ (м)}.$$

Таким образом, максимальный объем теплицы в условиях данной задачи обеспечивается при соотношении сторон 4,24:4,24:1,53, или, приблизительно, 2:2:0,7.

Можно показать, что если делать подобные расчеты для теплицы с плоской крышей, то соотношение изменится и будет иметь вид 2:2:1. Действительно, $S=2xh+2yh+xy$, откуда

$$h=\frac{S-xy}{2(x+y)}. \qquad (8.5.6)$$

Тогда

$$V=xyh=xy\frac{S-xy}{2(x+y)}, \quad V'_x=\frac{Sy^2-x^2y^2-2xy^3}{4(x+y)^2},$$

$$V'_y=\frac{Sx^2-x^2y^2-2yx^3}{4(x+y)^2}.$$

Необходимые условия экстремума дают

$$\begin{cases} Sx^2-x^2y^2-2yx^3=0, \\ Sy^2-x^2y^2-2xy^3=0. \end{cases}$$

Второе уравнение можно получить из первого, если заменить в нем x на y, а y на x, поэтому $x=y$. Подставим в первое уравнение $y=x$. Имеем

$$Sx^2-x^4-2x^4=0 \Leftrightarrow Sx^2-3x^4=0.$$

Решением, удовлетворяющим условию задачи, является $x=\sqrt{S/3}$. Тогда $y=\sqrt{S/3}$. Высоту теплицы найдем из условия (8.5.6):

$$h=\frac{S-\sqrt{S/3}\sqrt{S/3}}{2\left(\sqrt{S/3}+\sqrt{S/3}\right)}=\frac{2\frac{S}{3}}{4\sqrt{S/3}}=\frac{\sqrt{S/3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{S/3}.$$

При той же площади поверхности теплицы $S=48$ м^2 размеры таковы: $4\times4\times2$ (м). ●

● **Задача 3.** Пусть прибыль П хозяйства от возделывания 1 га кукурузы определятся* формулой

$$\Pi=My-x_1-x_2-k, \qquad (8.5.7)$$

где x_1 — затраты на удобрения, руб/га, x_2 — затраты на семена, руб/га, y — урожайность (ц/га), определяемая из соотношения

$$y=15{,}63x_1^{0{,}372}x_2^{0{,}158},$$

где M — цена 1 ц кукурузы, k — постоянные затраты, не зависящие от x_1 и x_2.

Необходимо найти те значения x_1 и x_2, при которых прибыль максимальна. Необходимые условия экстремума дают

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}=M\frac{\partial y}{\partial x_1}-1,\quad \frac{\partial\Pi}{\partial x_2}=M\frac{\partial y}{\partial x_2}-1.$$

Приравнивая частные производные нулю, образуем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1}=\dfrac{1}{M}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2}=\dfrac{1}{M}. \end{cases} \qquad (8.5.8)$$

Найдем $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ из функции $y=15{,}63x_1^{0{,}372}x_2^{0{,}158}$ и подставим их в (8.5.8). В результате получим

* Задача условная.

$$\begin{cases} \dfrac{15{,}63 \cdot 0{,}372 x_2^{0,158}}{x_1^{0,628}} = \dfrac{1}{M}, \\ \dfrac{15{,}63 \cdot 0{,}158 x_1^{0,372}}{x_2^{0,842}} = \dfrac{1}{M}. \end{cases} \qquad (8.5.9)$$

Оба числителя в левой части равенств дополним до y, для чего умножим и разделим левую часть первого из уравнений на $x_1^{0,372}$, а второго — на $x_2^{0,158}$. В результате получим

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x_1} 0{,}372 = \dfrac{1}{M}, \\ \dfrac{y}{x_2} 0{,}158 = \dfrac{1}{M}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $x_1 = 2{,}35 x_2$. Подставим это значение в (8.5.9), имеем

$$\begin{cases} \dfrac{15{,}63 \cdot 0{,}372 x_2^{0,158}}{(2{,}35 x_2)^{0,628}} = \dfrac{1}{M}, \\ \dfrac{15{,}63 \cdot 0{,}158 (2{,}35 x_2)^{0,372}}{x_2^{0,842}} = \dfrac{1}{M}, \end{cases}$$

или

$$\frac{5{,}8 x_2^{-0,470} \cdot 1}{2{,}35^{0,628}} = \frac{1}{M}, \quad 2{,}47 (2{,}35)^{0,372} x_2^{-0,470} = \frac{1}{M}.$$

Из этого соотношения следует, что

$$2{,}47 \cdot 2{,}35^{0,372} \approx 3{,}4 \cdot x_2^{0,470} = 3{,}4M$$

или $x_2 = 3{,}4^{2,13} \cdot M^{2,13} = 13{,}5 M^{2,13}$ $x_1 = 2{,}35 x_2 = 2{,}35 \cdot 13{,}5 M^{2,13} = 31{,}8 M^{2,13}$.

Итак, затраты на удобрения и на семена зависят от цены 1 ц кукурузы, но при этом затраты на удобрения в 2,35 раза больше затрат на семена. ●

● **Задача 4.** Под каким углом α следует сбить три одинаковые доски, чтобы получить поилку наибольшей вместимости?

Решение. Наибольшую вместимость будет иметь желоб с наибольшим поперечным сечением. Поперечное сечение желоба — равнобочная трапеция. Примем, что ширина доски $AB = BC = CD = a$; $\angle BAD = x$ (рис. 104), тогда высота трапеции $BE = a \sin x$, ее большее основание $AD = a + 2a \cos x$. Поэтому площадь трапеции

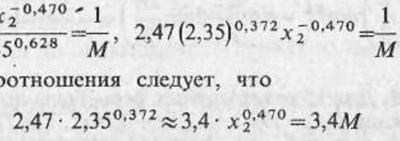


Рис. 104

$$S(x)=a^2(1+\cos x)\sin x,\ \ 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Исследуем $S(x)$ на экстремум. Имеем

$$S'(x)=a^2(1+\cos x)(2\cos x-1),$$

$$\cos x=-1\Leftrightarrow x_1=\pi,\ \ 2\cos x=1\Leftrightarrow x=\pi/3.$$

Число π не входит в область допустимых значений. Принимаем $x=\pi/3$. Далее находим: $S(0)=0$; $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2$, $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

Следовательно, при $x=\pi/3$ площадь $S(x)$ имеет наибольшее значение. Итак,

$$\alpha=\pi-\pi/3=2\pi/3=120°.$$

Чтобы в этом убедиться вычислим $S''\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Имеем

$$S''(x)=a^2(-\sin x)(2\cos x-1)+a^2(-2\sin x(1+\cos x)=$$

$$=a^2(\sin x-2\cos x\sin x-2\sin x-2\sin x\cos x)=$$

$$=a^2(-\sin x-2\sin 2x),$$

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\left(-\sin\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2<0.$$ ●

● **Задача 5. Для 15 откормочных ферм была получена производственная функция $f(x)=199{,}2+67{,}6x+0{,}14x^2$, где $f(x)$ — затраты на откорм свиней, тыс. руб., x — валовой привес, тыс. ц. Найти минимальную себестоимость 1 ц свинины.**

Решение. Составим функцию себестоимости

$$S=\frac{f(x)}{x}=\frac{199{,}2}{x}+67{,}6+0{,}14x.$$

Найдем производную

$$S'=-\frac{199{,}2}{x^2}+0{,}14,$$

$$S''=0\Rightarrow 0{,}14=\frac{199{,}2}{x^2}\Leftrightarrow 0{,}14x^2=199{,}2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=1422{,}8\Leftrightarrow x=\sqrt{1422{,}8}\approx 37{,}7.$$

Общие затраты на производство свинины

$$f(37{,}7)=199{,}2+67{,}6\cdot 37{,}7+37{,}7^2\cdot 0{,}14=2946{,}7\ \text{(тыс. руб.)}$$

Один центнер свинины стоит $2946{,}7/37{,}7=78{,}16$ руб.

Проверим, является ли при данном x себестоимость минимальной. Для этого найдем вторую производную

$$S''=\left(-\frac{199{,}2}{x^2}+0{,}14\right)'=\frac{2\cdot 199{,}2}{x^3}=\frac{398{,}4}{x^3}>0,$$

$S''>0$, следовательно, S имеет минимум при $x=78{,}16$.

§ 8.6. ВЫВОДЫ

В гл. 8 показано, как с помощью понятия функции нескольких переменных можно решать чисто практические задачи. Функция многих переменных — это соответствие между упорядоченным набором чисел с одной стороны, и одним числом — с другой. Графиком функции двух переменных в системе координат Oxy является некоторая поверхность.

Частное приращение функции $z=f(x, y)$ — это приращение функции, вызванное изменением только одной независимой переменной, т. е. другая переменная остается постоянной.

Частной производной функции $z=f(x, y)$ по какому-либо одному из ее аргументов называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда последнее произвольно стремится к нулю.

Понятие экстремума функции рассмотрено на примере определения размеров параллелепипеда заданного объема V при условии, состоящем в том, чтобы площадь основания и боковых граней была наименьшей. Задача имеет приложение.

Наибольшее (наименьшее) значение функция может принимать как во внутренней точке, так и на границе области определения.

В главе показано, как с помощью понятия функции нескольких переменных можно решать чисто практические задачи.

Рассмотрены примеры применения теории экстремума к задачам сельскохозяйственного производства: задача расчета размеров цилиндрического бака для водонапорной башни при условии, что площадь поверхности задана; задача об определении размеров пленочной таблицы; задача о наибольшей прибыли хозяйства от возделывания кукурузы; задача нахождения минимума себестоимости единицы продукции.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется функцией двух независимых переменных; областью определения функции?

2. В чем состоит геометрический смысл функции двух переменных?

3. Что называется частной производной функции двух переменных? Каков ее геометрический смысл?

4. Дайте определение частных производных второго порядка.

5. Что такое экстремум функции двух переменных?

6. Сформулируйте необходимые условия существования экстремума функции двух переменных.

7. Какие точки называются критическими, как они находятся?

8. Сформулируйте достаточные условия экстремума функции двух переменных.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

1. Найдите частные значения функций:

1) $f(x, y)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}$ в точке $P(5; 3)$; 2) $\varphi(x, y, z)=3x+\lg\frac{2x+y}{\sqrt{x^2+z}}$ в точке $P(1; -1; 99)$.

2. Найдите области определения функций:

1) $z=x+y-1$; 2) $f(x, y)=\frac{x+1}{x^2+y^2}$; 3) $z=x^2+y^2$.

3. Найдите первые частные производные по x и по y от следующих функций:

1) $z=x^2y^3$; 2) $z=e^{xy}$; 3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; 4) $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$;

5) $z=0{,}425-2{,}93x+6y-28{,}9y^2$; 6) $z=6x^2y-8xy^5-18x+11y-\frac{1}{2}$;

7) $z=x^2+xy+y^2$ в точке $P(1; 2)$; 8) $z=x^y$; 9) $z=\frac{x}{\sin y}$ в точке $(0, \pi/2)$.

4. Бункер-параллелепипед заполнен зерном. Выразите объем бункера как функцию его оснований и высоты. Вычислите частное значение функции при $x=125$, $y=275$, $h=200$ см. Вычислите массу зерна, если 1 м^3 зерна имеет массу 800 кг.

5. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную диагональ l, найдите размеры такого параллелепипеда, объем которого был бы наибольшим.

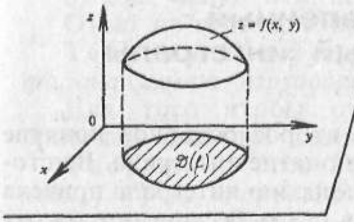
6. Рассчитайте такие размеры закрытого бака цилиндрической формы для водонапорной башни животноводческого комплекса, чтобы при заданном объеме $V=8\pi$ м^3 на его изготовление было израсходовано наименьшее количество материала.

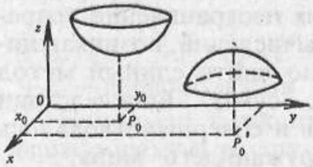
ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

$$\underbrace{S}_{\mathcal{D}(f)} = \underbrace{(X, Y): (x, y) \in (X, Y) \xrightarrow{f} z \quad z \in Z}$$

$z = f(x, y)$

Геометрический смысл





Частные и полное приращения

$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)$

$\Delta_y z = f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)$

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)$

Частные производные

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x} \end{aligned}\right\}$$ характеристика крутизны поверхности = равна скорости изменения функции

Выход продукта на единицу одного фактора

ЭКСТРЕМУМ — max, min

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (x_0, y_0) – точка максимума $\Leftrightarrow f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0$, x, y достаточно близки к x_0, y_0

Необходимые условия

$z'_x(x_0, y_0) = 0$ или не существует

$z'_y(x_0, y_0) = 0$ или не существует

x_0, y_0 – критическая точка

Проверка

Достаточные условия

x_0, y_0 – критическая точка

$A = (z''_{xx})_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$; $B = (z''_{xy})_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$;

$\left. C = (z''_{yy})_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \right\} \Rightarrow \Delta = AC - B^2$

$\Delta > 0,\ A > 0 \Leftrightarrow z(x_0;\ y_0) = \min z$

$\Delta > 0,\ A < 0 \Leftrightarrow z(x_0,\ y_0) = \max z$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ экстремума нет

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ неопределенный случай

Глава 9

Неопределенный и определенный интегралы

В этой главе излагается второе основное понятие математического анализа — понятие интеграла. В истории развития математики к понятию интеграла привела задача вычисления пределов сумм бесконечно малых величин, когда число слагаемых неограниченно возрастает. В связи с трудностями вычислений, возникавшими при этом, необходимо было найти единый метод определения пределов таких сумм. Впоследствии понятие интеграла развивалось и совершенствовалось как инструмент познания окружающего мира.

Как определить площадь плоской фигуры произвольной формы, величину работы, совершаемой переменной силой, количество вещества, вступившего в химическую реакцию, объем тела, потерю теплоты при охлаждении тела? Эти и многие другие задачи можно решить с помощью интеграла.

§ 9.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ

В гл. 7 было приведено правило, согласно которому по заданной функции можно найти ее производную. Рассмотрим действие, обратное действию нахождения производной.

Определение. *Дифференцируемая функция* $F(x)$ *называется первообразной по отношению к функции* $f(x)$ *на некотором интервале* (a, b), *если при* $x \in (a, b)$ $F'(x) = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = 2x$ первообразной является функция $F(x) = x^2$, так как $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$ для любых x; для функции $f(x) = \sin x$

первообразной служит функция $F(x)=-\cos x$, так как $F'(x)=(-\cos x)'=\sin x=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Возникают следующие три вопроса.

1) Существует ли первообразная для данной функции, или нет?

2) Если существует, то сколько первообразных может иметь данная функция?

3) Как найти эти первообразные?

Ответ на первый вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она имеет первообразную.*

Для того чтобы ответить на второй вопрос, приведем еще две теоремы.

Теорема 1. *Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то $F(x)+C$ — также первообразная, где C — произвольная постоянная.*

Доказательство. По условию, $F'(x)=f(x)$, но $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x)$; поэтому $F(x)+$ $+C$ — первообразная для $f(x)$. Теорема доказана.

Например, функции x^2+1, x^2-6, x^2+C являются первообразными для $f(x)=2x$.

Теорема 2. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для $f(x)$ на (a, b), то $F_1(x)-F_2(x)=C$ на (a, b), где C — постоянное слагаемое, конкретное для каждой пары $F_1(x)$ и $F_2(x)$.*

Доказательство. Пусть $F_1(x)-F_2(x)$ — некоторая функция от x. Найдем ее производную: $[F_1(x)-F_2(x)]'=F_1'(x)-F_2(x)=f(x)-f(x)=0$. Можно показать, что если функция имеет на (a, b) производную, равную нулю, то она постоянна на (a, b). Поэтому можно утверждать, что выражение $F(x)+C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$, а C — произвольная постоянная, определяет все первообразные для данной функции.

Определение. *Общее выражение $F(x)+C$ множества всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx$,* т. е.

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \qquad (9.1.1)$$

где $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение, $\int$ — знак неопределенного интеграла, x — переменная интегрирования.

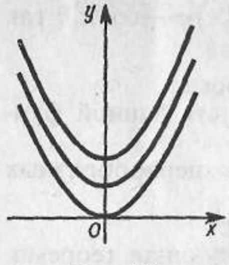


Рис. 105

Определение. *Операция нахождения первообразной по заданной производной или дифференциалу функции называется интегрированием.*

Интегрирование — действие, обратное дифференцированию, и его можно проверить дифференцированием.

Ответ на третий вопрос составит содержание последующего изложения.

Геометрический смысл неопределенного интеграла. Пусть дан неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Придавая произвольной постоянной конкретные числовые значения C_1, C_2, C_3, ..., C_n, получим следующие функции одной независимой переменной: $y_1 = F(x) + C_1$, $y_2 = F(x) + C_2$, $y_3 = F(x) + C_3$, ..., $y_n = F(x) + C_n$. В системе координат Oxy график каждой из функций представляет собой плоскую кривую. Все графики, называемые *интегральными кривыми*, сдвинуты друг относительно друга в направлении, параллельном оси Oy (рис. 105).

Вывод. Неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$ в системе Oxy представляет семейство плоских кривых, смещенных друг относительно друга вдоль оси Oy.

Если из этого семейства хотят выделить одну кривую, то заранее задают начальное условие. Например, необходимо выбрать такую из кривых (или ту первообразную), которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$. Условие $y = y_0$ при $x = x_0$ называют *начальным*.

● **Пример.** Найти первообразную для функции $f(x) = 2x$, график которой проходит через точку $M_0(2;\ 3)$.

Решение. Искомая первообразная для $f(x) = 2x$ содержится среди множества функций

$$y = x^2 + C. \qquad (9.1.2)$$

Определяем произвольную постоянную C по начальному условию. Из (9.1.2) получим $C = y - x^2$. Подставляя значение $x = 2$, $y = 3$, получаем $C = 3 - 4 = -1$.

Таким образом, $y = x^2 - 1$. Линия, определяемая уравнением $y = x^2 - 1$, проходит через точку $M_0(2;\ 3)$. ●

§ 9.2. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1^0. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.*

Это свойство вытекает из определения неопределенного интеграла. Если дано, что $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x) + C\right),$$

но

$$d(F(x) + C) = (F'(x) + C')\,dx = f(x)\,dx, \text{ т. е.}$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \qquad (9.2.1)$$

Например, $d\int x^2\,dx = x^2\,dx$; $d\int \cos x\,dx = \cos x\,dx$.

Свойство 1^0 кратко формулируется так: *знаки дифференциала и интеграла, поставленные рядом, взаимно уничтожаются.*

Следствие. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.*

Действительно, если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $F'(x) = f(x)$, то

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x), \text{ т. е.} \qquad (9.2.2)$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x). \qquad (9.2.3)$$

2^0. *Интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной, т. е.*

$$\int dF(x) = F(x) + C. \qquad (9.2.4)$$

Доказательство. Имеем $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$: по определению (9.1.1),

$$\int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Например, $\int d(\cos x) = \cos x + C$ и $\int dx = x + C$.

3^0. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. имеет место равенство.*

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a \neq 0.$$

Доказательство. Найдем дифференциалы от обеих частей этого равенства. Имеем

$$d\left(\int af(x)\,dx\right) = af(x)\,dx,$$

$$d\left(a\int f(x)\,dx\right) = \left(a\int f(x)\,dx\right)'dx = af(x)\,dx. \qquad (9.2.5)$$

Равенство $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ справедливо с точностью до постоянного слагаемого.

4^0. *Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные. Тогда функция $f_1(x) \pm f_2(x)$ также имеет первообразную, при этом*

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx.$$

Свойство проверяется дифференцированием.

Таблица основных формул интегрирования. Для того чтобы овладеть методами вычисления неопределенных интегралов, необходимо знать основные формулы интегрирования.

Пусть необходимо найти интеграл $\int x^\alpha dx$. Рассмотрим функцию $x^{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$, найдем ее дифференциал:

$$d(x^{\alpha+1}) = (\alpha+1)\, x^\alpha dx.$$

Вычислим неопределенный интеграл от обеих частей

$$\int d(x^{\alpha+1}) = \int (\alpha+1)\, x^\alpha dx = (\alpha+1) \int x^\alpha dx.$$

На основании свойства (9.2.4) получаем

$$x^{\alpha+1} + C_1 = (\alpha+1) \int x^\alpha dx,$$

откуда

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1} + C_1}{\alpha+1}.$$

Обозначив $\dfrac{C_1}{\alpha+1} = C$, запишем

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

Эта формула, как было отмечено выше, справедлива для любого действительного числа α, кроме $\alpha = -1$. При $\alpha = -1$ формула теряет смысл. В этом случае рассмотрим интеграл

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x}.$$

Так как

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x},$$

то можно записать

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x + C).$$

Возьмем интегралы от обеих частей этого равенства. Учитывая (9.2.4), получим

$$\int \frac{dx}{x} = \int d(\ln x + C) = \ln x + C.$$

Для того чтобы упростить действие интегрирования, составляют таблицу основных формул интегрирования. Ниже приведена таблица из 10 интегралов, однако существуют таблицы, содержащие несколько сотен и даже больше формул интегрирования. Вывод этих формул основан на прямом использовании определения неопределенного интеграла, а именно: производная правой части равна подынтегральной функции левой части равенства.

Таблица интегралов

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $e^x dx = e^x + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

5. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$ (9.2.6)

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

Формулы (9.2.6) записаны для переменной интегрирования x. Однако если x заменить на другую переменную интегрирования, которая может быть как независимой, так и функцией, то формулы остаются в силе. Например, $\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$, $\int \cos^{\alpha} x d(\cos x) = \frac{\cos^{\alpha+1} x}{\alpha+1} + C$, $\int \frac{d(x^2)}{\cos^2 x^2} = \operatorname{tg} x^2 + C$, $\int e^x d(e^x) = \frac{e^{2x}}{2} + C$ и т. д.

В этом состоит сущность понятия *инвариантности* формул интегрирования. Почти все интегралы в данной книге путем упрощений и преобразований подынтегрального выражения сводятся к табличным.

● **Примеры.**

1. Найти $\int (10x^5 + 6x^3 + 4x - 11)\,dx$.

Решение. На основании свойства 4^0 имеем

$$\int (10x^5 + 6x^3 + 4x - 11)\,dx = \int 10x^5 dx + \int 6x^3 dx + \int 4x dx - \int 11 dx.$$

По формуле (9.2.5) (свойство 3^0) находим $\int 10x^5 dx + \int 6x^3 dx +$

$$+ \int 4x dx - \int 11 dx = 10\int x^5 dx + 6\int x^3 dx + 4\int x dx -$$

$$-11\int dx = 10\frac{x^6}{6} + \frac{6x^4}{4} + \frac{4x^2}{2} - 11x + C = \frac{5}{3}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + 2x^2 - 11x + C.$$

Заметим, что четыре произвольные постоянные для всех четырех слагаемых объединены в одну и записаны в конце первообразной. ●

● 2. Найти $\int x^2 \sqrt[4]{x^3}\,dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию. Имеем

$$x^2\sqrt[4]{x^3} = x^2 x^{3/4} = x^{2+3/4} = x^{11/4},$$

$$\int x^2 \sqrt[4]{x^3}\,dx = \int x^{11/4} dx = \frac{x^{11/4+1}}{\frac{11}{4}+1} + C = \frac{4}{15}x^{15/4} + C = \frac{4}{15}x^3\sqrt[4]{x^3} + C. \text{ ●}$$

● 3. Найти $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sin x\right) dx$.

Решение. Получаем

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sin x\right) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + 2\int \sin x\,dx.$$

Подынтегральную функцию $\frac{1}{\sqrt{x}}$ преобразуем в степенную: $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$.

Далее находим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+2\int\sin x\,dx=\int x^{-1/2}dx+2\int\sin x\,dx=\frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}-$$

$$-2\cos x+C=2\sqrt{x}-2\cos x+C=2(\sqrt{x}-\cos x)+C. \bullet$$

● 4. Найти $\int\frac{\sqrt{x}-x+x^2}{x^2}dx.$

Решение. Почленно разделим числитель на знаменатель. В результате получаем

$$\frac{\sqrt{x}-x+x}{x^2}=x^{-3/2}-\frac{1}{x}+1\cdot\int\frac{\sqrt{x}-x+x^2}{x^2}dx=\int\left(x^{-3/2}-\frac{1}{x}+1\right)dx=$$

$$=\frac{x^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}-\ln|x|+x+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}-\ln|x|+x+C. \bullet$$

§ 9.3. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Еще из школьного курса математики можно сделать вывод, что действие вычитания сложнее, чем действие сложения, деление более трудно, чем умножение, извлечение корня труднее, чем возвышение в степень.

Операция дифференцирования функций, как мы видели, приводит к некоторым новым функциям, не выходящим из класса элементарных. Об операции интегрирования этого сказать нельзя. Существуют функции, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции. Вот несколько примеров таких функций: $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, e^{-x^2}, $\sin x^2$, $\cos x^2$, $(a+bx^2)^{1/3}x^{1/2}$ (a и b — действительные числа). Для подобных функций разработаны методы, позволяющие находить первообразные функции приближенно [13].

Интегрирование способом подстановки. Пусть необходимо найти интеграл $\int f(x)\,dx$. Может оказаться, что, взяв таблицу интегралов, содержащую, например, даже 150 формул, мы не найдем подходящей. Как следует поступить в данном случае? Первое, что можно сделать — это преобразовать подынтегральное выражение таким образом, чтобы полученный интеграл стал табличным.

Заменим переменную интегрирования x новой переменной, связанной с x функциональной зависимостью $u=\varphi(x)$, имеем

$$x=\varphi(u). \tag{9.3.1}$$

Найдем dx и выразим $f(x)$ и dx через новую переменную интегрирования. Тогда получим

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du. \tag{9.3.2}$$

Справедливость этой формулы проверяется дифференцированием обеих частей равенства. Если оказалось, что интеграл стал табличным или более простым, чем исходный, то цель замены переменной достигнута. Выполнив интегрирование, необходимо сделать обратную замену, т. е. выразить первообразную через исходную переменную интегрирования. Формула (9.3.2) иногда быстрее приводит к успеху, если ее применять в «обратном порядке»:

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int f[\varphi(x)]\,d\varphi(x).$$

Положив $u=\varphi(x)$, получим

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du.$$

● **Примеры.**

1. Найти $\int(4x-2)^6\,dx$.

Решение. Подынтегральная функция сложная. Введем новую переменную, положив $u=4x-2$, $du=(4x-2)'\,dx=4dx$, $dx=\dfrac{du}{4}$.

Внесем эти выражения в интеграл

$$\int u^6\frac{du}{4}=\frac{1}{4}\int u^6\,du=\frac{1}{4}\,\frac{u^7}{7}+C.$$

Сделаем обратную замену

$$\frac{1}{4}\,\frac{u^7}{7}+C=\frac{(4x-2)^7}{28}+C.$$

2. Найти $\int(2x+4)^{1/3}\,dx$.

Решение. Как и в предыдущем примере, принимаем $u=2x+4$. Тогда $du=2dx$, $dx=\dfrac{du}{2}$ и мы приходим к интегралу

$$\int u^{1/3}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^{1/3}\,du=\frac{1}{2}\,\frac{u^{4/3}}{4/3}+C=\frac{3}{8}(2x+4)^{4/3}+C.$$

3. Найти $\int\sqrt{2x^2-1}\,x\,dx$.

Решение. Заметив, что производная от $2x^2-1$ равна $4x$, положим $u=2x^2-1$. Найдем дифференциалы от обеих частей равенства. Имеем $du=4xdx$, откуда $xdx=\frac{1}{4}du$. Далее получаем

$$\int\sqrt{2x^2-1}\,xdx=\int\sqrt{u}\frac{du}{4}=\frac{1}{4}\int u^{1/2}du=\frac{1}{4}\cdot\frac{2u^{3/2}}{3}+C=$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{(2x^2-1)^3}+C=\frac{1}{6}(2x^2-1)\sqrt{2x^2-1}+C.$$

4. Найти $\int\sin^5 x\cos xdx$.

Решение. Тот факт, что $\cos xdx$ есть дифференциал от $\sin x$ приводит к мысли ввести подстановку $u=\sin x$. В дальнейшем рекомендуется оформлять решение следующим образом:

$$\int\sin^5 x\cos xdx=\left|\begin{array}{l}u=\sin x\\ du=\cos xdx\end{array}\right|=\int u^5du=\frac{u^6}{6}+C=\frac{\sin^6 x}{6}+C.$$

При наличии навыка запись решения примера 4 выглядит так:

$$\int\sin^5 x\cos xdx=\int\sin^5 xd(\sin x)=\frac{\sin^6 x}{6}+C. \bullet$$

2. Интегрирование по частям. Пусть u и v — две функции независимой переменной x, дифференцируемые на $[a,\ b]$. Напомним формулу

$$(u\cdot v)'=u'v+v'u.$$

Следовательно, $u\cdot v$ — первообразная для суммы $u'v+v'u$, поэтому

$$\int(u'v+v'u)\,dx=uv+C.$$

Отсюда имеем $\int vu'dx+\int uv'dx=uv+C$. Учитывая, что $u'dx=du$, $v'dx=dv$, получаем

$$\int vdu+\int udv=uv+C.$$

Окончательно имеем

$$\int udv=uv-\int vdu+C.$$

Так как $\int vdu$ включает произвольную постоянную, то в нее можно включить и слагаемое C. Окончательно получаем выражение

$$\int udv=uv-\int vdu, \qquad (9.3.3)$$

называемое *формулой интегрирования по частям*. Смысл применения формулы (9.3.3) состоит в том, чтобы подынтегральное выражение разделить на два сомножителя. В результате интеграл, стоящий в правой части, должен оказаться табличным, или берущимся с помощью замены переменной, или вообще более простым.

● **Пример.** Найти $\int \ln|x|\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int \ln|x|\,dx = \left|\begin{array}{l} u=\ln|x| \\ dv=dx \\ v=x \\ du=\dfrac{dx}{x} \end{array}\right| = x\ln|x| - \int x\frac{dx}{x} = x\ln|x| - x + C. \quad ●$$

§ 9.4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

К понятию определенного интеграла приводит задача нахождения площади криволинейной трапеции.

Пусть на некотором интервале $[a, b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)>0$. Построим ее график и найдем площадь F_a^b фигуры, ограниченной этой кривой, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, а снизу — отрезком оси абсцисс между точками $x=a$ и $x=b$ (рис. 106). Фигура $aABb$ называется *криволинейной трапецией*. Существование ее площади F_a^b как числа, основанное на интуиции, является допущением и требует доказательства.

Разделим интервал $[a, b]$ на n равных частичных интервалов точками деления $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$. Из точек деления восставим перпендикуляры до пересечения с кривой AB. Вся площадь F_a^b разобьется на ряд частичных площадей ΔS_i с основанием $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Тогда $F_a^b = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Площадь ΔS_i можно вычислить приближенно, взяв наименьшее m_i или наибольшее M_i значение функции на частичном интервале Δx_i. Взяв сначала наименьшее значение функции на каждом частичном интервале, а затем наибольшее, получим две ступенчатые фигуры. Ступенчатая фигура, изображенная сплошной линией, имеет площадь $\underline{F}_n$, меньшую искомой, а другая ступенчатая фигура, изображенная пунктиром, имеет площадь $\overline{F}_n$ бóльшую искомой, т. е.

$$\underline{F}_n < F_a^b < \overline{F}_n.$$

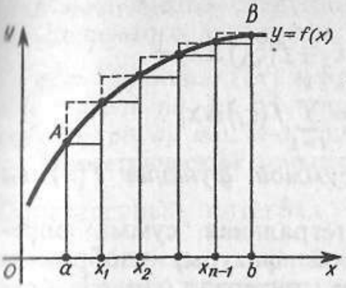


Рис. 106

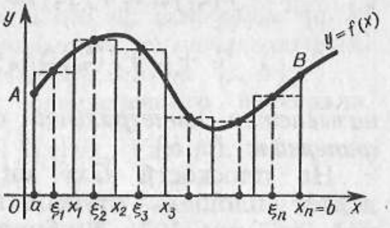


Рис. 107

Будем уменьшать длину каждого частичного интервала Δx_i; тогда число интервалов будет возрастать. Например, если длину Δx уменьшить в 2 раза, то число частичных интервалов возрастает в 2 раза, разность между m_i и M_i уменьшается и величины $\underline{F}_n$ и $\overline{F}_n$ сближаются и стремятся к пределу F_a^b. Таким образом,

$$F_a^b=\lim_{n\to\infty}\underline{F}_n=\lim_{n\to 0}\overline{F}_n.$$

К такому же выводу можно прийти, если интервал $[a, b]$ разбить на частичные интервалы произвольной длины и учесть, что $n\to\infty$, а длина наибольшего частичного интервала $\Delta x_i\to 0$.

Кроме того, на каждом частичном интервале можно брать не m_i и M_i, а несколько большие значения, чем m_i, и несколько меньшие, чем M_i, значения функции.

Учитывая обобщения, продолжим рассмотрение. Пусть на интервале $[a, b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. Построим ее график (рис. 107). Разобьем интервал на n частичных интервалов, не обязательно равных, точками деления $x_1<x_2<x_3<...<x_{n-1}$. Обозначим каждый частичный интервал и его длину через Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n. Внутри каждого интервала Δx_i выберем точку ξ_i, $i=1, 2, 3, ..., n$, и вычислим значения функции $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $f(\xi_3)$, ..., $f(\xi_n)$ в этих точках. Составим произведения $f(\xi_1)\Delta x_1$, $f(\xi_2)\Delta x_2$, $f(\xi_3)\times$ $\times\Delta x_3$, ..., $f(\xi_n)\Delta x_n$. С геометрической точки зрения каждое такое произведение определяет площадь полоски с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$, $i=1, 2, 3, ..., n$.

Определение. *Сумма*

$$f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+f(\xi_3)\Delta x_3+$$
$$+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется интегральной суммой функции $f(x)$ *на интервале* $[a, b]$.

На плоскости Oxy интегральная сумма определяет площадь ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 107. Разбивая интервал $[a, b]$ другими точками деления на частичные интервалы и выбирая внутри них точки ξ_i по-иному, можно составить множество интегральных сумм. Найдем предел суммы вида $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, когда длина наибольшего частичного интервала $\Delta x_i \to 0$ и с необходимостью $n\to\infty$, т. е.

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определение. *Число* I *называется пределом интегральной суммы* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ *при* $\max\Delta x_i\to 0$, *если для любого* $\varepsilon>0$ *найдется такое* $\delta>0$, *что при* $\max\Delta x_i<\delta$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon.$$

Этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ *на интервале* $[a, b]$ *и обозначается*

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0,\, n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx. \qquad (9.4.1)$$

Здесь a и b — *соответственно нижний и верхний пределы интегрирования*; $f(x)$ — *подынтегральная функция*; x — *переменная интегрирования*.

По определению,

$$\int_a^a f(x)\,dx=0. \qquad (9.4.2)$$

Если существует конечный предел (9.4.1), то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$.

Имеет место следующая теорема существования определенного интеграла:

если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$ или имеет на $[a, b]$ конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на $[a, b]$.

Геометрический смысл определенного интеграла. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)\geqslant 0$, дает точное значение площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$.

Определенный интеграл как площадь не зависит от обозначения переменной интегрирования, так что

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(z)\,dz=\int_a^b f(t)\,dt \text{ и т. д.}$$

Рассмотренный принцип определения площади криволинейной трапеции, состоящий в том, что вся искомая площадь разбивается на части, находится приближенное выражение для каждой части, а затем целое вычисляется как предел суммы частей, применяется при решении ряда других задач. Важно уяснить, что определенный интеграл есть предел суммы неограниченно возрастающего числа слагаемых при условии, что каждое слагаемое неограниченно уменьшается.

§ 9.5. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Вычисление определенного интеграла по формуле (9.4.1) даже для простейших функций приводит к сложным преобразованиям. Поэтому целесообразно найти метод, позволяющий вычислять определенные интегралы без составления интегральных сумм и перехода к пределам.

Пусть дана функция $y=f(x)$, непрерывная на $[a, b]$, $a<b$, и имеющая первообразную $F(x)+C$. Построим график функции $y=f(x)$ и возьмем на кривой точки A и P (рис. 108). Положим, что точка A неподвижна, ее координаты $(a, f(a))$, а точка P движется, ее координаты $(x, f(x))$. Тогда площадь криволинейной трапеции A_1APP_1 является переменной величиной, зависящей от x. Обозначим ее через

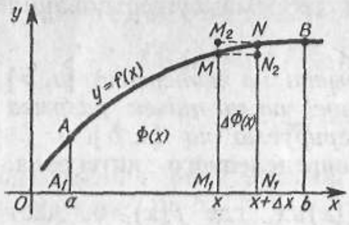


Рис. 108

S и, учитывая геометрический смысл определенного интеграла, запишем

$$S=\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \quad (9.5.1)$$

В подынтегральной функции переменная интегрирования x заменена на t, так как буквой x обозначен верхний предел. Докажем, что $\Phi(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, т. е. что

$$S'=\Phi'(x)=f(x).$$

Придадим аргументу x приращение $M_1N_1=\Delta x$; тогда площадь $\Phi(x)$ получит приращение $\Delta\Phi(x)$, равное площади криволинейной трапеции M_1MNN_1.

Введем следующие обозначения. Пусть Y и y — соответственно наибольшая и наименьшая ординаты графика функции на интервале $[x, x+\Delta x]$. Криволинейная трапеция M_1MNN_1 находится внутри прямоугольника с основанием Δx и высотой Y и содержит внутри себя прямоугольник с тем же основанием Δx и высотой y (рис. 108). Поэтому

$$y\Delta x\leqslant\Delta\Phi(x)\leqslant Y\Delta x. \quad (9.5.2)$$

Разделив неравенство (9.5.2) на Δx, получим

$$y\leqslant\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}\leqslant Y. \quad (9.5.3)$$

Рассмотрим поведение величин, входящих в это неравенство при $\Delta x\to 0$. Величины y и Y в силу непрерывности функции $f(x)$ будут стремиться к общему пределу $M_1M=f(x)$ — ординате кривой в точке x ($f(x)$ — фиксированное значение функции). Так как величина $\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}$ находится между двумя другими величинами, имеющими при $\Delta x\to 0$ один и тот же предел, то $\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}$ имеет тот же предел (см. правило 8 § 6.6), т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(x), \quad (9.5.4)$$

или

$$\Phi'(x)=f(x). \qquad (9.5.5)$$

Итак, учитывая (9.5.1) и (9.5.5), можно утверждать, что определенный интеграл с переменным верхним пределом является первообразной функцией для подынтегральной функции. Если известна какая-нибудь одна первообразная функция $F(x)$ для $f(x)$, то нетрудно найти величину определенного интеграла. Покажем, как это сделать.

В соответствии с теоремами 1 и 2 (см. § 9.1) можно написать

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+C. \qquad (9.5.6)$$

Определим произвольную постоянную C. Из рис. 108 видно, что если $x=a$, то $\Phi(a)=0$. Имеем

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)\,dt=F(a)+C. \qquad (9.5.7)$$

Таким образом,

$$F(a)+C=0 \qquad (9.5.8)$$

и

$$C=-F(a). \qquad (9.5.9)$$

Заменим теперь в (9.5.6) x на b, а переменную интегрирования обозначим, как обычно, через x. Получаем

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)+C.$$

Учитывая (9.5.9), запишем

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \qquad (9.5.10)$$

Вывод. Определенный интеграл есть приращение первообразной функции при изменении переменной интегрирования x от a до b.

Формула (9.5.10) называется *формулой Ньютона — Лейбница* *.

---

* В. Г. Лейбниц (1646—1716) — знаменитый немецкий философ и математик. И. Ньютон (1642—1727) — величайший английский физик и математик. Им принадлежит заслуга создания дифференциального и интегрального исчисления.

П р а в и л о. *Чтобы вычислить определенный интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$, *достаточно*:

1) *найти неопределенный интеграл от данной функции, положив* $C=0$;

2) *подставить в выражение первообразной вместо аргумента* x *сначала верхний предел* b, *затем нижний предел* a, *из первого результата вычесть второй.*

Приведем пример (обратите внимание на порядок оформления решения).

● **Пример.** Найти $\int_1^2 x^2\,dx$.

1. Находим неопределенный интеграл, полагая $C=0$. Имеем

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}.$$

2. Вычисляем приращение первообразной:

$$\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

При наличии навыка запись решения примера должна выглядеть так:

$$\int_1^2 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

Основные свойства определенного интеграла. Понятие «определенный интеграл» введено для случая $a<b$. При $a=b$, по определению, $\int_a^b f(x)\,dx=0$, где $f(x)$ — любая функция.

1^0. *Пусть* $b<a$, функция $f(x)$ *интегрируема на* $[b, a]$; *тогда, по определению,*

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

2^0. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$, *то функция* $Kf(x)$, *где* K — *постоянная, также интегрируема на этом отрезке, при этом*

$$\int_a^b Kf(x)\,dx=K\int_a^b f(x)\,dx.$$

3^0. *Если две функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *интегрируемы на* $[a, b]$, *то их сумма и разность также интегрируемы на* $[a, b]$ *и имеет место равенство*

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Свойства 2^0 и 3^0 доказываются с помощью построения интегральных сумм и перехода к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$.

4^0. *Замена переменной в определенном интеграле производится по формуле*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt,$$

где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $\varphi(t) \in [a, b]$ *для любого* $t \in [\alpha, \beta]$, *функции* $\varphi(t)$ *и* $\varphi'(t)$ *непрерывны на* $[\alpha, \beta]$. ●

Покажем, как используется свойство 4^0 на примере.

● **Пример.** Найти $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$.

Решение. Положим $8 - x = t$, тогда $-dx = dt$, откуда $dx = -dt$.

Находим новые пределы интегрирования. Для этого составим таблицу, в верхней строке которой записаны пределы изменения переменной интегрирования x, а в нижней — пределы для t, вычисленные по формуле $t = 8 - x$:

x	0	7
t	8	1

Таким образом,

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}} - \int_8^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \int_1^8 t^{-\frac{2}{3}}\, dt = 3t^{\frac{1}{3}} \Big|_1^8 =$$

$$= 3\sqrt[3]{t} \Big|_1^8 = 3\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3. \text{ ●}$$

Среднее значение функции. Пусть $f(x)$ — функция, интегрируемая на $[a, b]$. Число $C = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a}$ называется *средним значением функции на отрезке* $[a, b]$.

● **Пример.** Найти среднее значение функции $f(x) = x^2 + 0{,}5$ на отрезке $[1, 4]$.

Решение. Имеем $a = 1$, $b = 4$, $b - a = 3$. Далее находим

$$\int_1^4 (x^2+0{,}5)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+0{,}5x\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\frac{4^3}{3}+0{,}5\cdot 4-\left(\frac{1^3}{3}+0{,}51\right)=\frac{64}{3}+2-\frac{1}{3}-0{,}5=22{,}5.$$

Таким образом $C=\dfrac{22{,}5}{3}=7{,}5.$ ●

§ 9.6. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ, ФИЗИКИ И БИОЛОГИИ

1. Площадь плоскостей фигуры. В § 9.4 было показано, что $\int_a^b f(x)\,dx$ при $f(x)\geqslant 0$ определяет площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y=f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$. В случае, если $f(x)<0$, в формуле (9.5.10) имеет место знак «$-$». Абсолютная величина выражает искомую площадь, т. е.

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|. \qquad (9.6.1)$$

Если график функции $y=f(x)$ на интервале $[a,\,b]$ несколько раз пересекает ось Ox, то необходимо вычислить площади фигур, расположенных выше оси Ox, а также площади фигур, которые лежат ниже оси Ox, и сложить их абсолютные величины. Так, площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рис. 109, равна

$$S=|S_1|+|S_2|+|S_3|=S_1+|S_2|+S_3=$$
$$=\int_a^C f(x)\,dx+\left|\int_c^d f(x)\,dx\right|+\int_d^b f(x)\,dx. \qquad (9.6.2)$$

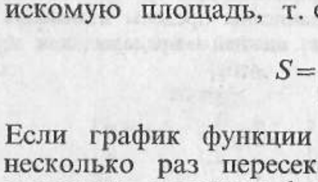


Рис. 109

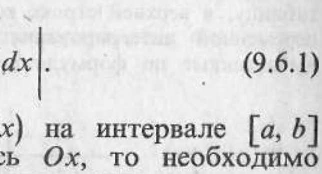


Рис. 110

Если плоская фигура ограничена несколькими линиями (рис. 110), то формула для вычисления площади такой фигуры имеет вид

$$S=\int_a^b \left[f(x)-\varphi(x)\right] dx. \qquad (9.6.3)$$

Линии $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ пересекаются в точках A и B. Опустим из точек A и B перпендикуляры на Ox. Основания этих перпендикуляров — точки с абсциссами a и b, которые являются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования. Числа a и b находят из решения системы, в которую входят уравнения обеих кривых.

Искомая площадь

$$S_{A_m B_n A}=S_{aA_m B_b}-S_{aA_n B_b}=$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b f(x)-\varphi(x)\,dx.$$

2. Работа, совершаемая переменной силой. Пусть на материальную точку в положительном направлении оси Ox действует сила $\vec{F}(x)$, в результате чего точка перемещается из положения $x=a$ в положение $x=b$. Найдем совершаемую при этом работу. Если $\vec{F}(x)$ постоянна, то $A=|\vec{F}(x)|(b-a)$. Если величина силы меняется в зависимости от точки приложения, то эта формула непригодна.

Разобьем интервал $[a, b]$ на ряд частичных интервалов $\Delta x_1=x_1-a$, $\Delta x_2=x_2-x_1$, $\Delta x_3=x_3-x_2$, ..., $\Delta x_n=b-x_{n-1}$. При малых Δx_i сила $\vec{F}(x)$ изменяется незначительно и на этом интервале ее можно считать постоянной. На каждом частичном интервале можно приближенно вычислить соответствующую работу ΔA_i. Имеем

$$\Delta A_i \approx |\vec{F}(c_i)|\,\Delta x_i,\quad x_i \leqslant c_i \leqslant x_i.$$

Работа на всем пути

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} |\vec{F}(c_i)|\,\Delta x_i.$$

Приближенное значение A будет тем точнее, чем меньше длина частичных интервалов. Точное значение работы

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |\vec{F}(c_i)|\Delta x_i.$$

Сравнивая это выражение с формулой (9.4.1), видим, что в правой части равенства находится сумма, построенная как и сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, только функция $f(x)$ заменена на $|\vec{F}(c_i)| = F(x)$. Следовательно,

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{9.6.4}$$

Вывод. Величина работы, совершаемой переменной силой, направление которой совпадает с направлением движения, равна определенному интегралу от величины силы по длине пути.

3. Вычисление пути при неравномерном движении. Пусть время движения изменяется от t_0 до T. При равномерном движении пройденный путь равен произведению скорости v на время движения $T - t_0$, т. е.

$$s = v(T - t_0), \quad v = \text{const}.$$

В случае неравномерного движения эта формула непригодна. Разобьем интервал $[t_0, T]$ на ряд частичных интервалов $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_2 = t_2 - t_1$, $\Delta t_3 = t_3 - t_2$, ..., $\Delta t_n = T - t_{n-1}$. При малых Δt_i скорость $v_{(t)} = |\vec{v}(t)|$ изменится незначительно и на каждом частичном интервале ее приближенно можно считать постоянной. Вычислим на каждом частичном интервале скорость $|\vec{v}(c_i)|$, $t_{i-1} \leqslant c_i \leqslant t_i$, и найдем величину пройденного пути $\Delta s_i \approx |\vec{v}(c_i)|\Delta t_i$, $i = 1, 2, 3, ..., n$. Весь пройденный путь

$$s \approx v(c_1)\Delta t_1 + v(c_2)\Delta t_2 + v(c_3)\Delta t_3 + ...$$
$$... + v(c_n)\Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i.$$

Значение величины пути будет вычислено тем точнее, чем меньше частичные интервалы времени Δt_i. Точное значение s получим как предел суммы, т. е.

$$s = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i.$$

В правой части равенства находится предел интегральной суммы функции $v(t)$ на интервале $[t_0, t_n]$, равный соответствующему определенному интегралу

$$s=\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt. \tag{9.6.5}$$

Например, если $v(t)=10t+5$ (м/с), то путь, пройденный от начала движения до конца 7-й секунды, равен

$$s=\int_0^7 (10t+5)\,dt=(5t^2+5t)\big|_0^7=$$
$$=5\cdot 7^2+35-5\cdot 0-5\cdot 0=280 \text{ (м)}.$$

4. Вычисление объема тела вращения. Пусть дана непрерывная функция $y=f(x)$, $x\in[a, b]$. Построим криволинейную трапецию $aABb$, ограниченную графиком $y=f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 111) и будем вращать ее вокруг оси Ox. Полученное при этом тело называется *телом вращения*. Вычислим его объем.

Разобьем интервал $[a, b]$ на ряд частичных интервалов точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$ и проведем через эти точки плоскости, перпендикулярные оси Ox. Объем тела вращения также разобьется на ряд частичных объемов ΔV_i. Величину ΔV_i можно считать приближенно равной объему цилиндра с высотой Δx_i и радиусом основания $f(c_i)$, где $x_{i-1}\leqslant c_i\leqslant x_i$ (рис. 111). Таким образом,

$$\Delta V_i\approx\pi(f(c_i))^2\,\Delta x_i.$$

Объем тела вращения V приближенно равен сумме частичных объемов:

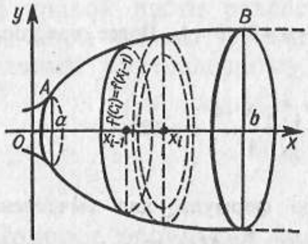


Рис. 111

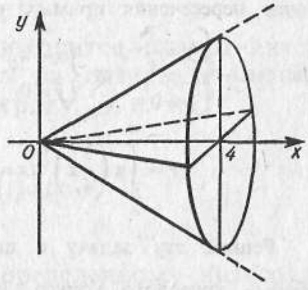


Рис. 112

$$V \approx \pi (f(c_1))^2 \Delta x_1 + \pi (f(c_2))^2 \Delta x_2 + \pi (f(c_3))^2 \Delta x_3 + \dots$$
$$\dots + \pi (f(c_n))^2 \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \pi (f(c_i))^2 \Delta x_i.$$

Объем V будет вычислен тем точнее, чем меньше частичные интервалы Δx_i. Выражение $\sum_{i=1}^{n} \pi (f(c_i))^2 \Delta x_i$ есть интегральная сумма функции $\pi (f(x))^2$ на интервале $[a, b]$, предел которой при $\max \Delta x_i \to 0$ равен определенному интегралу. Окончательно имеем

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi (f(c_i))^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx,$$

или

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx, \tag{9.6.6}$$

где $y = f(x)$. Если предположить, что кривая $y = f(x)$ вращается вокруг оси Oy, то формула для вычисления объема тела вращения принимает вид

$$v = \pi \int_a^b x^2 \, dy, \text{ где } x = \varphi(y). \tag{9.6.7}$$

● **Пример.** Предположим, что фигура, ограниченная прямыми $y = \frac{3}{4}x$, $x = 4$ и осью Ox, вращается вокруг оси Ox. Полученное тело вращения — конус (рис. 112). Вычислить его объем.

Решение. Пределами интегрирования являются абсциссы точек пересечения прямых $y = \frac{3}{4}x$ и $x = 4$ с осью Ox. Решаем системы $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x, \\ y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 4, \\ y = 0 \end{cases}$. Итак, $a = 0$, $b = 4$. Далее находим

$$V = \int_0^4 \pi \left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx = \frac{9}{16}\pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{9}{4^2} \cdot \frac{4^3}{3}\pi = 12\pi.$$

Решим эту задачу с помощью формулы для вычисления объема кругового конуса. Имеем $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Находим радиус основания. Из уравнения $y=\frac{3}{4}x$ при $x=4$ имеем $y=3 \Rightarrow R=3$. Высота конуса $h=4$. Таким образом,

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi 3^2 4=12\pi. \quad \bullet$$

5. Прирост численности популяции. Пусть известна скорость $v(t)$ роста некоторой популяции.

Требуется найти прирост численности $N(t)$ за промежуток времени от t_0 до T. Если скорость роста постоянна, то $N(t)=v(T-t_0)$. Если скорость изменяется, то этой формулой воспользоваться нельзя.

Разобьем интервал $[t_0, T]$ на ряд частичных интервалов Δt_i и вычислим прирост популяций $\Delta N(c_i)$, на каждом частичном интервале имеем

$$\Delta N(c_i)\approx v(c_i)\Delta t_i, \quad t_{i-1}\leqslant c_i\leqslant t_i.$$

При малых Δt_i скорость размножения изменяется незначительно. Весь прирост составит

$$N(t)\approx \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i.$$

Чем меньше частичные интервалы времени, тем точнее найденное значение $N(t)$, так как за малый промежуток времени скорость размножения на каждом интервале Δt_i изменяется незначительно. Точное значение $N(t)$ равно пределу $\sum\limits_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i$, когда наибольшее значение $\Delta t_i\to 0$. Имеем

$$N(t)=\lim_{\max \Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i.$$

В правой части равенства находится предел интегральной суммы функции $v(t)$ на интервале $[t_0, T]$, равный определенному интегралу, т. е.

$$N(t)=\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt.$$

Прирост популяции равен определенному интегралу от скорости по интервалу времени ее размножения.

§ 9.7. ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ. ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

Понятие определенного интеграла было введено для функций, заданных на интервале $[a, b]$. Обобщим понятие интеграла на случай функций, определенных на неограниченных интервалах.

Определение. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на бесконечном интервале* $[a, +\infty)$ *и интегрируема на любом интервале* $[a, b]$, *где* $b < +\infty$. *Если существует* $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, *то этот предел называется несобственным интегралом функции* $f(x)$ *на интервале* $[a, +\infty)$ *и обозначается* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (9.7.1)$$

Геометрическое представление интеграла (9.7.1) дано на рис. 113. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ равен площади бесконечной полосы, простирающейся вправо. Воспользовавшись формулой Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

найдем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} (F(b) - F(a)). \qquad (9.7.2)$$

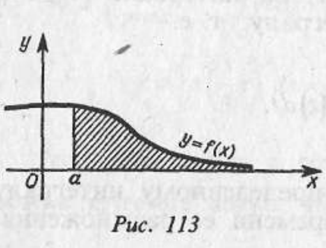


Рис. 113

Если этот предел — некоторое число, то интеграл

$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если предела не существует, или он равен ∞, то говорят, что интеграл расходится.

Интеграл вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ вычисляют по формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

а затем по формуле (9.7.1); a — любое число.

● **Пример.** Установить, сходятся ли интегралы:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Решение. Имеем

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} x^{-2}\,dx = \lim \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) + \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{1} = 1.$

Таким образом, интеграл сходится.

2) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+a} \ln x\Big|_2^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b - \lim\limits_{b\to+\infty} \ln 1 = \infty.$

Следовательно, интеграл расходится. ●

Интеграл Пуассона. В теории вероятностей встречается интеграл с двумя бесконечными пределами вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$

Первообразная для e^{-x^2/a^2} не выражается в элементарных функциях, однако этот интеграл хорошо изучен.

Полагая $a=1$, получаем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ — интеграл Пуассона*. Интеграл Пуассона сходится, и его значение равно $\sqrt{\pi}$.

§ 9.8. ВЫВОДЫ

Функция $F(x)$, производная от которой равна данной функции $f(x)$, $x\in(a, b)$, называется первообразной для $f(x)$. Действие нахождения первообразных называется интегрированием. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ для данной функции $y=f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

В гл. 9 приведены 10 основных формул интегрирования, к которым с помощью метода подстановки и метода интегрирования по частям приводятся примеры, рассмотренные в настоящем курсе.

К понятию определенного интеграла приводит задача вычисления площади криволинейной трапеции.

Определенный интеграл функции $y=f(x)$ при $x\in\in[a, b]$ является пределом интегральной суммы функции $f(x)$ на интервале и обозначается символом

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Под знаком определенного интеграла та же функция, что и под знаком суммы. Определенный интеграл есть предел суммы неограниченно растущего числа слагаемых при условии, что каждое слагаемое стремится к нулю. Трудности, возникающие при вычислении пределов таких сумм, как правило, можно преодолеть с помощью формулы Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

---

* С. Д. Пуассон (1781—1840) французский математик, физик и механик. Задача вычисления интеграла впервые поставлена Л. Эйлером (1707—1783).

Определенный интеграл — это значение приращения любой первообразной для данной функции $f(x)$ при изменении переменной интегрирования x от a до b. Приложения определенного интеграла многочисленны; в главе изложены задачи вычисления:

1) площади плоской фигуры

$$s=\int_a^b f(x)\,dx, \text{ или } s=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))\,dx;$$

2) работы, совершаемой переменной силой

$$A=\int_a^b F(x)\,dx;$$

3) пути в случае неравномерного движения

$$s=\int_{t_0}^T v(t)\,dt;$$

4) объема тела вращения

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx, \text{ или } V=\pi\int_c^d x^2\,dy;$$

5) прироста численности популяции микроорганизмов

$$N(t)=\int_{t_0}^T v(t)\,dt.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение первообразной функции.

2. Что такое неопределенный интеграл от данной функции?

3. Что называется интегрированием функции?

4. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.

5. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?

6. Напишите основные формулы интегрирования.

7. В чем состоит способ подстановки и интегрирование по частям?

8. Сформулируйте задачу, приводящую к понятию определенного интеграла.

9. Что такое интегральная сумма функции $y=f(x)$ на интервале $[a,\ b]$?

10. Что называется определенным интегралом от данной функции на данном интервале. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?

11. Сформулируйте свойства определенного интеграла.

12. Напишите формулу Ньютона—Лейбница.

13. Какие интегралы называются несобственными, как они вычисляются?

14. Напишите формулу вычисления объема тела вращения в случае, когда осью вращения является ось Ox; ось Oy.

15. Напишите формулу для вычисления работы, совершаемой переменной силой на прямолинейном участке пути.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите первообразную для функции $f(x)=x-4$, которая равна 2 при $x=4$.

2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=2\sin x+3\cos x$, если $F(x)=4$ при $x=0$.

3. Найдите первообразную для функции $f(x)=\frac{2}{x}-1$, которая будет равна 6 при $x=1$.

4. Скорость движения тела задана уравнением $v=4t^2+1$ м/с. Найдите уравнение движения, если в момент $t=3$с пройденный путь равен 60 м.

5. Касательная, проведенная к графику $y=F(x)$ имеет угловой коэффициент, величина которого обратна квадрату абсциссы точки касания. Найдите уравнение линии, если известно, что она проходит через точку $A(1;\ 3)$.

6. Найдите:

1) $\int(3x-5)^5\,dx$; 2) $\int\cos 3x\,dx$;

3) $\int(a+bx)^m\,dx$; 4) $\int\sqrt{x+4}\,dx$;

5) $\displaystyle\int\frac{dx}{(4x+1)^3}$; 6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^2}}$;

7) $\int\sin 2x\,dx$; 8) $\int(\sin 2x-\cos 4x)\,dx$;

9) $\displaystyle\int\cos\left(\frac{1}{3}\varphi-4\right)d\varphi$; 10) $\int A\cos kt\,dt$;

11) $\int e^{2x}\,dx$; 12) $\int e^{-4x}\,dx$;

13) $\int \frac{dx}{2e^x}$; 14) $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$;

15) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{6x^4-11}}$; 16) $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$;

17) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$; 18) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

19 $\int \frac{\ln x\,dx}{x}$; 20) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+1}dx$;

21) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

7. Вычислите определенные интегралы:

1) $\int\limits_0^2 x\,dx$; 2) $\int\limits_0^3 x^2dx$; 3) $\int\limits_{-1}^1 2x^3dx$;

4) $\int\limits_0^2 (2x+4)dx$; 5) $\int\limits_1^2 e^x(1+x)dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx$;

7) $\int\limits_{-0,1}^{0,1} xe^{-x^2/2}dx$; 8) $\int\limits_1^5 \sqrt{x-1}\,dx$; 9) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$;

10) $\int\limits_0^{\pi} \sin^3\frac{x}{6}\,dx$.

8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

1) осями координат, прямой $x=3$ и параболой $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$;

2) параболой $y=-x^2+6x-5$ и осью Ox.

9. Вычислите площадь эллипса с полуосями a и b.

10. На 1 га земли требуется 60 т навоза и 120 кг минеральных удобрений. Сколько удобрений надо внести на участок, если он ограничен линиями $7x-2y=3$, $5x+y=7$, $y=0$, (x и y — в км)?

11. Вычислите объем тела, образованного в результате вращения фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2=x$, $x=1$, $y=0$ вокруг оси Ox и оси Oy;

2) $xy=4$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ вокруг оси Ox;

3) $y=x^3$, $x=2$, $y=0$ вокруг оси Ox.

12. Вычислите объем тела вращения, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=0$ (x и y — в м). Какова масса продукта, заполняющего этот объем, если 1 м^3 весит 0,4 т?

13. Вычислите объем тела вращения, образованного в результате вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями

$x=e^{-y}$, $y=0$, $x=0$, $y=-1$, x и y измерены в метрах. Сколько потребуется рейсов пятитонного грузовика для перевозки груза, заполняющего этот объем, если масса 1 $м^3$ равна 400 кг?

14. Высота кучи зерна, имеющей коническую форму, равна 2,5 м, а окружность ее основания 20 м. Масса 1 $м^3$ зерна равна 750 кг. Какова масса зерна в куче?

15. Вычислите работу, совершаемую при растяжении пружины на 10 см, если для растяжения ее на 1 см необходима сила 60 Н.

Указание. Согласно закону Гука, сила растяжения упругой пружины прямо пропорциональна величине растяжения.

16. К пружине подвешена гиря 60 кг, растянувшая ее на 20 см. Определите работу, совершаемую при этом силой тяжести.

В дифференциальном исчислении

Дано: $y = f(x)$. Найти $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = y'$

y' – производная функция

В интегральном исчислении

Дано: $F'(x) = f(x)$.

Найти $F(x) + C = \int f(x)\,dx$

$F(x)$ – первообразная

Таблица производных
(см. в книге)

Таблица интегралов
(см. в книге)

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Свойства

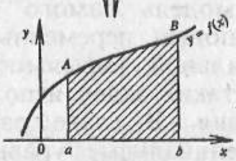
1. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$
2. $\int dF(x)\,dx = F(x) + C$
3. $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$
4. $\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$

Простейшие приемы интегрирования

I. Замена переменной

II. Интегрирование по частям

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ



$$S_{aABb} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$(x_i \leq \xi_i \leq x_{x+1})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Свойства

1. $\int_a^b Af(x)\,d(x) = A\int_a^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
4. $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx$
5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$

Несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = A$$

Если A число $\Rightarrow$ интеграл сходится; если $A = \infty \Rightarrow$ интеграл расходится

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ – интеграл Пуассона

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Площадь плоской фигуры: $S = \int_a^b f(x)\,dx$
2. Работа, совершаемая переменной силой $F(x)$: $A = \int_a^b F(x)\,dx$
3. Длина пути $s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$ ($v(t)$ – скорость)
4. Объем тела вращения $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy$
5. Прирост численности популяции $N(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$

Глава 10

Простейшие дифференциальные уравнения

Многочисленные задачи естествознания, техники и механики, биологии, медицины и других отраслей знания сводятся к тому, что по заданным свойствам некоторого процесса или явления необходимо найти математическую модель самого процесса в виде формулы, связывающей переменные величины, т. е. в виде функциональной зависимости.

При изучении таких задач используют дифференциальные уравнения. В главе рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения.

В дальнейшем вместо «обыкновенные дифференциальные уравнения» будем писать «дифференциальные уравнения».

§ 10.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Уже был рассмотрен простейший тип дифференциальных уравнений, когда по заданной производной находится первообразная функция. Так, если было известно, что $y'=f(x)$ или $y'-f(x)=0$, то неизвестная функция y определялась из равенства

$$y=\int f(x)dx.$$

● **Задача 1.** Скорость реакции, т. е. количество вещества, вступающего в реакцию в единицу времени, пропорциональна произведению масс веществ, еще не вступивших в реакцию. Определить закон течения реакции взаимодействия двух веществ равной массы m, т. е. выразить зависимость между количеством вещества, вступившего в реакцию, и временем t от ее начала, если известно, что массы веществ, вступивших в реакцию, в любой момент времени одинаковы.

Обозначим через x массу каждого из веществ, вступивших в реакцию к моменту времени t. Остаток массы, т. е. масса, не вступившая в реакцию, равна $m-x$, а произведение оставшихся масс равно $(m-x)^2$.

Тогда, обозначая скорость $\frac{dx}{dt}$, имеем

$$\frac{dx}{dt}=-k(m-x)^2, \qquad (10.1.1)$$

где $k>0$ — коэффициент пропорциональности. Знак минус берется потому, что с течением времени масса m уменьшается. ●

● **Задача 2.** Опытным путем установлено, что при брожении кормов скорость изменения массы (прироста) действующего фермента пропорциональна его наличному количеству. Найти закон изменения массы фермента в зависимости от времени.

Обозначим через $x(t)$ массу фермента, образовавшуюся к моменту времени t. Тогда, учитывая, что скорость прироста равна производной $\frac{dx}{dt}$, имеем

$$\frac{dx}{dt}=kx(t). \qquad (10.1.2)$$

В рассмотренных задачах мы пришли к соотношению, связывающему неизвестную функцию $x(t)$ и ее производную $\frac{dx}{dt}$. Встречаются задачи, когда соотношение связывает еще и независимую переменную. В приведенных задачах независимой переменной является время. ●

§ 10.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ЗАДАЧА КОШИ. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Определение 1. *Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные различных порядков.*

Неизвестную функцию обычно обозначают $y(x)$ или просто y, а ее производные — y', y'' и т. д. Возможны и другие обозначения, например: $x(t)$ — неизвестная функция, $x'(t)$, $x''(t)$ — ее производные, t — независимая переменная.

Дифференциальное уравнение относительно функций одной независимой переменной называется *обыкновенным*. Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения определяется следующим выражением

$$F(x, \ y, \ y', \ y'', \ y''', \ ..., \ y^n)=0, \qquad (10.2.1)$$

или

$$y^{(n)}=f(x, \ y, \ y', \ y'', \ y''', \ ..., \ y^{n-1}), \qquad (10.2.2)$$

где $F(x, \ y, \ y', \ y'', \ y''', ..., y^{(n)})$ и $f(x, \ y, \ y', \ y'', \ y''', ..., y^{(n...1)})$ — заданные функции соответствующих аргументов. Функции F и f могут не содержать некоторых аргументов, но для того чтобы данное уравнение называлось дифференциальным, существенно наличие производной.

Определение 2. *Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в него.*

Например, $x^2y'-y=0$ — дифференциальное уравнение первого порядка, $y''+2y'+5y=x$ — дифференциальное уравнение второго порядка.

Дифференциальное уравнение может быть записано и в такой форме:

$$F(x, \ y)dy+\varphi(x, \ y)dx=0.$$

Если его разделить на dx и учесть, что $\frac{dy}{dx}=y'$, то получим

$$F(x, \ y)y'+\varphi(x, \ y)=0.$$

Определение 3. *Решением дифференциального уравнения* (10.2.1) *называется такая функция* $y=\varphi(x)$, *которая будучи подставленной в уравнение вместе со своими производными обращает его в тождество.*

Например, для дифференциального уравнения

$$yy''-(y')^2=0 \qquad (10.2.3)$$

функция $y=e^{2x}$ является решением. Действительно, найдя $y'=2e^{2x}$, $y''=4e^{2x}$ и подставив эти значения в (10.2.3) вместе с функцией, получим

$$e^{2x}4e^{2x}-(2e^{2x})=4e^{4x}-4e^{4x}=0.$$

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

При отыскании решения дифференциального уравнения используют операцию интегрирования, что связано с появлением произвольной постоянной. Если действие интегрирования применяется n раз, то, очевидно, и в решении будет содержаться n произвольных постоянных.

Определение 4. *Общим решением дифференциального уравнения* (10.2.1) *называется функция вида*

$$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3, \ldots, C_n), \qquad (10.2.4)$$

удовлетворяющая следующим условиям: 1) при любом наборе постоянных C_i, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, *эта функция является решением дифференциального уравнения*; 2) *для любого решения* $\psi(x)$ *существуют такие значения* C_{10}, C_{20}, C_{30}, C_{n0}, *что* $\psi(x)=\varphi(x,\ C_{10},\ C_{20},\ C_{30}, \ldots, C_{n0})$.

Иногда имеются еще особые решения, которые не охвачены формулой (10.2.4).

Для дифференциального уравнения первого порядка общее решение имеет вид $y=\varphi(x,\ C)$, для дифференциального уравнения второго порядка следующий вид: $y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2)$ и т. д.

Если в (10.2.4) постоянным C_1, C_2, $C_3, \ldots, C_n$ придать конкретные числовые значения, то полученная функция называется *частным решением*.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка определяется выражением

$$F(x, y, y')=0, \text{ или } y'=f(x, y), \qquad (10.2.5)$$

если оно разрешимо относительно y'. Как указано ранее, общим решением дифференциального уравнения (10.2.5) является множество функций $y=\varphi(x, C)$, где C — произвольная постоянная. Придавая C различные значения, можно получить частные решения. На плоскости Oxy общее решение представляет собой семейство интегральных кривых, соответствующих каждому частному решению.

Если задать точку $A(x_0, y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая, то, как правило, из множества функций $y=\varphi(x, C)$ можно выделить одну — частное решение. Допустим, что найдено общее решение $y=\varphi(x, C)$; тогда из условия $y_0=\varphi(x_0, C)$ можно найти C. Условие $y=y_0$ при $x=x_0$ называют *начальным условием*.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения (10.2.5), удовлетворяющего начальному условию $y=y_0$ при $x=x_0$, называется *задачей Коши**. Чтобы уравнение (10.2.5) имело частное решение, функция $f(x, y)$ должна удовлетворять условиям, сформулированным в следующей теореме.

Теорема существования и единственности решения. *Если в дифференциальном уравнении* $y'=f(x, y)$ *функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывна в открытой области* D, *содержащей точку* $A(x_0, y_0)$, *то в области* D *существует единственное решение уравнения* $y=\varphi(x)$, *удовлетворяющее начальному условию* $y=y_0$ *при* $x=x_0$.

Теорема утверждает, что при определенных условиях существует одна интегральная кривая $y=\varphi(x)$, проходящая через точку $A(x_0, y_0)$.

Мы будем рассматривать только такие дифференциальные уравнения, которые заведомо имеют общие и частные решения. Дальнейшая цель изложения состоит в том, чтобы научиться находить общее, а затем и частное решение. Следуя принципу «от простого к сложному», начинаем с рассмотрения дифференциальных уравнений первого порядка.

§ 10.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЕННЫМИ И РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение вида

$$f(x)dx=\varphi(y)dy, \tag{10.3.1}$$

или

$$f(x)dx-\varphi(y)dy=0$$

называется *уравнением с разделенными переменными.* Переменными здесь считаются величины x и y. Это самый простой тип уравнений. Решение их находится непосредственным интегрированием.

● **Пример.** Найти общее решение дифференциального уравнения $xdx=ydy$

Решение. На первый взгляд может показаться, что $y=x$, однако это только частное решение.

---

* О. Л. Коши (1789—1857) — французский математик.

Интегрируя левую и правую части, получаем

$$\int x dx=\int y dy, \text{ или } \frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+C_1.$$

Умножив обе части на 2 и полагая $2C_1=C$, имеем

$$x^2-y^2=C, \text{ или } y=\pm\sqrt{x^2-C}.$$

На графике этому общему решению соответствует «семейство плоских интегральных кривых». Если хотят из этого семейства выделить одну кривую, то следует определить начальное условие, например точку $M(5;\ 3)$, лежащую на кривой. Тогда $C=x^2-y^2=25-16=9$. Частное решение и соответствующее уравнение интегральной кривой имеет вид

$$y=\pm\sqrt{x^2-9}. \bullet$$

Определение 1. *Дифференциальное уравнение, в котором путем преобразований переменные могут быть разделены, называется уравнением с разделяющимися переменными* (ср. *с разделенными и с разделяющимися*).

Уравнение этого типа можно представить в виде

$$y'=f(x)\varphi(y), \tag{10.3.2}$$

где в правой части равенства каждый из двух множителей является функцией одной переменной. Так, уравнение $y'=\frac{y}{x+1}$ является уравнением с разделяющимися переменными $\left(f(x)=\frac{1}{x+1},\ \varphi(y)=y\right)$, а уравнение $x^2y'-2y-x^2=0$ нельзя представить в виде (10.3.2). Решение уравнений с разделяющимися переменными состоит в следующем. Учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$, перепишем (10.3.2) в виде

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y). \tag{10.3.3}$$

Из этого уравнения получим дифференциальные уравнения с разделенными переменными

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx. \tag{10.3.4}$$

Почленно интегрируя (10.3.4), имеем

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx. \qquad (10.3.5)$$

При делений (10.3.3) на $\varphi(y)$ мы полагали, что $\varphi(y) \neq 0$, поэтому решения, при которых $\varphi(y)=0$, могут быть потеряны.

Вернемся к задачам, сформулированным в начале § 10.1. Решим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -k(m-x)^2.$$

Разделим переменные, $m \neq x$, $-\frac{dx}{(m-x)^2} = kdt$. Интегрируя, получим

$$-\int \frac{dx}{(m-x)^2} = \int kdt,$$

или

$$\frac{1}{m-x} = kt + C. \qquad (10.3.6)$$

Подставляя значения $t=0$ и $x=0$ в (10.3.6), получим $\frac{1}{m}+C$. Тогда имеем

$$\frac{1}{m-x} = kt + \frac{1}{m}, \text{ или } \frac{1}{m-x} - \frac{1}{m} = kt.$$

Получено известное из химии уравнение

$$\frac{x}{m(m-x)} = kt.$$

Если уравнение $\frac{1}{m-x} = kt + \frac{1}{m}$ записать в виде $m-x = \frac{1}{kt+\frac{1}{m}}$ и обозначить $m-x$ – массу, еще не вступившую в реакцию, через y (остаток массы), то уравнение можно записать в другом виде: $y = \frac{1}{kt+\frac{1}{m}}$. (Это уравнение семейства равносторонних гипербол, в которых асимптоты параллельны осям координат.)

Коэффициент k в (10.3.6) определяют опытным путем. Для этого необходимо знать количество вещества x_0, вступившего в реакцию к моменту t_0, и начальную массу реагирующего вещества m.

Решим теперь уравнение

$$\frac{dx}{dt}=kx(t).$$

Разделим переменные, полагая $x(t)>0$. Имеем

$$\frac{dx}{x(t)}=kdt, \int\frac{dx}{x}=\int kdt \Rightarrow \ln x=$$
$$=kt+\ln C \Rightarrow x(t)=Ce^{kt}. \qquad (10.3.7)$$

Предположим, что через 2 ч после брожения наличное количество фермента составляет 4 г, а через 3 ч — 5 г. Тогда, подставив эти значения в (10.3.7), получим систему

$$\begin{cases} 4=Ce^{2k}, \\ 5=Ce^{3k}. \end{cases}$$

Разделив второе из уравнений на первое, получим $1{,}25=e^k$. Из первого уравнения найдем $C=4e^{-2k}=$ $=4(e^k)^{-2}=4\cdot 1{,}25^{-2}$, $C=4\cdot 1{,}25^{-2}$. Уравнение (10.3.7) принимает вид

$$x(t)=4\cdot 1{,}25^{-2}\,1{,}25^t=4\cdot 1{,}25^{t-2}.$$

● **Пример.** Найти решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{y}{x+1},$$

удовлетворяющего начальным данным $y=6$ при $x=2$, $(y(2)=6)$.

Решение. Имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+1}.$$

Чтобы разделить переменные, выполним следующие операции.

1) Умножим обе части на dx:

$$dy=\frac{ydx}{x+1}.$$

2) Разделим обе части на y, $y\neq 0$:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x+1}.$$

3) Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x+1},$$

или

$$\ln|y|=\ln|x+1|+\ln C_1,\quad (c=\ln C_1).$$

4) Потенцируя, получим

$$y=C_1(x+1).$$

5) По начальным данным определяем произвольную постоянную

$$6=C_1(2+1)\Rightarrow C_1=2.$$

Окончательно имеем $y=2(x+1)$. ●

§ 10.4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение. *Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если его можно представить в виде*

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{10.4.1}$$

Здесь $P(x)$ и $Q(x)$ — известные функции от x, в частном случае могут быть постоянными величинами. Так, уравнение $y'-\frac{1}{x}y=x^2$ является линейным, а уравнение $yy'-xy^2=\cos x$ линейным не является. Уравнение (10.4.1) решается с помощью специального приема, в основе которого лежит представление функции y в виде произведения двух других функций, т. е. с помощью подстановки

$$y=u(x)\cdot v(x), \tag{10.4.2}$$

где u и v — неизвестные функции от x, причем одну из них, например $v(x)$, можно выбрать произвольно. Функция $u(x)$ определится в зависимости от выбора функции $v(x)$.

Итак, если $y=u(x)\cdot v(x)$, то $y'=u'v+v'x$ и подстановка y и y' в (10.4.1) дает

$$u'v+v'u+P(x)uv=Q(x),$$

или

$$u'v+u(v'+P(x)v)=Q(x). \tag{10.4.3}$$

Функции u и v неизвестны, определим одну из них, например v, из условия

$$v' + P(x)v = 0. \qquad (10.4.4)$$

Учитывая это, уравнение (10.4.3) запишем в виде

$$u'v = Q(x). \qquad (10.4.5)$$

Найдем функцию v. Из (10.4.4) получим

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v.$$

Умножая обе части на $\frac{dx}{v}$, запишем

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln|v| = -\int P(x)dx = \varphi(x) + C.$$

Из общего решения выбираем одно частное, самое простое решение. Например, положим $C=0$. Получаем

$$\ln|v| = \varphi(x), \text{ откуда } v = e^{\varphi(x)}.$$

Подставим найденное значение v в (10.4.5)

$$u'e^{\varphi(x)} = Q(x) \Rightarrow \frac{du}{dx}e^{\varphi(x)} = Q(x) \Rightarrow du = Q(x)e^{-\varphi(x)}dx;$$

$$u = \int Q(x)e^{-\varphi(x)}dx = \psi(x) + C.$$

По формуле (10.4.2) находим общее решение линейного уравнения

$$y = u(x)\cdot v(x) = (\psi(x) + C)e^{\varphi(x)}.$$

● **Пример.** Найти общее решение уравнения

$$xy' + y = e^{-x}, \quad x \neq 0.$$

Уравнение линейное, так как y' и y входят в него в первой степени и нет члена с произведением yy'.

Полагаем $y = u\cdot v$; тогда $y' = u'v + v'u$. Уравнение принимает вид

$$u'v + v'u + \frac{1}{x}u\cdot v = \frac{e^{-x}}{x},$$

или

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = \frac{e^{-x}}{x}. \qquad (10.4.6)$$

Найдем теперь функцию $v(x)$, удовлетворяющую условию $v'+$ $+\frac{1}{x}v=0$.

Разделяем переменные

$$\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=0, \text{ или } \frac{dv}{dx}+\frac{dx}{x}.$$

В результате интегрирования получим

$$\ln|v|=-\ln|x|+\ln C\Rightarrow v=\frac{C}{x}.$$

Из множества функций выберем одну. Полагаем $C=1$; тогда $v=1/x$. Подставим эту функцию в уравнение (10.4.6). Имеем

$$u'\frac{1}{x}=\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{x}; \text{ или } du=\mathrm{e}^{-x}\,dx;$$

$$\int du=\int \mathrm{e}^{-x}\,dx\Rightarrow u=-\mathrm{e}^{-x}+C.$$

Итак, $v=\frac{1}{x}$, $u=-\mathrm{e}^{-x}+C$; тогда

$$y=u\cdot v=-\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{-x}-C). \quad ●$$

§ 10.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Простейшее дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$y''=f(x). \tag{10.5.1}$$

Правая часть уравнения — непрерывная функция одной переменной x. Уравнение (10.5.1) показывает, что искомая функция продифференцирована два раза. Общее решение уравнения найдем двукратным интегрированием функции $f(x)$. Итак, имеем

$$y''=(y')'=f(x). \tag{10.5.2}$$

Обозначим $y'=P$, где P — функция от x. Тогда $y''=P'$, следовательно, $P'=f(x)$ или

$$\frac{dP}{dx}=f(x),\ dP=f(x)dx,\ P=\int f(x)dx+C_1.$$

Выполним обратную замену. Имеем

$$P=y'=\frac{dy}{dx},\ \frac{dy}{dx}=\int f(x)dx+C_1,$$

$$dy=\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx,$$

$$y=\int\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx+C_2.$$

● **Пример 1.** Проинтегрировать уравнение

$$y''=\frac{x^2}{2}+1. \qquad (10.5.3)$$

Решение. Обозначим $y'=P$, тогда $y''=P'=\dfrac{dP}{dx}$,

$$\frac{dP}{dx}=\frac{x^2}{2}+1\Rightarrow dP=\left(\frac{x^2}{2}+1\right)dx;$$

$$P=\int\left(\frac{x^2}{2}+1\right)dx=\frac{x^3}{6}+x+C_1; \qquad (10.5.4)$$

$$P=y'=\frac{dy}{dx};\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^3}{6}+x+C_1,$$

$$dy=\left(\frac{x^3}{6}+x+C_1\right)dx;$$

$$y=\int\left(\frac{x^3}{6}+x+C_1\right)dx=\frac{x^4}{24}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2. \qquad (10.5.5)$$

Если из общего решения хотят выделить частное, то используют начальные условия. Для дифференциального уравнения второго порядка частное решение должно удовлетворять не одному, а уже двум условиям, например, $y(1)=1$, $y'(1)=4$. Подставив эти значения в (10.5.4) и (10.5.5), получим систему

$$\begin{cases} 4=\dfrac{1}{6}+1+C_1, \\ 1=\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{2}+C_1+C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1=\dfrac{17}{6}$, $C_2=-\dfrac{57}{24}$.

Таким образом, частное решение имеет вид

$$y=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{17}{6}x-\frac{57}{24}.$$ ●

● **Пример 2.** Найти функцию, которая определяет путь, пройденный материальной точкой массы m под действием силы земного притяжения.

Решение. 1) Известно, что тело, свободно падающее в пустоте, имеет постоянное ускорение — ускорение силы тяжести.

2) Путь, пройденный телом, есть функция независимой переменной — времени

$$s=f(t).$$

3) Ускорение — это вторая производная от пути по времени (s''). По условию, $s''=g$. В результате двукратного интегрирования получим общее решение

$$s=\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2.$$

Если из общего решения хотят выделить частное, то заранее указывают начальные условия. Например, путь, пройденный телом к определенному моменту времени, и скорость движения в этот момент. Пусть при $t_0=0$ скорость $v_0=2$ м/с, $s=0$. Имеем

$$\begin{cases} v=gt+C_1, \\ s=\dfrac{gt^2}{2}+C_1t+C_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2=g\cdot 0+C_1, \\ 0=\dfrac{g\cdot 0^2}{2}+C_1 0+C_2; \end{cases}$$

$$C_1=2, \quad C_2=0.$$

Окончательно получаем

$$s=\frac{gt^2}{2}+2t.$$

При $t=5$ с

$$s=9{,}8\frac{25}{2}+2\cdot 5+0=122{,}5+10=132{,}5(\text{м}). \bullet$$

Рассмотрим специальный вид дифференциальных уравнений второго порядка, которые допускают понижение порядка.

2. Решение дифференциальных уравнений вида

$$y''=f(x, y'). \tag{10.5.6}$$

Оно не содержит в явном виде неизвестной функции y. Понизим порядок уравнения, введя подстановку или замену $y'=p$, тогда $(y')'=y''=p'$.

Выполним соответствующую замену в (10.5.6); в результате получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$p'=f(x, p).$$

Решив это уравнение, получим $p=\varphi(x, C_1)$.

Выполним теперь обратную замену: так как $p=y'$, то $y'=\varphi(x, C_1)$. Мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, из которого имеем

$$dy = \varphi(x, C_1)\,dx,$$

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2.$$

● **Пример.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = \frac{2}{x}y'. \qquad (10.5.7)$$

Это уравнение не содержит неизвестной функции y. Обозначим $y' = p$. Дифференцируя по x левую и правую части, получим

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx}.$$

Выполним замену в уравнении (10.5.7). В результате имеем

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2p}{x}.$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными. Умножаем на dx и делим на p, $p \neq 0$, обе его части,

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dx}{x}.$$

Переменные разделены, выполняем интегрирование. Имеем $\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dx}{x}$, или $\ln p - \ln C_1 = 2\ln x$, откуда $\ln \frac{p}{C_1} = \ln x^2$, $\frac{p}{C_1} = x^2$, $p = C_1 x^2$. Выполним обратную замену: $p = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = C_1 x^2 \Rightarrow dy = C_1 x^2\,dx$; после интегрирования имеем $y = \frac{C_1 x^3}{3} + C_2$. ●

3. Решение дифференциальных уравнений вида

$$y'' = f(y', y). \qquad (10.5.8)$$

Уравнение не содержит независимой переменной x. Понизим порядок уравнения, выполнив подстановку

$$y' = p. \qquad (10.5.9)$$

Так как (10.5.8) не содержит x, будем считать, что y'', y' и p являются функциями от y, а y — функция от x. Следовательно, переменная величина p — сложная функция, зависящая от x через y.

Найдем вторую производную.

Учитывая (7.3.8) и (10.5.9), имеем $(y')'_x = p'_x = p'_y \cdot y'_x$, но $y'_x = p$, поэтому

$$y''_x = p'_y \cdot p = \frac{dp}{dy} p.$$

Подставим в уравнение (10.5.8) принятые замены:

$$\frac{dp}{dy} p = f(p, y). \tag{10.5.10}$$

Получено дифференциальное уравнение первого порядка. Решив его, находим $p = \varphi(y, C_1)$. Заменим p на $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1). \tag{10.5.11}$$

Решая (10.5.11), находим $y = f(x, C_1, C_2)$, или

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

● **Пример.** Найти общее решение уравнения

$$y'' = \frac{1 + (y')^2}{2y}, \quad y \neq 0. \tag{10.5.12}$$

Это дифференциальное уравнение не содержит независимой переменной x. Сделаем подстановку $y' = p$; тогда $y'' = \frac{dp}{dy} p$. Учитывая это равенство, запишем (10.5.12) в виде $\frac{dp}{dy} p = \frac{1 + p^2}{2y}$. Получено уравнение с разделяющимися переменными. Умножим обе его части на dy и разделим на $1 + p^2$. В результате имеем

$$\frac{2p\,dp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y}.$$

Переменные разделены

$$\int \frac{2p\,dp}{1 + p^2} = \int \frac{dy}{y}, \quad \text{или} \quad \ln(1 + p^2) = \ln|y| + \ln|C_1|.$$

Отсюда получаем $1 + p^2 = C_1 y \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Так как $p = y' = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$,

$$dx = \pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{C_1 y - 1}}{C_1} + C_2$$

— общее решение. ●

§ 10.6. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ФИЗИКЕ, ЗООГИГИЕНЕ, БИОЛОГИИ

● **Задача 1.** Установлено, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству в каждый данный момент. Определить закон изменения массы радия в зависимости от времени, если начальная масса радия была m_0 при $t=0$.

Пусть в момент t масса равна m, а в момент $t+\Delta t$ она равна $m+\Delta m$. Приращение массы (в данном случае приращение имеет отрицательный знак) составляет Δm за соответствующий промежуток времени Δt. Тогда $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ равно средней скорости распада, соответствующей промежутку времени Δt. Будем уменьшать Δt; в этом случае и Δm по абсолютной величине будет также убывать. Тогда

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{dm}{dt}$$

— скорость распада при данном значении времени t.

Согласно условию задачи

$$\frac{dm}{dt}=-km, \tag{10.6.1}$$

где k — коэффициент пропорциональности, характеризующий условия протекания распада (температура, агрегатное состояние и др.). Знак «$-$» указывает, что $\Delta m<0$ при $\Delta t>0$, поэтому $\frac{dm}{dt}<0$. Решая уравнение (10.6.1), получаем

$$\ln m=-kt+\ln C,$$

или

$$\ln\frac{m}{C}=-kt,$$

откуда

$$\frac{m}{C}=\mathrm{e}^{-kt}.$$

Окончательно имеем $m=C\mathrm{e}^{-kt}$. Это и есть закон распада радия.

Определим постоянную C, учитывая, что $m=m_0$ при $t=0$. Имеем $m_0=C\mathrm{e}^{-k0}$, т. е. $C=m_0$, следовательно, окончательно получаем

$$m=m_0e^{-kt}. \tag{10.6.2}$$

Вычислим, через сколько времени останется половина вещества, т. е. $m=\frac{1}{2}m_0$. Подставим в (10.6.2) $\frac{m_0}{2}$ вместо m; после деления на m_0 получаем

$$\frac{1}{2}=e^{-kt}, \quad \text{или} \quad t=\frac{\ln 2}{k}. \bullet$$

Найденная величина t называется периодом полураспада. Коэффициент k определяется экспериментально. Для различных изотопов радия период полураспада разный — от нескольких секунд до полутора тысяч лет.

● **Задача 2.** Найти закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря.

Решение. Плотность воздуха пропорциональна атмосферному давлению. Обозначим высоту через h. Тогда приращение давления Δp при изменении высоты на Δh равно массе столба воздуха с площадью основания, равной единице, и высотой Δh, т. е. $\Delta p=-kp\Delta h$, $k>0$. Приравнивая приращение функции дифференциалу, получим

$$dp=-kp\,dh, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p}=-k\,dh.$$

Знак «$-$» имеет место, так как по мере подъема плотность воздуха убывает и атмосферное давление также падает. Получено такое же дифференциальное уравнение, что и в первой задаче. Его решение таково: $p=p_0e^{-kh}$, где p_0 — атмосферное давление над уровнем моря. ●

● **Задача 3.** В помещении для крупного рогатого скота работают два вентилятора, каждый из которых доставляет в минуту по 60 м^3 чистого воздуха, содержащего 0,01% углекислоты. Полагая, что в коровнике объемом 1600 м^3 с начальным содержанием углекислоты в 0,2% находится 120 коров, каждая из которых выдыхает в минуту 0,10 м^3 воздуха с 5% углекислоты, определить наличие углекислоты в 1 м^3 воздуха после двухчасового содержания животных в помещении.

Решение. Пусть содержание углекислоты в 1 м^3 воздуха в момент времени t есть $y(t)$ (в дальнейшем y). Скорость изменения концентрации равна приращению углекислоты Δy, деленному на соответствующий промежуток времени Δt; Δy определяется углекислотой:

1) выделяемой при дыхании 120 животных,

$$\frac{120\cdot 0{,}10\cdot 0{,}05}{1600}\Delta t=\frac{0{,}6}{1600}\Delta t;$$

2) вводимой вентилятором на каждый кубометр,

$$\frac{2\cdot 60\cdot 0{,}0001}{1600}\Delta t=\frac{0{,}0120}{1600}\Delta t;$$

3) удаляемой за счет работы вентиляторов

$$\frac{2\cdot 60\cdot y\cdot \Delta t}{1600}=\frac{120y\cdot\Delta t}{1600}.$$

Следовательно,

$$\Delta y=\frac{0,6+0,012-120y}{1600}\Delta t\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta t}=0,0003825-0,015y.$$

Как видим, скорость изменения содержания углекислоты пропорциональна y. Перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, имеем

$$\frac{dy}{dt}=0,0003825-0,075y. \qquad (10.6.3)$$

Получено линейное дифференциальное уравнение. Найдем его решение. Имеем

$$\frac{dy}{dt}+0,075y=0,0003825.$$

Обозначим $y=u\cdot v$; тогда $y'=u'v+v'u$. Примем следующие обозначения: $a=0,075$, $b=0,0003825$ и подставим в (10.6.3). В результате получим

$$u'v+v'u+auv=b,$$

или

$$u'v+u(v'+av)=b. \qquad (10.6.4)$$

Положим $v'+av=0\Rightarrow v=\mathrm{e}^{-at}$. Тогда, учитывая, что $v+av=0$, имеем

$$u'\mathrm{e}^{-at}=b\Rightarrow\frac{du}{dt}=\mathrm{e}^{at}b\Rightarrow du=b\mathrm{e}^{at}dt\Rightarrow u=\frac{b}{a}\mathrm{e}^{at}+C;$$

$$y=\left(\frac{b}{a}\mathrm{e}^{at}+C\right)\mathrm{e}^{-at}=\frac{b}{a}+C\mathrm{e}^{-at}=0,00517+C\mathrm{e}^{-0,075t}.$$

Определим произвольную постоянную C. При $t=0$ согласно условию задачи $y=0,002$.

$$0,002=0,00517+C\Rightarrow C=-0,00317.$$

Окончательно имеем

$$y=0,00517-0,00317\mathrm{e}^{-0,075t}.$$

Если $t=120$, то $y\approx 0,00517$, так как второй член очень мал $\left(0,00317\mathrm{e}^{0,075\cdot 120}=0,00317\mathrm{e}^{-9}=\frac{0,00317}{\mathrm{e}^{9}}\approx 3\cdot 10^{-7}\right)$. ●

Таким образом, количество углекислоты в 1 м^3 (концентрация) увеличится в $\frac{0,00517}{0,002}=2,6$ раза, и в дальнейшем увеличиваться уже не будет благодаря работе вентиляторов. ●

● **Задача 4** [26]. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха 20° С. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100 до 60° С. Определить закон изменения температуры тела в зависимости от времени. В частности, через какой промежуток времени тело охладится до 40° С?

Решение. Скорость охлаждения тела — это скорость изменения температуры тела со временем, т. е. производная $\frac{dT}{dt}$, где T — температура тела, а t — время. Согласно условию $\frac{dT}{dt}=-k(T-20)$, откуда $\frac{dT}{T-20}=-k\,dt$. Интегрируя, получаем

$$\ln(T-20)=-kt+\ln C \Rightarrow T-20=Ce^{-kt}. \qquad (10.6.5)$$

По условию, $t=0$ при $T=100°$ С, подставляя эти значения в (10.6.5), получаем $C=80$. Следовательно, $T-20=80e^{-kT}$.

Согласно условию $T=60°$ С при $t=20$. Следовательно, имеем $60-20=80e^{-20k}$, откуда $e^{-20k}=\frac{1}{2}$, и $e^{-k}=(1/2)^{1/20}$. Окончательно получаем $T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$.

Для определения времени t, в течение которого тело охладится до 40° С, подставим $T=40$ в найденный закон изменения температуры в зависимости от времени t. В результате получаем $40=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$, откуда $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}=\frac{20}{80}=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$. Следовательно, $\frac{t}{20}=2$, $t=40$. Таким образом, за первые 20 мин после начала охлаждения температура тела понизилась на 40° С, а за последующие 40 мин понижение температуры составило 20° С, т. е. с течением времени скорость охлаждения уменьшается. ●

● **Задача 5** [6]. Изучим колонию микроорганизмов, живущих в условиях неограниченных ресурсов питания и неограниченного пространства при отсутствии внутривидовой и межвидовой борьбы. Положим, что микроорганизмы не подавляются никаким другим видом. Установим закон изменения количества живых организмов в зависимости от времени.

Решение. Обозначим через $x(t)$ число микроорганизмов в момент t, а через $x(t+\Delta t)$ — их число в момент $t+\Delta t$. Тогда прирост числа микроорганизмов равен

$$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t).$$

С другой стороны, Δx есть разность между числом родившихся R и числом погибших S организмов за время Δt:

$$\Delta x=R-S.$$

Примем, что прирост количества организмов, т. е. «потомство», пропорционален числу родителей x и продолжительности Δt:

$$\Delta x=\varepsilon x\Delta t.$$

Величина R зависит от Δt (чем больше Δt, тем больше и R). Кроме того, R зависит еще и от количества «родителей». Чем больше взрослых особей, тем больше и потомство.

Таким образом,

$$R=\Phi(x, \Delta t),$$

где функция Φ растет с ростом x или Δt, и равна 0, если равна нулю одна из этих переменных. Что касается переменной Δt, то самые простые эксперименты показывают, что она должна входить линейно: если промежуток времени Δt увеличивать, например, в 2 раза, то и прирост потомства микроорганизмов также увеличится в два раза. Следовательно,

$$\Phi(x, \Delta t)=f(x)\Delta t.$$

Изменение функции $f(x)$ существенно зависит от особенностей биологического вида и для его описания потребуется некоторая производственная функция в виде многочлена или функция с квадратным корнем. Мы ограничимся, следуя принципу «от простого к сложному», простейшим случаем, когда численность потомства пропорциональна количеству «родителей»: $f(x)=\alpha x$, $\alpha=\mathrm{const}$. Итак,

$$R(x, \Delta t)=\alpha x\Delta t.$$

Аналогичные соображения применим и к величине S. Таким образом, полагая

$$S(x, \Delta t)=\beta x\Delta t,$$

получаем

$$\Delta x=\alpha x\Delta t-\beta x\Delta t=(\alpha-\beta)x\Delta t.$$

Обозначим $\alpha-\beta=\varepsilon$. Тогда $\Delta x=\varepsilon x\Delta t$. Выражение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ определяет среднюю скорость размножения колонии микроорганизмов, соответствующую промежутку времени Δt. Имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\varepsilon x.$$

Переходя к пределу и учитывая, что x является функцией t, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon x(t). \qquad (10.6.6)$$

Его решением является функция

$$x(t)=x(t_0)e^{\varepsilon(t-t_0)}. \qquad (10.6.7)$$

Уравнение (10.6.7) определяет закон изменения количества микроорганизмов в колонии в зависимости от времени, т. е. это математическая модель процесса, полученная при очень широких предположениях (при неограниченных ресурсах питания и пространства для обитания и отсутствии борьбы). В природе же существует внутривидовая и межвидовая борьба и ни в одной реально существующей колонии такой рост наблюдать мы не можем.

Ответ на вопрос, насколько закон (10.6.7) отвечает реальному процессу дает опытная проверка. Очевидно, на каком-то подмножестве $t \in (t_1, t_2)$ данные опыта будут хорошо согласованы с моделью, а саму модель можно использовать для прогноза.

Уравнение (10.6.6) впервые в 1802 г. получил Мальтус. Его заблуждение состояло в том, что уравнение, справедливое для очень узкого класса популяций и полученное при жестких предположениях, он считал универсальным законом не только для природы, но и для человеческого общества.

Уравнение, в котором учтена внутривидовая борьба в колонии микроорганизмов, получил в 1845 г. Ферхюлст-Перл. В результате конкурентной борьбы внутри вида за пищу и место распространения, а также за счет болезней скорость роста снижается. В общем виде уменьшение прироста, по-видимому, является некоторой новой функцией от x и Δx, которую обозначим через $b(x, \Delta x)$. Установим, как составляется эта функция, учитывающая в числе прочих факторов внутривидовую конкуренцию. Уменьшение количества особей в результате конкуренции тем больше, чем больше число встреч между особями, т. е. пропорционально x^2. Таким образом,

$$b(x, \Delta x) = \delta x^2 \Delta t. \tag{10.6.8}$$

Тогда

$$\Delta x = \varepsilon x \Delta t - \delta x^2 \Delta t. \tag{10.6.9}$$

Здесь ε — специфическая (врожденная) скорость размножения популяции, δ — коэффициент внутривидовой конкуренции. Из уравнения (10.6.9), разделив обе его части на Δt и переходя к пределу, получим

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \delta x^2. \tag{10.6.10}$$

Это и есть уравнение Ферхюльста-Перла. Его можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x \left(1 - \frac{\delta}{\varepsilon} x\right), \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = \varepsilon x \left(\frac{\varepsilon/\delta - x}{\varepsilon/\delta}\right).$$

Приняв обозначение $\varepsilon/\delta = h$, получим

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x \left(\frac{h - x}{h}\right). \tag{10.6.11}$$

Решая это уравнение при $t_0 = 0$ и $x(0) = x_0$, имеем

$$x(t) = \frac{x_0 h e^{\varepsilon t}}{h - x_0 + x_0 e^{\varepsilon t}}.$$

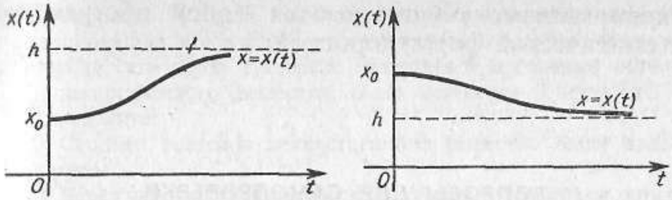


Рис. 114

График функции $x(t)$ изображен на рис. 114. Если $x_0 = x(0) > h$, то график функции $x = x(t)$ при $t \to +\infty$, приближается к прямой $x = h$ сверху, если $x_0 = x(0) < h$, то график приближается к прямой $x = h$ снизу.

§ 10.7. ВЫВОДЫ

К понятию дифференциального уравнения приводят задачи химии, физики, биологии и других наук.

Дифференциальное уравнение устанавливает связь между независимой переменной, неизвестной функцией и ее производными различных порядков. Решить дифференциальное уравнение — значит найти функцию $y = f(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество. К простейшим обыкновенным дифференциальным уравнениям относятся:

а) уравнения с разделенными и разделяющимися переменными;

б) линейные уравнения первого порядка;

в) так называемые неполные дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка:

$$1)\ y'' = f(x);\quad 2)\ y'' = f(x, y');\quad 3)\ y'' = f(y, y').$$

С помощью дифференциальных уравнений решены следующие задачи: о распаде радия, о законе изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря, найден закон изменения температуры нагретого тела в зависимости от времени, задача определения содержания углекислоты в животноводческом помещении, задача размножения колонии микроорганизмов.

Дифференциальные уравнения являются мощным средством познания окружающего нас мира. Такие явления, как распад радия, изменение атмосферного давления, рост ферментов при брожении, размножение микроорганизмов, описываются одной абстрактной математической формулировкой.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение дифференциального уравнения.

2. Что такое порядок дифференциального уравнения?

3. Что называется решением дифференциального уравнения? Что такое общее решение дифференциального уравнения? Частное решение?

4. Дайте определение уравнения с разделяющимися переменными.

5. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

6. Как решаются дифференциальные уравнения следующего вида:

$$y''=f(x),\quad y''=f(x,\,y'),\quad y''=f(y,\,y')?$$

7. Приведите примеры дифференциальных уравнений в физике, химии, биологии, сельском хозяйстве.

УПРАЖНЕНИЯ

Найдите частные решения уравнений:

1. $xdx=dy,\ y(1)=0$, т. е. при $x=1,\ y=0$.

2. $ds=(4t-3)\,dt,\ s(0)=0$.

3. $xdx=ydy,\ y(2)=1$.

4. $x^2\,dx+ydy=0,\ y(0)=1$.

5. $\cos x-\sin y\,dy-\cos y\sin x\,dx=0,\ y(\pi)=\pi$.

6. Тело, температура которого 32° С, погружено в термостат, в котором поддерживается температура 0° С. Зная, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды, определите, за какое время тело охладится до 5° С, если за 20 мин оно охладилось до 15° С.

7. При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его наличному количеству. Через 14 ч после брожения масса фермента составила 6 г, а через 3 ч — 8 г. Найдите массу фермента до начала брожения.

8. Для сохранения спермы самцов-производителей на длительное время ее замораживают и держат при температуре -4° С. За сколько времени сперма охладится до 0° С, если ее начальная температура 30° С и известно, что за 20 мин в термостате она охладилась до 20° С?

Скорость охлаждения прямо пропорциональна разности между температурой тела и температурой в термостате.

9. Скорость распада некоторого лекарственного вещества пропорциональна его наличному количеству. В результате анализа установили, что через 1 ч после инъекции в организме осталось 31,4 г лекарственного вещества, а по истечении 3 ч — 9,7 г.

Определите:

1) Сколько граммов лекарственного вещества было введено в организм?

2) Через сколько времени после введения в организме останется 1% первоначального количества лекарства?

10. Счетчик Гейгера, установленный вблизи радиоактивного изотопа серебра, при первом измерении зарегистрировал 5200 β-частиц в мин, а через 24 ч — только 300. Определите период полураспада изотопа при условии, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству нераспавшегося вещества.

11. Найдите закон роста палочковидных клеток с течением времени, если скорость роста клетки пропорциональна ее длине l,

$$\frac{dl}{dt}=(\alpha-\beta)\,l,$$

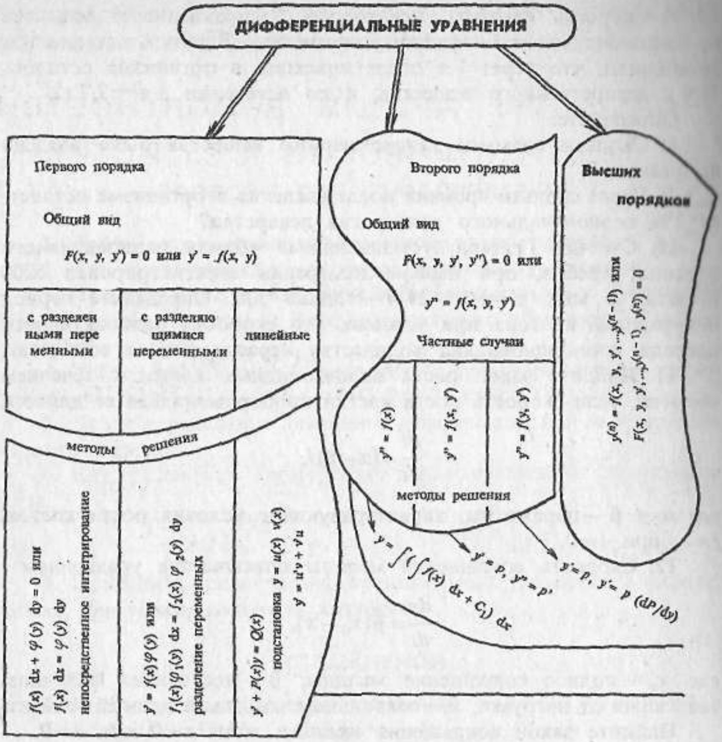
где α и β — параметры, характеризующие условия роста клеток; $l=l_0$ при $t=0$.

12. Скорость сокращения мышцы описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt}=\beta\,(x_0-x),$$

где x_0 — полное сокращение мышцы; β — постоянная величина, зависящая от нагрузки; x — сокращения мышцы в данный момент.

Найдите закон сокращения мышцы, если $x=0$ при $t=0$.


ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Первого порядка
Общий вид
$F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$
с разделен ными пере менными
с разделяю щимися переменными
линейные
методы решения
$f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0$ или
$f(x)\,dx = \varphi(y)\,dy$
непосредственное интегрирование
$y' = f(x)\varphi(y)$ или
$f_1(x)\varphi_1(y)\,dx = f_2(x)\varphi_2(y)\,dy$
разделение переменных
$y' + P(x)y = Q(x)$
подстановка $y = u(x)\,v(x)$
$y' = u'v + v'u$
Второго порядка
Общий вид
$F(x, y, y', y'') = 0$ или
$y'' = f(x, y, y')$
Частные случаи
$y'' = f(x)$
$y'' = f(x, y')$
$y'' = f(y, y')$
методы решения
$y = \int\left(\int f(x)\,dx + C_1\right)dx$
$y' = p,\ y'' = p'$
$y' = p,\ y'' = p\,(dp/dy)$
Высших порядков
$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ или
$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Часть третья

Элементы теории вероятностей и математической статистики

Глава 11

Основные понятия и теоремы теории вероятностей

В главе дано определение теории вероятностей как науки, приведены различные определения вероятности, простейшие свойства вероятности и методы ее вычисления.

§ 11.1. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Многие явления в окружающем нас мире — в природе, технике, сельском хозяйстве и в других областях знаний носят случайный характер, а именно, если явление наблюдать один раз, то нельзя точно предсказать, как оно будет протекать. Но если это явление наблюдать многократно при неизменных условиях, то оказывается, что явление (его протекание) можно описать с помощью чисел, т. е. количественно.

Так, например, если подбрасывать монету один раз, то нельзя предсказать, что́ выпадает — «герб» или «цифра»; при посадке одного дерева нельзя заранее утверждать, что оно приживется; посеянное зерно может дать всход, а может и не взойти.

Однако если наблюдение повторять много раз, то можно заметить закономерность: при подбрасывании монеты отношение числа выпаданий «герба» к общему числу подбрасываний мало отличается от $^1/_2$, и чем больше число подбрасываний, тем ближе это отношение к $^1/_2$. При посеве зерен отношение числа зерен, давших всход, к общему числу посеянных с возрастанием их числа будет мало отличаться от некоторого постоянного числа. Отношение числа прижившихся саженцев к общему числу посаженных с возрастанием числа саженцев будет также мало отличаться от некоторого постоянного числа. О результатах подобных наблюдений говорят, что они обладают *статистической устойчивостью*.

Теория вероятностей дает математические модели для описания случайных явлений такого рода, а именно, явлений, которые могут быть воспроизведены при неизменных условиях сколь угодно много раз и обладающих свойством статистической устойчивости.

Приступая к построению модели, учитывают главные, наиболее существенные особенности изучаемого явления или процесса и отбрасывают те, которые на данном уровне исследований считаются второстепенными. Если бы мы попробовали учесть все особенности и условия, то такая модель оказалась бы слишком громоздкой и практически не пригодной для использования. Следовательно, при построении математической модели неизбежны допущения, вызванные как неполным знанием об изучаемом процессе, так и необходимостью сделать модель более простой и доступной для изучения. Особенно это характерно для описания явлений в сельском хозяйстве, где действуют многочисленные факторы, взаимосвязанные между собой и скрытые от непосредственного наблюдения.

В задачах, связанных, например, с посадкой деревьев или с высевом семян, допущение состоит в том, что саженцы и семена абсолютно одинакового качества, высаживаются в одинаковых условиях; различие в качестве, условиях посадки и произрастания не учитываются, т. е. считаются не существенными. В действительности и качество семян, и саженцев, и условия их посева, и произрастания одинаковыми не бывают.

При подбрасывании монеты предполагаются только два возможных исхода — выпадание «герба» или выпадание «цифры»; возможность падения монеты на ребро или возможность ее исчезновения в результате испытания не учитывается.

При такой постановке вопроса выводы, полученные в результате изучения моделей, будут отражать особенности явления лишь в главном, а при решении прикладных задач ответ на поставленный вопрос будет приближенным в той мере, в какой реальное явление отличается от его модели.

Различные предположения и допущения, как правило, будем оговаривать особо.

Теперь можно дать следующее определение.

Теория вероятностей — математическая наука о количественных закономерностях моделей случайных явлений независимо от их конкретной природы.

Основы теории вероятностей необходимо знать специалистам, работающим в областях, где очень многие явления и процессы подвержены случайным воздействиям.

§ 11.2. ОБЩИЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

Рассмотрим k множеств M_1, M_2, $M_3, ..., M_k$, содержащих по m_1, m_2, $m_3, ..., m_k$ элементов соответственно. Выбирается по одному элементу из каждого множества и составляется еще одно множество. Число способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждого множества, равно произведению m_1, m_2, $m_3, ..., m_k$. В этом и состоит основной принцип комбинаторики.

В задачах теории вероятностей часто рассматриваются различные соединения (комбинации) из множества n элементов по k элементов ($k \leqslant n$). Будем рассматривать такие соединения, в которые каждый элемент данного множества может входить не более одного раза, т. е. соединения без повторений.

Рассмотрим три вида соединений: 1) размещения, 2) перестановки, 3) сочетания.

Определение. *Размещениями из n элементов по k элементов называются подмножества k элементов, отличающиеся одно от другого или самими элементами или их порядком. Число размещений обозначается A_n^k.*

Теорема. *Число размещений из n элементов по k элементов*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \ldots (n-(k-1)).$$

Доказательство. Для того чтобы расположить k элементов в определенном порядке, выберем один из них и будем считать его «первым». Это можно сделать n способами. Оставшееся множество содержит $n-1$ элементов. Из него выберем один и назовем его «вторым». Для выбора второго элемента имеются $n-1$ способов. Осталось множество из $n-2$ элементов. Выбираем из него один элемент и называем его «третьим», что можно сделать $n-2$ способами. Продолжив процесс отбора, последний k-й элемент можно выбрать $n(k-1)$ способами. Согласно основному принципу комбинаторики, число всех способов, которыми можно составить размещения, т. е. число размещений равно

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-(k-1)). \qquad (11.2.1)$$

● **Пример**. Определить, сколько трехзначных чисел можно составить из множества цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторений.

Решение. Имеем $n=5$, $k=3$; $A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

Здесь полагали, что $0<k\leqslant n$. При $k=0$, по определению, $A_1^0=1$. ●

Определение. *Перестановками из данных n элементов называются множества из n элементов, различающихся только порядком.*

Перестановки — это частный случай размещений. Число всех перестановок обозначают символом P_n. Число P_n найти несложно. Для этого в формуле (11.2.1) необходимо положить $k=n$. Имеем

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-(k-1))\ \dots\ 1.$$

Определение. *Произведение n первых натуральных чисел обозначается символом $n!$ (читается эн-факториал). Поэтому*

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ n = n! \qquad (11.2.2)$$

По определению принимается $P_0 = O! = 1$.

● **Пример.** К кассе за получением (для уплаты) денег подошли одновременно 4 человека. Сколькими способами они могут выстроиться в очередь.

Решение. Очередь состоит из четырех различных лиц, поэтому в каждом способе составления очереди учитывается порядок их расположения. Таким образом, имеют место перестановки из четырех человек, их число равно

$P_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$. ●

Определение. *Сочетаниями, содержащими k элементов, выбранных из n элементов заданного множества, называются всевозможные множества,* *различающиеся хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначают C_n^k или $\binom{n}{k}$.*

Теорема. *Число сочетаний из n элементов по k элементов определяется формулой*

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (11.2.3)$$

Доказательство. Рассмотрим перестановку из n элементов по k. Их число $A_n^k=n(n-1)\dots(n-(k-1))$. Если не считаться с порядком элементов в перестановке из k элементов, то существует $k!$ перестановок, которые неразличимы, т. е. их нельзя отличить от первоначальной перестановки. Поэтому число всех сочетаний из n по k в $k!$ раз меньше числа всех перестановок, т. е.

$$C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}.$$

Эту формулу можно упростить, если домножить члены дроби, стоящей в правой части равенства, на произведение $(n-k)(n-k-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1=(n-k)!$:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))\,(n-k)!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (11.2.3')$$

● **Пример 1.** Имеется 6 штаммов бактерий. Для определения скорости их роста необходимо выбрать 3 штамма. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Способы отбора считаются различными, если каждая отобранная группа штаммов различается хотя бы одним элементом. Это число

$$C_6^3=\frac{6!}{3!\,(6-3)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=20.$$

Таким образом, имеется 20 способов. ●

● **Пример 2.** Из группы в 20 голов крупного рогатого скота, предназначенного для откорма, для контрольного определения среднесуточного привеса отбирается группа из 8 животных. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Число способов равно числу множеств, которые можно составить из 20 элементов по 8, различающихся хотя бы одним элементом, а это

$$C_{20}^8=\frac{20!}{8!\,(20-8)!}=125\,970. \quad ●$$

● **Пример 3.** В ящике 20 шаров, среди которых 12 белых, остальные — голубые. Отбирается наугад 2 шара. Сколькими способами можно отобрать: а) два белых шара; б) два голубых; в) один белый, другой голубой.

Решение. Число способов, которыми можно отобрать два белых шара из 12, не зависит от порядка отбора и равно числу множеств из 12 и 2, различающихся только составом. Следовательно,

$$C_{12}^{2}=\frac{12!}{2!\,(12-2)!}=\frac{11\cdot 12}{1\cdot 2}=66.$$

Число способов, которыми можно отобрать 2 голубых шара из 8 равно

$$C_{8}^{2}=\frac{8!}{2!\,6!}=\frac{7\cdot 8}{2}=28.$$

Число способов, которыми можно отобрать один белый, другой голубой шар, согласно основному принципу комбинаторики равно $12\cdot 8=96$, или

$$C_{12}^{1}\cdot C_{8}^{1}=\frac{12!}{1!\,11!}\cdot\frac{8!}{1!\,7!}=12\cdot 8=96.$$ ●

§ 11.3. СОБЫТИЯ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Введем первоначально следующие понятия: испытание (опыт) и событие. Дадим некоторые пояснения.

Испытание — это осуществление определенного комплекса условий, при которых производится наблюдение. Так, при стрельбе по мишени испытание состоит в подготовке к стрельбе, заряжении оружия, прицеливании, нажатии спускового крючка.

При определении качества посевного материала испытанием является подготовка и создание необходимого водно-воздушного и теплового режима для произрастания семян, посев. При определении процента жира в молоке испытанием считается взятие пробы, лабораторный анализ. Будем предполагать, что испытание может быть воспроизведено сколь угодно много раз.

В теории вероятностей под событием понимается качественный результат испытания или испытаний, если они повторяются многократно.

● **Пример 1.** При одном выстреле по мишени возможны следующие события: 1) попадание в мишень; 2) промах. ●

● **Пример 2.** При подбрасывании монеты 2 раза подряд возможны следующие события:

1) оба раза выпал «герб»;

2) оба раза выпала цифра;

3) при первом подбрасывании выпал «герб», а при втором — цифра;

4) при первом подбрасывании выпала цифра, а при втором — «герб». ●

Возможные, исключающие друг друга, результаты одного испытания называют *элементарными событиями*.

Так, при одном бросании игрального кубика возможны следующие элементарные события: выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти или шести очков.

События обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, ...

В дальнейшем описание события, как правило, будет стоять рядом с его обозначением и соединено с ним знаком $=$. Например, событие $A=$\{при подбрасывании монеты выпал герб\}; событие $B=$\{вынутый шар из ящика — белый\}; событие $C=$\{два попадания по мишени при двух выстрелах\}.

События принято классифицировать. Различают достоверные, невозможные и случайные события.

Достоверным называют событие A, которое при испытании не может не произойти, а при повторении испытаний всякий раз происходит.

● **Пример 3.** При подбрасывании камня событие A, состоящее в том, что камень упадет на землю, достоверное. ●

Событие B называют *невозможным*, если при испытании оно не может произойти.

● **Пример 4.** В ящике имеются только белые шары. Событие $B=$\{появление голубого шара при извлечении одного шара\} — невозможное. ●

Случайным называют событие, которое при испытании может либо произойти, либо не произойти.

● **Пример 5.** При подбрасывании монеты могут наступить: событие=\{монета упала «гербом» кверху\}, либо событие $B=$\{монета упала «цифрой» кверху\}. Здесь A и B — случайные события. ●

События A и B называют *несовместными*, если при одном испытании появление одного из них исключает появление другого.

● **Пример 6.** При одном выстреле по мишени событие $A=$\{попадание\} и событие $B=$\{промах\} — несовместны. ●

События A и B называют *совместными*, если при испытании появление, одного из них не исключает появление другого.

● **Пример 7.** Из партии посевного материала отбирается два зерна. Пусть событие $A = \{$первое зерно при посеве взойдет$\}$, B — событие, состоящее в том, что второе зерно не даст всхода; A и B — совместные события. ●

События A, B, C образуют в данном испытании полную группу, если они попарно несовместны и в результате непременно происходит одно из них.

● **Пример 8.** При посадке молодых деревьев возможны следующие события: $A = \{$дерево приживется$\}$; $B = \{$дерево не примется$\}$. События A и B образуют полную группу. ●

Два несовместных события, образующие полную группу, называются противоположными. Попадание и промах при одном выстреле — события противоположные. Выпадение «герба» и выпадение «цифры» — события противоположные.

Пусть испытание, в результате которого может появиться событие A, повторяется n раз. Событие, состоящее в появлении события A хотя бы один раз, означает, что оно появляется не менее одного раза и не более n раз. Появление хотя бы одного события и непоявление события ни одного раза — события противоположные.

События A, B, C и т. д. называют равновозможными, если нет оснований считать, что в данном испытании одно из них более возможно, чем другие.

● **Пример 9.** При подбрасывании монеты событие $A = \{$выпадение «герба»$\}$ и событие $B = \{$выпадение «цифры»$\}$ равновозможны. При посеве n одинаковых зерен событие A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, состоящее в том, что i-е зерно прорастет, принимается равновозможным. При подбрасывании игрального кубика выпадение граней с 1, 2, 3, 4, 5, и 6 очками — события равновозможные, если кость изготовлена строго симметрично. ●

§ 11.4. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА СОБЫТИЙ И ЕЕ СВОЙСТВА

Пусть проводится N испытаний, в каждом из которых может появиться или не появиться событие A. По завершении испытаний оказалось, что событие A наступило M раз.

Определение. *Относительной частотой (частостью) события называется число*

$$P^*(A)=\frac{M}{N}, \qquad (11.4.1)$$

где M — число появлений события A, N — общее число проведенных испытаний.

● **Пример 1.** Стрелок сделал 100 выстрелов по мишени и попал 90 раз. Пусть событие $A=\{$попадание в мишень при одном выстреле$\}$. Тогда

$$P^*(A)=\frac{90}{100}=0{,}9. \text{ ●}$$

● **Пример 2.** Прививка сделана 12 животным. Иммунитет приобрели 9. Рассмотрим событие $A=\{$данное животное приобрело иммунитет$\}$. Имеем

$$P^*(A)=\frac{9}{12}=0{,}75. \text{ ●}$$

● **Пример 3.** Посажено 70 плодовых деревьев, на другой год оказалось, что прижилось 50. Событие $A=\{$посаженное дерево приживается$\}$. Получаем

$$P^*(A)=\frac{50}{70}=0{,}71. \text{ ●}$$

Свойства частости события.

1^0. *Частость события — величина безразмерная и изменяется на множестве*

$$[0,\ 1]=\{P^*(A):\ 0\leqslant P^*(A)\leqslant 1\}. \qquad (11.4.2)$$

2^0. *Частость достоверного события равна* 1.

3^0. *Частость невозможного события равна* 0.

4^0. *Частость случайного события изменяется на множестве* (0, 1).

Свойства 1^0—4^0 легко доказываются с помощью определения частости и классификации событий. Так, например, пусть событие A достоверно. Это означает, что в серии из N испытаний оно наступило N раз

$$P^*(A)=\frac{N}{N}=1.$$

§ 11.5. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Относительная частота зависит от случайных обстоятельств, сопутствующих испытанию. Назовем многократное повторение испытаний серий испытаний.

При переходе от одной серии испытаний к другой, часто бывает, что для одного и того же события относительная частота $P^*(A)$ обнаруживает устойчивость, т. е. с возрастанием числа испытаний N в сериях колебания значений относительной частоты уменьшаются. Можно предположить, что существует постоянное число, от которого частости в разных сериях отклоняются в ту или другую сторону. Это число как количественная мера объективной возможности осуществления события при одном испытании принимается за статистическую вероятность.

Из этого определения следует, что частость события есть приближенное значение вероятности этого события, что используется в практических задачах. Если событие имеет большую вероятность по сравнению с другими, возможными в данном испытании, то оно и появляется чаще других.

Классическое определение вероятности события. Наблюдая или изучая какие-нибудь два или несколько событий, мы убеждаемся, что одни из них более возможны, чем другие, т. е. каждое событие обладает той или иной мерой возможности. Если каждому событию, возможному при испытании, ставить в соответствие некоторое положительное число, то логично приписывать большее число более возможному событию. Число, выражающее меру возможности события, называется вероятностью этого события.

● **Пример 1.** В ящике 20 шаров, из них 10 белых, 7 голубых, 4 желтых, 4 синих. Шары перемешивают и наудачу, не глядя, берут 1 шар. При этом возможны следующие события:

$A=\{$взятый шар белый$\}$;
$B=\{$взятый шар голубой$\}$;
$C=\{$взятый шар желтый$\}$;
$D=\{$взятый шар синий$\}$.

Достать из ящика белый шар можно скорее, чем голубой, а голубой скорее, чем желтый или синий. Возможности достать желтый или синий шар одинаковы. Числа $^{10}/_{25}$, $^{7}/_{25}$, $^{4}/_{25}$, $^{4}/_{25}$ определяют меру возможности появления соответствующих событий и называются их вероятностями. ●

● **Пример 2.** Пусть имеется корзина с 25 клубнями картофеля, причем из них 5 имеют механические повреждения, нанесенные при уборке. Клубни перемешивают и берут один из них. Возможны следующие события:

$A=\{$клубень взят без повреждений$\}$;
$B=\{$клубень поврежден$\}$.

Ясно, что возможность взять здоровый клубень больше, чем поврежденный, так как здоровых клубней больше. Числа $^{20}/_{25}$ и $^{5}/_{25}$ показывают меру объективной возможности события A и события B и также называются их вероятностями. ●

Пусть в результате испытания может наступить конечное число n элементарных событий. Среди этих n событий имеется m таких, осуществление которых ведет к появлению события A. Эти m событий называют благоприятными для A.

Определение. *Вероятностью события A называется отношение числа m равновозможных элементарных событий, благоприятных для A, к числу n всех возможных элементарных событий.*

Вероятность события A обозначают $P(A)$. Таким образом,

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{11.5.1}$$

● **Пример 3.** *Брошена игральная кость. Найти вероятность* события $A=\{$выпало четное число очков$\}$.

Решение. Элементарными событиями, благоприятными для A, являются события: $A_1=\{$выпадение 2 очков$\}$, $A_2=\{$выпадение 4 очков$\}$, $A_3=\{$выпадение 6 очков$\}$. Всего таких событий 3.

Имеется шесть элементарных событий, $n=6$, следовательно,

$$P(A)=3/6=1/2. \ ●$$

● **Пример 4.** Найти вероятность события $A=\{$выигрыш наибольшей суммы при игре в лото по 1 билету$\}$, если для этого необходимо угадать 5 из 36 чисел.

Решение. При наличии одного билета имеется одно благоприятное для A элементарное событие $=$ $\{$все 5 чисел угаданы правильно$\}$, т. е. $m=1$.

Число n всех элементарных событий равно числу всевозможных групп из 5 чисел, отличающихся хотя бы одним числом, т. е. $n=C_{36}^5$.

$$P(A)=\frac{1}{C_{36}^5}=\frac{1}{376\,922}. \ ●$$

Приведем свойства вероятности события.

1°. *Так как $0\leqslant m\leqslant n$, то $0\leqslant P(A)\leqslant 1$, каково бы ни было по своей природе событие A.*

2°. *Если A — событие невозможное, то $P(A)=0$.*

3°. *Если B — событие достоверное, то $P(B)=1$.*

● **Пример 5.** Талоны занумерованы всеми двузначными числами. Из пачки наудачу берут 1 талон. Какова вероятность события A, состоящего в том, что номер талона состоит из одинаковых цифр?

Решение. Подсчитаем число всех талонов (общее число всех возможных элементарных событий). Номера с 11-го по 19-й будут иметь место на 10 талонах, и так в каждой следующей десятке. Число двузначных цифр $n=90$. Талону с одинаковыми цифрами 11, 22, 33, ..., содержатся в каждых из 10 талонов по одному, т. е. $m=9$. Тогда

$$P(A)=\frac{9}{90}=0{,}1.$$

Вероятность мала, следовательно, при однократном испытании событие скорее всего не произойдет. ●

● **Пример 6.** В ящике 20 шаров, из них 12 белых, остальные голубые. Извлекают два шара.

Найти вероятности событий: $A=\{$оба шара белые$\}$; $B=\{$оба шара голубые$\}$; $C=\{$один шар белый, другой голубой$\}$. Образуют ли события A, B, C полную группу? Проверьте равенство

$$P(A)+P(B)+P(C)=1.$$

В конце § 11.2 (пример 3) было найдено, сколькими способами можно отобрать: а) два белых; б) два голубых; в) один белый, другой голубой шар. Тем самым определено и число элементарных событий, благоприятных для появления каждого из событий A, B, C. Остается подсчитать число всех элементарных событий, возможных при испытании, или число способов, которыми можно отобрать 2 шара из 20. Очевидно, что это

$$C_{20}^{2}=\frac{20!}{2!\,18!}=190.$$

Тогда, по определению,

$$P(A)=\frac{C_{12}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{66}{190}=\frac{33}{95};\quad P(B)=\frac{C_{8}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{28}{190}=\frac{14}{95};\quad P(C)=\frac{C_{12}^{1}\cdot C_{8}^{1}}{190}=\frac{48}{95}.$$

В данном испытании события A, B и C попарно несовместны. Они образуют полную группу, так как в результате наступает одно из этих событий. Поэтому

$$P(A)+P(B)+P(C)=\frac{33}{95}+\frac{14}{95}+\frac{48}{95}=1 \text{ (см. § 11.6).}$$

§ 11.6. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Определение. *Суммой или объединением двух событий A и B называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из них.*

Пишут $C=A+B$, *или* $C=A\cup B$, *или* $C=(A$ или $B)$.

● **Пример.** Пусть A — событие, состоящее в том, что наудачу выбранная из стада корова имеет годовой удой от 3000 до

3500 кг, B — событие, состоящее в том, что выбранная корова имела удой свыше 3500 кг. Тогда событие $C=A+B$ означает, что выбранная корова имеет удой свыше 3000 кг. ●

Нахождение вероятности наступления суммы двух событий основывается на следующей теореме.

1. Теорема сложения вероятностей. *Вероятность наступления одного из двух несовместных событий равна сумме их вероятностей, т. е.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (11.6.1)$$

Доказательство. Пусть n — число всех возможных элементарных событий, при которых может наступить событие A или событие B. Пусть m_A — число равновозможных элементарных событий, благоприятных для A, m_B — такое же число для события B. Имеем

$$P(A)=\frac{m_A}{n}, \quad P(B)=\frac{m_B}{n}.$$

Очевидно, m_A+m_B — число элементарных событий, благоприятных для появления события или A, или B, так что

$$P(A \text{ или } B)=P(A+B)=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=P(A)+P(B).$$

Теорема доказана.

Теорема сложения для большего числа попарно несовместных событий формулируется и доказывается аналогично:

$$P(A \text{ или, } B \text{ или } C)=P(A+B+C)=P(A)+$$
$$+P(B)+P(C). \qquad (11.6.2)$$

Следствие 1. *Если события A, B, C образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна* 1.

Действительно, в результате испытания обязательно произойдет одно из этих событий (или B, или A, или C). Поэтому $A+B+C$ — событие достоверное и

$$P(A+B+C)=1. \qquad (11.6.3)$$

Из (11.6.3) и (11.6.2) следует, что

$$P(A)+P(B)+P(C)=1.$$

Следствие 2. *Сумма вероятностей двух противоположных событий A и $\bar{A}$ равна* 1.

Противоположные события являются частным случаем событий, образующих полную группу, поэтому

$$P(A)+P(\bar{A})=1; \qquad (11.6.4)$$

$$P(\bar{A})=1-P(A). \qquad (11.6.5)$$

В частности, если вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8, то вероятность промаха равна $1-0{,}8=0{,}2$.

● **Пример.** В ящике 4 белых, 5 красных, 8 зеленых и 3 голубых шара. Шары перемешивают и извлекают 1 шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

Решение. Элементарными исходами являются события: $A=${извлечение белого шара}, $B=${извлечение красного шара}, $C=${извлечение зеленого шара}, $D=${извлечение голубого шара}.

Интересующее нас событие состоит в появлении события B, или C, или D, т. е. события $B+C+D$. Так как события B, C, D — несовместны, то

$$P(B+C+D)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}+\frac{3}{20}=\frac{4}{5}. \text{ ●}$$

2. Теорема умножения вероятностей.

Определение. *Произведением или пересечением событий A и B называется событие C, состоящее в совместном наступлении этих событий, т. е. в наступлении и события A, и события B.*

В случае произведения событий пишут $AB=C$ или $A\bigcap B=C$, или $(A$ и $B)=C$.

Произведение нескольких событий определяется аналогично.

● **Пример 1.** Пусть $A=${пассажир отправился из дома на автобусе и добрался до вокзала}; $B=${пассажир купил железнодорожный билет}; $C=${пассажир добрался до своего места в вагоне}; $D=${вагон с пассажиром в составе поезда отправился в путь}. Тогда $ABCD=E=${пассажир уехал}. ●

Теперь можно дать определение понятия условной вероятности.

Определение. *Вероятность события B при условии, что событие A произошло, называется условной вероятностью события B и обозначается*

$$P(B/A) \text{ или } P_A(B).$$

Аналогично определяется условная вероятность события A, обозначение $P(A/B)$.

● **Пример 2.** В стаде животных из 24 голов одной породы 4 животных не получили прививку. Наудачу последовательно, без возвращения отбирается два животных. Вероятность события $A=\{$первому отобранному животному не сделана прививка$\}$, т. е. $P(A)=4/24=1/6$. Вероятность события $B=\{$второму животному не сделана прививка$\}$ при условии, что произошло событие A, $P(B)=3/23$.

Если же первое отобранное животное вернуть в стадо, то $P(B)=4/24=1/6$.

В первом случае вероятность события B зависит от того, наступило событие A или нет, а во втором случае не зависит. ●

Определение. *События A и B называются независимыми, если*

$$P(B/A)=P(B) \text{ и } P(A/B)=P(A).$$

Если $P(B/A)\neq P(B)$ или $P(A/B)\neq P(A)$, то события A и B зависимы.

Теорема. *Вероятность произведения двух событий, т. е. вероятность совместного наступления событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого.*

Доказательство. Пусть для события A благоприятны m_A равновозможных элементарных событий из общего числа n элементарных исходов, причем m_{AB} из этих m_A событий благоприятны для события B. Тогда по определению (11.5.1) имеем

$$P(B/A)=\frac{m_{AB}}{m_A}=\frac{m_{AB}/n}{m_A/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Отсюда следует, что

$$P(AB)=P(A \text{ и } B)=P(A)\cdot P(B/A). \qquad (11.6.6)$$

Теорема доказана.

Справедливость равенства

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B) \qquad (11.6.7)$$

легко усматривается из доказательства формулы (11.6.6).

Если события A и B независимы, то

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

Для вычисления вероятности совместного наступления большего числа событий, например трех, используют формулу

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2),$$

где $P(A_3/A_1A_2)$ — вероятность события A_3, вычисленная при условии, что события A_1 и A_2 уже произошли.

● **Пример 1.** В ящике 60 груш сорта A и 40 груш сорта B. Отбирают 2 груши. Определить вероятности следующих событий:

а) обе груши сорта A;

б) обе груши сорта B;

в) одна груша сорта A, а другая сорта B.

Решение. Обозначим:

событие $A_1=\{$при первом извлечении взята груша сорта $A\}$;
событие $A_2=\{$при втором извлечении взята груша сорта $A\}$;
событие $B_1=\{$при первом извлечении взята груша сорта $B\}$;
событие $B_2=\{$при втором извлечении взята груша сорта $B\}$.

Возможны следующие события: а) (A_1 и A_2); б) (B_1 и B_2); в) (A_1 и B_2) или (B_1 и A_2). Находим:

а) $P(A_1 \text{ и } A_2)=\frac{60}{100}\cdot\frac{59}{99}=0{,}36;$

б) $P(B_1 \text{ и } B_2)=\frac{40}{100}\cdot\frac{39}{99}=0{,}16;$

в) $P(A_1B_2 \quad \text{или} \quad B_1A_2)=P(A_1)\cdot P(B_2/A_1)+P(B_1)\cdot P(A_2/B_1)=$ $=\frac{60}{100}\cdot\frac{40}{99}+\frac{40}{100}\cdot\frac{60}{99}=0{,}48.$ Так как события A_1A_2, B_1B_2, A_1B_2, A_2B_1 образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна 1.

Действительно, $0{,}36+0{,}16+0{,}48=1$. ●

● **Пример 2.** Всхожесть семян, предназначенных для посева, оценивается вероятностью в 98%. Вероятность попадания семян в благоприятные для прорастания условия равна 96%. Какой процент семян даст всходы?

Решение. Обозначим A_1 — событие $=\{$семенной материал способен дать всходы$\}$, $A_2=\{$семена попали в благоприятные условия$\}$.

Событие $C=\{$посеянные семена дадут всходы$\}$ состоит в совместном наступлении событий A_1 и A_2:

$$P(C)=P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)=0{,}98\ 0{,}96=0{,}94.$$

Таким образом, взойдет 94% семян. ●

3. Теорема сложения вероятностей для случая, когда события совместны.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, минус вероятность их совместного появления, т. е.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (11.6.8)$$

По определению событие $A+B$ состоит в наступлении или события $A\bar{B}$, или события $\bar{A}B$, или события AB, следовательно,

$$A+B=A\bar{B}+\bar{A}B+AB.$$

События, стоящие в правой части равенства, несовместны: появление одного из них исключает появление остальных. Поэтому

$$P(A+B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB). \qquad (11.6.9)$$

Но $A=AB+A\bar{B}$, $P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$; $B=AB+\bar{A}B$, $P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$. Следовательно, $P(A\bar{B})=P(A)-$ $-P(AB)$, $P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$. Подставим эти значения в (11.6.9). Имеем

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (11.6.10)$$

Теорема проиллюстрирована на рис. 115. Наступлению события A или B, или AB отвечает фигура, изображенная штриховой линией. Она состоит из фигур, отвечающих событию A и событию B, без фигуры совмещения A и B.

● **Пример 4.** В посевах пшеницы на делянке имеется 95% здоровых растений. Выбирают два растения. Определить вероятность того, что среди них хотя бы одно окажется здоровым.

Пусть события $A_1=$\{первое растение здоровое\}; событие $A_2=$\{второе растение здоровое\}; событие $A_1+A_2=$\{хотя бы одно растение здоровое\}. Так как события A_1 и A_2 совместны, то

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2)=$$
$$=0{,}95+0{,}95-0{,}95\ 0{,}95=0{,}9975\approx 1. \ ●$$

Событие A_1+A_2 практически достоверно. Задачу можно решить и другим способом. При повторных испытаниях, как это имело место в задаче, появление хотя бы одного события (A_1+A_2) и непоявление события ни разу $(\bar{A}_1\bar{A}_2)$ — события противоположные; тогда

$$P(A_1+A_2)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=$$
$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)=1-0{,}0025=0{,}9975.$$

Как видим, получен один и тот же результат.

Рис. 115

● **Пример 5.** В животноводческом комплексе для крупного рогатого скота для раздачи кормов работают 2 транспортера. Предположим, что вероятность безотказной работы в течение зимних месяцев каждого из них равна 0,9. Транспортеры работают при подаче электроэнергии независимо. Найти вероятность того, что в течение зимнего времени будут работать: а) хотя бы один транспортер; б) оба транспортера, в) ни один транспортер; г) только один транспортер.

Решение. Пусть

событие $A_1 = \{$безотказная работа первого транспортера$\}$;

событие $A_2 = \{$безотказная работа второго транспортера$\}$.

События A_1 и A_2 совместны, так как работа одного не исключает работы второго и наоборот.

По определению суммы событий есть событие, состоящее в том, что работает хотя бы один транспортер $A_1 + A_2$. Имеем

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}81 = 0{,}99.$$

Событие $A_1 A_2$ состоит в том, что работают оба транспортера:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81.$$

Событие $C = \{$ни один транспортер не будет работать$\}$ состоит в совместном наступлении события $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$, т. е. это событие $\bar{A}_1 \bar{A}_2$;

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) = 0{,}1 \;\; 0{,}1 = 0{,}01.$$

Вероятность наступления события мала, т. е. событие практически невозможно.

Событие $= \{$будет работать только один транспортер$\}$ означает, что наступит или событие $A_1 \bar{A}_2$, или $\bar{A}_1 A_2$. События $A_1 \bar{A}_2$ и $\bar{A}_2 A_1$ несовместны, появление события $A_1 \bar{A}_2$ исключает появление события $\bar{A}_2 A_1$. Здесь имеет место событие $A_1 \bar{A}_2 + + \bar{A}_2 A_1 : P\,(A_1 \bar{A}_2$ или $\bar{A}_1 A_2) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_1) P(\bar{A}_2) + + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}18$. ●

§ 11.7. ТЕОРЕМА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Приведенная ниже формула объединяет теоремы сложения и умножения.

Теорема. *Вероятность события A, которое может произойти при условии осуществления одного из несовместных событий B_1, B_2, B_3, ..., B_n, образующих полную группу, определяется формулой*

$$P(A) = P(B_1) P(A/B_1) + P(B_2) P(A/B_2) + \dots$$

$$\dots + P(B_n) P(A/B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A/B_i).$$

Доказательство.

Для наступления события A необходимо и достаточно наступления или события AB_1, или события AB_2, или события AB_3, ..., или события AB_n (рис. 116),

$$A = AB_1 + AB_2 + AB_3 + \ldots + AB_n.$$

Так как события AB_i несовместны, то $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$, поэтому

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A/B_i). \quad (11.7.1)$$

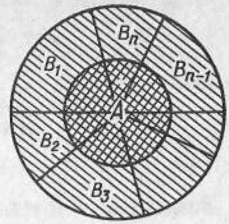


Рис. 116

● **Пример.** Азотное удобрение поступает на склад хозяйства из пункта 1 и пункта 2, причем, из 1-го пункта в 2 раза больше, чем из 2-го. Вероятность события = {удобрение из первого пункта удовлетворяет стандарту} 0,9, а соответствующая вероятность для второго пункта равна 0,7. Определить вероятность события A = {взятое для пробы на складе хозяйства удобрение удовлетворяет стандарту}.

Решение. Обозначим

событие B_1 = {удобрение поступило из пункта 1};

событие B_2 = {удобрение поступило из пункта 2};

Находим

$$P(B_1) = {}^2/_3, \ P(B_2) = {}^1/_3, \ P(A/B_1) = 0{,}9, \ P(A/B_2) = 0{,}7;$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) P(A/B_2) =$$
$$= {}^9/_{10} \cdot {}^2/_3 + {}^7/_{10} \cdot {}^1/_3 = {}^5/_6 = 0{,}8\ (3).$$

Событие A имеет большую вероятность, оно практически достоверно, т. е. наступит в среднем в 83 случаях из 100. ●

Формула Байеса*. Рассмотрим следующую задачу. На фермах А и В произошла вспышка заболевания ящуром. Доли заражения скота составляют соответственно ${}^1/_6$ и ${}^1/_4$. Случайным образом отобранное из одной фермы животное оказалось заболевшим. Найти вероятность события = {животное выбрано из фермы А}. Обозначим:

A = {отобранное животное заражено};

событие B_1 = {животное выбрано из фермы А}, $P(B_1) = 0{,}5$;

событие B_2 = {животное выбрано из фермы В}, $P(B_2) = 0{,}5$;

A/B_1 = {животное, отобранное из фермы А, заражено};

A/B_2 = {животное, отобранное из фермы В, заражено}.

Вероятность события = {животное выбрано из фермы А и заражено} можно записать в виде $P(B_1) \cdot P(A/B_1)$.

Но $P(B_1) \cdot P(A/B_1) = P(A) \cdot P(B_1/A)$, откуда

* Т. Байес (1702—1761) — английский математик.

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A)}, \qquad (*)$$

или

$$P(B_1/A) = \frac{0{,}5 \cdot 1/6}{0{,}5 \cdot 1/6 + 0{,}5 \cdot 1/4} = \frac{2}{5}.$$

Заменив в $(*)$ $P(A)$ на $\sum_{i=1}^{2} P(B_i)P(A/B_i)$, получим

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(B_i) \cdot P(A/B_i)}. \qquad (**)$$

Формула $(**)$ является частным случаем формулы Байеса.

Рассмотрим задачу в общем виде. Пусть в результате испытания произошло событие A, которое могло наступить только вместе с каждым из событий B_1, B_2, B_3, ..., B_n, образующих полную группу; $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$ заранее известны. Требуется найти вероятности событий B_1, B_2, ..., B_n после испытания, когда событие A уже имело место, т. е. $P(B_i/A)$, $i=1, 2, ..., n$.

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным при решении задачи, получим формулу

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}. \qquad (11.7.2)$$

Эта формула называется формулой Байеса. По формуле (11.7.2) можно вычислить вероятности событий B_i, когда событие A произошло, т. е. переоценить вероятности.

● **Пример.** Большая популяция людей разбита на 2 группы одинаковой численности. Диета одной группы отличалась высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богатой насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний составило в этих группах 31% и 48%. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что этот человек принадлежит к контрольной группе?

Решение. Обозначим:

событие $B_1 = \{$человек придерживался специальной диеты$\}$;

событие $B_2 = \{$выбранный человек принадлежал к контрольной группе$\}$;

событие $A/B_1 = \{$человек заболел при условии, что он придерживался специальной диеты$\}$;

событие $A/B_2 = \{$человек заболел при условии, что он принадлежал к контрольной группе$\}$;

событие $A = \{$случайно отобранный человек заболел$\}$.

Тогда, используя формулу (11.7.1), получим

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) = {}^1/_2 \cdot 0{,}31 + {}^1/_2 \cdot 0{,}48 = 0{,}395.$$

Вероятность того, что человек, имеющий заболевание, принадлежит к контрольной группе определим по формуле (11.7.2). Имеем

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}48}{0{,}395} = 0{,}61. \ \bullet$$

§ 11.8. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТЫ ПОЯВЛЕНИЯ СОБЫТИЯ В НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

● **Задача 1.** Допустим, что на опытной делянке посеяно 15 семян. Примем, что всхожесть всех семян одинакова и равна 80%*. Возможны следующие элементарные события:

$A_0 = \{$число семян, давших росток, равно $0\}$;

$A_1 = \{$число взошедших семян равно $1\}$;

$A_2 = \{$число взошедших семян равно $2\}$;

и т. д. и, наконец,

$A_{15} = \{$все семена дадут всходы$\}$.

Как найти вероятности этих событий, в частности, вычислить вероятность того, что из 15 посеянных семян взойдет ровно 12, безразлично в какой последовательности? ●

● **Задача 2.** В течение февраля месяца десять коров должны отелиться. Допустим, что в приплоде будет 1 теленок. Условимся, что вероятность рождения бычка от каждой коровы постоянна и равна 0,5**. Возможно осуществление следующих событий:

$A_0 = \{$число родившихся бычков равно 0, все 10 телочки$\}$;

$A_1 = \{$число родившихся бычков равно 1, остальные 9 телочки$\}$;

и т. д. и, наконец,

$A_{10} = \{$число родившихся бычков равно 10 и ни одной телочки$\}$.

---

* Такое соглашение достаточно условно. Оно принято для того чтобы можно было использовать простейшую математическую модель задачи. В действительности всхожесть зерен, т. е. способность дать росток, для двух различных зерен не одинакова, т. е. мы рассматриваем не реальную задачу, а ее модель.

** Предположение также условно. Реально то, что каждое конкретное животное имеет не одинаковые возможности, в том числе и возможность дать в приплоде бычка или телочку. И здесь мы абстрагируемся и переходим к модели.

Найдем, например, вероятность того, что в 10 отелах число родившихся бычков 7, а телочек 3. Обе задачи можно обобщить одним абстрактным рассуждением. ●

Рассмотрим серию из n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A имеет одну и ту же вероятность $P(A)=p$, не зависящую от номера испытания.

Такая серия испытаний называется схемой Бернулли.

Решим следующую задачу. В условиях схемы Бернулли определим вероятность $P_{k,n}$ события, состоящего в том, что при n повторениях испытания событие A, которое имеет одну и ту же вероятность появления в каждом испытании, произойдет ровно k раз безразлично в какой последовательности. Элементарными исходами испытаний являются:

событие $A_i=\{$появление события A в i-м испытании$\}$ $(i=1,\ 2,\ 3, ..., n)$, $P(A_i)=p$;

событие $\bar{A}_i=\{$непоявление события A в i-м испытании$\}$ $(i=1,\ 2,\ 3, ..., n)$, $P(\bar{A}_i)=1-p=g$.

Предположим, что событие A имело место в k первых испытаниях и не произошло в $n-k$ последующих, т. е. в соответствии с определением произведения событий, произошло событие $A_1A_2A_3...A_k\bar{A}_{k+1}...\bar{A}_n$. Так как испытания независимы, то, применив теорему умножения вероятностей, получим

$$P(A_1A_2A_3...A_k\bar{A}_{k+1}...\bar{A}_n)=p^kg^{n-k}.$$

Появление события A ровно k раз и события $\bar{A}$ ровно $n-k$ раз с такой же вероятностью возможно и в другой последовательности, т. е. другим способом. Например, событие A может наступить в $k-1$ первых испытаниях, не появиться в испытаниях, номер которых от k до $n-1$, и снова появиться в последнем, n-м испытании. Число способов наступления сложного события, состоящего в появлении события A именно k раз и непоявлении $n-k$ раз равно числу всевозможных множеств, которые можно образовать из n элементов по k элементов, и отличающихся только составом. Число таких множеств равно $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ [см. формулу (11.2.3)].

Итак, вероятность наступления события A ровно k раз и события $\bar{A}$ ровно $n-k$ раз равно p^kg^{n-k}

и это сложное событие может произойти одним из C_n^k способов. По теореме сложения вероятностей

$$P_{k,n}=\underbrace{p^k g^{n-k}+p^k g^{n-k}+\ldots+p^k g^{n-k}}_{C_n^k \text{ раз}}=C_n^k p^k g^{n-k}. \quad (11.8.1)$$

Учитывая (11.2.3), запишем формулу (11.8.1) в виде

$$P_{k,n}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k g^{n-k}. \quad (11.8.2)$$

Это формула Бернулли. Здесь n — число повторений независимых испытаний; k — число испытаний, в которых событие A произошло (число успехов); p — вероятность появления события A в одном испытании; g — вероятность непоявления события A в одном испытании $(g=1-p)$; $P_{k,n}$ — вероятность сложного события, состоящего в том, что при n испытаниях событие A наступило ровно k раз.

Вернемся к сформулированным выше задачам.

● 1. Число посеянных семян равно числу независимых испытаний, т. е. $n=15$, числов «успехов» $k=12, p=0{,}8, g=1-0{,}8=0{,}2$. Тогда

$$P_{12,15}=\frac{15!}{12!3!}\cdot 0{,}8^{12}\cdot 0{,}2^3=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{2\cdot 3}\cdot 0{,}8^{12}\cdot 0{,}2^3=$$
$$=13\cdot 35\cdot 0{,}8^{12}\cdot 0{,}008\approx 0{,}2551.$$

Событие «12 из 15» имеет небольшую вероятность. Если наблюдать такие серии повторений испытаний, то 12 успехов из 15 испытаний будут иметь место в среднем в 25 сериях из 100.

2. Число наблюдаемых коров принимаем равным числу независимых испытаний, т. е. $n=10$, $k=7$, $p=0{,}5$, $g=0{,}5$. Находим

$$P_{7,10}=\frac{10!}{7!(10-7)!}\cdot 0{,}5^7\cdot 0{,}5^3=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}5^{10}=120\cdot 0{,}5^{10}\approx 0{,}12.$$

Можно показать, что $P_{5,10}$ (вероятность рождения 5 телочек и 5 бычков) больше, чем $P_{7,10}$, а следовательно, и само событие более возможно, чем рождение 7 телочек и 3 бычков

$$P_{5,10}=\frac{10!}{5!(10-5)!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 0{,}5^{10}=0{,}25. \text{ ●}$$

Вероятнейшее число появлений события при повторении испытаний.

● **Задача 3.** Садовод сделал осенью 6 прививок. По опыту прошлых лет известно, что после зимовки 7 из каждых 10 черенков оставались жизнеспособными. Какое число прижившихся черенков наиболее вероятно?

Решение. Будем условно считать, что вероятность события, состоящего в том, что привитый черенок приживется, одинакова для всех черенков и равна 0,7 и что испытания независимы*.

Составим следующую таблицу, учитывая, что $p=0{,}7$, $g=0{,}3$.

Таблица 11.1

Вероятности	Число прижившихся черенков	0	1	2	3	4	5	6
$P_{k,\,n}$		$C_6^0\cdot 0{,}3^6\times$ $\times 0{,}7^0$	$C_6^1\cdot 0{,}7\times$ $\times 0{,}3^5$	$C_6^2\cdot 0{,}7^2\times$ $\times 0{,}3^4$	$C_6^3\cdot 0{,}7^3\times$ $\times 0{,}3^3$	$C_6^4\cdot 0{,}7^4\times$ $\times 0{,}3^2$	$C_6^5\cdot 0{,}7^5\times$ $\times 0{,}3$	$C_6^6\cdot 0{,}7^6\times$ $\times 0{,}3^0$
		0,0007	0,0102	0,0593	0,1852	0,3241	0,3025	0,1176

Из таблицы видно, что наибольшая вероятность соответствует событию, состоящему в том, что приживутся 4 черенка. Следовательно, это событие более возможно, чем все остальные. ●

Решим задачу в общем виде, не составляя приведенную выше таблицу.

Обозначим число появлений события A, имеющего наибольшую вероятность при n испытаниях, через k_0. Тогда

$$P_{k_0,n}\geqslant P_{k_0+1,n} \tag{11.8.3}$$

и

$$P_{k_0,n}\geqslant P_{k_0-1,n}. \tag{11.8.4}$$

Из (11.8.3) имеем

$$\frac{P_{k_0+1,n}}{P_{k_0,n}}\leqslant 1$$

или, учитывая формулу Бернулли (11.8.2),

$$\frac{P_{k_0+1,n}}{P_{k_0,n}}=\frac{\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k_0-1)!}\cdot p^{k_0+1}g^{n-k_0-1}}{\dfrac{n!}{k_0!\,(n-k_0)!}\cdot p^{k_0}g^{n-k_0}}=$$

$$=\frac{(n-k_0)p}{(k_0+1)g}\leqslant 1 \tag{11.8.5}$$

---

* Строго говоря, результаты прививок, сделанных одним человеком, не являются независимыми. Кроме того, возможность успешного подвоя у каждого черенка не одинакова. Поэтому и результат решения действителен не для конкретного явления, а для его модели.

Из последнего неравенства следует, что

$$(n-k_0)p \leqslant (k_0+1)g.$$

После перегруппировки получаем

$$np-g \leqslant k_0(p+g),$$

откуда имеем

$$np-g \leqslant k_0. \tag{11.8.6}$$

Запишем следствие из неравенства (11.8.4)

$$\frac{P_{k_0-1,n}}{P_{k_0,n}} \leqslant 1.$$

Выполняя те же преобразования, что и для (11.8.3), имеем

$$\frac{P_{k_0-1,n}}{P_{k_0,n}} = \frac{k_0}{n-k_0+1}\frac{g}{p} \leqslant 1,$$

или

$$k_0(g+p) \leqslant np+p,$$

откуда окончательно получаем

$$k_0 \leqslant np+p. \tag{11.8.7}$$

Объединяя (11.8.6) и (11.8.7), имеем

$$np-g \leqslant k_0 \leqslant np+p. \tag{11.8.8}$$

Числа $np-g$ и $np+p$ отличаются на единицу. Поэтому, если $np-g$ — дробное число, то $np+p$ — также дробное и неравенство (11.8.8) определяет одно k_0. Если $np-g$ — целое число, то и $np+p$ — также целое; тогда числа k_0 и k_0+1 будут иметь равную и наибольшую вероятность.

В задаче о садоводе вычислим k_0. Имеем $n=6$, $p=0{,}7$, $g=0{,}3$; $np-g=6\cdot 0{,}7-0{,}3=3{,}9$; $np+p=6\cdot 0{,}7+$ $+0{,}7=4{,}9$; $3{,}9 \leqslant k_0 \leqslant 4{,}9$; $k_0=4$.

§ 11.9. ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ МУАВРА—ЛАПЛАСА*

● **Задача.** На опытном поле посеяно 1500 семян. Найти вероятность события, состоящего в том, что всходы дадут ровно 1200 семян, если условно считать, что каждое зерно взойдет с вероятностью 0,9**.

---

* А. Муавр (1667—1754) — английский математик. П. С. Лаплас (1749—1927) — французский математик, физик и астроном.

** См. примечание на с. 283.

По формуле (11.8.2), учитывая, что $n=1500$, $k=1200$, $p=0{,}9$, $g=0{,}1$, находим

$$P_{1200,\,1500}=\frac{1500!}{1200!\ 300!}\cdot 0{,}9^{1200}\cdot 0{,}1^{300}.$$

Получение ответа сопряжено с немалыми вычислительными трудностями. Ясно, что при большом числе n повторений испытаний вычисление вероятностей по формуле Бернулли становится громоздким.

Приближенная формула для частного случая $p=\frac{1}{2}$ впервые была доказана Муавром в 1730 г., а впоследствии Лаплас привел обобщенную формулу для $0<p<1$.

Теорема. *Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна $p\,(0<p<1)$, то справедлива следующая формула:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_{k,n}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npg}}\,e^{-\frac{(k-np)^2}{2npg}}\right)=0, \qquad (11.9.1)$$

где $P_{k,n}$ — вероятность того, что при n испытаниях событие A появится ровно k раз (k испытаний успешны) ; $g=1-p$ — вероятность непоявления события A в одном испытании. Для практических целей используют приближенное равенство — следствие из формулы (11.9.1):

$$P_{k,n}\approx\frac{1}{\sqrt{npg}}\,\varphi(x), \qquad (11.9.2)$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$, а $x=\frac{k-np}{\sqrt{npg}}$.

Формула (11.9.2) дает тем более точный результат, чем больше число n.

Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы. Так как $\varphi(x)$ зависит от x в четной степени, то $\varphi(x)=\varphi(-x)$. Поэтому таблицы составлены для значений $x\geqslant 0$ (см. Приложение 1).

● **Пример.** В задаче 1 (см. § 11.8) было найдено $P_{12,\,15}=0{,}2551$. По формуле (11.9.2), при $n=15$, $k=12$, $p=0{,}8$, $g=0{,}2$, имеем

$$npg=15\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=2{,}4;$$

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npg}}=\frac{12-15\cdot 0{,}8}{15\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}=\frac{12-12}{\sqrt{2{,}4}}=0;$$

$$\varphi(0)=0{,}3989;\quad P_{12,15}\approx\frac{1}{\sqrt{2{,}4}}0{,}3989=0{,}2581.$$

Как видим, даже при небольшом числе испытаний ($n=15$) погрешность в результате замены точной формулы приближенно равна 0,003.

Вернемся к исходной задаче и найдем $P_{1200,1500}$ по формуле (11.9.2). При $n=1500$, $k=1200$, $p=0{,}9$, $g=0{,}1$ имеем

$$x=\frac{1200-1500\cdot 0{,}9}{\sqrt{1500\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=-\frac{150}{\sqrt{135}}=-\frac{150}{11{,}62}=-12{,}91;$$

$$\varphi(-12{,}91)=\varphi(12{,}91)\approx 6{,}3\cdot 10^{-4};$$

$$P_{1200,1500}\approx\frac{6{,}3\cdot 10^{-4}}{\sqrt{135}}\approx 5{,}4\cdot 10^{-5}.$$

Как видим, вероятность мала. Событие, состоящее в том, что из посеянных 1500 семян взойдет ровно 1200, при одной серии испытаний, практически не произойдет. ●

Интегральная теорема Муавра — Лапласа. *Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p* $(0<p<1)$, *то справедлива формула*

$$\lim_{n\to\infty}\left(P(k_1,k_2)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{k_1-np}{\sqrt{npg}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{npg}}}\mathrm{e}^{-z^2/2}\,dz\right)=0,$$

где $P(k_1,k_2)$ — вероятность того, что при n повторениях испытания событие A произойдет не менее чем k_1 и не более k_2 раз. При решении задач применяют следствие из теоремы:

$$P(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_1}^{x_2}\mathrm{e}^{-z^2/2}\,dz,\qquad (11.9.3)$$

где

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npg}},\quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npg}}.\qquad (11.9.4)$$

Интеграл $\int\mathrm{e}^{-z^2/2}dz$ не выражается через элементарные функции. Для вычисления вероятностей по формуле (11.9.3) используют хорошо изученную функцию

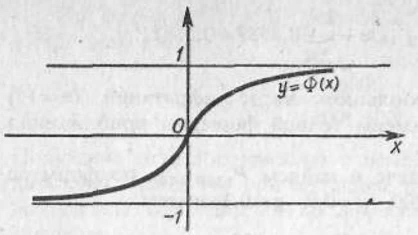


Рис. 117

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}\,dz. \qquad (11.9.5)$$

Для нее составлены таблицы, а график изображен на рис. 117. Функцию $\Phi(x)$ часто называют функцией Лапласа (см. Приложение 2). Функция $\Phi(x)$ нечетная, $\Phi(x)=-\Phi(-x)$, так что таблицы составлены только для $x\geqslant 0$.

Используя обозначения, принятые в (11.9.4) и (11.9.5), запишем формулу (11.9.3) в виде

$$P(k_1, k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2}\,dz=\int\limits_{x_1}^{0} e^{-z^2/2}\,dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x_2} e^{-z^2/2}\,dz,$$

или окончательно в следующем виде:

$$P(k_1, k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1). \qquad (11.9.6)$$

● **Пример.** В лаборатории из партии семян, имеющих всхожесть 90%, высеяно 600 семян. Найти вероятность события={число семян, давших всходы, не менее 520 и не более 570}, если принять, что каждое посеянное зерно взойдет с одной и той же вероятностью $P=0,9$*.

Решение. Имеем $n=600$, $p=0,9$, $g=0,1$, следовательно,

$$P(320,\ 570)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $x_1=\frac{520-600\cdot 0,9}{600\cdot 0,9\cdot 0,1}=\frac{20}{7,35}=2,72$, $x_2=\frac{570-600\cdot 0,9}{7,35}=4,08$;

$$P(520,\ 570)\approx\Phi(4{,}08)-\Phi(-2{,}72)=0{,}49996+0{,}4967=0{,}99.$$

Событие практически достоверное. ●

§ 11.10. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ В СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРАКТИКЕ

Сельскохозяйственное производство, как ни одно другое, подвержено воздействию многочисленных факторов, часто скрытых от непосредственного на-

---

* См. примечание на с. 283.

блюдения. Проследить все эти зависимости и дать их количественную характеристику невозможно. Естественно, что при изучении любого процесса, и в частности в растениеводстве и животноводстве, стремятся выделить главные связи, определяющие основные особенности изучаемого процесса и пренебречь второстепенными.

Если известны условия осуществления некоторого процесса в виде определенных требований или ограничений, то теория вероятностей как математическая наука дает возможность прогнозировать этот процесс на основе изучения соответствующих теоретико-вероятностных моделей, причем прогноз будет тем точнее, чем лучше (детальнее) вероятностная модель отражает сущность изучаемого процесса. Вместе с этим, изучая модели и устанавливая вероятность некоторого события — как результата осуществления комплекса условий, определяющих изучаемый процесс, мы имеем возможность получить важные практические результаты и руководствоваться ими в конкретных условиях производства.

● **Пример 1.** Рассмотрим случайное событие A, состоящее в том, что урожайность пшеницы (ц/га) с данного поля заключена в некотором интервале $[a_1, a_2]$, например 35—45 ц. Событие A следует рассматривать как очень сложное. Условимся, что событие A может наступить только при осуществлении следующих важнейших, определяющих A событий*:

A_1 — посевной материал отвечает стандарту, т. е. его генетический потенциал способен дать урожайность в заданных пределах;

A_2 — норма посева на единицу площади соответствует планируемой урожайности;

A_3 — подготовка почвы к посеву выполнена с соблюдением требований агротехники;

A_4 — содержание влаги, необходимое для роста и развития растений, оптимальное;

A_5 — содержание питательных веществ в почве обеспечено;

A_6 — количества тепла и света, необходимые для роста и развития растений в соответствующие периоды, не отклоняются от расчетных (в том числе с учетом целенаправленной деятельности человека по соблюдению теплового и светового режима);

A_7 — уход за посевом осуществлен в соответствии с требованиями агротехники;

A_8 — уборка прошла без потерь.

---

* В действительности событие A может наступить, если какое-нибудь из событий A_i не произойдет. Правда, вероятность $P(A)$ при этом будет меньше, чем при принятом соглашении.

События A_i, $i=1, 2, 3, ..., 8$, назовем составляющими. Каждое из них, в свою очередь, является событием сложным и состоит в совместном наступлении других менее сложных событий. Например, событие A_2 наступит, если осуществятся события: A_{21} — средняя масса зерна соответствует номиналу, A_{22} — высевающий аппарат отрегулирован, A_{23} — влажность отвечает расчетной и т. д.

Итак, для того чтобы наступило событие A, необходимо совместное осуществление событий A_i, $i=1, 2, ..., 8$, т. е.

$$A=A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8. \tag{11.10.1}$$

Выражение (11.10.1) является простейшей теоретико-вероятностной моделью процесса возделывания пшеницы. Так как каждое событие является случайным, то $P(A_i)<1$.

Естественно предположить, что числа $P(A_i)$ различны. Для оценки значений $P(A_i)$ необходимо иметь обширный статистический материал. При этом, даже если бы такой материал и был собран и обработан, то он был бы пригоден только для прогнозирования результатов деятельности, протекающей в точно таких же условиях и по тем же законам, что и изучаемый процесс.

Предположим, что события A_i имеют следующие достаточно большие вероятности: а) $P(A_i)=0{,}90$; б) $P(A_i)=0{,}95$; в) $P(A_i)=0{,}99$.

События A_i в общем случае можно считать зависимыми, а соответствующие вероятности условными. Тогда по теореме умножения вероятностей и с учетом (11.10.1) получаем:

а) при $P(A_i)=0{,}9$

$$P(A)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}9^8=0{,}43;$$

б) при $P(A_i)=0{,}95$

$$P(A)=0{,}95^8=0{,}66;$$

в) при $P(A_i)=0{,}99$

$$P(A)=0{,}99^8=0{,}92.$$

Сравнивая полученные вероятности, мы видим, что при программировании урожая на основании данных науки и передового опыта необходимо стремиться получать максимальные значения вероятностей осуществления событий A_i, $i=1, 2, 3, ..., 8$, сообразуясь при этом с законами экономики. ●

● **Пример 2.** Рассмотрим сложное событие A, состоящее в том, что при откорме свиней масса животного к шестимесячному возрасту попадает в некоторый интервал $[C_1, C_2]$. Интервал рассчитан при условии, что происхождение, содержание и кормление животных отвечают необходимым требованиям. Условимся, что событие A может осуществиться только в результате совместного наступления следующих событий.

A_1 = {происхождение животного соответствует его номинальной породе};

A_2 = {кормление животного осуществляется по научно обоснованным рекомендациям};

A_3 = {условия содержания животных отвечают научно обоснованным требованиям}.

Тогда

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3. \tag{11.10.2}$$

Для того чтобы наступило событие A_1, необходимо совместное осуществление следующих событий:

A_{11} = {порода родителей отвечает номиналу};

A_{12} = {соблюден метод разведения};

A_{13} = {морфологические, физиологические, продуктивные качества родителей сохранились без изменения};

A_{14} = {возраст родителей соответствует необходимым требованиям получения наилучшего потомства};

A_{15} = {сочетаемость родителей имела место};

A_{16} = {продолжительность опороса отвечает физиологически обоснованной норме};

A_{17} = {при рождении порядковый номер поросенка отвечает наилучшему числу};

A_{18} = {живая масса поросенка при рождении отвечает стандарту};

A_{19} = {событие, зависящее от номера соска свиноматки, соответствующего данному поросенку};

$A_{1\,10}$ = {соблюдена продолжительность подсосного периода}.

Рассмотрим событие A_2. Примем условно, что это событие возможно только при совместном осуществлении следующих событий *:

A_{21} = {содержание обменной энергии в рационе обеспечено};

A_{22} = {содержание сухого вещества в рационе выдержано};

A_{23} = {содержание перевариваемого протеина отвечает расчетному};

A_{24} = {содержание в рационе лизина выдержано};

A_{25} = {структура рациона выдержана};

A_{26} = {степень измельчения кормов отвечает зоотехническим требованиям}.

Событие A_{27} состоит в том, что в рационе выдержано необходимое по зоотехническим требованиям содержание различных веществ (метионина и цистина, триптофана, сырой клетчатки, кальция, фосфора, натрия, хлора, железа, меди, марганца, кобальта, иода, цинка, каротина, ретинола, эргокальциферола, токоферола, тиамина, рибофлавина, пантотеновой кислоты, холина, никотинамида, пиридоксина, цианкобаламина).

A_{28} = {в рационе включены все ферменты};

A_{29} = {в кормах отсутствуют вредные примеси};

$A_{2\,10}$ = {производится тепловая обработка кормов};

$A_{2\,11}$ = {влажность кормовой смеси отвечает необходимым требованиям};

---

* См. примечание на с. 291.

$A_{2\,12}$ = {кратность кормления соблюдается};

$A_{2\,13}$ = {имеет место свободный доступ к питьевой воде};

$A_{2\,14}$ = {качество воды хорошее}.

Осуществление события A_3 возможно только при совместном наступлении следующих событий*.

A_{31} = {требуемое качество подготовки помещения перед заполнением животными выполнено};

A_{32} = {поголовье свиней в изолированной секции однородно};

A_{33} = {конструкция станка соответствует необходимым условиям};

A_{34} = {количество животных в одном станке не превышает нормы};

A_{35} = {площадь станка на 1 голову выдержана};

A_{36} = {площадь логова на 1 голову выдержана};

A_{37} = {теплопроводность логова отвечает необходимым требованиям};

A_{38} = {разность в живой массе животных в одном станке допустимая};

A_{39} = {событие, зависящее от количества перегруппировок животных};

$A_{3\,10}$ = {температура в помещении оптимальная};

$A_{3\,11}$ = {влажность воздуха в помещении выдерживается на необходимом уровне};

$A_{3\,12}$ = {скорость движения воздуха поддерживается на необходимом уровне};

$A_{3\,13}$ = {содержание в воздухе углекислого газа, аммиака, сероводорода, пыли, микроорганизмов в помещении соответствует норме};

$A_{3\,14}$ = {событие, зависящее от освещенности};

$A_{3\,15}$ = {продолжительность светового дня отвечает необходимым требованиям};

$A_{3\,16}$ = {имело место необходимое облучение ультрафиолетовыми и инфракрасными лучами};

$A_{3\,17}$ = {обеспечен полноценный моцион животных}.

События A_1, A_2, A_3 можно считать независимыми, события A_{1i}, $i=1, 2, 3, ..., 10$; A_{2j}, $j=1, 2, 3, ..., 14$, и A_{3k}, $k=1, 2, 3, ..., 17$, следует полагать зависимыми и использовать при расчетах их условные вероятности.

Пусть вероятности событий A_{1i}, A_{2j}, A_{3k} достаточно большие. Рассмотрим три их уровня: а) $p=0{,}90$; б) $p=0{,}95$; в) $p=0{,}99$. Учитывая (11.10.2), имеем

$$A=A_1A_2A_3=A_{11}A_{12}A_{13}\dots A_{10}A_{21}\hat{A}_{22}A_{23}\dots A_{2\,14}A_{31}A_{32}A_{33}\dots A_{3\,17};$$

а) $P(A)=0{,}9^{10}\cdot 0{,}9^{14}\cdot 0{,}9^{17}=0{,}9^{41}=0{,}013$;

б) $P(A)=0{,}95^{10}\cdot 0{,}95^{14}\cdot 0{,}95^{17}=0{,}95^{41}=0{,}077$;

в) $P(A)=0{,}99^{10}\cdot 0{,}99^{14}\cdot 0{,}99^{17}=0{,}99^{41}=0{,}66$.

Как видим, даже при больших вероятностях составляющих событий вероятность осуществления события A небольшая.

---

* См примечание на с. 291.

Положим теперь, что $P(A)=0{,}729$. Для получения такой вероятности необходимо, чтобы условия производства обеспечивали вероятность осуществления событий A_1, A_2, A_3, равную 0,9; событие A_{1i} должно иметь место с вероятностью 0,99; A_{2j} — с вероятностью 0,993; A_{3k} — с вероятностью 0,994.

В действительности же вероятности событий A_{1i}, A_{2j}, A_{3k} не являются достаточно большими, поэтому событие, состоящее в том, что по достижении определенного возраста масса животного, попадает в заданный интервал, происходит не очень часто.

Условия производства должны быть организованы так, чтобы события A_{1i}, A_{2j}, A_{3k} были практически достоверны. Разумеется, *при расчетах для каждого конкретного случая должны быть* учтены экономические соображения.

Из примеров 1 и 2 видим, какое большое значение в сельскохозяйственном производстве имеет соблюдение технологической дисциплины. Только в этом случае практически достоверно осуществление каждого составляющего события. Тогда конечный результат, как следствие совместного наступления составляющих событий будет иметь вероятность, близкую к единице.

§ 11.11. ВЫВОДЫ

Теория вероятностей — наука о количественных закономерностях моделей случайных явлений. В отличие от строго детерминированных зависимостей, рассмотренных в первой части учебника, в теории вероятностей простейшие закономерности изучаемых процессов и явлений устанавливаются при фиксировании результатов большого числа повторений испытаний.

Главным понятием теории вероятностей является понятие события. Событие — это качественный результат испытания. Следующим основным понятием является относительная частота события. Давно замеченное свойство частоты — ее устойчивость с колебаниями около некоторого постоянного числа — используется человеком в его практической деятельности. Это постоянное число, около которого группируются относительные частоты события при нескольких сериях испытаний с возрастающим числом повторений и есть вероятность события. Вероятность — численный показатель возможности наступления события. Это определение вероятности события принято называть статистическим. Вероятность можно найти только в результате проведения многократно повторенных испытаний. Существуют задачи, когда показатель возможности осуществления события может быть заранее предсказан. Для этого надо знать число так называемых элементарных случаев или событий, благоприятствующих осуществлению данного события. Тогда вероятность события A равна отношению числа равновозможных элементарных событий, благоприятствующих появлению события, к общему числу случаев, возможных в данном испытании:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность сложных событий вычисляют через вероятности простых событий, используя теоремы сложения и умножения, формулы полной вероятности, формулы Байеса, локальную и интегральную теоремы Муавра — Лапласа.

Показано, какие практические выводы можно сделать из того, что известна вероятность события. При этом важно руководствоваться следующим: 1) если установлено, что вероятность некоторого сложного события мала, то можно быть уверенным, что при одном испытании это событие не произойдет; 2) если вероятность события велика, то также можно утверждать, что при одном испытании оно произойдет. Ответ на вопрос, насколько должны быть «малы» или «велики» вероятности, зависит от конкретной задачи. Вообще достаточно малыми вероятностями принято считать следующие: 0,1, 0,05, 0,01, а достаточно большими — 0,9, 0,95, 0,99.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что является предметом теории вероятностей?

2. Что называется событием?

3. Дайте определение событий: а) случайного; б) достоверного; в) невозможного.

4. Какие события называются совместными, несовместными, равновозможными, образующими полную группу, противоположными? Приведите примеры.

5. Что называется относительной частотой события? Какие свойства относительной частоты вы знаете?

6. Дайте статистическое определение вероятности события.

7. Приведите определение вероятности события через показатели, благоприятствующие наступлению события.

8. Что такое сумма и произведение двух событий, нескольких событий?

9. Сформулируйте теорему сложения вероятностей в случаях: а) события несовместны; б) события совместны.

10. Дайте определение условной вероятности события.

11. Сформулируйте теорему умножения вероятностей и ее следствия. Запишите формулу полной вероятности события. Докажите формулу Байеса.

12. В чем состоит задача вычисления вероятности частоты появления события. Запишите формулу Бернулли и определите смысл входящих в нее параметров.

13. Сформулируйте локальную теорему Муавра — Лапласа.

14. Сформулируйте интегральную теорему Муавра — Лапласа.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В коробке 150 яблок. Из них 3 яблока поражены болезнью в явной форме. Чему *равна относительная* частота появления пораженного яблока?

2. Относительная частота появления клубней картофеля, имеющих механические повреждения при уборке, равна 0,15. В корзине 350 клубней. Сколько клубней окажется поврежденными?

3. Известно, что всхожесть пшеницы составляет 90%. Сколько необходимо взять зерен, чтобы взошло 360 растений?

4. Всхожесть семян дикой яблони равна 60%. Сколько потребуется высеять семян, чтобы получить 120 ростков?

5. Для определения всхожести пшеницы посеяли две серии по 200 зерен. Получено соответственно 189 и 193 всхода. 1) Какова относительная частота всхожести в каждой серии? 2) Чему равна процентная всхожесть пшеницы?

6. В стаде 200 коров, из них 90 не превышают трехлетнего возраста. Наудачу отбирается одно животное. Найдите вероятность того, что возраст коровы не менее 3 лет.

7. На молочном комплексе 10% коров имеют удой свыше 3600 кг, 25% коров — от 2800 до 3600 кг, остальные — менее 2800 кг. Определите вероятность того, что удой наудачу выбранной коровы свыше 2800 кг.

8. В двух отсеках зернохранилища находится посевной материал (пшеница). Семена первого отсека имеют всхожесть 80%, второго — 85%. Отбирается по 1 зерну из каждого отсека. Найдите вероятности следующих событий: A — оба зерна дадут всходы; B — одно зерно взойдет, а другое — нет; C — оба зерна не дадут всходов. Проверьте равенство

$$P(A)+P(B)+P(C)=1.$$

9. Из 5 лучших в хозяйстве свиноматок надо выбрать трех для выставки. Сколькими способами можно сделать выбор?

10. Исследователь зафиксировал результаты полевого опыта с 20 делянок и внес результаты в ЭВМ. При распечатке ведомости результаты «смешались».

а) Найдите вероятность того, что при этом каждой делянке соответствует верный результат.

б) Какова вероятность того, что для 19 делянок в распечатке указан верный результат?

11. В хозяйстве 5 участков земли, которые необходимо занять под 5 культур. Какова вероятность того, что произвольное закрепление культур за участками совпадает с запланированным?

12. Эффективность некоторой вакцины в формировании иммунитета составляет 75%. Вакцинировалось два животных. Пусть A_1 и A_2 — события, состоящие в том, что соответственно первое и второе животное приобрели иммунитет. Найдите вероятности следующих событий: $A=\{$оба животных приобрели иммунитет$\}$; $B=\{$одно животное приобрело иммунитет$\}$; $C=\{$ни одно животное не приобрело иммунитет$\}$; $D=\{$хотя бы одно животное приобрело иммунитет$\}$. Являются ли зависимыми события: A_1 и A_2, A_1 и $\bar{A}_2$, $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$?

13. Вероятность рождения бычка или телочки при отеле принята равной 0,5. Сколько раз должна телиться корова, чтобы с вероятностью 0,9 иметь хотя бы одну телочку?

14. Некоторая популяция растений состоит из особей трех типов, помеченных АА, Аа, аа. Численность каждого типа составляет соответственно 200, 600 и 50. Из популяции выбирают одно растение. Найдите вероятности событий:

а) выбранное растение принадлежит к типу АА;

б) выбранное растение принадлежит к типу АА или Аа.

15. В клетке 6 белых и 4 серые мыши. Случайно отбирают 3 мышей, не возвращая обратно. Вычислите вероятности событий: $A=\{$все три мыши белые$\}$; $B=\{$две белые и одна серая$\}$; $C=\{$две серые и одна белая$\}$; $D=\{$все три серые$\}$.

16. Для некоторой местности среднее число солнечных дней в июле составляет 25. Найдите вероятность того, что первые 3 дня июля солнечные.

17. В корзине 12 плодов. Из них 3 поражены болезнью в скрытой форме. Из корзины последовательно извлекают два плода. Вычислите:

1) вероятность того, что первый взятый плод больной;

2) вероятность того, что второй вынутый плод будет больным при условии, если первый оказался здоровым.

18. В ящике 30 яблок. Из них 3 поражены болезнью в скрытой форме. Последовательно без возвращения достают 3 яблока. Какова вероятность того, что они здоровы?

19. В корзине 12 яблок, из них 4 сорта А, остальные сорта В. Взяли 3 яблока. Найдите вероятность следующих событий:

событие $C_1=\{$среди взятых 3 яблока сорта А$\}$;

событие $C_2=\{$взято 3 яблока сорта В$\}$;

событие $C_3=\{$взято 2 яблока сорта А и одно сорта В$\}$.

20. Коэффициент использования рабочего времени (относительное время) двух комбайнов соответственно равен 0,8 и 0,6. Учитывая, что остановки в работе каждого комбайна случайны и независимы одна от другой, определите относительное время:

1) совместной работы комбайнов;
2) работы только одного комбайна;
3) простоя обоих комбайнов.

21. Коэффициент использования рабочего времени у 3 тракторов соответственно равен 0,8, 0,7 и 0,6. Учитывая, что остановки в работе каждого трактора случайны и независимы одна от другой, найдите относительное время:

1) совместной работы всех тракторов;
2) совместной работы двух тракторов;
3) работы только одного трактора;
4) простоя всех тракторов.

22. Вдоль длинных стен животноводческого комплекса проложено два транспортера, работающих независимо. Предположим, что вероятность безотказной работы каждого из них в течение дня равна 0,9. Определите вероятность безотказной работы обоих транспортеров:

а) в течение одного дня;
б) в течение ближайших шести дней.

23. У шести животных имеется заболевание, причем вероятность выздоровления равна 0,98. Какова вероятность того, что: а) выздоровят все шестеро животных; б) не выздоровит ни одного; в) выздоровят только пятеро?

24. Вероятность события={одно посеянное зерно пшеницы не прорастет} равна 0,009. Какова вероятность события={из 1000 семян не прорастет: а) равно 8?}; б) ={не более 5 семян?}; в) ={не менее 5 семян}?

25. В хозяйстве имеется 6 гусеничных и 4 колесных трактора. Вероятность события={за время выполнения некоторой работы гусеничный трактор не выйдет из строя} равна 0,95, а для колесного трактора эта вероятность равна 0,8. Для выполнения некоторой работы произвольно выбирается трактор. Найдите вероятность события={до завершения работы трактор не выйдет из строя}.

26. В трех корзинах находится картофель. В первой 10% поврежденных клубней, во второй — 15%, в третьей — 10%. Из наудачу выбранной корзины берут один клубень. Какова вероятность события={клубень не поврежден}?

27. В двух корзинах находятся яблоки. В первой 20 шт., из них 5 поврежденных, во второй — 30 шт., из них 6 поврежденных. Из наудачу выбранной корзины взяли одно яблоко.

1) Какова вероятность события={яблоко будет не повреждено}?

2) Яблоко оказалось не поврежденным. Какова вероятность события={яблоко взято из: а) первой корзины}; б) ={второй корзины}; какое из событий а) или б) более вероятно?

28. Вероятность события={американский лось перенесет зиму}, оценивается в 80%, если лось здоров, и в 30%, если он болен.

а) Если в популяции больны 20% лосей, то какая доля популяции перенесет зиму?

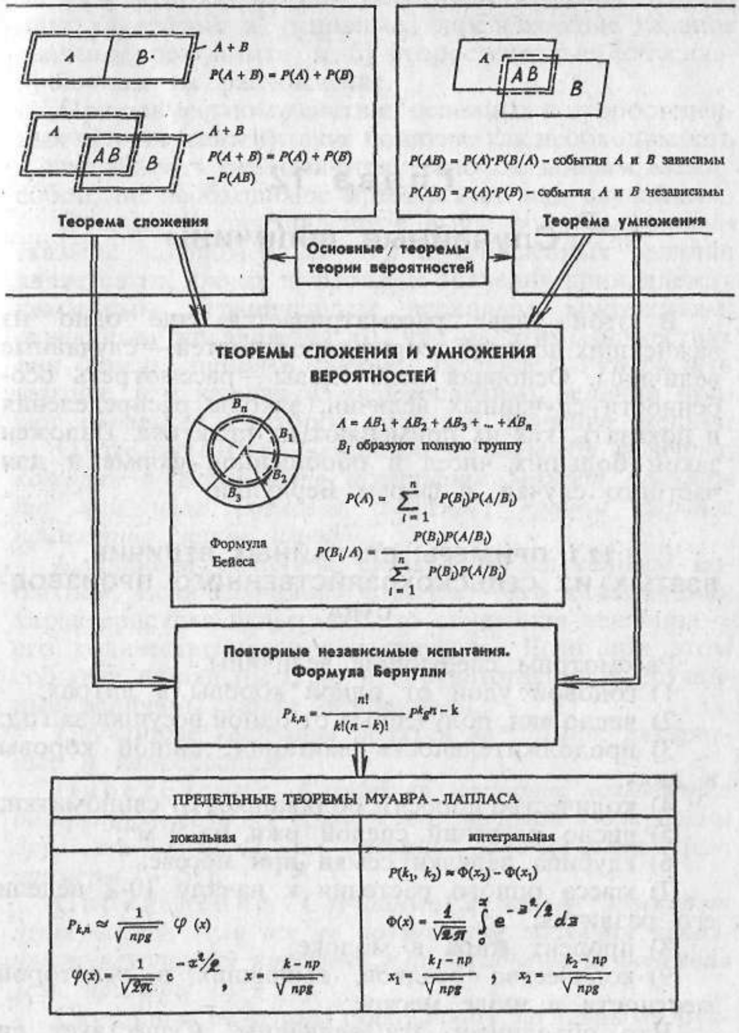
б) Если волки убивают 80% здоровых и 70% больных лосей, из тех, которые не выживают за зиму, то какую долю от всей популяции составляют лоси, убитые волками за зиму?

29. Лабораторное животное либо здорово (с вероятностью 0,9), либо нет. Если животное здорово, то оно может выполнить некоторое задание в 75% всех попыток. Если животное нездорово, то оно способно выполнить это задание лишь в 40% всех попыток. Допустим, что предпринимается попытка и животное не справляется с заданием. Какова вероятность того, что животное здорово?

30. Вакцина формирует иммунитет у животных против туберкулеза в 95% случаев. Вакцинировалось 30% животных. Вероятность заболеть туберкулезом у вакцинированного животного без иммунитета такая же, как у невакцинированного. Какова вероятность того, что животное, заболевшее туберкулезом, было вакцинировано?

31. Предприятия L, M, N производят соответственно 25, 30 и 45% запасных частей одного наименования к доильным аппаратам, которые поступают на центральную базу. Доля брака для них составляет соответственно 1, 2 и 3%. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Вычислите вероятности того, что оно сделано на предприятии L, на предприятии M, на предприятии N.

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Глава 12

Случайные величины

В этой главе рассматривается еще одно из важнейших понятий теории вероятностей — случайные величины. Основная цель главы — рассмотреть особенности случайных величин, законы распределения и показать, как их применяют на практике. Изложен закон больших чисел в обобщенной форме и для частного случая, в форме Бернулли.

§ 12.1. ПРИМЕРЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ВЗЯТЫХ ИЗ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

Рассмотрим следующие величины:

1) годовой удой от одной коровы в литрах;

2) число яиц, полученных от одной несушки за год;

3) продолжительность лактации данной коровы в днях;

4) количество поросят, родившихся от свиноматки;

5) число растений спелой ржи на 1 м^2;

6) глубина заделки семян при посеве;

7) масса одного растения к началу 10-й недели его развития;

8) процент жира в молоке;

9) количество осадков, выпавших в некоторой местности в июле месяце.

Что объединяет эти величины? Существует ли строгая закономерность, которой они подчинены? Можно ли заранее, до выполнения измерений или счета, указать, какое значение примет та или иная величина?

Если для каждой величины измерение или счет повторять многократно в практически одинаковых условиях, то обнаружится, что всякий раз получаются несколько отличные результаты. Дело в том, что на результат измерений действуют причины (связи) двух категорий: а) основные, определяющие главное значение результата и б) второстепенные, обуславливающие их расхождение.

При совместном действии основных и второстепенных причин (связей) такие понятия, как необходимость и случайность оказываются тесно связанным между собой, но необходимое преобладает над случайным.

Отвечая на поставленные выше вопросы, можно сказать: закономерным для перечисленных величин является то, что их возможные значения принадлежат некоторым ограниченным числовым множествам, случайным же является то, что на этих множествах они могут принять любое значение. Утверждать заранее, что каждая из перечисленных величин примет наверное некоторое числовое значение, нельзя.

Определение. *Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.*

Случайная величина связана со случайным событием. Если случайное событие — это качественная характеристика испытаний, то случайная величина — его количественная характеристика. Если при этом события независимы, то и соответствующие случайные величины также независимы.

Случайные величины делятся на 2 типа: дискретные и непрерывные.

Определение. *Случайная величина называется дискретной, если все возможные значения изолированы друг от друга и их можно занумеровать* [*см. примеры* 1—5)].

Определение. *Случайную величину называют непрерывной, если все ее возможные значения заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал* [*см. примеры* 6)—9)].

Случайные величины обозначают заглавными буквами латинского алфавита X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими малыми буквами, т. е. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; y_1, y_2; y_3, \ldots, y_m; z_1, z_2, z_3; \ldots, z_k$. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное x_1 или значение x_2, обозначают через p_1, p_2 и т. д., так что $P(X=x_1)=p_1$, $P(X=x_2)=p_2$ и т. д.

§ 12.2. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

● **Пример.** Предположим, что производится обработка стада животных дезинфицирующим составом против заболевания А. Успех операции оценивается в 90% (вероятность события = {заболевание ликвидировано}, равна 0,9)*. Из стада после обработки отбирается 4 животных. Вычислить вероятность событий = {число здоровых животных среди отобранных равно 0, равно 1 и т. д.}.

Составим таблицу, в первой строке которой поместим возможные значения случайной величины, во второй — соответствующие им вероятности (см. табл. 12.1).

Таблица 12.1

X	0	1	2	3	4
p_i	$p_1=P_{0,4}=$ $=C_4^0p^0g^4$	$P_{1,4}=C_4^1pg^3$	$P_{2,4}=C_4^2p^2g^2$	$P_{3,4}=C_4^3p^3g$	$P_{4,4}=C_4^4p^4g^0$
	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

Так как все события в этом испытании образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{4} P_{i,4}$. Действительно, $0{,}0001+0{,}0036+0{,}0486+0{,}2916+$ $+0{,}6561=1{,}0000$. Таблица полностью характеризует случайную величину X — число здоровых животных среди четырех отобранных. ●

Определение. *Законом распределения случайной величины называется соответствие, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.*

Таблица 12.1 является простейшей формой закона распределения.

● **Пример.** Отмечено, что в некоторой местности в течение ряда лет в июне 30% дождливых дней. Составить закон распределения случайной величины X — числа дождливых дней в течение одной недели июня месяца. События, состоящие в том, что в 1-й день недели дождь, во 2-й день дождь, в третий день дождь и т. д., считать независимыми.

Возможные значения случайной величины X таковы: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $x_5=4$, $x_6=5$, $x_7=6$, $x_8=7$.

* Данное соглашение условно. Способность к выздоравливанию у каждого животного различна, возможно, с небольшими отклонениями. Соглашение принимается для того чтобы от данной задачи перейти к ее модели.

Вероятности этих значений соответственно равны:

$$p_1=P_{0,7}=C_7^0 0{,}3^0\cdot 0{,}7^7=0{,}0824,\quad p_2=P_{1,7}=C_7^1 0{,}3\cdot 0{,}7^6=0{,}2472,$$
$$p_3=P_{2,7}=C_7^2 0{,}3^2\cdot 0{,}7^5=0{,}3178,\quad p_4=P_{3,7}=C_7^3 0{,}3^3\cdot 0{,}7^4=0{,}2263,$$
$$p_5=P_{4,7}=C_7^4 0{,}3^4\cdot 0{,}7^3=0{,}0973,\quad p_6=P_{5,7}=C_7^5 0{,}3^5\cdot 0{,}7^2=0{,}0250,$$
$$p_7=P_{6,7}=C_7^6 0{,}3^6\cdot 0{,}7=0{,}0036,\quad p_8=P_{7,7}=C_7^7 0{,}3^7\cdot 0{,}7^6=0{,}0002.$$

Закон распределения представим в виде следующей таблицы.

Таблица 12.2

X	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,0824	0,2472	0,3128	0,2263	0,0973	0,0250	0,0036	0,0002

Наибольшую вероятность имеет событие, состоящее в том, что на неделе будет два дождливых дня.

Числовые характеристики дискретной случайной величины. Закон распределения случайной величины полностью характеризует случайную величину. Наиболее важные свойства случайной величины, используемые при решении задач, характеризуются несколькими постоянными величинами — их числовыми характеристиками. Важнейшими из них являются математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$.

1. Математическое ожидание. Определение. *Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений каждого значения этой величины на соответствующую вероятность*

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\ldots+x_kp_k=\sum_{i=1}^{k}x_ip_i. \quad (12.2.1)$$

Смысл математического ожидания можно уточнить, установив его связь со средним арифметическим значением. Положим, что испытание проведено N раз, при этом случайная величина X приняла значение x_1 m_1 раз, x_2 m_2 раз, ..., x_k m_k раз. Ясно, что $\sum_{i=1}^{k}m_i=N$. Тогда среднее значение случайной величины

$$\overline{X}=\frac{\overbrace{x_1+x_1+\ldots+x_1}^{m_1\text{ раз}}+\overbrace{x_2+x_2+\ldots+x_2}^{m_2\text{ раз}}+\ldots+\overbrace{x_k+x_k+\ldots+x_k}^{m_k\text{ раз}}}{N}=$$

$$=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{N}=x_1\frac{m_1}{N}+x_2\frac{m_2}{N}+\ldots+x_k\frac{m_k}{N}.$$

Дроби $\frac{m_1}{N}$, $\frac{m_2}{N}$, ..., $\frac{m_k}{N}$ — это относительные частоты p^*_1, p^*_2, ..., p^*_k. Следовательно,

$$\bar{X} = x_1 p^*_1 + x_2 p^*_2 + \ldots + x_k p^*_k = \sum_{i=1}^{k} x_i p^*_i.$$

При большом числе испытаний относительные частоты приближенно равны вероятностям (см. ниже § 12.10). Таким образом, среднее значение случайной величины $\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} x_i p^*_i$ мало отличается от математического ожидания $M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$, т. е.

$$M(X) \approx \bar{X}. \qquad (12.2.2)$$

Термин «математическое ожидание» возник в связи с применением вероятностных методов в страховом деле, когда необходимо было определить ожидаемую (предполагаемую) величину выплат по страховым договорам. В практических задачах за математическое ожидание принимается среднее значение случайной величины.

Свойства математического ожидания случайной величины.

1^0. *Математическое ожидание постоянной величины C равно самой постоянной величине.*

Доказательство. Случайная величина будет постоянной, если она принимает одно значение, равное C, с вероятностью $p=1$. Тогда, по определению,

$$M(C) = C \cdot 1 = C. \qquad (12.2.3)$$

2^0. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е.*

$$M(CX) = CM(X). \qquad (12.2.4)$$

Доказательство. Возможные значения случайной величины CX таковы: Cx_1, Cx_2, Cx_3, ..., Cx_k, а соответствующие вероятности следующие: p_1, p_2, p_3, ..., p_k. Тогда

$$M(CX) = \sum_{i=1}^{k} Cx_i p_i = C \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = CM(X).$$

3^0. *Математическое ожидание случайной величины заключено между ее возможными наименьшим и наибольшим значениями.*

Доказательство. Пусть a и b — соответственно наименьшее и наибольшее из всех возможных значений x_1, x_2, x_3, ..., x_k с вероятностями p_1, p_2, p_3, ..., p_k. Тогда

$$ap_1+ap_2+...+ap_k \leqslant x_1p_1+x_2p_2+...+x_kp_k \leqslant bp_1+ +bp_2+...+bp_k,$$

преобразуя, имеем

$$a(p_1+p_2+...+p_k) \leqslant \sum_{i=1}^{k} x_ip_i \leqslant b(p_1+p_2+...+p_k).$$

Так как $p_1+p_2+...+p_k=1$, то

$$a \leqslant M(X) \leqslant b. \qquad (12.2.5)$$

Приведем без доказательства еще два свойства.

4^0. *Математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, т. е.*

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y). \qquad (12.2.6)$$

Замечание. Прежде чем перейти к рассмотрению следующего свойства случайных величин, сформулируем понятие независимости случайных величин.

Случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения одной их них не зависит от того, какие значения приняла другая величина.

Например, возьмем семена двух сортов (A и B) растений. Если эти семена выращены и затем высеяны в различных условиях, условия роста и созревания растений также не совпадают, то количественные результаты испытаний, а следовательно, и соответствующие случайные величины будут независимыми.

5^0. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y). \qquad (12.2.7)$$

2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Еще одной важной характеристикой случайной величины является дисперсия. Дисперсия характеризует меру рассеяния возможных значений случайной величины около ее математического ожидания. Это очень важная характеристика. В приложениях теории вероятностей приходится сравнивать две однородные случайные величины. Из двух величин с равными математическими ожиданиями та считается «лучшей», которая имеет меньший разброс. За меру разброса можно было бы принять среднее значение абсолютных величин отклонений $\Delta = \frac{\sum |x_i - M(X)|}{n}$, но такая характеристика не всегда дает хорошую оценку, так как большие отклонения становятся «мало ощутимы». Поэтому вычисляют отклонения возможных значений случайной величины от $M(X)$, возводят их в квадрат, умножают на вероятности p_i и складывают полученные произведения. Другими словами, вычисляют $(x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \ldots + (x_k M(X))^2 p_k$, т. е. математическое ожидание квадрата случайной величины $X - M(X)$.

Определение. *Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной X и ее математическим ожиданием*

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{12.2.8}$$

Составим закон распределения случайной величины $(X - M(X))^2$ в виде табл. 12.3.

Таблица 12.3

$(x_i - M(X))^2$	$(x_1 - M(X))^2$	$(x_2 - M(X))^2$	$(x_3 - M(X))^2$	...	$(x_k - M(X))^2$
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_k

По определениям дисперсии и математического ожидания случайной величины получим

$$D(X) = M(X - M(X))^2,$$

или

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - M(X))^2 p_i. \tag{12.2.9}$$

Упростим формулу (12.2.9), сделав ее удобной для практического применения,

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M\left[(X - M(X))(X - M(X))\right].$$

Применив свойства 1°—5° математического ожидания [см. формулы (12.2.3)—(12.2.7)], получим

$$D(X)=M(X^2)-2M(X)M(X)+(M(X))^2= \\ =M(X^2)-(M(X))^2,$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2. \qquad (12.2.10)$$

Таким образом, дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом математического ожидания.

Свойства дисперсии.

1°. *Если случайная величина X принимает только одно возможное значение C с вероятностью* $p=1$, *то* $D(X)=0$, т. е. дисперсия постоянной величины равна нулю.

Доказательство. Имеем

$$D(X)=D(C)=M(C-C)^2=M(0)=0. \qquad (12.2.11)$$

2°. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат,*

$$D(CX)=C^2D(X). \qquad (12.2.12)$$

3°. *Дисперсия суммы или разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий*

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y). \qquad (12.2.13)$$

Доказательство. По формуле (12.2.10) получаем

$$D(X\pm Y)=M(X\pm Y)^2-[M(X\pm Y)]^2.$$

Раскрывая скобки и используя свойства (12.2.6) и (12.2.7), имеем

$$D(X\pm Y)=M(X^2\pm 2XY+Y^2)-[M(X)\pm M(Y)]^2= \\ =M(X^2)\pm 2M(X)M(Y)+M(Y^2)-(M(X))^2\mp \\ \mp 2M(X)M(Y)-(M(Y))^2=M(X^2)-(M(X))^2+ \\ +M(Y^2)-(M(Y))^2=D(X)+D(Y).$$

В случае суммы большего числа независимых случайных величин свойство формулируется аналогично.

Следствие. *Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины*

$$D(C+X)=D(X). \qquad (12.2.14)$$

Дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины. Естественно желание иметь показатель рассеяния случайной величины той же размерности, что и размерность случайной величины. Для этого извлекают корень квадратный из дисперсии.

Определение. *Корень квадратный из дисперсии случайной величины называется средним квадратическим отклонением и обозначается* $\sigma(X)$ *или* σ_x:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}. \tag{12.2.15}$$

§ 12.3. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть случайная величина X есть число k появлений события A при n независимых испытаниях. Вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна p. Возможные значения случайной величины X числа 0, 1, 2, 3, ..., n. Вероятности появления каждого из этих значений в силу независимости испытаний определяют по формуле Бернулли (11.8.1):

$$P_{0,n} = C_n^0 p^0 g^n = g^n, \quad P_{1,n} = C_n^1 p g^{n-1},$$
$$P_{2,n} = C_n^2 p^2 g^{n-2}, \quad P_{3,n} = C_n^3 p^3 g^{n-3}, \ldots,$$
$$P_{k,n} = C_n^k p^k g^{n-k}, \ldots, \quad P_{n,n} = C_n^n p^n g^0 = p^n.$$

Эти же вероятности можно получить, если воспользоваться формулой бинома Ньютона

$$(g+p)^n = g^n + \frac{n}{1!} g^{n-1} p + \frac{n(n-1)}{2!} g^{n-2} p^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} g^{n-k} p^k + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n!} g^0 p^n.$$

Но $1 = C_n^0$; $\frac{n}{1!} = C_n^1$, $\frac{n(n-1)}{2!} = C_n^2$; $\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} = C_n^k \ldots$ Тогда

$$(g+p)^n = g^n + C_n^1 p g^{n-1} + C_n^2 p^2 g^{n-2} + \ldots +$$
$$+ C_n^k p^k g^{n-k} + \ldots + p^n.$$

Определение. *Закон распределения дискретной случайной величины называется биномиальным, если вероятности возможных ее значений равны соответствующим членам разложения бинома* $(g+p)^n$.

Математическое ожидание биномиального распределения найдем по формуле (12.2.1)

$$M(X)=0\cdot g^n+1\cdot npg^{n-1}+2\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}g^{n-2}p^2+$$

$$+3\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}g^{n-3}p^3+\ldots+$$

$$+m\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}g^{n-k}p^k+\ldots+np^n=$$

$$=np\left(g^{n-1}+\frac{n-1}{1!}g^{n-2}p+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}g^{n-3}p^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{(k-1)!}g^{n-k}p^{k-1}+\ldots+p^{n-1}\right).$$

В круглых скобках записано разложение бинома $(g+p)^{n-1}=1$. Следовательно,

$$M(X)=np(g+p)^{n-1}=np. \qquad (12.3.1)$$

Можно показать, что дисперсия случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, равна npg:

$$D(X)=npg. \qquad (12.3.2)$$

● **Пример.** Вероятность безотказной работы одной ячейки доильной установки равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X (числа безотказно работающих ячеек доильной установки) во время дойки 6 коров. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Определяем возможные значения X. По условию, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, $x_5=4$, $x_6=5$, $x_7=6$. Вероятности вычисляем по формуле $P_{k,6}=C_6^k 0{,}9^k\cdot 0{,}1^{6-k}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$.

Составляем таблицу.

Таблица 12.4

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	10^{-6}	0,000054	0,001215	0,014580	0,098415	0,354294	0,531441

Далее находим

$$M(X)=np=6\cdot 0{,}9=5{,}4;\quad D(X)=npg=6\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}54.$$ ●

§ 12.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

● **Задача 1.** Вероятность того, что зерно пшеницы не прорастет, принимается равной 0,01*. Какова вероятность того, что из 500 посеянных семян не дадут всходов ровно 8 семян? Не более чем 5 семян? Не менее чем 5 семян? ●

---

* См. примечание на с. 283.

● **Задача 2.** В результате изучения работы картофелекопалки установлено, что вероятность механического повреждения каждого клубня равна 0,01. Найти вероятность события A, состоящего в том, что среди 800 клубней поврежденных не более 12. ●

В этих задачах число семян, не давших всходы, число поврежденных клубней картофеля — дискретные случайные величины. Заметим, что число испытаний n в обеих задачах велико, а вероятность появления события в каждом испытании мала. Возможные значения случайной величины указать нетрудно. В первой задаче это $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, ..., $x_{501}=500$, во второй задаче $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, ..., $x_{801}=800$. Вероятность наступления события A k раз, когда n велико, а p мало, определяют по формуле Пуассона, впервые исследовавшего эту задачу:

$$P_{k,n} \approx \frac{a^k e^{-a}}{k!}. \qquad (12.4.1)$$

где a — математическое ожидание случайной величины ($a=np$); k — число появлений события А (k может принимать только целочисленные значения, теоретически неограниченные, $k \leqslant n$).

Определение. *Закон распределения дискретной случайной величины, когда вероятности возможных ее значений находятся по формуле Пуассона* (12.4.1), *называется распределением Пуассона.*

Можно доказать, что для случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, ее математическое ожидание равно дисперсии. Это свойство применяется в статистике.

Определим теперь вероятность того, что число появлений события A (случайная величина X) не меньше некоторого заранее заданного числа a_0, т. е. $P(a_0+\infty)$.

По теореме сложения вероятностей, используя формулу (12.4.1), найдем вероятность того, что событие А произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз:

$$P(k_1, k_2) \approx e^{-a} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{a^k}{k!}. \qquad (12.4.2)$$

Вероятность того, что случайная величина X будет не меньше некоторого числа a_0, равна

$$P(a_0, +\infty) = e^{-a} \sum_{k=a_0+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}. \qquad (12.4.3)$$

Но лучше всего найти

$$P(0,\ a_0)=\mathrm{e}^{-a}\sum_{k=0}^{a_0}\frac{a^k}{k!}. \tag{12.4.4}$$

Тогда

$$P(a_0,\ +\infty)=1-P(0,\ a_0)=1-\mathrm{e}^{-a}\sum_{k=0}^{a_0}\frac{a^k}{k!}. \tag{12.4.5}$$

Для функции (12.4.4) имеются таблицы с двумя вводами, где по числу a_0 и a находится сумма $\sum\limits_{k=0}^{a_0}\mathrm{e}^{-a}\frac{a^k}{k!}$ (см. Приложение 3).

Вернемся к приведенным выше задачам.

1. Имеем $n=500$, $p=0{,}01$, $g=1-p=0{,}99$; $a=np=500\cdot 0{,}01=5$. По таблице находим

$$P_{8,500}\simeq\frac{5^8}{8!}\mathrm{e}^{-5}=0{,}06528.$$

Вероятность $P_{8,500}$ мала. Вероятность того, что не взойдет не более чем 5 семян, равна

$$P(0,\ 5)=\sum_{k=0}^{5}\mathrm{e}^{-5}\frac{5^k}{k!}=0{,}616.$$

Вероятность того, что не взойдет более пяти семян

$$P(k>5)\simeq 1-0{,}616=0{,}384.$$

2. Имеем $n=800$, $p=0{,}01$, $g=1-p=0{,}99$, $a=np=800\cdot 0{,}01=8$. По таблице (Приложение 3) находим

$$P(0,\ 12)=\sum_{k=0}^{12}\mathrm{e}^{-8}\frac{8^k}{k!}=0{,}936.$$

Как видим, вероятность значительна. Можно быть уверенным, что событие A при одной серии испытаний произойдет.

В случае биномиального распределения случайной величины, когда математическое ожидание мало отличается от дисперсии, т. е. когда $np\approx npg$, при решении задач пользуются распределением Пуассона.

§ 12.5. НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ (ЗАКОН) РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В § 12.1 дано определение непрерывной случайной величины. Возможные значения непрерывной случайной величины перечислить нельзя, так как их число бесконечно велико, и поэтому закон распределения в виде таблицы также нельзя составить, если не прибегнуть к упрощениям.

Возьмем бесконечный интервал $(-\infty, x)$, x — произвольное действительное число. Предположим, что в результате испытания случайная величина X приняла одно из значений x_i, $x_i \in (-\infty, x)$, т. е. оказалось, что $X < x$. Событие, состоящее в том, что при одном испытании случайная величина X примет значение, меньшее, чем некоторое число x, имеет определенную вероятность, зависящую от x. Вероятность события $= \{X < x\}$ является функцией x:

$$P(X < x) = F(x). \qquad (12.5.1)$$

Определение. *Интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения случайной величины X называется вероятность $P(X < x)$ события, состоящего в том, что случайная величина X примет значение, меньшее x.*

На числовой прямой равенство $P(X < x) = F(x)$ определяет вероятность попадания случайной точки X левее точки x.

Свойства функции $F(x)$.

1^0. *$F(x)$ — величина безразмерная и изменяется на множестве* $[0, 1]$, *т. е.* $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, *так как $F(x)$ — вероятность события.*

2^0. *$F(x)$ — функция неубывающая, т. е. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ при $x_1 < x_2$.*

Свойство очевидно, если принять во внимание геометрический смысл $F(x)$.

3^0.

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (12.5.2)$$

Доказательство. Событие, состоящее в осуществлении неравенства $X < x_2$, может быть представлено как сумма двух несовместных событий:

$$(X < x_2) = (x_1 \leqslant X < x_2) + (X < x_1).$$

Тогда

$$P(X < x_2) = P(x_1 \leqslant X < x_2) + P(X < x_1),$$

или

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1).$$

Вероятность попадения значения случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ равна приращению функции распределения на этом интервале. Если $x_2 \to x_1$, то

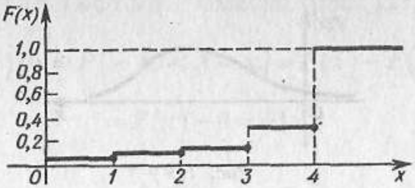


Рис. 118

$$\lim P(x_1 \leqslant X < x_2) = P(X = x_1) = F(x_1) - F(x_1) = 0,$$

поэтому

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = P(x_1 < X < x_2). \qquad (12.5.3)$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет точно определенное значение, равна нулю.

4^0. $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$.

Свойство 4^0 вытекает из определения (12.5.1).

Интегральную функцию можно составить и для дискретной случайной величины:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Например, для случайной величины, заданной табл. 12.1:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 0{,}0001, \text{ если } 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}0037, \text{ если } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}0523, \text{ если } 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}3439, \text{ если } 3 < x \leqslant 4, \\ 1{,}0000, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Соответствующий график изображен на рис. 118. Судя по графику, для дискретной величины $F(x)$ не является непрерывной.

§ 12.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Возьмем на числовой прямой интервал $(x, x + \Delta x)$. По формуле (12.5.3) находим

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

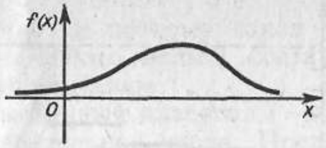


Рис. 119

Определение. *Выражение* $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ *называется средней плотностью вероятности случайной величины на интервале* $[x, x+\Delta x]$.

Определение. *Предел средней плотности вероятности при* $\Delta x \to 0$ *называется дифференциальной функцией или плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины и обозначается* $f(x)$,

$$f(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \Rightarrow f(x)=F'(x).$$

Кривая, соответствующая уравнению $y=f(x)$, называется *кривой вероятностей* и может иметь вид, изображенный на рис. 119.

Свойства функции $f(x)$.

1^0. $f(x) \geqslant 0$ *как производная от неубывающей функции.*

2^0.

$$P(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx. \tag{12.6.1}$$

Доказательство. Имеем (рис. 120)

$$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

3^0.

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=F(x). \tag{12.6.2}$$

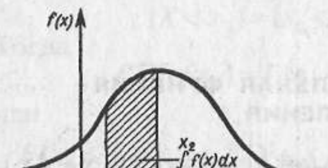


Рис. 120

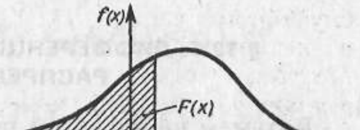


Рис. 121

§ 12.7. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, возможные значения которой находятся в интервале $[a, b]=\{X: a \leqslant X \leqslant b\}$, с плотностью вероятности $f(x)$. Найдем ее математическое ожидание, для этого разобьем интервал $[a, b]$ на n частичных интервалов Δx_i, $i=1, 2, 3, \ldots, n$. Выберем в каждом из них по одной точке x_i и вычислим значения $f(x_i)$. Составим произведения $f(x_i)\Delta x_i$, $i=1, 2, 3, \ldots, n$. Произведение плотности вероятности в точке x_i на длину частичного интервала Δx_i дает приближенное значение вероятности попадания случайной величины X в интервал Δx_i. Число $f(x_i)\Delta x_i$ есть *элемент вероятности*. Оно приближенно равно вероятности p_i того, что случайная величина при-

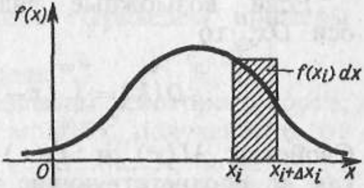


Рис. 122

Доказательство. Имеем (рис. 121)

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = P(-\infty < X < x) = F(x) - F(-\infty) =$$

$$= F(x) - 0 = F(x). \qquad (12.6.3)$$

4^0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \qquad (12.6.4)$$

Доказательство. Находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

5^0. *Если возможные значения случайной величины принадлежат замкнутому промежутку, т. е.*

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{если } x < a \text{ и } x > b, \end{cases}$$

то

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1. \qquad (12.6.5)$$

мет значение, равное x_i (при малых Δx_i) (рис. 122). Тогда

$$M(X) \approx x_1 f(x_1)\Delta x_1 + x_2 f(x_2)\Delta x_2 + x_3 f(x_3)\Delta x_3 + \ldots +$$
$$+ x_n f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i.$$

Точное значение $M(X)$ получим, если будем уменьшать длину наибольшего частичного интервала при $n \to \infty$:

$$M(X) = \lim \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Итак, математическим ожиданием непрерывной случайной величины, возможные значения которой принадлежат интервалу $[a, b]$, называется определенный интеграл $\int_a^b x f(x)\,dx$, т. е.

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx. \qquad (12.7.1.)$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей числовой оси, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx,$$

при этом предполагается, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ существует.

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины определяется дисперсия непрерывной случайной величины:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)\,dx. \qquad (12.7.2)$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)\,dx.$$

Свойства $M(x)$ и $D(x)$ формулируются так же, как и соответствующие свойства для дискретной величины.

Величину $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$ называют *средним квадратическим отклонением* случайной величины или стандартом, σ_x имеет ту же размерность, что и сама случайная величина. Из формулы (12.7.2) нетрудно получить более удобные формулы для вычисления дисперсии, а именно:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2, \qquad (12.7.3)$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2. \qquad (12.7.4)$$

● **Пример.** Случайная величина x задана функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 1, \\ ax & \text{при } <x\leqslant 3, \\ 0 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Найдите: 1) коэффициент a; 2) $M(X)$; 3) $D(X)$.

Решение. Используя формулу (12.6.4), получаем:

1) $\int_1^3 ax\,dx=1,\quad a\int_1^3 x\,dx=a\frac{x^2}{2}\Big|_1^3=4a,\quad 4a=1\Rightarrow a=\frac{1}{4}$;

2) $M(X)=\int_1^3 \frac{1}{4}xx\,dx=\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=2{,}1(6)$;

3) $D(X)=\int_1^3 \frac{1}{4}x^2 x dx-(2{,}1(6))^2=5-4{,}69(4)=0{,}31.$ ●

§ 12.8. ПРИМЕРЫ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайные величины, имеющие нормальное распределение, очень часто встречаются в земледелии и животноводстве, ветеринарии, инженерном деле и в других отраслях знания. Приведем примеры таких величин:

1) масса клубня картофеля;

2) масса одного зерна пшеницы некоторого сорта;

3) содержание жира в молоке, полученного от различных животных;

4) содержание кормовых единиц в суточном рационе шестимесячных телок;

5) масса животного некоторой породы на определенную дату;

6) погрешности измерений.

Для этих величин характерным является то, что на их формирование влияет большое число факторов, причем влияние каждого из них мало и ни один фактор не имеет значительного преимущества перед другими. Эти величины можно отнести к величинам, имеющим нормальный закон распределения, полагая, что их возможные значения не отрицательны.

Определение. *Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, если ее функция плотности вероятности имеет вид*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (12.8.1)$$

где σ и a — параметры распределения.

График функции $f(x)$ называется кривой нормального распределения. Методами дифференциального исчисления можно установить, что:

1) кривая симметрична относительно прямой $x=a$;

2) функция имеет максимум при $x=a$, $f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

3) по мере удаления x от точки a функция убывает и при $x\to\pm\infty$ кривая приближается к оси Ox;

4) кривая выпукла при $x\in(a-\sigma, a+\sigma)$ и вогнута при $x\in(-\infty, a-\sigma)$ и $x\in(a+\sigma, +\infty)$. График функции $f(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 123.

Форма кривой изменяется с изменением параметра σ. С возрастанием σ функция $f(x)$ убывает, кривая становится более пологой и растянутой вдоль оси Ox.

Рис. 123

Значениям случайной величины, близким к математическому ожиданию, соответствует большая плотность вероятности, т. е. малые отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания встречаются более часто, чем большие.

Так как случайная величина определена на всей числовой оси, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Находим

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}}\,dx=\left|\begin{array}{c}\frac{x-a}{\sigma}=t\\ x=a+\sigma t\\ dx=\sigma dt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+\sigma t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\sigma\,dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\Bigg[\int_{-\infty}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt\ +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} t\sigma\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt\Bigg]=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt=a2\Phi(+\infty)=$$

$$=a\cdot 2\cdot 0{,}5=a.$$

Интеграл $\sigma\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt=0$, так как подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны.

Таким образом,

$$M(X)=a,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx-a^2.$$

Применяя снова подстановку $\frac{x-a}{\sigma}=t$ и интегрируя по частям, получаем

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma^2t^2+2a\sigma t+a^2)\mathrm{e}^{-t^2/2}\sigma\,dt-a^2=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}dt+a^2\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt-a^2=$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}dt+a^2 2\Phi(+\infty)-a^2=$$

$$=2\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}dt=2\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=2\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt=$$

$$=\sigma^2 2\Phi(+\infty)=\sigma^2\cdot 2\cdot 0,5=\sigma^2.$$

Таким образом, параметр a есть математическое ожидание случайной величины, а σ — среднее квадратическое отклонение.

● **Пример 1.** Известно, что случайная величина X подчинена нормальному закону распределения, $M(X)=6$, $\sigma^2=9$. Найдите функцию плотности вероятности.

Решение. Имеем $a=6$, $\sigma=3$:

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6)^2}{18}}. \quad ●$$

● **Пример 2.** Известно, что случайная величина X подчиняется нормальному закону с функцией плотности вероятности

$$f(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-15)^2}{200}}.$$

Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Имеем $M(X)=15$, $D(X)=\sigma^2=10^2=100$. ●

§ 12.9. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В ЗАДАННЫЙ ИНТЕРВАЛ. ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ

Пусть дан интервал $\alpha<X<\beta$. Найдем вероятность того, что случайная величина, подчиненная нормальному закону, попадает в этот интеграл. Используя (12.6.1), имеем

$$P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \dfrac{x-a}{\sigma} = t \\ x = a + t\sigma \\ dx = \sigma\,dt \end{array} & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \alpha & \dfrac{\alpha-a}{\sigma} \\ \beta & \dfrac{\beta-a}{\sigma} \end{array} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2}\,dt = \Phi(x),$$

найдем

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (12.9.1)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Рассмотрим частный случай. Пусть необходимо найти вероятность попадания случайной величины в интервал, симметричный относительно математического ожидания. Учитывая (12.9.1), имеем

$$P(a-\delta < X < a+\delta) = \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Так как $a-\delta < X < a+\delta \sim |X-a| < \delta$, то

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (12.9.2)$$

Вычислим теперь вероятности:

1) $P(|X-a| < \sigma) = 2\Phi\left(\dfrac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 0{,}6826;$ (12.9.3)

2) $P(|X-a| < 2\sigma) = 2\Phi\left(\dfrac{2\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) = 0{,}9545;$ (12.9.4)

3) $P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\dfrac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$ (12.9.5)

Результаты вычислений по формуле (12.9.5) показывают, что вероятность отклонения случайной величины X от $M(X)$ меньше чем на 3σ близка к 1.

Правило трех сигм. *Практически достоверно, что при однократном испытании отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания не превышает утроенного среднего квадратического отклонения.*

Это правило часто используется в математической статистике.

§ 12.10. ПОНЯТИЕ О ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Теория вероятностей обобщает реальные свойства случайных явлений и величин. Важным в процессе обобщения является выражение объективно существующих закономерностей в виде закона больших чисел.

Используя понятие случайной величины, математического ожидания и дисперсии П. Л. Чебышев * сформулировал, а А. А. Марков ** дополнил закон больших чисел.

Определение. *Говорят, что последовательность случайных величин*

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_n, \qquad (12.10.1)$$

имеющих математические ожидания $M(X_1)$, $M(X_2)$, $M(X_3)$, ..., $M(X_n)$, *подчиняется закону больших чисел, если среднее арифметическое этих случайных величин* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *при* $n \to \infty$ *с вероятностью, неограниченно приближающейся к* 1, *сколько угодно мало (меньше чем на* $\varepsilon > 0$*) отличается от среднего арифметического их математических ожиданий, т. е. при* $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} \to 1. \qquad (12.10.2)$$

Общие условия, которым должны удовлетворять случайные величины $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$, достаточные для большинства практических встречающихся случаев, были найдены П. Л. Чебышевым, а затем еще более расширены А. А. Марковым. Кратко они формулируются так.

---

* П. Л. Чебышев (1811—1894) — русский математик и механик.

** А. А. Марков (1856—1922) — русский математик.

Теорема Чебышева. *Если величины $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ попарно независимы и их дисперсии $D(X)_i$ ограничены, т. е. $D(X_i) \leqslant C$, где C — некоторое число, не зависящее от n, то предельное равенство (12.10.2) выполняется, т. е. для $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ справедлив закон больших чисел.*

Теорема Бернулли*. *Пусть производятся n испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же вероятностью p. Обозначим через x_i число появлений события A в i-м испытании. Возможные значения x_i: $x_i = 1$, если событие A наступило, и $x_i = 0$, если A не произошло в этом испытании. Сумма $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = m$ есть число появлений A в n испытаниях. Тогда*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{m}{n}, \qquad M(x_i) = 1 \cdot p + 0(1-p) = p,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M(x_i) = np, \qquad D(x_i) = pg \leqslant \frac{1}{4}.$$

(Можно доказать, что если $p + g = 1$, то $\max pg = 1/4$.) Условия ограниченности дисперсии выполнено. Поэтому к случайной величине x_i применим закон больших чисел.

Подставив в (12.10.2) вместо $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ число $\frac{m}{n}$ и вместо $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)$ число np, получим

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \qquad (12.10.3)$$

т. е. с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при числе испытаний $n \to \infty$ относительная частота появления события в одном испытании сколь угодно мало отличается от его вероятности. Это и есть доказательство теоремы Бернулли, как частного случая закона больших чисел, сформулированного П. Л. Чебышевым.

Закон больших чисел имеет важное практическое значение. Именно, на этом законе основано утверждение, что среднее арифметическое результатов измерений считается наиболее точным, наиболее

* Я. Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик.

близким к истинному значению измеряемой величины. Закон больших чисел широко используется в статистике, на нем основан выборочный метод, рассмотренный в следующей главе.

§ 12.11. ВЫВОДЫ

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, заранее неизвестно, какое именно. Случайные величины бывают дискретные и непрерывные. Для дискретных величин законом распределения является таблица, в которой указаны возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности. Для непрерывных величин законом распределения служит интегральная функция распределения $F(x)=P(X<x)$ и дифференциальная функция распределения $f(x)=F'(x)$. Функция $F(x)$ является наиболее общей формой задания законов распределения случайных величин как дискретных, так и непрерывных и определяет все другие формы, а именно, дифференциальную функцию, таблицу и т. д.

Примерами распределений для дискретной случайной величины являются биномиальное распределение и распределение Пуассона. Примером распределения непрерывной случайной величины является нормальное распределение. Нормальное распределение является предельным законом. Величины, с распределением, близким к нормальному, очень часто встречаются в сельскохозяйственном производстве.

Важное практическое значение при обработке результатов наблюдений имеет правило трех сигм.

На основании изучения закона больших чисел можно сделать вывод: при соблюдении условий, оговоренных в § 12.10, и при неограниченном возрастании числа наблюдений практически достоверно, что среднее значение результатов наблюдений случайной величины сколь угодно мало отличается от ее математического ожидания.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте определение случайной величины.

2. Какие случайные величины называются дискретными? Непрерывными? Приведите примеры случайных величин.

3. Дайте определение закона распределения случайной величины.

4. Что такое интегральная функция распределения случайной величины, каковы ее свойства?

5. Как определяется дифференциальная функция распределения, каковы ее свойства?

6. Дайте определение математического ожидания $M(X)$ случайной величины. Какая существует связь между математическим ожиданием и средним арифметическим возможных значений случайной величины?

7. Дайте определение дисперсии $D(X)$ и среднего квадратического отклонения σ_x. Какие свойства случайной величины характеризуют $D(X)$ и σ_x?

8. Приведите свойства $M(X)$ и $D(X)$.

9. Дайте определение законов распределения: биномиального, Пуассона.

10. Дайте определение нормального закона распределения случайной величины.

11. Начертите кривую нормального распределения.

12. Как найти вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал?

13. Напишите формулу для определения вероятности попадания случайной величины в интервал, симметричный относительно математического ожидания.

14. Сформулируйте закон больших чисел.

15. Сформулируйте теорему Бернулли; ее практическое значение.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В зерне, предназначенном для очистки, 10% сорняков. Наудачу отобраны 4 зерна. Напишите биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X (числа сорняков среди 4 отобранных зерен) и постройте многоугольник распределения.

2. В среднем на 1 м^2 посева встречается 0,5 растений сорняков. Найдите вероятность события = {на площади 5 м^2 окажется: ровно один сорняк}; {не окажется ни одного сорняка}.

3. Доля поражения зерна вредителями в скрытой форме составляет 0,002. а) Составьте закон распределения случайной величины X — числа зараженных зерен среди 500 отобранных. б) Найдите наивероятнейшее число пораженных зерен среди 500 отобранных.

4. Определите среднее число солнечных дней на протяжении недели, если для данной местности вероятность того, что каждый день будет солнечным, составляет 0,6.

5. При изучении характера распределения сеялкой семян по длине рядка установлено, что на 20 из 100 двухсантиметровых отрезков было по 3 шт. семян, на 40 — по 2 шт., на 30 — по 1 зерну, а на остальных семян вообще не оказалось. Найдите

$M(X)$ и $D(X)$ случайной величины X — числа семян на двухсантиметровом отрезке, приняв относительные частоты за вероятности.

6. При сортоиспытании огурцов в контрольной группе было получено X шт. плодов семенников с одного растения. Распределения задано таблицей

x_i	4	5	6	7	8	9
n_i	4	4	6	2	2	2

Найдите $M(X)$ и $D(X)$, приняв относительные частоты появления случайной величины X за вероятности.

7. В одном из опытов по сортоиспытанию ржи было подсчитано количество зерен в колосьях. Результаты объединены в следующую таблицу:

x_i	30	40	50	60	70	80
n_i	10	10	20	30	20	10

Найдите $M(X)$ и $D(X)$, приняв относительные частоты за вероятности.

8. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=2\sin 4x$ в интервале $[0,\ \pi/4]$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите вероятность события $=\{X$ попадет: а) в интервал $[\pi/6;\ \pi/4]$; б) в интервал $[\pi/2;\ \pi]$; в) в интервал $[0,\ \pi/8]$.

9. Составьте дифференциальную функцию для нормально распределенной случайной величины и постройте ее график, если даны ее параметры: 1) $M(X)=4$, $\sigma_x=0{,}2$; 2) $M(X)=-0{,}5$, $\sigma_x=2$; 3) $M(X)=3$, $\sigma_x=1/4$; 4) $M(X)=0$, $\sigma_x=1$.

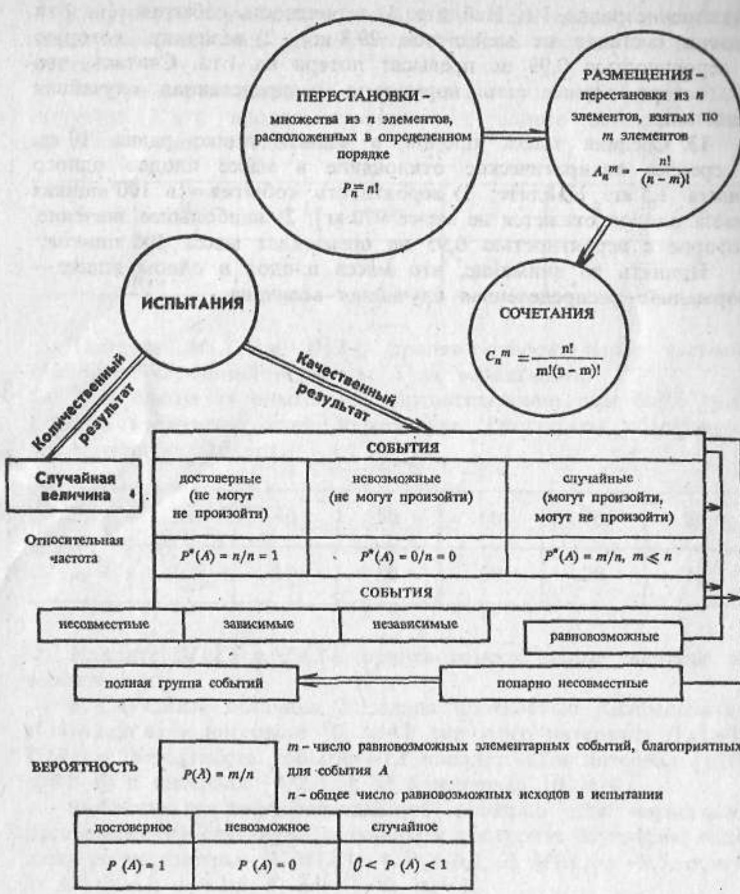
10. Случайная величина X — масса одного зерна — распределена нормально. Математическое ожидание массы зерна равно 0,18 г, среднее квадратичное отклонение 0,05. Хорошие всходы дают зерна, масса которых больше, чем 0,15 г. Найдите: а) процент семян, которые дадут хорошие всходы; б) величину, которую с вероятностью 0,95 не превысит масса отобранного зерна.

11. Норма высева на 1 га равна 150 кг. Фактический расход на 1 га колеблется около этого значения. Случайные отклонения характеризуются средним квадратическим отклонением в 10 кг. Полагая, что норма высева — случайная величина с нормальным распределением, найдите: 1) вероятность события $=\{$расход семян на 100 га не превысит 15,1 т$\}$; 2) массу семян, которая обеспечивает посев площади в 100 га с вероятностью 0,95.

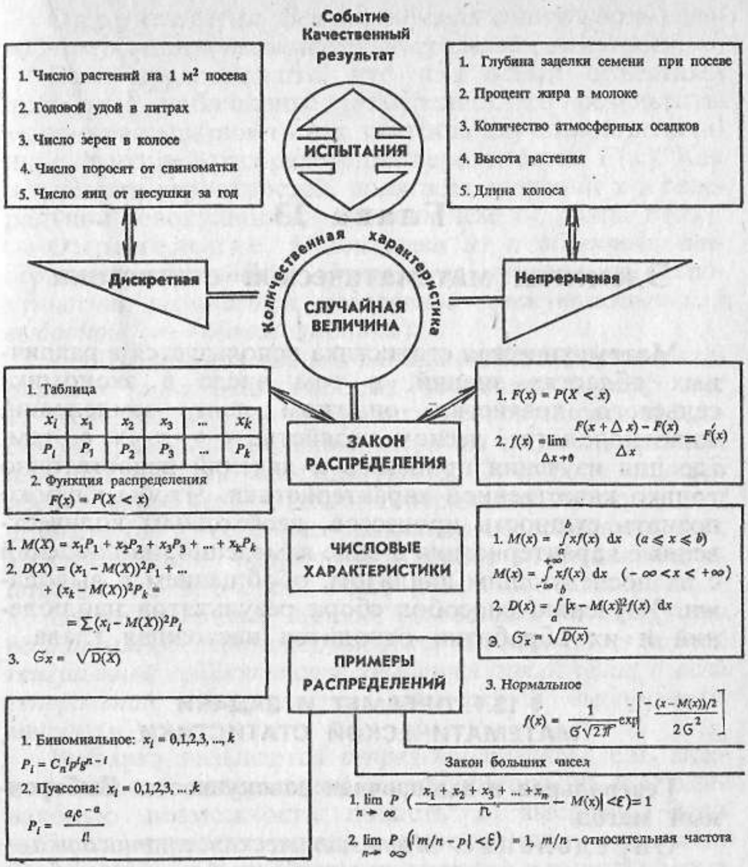
12. Методом проб установлено, что потери зерна при уборке в среднем составляют 3 г на 1 м^2; среднее квадратическое отклонение равно 1 г. Найдите: 1) вероятность события={на 1 га потери составят не менее чем 29,8 кг}; 2) величину, которую с вероятностью 0,99 не превысят потери на 1 га. Считать, что X (потери зерна) есть нормально распределенная случайная величина.

13. Средняя масса плодов в одном ящике равна 10 кг, а среднее квадратическое отклонение в массе плодов одного ящика 1,5 кг. Найдите: 1) вероятность события={в 100 ящиках масса плодов окажется не менее 970 кг}; 2) наибольшее значение, которое с вероятностью 0,95 не превзойдет масса 100 ящиков.

Принять во внимание, что масса плодов в одном ящике — нормально распределенная случайная величина.



ПЕРЕСТАНОВКИ –
множества из n элементов, расположенных в определенном порядке
$P_n = n!$
РАЗМЕЩЕНИЯ –
перестановки из n элементов, взятых по m элементов
$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
СОЧЕТАНИЯ
$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
ИСПЫТАНИЯ
Количественный результат
Качественный результат
Случайная величина
СОБЫТИЯ
достоверные (не могут не произойти)
невозможные (не могут произойти)
случайные (могут произойти, могут не произойти)
Относительная частота
$P^*(A) = n/n = 1$
$P^*(A) = 0/n = 0$
$P^*(A) = m/n,\ m \leqslant n$
СОБЫТИЯ
несовместные
зависимые
независимые
равновозможные
полная группа событий
попарно несовместные
ВЕРОЯТНОСТЬ
$P(A) = m/n$
m – число равновозможных элементарных событий, благоприятных для события A
n – общее число равновозможных исходов в испытании
достоверное
невозможное
случайное
$P(A) = 1$
$P(A) = 0$
$0 < P(A) < 1$



Событие
Качественный
результат
1. Число растений на 1 м^2 посева
2. Годовой удой в литрах
3. Число зерен в колосе
4. Число поросят от свиноматки
5. Число яиц от несушки за год
ИСПЫТАНИЯ
1. Глубина заделки семени при посеве
2. Процент жира в молоке
3. Количество атмосферных осадков
4. Высота растения
5. Длина колоса
Количественная характеристика
Дискретная
СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА
Непрерывная
1. Таблица
x_i | x_1 | x_2 | x_3 | ... | x_k
P_i | P_1 | P_2 | P_3 | ... | P_k
2. Функция распределения
$F(x) = P(X < x)$
ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
1. $F(x) = P(X < x)$
2. $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$
1. $M(X) = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + ... + x_kP_k$
2. $D(X) = (x_1 - M(X))^2P_1 + ... + (x_k - M(X))^2P_k = \sum (x_i - M(X))^2 P_i$
3. $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$
ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
1. $M(x) = \int_a^b x f(x)\, dx \quad (a \leqslant x \leqslant b)$
$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \quad (-\infty < x < +\infty)$
2. $D(x) = \int_a^b [x - M(x)]^2 f(x)\, dx$
Э. $\sigma_x = \sqrt{D(x)}$
ПРИМЕРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
1. Биномиальное: $x_i = 0,1,2,3, ..., k$
$P_i = C_n^i p^i g^{n-i}$
2. Пуассона: $x_i = 0,1,2,3, ..., k$
$P_i = \dfrac{a_i e^{-a}}{i!}$
3. Нормальное
$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(x - M(x))/2}{2\sigma^2}\right]$
Закон больших чисел
1. $\lim\limits_{n \to \infty} P\left(\left|\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} - M(x)\right| < \varepsilon\right) = 1$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} P\left(|m/n - p| < \varepsilon\right) = 1$, m/n – относительная частота

Глава 13

Элементы математической статистики

Математическая статистика используется в различных областях знаний, в том числе в экономике сельского хозяйства, опытном деле, земледелии, животноводстве, лесном хозяйстве и т. д., т. е. там, где для изучения процессов и явлений недостаточно только качественной характеристики. Чтобы глубоко познать сущность процессов, необходимы количественные характеристики в виде измерений, наблюдений с их последующим анализом, обобщением и выводами. Изучению способов сбора результатов наблюдений и их обработки отводится настоящая глава.

§ 13.1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Генеральная и выборочная совокупность. Выборочный метод.

Определение. *Математическая статистика — это наука, занимающаяся разработкой методов сбора, регистрации и обработки результатов наблюдений (измерений) с целью познания закономерностей случайных массовых явлений.*

Результаты измерений (наблюдений) называют *статистическими данными.* В зависимости от поставленной цели все задачи математической статистики могут быть сформулированы в различных формах, среди которых типичными являются: 1) приближенное определение неизвестного закона распределения случайной величины; 2) приближенное определение неизвестных параметров распределения, т. е. их статистические оценки; 3) проверка правдоподобия гипотез о распределении.

Одним из основных способов сбора статистических данных является выборочный метод.

Определение. *Вся исследуемая совокупность однородных объектов называется генеральной совокупностью.*

Если предположить, что над всеми объектами проведено наблюдение (измерение), то результаты можно рассматривать как значения случайной величины с функцией распределения вероятностей $F(x)$. Как и в теории вероятностей, доля всех значений x в генеральной совокупности, меньших чем x_0, равна $F(x_0)$.

Определение. *Множество из n объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности, называется выборочной совокупностью или выборкой (n — объем выборки).*

Необходимость исследования статистического материала с помощью выборки объясняется тем, что: 1) исследование всей генеральной совокупности трудоемко и приводит к большим затратам средств и времени или практически неосуществимо; 2) в ряде случаев исследование всех объектов генеральной совокупности привело бы к их порче, например исследование всех электролампочек на продолжительность горения, исследование на всхожесть всего семенного материала.

Определение. *Метод, основанный на том, что по данным обследования выборки, выделенной из данной генеральной совокупности, делается заключение о всей генеральной совокупности, называется выборочным методом.*

Выборка называется *репрезентативной*, если каждый объект генеральной совокупности имеет одинаковую возможность попасть в выборку. Если выборка репрезентативна, то в соответствии с законом больших чисел, результаты ее изучения и выводы будут близки к результатам, какие могли быть получены, если бы исследовалась вся генеральная совокупность.

Для того чтобы выборку составить качественно, необходимо владеть специальными знаниями и интуицией в соответствующей отрасли. Небрежно составленная выборка может стать причиной ошибочных выводов и прогнозов.

§ 13.2. СПОСОБЫ ОТБОРА СТАТИСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Различают два основных способа составления выборки: *повторный* и *бесповторный*. При повторном способе каждый отобранный объект возвращается в генеральную совокупность, после чего выбирают следующий, очередной объект.

При бесповоротном способе объекты в генеральную совокупность не возвращаются.

Повторный способ отбора можно рассматривать как последовательность независимых испытаний, бесповторный — как последовательность зависимых испытаний. Оба способа составления выборки приводят к практически одинаковым результатам, если объем выборки мал по сравнению с объемом генеральной совокупности.

Кроме того, различают следующие способы составления выборки: а) простой (случайный); б) механический; в) типический; г) серийный. Так, если занумеровать все члены генеральной совокупности и затем изготовить карточки с такими же номерами, тщательно перемещать их и отобрать пачку карточек, то объекты генеральной совокупности с номерами извлеченных карточек образуют простую (случайную) выборку. Здесь возможна повторная и бесповторная выборка.

Если объекты генеральной совокупности выбираются через определенный интервал, то такая выборка называется *механической*. Например, при анализе качества яиц, сходящих с ленты конвейера, отбирается каждое 25-е яйцо.

Предположим теперь, что генеральную совокупность разбили на несколько неперекрывающихся групп и из каждой группы отобраны в случайном порядке объекты. Это типический способ составления выборки. Например, при определении урожайности все поле приближенно делится на участки и на каждом участке определяется урожайность.

Наконец, серийная выборка образуется следующим образом. Генеральная совокупность делится на неперекрывающиеся группы. После этого случайным образом отбираются некоторые группы. Полученная выборка будет серийной.

§ 13.3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Возьмем выборочную совокупность объема n. Если генеральная совокупность имеет небольшой объем, то в некоторых случаях можно в выборку включить все ее члены.

Количественное значение признака, наблюдаемое при отборе,— это случайная величина, ее возможные значения обозначают символами x_1, x_2, x_3, ..., x_k, а числа n_i объектов с одинаковым количественным признаком называют частотами и обозначают n_1, n_2, n_3, ..., n_k.

Изучение выборки начинают с составления статистического распределения — таблицы с двумя строками. В одной строке указывают значения признака, в другой — соответствующие им частоты.

Определение. *Статистическим распределением случайной величины называют таблицу значений признака, расположенных в возрастающем порядке, и соответствующих им частот или относительных частот.*

Различают *дискретные* (возможные значения признака изолированы друг от друга), и *интервальные* (с непрерывным признаком) распределения. Составление статистического распределения начинают с определения наименьшего и наибольшего значений признака. Остальные значения записывают между ними в порядке возрастания. Далее подсчитывают частоты каждого значения признака.

Для непрерывно варьирующего количественного признака интервал его изменения разбивают на частичные интервалы одинаковой длины (классы) «от и до». Величина частичного интервала (класса) находятся [3] по формуле

$$r = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}2 \lg n},$$

где n — объем выборки; $x_{\max} - x_{\min}$ — разность между наибольшим и наименьшим значениями признака. Обычно при небольших выборках число классов принимают равным 5—9. Точное их число устанавливается практическими соображениями: с одной стороны, важно, чтобы таблица не была слишком громоздкой и с другой стороны, в ней не должны исчезнуть особенности изучаемого признака. Затем подсчитывают число количественных признаков в каждом таком интервале. Обычно признак, находящийся на границе двух интервалов, относят к правой границе интервала.

Пример дискретного распределения. В результате обследования 50 свиноматок, по количеству родившихся поросят в одном помете, составлено распределение, приведенное в табл. 13.1.

Таблица 13.1

x_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	3	4	6	11	15	14	8	7	2

Пример распределения с непрерывно варьирующим количественым признаком. При измерении длины 50 колосьев ячменя сорта «Московский 121» получены данные, помещенные в табл. 13.2.

Таблица 13.2

Длина колосьев, см	6...8	8...10	10...12	12...14	14...16	16...18
Частота	6	12	17	10	4	1

Это пример интервального распределения.

Группировку по классам применяют и в случае дискретного распределения. Так, если число зерен в колосе от 5 до 30, то этот интервал разбивают на классы, например, 3...6, 6...9, 9...12 и т. д.

Геометрическое изображение статистического распределения. Наглядное представление о распределении дает график. Будем откладывать на оси абсцисс числовое значение признака x_i, а на оси ординат — их частоты n_i или относительные частоты. Полученные точки соединим ломаной линией, которая вместе с осью Ox образуют *полигон распределения* частот или относительных частот. Распределение (см. табл. 13.1) изображено на рис. 124.

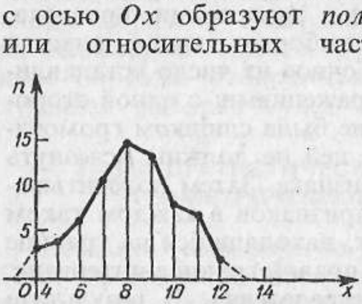


Рис. 124

Если количественный признак изменяется непрерывно, то на каждом интервале строят прямоугольники с высотой, равной числу значений признака n_i или относительной частоте. Графическое изображение интервального распределения называется *гистограммой* (рис. 125). Обведем гистограмму плавной линией так, чтобы были приблизительно равны площади, ограниченные: а) ступенчатой ломаной и б) кривой. В результате получим приближенное изображение графика функции $f^*(x)$, называемой *эмпирической функцией распределения частот* или относительных частот.

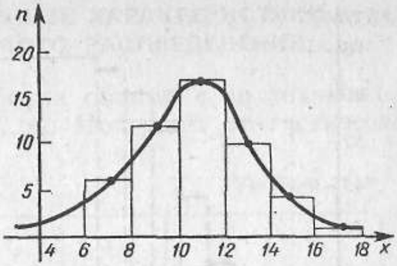


Рис. 125

В теории вероятностей функции распределения относительных частот $f^*(x)$ отвечает дифференциальная функция распределения $f(x)$. Если увеличивать объем выборки, то в соответствии с законом больших чисел относительная частота будет весьма мало отличаться от вероятности появления случайной величины X и график $f^*(x)$ будет по форме приближаться к графику $f(x)$.

§ 13.4. ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

● **Пример.** Рассмотрим статистическое распределение, составленное в результате обследования 70 свиноматок по числу родившихся поросят.

Таблица 13.3

x_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
n_i	3	4	6	11	15	14	8	7	2	
$P_i^*=\frac{n_i}{n}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{4}{70}$	$\frac{6}{70}$	$\frac{11}{70}$	$\frac{15}{70}$	$\frac{7}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{7}{70}=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{35}$	
$F^*(x)=\frac{n_x}{n}$	0	$\frac{3}{70}$	$\frac{7}{70}$	$\frac{13}{70}$	$\frac{24}{70}$	$\frac{39}{70}$	$\frac{53}{70}$	$\frac{61}{70}$	$\frac{68}{70}$	$\frac{70}{70}$

Как отмечалось в § 13.3, частоты показывают, сколько раз в данной совокупности встречаются одинаковые значения признака. Из табл. 13.3 видно, например, что 4 свиноматки принесли по 5 поросят, а 11 свиноматок — по 7 поросят. Можно поставить вопрос и по-другому: сколько свиноматок принесли поросят меньше некоторого числа, например меньше 4, меньше 5 и т. д.

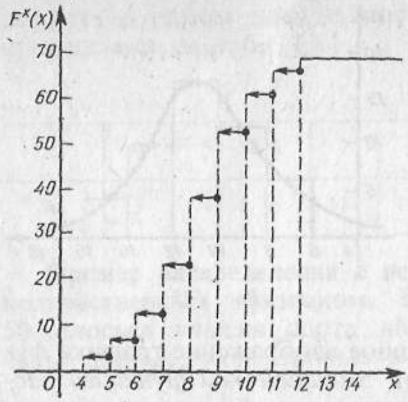


Рис. 126

Свиноматок, от которых родилось меньше 4 поросят, нет ни одной; свиноматок с числом поросят меньше 5 было 3, а с числом поросят меньше 8 — 24. Таким путем можно получить числа 0, 3, 7, 13, 24, ..., 70 (последнее число совпадает с объемом выборки). Эти числа называются *накопленными частотами*. Накопленные частоты определяют число значений признака, меньших некоторого данного числа.

Далее вычисляют относительные частоты $\frac{n_i}{n}$ и накопленные относительные частоты. Накопленные относительные частоты определяют функцию распределения выборки $F^*(x)$. ●

Определение. *Эмпирической функцией распределения выборки называется функция*

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n}, \qquad (13.4.1)$$

где n — объем выборки, n_x — число значений признака, меньших чем x, т. е. тех, для которых $x_i<x$.

Функции $F^*(x)$ в теории вероятностей отвечает интегральная функция распределения $F(x)$.

● **Пример.** Для распределения, приведенного в табл. 13.1, эмпирическая функция распределения имеет следующий вид:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0<x\leqslant 4, \\ 3/70 & \text{при} \quad 4<x\leqslant 5, \\ 7/70 & \text{при} \quad 5<x\leqslant 6, \\ 13/70 & \text{при} \quad 6<x\leqslant 7 \\ 24/70 & \text{при} \quad 7<x\leqslant 8, \\ 39/70 & \text{при} \quad 8<x\leqslant 9, \\ 53/70 & \text{при} \quad 9<x\leqslant 10, \\ 61/70 & \text{при} \quad 10<x\leqslant 11, \\ 67/70 & \text{при} \quad 11<x\leqslant 12, \\ 1 & \text{при} \quad x>12. \end{cases}$$

График функции $F^*(x)$ изображен на рис. 126. Функция $F^*(x)$ отличается от интегральной функции распределения $F(x)$ тем, что при составлении $F^*(x)$ вместо вероятности события $P(X<x)$ вычисляется относительная частота события $P^*(X<x)$. ●

§ 13.5. ВЫБОРОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть имеется выборка объема n со значениями признака x_1, x_2, x_3, ..., x_k. Построим статистическое распределение.

Таблица 13.4

x_i	x_1	x_2	x_3		x_k
n_i	n_1	n_2	n_3		n_k

Для того чтобы охарактеризовать наиболее существенные свойства этого распределения, так же как и в теории вероятностей, используют средние показатели или, как их называют, *выборочные числовые характеристики*. Рассмотрим некоторые из них.

1. Выборочная средняя $\bar{X}_в$. При наличии повторяющихся значений признака

$$\bar{X}_в=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i, \qquad (13.5.1)$$

где n — объем выборки, x_i, n_i взяты из табл. 13.4. Выборочная средняя $\bar{X}_в$ изменяется при переходе от одной выборки к другой, поэтому в силу случайного отбора является случайной величиной.

Если дано распределение непрерывной случайной величины, то вместо x_i берут середину интервала $(x_i, ..., x_{i+1})$, т. е. $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$.

Для упрощения вычисления выборочных характеристик удобно перейти от данных значений признака x_1, x_2, $x_3, ..., x_k$ к условным значениям u_1, u_2, $u_3, ..., u_k$ по формуле

$$u_i=\frac{x_i-C}{h}, \qquad (13.5.2)$$

т. е. ввести вспомогательную величину $U=\frac{X-C}{h}$, где C — новое начало отсчета, обычно это значение признака с наибольшей частотой, h — масштаб.

Можно показать, что при переходе к условным значениям признака по формуле (13.5.2) зависимость, связывающая $\bar{X}_в$ и $\bar{U}_в$, имеет вид

$$\bar{X}_в = U_в h + C. \qquad (13.5.3)$$

Действительно,

$$\bar{U}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - C)\frac{n_i}{h}}{n} = \frac{1}{h}\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} - \frac{C}{h}\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n},$$

$$\bar{U}_в = \frac{\bar{X}_в}{h} - \frac{C}{h} = \frac{\bar{X}_в - C}{h} \Rightarrow \bar{X}_в = \bar{U}_в h + C.$$

● **Пример**. Дано статистическое распределение:

Таблица 13.5

x_i	1	3	5	7	9	11
n_i	2	8	15	14	7	4

Найти $\bar{X}_в$.

Решение. Перейдем к условным значениям признака, приняв за C значение с наибольшей частотой, т. е. $C = 5$. Далее находим $h = x_i - x_{i-1} = 2$.

Имеем

$$u_i = \frac{x_i - 5}{2}.$$

Составляем распределение условных значений признака.

Таблица 13.6

u_i	−2	−1	0	1	2	3
n_i	2	8	15	14	7	4

Находим

$$\bar{U}_в = \frac{(-2)2 + (-1)8 + 0\cdot 15 + 1\cdot 14 + 2\cdot 7 + 3\cdot 4}{50} = \frac{28}{50} = 0{,}56;$$

$$\bar{X}_в = 0{,}56\cdot 2 + 5 = 6{,}12. \ ●$$

Особенно выгодно применять формулу (13.5.2), если значения признака велики.

2. Выборочная и исправленная дисперсия. Одна числовая характеристика $\bar{X}_в$ не дает полного представления о статистическом распределении. В агрономической и зоотехнической практике, как и в других сферах производства, при анализе результатов существенным для выводов является характеристика рассеяния значений признака относительно выборочной средней. Отклонение отдельных значений от выборочной средней бывает значительным и с этим нельзя не считаться.

Составим таблицу отклонений $x_i - \bar{X}_в$, указывая соответствующие частоты.

Таблица 13.7

$x_i - \bar{X}_в$	$x_1 - \bar{X}_в$	$x_2 - \bar{X}_в$	$x_3 - \bar{X}_в$	...	$x_k - \bar{X}_в$
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Найдем среднее значение отклонений $\overline{X - \bar{X}_в}$. Имеем

$$\overline{X-\bar{X}_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{X}_в) n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} - \bar{X}_в \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n} = \bar{X}_в - \bar{X}_в = 0.$$

Следовательно, среднее значение отклонения $x_i - \bar{X}_в$ равно нулю, и поэтому непригодно для характеристики рассеяния признака. Для того чтобы освободиться от знака отклонения и при этом сделать влияние больших отклонений «более ощутимыми», их возводят в квадрат и находят среднее значение. Полученную характеристику называют *выборочной дисперсией* и обозначают $D_в$.

Итак,

$$D_в = \frac{(x_1 - \bar{X}_в)^2 n_1 + (x_2 - \bar{X}_в)^2 n_2 + \ldots + (x_k - \bar{X}_в)^2 n_k}{n},$$

или

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{X}_в)^2 n_i. \qquad (13.5.4)$$

Определение. *Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое значение квадратов отклонений признака от выборочной средней.*

● **Пример**. Урожайность двух сортов A и B пшеницы, возделываемых на трех участках с одинаковыми условиями роста и развития, характеризуется следующими таблицами:

сорт A

X, ц	18	19	20
Площадь, га	15	25	15

сорт B

Y, ц	17	19	22
Площадь, га	20	20	$\frac{40}{3}$

Найти дисперсии значений признака обоих сортов.

Решение. Вычислим $\bar{X}_в$, $\bar{Y}_в$, D_x', D_y. Находим

$$\bar{X}_в=\frac{18\cdot 15+19\cdot 25+20\cdot 15}{55}=\frac{1045}{55}=19,$$

$$\bar{Y}_в=\frac{17\cdot 20+19\cdot 20+22\cdot 40/3}{20+20+40/3}=\frac{3040}{160}=19,$$

$$D_x=\frac{(18-19)^2\,15+(19-19)^2\,25+(20-19)^2\,15}{55}=\frac{30}{55}=0{,}545,$$

$$D_y=\frac{(17-19)^2\,20+(19-19)^2\,20+(22-19)^2\,(40/3)}{20+20+40/3}=\frac{600}{160}=3{,}75 \bullet$$

Как видим, дисперсия D_y как мера рассеяния или разброса урожайности сорта B относительно среднего значения $\bar{Y}_в$ в случае примерно одинаковых площадей больше, чем D_x, а это явление нежелательное. Из двух сортов лучшим является тот, урожайность которого более устойчива. По данным опыта сорт A предпочтительнее сорта B.

Для вычисления выборочной дисперсии используют следующую формулу:

$$D_в=\overline{X^2}-(\bar{X}_в)^2, \tag{13.5.5}$$

т. е. дисперсия равна разности между средним значением квадрата и квадратом выборочной средней.

Действительно,

$$D_в=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{X}_в)^2\frac{n_i}{n}=\sum_{i=1}^{k}x_i^2\frac{n_i}{n}-2\bar{X}_в\sum_{i=1}^{k}x_i\frac{n_i}{n}+$$
$$+(\bar{X}_в)^2=\overline{X^2}-2\bar{X}_в\bar{X}_в+(\bar{X}_в)^2=\overline{X_в^2}-(\bar{X}_в)^2.$$

Для облегчения вычисления дисперсии используют следующие свойства:

1⁰. Дисперсия не изменится, если все значения признака увеличить (уменьшить) на постоянное число.

2⁰. При умножении значений признака на постоянное число $h\neq 0$ дисперсия умножается на h^2.

Выборочная дисперсия, как это показано в более подробных курсах (например, [4]), имеет систематическую ошибку, приводящую к уменьшению дисперсии. Чтобы это устранить, вводят поправку, умножая $D_в$ на $\frac{n}{n-1}$. В результате получают исправленную дисперсию

$$S^2=\frac{n}{n-1}D_в, \qquad (13.5.6)$$

или

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{X}_в)^2 n_i. \qquad (13.5.7)$$

На практике часто вместо этой формулы используют другую, ей равносильную, а именно:

$$S^2=\left[\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i^2 n_i}{n}-(\bar{X}_в)^2\right]\frac{n}{n-1}. \qquad (13.5.8)$$

При малых выборках S ощутимо отличается от $D_в$, например, при $n=2$ имеем $S^2=2D_в$. С возрастанием n исправленная дисперсия $S^2 \to D_в$. Уже при $n=30$ дисперсии S^2 и $D_в$ различаются на 3%.

3. Выборочное среднее квадратическое отклонение. Определение. *Арифметическое значение квадратного корня из выборочной дисперсии называется выборочным средним квадратическим отклонением*:

$$\sigma_в=\sqrt{D_в}. \qquad (13.5.9)$$

Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

$$S=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_в}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\sigma_в. \qquad (13.5.10)$$

4. Мода. Определение. *Модой M_0 называют значение признака, которое имеет наибольшую частоту* ($n_i=\max$).

Например, для распределения, данного табл. 13.5, мода равна 5.

5. Медиана. *Медианой m_e называют значение признака, которое делит статистическое распределение на две равные части:*

$$m_e=x_{k+1}, \text{ если } n=2k+1,$$

$$m_e=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}, \text{ если } n=2k.$$

6. Коэффициент вариации. Для сравнивания меры рассеяния значений признаков около выборочной средней в разных выборках служит коэффициент вариации.

Определение. *Коэффициентом вариации V называется отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней, выраженное в процентах*:

$$V=\frac{\sigma_{\text{в}}}{\bar{X}_{\text{в}}}100\%. \qquad (13.5.11)$$

Пусть изучается случайная величина X. Из генеральной совокупности сделана выборка объема n со значениями признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Предположим, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различны. Их можно рассматривать как случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющие то же распределение, что и случайная величина X, и, следовательно, одинаковые значения $M(X)$ и $D(X)$. Тогда

$$D(\bar{X}_{\text{в}})=D\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right).$$

Воспользовавшись свойствами дисперсии (12.2.12) и (12.2.13), находим

$$D(\bar{X}_{\text{в}})=\frac{1}{n^2}nD(X)=\frac{D(X)}{n}.$$

Пусть $\sigma(\bar{X}_{\text{в}})$ — средняя квадратическая ошибка выборочной средней. Тогда

$$\sigma(\bar{X}_{\text{в}})=\sqrt{D(\bar{X}_{\text{в}})}=\sqrt{\frac{D(X)}{n}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \qquad (13.5.12)$$

Вывод. Средняя квадратическая ошибка выборочной средней $\sigma(\bar{X}_{\text{в}})$ в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратического отклонения случайной величины X, возможные значения которой попали в выборочную совокупность.

§ 13.6. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Оценки математического ожидания и дисперсии. С понятием параметров распределения мы познакомились в теории вероятностей. Например, в нормальном законе распределения, задаваемом функцией плотности вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

параметрами служат a — математическое ожидание и σ — среднее квадратическое отклонение. В распределении Пуассона параметром является число $a=np$.

Определение. *Статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от данных выборки* $(x_1, x_2, x_3, ..., x_k;\ \ n_1, n_2, n_3, ..., n_k)$, *т. е. некоторую функцию этих величин.*

Здесь x_1, x_2, $x_3, ..., x_k$ — значения признака, n_1, n_2, $n_3, ..., n_k$ — соответствующие частоты. Статистическая оценка является случайной величиной.

Обозначим через θ — оцениваемый параметр, а через θ^* — его статистическую оценку. Величину $|\theta^*-\theta|$ называют *точностью оценки*. Чем меньше $|\theta^*-\theta|$, тем лучше, точнее определен неизвестный параметр.

Чтобы оценка θ^* имела практическое значение, она не должна содержать систематической ошибки и вместе с тем иметь возможно меньшую дисперсию. Кроме того, при увеличении объема выборки вероятность сколь угодно малых отклонений $|\theta^*-\theta|$ должна быть близка к 1.

Сформулируем следующие определения.

1. *Оценка параметра называется несмещенной, если ее математическое ожидание* $M(\theta^*)$ *равно оцениваемому параметру* θ, *т. е.*

$$M(\theta^*)=\theta, \qquad (13.6.1)$$

и смещенной, если

$$M(\theta^*)\neq\theta. \qquad (13.6.2)$$

2. *Оценка* θ^* *называется состоятельной, если при любом* $\delta>0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta^*-\theta|<\delta)=1. \qquad (13.6.3)$$

Равенство (13.6.3) читается так: оценка θ^* сходится по вероятности к θ.

3. *Оценка* θ^* *называется эффективной, если при заданном* n *она имеет наименьшую дисперсию.*

Теорема 1. *Выборочная средняя* $\bar{X}_в$ *является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания.*

Доказательство. Пусть выборка репрезентативна, т. е. все элементы генеральной совокупности имеют одинаковую возможность попасть в выборку. Значения признака x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$ можно принять за независимые случайные величины X_1, X_2, $X_3, \ldots, X_n$ с одинаковыми распределениями и числовыми характеристиками, в том числе с равными математическими ожиданиями, равными a,

$$M(\bar{X}_{\text{в}}) = M\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\, na = a.$$

Так как каждая из величин X_1, X_2, $X_3, \ldots, X_n$ имеет распределение, совпадающее с распределением генеральной совокупности, то $M(X)=a$. Поэтому

$$M(\bar{X}_{\text{в}}) = M(X).$$

Далее, на основании закона больших чисел имеем

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) =$$

$$= 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(|\bar{X}_{\text{в}} - M(X)| < \varepsilon\right) = 1,\ \varepsilon > 0.$$

откуда следует, что $\bar{X}_{\text{в}}$ — состоятельная оценка $M(X)$.

Используя правило исследования на экстремум, можно доказать, что $\bar{X}_{\text{в}}$ является и эффективной оценкой $M(X)$.

В качестве оценки дисперсии изучаемого признака в генеральной совокупности $D(X)$ принимается исправленная дисперсия.

Теорема 2. *Исправленная выборочная дисперсия* $S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}$ *является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии* $D(X)$.

§ 13.7. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ И ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Теоремы 1 и 2 хотя и являются общими, т. е. сформулированы при достаточно широких предположениях, они не дают возможности установить, насколько близки оценки к оцениваемым параметрам. Из факта, что оценки являются состоятельными, следует только то, что при увеличении объема выборки значение $P(|\theta^*-\theta|<\delta)$, $\delta>0$, приближается к 1.

Возникают следующие вопросы.

1) Каким должен быть объем выборки n, чтобы заданная точность $|\theta^*-\theta|=\delta$ была гарантирована с заранее принятой вероятностью?

2) Какова точность оценки, если объем выборки известен и вероятность безошибочности вывода задана?

3) Какова вероятность того, что при заданном объеме выборки будет обеспечена заданная точность оценки?

Введем несколько новых определений.

Определение. *Вероятность* γ *выполнения неравенства* $|\theta^*-\theta|<\delta$ *называется доверительной вероятностью или надежностью оценки* θ^*

$$P(|\theta^*-\theta|<\delta)=\gamma. \qquad (13.7.1)$$

Перейдем от неравенства $|\theta^*-\theta|<\delta$ к двойному неравенству. Известно, что $|\theta^*-\theta|<\delta \sim \theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta$. Поэтому доверительную вероятность можно записать в виде

$$P(\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta)=\gamma. \qquad (13.7.2)$$

Так как θ (оцениваемый параметр) — число постоянное, а θ^* — величина случайная, понятие доверительной вероятности сформулировать так: доверительной вероятностью γ называется вероятность того, что интервал $(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta)$ накрывает оцениваемый параметр.

Определение. *Случайный интервал* $(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta)$, *в пределах которого с вероятностью* γ *находится неизвестный оцениваемый параметр, называется доверительным интервалом* $\dot{I}$, *соответствующим коэффициенту доверия* γ,

$$\dot{I}=(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta). \qquad (13.7.3)$$

Надежность оценки γ может задаваться заранее, тогда, зная закон распределения изучаемой случайной величины, можно найти доверительный интервал $\dot{I}$. Решается и обратная задача, когда по заданному $\dot{I}$ находится соответствующая надежность оценки.

Пусть, например, $\gamma=0{,}95$; тогда число $p=1-\gamma=0{,}05$ показывает, с какой вероятностью заключение о надежности оценки ошибочно. Число

Доказательство. Пусть выборка репрезентативна, т. е. все элементы генеральной совокупности имеют одинаковую возможность попасть в выборку. Значения признака $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ можно принять за независимые случайные величины $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ с одинаковыми распределениями и числовыми характеристиками, в том числе с равными математическими ожиданиями, равными a,

$$M(\bar{X}_в)=M\left(\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}\right)=\frac{1}{n}na=a.$$

Так как каждая из величин $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ имеет распределение, совпадающее с распределением генеральной совокупности, то $M(X)=a$. Поэтому

$$M(\bar{X}_в)=M(X).$$

Далее, на основании закона больших чисел имеем

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=$$

$$=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_в-M(X)|<\varepsilon)=1,\ \varepsilon>0.$$

откуда следует, что $\bar{X}_в$ — состоятельная оценка $M(X)$.

Используя правило исследования на экстремум, можно доказать, что $\bar{X}_в$ является и эффективной оценкой $M(X)$.

В качестве оценки дисперсии изучаемого признака в генеральной совокупности $D(X)$ принимается исправленная дисперсия.

Теорема 2. *Исправленная выборочная дисперсия* $\bar{S}^2=\frac{n}{n-1}D_в$ *является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии* $D(X)$.

§ 13.7. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ И ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Теоремы 1 и 2 хотя и являются общими, т. е. сформулированы при достаточно широких предположениях, они не дают возможности установить, насколько близки оценки к оцениваемым параметрам. Из факта, что оценки являются состоятельными, следует только то, что при увеличении объема выборки значение $P(|\theta^*-\theta|<\delta)$, $\delta>0$, приближается к 1.

Возникают следующие вопросы.

1) Каким должен быть объем выборки n, чтобы заданная точность $|\theta^*-\theta|=\delta$ была гарантирована с заранее принятой вероятностью?

2) Какова точность оценки, если объем выборки известен и вероятность безошибочности вывода задана?

3) Какова вероятность того, что при заданном объеме выборки будет обеспечена заданная точность оценки?

Введем несколько новых определений.

Определение. *Вероятность γ выполнения неравенства $|\theta^*-\theta|<\delta$ называется доверительной вероятностью или надежностью оценки θ^**

$$P\left(|\theta^*-\theta|<\delta\right)=\gamma. \tag{13.7.1}$$

Перейдем от неравенства $|\theta^*-\theta|<\delta$ к двойному неравенству. Известно, что $|\theta^*-\theta|<\delta \sim \theta^*-\delta<\theta<$ $<\theta^*+\delta$. Поэтому доверительную вероятность можно записать в виде

$$P\left(\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\right)=\gamma. \tag{13.7.2}$$

Так как θ (оцениваемый параметр) — число постоянное, а θ^* — величина случайная, понятие доверительной вероятности сформулировать так: доверительной вероятностью γ называется вероятность того, что интервал $(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta)$ накрывает оцениваемый параметр.

Определение. *Случайный интервал $(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta)$, в пределах которого с вероятностью γ находится неизвестный оцениваемый параметр, называется доверительным интервалом $\dot{I}$, соответствующим коэффициенту доверия γ,*

$$\dot{I}=(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta). \tag{13.7.3}$$

Надежность оценки γ может задаваться заранее, тогда, зная закон распределения изучаемой случайной величины, можно найти доверительный интервал $\dot{I}$. Решается и обратная задача, когда по заданному $\dot{I}$ находится соответствующая надежность оценки.

Пусть, например, $\gamma=0{,}95$; тогда число $p=1-\gamma=0{,}05$ показывает, с какой вероятностью заключение о надежности оценки ошибочно. Число

$p=1-\gamma$ называется *уровнем значимости*. Уровень значимости задается заранее в зависимости от конкретного случая. Обычно p принимают равным 0,05; 0,01; 0,001.

Выясним, как построить доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенного признака. Было показано, что

$$M(\bar{X}_в)=M(X)=a,$$

$$\sigma(\bar{X}_в)=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}.$$

Оценим математическое ожидание с помощью выборочной средней $\bar{X}_в$ учитывая, что $\bar{X}_в$ также имеет нормальное распределение*. Имеем

$$P(|\bar{X}_в-M(X)|<\delta)=\gamma, \qquad (13.7.4)$$

а по формуле (12.9.2) получаем

$$P(|\bar{X}_в-M(X)|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma(\bar{X}_в)}\right).$$

Принимая во внимание (13.5.12), получим

$$P(|\bar{X}_в-M(X)|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma(X)}\right). \qquad (13.7.5)$$

Пусть известна вероятность γ. Тогда

$$2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma(X)}\right)=\gamma.$$

Для удобства пользования таблицей функции Лапласа положим $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma(X)}=t$; тогда $\delta=\frac{t\sigma(X)}{\sqrt{n}}$, а

$$P\left(|\bar{X}_в-M(X)|<\frac{t\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t),$$

или

$$P\left(\bar{X}_в-\frac{t\sigma(X)}{\sqrt{n}}<M(X)<\bar{X}_в+\frac{t\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t). \qquad (13.7.6)$$

---

* Утверждение, что $\bar{X}_в$ имеет нормальное распределение, принимается без доказательства.

Интервал

$$\left(\bar{X}_в-\frac{t\sigma(X)}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}_в+\frac{t\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right) \qquad (13.7.7)$$

накрывает параметр $a=M(X)$ с вероятностью γ.

В большинстве случаев среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ исследуемого признака неизвестно. Поэтому вместо $\sigma(X)$ при большой выборке ($n>30$) применяют исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение s, являющееся, в свою очередь, оценкой $\sigma(X)$, $s=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\sigma_в$. Доверительный интервал будет иметь вид

$$I=\left(\bar{X}_в-\frac{ts}{\sqrt{n}}<M(X)<\bar{X}_в+\frac{ts}{\sqrt{n}}\right).$$

● **Пример**. С вероятностью $\gamma=0{,}95$ найти доверительный интервал для $M(X)$—длины колоса ячменя сорта «Московский 121». Распределение задается таблицей, в которой вместо интервалов изменения (x_i, x_{i+1}) взяты числа $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$, см. Считать, что случайная величина X подчинена нормальному распределению.

$\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5
n_i	4	10	14	12	5	4	1

Решение. Выборка большая ($n=50$). Имеем

$$P\left(\bar{X}_в-\frac{ts}{\sqrt{n}}<M(X)<\bar{X}_в+\frac{ts}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\gamma.$$

$$\bar{X}_в=\frac{7{,}5\cdot 4+8{,}5\cdot 10+9{,}5\cdot 14+10{,}5\cdot 12+11{,}5\cdot 5+12{,}5\cdot 4+13{,}5\cdot 1}{50}=$$

$$=\frac{30+85+133+126+57{,}5+50+13{,}5}{50}=\frac{495}{50}=9{,}9\ (\text{см});$$

$$s=\sqrt{\frac{(7{,}5-9{,}9)^2\,4+(8{,}5-9{,}9)^2\,10+(9{,}5-9{,}9)^2\,14+(10{,}5-9{,}9)^2\,12+}{49}}\rightarrow$$

$$\rightarrow\sqrt{\frac{+(11{,}5-9{,}9)^2\,5+(12{,}5-9{,}9)^2\,4+(13{,}5-9{,}9)^2\,1}{}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(-2{,}4)^2\,4+(-1{,}4)^2\,10+(0{,}4)^2\,14+(0{,}6)^2\,12+(1{,}6)^2\,5+(2{,}6)^2\,4+}{49}}\rightarrow$$

$$\rightarrow\sqrt{\frac{+(3{,}6)^2\,1}{49}}=1{,}44.$$

Найдем точность оценки

$$2\Phi(t)=0{,}95,\quad \Phi(t)=0{,}475,\quad t=1{,}96,\quad \frac{ts}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}96\cdot 1{,}44}{\sqrt{50}}=0{,}4.$$

Определим доверительные границы:

$$\bar{X}_{\text{в}}-\frac{ts}{\sqrt{n}}=9{,}9-0{,}4=9{,}5,$$

$$\bar{X}_{\text{в}}+\frac{ts}{\sqrt{n}}=9{,}9+0{,}4=10{,}3.$$

Таким образом, с надежностью $\gamma=0{,}95$ математическое ожидание заключено в доверительном интервале $I=(9{,}5;\,10{,}3)$. ●

Итак, в случае большой выборки ($n>30$), когда исправленное среднее квадратическое отклонение незначительно отклоняется от среднего квадратического отклонения значения признака в генеральной совокупности, можно найти доверительный интервал. Но делать большую выборку удается не всегда и это не всегда целесообразно. Из (13.7.7) видно, что чем меньше n, тем шире доверительный интервал, т. е. I зависит от объема выборки n.

Английский статистик Госсет (псевдоним Стьюдент) доказал, что в случае нормального распределения признака X в генеральной совокупности нормирования случайная величина

$$T=\frac{\bar{X}_{\text{в}}-M(X)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \tag{13.7.8}$$

зависит только от объема выборки. Была найдена функция распределения случайной величины T и вероятность $P(T<t_\gamma)$, t_γ — точность оценки.

Функция, определяемая равенством

$$s(n, t_\gamma) = P(|T| < t_\gamma) = \gamma, \qquad (13.7.9)$$

названа *t-распределением Стьюдента* с $n-1$ степенями свободы. Формула (13.7.9) связывает случайную величину T, доверительный интервал I и доверительную вероятность γ. Зная две из них, можно найти третью. Учитывая (13.7.8), имеем

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_в - M(X)}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = \gamma. \qquad (13.7.10)$$

Неравенство в левой части (13.7.10) заменим равносильным ему неравенством $|\bar{X} - M(X)| < \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$. В результате получим

$$P\left(|\bar{X}_в - M(X)| < \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma,$$

или

$$P\left(\bar{X}_в - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_в + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma, \qquad (13.7.11)$$

где $t_\gamma = t(\gamma, n)$. Для функции t_γ составлены таблицы (см. Приложение 5). При $n > 30$ числа t_γ и t, найденные по таблице функции Лапласа, практически совпадают.

● **Задача.** Наблюдения за дневным удоем восьми коров, случайно отобранных из стада, дали следующие результаты.

Удой x_i, кг	12	13	15	16	18
Число голов n_i	1	1	3	2	1

1) Определить вероятность того, что средний удой по всему стаду будет отличаться от среднего удоя восьми коров не более чем на 2,5 кг.

2) С вероятностью $\gamma = 0{,}95$ найти доверительный интервал для среднего удоя по стаду $\bar{X} = M(X)$.

Решение. 1. Находим

$$\bar{X}_в = \frac{12 \cdot 1 + 13 \cdot 1 + 15 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + 18 \cdot 1}{8} = 15,$$

$$S=\sqrt{\frac{(-3)^2 1+(-2)^2 1+0^2\cdot 3+1^2\cdot 1+3^2\cdot 1}{7}}=\sqrt{\frac{24}{7}}\approx 1{,}85.$$

Выборка мала. Воспользуемся таблицей $t_\gamma=t(\gamma, n)$. Имеем

$$\delta=\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\Rightarrow t_\gamma=\frac{\sqrt{n}\delta}{s}=\frac{\sqrt{8}\cdot 2{,}5}{1{,}85}=3{,}82.$$

При $n=8$, $t=3{,}82$ по таблице находим $\gamma=0{,}993$. Далее имеем $P(|15-\bar{X}|<2{,}5)=0{,}993$. Событие практически достоверно.

2. Доверительный интервал

$$P\left(15-t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}<\bar{X}<15+t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=0{,}95.$$

При $n=8$ и $\gamma=0{,}95$ по таблице $t_\gamma=t(\gamma, n)$ находим $t_\gamma=2{,}37$ Точность оценки

$$\delta=\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}=2{,}37\,\frac{1{,}85}{\sqrt{8}}=1{,}55.$$

Доверительные границы

$$\bar{X}_в-1{,}55=15-1{,}55=13{,}45,\quad \bar{X}_в+1{,}55=15+1{,}55=16{,}55.$$

Таким образом, с вероятностью 0,95 средний удой по всему стаду заключен в доверительном интервале (13,45; 16,55). ●

В первой части задачи найдена вероятность отклонения выборочной средней от средней по хозяйству на величину, меньшую чем 2,5 кг, т. е. вероятность того, что средний удой заключен в интервале (12,5; 17,5). Эта вероятность равна 0,993. Если бы во второй части задачи мы положили $\gamma=0{,}993$, то в результате получили бы такой же доверительный интервал. Из этого примера видим, что большему доверительному интервалу соответствует при одинаковых условиях и большая доверительная вероятность.

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ_x в случае нормального распределения.

Теорема. *Пусть известно, что случайная величина имеет нормальное распределение. Тогда для оценки параметра σ_x этого закона имеет место равенство*

$$P\left(\left|\frac{\sigma}{s}-1\right|<\beta\right)=\gamma=\Psi(n, \beta), \qquad (13.7.12)$$

где γ — доверительная вероятность, зависящая от объема выборки n и точности оценки β.

Функция $\gamma=\Psi(n, \beta)$ хорошо изучена. С ее помощью определяют $\beta=\beta(\gamma, n)$. Для $\beta=\beta(\gamma, n)$ составлены таблицы, по которым по известным n (объему выборки) и γ (доверительной вероятности) определяется β.

Неравенство $\left|\frac{\sigma}{s}-1\right|<\beta$ равносильно неравенству

$$s-\beta s<\sigma<s+\beta s. \tag{13.7.13}$$

● **Пример.** Для оценки параметра нормально распределенной случайной величины была сделана выборка (дневной удой 50 коров) и вычислено $s=1{,}5$. Найти доверительный интервал, накрывающий σ с вероятностью $\gamma=0{,}95$.

Р е ш е н и е. По таблице $\beta(\gamma, n)$ для $n=50$ и $\gamma=0{,}95$ находим $\beta=0{,}21$ (см. Приложение 6).

В соответствии с неравенством (13.7.13) найдем границы доверительного интервала. Имеем

$$1{,}5-0{,}21\cdot 1{,}5=1{,}185, \quad 1{,}5+0{,}21\cdot 1{,}5=1{,}815,$$

$$1{,}185<\sigma<1{,}815. \text{ ●}$$

Нахождение объема выборочной совокупности. Формула

$$P\left(|\bar{X}_{\text{в}}-M(X)|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma(X)}\right)$$

связывает δ (точность оценки), доверительную вероятность $\gamma=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma(X)}\right)$ и объем выборки. Зная две из этих величин, можно найти третью. Важной является задача определения объема выборочной совокупности n при заданной доверительной вероятности γ и заданном доверительном интервале, определенном точностью δ. Как найти такой минимальный объем выборки n, чтобы оцениваемый параметр накрывался доверительным интервалом с заданной вероятностью γ? Обозначим $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma(X)}=t$; тогда

$$\delta=\frac{t\sigma(X)}{\sqrt{n}}, \quad n=\frac{t^2\sigma^2(X)}{\delta^2}.$$

Здесь $\sigma(X)$ — среднее квадратическое отклонение, t — значение независимой переменной в функции Лапласа, для которой $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$.

● **Пример**. Высота стебля кукурузы X — случайная величина, имеющая нормальное распределение. Сколько необходимо отобрать растений, чтобы $\bar{X}_в$ отличалось от $M(X)$ меньше чем на 2 см, если известно, что по результатам предыдущих измерений $\sigma(X)=6$ см. Результат найти с надежностью $\gamma=0{,}95$.

Решение. Имеем $\gamma=0{,}95$, $\Phi(t)=0{,}475$, $t=1{,}96$,

$$n=\frac{1{,}96^2\cdot 6^2}{2^2}=34{,}5744.$$

Таким образом, $n\geqslant 35$. ●

§ 13.8. ОЦЕНКА СУЩЕСТВЕННОСТИ РАЗЛИЧИЙ ВЫБОРОЧНЫХ СРЕДНИХ

Пусть с целью исследования влияния двух факторов на урожай проводились полевые опыты из двух серий по n делянок. Получены следующие результаты: средний урожай $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ (ц/га) и исправленные средние квадратические отклонения s_1 и s_2. Как установить, является ли расхождение $|\bar{X}_1-\bar{X}_2|$ случайным, или оно обусловлено влиянием изучаемых факторов? В первом случае расхождение $|\bar{X}_1-\bar{X}_2|$ называется несущественным, а во втором различие существенно. Следует иметь в виду, что ответ не может быть строго определенным, он либо будет верен с некоторой вероятностью g, либо ошибочен с вероятностью $p=1-g$, называемой *уровнем значимости*.

Составим случайную величину

$$T=\frac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}},\tag{13.8.1}$$

где $\sigma_d=\sqrt{s_1^2+s_2^2}$, n — объем выборки (число делянок в серии). Доказано, что случайная величина T имеет t-распределение Стьюдента, для которого составлены таблицы.

Случайная величина T зависит от числа степеней свободы $v=2(n-1)$ и уровня значимости p. По заданному p и числу степеней v находится t теоретическое.

По формуле (13.8.1) находят t практическое:

$$t_{\text{пр}}=\frac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{\dfrac{\sigma_d}{\sqrt{n}}}.$$

Если $t_{\text{пр}} < t_{\text{теор}}$, то с вероятностью ошибки, равной p, считают, что расхождение между средними незначимо, и влияние факторов на урожайность существенным признать нельзя. Если $t_{\text{пр}} \geqslant t_{\text{теор}}$, то расхождение между средними выборочными существенно, оно объясняется влиянием изучаемых факторов.

Если объем выборочных совокупностей неодинаков, то используют более сложные формулы, которые можно найти в подробных курсах (например, [8]).

● **Пример**. В результате полевых испытаний выращен урожай двух сортов картофеля: «Прикульский ранний» и «Дружба». Отобрано по 25 клубней каждого сорта. Результаты взвешивания таковы: выборочное среднее значение и исправленное среднее квадратическое отклонение массы одного клубня сорта «Прикульский» равны $\bar{X}_1=65$ г, $s_1=15$ г, для сорта «Дружба» $\bar{X}_2=90$ г, $s_2=20$ г.

На уровне значимости $p=0{,}05$ проверить существенность различий выборочных средних.

Решение. Находим

$$t_{\text{пр}}=\frac{|\bar{X}_1-\bar{X}_2|}{\sigma_d/\sqrt{n}};$$

$$\sigma_d=\sqrt{15^2+20^2}=\sqrt{225+400}=\sqrt{625}=25;$$

$$t_{\text{пр}}=\frac{|65-90|}{25/\sqrt{25}}=5.$$

Число степеней свободы $v=2(25-1)=48$. Далее получаем $t_{\text{теор}}=2{,}01$, т. е. $t_{\text{пр}} > t_{\text{теор}}$. Расхождение существенно. Принимается утверждение, что обе выборки сделаны из разных генеральных совокупностей, т. е. влияние сорта значимо. ●

§ 13.9. СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ

Качество выпускаемой продукции, покупаемой потребителем у производителя, редко проверяется методом сплошной проверки. Закон больших чисел с большой степенью достоверности гарантирует высокое качество контроля всей продукции на основе контроля выборочной совокупности. Более того, по результатам контроля выборки судят о всей продукции, выпущенной в аналогичных условиях. В § 13.7 показано, как установить такой объем выборки, чтобы характеристики выборочной совокупности отличались от характеристик всей продукции на заранее заданную величину, а вывод обладал определенным уровнем значимости.

Из многих видов статистического контроля кратко остановимся на контроле по выборочной средней и, в частности, на контроле глубины вспашки тракторным агрегатом. Примем, что непрерывная случайная величина X (глубина вспашки) имеет нормальное распределение.

Определение. *Математическое ожидание $M(X)=a$ контролируемой случайной величины (в данном случае заранее заданная глубина вспашки) называется проектным значением случайной величины.*

Будем считать, что среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ известно (из результатов обследования больших совокупностей, выполненных ранее). Проведем n замеров случайной величины и вычислим $\bar{X}_в$ и воспользуемся формулой

$$P\left(|\bar{X}_в < M(X)| < t\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

Если хотят, чтобы контролируемое значение попало в этот интервал с вероятностью 0,999, то величину t следует брать равной 3,09. Если вероятность уменьшить до 0,95, то $t=1{,}96$.

Результаты выборок изображают, как показано на рис. 127. По горизонтальной оси откладывают время выборки, а по вертикальной — средние выборочные. Контрольные линии проводят в соответствии с проектным значением X и средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$.

Проведение контрольных предельных линий для средних выборочных основано на предположении, что величина $\bar{X}_в - M(X)$ имеет нормальный закон распределения. В этом случае только 0,05 всех выборочных средних будет лежать вне центральной полосы шириной $\left(a-1{,}96\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}},\ a+1{,}96\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right)$. Аналогично, одно среднее значение из 1000 выйдет из пределов $a \pm 3{,}09\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$, т. е.

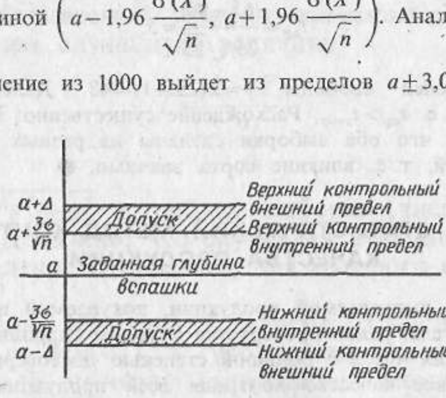


Рис. 127

одна точка $\bar{X}_в$ будет лежать выше линии $a+3{,}09\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ или ниже линии $a-3{,}09\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$. Величины $\dfrac{1{,}96}{\sqrt{n}}$ и $\dfrac{3{,}09}{\sqrt{n}}$ принято обозначать $A_{0{,}025}$ и $A_{0{,}0005}$. Для них составлены таблицы.

Для того чтобы найти контрольные пределы, необходимо $\sigma(X)$ или S умножить на соответствующие $A_{0{,}025}$ или $A_{0{,}0005}$ и полученные результаты прибавить к $M(X)$ и вычесть из него.

§ 13.10. ВЫВОДЫ

Математическая статистика занимается изучением и разработкой методов сбора, регистрации и обработки статистического материала.

Основным понятием математической статистики является статистическое распределение. Статистическим распределением выборки называется соответствие между количественными признаками и их частотами или относительными частотами. По нему составляется эмпирическая функция распределения, являющаяся оценкой функции распределения признака в генеральной совокупности. Для параметров распределения признака в генеральной совокупности находят точечные и интервальные оценки. Оценка называется точечной, если она характеризуется одним числом. Точечными оценками параметров распределения, в частности, служат выборочная средняя, выборочная дисперсия, исправленная выборочная дисперсия. При малом объеме выборки точечная оценка может намного отличаться от оцениваемого параметра.

Оценка, определяемая двумя числами,— концами интервалов, называется интервальной. Интервал $(\theta^*-\delta,\ \theta+\delta)$, который накрывает оцениваемый параметр с вероятностью γ, называется доверительным. Вероятность γ называется доверительной. Между доверительным интервалом, доверительной вероятностью и объемом выборки существует тесная связь. Для случая нормально распределенного признака в генеральной совокупности эта связь определяется формулой

$$P\left(|\bar{X}_в-M(X)|<\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t),$$

где $2\Phi(t)=\gamma$, $t=\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, $\Phi^{-1}(x)$ — функция, обратная функции Лапласа.

Важное практическое значение этой формулы состоит в том, что по ней можно заранее установить минимальный объем выборочной совокупности при известных других величинах так, чтобы с заданной вероятностью отклонение выборочной средней от математического ожидания не превышало заранее назначенной величины.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В результате взвешивания отобранных наудачу 50 клубней картофеля получены следующие результаты:

93	209	135	216	206	80	197	134	145	183
251	53	142	120	177	159	111	185	200	191
96	206	138	213	209	77	200	131	148	180
253	50	145	117	180	156	113	181	203	188
152	150	110	118	140	81	120	135	220	144

Составьте интервальное распределение. Число частичных интервалов определите по формуле $k=\sqrt{n}$. Постройте гистограмму частот.

2. Группа из 50 коров обследована по числу отелов. Получены следующие данные (число отелов):

7	6	1	2	8	7	5	3	5	4
1	1	10	6	4	5	5	3	2	2
2	2	3	5	5	4	6	9	1	1
4	5	3	5	7	8	2	1	6	7
1	2	3	4	4	5	6	7	7	8

Составьте статистическое распределение. Число частичных интервалов подсчитайте по формуле $k=1+3{,}2\lg n$. Постройте гистограмму частот.

3. Даны результаты (ц) взвешивания 50 коров, отобранных из стада

4,2	4,5	3,1	5,1	4,3	4,7	3,5	4,4	5,3	3,7
4,0	4,8	4,6	3,0	3,2	5,2	4,2	3,9	4,8	4,6
4,2	2,9	3,8	5,6	4,4	5,5	4,1	4,3	4,5	5,4
3,0	4,1	4,6	3,0	5,2	4,2	4,8	3,4	4,5	5,0
3,8	3,8	4,9	4,5	3,1	5,3	4,2	4,2	4,4	4,1

Составьте интервальное распределение. Число частичных интервалов найдите по формуле $k=\sqrt{n}$. Постройте гистограмму частот.

4. Составьте дискретное распределение, постройте полигон распределения частот и относительных частот, если даны результаты измерений 50 объектов.

7	5	10	8	7	11	3	9	4	10
5	9	8	4	9	6	8	7	10	12
7	9	8	10	9	9	8	5	7	7
6	9	7	8	11	3	7	9	4	10
5	8	9	5	7	6	10	7	8	7

5. По данным задачи 1 найдите:

1) выборочную среднюю;
2) выборочную дисперсию и исправленную дисперсию;
3) выборочное исправленное среднее квадратическое отклонение.

6. По данным задачи 2 найдите:

1) выборочную среднюю;
2) выборочную дисперсию и исправленную дисперсию;
3) выборочное среднее квадратическое отклонение.

7. По данным задачи 3 найдите:

1) оценку среднего значения генеральной совокупности;
2) оценку дисперсии генеральной совокупности;
3) величину, которую следует принять за среднее квадратическое отклонение.

8. Среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равно $\sigma(X)$, выборочная средняя $\bar{X}_в$, объем выборки n. Найдите доверительные интервалы для математического ожидания $M(X)$ с заданной доверительной вероятностью (надежностью) γ. Постройте интервалы и установите, как изменяется величина интервала в зависимости от величины надежности.

а) $\sigma(X)=1{,}5$; $\bar{X}_в=12{,}0$, $n=49$, $\gamma=0{,}95$,
б) $\sigma(X)=1{,}5$, $\bar{X}_в=12{,}0$, $n=49$, $\gamma=0{,}99$;
в) $\sigma(X)=1{,}5$, $\bar{X}_в=12{,}0$, $n=49$, $\gamma=0{,}995$.

9. Установите влияние объема выборки на величину доверительного интервала для неизвестного математического ожидания $M(X)$ нормально распределенной случайной величины X, если:

а) $\sigma(X)=6$, $\bar{X}_в=20{,}1$, $\gamma=0{,}95$, $n=64$,
б) $\sigma(X)=6$, $\bar{X}_в=20{,}1$, $\gamma=0{,}95$, $n=36$;
в) $\sigma(X)=6$, $\bar{X}_в=20{,}1$, $\gamma=0{,}95$, $n=144$.

10. В выборке из 25 зерен пшеницы средняя масса зерна составила $\bar{X}_в=0{,}5$ г и $s=0{,}05$ г. Предполагая, что случайная величина X (масса зерна) имеет нормальное распределение, с надежностью $\gamma=0{,}99$ найдите:

а) доверительный интервал для $M(X)$;

б) доверительный интервал для неизвестного среднего квадратического отклонения;

в) доверительный интервал для $M(X)$, если объем выборки равен 50?

Сделайте практические выводы.

11. Для определения средней урожайности овса взято наудачу 20 проб на 1 м^2 и для них определено $\bar{X}_в=0{,}125$ кг. Среднее квадратическое отклонение $s=0{,}052$.

Определить, в каких границах заключена средняя урожайность с 1 м^2 по всему полю, если вывод следует сделать с надежностью 0,9.

12. При изучении длины листьев садовой земляники сделана выборка. Среднее квадратическое отклонение отдельного измерения $s = 1{,}32$ см. С вероятностью 0,95 определить такое минимальное число измерений, чтобы отклонение выборочной средней от математического ожидания не превышало 0,06 см.

13. На двух группах бычков *A* и *B* сравнивали влияние на суточный привес (кг) двух видов кормов: льняного жмыха и сои. Данные помещены в следующих таблицах.

Льняной жмых

x_i	1,95	2,05	2,11	2,17	2,24	2,52
n_i	2	2	1	1	1	1

Соя

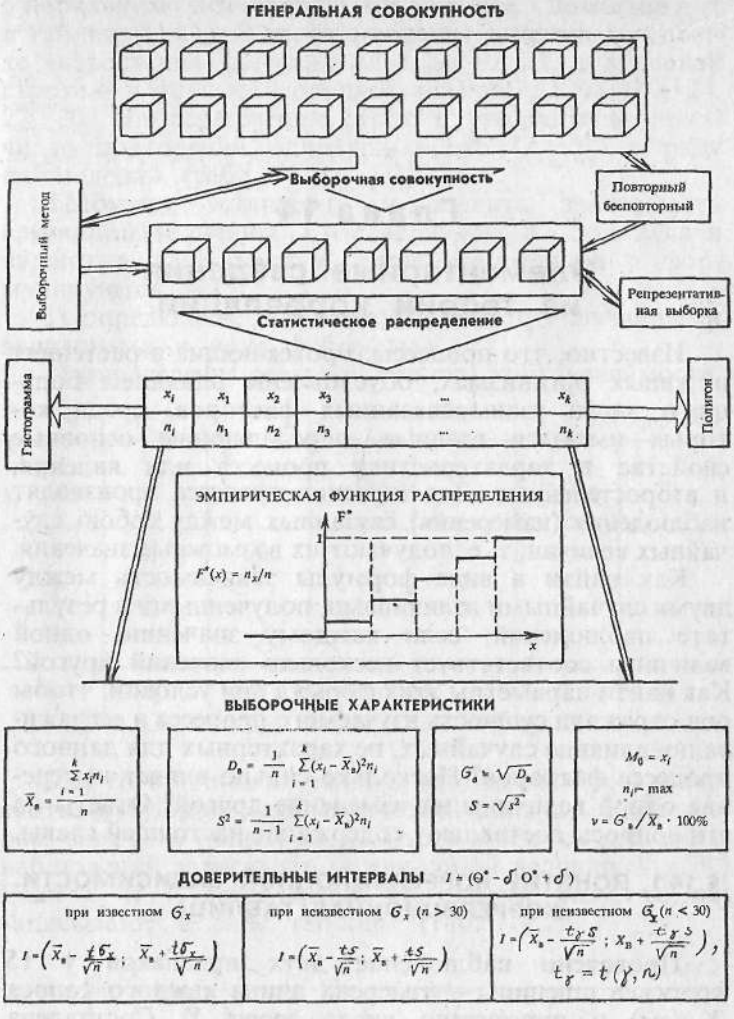
y_i	1,74	1,77	1,83	1,86	1,92	2,50
n_i	1	2	2	2	1	1

Вычислить разность между выборочными средними и установить при уровне 0,05, значимо или случайно это расхождение.

14. Даны 2 распределения случайной величины: *X* — урожайность свеклы, выращенной с применением микроудобрений и *Y* — без применения микроудобрений. С надежностью 0,95 установить, значимо или незначимо расхождение между средними значениями. Сделать вывод о влиянии микроудобрений на урожай с учетом данных в следующих таблицах.

x_i	200...210	210...220	220...230	230...240	240...250	250...260
n_i	2	4	7	8	6	3

y_i	190... ...200	200... ...210	210... ...220	220... ...230	230... ...240	240... ...250	250... ...260	260... ...270
n_i	1	2	4	8	6	5	3	1


ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ
Выборочная совокупность
Выборочный метод
Повторный бесповторный
Репрезентативная выборка
Статистическое распределение
Гистограмма
Полигон
x_i | x_1 | x_2 | x_3 | ... | x_k
n_i | n_1 | n_2 | n_3 | ... | n_k
ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
$F^*(x) = n_x/n$
ВЫБОРОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
$\overline{X}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$
$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X}_в)^2 n_i$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X}_в)^2 n_i$
$\sigma_в = \sqrt{D_в}$
$S = \sqrt{s^2}$
$M_0 = x_i$
n_i – max
$v = \sigma_в / \overline{X}_в \cdot 100\%$
ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ $I = (\Theta^* - \delta;\ \Theta^* + \delta)$
при известном σ_x
$I = \left(\overline{X}_в - \frac{t\sigma_x}{\sqrt{n}};\ \overline{X}_в + \frac{t\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)$
при неизвестном σ_x ($n > 30$)
$I = \left(\overline{X}_в - \frac{ts}{\sqrt{n}};\ \overline{X}_в + \frac{ts}{\sqrt{n}}\right)$
при неизвестном σ_x ($n < 30$)
$I = \left(\overline{X}_в - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}};\ \overline{X}_в + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right)$, $t_\gamma = t(\gamma, n)$

Глава 14

Элементарные сведения из теории корреляции

Известно, что процессы, протекающие в растениях и живых организмах, обусловлены влиянием большого числа взаимосвязанных факторов, среди которых имеются главные, определяющие основные свойства и характеристики процесса или явления, и второстепенные. Для изучения процесса производят наблюдения (измерения) связанных между собою случайных величин, т. е. получают их возможные значения.

Как найти в виде формулы зависимость между двумя случайными величинами, полученными в результате наблюдений, если каждому значению одной величины соответствует несколько значений другой? Как найти параметры этих формул при условии, чтобы они отражали сущность изучаемого процесса и «сглаживали» влияние случайных, не характерных для данного процесса факторов? Насколько сильно влияет изменение одной величины на изменение другой? Ответы на эти вопросы составляют содержание настоящей главы.

§ 14.1. ПОНЯТИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТАБЛИЦА

Проведено наблюдение двух признаков у 15 колосьев пшеницы — измерена длина каждого колоса X (см) и подсчитано число зерен Y. Составлена следующая таблица:

x_i	10	9	11	8	9	10	9	11	8	10	9	10	8	9	11
y_i	24	20	27	18	20	24	20	27	20	27	24	27	20	27	30

Интуитивно можно предположить, что большей длине колоса отвечает большее число зерен в нем.

Упорядочим эти первичные данные, поместив их в таблицу (14.1). В первом столбце запишем в порядке возрастания значения x_i: 8, 9, 10, 11, а в первой строке — в том же порядке значения y_i: 18, 20, 24, 27, 30. На пересечении строк и столбцов запишем число повторений одинаковых пар $(x_i;\ y_i)$ в ряду наблюдений (табл. 14.1).

Требуется установить и оценить зависимость случайной величины Y от величины X. Эти задачи являются основными в теории корреляции и формулируются так:

1) определение зависимости между случайными величинами в виде формулы;

2) определение силы или тесноты этой зависимости.

Таблица 14.1

X \ Y	18	20	24	27	30	n_x
8	1	2				3
9		3	1	1		5
10			2	2		4
11				2	1	3
n_y	1	5	3	5	1	15

Для того чтобы их решить, необходимо построить соответствующий математический аппарат. Рассмотрим задачу в общем виде. Пусть имеются два ряда наблюдений зависимых между собой величин X и Y. Если x_i и y_i встречаются по одному разу, то их записывают в виде таблицы (табл. 14.2),

Таблица 14.2

N	1	2	3	...	k	...	n
x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k	...	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_k	...	y_n

где x_i, y_i — наблюдавшиеся значения зависимых между собой признаков X и Y; N — номер наблюдения.

Если каждому значению y_i отвечает несколько значений x, а каждому x_j — несколько y, то эти данные надо упорядочить и записать в виде таблицы (табл. 14.3).

Таблица 14.3

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	...	y_n	$\sum n_{x_i}$
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1n}	$\sum n_{x_1}$
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2n}	$\sum n_{x_2}$
x_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	...	n_{3n}	$\sum n_{x_3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...
x_m	n_{m1}	n_{m2}	n_{m3}	...	n_{mn}	$\sum n_{x_m}$
$\sum n_y$	$\sum n_{y_1}$	$\sum n_{y_2}$	$\sum n_{y_3}$	...	$\sum n_{y_n}$	$\sum n_{xy}$

Здесь числа n_{ij} — частоты, показывающие сколько раз повторяются парные значения x_i, y_j. Например, n_{23} показывает, сколько раз произошло событие, состоящее в том, что $X=x_2$, а $Y=y_3$. Табл. 14.3, в которой результаты наблюдений записаны в порядке возрастания с указанием частот n_{ij}, называется *корреляционной*. Корреляционная таблица может быть составлена как для дискретных признаков, так и для непрерывных. В последнем случае разность значений признаков $x_{\max}-x_{\min}$ или $y_{\max}-y_{\min}$ делится точками на ряд частичных интервалов (классов), обычно равных, а при дальнейшей обработке переходят к дискретному статистическому распределению, заменяя интервал $x_{i-1}...x_i$ его центром $x_i^* = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Так же поступают в отношении случайной величины Y.

Из табл. 14.3 видно, что каждому значению признака X отвечает распределение признака Y и, наоборот, одному значению Y отвечает распределение признака X.

Так, например, при $X=x_1$ имеем

y_j	y_1	y_2	y_3	...	y_n
n_{1j}	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1n}

при $X=x_2$ распределение имеет следующий вид:

y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_n
n_{2j}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2n}

и т. д.

Далее при $Y=y_1$ получаем

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_m
n_{i1}	n_{11}	n_{21}	n_{31}	...	n_{m1}

при $Y=y_2$ имеем

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_m
n_{i2}	n_{12}	n_{22}	n_{32}	...	n_{m2}

и т. д.

В отличие от функциональной зависимости здесь нет строгого соответствия между X и Y, но можно найти соответствие между значениями одной и средним значением другой величины.

Определение. *Зависимость между случайными величинами X и Y, состоящая в том, что каждому значению одной величины соответствует распределение другой, называется статистической.*

Статистическая зависимость показывает, что если величина X принимает одно значение или попадает в определенный интервал, то при этом другая величина Y принимает несколько значений с определенными частотами. Каждому значению X сопоставляется распределение Y.

Особенно важным является частный случай статистической зависимости, когда каждому возможному значению одной величины сопоставляется какая-либо числовая характеристика соответствующего распределения другой. Такая зависимость называется *статистической корреляцией* или просто *корреляционной зависимостью*.

Определение. *Среднее арифметическое значение величины Y, вычисленное при условии, что X принимает фиксированное значение, называется условным средним и обозначается $\bar{y}_x$.*

Аналогично определяется условное среднее $\bar{x}_y$.

В случае малых выборок распределение признака может состоять из одного значения, поэтому корреляционную таблицу не составляют.

Обратимся к табл. 14.1. Значению $x_1=8$ отвечает распределение

y_j	18	20
n_j	1	2

и условное среднее $\bar{y}_{x_1}=\dfrac{18\cdot 1+20\cdot 2}{3}=19{,}3.$

Далее при $x_2=9$ имеем

y_j	20	24	27
n_j	3	1	1

$$\bar{y}_{x_2}=\frac{20\cdot 3+24\cdot 1+27\cdot 1}{6}=22{,}2;$$

при $x_3=10$

y_j	24	27
n_j	2	2

$$\bar{y}_{x_3}=\frac{24\cdot 2+27\cdot 2}{4}=25{,}5;$$

при $x_4=11$

y_j	27	30
n_j	2	1

$$\bar{y}_{x_4}=\frac{27\cdot 2+30\cdot 1}{3}=28{,}0.$$

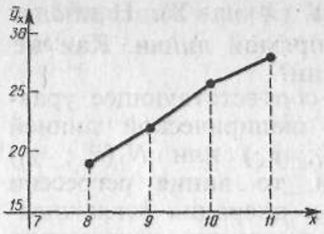


Рис. 128

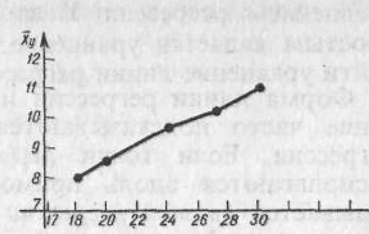


Рис. 129

Таким образом, получена следующая новая таблица:

x_i	8	9	10	11
$\bar{y}_{x_i}$	19,3	22,2	25,5	28,0

определяющая соответствие между значениями x_i и условными средними $\bar{y}_{x_i}$. Построим в декартовой системе координат точки $M_i(x_i,\ y_{x_i})$ и соединим их отрезками прямых. Полученная линия называется *эмпирической линией регрессии* Y на X (рис. 128).

Из табл. 14.1 можно составить еще одну таблицу, показывающую соответствие между значениями y_j и условными средними $\bar{x}_{y_j}$,

y_j	18	20	24	27	30
$\bar{x}_{y_j}$	8	8,6	9,7	10,2	11,0

Ломаная линия с вершинами $N_i(\bar{x}_{y_j};\ y_j)$ называется *эмпирической линией регрессии* X на Y (рис. 129). Изучая линию, построенную по данным приведенных выше таблиц, можно «наметить» некоторую плавную «сглаживающую» кривую, около которой группируются, или к которой «тяготеют» точки M_i или N_j. Такую линию называют *теоретической линией регрессии* Y на X (X на Y) или линией регрессии, а соответствующее уравнение $\bar{y}_x = f(x)$ $(\bar{x}_y = \varphi(y))$ —

уравнением регрессии Y на X (X на Y). Наиболее простым является уравнение прямой линии. Как же найти уравнение линии регрессии?

Форма линии регрессии и соответствующее уравнение часто подсказываются эмпирической линией регрессии. Если точки $M_i(x_i;\ \bar{y}_{x_i})$ или $N_j(\bar{x}_{y_j};\ y_j)$ располагаются вдоль прямой, то линия регрессии называется *прямой регрессии* и операция «сглаживания» ломаной сводится к нахождению параметров a и b функции

$$y = ax + b. \qquad (14.1.1)$$

Корреляционная зависимость или просто корреляция называется *прямой*, если большему значению x отвечает большее значение $\bar{y}_x$ и обратной, если с возрастанием x значение $\bar{y}_x$ убывает. Для прямой корреляции в уравнении (14.1.1) $a>0$, а для обратной $a<0$. Функция $y=ax+b$ является математической моделью изучаемой зависимости, которая при правильном ее построении будет выявлять главнейшие свойства изучаемого процесса или явления и исключать отдельные «возмущения», вызванные случайными, не характерными для данного явления, факторами.

§ 14.2. ЛИНЕЙНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Предположим, что по эмпирической линии регрессии или из других соображений установлено, что между двумя количественными признаками существует линейная корреляционная зависимость.

Уравнение регрессии имеет вид

$$\bar{y}_x = ax + b$$

или

$$\bar{y}_x - ax - b = 0. \qquad (14.2.1)$$

Сначала рассмотрим простейший случай, когда пары чисел в табл. 14.3 наблюдались по одному разу, т. е. $n_{ij}=1$ для всех $i=j$ и $n_{ij}=0$ для всех $i \neq j$ (см. табл. 14.2). Подставив в (14.2.1) вместо x и $\bar{y}_x$ x_i и y_i, мы не получим в правой части равенства ноль, так как на результаты каждого наблюдения влияют случайные «возмущения». Имеем:

$$\begin{aligned} &y_1 - ax_1 - b = v_1, \\ &y_2 - ax_2 - b = v_2, \\ &y_3 - ax_3 - b = v_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y_n - ax_n - b = v_n. \end{aligned}$$

Числа $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ называются отклонениями. Параметры a и b находят из условия, состоящего в том, чтобы сумма квадратов отклонений

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \tag{14.2.2}$$

была наименьшей из всех возможных. Поэтому метод называется *методом наименьших квадратов*.

Сумма (14.2.2) является функцией параметров a и b. Составим эту функцию, заменив значения v_i на $y_i - ax_i - b$. Имеем

$$F(a,\ b) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Для нахождения минимума функции $F(a,\ b)$, зависящей от двух неизвестных a и b, найдем частные производные $\frac{\partial F}{\partial a}$ и $\frac{\partial F}{\partial b}$ и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0. \end{aligned} \tag{14.2.3}$$

Вынесем постоянный множитель за знак суммы, умножим обе части равенств (14.2.3) на (-1) и перегруппировав слагаемые, запишем

$$\begin{cases} a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1} y_i. \end{cases} \tag{14.2.4}$$

Найдя из системы (14.2.4) a и b, получаем искомое уравнение прямой линии регрессии

$$\bar{y}_x = ax + b, \qquad (14.2.5)$$

где a — выборочный коэффициент регрессии.

Система (14.2.4) составлена для случая, когда пары чисел x_i и y_i наблюдались по одному разу. Если необходимо найти параметры a и b, когда связь между X и Y описывается корреляционной таблицей, то система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} a\overline{x^2} + b\bar{x} = \overline{xy}, \\ a\bar{x} + b = \bar{y}, \end{cases} \qquad (14.2.6)$$

где

$$\overline{x^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} n_{x_i}\bar{x}_i^2}{N}, \quad \bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} n_{x_i}x_i}{N}, \quad \overline{xy} = \frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{i=m\\ j=n}} n_{ij}x_i, y_j}{N}, \quad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} n_{y_j}y_j}{N}.$$

Значения n_{x_i}, n_{ij}, n_{y_j} — поясняются табл. 14.3.

Для определения a и b из системы (14.2.6) умножим второе уравнение на $\bar{x}$ и вычтем результат почленно из первого уравнения

$$\begin{array}{r} a\overline{x^2} + b\bar{x} = \overline{xy} \\ -\ a(\bar{x})^2 + b\bar{x} = \bar{x}\bar{y} \\ \hline a(\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}, \end{array}$$

откуда

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}.$$

Из второго уравнения (14.2.6) найдем $b = \bar{y} - a\bar{x}$ и подставим его в уравнение регрессии (14.2.5). В результате имеем

$$\bar{y}_x = ax + b.$$

Далее получаем

$$\bar{y}_x = ax + \bar{y} - a\bar{x}$$

или

$$\bar{y}_x - \bar{y} = a(x - \bar{x}). \qquad (14.2.7)$$

Проводя аналогичные рассуждения для уравнения регрессии

$$\bar{x}_y = cx + d,$$

приходим к уравнению

$$\bar{x}_y - x = c(y - \bar{y}). \qquad (14.2.8)$$

Угловой коэффициент прямой (14.2.7) называется *выборочным коэффициентом регрессии* с Y на X, его обозначают символом ρ_{yx}:

$$\rho_{yx}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2}-(\bar{x})^2}.$$

Выборочный коэффициент регрессии с X на Y находят по формуле

$$\rho_{xy}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\overline{y^2}-(\bar{y})^2}.$$

В результате уравнения прямых регрессии принимают следующий вид:

$$\bar{y}_x-\bar{y}=\rho_{yx}(x-\bar{x}); \qquad (14.2.9)$$

$$\bar{x}_y-\bar{x}=\rho_{xy}(y-\bar{y}). \qquad (14.2.10)$$

§ 14.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СПОСОБОМ ВЫБРАННЫХ ТОЧЕК И СПОСОБОМ СРЕДНЕЙ

Пусть данные наблюдений представлены в виде табл. 14.2. Построим в системе координат точки M_i $(x_i;\ y_i)$, $i=1,\ 2,\ ...,\ n$, и проведем прямую l таким образом, чтобы она проходила как можно ближе к этим точкам. Далее выберем на прямой две произвольные точки N_1 и N_2. Их координаты найдем с помощью циркуля или подсчитав длину соответствующих отрезков, воспользовавшись миллиметровой бумагой. Получим две пары чисел $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки, и определит параметры эмпирической формулы

$$\bar{y}_x=ax+b.$$

В этом и состоит способ выбранных точек.

Способ средней. Разобьем результаты наблюдений, помещенных в табл. 14.2, на две равные (или почти равные) по объему группы. Для определения параметров a и b потребуем, чтобы отклонения

$$y_i-ax_i-b=v_i \qquad (14.3.1)$$

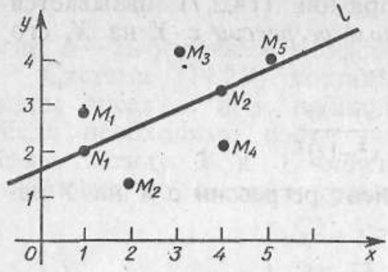


Рис. 130

взаимно погашались в каждой группе, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-ax_i-b)=0,$$

$$\sum_{i=m+1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0.$$

После перегруппировки слагаемых приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{m}x_i+mb=\sum_{i=1}^{m}y_i, \\ a\sum_{i=m+1}^{n}x_i+(n-m)b=\sum_{i=m+1}^{n}y_i. \end{cases} \qquad (14.3.2)$$

Найденные из (14.3.2) число a и b подставляют в уравнение $\bar{y}_x=ax+b$.

● **Пример 1.** Используя метод выбранных точек, найти корреляционную зависимость вида $y=ax+b$, если результаты наблюдений представлены в следующей таблице:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2,8	1,3	4,1	2,1	3,9

Решение. Строим точки $M_1(1;\ 2{,}8)$, $M_2(2;\ 1{,}3)$, $M_3(3;\ 4{,}1)$, $M_4(4;\ 2{,}1)$, $M_5(5;\ 39)$ (рис. 130). Проведем прямую l. Выберем две точки $N_1\in l$ и $N_2\in l$ и измерим их координаты. Пусть $N_1(1;\ 2)$, $N_2(4;\ 3{,}3)$. Запишем уравнение прямой (N_1N_2)

$$\frac{y-2{,}0}{3{,}3-2{,}0}=\frac{x-1}{4-1}.$$

В результате преобразований получим $y=0{,}43x+1{,}57$.

Таким образом, $a=0{,}43$, $b=1{,}57$. ●

● **Пример 2.** Используя способ средней, найти корреляционную зависимость вида $y=ax+b$, если результаты наблюдений представлены таблицей примера 1.

Решение. Разбиваем результаты на 2 группы. Пусть $m=2$, $n-m=3$. Для составления системы (14.3.2) вычисления проведем во вспомогательной таблице (табл. 14.4).

Таблица 14.4

x_i $i=1,2$	y_i $i=1,2$	x_i $i=3,4,5$	y_i $i=3,4,5$
1,0 2,0	2,8 1,3	3,0 4,0 5,0	4,1 2,1 3,9
3,0	4,1	12,0	10,1

Решив систему

$$\begin{cases} 3a+2b=4,1, \\ 12a+3b=10,1, \end{cases}$$

находим $a=0,53$, $b=1,26$, $y=0,53x+1,26$. ●

● **Пример 3.** Используя метод наименьших квадратов, найти корреляционную зависимость вида $y=ax+b$, если результаты наблюдений представлены таблицей примера 1.

Решение. Для определения параметров a и b воспользуемся системой (14.2.4)

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{5} x_i^2+b\sum_{i=1}^{5} x_i=\sum_{i=1}^{5} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{5} x_i+bn=\sum_{i=1}^{5} y_i. \end{cases}$$

Вычисление коэффициентов a и b проведем во вспомогательной таблице (табл. 14.5).

Таблица 14.5

Номер наблюдений	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	2,8	1	2,8
2	2	1,3	4	2,6
3	3	4,1	9	12,3
4	4	2,1	16	8,4
5	5	3,9	25	19,5
	$\sum x_i=15$	$\sum y_i=14,2$	$\sum x_i^2=55$	$\sum x_i y_i=45,6$

Решая систему

$$\begin{cases} 55a+15b=45,6, \\ 15a+5b=14,2, \end{cases}$$

получаем $a=0,3$, $b=1,94$, $y=0,3x+1,94$.

Как видим, применяя различные методы, мы получили и разные результаты. Расхождение объясняется прежде всего тем, что число пар наблюдений сравнительно мало ($n=5$). Метод наименьших квадратов имеет строгое математическое обоснование, поэтому результаты вычислений, полученные с его помощью, считаются более близкими к точному значению неизвестных параметров a и b.

§ 14.4. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ И ЕГО СВОЙСТВА. ПРИМЕР ВЫРАВНИВАНИЯ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Обратимся к табл. 14.2 и найдем $\bar{X}_{\text{в}}$ и $\bar{Y}_{\text{в}}$, далее составим разности $x_i-\bar{X}_{\text{в}}$ и $y_i-\bar{Y}_{\text{в}}$, затем вычислим произведения $(x_i-\bar{X}_{\text{в}})(y_i-\bar{Y}_{\text{в}})$. Все вычисления поместим в табл. 14.6.

Таблица 14.6

Номер наблюдения	x_i	y_i	$x_i-\bar{X}_{\text{в}}$	$y_i-\bar{Y}_{\text{в}}$	$(x_i-\bar{X}_{\text{в}})(y_i-Y_{\text{в}})$
1	x_1	y_1	$x_1-\bar{X}_{\text{в}}$	$y_i-\bar{Y}_{\text{в}}$	$(x_1-\bar{X}_{\text{в}})(y_1-\bar{Y}_{\text{в}})$
2	x_2	y_2	$x_2-\bar{X}_{\text{в}}$	$y_2-\bar{Y}_{\text{в}}$	$(x_2-\bar{X}_{\text{в}})(y_2-\bar{Y}_{\text{в}})$
3	x_3	y_3	$x_3-\bar{X}_{\text{в}}$	$y_3-\bar{Y}_{\text{в}}$	$(x_3-\bar{X}_{\text{в}})(y_3-\bar{Y}_{\text{в}})$
...	...	...	...	...	...
n	x_n	y_n	$x_n-\bar{X}_{\text{в}}$	$y_n-\bar{Y}_{\text{в}}$	$(x_n-\bar{X}_{\text{в}})(y_n-\bar{Y}_{\text{в}})$
	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum(x_i-\bar{X}_{\text{в}})$	$\sum(y_i-\bar{Y}_{\text{в}})$	$\sum(x_i-\bar{X}_{\text{в}})(y_i-\bar{Y}_{\text{в}})$

Если между X и Y существует линейная корреляция, то разности $x_i-\bar{X}_{\text{в}}$ и $y_i-\bar{Y}_{\text{в}}$ для каждого i, $i=1, 2, 3, ..., n$, имеют одинаковые знаки в случае прямой корреляции и противоположные в случае обратной корреляции.

Следовательно, при наличии корреляционной зависимости сумма $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_{\text{в}})(y_i-\bar{Y}_{\text{в}})$ есть число, отличное от нуля. Если же X и Y не связаны корреляционной зависимостью или, как говорят, не коррелированы, то знаки разностей $x_i-\bar{X}_{\text{в}}$ и $y_i-\bar{Y}_{\text{в}}$

носят случайный характер, при суммировании они взаимно погашаются и сумма $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_в)(y_i-\bar{Y}_в)$ при большом числе наблюдений будет мала или равна нулю. Следовательно, эта сумма характеризует меру влияния изменения одной величины на изменение другой.

Определение. *Выборочным корреляционным моментом или ковариацией K_{xy} называется число, определяемое формулой*

$$K_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_в)(y_i-\bar{Y}_в). \tag{14.4.1}$$

В теории корреляции доказывается, что если X и Y независимы, то $K_{xy}=0$. Корреляционный момент характеризует силу связи между X и Y. Размерность K_{xy} равна произведению размерностей наблюдаемых случайных величин. Разделив K_{xy} на произведение средних квадратических отклонений, получим безразмерный показатель

$$r=\frac{K_{xy}}{\sigma_в(X)\sigma_в(Y)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_в)(y_i-\bar{Y}_в)}{n\sigma_в(X)\sigma_в(Y)}, \tag{14.4.2}$$

или

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_в)(y_i-\bar{Y}_в)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_в)^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y}_в)^2}}. \tag{14.4.2а}$$

Определение. *Выборочным коэффициентом корреляции $r_в$ называется отношение выборочного корреляционного момента K_{xy} к произведению выборочных средних квадратичных отклонений этих величин.*

Формулу (14.4.2) можно записать в другой форме, удобной для случаев, когда зависимость между X и Y задается корреляционной таблицей. Имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_в)(y_i-\bar{Y}_в)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-X_i\bar{Y}_в-\bar{X}_вy_i+\right.$$

$$\left.+X_вY_в)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\bar{Y}_в\sum x_i-\bar{X}_в\frac{1}{n}\sum y_i+\frac{n}{n}\bar{X}_в\bar{Y}_в=\right.$$

$$=\overline{XY}-\bar{X}_в\bar{Y}_в.$$

Тогда

$$r = \frac{\overline{XY} - \bar{X}_в \bar{Y}_в}{\sigma_в(X)\sigma_в(Y)}. \quad (14.4.3)$$

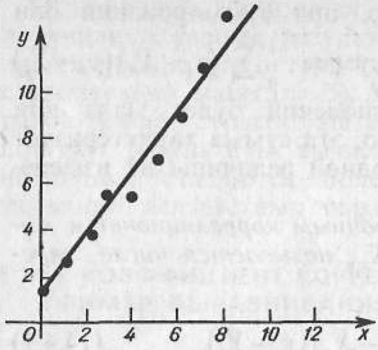


Рис. 131

Свойства выборочного коэффициента корреляции.

1^0. *Значения коэффициента корреляции изменяются на множестве* $[-1, 1] = \{r: -1 \leqslant r \leqslant 1\}$.

2^0. *Чем больше* $|r|$, *тем теснее связь между изучаемыми количественными признаками.*

3^0. *Если* $|r| = 1$, *то корреляционная зависимость становится функциональной.*

4^0. *Если* $r = 0$, *то между изучаемыми признаками нет линейной корреляционной зависимости, но условие* $r = 0$ *не исключает существования какого-либо другого вида корреляционной зависимости (параболической, показательной и др.).*

● **Пример.** Зависимость массы поросенка Y (кг) от его возраста X (в неделях) характеризуется следующей таблицей:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1,3	2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

а) Показать, что корреляция линейная;

б) с помощью способа наименьших квадратов найти линейную зависимость между X и Y;

в) найти выборочный коэффициент корреляции.

Решение. Построим в системе координат Oxy точки $M_i(x_i, y_i)$ (рис. 131). Из рис. 131 видно, что точки располагаются вдоль прямой линии. Для определения коэффициентов a и b составим вспомогательную таблицу (табл. 14.7).

Таблица 14.7

Номер наблюдения	x_i, недели	y_i, кг	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	1,3	0	0
2	1	2,5	1	2,5
3	2	3,9	4	7,8
4	3	5,2	9	15,6

Номер наблюдения	x_i	y_i	$x_i-\bar{X}_в$	$y_i-\bar{Y}_в$	$(x_i-\bar{X}_в)\times$ $\times(y_i-Y_в)$	$(x_i-\bar{X}_в)^2$	$(y_i-\bar{Y}_в)^2$
1	0	1,3	−4,0	−5,21	20,84	16,0	27,14
2	1	2,5	−3,0	−4,01	12,03	9,0	16,08
3	2	3,9	−2,0	−2,61	5,22	4,0	6,81
4	3	5,2	−1,0	−1,31	1,31	1,0	1,72
5	4	5,3	0,0	−1,21	0,00	0,0	1,46
6	5	7,5	1,0	0,99	0,99	1,0	0,98
7	6	9,0	2,0	2,49	4,98	4,0	6,20
8	7	10,8	3,0	4,29	12,87	9,0	18,40
9	8	13,1	4,0	6,59	26,36	16,0	43,43
					$\sum=84{,}60$	$\sum=60{,}00$	$\sum=122{,}22$

Имеем

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_в)(y_i-\bar{Y}_в)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_в)^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y}_в)^2}}=\frac{84{,}60}{\sqrt{60{,}0\cdot 122{,}20}}=0{,}98.$$

Продолжение табл. 14.7

Номер наблюдения	x_i, недели	y_i, кг	x_i^2	$x_i y_i$
5	4	5,3	16	21,2
6	5	7,5	25	37,5
7	6	9,0	36	54,0
8	7	10,8	49	75,6
9	8	13,1	64	104,8
	$\sum x_i = 36,0$	$\sum y_i = 58,6$	$\sum x_i^2 = 204,0$	$\sum x_i y_i = 319,0$

Система уравнений имеет вид

$$204,0a + 36,0b = 319,0,$$
$$36,0a + 9,0b = 58,6,$$

откуда находим: $a = 1,42$, $b = 0,83$, $y = 1,42x + 0,83$.

Определим теперь выборочный коэффициент корреляции. Воспользовавшись формулой (14.4.2а), находим

$$\bar{X}_в = \frac{36}{9} = 4, \quad \bar{Y}_в = \frac{58,6}{9} = 6,51.$$

Составляем вспомогательную таблицу (табл. 14.8)

Таблица 14.8

Как видим, связь между величинами X и Y очень тесная. Коэффициент корреляции близок к 1. ●

§ 14.5. ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

В § 14.2. рассмотрено понятие линейной корреляции. Рассмотрим теперь более сложный случай. Пусть результаты наблюдений над случайными величинами X и Y даны в виде табл. 14.2 или в виде корреляционной таблицы 14.3.

Построим в системе координат Oxy точки $(x_i; y_i)$. Допустим, что все они расположились внутри контура $ACBDA$ (рис. 132). Можно предположить существование линии $M_1M_2M_3...M_n$, по обе стороны которой находятся точки $(x_i; y_i)$. Чтобы определить эту линию, поступим следующим образом. Разобьем разность абсцисс точек A и B на n равных частичных интервалов $(x_i...x_{i+1})$ и через точки деления проведем прямые, параллельные оси Oy. В результате фигура $ACBDA$ разобьется на n полосок.

Вычислим средние значения y_i для всех точек, попавших в i-ю полоску, $i=1, 2, 3, ..., n$, по следующим формулам:

$$\bar{y}_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m_1} y_i}{m_1},\ \ \bar{y}_2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m_2} y_i}{m_2},\ \ \bar{y}_3=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m_3} y_i}{m_3},\ \ ...,\ \ \bar{y}_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m_n} y_i}{m_n},$$

где m_i — число точек, попавших в i-ю полоску.

Далее вычислим абсциссы $x_i^{(1)}$ точек в середине каждого частичного интервала, $x_1=x_A$

$$x_1^{(1)}=\frac{x_1+x_2}{2};\ \ x_2^{(1)}=\frac{x_2+x_3}{2};\ \ x_3^{(1)}=\frac{x_3+x_4}{2};\ \ ...\ \ x_n^{(1)}=\frac{x_n+x_в}{2}.$$

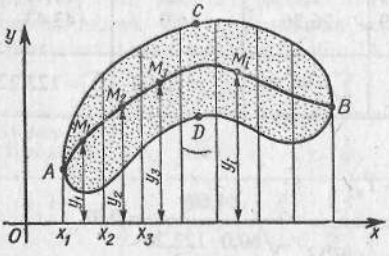


Рис. 132

Получен ряд точек $M_i(x_i^{(1)};\ y_i)$, $i=1,\ 2,\ 3,$ $...,\ n$. Построив точки M_i и соединив их плавной прямой, видим, что все точки $(x_i;\ y_i)$ «тяготеют» к этой линии, называемой линией регрессии. В данном случае имеет место криволинейная корреляция.

В теории криволинейной корреляции решаются те же основные вопросы, что и в случае прямолинейной корреляции (см. § 11.2). Эмпирическую линию регрессии естественно заменить уже не прямой линией, а, например, параболой второй или третьей степени, т. е. предположить, что уравнение теоретической линии регрессии Y на X имеет вид

$$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c, \tag{14.5.1}$$

или

$$\bar{y}_x = ax^3 + bx^2 + cx + d. \tag{14.5.2}$$

Возможны и другие типы уравнений, например $\bar{y}_x = a/x$, или $\bar{y}_x = A\mathrm{e}^{bx}$, где a, A, b — постоянные, подлежащие определению.

Итак, пусть по форме эмпирической линии регрессии, учитывая особенности изучаемого процесса, мы решили, что зависимость между случайными величинами X и Y имеет вид $\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$. Из этого равенства следует, что

$$\bar{y}_x - (ax^2 + bx + c) = 0. \tag{14.5.3}$$

Но в результате подстановки в (14.5.3) вместо x и $\bar{y}_x$ результатов наблюдений (x_i, y_i), мы получим не ноль, а некоторое число v_i, т. е. имеет место отклонение.

Коэффициенты a, b, c находят при условии, состоящем в том, чтобы сумма квадратов отклонений v_i, вычисляемых по формуле

$$v_1 = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

была минимальной. С этой целью составляется функция

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right)^2.$$

Исследуя эту функцию на экстремум, подобно тому, как это было сделано в § 14.2 по отношению к линейной функции, получают систему

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{14.5.4}$$

Результаты наблюдений (x_i, y_i) подставляют в эту систему и, решая ее, получают искомые коэффициенты a, b, c. Теснота или сила зависимости между величинами X и Y в случае криволинейной корреляции определяется выборочным корреляционным отношением η_{yx}, который всегда берется со знаком «+».

$$\eta_{yx}=\sqrt{1-\frac{\sigma_v^2}{\sigma_y^2}}, \qquad (14.5.5)$$

где η_{yx} — оценка корреляционного отношения для всей исследуемой совокупности

$$\sigma_v^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n},\quad \sigma_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}_в)^2}{n},\quad \bar{y}_в=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

§ 14.6. МНОЖЕСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Предположим, что нужно установить зависимость между массой животного Z, количеством скармливаемых ему грубых кормов X и концентратов Y. Зависимость между этими величинами подтверждает тот факт, что процессы изменения массы животного и потребление кормов протекают во времени, кроме того, опытные данные свидетельствуют, что между X, Y и Z существует определенная связь. В результате наблюдений получена таблица (табл. 14.9).

Таблица 14.9

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_n
z_i	z_1	z_2	z_3	...	z_n

Корреляционную зависимость между этими значениями признаков называют *множественной корреляцией*.

Рассмотрим простейший случай, когда по существу изучаемого явления можно считать с достаточно большой вероятностью, что между X, Y и Z имеется линейная зависимость, которую можно представить уравнением

$$Z=aX+bY+c. \qquad (14.6.1)$$

В этом случае нужно решить следующие задачи:

1) по данным таблицы найти коэффициенты a, b и c так, чтобы функция (14.6.1) наилучшим образом отражала важнейшие свойства изучаемого явления;

2) выразить в виде числа меру или тесноту зависимости между значениями признаков X, Y, Z;

3) выразить в виде числа меру или тесноту связи между Z и X при фиксированном Y, между Z и Y при фиксированном X.

Коэффициенты a, b, c находят с помощью способа наименьших квадратов. Для этого вычисляют отклонения:

$$v_1 = Z_1 - (ax_1 + by_1 + c),$$
$$v_2 = Z_2 - (ax_2 + by_2 + c),$$
$$v_3 = Z_3 - (ax_3 + by_3 + c),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v_n = Z_n - (ax_n + by_n + c).$$

Рассмотрим сумму квадратов отклонения $\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - (ax_i + by_i + c))^2$, зависящую от a, b и c и поэтому являющуюся их функцией, т. е.

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - (ax_i + by_i + c))^2.$$

Найдем также значения a, b, c, при которых $F(a, b, c) = \min$. Как известно, для этого необходимо найти частные производные по аргументам a, b, c. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{n} (Z_i - (ax_i + by_i + c))(-x_i),$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{n} (Z_i - (ax_i + by_i + c))(-y_i),$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^{n} (Z_i - (ax_i + by_i + c))(-1).$$

Приравнивая частные производные нулю и перегруппировав слагаемые, мы приходим к системе из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2+b\sum_{i=1}^{n} x_iy_i+c\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} x_iz_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_iy_i+b\sum_{i=1}^{n} y_i^2+c\sum_{i=1}^{n} y_i=\sum_{i=1}^{n} y_iz_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i+b\sum_{i=1}^{n} y_i+nc=\sum_{i=1}^{n} z_i. \end{cases} \qquad (14.6.2)$$

Можно доказать, что числа a, b, c, найденные из системы (14.6.2), доставляют функции $F(a, b, c)=\sum_{i=1}^{n} v_i$ минимум.

Часто уравнение связи между x, y и z записывают в виде

$$Z-\bar{Z}_{\text{в}}=A\left(X-\bar{X}_{\text{в}}\right)+B\left(y-Y_{\text{в}}\right),$$

где $\bar{Z}_{\text{в}}$, $\bar{X}_{\text{в}}$, $Y_{\text{в}}$ — средние значения наблюдаемых признаков; A и B определяют по формулам

$$A=\frac{r_{xz}-r_{yz}r_{xy}}{1-r_{xy}^2}\,\frac{\sigma_z}{\sigma_x}, \qquad (14.6.3)$$

$$B=\frac{r_{yz}-r_{yx}Z_{zx}}{1-r_{xy}^2}\,\frac{\sigma_z}{\sigma_y}. \qquad (14.6.4)$$

Здесь r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} — коэффициенты корреляции соответственно между значениями признаков X и Z, Y и Z, X и Y; σ_x, σ_y, σ_z — средние квадратические отклонения соответствующих признаков.

Мера или теснота связи значений признака Z со значениями признаков X и Y оценивается по формуле

$$R=\sqrt{\frac{r_{xz}^2-2r_{xy}r_{xz}r_{yz}+r_{yz}^2}{1-r_{xy}^2}}, \qquad (14.6.5)$$

где R — полный коэффициент корреляции (в отличие от коэффициентов r_{xy}, r_{xz}, r_{yz}).

Величину R всегда считают положительной, она может принимать значения на множестве $[0, 1]$.

Можно доказать, что теснота связи между Z и X (при фиксированном Y) оценивается частным выборочным коэффициентом корреляции

$$r_{xz(y)}=\frac{r_{xz}-r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{\left(1-r_{xy}^2\right)\left(1-r_{yz}^2\right)}},$$

а теснота связи между Z и Y (при фиксированном X) таким же коэффициентом

$$r_{yz(x)}=\frac{r_{yz}-r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}}.$$

Свойства $r_{xz(y)}$ и $r_{yz(x)}$ аналогичны свойствам выборочного коэффициента корреляции, изложенным в § 14.4.

§ 14.7. ВЫВОДЫ

Переменные величины X и Y могут быть связаны:
а) функциональной зависимостью;
б) статистической зависимостью, в частном случае корреляционной.

Зависимость называется корреляционной, если каждому возможному значению одной величины сопоставляется какая-либо числовая характеристика соответствующего распределения другой.

Таблица с двумя вводами, в которой результаты наблюдений записаны в порядке возрастания с указанием частоты (числа повторений) пар признаков, называется корреляционной.

По данным корреляционной таблицы можно построить эмпирические линии регрессии X на Y и Y на X. Выравнивающая «гладкая» кривая называется теоретической линией регрессии. Наиболее простая — прямая регрессии. В этом случае корреляционную зависимость (корреляцию) называют линейной. Различают прямую и обратную линейную корреляцию. Для определения параметров a и b в уравнении $y=ax+b$ используют метод наименьших квадратов, имеющий строгое математическое обоснование, и приближенные методы: метод средней и метод выбранных точек.

Силу или тесноту линейной корреляционной зависимости определяет выборочный коэффициент корреляции

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_{\text{в}})(y_i-\bar{Y}_{\text{в}})}{\sigma_{\text{в}}(X)\sigma_{\text{в}}(Y)},\quad r\in(-1;\ 1).$$

Если $|r|\approx 1$, то изучаемая связь между величинами очень тесная. Если $r=0$, то между X и Y нет линейной корреляционной зависимости, но возможно, что имеется более сложная зависимость.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте две основные задачи теории корреляции.

2. Какая зависимость между величинами называется корреляционной?

3. В чем состоит различие между функциональной и корреляционной зависимостью?

4. Опишите форму корреляционной таблицы.

5. Что называется эмпирической линией регрессии?

6. Что такое уравнение линии регрессии?

7. В чем состоит сущность метода наименьших квадратов, метода выбранных точек и метода средней для определения параметров линии регрессии.

8. Что называется выборочным коэффициентом корреляции?

9. Сформулируйте свойства выборочного коэффициента корреляции.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Данные о зависимости числа зерен ячменя в колосе от его длины приведены в таблице 14.11.

Таблица 14.11

Длина колоса, см	7	8	9	10	11	12	13	14
Среднее число зерен в колосе	16,0	20,3	23,5	24,5	28,0	29,0	29,5	31,0

Постройте график в виде ломаной. Проведите сглаживающую кривую. Какая функция является в данном случае «подходящей». *Запишите ее уравнение с неизвестными параметрами.*

2. Для повышения урожайности хлопка-сырца внесли на одном поле аммиачную селитру NH_4NO_3, а на другом — сульфат аммония $(NH_4)_2SO_4$. Опытные данные помещены в табл. 14.12.

Таблица 14.12

Количество азота, кг/га	30	40	120	180	240	300
Прирост урожая, ц/га, для аммиачной селитры	3,5	10,3	19,8	22,9	24,0	24,5
Прирост урожая, ц/га, для сульфата аммония	2,3	6,7	12,9	15,5	17,9	15,0

Постройте график. Проанализируйте результаты опытов.

3. Используя метод выбранных точек, постройте зависимость типа $y=ax+b$, если данные наблюдений представлены следующими таблицами:

а)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4,4	5,4	3,9	3,1	5,9

б)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,8	0,3	2,3	3,8	2,8

4. Используя метод * средней, постройте зависимость типа $y=ax+b$, если результаты наблюдений представлены таблицами:

а)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4,6	5,0	4,1	2,1	2,9

б)

x_i	1	2,2	3,0	4,5	5,1	6,0
y_i	0,7	1,6	3,1	3,3	3,5	4,1

5. Найдите уравнение прямой линии регрессии с Y на X и коэффициент корреляции, если результаты наблюдений даны в следующих таблицах:

а)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,2	4,2	2,7	0,7	1,5

б)

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	1,3	2,5	0,8	3,8	1,8	3,6

6. В табл. а) и б) приведены данные по группе хозяйств о дозах внесения удобрений на 1 га посева зерновых (ц) действующего вещества X и об урожайности зерновых культур (ц/га) — Y.

Полагая, что между X и Y существует линейная корреляция, найдите уравнения прямой линии регрессии, коэффициент корреляции и постройте график корреляционной зависимости

а)

x_i	1,0	4,1	3,8	3,9	1,2	3,9	4,1	0,8	0,7	1,3
y_i	23,6	31,9	35,2	36,4	23,6	34,0	38,2	17,3	28,8	19,7

б)

x_i	3,0	1,1	2,9	3,0	0,8	1,5	2,1	3,2	1,2	3,0
y_i	37,6	18,5	29,1	38,5	18,8	20,6	29,6	36,8	15,8	33,4

7. Дана корреляционная таблица, в которой указаны: X — удои от коровы за одну лактацию, Y — содержание жира в молоке. Найдите: а) коэффициент корреляции; б) составьте уравнение прямой линии регрессии Y на X.

Указание. Перейдите к дискретному признаку, затем составьте таблицу в условных значениях признака.

Y \ X	2000...2400	2400...2800	2800...3200	3200...3600	3600...4000	4000...4400	4400...4800	4800...5200	
3,6...3,7		1							1
3,7...3,8	1	2	1						4
3,8...3,9	1	1	3						5
3,9...4,0			5	2	2				9
4,0...4,1		1	1		1	2		1	6
4,1...4,2		1				1	1		3
4,2...4,3				1					1
4,3...4,4					1				1
	2	6	10	3	4	3	1	1	30

$\overline{y}_x = ax + b$ Математическая модель

Метод средней

метод наименьших квадратов

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

метод выбранных точек

Нелинейная

$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$

Выборочное корреляционное отношение

$$K_{xy} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \overline{X}_в)(y_i - \overline{Y}_в)$$

Коэффициент корреляции

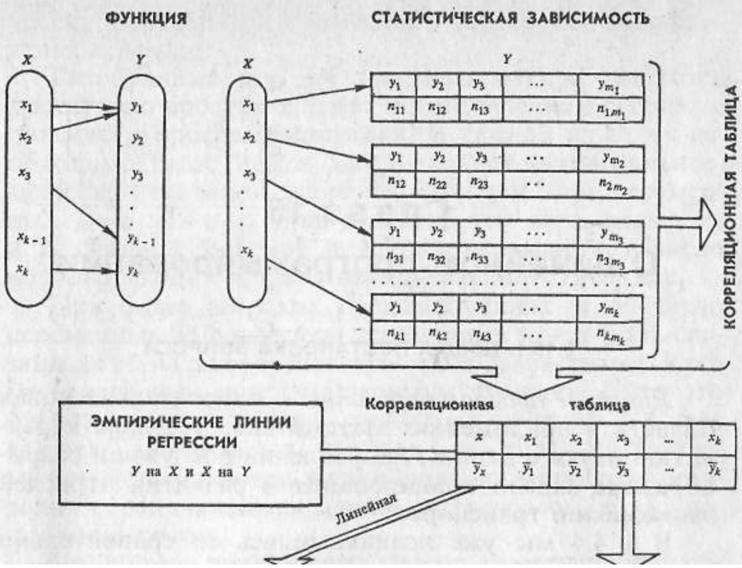
$$r_в = \frac{K_{xy}}{\sigma x \sigma y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X}_в)(y_i - \overline{Y}_в)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X}_в)^2 \sum (y_i - \overline{Y}_в)^2}}$$

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

1. $r_в \in [-1; 1]$

2. $|r_в| = 1 \Leftrightarrow y = f(x)$

3. $r_в = 0 \Leftrightarrow$ линейной зависимости нет


ФУНКЦИЯ
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ
X
Y
КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТАБЛИЦА
Корреляционная таблица
ЭМПИРИЧЕСКИЕ ЛИНИИ РЕГРЕССИИ
Y на X и X на Y
Линейная

Глава 15
О линейном программировании

§ 15.1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Линейное программирование — относительно новая область в приложениях математики. Толчком к развитию науки в данном направлении послужили разнообразные задачи планирования и развития отраслей экономики и транспорта.

В § 4.4 мы уже познакомились со сравнительно простыми задачами нахождения наиболее выгодного варианта решения. В каждой задаче было необходимо найти некоторые величины, связанные определенными соотношениями, при условии получения наилучшего результата, т. е. необходимо было принять оптимальное решение при конкретных условиях производства.

В практической деятельности специалиста понятие «наилучший результат» выражается количественно: минимум затрат на содержание животных, максимум урожая с единицы площади, максимум прибыли от данной отрасли производства и т. д.

Сравнительно недавно, до 30-х годов текущего столетия, методом решения подобных задач был упрощенный перебор наиболее очевидных вариантов, без строгого математического обоснования. Если задачи содержали небольшое число неизвестных, то оптимальное решение, как правило, находилось безошибочно.

С усложнением процессов производства, когда число факторов, влияющих на принятие решения, оказывается большим, простой перебор вариантов приводит к громоздким вычислениям и практическое его выполнение весьма затруднено. Необходимо было разработать единообразный метод, позволяющий унифицировать вычисления, тем более, что к этому побуждали успехи в создании и применении электронно-вычислительных машин.

Разобранные в § 4.4 примеры хотя и являются достаточно простыми, дают представление о сущности линейного программирования. В каждой из задач необходимо было найти максимальное (минимальное) значение некоторой линейной функции двух переменных $L=a_1x_1+a_2x_2$ при условии, что переменные x_1 и x_2 связаны системой линейных неравенств, в число которых входят условия неотрицательности x_1 и x_2.

При более широких предположениях (т. е. число переменных больше двух) переменные могут быть связаны не только неравенствами, но и равенствами. Кроме этого, если ищется максимум функции L, то это равнозначно отысканию минимума функции $-L$, так как нетрудно доказать, что $\max L=-\min(-L)$. Поэтому при формулировке задачи линейного программирования ограничиваются одним экстремумом, в частности минимумом.

Продолжая обобщение, можно отметить, что общим для задач линейного программирования является нахождение значений нескольких переменных (независимых), при этом необходимо, чтобы:

а) эти значения были неотрицательны;

б) найденные значения неизвестных должны удовлетворять некоторой системе линейных неравенств или линейных уравнений;

в) при всех значениях переменных заданная линейная функция достигает минимума.

В некоторых задачах на искомые переменные накладывается условие их целочисленности. Решением задачи являются некоторые числа, поэтому от системы ограничений в виде линейных неравенств переходят к ограничениям в виде системы линейных уравнений.

Линейное программирование — это математическая дисциплина, изучающая методы нахождения минимума линейной функции конечного числа переменных при условии, что переменные удовлетворяют конечному числу дополнительных условий (ограничений), имеющих вид линейных уравнений или линейных неравенств.

На языке математики эта формулировка выглядит следующим образом.

Требуется найти значения действительных переменных, для которых линейная функция

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n + b \qquad (15.1.1)$$

принимает минимальное значение при условии, что x_1, x_2, x_3, ..., x_n *связаны соотношениями*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (15.1.2)$$

или

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \lesseqgtr b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \lesseqgtr b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \lesseqgtr b_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \lesseqgtr b_n. \end{cases} \qquad (15.1.2')$$

Так как задача линейного программирования является прикладной, то на переменные x_1, x_2, x_3, ..., x_n наωкладываются условия

$$x_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \qquad (15.1.3)$$

Соотношения (15.1.2), (15.1.2′) и (15.1.3) называются *ограничениями данной задачи линейного программирования* (ЗЛП). Линейная функция L называется *целевой функцией.*

Покажем, как от ограничений в виде неравенств можно перейти к эквивалентной системе ограничений в виде уравнений. Рассмотрим одно из неравенств (15.1.2′):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i, \ i = 1, 2, 3, \ldots, m. \qquad (15.1.4)$$

Введем дополнительную переменную x_{n+1}, определив ее равенством

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b, \ i = 1, 2, 3, \ldots, m. \qquad (15.1.5)$$

Из (15.1.4) и (15.1.5) следует, что $x_{n+1} \geqslant 0$. В целевую функцию переменная x_{n+1} входит с коэффициентом 0. Вводя для каждого неравенства (15.1.2') дополнительную переменную с условием, чтобы все они были неотрицательны, мы придем к *каноническому* виду задачи линейного программирования, но с большим числом переменных, подлежащих определению.

Покажем на простом примере, как эта задача приводится к каноническому виду. Пусть задана система ограничений в виде трех нестрогих неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \leqslant b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 \geqslant b_3 \end{cases} \tag{15.1.6}$$

и целевая функция $L=c_1x_1+c_2x_2$.

Введем три дополнительных неотрицательных переменных x_3, x_4, x_5, в результате чего ограничения (15.1.6) примут вид уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2-x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+x_4=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2-x_5=b_3. \end{cases} \tag{15.1.7}$$

Целевая функция остается прежней:

$$L=c_1x_1+c_2x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5=c_1x_1+c_2x_2.$$

В простейших случаях задачу линейного программирования, как показано в § 4.3, можно решить графически, не переходя от ограничений-неравенств к ограничениям-уравнениям. Более того, и при большем числе переменных задача линейного программирования, как это показывается в подробных курсах линейного программирования [21], может быть сформулирована так, что все ограничения будут иметь вид неравенств.

Приведем несколько определений новых терминов.

1. *Любое решение системы ограничений* (15.1.2) *и* (15.1.3) *называется допустимым.*

2. *Допустимое решение, при котором целевая функция достигает минимума, называется оптимальным.*

Задача линейного программирования может не иметь оптимального решения. Однако если решение существует, то оно не обязательно единственно: возможны случаи, когда задача линейного программирования имеет бесчисленное множество оптимальных решений.

§ 15.2. ПОНЯТИЕ О СИМПЛЕКС-МЕТОДЕ

Познакомимся с наиболее употребительным общим методом решения задачи линейного программирования — *симплекс-методом*. Заметим, что применительно к конкретным задачам разработаны модификации симплекс-метода.

Пусть задача приведена к каноническому виду: ограничения заданы в виде системы m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ и известна целевая функция L. Требуется найти оптимальное решение.

Приступая к решению согласно симплекс-методу, необходимо прежде всего привести систему m уравнений к такому виду, в котором несколько неизвестных, например $r\,(r<m)$, были бы выражены через остальные. Положим для определенности $n=5$; неизвестные x_1, x_2, x_3 пусть будут выражены через x_4 и x_5, т. е. система ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4+a_{25}x_5=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4+a_{35}x_5=b_3, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{51}x_1+a_{52}x_2+a_{53}x_3+a_{54}x_4+a_{55}x_5=b_5 \end{cases} \tag{15.2.1}$$

приведена к виду

$$\begin{cases} x_1=\alpha+\alpha_4x_4+\alpha_5x_5, \\ x_2=\beta+\beta_4x_4+\beta_5x_5, \\ x_3=\gamma+\gamma_4x_4+\gamma_5x_5, \end{cases} \tag{15.2.2}$$

где α, β, γ — свободные члены. Подчеркнем, что α, β, γ обязательно должны быть неотрицательны, т. е.

$$\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,\ \gamma\geqslant 0. \tag{15.2.3}$$

Вопрос, всегда ли можно выполнить такое преобразовае, т. е. перейти от системы (15.2.1) к системе (15.2.2), и как это сделать, рассматривается в полных руководствах по линейному программированию [21, 22]. Можно показать, что любая задача линейного программирования с системой ограничений, имеющей допустимое решение, приводится к виду (15.2.2), n — любое.

Неизвестных x_1, x_2, x_3, находящиеся в левых частях системы (15.2.2), называются *базисными*. Остальные неизвестные называются *свободными* или *небазисными* Набор чисел (x_1, x_2, x_3) называется *базисом*. Базис будем обозначать буквой B. Подставим теперь в целевую функцию вместо базисных неизвестных свободные:

$$L = c + c_4 x_4 + c_5 x_5.$$

Выполнение условий (15.2.2) и (15.2.3) означает, что задача линейного программирования приведена к каноническому виду.

Найдем первое базисное решение. Учитывая, что x_4 и x_5 — свободные неизвестные, положим сначала $x_4 = 0$ и $x_5 = 0$. Тогда из (15.2.2) базисные неизвестные равны $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$, а полученное таким путем решение $(\alpha, \beta, \gamma, 0, 0)$ удовлетворяет (15.2.2) и (15.2.3) и, следовательно, является базисным. Оптимальное оно или нет, этого сказать нельзя. Линейная функция в базисе B — это

$$L_B = c.$$

Дальнейшее решение состоит из ряда шагов. Первый шаг — переход от базиса B к базису B_1, при котором L_{B_1} меньше L_B, или по крайней мере не больше L_B.

Для нахождения нового базиса B_1 необходимо в базисе B заменить одно неизвестное свободным (прежним небазисным) неизвестным. При этом система (15.2.2) принимает другой вид. Положив новые небазисные неизвестные равными нулю, подсчитываем целевую функцию.

Проделав k таких шагов, мы найдем базис B_k, для которого L_{B_k} будет иметь минимум, а соответствующее базисное решение является оптимальным.

Для иллюстрации симплекс-метода приведем **пример**.

Пусть система ограничений и целевая функция приведены к виду

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5; \end{cases} \tag{15.2.4}$$

$$L = x_4 - x_5. \tag{15.2.5}$$

§ 15.2. ПОНЯТИЕ О СИМПЛЕКС-МЕТОДЕ

Познакомимся с наиболее употребительным общим методом решения задачи линейного программирования — *симплекс-методом*. Заметим, что применительно к конкретным задачам разработаны модификации симплекс-метода.

Пусть задача приведена к каноническому виду: ограничения заданы в виде системы m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ и известна целевая функция L. Требуется найти оптимальное решение.

Приступая к решению согласно симплекс-методу, необходимо прежде всего привести систему m уравнений к такому виду, в котором несколько неизвестных, например $r\,(r<m)$, были бы выражены через остальные. Положим для определенности $n=5$; неизвестные x_1, x_2, x_3 пусть будут выражены через x_4 и x_5, т. е. система ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4+a_{25}x_5=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4+a_{35}x_5=b_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{51}x_1+a_{52}x_2+a_{53}x_3+a_{54}x_4+a_{55}x_5=b_5 \end{cases} \qquad (15.2.1)$$

приведена к виду

$$\begin{cases} x_1=\alpha+\alpha_4x_4+\alpha_5x_5, \\ x_2=\beta+\beta_4x_4+\beta_5x_5, \\ x_3=\gamma+\gamma_4x_4+\gamma_5x_5, \end{cases} \qquad (15.2.2)$$

где α, β, γ — свободные члены. Подчеркнем, что α, β, γ обязательно должны быть неотрицательны, т. е.

$$\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,\ \gamma\geqslant 0. \qquad (15.2.3)$$

Вопрос, всегда ли можно выполнить такое преобразовае, т. е. перейти от системы (15.2.1) к системе (15.2.2), и как это сделать, рассматривается в полных руководствах по линейному программированию [21, 22]. Можно показать, что любая задача линейного программирования с системой ограничений, имеющей допустимое решение, приводится к виду (15.2.2), n — любое.

Неизвестных x_1, x_2, x_3, находящиеся в левых частях системы (15.2.2), называются *базисными*. Остальные неизвестные называются *свободными* или *небазисными* Набор чисел (x_1, x_2, x_3) называется *базисом*. Базис будем обозначать буквой B. Подставим теперь в целевую функцию вместо базисных неизвестных свободные:

$$L = c + c_4 x_4 + c_5 x_5.$$

Выполнение условий (15.2.2) и (15.2.3) означает, что задача линейного программирования приведена к каноническому виду.

Найдем первое базисное решение. Учитывая, что x_4 и x_5 — свободные неизвестные, положим сначала $x_4 = 0$ и $x_5 = 0$. Тогда из (15.2.2) базисные неизвестные равны $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$, а полученное таким путем решение (α, β, γ, 0, 0) удовлетворяет (15.2.2) и (15.2.3) и, следовательно, является базисным. Оптимальное оно или нет, этого сказать нельзя. Линейная функция в базисе B — это

$$L_B = c.$$

Дальнейшее решение состоит из ряда шагов. Первый шаг — переход от базиса B к базису B_1, при котором L_{B_1} меньше L_B, или по крайней мере не больше L_B.

Для нахождения нового базиса B_1 необходимо в базисе B заменить одно неизвестное свободным (прежним небазисным) неизвестным. При этом система (15.2.2) принимает другой вид. Положив новые небазисные неизвестные равными нулю, подсчитываем целевую функцию.

Проделав k таких шагов, мы найдем базис B_k, для которого L_{B_k} будет иметь минимум, а соответствующее базисное решение является оптимальным.

Для иллюстрации симплекс-метода приведем **пример**.

Пусть система ограничений и целевая функция приведены к виду

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5; \end{cases} \qquad (15.2.4)$$

$$L = x_4 - x_5. \qquad (15.2.5)$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 образуют базис B; базисное решение есть набор чисел (1, 2, 3, 0, 0). Проверим, является ли это решение оптимальным. Уменьшить значение L можно путем увеличения x_5 (x_5 входит с отрицательным коэффициентом). Но увеличивать необходимо так, чтобы ни одно из базисных неизвестных не стало отрицательным. Увеличение x_5 не повлияет на x_1, а из второго уравнения мы видим, что x_5 не может быть больше двух.

Тогда $x_1=5$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=2$.

Это новое базисное решение, при этом

$$L=0-2=-2.$$

Новый базис теперь состоит из x_1, x_5 и x_3, небазисными неизвестными стали x_2 и x_4.

Из второго уравнения (15.2.4) находим

$$x_5=2-x_2+2x_4.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1=1-x_4+2(2-x_2+2x_4), \\ x_3=3-3x_4-(2+2x_4-x_2), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1=5-2x_2+3x_4, \\ x_3=1+x_2-5x_4, \\ x_5=2-x_2+2x_4; \end{cases} \qquad (15.2.6)$$

$$L=-2+x_2-x_4. \qquad (15.2.7)$$

Первый шаг симплекс-метода завершен: $B_1=(5, 0, 1, 0, 2)$, $L=-2$.

Посмотрим теперь, нельзя ли еще уменьшить значение L. Из (15.2.7) следует, что коэффициент при x_4 отрицателен, поэтому можно увеличить x_4 до $\frac{1}{5}$; при этом окажется, что $x_1>0$, $x_5>0$, $x_3=0$.

Положив $x_4=\frac{1}{5}$, получим $x_1=\frac{28}{5}$, $x_3=0$, $x_5=\frac{12}{5}$. Новое допустимое решение равно $(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5})$, новый базис B_2 состоит из x_1, x_4 и x_5, а x_2 и x_3 — свободные неизвестные.

Выразим теперь ограничения в новом базисе:

$$\begin{cases} x_1=\frac{28}{5}-\frac{7}{5}x_2+\frac{3}{5}x_3, \\ x_4=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}x_2-\frac{1}{5}x_3, \\ x_5=\frac{12}{5}-\frac{3}{5}x_2-\frac{2}{5}x_3; \end{cases} \tag{15.2.8}$$

$$L=-\frac{11}{5}+\frac{4}{5}x_2+\frac{1}{5}x_3. \tag{15.2.9}$$

В базисе B_2 имеем $L=-\frac{11}{5}$.

Второй шаг симплекс-метода закончен. В (15.2.9) x_2 и x_3 входят с положительными коэффициентами. Поэтому дальнейшие преобразования не приведут к уменьшению целевой функции. Отсюда следует, что базисное решение $(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{15}{5})$ является оптимальным,

$$L_{\min}=-\frac{11}{5}.$$

Рассмотрим пример задачи линейного программирования, не имеющей решения. Пусть базис образован неизвестными x_3 и x_4, а система ограничений и целевая функция имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x_3=4+2x_1-2x_2, \\ x_4=8-x_1+4x_2; \end{cases} \tag{15.2.10}$$

$$L=-x_1-2x_2.$$

Здесь базисное решение таково:

$$B_1=(0,\ 0,\ 4,\ 8),\ \text{а}\ L_{B_1}=0.$$

Коэффициент при x_1 в выражении для L отрицателен. Попытаемся увеличить x_1, не меняя x_2. Судя по первому из уравнений (15.2.10), x_1 можно увеличивать неограниченно: из второго уравнения следует, что x_1 можно принять равным 8. При этом $x_3=20$, $x_4=0$. Новое допустимое решение имеет вид

$$B_2=(8,\ 0,\ 20,\ 0),\ \text{а}\ L_{B_2}=-8.$$

Теперь за новый базис следует принять x_1 и x_3. Найдем из второго уравнения (15.2.10) x_1 и подставим его в первое и в выражение для функции L:

$$\begin{cases} x_1 = 8 + 4x_2 - x_4, \\ x_3 = 20 + 8x_2 - 2x_4; \end{cases} \qquad (15.2.11)$$

$$L = -8 - 5x_2 + x_4. \qquad (15.2.12)$$

В выражении (15.2.12) коэффициент при x_2 меньше нуля. Определим, до каких пределов можно уменьшить x_2 при условии, что $x_4 = 0$. В обоих уравнениях (15.2.11) коэффициенты при x_2 положительны, т. е. их можно сделать как угодно большими, не опасаясь, что x_1 и x_3 станут отрицательными.

Функция L будет принимать отрицательные значения и при $x_2 \to \infty$. Получится, что $L \to -\infty$. Поэтому $L_{\min} = -\infty$, и, таким образом, оптимального решения не существует.

Итак, поиск оптимального решения, проиллюстрированный на примерах, в случае большого числа неизвестных обычно осуществляется с помощью специальных симплекс-таблиц [21].

В математическое обеспечение включаются стандартные программы для использования симплекс-метода.

Ответы к задачам и упражнениям

Глава 1

1. $A_1(-3;\ 0)$; $B_1(0;\ 4)$; $C_1(2;\ -3)$; $D_1(4;\ 3)$.

2. $A(0;\ 10)$, $B(30;\ 10)$, $C(30;\ -10)$; $D(0;\ -10)$, или $A(0;\ 10)$; $B_1(-30;\ 10)$; $D(0;\ -10)$; $C_1(-30;\ -10)$. **3.** $p=10+5\sqrt{2}$. **4.** $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}=-2$; $\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{AB}=-4$; $|AB|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. **5.** $\angle A=\pi/2$, $\angle B=\pi/4$; $\angle C=\pi/4$. **6.** $\sqrt{13}$; $\sqrt{10}$; 1. **7.** $\overrightarrow{M_1M_2}=(1;\ 1)$; $\overrightarrow{M_2M_4}(1;\ 1)$; $\overrightarrow{M_1M_3}=(-1;\ -5)$; $\overrightarrow{M_4M_3}=(-3;\ -7)$; **9.** $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{11}{4}$. **10.** $3x+4y+5z-26=0$. **11.** $A=\overline{F}\overline{S}=16$. **12.** 19. **13.** $mg\dfrac{6}{\sqrt{37}}$. **14.** $|v|=\sqrt{13}$ м/с; $|\vec{s}|=\sqrt{1300}$ м.

Глава 2

1. $x+3y+11=0$. **2.** $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. **3.** $\vec{N}_1=(2;\ 0)$; $\vec{N}_2=(0;\ -3)$, $\vec{N}_3=(6;\ -1)$, $k_1=\infty$, $k_2=0$, $k_3=\dfrac{1}{6}$, $k_4=6$. **4.** $y=-\dfrac{3}{2}x$. **5.** $y=\dfrac{2}{3}x-2$; $y=-\dfrac{2}{3}x$; $y=-3$, $k=0$; $y=-\dfrac{3}{4}x+3$. **6.** $y=2-x$. **7.** $x-y+2=0$. **8.** $A(3;\ -1)$; $B(3;\ 3)$; $C(-9/5;\ 3/5)$;
$\begin{cases} x+3y>0, \\ x<3, \\ x-2y+3>0. \end{cases}$ **10.** $B(0;\ 4)$; $y=-\dfrac{2}{3}x+4$. **13.** $225x-y=0$. **14.** $55x+7y-8800=0$. **15.** $y=\dfrac{3}{4}x+225$; 225. **16.** $y=1{,}7x+12$. **18.** $x=400$ км, наиболее экономичный вариант соответствует линии $y=\begin{cases} 50x+150 & \text{при } 0<x\leqslant 4, \\ 25x+250 & \text{при } 4<x<+\infty. \end{cases}$

Глава 3

1. $x^2+y^2=16$; $x^2+(y-4)^2=16$. **2.** $(x-2)^2+(y-1)^2=13$. **3.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; $F_1(4;\ 0)$, $F_2(-4;\ 0)$. **4.** а) эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; б) гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. в) парабола $y^2=6x$; г) гипербола равносторонняя; д) эллипс $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{20}=1$; е) парабола $x^2=-\frac{y}{2}$; ж) гипербола $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$; и) гипербола равносторонняя $xy=-\frac{2}{3}$. **5.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{1}=1$ — эллипс. **6.** $M_1(3;\ 3)$; $M_2(3;\ -3)$. **7.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. **8.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$. **9.** $y=-\frac{12}{x}$ или $xy=-12$. **12.** 7 лет. **14.** Быстрее растет клевер. **15.** 1) 104,76; 2) 4,4%.

Глава 4

2. а) $3x+2z-1=0$; б) $3x-2y+4z+10=0$. **3.** $3x+z=0$. **4.** 1) 7; 2) 2/3. **8.** Хозяйству необходимо приобрести 43,25 т карбомина. Линейная форма $L=20{,}125$ т. **9.** Суточный рацион составляет 9,23 кг грубых кормов и 11,58 кг концентратов. Линейная форма $L=1{,}52$ руб.

Глава 5

1. $\mathbf{Q}$ — множества животных дойного стада коров; A_1 — множество животных первотелок $\bigcup A_2$ множество животных с двумя отелами и т. д.; B_1 — множество животных, удой которых менее 3000 л, $\bigcup B_2$ — множество животных с удоем более 3000 кг, $A_1\subset\mathbf{Q}$, $A_2\subset\mathbf{Q}$, $A_1\bigcup A_2\subset\mathbf{Q}$. **3.** $\mathbf{Q}$ — множество работников молочного комплекса; A_1 — множество доярок $\bigcup A_2$ — множество административно-хозяйственных работников, $\mathbf{Q}=A_1\bigcup A_2$. **4.** $f(2)=3$; $f(0)=-5$; $f(-1)=-9$. **5.** 1) $f(-2)=14$; 2) $f(5)=77$; 3) $f(a-1)=3(a-1)^3+2$; 4) $f(2a)=12a^2+2$; 5) $f(x+\Delta x)=3(x+\Delta x)^2+2$. **6.** $f(-3)=154$; $f(3)=154$; функция четная. **8.** $x_1=3$; $x_2=2$. **9.** 1) $x\neq1$; 2) $|x|\neq1$; 3) $x\geqslant1$; 4) $x\leqslant1$; 5) $x=1$; 6) $(-\infty;\ +\infty)$; 7) $[-1;\ 1]$. **10.** 1) $y=\sqrt{u}$, $u=x^2-1$; 2) $y=\sin u$, $y=2x$; 3) $y=e^u$, $u=x^2$; 4) $y=\lg v$, $v=\cos u$, $u=2x$. **11.** 1) нет; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да. **13.** $p(t=0)=1000$. **14.** $y(v)=1002^v$; $y(1)=200$ мг; $y(2)=400$ мг. **15.** $k=0{,}24e^{-0{,}061t}$

Для построения графика составляется таблица

	t	$-0{,}061t$	$e^{-0{,}061t}$	k
1	0	0	1,000	0,240
2	1	$-0{,}061$	0,940	0,225
3	2	$-0{,}122$	0,855	0,212
4	3	$-0{,}183$	0,833	0,200
5	10	$-0{,}610$	0,543	0,130
6	24	$-1{,}464$	0,231	0,055

16. $B=15{,}4e^{-0{,}225t}$. **17.** $x(1)=1250$; $x(2)=1375$; $x(3)=1478$.

Глава 6

1. $\{x_n\}=\left\{1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16}\right\}$; $\{x_n\}=\left\{1,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7}\right\}$; $\{x_n\}=\{1,\ 4,\ 9,\ 16\}$; $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{4},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{13}\right\}$. **4.** а) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}\right\}$; 1; б) $\{x_n\}=\left\{2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4}\right\}$; 1; в) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5}\right\}$, нет; г) $\{x_n\}=\left\{\frac{2}{1},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{10}\right\}$; 0; д) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5}\right\}$, нет; г) $\{x_n\}=\left\{\frac{2}{1},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{10}\right\}$; 0; д) $\{x_n\}=\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2\}$; ∞. **5.** а) 15; б) $\frac{26}{103}$; в) 0; г) ∞; д) 2; е) $\frac{2}{5}$; ж) $\frac{2}{3}$; з) 3. **6.** а) e^a; б) 2; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{e}$; д) $\frac{1}{e}$; е) $\frac{1}{8}$; ж) e^2. **7.** При $x=2$ функция непрерывна; при $x=1$ — точка разрыва II рода, $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{2x}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{2x}{x-1}=+\infty$. **8.** а) $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{4}{x-2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{4}{x-2}=+\infty$; б) $\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)=2$, скачок $|2-0|=2$. **9.** $\lg N=2{,}7129\cdot 0{,}4343$, $N=15{,}07$. **10.** 1500. **11.** а) 100; 200; б) 100; 200; в) ∞, 90; г) ∞; 10; **12.** 10000. **13.** 10.

Глава 7

1. 1) 6; 2) 24; 3) 6; 4) 0; в точке $x=-2$. **2.** $\pi/4$. **3.** $y=-5x-3$. **4.** а) 0; б) a. в) $5x^4$; г) $2x^n$; д) $6x^2-3$; е) $3t^3+t+2$; ж) $-x^2+3x-2$; $f'(3)=-2$. **6.** (1; 2). **7.** 0,423 кг.

8. а) $4(x+2)^3$; б) $10x(x^2-5)^4$; в) $(6x-6)(x^2-2x)^2$; г) $\frac{2-2x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$; д) $4(t^2-t+1)^3(2t-1)$; е) $20(3u^2-u+4)^3(6u-1)$; ж) $-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$; з) $\frac{5x^2+2x-3}{2\sqrt{x-1}}$; и) $\frac{-60x^2}{(5x-4)^4}$; к) $1-2\cos 2x$; л) $-\frac{1}{2}\sin 2x$; м) $\sin x\cos x$; **9.** $P+a$; **10.** $x'_t=e^{-t^2/2}(1-t^2)$; $x''=t\,e^{-t^2/2}(t^2-3)$. **11.** $-Ak\,e^{-kt}$. **12.** а) 20; б) 0; в) $\sqrt{2}$; г) $-\frac{-\pi\sqrt{3}}{2}$. **13.** $v=t^2-4t+3$; $a=2t-4$; при $t=1$, $t=3$ тело меняет направление движения. **14.** $v=k(A-x)$. **15.** 1) $22\,m$; 2) $-2\sqrt{2}m$; 3) $4m$. **17.** $x=1$ функция возрастает, при $x=-1$ функция убывает. **19.** 1) $y_{\min}=-1$ при $x=1$; 2) $y_{\max}=4$ при $x=2$; 3) $x=-\frac{3}{4}$, $y_{\min}=\frac{23}{8}$; 4) $x=1$, $y_{\max}=\frac{4}{3}$; $x=3$, $y_{\min}=-1$; 5) $x=-1$, $y_{\min}=-\frac{1}{2}$; $x=1$, $y_{\max}=\frac{1}{2}$. 20) $200t$. **21.** а) 1,005 г; б) 1,01 г. **22.** 7,84 л. **23.** 10,8. **24.** $\sim 157{,}1$ ц. **25.** $4\times4\times2$. **26.** При $x=50$, $y_{\max}=2{,}5$; $x=100$, $y_{\min}=0$. **27.** $x=5{,}79$ млн.

Глава 8

1. 1) 2,5; 2) 2. **2.** 1) вся плоскость Oxy; 2) вся плоскость Oxy, кроме точки (0; 0); 3) вся плоскость Oxy. **3.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x\,e^{xy}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=x/\sqrt{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=y/\sqrt{x^2+y^2}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=y(y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2$; 5) $z'_x=-2{,}93$; $z'_y=6-57{,}8y$; 6) $z'_x=12xy-8y^5-18$, $z'_y=6x^2-40xy^4+11$; 7) $z'_x=4$; $z'_y=5$; 8) $z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$; 9) $z'_x=1$; $z'_y=0$. **4.** 5,5 т. **5.** Куб, ребро $\frac{l}{\sqrt{3}}$. **6.** $R=2$ м, $H=2$ м.

Глава 9

1. $y=\frac{x^2}{2}-4x+10$. **2.** $y=3\sin x-2\cos x+6$. **3.** $y=2\ln|x|-x+7$. **4.** $s=\frac{4}{3}t^3+t+21$. **5.** $y=4-\frac{1}{x}$.

6. 1) $\frac{1}{18}(3x-5)^6+C$; 2) $\frac{1}{3}\sin 3x+C$; 3) $\frac{1}{b(m+1)}(a+bx)^{m+1}+$ $+C$; 4) $\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}+C$; 5) $-\frac{1}{8(4x+1)^2}+C$; 6) $-\sqrt[3]{2-3x}$; 7) $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$; 8) $-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 4x+C$; 9) $3\sin(\varphi/3-4)+$ $+C$; 10) $\frac{A}{k}\sin kt+C$; 11) $\frac{1}{2}e^{2x}+C$; 12) $C-\frac{1}{4}e^{-4x}$; 13) $-\frac{1}{2e^{x^2}}$; 14) $\sqrt{1+t^2}+C$; 15) $\frac{1}{24}\sqrt{6x^4-11}$; 16) $\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}+C$; 20) $\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+1|+C$; 21) $-2\sqrt{1-x^2}-3\arcsin x+C$. **7.** 1) 2; 2) 9; 3) 0; 4) 12; 5) $e(2e-1)$; 6) 1; 7) 0; 8) $\frac{16}{3}$; 9) $\frac{2}{3}$. **8.** 1) $\frac{35}{6}$; 2) $\frac{32}{3}$. **9.** πab. **10.** $S=\frac{3400}{35}$ га; 5828,57; 11,66 т минеральных удобрений. **11.** 1) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{5}$; 2) 8π; 3) $\frac{128}{7}\pi$. **12.** 3,35 т. **13.** ≈ 2 рейса. **14.** 20 т. **15.** 30 Дж. **16.** 70,8 Дж.

Глава 10

1. $y=\frac{x^2-1}{2}$. **2.** $s=2t^2-3t$. **3.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=\frac{3}{2}$. **4.** $y=$ $=\pm\sqrt{\frac{1}{3}(3-2x^3)}$. **5.** $\cos y=\cos x$. **6.** 48,86 мин. 5,2 г. **7.** 5,2 г. **8.** 126 мин. **9.** $m_0=56{,}49$ г; 7,84 часа. **10.** 5,83 ч. **11.** $l=l_0 e^{(\alpha-\beta)t}$. **12.** $x=x_0(1-e^{-\beta t})$.

Глава 11

1. $\frac{1}{50}$. **2.** 52 или 53. **3.** 400. **4.** 200. **5.** 0,945 и 0,965; 94,5% и 96,5%. **6.** 0,55. **7.** 0,35. **8.** $P(A)=0{,}68$; $P(B)=0{,}29$; $P(C)=0{,}03$. **9.** 10. **10.** а) $\frac{1}{20!}$; б) 0. **11.** $\frac{1}{120}\approx 0{,}0083$. **12.** $P(A)=$ $=0{,}5625$; $P(B)=0{,}3750$, $P(C)=0{,}0625$; $P(D)=0{,}9375$. **13.** $n=5$. **14.** а) $\approx 0{,}23$; б) $\approx 0{,}94$. **15.** $P(A)=\frac{1}{6}$; $P(B)=\frac{1}{2}$; $P(C)=\frac{3}{10}$; $P(D)=\frac{1}{30}$. **16.** $P=\frac{1}{25}\,\frac{1}{24}\,\frac{1}{23}$. **17.** 1) 0,25; 2) 0,273. **18.** 0,720. **19.** 1) $\frac{1}{55}$; 2) $\frac{14}{55}$; 3) $\frac{12}{55}$. **20.** 1) 0,48; 2) 0,44; 3) 0,08. **21.** 1) 0,336; 2) 0,452; 3) 0,188; 4) 0,024. **22.** а) 0,81; б) $0{,}81^6$. **23.** а) $0{,}98^5$;

б) $0{,}02^6$; в) $C_6^5\,0{,}98^5 \cdot 0{,}2$. **24.** а) 0,358; б) 0,116; в) 0,945. **25.** 0,875. **26.** 0,88. **27.** 1) 0,775; 2) 0,483; 0,516. **28.** а) 0,7; б) 0,226. **29.** 0,790. **30.** 0,021. **31.** 0,113; 0,273; 0,614.

Глава 12

1.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

2. а) 0,15625; б) 0.3125.

3. а)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,368	0,368	0,184	0,061	0,015

б) ни одного или 1 зерно. **4.** 4.2. **5.** $M(X)=1{,}7$; $D(X)=0{,}81$. **6.** $M(X)=6$; $D(X)=2{,}4$. **7.** $M(X)=57$; $D(X)=201$. **8.** а) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; б) 1. **9.** 1) $\frac{1}{0{,}2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-4)^2/0{,}08}$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x+0{,}5)^2/8}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-3)^2/0{,}125}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$. **10.** а) 72,57%; б) 0,26 г. **11.** 1) 0,841; 2) 15,19 т. **12.** 1) 0,9772; 2) 30,23 кг. **13.** 1) 0,9772; 2) 1,025 т.

Глава 13

1.

$x_i \ldots x_{i+1}$	45...75	75...105	105...135	135...165	165...195	195...225	225...255
n_i	2	5	11	11	8	11	2

2.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	7	7	5	6	9	5	6	3	1	1

3.

$x_i \ldots x_{i+1}$	2,6...3,0	3,0...3,4	3,4...3,8	3,8...4,2	4,2...4,6	4,6...5,0	5,0...5,4	5,4...5,8
n_i	4	4	5	11	12	6	6	2

4.

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	2	3	5	3	11	8	9	6	2	1

5. 1) $\bar{X}_в = 155,40$; 2) $D(X) = 211284$, $s^2 = 2155,96$, 3) $s = 46,63$. **6.** 1) $\bar{X}_в = 4,40$; 2) $D(X) = 5,78$; $s^2 = 5,90$; 3) $s = 2,40$. **7.** 1) $\bar{X}_B = 4,20$, $s^2 = 0,54$, $s = 0,74$. **8.** а) (11,58; 12,42); б) (11,45; 12,55); в) (11,40; 12,60). С увеличением надежности возрастает величина доверительного интервала. **9.** а) (18,63; 21,57); б) (18,14; 22,06); в) (19,12; 21,08) — с увеличением выборки при постоянном коэффициенте надежности уменьшается доверительный интервал **10.** а) $I = (0,47;\ 0,53)$; б) $0,0255 < \sigma < 0,0745$; в) $I = (0,48;\ 0,52)$. **11.** (0,10; 0,15). **12.** $n = 1860$. **13.** $t_{теор} = 2,31$; $t_{пр} = 2,46$. Расхождение значимо. $d = |2,13 - 1,90| = 0,23$. **14.** $t_{теор} = 2,04$, $t_{пр} = 0,25$. Расхождение незначимо $d = |232,0 - 231,0| = 1,0$.

Глава 14

1. См. рис. 133.
2. См. рис. 134.

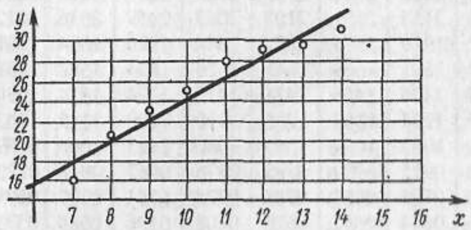


Рис. 133

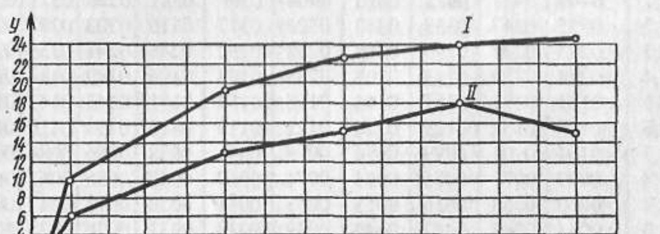


Рис. 134

Прирост урожая замедляется с возрастанием количества удобрений. Внесение сульфата аммония свыше 240 кг/га снижает урожайность. **3.** а) $y = 0,5x + 3,5$. Точки (1; 4), (4; 5,5); б) $y = x - 1$. Точки (1; 0), (4; 3). **5.** а) $y = -0,69x + 4,53$; $r = -0,79$; б) $y = 0,35x + 1,6$; $r = 0,54$. **6.** а) $y = 7,27x + 10,35$; $r = 0,94$; б) $y = 8,73x + 8,84$; $r = 0,95$. **7.** $r = 0,46$; $\bar{y}_x = 1,833x - 1,851$. **8.** $r = 0,72$; $\bar{y}_x = 0,76x + 0,88$; $\bar{x}_y = 0,68y + 1,11$. **9.** $r = 0,62$; $\bar{y}_x = 0,00014x + 3,51$; $\bar{x}_y = 2797,95y - 7813,18$.

Приложения

1. Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0024
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2. Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,49999997
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961	∞	0,5
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		

3. Таблица значений функции $\sum\limits_{k=0}^{a_0} \dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$ (распределение Пуассона)

a_0 \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,905	819	741	670	607	549	497	449	407
1	995	982	963	938	910	878	844	809	772
2	1,000	999	996	992	986	979	966	953	937
3	1,000	1,000	1,000	999	998	998	994	991	989
4		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	999	999	998
$k \geqslant 5$							1,000	1,000	1,000

4. Таблица значений

k \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,24761
2	0,00452	0,01638	0,3334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070
6					0,00001	0,00004	0,00008
7							0,00001
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							

5. Таблица значений функции $t_\gamma = t(\gamma;\, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,09	2,86	3,88
6	2,57	4,03	6,86	25	2,06	2,80	3,74
7	2,45	3,71	5,96	30	2,04	2,76	3,66
8	2,37	3,50	5,41	35	2,03	2,73	3,60
9	2,31	3,36	5,04	40	2,02	2,71	3,56
10	2,26	3,25	4,78	45	2,02	2,69	3,53
11	2,23	3,17	4,59	50	2,01	2,68	3,50
12	2,20	3,11	4,44	60	2,00	2,66	3,46
13	2,18	3,06	4,32	70	1,99	2,65	3,49
14	2,16	3,01	4,22	80	1,99	2,64	3,42
15	2,15	2,98	4,14	90	1,98	2,63	3,40
16	2,13	2,95	4,07	100	1,98	2,63	3,39
17	2,12	2,92	4,02	120	1,98	2,62	3,37
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,96	2,57	3,29
19	2,10	2,68	3,92				

Литература

1. *Богданов Г. А.* Кормление сельскохозяйственных животных. М., 1981.
2. *Браславец М. Е.* Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства. М., 1971.
3. *Венецкий И. Г.* Вариационные ряды и их характеристики. М., 1970.
4. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М., 1962.
5. *Воробьев С. А.* и др. Земледелие. М., 1977.
6. *Гильдербранд Ю. И.* Лекции по высшей математике для биологов. Новосибирск, 1974.
7. *Глаголев А. А., Солнцева Т. В.* Курс высшей математики. М., 1971.
8. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1977.
9. *Гроссман С., Тернер Дж.* Математика для биологов. М., 1983.
10. *Гусак А. А.* Задачи и упражнения по высшей математике. Минск, 1972.
11. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. В.* Математическое программирование. М., 1976.
12. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. М., 1986.
13. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М., 1989.
14. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М., 1967.
15. *Монахов В. М., Беляева Э. С., Краснер Н. Я.* Методы оптимизации. М., 1978.
16. *Никольская И. Л., Тараканова З. П.* Аналитическая геометрия. М., 1970.
17. *Петров В. А.* Математические задачи сельскохозяйственной практики. М., 1980.
18. *Подтягин М. Е.* Краткий курс высшей математики. М., 1961.
19. *Полунин И. Ф.* Курс математического программирования. М., 1976.
20. *Самнер Г.* Математика для географов. М., 1981.
21. *Солодовников А. С.* Системы линейных неравенств. М., 1977
22. *Файнзильбер А. М.* Математические методы в задачах экономики сельскохозяйственного производства. М., 1976.
23. *Хедди Дилон.* Производственные функции в сельском хозяйстве. М., 1965.
24. *Чеботарев А. С.* Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М., 1958.
25. *Шевелуха В. С.* Периодичность роста сельскохозяйственных растений и пути ее регулирования. М., 1980.
26. *Шнейдер В. Е.* и др. Краткий курс высшей математики. Т. 1. М., 1978.

Учебное издание

Зайцев Иван Антонович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор *Ж.И. Яковлева*
Художественный редактор *Ю.Э. Иванова*
Технический редактор *В.М. Романова*
Корректор *Г.А. Чечеткина*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ-138. Сдано в набор и подп. в печать 26.12.97. Формат $60x88^1/_{16}$. Бум. газетн. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Объем 25,48 усл. печ.л. 25,48 усл. кр.-отт. 19,40 уч. изд.л. Тираж 8 000 экз. **Заказ № 73**

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Отпечатано в ОАО «Оригинал», 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., д. 7.

Адрес издательства: 101430, г. Москва, ул. Неглинная, 29/14.
тел.: 200-04-56 (справочный)

Отдел маркетинга (095) 200-07-69, факс (095) 200-03-01.
E-mail 9341.g.23@g.23.relcom.ru

Отдел рекламы (095) 200-33-70, факс (095) 200-06-87

Телефон магазина (095) 200-30-14

Банковские реквизиты: ИНН 7707020075 р/с 40502816026000000707
АКБ «Мосбизнесбанк» Свердловский
корр. счет 30101810300000000312
БИК 044541312

Схема проезда

Проезд:
м. Пушкинская, далее троллейбус
№ 15 и № 31 до остановки
«Трубная площадь» или
м. «Цветной бульвар»

МЫ БУДЕМ РАДЫ ВИДЕТЬ ВАС!

Во втором полугодии 1998 г. готовятся к изданию:

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб.— 7-е изд., стер.— 19 л.

В учебнике излагается основной материал, входящий в объединенный курс аналитической геометрии и линейной алгебры: векторная алгебра, прямые на плоскости, линии и поверхности второго порядка; аффинные преобразования, системы линейных уравнений, линейные пространства, евклидовые и унитарные пространства, квадратичные формы, аффинные пространства, тензорная алгебра.

Для студентов высших учебных заведений.

2. Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии: Учеб. пособие/Под ред. В. О. Гордона и Ю. Б. Иванова.— 24-е изд., стер.— 25 л.

Это широко известное и очень популярное учебное пособие по начертательной геометрии. Оно соответствует программе для машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов.

Для студентов высших учебных заведений.

3. Гордон В. О., Иванов Ю. Б., Солнцева Т. Е. Сборник задач по начертательной геометрии: Учеб. пособие/Под ред. Ю. Б. Иванова.— 7-е изд., стер.— 22 л.

В пособии показан процесс решения типовых задач, иллюстрирующих основные положения курса, даны подробные решения ряда задач. В конце книги приведены ответы к задачам, предлагаемым для самостоятельного решения.

Для студентов высших учебных заведений.

ВЫШЛИ В СВЕТ:

1. Бачурин В. А. Сборник задач по математике: Учеб. пособие.— 28 л.

В книге представлены задачи по всему курсу математики. Ко всем задачам даны ответы. В каждом параграфе имеются примеры решения задач. В качестве приложений приводятся краткие справочные сведения по некоторым вопросам теории. Включены задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузах.

Для лиц, готовящихся к вступительным экзаменам в вузы. Может быть полезна учащимся старших классов средних общеобразовательных школ.

2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие.— 6-е изд., стер.— 24 л.

Книга является одним из наиболее известных пособий по данному курсу. Написанная на высоком научно-методическом уровне, она в компактном и доступном виде содержит весь материал программы по теории вероятностей и математической статистике. Большое внимание уделено статистическим методам обработки экспериментальных данных. В конце каждой главы помещены задачи с ответами.

Для студентов вузов и лиц, использующих вероятностные и статистические методы при решении практических задач.

3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие.— 4-е изд., стер.— 21 л.

Совместно с учебным пособием этого же автора составляет единый комплект по данному курсу. Книгу характеризует красота и строгость изложения в сочетании с высоким научно-методическим уровнем.

В книге приведены необходимые теоретические сведения и формулы решения типовых задач, помещены задачи для самостоятельного решения, сопровождающиеся ответами и указаниями. Большое внимание уделено методам статистической обработки экспериментальных данных.

Для студентов вузов и лиц, использующих вероятностные и статистические методы при решении практических задач.

4. Иродов И. Е. Основные законы механики: Учеб. пособие.— 4-е изд., перераб. и доп.— 14 л.

В книге рассмотрены основные законы как нерелятивистской (ньютоновской), так и релятивистской механики — законы движения и законы сохранения импульса, энергии и момента импульса. На большом количестве примеров и задач показано, как следует применять эти законы при решении различных конкретных вопросов. В настоящее издание внесены некоторые терминологические уточнения в понятие энергии системы, добавлены § 4.7 «Механика несжимаемой жидкости» и гл. 6 «Колебания», более обстоятельно подчеркнута чисто вспомогательная роль понятия «релятивистская масса», исправлены отдельные неточности и замеченные опечатки.

Для студентов высших учебных заведений.

5. Ракитин В. И., Первушин В. Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров: Учеб. пособие.— 25 л.

Пособие содержит материал, предусмотренный программой по дисциплине «Вычислительная математика и программирование для ЭВМ». В каждой главе даются необходимые теоретические сведения, примеры, иллюстрирующие применение различных численных методов, и упражнения для самостоятельного решения. В приложениях приводятся блок-схемы и тексты программ на языках Бейсик, Паскаль, Фортран и Си.

Для студентов втузов. Может быть полезно студентам колледжей и техникумов, а также преподавателям, инженерам и научным работникам.

6. Шипачев В. С. Основы высшей математики: Учеб. пособие/Под ред. акад. А. Н. Тихонова.— 3-е изд., стер.— 24 л.

В пособии изложен общий курс математики для студентов вузов. Основная особенность книги — сочетание необходимого теоретического материала с широким использованием методов решения основных типов задач по всем разделам курса. Пособие отличается высоким уровнем строгости и методической продуманностью изложения, точностью формулировок основных понятий и теорем, краткостью и доступностью доказательств.

Для студентов вузов. Может быть полезным студентам техникумов и колледжей, учащимся школ, лицеев и гимназий.

ISBN5-06-003485-2

9 785060 034851