Г. А. Сипайлов, А. В. Лоос

Математическое моделирование электрических машин

Г. А. Сипайлов, А. В. Лоос

Математическое моделирование электрических машин (АВМ)

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Электрические машины»

Москва «Высшая школа» 1980

ББК 32.97+31.261
С39
УДК 681.332+621.313

Рецензенты:

кафедра электрических машин Московского авиационного института; д-р техн. наук, проф. И. П. Копылов (зав. кафедрой электрических машин Московского энергетического института).

Сипайлов Г. А., Лоос А. В.

С39 Математическое моделирование электрических машин (АВМ): Учебное пособие для студентов вузов. — М.: Высш. школа, 1980. — 176 с.

40 к.

В книге даны необходимые сведения о принципе работы и устройстве аналоговых вычислительных машин, приведены особенности и различные методы моделирования широкого круга научно-технических задач, решаемых при изучении электрических машин различных типов, показаны возможности метода математического моделирования при исследовании сложных режимов работы электрических машин.

Предназначается для студентов вузов, обучающихся по специальности «Электрические машины».

С $\frac{30307-295}{001(01)-80}$ 88—80 2302030000 6Ф7+6П2.1.081
ББК 32.97+31.261

Геннадий Антонович Сипайлов
Александр Владимирович Лоос

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН (АВМ)

Редактор С. М. Оводова. Художественный редактор Н. К. Гуторов. Художник В. З. Казакевич. Технический редактор Н. А. Битюкова. Корректор Г. А. Чечеткина.

ИБ № 2101

Изд. № СТД—283. Сдано в набор 05.10.79. Подп. в печать 09.06.80. Т-11728 Формат 60×90 1/16. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 11 усл. печ. л. 11,54 уч.-изд. л. Тираж 10 000 экз. Зак. № 2858. Цена 40 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Хохловский пер., 7.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга предназначена для студентов вузов в качестве учебного пособия по специальным курсам электрических машин и может быть использована при выполнении курсового и дипломного проекта. Учебное пособие представляет собой краткое руководство, в котором приведены необходимые сведения о принципе работы и устройстве аналоговых вычислительных машин (АВМ), а также особенности и различные методы моделирования широкого круга научно-технических задач, встречающихся при исследованиях электрических машин различных типов и многих сложных режимов их работы.

Применению аналоговой вычислительной техники при моделировании электрических машин посвящено большое количество работ, однако еще ощущается острый недостаток в литературе по вопросам методики моделирования различных типов электрических машин и машинно-вентильных систем, а также специальных режимов их работы. Этот пробел в значительной степени был восполнен после издания книг проф. И. П. Копылова, достаточно полно отражающих современные тенденции в моделировании асинхронных машин.

Предлагаемая книга является первой попыткой систематического изложения вопросов теории и практики математического моделирования различных типов электрических машин. Оригинальная часть книги написана на базе работ авторов. В книге нашли отражение программы и примеры решения задач на АВМ, выполненные инженерами и аспирантами, работавшими под руководством авторов на кафедре электрических машин Томского политехнического института.

Принципы построения АВМ и их решающих элементов, порядок составления структурных схем соединения решающих элементов, конструктивное исполнение и технические характеристики современных АВМ и общие вопросы математического моделирования широко освещены в многочисленной учебной и научной литературе. Методы математического моделирования как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных, подготовка задач к решению и вопросы практической работы на АВМ изучаются в курсах по вычислительной технике. Поэтому материал в данном учебном пособии изложен кратко, приведены лишь основные положения теории моделирования на АВМ. Основную часть книги составляет материал по моделированию асинхронных и синхронных машин, машин постоянного тока и трансформаторов.

Книга написана в соответствии с программой, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР, в той последовательности, в какой читаются лекции студентам специальности «Электрические машины» и слушателям факультета повышения квалификации дипломированных инженеров-электромехаников Томского политехнического института.

В книге рассмотрены как вопросы моделирования, так и исследования электрических машин, поэтому она может быть полезной инженерно-техническим работникам, занимающимся разработкой и исследованием электрических машин, но не имеющим специального образования по аналоговой вычислительной технике или достаточного опыта по ее применению.

При подготовке книги к изданию учтены ценные замечания и советы рецензентов — кафедры электрических машин Московского авиационного института (зав. кафедрой проф. А. И. Бертинов) и зав. кафедрой электрических машин Московского энергетического института проф. И. П. Копылова, а также сотрудников этих кафедр проф. С. Р. Мизюрина, доц. В. Я. Беспалова и доц. А. И. Синицина, которым авторы выражают глубокую благодарность. Все замечания и пожелания по улучшению книги просим направлять в адрес издательства «Высшая школа»: *Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14.*

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

При разработке и исследовании современных электромеханических систем, электрических машин и аппаратов, машинно-вентильных систем и других устройств электромагнитной техники возникают задачи, решение которых, как правило, связано с анализом нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков. Использование аналитических методов исследования для решения таких задач чрезвычайно трудоемко, а в ряде случаев и невозможно, поэтому применение современных быстродействующих вычислительных машин становится необходимым.

Совершенствование вычислительных машин и приемов программирования сделали в последние годы вычислительную технику достоянием инженерно-технических и научных работников практически всех отраслей науки и техники. Электронные вычислительные машины не только ускоряют расчетные работы, но и открывают совершенно новые возможности в области исследований.

Непрерывно растущее использование аналоговых вычислительных машин (АВМ) в электромеханике связано с применением метода математического моделирования для электрических машин различных типов, исследованием систем машин, учетом различных нелинейностей, усложнением решаемых задач из-за отказа от ранее принимавшихся допущений, решением задач оптимизации проектных расчетов электрических машин и т. д.

Трудоемкость аналитических расчетов приводит к необходимости разделения исследования на два этапа: изучение механических переходных процессов и изучение электромагнитных переходных процессов при постоянной частоте вращения ротора или заданном законе ее изменения.

В настоящее время вычислительная техника, применяемая для решения нелинейных уравнений электрических машин, стала главным средством исследования переходных процессов. Однако для математического моделирования электрических машин нет единой формы записи уравнений, используются различные частоты и направления вращения осей координат, принимаются различные допущения. Все это приводит к многообразию структурных схем моделей электрических машин.

Современные тенденции развития моделирования электрических машин на АВМ связаны с более глубоким учетом насыщения магнитной цепи, анализом несимметричных режимов работы, сложных машинно-вентильных схем и исследованием работы электрической машины в системе, применением АВМ для проектных оптимизационных расчетов.

При исследованиях электрических машин, как правило, приходится решать дифференциальные уравнения, при этом во многих случаях целесообразно использовать АВМ. Одно из первых применений АВМ было осуществлено Дж. Томпсоном и Хельвином в 1876 г. Они показали, что с помощью механических интеграторов можно решать дифференциальные уравнения без применения методов последовательных приближений. Сущность этой идеи, положенной в основу современных АВМ, состоит в том, что, соединяя между собой вычислительные элементы, можно достаточно быстро решать различные дифференциальные уравнения. Несколько позднее акад. А. Н. Крылов в 1904—1911 гг. и д-р В. Буш из Массачусетского технологического института в 1931 г. сконструировали и построили первые механические дифференциальные анализаторы для решения уравнений.

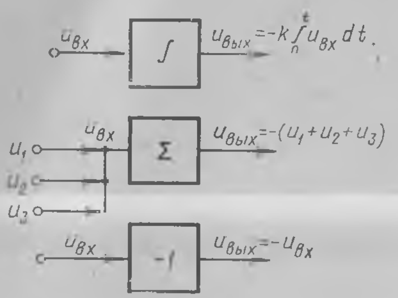


Рис. 1-1

Рассмотрим один из возможных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, который осуществляется на установке, состоящей из отдельных решающих элементов. Пусть такая установка содержит устройства, которые могут непрерывно производить операцию интегрирования машинной переменной по времени, т. е. при подаче на вход устройства некоторой функции $u_{вх}$ на его выходе образуется функция $u_{вых}=-k\int_0^t u_{вх}dt$. Кроме интегрирующих устройств для решения дифференциальных уравнений необходимы устройства, выполняющие операции суммирования нескольких функций, умножения на постоянный коэффициент, изменения знака функции и т. д. Типовые решающие элементы рассматриваемой установки, условно обозначенные прямоугольниками, показаны на рис. 1-1.

Для примера решим дифференциальное уравнение

$$d^2x/dt^2+Adx/dt+B\theta(t)=0. \qquad (1\text{-}1)$$

Здесь x — искомая зависимая переменная; A, B, $\theta(t)$ — заданные функции.

Уравнение (1-1) приведем к виду

$$d^2x/dt^2=-Adx/dt-B\theta(t). \qquad (1\text{-}2)$$

Как следует из уравнения (1-2), для получения искомой переменной x необходимо просуммировать слагаемые правой части, а затем полученную сумму проинтегрировать два раза. Схема соединения решающих элементов, соответствующая этой программе, приведена на рис. 1-2. Она состоит из двух интеграторов, одного сумматора и одного инвертора.

Используя рассмотренный принцип построения схемы решения, можно осуществить математическое моделирование более сложных дифференциальных уравнений или систем уравнений. Чтобы получить оптимальную программу решения, уравнения часто подвергают преобразованиям, вследствие чего прямая аналогия между физическими параметрами оригинала и коэффициентами преобразованного уравнения, воспроизводимого моделью, утрачивается.

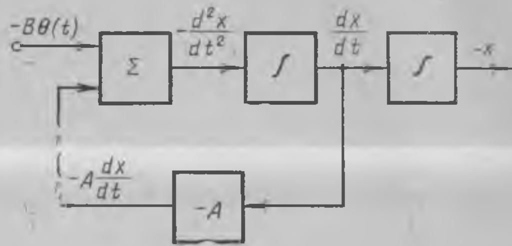


Рис. 1-2

Основные положения метода математического моделирования, осуществляемые на АВМ, можно свести к следующему:

1) выбирают физическую величину, которая будет представлять значения переменных решаемой задачи. Эту величину называют *машинной величиной* или *машинной переменной.* Необходимо, чтобы она удовлетворяла соотношению

$$y = f(x), \tag{1-3}$$

где x — независимая переменная, изменяющаяся на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$; $f(x)$ — зависимая переменная, представляющая собой действительную функцию на отрезке $c \leqslant f(x) \leqslant d$;

2) вычислительные блоки АВМ конструируют таким образом, чтобы зависимость между машинными величинами на их входах и выходах соответствовала определенным математическим операциям — суммированию, умножению, интегрированию и т. д.;

3) вычислительные блоки соединяют между собой так, чтобы работа полученной схемы описывалась алгебраическими или дифференциальными уравнениями, которые нужно решить;

4) в полученную схему соединения вычислительных блоков вводят начальные условия и внешние воздействия. Изменение соответствующей машинной переменной от времени снимается с выхода решающих элементов и регистрируется записывающим устройством или осциллографом. Значения машинной переменной соответствуют с учетом некоторого масштаба искомым переменным исходной системы уравнений.

Возможности применения АВМ в электромеханике при решении многих задач чрезвычайно разнообразны. К основным задачам можно отнести следующие:

1) анализ переходных процессов, т. е. динамики систем управления и регулирования, сложных схем и т. д. При математическом моделировании электрических машин наиболее эффективно решаются задачи, определяющие влияние изменения параметров машин

на процессы, а также влияние различных видов регулирования н устойчивость, качественное выяснение характера процессов в эле трических машинах и т. д.;

2) решение задач синтеза различных систем, т. е. подбор заданным техническим характеристикам структуры их изменяем частей или параметров, обеспечивающих получение требуем функциональных зависимостей. Задачи этого типа очень часто м гут быть сведены к отысканию экстремума некоторого функционал

§ 1-2. Принципы построения линейных решающих элементов

Решающие элементы АВМ можно выполнить из элементов ра личной физической природы — механических, электромеханически пневматических, электронных и т. д. В силу ряда преимущест преобладающее распространение получили вычислительные маш ны, построенные из решающих элементов электронного типа. Пр

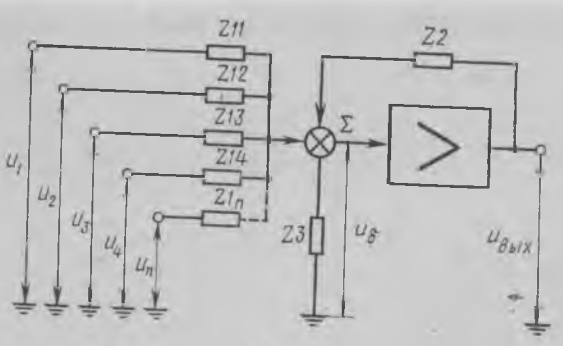


Рис. 1-3

создании решающих элементов используют принципы, положенны в основу замкнутых систем автоматического регулирования. Пр определенных соотношениях между параметрами решающего эле мента точность работы не зависит от изменения параметров осно ного канала, преобразующего сигнал, а определяется только вели чиной и стабильностью параметров цепи обратной связи и входно цепи.

Рассмотрим построение указанных решающих элементов.

Решающий усилитель (рис. 1-3) можно рассматривать как сле дящую систему, реагирующую на n входных сигналов*. Роль об екта регулирования при этом выполняет собственно усилитель по стоянного тока, роль регулятора — своеобразный индикатор рассо гласования, представляющий собой многополюсник, составленны из входных резисторов $Z11$, $Z12$, $Z13$, ..., $Z1_n$, резисторов обратно связи $Z2$ и собственно входа усилителя постоянного тока $Z3$. Та

* *Коган Б. Я.* Электронные моделирующие устройства и их применение дл исследования систем автоматического регулирования. М., Физматгиз, 196 с. 60—63.

как обратная связь в рассматриваемом усилителе отрицательная, то выходное напряжение многополюсника u_δ можно рассматривать как ошибку, или рассогласование, следящей системы. Величину ошибки (вследствие линейности элементов, образующих многополюсник индикатора рассогласования) можно представить суммой, в которой каждое слагаемое определяется значением напряжения, приложенного к данному входному полюсу,

$$u_\delta = f_{11}(p)\,u_1 + f_{12}(p)\,u_2 + \ldots + f_{1n}(p)\,u_n + f_2(p)\,u_{\text{вых}}. \quad (1\text{-}4)$$

В уравнении (1-4) передаточные функции, выраженные через проводимости соответствующих цепей, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&f_{11}(p) = Y_{11}(p)\Big/\left[\sum_1^n Y_{1i}(p) + Y_2(p) + Y_3(p)\right];\\
&f_{12}(p) = Y_{12}(p)\Big/\left[\sum_1^n Y_{1i}(p) + Y_2(p) + Y_3(p)\right];\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{1n}(p) = Y_{1n}(p)\Big/\left[\sum_1^n Y_{1i}(p) + Y_2(p) + Y_3(p)\right];\\
&f_2(p) = Y_2(p)\Big/\left[\sum_1^n Y_{1i}(p) + Y_2(p) + Y_3(p)\right],
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}5)$$

где

$$Y_{11} = 1/Z_{11}; \quad Y_{12} = 1/Z_{12}; \quad \ldots; \quad Y_{1n} = 1/Z_{1n};$$
$$Y_3 = 1/Z_3; \quad Y_2 = 1/Z_2; \quad p = d/dt.$$

При больших значениях коэффициента усиления усилителя (10^5—10^8) и сопротивления на входе усилителя Z_3, а также при ограниченном максимальном значении выходного напряжения усилителя величина напряжения ошибки u_δ очень мала (близка к нулю). Вследствие этого суммирующую точку обычно называют *потенциально заземленной точкой*. Если в выражении (1-4) пренебречь величиной u_δ, то можно найти связь между выходным и входным напряжением решающего усилителя:

$$u_{\text{вых}} = -\sum_1^n f_{1i}(p)\,u_i/[f_2(p)]. \quad (1\text{-}6)$$

После преобразования (1-6) с учетом (1-5)

$$u_{\text{вых}} = -\sum_1^n Y_{1i}(p)\,u_i/[Y_2(p)]. \quad (1\text{-}7)$$

Из выражения (1-7) следует, что точность математических операций, выполняемых решающим элементом, не зависит от параметров усилителя, если его коэффициент усиления достаточно велик, а определяется точностью набора и стабильностью значений проводимостей входных цепей и цепи обратной связи. Выражение $Y_{1i}(p)/Y_2(p)$ называют *передаточной функцией решающего элемента* по i-му входу.

Рассмотрим некоторые частные режимы работы решающего усилителя.

Пусть число входов $n=1$, проводимость входной цепи $Y_{1i}=1/R_1$, проводимость цепи обратной связи $Y_2=1/R_2$. Тогда в соответствии с (1-7) получаем

$$u_{\text{вых}}=-(R_2/R_1)\,u_{\text{вх}}. \tag{1-8}$$

Таким образом, операционный усилитель изменяет величину входного напряжения в $k=R_2/R_1$ раз и его знак. При $R_2=R_1$ он может использоваться в качестве фазоинвертора, при $R_2\neq R_1$ — в режиме масштабного усилителя, т. е. для выполнения операции умножения на постоянную величину.

Если усилитель имеет несколько входов, тогда

$$u_{\text{вых}}=-\sum_{1}^{n}\frac{R_2}{R_{1i}}\,u_i. \tag{1-9}$$

Такой усилитель можно использовать для алгебраического суммирования n входных сигналов с одновременным умножением каждого слагаемого на заданную постоянную величину.

Если в цепь обратной связи включить конденсатор, а на вход — резистор, то при $n=1$

$$u_{\text{вых}}=-\frac{1}{pRC}\,u_{\text{вх}}. \tag{1-10}$$

Перейдем в (1-10) от изображений к оригиналам:

$$u_{\text{вых}}=-\frac{1}{RC}\int_0^t u_{\text{вх}}dt. \tag{1-11}$$

Таким образом, в соответствии с выражением (1-11) рассматриваемый усилитель выполняет операцию интегрирования по времени входной величины. Если число входных сигналов n и на входе включены резисторы $R11$, $R12$, ... , $R1_n$, то при этом выполняется операция интегрирования суммы входных сигналов:

$$u_{\text{вых}}=-\frac{1}{p}\sum_{1}^{n}\frac{1}{R_{1i}C}\,u_i, \tag{1-12}$$

или во временной форме

$$u_{\text{вых}}=-\int_0^t\sum_{1}^{n}\frac{1}{CR_{1i}}\,u_i dt. \tag{1-13}$$

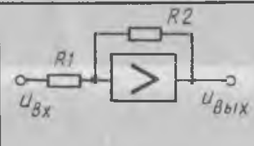
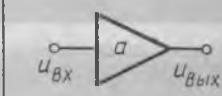
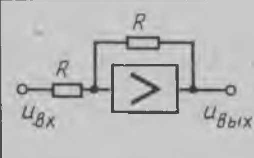
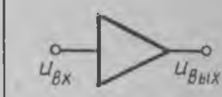
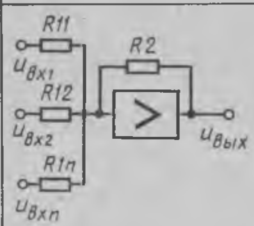
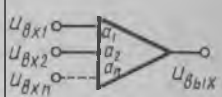
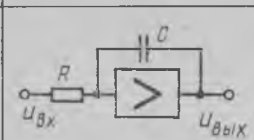
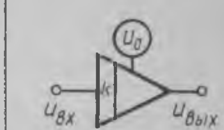
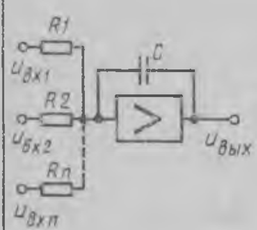
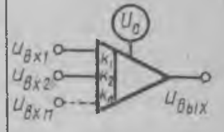
Если включить на вход конденсатор, а в цепь обратной связи — резистор, то при $n=1$

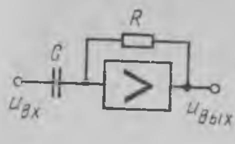
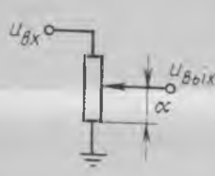
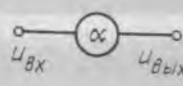
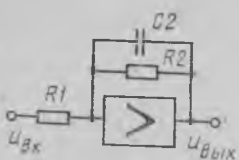
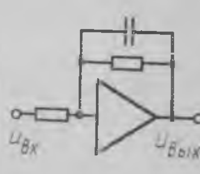
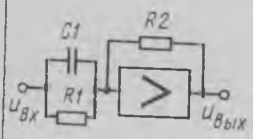
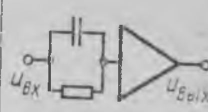
$$u_{вых} = -R_2 C p u_{вх}, \tag{1-14}$$

или во временной форме

$$u_{вых} = -R_2 C\, du_{вх}/dt. \tag{1-15}$$

Таблица 1-1

Название элемента	Функциональная схема	Математическая операция	Условное обозначение
Масштабный элемент		$u_{вых} = -a u_{вх}$ $a = \frac{R_2}{R_1}$	
Инвертор		$u_{вых} = -u_{вх}$	
Сумматор		$u_{вых} = -\Sigma a_i u_{вх i}$ $a_i = \frac{R_2}{R_i}$	
Интегратор		$u_{вых} = -k\int_0^t u_{вх}\, dt$ $k = \frac{1}{RC}$	
Интегро-сумматор		$u_{вых} = -\Sigma k_i \int_0^t u_{вх i}\, dt$ $k_i = \frac{1}{R_i C}$	

Название элемента	Функциональная схема	Математическая операция	Условное обозначение
Дифференцирующий элемент		$u_{вых}=-k\frac{du_{вх}}{dt}$ $k=RC$	
Потенциометр		$u_{вых}=\alpha u_{вх}$ $0\leq\alpha\leq1$	
Инерционное звено		$u_{вых}=-\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2C_2p+1}u_{вх}$	
Форсирующее звено		$u_{вых}=-\frac{R_2}{R_1}(R_1C_1p+1)u_{вх}$	

При n входных сигналах

$$u_{вых}=-d\left(\sum_{1}^{n}R_2C_{1i}u_{вх}\right)/dt. \tag{1-16}$$

В соответствии с выражениями (1-15) и (1-16) решающий усилитель работает в режиме дифференцирования одного сигнала или суммы входных сигналов.

В табл. 1-1 приведены принципиальные схемы включения элементов входной цепи и цепи обратной связи решающего усилителя при проведении основных математических операций. Включая на вход и в цепь обратной связи четырехполюсники различного типа, можно получить с помощью одного усилителя комбинированные линейные операции.

Из рассмотренных линейных решающих элементов наибольшее применение при составлении схем решения задач на АВМ находят масштабный, суммирующий, инвертирующий и интегрирующий элементы. Дифференцирующий элемент применяется редко, так как он ухудшает соотношение между полезным сигналом и шумом, сопровождающим передаваемый сигнал.

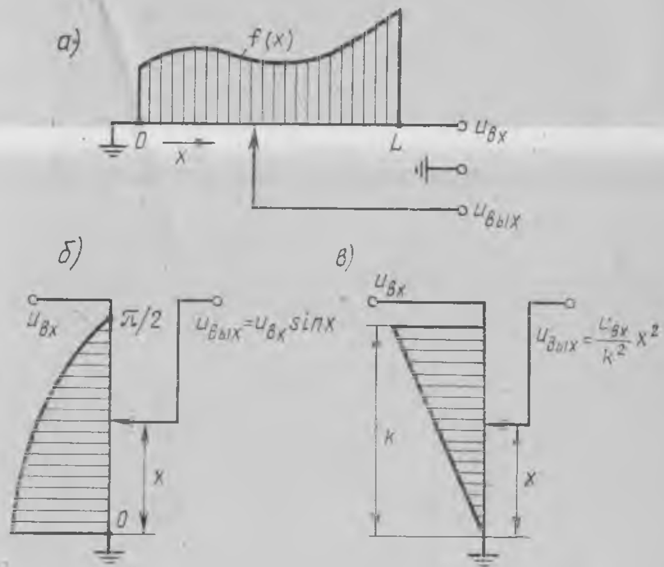


Рис. 1-4

Для выполнения операции умножения переменных величин на постоянный коэффициент, меньший единицы, служит потенциометр. В отличие от решающих элементов он не меняет знак напряжения. При $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$u_{вых} = \alpha u_{вх}.$$

Смена знака напряжения во всех решающих элементах (кроме потенциометра) *является весьма важным обстоятельством, которое следует всегда принимать во внимание при работе на АВМ.*

При решении линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами необходимо иметь вариаторы коэффициентов, т. е. управляемые потенциометры. В отличие от обычного в управляемом потенциометре в процессе решения происходит изменение настройки по заданной временной зависимости. Различают линейные и функциональные управляемые потенциометры. Функциональные потенциометры позволяют воспроизводить как монотонные, так и немонотонные функции времени, однако при этом необходимы специальные конструктивные решения (рис. 1-4). Движок потенциометра перемещается с помощью управляемого электродвигателя или шагового искателя. На рис. 1-4, *а, б, в* наглядно иллюстрируется взаимосвязь воспроизводимой функции с кривой профиля потенциометра. Воспроизведение требуемой функции может быть как непрерывным, так и линейно-кусочным.

При отсутствии специальных вариаторов переменные коэффициенты могут быть введены интегратором, на вход которого подано постоянное напряжение, функциональным преобразователем и множительным устройством.

§ 1-3. Принципы построения нелинейных решающих элементов

В нелинейных дифференциальных уравнениях коэффициенты являются функциями искомой переменной или ее производных. На АВМ нелинейные дифференциальные уравнения принципиально решаются так же, как и линейные. Появляется лишь необходимость в воспроизведении функциональных зависимостей по заданному закону и в перемножении и делении переменных. Эти операции выполняются нелинейными решающими элементами — функциональными преобразователями, блоками умножения и деления.

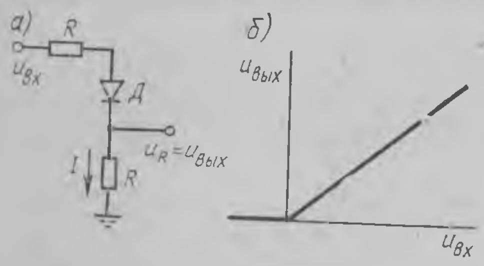


Рис. 1-5

Функциональные преобразователи предназначены для получения выходного напряжения, связанного с входным напряжением заранее заданной функциональной зависимостью. Это достигается использованием физических эффектов, характеризуемых требуемой зависимостью или косвенным воспроизведением функций с помощью различных аппроксимаций.

Примером преобразователей с использованием физических эффектов могут служить функциональные преобразователи на полупроводниковых элементах с нелинейной характеристикой — варисторы или нелинейные конденсаторы (вариконды). Однако наибольшее применение в АВМ нашли решающие элементы, использующие принцип аппроксимации с помощью диодных функциональных преобразователей. Они выполняются как специализированными, т. е. предназначенными для воспроизведения только одной функции, так и универсальными, т. е. настраиваемыми на заданную функциональную зависимость. При этом необходимая функция воспроизводится приближенно путем линейно-кусочной аппроксимации.

Для воспроизведения отдельных участков ломаной линии, представляющей собой график заданной функции, служат элементарные диодные ячейки. При построении элементарных диодных ячеек используется свойство диода пропускать ток только в одном направлении. Электрическая цепь с диодом $Д$ (рис. 1-5, *а*) позволяет получать линейную зависимость выходного напряжения $u_{вых}$ от входного $u_{вх}$. При этом угол наклона характеристики «вход — выход» может изменяться в зависимости от сопротивления R в цепи катода. В случае отрицательных значений входного напряжения $u_{вх}$ диод заперт, что указывает на отсутствие выходного напряжения $u_{вых}$ (рис. 1-5, *б*).

Если схему (рис. 1-5, *а*) изменить, т. е. подавать входное напряжение $u_{вх}$ на анод через резистор $R2$ (рис. 1-6, *а*), а через другой резистор $R1$ подавать отрицательное напряжение $u_{оп}$, называемое

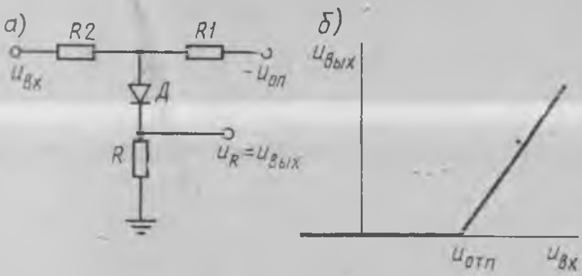


Рис. 1-6

мое опорным, то диод будет заперт при всех значениях входных напряжений $u_{вх}$, меньших некоторого критического напряжения отпирания $u_{отп}$. Запирающее напряжение на аноде является результатом сложения входного $u_{вх}$ и опорного $u_{оп}$ напряжений, поэтому при возрастании $u_{вх}$ до некоторого уровня напряжение на аноде диода будет уменьшаться до нуля, и в момент перехода его через нуль диод откроется. На резисторе R появится выходное напряжение $u_{вых}$. Возрастание входного напряжения приведет к пропорциональному возрастанию выходного напряжения.

Меняя величину напряжения $u_{оп}$ или соотношение сопротивлений R_1 и R_2, можно изменить напряжение $u_{отп}$, при котором диод открывается, т. е. можно произвольно регулировать порог срабатывания схемы (рис. 1-6, *б*). Объединяя резисторы $R1$ и $R2$ и применяя вместо резистора R потенциометр, можно получить регулируемую диодную ячейку (рис. 1-7, *а*), характеристика которой показана на рис. 1-7, *б*. Соединяя несколько ячеек, можно воспроизвести любую линейно-кусочную монотонную функцию.

Пусть $y=f(x)$ — однозначная непрерывная функция на рассматриваемом интервале. Тогда эту функцию можно представить выражением

$$y=y_0+a_0x+\sum_{i=1}^{n} b_i(x-x_{нач\,i}), \qquad (1\text{-}17)$$

где

$$b_i=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant x_{нач\,i}; \\ \text{const} & \text{при} \quad x> x_{нач\,i}. \end{cases}$$

$x_{\text{нач}i}$ — значения x в начале каждого отрезка разбиения аргумента.

Исходные переменные в электронной модели представляются в виде напряжений, поэтому после преобразования переменных $y = u_{\text{вых}}/M_y$, $y_0 = u_0/M_y$, $x = u_{\text{вх}}/M_x$, $x_{\text{нач}i} = u_{\text{вх}i}/M_x$ и при равенстве масштабов

$$u_{\text{вых}} = u_0 + a_0 u_{\text{вх}} + \sum_{1}^{n} b_i (u_{\text{вх}} - u_{\text{вх}\,i}). \qquad (1\text{-}18)$$

Суммирование напряжений в данном случае проще всего выполнить на линейном решающем элементе — сумматоре. Каждое из слагаемых выражения (1-18) можно получить, используя обычные цепи или регулируемые диодные ячейки.

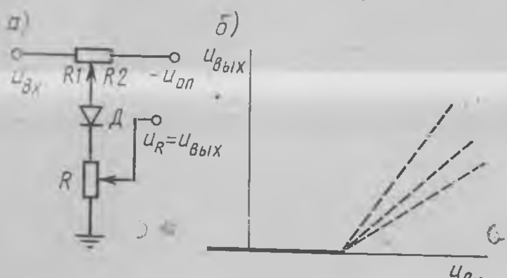


Рис. 1-7

Включая диод ячейки (рис. 1-7, *а*) в направлении обратной полярности и подводя напряжения с обратным знаком, получим на выходе сумматора напряжение также с обратным знаком. Используя одновременно прямое и обратное включение диодов и применяя общий сумматор, можно в соответствии с выражением (1-18) воспроизводить немонотонные и знакопеременные функции одной независимой переменной. Чтобы получить выходное напряжение обратного знака, следует применить инвертор.

Упрощенная схема универсального диодного преобразователя показана на рис. 1-8. Значение u_0 устанавливается потенциометром *П14*. Первый линейный участок ломаной линии, где соблюдается прямо пропорциональная зависимость $a_0 u_{\text{вх}}$, воспроизводится резистором *R1* и потенциометром *П13*. Потенциометры *П1—П6*, с помощью которых регулируется порог срабатывания каждой из диодных ячеек (установка $u_{\text{отп}}$), осуществляют ограничение по x, а потенциометры *П7—П12*, регулирующие крутизну характеристик диодных ячеек, набирают функцию $F(x)$. Переключатель *T1* предназначен для изменения знака слагаемого $a_0 u_{\text{вх}}$, а *T2* — для смены сопротивления обратной связи суммирующего усилителя, что изменяет масштаб набираемой функции.

Точность аппроксимации заданной функции определяется числом отрезков аппроксимирующей ломаной линии. При подготовке функциональной зависимости следует помнить, что для каждого отрезка (кроме первого, где соблюдается прямая пропорциональная зависимость) потребуется один диод. Однако число диодов в преобразователе ограничено, и для увеличения точности аппрокси-

[illegible] применяют параллельное соединение нескольких функциональных преобразователей.

В некоторых моделирующих устройствах в качестве нелинейного функционального элемента используют электромеханические блоки. В отличие от электронных преобразователей электромеханические блоки обладают значительной инерционностью, что обусловливает меньшее применение, чем электронных. Их принцип действия подобен принципу действия электромеханических вариаторов коэффициентов. Отличие состоит лишь в том, что исполнительным

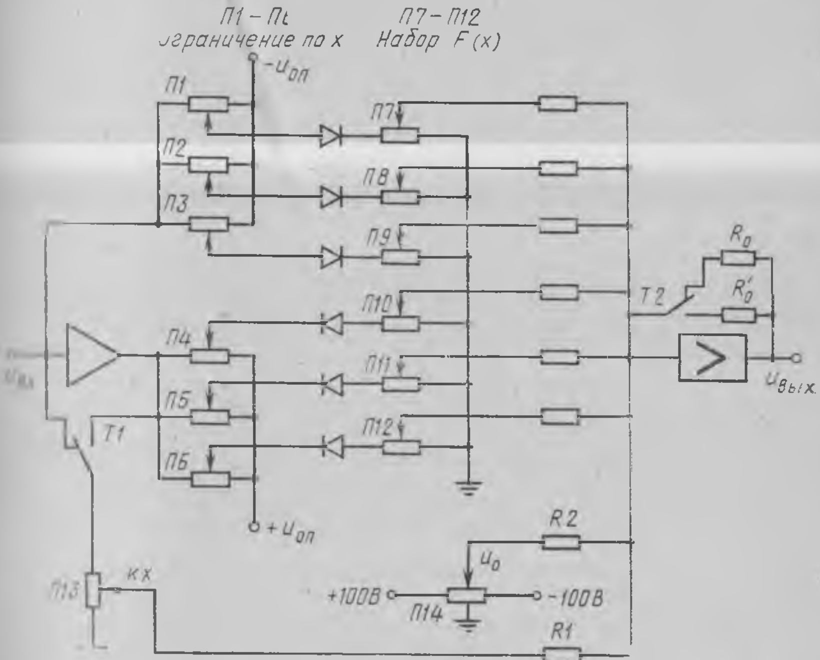


Рис. 1-8

электродвигателем, перемещающим движок потенциометра, управляет специальный усилитель. Угол поворота вала электродвигателя и, следовательно, величина перемещения движка потенциометра пропорциональны величине напряжения, подаваемого на вход усилителя. Это достигается применением в устройстве специальной следящей системы.

Если потенциометр линейный, то угол поворота двигателя пропорционален входному напряжению: $\alpha_п = k u_{вх}$, где k — коэффициент пропорциональности. С осью двигателя может быть связано n функциональных потенциометров, для каждого из которых справедливо выражение

$$u_{вых} = u_1 f(\alpha_п), \tag{1-19}$$

где u_1 — напряжение на входе потенциометра.

Если $\alpha_п = ku_{вх}$, то $u_{вых} = u_1 f(ku_{вх})$. При $k=1$ и $u_1=1$ электром[
ханический функциональный преобразователь будет выполнять н[
линейную операцию

$$u_{вых} = f(u_{вх}). \qquad (1\text{-}2$$

Если вместо функционального потенциометра использовать л[
нейный потенциометр, то (1-19) принимает вид

$$u_{вых} = ku_1 u_{вх}. \qquad (1\text{-}2$$

Таким образом, в соответствии с выражением (1-21) осущест[
ляется умножение напряжений u_1 и $u_{вх}$, т. е. рассматриваемое ус[
ройство можно использовать и как блок умножения.

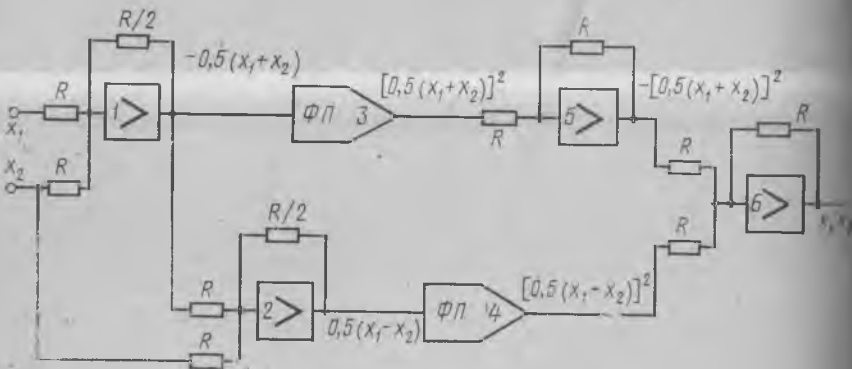


Рис. 1-9

Кроме блоков умножения широко распространены множител[
ные устройства, основанные на принципе автоматического регул[
рования коэффициента передачи, принципе применения квадрати[
ных функциональных преобразователей и электромеханических ус[
ройств, а также на сочетании названных принципов и т. д. Техни[
чески реализовать операцию умножения довольно трудно, поэтому
блоки умножения являются относительно сложными устройствами.

В схемах множительных устройств, использующих усилител[
постоянного тока с диодными функциональными преобразовател[
ми, реализуется соотношение

$$z = x_1 x_2 = [0{,}5(x_1 + x_2)]^2 - [0{,}5(x_1 - x_2)]^2. \qquad (1\text{-}22)$$

Из (1-22) видно, что для получения произведения двух переменны[
x_1 и x_2 необходимо выполнить операции алгебраического сложени[
и возведения в квадрат. Чтобы возвести в квадрат полусумму и по[
луразность независимых переменных, применяют специализирован[
ные функциональные преобразователи — квадраторы. На рис. 1-9
приведена схема множительного устройства с квадратичными функ[
циональными преобразователями. В ней суммирование входны[
сигналов осуществляется двумя решающими усилителями *1* и *2*

причем полуразность x_1 и x_2 получается путем добавления к одному из сомножителей (x_1) полусуммы x_1 и x_2 с обратным знаком.

Функциональные преобразователи *ФП3* и *ФП4* осуществляют возведение в квадрат полусуммы и полуразности x_1 и x_2. Усилитель 5 служит для образования отрицательного значения квадрата полусуммы x_1 и x_2, а на выходе усилителя *6* получают произведение x_1x_2. Упрощение схемы рис. 1-9 может быть осуществлено за счет выделения модуля полусуммы диодными вентильными цепочками и уменьшения числа решающих элементов для образования полусуммы.

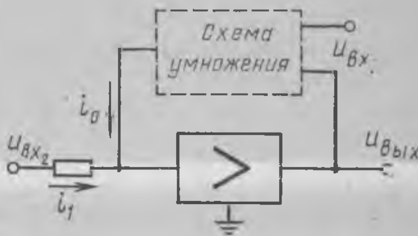


Рис. 1-10

Все множительные устройства обычно выполняют умножение в соответствии с формулой $u_{вых} = 0{,}01\ u_1u_2$, т. е. произведение u_1u_2 умножается на постоянный коэффициент 0,01. Блокам перемножения, квадраторы которых построены с использованием диодных схем, присущи те же недостатки и погрешности, что и диодным нелинейным блокам.

Операция деления в АВМ выполняется обычно включением схемы умножения в цепь обратной связи решающего усилителя (рис. 1-10). Ток i_0 на выходе схемы умножения равен току $i_1 = k_1 u_{вх2}$:

$$-ku_{вх\,1}u_{вых} = k_1 u_{вх2}, \tag{1-23}$$

откуда следует, что

$$u_{вых} = -(k_1/k)(u_{вх\,2}/u_{вх\,1}). \tag{1-24}$$

Обычно масштабный коэффициент k_1/k при воспроизведении операции деления выбирается равным 10:

$$u_{вых} = -10 u_{вх\,2}/u_{вх\,1}. \tag{1-25}$$

Схема, приведенная на рис. 1-10, работает только при $u_{вх1} < 0$. При $u_{вх1} > 0$ обратная связь усилителя становится положительной, что приводит к его неустойчивой работе. Для обеспечения возможности деления при любых знаках $u_{вх1}$ обычно предусматривают возможность автоматического переключения квадрантов множительного устройства.

Выполнение операции извлечения квадратного корня для реализации функции $y = \sqrt{x}$ сводят к решению дифференциального уравнения

$$y' = -k(y^2 - x), \quad \text{где} \quad y(0) = 0.$$

Построение структурной схемы для решения этого уравнения нетрудно осуществить, используя блоки умножения и интегрирования.

Обычно в АВМ применяют универсальные блоки, выполняющие операции умножения, деления и извлечения квадратного корня. Необходимый режим работы в блоках устанавливают при помощи тумблеров.

§ 1-4. Принципы построения электронных моделирующих установок на постоянном токе

Количество решающих элементов АВМ и их качественный состав определяются назначением установки. Различают универсальные и специализированные установки. Универсальные установки предназначены для решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, а также уравнений в частных производных, т. е. для исследования динамики различных технических устройств. Специализированные установки предназначены для исследования динамики технических устройств только одного определенного класса и обеспечивают решение дифференциальных уравнений фиксированной структуры.

При исследованиях электромеханических устройств наибольшее применение находят универсальные установки. В них нельзя принципиально ограничить состав решающих элементов, так как заранее неизвестны уравнения, описывающие тот или иной процесс.

Рассмотренные линейные и нелинейные решающие элементы составляют основу как универсальных, так и специализированных установок. В дополнение к этим решающим элементам, выполняющим операции суммирования, интегрирования, дифференцирования, умножения, деления, воспроизведения заданных функциональных зависимостей, в АВМ добавляются устройства для воспроизведения типичных нелинейных зависимостей, введения постоянного запаздывания и переменных коэффициентов случайных возмущений, а также преобразующие устройства для связи с испытуемой аппаратурой.

По способу компоновки отдельных решающих элементов различают матричные и структурные модели.

В *матричных моделях* отдельные решающие усилители заранее соединены между собой в группы, каждая из которых предназначена для решения дифференциального уравнения первого порядка.

Структурные модели отличаются тем, что в них все решающие элементы свободны и соединяются при наборе задачи в соответствии с заданным дифференциальным уравнением или системой уравнений. Соединение решающих элементов может быть осуществлено на рабочем поле, образованном лицевыми панелями решающих блоков, или на специальном наборном поле, на которое выведены входы и выходы решающих элементов. Для решения технических задач наибольшее распространение имеют структурные модели типов МН-7, МН-14, ЭМУ-10 и др.

Для выполнения операции интегрирования необходимо установить начальные условия по зависимым переменным. Это можно осуществить двумя способами: 1) зарядкой интегрирующего конденсатора; 2) подключением к каждому интегрирующему усилителю дополнительного сумматора, на один из входов которого подается постоянное напряжение, соответствующее начальному условию (постоянной интегрирования). Наибольшее применение нашел первый способ.

Установка коэффициентов передачи осуществляется в большинстве случаев на линейных решающих усилителях. Коэффициенты передачи нелинейных решающих усилителей обычно имеют фиксированные значения. Их величина определяется из условий получения на выходе полного напряжения шкалы модели (100 В) при подаче на вход напряжений аргумента 100 В.

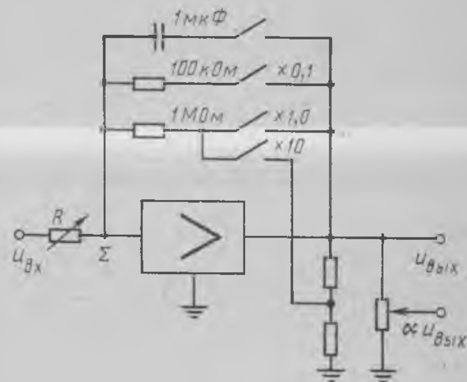


Рис. 1-11

При решении дифференциальных уравнений необходимо менять коэффициенты передачи линейных решающих усилителей в широких пределах (от 100 до 0,001). Коэффициенты передачи, большие единицы, устанавливают или непрерывно путем изменения сопротивления, подключенного на входе, или ступенчато за счет изменения питания цепи обратной связи делителем, подключенным на выходе. Коэффициенты передачи, меньшие единицы, устанавливают или непрерывно за счет подключения делителя на выходе, или ступенчато путем перехода на другую величину сопротивления обратной связи. На рис. 1-11 приведена схема, иллюстрирующая оба способа изменения коэффициентов передач решающих усилителей.

При отсутствии входного сигнала на выходе решающего усилителя может быть какое-то напряжение. Оно появляется из-за неточной установки напряжений источников питания, наличия сеточного тока и изменения эмиссии ламп, утечек на суммирующую точку и т. д. В связи с этим перед началом работы на машине проверяют нули решающих усилителей. При применении усилителей с автоматической стабилизацией нулевого уровня необходимость в частом контроле нулевого уровня отпадает.

Точность работы интегрирующих решающих усилителей зависит как от степени стабилизации нулевого уровня, так и от самопроизвольного разряда интегрирующего конденсатора вследствие утечки через диэлектрик и внешнюю изоляцию. Погрешности, вызванные указанными причинами, следует учитывать в большей степени при моделировании медленно протекающих процессов.

Еще одним источником погрешности решения на АВМ является возможный выход решающего усилителя за пределы линейности.

Для обнаружения неисправности на выходе решающего усилителя включается неоновая сигнальная лампочка, которая загорается при достижении напряжения ± 100 В. Если усилители выполнены с системой автоматической стабилизации нулевого уровня, то для индикации нагрузки пользуются величиной сигнала ошибки u_{δ}. При превышении допустимой величины 2 мВ контакты реле, контролирующего этот уровень, подают сигнал на прекращение работы. Такой способ сигнализации позволяет использовать при отсутствии нагрузки на выходе решающего усилителя полный диапазон линейного изменения напряжения, превышающий намного ± 100 В. Кроме того, он указывает на неполадки в схеме и тогда, когда напряжение остается в пределах шкалы модели ± 100 В, но действительные пределы линейности сужены, например, вследствие слишком большого числа потенциометров, подключенных параллельно выходу.

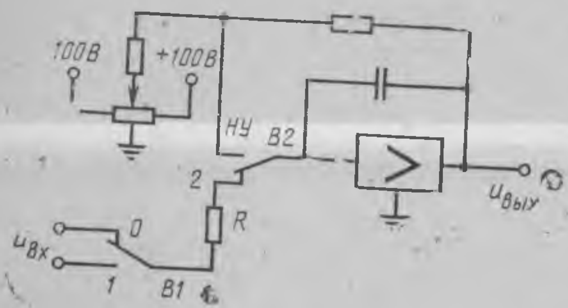


Рис. 1-12

Система управления АВМ должна выполнять следующие операции: включение процесса решения — «Пуск», прекращение процесса решения — «Останов» и возврат в исходное положение перед включением процесса решения — «Исходное положение». Кроме этого, система управления должна обеспечить необходимые коммутационные операции при установке начальных условий, коэффициентов передачи отдельных решающих блоков и подаче внешних возмущений. Для возможности визуального наблюдения решения на экране электроннолучевого осциллографа система управления должна обеспечивать периодизацию процесса решения. Наряду с этим в АВМ предусматривается автоматическое прекращение процесса решения и включение или отключение входного сигнала в заранее заданный момент времени.

Режим работы выбирается нажатием кнопки на пульте управления. Необходимые переключения в схеме осуществляются электромагнитными реле во всех решающих элементах одновременно. На рис. 1-12 показана схема управления интегратором. С помощью переключателя *В1* машина переводится в режим «Останов». Входная цепь в положении *0* отключается, и процесс интегрирования прекращается. При переводе переключателя *В1* в положение *1* интегрирование возобновляется, выполняется команда «Пуск». При переводе переключателя *В2* в положение *НУ* задаются начальные условия путем зарядки интегрирующего конденсатора, что соответствует режиму «Исходное положение».

При установке начальных условий напряжение на выходе усилителя устанавливается не сразу. Чтобы ускорить процесс установки начальных условий, дополнительно параллельно сопротивлению подключают конденсатор. Положению переключателя $B2$ в положении 2 соответствует режим «Пуск».

В схеме управления АВМ предусмотрена возможность параллельной работы нескольких моделирующих установок при управлении процессом решения с любой установки. При этом каждая установка снабжается средствами для наблюдения и записи процесса решения. Принципиально решение можно фиксировать двумя способами:

1) записывать значения координат, переводя машину в режим «Останов». При этом процесс решения прерывается автоматически или вручную в заданный момент времени. Для измерений можно использовать цифровые вольтметры или цифровые печатающие устройства;

2) записывать непрерывно в процессе решения с помощью различных записывающих приборов или осциллографа. В частности, большое распространение получили двухкоординатные регистрирующие приборы, в которых перо перемещается независимо вдоль обеих координатных осей под действием напряжений, снимаемых с выходов решающих элементов. Полученная диаграмма представляет собой зависимость переменной, подведенной к вертикальному входу, от переменной, подведенной к горизонтальному входу. Двухкоординатный регистрирующий прибор позволяет получать зависимости не только от времени, но от любой зависимой переменной или их производных. При решении уравнений в частных производных применение этого прибора особенно целесообразно.

Для качественной оценки решения используют электроннолучевые индикаторы различных типов, например многолучевые индикаторы, индикаторы с длительным послесвечением для запоминания решения.

Описание технических характеристик и возможности различных типов АВМ можно найти в специальной литературе.

Дальнейшее совершенствование АВМ идет как по пути разработки универсальных схем решающих элементов, выполняющих различные операции, так и по пути построения комбинированных аналого-цифровых установок. В комбинированных установках для повышения точности решения часть операций, главным образом нелинейных, должна быть возложена на цифровые устройства или аналоговые устройства должны решать задачи одновременно с цифровыми, причем на аналоговые устройства возлагается решение в приращениях, а на цифровые — отыскание решения, соответствующего невозмущенному движению. При этом погрешность аналоговой части будет второго порядка малости по сравнению с погрешностью цифровой части.

ГЛАВА II
ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

§ 2-1. Моделирование обыкновенных дифференциальных уравнений

К решению обыкновенных дифференциальных уравнений приводит большинство реальных научно-технических задач. Решение уравнений в частных производных, алгебраических уравнений и их систем при использовании АВМ также делает необходимым решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому естественной является отработка методики решения этих уравнений.

Как показано выше, методика составления электрических моделей для решения дифференциальных уравнений, или методика набора задач, основана на *структурном принципе,* который состоит в том, что математическая структура уравнения, т. е. составляющая это уравнение последовательность операций, воспроизводится в виде реальной структуры из решающих блоков, выполняющих те же математические операции. Этот принцип называют также *операционным,* поскольку уравнение или система уравнений моделируются по операциям. В принцип построения структурных схем решения дифференциальных уравнений могут быть положены два возможных метода: повышения и понижения порядка производной. Оба эти метода равнозначны по количеству необходимой аппаратуры. Однако на практике преимущественное применение получил метод понижения порядка производной вследствие меньшей чувствительности интеграторов к влиянию помех, что обеспечивает бо́льшую точность решения. Дифференцирующие решающие элементы вводятся в схему решения очень редко, а сигналы, содержащие производную, формируются специальными схемами без введения блоков дифференцирования.

Решение однородной системы уравнений. Однородная система уравнений имеет вид

$$py_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i; \quad y_i(t_0)=y_{i0}; \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{2-1}$$

где $p=d/dt$ — символ дифференцирования; $y_i=y_i(t)$ — зависимые переменные системы; a_{ij} — постоянные коэффициенты.

Переменную t (время), входящую в уравнение (2-1), называют *независимой переменной.* Независимой переменной дифференциальных уравнений может быть не только время, но и любая другая величина, от которой зависят другие переменные уравнения и по которой берутся производные.

Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений вида (2-1)

$$py_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2; \qquad py_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \tag{2-2}$$

при начальных условиях $y_1(t_0) = y_{10}$, $y_2(t_0) = y_{20}$. Схема набора системы уравнений (2-2) приведена на рис. 2-1, из которого видно, что необходимое число интегрирующих элементов определяется числом уравнений системы (2-2). В обозначениях коэффициентов передач вычислительных блоков первая цифра индекса означает номер блока, а вторая — номер входа. При большем числе уравнений набор схемы решения не встречает каких-либо трудностей.

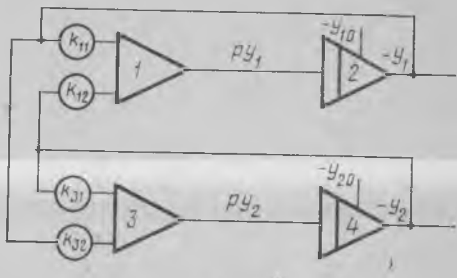


Рис. 2-1

Решение однородных уравнений высокого порядка. Общий вид однородного дифференциального уравнения n-го порядка записывается как

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)\, y_1 = 0. \tag{2-3}$$

Для решения на АВМ уравнения (2-3) необходимо преобразовать его в систему уравнений первого порядка вида (2-1). Так как погрешности решения задачи заранее рассчитать трудно, то при преобразовании уравнения (2-3) стремятся получить допустимую, с точки зрения возможностей машины (например, по наибольшему числу входов суммирующего усилителя), схему набора при минимальных вспомогательных вычислениях. При этом возможны два способа преобразования:

1. Непосредственное преобразование исходного уравнения в систему уравнений первого порядка. От уравнения (2-3) переходим к системе n уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} &py_1 = y_2;\\ &py_2 = y_3;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &py_n = -a_0y_1 - a_1y_2 - a_2y_3 - \ldots - a_{n-1}y_n. \end{aligned}\right| \tag{2-4}$$

Начальные условия системы (2-4):

$$y_1(t_0) = y_{10}; \quad y_2(t_0) = y_{20} = y'_{10}; \ \ldots; \quad y_n(t_0) = y_{n0} = y_{10}^{(n-1)}.$$

Составим структурную схему для однородного уравнения пятого порядка:

$$(p^5 + a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0)\, y_1 = 0. \tag{2-5}$$

Начальные условия: $y_1(t_0)=y_{10}$, $py_1(t_0)=py_{10}$, $p^2y_1(t_0)=p^2y_{10}$, $p^3y_1(t_0)=p^3y_{10}$, $p^4y_1(t_0)=p^4y_{10}$.

Преобразуем уравнение (2-5) в систему уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}&py_1=y_2;\quad py_2=y_3;\\&py_3=y_4;\quad py_4=y_5;\\&py_5=-a_0y_1-a_1y_2-a_2y_3-a_3y_4.\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}6)$$

Схема набора уравнений (2-6) показана на рис. 2-2. При составлении схемы принято во внимание свойство решающих элементов изменять знак входного сигнала.

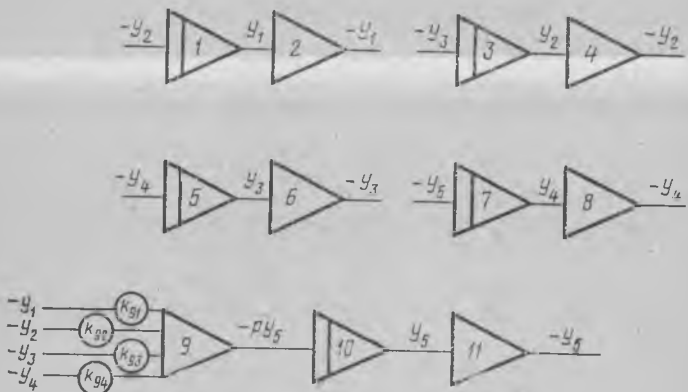


Рис. 2-2

Как видно из приведенного рис. 2-2, усилители полученной схемы решения имеют неодинаковое число суммирующих входов, причем число входов на одном из усилителей больше $n/2$. Это является недостатком способа непосредственного преобразования дифференциального уравнения высокого порядка, так как при высоком порядке моделируемого уравнения необходимое число входов может превысить число входов, допустимых конструкцией АВМ.

2. Искусственное преобразование исходного уравнения в систему уравнений первого порядка. Указанный недостаток метода непосредственного преобразования можно устранить, если уравнение (2-3) преобразовать в систему уравнений первого порядка *:

$$\left.\begin{aligned}&py_1=-a_{n-1}y_1+y_2;\quad py_2=-a_{n-2}y_1+y_3;\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\&py_{n-1}=-a_1y_1+y_n;\quad py_n=-a_0y_1.\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}7)$$

* Моделирование на аналоговых вычислительных машинах/*Архангельский Е. А., Знаменский А. А., Лукомский Ю. А., Чернышев Э. П.* Л., Энергия, 1972, с. 72—76.

Дифференцируя $n-1$ раз первое уравнение системы (2-7) и подставляя в него остальные, нетрудно убедиться в эквивалентности системы (2-7) исходному уравнению (2-3). Начальные условия для переменных системы уравнений (2-7) определяются непосредственно из уравнений (2-7):

$$y_{10}=y_{10};\quad y_{20}=a_{n-1}y_{10}+\dot{y}_{10};$$

$$y_{30}=a_{n-2}y_{10}+\dot{y}_{20}=a_{n-2}y_{10}+a_{n-1}\dot{y}_{10}+\ddot{y}_{10}\quad \text{и т. д.}$$

Как видно из уравнений (2-7), правая часть каждого из уравнений содержит не более двух слагаемых.

Решение системы неоднородных дифференциальных уравнений. Рассмотрим наиболее распространенные методы приведения системы неоднородных дифференциальных уравнений к виду, удобному для моделирования на АВМ.

1. В каноническом виде система неоднородных дифференциальных уравнений имеет вид

$$py_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_i+\sum_{j=1}^{m}b_{ij}x_j, \tag{2-8}$$

где a_{ij}, b_{ij} — постоянные коэффициенты, x_j — известные входные переменные.

Моделирование уравнений (2-8) не представляет трудностей. Поэтому задача моделирования неоднородных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}&(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)\,y_1=\\&=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1p+b_0)\,x,\end{aligned} \tag{2-9}$$

где y_1 и x — выходная и входная величины, сводится к приведению их к системе уравнений в канонической форме. Если порядок правой и левой частей уравнения (2-9) одинаков, то после деления на p^n и решения относительно y_1 получим

$$\begin{aligned}y_1=b_nx+\frac{1}{p}\Big[(-a_{n-1}y_1+b_{n-1}x)+\frac{1}{p}\Big\{(-a_{n-2}y_1+b_{n-2}x)+\ldots\\ \ldots+\frac{1}{p}\Big[(-a_1y_1+b_1x)+\frac{1}{p}(-a_0y_1+b_0x)\Big]\ldots\Big\}\Big].\end{aligned} \tag{2-10}$$

Решение на АВМ уравнения (2-10) эквивалентно моделированию n уравнений в канонической форме и дополнительного уравнения связи:

$$\left.\begin{aligned}&py_{n+1}=-a_0y_1+b_0x;\\&py_n=-a_1y_1+b_1x+y_{n+1};\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&py_2=-a_{n-1}y_1+b_{n-1}x+y_3;\\&y_1=b_nx+y_2.\end{aligned}\right\} \tag{2-11}$$

Начальные условия в преобразованной системе (2-11) определяются непосредственно из уравнений этой системы:

$$\left.\begin{aligned}
&y_{20}=(y_{10}-b_nx_0);\\
&y_{30}=y'_{20}+(a_{n-1}y_{10}-b_{n-1}x_0)=(y'_{10}-b_nx'_0)+(a_{n-1}y_{10}-b_{n-1}x_0);\\
&y_{40}=(y''_{10}-b_nx''_0)+(a_{n-1}y'_{10}-b_{n-1}x'_0)+(a_{n-2}y_{10}-b_{n-2}x_0);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_{(n+1)0}=(y_{10}^{(n-1)}-b_nx_0^{(n-1)})+(a_{n-1}y_{10}^{(n-2)}-b_{n-1}x_0^{(n-2)})+\ldots\\
&\ldots+(a_1y_{10}-b_1x_0).
\end{aligned}\right\}\quad (2\text{-}12)$$

При этом в (2-12) необходимо использовать предначальные значения входной и выходной переменных, заданные для $t=0$.

Рассмотренный метод преобразования уравнений вида (2-9) к системе уравнений в каноническом форме (2-11) называют *методом канонической формы*. Он обладает большой эффективностью при решении на АВМ неоднородных дифференциальных уравнений с производными в правой части, так как число входных цепей каждого операционного усилителя не превышает трех, а общее число усилителей не превышает $n+3$ (необходимо n интеграторов и три инвертора для образования $-x$ и $\pm y_1$).

2. Приведение уравнений (2-9) к виду, удобному для моделирования на АВМ, можно осуществить и по так называемому *методу вспомогательной переменной*. Уравнение (2-9) имеет постоянные коэффициенты, поэтому, учитывая переместительность операций дифференцирования и интегрирования, его можно представить системой из двух уравнений:

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)z_1=x; \qquad (2\text{-}13)$$

$$y_1=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1p+b_0)z_1, \qquad (2\text{-}14)$$

где z_1 — вспомогательная переменная.

Применяя непосредственное преобразование уравнения (2-13), приведем его к системе канонических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&pz_1=z_2;\quad pz_2=z_3;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&pz_{n-1}=z_n;\quad pz_n=-a_0z_1-a_1z_2-\ldots-a_{n-1}z_n+x.
\end{aligned}\right\}\quad (2\text{-}15)$$

С учетом (2-15) уравнение (2-14) принимает вид

$$y_1=b_0z_1+b_1z_2+\ldots+b_{m-1}z_m+b_mz_{m+1}. \qquad (2\text{-}16)$$

Структурная схема решения задачи составляется по системе уравнений (2-15), (2-16). Недостатком метода является неравномерное распределение числа входных цепей между операционными усилителями. Начальные условия для переменных преобразованной системы (2-15), (2-16) определяются, как и при методе канониче ной формы, однако эта система не разрешена относительно начальных условий, что усложняет моделирование и ограничивает применимость метода. Использование метода может быть оправдано при наличии нулевых начальных условий.

3. Моделирование уравнения (2-9) можно осуществить также методом *понижения порядка*. Разрешим уравнение (2-9) относительно старшей производной:

$$p^n y_1 = -a_0 y_1 - a_1 p y_1 - \ldots - a_{n-1} p^{n-1} y_1 + b_0 x + b_1 p x + \ldots$$
$$\ldots + b_m p^m x. \tag{2-17}$$

Если допустить, что значение старшей производной $p^n y_1$ известно, то для получения искомой функции необходимо выполнить последовательно столько операций интегрирования, каков порядок старшей производной, а затем просуммировать все компоненты, составляющие правую часть уравнения (2-17). Одна группа этих слагаемых — искомая функция и ее младшие производные — получается путем наложения обратных связей с выхода интегрирующих усилителей на вход сумматора, а другая — за счет подачи извне внешних возмущений. Достоинство метода — его простота и отсутствие необходимости пересчета начальных условий. Недостаток — большое число входных цепей у усилителя, реализующего правую часть уравнения (2-17). Метод понижения порядка по существу аналогичен методу непосредственного преобразования уравнения высокого порядка к системе уравнений в канонической форме.

Использование метода непосредственного преобразования не вызывает затруднений, если правая часть уравнения (2-17) не содержит производных и имеет только свободный член b_0x (т. е. $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$). Трудностей также не возникает, если правая часть содержит производные от x, но эти производные можно получить непосредственно в АВМ при решении тех же дифференциальных уравнений, которые описывают закон изменения x.

Таким образом, составление структурных схем решения задач с использованием рассмотренных методов преобразования дифференциальных уравнений к виду, удобному для моделирования, не встречает принципиальных трудностей. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами производится теми же методами, что и линейных. Встречающиеся при решении многих задач нелинейные дифференциальные уравнения подготавливаются к решению на АВМ по той же программе, что и линейные. Однако в этом случае имеют место дополнительные этапы, связанные с необходимостью использования блоков для воспроизведения нелинейных функций. Воспроизведение нелинейных функций и переменных коэффициентов может быть осуществлено различными способами: решением вспомогательных дифференциальных уравнений, использованием блоков универсальных функциональных преобразователей, блоков переменных коэффициентов и т. д.

§ 2-2. Моделирование дифференциальных уравнений в частных производных

При исследованиях переходных и установившихся режимов работы электротехнических устройств часто приходится использовать уравнения в частных производных. К ним относятся, например, уравнения электрических и магнитных полей; уравнения, описывающие процессы теплопередачи, и т. д.

Решение на АВМ задач, сводящихся к решению дифференциальных уравнений в частных производных, требует особого внимания. Эти уравнения содержат, как правило, две или более независимые переменные, в то время как процессы представляются лишь одной независимой переменной — временем. Большинство задач теории поля сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$\Phi\left(x,\ y,\ z,\ t,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}\right)=0. \qquad (2\text{-}18)$$

Решением уравнения (2-18) является некоторая функция времени и пространственных координат $u(x,\ y,\ z,\ t)$, определяющая заданную область поля в соответствии с граничными и начальными условиями.

В электрических машинах распространены поля, в которых работа, необходимая для перемещения тела в точку $(x,\ y,\ z)$, однозначно определяется функцией потенциала $u(x,\ y,\ z)$, а само поле характеризуется вектором напряженности $\mathbf{A}=\mathrm{grad}\,u$. Если в таком поле отсутствуют источники и стоки энергии, то $\mathrm{div}\,\mathbf{A}=0$ и поле описывается уравнением Лапласа:

$$\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2+\partial^2u/\partial z^2=0. \qquad (2\text{-}19)$$

При наличии источников или стоков с плотностью $F(x,\ y,\ z)$ поле описывается неоднородным уравнением Пуассона:

$$\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2+\partial^2u/\partial z^2=F\,(x,\ y,\ z). \qquad (2\text{-}20)$$

Функция $u(x,\ y,\ z)$, являющаяся решением уравнений (2-19), (2-20) при заданных краевых условиях на границе области ($u_г$, $\partial u_г/\partial n$), где n — нормаль к границе, определяет распределение потенциала и напряженности стационарного поля в трехмерном пространстве.

Изучение процессов теплопередачи проходит на основании решения уравнения Фурье, описывающего распределение температур и движение масс в сплошных средах. В простейшем случае оно имеет вид

$$\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2+\partial^2u/\partial z^2=a\partial u/\partial t. \qquad (2\text{-}21)$$

При решении уравнения Фурье (в отличие от уравнений Лапласа и Пуассона) необходимо задать для функции $u(x,\ y,\ z,\ t)$ не только краевые условия на границе области ($u_г$, $\partial u_г/\partial n$) при $t \geqslant 0$, но и начальные условия $u(x, y, z, 0)$ для всех точек внутри исследуемой области при $t=0$. Решения уравнений Лапласа и Фурье [(см. 2-19), (2-21)] удовлетворяют принципу максимума, согласно которому экстремальное значение достигается в начальный момент на границе области. Это свойство оказывается полезным при масштабировании переменных в уравнениях, решаемых на АВМ.

Особенностью решающих элементов АВМ является способность оперировать только с функциями и решать обыкновенные дифференциальные уравнения, имеющие только одну независимую переменную — время. Поэтому все существующие методы решения дифференциальных уравнений в частных производных строятся на представлении искомого решения как результата выполнения непрерывных операций над функциями одной переменной. При этом сравнительно просто поддаются решению уравнения с двумя независимыми переменными. Значительно сложнее решение уравнений с тремя независимыми переменными. При большем их числе получить решение становится практически невозможно.

Все рассмотренные методы интегрирования уравнений в частных производных основаны на представлении их в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых будут характеризовать решение исходного уравнения. Рассмотрим один из наиболее распространенных и универсальных методов решения уравнений в частных производных — *метод конечных разностей*. Согласно этому методу непрерывные интервалы изменения переменных, например x, y или t, заменяются множествами дискретно расположенных точек. Сначала определяются решения для этих точек, а затем при помощи интерполяции строятся непрерывные эквипотенциальные линии или линии тока. При этом уравнение в частных производных можно представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые следует решать совместно.

Таким образом, первым этапом решения является разделение оси, характеризующей непрерывное изменение одной из независимых переменных, на ряд отрезков конечной величины. Причем это изменение считается не дифференциально малым, а конечным, определяемым длиной отрезка. Разделение оси выбранной координаты рекомендуется производить, пользуясь рядом Тейлора.

Предположим, что в точке x, y известна функция $u(x, y)$, тогда значение в точке x, $y+h$ можно представить в виде ряда

$$u(x, y+h) = u(x, y) + h\,\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{h^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \dots, \tag{2-22}$$

а в точке x, $y-h$ — в виде ряда

$$u(x, y-h) = u(x, y) - h\,\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{h^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \dots \tag{2-23}$$

Если величина шага h мала, то, пренебрегая членами выше первого порядка, получаем

$$\partial u(x,\ y)/\partial y \approx [u(x,\ y+h)-u(x,\ y)]/h, \tag{2-24}$$

или

$$\partial u(x,\ y)/\partial y \approx [u(x,\ y)-u(x,\ y-h)]/h. \tag{2-25}$$

Правые части выражений (2-24) и (2-25) называют *конечными разностями первого порядка «вперед» и «назад»*. *Центральную разность первого порядка* определяем, вычитая (2-23) из (2-22) и отбрасывая при этом члены выше третьего порядка:

$$\partial u(x,\ y)/\partial y \approx [u(x,\ y+h)-u(x,\ y-h)]/(2h). \tag{2-26}$$

Складывая (2-22) и (2-23), определяем *центральную разность второго порядка*, аппроксимирующую вторую производную:

$$\partial^2 u(x,\ y)/\partial y^2 \approx [u(x,\ y+h)-2u(x,\ y)+u(x,\ y-h)]/h^2. \tag{2-27}$$

Выражения для старших производных можно найти аналогично, рассматривая большее число точек.

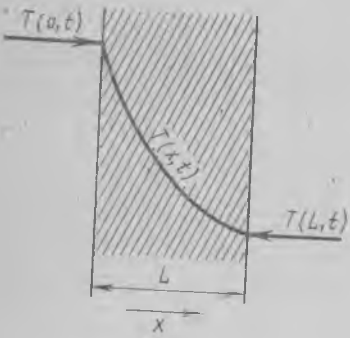


Рис. 2-3

Метод конечных разностей является приближенным. Погрешность вычислений обусловлена ошибкой метода, которая тем меньше, чем больше число взятых отрезков для всего диапазона изменения одной из независимых переменных. Учитывая ограниченную точность действия решающих элементов, можно показать, что наибольшая точность решения обычно достигается при 6—10 точках счета.

Аналогично (2-25) и (2-26) можно получить следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}=\frac{u(x+l,\ y)-u(x-l,\ y)}{2l}\approx\\
&\approx\frac{u(x+l,\ y)-u(x,\ y)}{l}\approx\frac{u(x,\ y)-u(x-l,\ y)}{l};\\
&\frac{\partial^2 u(x,\ y)}{\partial x^2}=\frac{u(x+l,\ y)-2u(x,\ y)+u(x-l,\ y)}{l^2};\\
&\frac{\partial^2 u(x,\ y)}{\partial x\partial y}=\frac{u(x+l,\ y+h)-u(x+l,\ y-h)-}{4hl}\longrightarrow\\
&\longrightarrow\frac{-u(x-l,\ y+h)+u(x-l,\ y-h)}{4hl},
\end{aligned}\right\} \tag{2-28}$$

где h и l — шаги аппроксимации по координатам x и y.

Для иллюстрации применения метода конечных разностей рассмотрим процесс распространения тепла через корпусную изоляцию фазоли электротехнического устройства при нестационарных тепловых условиях на границах (рис. 2-3). Изоляция однородна и имеет толщину L. Определим температуру T как функцию расстояния x и времени t, т. е. найдем $T(x, t)$. При этом известны граничные условия $T(0, t)$, $T(L, t)$ и начальные условия $T(x, 0)$.

Процесс распространения тепла в общем случае описывается уравнением Фурье

$$\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \tag{2-29}$$

где c — удельная объемная теплоемкость; λ — теплопроводность изоляции, t — время.

Принимая, что температура изменяется только по оси x, получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{2-30}$$

Заменяя вторую производную по x в (2-30) в соответствии с выражением (2-28), получаем для i-й точки обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{(\Delta x)^2}. \tag{2-31}$$

Фиксируя переменную x в n точках, записываем систему из $(n-2)$ дифференциальных уравнений при известных граничных значениях T_0 и T_n:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dT_1}{dt} &= (T_0 - 2T_1 + T_2)\,\frac{\lambda}{c\,(\Delta x)^2};\\
\frac{dT_2}{dt} &= (T_1 - 2T_2 + T_3)\,\frac{\lambda}{c\,(\Delta x)^2};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{dT_{n-1}}{dt} &= (T_{n-2} - 2T_{n-1} + T_n)\,\frac{\lambda}{c\,(\Delta x)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2-32}$$

Полная структурная схема решения системы уравнений (2-32) показана на рис. 2-4, где машинные переменные для простоты обозначены символами исходных величин. Данную схему можно упростить, заменив интеграторы и сумматоры интегросумматорами. Приведенная схема решения позволяет учитывать изменение теплопроводности и температуры на обеих границах изоляции вследствие взаимодействия с прилегающей средой и исследовать переходные процессы в системе при скачкообразном ступенчатом возмущении.

Рассмотренный метод решения дифференциальных уравнений в частных производных не ограничивает возможностей применения АВМ для решения приведенных задач. Совершенствование АВМ приводит к появлению новых методов решения. Так, например, использование быстродействующих АВМ позволяет отказаться от квантования независимых переменных (метод Монте-Карло). Существующие тенденции в развитии аналоговой вычислительной техники несомненно будут расширять область применения АВМ в инженерных исследованиях.

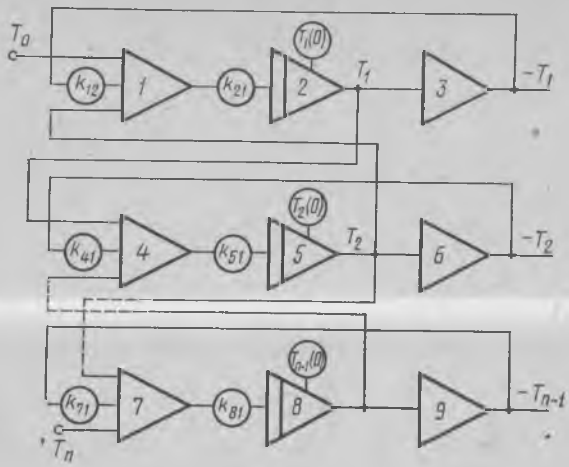


Рис. 2-4

§ 2-3. Выбор масштабов представления переменных и определение коэффициентов передачи решающих элементов

Наряду с преобразованием исходной системы дифференциальных уравнений к виду, удобному для ее решения на АВМ, составлением структурных схем решения задачи и выбором оптимального варианта схемы, одним из важнейших этапов моделирования является выбор масштабных коэффициентов и коэффициентов передачи вычислительных блоков, расчет машинных начальных условий.

При решении задач приходится сталкиваться с изменениями различных физических переменных в широком диапазоне. Реальная физическая величина сопоставляется с машинной переменной с помощью масштабов.

Масштабом или *масштабным коэффициентом* называют отношение машинной переменной, представляющей исходную переменную, к величине этой переменной:

$$m_x = u_x / x, \tag{2-33}$$

где u_x — машинная переменная; x — исходная переменная величина.

В литературе можно встретить выражение масштаба в виде обратной величины, однако это отличие не принципиально.

Конкретных рекомендаций по выбору масштабов, к сожалению, не существует, поэтому общим принципом их выбора является оцени максимальных значений переменной и всех ее производных, ожидаемых в процессе решения. Из соображений точности желательно выбирать масштаб возможно большим. Так как рабочий диапазон выходных напряжений большинства решающих блоков АВМ не превышает 100 В, то масштаб переменной выбирают из условия

$$m_x = 100/x_{\text{макс}}.$$

Максимальную величину переменной $x_{\text{макс}}$ не всегда можно оценить заранее, поэтому часто приходится подбирать значение масштаба интуитивно или на основании опыта.

Интегрирование в АВМ возможно только по времени, а следовательно, независимая переменная решаемого уравнения, имеющая в общем случае произвольный характер, выражается через машинное время с помощью масштаба времени:

$$m_t = t_{\text{м}}/t, \tag{2-34}$$

где $t_{\text{м}}$ и t — машинная и реальная независимые переменные.

При моделировании стремятся к тому, чтобы при решении задачи скорости изменения машинных переменных соответствовали частотам 0,05—3 Гц. Поэтому при отклонении частот изменения переменных реального процесса от указанного предела вводят масштаб времени, отличный от единицы.

При исследовании переходных процессов электрических машин переменного тока, в уравнениях которых время измеряется в секундах, масштаб времени выбирается порядка нескольких десятков. При исследованиях динамической устойчивости синхронных машин масштаб времени может быть выбран порядка 1—10, поскольку частоты колебаний роторов синхронных машин в послеаварийных режимах составляют 0,5—2 Гц. Выбор масштаба времени обусловлен не только характером исследуемых процессов, но и допустимым временем интегрирования применяемой машины. Правильный выбор масштаба времени представляет собой довольно сложную задачу, так как его величина влияет на точность решения задачи, диапазон изменения производных от машинных независимых, коэффициенты машинных уравнений и т. д.

Соответствие переходных процессов, получаемых при решении на АВМ, моделируемым процессам, обеспечивают выбором коэффициентов передач решающих элементов из соотношений, связывающих масштабы, коэффициенты передачи линейных и нелинейных элементов и коэффициенты в исходных уравнениях.

Пример 2-1. Подготовка для решения на АВМ линейного дифференциального уравнения

$$a_0 d^3x/dt^3 + a_1 d^2x/dt^2 + a_2 dx/dt + a_3 x - c = 0, \tag{2-35}$$

при начальных условиях

$$(d^2x/dt^2)_0 = (dx/dt)_0 = 0; \qquad x_0 = 1. \tag{2-36}$$

Разрешим уравнение (2-35) относительно старшей производной

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{a_3}{a_0}x + \frac{1}{a_0}c. \tag{2-37}$$

Структурная схема решения полученного уравнения, составленная по методу понижения порядка производной, приведена на рис. 2-5. Процессы в данной схеме описываются уравнением, аналогичным (2-37), но переменные в нем представлены в виде напряжений. Такое уравнение называют *машинным*. Чтобы получить его, для каждого вычислительного блока составим уравнение, выражающее соотношение между входными и выходными машинными величинами. В результате запишем систему уравнений:

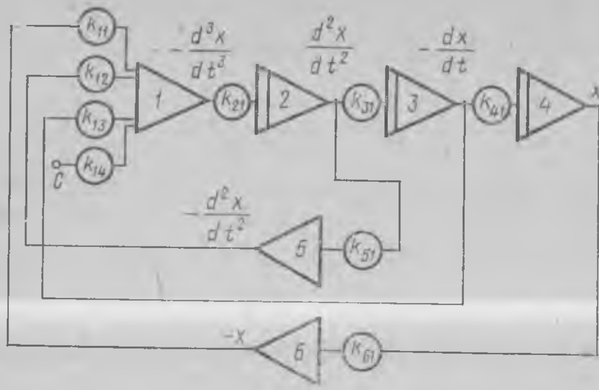


Рис. 2-5

$$\left.\begin{aligned}
&u_1 = -[k_{11}u_6 + k_{12}u_5 + k_{13}u_3 + k_{14}u_0];\\
&u_2 = -\frac{1}{p_{\text{м}}}k_{21}u_1; \qquad u_3 = -\frac{1}{p_{\text{м}}}k_{31}u_2; \qquad u_4 = -\frac{1}{p_{\text{м}}}k_{41}u_3;\\
&u_5 = -k_{51}u_2; \qquad u_6 = -k_{61}u_4,
\end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}38)$$

где u_1—u_6 — значения напряжений на выходах вычислительных блоков; k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{31}, k_{41}, k_{51}, k_{61} — коэффициенты передачи вычислительных блоков, т. е. отношения выходных и входных напряжений; $p_{\text{м}} = d/dt_{\text{м}}$ — знак дифференцирования по машинному времени.

Число уравнений в системе (2-38) соответствует числу вычислительных блоков схемы. Систему уравнений (2-38) можно преобразовать к одному уравнению третьего порядка, разрешенному относительно искомой машинной переменной u_4, соответствующей x. Для этого выразим машинные переменные $u_1 - u_3$, u_5, u_6 через u_4:

$$\left.\begin{aligned}
&u_3 = -\frac{p_{\text{м}}u_4}{k_{41}}; \qquad u_2 = -\frac{p_{\text{м}}u_3}{k_{31}} = \frac{p_{\text{м}}^2 u_4}{k_{31}k_{41}};\\
&u_1 = -\frac{p_{\text{м}}u_2}{k_{21}} = -\frac{p_{\text{м}}^3 u_4}{k_{21}k_{31}k_{41}};\\
&u_5 = -k_{51}\frac{p_{\text{м}}^2 u_4}{k_{31}k_{41}}; \qquad u_6 = -k_{61}u_4.
\end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}39)$$

Подставим (2-39) в первое уравнение системы (2-38):

$$-\frac{p_{\text{м}}^3 u_4}{k_{21}k_{31}k_{41}} = -\left(-k_{12}k_{51}\frac{p_{\text{м}}^2 u_4}{k_{31}k_{41}} - k_{13}\frac{p_{\text{м}}u_4}{k_{41}} - k_{11}k_{61}u_4 + k_{14}u_0\right). \quad (2\text{-}40)$$

Записываем уравнение (2-40) в оригиналах:

$$\frac{d^3u_4}{dt_{\text{м}}^3} = -k_{12}k_{51}k_{21}\frac{d^2u_4}{dt_{\text{м}}^2} - k_{13}k_{21}k_{31}\frac{du_4}{dt_{\text{м}}} - k_{11}k_{21}k_{31}k_{41}k_{61}u_4 + k_{14}k_{21}k_{31}k_{41}u_0. \tag{2-41}$$

Связь машинных переменных с исходными переменными устанавливается с помощью масштабных коэффициентов m_x, m_t, m_c:

$$u_4 = m_x x; \quad t_{\text{м}} = m_t t; \quad u_0 = m_c c. \tag{2-42}$$

Подставляем соотношения (2-42) в уравнение (2-41):

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -m_t k_{12}k_{21}k_{51}\frac{d^2x}{dt^2} - m_t^2 k_{13}k_{21}k_{31}\frac{dx}{dt} - m_t^3 k_{11}k_{21}k_{31}k_{41}k_{61}x + \frac{m_c m_t}{m_x}k_{14}k_{21}k_{31}k_{41}c. \tag{2-43}$$

Уравнение (2-43) будет тождественно уравнению (2-37) при условии равенства коэффициентов. Приравнивая коэффициенты при соответствующих производных в уравнениях (2-37) и (2-43), получаем

$$\left.\begin{aligned} &m_t k_{12}k_{21}k_{51} = a_1/a_0; \quad && m_t^2 k_{13}k_{21}k_{31} = a_2/a_0; \\ &m_t^3 k_{11}k_{21}k_{31}k_{41}k_{61} = a_3/a_0; \quad && (m_c m_t/m_x)k_{14}k_{21}k_{31}k_{41} = 1/a_0. \end{aligned}\right\} \tag{2-44}$$

В соотношениях (2-44) число неизвестных передаточных коэффициентов больше числа уравнений, поэтому часть из них выбирается относительно произвольно, исходя из других соображений, тогда как остальные определяются из соотношений (2-44). Приняв, например, $k_{21}=k_{31}=k_{41}=k_{51}=k_{61}=1$, записываем

$$\left.\begin{aligned} &k_{12} = \frac{1}{m_t}\cdot\frac{a_1}{a_0}; \quad && k_{13} = \frac{1}{m_t^2}\cdot\frac{a_2}{a_0}; \\ &k_{11} = \frac{1}{m_t^3}\cdot\frac{a_3}{a_0}; \quad && k_{14} = \frac{m_x}{m_c m_t}\cdot\frac{1}{a_0}. \end{aligned}\right| \tag{2-45}$$

Машинные начальные условия и внешние возмущения рассчитываются на основе соотношений

$$u_4(0) = m_x x_0; \quad u_0 = m_c c. \tag{2-46}$$

Таким образом, подготовка задачи к решению на АВМ завершена.

Процессы, описываемые уравнением (2-37), можно исследовать при любых значениях параметров, начальных условий и внешних возмущений, изменяя их в соответствии с выражениями (2-45) и (2-46).

Пример 2-2. Подготовка нелинейного дифференциального уравнения для решения на АВМ.

Переходный процесс при включении контура *R-L-C* на постоянное напряжение описывается уравнением

$$u = \frac{d\Psi}{dt} + u_C + Ri, \tag{2-47}$$

где Ψ — потокосцепление катушки, связанное с током i соотношением $\Psi = f(i)$ или $i = F(\Psi)$; $u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$ — напряжение на конденсаторе C.

Разрешим уравнение (2-47) относительно производной потокосцепления:

$$\frac{d\Psi}{dt} = u - u_C - Ri. \tag{2-48}$$

Структурная схема решения уравнения (2-48) приведена на рис. 2-6. Масштабы переменных решаемого уравнения определяются соотношениями

$$m_t = t_{\text{м}}/t; \qquad m_i = u_2/i; \qquad m_u = u_0/u = u_3/u_C; \qquad m_\Psi = u_1/\Psi, \tag{2-49}$$

где u_1, u_2, u_3 — напряжения на выходе блоков *1*, *2*, *3*; u_0 — постоянное входное напряжение блока *1*.

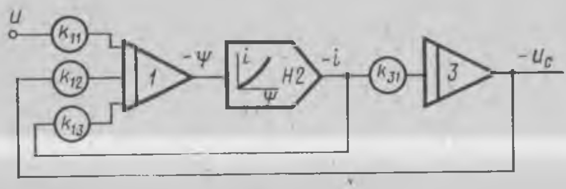


Рис. 2-6

В соответствии с (2-49) запишем для блока *1* машинное уравнение

$$u_1 = -\int_0^{t_{\text{м}}} (-k_{11}u_0 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3)\, dt_{\text{м}}$$

или

$$\Psi m_\Psi = m_t \int_0^t (k_{11}m_u u - k_{12}m_u u_C - k_{13}m_i i)\, dt. \tag{2-50}$$

Из сравнения исходного уравнения (2-48) и машинного уравнения (2-50) получим

$$k_{11} = \frac{m_\Psi}{m_u m_t}; \qquad k_{12} = \frac{m_\Psi}{m_u m_t}; \qquad k_{13} = R\,\frac{m_\Psi}{m_i m_t}. \tag{2-51}$$

Чтобы определить коэффициент передачи по входу интегратора *3*, составим машинное уравнение, связывающее его выходную и входную величины:

$$u_C m_u = k_{31} m_i m_t \int_0^t i\,dt. \tag{2-52}$$

Уравнению (2-52) соответствует исходное выражение

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt. \tag{2-53}$$

Из сравнения (2-52) и (2-53) определим

$$k_{31} = \frac{1}{C}\cdot\frac{m_u}{m_i m_t}. \tag{2-54}$$

Нелинейная зависимость $i=f(\Psi)$, набираемая на блоке 2, должна быть построена с учетом масштабов тока и потокосцепления, т. е. в координатах $m_i i$ и $m_\Psi \Psi$.

Пример 2-3. Исследование переходного процесса в электротехнической схеме при внезапном включении ее на синусоидальную ЭДС.

Исследуемая схема представлена на рис. 2-7, где $e=E_m \sin \omega t$ — синусоидальная ЭДС, $R1$, $R2$ — резисторы, $L1$, $L2$ — катушки индуктивности, C — конденсатор, $K1$ — коммутирующее устройство.

В момент времени $t=0$ осуществляется замыкание $K1$. Происходящие при этом процессы описываются дифференциальными уравнениями:

$$E_m \sin \omega t = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_C dt; \qquad (2\text{-}55)$$

$$0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - \frac{1}{C} \int i_C dt. \qquad (2\text{-}56)$$

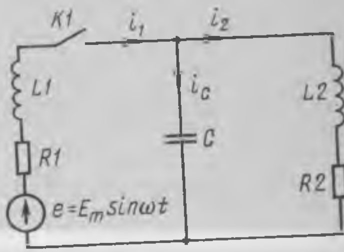


Рис. 2-7

При выбранных на рис. 2-7 направлениях тока связь между токами устанавливается соотношением

$$i_C - i_1 + i_2 = 0. \qquad (2\text{-}57)$$

Чтобы составить структурную схему математической модели, уравнения (2-55) и (2-56) представим в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_1 C} \int i_C dt + \frac{1}{L_1} E_m \sin \omega t; \\ \frac{di_2}{dt} &= -\frac{R_2}{L_2} i_2 + \frac{1}{L_2 C} \int i_C dt. \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}58)$$

Соответствующая уравнениям (2-57) и (2-58) структурная схема математической модели приведена на рис. 2-8.

Для определения коэффициентов передач отдельных решающих элементов составим уравнения, характеризующие связь между входными и выходными напряжениями для каждого решающего элемента. При этом используем выражения для передаточных функций усилителей вида (2-38):

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{p_{\text{м}}} (k_{11} u_1 + k_{12} u_6 + k_{13} u_9); \\ u_2 &= -k_{21} u_1; \\ u_3 &= -\frac{1}{p_{\text{м}}} (k_{31} u_3 + k_{32} u_5); \\ u_4 &= -(k_{41} u_2 + k_{42} u_3); \\ u_5 &= -\frac{1}{p_{\text{м}}} k_{51} u_4; \\ u_6 &= -k_{61} u_5; \\ u_{10} &= -k_{101} u_5. \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}59)$$

В уравнениях (2-59) u_1 и u_3 выражают в некотором масштабе токи i_1 и
Разрешая уравнения (2-59) относительно u_1 и u_3, получим

$$\left.\begin{aligned} p_{\text{м}} u_1 &= -k_{11} u_1 - \frac{1}{p_{\text{м}}} k_{12} k_{61} k_{51} k_{41} k_{21} u_1 + \frac{1}{p_{\text{м}}} k_{12} k_{61} k_{51} k_{42} u_3 + k_{13} u_9; \\ p_{\text{м}} u_3 &= -k_{31} u_3 + \frac{1}{p_{\text{м}}} k_{21} k_{32} k_{51} k_{41} u_1 - \frac{1}{p_{\text{м}}} k_{32} k_{51} k_{42} u_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}60)$$

Связь напряжений на выходах блоков u_1, u_3, u_9 с реальными токами устанавливается соотношениями:

$$u_1 = i_1 m_i; \qquad u_3 = i_2 m_i; \qquad u_9 = e m_u, \qquad (2\text{-}61)$$

где m_i и m_u — масштабы тока и напряжения.

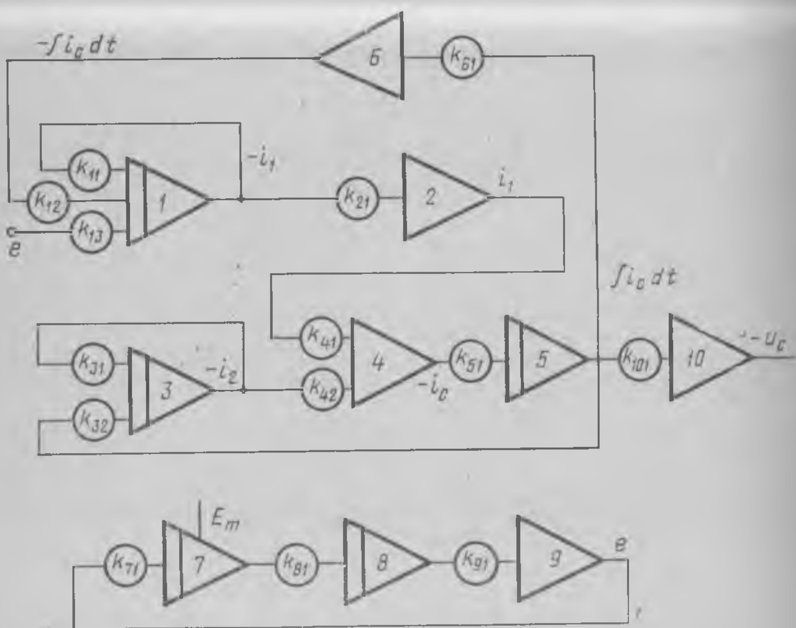


Рис. 2-8

Масштаб времени можно определить из соотношения

$$t_{\text{м}} = t m_t. \qquad (2\text{-}62)$$

Из (2-62) можно получить выражения для операторов дифференцирования и интегрирования по машинному времени:

$$p_{\text{м}} = \frac{1}{m_t} \cdot \frac{d}{dt}; \qquad \frac{1}{p_{\text{м}}} = m_t \int dt. \qquad (2\text{-}63)$$

Вводя уравнения преобразования переменных (2-61) и (2-62) в систему уравнений (2-60) и деля все члены полученных уравнений на m_i/m_t, получаем уравнения математической модели, записанные через коэффициенты передачи блоков, масштабные коэффициенты и исходные переменные решаемой задачи:

$$\left.\begin{aligned}\frac{di_1}{dt} &= m_t k_{11} i_1 - m_t^2 k_{12} k_{61} k_{51} k_{41} k_{21} \int i_1 dt + m_t^2 k_{13} k_{61} k_{51} k_{42} \int i_2 dt + \\ &+ \frac{k_{13} m_u m_t}{m_i} e; \\ \frac{di_2}{dt} &= -m_t k_{31} i_2 + m_t^2 k_{21} k_{32} k_{51} k_{41} \int i_1 dt - m_t^2 k_{32} k_{51} k_{42} \int i_2 dt.\end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}64)$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих переменных в уравнениях (2-63) и (2-64), записываем:

$$\left.\begin{aligned}&m_t k_{11} = \frac{R_1}{L_1}; \qquad m_t k_{31} = \frac{R_2}{L_2}; \qquad m_t^2 k_{12} k_{61} k_{51} k_{41} k_{21} = \frac{1}{L_1 C}; \\ &m_t^2 k_{13} k_{61} k_{51} k_{42} = \frac{1}{L_1 C}; \qquad m_t^2 k_{21} k_{51} k_{32} k_{41} = \frac{1}{L_2 C}; \\ &m_t^2 k_{32} k_{51} k_{42} = \frac{1}{L_2 C}; \qquad \frac{k_{13} m_u m_t}{m_i} = \frac{1}{L_1}.\end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}65)$$

Для расчета коэффициентов системы (2-65) выбираем масштаб времени, напряжения и тока. Пусть требуется рассчитать схему при следующих основных параметрах: $E_m = 22\,000$ В, $L_1 = 0{,}001$ Гн, $\omega = 314$ 1/с, $R_1/L_1 = R_2/L_2 = 0{,}05$ 1/с.

Масштаб времени выбираем из условий удобства осциллографирования и наблюдения решения. При этом принимаем частоту ЭДС генератора синусоидальной $\omega_м = 5$. Тогда

$$m_t = t_м/t = \omega/\omega_м = 314/5 = 62{,}8 \text{ с/с}.$$

Масштаб напряжения выбираем из условия $u_{9m} = 20$ В. Тогда

$$m_u = u_{9m}/E_m = 20/22\,000 = 0{,}00091 \text{ В/В}.$$

Оценивая приближенно максимально возможное значение тока в элементах рассматриваемой схемы, выбираем масштаб тока

$$m_i = 100/I_{макс} = 0{,}002 \text{ В/А}.$$

Выбираем коэффициенты передачи сумматоров и инверторов: $k_{21} = k_{42} = k_{61} = 1$, $k_{51} = 10$.

Подставляя в выражения (2-65) значения масштабов и принятые значения коэффициентов передачи для сумматоров и инверторов и выражая коэффициенты передачи блоков через параметры схемы, получаем:

$$\left.\begin{aligned}k_{11} &= \frac{R_1}{m_t L_1} = 0{,}016 \frac{R_1}{L_1}; \\ k_{31} &= \frac{R_2}{m_t L_2} = 0{,}016 \frac{R_2}{L_2}; \\ k_{12} &= \frac{1}{m_t^2 k_{51}} \cdot \frac{1}{L_1 C} = 0{,}256 \cdot 10^{-4} \frac{1}{L_1 C}; \\ k_{32} &= \frac{1}{m_t^2 k_{51}} \cdot \frac{1}{L_2 C} = 0{,}256 \cdot 10^{-4} \frac{1}{L_2 C}; \\ k_{13} &= \frac{1}{L_1} \cdot \frac{m_i}{m_u m_t} = 3{,}52.\end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}66)$$

Чтобы определить напряжение, пропорциональное напряжению на емк[ости] $\frac{1}{C}\int i_C dt$ реальной схемы, используют усилитель *10* (см. рис. 2-8), машин[ное] уравнение которого имеет вид

$$u_{10} = -k_{101}u_5 = k_{101}k_{51}u_4/p_{\text{м}}. \quad (2\text{-}6[7])$$

Уравнения реальных переменных можно получить, подставляя в (2-67) соо[т]ветствующие выражения из (2-61) и (2-63):

$$u_C = k_{101}k_{51}\frac{m_t m_i}{m_u}\int i_C dt. \quad (2\text{-}68)$$

Сравнивая (2-68) с выражением $u_C = \frac{1}{C}\int i_C dt$, получаем

$$k_{101}k_{51}m_t m_i/m_u = 1/C. \quad (2\text{-}69)$$

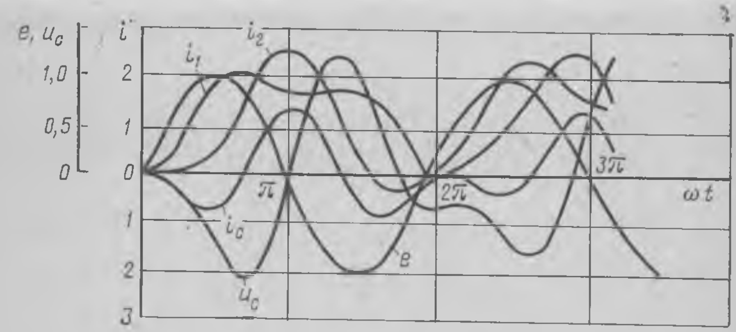


Рис. 2-9

С учетом принятого ранее значения $k_{51}=10$ находим

$$k_{101} = \frac{m_u}{m_t m_i}\cdot\frac{1}{10C}. \quad (2\text{-}70)$$

Если в реальной схеме конденсаторная батарея имеет начальный заряд, то на блоке *5* устанавливается начальное условие, определяемое выражением

$$u_{50} = u_{C0}m_u/k_{101}. \quad (2\text{-}71)$$

Синусоидальное напряжение, пропорциональное $E_m \sin\omega t$, обычно получают в результате решения уравнения колебательного звена:

$$d^2y/dt^2 + \omega^2 y = 0. \quad (2\text{-}72)$$

Структурная схема решения уравнения (2-72) представлена блоками *7—9* (см. рис. 2-8), машинные уравнения которой имеют вид

$$u_7 = -k_{71}u_9/p_{\text{м}}; \quad u_8 = -k_{81}u_7/p_{\text{м}}; \quad u_9 = -k_{91}u_8. \quad (2\text{-}73)$$

Разрешая систему (2-73) относительно u_9 и подставляя в полученное уравнение соответствующие соотношения из (2-61) и (2-63), записываем

$$d^2y/dt^2 + k_{71}k_{81}k_{91}m_t^2 y = 0. \quad (2\text{-}74)$$

Из уравнения (2-72) и (2-74) находим, что

$$k_{71}k_{81}k_{91}m_t^2 = \omega^2. \tag{2-75}$$

Принимая $k_{91}=1$, определяем $k_{71}=k_{81}=\omega/m_t=314/62{,}8=5$.

Чтобы получить синусоидальное гармоническое колебание, найдем начальные условия интегрирующих усилителей:

$$u_{70}=E_m m_u = 22\,000\cdot 0{,}00091 = 20\ \text{В}, \quad u_{80}=0.$$

Таким образом, подготовка задачи к решению на АВМ закончена. Вычислив значения k_{11}, k_{31}, k_{12}, k_{32} для различных соотношений параметров схемы, можно приступить к ее исследованию.

Представленная математическая модель (см. рис. 2-8) позволяет исследовать процессы в рассматриваемой схеме при любых соотношениях ее параметров.

На рис. 2-9 приведена осциллограмма решения для токов i_1, i_2, i_C, ЭДС e и напряжения конденсатора u_C при заданных параметрах.

§ 2-4. Некоторые вспомогательные приемы моделирования

Моделируемый физический объект всегда находится во взаимодействии с внешней средой, поэтому функция внешнего воздействия должна учитываться в уравнениях при математическом описании процессов. Внешние возмущающие воздействия при отсутствии специальных генераторов можно получить с помощью решающих элементов АВМ. Еще одной возможностью получения внешнего воздействия является его физическое моделирование и последующее использование в аналоговой модели объекта. Связь между физической и аналоговой частями модели осуществляется специальными управляемыми устройствами, называемыми *источниками тока*. Рассмотрим наиболее распространенные вспомогательные приемы моделирования электрических машин.

Метод решения вспомогательных дифференциальных уравнений. Воспроизведение функций может быть осуществлено с помощью типовых блоков АВМ (сумматоров, интеграторов, инверторов и т. д.) методом интегрирования определяющих дифференциальных уравнений. Последовательно дифференцируя заданную функцию, находят такое дифференциальное уравнение, решение которого дает исходную функцию, и для реализации его решения не требуется специального оборудования. Такое уравнение называют *вспомогательным*, или определяющим. Затем решают полученное уравнение на АВМ. Метод позволяет получить различные функции.

Пример 2-4. Получение внешнего воздействия в виде гармонической функции $y=\sin(\omega t+\psi_0)$. Продифференцируем заданную функцию:

$$dy/dt=\omega\cos(\omega t+\psi_0). \tag{2-76}$$

Уравнение (2-76) не является определяющим, так как для образования функции $\cos(\omega t+\psi_0)$ необходимо функциональное устройство. Продифференцируем уравнение (2-76):

$$d^2y/dt^2 = -\omega^2\sin(\omega t+\psi_0) = -\omega^2 y \tag{2-77}$$

или

$$d^2y/dt^2+\omega^2 y=0. \tag{2-78}$$

Уравнение (2-78) — определяющее, так как при начальных условиях $t=0$, $y_0=\sin\psi_0$, $(dy/dt)_0=\omega\cos\psi_0$ — его решением является заданная функция.

Структурная схема решения уравнения (2-78) приведена на рис. 2-10. Она широко используется при моделировании электротехнических задач, например

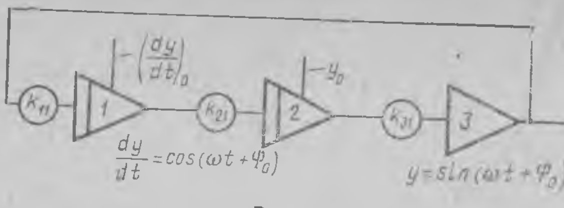


Рис. 2-10

при изменяющемся по синусоидальному закону напряжении источника питания, для реализации закона изменения взаимной индуктивности между контурами статора и ротора электрической машины и т. д.

Для удобства пользования схемой рекомендуется коэффициенты передачи блоков принимать равными

$$k_{11}=k_{21}=\omega/m_t;\qquad k_{31}=1. \tag{2-79}$$

Начальные условия, устанавливаемые на интегрирующих усилителях 1 и 2 (см. рис. 2-10), находятся из соотношений

$$u_{10}=\omega m_y\cos\psi_0/(m_t k_{21}k_{31});\qquad u_{20}=-\sin\psi_0 m_y/k_{31}. \tag{2-80}$$

При этом должны выполняться неравенства

$$\omega m_y/(m_t k_{21}k_{31})\leqslant 100;\qquad m_y/k_{31}\leqslant 100. \tag{2-81}$$

В ряде случаев необходимо получить зависимость $y=\sin(\omega t+\psi_0)$ при изменяющейся угловой частоте колебаний $\omega=\mathrm{var}$. При этом целесообразно пользоваться несколько видоизмененной (по сравнению с предыдущей) схемой, приведенной на рис. 2-11. Блок *Д* здесь выполняет операцию дифференцирования.

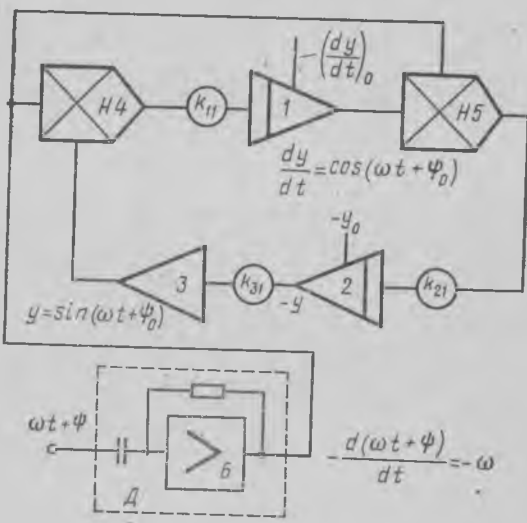


Рис. 2-11

При $\omega=$const величина $d(\omega t+\psi_0)/dt=\omega$ и на выходе блока 3 образуется гармоническое колебание с постоянной угловой частотой. Данная схема широко применяется при моделировании электрических машин с учетом изменения частоты вращения ротора. В этом случае блок Д отсутствует, а величина $d(\omega t+\psi_0)/dt=\omega$ получается при решении уравнения движения ротора электрической машины.

Пример 2-5. Получение функции, представленной полиномом третьей степени:

$$y=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3. \tag{2-82}$$

Продифференцировав дважды (2.82), получаем

$$d^2y/dt^2=2a_2+6a_3t. \tag{2-83}$$

Решение (2-83) при начальных условиях — $t=0$, $y_0=a_0$, $dy_0/dt=a_1$ — является полиномом (2-82). Структурная схема решения уравнения (2-83) приведена на рис. 2-12.

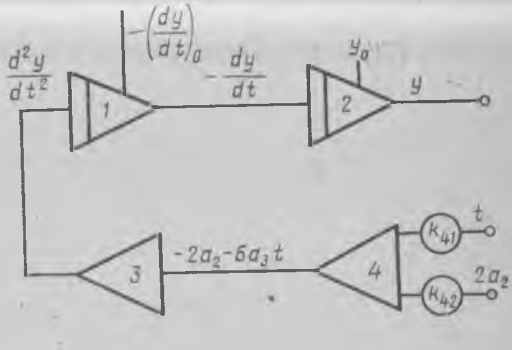


Рис. 2-12

Метод неявных функций. Этот метод осуществляет воспроизведение функциональных зависимостей или операций, которые другими способами получить затруднительно или практически невозможно *. Он основан на выполнении операции $u_{вых}=f(u_1, u_2)$ в виде $F(u_1, u_2, u_{вых})=0$. С помощью решающих элементов АВМ соотношение $F(u_1, u_2, u_{вых})=0$ можно представить как

$$F(u_1, u_2, u_{вых})=u_{вых}/A, \tag{2-84}$$

где A — коэффициент усиления усилителя, входящего в схему управления.

Погрешность такого представления тем меньше, чем больше величина A. Схема устройства, реализующего выражение (2-84), показана на рис. 2-13. В ней использован усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления. Воспроизводимая функция представляет собой обратную функцию цепи обратной связи усилителя. Другими словами, при наличии функционального преобразователя, настроенного на функцию $f(u)$, можно с помощью рассматриваемой схемы образовать обратную ей функцию $f^{-1}(u)$. Примерами обратных функций могут служить: умножение — деление; логарифмирование — потенцирование; возведение в n-ю степень — извлечение корня n-й степени; получение $\sin\alpha$ — нахождение $\arcsin\alpha$ и т. д.

---

* *Шилейко А. В.* Основы аналоговой вычислительной техники. М., Энергия, 1971, с. 104—107.

Большой практический интерес представляет осуществление операции дифференцирования методом неявных функций. При этом в цепь обратной связи усилителя необходимо включить интегрирующее устройство (рис. 2-14).

Неявную функцию, соответствующую операции $u_{вых}=-du_{вх}/dt$ представим в виде

$$\int_0^t u_{вых}dt+u_{вх}=0. \tag{2-85}$$

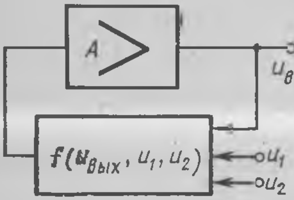


Рис. 2-13

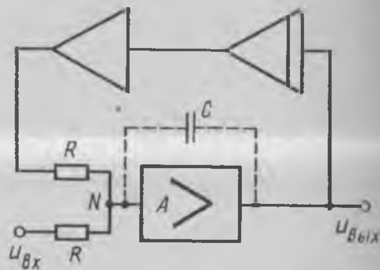


Рис. 2-14

Составим для точки N уравнение токов на основании закона Кирхгофа:

$$\left(\frac{u_{вых}}{A}-u_{вх}\right)\frac{1}{R}+\left(\frac{u_{вых}}{A}-\int_0^t u_{вых}dt\right)\frac{1}{R}=0, \tag{2-86}$$

где A — коэффициент усиления усилителя.

При $A\to\infty$ получим

$$-\frac{u_{вх}}{R}=-\frac{1}{R}\int_0^t u_{вых}dt \tag{2-87}$$

или

$$u_{вх}=-\int_0^t u_{вых}dt, \tag{2-88}$$

откуда

$$u_{вых}=-du_{вх}/dt. \tag{2-89}$$

Для повышения стабильности работы схемы в цепь обратной связи усилителя иногда включают конденсатор (см. на рис. 2-14 штриховую линию).

Приближенное выполнение операции дифференцирования. Часто в устройствах управления или измерения требуется выполнить непосредственное дифференцирование. Идеальный оператор дифференцирования p практически трудно реализуем, так как для этого требуется неограниченное увеличение коэффициента усиления с ростом частоты. Однако на АВМ легко могут быть воспроизведены операторы типа $ap/(T_0p+1)$ или $ap/[(T_1p+1)(T_2p+1)]$, с помощью которых операция дифференцирования выполняется прибли-

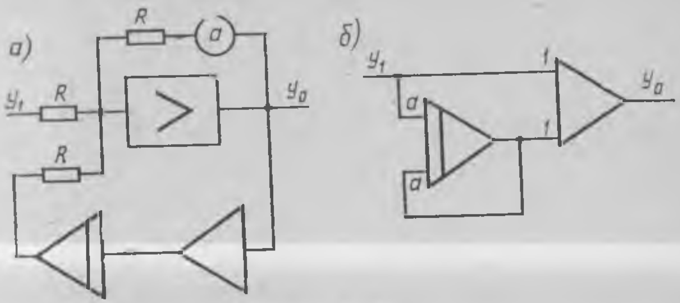


Рис. 2-15

женно. Точность ее выполнения в рабочем диапазоне частот, достаточно малых по сравнению со значениями $1/T_0$, $1/T_1$, $1/T_2$, вполне приемлема. Достоинством рассматриваемых приближенных методов дифференцирования является их способность «сглаживать» паразитные высокочастотные импульсные помехи, которые при использовании идеального дифференциатора усилились бы. На рис. 2-15, *а* и *б* приведены две практически используемые схемы дифференцирования, причем связь между входными и выходными напряжениями устанавливается соответственно соотношениями

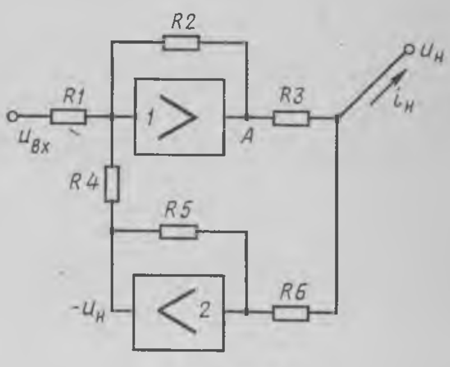


Рис. 2-16

$$y_0 = -\frac{p}{ap+1}y_1 \quad \text{и} \quad y_0 = -\frac{p/a}{p/a+1}y_1.$$

«Источник тока» и его применение. Для решения ряда задач требуются устройства с управляемыми выходными сопротивлениями. Основой их является «источник тока», разработанный применительно к моделированию синхронных машин. Источник тока представляет собой следящую систему, поддерживающую постоянным падение напряжения на сопротивлении, включенном последовательно в нагрузочную цепь (рис. 2-16). Рассмотрим условия настройки источника тока. Если в схеме (рис. 2-16) принято, что

$R_5=R_6$, то на основании закона Кирхгофа для суммирующей точки усилителя *1* можно написать уравнение

$$u_{вх}/R_1+U_A/R_2-U_н/R_4=0, \tag{2-90}$$

где $U_н$ — напряжение нагрузки.

В сопротивлении R_3 ток

$$i_3=(U_A-U_н)/R_3. \tag{2-91}$$

Ток нагрузки

$$i_н=i_3-U_н/R_6. \tag{2-92}$$

Решим уравнения (2-90) — (2-92) относительно тока нагрузки

$$i_н=\left(\frac{R_2}{R_3R_4}-\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_6}\right)U_н-u_{вх}\frac{R_2}{R_1R_3}. \tag{2-93}$$

При

$$R_2/(R_3R_4)-1/R_3-1/R_6=0 \tag{2-94}$$

получаем

$$i_н=-u_{вх}R_2/(R_1R_3), \tag{2-95}$$

т. е. при выполнении условия (2-94) ток нагрузки не зависит от напряжения в месте подключения выхода схемы. Таким образом, как видно из уравнения (2-95), получен источник тока, его ток зависит только от управляющего напряжения $u_{вх}$ и не зависит от сопротивления внешней схемы. На выходе усилителя *2* образуется напряжение узла, к которому подключен источник тока.

Регулировку источника тока можно производить сопротивлениями R_4 или R_3, определяемыми из соотношений:

$$R_4=R_2R_6/(R_3+R_6); \tag{2-96}$$

$$R_3=R_6(R_2/R_4-1). \tag{2-97}$$

Применение источника тока чрезвычайно разнообразно: измерение напряжений, когда сопротивление схемы измерения должно быть очень большим; использование в качестве управляемых омических и реактивных сопротивлений, в качестве положительного или отрицательного сопротивления; моделирование индуктивности, ЭДС и т. д.

При моделировании электрических машин или электротехнических схем источник тока дает возможность сочетать математическое моделирование с физическим моделированием отдельных элементов системы. Так, например, при исследовании системы «синхронный генератор — выпрямитель — нагрузка», применяя источник тока, можно осуществить преобразования напряжений модели синхронного генератора, пропорциональных реальным токам, в токи на входе выпрямителя, а также обратные преобразования. Такой метод моделирования в ряде случаев значительно упрощает задачу исследования.

§ 2-5. Устойчивость математической модели и погрешность решения

При решении задач на АВМ неизбежно возникает вопрос о точности полученного решения. Неточность решения уравнений определяется тремя видами погрешностей: решающих элементов, математического описания объекта и вывода информации.

Погрешности решающих элементов складываются из многих составляющих, из которых можно указать основные:

1. Погрешность, вносимая конечным значением коэффициента усиления усилителя. Выше было показано, что операционный усилитель постоянного тока за счет бесконечно большого усиления и отрицательной обратной связи может выполнять операции суммирования, интегрирования и т. д. В действительности коэффициент усиления реального усилителя имеет конечную величину и, следовательно, выполняет операции с некоторой погрешностью, которая тем больше, чем меньше коэффициент усиления усилителя. С этой точки зрения, например, усилитель модели МНБ-1 более точен, чем усилитель модели МН-7.

2. Погрешность проводимостей входной цепи усилителя и цепи обратной связи. Эта погрешность определяется неточностью номинальных значений сопротивлений резисторов и емкостей конденсаторов, утечками конденсаторов и т. д. Причем она тем больше, чем больше число слагаемых, подаваемых на операционный усилитель, и чем больше передаточные коэффициенты, установленные на его входах. С этой точки зрения при составлении структурных схем решения нужно стремиться к минимальным передаточным коэффициентам на входах операционного усилителя и ограниченному числу слагаемых на каждом из усилителей.

3. Погрешность, обусловленная нестабильностью нулевого уровня усилителей. Дрейф нулей решающих усилителей определяется наличием сеточных токов, изменением эмиссии катодов электронных ламп, нестабильностью напряжения питания усилителя, изменением параметров элементов во времени, например от нагрева. Чтобы уменьшить влияние дрейфа нулей, после прогрева машины перед началом работы устанавливают нули с помощью чувствительного милливольтметра, подключенного к выходу усилителя при короткозамкнутом входе. Погрешности, вызванные установкой и дрейфом нуля, наиболее сильно сказываются в режиме интегрирования. Для уменьшения влияния дрейфа нуля очень важно масштабы переменных выбирать так, чтобы выходные напряжения решающих усилителей изменялись в пределах всей шкалы. Дрейф нуля схемы решения достаточно просто проверяется для линейной системы дифференциальных уравнений установкой нулевых начальных условий на интеграторах, отключением источников внешних возмущений и подачей команды «Пуск». Решение на выходах решающих усилителей должно быть нулевым. Практически идеальных нулевых решений получить не удается, однако отклонение решений от нуля не должно превышать долей вольта.

4. Погрешности нелинейных функциональных преобразователей. В настоящее время наиболее распространены диодные функциональные устройства. Для устройств этого типа погрешности обусловлены в основном аппроксимацией нелинейной зависимости и точностью ее воспроизведения, ошибками во входном сигнале, подаваемом на функциональный блок.

Чтобы уменьшить погрешности диодных функциональных преобразователей, следует увеличивать ступени аппроксимации на участках нелинейной характеристики, имеющей бóльшую кривизну. Необходимо также учитывать, что погрешности, обусловленные ошибками во входном сигнале и ошибками воспроизведения нелинейной зависимости, наиболее сильно проявляются у тех нелинейных зависимостей, которые имеют бóльшую кривизну.

Погрешность множительных и делительных устройств, работающих на принципе непрямого действия, возрастает с уменьшением величин сомножителей или величин делимого и делителя. Наибольшее влияние на погрешность решения задачи эти устройства оказывают в том случае, когда машинные значения сомножителей являются малыми величинами, а результат произведения с выхода множительного устройства подается на усилители с большими коэффициентами передачи.

Погрешность в решение вносят не только операционные усилители и функциональные преобразователи, но и другие решающие элементы — потенциометры, делители и т. д. Так, решающие элементы большинства АВМ дают погрешности не более: интегрирующие и суммирующие усилители — 0,1%, блоки перемножения и деления — 0,2—0,3%, функциональные преобразователи — 0,5%. Уменьшение погрешностей меньше чем на 0,1% на полушкалу приводит к резкому удорожанию машин и практически является нецелесообразным.

Точность решения задач на АВМ, к сожалению, не равна точности отдельных блоков, так как суммарная погрешность зависит и от конфигурации их соединения в структурной схеме, и от формы записи исходных дифференциальных уравнений. Исходные уравнения должны приводиться к такой форме, чтобы структурная схема содержала минимальное количество решающих блоков, особенно тех, которые дают значительные погрешности (блоки умножения, интегросумматоры и т. д.). Известно, что запись системы дифференциальных уравнений при сохранении в каждом уравнении только одного слагаемого в виде первой производной по времени (уравнения Коши) способствует получению схемы модели с минимальным количеством операционных усилителей.

При решении задач на АВМ всегда должна быть обеспечена структурная устойчивость модели. Однако при решении конкретных задач это не всегда получается, так как в самом оригинале процессы после возмущения могут не затухать во времени (например, самовозбуждение электрической машины).

Часто возникают и такие ситуации, при которых реальный объект устойчив, а структурная схема модели неустойчива. При этом

...льно возрастают погрешности решения, а в большинстве случаев получить решение невозможно, что объясняется неидеальностью выполнения операций решающими элементами. Подобное явление называют *структурной неустойчивостью модели.*

Для того чтобы модель была структурно устойчива, практически необходимо выполнение следующих условий:

а) в модели не должны содержаться контуры «алгебраического типа», т. е. замкнутые контуры, составленные из нечетного числа суммирующих усилителей с большим коэффициентом усиления. Это условие легко выполняется при приведении исходной линейной системы уравнений к такому виду, чтобы она состояла только из интегро-дифференциальных уравнений, каждое из которых разрешено относительно высшей производной одной из неизвестных. Правые части этих уравнений должны быть составлены так, чтобы высшие производные можно было определять методом последовательного исключения;

б) число контуров положительной обратной связи, состоящих из четного числа усилителей, в модели должно быть минимальным, а суммарный коэффициент передачи алгебраического контура с положительной обратной связью должен быть меньше единицы. Практически схема оказывается устойчивой при коэффициенте передачи $k \leqslant 0{,}95 \div 0{,}8$;

в) характеристические частоты инерционных блоков $\omega_0 = 1/(RC)$ должны быть на три-четыре порядка меньше частот, на которых вследствие фазовых искажений отрицательные обратные связи обращаются в положительные, т. е. меньше возможных частот самовозбуждения.

Выполнение этих правил в основном достигается преобразованием исходной системы уравнений. Если в схеме модели не удается избежать алгебраических контуров, то в них умышленно вносят некоторую инерционность, превращая тем самым отдельные блоки в фильтры нижних частот.

При исследованиях на АВМ большой интерес и практическую ценность представляет определение погрешности получаемого решения. Существуют различные способы оценки и контроля правильности решения задач.

Аналитический расчет погрешности решения может быть произведен путем анализа уравнений погрешностей. Существуют и косвенные методы оценки: повторное решение задачи с последующим сравнением результатов решений, сравнение машинного решения с теоретическим, решение на машине специальных тестовых задач.

При практической работе на АВМ может быть рекомендован следующий способ контроля правильности решения. Пусть задана линейная система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_n/dt &= f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{aligned}\right| \qquad (2\text{-}98)$$

при начальных условиях

$$x_1(0)=x_{10};\quad x_2(0)=x_{20};\ \ldots;\quad x_n(0)=x_{n0}.$$

Для проверки на точность решают не заданную (2-98), а вспомогательную систему

$$\left.\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) - f_1(x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{n0}); \\ dx_2/dt &= f_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) - f_2(x_{10},\ x_{20},\ \ldots\ x_{n0}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n/dt &= f_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) - f_n(x_{10},\ x_{20},\ \ldots\ x_{n0}). \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}99)$$

Решения системы (2-99), как известно, равны $x_1=x_{10}$; $x_2=x_{20}$; ...; $x_n=x_{n0}$. Отклонения машинного решения от этих значений будут характеризовать степень погрешности.

Рассмотренные основные положения, касающиеся структурной устойчивости моделей и точности решения задач на АВМ, следует учитывать как при разработке структурной схемы исследуемого объекта, так и при практической работе на моделирующей установке.

ГЛАВА III

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АСИНХРОННЫХ МАШИН

§ 3-1. Составление дифференциальных уравнений

При составлении уравнений и рассмотрении переходных процессов асинхронных машин используем общепринятые допущения и ограничения, связанные с понятием «идеализированная машина»: машина ненасыщена, потерь в стали нет; фазные обмотки симметричны и сдвинуты на угол 90 эл. град для двухфазных машин и на 120° для трехфазных; МДС (магнитодвижущие силы) обмоток и магнитные поля распределены синусоидально вдоль окружности воздушного зазора; воздушный зазор равномерен; ротор симметричен. Реальная распределенная обмотка заменена сосредоточенной, а ее МДС принята равной МДС реальной обмотки.

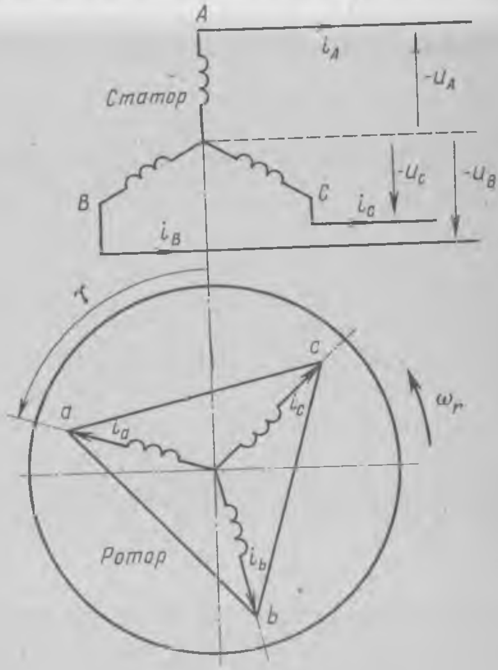


Рис. 3-1

В случае необходимости могут быть учтены насыщение магнитной цепи, потери в стали, несимметрия ротора и т. д., однако это значительно усложняет вид уравнений и их решение.

Математическое описание процессов электромеханического преобразования энергии в асинхронных машинах отличается известной сложностью. В связи с этим составление дифференциальных уравнений асинхронных машин является одним из важнейших этапов подготовки задачи к решению на АВМ. Асинхронные машины являются самым распространенным типом электрических машин, поэтому создание их математических моделей является особенно целесообразным, так как при этом становится возможным решение широкого круга задач, объединенных общностью алгоритма.

Не останавливаясь на общих вопросах математической теории электрических машин, называемой иногда *обобщенной теорией*, рассмотрим уравнения для наиболее распространенных на практике случаев.

Трехфазная машина. Для описания переходных процессов асинхронной машины, работающей в режиме двигателя или генератора, необходимо составить уравнения электрического равновесия для напряжений контуров и уравнение равновесия моментов, действующих на ротор.

Асинхронную машину обычно представляют как систему магнитно-связанных обмоток, расположенных на статоре и роторе. Рассматривая взаимодействие обмотки фазы A статора и обмотки фазы a ротора, следует отметить, что взаимное положение этих обмоток в пространстве при вращении ротора непрерывно изменяется (рис. 3-1). С учетом принятых допущений взаимная индуктивность между обмотками A и a

$$M_{Aa}=M\cos\gamma, \tag{3-1}$$

где M — максимальная величина взаимной индуктивности, которая имеет место при совпадении осей обмоток A и a; $\gamma=\int\limits_0^t \omega_r dt+\gamma_0$ — угол между осями обмоток фаз A и a ($\omega_r=2\pi pn$ — угловая частота ротора; n — частота вращения ротора, p — число пар полюсов; γ_0 — угол, определяющий начальное положение ротора).

Для трех фаз статора и ротора уравнения напряжений соответственно имеют вид

$$\left.\begin{aligned} d\Psi_A/dt+r_s i_A&=u_A;\\ d\Psi_B/dt+r_s i_B&=u_B;\\ d\Psi_C/dt+r_s i_C&=u_C;\end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

$$\left.\begin{aligned} d\Psi_a/dt+r_r i_a&=0;\\ d\Psi_b/dt+r_r i_b&=0;\\ d\Psi_c/dt+r_r i_c&=0.\end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

В уравнениях (3-2) и (3-3) $\Psi_A(\Psi_a)$ — полное потокосцепление фазы; $i_A(i_a)$ — ток в фазе; $r_s(r_r)$ — активное сопротивление фазы статора (ротора).

Потокосцепление любой n-й фазы статора определяется величиной собственной индуктивности фазы L_n и взаимной индуктивности ее M_{ni} со всеми другими обмотками машины.

Учитывая соотношение (3-1), можно записать выражения для потокосцеплений фаз обмоток статора и ротора. Для фаз A и a эти выражения имеют вид

$$\begin{aligned}\Psi_A={}&L_A i_A+M_{AB}i_B+M_{AC}i_C+M\cos\gamma i_a+\\ &+M\cos(\gamma+2\pi/3)\,i_b+M\cos(\gamma-2\pi/3)\,i_c;\end{aligned} \tag{3-4}$$

$$\Psi_a = L_a i_a + M_{ab} i_b + M_{ac} i_c + M \cos\gamma i_A + \\ + M\cos(\gamma + 2\pi/3)\, i_B + M\cos(\gamma - 2\pi/3)\, i_C, \quad (3\text{-}5)$$

где $L_A = L_B = L_C = L_s$ — индуктивность фазы статора; $L_a = L_b = L_c = L_r$ — индуктивность фазы ротора; $M_{AB} = M_{AC} = M_{BC} = M_s$ — взаимная индуктивность между обмотками статора; $M_{ab} = M_{ac} = M_{bc} = M_r$ — взаимная индуктивность между обмотками ротора.

Выражения потокосцеплений для фаз B, C статора и фаз b, c ротора аналогичны:

$$\Psi_B = L_s i_B + M_s i_A + M_s i_C + M\cos(\gamma - 2\pi/3)\, i_a + \\ + M\cos\gamma i_b + M\cos(\gamma + 2\pi/3)\, i_c; \quad (3\text{-}6)$$

$$\Psi_C = M_s i_A + M_s i_B + L_s i_C + M\cos(\gamma + 2\pi/3)\, i_a + \\ + M\cos(\gamma - 2\pi/3)\, i_b + M\cos\gamma i_c; \quad (3\text{-}7)$$

$$\Psi_b = M_r i_a + L_r i_b + M_r i_c + M\cos(\gamma - 2\pi/3)\, i_A + \\ + M\cos\gamma i_B + M\cos(\gamma + 2\pi/3)\, i_C; \quad (3\text{-}8)$$

$$\Psi_c = M_r i_a + M_r i_b + L_r i_c + M\cos(\gamma + 2\pi/3)\, i_A + \\ + M\cos(\gamma - 2\pi/3)\, i_B + M\cos\gamma i_C. \quad (3\text{-}9)$$

Электромагнитный момент асинхронной машины может быть определен как частная производная по углу поворота ротора от общего запаса электромагнитной энергии машины. Электромагнитная энергия асинхронной машины

$$W_{эм} = 0{,}5\,(\Psi_A i_A + \Psi_B i_B + \Psi_C i_C + \Psi_a i_a + \Psi_b i_b + \Psi_c i_c). \quad (3\text{-}10)$$

Электромагнитный момент

$$M'_{эм} = (\partial W_{эм}/\partial\gamma)\, p. \quad (3\text{-}11)$$

Уравнение движения ротора

$$M'_{эм} - M'_{мех} = \frac{1}{p} J \frac{d\omega_r}{dt}, \quad (3\text{-}12)$$

где J — момент инерции ротора и приведенный момент инерции рабочего механизма; $M'_{мех}$ — механический момент на валу ротора.

Выражения (3-2) — (3-12) образуют систему уравнений трехфазной асинхронной машины, которая содержит 14 уравнений, зависимыми переменными в ней являются шесть токов, шесть потокосцеплений, электромагнитный момент и частота вращения. Система уравнений асинхронной машины в общем случае нелинейна, так как в ней имеются уравнения, в которых коэффициенты являются функциями зависимых переменных рассматриваемой системы. При постоянной частоте вращения система уравнений асинхронной машины становится линейной, однако в ней содержится большое количество периодических коэффициентов, являющихся функциями времени.

Принципиально возможно и непосредственное решение полученной системы уравнений на АВМ, однако при этом получается довольно сложная структурная схема модели, а следовательно, и большая погрешность решения.

Чтобы упростить моделирование, систему уравнений трехфазной асинхронной машины, записанных в реальных фазных координатах, представим, как это принято в теории электрических машин, в системе ортогональных координат x, y, вращающихся в пространстве с некоторой произвольной угловой скоростью $\omega_к$. Преобразованные уравнения напряжений соответственно для статора и ротора имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} d\Psi_{xs}/dt-\omega_к\Psi_{ys}+r_s i_{xs}&=u_{xs};\\ d\Psi_{ys}/dt+\omega_к\Psi_{xs}+r_s i_{ys}&=u_{ys};\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}13)$$

$$\left.\begin{aligned} d\Psi_{xr}/dt+(\omega_к-\omega_r)\Psi_{yr}+r_r i_{xr}&=0;\\ d\Psi_{yr}/dt-(\omega_к-\omega_r)\Psi_{xr}+r_r i_{yr}&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}14)$$

Потокосцепления эквивалентных статорных Ψ_{xs}, Ψ_{ys} и роторных Ψ_{xr}, Ψ_{yr} контуров равны:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{xs}&=L_s i_{xs}+L_m i_{xr};\\ \Psi_{ys}&=L_s i_{ys}+L_m i_{yr};\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}15)$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{xr}&=L_r i_{xr}+L_m i_{xs};\\ \Psi_{yr}&=L_r i_{yr}+L_m i_{ys},\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}16)$$

где $L_s=L_{\sigma s}+(3/2)M$ и $L_r=L_{\sigma r}+(3/2)M$ — индуктивности обмоток статора и ротора, учитывающие магнитную связь с двумя другими фазными обмотками статора и ротора; $L_m=(3/2)M$ — взаимная индуктивность, учитывающая магнитную связь одной фазы статора с тремя обмотками ротора и соответственно одной обмотки ротора с тремя обмотками статора.

Токи эквивалентных контуров статора и ротора связаны с фазными токами соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} i_{xs}&=\frac{2}{3}\left[i_A\cos\omega_к t+i_B\cos\left(\omega_к t-\frac{2\pi}{3}\right)+i_C\cos\left(\omega_к t+\frac{2\pi}{3}\right)\right];\\ i_{ys}&=-\frac{2}{3}\left[i_A\sin\omega_к t+i_B\sin\left(\omega_к t-\frac{2\pi}{3}\right)+i_C\sin\left(\omega_к t+\frac{2\pi}{3}\right)\right];\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}17)$$

$$\left.\begin{aligned} i_{xr}&=\frac{2}{3}\left[i_a\cos(\omega_к t-\gamma)+i_b\cos\left(\omega_к t-\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)+i_c\cos\left(\omega_к t-\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)\right];\\ i_{yr}&=-\frac{2}{3}\left[i_a\sin(\omega_к t-\gamma)+i_b\sin\left(\omega_к t-\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)+i_c\sin\left(\omega_к t-\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)\right].\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}18)$$

Соотношения, аналогичные (3-17), (3-18), определяют связь между потокосцеплениями и напряжениями эквивалентных контуров статора и ротора с соответствующими фазными переменными.

Система уравнений (3-13)—(3-16) описывает электромагнитные переходные процессы идеализированной двухфазной асинхронной машины в системе координат, вращающихся с произвольной угловой скоростью $\omega_к$. Если в результате решения этих уравнений получены токи и потокосцепления, то по ним можно рассчитать токи и потокосцепления реальной трехфазной машины согласно формулам обратных преобразований, которые соответственно для статорных и роторных величин имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} i_A &= i_{xs}\cos\omega_к t - i_{ys}\sin\omega_к t;\\ i_B &= i_{xs}\cos(\omega_к t - 2\pi/3) - i_{ys}\sin(\omega_к t - 2\pi/3);\\ i_C &= i_{xs}\cos(\omega_к t + 2\pi/3) - i_{ys}\sin(\omega_к t + 2\pi/3); \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}19)$$

$$\left.\begin{aligned} i_a &= i_{xr}\cos(\omega_к t - \gamma) - i_{yr}\sin(\omega_к t - \gamma);\\ i_b &= i_{xr}\cos(\omega_к t - \gamma - 2\pi/3) - i_{yr}\sin(\omega_к t - \gamma - 2\pi/3);\\ i_c &= i_{xr}\cos(\omega_к t - \gamma + 2\pi/3) - i_{yr}\sin(\omega_к t - \gamma + 2\pi/3). \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}20)$$

Формулы обратных преобразований для фазных потокосцеплений и напряжений трехфазной асинхронной машины аналогичны.

Электромагнитный момент в функции преобразованных токов и потокосцеплений:

$$M'_\Psi = \frac{3}{2}\left[\Psi_{ys} i_{xs} - \Psi_{xs} i_{ys}\right]. \qquad (3\text{-}21)$$

Если реальные фазные напряжения определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} u_A &= U_m\cos(\omega_s t + \psi_0);\\ u_B &= U_m\cos(\omega_s t + \psi_0 - 2\pi/3);\\ u_C &= U_m\cos(\omega_s t + \psi_0 + 2\pi/3), \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}22)$$

то, подставляя их значения в формулы преобразования вида (3-17), получим выражения напряжений в двухфазной системе координат:

$$\left.\begin{aligned} u_{xs} &= U_m\cos[(\omega_s - \omega_к)t + \psi_0];\\ u_{ys} &= U_m\sin[(\omega_s - \omega_к)t + \psi_0]. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}23)$$

В теории электромагнитных переходных процессов электрических машин рассматривают в основном три координатные системы, которые являются частным случаем рассмотренной системы, вращающейся с произвольной угловой скоростью $\omega_к$.

Первая система осей неподвижна относительно ротора и вращается относительно статора со скоростью вращения ротора (система d, q, 0), т. е. $\omega_к = \omega_r$. Эта система нашла наибольшее применение при анализе переходных процессов в синхронных и асинхронных машинах в случае несимметрии ротора и симметрии цепей статора. При этом преобразованные уравнения не содержат переменных коэффициентов, так как преобразованиям подвергаются лишь переменные статорных цепей.

Второй является система осей, вращающихся относительно статора с синхронной скоростью, т. е. неподвижная относительно поля статора асинхронной машины в установившемся режиме, т. е. в этом случае $\omega_к = \omega_s$. Эту систему обозначают индексами u, v, 0 [16, 37]. Она предпочтительна при анализе переходных процессов в симметричных машинах. В этом случае напряжения u_{vs} и u_{us} согласно (3-23) будут постоянными величинами.

В третьей системе координат, неподвижных относительно статора (система α, β, 0), $\omega_к = 0$. В соответствии с (3-23) переменные $u_{\alpha s}$ и $u_{\beta s}$ изменяются во времени по синусоидальному закону. Система α, β, 0 обладает тем преимуществом, что при выборе положения одной из ее осей, например α, совпадающей с осью одной из фаз реальной машины, ток i_α будет равен реальному фазному току. Эта система удобна при анализе машин с симметричным ротором и несимметричными обмотками статора, анализе машин с включенными в цепь статора элементами, при расчете режимов динамического или конденсаторного торможения, короткого замыкания в статорных цепях и т. д.

В общем случае выбор координатной системы для анализа переходных процессов в асинхронных машинах зависит от условий конкретной задачи (от схем соединений обмоток статора и ротора — симметричные или несимметричные, необходимости получения фазных токов, простоты схемы модели и т. д.).

В практике как аналитических, так и машинных расчетов используют различные системы относительных единиц. Выбору системы относительных единиц посвящен ряд работ, где даны подробные обоснования базисных единиц и приведены уравнения асинхронных машин при записи их в разных системах.

При математическом моделировании машин переменного тока удобно использовать систему относительных единиц с равными взаимными индуктивностями, в которой сопротивления взаимной индуктивности между статорными и роторными обмотками, а также между разными роторными обмотками равны. При этом уравнения получаются того же вида, что и при физической системе единиц. Поэтому физический смысл отдельных членов уравнений сохраняется, что является преимуществом данной системы. За базисные величины принимают следующие: $U_б = U_{фm}$ — базисное напряжение, равное амплитуде номинального фазного напряжения статора; $I_б = I_{фm}$ — базисный ток статора, равный амплитуде номинального фазного тока статора; $\omega_б = \omega_s$ — базисная угловая частота, равная синхронной; $t_б = 1/\omega_б$ — базисная единица времени.

Для остальных статорных переменных базисные величины определяются соотношениями: $Z_б = U_б/I_б$ — сопротивление; $L_б = Z_б/\omega_б$ — индуктивность; $\Psi_б = U_б/\omega_б = Z_б I_б/\omega_б$ — потокосцепление; $M_б = S_б/\omega_б$ — момент; $S_б = 3U_ф I_ф = (3/2)\, U_{фm} I_{фm} = (3/2)\, U_б I_б$ — мощность.

Базисные токи роторных контуров находим, предполагая, что они создают в воздушном зазоре такую же первую гармоническую поля, как и продольная реакция статора при базисном токе. Базисные величины всех других переменных приравниваем базисным величинам для статорных контуров.

Запишем уравнения асинхронной машины в относительных единицах в системе координат α, β, 0. Учитывая, что в данном случае $\omega_k=0$, и принимая общепринятые обозначения переменных и параметров, поделим уравнения напряжения статора (3-13) и ротора (3-14) на базисное напряжение $U_б=\Psi_б\omega_б=Z_б I_б$. При этом получим уравнение напряжений машины в относительных единицах:

$$\left.\begin{aligned} &p\Psi_\alpha+R_s i_\alpha=-u_\alpha;\\ &p\Psi_\beta+R_s i_\beta=-u_\beta;\\ &p\Psi_{\alpha r}-\overset{*}{\omega}_r\Psi_{\beta r}+R_r i_{\alpha r}=0;\\ &p\Psi_{\beta r}+\overset{*}{\omega}_r\Psi_{\alpha r}+R_r i_{\beta r}=0, \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

где $p=d/(dt\omega_б)=d/d\tau$ — знак дифференцирования по времени $\tau=\omega_б t=\omega_s t$, выраженному в о. е.;

$p\Psi_\alpha=d\Psi_{\alpha s}/(dt\omega_б\Psi_б)$, $p\Psi_\beta=d\Psi_{\beta s}/(dt\omega_б\Psi_б)$; $\Psi_{\alpha r}=\Psi_{\alpha r}/\Psi_б$, $\Psi_{\beta r}=\Psi_{\beta r}/\Psi_б$ — относительные значения потокосцеплений ротора в осях α и β;

$R_s=r_s/Z_б$, $R_r=r_r/Z_б$ — относительные значения активных сопротивлений статора и ротора;

$\omega_r{}^*=\omega_r/\omega_б$ — относительная угловая частота вращения ротора;

$i_\alpha=i_{\alpha s}/i_б$, $i_\beta=i_{\beta s}/i_б$, $i_{\alpha r}=i_{\alpha r}/i_б$, $i_{\beta r}=i_{\beta r}/i_б$ — относительные значения токов статора и ротора.

Уравнения потокосцеплений в относительных единицах получим, поделив (3-15), (3-16) на $\Psi_б=Z_б i_б/\omega_б$:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_\alpha=x_\alpha i_\alpha+x_m i_{\alpha r}; \qquad \Psi_\beta=x_\beta i_\beta+x_m i_{\beta r};\\ &\Psi_{\alpha r}=x_r i_{\alpha r}+x_m i_\alpha; \qquad \Psi_{\beta r}=x_r i_{\beta r}+x_m i_\beta, \end{aligned}\right\} \tag{3-25}$$

где $\Psi_\alpha=\Psi_{\alpha s}/\Psi_б$; $\Psi_\beta=\Psi_{\beta s}/\Psi_б$; $\Psi_{\alpha r}=\Psi_{\alpha r}/\Psi_б$; $\Psi_{\beta r}=\Psi_{\beta r}/\Psi_б$ — относительные значения потокосцеплений статора и ротора в осях α и β; $x_\alpha i_\alpha=L_s i_{\alpha s}\omega_б/(Z_б i_б)$, $x_r i_{\alpha r}=L_r i_{\alpha r}\omega_б/(Z_б i_б)$ и т. д. — относительные значения составляющих потокосцеплений.

Уравнение движения ротора в относительных единицах получим, поделив (3-12) на $M_б=S_б/\omega_б$:

$$M_{эм}-M_{мех}=\frac{J\omega_б\omega_б d\omega_r}{S_б\omega_б dt}=H_j p\overset{*}{\omega}_r, \tag{3-26}$$

где $M_{эм}—M_{мех}=(M'_{эм}-M'_{мех})/M_б$ — относительное значение момента; $H_j=J\omega^3{}_б/S_б$ — инерционная постоянная ротора, рад.

Электромагнитный момент двухфазной машины определяется из соотношения (3-21) делением его на $M_б=\dfrac{S_б}{\omega_б}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{U_б I_б}{\omega_б}=\dfrac{3}{2}\Psi_б I_б$:

$$M_{эм}=M'_{эм}/M_б=\Psi_\beta i_\alpha-\Psi_\alpha i_\beta. \tag{3-27}$$

Система уравнений (3-24) — (3-27) описывает электромеханические переходные процессы асинхронной машины в осях α, β, 0.

Метод преобразования координат широко применяют при анализе машин переменного тока. Практика показывает, что такие преобразования при удачном выборе ортогональной системы координат, который зависит от условий решаемой задачи, может существенно облегчить исследования и моделирование машин переменного тока на АВМ.

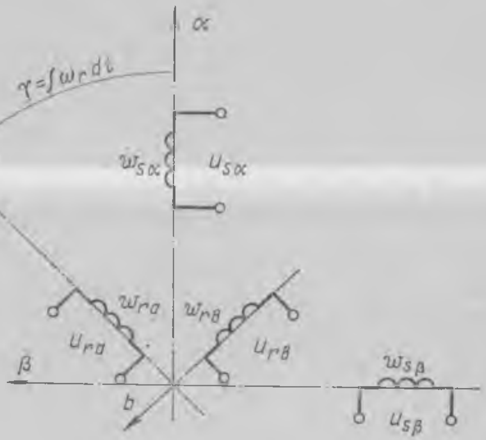


Рис. 3-2

Двухфазная машина. Дифференциальные уравнения двухфазной симметричной асинхронной машины, записанные в непреобразованной системе координат, содержат периодические коэффициенты. Более рациональные формы записи ее уравнений можно получить, вводя новые ортогональные оси. Получение уравнений двухфазной симметричной машины не встречает принципиальных трудностей и практически мало отличается от преобразования уравнений трехфазной машины.

Реальная двухфазная асинхронная машина имеет, как правило, короткозамкнутый ротор и обмотки статора, расположенные под углом 90 эл. град (рис. 3-2). В общем случае числа витков обмоток фаз не равны, например в исполнительном асинхронном двигателе.

В данном случае (в отличие от симметричных машин) помимо приведения обмоток ротора необходимо привести параметры, токи и напряжения одной фазы обмотки статора к другой, используя коэффициент трансформации:

$$K = K_{o\beta} w_{s\beta} / (K_{o\alpha} w_{s\alpha}),$$

где $K_{0\beta}$, $K_{0\alpha}$ — обмоточные коэффициенты обмотки статора фаз α и β; $w_{s\alpha}$, $w_{s\beta}$ — числа витков обмотки статора фаз α и β.

Тогда дифференциальные уравнения напряжений для контуров машины, работающей в генераторном режиме, можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} -u_{s\alpha} &= R_{s\alpha} i_{s\alpha} + d\Psi_{s\alpha}/dt; \\ -u_{s\beta} &= R_{s\beta} i_{s\beta} + d\Psi_{s\beta}/dt; \\ -u_{ra} &= R_r i_{ra} + d\Psi_{ra}/dt; \\ -u_{rb} &= R_r i_{rb} + d\Psi_{rb}/dt, \end{aligned}\right| \qquad (3\text{-}28)$$

где $u_{s\alpha}$, $u_{s\beta}$ и u_{ra}, u_{rb} — напряжения обмоток статора и ротора; $i_{s\alpha}$, $i_{s\beta}$ и i_{ra}, i_{rb} — токи обмоток статора и ротора; $R_{s\alpha}$, $R_{s\beta}$ и R_r — активные сопротивления обмоток статора и ротора.

Полные потокосцепления обмоток равны:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{s\alpha} &= L_s i_{s\alpha} + M \cos\gamma i_{ra} + M \sin\gamma i_{rb}; \\ \Psi_{s\beta} &= L_s' i_{s\beta} + M' \cos\gamma i_{rb} - M' \sin\gamma i_{ra}; \\ \Psi_{ra} &= L_r i_{ra} + M \cos\gamma i_{s\alpha} - M' \sin\gamma i_{s\beta}; \\ \Psi_{rb} &= L_r i_{rb} + M' \cos\gamma i_{s\beta} + M \sin\gamma i_{s\beta}, \end{aligned}\right| \qquad (3\text{-}29)$$

где L_s, L_s' и L_r — собственные индуктивности обмоток статора и ротора; M, M' — взаимные индуктивности фаз α и β обмотки статора с соответствующими обмотками ротора при совпадении их осей.

Уравнения двухфазной несимметричной машины (3-28), (3-29) содержат периодические коэффициенты, поэтому их непосредственное решение, даже с применением вычислительной техники, вызывает определенные трудности. Уравнения напряжений в фазовых координатах двухфазной асинхронной машины можно преобразовать, лишь избавившись от гармонических коэффициентов, при этом следует использовать систему осей α, β, 0. Применяя метод преобразования переменных, получим

$$\left.\begin{aligned} -u_{s\alpha} &= R_{s\alpha} i_{s\alpha} + d\Psi_{s\alpha}/dt; \\ -u_{s\beta} &= R_{s\beta} i_{s\beta} + d\Psi_{s\beta}/dt; \\ -u_{r\alpha} &= R_r i_{r\alpha} + d\Psi_{r\alpha}/dt - \omega_r \Psi_{r\beta}; \\ -u_{r\beta} &= R_r i_{r\beta} + d\Psi_{r\beta}/dt + \omega_r \Psi_{r\alpha}, \end{aligned}\right| \qquad (3\text{-}30)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{s\alpha} &= L_s i_{s\alpha} + M i_{r\alpha}; \qquad \Psi_{s\beta} = L_s' i_{s\beta} + M' i_{r\beta}; \\ \Psi_{r\alpha} &= L_r i_{r\alpha} + M i_{s\alpha}; \qquad \Psi_{r\beta} = L_r i_{r\beta} + M' i_{s\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}31)$$

При рассмотрении двигательного режима работы асинхронной машины напряжения в уравнениях (3-28), (3-30) следует принимать положительными.

Переход от токов по осям α и β к фазным токам роторных контуров можно осуществить с помощью выражений:

$$\left.\begin{aligned} i_{ra} &= i_{r\alpha} \cos\gamma + i_{r\beta} \sin\gamma; \\ i_{rb} &= i_{r\beta} \cos\gamma - i_{r\alpha} \sin\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}32)$$

Статорные переменные в реальной системе координат и в осях α, β, 0 одинаковы.

Уравнения симметричной двухфазной машины могут быть получены как частный случай при условии, что $M = M'$, $R_{s\alpha} = R_{s\beta}$, $L_s = L_s'$, из уравнений (3-30) — (3-32).

Уравнения (3-30), (3-31) могут быть использованы для моделирования однофазного асинхронного конденсаторного двигателя с пусковой обмоткой. Пусковой конденсатор включается при этом последовательно в цепь пусковой обмотки, которая после завершения пуска отключается.

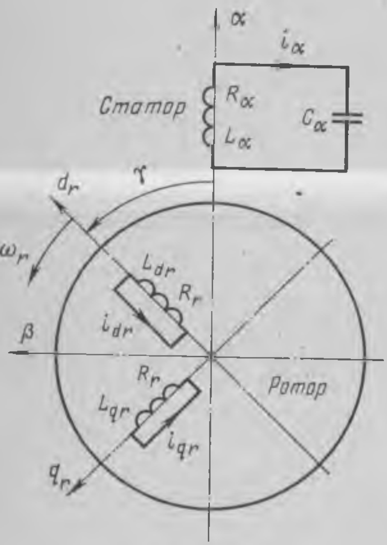


Рис. 3-3

Для моделирования режима пуска в уравнениях (3-30) необходимо принять

$$u_{s\alpha} = u_c = U_m \sin \omega t;$$

$$u_{s\beta} = -\frac{1}{C} \int i_{s\beta} dt;$$

$$u_{r\alpha} = u_{r\beta} = 0.$$

Уравнения, описывающие процессы при работе двигателя в однофазном режиме, можно получить из (3-30), (3-31), исключив уравнения для статорного контура по оси β.

Однофазная машина. Составим уравнения однофазной асинхронной машины в режиме конденсаторного самовозбуждения (рис. 3-3). Для ненасыщенной однофазной асинхронной машины, имеющей в общем случае n замкнутых контуров в продольной оси d и m замкнутых контуров в поперечной оси q, уравнения напряжений могут быть записаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Psi_{s\alpha}}{dt} + i_{s\alpha} R_{s\alpha} + \frac{1}{C_{s\alpha}} \int i_{s\alpha}\, dt = 0; \\ &d\Psi_{drk}/dt + i_{drk} R_{drk} = 0; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &d\Psi_{qri}/dt + i_{qri} R_{qri} = 0; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(1/p)\, J d\omega_r/dt = M_{\text{мех}} - M_{\text{эм}}, \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}33)$$

где $\Psi_{s\alpha}$, $i_{s\alpha}$ — потокосцепление и ток статорной обмотки; Ψ_{drk}, Ψ_{qri} и i_{drk}, i_{qri} — потокосцепления и токи k-го продольного и i-го поперечного короткозамкнутых контуров; $R_{s\alpha}$, R_{drk}, R_{qri} — активные сопротивления обмоток статора k-го продольного и i-го поперечного контуров ротора ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$; $i = 1, 2, 3, \ldots, m$); $C_{s\alpha}$ —

емкость в обмотке статора; p — число пар полюсов; J — момент инерции ротора; ω_r — угловая частота вращения ротора; $M_{\text{мех}}$ — момент механических сил: $M_{\text{эм}}$ — электромагнитный момент.

При рассмотрении переходных процессов самовозбуждения примем, что в продольной и поперечной осях машины существуют единые потоки взаимоиндукции, пронизывающие все контуры, расположенные по соответствующим осям машины. Все параметры роторных контуров приведены к статорной цепи. При этом условии выражения для потокосцеплений имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_{s\alpha}=L_{s\alpha}i_{s\alpha}+\sum_{k=1}^{n}M_{\alpha drk}i_{drk}+\sum_{i=1}^{m}M_{\alpha qri}i_{qri};\\
&\Psi_{1dr}=L_{1dr}i_{1dr}+M_{dr\alpha}i_{s\alpha}+\sum_{k=2}^{n}Mi_{drk};\\
&\Psi_{1qr}=L_{1qr}i_{1qr}+M_{qr\alpha}i_{s\alpha}+\sum_{i=2}^{m}Mi_{qri},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right|\qquad(3\text{-}34)$$

где $L_{s\alpha}$ — индуктивность обмотки статора; $M_{\alpha drk}$, $M_{\alpha qri}$ — взаимные индуктивности статорных и роторных контуров; L_{kdr}, L_{iqr} — индуктивность обмоток k-го продольного и i-го поперечного роторных контуров.

Согласно принципу взаимности

$$M_{\alpha drk}=M_{drk\alpha}\quad \text{и т. д.}$$

Предположим, что асинхронная машина имеет по одному короткозамкнутому контуру в продольной и поперечной осях. Примем, что при вращении ротора взаимные индуктивности обмоток статора и ротора изменяются по синусоидальному закону:

$$M_{\alpha dr}=M\cos\gamma;\qquad M_{\alpha qr}=M\cos(\gamma+90^\circ),\qquad(3\text{-}35)$$

где M — взаимная индуктивность при совпадении осей обмоток статора и ротора.

Подставляя (3-35) в (3-34), получим

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_{\alpha}=L_{\alpha}i_{\alpha}+M(i_{dr}\cos\gamma-i_{qr}\sin\gamma);\\
&\Psi_{dr}=L_{dr}i_{dr}+Mi_{\alpha}\cos\gamma;\\
&\Psi_{qr}=L_{qr}i_{qr}-Mi_{\alpha}\sin\gamma.
\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}36)$$

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений (3-33)—(3-36) с переменными коэффициентами. При введении ортогональной системы координат α, β, 0 эти уравнения можно упростить. Преобразуем уравнения (3-33), (3-36) к системе координат, неподвижных относительно статора, принимая ось β опережающей ось α по направлению вращения ротора на 90 эл. град. При этом представим токи и потокосцепления реальных обмоток машины в виде векторов, направленных по магнитным осям обмоток. Проектируя эти векторы на оси координат, получим новые переменные ротора

$$\left.\begin{aligned} i_{\alpha r} &= i_{dr}\cos\gamma - i_{qr}\sin\gamma; & i_{\beta r} &= i_{dr}\sin\gamma + i_{qr}\cos\gamma; \\ \Psi_{\alpha r} &= \Psi_{dr}\cos\gamma - \Psi_{qr}\sin\gamma; & \Psi_{\beta r} &= \Psi_{dr}\sin\gamma + \Psi_{qr}\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}37)$$

Умножая уравнение напряжения ротора (3-33) по оси α на $\cos\gamma$, а уравнение по оси β на $-\sin\gamma$ и используя очевидные соотношения

$$\cos\gamma\,\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\,(y\cos\gamma) + y\sin\gamma\,\frac{d\gamma}{dt};$$

$$\sin\gamma\,\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\,(y\sin\gamma) - y\cos\gamma\,\frac{d\gamma}{dt},$$

после суммирования получим

$$i_{\alpha r}R_r - \Psi_{\beta r}d\gamma/dt + d\Psi_{\alpha r}/dt = 0. \quad (3\text{-}38)$$

Аналогично можно записать и второе уравнение равновесия напряжений для ротора

$$i_{\beta r}R_r + \Psi_{\alpha r}d\gamma/dt + d\Psi_{\beta r}/dt = 0. \quad (3\text{-}39)$$

Чтобы освободиться от переменных коэффициентов в уравнениях потокосцеплений роторных контуров, умножим Ψ_{dr} на $\cos\gamma$, а Ψ_{qr} на $-\sin\gamma$ и просуммируем эти уравнения. Тогда, учитывая (3-37), получим

$$\Psi_{\alpha r} = L_r i_{\alpha r} + M i_\alpha. \quad (3\text{-}40)$$

Подобным образом

$$\Psi_{\beta r} = L_r i_{\beta r}. \quad (3\text{-}41)$$

Рассмотренные преобразования возможны лишь при условии, что

$$L_{dr} = L_{qr} = L_r; \qquad R_{dr} = R_{qr} = R_r.$$

Учитывая, что $d\gamma/dt = \omega_r$ — угловая скорость вращения ротора, продифференцируем уравнение напряжения статора:

$$\left.\begin{aligned} & d^2\Psi_\alpha/dt^2 + R_\alpha di_\alpha/dt + i_\alpha/C_\alpha = 0; \\ & i_{\alpha r}R_r - \Psi_{\beta r}\omega_r + d\Psi_{\alpha r}/dt = 0; \\ & i_{\beta r}R_r + \Psi_{\alpha r}\omega_r + d\Psi_{\beta r}/dt = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}42)$$

Разделив уравнение напряжения статора на синхронную угловую скорость вращения $\omega_s = \omega_б$ и каждое из уравнений системы на базисное напряжение $U_б = \omega_б\Psi_б = Z_б I_б$, запишем уравнения напряжения машины в относительных единицах:

$$\left.\begin{aligned} & p^2\Psi_\alpha + R_\alpha p i_\alpha + x_{C\alpha} i_\alpha = 0; \\ & p\Psi_{\alpha r} - \overset{*}{\omega}_r\Psi_{\beta r} + R_r i_{\alpha r} = 0; \\ & p\Psi_{\beta r} + \overset{*}{\omega}_r\Psi_{\alpha r} + R_r i_{\beta r} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}43)$$

где p — символ дифференцирования по времени, о. е.: $p=d/(dt\omega_s)=d/d\tau$; $\omega_r^*=\omega_r/\omega_б$ — относительная угловая скорость вращения ротора.

Уравнения потокосцеплений в относительных единицах получим, поделив выражение (3-36) на $\Psi_б=Z_б I_б/\omega_б$ с учетом (3-37) и (3-40):

$$\Psi_\alpha=x_\alpha i_\alpha+x_m i_{\alpha r}; \quad \Psi_{\alpha r}=x_r i_{\alpha r}+x_m i_\alpha; \quad \Psi_{\beta r}=x_r i_{\beta r}, \qquad (3\text{-}44)$$

где $x_m=\omega_б M/Z_б$.

Уравнение движения ротора в системе относительных единиц имеет вид

$$p\omega_r^*=(M_{эм}-M_{мех})/H_j, \qquad (3\text{-}45)$$

где $H_j=J\omega_б^3/S_б$ — инерционная постоянная, рад.

Электромагнитный момент однофазной машины

$$M_{эм}=i_\alpha\Psi_{\delta\beta}=i_\alpha(\Psi_{\beta r}-i_{\beta r}x_{\sigma r}), \qquad (3\text{-}46)$$

где $\Psi_{\delta\beta}$ — потокосцепление в воздушном зазоре по оси β.

Полученная система уравнений (3-43)—(3-46) описывает переходные процессы системы «однофазная асинхронная машина — конденсатор».

Таким образом, на примерах показана методика составления дифференциальных уравнений асинхронных машин и преобразования координат с целью упрощения исходной системы уравнений.

§ 3-2. Моделирование асинхронных двигателей

Асинхронные двигатели моделируют чаще, чем другие асинхронные машины. Многообразие применяемых моделей объясняется тем, что процессы исследуют с разными допущениями и упрощениями, зависящими от необходимой степени детализации, от условий решаемой задачи. Обычно при исследованиях переходных процессов асинхронного двигателя моделирование должно быть достаточно полным с обязательным учетом свободных процессов в контурах машины, насыщения магнитной цепи и т. д. При рассмотрении систем машин, наоборот, становятся приемлемыми значительные упрощения. Последние обстоятельства приводят к использованию самых различных форм записи уравнений асинхронного двигателя.

Формы записи уравнений. Режим работы асинхронного двигателя определен, если заданы векторы, по крайней мере, двух из его переменных величин при симметричном режиме и четырех при несимметричном режиме. Это позволяет найти электромагнитный переходный момент и определить частоту вращения как интеграл от результирующего момента. Электромагнитный переходный момент при симметричном режиме может быть определен как результат взаимодействия любой пары векторов $\bar{I}_s$, $\bar{I}_r$, $\bar{\Psi}_s$, $\bar{\Psi}_r$, $\bar{I}_m$. Наиболее удобными из всех возможных выражений электромагнитного переходного момента являются сочетания из пяти векторов:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{а) } M_{\text{эм}}=\frac{3}{2}x_m[\bar{i}_s\bar{i}_r]; & \text{б) } M_{\text{эм}}=\frac{3}{2}[\bar{i}_s\bar{\Psi}_s]; \\ \text{в) } M_{\text{эм}}=\frac{3}{2}[\bar{i}_r\bar{\Psi}_r]; & \text{г) } M_{\text{эм}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x_m}{\sigma x_s x_r}[\bar{\Psi}_s\bar{\Psi}_r]; \\ \text{д) } M_{\text{эм}}=\frac{3}{2}x_m[\bar{i}_m\bar{i}_s]; & \text{е) } M_{\text{эм}}=\frac{3}{2}x_m[\bar{i}_r\bar{i}_m]. \end{array}\right\} \quad (3\text{-}47)$$

Здесь $\sigma=1-x_m^2/(x_s x_r)$ — полный коэффициент рассеяния.

Каждому из уравнений электромагнитного момента (3-47) соответствуют уравнения напряжений, выраженные: а) через статорные $\bar{i}_s$ и роторные $\bar{i}_r$ токи; б) через статорные токи $\bar{i}_s$ и потокосцепления $\bar{\Psi}_s$; в) через роторные токи $\bar{i}_r$ и потокосцепления $\bar{\Psi}_r$; г) через потокосцепления статорной $\bar{\Psi}_s$ и роторной $\bar{\Psi}_r$ цепей; д) через намагничивающие $\bar{i}_m$ и статорные $\bar{i}_s$ токи; е) через роторные $\bar{i}_r$ и намагничивающие $\bar{i}_m$ токи.

Запись системы дифференциальных уравнений в любой форме при сохранении в каждом уравнении одного слагаемого в виде первой производной по времени способствует получению схемы модели с минимальным количеством решающих элементов.

В соответствии с этим условием приведем некоторые формы записи уравнений асинхронного двигателя.

1. Уравнения в координатах α, β, 0, выраженные через токи и потокосцепления статорных и роторных контуров:

$$\left.\begin{array}{l} d\Psi_\alpha/dt=u_\alpha-R_s i_\alpha; \\ d\Psi_\beta/dt=u_\beta-R_s i_\beta; \\ d\Psi_{\alpha r}/dt=-R_r i_{\alpha r}+\omega_r\Psi_{\beta r}; \\ d\Psi_{\beta r}/dt=-R_r i_{\beta r}-\omega_r\Psi_{\alpha r}; \\ i_\alpha=\frac{1}{\sigma x_s}\Psi_\alpha-\frac{x_m}{\sigma x_r x_s}\Psi_{\alpha r}; \\ i_\beta=\frac{1}{\sigma x_s}\Psi_\beta-\frac{x_m}{\sigma x_r x_m}\Psi_{\beta r}; \\ i_{\alpha r}=\frac{1}{\sigma x_r}\Psi_{\alpha r}-\frac{x_m}{\sigma x_r x_s}\Psi_\alpha; \\ i_{\beta r}=\frac{1}{\sigma x_r}\Psi_{\beta r}-\frac{x_m}{\sigma x_r x_s}\Psi_\beta; \\ d\omega_r/dt=(M_{\text{эм}}-M_{\text{мех}})/J; \\ M_{\text{эм}}=\frac{3}{2}x_m(i_{\alpha r}i_\beta-i_\alpha i_{\beta r}). \end{array}\right\} \quad (3\text{-}48)$$

Уравнения (3-48) нашли широкое распространение и являются наиболее общими, так как позволяют определять характер изменения как токов, так и потокосцеплений асинхронного двигателя. Выражение для электромагнитного момента $M_{эм}$ может быть при этом определено в соответствии с (3-47).

2. Уравнения в осях α, β, 0, выраженные через потокосцепления контуров двигателя:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Psi_\alpha}{dt}=u_\alpha-\frac{R_s}{\sigma x_s}\Psi_\alpha+\frac{x_m R_s}{\sigma x_r x_s}\Psi_{r\alpha};\\
&\frac{d\Psi_\beta}{dt}=u_\beta-\frac{R_s}{\sigma x_s}\Psi_\beta+\frac{x_m R_s}{\sigma x_s x_r}\Psi_{r\beta};\\
&\frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt}=\frac{x_m R_r}{\sigma x_s x_r}\Psi_\alpha-\frac{R_r}{\sigma x_r}\Psi_{r\alpha}-\omega_r\Psi_{r\beta};\\
&\frac{d\Psi_{r\beta}}{dt}=\frac{x_m R_r}{\sigma x_s x_r}\Psi_\beta-\frac{R_r}{\sigma x_r}\Psi_{r\beta}+\omega_r\Psi_{r\alpha};\\
&d\omega_r/dt=(M_{эм}-M_{мех})/J;\\
&M_{эм}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x_m}{\sigma x_s x_r}(\Psi_\beta\Psi_{r\alpha}-\Psi_{r\beta}\Psi_\alpha).
\end{aligned}\right|\qquad(3\text{-}49)$$

В этой системе уравнений отсутствуют в явном виде токи. Система относительно проста, ее целесообразно использовать при исследовании механических характеристик асинхронного двигателя. В случае определения токов по осям α, β следует воспользоваться выражениями для токов из системы (3-48).

3. Уравнения в системе координат u, v, 0, выраженные через потокосцепления контуров двигателя:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Psi_{su}}{dt}=u_{su}-\frac{R_s}{\sigma x_s}\Psi_{su}+\omega_s\Psi_{sv}+\frac{x_m R_s}{\sigma x_s x_r}\Psi_{ru};\\
&\frac{d\Psi_{sv}}{dt}=u_{sv}-\frac{R_s}{\sigma x_s}\Psi_{sv}-\omega_s\Psi_{su}+\frac{x_m R_s}{\sigma x_s x_r}\Psi_{ru};\\
&\frac{d\Psi_{ru}}{dt}=\frac{x_m R_r}{\sigma x_s x_r}\Psi_{su}-\frac{R_r}{\sigma x_r}\Psi_{ru}-\omega_s s\Psi_{rv};\\
&\frac{d\Psi_{rv}}{dt}=\frac{x_m R_r}{\sigma x_s x_r}\Psi_{sv}-\frac{R_r}{\sigma x_r}\Psi_{rv}-\omega_s s\Psi_{ru};\\
&d\omega_r/dt=(M_{эм}-M_{мех})/J;\\
&M_{эм}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x_m}{x_s x_r}(\Psi_{ru}\Psi_{sv}-\Psi_{rv}\Psi_{su});
\end{aligned}\right|\qquad(3\text{-}50)$$

$$s=(\omega_s-\omega_r)/\omega_s.$$

Система уравнений (3-50) удобна для нахождения переходного электромагнитного момента и частоты вращения при исследовании переходных процессов асинхронного двигателя, работающего в некоторой системе. Токи контуров машины не входят в систему (3-50), поэтому для их определения необходимо использовать дополнительные соотношения.

Выбор формы записи уравнений асинхронного двигателя для составления его математической модели определяется, с одной стороны, переменными, представляющими при анализе интерес, и выражением электромагнитного переходного момента, с другой — критериями оптимальности математической модели. В качестве критериев оптимальности принято использовать следующие: 1) обеспечение устойчивости работы модели; 2) наличие минимального количества операционных усилителей и нелинейных блоков; 3) получение наименьшей кратности задаваемых численных значений коэффициентов; 4) удобство задания внешних возмущений и вывода текущих значений исследуемых параметров.

В литературе рассматривается выбор схемы электронной модели асинхронного двигателя при переменной частоте вращения с учетом указанных критериев. Представленные выше формы записи уравнений позволяют получить устойчивую модель асинхронного двигателя. Удобство задания внешнего возмущения связано с выбором частоты вращения координатной системы. Например, для исследований режимов пуска, повторного включения, торможения коротким замыканием обмоток статора, реверса желательно принимать систему координат α, β, 0. С точки зрения выполнения критериев оптимальности математической модели целесообразным является использование системы уравнений (3-49), которая, несмотря на отсутствие в уравнениях токов контуров машины, позволяет решать большинство задач асинхронного электропривода. В тех случаях, когда требуется определить изменение токов в контурах машины (наряду с переходными моментами и скоростью вращения), целесообразно использование системы (3-48).

Общие вопросы моделирования. После того, как выбрана исходная система уравнений, описывающая режимы работы асинхронного двигателя, составляется структурная схема модели.

Рассмотрим моделирование на АВМ асинхронного двигателя, который описывается системой уравнений (3-49). Эти уравнения представлены в виде, удобном для составления структурной схемы модели методом понижения порядка производной, так как каждое дифференциальное уравнение системы разрешено относительно старшей производной. Система уравнений (3-49) отвечает критериям оптимальности математической модели и находит широкое применение.

Структурная схема модели системы уравнений (3-49) приведена на рис. 3-4, она содержит операционные усилители *1—9*, *12* и блоки перемножения *10*, *11—14*.

Первое и второе уравнения системы (3-49) содержат в правых частях напряжение, которое при синусоидальном питании может быть получено от специального генератора гармонических колебаний (см. с. 45). Для образования синусоидальных напряжений на АВМ потребуется еще два интегратора и один сумматор. На рис. 3-4 генератор гармонических колебаний не показан, будем считать, что напряжения u_α и u_β известны.

Выберем масштабы переменных величин. При этом из результатов экспериментов или приближенно из общих физических представлений оценим максимально возможные для исследуемых режимов значения переменных. Например, для исследования переход-

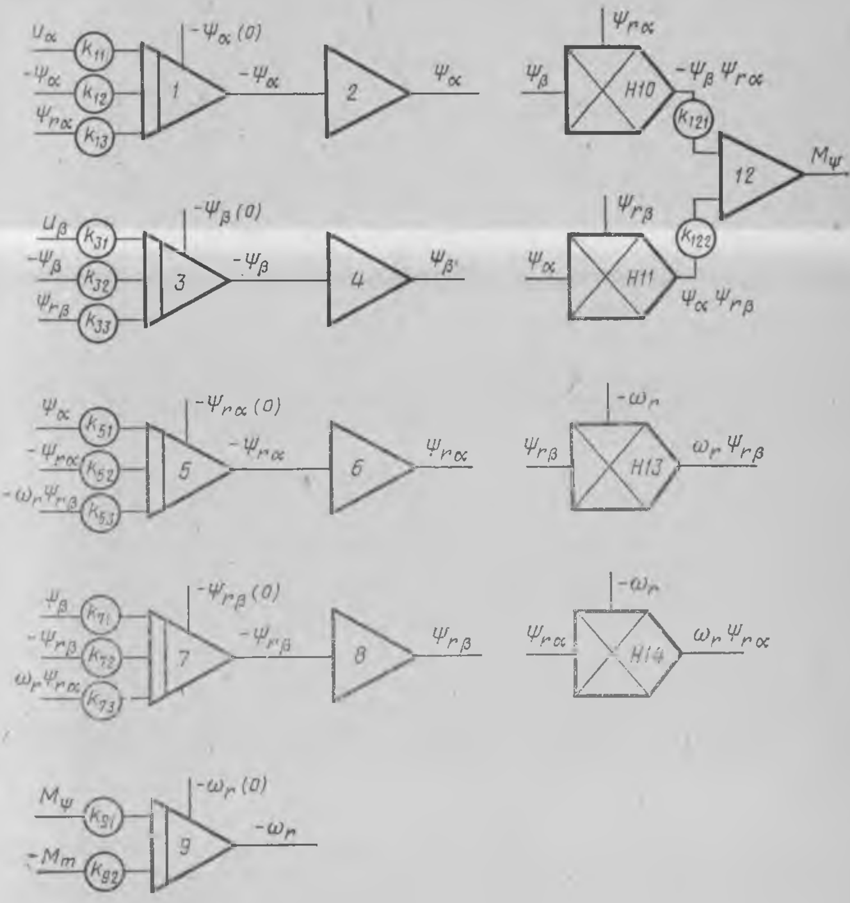


Рис. 3-4

ных процессов при пуске в ход и реверсе асинхронного двигателя по уравнениям, записанным в относительных единицах, можно принять следующие масштабы потокосцепления, угловой скорости и момента:

$$m_\Psi = 100/2 = 50 \text{ В/ед.};$$

$$m_\omega = 100/1 = 100 \text{ В/ед.};$$

$$m_M = 100/4 = 25 \text{ В/ед.}$$

Причем масштаб времени выбирают таким образом, чтобы время протекания переходного процесса в модели замедлялось в 50—100 раз по сравнению с реальным. При записи уравнений машины в относительных единицах и измерении времени в радианах принимаем масштаб времени $m_t = t_{\text{м}}/t_{\text{реальн}} = 1$ с/эл. рад, масштаб напряжений $m_u = 100/1 = 100$ В/ед.

Рассчитаем масштабы произведений, учитывая, что умножение осуществляется по формуле $z = 0{,}01xy$:

$$m_{\Psi\Psi} = 0{,}01 m_\Psi m_\Psi = 25;$$

$$m_{\Psi\omega} = 0{,}01 m_\Psi m_\omega = 50.$$

По структурной схеме решения уравнений (3-49) для блоков *1, 3, 5, 7, 9, 12* (см. рис. 3-4) составим машинные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{m_\Psi}{m_t}\cdot\frac{d\Psi_\alpha}{dt} = k_{11} m_u u_\alpha - k_{12} m_\Psi \Psi_\alpha + k_{13} m_\Psi \Psi_{r\alpha};\\
&\frac{m_\Psi}{m_t}\cdot\frac{d\Psi_\beta}{dt} = k_{31} m_u u_\beta - k_{32} m_\Psi \Psi_\beta + k_{33} m_\Psi \Psi_{r\beta};\\
&\frac{m_\Psi}{m_t}\cdot\frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} = k_{51} m_\Psi \Psi_\alpha - k_{52} m_\Psi \Psi_{r\alpha} - k_{53} m_{\Psi\omega} \omega_r \Psi_{r\beta};\\
&\frac{m_\Psi}{m_t}\cdot\frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} = k_{71} m_\Psi \Psi_\beta - k_{72} m_\Psi \Psi_{r\beta} + k_{73} m_{\Psi\omega} \omega_r \Psi_{r\alpha};
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}51)$$

$$\frac{m_\omega}{m_t}\cdot\frac{d\omega_r}{dt} = k_{91} m_M M_{\text{эм}} - k_{92} m_M M_{\text{мех}}; \qquad (3\text{-}52)$$

$$m_M M_{\text{эм}} = k_{121} m_{\Psi\Psi} \Psi_\beta \Psi_{r\alpha} - k_{122} m_{\Psi\Psi} \Psi_{r\beta} \Psi_\alpha. \qquad (3\text{-}53)$$

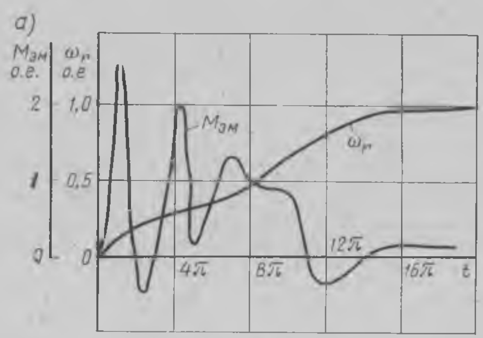
Разделив правую и левую части уравнений (3-51) на m_Ψ/m_t, (3-52) на m_ω/m_t, (3-53) на m_M, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Psi_\alpha}{dt} = k_{11}\frac{m_u m_t}{m_\Psi} u_\alpha - k_{12} m_t \Psi_\alpha + k_{13} m_t \Psi_{r\alpha};\\
&\frac{d\Psi_\beta}{dt} = k_{31}\frac{m_u m_t}{m_\Psi} u_\beta - k_{32} m_t \Psi_\beta + k_{33} m_t \Psi_{r\beta};\\
&\frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} = k_{51} m_t \Psi_\alpha - k_{52} m_t \Psi_{r\alpha} - k_{53}\frac{m_{\Psi\Psi} m_t}{m_\Psi} \Psi_{r\beta}\omega_r;\\
&\frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} = k_{71} m_t \Psi_\beta - k_{72} m_t \Psi_{r\beta} + k_{73}\frac{m_{\Psi\omega} m_t}{m_\Psi} \Psi_{r\alpha}\omega_r;\\
&\frac{d\omega_r}{dt} = k_{91}\frac{m_M m_t}{m_\omega} M_\Psi - k_{92}\frac{m_M m_t}{m_\omega} M_{\text{мех}};\\
&M_\Psi = k_{121}\frac{m_{\Psi\Psi}}{m_M}\Psi_\beta\Psi_{r\alpha} - k_{122}\frac{m_{\Psi\Psi}}{m_M}\Psi_{r\beta}\Psi_\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}54)$$

Сравнивая коэффициенты при одноименных переменных в уравнениях (3-54) и (3-49), записываем выражения для коэффициентов передач решающих усилителей:

$$\left.\begin{aligned}
&k_{11}=k_{31}=\frac{m_{\Psi}}{m_u m_t}; && k_{52}=k_{72}=\frac{R_r}{\sigma x_r m_t};\\
&k_{12}=k_{32}=\frac{R_s}{\sigma x_s m_t}; && k_{53}=k_{73}=\frac{m_{\Psi}}{m_{\Psi\omega} m_t};\\
&k_{13}=k_{33}=\frac{x_m R_s}{\sigma x_s x_r m_t}; && k_{91}=k_{92}=\frac{1}{J}\cdot\frac{m_{\omega}}{m_M m_t};\\
&k_{51}=k_{71}=\frac{x_m R_r}{\sigma x_s x_r m_t}; && k_{121}=k_{122}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x_m}{\sigma x_s x_r}\cdot\frac{m_M}{m_{\Psi\Psi}}.
\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}55)$$

Рассчитывая коэффициенты передач решающих усилителей по выражениям (3-55), можно исследовать переходные процессы при любых значениях параметров асинхронного двигателя. На рис. 3-5, *а, б* соответственно приведены осциллограммы решения для



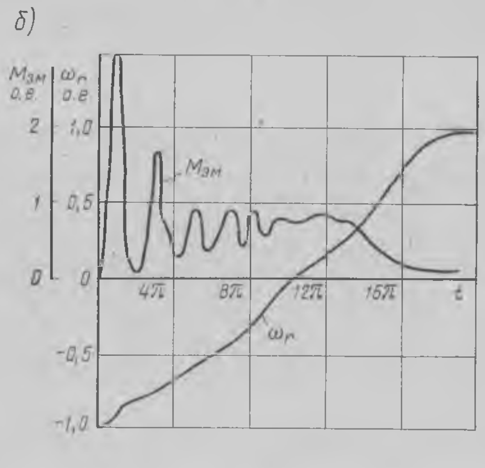


Рис. 3-5

электромагнитного момента $M_{эм}$ и угловой частоты вращения ω_r при пуске и реверсе асинхронного двигателя типа АО2-41-2 и нагрузке на валу

$$M_{мех}=0,25P_{ном}/\omega_{r\ ном}.$$

Представленная модель позволяет исследовать пуск двигателя при различных нагрузках на валу и питающих напряжениях, причем исследования можно проводить, изменяя внешние воздействия $u_{s\alpha}$, $u_{s\beta}$, $M_{мех}$. Включение двигателя в сеть при вращающемся роторе легко осуществить заданием начального условия для частоты вращения ω_r на интеграторе *9*.

В тех случаях, когда требуется исследовать включение двигателя при вращающемся роторе и незатухшем магнитном поле, необходимо дополнительно установить начальные условия для потокосцеплений на интеграторах *1, 3, 5, 7* (рис. 3-4). Нагрузку на валу двигателя можно изменить возмущающим воздействием на входе интегратора *9*, которое в некотором масштабе соответствует моменту сопротивления $M_{мех}$. Чтобы решить уравнения переходных процессов асинхронного двигателя при постоянной частоте вращения ротора, необходимо от схемы решения отключить интегратор *9*, моделирующий уравнение движения.

Исследование процессов при заданном законе изменения частоты вращения, например линейном, можно проводить с помощью интегрирующего усилителя *9*, с входа которого отключаются величины $M_{мех}$ и $M_{эм}$ и подается некоторый постоянный сигнал такой величины, чтобы через определенное заданное время получить на выходе усилителя *9* синхронную частоту вращения.

Для имитации изменения момента на валу двигателя обычно применяют специальные дополнительные схемы, которые позволяют моделировать электромеханические системы с различными видами нагрузок. Переходные процессы при определенной последовательности повторных включений моделируются путем включения и отключения напряжений $u_{s\alpha}$ и $u_{s\beta}$ на входе усилителей *1, 3*.

Перечисленные задачи не охватывают все задачи, которые можно решить на данной модели, однако достаточно наглядно иллюстрируют возможности метода математического моделирования при исследовании асинхронных машин.

Несимметричные режимы работы. Несимметричные режимы работы характеризуются несимметричным включением их в одно- или трехфазную сеть. Наиболее широко используются несимметричные режимы при включении трехфазного асинхронного двигателя в однофазную сеть с применением активных сопротивлений, дросселей, конденсаторов в качестве фазосдвигающих элементов; при пуске трехфазного асинхронного двигателя с несимметричным ротором для уменьшения числа ступеней пусковых реостатов и пусковых токов. Часто несимметрия возникает так же как результат аварии асинхронной машины.

При одновременной несимметрии обмоток статора и ротора асинхронного двигателя методы преобразования координат не поволяет освободиться от периодических коэффициентов в уравнениях переходных процессов. При этом решение целесообразно проводить в непреобразованной системе координат, так как, с одной стороны, в уравнениях в качестве переменных фигурируют реальные величины, а, с другой стороны, преобразование уравнений не приводит, как правило, к уменьшению числа периодических коэффициентов. Моделирование в данном случае представляет собой сложную задачу и имеет много общего с моделированием несимметричных режимов синхронных машин, которое будет рассмотрено далее.

При несимметрии статорных обмоток и симметрии роторных или, наоборот, при несимметрии роторных обмоток и симметрии статорных уравнения переходных процессов не содержат периодических коэффициентов, если выбрать систему координат, жестко связанную с несимметричной частью машины. Моделирование их в данном случае не представляет принципиальных трудностей по сравнению с моделированием трехфазной машины. Например, уравнения двухфазной асинхронной машины, записанные в осях β, $\alpha, 0$, при несимметрии статорных обмоток не содержат периодических коэффициентов.

Большое практическое значение имеет моделирование симметричного асинхронного двигателя при несимметричном напряжении питания. Пусть, например, трехфазный асинхронный двигатель включается в систему трехфазных несимметричных напряжений, закон изменения которых во времени известен: $u_a(t)$, $u_b(t)$, $u_c(t)$.

При исследовании необходимо изучить не только характер изменения частоты вращения и вращающего момента, но и изменение токов в контурах машины. Очевидно, что в данном случае для моделирования целесообразно использовать систему уравнений (3-48), дополненную уравнениями связи напряжений $u_{s\alpha}(t)$, $u_{s\beta}(t)$ с заданной несимметричной системой трехфазных напряжений $u_a(t)$, $u_b(t)$, $u_c(t)$:

$$\left.\begin{aligned} u_{s\alpha}(t) &= \frac{2}{3}\left[u_a(t) - \frac{1}{2}\Big(u_b(t) + u_c(t)\Big)\right];\\ u_{s\beta}(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[u_b(t) - u_c(t)\right]. \end{aligned}\right| \qquad (3\text{-}56)$$

При этом положительное направление координатной оси α совпадает с осью фазы A двигателя, ось β опережает ось α на 90 эл. град.

Математическая модель системы уравнений (3-48), (3-56) приведена на рис. 3-6. На блоках *1—16* осуществляется моделирование уравнений электромагнитных переходных процессов двигателя, а на блоках *17—20* — уравнений моментов. Напряжения $u_{s\alpha}$, $u_{s\beta}$ образуются на блоках *15*, *16*. Причем модель позволяет производить решение при произвольной степени несимметрии, в том числе и изменяющейся с течением времени. Изменяя характер входных напряжений $u_a(t)$, $u_b(t)$, $u_c(t)$, можно исследовать влияние несимметрии питающих напряжений на переходные процессы асинхронного двигателя. Задание значений $u_{s\alpha}$, $u_{s\beta}$, соответствующих симметричной системе трехфазных напряжений, позволяет исследовать симметричные режимы работы двигателя.

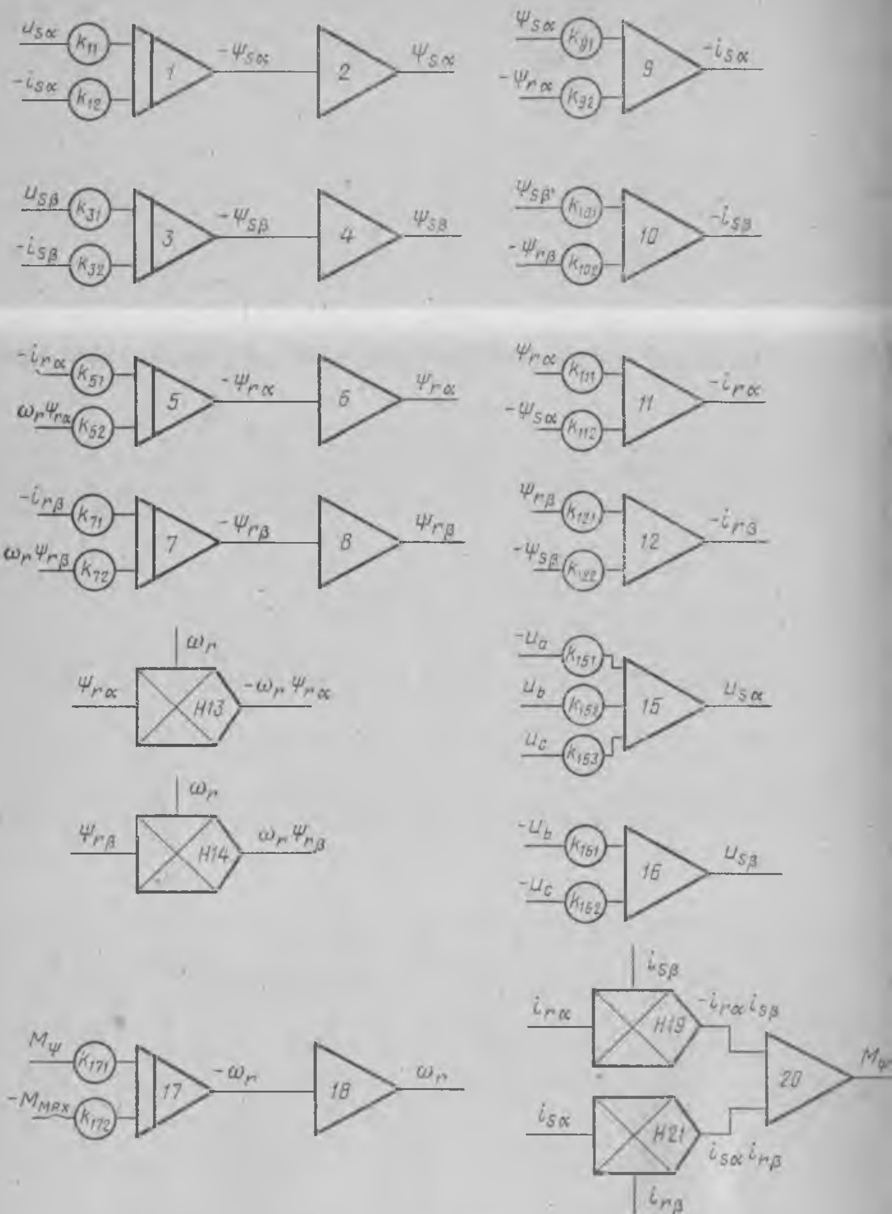


Рис. 3-6

Учет изменения параметров. Все параметры асинхронного двигателя в общем случае могут быть переменными. Так, например, активное сопротивление обмоток может изменяться из-за нагрева, активное сопротивление ротора — за счет вытеснения тока, индуктивное сопротивление зависит от насыщения магнитной цепи.

Рассмотренные уравнения электромеханического преобразования энергии асинхронных машин были записаны для так называемой «идеализированной машины», вся энергия электромагнитного поля которой сосредоточена в воздушном зазоре. Практика исследования асинхронных машин на АВМ и ЦВМ с учетом изменения их параметров показала, что уравнения идеализированной машины справедливы и для реальной насыщенной асинхронной машины. Для анализа процессов реальной машины необходимо в уравнениях идеализированной машины все параметры представить в виде функций токов, магнитных потоков или частоты вращения. Такое представление процессов в действительности является приближенным, однако оно позволяет получить результаты, хорошо совпадающие с экспериментальными.

Допущение о постоянстве параметров, используемое часто при моделировании асинхронных машин, значительно упрощает исследование, однако в некоторых случаях может привести к неверным результатам. В последнее время влиянию изменения параметров на динамические характеристики уделяется большое внимание.

Из ряда факторов, оказывающих наибольшее влияние на изменение параметров асинхронной машины в переходных режимах, следует отметить насыщение магнитной цепи машины. При этом различают насыщение по пути основного магнитного потока и по пути потоков рассеяния. В зависимости от величины основного магнитного потока, а следовательно, и индукции изменяется магнитная проводимость по пути основного магнитного потока. Это проявляется в основном как изменение сопротивления взаимоиндукции обмоток статора и ротора x_m. Влияние величины основного магнитного потока на проводимость рассеяния незначительно и им пренебрегают. Величина основного магнитного потока связана с ЭДС воздушного зазора, т. е. зависит от напряжения питания асинхронного двигателя.

Насыщение магнитной цепи по пути потоков рассеяния зависит от величин токов в обмотках, с увеличением которых, например при пуске асинхронного двигателя, сопротивление рассеяния значительно уменьшается, что обусловлено увеличением потоков рассеяния вокруг пазов.

Учет изменения сопротивления взаимоиндукции x_m проводят в функции результирующего потока в воздушном зазоре Ψ_δ, используя при этом характеристику холостого хода машины. Учет изменения индуктивных сопротивлений рассеяния x_σ проводят в функции тока i в данной обмотке. Однако определение зависимости $x_\sigma=f(i)$ затруднительно из-за отсутствия методов расчета и экспериментальных данных.

В некоторых случаях, например, при использовании асинхронных двигателей с глубоким пазом ротора, с двойной клеткой и т. д. изменения именно активных и индуктивных сопротивлений рассеяния роторных контуров, обусловленные вытеснением тока, приводят к улучшению их пусковых характеристик. Поэтому учитывать явления вытеснения тока у рассмотренных машин, безусловно, необходимо.

Трудность учета изменения параметров обусловлена отсутствием реальных зависимостей их в функции токов, потоков или частоты вращения. Изменение параметров, как правило, происходит одновременно под действием нескольких факторов. Так, трудно раздельно оценить в машине изменение сопротивлений рассеяния от насыщения магнитной цепи и вытеснения тока. Поэтому на практике изменение параметра, вызванное несколькими факторами, представляют в функции величины, оказывающей наибольшее влияние. Обычно такие зависимости удается получить лишь для конкретного типа машины. Например, выполненный анализ параметров рольганговых двигателей серии АР показал, что их активные сопротивления не зависят от вытеснения тока, а сопротивление взаимоиндукции x_m мало зависит от изменения насыщения по пути основного магнитного потока, происходящего при работе *. При обработке данных опытов короткого замыкания было замечено, что индуктивные сопротивления рассеяния в значительной степени определяются процессами в зубцовой зоне и могут быть представлены в функции токов. В пределах изменения тока статора, например, от тока холостого хода до тока короткого замыкания сопротивления изменяются по линейному закону:

$$x_к = x_{\sigma s} + x'_{\sigma r} = a - bi_s, \tag{3-57}$$

где $x_к$ — индуктивное сопротивление короткого замыкания; $x_{\sigma s}$ — индуктивное сопротивление рассеяния статора; $x'_{\sigma r}$ — индуктивное сопротивление рассеяния ротора, приведенное к статору.

Для математического моделирования асинхронных двигателей серии АР воспользуемся уравнениями (3-48), в которых переменные выражены через токи и потокосцепления статорных и роторных контуров. Учтем изменения сопротивлений рассеяния, введя в уравнения (3-48) нелинейные функции результирующего тока статора:

$$\left.\begin{aligned} y_s &= \frac{1}{\sigma x_s} = \frac{1}{x'_s} = f_1(i_s); \\ y_r &= \frac{1}{\sigma x_r} = \frac{1}{x'_r} = f_2(i_s); \\ y_m &= \frac{x_m}{\sigma x_r x_s} = \frac{k_r}{x_s \sigma} = \frac{k_s}{x_r \sigma} = f_3(i_s), \end{aligned}\right\} \tag{3-58}$$

* *Кононенко Е. В., Данчинов Б. А.* Исследование электромеханических переходных процессов рольганговых двигателей на АВМ с учетом насыщения стали потоками рассеяния. — Известия ТПИ, 1971, т. 212, с. 102—108.

где $x_s' = x_s - x_m^2/x_r$ и $x_r' = x_r - x_m^2/x_s$ — переходные индуктивные сопротивления статора и ротора; $k_r = x_m/x_r$ и $k_s = x_m/x_s$ — коэффициенты связи ротора и статора.

С учетом соотношений (3-58) система уравнений (3-48) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
&d\Psi_{s\alpha}/dt = u_{s\alpha} - R_s i_{s\alpha}; \quad d\Psi_{s\beta}/dt = u_{s\beta} - R_s i_{s\beta};\\
&d\Psi_{r\alpha}/dt = -R_r i_{r\alpha} - \omega_r \Psi_{r\beta}; \quad d\Psi_{r\beta}/dt = -R_r i_{r\beta} + \omega_r \Psi_{r\alpha};\\
&i_{s\alpha} = y_s \Psi_{s\alpha} - y_m \Psi_{r\alpha}; \quad i_{s\beta} = y_s \Psi_{s\beta} - y_m \Psi_{r\beta};\\
&i_{r\alpha} = y_r \Psi_{r\alpha} - y_m \Psi_{s\alpha}; \quad i_{r\beta} = y_r \Psi_{r\beta} - y_m \Psi_{s\beta};\\
&d\omega_r/dt = (M_{эм} - M_{мех})/J;\\
&M_{эм} = (3/2) y_m (\Psi_{s\beta} \Psi_{r\alpha} - \Psi_{r\beta} \Psi_{s\alpha}).
\end{aligned}\right\} \tag{3-59}$$

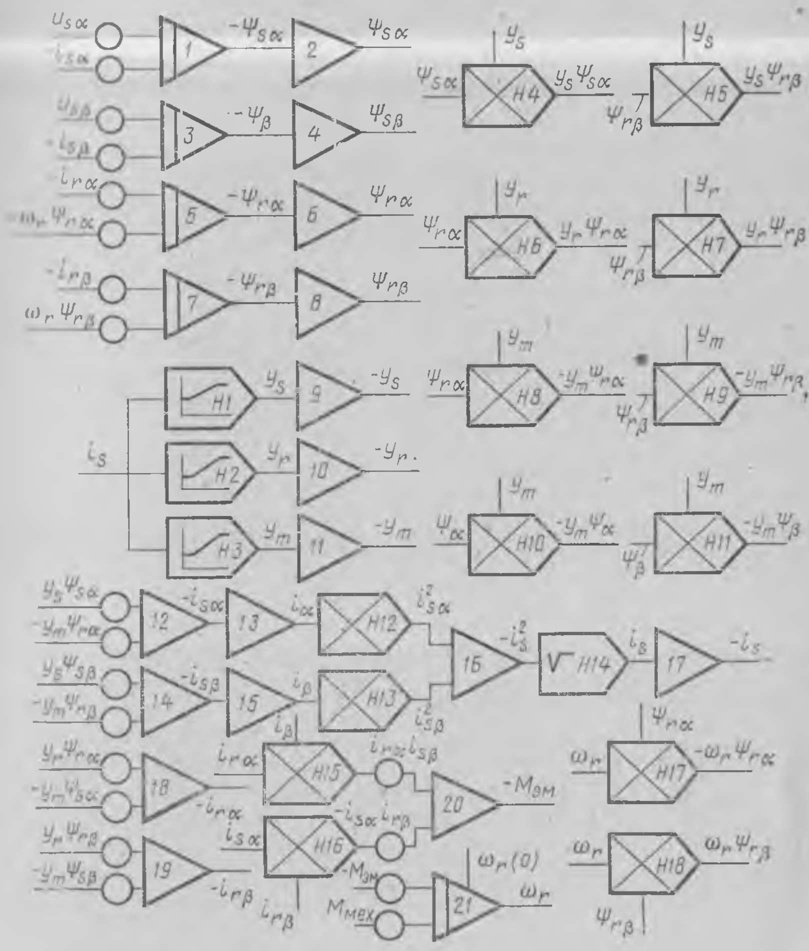


Рис. 3-7

Уравнения (3-59) необходимо дополнить выражением для модуля вектора результирующего тока статора

$$i_s = \sqrt{i_{s\alpha}^2 + i_{s\beta}^2}. \tag{3-60}$$

Реальные значения y_s, y_r, y_m получены в функции действующих значений фазного тока статора. Представление их в (3-58) в функции модуля вектора результирующего статорного тока является справедливым, так как в относительных единицах амплитудные и действующие значения фазных токов равны между собой, а амплитудное значение фазных токов равно результирующему току.

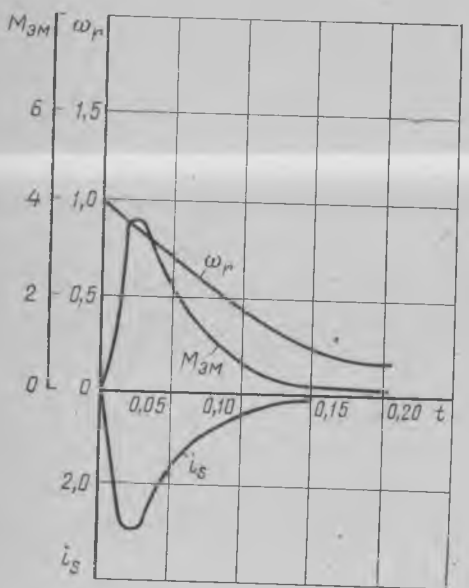


Рис. 3-8

На рис. 3-7 представлена математическая модель асинхронного двигателя, составленная по уравнениям (3-59) и (3-60). Она позволяет исследовать различные режимы асинхронных двигателей с учетом изменения индуктивностей рассеяния обмоток в зависимости от величины статорного тока: пуск, реверс с затухшим и незатухшим полем ротора, повторное включение с любой начальной частотой вращения ротора, торможение противовключением и коротким замыканием статорной обмотки после отключения ее от сети и т. д. Для исследования двигателя без учета изменения его параметров необходимо исключить из схемы решения нелинейные блоки *Н1, Н2, Н3*, а функции y_s, y_r, y_m принять постоянными, определяемыми неизменными значениями параметров.

На рис. 3-8 приведены расчетные осциллограммы торможения коротким замыканием обмотки статора асинхронного двигателя типа АР-53-6, имеющего следующие величины параметров (отн. ед.): $r_s = 0{,}0545$; $r_r = 0{,}206$; $x_m = 2{,}05$; $J = 61{,}5$; $M_{мех} = 0$.

Приведенный пример является лишь одним из всех возможных методов учета нелинейностей асинхронного двигателя при моделировании на АВМ. Другие методы учета нелинейностей будут рассмотрены далее.

§ 3-3. Моделирование трехфазного асинхронного генератора с конденсаторным самовозбуждением

В автономных системах питания широко распространены асинхронные самовозбуждающиеся генераторы.

Развитие и перспективы применения асинхронных генераторов тесно связаны с всесторонним изучением различных режимов работы этих машин. Одной из важных задач является исследование переходных процессов, протекающих как при самовозбуждении, так и при работе на нагрузку.

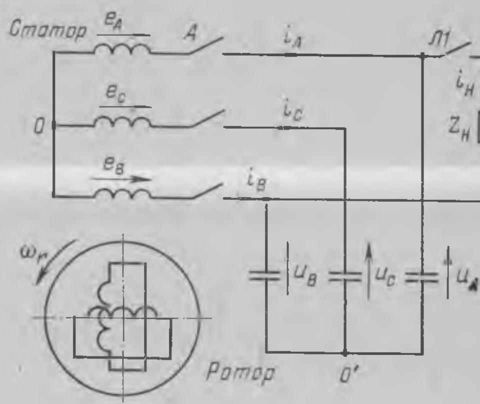


Рис. 3-9

Одна из возможных схем включения асинхронного генератора на нагрузку представлена на рис. 3-9. При работе генератора возможны следующие основные режимы: трехфазное конденсаторное самовозбуждение при холостом ходе, включение и работа на нагрузку, самовозбуждение под нагрузкой.

Анализ этих режимов возможен по полной системе уравнений асинхронной машины. Работа асинхронного генератора на нагрузку характеризуется несимметрией цепей статора, поэтому целесообразно воспользоваться системой уравнений, записанных в осях α, β, 0 [см. (3-24) — (3-25)]. Для анализа работы схемы уравнения (3-24) — (3-25) необходимо дополнить уравнениями равновесия напряжений и токов контуров внешней цепи генератора:

$$\left.\begin{aligned} &u_н = u_A - u_B;\\ &i_A + C_A du_A/dt - i_н = 0;\\ &i_B - C_B du_B/dt + i_н = 0;\\ &i_C = C_C du_C/dt, \end{aligned}\right| \tag{3-61}$$

где i_A, i_B, i_C, $i_н$ — токи фаз генератора и нагрузки; u_A, u_B, u_C, $u_н$ — напряжения возбуждающих емкостей и нагрузки.

Напряжение на нагрузке

$$u_н = i_н R_н + L_н di_н/dt. \tag{3-62}$$

Пользуясь уравнениями преобразования (3-19), найдем связь между мгновенными значениями линейных токов генератора и проекциями изображающего вектора тока статора на оси α, β:

$$\left.\begin{aligned} i_A &= i_\alpha; \\ i_B &= -(1/2)\,i_\alpha + (\sqrt{3}/2)\,i_\beta; \\ i_C &= -(1/2)\,i_\alpha - (\sqrt{3}/2)\,i_\beta. \end{aligned}\right| \tag{3-63}$$

В уравнениях (3-63) отсутствует нулевая составляющая, поскольку для рассматриваемой схемы $i_A + i_B + i_C = 0$.

Формулы преобразования мгновенных значений выходного напряжения трехфазного генератора к напряжениям в системе осей α, β, 0 получим из уравнений вида (3-17) при $\omega_к = 0$:

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha &= \frac{2}{3}\left(u_A - \frac{u_B + u_C}{2}\right); \\ u_\beta &= \frac{1}{\sqrt{3}}\,(u_B - u_C). \end{aligned}\right| \tag{3-64}$$

Полную систему дифференциальных уравнений, которые описывают переходный процесс трехфазного асинхронного генератора, работающего на однофазную нагрузку, приведем к виду, удобному для моделирования на АВМ. Из уравнений (3-24) определим производные потокосцеплений контуров:

$$\left.\begin{aligned} p\Psi_\alpha &= -u_\alpha - R_\alpha i_\alpha; & p\Psi_\beta &= -u_\beta - R_\beta i_\beta; \\ p\Psi_{\alpha r} &= \omega_r \Psi_{\beta r} - R_r i_{\alpha r}; & p\Psi_{\beta r} &= -\omega_r \Psi_{\alpha r} - R_r i_{\beta r}. \end{aligned}\right\} \tag{3-65}$$

Из (3-25) найдем выражения для токов контуров машины по осям α, β и преобразуем их к виду

$$\left.\begin{aligned} i_\alpha &= \frac{\Psi_{\delta\alpha}}{x_m} - i_{\alpha r}; & i_\beta &= \frac{\Psi_{\delta\beta}}{x_m} - i_{\beta r}; \\ i_{\alpha r} &= \frac{1}{x_{\sigma r}}\,(\Psi_{\alpha r} - \Psi_{\delta\alpha}); & i_{\beta r} &= \frac{1}{x_{\sigma r}}\,(\Psi_{\beta r} - \Psi_{\delta\beta}); \end{aligned}\right| \tag{3-66}$$

где

$$\Psi_{\delta\alpha} = \Psi_\alpha - x_{\sigma s} i_\alpha; \quad \Psi_{\delta\beta} = \Psi_\beta - x_{\sigma s} i_\beta \tag{3-67}$$

— потокосцепления в воздушном зазоре по осям α и β; $x_{\sigma r}$, $x_{\sigma s}$ — индуктивные сопротивления рассеяния обмоток ротора и статора.

По полученным из (3-66) значениям соответствующих токов статора i_α и i_β определим [см. (3-63)] линейные токи фаз генератора. Из (3-61) запишем мгновенные зачения фазных напряжений на конденсаторах:

$$pu_A = x_{CA}(i_A - i_н); \quad pu_B = x_{CB}(i_B + i_н); \quad pu_C = x_{CC} i_C, \tag{3-68}$$

где x_{CA}, x_{CB}, x_{CC} — реактивные сопротивления возбуждающих конденсаторов в фазах A, B, C.

Запишем выражения для напряжения нагрузки и тока, протекающего в ней:

$$u_н = u_A - u_B; \quad i_н = u_н / R_н. \tag{3-69}$$

Составляющие напряжений статора u_α, u_β найдем по известным значениям u_A, u_B и u_C [см. (3-64)].

Полученную систему уравнений, описывающую электромагнитные переходные процессы асинхронного генератора, дополним уравнением движения ротора, приведенным к нормальному виду:

$$p\omega_r = (M_{\text{эм}} - M_{\text{мех}})/H_j, \tag{3-70}$$

где $M_{\text{эм}} = \Psi_\beta i_\alpha - \Psi_\alpha i_\beta$.

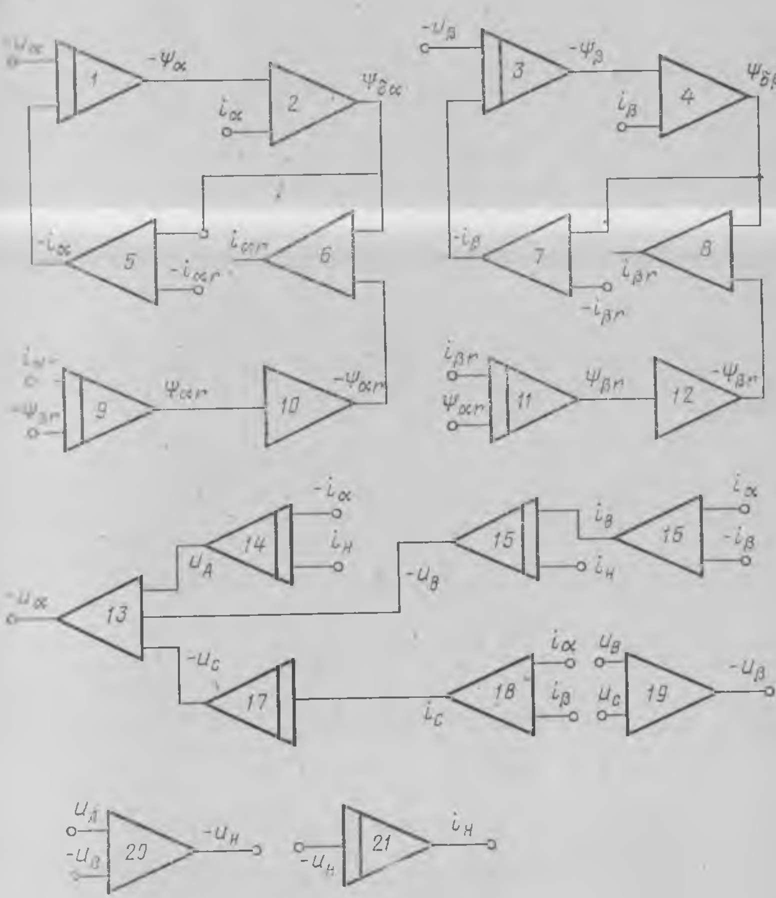


Рис. 3-10

Таким образом, полная система уравнений электромеханических переходных процессов трехфазного асинхронного генератора описывается выражениями (3-63)—(3-70). Структурная схема модели уравнений (3-63)—(3-69) приведена на рис. 3-10. Блоки *1—12* решают уравнения (3-65), (3-66) и являются моделью трехфазной асинхронной машины. Блоки *13—21* решают уравнения (3-63), (3-64), (3-67), (3-68), учитывающие несимметрию цепи нагрузки. В этой модели не учитывается насыщение магнитной цепи. Однако примененная форма записи выражений для токов позволяет осуществить как одновременный, так и раздельный учет насыщения по пути основного магнитного потока и пути потоков рассеяния статора или ротора.

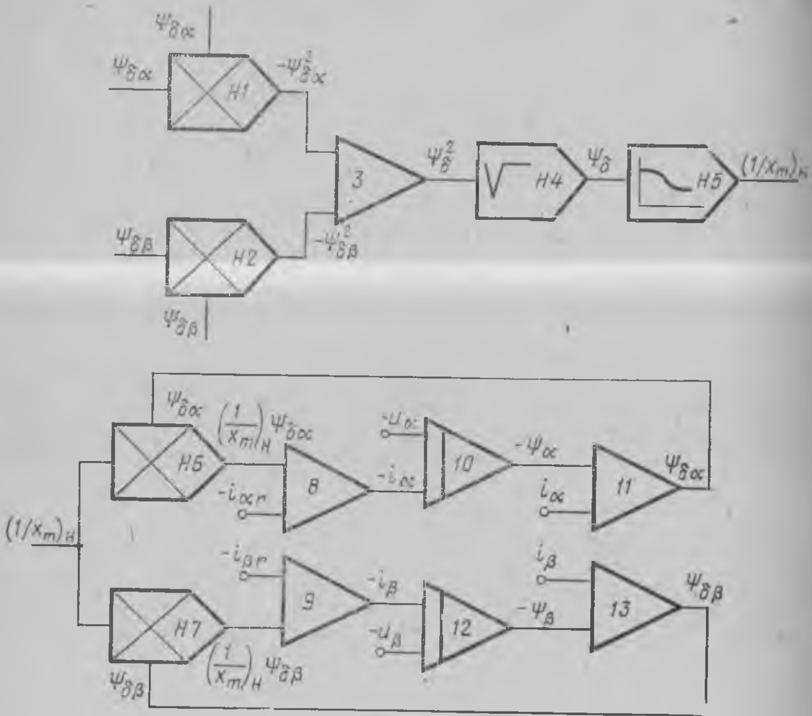


Рис. 3-11

Для учета насыщения по пути основного магнитного потока необходимо в выражениях (3-66) для токов i_α, i_β использовать зависящее от насыщения значение сопротивления взаимоиндукции x_m, которое может быть определено по кривой намагничивания машины в зависимости от результирующего потокосцепления в воздушном зазоре машины:

$$x_m = f(\Psi_\delta).$$

Однако, чтобы исключить операцию деления на величину x_m при нахождении токов i_α, i_β, целесообразно учесть насыщение. Для этого следует определить величину, обратную насыщенному значению сопротивления взаимоиндукции, в функции результирующего потокосцепления в воздушном зазоре

$$(1/x_m)_н = f(\Psi_\delta). \qquad (3\text{-}71)$$

Результирующее потокосцепление в воздушном зазоре

$$\Psi_\delta = \sqrt{\Psi_{\delta\alpha}^2 + \Psi_{\delta\beta}^2}. \tag{3-72}$$

Структурная схема модели для определения токов i_α, i_β с учетом насыщения магнитной цепи основным магнитным потоком приведена на рис. 3-11. Ее введение в структурную схему (см. рис. 3-10) позволяет осуществить моделирование асинхронного генератора с учетом насыщения магнитной цепи по пути основного магнитного потока.

Чтобы учесть насыщение магнитной цепи по пути потока рассеяния, например статора, необходимо выражения (3-67) представить в виде:

$$\Psi_{\delta\alpha} = \Psi_\alpha - x_{\sigma н} i_\alpha; \quad \Psi_{\delta\beta} = \Psi_\beta - x_{\sigma н} i_\beta, \tag{3-73}$$

где $x_{\sigma н} = f(i)$ — насыщенное значение индуктивного сопротивления рассеяния обмотки статора $\left(i = \sqrt{i_\alpha^2 + i_\beta^2}\right.$ — модуль вектора тока статора).

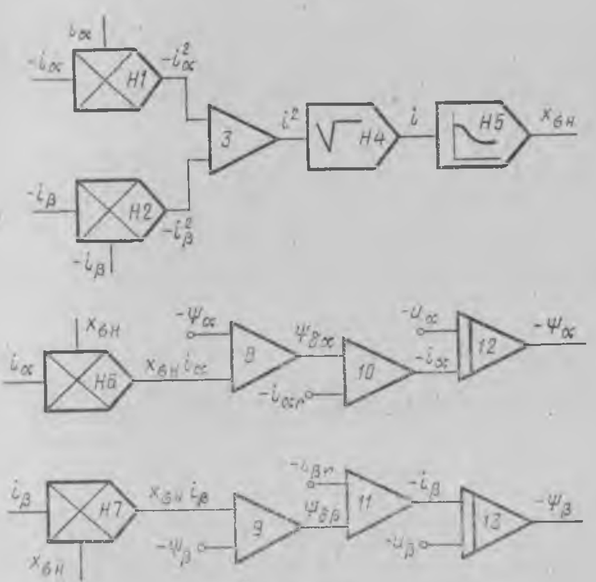


Рис. 3-12

Структурная схема, моделирующая уравнения (3-73), представлена на рис. 3-12. Введение ее в структурную схему (см. рис. 3-10) позволяет исследовать переходные процессы асинхронного генератора с учетом насыщения по пути потоков рассеяния статора. Особое значение имеет учет насыщения по пути потоков рассеяния статора при определении ударных токов внезапного короткого замыкания асинхронного генератора.

Одновременный учет насыщения магнитной цепи как по пути основного потока, так и по пути потоков рассеяния осуществляется введением структурных схем (рис. 3-11 и 3-12) в схему математической модели асинхронного генератора (см. рис. 3-10).

Рассмотренный метод учета насыщения магнитной цепи, основанный на разделении потокосцеплений обмоток на потокосцепления основного магнитного потока и потока рассеяния, значительно упрощает задачу исследования, так как требует меньшего количества нелинейных блоков, чем рассмотренный метод учета насыщения пути потоков рассеяния асинхронного двигателя.

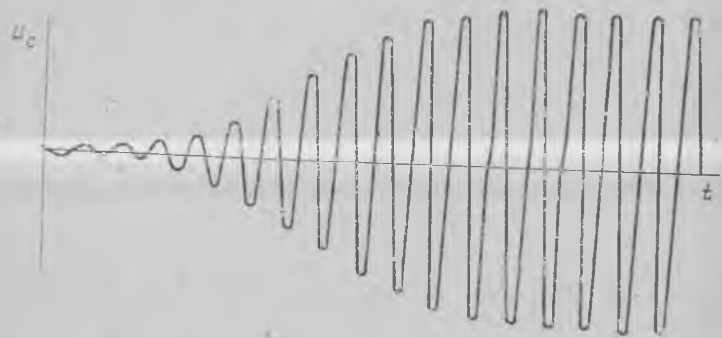


Рис. 3-13

На рис. 3-13 приведена осциллограмма самовозбуждения трехфазного асинхронного генератора при отключенной нагрузке. При моделировании учитывалось насыщение магнитной цепи по пути основного магнитного потока и пути потока рассеяния. Ограничение нарастания напряжения обусловлено именно насыщением магнитной цепи по пути основного магнитного потока.

Исследуемый генератор, выполненный на базе асинхронного двигателя типа АО2-42-2, имеет следующие параметры: $x_{\alpha s}=x_{\beta s}=1{,}07$; $r_s=0{,}05$; $x_m=1{,}0$; $x_{\alpha r}=x_{\beta r}=1{,}08$; $R_r=0{,}06$; $x_C=0{,}5$.

§ 3-4. Моделирование самовозбуждения асинхронного генератора с несимметричным ротором

Самовозбуждение при симметричном включении конденсаторов является наиболее распространенным на практике, например режимы самовозбуждения асинхронных генераторов, режимы конденсаторного торможения асинхронных двигателей и т. д.

Уравнения асинхронной машины при наличии конденсатора в цепи статора и несимметрии ротора. Известно, что с энергетической точки зрения схемы подключения конденсаторов самовозбуждения к обмоткам статора трехфазной асинхронной машины в «звезду» и «треугольник» эквивалентны. Так, схема соединения возбуждающих конденсаторов в «треугольник» может быть преобразована в «звезду» и обратно.

Составим уравнения для схемы трехфазной асинхронной машины при наличии конденсаторов в цепи статора и несимметрии ротора (рис. 3-14).

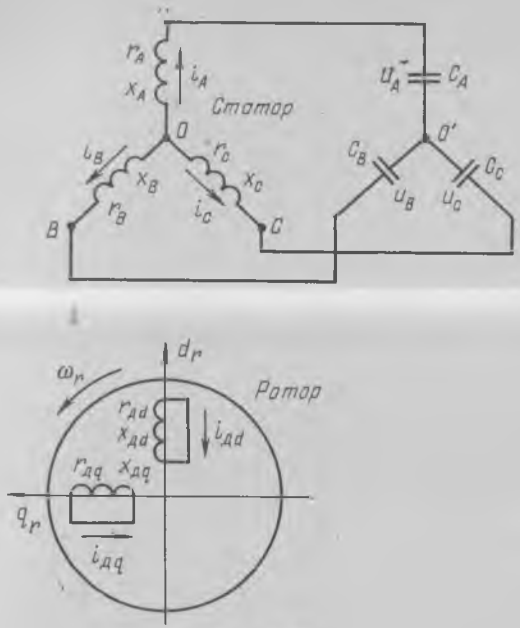


Рис. 3-14

При условии равенства емкостей ($C_A = C_B = C_C = C$) между точками O и O' напряжение $u_0 = 0$. В этом случае напряжения фаз машины принимают вид

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d\Psi_A}{dt} + r_A i_A + \frac{1}{C}\int_0^t i_A dt; \\ 0 &= \frac{d\Psi_B}{dt} + r_B i_B + \frac{1}{C}\int_0^t i_B dt; \\ 0 &= \frac{d\Psi_C}{dt} + r_C i_C + \frac{1}{C}\int_0^t i_C dt, \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}74)$$

где Ψ_A, Ψ_B, Ψ_C — потокосцепления фаз асинхронного генератора; i_A, i_B, i_C — токи фаз генератора; $\frac{1}{C}\int_0^t i_A dt = u_A$, $\frac{1}{C}\int_0^t i_B dt = u_B$,

$\frac{1}{C}\int\limits_0^t i_C dt = u_C$ — напряжения фаз генератора (напряжения на конденсаторах).

Чтобы исключить интегралы в уравнениях (3-74), продифференцируем их:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\Psi_A}{dt} + r_A i_A\right) + \frac{i_A}{C}; \\ 0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\Psi_B}{dt} + r_B i_B\right) + \frac{i_B}{C}; \\ 0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\Psi_C}{dt} + r_C i_C\right) + \frac{i_C}{C}. \end{aligned}\right\} \tag{3-75}$$

Заменив в уравнениях (3-75) фазные переменные новыми переменными в осях d, q, общую систему уравнений рассматриваемой схемы в относительных единицах запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &0 = p(p\Psi_d + 2\omega_r \Psi_q + ri_d) - \omega_r^2 \Psi_d + \omega_r r i_q + x_C i_d; \\ &0 = p(p\Psi_q - 2\omega_r \Psi_d + ri_q) + \omega_r^2 \Psi_q + \omega_r r i_d - x_C i_q; \\ &0 = p\Psi_{\text{д}d} + r_{\text{д}d} i_d; \qquad 0 = p\Psi_{\text{д}q} + r_{\text{д}q} i_{\text{д}q}, \end{aligned}\right\} \tag{3-76}$$

где потокосцепления

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_d = x_{\sigma d} i_d + \Psi_{\delta d}; \qquad \Psi_q = x_{\sigma q} i_q + \Psi_{\delta q}; \\ &\Psi_{\text{д}d} = x_{\sigma\text{д}d} i_{\text{д}d} + \Psi_{\delta d}; \qquad \Psi_{\text{д}q} = x_{\sigma\text{д}q} i_{\text{д}q} + \Psi_{\delta q}; \end{aligned}\right\} \tag{3-77}$$

x_C — емкостное сопротивление.

В уравнениях (3-77) потокосцепления в воздушном зазоре по осям d и q равны

$$\Psi_{\delta d} = x_m (i_d + i_{\text{д}d}); \qquad \Psi_{\delta q} = x_m (i_q + i_{\text{д}q}). \tag{3-78}$$

Такая форма записи уравнений необходима при учете насыщения магнитной цепи. Используя уравнения (3-78), сопротивление взаимоиндукции x_m можно представить в зависимости от результирующего потокосцепления в воздушном зазоре:

$$x_m = F(\Psi_\delta), \tag{3-79}$$

где $\Psi_\delta = \sqrt{\Psi_{\delta d}^2 + \Psi_{\delta q}^2}$.

Пример 3-1. Подготовка для решения на АВМ уравнений асинхронной машины. Приведем уравнения (3-76)—(3-79) к машинному виду:

$$\left.\begin{aligned} &p(p\Psi_d + 2\omega_r \Psi_q + ri_d) = \omega_r^2 \Psi_d - \omega_r r i_q - x_C i_d; \\ &p(p\Psi_q - 2\omega_r \Psi_d + ri_q) = -\omega_r^2 \Psi_q - \omega_r r i_d + x_C i_q; \\ &p\Psi_{\text{д}d} = -r_{\text{д}d} i_{\text{д}d}; \\ &p\Psi_{\text{д}q} = -r_{\text{д}q} i_{\text{д}q}. \end{aligned}\right\} \tag{3-80}$$

Уравнения для определения токов:

$$\left.\begin{aligned} i_d &= \frac{1}{x_{\sigma d}}(\Psi_d - \Psi_{\delta d}); \qquad i_q = \frac{1}{x_{\sigma q}}(\Psi_q - \Psi_{\delta q}); \\ i_{\text{д}d} &= \frac{1}{x_m}\Psi_{\delta d} - i_d; \qquad i_{\text{д}q} = \frac{1}{x_m}\Psi_{\delta q} - i_q. \end{aligned}\right| \tag{3-81}$$

Уравнения потокосцеплений в воздушном зазоре:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{\delta d} &= \Psi_{\text{д}d} - x_{\sigma\text{д}d} i_{\text{д}d}; \\ \Psi_{\delta q} &= \Psi_{\text{д}q} - x_{\sigma\text{д}q} i_{\text{д}q}; \\ \Psi_\delta &= \sqrt{\Psi_{\delta d}^2 + \Psi_{\delta q}^2}. \end{aligned}\right| \tag{3-82}$$

Для упрощения записи введем обозначения:

$$\sum 1 = p\Psi_d + 2\omega_r\Psi_q + ri_d; \qquad \sum 2 = p\Psi_q - 2\omega_r\Psi_d + ri_q. \tag{3-83}$$

Схема математической модели уравнений (3-80)—(3-83) приведена на рис. 3-15.

Рассчитаем коэффициенты передачи отдельных решающих усилителей. Для интегратора *1*

$$m_\Sigma d\sum 1/m_t dt = m_\Psi k_{11}\Psi_d - m_i k_{12} i_q - m_i k_{13} i_d, \tag{3-84}$$

где m_Σ, m_t, m_Ψ, m_i — масштабы суммы, времени, потокосцепления, тока; k_{11}, k_{12}, k_{13} — коэффициенты передачи.

Приводим уравнение (3-84) к нормальному виду:

$$\frac{d\sum 1}{dt} = \frac{m_t m_\Psi}{m_\Sigma} k_{11}\Psi_d - \frac{m_i m_t}{m_\Sigma} k_{12} i_q - \frac{m_t m_i}{m_\Sigma} k_{13} i_d. \tag{3-85}$$

Сравнивая коэффициенты при переменных в уравнении (3-85) и первом уравнении системы (3-80), получаем

$$k_{11} = \frac{\omega_r^2 m_\Sigma}{m_t m_\Psi}; \qquad k_{12} = \frac{\omega_r r m_\Sigma}{m_i m_t}; \qquad k_{13} = \frac{m_\Sigma}{m_i m_t} x_C. \tag{3-86}$$

Аналогично находим коэффициенты передачи решающего блока *6*:

$$k_{61} = \frac{\omega_r^2 m_\Sigma}{m_t m_\Psi}; \qquad k_{62} = \frac{\omega_r r m_\Sigma}{m_i m_t}; \qquad k_{63} = \frac{m_\Sigma}{m_i m_t} x_C. \tag{3-87}$$

Для решающего блока *2* записываем уравнение

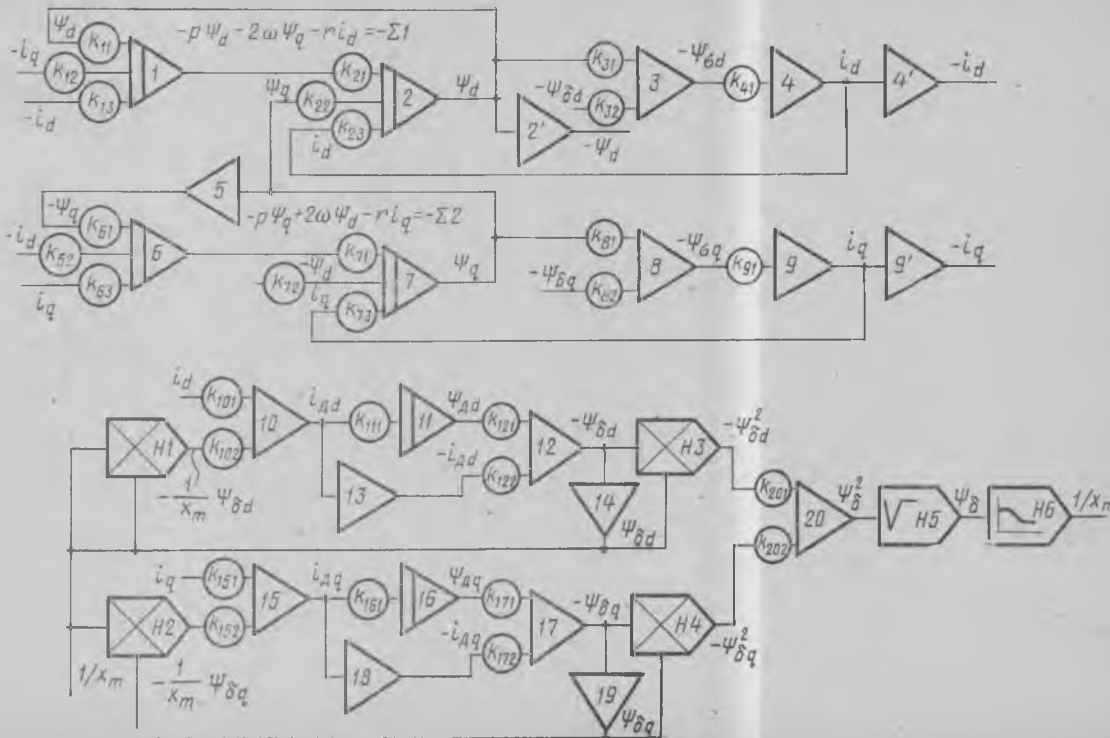
$$-\frac{m_\Psi}{m_t}\cdot\frac{d\Psi_d}{dt} = -m_\Sigma k_{21}\Sigma 1 - m_\Psi k_{22}\Psi_q - m_i k_{23} i_d \tag{3-88}$$

в нормальном виде

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = \frac{m_t}{m_\Psi}(m_\Sigma k_{21}\Sigma 1 + m_\Sigma k_{22}\Psi_q + m_i k_{23} i_d). \tag{3-89}$$

Сравнивая коэффициенты уравнения (3-89) с коэффициентами первого уравнения системы (3-83), получаем

$$k_{21} = \frac{m_\Psi}{m_t m_\Sigma}; \qquad k_{22} = \frac{2\omega_r}{m_t}; \qquad k_{23} = r\frac{m_\Psi}{m_t m_i}. \tag{3-90}$$



$-p\psi_d - 2\omega\psi_q - ri_d = -\Sigma 1$
$-p\psi_q + 2\omega\psi_d - ri_q = -\Sigma 2$
ψ_d
$-i_q$
$-i_d$
$-\psi_q$
$-i_d$
i_q
ψ_q
i_d
$-\psi_d$
i_q
$-\psi_{\delta d}$
i_d
$-i_d$
$-\psi_{\delta q}$
i_q
$-i_q$
$i_{\Delta d}$
$\psi_{\Delta d}$
$-i_{\Delta d}$
$\psi_{\delta d}$
$-\psi^2_{\delta d}$
$-\frac{1}{x_m}\psi_{\delta d}$
$i_{\Delta q}$
$\psi_{\Delta q}$
$-i_{\Delta q}$
$\psi_{\delta q}$
$-\psi_{\delta q}$
$-\psi^2_{\delta q}$
$-\frac{1}{x_m}\psi_{\delta q}$
$1/x_m$
ψ^2_δ
ψ_δ
$1/x_m$
H1
H2
H3
H4
H5
H6

Рис. 3-15

Аналогично, для решающего блока 7:

$$k_{71}=\frac{m_\Psi}{m_t m_\Psi};\qquad k_{72}=\frac{2\omega_r}{m_t};\qquad k_{73}=r\frac{m_\Psi}{m_t m_i}. \tag{3-91}$$

Для блоков 3 и 8 принимаем

$$k_{31}=k_{32}=k_{82}=k_{81}=1. \tag{3-92}$$

Для блока 4 записываем уравнение

$$m_i i_d=k_{41}m_\Psi(\Psi_d-\Psi_{\delta d})=k_{41}m_\Psi\Psi_{\sigma d} \tag{3-93}$$

или

$$i_d=\frac{k_{41}m_\Psi}{m_i}(\Psi_d-\Psi_{\delta d})=\frac{k_{41}m_\Psi}{m_i}\Psi_{\sigma d}. \tag{3-94}$$

Сравнивая коэффициенты уравнения (3-94) и первого уравнения системы (3-81), получаем

$$k_{41}=m_i/(m_\Psi x_{\sigma d}). \tag{3-95}$$

Аналогично, для блока 9

$$k_{91}=m_i/(m_\Psi x_{\sigma q}). \tag{3-96}$$

Для блока 10 машинное уравнение имеет вид.

$$m_i i_{\text{д}d}=m_\Psi k_{102}m_x k_{\text{п}}(1/x_m)_{\text{н}}\Psi_{\delta d}-m_i k_{101}i_d, \tag{3-97}$$

или в нормальном виде

$$i_{\text{д}d}=\frac{m_\Psi k_{102}m_x k_{\text{п}}}{m_i}\left(\frac{1}{x_m}\right)_{\text{н}}\Psi_{\delta d}-\frac{m_i k_{101}}{m_i}i_d. \tag{3-98}$$

Сравнивая (3-98) с третьим уравнением системы (3-81), находим

$$k_{101}=1;\qquad k_{102}=m_i/(m_\Psi m_x k_{\text{п}}), \tag{3-99}$$

где m_x — масштаб $1/x_m$; $k_{\text{п}}$ — коэффициент перемножения, равный 0,01.

Аналогично, для блока 15

$$k_{151}=1;\qquad k_{152}=m_i/(m_\Psi m_x k_{\text{п}}). \tag{3-100}$$

Для блока 11 имеем

$$(m_\Psi/m_t)(d\Psi_{\text{д}d}/dt)=-m_i k_{111}i_{\text{д}d} \tag{3-101}$$

или

$$d\Psi_{\text{д}d}/dt=-(m_i m_t/m_\Psi)k_{111}i_{\text{д}d}. \tag{3-102}$$

Из сравнения (3-102) с третьим уравнением системы (3-80) получаем

$$k_{111}=r_{\text{д}d}m_\Psi/(m_t m_i). \tag{3-103}$$

Аналогично, для блока 16

$$k_{161}=r_{\text{д}d}m_\Psi/(m_t m_i). \tag{3-104}$$

Для блока 12 имеем

$$m_\Psi\Psi_{\delta d}=m_\Psi k_{121}\Psi_{\text{д}d}-m_i k_{122}i_{\text{д}d} \tag{3-105}$$

или

$$\Psi_{\delta d}=k_{121}\Psi_{\text{д}d}-(m_i/m_\Psi)k_{122}i_{\text{д}d}. \tag{3-106}$$

Сравнивая (3-106) с первым уравнением системы (3-82), записываем

$$k_{121} = 1, \qquad k_{122} = (m_{\Psi}/m_i)\, x_{\sigma д d}. \tag{3-107}$$

При этом для блока *17*

$$k_{171} = 1, \qquad k_{172} = (m_{\Psi}/m_i) x_{\sigma д q}. \tag{3-108}$$

Пользуясь нормальной характеристикой холостого хода $E_0 = f(i_m)$, можно найти $1/x_m = f(\Psi_\delta)$, или $1/x_m = f(\Psi_\delta^2)$. Последняя зависимость позволяет упростить схему решения, исключив из нее блок $\sqrt{H5}$, производящий операцию «корень квадратный». Названные расчетные зависимости, приведенные в относительных единицах, показаны на рис. 3-16.

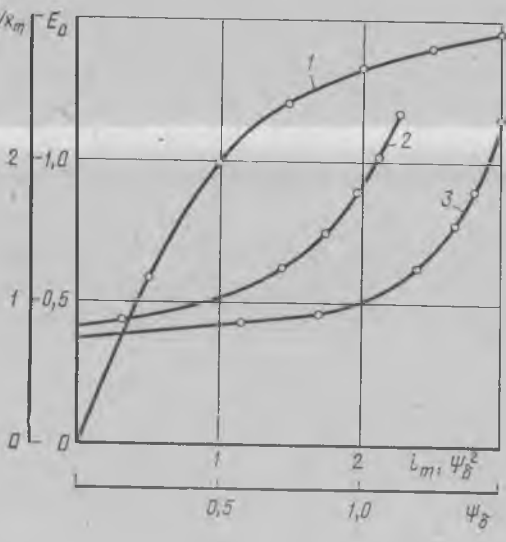


Рис. 3-16

Для настройки блока нелинейности была использована зависимость $1/x_m = f(\Psi_\delta^2)$. При этом приняты масштабы $m_{\Psi^2} = 50$ В/ед., $m_x = 40$ В/ед.

График набранной зависимости приведен на рис. 3-17. Остальные масштабы переменных должны быть выбраны с учетом возможного времени процесса самовозбуждения и максимальных пределов их изменения. В частности, рекомендуется принимать $m_i = 10$ В/ед., $m_t = 1$, $m_\Sigma = 50$ В/ед.

Изменяя коэффициенты передач решающих усилителей, связь которых с параметрами машины устанавливается соотношениями (3-86), (3-87), (3-90), (3-91), (3-95), (3-96), (3-99), (3-100), (3-103), (3-104), (3-107), (3-108), можно исследовать процесс самовозбуждения.

Конденсаторное самовозбуждение асинхронной машины осуществляется обычно подключением обмотки статора к зажимам батареи конденсаторов. На структурной схеме математической модели (см. рис. 3-15) это реализуется подачей команды «Пуск». При соответствующих параметрах асинхронной машины и математической модели происходит самовозбуждение. Появление начального тока в цепи статора реальной машины может быть следствием остаточного потока в стали, случайного заряда на конденсаторах или внешних электромагнитных воздействий. На экспериментальной установке значение величины напряжения от остаточного потока обычно составляет не более 0,05% от номинального.

Самовозбуждение на структурной схеме модели можно осуществить как при нулевых начальных значениях напряжения на интеграторах, так и при ненулевых начальных условиях, соответствующих начальному запасу электромагнитной энергии в машине или электрической энергии в конденсаторах. С появлением первоначальной энергии в цепи происходит ее непрерывный обмен между машиной и электрическим полем конденсатора. Постепенно эта энергия рассеивается на потери.

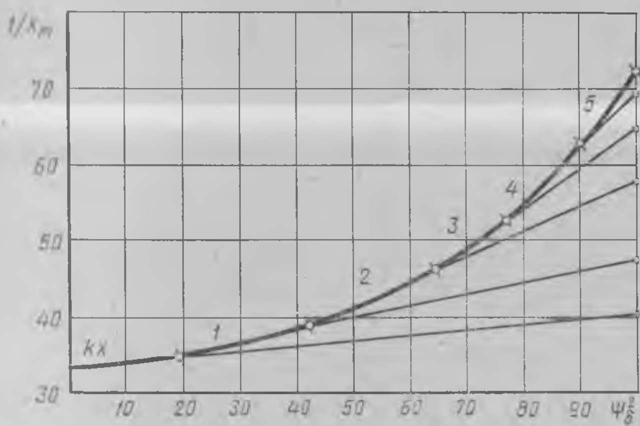


Рис. 3-17

Сочетания активных, индуктивных и емкостных параметров колебательной цепи, при которых появляются положительные составляющие в комплексных корнях характеристического уравнения, приводят к отбору энергии с ротора. При линейности параметров цепи «машина — конденсатор» и постоянстве частоты вращения ротора увеличение тока и напряжения теоретически может продолжаться до бесконечности. В действительности при самовозбуждении рост тока ограничивается нелинейностью цепи (насыщением стали). Появление установившегося режима соответствует равенству энергии, поступающей с ротора, энергии, рассеиваемой в активных сопротивлениях цепи машины.

При сопротивлениях роторных контуров $r_{дq}$, $r_{дd}$, равных нулю, самовозбуждение не происходит. Физически это объясняется тем, что процесс самовозбуждения связан с проникновением потока реакции якоря в контуры ротора. Однако при $r_{дd}=r_{дq}=0$ появление тока в цепи статора сопровождается демпфированием потока реакции якоря и вытеснением его на пути потоков рассеяния. Асинхронный момент в данном случае отсутствует и самовозбуждение не происходит. Но в реальных машинах $r_д \neq 0$. Это приводит к постепенному проникновению потока статора в контуры ротора, и ротор накапливает энергию поля в контурах.

Разработанная математическая модель позволяет проанализировать процессы в системе «асинхронная машина — конденсатор», определить зону самовозбуждения, качественное влияние различных параметров на характер самовозбуждения, время самовозбуждения и т. д.

В качестве примера на рис. 3-18 приведена осциллограмма результирующего потокосцепления в воздушном зазоре при самовоз-

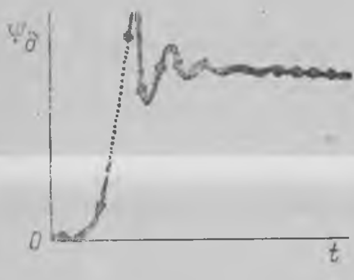


Рис. 3-18

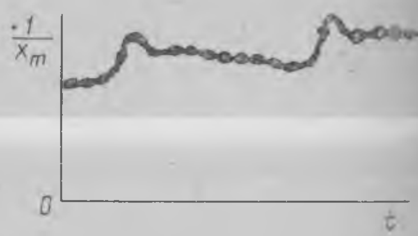


Рис. 3-19

буждении асинхронной машины, выполненной на базе двигателя типа АК-51-4 с параметрами: $x_{d\text{н}}=x_{q\text{н}}=1{,}1$ о. е., $x_{\text{д}d\text{н}}=x_{\text{д}q\text{н}}=1{,}05$ о. е., $r=0{,}05$ о. е., $r_{\text{д}d}=0{,}1$ о. е., $r_{\text{д}q}=2{,}0$. Как видно из рисунка 3-18, самовозбуждение асинхронной машины с несимметричным ротором происходит за время менее одного периода ЭДС.

Большой интерес представляет анализ характера изменения насыщения магнитной цепи при самовозбуждении асинхронной машины, что позволит оценить целесообразность моделирования рассматриваемой задачи с учетом насыщения.

На рис. 3-19 приведена зависимость $1/x_m=f(t)$, полученная при самовозбуждении машины с указанными выше параметрами. Как видно из рисунка 3-19, насыщение магнитной цепи наиболее сильно изменяется при нарастании потока в зазоре от нулевого значения до максимального. Изменениям потокосцепления в зазоре Ψ_δ соответствуют изменения насыщения магнитной цепи, проявляющиеся в колебании величины $1/x_m$.

§ 3-5. Моделирование однофазного асинхронного генератора

Асинхронный генератор может быть использован как источник питания, например в автономных системах электроснабжения (рис. 3-20). Самовозбуждение генератора осуществляется подключением конденсатора *C* через выключатель *B1*. Нагрузка подключается к статорной обмотке через выключатели *B1* и *B2*.

Для анализа работы схемы уравнения однофазной асинхронной машины при самовозбуждении (3-43)—(3-45) следует дополнить уравнениями равновесия напряжений и токов контуров внешней цепи генератора:

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha &= u_C = i_C/(Cp);\\ u_C &= i_{н}R_{н} + L_{н}pi_{н};\\ i_C &= i_\alpha - i_{н}, \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}109)$$

где i_C, $i_{н}$, i_α — токи конденсатора, нагрузки и генератора.

Уравнения равновесия напряжений контуров машины и нагрузки (3-43), (3-109) и уравнение движения ротора (3-45) можно представить в виде, удобном для моделирования:

$$\left.\begin{aligned} p\Psi_\alpha &= -i_\alpha R_\alpha - u_C;\\ p\Psi_{\alpha r} &= -i_{\alpha r}R_r + \omega_r\Psi_{\beta r};\\ p\Psi_{\beta r} &= -i_{\beta r}R_r - \omega_r\Psi_{\alpha r};\\ pu_C &= x_C i_C;\\ pi_{н} &= (1/L_{н})\,u_C - (R_{н}/L_{н})\,i_{н};\\ p\omega_r &= (M_{мех} - i_\alpha\Psi_{\delta\beta})/H_j. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}110)$$

Ток статора i_α и составляющие тока ротора $i_{\alpha r}$, $i_{\beta r}$ можно определить, полагая, что потокосцепления Ψ_α, $\Psi_{\alpha r}$, $\Psi_{\beta r}$ известны. Однако необходимость учета насыщения магнитной цепи не позволяет воспользоваться непосредственно уравнениями (3-44).

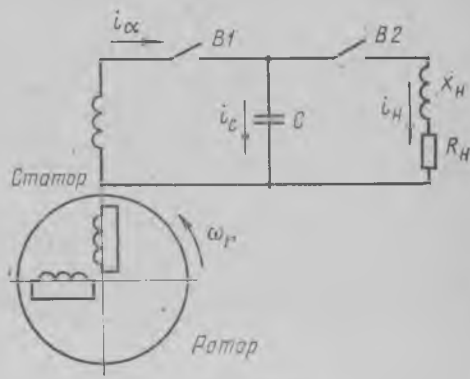


Рис. 3-20

Рассмотрим методику учета насыщения по пути основного магнитного потока, что является наиболее существенным при использовании асинхронного генератора в автономной системе. При анализе самовозбуждения трехфазного асинхронного генератора с несимметричным ротором был рассмотрен один из методов учета насыщения магнитной цепи по пути основного потока, связанный с определением насыщенного индуктивного сопротивления взаимоиндукции в зависимости от результирующего потока в воздушном зазоре.

Здесь рассмотрим еще один метод учета насыщения по пути основного магнитного потока, не связанный непосредственно с определением насыщенного значения индуктивного сопротивления взаимоиндукции. Этот метод моделирования позволяет непосредственно в процессе решения находить изменения токов, вызванных учетом насыщения.

Исходными уравнениями при определении величин потокосцеплений является система уравнений (3-44). Причем потокосцепления насыщенной машины следует представить в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_\alpha = x_\sigma i_\alpha + \Psi_{\delta\alpha}; \qquad \Psi_\beta = \Psi_{\delta\beta};\\ &\Psi_{\alpha r} = x_{\sigma r} i_{\alpha r} + \Psi_{\delta\alpha}; \quad \Psi_{\beta r} = x_{\sigma r} i_{\beta r} + \Psi_{\delta\beta};\\ &\Psi_{\delta\alpha} = x_m (i_\alpha + i_{\alpha r}) - \Delta\Psi_{\delta\alpha}; \quad \Psi_{\delta\beta} = x_m i_{\beta r} - \Delta\Psi_{\delta\beta};\\ &\Psi_\delta = \sqrt{\Psi_{\delta\alpha}^2 + \Psi_{\delta\beta}^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3-111}$$

где x_σ, $x_{\sigma r}$, x_m — сопротивления рассеяния обмотки статора и ротора без учета насыщения и сопротивление взаимной индуктивности; $\Psi_{\delta\alpha}$, $\Psi_{\delta\beta}$ — потокосцепления в воздушном зазоре по осям α, β; $\Delta\Psi_{\delta\alpha}$, $\Delta\Psi_{\delta\beta}$ — изменения потокосцепления в воздушном зазоре по осям α и β, обусловленные насыщением магнитной цепи по пути основного магнитного потока.

Ток статора i_α и составляющие тока ротора $i_{\alpha r}$, $i_{\beta r}$ определим из уравнений (3-111):

$$\left.\begin{aligned} &i_\alpha = \Psi_{\delta\alpha}/x_m + \Delta\Psi_{\Delta\delta\alpha}/x_m - i_{\alpha r};\\ &i_{\alpha r} = (\Psi_{\alpha r} - \Psi_{\delta\alpha})/x_{\sigma r};\\ &i_{\beta r} = (\Psi_{\delta\beta} + \Delta\Psi_{\delta\beta})/x_m, \end{aligned}\right\} \tag{3-112}$$

где $\Delta\Psi_{\delta\alpha}/x_m = \Delta i_\alpha$, $\Delta\Psi_{\delta\beta}/x_m = \Delta i_\beta$ — значения добавочных токов, вводимых по осям α, β и обусловленных насыщением.

Насыщение главной магнитной цепи машины при решении уравнений на АВМ учитывается следующим образом. Находятся потокосцепления в воздушном зазоре асинхронной машины по осям α, β из выражений

$$\Psi_{\delta\alpha} = \Psi_\alpha - x_{\sigma s} i_\alpha; \quad \Psi_{\delta\beta} = \Psi_{\beta r} - x_{\sigma r} i_{\beta r}. \tag{3-113}$$

Так как магнитное состояние машины определяется не составляющими потокосцепления в воздушном зазоре по осям α, β, а его результирующей величиной, то полное потокосцепление в воздушном зазоре

$$\Psi_\delta = \sqrt{\Psi_{\delta\alpha}^2 + \Psi_{\delta\beta}^2}. \tag{3-114}$$

В реальной машине всякое изменение полного потока в воздушном зазоре приводит к изменению сопротивления взаимной индуктивности, что вызывает изменение тока намагничивания машины. В схемах замещения асинхронной машины по осям α и β это соответствует включению в ветви намагничивания нелинейного сопротивления x_m. Рассматриваемый метод основан не на непосредственном нахождении x_m, а на нахождении дополнительных составляющих тока намагничивания по осям. Уравнения (3-122) составлены с учетом этой методики моделирования насыщения и отражают как бы наличие в ветви намагничивания схем замещения асинхронной машины дополнительной проводимости, обусловленной насыщением.

Получение дополнительных составляющих тока намагничивания по осям α и β осуществляется по характеристике холостого хода асинхронного генератора (рис. 3-21). Характеристики холостого хода *1* и намагничивания ненасыщенной машины *2* построены в зависимости от приведенного к статору результирующего тока намагничивания генератора, согласно принятой системе относительных единиц. Кривая *3* представляет собой разность этих характеристик, т. е. зависимость добавочного тока намагничивания, обусловленного насыщением, от результирующего потока в воздушном зазоре $\Delta i_m = f(\Psi_\delta)$. Если для каждого значения Ψ_δ найти отношение $\Delta i_m/\Psi_\delta$ и нанести на тот же рисунок, то получим зависимость дополнительной проводимости ветви намагничивания от потокосцепления воздушного зазора (кривая *4*). Умножая соответствующие потокосцепления в воздушном зазоре $\Psi_{\delta\alpha}$ и $\Psi_{\delta\beta}$ на величину $\Delta i_m/\Psi_\delta$, найдем значения добавочных токов Δi_α и Δi_β.

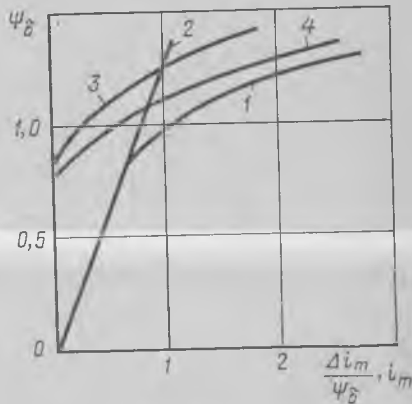


Рис. 3-21

Суммирующие интеграторы, блоки перемножения переменных и другие решающие элементы, необходимые для решения уравнений (3-110), (3-112), (3-113), показаны на рис. 3-22.

Выражения добавочных токов Δi_α и Δi_β реализуются в структурной схеме следующим образом. С выходов сумматоров *1* и *19* берутся потокосцепления $\Psi_{\delta\alpha}$ и $\Psi_{\delta\beta}$ и при помощи нелинейного блока *Н5* получают полное потокосцепление Ψ_δ в воздушном зазоре. При помощи второго нелинейного блока *Н6* образуется зависимость дополнительной проводимости ветви намагничивания, обусловленной насыщением.

Структурная схема модели однофазного асинхронного генератора позволяет исследовать самовозбуждение при холостом ходе. Для этого необходимо отключить от схемы решения усилители *10* и *10'*. Активная нагрузка устанавливается при помощи коэффициента передачи $k_{10'1}$ блока *10'*, а индуктивная — при помощи коэффициента передачи k_{101} блока *10*. Модель позволяет исследовать также: самовозбуждение машины под нагрузкой; влияние параметров отдельных контуров, частоты вращения ротора на процессы самовозбуждения; режим короткого замыкания асинхронного генератора, влияния емкости и других параметров генератора на энергию, отдаваемую в нагрузку и т. д.

Пример 3-2. Подготовка для решения на АВМ уравнений однофазного генератора.

Для расчета коэффициентов передачи решающих усилителей по составленной структурной схеме (рис. 3-22) записывается машинная система уравнений,

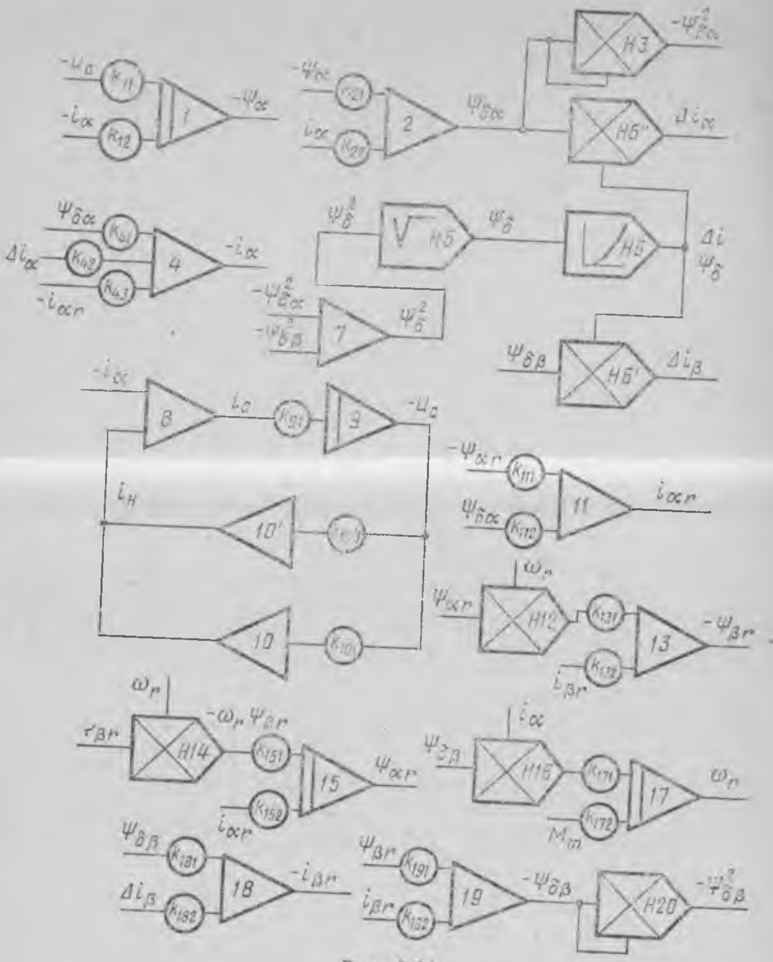


Рис. 3-22

в которой все переменные являются напряжениями на выходах соответствующих решающих элементов, а коэффициенты в уравнениях зависят от коэффициентов передачи решающих элементов:

$$u_1 = -(k_{11}u_9 + k_{12}u_4)/p_{\text{м}};$$

$$u_2 = -[k_{21}u_1 + k_{22}(-u_4)];$$

$$u_3 = k_{\text{п}}u_2^2;$$

$$u_4 = -[k_{41}u_2 + k_{42}u_3 + k_{43}(-u_{11})];$$

$$u_5 = -k_{\sqrt{\ }}(u_2^2 k_{\text{п}} + u_{19}^2 k_{\text{п}});$$

$$u_6 = \varphi(u_4);$$

$$u_9 = -k_{91}u_8/p_{\text{м}};$$

$$
\left.
\begin{aligned}
u_{10} &= -k_{101}u_9/p_{\text{м}};\\
u_{10'} &= -k_{10'1}u_9;\\
u_{11} &= -[k_{111}(-u_{15}) + k_{112}u_2];\\
u_{13} &= -[(-u_{17})\,u_{15}k_{\text{п}}k_{131} + k_{132}u_{18}]/p_{\text{м}};\\
u_{15} &= -[k_{\text{п}}k_{151}u_{17}u_{13} + k_{152}u_{11}]/p_{\text{м}};\\
u_{17} &= -[k_{\text{п}}k_{171}u_4u_{19} + k_{172}u_0]/p_{\text{м}};\\
u_{18} &= -[k_{181}(-u_{19}) + k_{182}u_{6'}];\\
u_{19} &= -[k_{191}(-u_{13}) + k_{192}u_{18}].
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3\text{-}115)
$$

Напряжения на выходе решающих элементов являются изображениями следующих функций:

$$
\left.
\begin{aligned}
&u_1(=)\,\Psi_{\alpha}; \qquad u_2(=)\,\Psi_{\delta\alpha}; \qquad u_3(=)\,\Delta i_{\alpha};\\
&u_4(=)\,i_{\alpha}; \qquad u_5(=)\,\Psi_{\delta}; \qquad u_6(=)\,\frac{\Delta i}{\Psi_{\delta}};\\
&u_9(=)\,u_C; \qquad u_{10}(=)\,u_{\text{н}}; \qquad u_{11}(=)\,i_{\alpha r};\\
&u_{13}(=)\,\Psi_{\beta r}; \qquad u_{15}(=)\,\Psi_{\alpha r}; \qquad u_{17}(=)\,\omega_r;\\
&u_{18}(=)\,i_{\beta r}; \qquad u_{19}(=)\,\Psi_{\delta\beta}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3\text{-}116)
$$

Значения коэффициентов передачи решающих блоков структурной схемы можно определить из условия, что коэффициенты исходной системы уравнений и машинных уравнений должны быть равны. Для расчета коэффициентов передачи задаемся масштабами всех переменных, учитывая при этом максимальный диапазон изменения переменных величин в установившемся и переходном режимах, а также специфические особенности применяемой АВМ. Обычно у большинства АВМ максимальные значения передаточных коэффициентов не должны превышать десяти.

Связь между машинным оператором и оператором оригинала может быть получена из соотношения

$$
p_{\text{м}} = pm_t, \qquad (3\text{-}117)
$$

где $m_t = t_{\text{м}}/t$ — масштаб времени, равный отношению машинного времени ко времени оригинала.

Масштабы других переменных представляют собой следующие отношения:

$$
\left.
\begin{aligned}
&m_{\Psi} = u_{\Psi}/\Psi; \qquad m_i = u_i/i; \qquad m_{\omega} = u_{\omega}/\omega_r;\\
&m_u = u_u/u \quad \text{и т. д.},
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3\text{-}118)
$$

где m_{Ψ}, m_i, m_{ω} и т. д. — масштабы переменных, изображающих потокосцепления, токи и угловую скорость вращения ротора в модели в виде напряжений; u_{Ψ}, u_i, u_{ω} и т. д. — максимальные значения машинных переменных величин в переходных режимах, которые не должны превышать максимально допустимого значения на выходе решающих усилителей.

Подставляя в (3-115) уравнения (3-117) и (3-118) и учитывая (3-116), получаем

$$
\left.
\begin{aligned}
&p\Psi_{\alpha} = -\left(k_{11}\,\frac{m_i m_t}{m_{\Psi}}\, i_{\alpha} + k_{12}\,\frac{m_u m_t}{m_{\Psi}}\, u_C\right);\\
&\Psi_{\delta\alpha} = \left(k_{21}\,\frac{m_{\Psi}}{m_{\Psi}}\,\Psi_{\alpha} - k_{22}\,\frac{m_i}{m_{\Psi}}\, i_{\alpha}\right);\\
&i_{\alpha} = \left(k_{41}\,\frac{m_{\Psi}}{m_i}\,\Psi_{\delta\alpha} - k_{42}\,\frac{m_{\Delta i}}{m_i}\,\Delta i_{\alpha} - k_{43}\,\frac{m_i}{m_i}\, i_{\alpha r}\right);\\
&\Psi_{\delta} = \frac{m_{\Psi}^2}{m_{\Psi}}\, k_{\sqrt{}}\,(k_{п}\Psi_{\delta\alpha}^2 + k_{п}\Psi_{\delta\beta}^2);\\
&\frac{\Delta i}{\Psi_{\delta}} = \frac{m_{\Psi}}{m_{\Delta i/\Psi_{\delta}}}\,\varphi\,(\Psi_{\delta});\\
&\Delta i_{\alpha} = \Psi_{\delta\alpha}\left(\frac{\Delta i}{\Psi_{\delta}}\right)\frac{k_{п} m_{\Psi} m_{\Delta i\,\Psi_{\delta}}}{m_i};\\
&\Delta i_{\beta} = \Psi_{\delta\beta}\left(\frac{\Delta i}{\Psi_{\delta}}\right)\frac{k_{п} m_{\Psi} m_{\Delta i/\Psi_{\delta}}}{m_i};\\
&i_C = \left(k_{81}\,\frac{m_i}{m_i}\, i_{\alpha} - k_{82}\,\frac{m_i}{m_i}\, i_{н}\right);\\
&pu_C = k_{91}\,\frac{m_t m_i}{m_u}\, i_C;\\
&i_{нR} = k_{10'1}\,\frac{m_t m_u}{m_i}\, u_C;\\
&pi_{нL} = k_{101}\,\frac{m_t m_u}{m_i}\, u_C;\\
&i_{\alpha r} = \left(k_{111}\,\frac{m_{\Psi}}{m_i}\,\Psi_{\alpha r} - k_{112}\,\frac{m_{\Psi}}{m_i}\,\Psi_{\delta\alpha}\right);\\
&p\Psi_{\alpha r} = -\left(k_{151}\,\frac{m_{\omega} m_{\Psi} m_t k_{п}}{m_{\Psi}}\,\omega_r\Psi_{\beta r} + k_{152}\,\frac{m_i m_t}{m_{\Psi}}\, i_{\alpha r}\right);\\
&p\Psi_{\beta r} = \left(k_{131}\,\frac{m_{\Psi} m_{\omega} m_t k_{п}}{m_{\Psi}}\,\omega_r\Psi_{\alpha r} - k_{132}\,\frac{m_i m_t}{m_{\Psi}}\, i_{\beta r}\right);\\
&i_{\beta r} = \left(k_{181}\,\frac{m_{\Psi}}{m_i}\,\Psi_{\delta\beta} + k_{182}\,\frac{m_{\Delta i}}{m_i}\,\Delta i_{\beta}\right);\\
&\Psi_{\delta\beta} = \left(k_{191}\,\frac{m_{\Psi}}{m_{\Psi}}\,\Psi_{\delta r} - k_{192}\,\frac{m_i}{m_{\Psi}}\, i_{\beta r}\right);\\
&p\omega_r = -\left(k_{171}\,\frac{m_{\Psi} m_i m_t k_{п}}{m_{\omega}}\,\Psi_{\delta\beta}\, i_{\alpha} + k_{172}\,\frac{m_{м}}{m_{\omega}}\, M_{мех}\right),
\end{aligned}
\right\}\quad (3\text{-}119)
$$

где $k_{\sqrt{}}$ — коэффициент извлечения квадратного корня.

Подставляя коэффициенты исходной системы уравнений (3-110), (3-111) и уравнений (3-119), находим выражения для коэффициентов передачи суммирующих и интегрирующих блоков:

$$k_{11} = R_\alpha \frac{\omega_s m_\Psi}{m_t m_i}; \qquad k_{12} = \frac{\omega_s m_\Psi}{m_t m_u};$$

$$k_{21} = 1; \qquad k_{22} = \frac{1}{x_m} \cdot \frac{m_i}{m_\Psi}; \qquad k_{41} = \frac{1}{x_m} \cdot \frac{m_i}{m_\Psi};$$

$$k_{42} = \frac{1}{x_m} \cdot \frac{m_i}{m_{\Delta i}}; \qquad k_{43} = 1; \qquad k_{81} = 1; \qquad k_{82} = 1;$$

$$k_{91} = x_C \frac{\omega_s m_u}{m_t m_i}; \qquad k_{10'1} = \frac{1}{R_{\text{н}}} \cdot \frac{m_i}{m_u}; \qquad k_{101} = \frac{1}{x_m} \cdot \frac{\omega_s m_i}{m_t m_u};$$

$$k_{111} = \frac{1}{x_{\sigma r}} \cdot \frac{m_i}{m_\Psi}; \qquad k_{112} = \frac{1}{x_{\sigma r}} \cdot \frac{m_i}{m_\Psi};$$

$$k_{131} = \frac{\omega_s}{m_t m_\omega k_{\text{п}}}; \qquad k_{132} = R_r \frac{m_\Psi}{m_t m_i};$$

$$k_{151} = \frac{\omega_s}{m_t m_\omega k_{\text{п}}}; \qquad k_{152} = R_r \frac{\omega_s m_\Psi}{m_t m_i};$$

$$k_{171} = \frac{1}{H_j} \cdot \frac{m_\omega}{m_M k_{\text{п}}}; \qquad k_{172} = \frac{1}{H_j} \cdot \frac{m_\omega}{m_\Psi m_i m_t k_{\text{п}}};$$

$$k_{181} = \frac{1}{x_m} \cdot \frac{m_i}{m_\Psi}; \qquad k_{182} = \frac{m_i}{m_{\Delta i}};$$

$$k_{191} = 1; \qquad k_{192} = x_{\sigma r} \frac{m_\Psi}{m_i}.$$

По результатам настройки разработанной модели асинхронного генератора на АВМ типа МН-14 можно рекомендовать следующие величины масштабных коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} &m_\omega = 50\ \text{В/ед.}; && m_t = 314; \\ &m_\Psi = 20\ \text{В/ед.}; && m_i = 1\ \text{В/ед.}; \\ &m_u = 10\ \text{В/ед.}; && m_{\Delta i} = 5\ \text{В/ед.} \end{aligned}\right\} \tag{3-120}$$

При выбранных масштабах многие коэффициенты передачи удовлетворяют значениям коэффициентов, имеющихся на наборном поле машины МН-14. Коэффициенты, подлежащие изменению при расчетах, можно получить, применяя делители напряжения:

$$k_{11} = 20R_\alpha; \qquad k_{91} = 10x_C; \qquad k_{101} = 1/10x_{\text{н}};$$

$$k_{111} = 1/20x_{\sigma r}; \qquad k_{112} = 1/20x_{\sigma r};$$

$$k_{41} = 0{,}5/x_m; \qquad k_{131} = 20R_r; \qquad k_{152} = 20R_r;$$

$$k_{171} = 0{,}8/H_j; \qquad k_{172} = 0{,}8/H_j;$$

$$k_{181} = 0{,}5/x_m; \qquad k_{192} = 20x_{\sigma r}.$$

На разработанной математической модели был выполнен расчет самовозбуждения однофазного асинхронного генератора со следующими параметрами: [illegible]=0,525, $R_s=0,13$; $R_r=0,023$; $x_{\sigma s}=0,253$; $x_{\sigma s}=0,107$; $U_б=750$ В; $I_б=54,4$ А; $\omega_s=628$ 1/с. Опытные и расчетные кривые изменения напряжения генератора при самовозбуждении показаны на рис. 3-23. Их сопоставление подтверждает достаточную точность решений по уравнениям (3-110), (3-112) и правильность основных принципов, применяемых при моделировании.

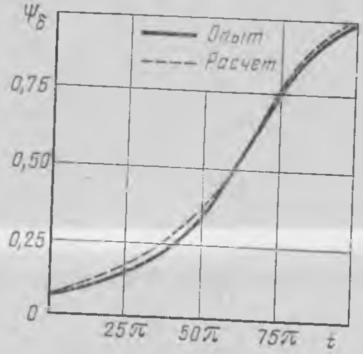


Рис. 3-23

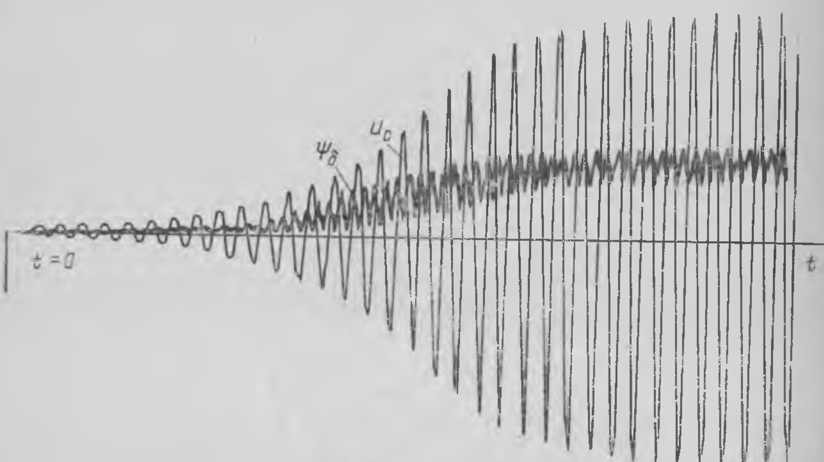


Рис. 3-24

Изменяя коэффициенты передач решающих усилителей в соответствии с (3-121), можно провести большую программу исследований переходных процессов. На рис. 3-24 представлены осциллограммы $\Psi_\delta(t)$ и $u_C(t)$ при самовозбуждении однофазного асинхронного генератора.

ГЛАВА IV

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНХРОННЫХ МАШИН

§ 4-1. Уравнения для симметричных режимов

При составлении дифференциальных уравнений синхронной машины будем пользоваться понятием «идеализированная» синхронная машина, характеризуемая следующими основными свойствами:

1) магнитная проницаемость стали машины равна бесконечности;

2) распределение полей самоиндукции обмоток статора и взаимной индукции этих обмоток с обмотками ротора вдоль окружности статора синусоидально;

3) фазные обмотки симметричны;

4) стержни успокоительной обмотки и магнитопровод ротора симметричны относительно осей ротора.

Мгновенные значения напряжений u_A, u_B, u_C, ..., u_m на зажимах m-фазной идеализированной синхронной машины определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} u_A=i_A r+d\Psi_A/dt; \qquad u_B=i_B r+d\Psi_B/dt;\\ u_C=i_C r+d\Psi_C/dt; \ldots; \quad u_m=i_m r+d\Psi_m/dt, \end{aligned}\right\} \tag{4-1}$$

где i_A, i_B, i_C, ..., i_m — мгновенные значения фазных токов; r — активное сопротивление фазы статора; Ψ_A, Ψ_B, Ψ_C, ..., Ψ_m — потокосцепления фаз статора.

Уравнения равновесия напряжений для одноосной обмотки возбуждения и демпферной обмотки, представляемой в виде отдельных контуров по осям симметрии ротора d и q, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u_в=i_в r_в+d\Psi_в/dt;\\ 0=i_{дd} r_{дd}+d\Psi_{дd}/dt;\\ 0=i_{дq} r_{дq}+d\Psi_{дq}/dt, \end{aligned}\right\} \tag{4-2}$$

где $u_в$ — напряжение возбуждения; $i_в$, $i_{дd}$, $i_{дq}$ — токи обмотки возбуждения и демпферных обмоток; $r_в$, $r_{дd}$, $r_{дq}$ — активные сопротивления обмотки возбуждения и демпферных обмоток по осям d и q; $\Psi_в$, $\Psi_{дd}$, $\Psi_{дq}$ — потокосцепления обмоток.

Запишем уравнения для потокосцеплений при числе фаз обмотки статора $m=3$:

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_A &= L_A i_A + M_{AB} i_B + M_{AC} i_C + M_{A\text{в}} i_\text{в} + M_{A\text{д}d} i_{\text{д}d} + M_{A\text{д}q} i_{\text{д}q};\\
\Psi_B &= M_{BA} i_A + L_B i_B + M_{BC} i_C + M_{B\text{в}} i_\text{в} + M_{B\text{д}d} i_{\text{д}d} + M_{B\text{д}q} i_{\text{д}q};\\
\Psi_C &= M_{CA} i_A + M_{CB} i_B + L_C i_C + M_{C\text{в}} i_\text{в} + M_{C\text{д}d} i_{\text{д}d} + M_{C\text{д}q} i_{\text{д}q};\\
\Psi_\text{в} &= M_{\text{в}A} i_A + M_{\text{в}B} i_B + M_{\text{в}C} i_C + L_\text{в} i_\text{в} + M_{\text{вд}d} i_{\text{д}d};\\
\Psi_{\text{д}d} &= M_{\text{д}dA} i_A + M_{\text{д}dB} i_B + M_{\text{д}dC} i_C + M_{\text{д}d\text{в}} i_\text{в} + L_{\text{д}d} i_{\text{д}d};\\
\Psi_{\text{д}q} &= M_{\text{д}qA} i_A + M_{\text{д}qB} i_B + M_{\text{д}qC} i_C + L_{\text{д}q} i_q,
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}3)$$

где L и M — самоиндуктивности и взаимные индуктивности различных обмоток, причем $M_{AB}=M_{BA}$, $M_{\text{в}A}=M_{A\text{в}}$, $M_{\text{д}dA}=M_{A\text{д}d}$ и т. д., поскольку рассматриваемая система линейна.

Индуктивности фазных обмоток являются периодическими функциями угла γ между осью фазы и продольной осью машины:

$$\left.\begin{aligned}
L_A &= l_0 + l_2 \cos 2\gamma;\\
L_B &= l_0 + l_2 \cos(2\gamma + 2\pi/3);\\
L_C &= l_0 + l_2 \cos(2\gamma + 4\pi/3).
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}4)$$

Взаимные индуктивности статорных обмоток представим следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
M_{AB} &= m_0 + m_2 \cos(2\gamma - 2\pi/3);\\
M_{AC} &= m_0 + m_2 \cos(2\gamma + 2\pi/3);\\
M_{BC} &= m_0 + m_2 \cos 2\gamma.
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}5)$$

В уравнениях (4-4) и (4-5) l_0, l_2, m_0, m_2 — коэффициенты разложения в ряд Фурье выражений для L и M.

Взаимные индуктивности между обмоткой возбуждения и фазными обмотками статора запишем как

$$\left.\begin{aligned}
M_{A\text{в}} &= M_{A\text{в}d} \cos\gamma;\\
M_{B\text{в}} &= M_{A\text{в}d} \cos(\gamma - 2\pi/3);\\
M_{C\text{в}} &= M_{A\text{в}d} \cos(\gamma + 2\pi/3),
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}6)$$

где $M_{A\text{в}d}$ — взаимоиндуктивность обмоток при совпадении их магнитных осей.

Для взаимных индуктивностей обмоток статора с демпферными контурами имеем

$$\left.\begin{aligned}
M_{A\text{д}d} &= m_{A\text{д}d} \cos\gamma;\\
M_{B\text{д}d} &= m_{A\text{д}d} \cos(\gamma - 2\pi/3);\\
M_{C\text{д}d} &= m_{A\text{д}d} \cos(\gamma + 2\pi/3);
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}7)$$

$$\left.\begin{aligned}
M_{A\text{д}q} &= -m_{A\text{д}q} \sin\gamma;\\
M_{B\text{д}q} &= -m_{A\text{д}q} \sin(\gamma - 2\pi/3);\\
M_{C\text{д}q} &= -m_{A\text{д}q} \sin(\gamma + 2\pi/3),
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}8)$$

где $m_{A\text{д}d}$ и $m_{A\text{д}q}$ — взаимные индуктивности фазной обмотки статора с продольным и поперечным демпферными контурами при совпадении их магнитных осей.

В выражениях (4-4) и (4-5)

$$l_0 = 2m_0 = L_s + 2M_s; \quad l_2 = m_2. \tag{4-9}$$

Угол поворота ротора

$$\gamma = \int_0^t \omega_r dt + \gamma_0, \tag{4-10}$$

где ω_r — угловая частота вращения ротора; γ_0 — значение угла при $t=0$.

Если ротор вращается с постоянной угловой скоростью, то

$$\gamma = \omega_r t + \gamma_0. \tag{4-11}$$

Решение системы уравнений (4-1)—(4-11) затруднительно, так как выражения для самоиндуктивности и взаимной индуктивности содержат периодические функции углового положения ротора. Поэтому при анализе симметричных режимов синхронной машины оперируют, как правило, не реальными физическими величинами, а величинами, записанными в определенной системе координат (токами, напряжениями, потокосцеплениями).

Для идеализированной явнополюсной синхронной машины, имеющей на роторе обмотку возбуждения и по одному короткозамкнутому контуру в продольной и поперечной осях, уравнения равновесия напряжений и момента запишем в координатной системе d, q:

$$\left.\begin{aligned}
&u_d = i_d r + d\Psi_d/dt - \omega_s(1-s)\Psi_q;\\
&u_q = i_q r + d\Psi_q/dt + \omega_s(1-s)\Psi_d;\\
&u_\text{в} = i_\text{в} r_\text{в} + d\Psi_\text{в}/dt;\\
&0 = i_{\text{д}d} r_{\text{д}d} + d\Psi_{\text{д}d}/dt;\\
&0 = i_{\text{д}q} r_{\text{д}q} + d\Psi_{\text{д}q}/dt;\\
&J\omega_s ds/dt + (3/2)(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) = M_\text{мех},
\end{aligned}\right\} \tag{4-12}$$

где J — момент инерции ротора, $s = (\omega_s - \omega_r)/\omega_s$ — скольжение.

Выражения для потокосцеплений статорных и роторных контуров представим в таком виде:

$$\begin{gathered}
\Psi_d = L_d i_d + M_{Ad}(i_\text{в} + i_{\text{д}d});\\
\Psi_q = L_q i_q + M_{Aq} i_{\text{д}q};\\
\Psi_\text{в} = L_\text{в} i_\text{в} + M_{Ad} i_{\text{д}d} + (3/2) M_{Ad} i_d;\\
\Psi_{\text{д}d} = L_{\text{д}d} i_{\text{д}d} + M_{Ad} i_\text{в} + (3/2) M_{Ad} i_d;\\
\Psi_{\text{д}q} = L_{\text{д}q} i_{\text{д}q} + (3/2) M_{Aq} i_q,
\end{gathered} \tag{4-13}$$

где L_d, L_q — индуктивности обмоток статора в продольной и поперечной осях; $L_\text{в}$, $L_{\text{д}d}$, $L_{\text{д}q}$ — индуктивности обмоток возбуждения и демпферных обмоток по продольной и поперечной осям; M_{Ad} и M_{Aq} — взаимные индуктивности любой пары контуров в продольной и поперечной осях машины.

В практике математического моделирования синхронных машин используют, как правило, системы относительных единиц.

Составим уравнения синхронной машины в системе относительных единиц с равными взаимными индуктивностями, так как она нашла преимущественное применение при исследованиях на АВМ. Для этого приведем обмотки ротора к обмоткам статора из условия сохранения энергетических соотношений и соблюдения идентичности электромагнитных процессов и запишем уравнения в системе относительных единиц.

В качестве базовых величин для синхронных машин примем те же величины, что и для асинхронных (см. § 3-1).

Приведение обмотки возбуждения можно рассматривать как замену ее обмоткой, идентичной обмотке статора. Обмотка возбуждения синхронных машин является, как правило, однофазной, а приведенная обмотка — многофазной. Токи фаз приведенной обмотки возбуждения представляют собой симметричную m-фазную систему токов, создающую магнитный поток по продольной оси. В установившемся режиме работы эти токи постоянны, а ось одной из фаз приведенной обмотки возбуждения совпадает с продольной осью машины.

Реальная обмотка возбуждения с током $i_в$ и приведенная обмотка с током $i_в'$ должны создавать одинаковое поле основной гармоники в воздушном зазоре. Исходя из этого условия

$$\frac{\mu_0}{k_\delta k_{\mu d}\,\delta}\cdot\frac{w_в}{2p}\,i_в k_в=\frac{\mu_0}{k_\delta k_{\mu d}\,\delta}\cdot\frac{m\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{wk_{об}}{p}\cdot\frac{i_в'}{\sqrt{2}}\,k_{Ad},\qquad(4\text{-}14)$$

где k_δ — коэффициент воздушного зазора; $k_{\mu d}$ — коэффициент насыщения магнитной цепи по оси полюсов; δ — величина воздушного зазора; $w_в$ — число витков обмотки возбуждения; $k_в$ — коэффициент формы кривой поля возбуждения; m — число фаз обмотки статора; w — число витков фазы статора; $k_{об}$ — обмоточный коэффициент; k_{Ad} — коэффициент формы поля статора по продольной оси.

Из (4-18) получим

$$i_в'=i_в/k_{iв},\qquad(4\text{-}15)$$

где $k_{iв}=(2m/\pi)\,(wk_{об}k_d/w_в)$ — коэффициент приведения тока возбуждения, причем $k_d=k_{Ad}/k_в$.

Коэффициент приведения напряжения обмотки возбуждения найдем из условия равенства мощностей реальной и приведенной обмоток возбуждения:

$$u_в i_в=m\,(u_в'/\sqrt{2})\,(i_в'/\sqrt{2}),$$

откуда

$$u_в'=(2/m)\,(i_в/i_в')\,u_в=(2/m)\,k_{iв}u_в=k_{uв}u_в,$$

где $k_{uв}=(2/m)\,k_{iв}=(4/\pi)\,(wk_{об}/w_в)\,k_d$ — коэффициент приведения напряжения возбуждения.

Коэффициент приведения сопротивлений и индуктивностей

$$k_{z\text{в}}=k_{i\text{в}}k_{u\text{в}}=\frac{2}{m}\,k_{i\text{в}}^2=(8m/\pi^2)\,(w^2k_{\text{об}}^2/w_{\text{в}}^2)\,k_d^2$$

позволяет определить приведенные сопротивления и индуктивности:

$$r'_{\text{в}}=k_{z\text{в}}r_{\text{в}};\quad L'_{\text{в}}=k_{z\text{в}}L_{\text{в}}.$$

Полученные коэффициенты приведения справедливы как для явнополюсных, так и для неявнополюсных машин.

Аналогично можно получить коэффициенты приведения токов эквивалентной демпферной обмотки по продольной и поперечной осям:

$$k_{id}=\frac{2m}{\pi}\cdot\frac{wk_{\text{об}}}{w_{\text{д}d}}\cdot\frac{k_{Ad}}{k_{\text{д}d}};\qquad k_{iq}=\frac{2m}{\pi}\cdot\frac{wk_{\text{об}}}{w_{\text{д}q}}\cdot\frac{k_{Aq}}{k_{\text{д}q}},\tag{4-16}$$

где $w_{\text{д}d}$, $w_{\text{д}q}$ — число витков эквивалентных демпферных обмоток; $k_{\text{д}d}$, $k_{\text{д}q}$ — коэффициенты формы поля эквивалентных демпферных обмоток по осям d и q; k_{Ad}, k_{Aq} — коэффициенты формы поля статора по осям d и q.

Коэффициенты приведения напряжений:

$$\left.\begin{aligned}k_{ud}&=\frac{2}{m}\,k_{id}=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{wk_{\text{об}}}{w_{\text{д}d}}\cdot\frac{k_{Ad}}{k_{\text{д}d}};\\ k_{uq}&=\frac{2}{m}\,k_{iq}=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{wk_{\text{об}}}{w_{\text{д}q}}\cdot\frac{k_{Aq}}{k_{\text{д}q}}.\end{aligned}\right\}\tag{4-17}$$

Коэффициенты приведения сопротивлений:

$$\left.\begin{aligned}k_{zd}&=k_{id}k_{ud}=\frac{8m^2}{\pi^2}\cdot\frac{w^2k_{\text{об}}^2}{w_{\text{д}d}^2}\left(\frac{k_{Ad}}{k_{\text{д}d}}\right)^2;\\ k_{zq}&=k_{iq}k_{uq}=\frac{8m^2}{\pi^2}\cdot\frac{w^2k_{\text{об}}^2}{w_{\text{д}q}^2}\left(\frac{k_{Aq}}{k_{\text{д}q}}\right)^2.\end{aligned}\right\}\tag{4-18}$$

В уравнениях (4-13) взаимные индуктивности между обмотками статора и ротора являются необратимыми. Использование выражений (4-17), (4-18) для коэффициентов приведения роторных величин к статорным позволяет получить уравнения синхронной машины, в которых взаимные индуктивности становятся обратимыми и в преобразованной системе координат. Для этого необходимо в уравнениях (4-12) и (4-13) вместо токов роторных обмоток подставить их приведенные значения, а уравнения равновесия напряжений роторных цепей дополнительно умножить соответственно на $k_{u\text{в}}$, k_{ud}, k_{uq}. Тогда уравнения равновесия напряжений роторных контуров (4-12) с учетом уравнений для потокосцеплений (4-13) принимают следующий вид:

$$k_{u\text{в}}u_\text{в}=k_{u\text{в}}k_{i\text{в}}\left(r_\text{в}+L_\text{в}\frac{d}{dt}\right)i'_\text{в}+k_{u\text{в}}\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}M_{Ad}i_d\right)+$$
$$+k_{u\text{в}}k_{id}\frac{d}{dt}(M_{Ad}i'_{\text{д}d});$$
$$0=k_{ud}k_{id}\left(r_{\text{д}d}+L_{\text{д}d}\frac{d}{dt}\right)i'_{\text{д}d}+k_{ud}\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}M_{Ad}i_d\right)+$$
$$+k_{ud}k_{i\text{в}}\frac{d}{dt}(M_{Ad}i'_\text{в});$$
$$0=k_{uq}k_{iq}\left(r_{\text{д}q}+L_{\text{д}q}\frac{d}{dt}\right)i'_{\text{д}q}+k_{uq}\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}M_{Aq}i_q\right) \qquad (4\text{-}19)$$

или

$$\left.\begin{aligned}u'_\text{в}&=r'_\text{в}i'_\text{в}+d\Psi'_\text{в}/dt;\\ 0&=r'_{\text{д}d}i'_{\text{д}d}+d\Psi'_{\text{д}d}/dt;\\ 0&=r'_{\text{д}q}i'_{\text{д}q}+d\Psi'_{\text{д}q}/dt,\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}20)$$

где величины со знаком «штрих» являются приведенными:

$$\left.\begin{aligned}\Psi'_\text{в}&=L'_\text{в}i'_\text{в}+M'_{Ad}(i_d+i'_{\text{д}d});\\ \Psi'_{\text{д}d}&=L'_{\text{д}d}i'_{\text{д}d}+M'_{Ad}(i_d+i'_\text{в});\\ \Psi'_{\text{д}q}&=L'_{\text{д}q}i'_{\text{д}q}+M'_{Aq}i_q.\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}21)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned}&M'_{Ad}=k_{i\text{в}}M_{Ad}=(3/2)\,k_{u\text{в}}M_{Ad};\\ &M'_{Ad}=k_{id}M_{Ad}=(3/2)\,k_{ud}M_{Ad};\\ &M'_{Aq}=k_{iq}M_{Aq}=(3/2)\,k_{uq}M_{Aq};\\ &L'_\text{в}=k_{i\text{в}}k_{u\text{в}}L_\text{в};\quad r'_\text{в}=k_{i\text{в}}k_{u\text{в}}r_\text{в};\\ &L'_{\text{д}d}=k_{id}k_{ud}L_{\text{д}d};\quad r'_{\text{д}d}=k_{id}k_{ud}r_{\text{д}d};\\ &L'_{\text{д}d}=k_{iq}k_{uq}L_{\text{д}q};\quad r'_{\text{д}q}=k_{iq}k_{uq}r_{\text{д}q};\\ &M'_{Ad}=M_{Ad}k_{id}k_{u\text{в}}=M_{Ad}k_{i\text{в}}k_{ud}.\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}22)$$

Запишем уравнения потокосцеплений обмоток статора при приведенных обмотках ротора:

$$\Psi_d=L_di_d+M'_{Ad}(i'_\text{в}+i'_{\text{д}d});\qquad \Psi_q=L_qi_q+M'_{Aq}i'_{\text{д}q}. \qquad (4\text{-}23)$$

Разделим в системе (4-12) уравнения равновесия напряжений контуров на $\Psi_б$, а уравнение равновесия моментов на $m_б$. Учитывая равенство в относительных единицах соответствующих индуктивния сопротивлений индуктивностям и взаимным индуктивностям и осуществляя дифференцирование по $\tau=\omega_s t$, получим

$$\left.\begin{aligned} u_d&=i_d r+p\Psi_d-(1-s)\Psi_q;\\ u_q&=i_q r+p\Psi_q+(1-s)\Psi_d;\\ u_{\text{в}}&=i_{\text{в}} r_{\text{в}}+p\Psi_{\text{в}};\\ 0&=i_{\text{д}d} r_{\text{д}d}+p\Psi_{\text{д}d};\\ 0&=i_{\text{д}q} r_{\text{д}q}+p\Psi_{\text{д}q};\\ H_j ps&+\Psi_d i_q-\Psi_q i_d=M_{\text{мех}}, \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}24)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Psi_d&=x_d i_d+x_{ad}(i_{\text{в}}+i_{\text{д}d});\\ \Psi_q&=x_q i_q+x_{aq} i_{\text{д}q};\\ \Psi_{\text{в}}&=x_{\text{в}} i_{\text{в}}+x_{ad}(i_d+i_{\text{д}d});\\ \Psi_{\text{д}d}&=x_{\text{д}d} i_{\text{д}d}+x_{ad}(i_d+i_{\text{в}});\\ \Psi_{\text{д}q}&=x_{\text{д}q} i_{\text{д}q}+x_{aq} i_q; \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}25)$$

H_j — инерционная постоянная ротора.

Уравнения (4-24), (4-25) составлены для случая, когда на роторе имеются обмотка возбуждения и два демпферных контура по продольной и поперечной осям. При эквивалентировании демпферной системы ротора несколькими короткозамкнутыми контурами в продольной и поперечной осях составление уравнений переходных процессов не встречает дополнительных трудностей.

При трехфазном коротком замыкании синхронной машины в уравнениях (4-24) принимают $u_d=u_q=0$.

§ 4-2. Уравнения для несимметричных режимов

У синхронных машин ротор является несимметричным либо в электрическом отношении (неявнополюсная машина), либо одновременно в электрическом и магнитном отношениях (явнополюсная машина). При симметрии статорных цепей, как это показано выше, уравнения переходных процессов синхронной машины могут быть преобразованы к уравнениям с постоянными коэффициентами при записи их в осях d, q.

Несимметричные режимы работы синхронных машин характеризуются несимметрией обмоток статора или несимметричным распределением нагрузки по фазам машины при симметричных обмотках статора, а также условиями несимметрии. Например, при двухфазном коротком замыкании между фазами B и C условия несимметрии имеют вид

$$u_B-u_C=0; \qquad i_B=-i_C=i, \qquad (4\text{-}26)$$

или при записи условий (4-26) в осях d, q

$$u_d\sin\gamma+u_q\cos\gamma=0; \qquad i_d\sin\gamma-i_q\cos\gamma=0. \qquad (4\text{-}27)$$

Реализация условий несимметрии (4-26), (4-27) с использованием, например, уравнений для проекций векторов на оси d и q (как это было сделано для симметричной машины) является очень громоздкой и не всегда позволяет получать уравнения в конечном виде.

В литературе * предложен способ реализации условий несимметрии для уравнений в векторной форме, являющийся относительно простым. Основные положения способа сводятся к следующему:

1) записываем уравнения Парка — Горева в осях d, q или α, β для машины, имеющей то же число симметричных обмоток на статоре и роторе, что и у исследуемой машины. При этом учитывается наличие или отсутствие магнитной симметрии.

Для двухфазного короткого замыкания трехфазной синхронной машины с симметричными обмоткой возбуждения и демпферной обмоткой уравнения Парка — Горева (4-24) представим в виде

$$\left.\begin{aligned}
u_d &= i_d r + d\Psi_d/dt - \omega_r \Psi_q;\\
u_q &= i_q r + d\Psi_q/dt + \omega_r \Psi_d;\\
u_в &= i_в r_в + d\Psi_в/dt;\\
0 &= i_{дd} r_{дd} + d\Psi_{дd}/dt;\\
0 &= i_{дq} r_{дq} + d\Psi_{дq}/dt.
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}28)$$

Потокосцепления обмотки статора Ψ_d, Ψ_q и демпферной обмотки $\Psi_{дd}$, $\Psi_{дq}$ определим из системы (4-25). Потокосцепления $\Psi_в$, $\Psi_{вq}$ для машин с продольно-поперечным возбуждением представим как

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_в &= x_в i_в + x_{ad} i_d + x_{ad} i_{дd};\\
\Psi_{вq} &= x_{вq} i_{вq} + x_{aq} i_q + x_{aq} i_{дq};
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}29)$$

2) условия несимметрии для токов и напряжений статора (4-27), отражающие несимметрию рассматриваемого режима, запишем в векторной форме. Используя формулы Эйлера и представляя напряжения и токи статора в векторной форме:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{u}_d &= u_d + j u_q; & \overset{*}{\mathbf{u}}_d &= u_d - j u_q;\\
\mathbf{i}_d &= i_d + j i_q; & \overset{*}{\mathbf{i}}_d &= i_d - j i_q,
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}30)$$

преобразуем (4-27) к виду

$$\mathbf{u}_d e^{j\gamma} - \overset{*}{\mathbf{u}}_d e^{-j\gamma} = 0; \qquad \mathbf{i}_d e^{j\gamma} + \overset{*}{\mathbf{i}}_d e^{-j\gamma} = 0; \qquad (4\text{-}31)$$

3) составим условия несимметрии, учитывающие одноосность обмоток ротора. В рассматриваемом случае одноосной является об-

---

* *Трещев И. И.* Методы исследования электрических машин переменного тока. Л., Энергия, 1969, с. 63.

обмотки возбуждения, поэтому полагаем составляющие тока, напряжения и потокосцепления ее по оси q равными нулю:

$$u_{вq}=0; \quad i_{вq}=0; \quad \Psi_{вq}=0;$$

и переведем уравнения (4-28) в векторную форму. Чтобы составить уравнения равновесия напряжений в векторной форме, умножим уравнения равновесия напряжений для контуров по поперечной оси [см. (4-28)] на j и сложим их с соответствующими уравнениями по продольной оси. При этом с учетом одноосности обмотки возбуждения получим

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}_d &= \mathbf{i}_d r + d\boldsymbol{\Psi}_d/dt - j\omega_r \boldsymbol{\Psi}_d; \\ \mathbf{u}_в &= \mathbf{i}_в r_в + d\boldsymbol{\Psi}_в/dt; \\ 0 &= \mathbf{i}_д r_д + d\boldsymbol{\Psi}_д/dt, \end{aligned}\right\} \tag{4-32}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_d &= x\mathbf{i}_d + y\overset{*}{\mathbf{i}}_d + x_{ad} i_в + x_1 \mathbf{i}_д + \mathbf{y}_1 \overset{*}{\mathbf{i}}_д; \\ \boldsymbol{\Psi}_в &= x_в i_в + 0{,}5 x_{ad}(\mathbf{i}_d + \overset{*}{\mathbf{i}}_d) + 0{,}5 x_{ad}(\mathbf{i}_д + \overset{*}{\mathbf{i}}_д); \\ \boldsymbol{\Psi}_д &= x_{11}\mathbf{i}_д + y_{11}\overset{*}{\mathbf{i}}_д + x_1 \mathbf{i}_d + y_1 \overset{*}{\mathbf{i}}_d + x_{Ad} i_в. \end{aligned}\right\} \tag{4-33}$$

Здесь

$$x = 0{,}5(x_d + x_q); \qquad y = 0{,}5(x_d - x_q);$$

$$x_1 = 0{,}5(x_{ad} + x_{aq}); \qquad y_1 = 0{,}5(x_{ad} - x_{aq});$$

$$x_{11} = 0{,}5(x_{дd} + x_{дq}); \qquad y_{11} = 0{,}5(x_{дd} - x_{дq}).$$

Составим уравнение, сопряженное уравнению равновесия напряжения статора:

$$\overset{*}{\mathbf{u}}_d = \overset{*}{\mathbf{i}}_d r + d\overset{*}{\boldsymbol{\Psi}}_d/dt - j\omega_r \overset{*}{\boldsymbol{\Psi}}_d, \tag{4-34}$$

где

$$\overset{*}{\boldsymbol{\Psi}}_d = x\overset{*}{\mathbf{i}}_d + y\mathbf{i}_d + x_{ad} i_в + x_1 \overset{*}{\mathbf{i}}_д + y_1 \mathbf{i}_д. \tag{4-35}$$

Объединим (4-34) и (4-35) с первыми уравнениями систем (4-32) и (4-33), используя первое условие несимметрии (4-31). Для этого умножим их соответственно на $e^{-j\gamma}$ и $e^{j\gamma}$ и из второго вычтем первое. В результате преобразований с учетом второго условия несимметрии (4-31) получим

$$\mathbf{i}_d r + d\boldsymbol{\Psi}_{d2}/dt - j\omega_r \boldsymbol{\Psi}_{d2}, \tag{4-36}$$

где

$$\boldsymbol{\Psi}_{d2} = \mathbf{i}_d(x - y\cos 2\gamma) + 0{,}5 x_{ad} \mathbf{i}_в (1 - e^{-j2\gamma}) +$$

$$+ 0{,}5 x_1 (\mathbf{i}_д - \overset{*}{\mathbf{i}}_д e^{-j2\gamma}) + 0{,}5 y_1 (\overset{*}{\mathbf{i}}_д - \mathbf{i}_д e^{-j2\gamma}). \tag{4-37}$$

Из уравнений (4-36) и (4-37) найдем уравнения для проекций изображающих векторов на оси d и q:

$$\left.\begin{aligned} i_d r + d\Psi_{d2}/dt - \omega_r \Psi_{q2} = 0; \\ i_q r + d\Psi_{q2}/dt + \omega_r \Psi_{d2} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}38)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{d2} = i_d (x - y \cos 2\gamma) + 0{,}5 (x_{ad} i_{в} + x_{ad} i_{дd}) (1 - \cos 2\gamma) + \\ + 0{,}5 x_{aq} i_{дq} \sin 2\gamma; \\ \Psi_{q2} = i_q (x - y \cos 2\gamma) + 0{,}5 (x_{ad} i_{в} + x_{ad} i_{дd}) \sin 2\gamma + \\ + 0{,}5 x_{aq} i_{дq} (1 + \cos 2\gamma). \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}39)$$

Для демпферных обмоток и обмотки возбуждения уравнения равновесия контуров и выражения для потокосцепления в несимметричном режиме остаются без изменений, т. е. такими же, как и в симметричном режиме работы.

Таким образом, получены дифференциальные уравнения синхронной машины при двухфазном коротком замыкании.

Анализ уравнений для несимметричных режимов при их записи в различных системах координат показывает, что преобразование координат не позволяет освободиться от периодических коэффициентов.

Необходимость преобразования координат при рассмотрении несимметричных режимов возникает лишь при анализе систем машин. В данном случае выбор системы координат зависит от конкретной схемы цепи.

При математическом моделировании несимметричных режимов работы симметричной электрической машины можно и не преобразовывать уравнения с учетом условий несимметрии, а достаточно лишь в дополнение к уравнениям симметричной машины написать уравнения, характеризующие соотношения между токами и напряжениями в месте несимметрии. Полученные уравнения нужно решить совместно. При этом из уравнений, составленных для реализации условий несимметрии, переменные коэффициенты не исключаются.

§ 4-3. Моделирование по полным уравнениям Парка — Горева

Запись уравнений симметричной синхронной машины в осях d, q, жестко связанных с ротором, является наиболее распространенной при исследовании как одной машины, так и системы машин. Стремясь к максимальному упрощению уравнений каждой из синхронных машин, работающих в одной электрической системе, записывают, как правило, уравнения каждой из этих машин в осях, жестко связанных с ее ротором. В этом случае периодические коэффициенты исчезают из уравнений всех синхронных машин.

Моделирование без учета насыщения магнитной цепи. Полную систему уравнений синхронной машины (4-24) приведем к нормальному виду:

$$\left.\begin{aligned}
&p\Psi_d=u_d+(1-s)\Psi_q-ri_d;\\
&p\Psi_q=u_q-(1-s)\Psi_d-ri_q;\\
&p\Psi_{\text{в}}=u_{\text{в}}-r_{\text{в}}i_{\text{в}};\\
&p\Psi_{\text{д}d}=-r_{\text{д}d}i_{\text{д}d};\\
&p\Psi_{\text{д}q}=-r_{\text{д}q}i_{\text{д}q};\\
&ps=(1/\omega_s H_j)(\Psi_q i_d-\Psi_d i_q+M_{\text{мех}}).
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}40)$$

При этом потокосцепления Ψ_d, Ψ_q, $\Psi_{\text{в}}$, $\Psi_{\text{д}d}$, $\Psi_{\text{д}q}$ в уравнениях определяются соотношениями (4-25).

Одним из возможных методов решения уравнений (4-40) и (4-25) является определение потокосцеплений и скольжения из (4-40) в предположении, что токи i_d, i_q, $i_{\text{в}}$, $i_{\text{д}d}$, $i_{\text{д}q}$ определены из уравнений (4-25).

Суммирующие интеграторы, функциональные преобразователи и блоки перемножения переменных, реализующие операции, необходимые для определения указанных потокосцеплений, изображены на рис. 4-1, *а*.

Составляющие тока статора i_d и i_q, а также токи роторных контуров $i_{\text{в}}$, $i_{\text{д}d}$, $i_{\text{д}q}$ определим, предполагая, что потоки Ψ_d, Ψ_q, $\Psi_{\text{в}}$, $\Psi_{\text{д}d}$, $\Psi_{\text{д}q}$ известны:

$$\left.\begin{aligned}
&i_d=\frac{1}{x_d}\Psi_d-\frac{x_{ad}}{x_d}(i_{\text{в}}+i_{\text{д}d});\\
&i_q=\frac{1}{x_q}\Psi_q-\frac{x_{aq}}{x_q}i_{\text{д}q};\quad i_{\text{д}d}=\frac{1}{x_{\text{д}d}}\Psi_{\text{д}d}-\frac{x_{ad}}{x_{\text{д}d}}(i_d+i_{\text{в}});\\
&i_{\text{в}}=\frac{1}{x_{\text{в}}}\Psi_{\text{в}}-\frac{x_{ad}}{x_{\text{в}}}(i_d+i_{\text{д}d});\quad i_{\text{д}q}=\frac{1}{x_{\text{д}q}}\Psi_{\text{д}q}-\frac{x_{aq}}{x_{\text{д}q}}i_q.
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}41)$$

Решающие элементы, реализующие операции, необходимые для решения уравнений (4-40), приведены на рис. 4-1, *б*. Моделирование уравнения движения ротора, представленного последним уравнением системы (4-40), показано на рис. 4-1, *в*.

Недостатком приведенной структурной схемы моделирования является то, что в ней содержатся контуры, число суммирующих усилителей которых четно, а общий коэффициент передачи близок к единице. Так, например, сумматоры *9* и *12* образуют контур с положительной обратной связью, коэффициент передачи по контуру

$$k=k_{93}k_{122}=(x_{ad}/x_d)(x_{ad}/x_{\text{д}d})\approx 1.$$

Это вызывает структурную неустойчивость схемы и не позволяет получить решение при малых рассеяниях контуров машины. Для синхронных машин общепромышленного применения, в которых не принимают специальных мер по снижению индуктивностей рассеяния, рассмотренный метод моделирования применим.

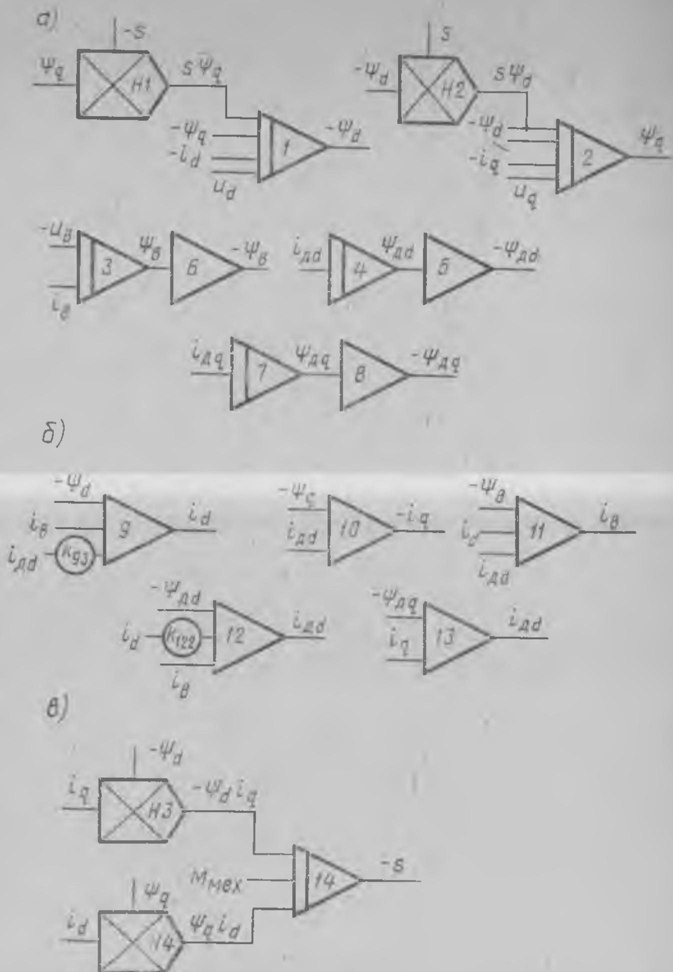

а)
б)
в)
-s
ψ_q
H1
$s\psi_q$
s
$-\psi_d$
H2
$s\psi_d$
$-\psi_q$
$-i_d$
u_d
1
$-\psi_d$
$-\psi_d$
$-i_q$
u_q
2
ψ_q
$-u_в$
$i_в$
3
$\psi_в$
6
$-\psi_в$
$i_{дd}$
4
$\psi_{дd}$
5
$-\psi_{дd}$
$i_{дq}$
7
$\psi_{дq}$
8
$-\psi_{дq}$
$-\psi_d$
$i_в$
$i_{дd}$
k_{93}
9
i_d
$-\psi_q$
$i_{дq}$
10
$-i_q$
$-\psi_в$
i_d
$i_{дd}$
11
$i_в$
$-\psi_{дd}$
i_d
k_{122}
$i_в$
12
$i_{дd}$
$-\psi_{дq}$
i_q
13
$i_{дq}$
$-\psi_d$
i_q
H3
$-\psi_d i_q$
$M_{мех}$
14
$-s$
ψ_q
i_d
H4
$\psi_q i_d$

Рис. 4-1

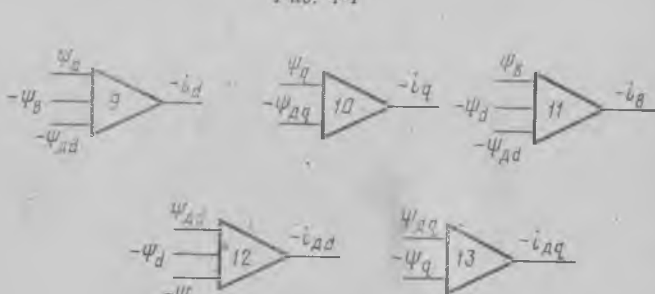

ψ_d
$-\psi_в$
$-\psi_{дd}$
9
$-i_d$
ψ_q
$-\psi_{дq}$
10
$-i_q$
$\psi_в$
$-\psi_d$
$-\psi_{дd}$
11
$-i_в$
$\psi_{дd}$
$-\psi_d$
$-\psi_в$
12
$-i_{дd}$
$\psi_{дq}$
$-\psi_q$
13
$-i_{дq}$

Рис. 4-2

Чтобы получить устойчивую модель синхронной машины при использовании уравнений, записанных без учета насыщения цепи, наиболее целесообразно находить составляющие токов статора i_d, i_q и ротора из (4-24):

$$\left.\begin{aligned}
i_d &= \frac{x_{\text{в}} x_{\text{д}d} - x_{ad}^2}{\Delta}\Psi_d - \frac{x_{ad}(x_{\text{д}d} - x_{ad})}{\Delta}\Psi_{\text{в}} - \frac{x_{ad}(x_{\text{в}} - x_{ad})}{\Delta}\Psi_{\text{д}d};\\
i_q &= \frac{x_{\text{д}d}}{\Delta'}\Psi_q - \frac{x_{ad}}{\Delta'}\Psi_{\text{д}q};\\
i_{\text{в}} &= \frac{x_d x_{\text{д}d} - x_{ad}^2}{\Delta}\Psi_{\text{в}} - \frac{x_{ad}(x_{\text{д}d} - x_{ad})}{\Delta}\Psi_d - \frac{x_{ad}(x_d - x_{ad})}{\Delta}\Psi_{\text{д}d};\\
i_{\text{д}d} &= \frac{x_d x_{\text{в}} - x_{ad}^2}{\Delta}\Psi_{\text{д}d} - \frac{x_{ad}(x_{\text{в}} - x_{ad})}{\Delta}\Psi_d - \frac{x_{ad}(x_d - x_{ad})}{\Delta}\Psi_{\text{в}};\\
i_{\text{д}q} &= \frac{x_q}{\Delta'}\Psi_{\text{д}q} - \frac{x_{aq}}{\Delta'}\Psi_q,
\end{aligned}\right\} \tag{4-42}$$

где

$$\Delta = x_d x_{\text{в}} x_{\text{д}d} + 2x_{ad}^3 - x_{ad}^2(x_d + x_{\text{в}} + x_{\text{д}d});$$
$$\Delta' = x_q x_{\text{д}q} - x_{aq}^2.$$

Из сравнения уравнений для токов в системах (4-41) и (4-42) видно, что в (4-42) токи определяются через потокосцепления, в то время как в (4-41) в правую часть каждого уравнения входят токи других контуров машины.

Структурная схема модели, реализующей операции, необходимые для решения системы (4-42), показана на рис. 4-2. Введение ее в структурную схему модели синхронной машины вместо схемы, приведенной на рис. 4-1, *б*, позволяет получить устойчивую математическую модель, с помощью которой можно проводить исследования при любых соотношениях параметров.

Моделирование с учетом насыщения магнитной цепи по путям рассеяния. Как показывает опыт, большое внимание на процессы при внезапных коротких замыканиях синхронных машин оказывает переменное насыщение магнитной цепи. Учет переменного насыщения магнитной цепи, даже при постоянстве частоты вращения ротора машины, требует выхода за рамки теории линейных дифференциальных уравнений.

В системе уравнений синхронной машины (4-40) и (4-41) все параметры предполагаются независящими от насыщения. Для учета насыщения необходимо знать зависимость параметров от токов в обмотках.

Переменное насыщение участков магнитной цепи вызывает изменение индуктивных сопротивлений машины, которое происходит вследствие насыщения:

1) магнитной цепи основным магнитным потоком;
2) участков магнитной цепи потоками рассеяния.

В синхронных машинах первая зависимость определяется напряжением на выходах и приводит в основном к уменьшению взаимной индуктивности и снижению проводимостей путей потоков рассеяния. При условии сохранения основного магнитного потока практически постоянным в первые моменты короткого замыкания эта зависимость может быть учтена для заданного напряжения выбором насыщенных значений параметров.

Более существенной при внезапных коротких замыканиях синхронных машин является необходимость учета насыщения участков магнитной цепи потоками рассеяния. Во время короткого замыкания значительная часть потока генератора устремляется по путям потоков рассеяния и вызывает дополнительное насыщение их, что обусловливает соответствующее уменьшение переходных и сверхпереходных параметров машины и дополнительное увеличение тока короткого замыкания.

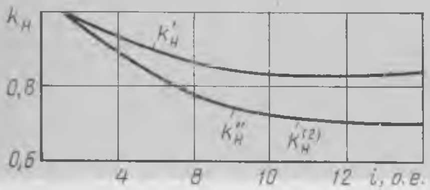


Рис. 4-3

Основное влияние на индуктивности рассеяния оказывает величина тока короткого замыкания, оно может быть определено по распределению магнитных полей рассеяния для каждой конструкции машины. Однако эта задача настолько трудоемка (так как характеристики намагничивания отдельных частей машины различны), что вряд ли имеет смысл стремиться к точному учету конкретных характеристик насыщения каждой машины. Целесообразно использовать для расчетов экспериментально полученные характеристики. Коэффициент насыщения для сверхпереходной $k''_н$, переходной $k'_н$ и индуктивности обратного следования фаз $k_н^{(2)}$ определяется отношением насыщенного значения соответствующего параметра при данном токе статора к значению, определенному без учета насыщения:

$$k''_н = x''_{dн}/x''_d; \quad k'_н = x'_{dн}/x'_d; \quad k_н^{(2)} = x_{2н}/x_2.$$

На рис. 4-3 приведены зависимости коэффициентов насыщения $k_н$, $k'_н$, $k_н^{(2)}$ в функции тока статора, полученные экспериментально для крупных турбогенераторов. По приведенным зависимостям можно найти зависимость $1/x_\sigma = f(i)$, или $1/x_\sigma = F(\Psi_\sigma^2)$, которую необходимо ввести в схему моделирования синхронной машины. Указанная зависимость набирается на блоке нелинейности методом кусочно-линейной аппроксимации.

Анализируя процессы при коротких замыканиях, обычно считают, что изменяются только сопротивления рассеяния статора. Так, у синхронных машин эквивалентное индуктивное сопротивление статора в сверхпереходном режиме с учетом экранирующего влияния демпферной системы и обмотки возбуждения определяется в

...ном индуктивным сопротивлением рассеяния статора $x_d''=1,15x_в$.

Для удобства учета насыщения по путям потоков рассеяния целесообразно представить потокосцепления статорной обмотки Ψ_d и Ψ_q в виде суммы потокосцеплений по путям основного магнитного потока и потоков рассеяния:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_d&=\Psi_{\delta d}+\Psi_{\sigma d}=x_{ad}(i_d+i_в+i_{дd})+i_d/f(i);\\ \Psi_q&=\Psi_{\delta q}+\Psi_{\sigma q}=x_{aq}(i_q+i_{дq})+i_q/f(i).\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}43)$$

Из (4-43) можно найти токи i_d и i_q:

$$i_d=f(i)(\Psi_d-\Psi_{\delta d});\qquad i_q=f(i)(\Psi_q-\Psi_{\delta q}).\qquad(4\text{-}44)$$

Полный ток статора

$$i=\sqrt{i_d^2+i_q^2}.\qquad(4\text{-}45)$$

Для учета насыщения можно также воспользоваться соотношениями:

$$i_d=F(\Psi_\sigma^2)(\Psi_d-\Psi_{\delta d});\quad i_q=F(\Psi_\sigma^2)(\Psi_q-\Psi_{\delta q}),\qquad(4\text{-}46)$$

где $\Psi_\sigma^2=\Psi_{\sigma d}^2+\Psi_{\sigma q}^2$.

Таким образом, полная система дифференциальных уравнений синхронной машины, составленная с учетом насыщения магнитной цепи по путям потоков рассеяния статора, характеризуется системой уравнений (4-40), где токи с учетом соотношений (4-43) — (4-46) определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}&i_d=F(\Psi_\sigma^2)(\Psi_d-\Psi_{\delta d});\quad i_q=F(\Psi_\sigma^2)(\Psi_q-\Psi_{\delta q});\\ &i_в=\frac{1}{x_в}\Psi_в-\frac{x_{ad}}{x_в}i_в-\frac{x_{ad}}{x_в}i_{дd};\\ &i_{дd}=\frac{1}{x_{дd}}\Psi_{дd}-\frac{x_{ad}}{x_{дd}}i_в-\frac{x_{ad}}{x_{дd}}i_d;\\ &i_{дq}=\frac{1}{x_{дq}}\Psi_{дq}-\frac{x_{aq}}{x_{дq}}i_q.\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}47)$$

Составленная по уравнениям систем (4-40) и (4-47) структурная схема решения представлена на рис. 4-4. Потокосцепления Ψ_d, Ψ_q, $\Psi_в$, $\Psi_{дd}$ и $\Psi_{дq}$ получаются на выходе операционных усилителей *1, 2, 3, 5, 7* интегрированием правой части уравнений (4-40). Токи контуров ротора $i_в$, $i_{дd}$, $i_{дq}$ определяются на выходе соответствующих суммирующих усилителей *12, 13, 9*. Уравнение движения моделируется при помощи двух блоков умножения *Н8* и *Н9* и интегрирующего усилителя *17*, на выходе которого образуется величина скольжения *s*. Потокосцепления $\Psi_{\sigma d}$ и Ψ получаются на выходе суммирующих усилителей *14, 16*:

$$\Psi_{\sigma d}=\Psi_d-\Psi_{\delta d};\quad\Psi_{\sigma q}=\Psi_q-\Psi_{\delta q}.\qquad(4\text{-}48)$$

По известным потокосцеплениям $\Psi_{\sigma d}$ и $\Psi_{\sigma q}$ находится квадрат полного потокосцепления $\Psi_\sigma^2 = \Psi_{\sigma d}^2 + \Psi_{\sigma q}^2$ (блок *15*). На блоке нелинейности *Н6* набирается зависимость $1/x_\sigma = F(\Psi_\sigma^2)$. Полученное значение $1/x_\sigma$ умножается на двух блоках умножения на $\Psi_{\sigma d}$ и $\Psi_{\sigma q}$. На выходах блоков умножения *Н4* и *Н7* образуются токи i_d

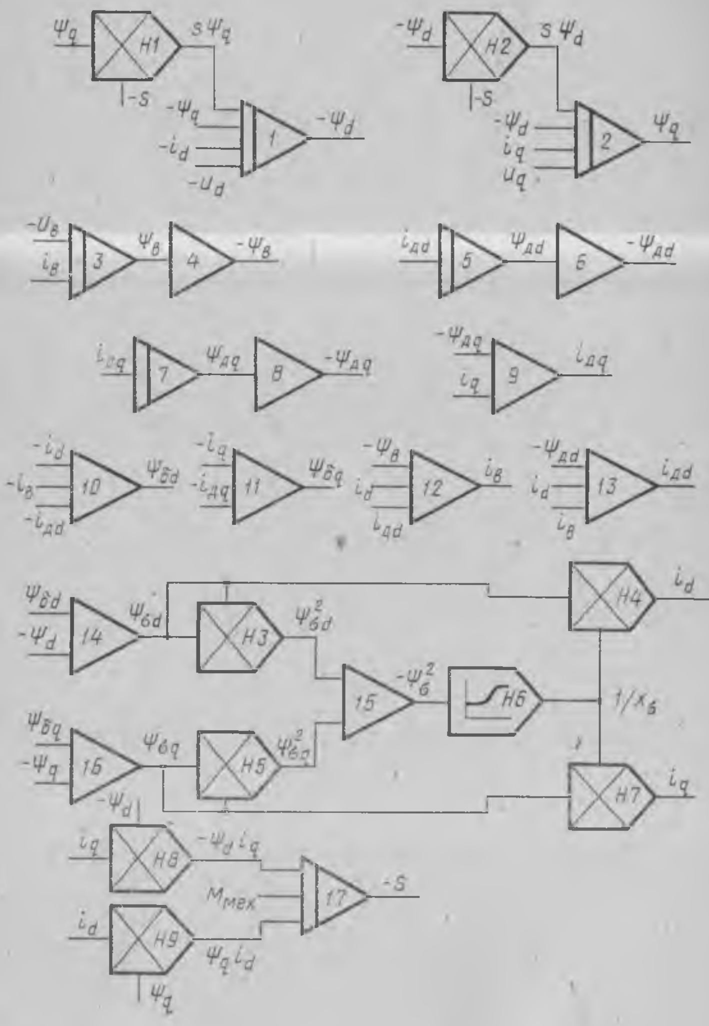


Рис. 4-4

и i_q, которые используются затем в схеме решения согласно исходным уравнениям.

Разработанная структурная схема позволяет решать исходную систему уравнений и без учета насыщения. Для этого нужно от-

отключить от схемы решения блок нелинейности, а полученные на выходе суммирующих усилителей потокосцепления $\Psi_{\sigma d}$ и $\Psi_{\sigma q}$ через коэффициент передачи, пропорциональный $1/x_\sigma$ (что будет соответствовать значениям i_d и i_q), подать на блоки *1, 2, 9, 10, 11, 12, 13, H8, H9*.

Для решения исходной системы уравнений без учета изменения частоты вращения ротора необходимо отключить от схемы решения блоки, моделирующие уравнение движения.

По разработанной структурной схеме были проведены исследования влияния насыщения магнитной цепи по путям потоков рассеяния и изменения частоты вращения на ток при внезапном коротком замыкании синхронной машины. На рис. 4-5 приведена ос-

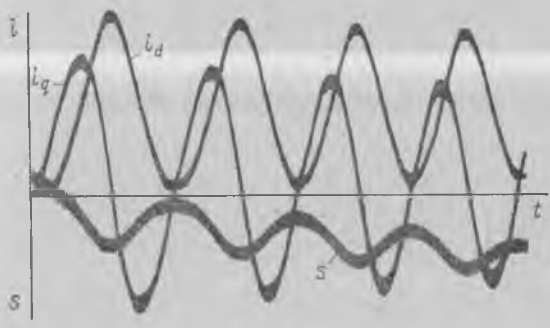


Рис. 4-5

циллограмма решения с учетом насыщения и изменения частоты вращения при коротком замыкании на зажимах синхронного генератора, имеющего следующие значения параметров (о. е):

$x_{ad}=x_{aq}=1{,}0$; $x_\sigma=0{,}05$; $x_{дd}=x_{дq}=1{,}03$; $x_в=1{,}1$; $r=0{,}001$; $r_в=0{,}02$; $r_{дd}=r_{дq}=0{,}001$; $H_j=6$ с.

В результате решения получены проекции тока статора на оси d и q — i_d и i_q, а также скольжение ротора s. Используя формулы линейных преобразований, нетрудно по известным i_d и i_q найти токи в фазах генератора. Как показывают исследования, насыщение магнитной цепи по путям потоков рассеяния статора сильно влияет на процессы при внезапных коротких замыканиях, и его учет необходим.

Моделирование с учетом насыщения магнитной цепи по пути основного магнитного потока. Необходимость учета насыщения магнитной цепи по пути основного магнитного потока возникает при исследовании ряда режимов работы синхронных машин: форсировке возбуждения машины, регулировании напряжения на зажимах по определенному закону, поддержании неизменным напряжения на зажимах машины при переменной частоте вращения вала и т. д.

Для синхронной машины степень насыщения магнитной цепи определяется величиной результирующей МДС в воздушном зазоре F_δ или, при записи уравнений в относительных единицах, величиной результирующего тока в воздушном зазоре i_δ. Результирующей МДС F_δ и току i_δ соответствует результирующее потокосцепление в воздушном зазоре Ψ_δ или равная ему при номинальной скорости в относительных единицах ЭДС e_δ. Таким образом, если задана характеристика холостого хода машины, то при известной величине ЭДС e_δ или иотокосцепления Ψ_δ можно однозначно определить результирующую МДС F_δ или ток i_δ.

Характеристики холостого хода синхронных машин, как правило, изображаются в именованных единицах или в относительных, определяемых из соотношений

$$E_* = E/E_{\text{ном}}; \quad i_{\text{в}*} = i_\text{в}/i_{\text{в.ном}},$$

где $i_{\text{в.ном}}$ — ток возбуждения, соответствующий ЭДС холостого хода, равной номинальному напряжению:

$$E_0 = U_{\text{ном}}.$$

При расчетах различных режимов работы энергетических систем, в которых имеется много генераторов, для упрощения принимается, что характеристики холостого хода всех синхронных машин одного типа, например турбогенераторов или гидрогенераторов, выраженные в относительных единицах, одинаковы и соответствуют некоторым средним данным реальных характеристик генераторов (рис. 4-6). Такие характеристики холостого хода называют *нормальными*. Относительный ток возбуждения $i_{\text{в}*}$ и ток возбуждения, принимаемый при записи уравнений синхронной машины во взаимной системе относительных единиц, различны, так как различны соответствующие базисные токи, принятые за единицу. Наряду с реальной криволинейной характеристикой холостого хода в расчетах пользуются также спрямленными ненасыщенными (прямая *1*) и насыщенными (прямая *2*).

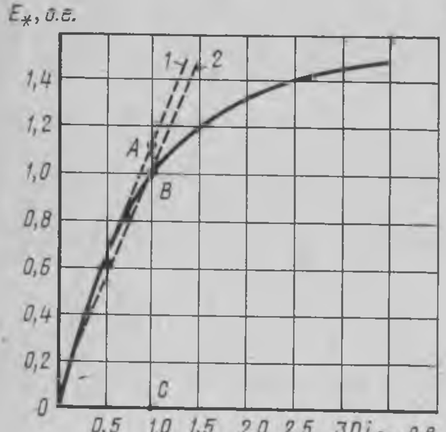


Рис. 4-6

При исследованиях синхронных машин на АВМ по полной системе уравнений, записанной во взаимной системе относительных единиц, характеристику холостого хода необходимо строить в относительных единицах, соответствующих единицам, принимаемым при записи уравнений синхронной машины. Иными словами, необходимо установить связь между величинами тока холостого хода $i_{\text{в.ном}}$ и тока $i_{\text{в.б}}$, равного базисному значению неприведенного тока возбуждения во взаимной системе относительных единиц и перестроить соответствующим образом характеристику холостого хода.

При определении тока возбуждения в относительных единицах достаточно разделить его значение, приведенное к обмотке якоря, на соответствующий базисный ток якоря:

$$i_{\text{в}}(\text{о. е.}) = i'_{\text{в}}/(\sqrt{2} I_{\text{ном}}) = i_{\text{в}}(\text{А})/(\sqrt{2} I_{\text{ном}} k_i). \tag{4-49}$$

Из последнего соотношения можно найти базисное значение неприведенного тока возбуждения, если принять $i_{\text{в}}$ (о. е.) = 1 и заменить $i_{\text{в}}$ (А) на $i_{\text{в.б}}$ (А):

$$i_{\text{в.б}}(\text{А}) = \sqrt{2} I_{\text{ном}} k_{i\text{в}}, \tag{4-50}$$

где $k_{i\text{в}} = \frac{2m}{\pi} \cdot \frac{w k_{\text{об}}}{w_{\text{в}}} k_d$ — коэффициент приведения тока возбуждения.

В рассматриваемой взаимной системе относительных единиц базисный ток возбуждения $i_{\text{в.б}}$ создает такую же по величине основную гармонику поля в зазоре, как и номинальный ток статора по продольной оси при симметричной нагрузке. Эту систему единиц в литературе называют также «системой x_{ad}», так как при $i_{\text{в}}$ (о. е.) = 1 ЭДС статора от тока возбуждения E (о. е.) = $i_{\text{в}}$ (о. е.) x_{ad} (о. е.) = x_{ad} (о. е.), т. е. равна ненасыщенному значению сопротивления взаимной индуктивности x_{ad}, выраженному в относительных единицах.

При определении базисного тока возбуждения были использованы обмоточные данные статора и ротора. Однако часто в практике моделирования синхронных машин на АВМ обмоточные данные машины бывают неизвестны. Поэтому большую практическую ценность имеет способ получения базисного тока возбуждения, основанный на использовании паспортных параметров машины.

Во взаимной системе относительных единиц синхронная ЭДС генератора

$$E(\text{о. е.}) = i_{\text{в}}(\text{о. е.})\, x_{ad}(\text{о. е.}). \tag{4-51}$$

Эта же ЭДС может быть выражена через ток возбуждения посредством линеаризованной характеристики холостого хода, построенной в относительных единицах. При спрямлении характеристики холостого хода по начальной ненасыщенной части (прямая *1*, рис. 4-6) получим

$$E_{\text{о.е.}} = k_{\mu\text{н}} i_{\text{в}*}, \tag{4-52}$$

где $k_{\mu\text{н}} = AC/BC$ — коэффициент насыщения магнитной цепи при холостом ходе (при $i_{\text{в}*} = 1$).

Приравнивая выражения (4-51) и (4-52), найдем связь между током возбуждения во взаимной системе относительных единиц и действительным током возбуждения:

$$i_{\text{в}}(\text{о. е.})\, x_{ad}(\text{о. е.}) = k_{\mu\text{н}} i_{\text{в}*}. \tag{4-53}$$

Если учесть, что $i_в(о.е)=i_в/i_{в.б}$ и $i_{в*}=i_в/i_{в.ном}$, то можно найти выражение, из которого определяется базисный ток возбуждения во взаимной системе единиц:

$$i_{в.б}=i_{в.ном}\,x_{ad}(о.\ е.)/k_{\mu н}. \quad (4\text{-}54)$$

Из (4-54) следует, что базисный ток возбуждения во взаимной системе относительных единиц $i_{в.б}$ и базисный ток возбуждения $i_{в.ном}$, принимаемый за единицу при построении характеристики холостого хода синхронной машины, отличаются на величину $x_{ad}(о.\ е.)/k_{\mu н}$.

Таким образом, получены основные соотношения, позволяющие перестроить нормальную характеристику холостого хода синхронной машины в характеристику во взаимной системе относительных единиц.

Пример 4-1. Построение характеристики холостого хода во взаимной системе относительных единиц.

Известны коэффициент насыщения магнитной цепи $k_{\mu н}=1{,}06$, ненасыщенное значение сопротивления взаимной индуктивности $x_{ad}=2{,}0$ и нормальная характеристика холостого хода турбогенератора:

$i_{в*}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
E_*	0,58	1,00	1,21	1,33	1,40	1,46	1,51

Из выражения (4-53) следует, что $i_в(о.\ е.)=i_{в*}k_{\mu н}/x_{ad}$. Это позволяет получить характеристику холостого хода машины во взаимной системе относительных единиц:

$i_в$ (о.е.)	0,27	0,53	0,80	1,06	1,33	1,59	1,86
E_*	0,58	1,00	1,21	1,33	1,40	1,46	1,50

Из полученных данных видно, что для неявнополюсной машины индуктивное сопротивление взаимоиндукции $x_{ан}$ меняется однозначно в функции результирующего тока в воздушном зазоре i_δ и потокосцепления Ψ_δ. При этом в практике моделирования на АВМ принято представлять обычно индуктивное сопротивление взаимоиндукции в функции от результирующего потокосцепления в воздушном зазоре: $x_{ан}=f(\Psi_\delta)$, что объясняется меньшим диапазоном изменения Ψ_δ по сравнению с током i_δ.

Зависимость $x_{ан}=f(i_\delta)$ можно получить из характеристики холостого тока, перестроенной таким образом, чтобы единице тока возбуждения соответствовала по спрямленной в начале координат характеристике ЭДС, численно равная в относительных единицах x_{ad} генератора (рис. 4-7, *а*). Используя рис. 4-7, *а*, нетрудно построить также кривую $x_{ан}=f(\Psi_\delta)$ (рис. 4-7, *б*).

В соответствии с изложенным выражения для потокосцеплений насыщенной синхронной машины принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_d=x_\sigma i_d+\Psi_{\delta d};\quad \Psi_q=x_\sigma i_q+\Psi_{\delta q};\\
&\Psi_в=x_{\sigma в}i_в+\Psi_{\delta d};\\
&\Psi_{дd}=x_{\sigma дd}i_{дd}+\Psi_{\delta d};\quad \Psi_{дq}=x_{\sigma дq}i_{дq}+\Psi_{\delta q};\\
&\Psi_{\delta d}=x_{ан}(i_d+i_в+i_{дd});\quad \Psi_{\delta q}=x_{ан}(i_q+i_{дq});\\
&x_{ан}=f(\Psi_\delta);\quad \Psi_\delta=\sqrt{\Psi_{\delta d}^2+\Psi_{\delta q}^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}55)$$

Таким образом, уравнения (4-40) и (4-55) являются уравнениями переходных процессов насыщенной неявнополюсной машины.

При моделировании явнополюсных синхронных машин насыщение магнитной цепи обычно учитывают только по продольной оси. Для этого в выражениях для потокосцеплений представляют индуктивное сопротивление реакции якоря по продольной оси в

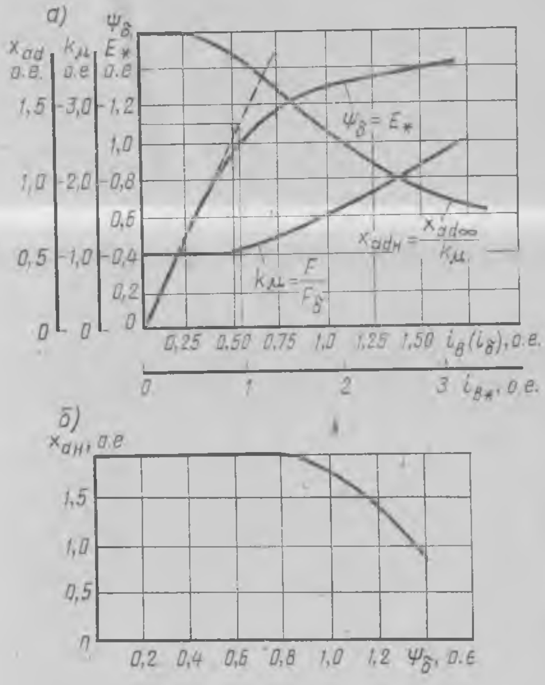


Рис. 4-7

функции продольной составляющей потокосцепления в воздушном зазоре $\Psi_{\delta d}$. В этом случае выражения для потокосцеплений контуров синхронной машины по продольной оси записывают как

$$\left.\begin{aligned}&\Psi_d = x_\sigma i_d + \Psi_{\delta d}; \quad \Psi_в = x_{\sigma в} i_в + \Psi_{\delta d};\\&\Psi_{дd} = x_{\sigma дd} i_{дd} + \Psi_{\delta d}; \quad \Psi_{\delta d} = x_{aн}(i_d + i_в + i_{дd});\\&x_{aн} = f(\Psi_{\delta d}).\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}56)$$

Выражения (4-56) с (4-40) образуют полную систему дифференциальных уравнений насыщенной явнополюсной синхронной машины.

Составление структурных схем решения по уравнениям (4-55) и (4-56) не вызывает принципиальных трудностей. Так, уравнения (4-55) после преобразований принимают такой вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
& i_d=\frac{1}{x_\sigma}(\Psi_d-\Psi_{\delta d}); \quad i_q=\frac{1}{x_\sigma}(\Psi_q-\Psi_{\delta q}); \\
& i_{\text{в}}=\frac{1}{x_{\sigma\text{в}}}(\Psi_{\text{в}}-\Psi_{\delta d}); \\
& i_{\text{д}d}=\frac{1}{x_{a\text{н}}}\Psi_{\delta d}-i_{\text{в}}-i_d; \quad i_{\text{д}q}=\frac{1}{x_{a\text{н}}}\Psi_{\delta q}-i_q; \\
& 1/x_{a\text{н}}=f(\Psi_\delta); \quad \Psi_\delta=\sqrt{\Psi_{\delta d}^2+\Psi_{\delta q}^2}; \\
& \Psi_{\delta d}=\Psi_{\text{д}d}-i_{\text{д}d}x_{\sigma\text{д}d}; \quad \Psi_{\delta q}=\Psi_{\text{д}q}-i_{\text{д}q}x_{\sigma\text{д}q}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (4\text{-}57)
$$

Математическая модель синхронной машины, построенная по уравнениям (4-40) и (4-57), приведена на рис. 4-8. Модель содер-

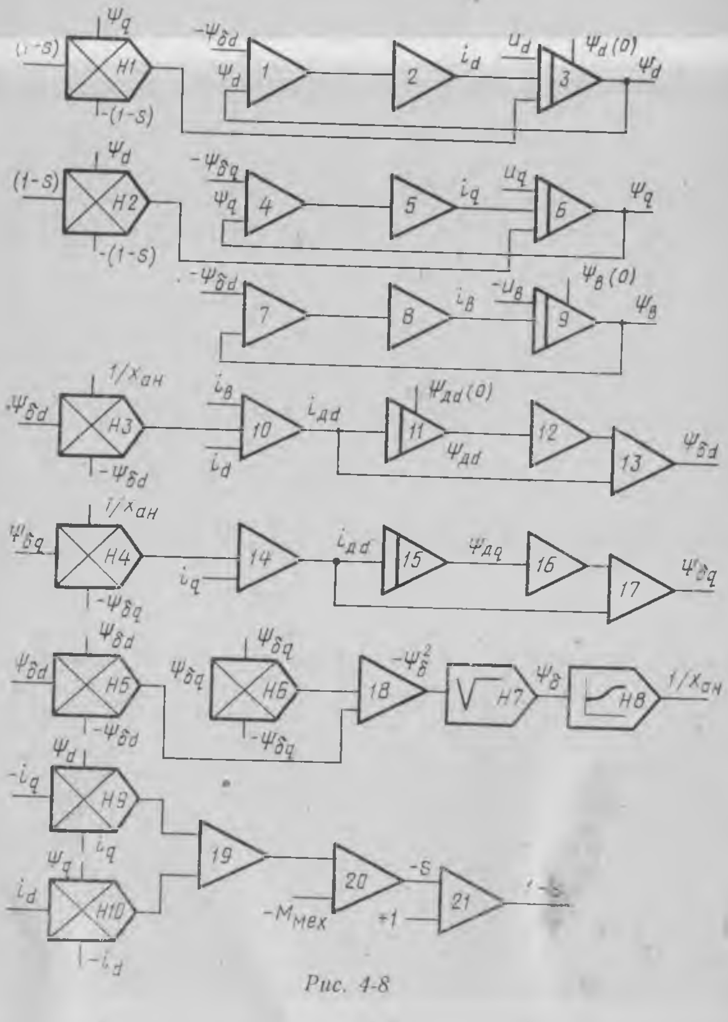


Рис. 4-8

жит 21 линейный решающий блок и 10 блоков нелинейностей. Разработанная математическая модель позволяет решать задачи и без учета насыщения магнитной цепи. Для этого в схеме (рис. 4-8) следует отключить вход блока нелинейности $H8 - 1/x_{ан} = f(\Psi_\delta)$, начальный участок аппроксимирующей кривой которого и задает ненасыщенное значение x_a.

Приведенная математическая модель синхронного генератора позволяет решать широкий круг задач исследования переходных процессов симметричных синхронных машин. Ниже будет показано ее практическое использование.

§ 4-4. Моделирование с использованием схем замещения

Система линейных алгебраических уравнений для потокосцеплений контуров синхронной машины (4-24) может быть представлена двумя схемами замещения: для продольной и поперечной осей машины (рис. 4-9, *а, б*). В схемах замещения потокосцепления заменяют напряжения, омические сопротивления — индуктивности

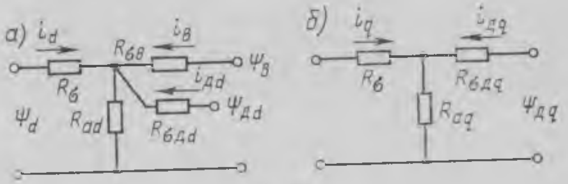


Рис. 4-9

или равные им в относительных единицах индуктивные сопротивления. Если к входным зажимам этих схем подвести напряжения, пропорциональные потокосцеплениям, то в их ветвях будут протекать токи i_d, i_q, $i_в$, $i_{дd}$ и т. д.

Подводимые к схемам замещения напряжения, пропорциональные потокосцеплениям контуров, можно получить на выходах интегрирующих усилителей, выполняющих интегрирование в соответствии с уравнениями:

$$\Psi_d = \int [u_d + (1-s)\Psi_q - ri_d]\, d\tau; \quad \Psi_q = \int [u_q - (1-s)\Psi_d - ri_q]\, d\tau;$$

$$\Psi_в = \int [U_в - r_в i_в]\, d\tau;$$

$$\Psi_{дd} = \int [-r_{дd} i_{дd}]\, d\tau; \quad \Psi_{дq} = \int [-r_{дq} i_{дq}]\, d\tau. \tag{4-58}$$

Полученные на выходах интегрирующих усилителей напряжения подводятся к зажимам схем замещения (рис. 4-10). Таким образом, осуществляется моделирование полных уравнений Парка — Горева (4-24), (4-58) с использованием схем замещения для потокосцеплений. Уравнение движения ротора моделируется нелиней-ными блоками *Н3, Н4* и интегрирующим блоком *11*.

Рассмотренный метод моделирования применяется для сокра-щения решающих элементов, реализующих операции в соответст-вии с полными уравнениями Парка — Горева. Особенно эффектив-но его применение в том случае, когда демпферная система ротора синхронной машины эквивалентируется большим числом контуров

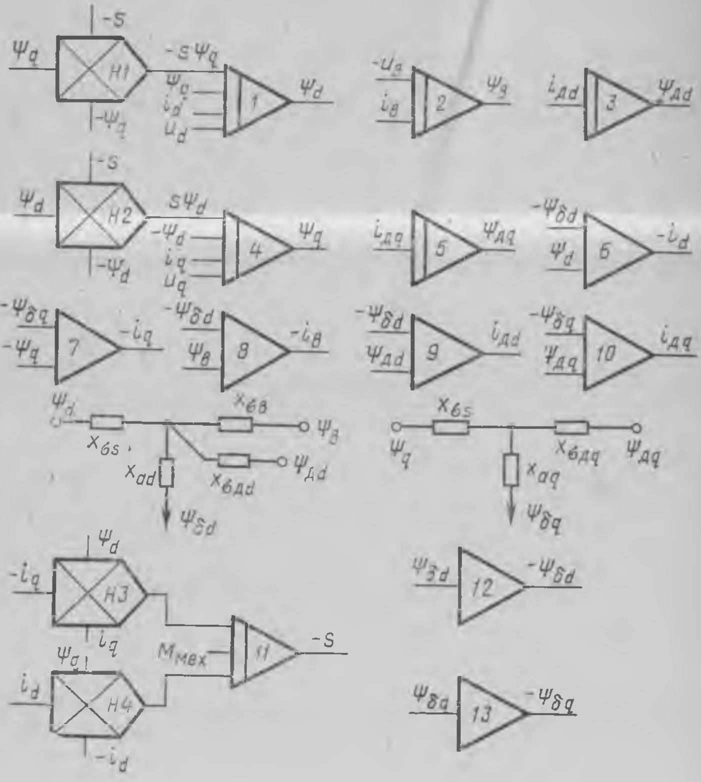


Рис. 4-10

по продольной и поперечной осям. При этом точность и нагляд-ность решения в сравнении с обычным методом решения по полной системе уравнений не теряются, а моделирование осуществляется не только по опытным или расчетным параметрам машины, а не-посредственно по экспериментальным частотным характеристи-кам.

Дополнительное сокращение числа решающих элементов при моделировании с использованием схем замещения для потокосцеп-лений можно получить в том случае, когда не требуется осцилло-графирование переходных процессов в демпферных контурах. При этом на входные зажимы схемы замещения, на которые должны

...ниться напряжения, пропорциональные потокосцеплениям роторных контуров, следует включить не интегрирующие усилители, а конденсаторы:

$$C_{дd}=1/r_{дd};\quad C_{дq}=1/r_{дq}.$$

Очевидно, что при протекании через эти конденсаторы токов $i_{дd}$ и $i_{дq}$ падения напряжения на них определяются соотношениями:

$$u_{Cдd}=\frac{1}{C_{дd}}\int i_{дd}d\tau;\quad u_{Cдq}=\frac{1}{C_{дq}}\int i_{дq}d\tau,$$

т. е. равны потокосцеплениям рассматриваемых демпферных контуров.

Полученные многополюсники для потокосцеплений продольной и поперечной осей машины с конденсаторами в цепях успокоительных контуров аналогичны схемам замещения синхронной машины, предложенным Д. А. Городским.

Структурная схема решения полных уравнений Парка — Горева с применением схем замещения и моделированием демпферных контуров, использующих конденсаторы, приведена на рис. 4-11. В схеме решения блоками *1, 4, 5* реализуются первые три уравнения системы (4-58). Для определения токов в ветвях схем замещения применены суммирующие усилители *2, 6, 8,* реализующие соотношения

$$\left.\begin{aligned} i_d&=(\Psi_d-\Psi_{\delta d})/x_\sigma;\\ i_q&=(\Psi_q-\Psi_{\delta q})/x_\sigma;\\ i_в&=(\Psi_в-\Psi_{\delta d})/x_{\sigma в}.\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}59)$$

Из соотношений (4-59) видно, что токи в контурах определяются как падения напряжений на соответствующих индуктивностях рассеяния. Входными сопротивлениями сумматоров, имеющих составляющие потокосцепления $\Psi_{\delta d}$ и $\Psi_{\delta q}$ по продольной и поперечной осям, являются омические сопротивления схем замещения x_{ad} и x_{aq}. Моделирование движения ротора осуществляется так же, как и в ранее описанном способе, блоками *Н3, Н4* и *9*.

Для устранения из схемы замещения решающих элементов, осуществляющих инвертирование токов i_d, i_q, $i_в$, на входы интегрирующих усилителей *1, 4, 5,* образующих потокосцепления Ψ_d, Ψ_q, $\Psi_в$, целесообразно подавать не токи, а их составляющие, выраженные через потокосцепления. Так, для статорного контура вместо $i_d r$ лучше подать на вход интегрирующего усилителя величины $\Psi_d r/x_\sigma$ и $-\Psi_{\delta d} r/x_\sigma$, которые окажут суммарное действие, равное $i_d r$.

Рассмотренный метод моделирования отражает, несмотря на значительно меньшее число используемых решающих элементов, электромеханические переходные процессы, описываемые полной системой уравнений Парка — Горева.

Учет насыщения при моделировании с использованием схем замещения имеет некоторые особенности. Так, изменение индуктивных сопротивлений контуров машины от насыщения можно учесть, вводя в схемы замещения нелинейные сопротивления, величины которых зависят от тех или иных зависимых переменных.

Учет насыщения по пути основного магнитного потока наиболее просто осуществляется для явнополюсных машин, влиянием поперечного потока которых можно пренебречь. Для этого в ветвь на-

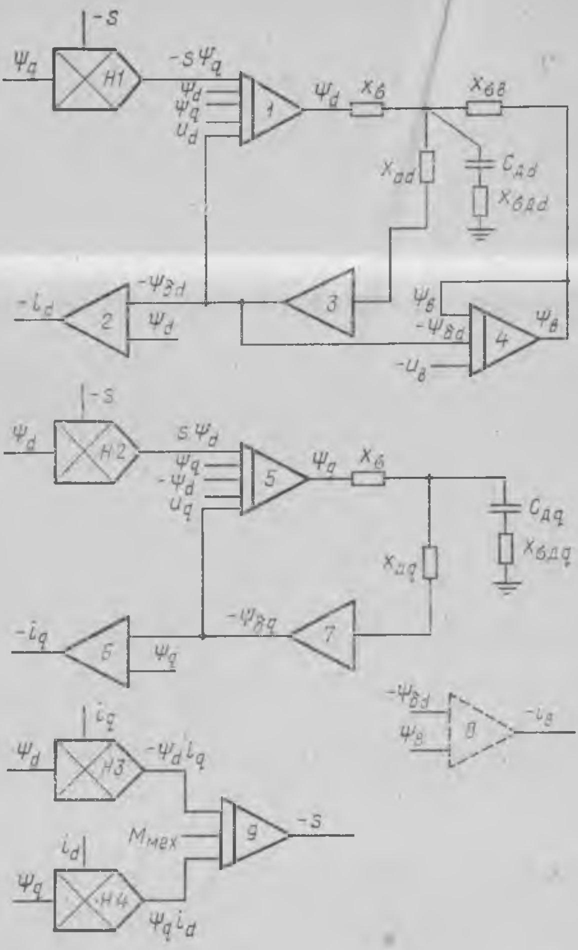


Рис. 4-11

магничивания схемы замещения необходимо включить нелинейное сопротивление $x_{ad\text{н}}$, зависящее от величины потока в воздушном зазоре по продольной оси $\Psi_{\delta d}$. Зависимость $x_{ad\text{н}}=f(\Psi_{\delta d})$ определяется из кривой намагничивания машины и реализуется с помощью функционального преобразователя.

Схема учета насыщения при моделировании и графическое построение функциональной зависимости приведены на рис. 4-12.

На рис. 4-12, *а* усилитель *1* используется для измерения величины $\Psi_{\delta d}$, при этом, как и в схеме рис. 4-11, его входным сопротивлением является ненасыщенное сопротивление x_{ad}. С помощью функционального преобразователя определяется разность токов по линейной и нелинейной характеристикам машины. Если принять, что напряжение на выходе функционального преобразователя равно

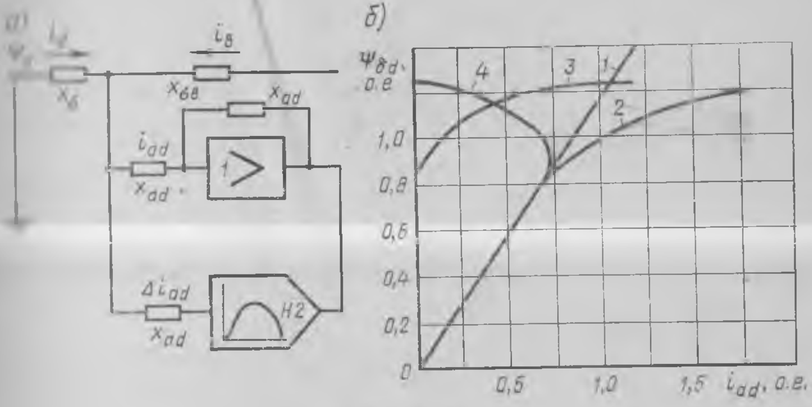


Рис. 4-12

$f(\Psi_{\delta d})$, то при выходном сопротивлении x_{ad} дополнительный ток ветви намагничивания

$$\Delta i_{ad}=[\Psi_{\delta d}-f(\Psi_{\delta d})]/x_{ad}. \tag{4-60}$$

Из (4-60) определяется необходимая зависимость между выходным напряжением $f(\Psi_{\delta d})$ и напряжением на входе преобразователя, пропорциональным $\Psi_{\delta d}$:

$$f(\Psi_{\delta d})=\Psi_{\delta d}-\Delta i_{ad}x_{ad}. \tag{4.61}$$

Зависимость, описываемая уравнением (4-61), определяется графически в соответствии с построениями, выполненными на рис. 4-12, *б*. На этом рисунке кривая *3* находится как разность предельной *2* и спрямленной *1* характеристик холостого хода и представляет собой зависимость $\Delta i_{ad}=f(\Psi_{\delta d})$. Разделив уравнение (4-61) на x_{ad}, получим

$$f(\Psi_{\delta d})/x_{ad}=\Psi_{\delta d}/x_{ad}-\Delta i_{ad}=i_{ad}-\Delta i_{ad}, \tag{4-62}$$

где i_{ad} — ненасыщенное значение тока ветви намагничивания.

Зависимость (4-62) изображена на рис. 4-12, *б* кривой *4*; после умножения на x_{ad} она должна набираться на функциональном преобразователе в функции от $\Psi_{\delta d}$.

Для неявнополюсных машин имеет место насыщение магнитной цепи основным магнитным потоком $\Psi_\delta=\sqrt{\Psi_{\delta d}^2+\Psi_{\delta q}^2}$, поэтому насыщенные значения сопротивлений взаимоиндукции $x_{ad\text{н}}$ и $x_{aq\text{н}}$ зависят от Ψ_δ. Результирующий поток в зазоре машины Ψ_δ определяется по имеющимся в схемах замещения потокам $\Psi_{\delta d}$ и $\Psi_{\delta q}$ при помощи функционального преобразователя, осуществляющего операцию «корень квадратный из суммы квадратов двух величин». Чтобы получить дополнительные составляющие тока намагничивания по осям, при помощи функционального преобразователя образуется зависимость дополнительной проводимости ветви намагничивания, обусловленной насыщением (рис. 4-13, *а*, кривая *4*).

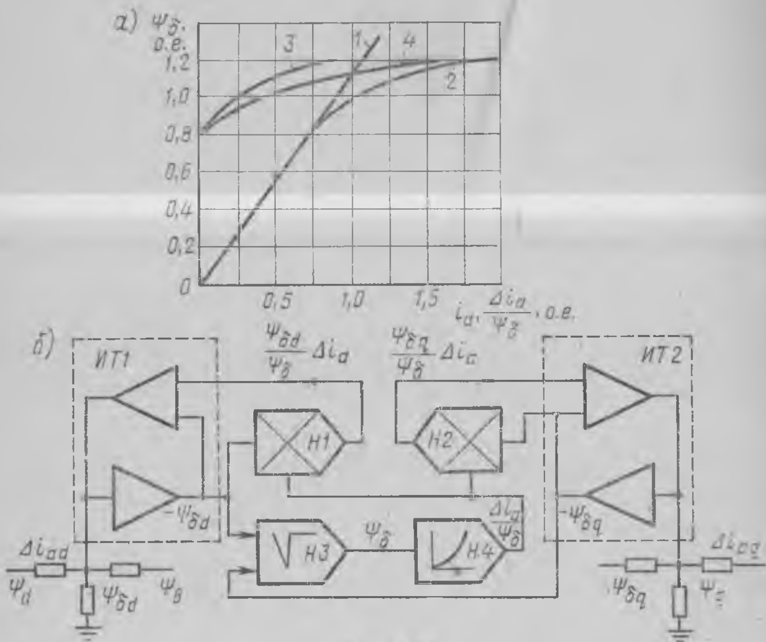


Рис. 4-13

Для получения токов, которые необходимо ввести в ветви намагничивания схем замещения по осям, необходимо составляющие потокосцеплений по осям $\Psi_{\delta d}$ и $\Psi_{\delta q}$ умножить на величину $\Delta i_a/\Psi_\delta$. При введении их в узловые точки схем замещения необходимо использовать «источники тока». Схема моделирования, учитывающая насыщение по рассмотренной методике, показана на рис. 4-13, *б*. Она состоит из источников тока *ИТ1, ИТ2* и нелинейных блоков *Н1—Н4*.

Данный метод учета насыщения используют и при рассмотрении насыщения по путям рассеяния машины.

Моделирование синхронных машин с применением схем замещения значительно сокращает количество решающих элементов, необходимых для построения структурной схемы. Однако при учете насыщения магнитной цепи возникают дополнительные трудности, связанные с обеспечением устойчивости и настройкой источников тока, что ограничивает возможности метода.

§ 4-5. Моделирование однофазного синхронного генератора

Рассмотрим для примера моделирование режимов работы однофазного синхронного генератора как общий случай несимметрии синхронных машин и покажем характер возникающих трудностей в возможности создания устойчивой электронной модели.

Моделирование без учета насыщения магнитной цепи. Дифференциальные уравнения равновесия ЭДС однофазного синхронного генератора можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &0=(r_A+r_{\text{н}})i_A+d\Psi_A/dt; \quad U_{\text{в}}=r_{\text{в}}i_{\text{в}}+d\Psi_{\text{в}}/dt;\\ &0=r_{\text{д}d}i_{\text{д}d}+d\Psi_{\text{д}d}/dt; \quad 0=r_{\text{д}q}i_{\text{д}q}+d\Psi_{\text{д}q}/dt. \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}63)$$

Потокосцепления зависят от взаимного расположения обмоток:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_A=i_A(x_A+x_{\text{н}})+i_{\text{в}}x_a\cos\gamma+i_{\text{д}d}x_a\cos\gamma+i_{\text{д}q}x_a\sin\gamma;\\ &\Psi_{\text{в}}=i_A x_a\cos\gamma+i_{\text{в}}x_{\text{в}}+i_{\text{д}d}x_a;\\ &\Psi_{\text{д}d}=i_A x_a\cos\gamma+i_{\text{в}}x_a+i_{\text{д}d}x_{\text{д}d};\\ &\Psi_{\text{д}q}=i_A x_a\sin\gamma+i_{\text{д}q}x_{\text{д}q}. \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}64)$$

В уравнениях (4-63) и (4-64) $r_A+r_{\text{н}}$, $r_{\text{в}}$, $r_{\text{д}d}$, $r_{\text{д}q}$, $x_A+x_{\text{н}}$, $x_{\text{в}}$, $x_{\text{д}d}$, $x_{\text{д}q}$ — активные и индуктивные сопротивления соответственно обмоток статора, возбуждения, демпферных обмоток по продольной и поперечной осям и нагрузки; x_a — индуктивное сопротивление взаимоиндукции при совпадении осей обмоток; $u_{\text{в}}$ — напряжение обмотки возбуждения; $\gamma=\int\limits_0^t\omega_r dt+\gamma_0$ — угол между осью обмотки статора и продольной осью ротора.

Движение ротора описывается уравнением

$$M_{\text{мех}}=H_j d\omega_r/dt+M_{\text{эм}}, \qquad (4\text{-}65)$$

где $M_{\text{мех}}$ — момент механических сил; H_j — инерционная постоянная ротора; $M_{\text{эм}}$ — момент электромагнитных сил.

Электромагнитный момент находится как частная производная от электромагнитной энергии по углу поворота ротора γ:

$$M_{\text{эм}}=i_A x_a[i_{\text{д}q}\cos\gamma-(i_{\text{в}}+i_{\text{д}d})\sin\gamma]. \qquad (4\text{-}66)$$

Уравнение движения ротора в фазной системе координат с учетом (4-65) и (4-66) запишем в виде

$$M_{\text{мех}}=H_j d\omega_r/dt+i_A x_a[i_{\text{д}q}\cos\gamma-(i_{\text{в}}+i_{\text{д}d})\sin\gamma]. \qquad (4\text{-}67)$$

Использование методов преобразования координат, как было показано выше, не приводит к сокращению количества периодических коэффициентов в уравнениях переходных процессов однофазного синхронного генератора. Поэтому наиболее целесообразным является моделирование однофазного синхронного генератора при записи его уравнений в фазовой системе координат.

Моделирование электромагнитных процессов однофазного синхронного генератора можно было бы осуществить по уравнениям (4-63) и (4-67), определяя из (4-63) потокосцепления Ψ_A, $\Psi_в$, $\Psi_{дd}$, $\Psi_{дq}$, из (4-64) — токи, в предположении, что потокосцепления известны. Однако при нахождении токов из (4-64) получаем соотношения, у которых коэффициенты при потокосцеплениях представляют собой дроби, в числитель и знаменатель которых входят тригонометрические функции. Моделирование их представляет значительные трудности, поэтому такой путь решения неприемлем.

Один из возможных методов моделирования систем уравнений (4-63) и (4-64) — приведение их к виду, при котором из уравнений исключаются потокосцепления. Подставляя уравнения (4-64) в (4-63) и приводя их к виду, удобному для составления структурной схемы, получаем систему уравнений электромагнитных переходных процессов однофазного синхронного генератора:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{di_A}{dt} &= -\frac{r_A+r_н}{x_A+x_н} i_A - \frac{x_a}{x_A+x_н}\cos\gamma\,\frac{di_в}{dt} + \frac{\omega x_a}{x_A+x_н}\sin\gamma i_в - \\
&- \frac{x_a}{x_A+x_н}\cos\gamma\,\frac{di_{дd}}{dt} + \frac{\omega x_a}{x_A+x_н}\sin\gamma i_{дd} - \frac{x_a}{x_A+x_н}\sin\gamma\,\frac{di_{дd}}{dt} - \\
&- \frac{\omega x_a}{x_A+x_н}\cos\gamma i_{дq}; \\
\frac{di_в}{dt} &= -\frac{r_в}{x_в} i_в + \frac{1}{x_в} U_в - \frac{x_a}{x_в}\cos\gamma\,\frac{di_A}{dt} + \\
&+ \frac{\omega x_a}{x_в}\sin\gamma i_A - \frac{x_a}{x_в}\cdot\frac{di_{дd}}{dt}; \\
\frac{di_{дd}}{dt} &= -\frac{r_{дd}}{x_{дd}} i_{дd} - \frac{x_a}{x_{дd}}\cdot\frac{di_в}{dt} - \frac{x_a}{x_{дd}}\cos\gamma\,\frac{di_A}{dt} + \frac{\omega x_a}{x_{дd}}\sin\gamma i_A; \\
\frac{di_{дq}}{dt} &= -\frac{r_{дq}}{x_{дq}} i_{дq} - \frac{x_d}{x_{дq}}\sin\gamma\frac{di_A}{dt} - \frac{\omega x_a}{x_{дq}}\cos\gamma i_A;
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}68)$$

Решение системы уравнений (4-68) производилось на аналоговой вычислительной машине ИПТ-5. Структурная схема решения представлена на рис. 4-14. Схема моделирования каждого из дифференциальных уравнений системы (4-68) одинакова. Для интегрирования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в ИПТ-5 применяются электромеханические блоки переменных коэффициентов, производящие умножение зависимой переменной или ее производной на переменный коэффициент.

Пример 4-2. Расчет коэффициентов передач решающих элементов. По составленной структурной схеме можно написать для каждого решающего усилителя выражение для выходного напряжения:

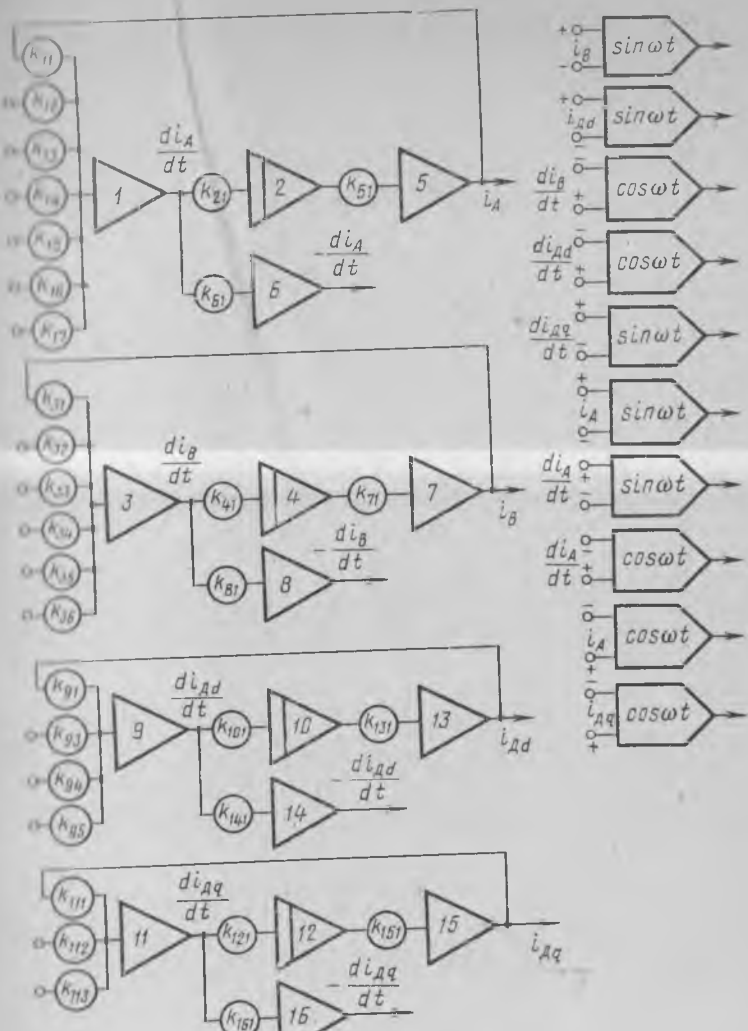


Рис. 4-14

$$
\left.
\begin{aligned}
& u_1 = -(k_{11}u_5 + k_{12}u_3 + k_{13}u_4 + k_{14}u_9 + k_{15}u_{10} + k_{16}u_{11} + k_{17}u_{15});\\
& u_2 = -(1/p)\, k_{21}u_1;\\
& u_3 = -(k_{31}u_7 + k_{32}u_{\text{в}} + k_{33}u_1 + k_{34}u_2 + k_{35}u_9);\\
& u_4 = -(1/p)\, k_{41}u_3; \quad u_5 = -k_{51}u_2; \quad u_7 = -k_{71}u_4;\\
& u_9 = -(k_{91}u_{13} + k_{92}u_3 + k_{93}u_1 + k_{94}u_2);\\
& u_{10} = -(1/p)\, k_{101}u_9;\\
& u_{11} = -(k_{111}u_{15} + k_{112}u_1 + k_{113}u_2);\\
& u_{12} = -(1/p)\, k_{121}u_{11}; \quad u_{13} = -k_{131}u_{10}; \quad u_{15} = -k_{151}u_{12},
\end{aligned}
\right\} \qquad (4\text{-}69)
$$

где u_1, u_2, ..., u_{15} — напряжения на выходе усилителя; k_{11}, k_{12}, k_{13} — коэффициенты передачи усилителей, в которых первая цифра индекса соответствует номеру блока, вторая — номеру входа.

Разрешая систему уравнений (4-69) относительно u_2, u_4, u_{10}, u_{12}, подставляя в полученные уравнения вместо u_4, u_2, u_{10}, u_{12} их выражения через зависимые переменные и масштабы и преобразуя полученные уравнения к виду системы (4-68), получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{di_A}{dt} &= -\frac{k_{21}k_{11}k_{51}}{m_t}\, i_A - \frac{k_{61}k_{12}}{k_{41}} \cdot \frac{di_{\text{в}}}{dt} + \frac{k_{21}k_{13}}{m_t}\, i_{\text{в}} - \\
&- \frac{k_{21}k_{14}}{k_{101}} \cdot \frac{di_{\text{д}d}}{dt} + \frac{k_{21}k_{15}}{m_t}\, i_{\text{д}d} - \frac{k_{21}k_{16}}{k_{121}} \cdot \frac{di_{\text{д}q}}{dt} - \frac{k_{21}k_{71}k_{151}}{m_t}\, i_{\text{д}q}; \\
\frac{di_{\text{в}}}{dt} &= -\frac{k_{41}k_{31}k_{71}}{m_t}\, i_{\text{в}} + \frac{m_i k_{41}k_{32}}{m_t m_u}\, U_{\text{в}} - \frac{k_{41}k_{33}}{k_{21}} \cdot \frac{di_A}{dt} + \\
&+ \frac{k_{41}k_{34}}{m_t}\, i_A - \frac{k_{41}k_{35}}{k_{101}} \cdot \frac{di_{\text{д}d}}{dt}; \\
\frac{di_{\text{д}d}}{dt} &= -\frac{k_{101}k_{91}k_{131}}{m_t}\, i_{\text{д}d} - \frac{k_{101}k_{92}}{k_{41}} \cdot \frac{di_{\text{в}}}{dt} - \frac{k_{101}k_{93}}{k_{21}} \cdot \frac{di_A}{dt} + \frac{k_{101}k_{94}}{m_t}\, i_A \\
\frac{di_{\text{д}q}}{dt} &= -\frac{k_{121}k_{111}k_{151}}{m_t}\, i_{\text{д}q} - \frac{k_{121}k_{112}}{k_{21}} \cdot \frac{di_A}{dt} - \frac{k_{121}k_{131}}{m_t}\, i_A,
\end{aligned} \tag{4-70}$$

где m_t — масштаб времени; $m_i = i_A/u_2 = i_{\text{в}}/u_4 = i_{\text{д}d}/u_{10} = i_{\text{д}q}/u_{12}$ — масштаб тока; $m_U = U_{\text{в}}/u_0$ — масштаб напряжения.

Приравнивая коэффициенты при неизвестных в системах (4-68) и (4-70) и принимая $k_{21} = k_{51} = k_{61} = k_{41} = k_{71} = k_{81} = k_{101} = k_{131} = k_{141} = k_{161} = 1$, записываем выражения для коэффициентов передачи суммирующих блоков:

$$\begin{aligned}
&k_{11} = m_t\frac{r_A + r_{\text{н}}}{x_A + x_{\text{н}}}; \quad k_{12} = \frac{x_a}{x_A + x_{\text{н}}}; \quad k_{13} = \frac{m_t \omega x_a}{x_A + x_{\text{н}}}; \\
&k_{14} = \frac{x_a}{x_A + x_{\text{н}}}; \quad k_{15} = \frac{m_t \omega x_a}{x_A + x_{\text{н}}}; \quad k_{16} = \frac{x_a}{x_A + x_{\text{н}}}; \\
&k_{17} = \frac{m_t \omega x_a}{x_A + x_{\text{н}}}; \quad k_{31} = m_t\frac{r_{\text{в}}}{x_{\text{в}}}; \quad k_{32} = \frac{m_t m_u}{m_i x_{\text{в}}}; \\
&k_{33} = \frac{x_a}{x_{\text{в}}}; \quad k_{34} = \frac{m_t \omega x_a}{x_{\text{в}}}; \quad k_{35} = \frac{x_a}{x_{\text{в}}}; \quad k_{91} = m_t\frac{r_{\text{д}d}}{x_{\text{д}d}}; \\
&k_{92} = \frac{x_a}{x_{\text{д}d}}; \quad k_{93} = \frac{x_a}{x_{\text{д}d}}; \quad k_{94} = \frac{m_t \omega x_a}{x_{\text{д}d}}; \\
&k_{111} = m_t\frac{r_{\text{д}q}}{x_{\text{д}q}}; \quad k_{112} = \frac{x_a}{x_{\text{д}q}}; \quad k_{113} = \frac{m_t \omega x_a}{x_{\text{д}q}}.
\end{aligned} \tag{4-71}$$

Изменяя коэффициенты в соответствии с необходимым варьированием параметров, можно проводить исследование режимов работы однофазного синхронного генератора на автономную нагрузку, а также при внезапном коротком замыкании. В последнем случае в уравнениях (4-63)—(4-71) следует принять $r_{\text{н}} = 0$, $x_{\text{н}} = 0$.

Приведенная на рис. 4-14 схема решения позволяет исследовать также работу явнополюсного синхронного генератора без демпферных обмоток или с демпферной обмоткой только по одной оси. Для этого от схемы решения необходимо отделить блоки, моделирующие дифференциальные уравнения процессов соответствующей обмотки.

На рис. 4-15 приведена осциллограмма токов при внезапном коротком замыкании на зажимах генератора, имеющего следующие параметры (о. е.): $x_a=1{,}0$; $x_A=1{,}05$; $x_в=1{,}1$; $x_{дd}=x_{дq}=1{,}05$; $r_A=r_в=r_д=0{,}005$.

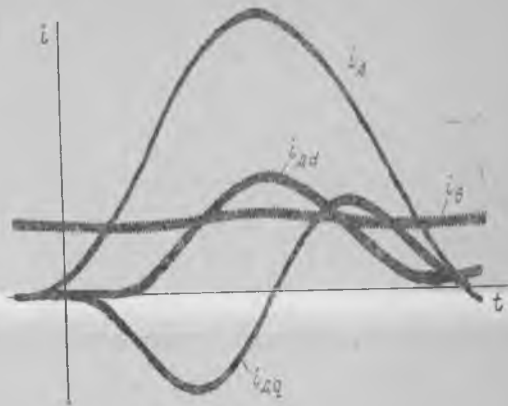


Рис. 4-15

Схема решения, приведенная на рис. 4-14, имеет ограниченные возможности, так как в ней содержатся контуры «алгебраического типа», имеющие четное число суммирующих усилителей. Так, например, блоки 5 и 9 образуют контур, коэффициент передачи по которому

$$k=k_{35}k_{92}=(x_a/x_в)(x_a/x_{дd})<1. \quad (4\text{-}72)$$

При малых рассеяниях обмоток значение коэффициента передачи по контуру стремится к единице, и в модели возникает структурная неустойчивость. Это не позволяет использовать ее при исследовании переходных процессов машин, имеющих относительно малые значения индуктивных сопротивлений рассеяния.

Когда электронная модель имеет машинную неустойчивость, а сама физическая система устойчива, в теории математического моделирования применяют метод преобразования исходной системы уравнений к такому виду, при котором в схеме решения отсутствуют неустойчивые элементы.

Преобразуем уравнения (4-63), (4-64) и (4-67) таким образом, чтобы структурная схема, составленная по этим уравнениям, имела наименьшее количество операционных блоков, наименьшую кратность задаваемых значений коэффициентов и не содержала замкнутых контуров с положительной обратной связью без интегрирующих блоков.

Определим из совместного решения второго и третьего уравнений системы (4-64) токи $i_в$ и $i_{дd}$:

$$i_в=\frac{1}{x_в x_{дd}-x_a^2}\left[x_{дd}\Psi_в-x_a\Psi_{дd}-x_a(x_{дd}-x_a)\,i_A\cos\gamma\right]; \quad (4\text{-}73)$$

$$i_{дd}=\frac{1}{x_в x_{дd}-x_a^2}\left[x_в\Psi_{дd}-x_a\Psi_в-x_a(x_в-x_a)\,i_A\cos\gamma\right], \quad (4\text{-}74)$$

а из четвертого уравнения (4-69) ток $i_{дq}$:

$$i_{дq}=(\Psi_{дq}-x_a i_A\sin\gamma)/x_{дq}. \quad (4\text{-}75)$$

Подставляя (4-73)—(4-75) в уравнение потокосцепления обмотки статора (4-64) и преобразуя полученное выражение, запишем

$$\Psi_A=\left(\frac{x''_d+x''_q}{2}+\frac{x''_d-x''_q}{2}\cos\gamma\right)i_A+\frac{x_a(x_{\text{д}d}-x_a)}{x_{\text{в}}x_{\text{д}d}-x_a^2}\cos\gamma\Psi_{\text{в}}+$$

$$+\frac{x_a(x_{\text{в}}-x_a)}{x_{\text{в}}x_{\text{д}d}-x_a^2}\cos\gamma\Psi_{\text{д}d}+\frac{x_a}{x_{\text{д}q}}\Psi_{\text{д}q}\sin\gamma. \tag{4-76}$$

Из уравнения (4-76) определим ток

$$i_A=\frac{2}{x''_d+x''_q}\left[\Psi_A-\frac{x''_d-x''_q}{2}\cos\gamma i_A-\frac{x_a(x_{\text{д}d}-x_a)}{x_{\text{в}}x_{\text{д}d}-x_a^2}\cos\gamma\Psi_{\text{в}}-\right.$$

$$\left.-\frac{x_a(x_{\text{в}}-x_a)}{x_{\text{в}}x_{\text{д}d}-x_a^2}\cos\gamma\Psi_{\text{д}d}-\frac{x_a}{x_{\text{д}q}}\Psi_{\text{д}q}\sin\gamma\right]. \tag{4-77}$$

Таким образом, получена система уравнений электромеханических переходных процессов однофазного синхронного генератора [(см. (4-63), (4-73)—(4-75), (4-77)] в форме, удобной для моделирования, так как дифференциальные уравнения (4-63) и (4-65) содержат только по одному слагаемому в виде первой производной по времени, а токи в уравнениях (4-73)—(4-75) разрешены относительно потокосцеплений.

Структурная схема модели уравнений (4-63), (4-65), (4-73) — (4-75) и (4-77) приведена на рис. 4-16. Модель содержит 23 операционных усилителя и 10 блоков перемножения. Тригонометрические функции $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$ реализуются структурной схемой, состоящей из блоков перемножения *7, 8* и интегрирующих усилителей *19, 21*.

Экспериментальное исследование модели на аналоговой вычислительной машине МН-14 показало, что модель проста в наладке и работает устойчиво.

На рис. 4-17 и 4-18 приведены зависимости токов потокосцеплений и угловой скорости вращения ротора генератора при внезапном коротком замыкании, полученные в результате решения на машине МН-14 по разработанной математической модели при следующих параметрах (о. е.): $x_A=1{,}05$; $x_{\text{в}}=1{,}2$; $x_{\text{д}d}=x_{\text{д}q}=1{,}01$; $r_A=r_{\text{в}}=r_{\text{д}d}=$ $=r_{\text{д}q}=0{,}005$; $x_a=1$; $H_j=1$ с; $M_{\text{мех}}=0$.

Короткое замыкание производилось после отключения приводного двигателя в момент перехода ЭДС через нуль. Колебания угловой скорости (рис. 4-18) обусловлены преобразованием кинетической энергии ротора в электромагнитную энергию полей генератора (уменьшение угловой скорости) и обратным преобразованием (увеличение угловой скорости).

Результаты решения, полученные на АВМ типа МН-14, сравнивались с решением исходных уравнений на ЦВМ типа БЭСМ-4. Максимальная погрешность при этом составила не более 2—3%. Приведенный пример показывает возможности исследования на

...М переходных процессов в общем случае несимметрии синхрон-
...х машин.

Рассмотренный метод преобразования исходной системы урав-
...ний к виду, удобному для программирования на АВМ, может

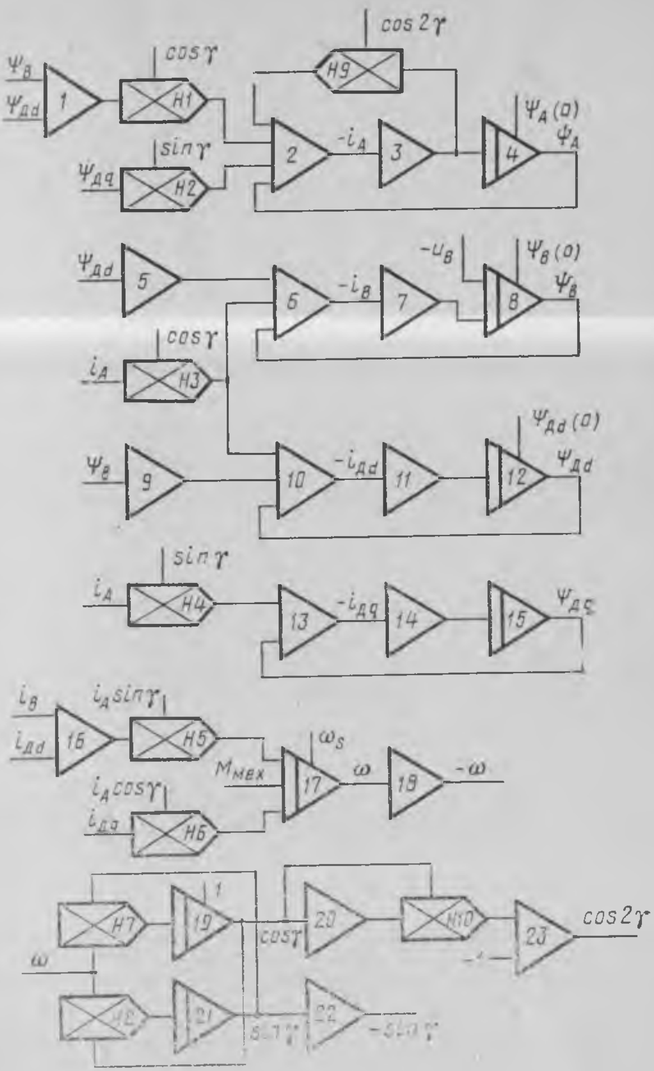


Рис. 4-16

...ть также применен для исследования работы трехфазной син-
...ронной машины через выпрямитель на нагрузку, что является
...ним из общих случаев несимметрии неявнополюсной синхронной
машины.

Приведенная форма записи уравнений позволяет учитывать влияние насыщения магнитной цепи на сверхпереходные параметры машины, что следует из анализа уравнения (4-77) для тока статора.

Моделирование с учетом насыщения по пути основного магнитного потока. Учет насыщения, как известно, приводит к необходимости решения системы нелинейных дифференциальных уравнений даже при известном законе изменения частоты вращения ротора. Рассмотренная модель однофазного синхронного генератора не позволяет произвести учет насыщения по пути основного магнитного потока.

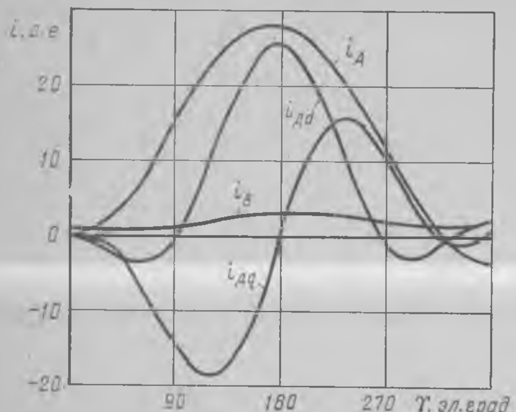


Рис. 4-17

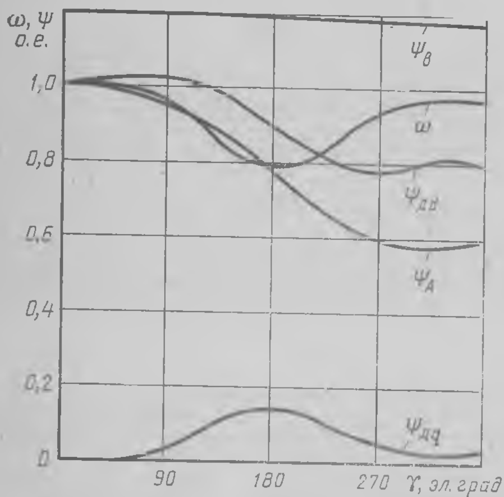


Рис. 4-18

Возможность учета насыщения по пути основного магнитного потока при исследовании симметричных режимов работы синхронного генератора была показана выше. Более точным является способ учета насыщения, при котором сопротивления ветви намагничивания определяются в зависимости от результирующего магнитного состояния машины.

Воспользуемся этим способом при моделировании однофазного синхронного генератора. Моделирование будем вести по дифференциальным уравнениям (4-63) и (4-64), записанным в непреобразованной системе координат. При этом потокосцепления обмоток статора и ротора необходимо представить в виде потокосцеплений рассеяния соответствующей обмотки и проекций потокосцепления в воздушном зазоре на продольную и поперечную оси ротора. Такая запись исходной системы уравнений позволяет учесть насыщение магнитной цепи по пути основного магнитного потока машины и по путям потоков рассеяния, изменение частоты вращения ротора, а [illegible] избежать включения в схему математической модели не[illegible] элементов.

Выполнив соответствующие преобразования, запишем систему (4-64) в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_A = x_{\sigma A} i_A + \Psi_{\delta d}\cos\gamma + \Psi_{\delta q}\sin\gamma;\\
&\Psi_{\text{в}} = x_{\sigma\text{в}} i_{\text{в}} + \Psi_{\delta d};\\
&\Psi_{\text{д}d} = x_{\sigma\text{д}d} i_{\text{д}d} + \Psi_{\delta d};\\
&\Psi_{\text{д}q} = x_{\sigma\text{д}q} i_{\text{д}q} + \Psi_{\delta q},
\end{aligned}\right| \quad (4\text{-}78)$$

и уравнение электромагнитного момента (4-66) в виде

$$M_{\text{эм}} = i_A(\Psi_{\delta d}\sin\gamma - \Psi_{\delta q}\cos\gamma). \quad (4\text{-}79)$$

Проекции потокосцеплений в зазоре на оси d и q:

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_{\delta d} = x_{a\text{н}}(i_{\text{в}} + i_{\text{д}d} + i_A\cos\gamma);\\
&\Psi_{\delta q} = x_{a\text{н}}(i_{\text{д}q} + i_A\sin\gamma),
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}80)$$

где $x_{a\text{н}} = f(\Psi_\delta)$ — насыщенное значение сопротивления взаимоиндукции.

Потокосцепление в зазоре

$$\Psi_\delta = \sqrt{\Psi_{\delta d}^2 + \Psi_{\delta q}^2}. \quad (4\text{-}81)$$

Уравнения равновесия напряжений (4-63) остаются без изменения. Для получения устойчивой модели и небольших значений передаточных коэффициентов токи i_A и $i_{\text{в}}$ наиболее целесообразно определить из первых двух уравнений системы (4-78), а токи $i_{\text{д}d}$ и $i_{\text{д}q}$ — из уравнений (4-80). В результате уравнения для токов запишутся как

$$\left.\begin{aligned}
&i_A = (\Psi_A - \Psi_{\delta d}\cos\gamma - \Psi_{\delta q}\sin\gamma)/x_{\sigma A};\\
&i_{\text{в}} = (\Psi_{\text{в}} - \Psi_{\delta d})/x_{\sigma\text{в}};\\
&i_{\text{д}d} = \Psi_{\delta d}/x_{a\text{н}} - i_{\text{в}} - i_A\cos\gamma;\\
&i_{\text{д}q} = \Psi_{\delta q}/x_{a\text{н}} - i_A\sin\gamma.
\end{aligned}\right| \quad (4\text{-}82)$$

Потокосцепления $\Psi_{\delta d}$ и $\Psi_{\delta q}$ найдем из двух последних уравнений системы (4-78):

$$\Psi_{\delta d} = \Psi_{\text{д}d} - x_{\sigma\text{д}d} i_{\text{д}d}; \quad \Psi_{\delta q} = \Psi_{\text{д}q} - x_{\sigma\text{д}q} i_{\text{д}q}. \quad (4\text{-}83)$$

На рис. 4-19 приведена структурная схема математической модели, составленная по уравнениям (4-63), (4-79), (4-81)—(4-83).

Зависимость $1/x_{a\text{н}} = F(\Psi_\delta)$, набираемая на функциональном преобразователе *10*, определяется по характеристике холостого хода машины $E_0 = f(i)$.

Учет насыщения по путям потоков рассеяния в схеме решения (рис. 4-19) не осуществлен. Однако в случае необходимости, приведенная форма записи уравнений позволяет достаточно легко учесть изменение сопротивлений рассеяния от насыщения, так как в схеме модели они не связаны с другими параметрами машины.

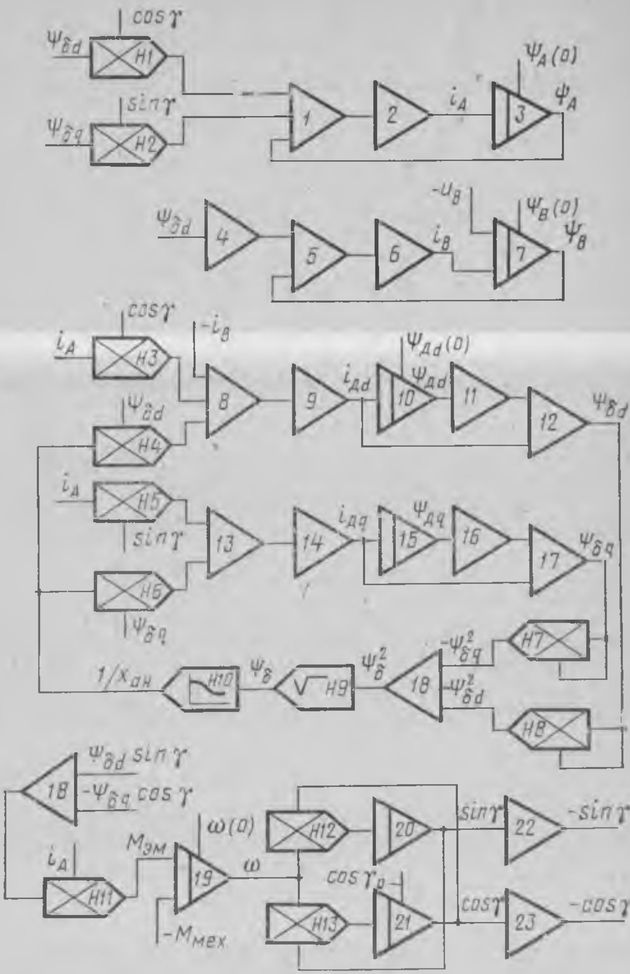


Рис. 4-19

§ 4-6. Моделирование синхронного генератора при выпрямительной нагрузке

Синхронный генератор, работающий на выпрямительную нагрузку, находит все большее применение для получения постоянных токов в схемах зарядки емкостных накопителей энергии, генерирования мощных однополярных импульсов электроэнергии путем внезапного включения нагрузки на время нескольких периодов ЭДС генератора.

настоящее время для исследований режимов работы синхронного генератора при выпрямительной нагрузке широко применяют приближенные методы, использование которых предполагает пренебрежение высшими гармониками токов и напряжений на стороне переменного тока, учет на стороне выпрямленного тока только средних значений за период повторяемости. Не учитываются переходные и сверхпереходные составляющие тока синхронного генератора. Точное определение динамических свойств системы «синхронный генератор—выпрямитель — нагрузка» требует решения полной системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

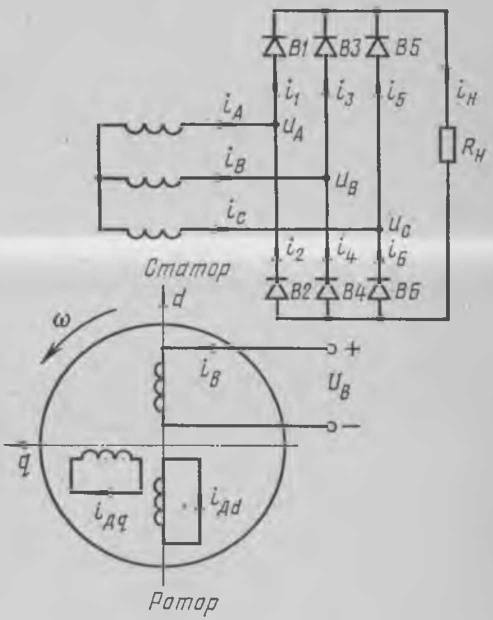
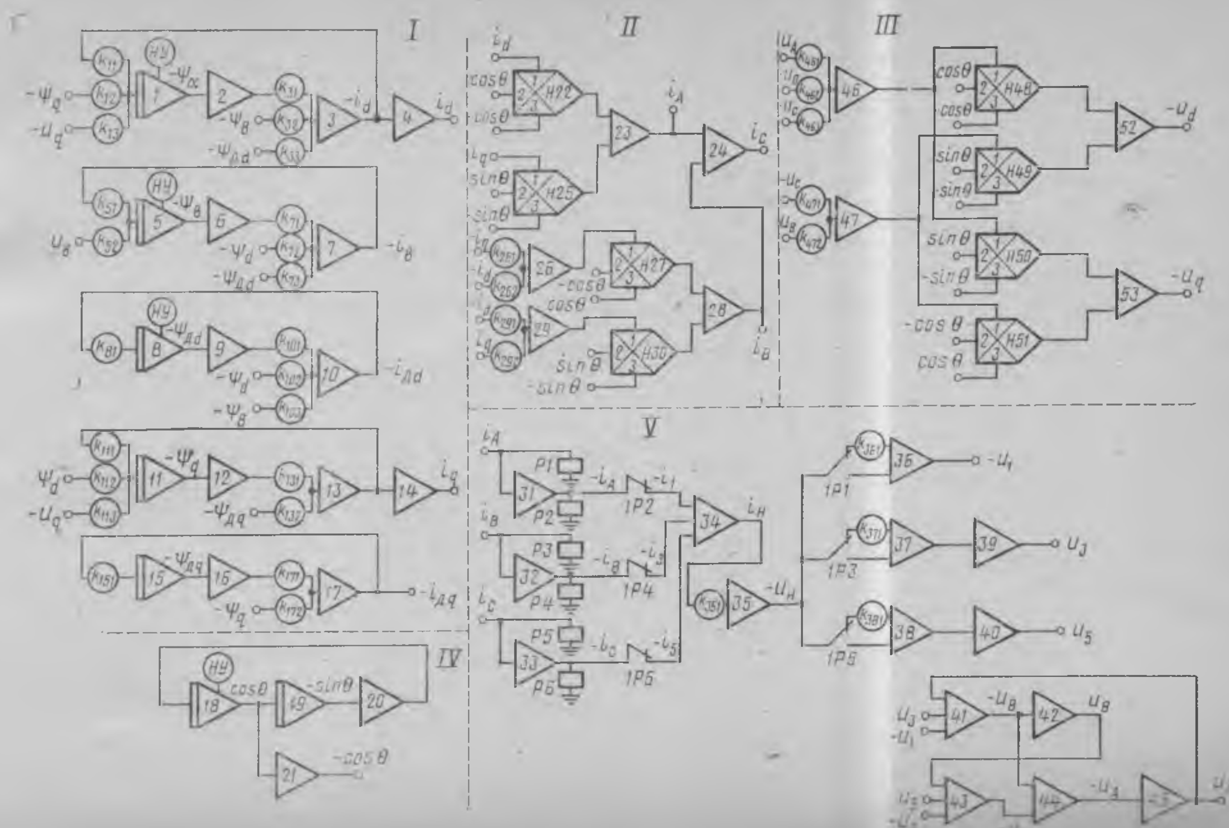


Рис. 4-20

Математическое моделирование синхронного генератора, работающего на выпрямительную нагрузку, позволяет уменьшить число принимаемых допущений. Однако исследование переходных процессов и в данном случае представляет определенные трудности. Основные из них связаны с разработкой модели трехфазного двухполупериодного выпрямителя, так как известные методы моделирования диода приводят к появлению замкнутых контуров, составленных из нечетного числа суммирующих усилителей с большим коэффициентом усиления. Наличие же в схеме решения подобных контуров алгебраического типа вызывает дрейф и помехи при решении.

Вследствие указанных причин широко распространено упрощенное моделирование переходных процессов в синхронном генераторе при выпрямительной нагрузке, заключающееся в замене уравнений реального выпрямителя уравнением его внешней характеристики. Такое представление ведет к пренебрежению высшими гармониками токов и напряжений, обусловленных наличием выпрямителя, и является неприемлемым при решении многих задач. Ниже при моделировании синхронного генератора, работающего на выпрямительную нагрузку, учитываются переходные процессы в выпрямителе. При составлении уравнений выпрямителя диоды приняты идеальными. Схема работы синхронного генератора на нагрузку через выпрямитель представлена на рис. 4-20.


I
II
III
IV
V

Полная система уравнений рассматриваемой схемы состоит из уравнений генератора, выпрямителя и цепи нагрузки. Уравнения синхронного генератора наиболее просто представить в системе координат d, q, 0. При записи их можно учесть насыщение магнитной цепи по путям основного магнитного потока и потоков рассеяния, изменение частоты вращения ротора и т. д., при моделировании синхронного генератора можно воспользоваться методами, изложенными в § 4-3. Поскольку особенности моделирования синхронного генератора, работающего на выпрямительную нагрузку, не связаны с выбором модели синхронного генератора, используем уравнения (4-40) и (4-42), записанные без учета насыщения магнитной цепи.

В результате решения уравнений (4-40) и (4-42) возможно получение токов i_d и i_q синхронного генератора (узел *I*, рис. 4-21). С помощью уравнений линейных преобразований

$$\left.\begin{aligned} i_A &= i_d \cos\gamma - i_q \sin\gamma; \\ i_B &= i_d \cos(\gamma - 2\pi/3) - i_q \sin(\gamma - 2\pi/3); \\ i_C &= -i_A - i_B \end{aligned}\right\} \tag{4-84}$$

найдем фазные токи генератора i_A, i_B, i_C (узел *II*, рис. 4-21).

Задача моделирования выпрямителя сводится к определению по фазным токам генератора i_A, i_B, i_C токов и напряжений в различных элементах выпрямителя и в нагрузке. Учитывая невозможность работы трехфазной двухполупериодной схемы в четырехвентильных режимах при активной нагрузке, т. е. невозможность одновременной работы двух вентилей одной фазы, следует задаться логикой работы выпрямителя с помощью блоков операционных реле АВМ или поляризованных реле. Действительно, ток фазы, например i_A, в зависимости от полярности всегда равен току в одном из вентилей — *1* или *2*. При работе же вентиля *2* падение напряжения на вентиле *1*

$$u_1 = -u_н - u_2. \tag{4-85}$$

Если характеристики идеальных диодов представить в виде

$$r_k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i_k > 0; \\ \infty & \text{при} \quad i_k \leqslant 0, \end{cases} \tag{4-86}$$

где $k=1$, 2, 3, 4, 5, 6, то выражение (4-85) запишется как

$$u_1 = -u_н. \tag{4-87}$$

Аналогичные соотношения можно получить и для остальных токов и напряжений выпрямителя.

Падение напряжения на нагрузке

$$u_н = (i_1 + i_3 + i_5) R_н = i_н R_н. \tag{4-88}$$

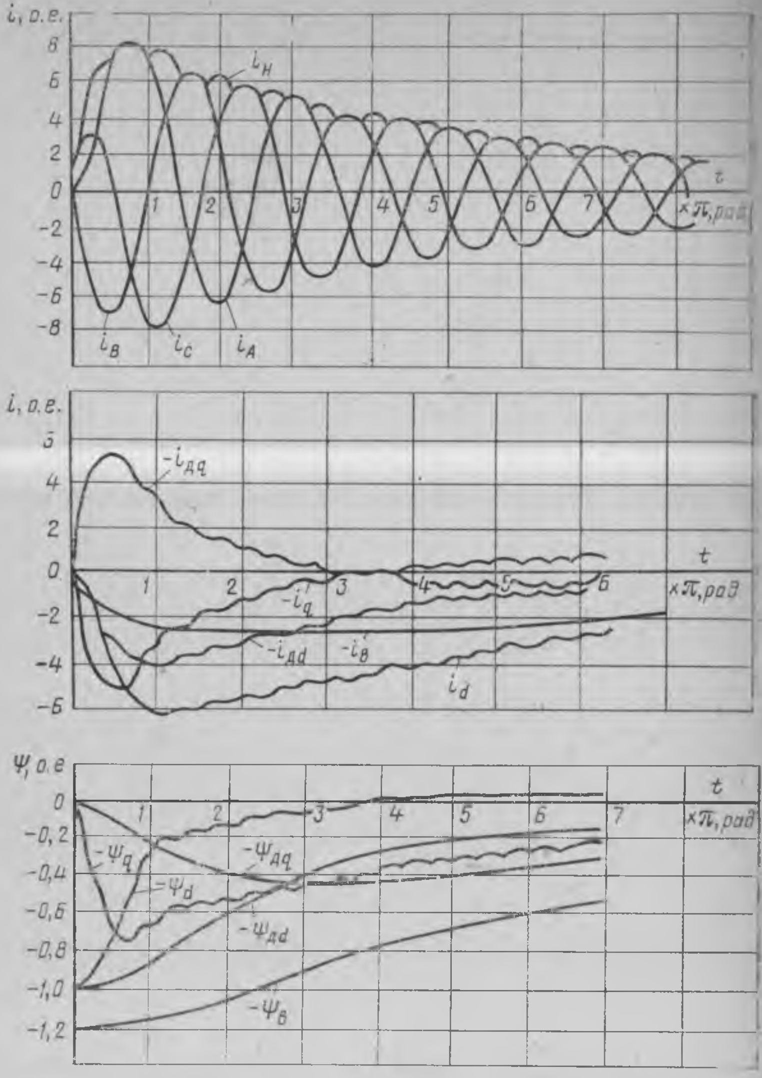


Рис. 4-22

По известным падениям напряжений на вентилях u_1, u_3, u_5 можно найти напряжение на зажимах выпрямителя:

$$\left.\begin{aligned} u_A &= (2u_1 - u_3 - u_5)/3; \\ u_B &= (2u_3 - u_1 - u_5)/3; \\ u_C &= -(u_A + u_B). \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}89)$$

Модель выпрямителя представлена на рис. 4-21, узлом V.

Чтобы определить напряжения u_d и u_q по известным u_A, u_B, воспользуемся уравнениями линейных преобразований:

$$\left.\begin{aligned} u_d &= \frac{2}{3}\left[u_A \cos\gamma + u_B \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + u_C \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right]; \\ u_q &= -\frac{2}{3}\left[u_A \sin\gamma + u_B \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + u_C \sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}90)$$

Схема решения уравнений (4-90) представлена узлом *III* на рис. 4-21.

Необходимые для решения гармонические функции угла γ получаются от генератора синусоидальных колебаний (узел *IV*, рис. 4-21).

В разработанной модели синхронного генератора, работающего на нагрузку, отсутствуют неустойчивые элементы. Математическая модель (рис. 4-21) может быть реализована на машине МН-14.

На рис. 4-22 приведена осциллограмма решения при внезапном включении трехфазного синхронного генератора через неуправляемый выпрямитель на активную нагрузку при $x_d = x_q = 1{,}05$, $x_{\text{д}d} = x_{\text{д}q} = 1{,}05$, $x_{\text{в}} = 1{,}2$, $r = r_{\text{в}} = r_{\text{д}d} = r_{\text{д}q} = 0{,}02$, $x_{ad} = x_{aq} = 1{,}0$, $r_{\text{н}} = 0{,}02$.

Разработанный метод моделирования синхронного генератора, работающего на выпрямительную нагрузку, может быть усовершенствован введением учета насыщения магнитной цепи генератора и изменения частоты вращения ротора, что значительно расширит возможности представленной модели.

§ 4-7. Моделирование схем форсировки возбуждения синхронных генераторов

Для поддержания постоянства напряжения при коротких замыканиях в линии электропередач осуществляют форсировку возбуждения синхронных генераторов. При этом подключают кратковременно обмотку возбуждения к мощному источнику энергии или к статорным обмоткам самого синхронного генератора через выпрямитель. В последнем случае задача исследования переходных процессов имеет определенные трудности, однако представляет значительный интерес, так как к ней могут быть сведены задачи автоматического регулирования напряжения синхронных генераторов путем компаундирования по току статора и т. д.

При составлении уравнений переходных процессов рассматриваемых систем следует учитывать два обстоятельства:

1) уравнения переходных процессов во всех звеньях системы регулирования и в выпрямителе необходимо записывать в неподвижной системе координат;

2) в точках примыкания системы регулирования и выпрямителя к синхронному генератору необходимо составлять уравнения

связи, т. е. уравнения, связывающие мгновенные значения токов и напряжений непреобразованной системы координат с их проекциями на оси системы координат, в которой записаны уравнения генератора. Составление уравнений связи не требуется, если уравнения синхронного генератора записаны в непреобразованной системе координат.

Из-за сложности электромеханических переходных процессов, происходящих в схеме форсировки возбуждения синхронного генератора от его статорных обмоток, аналитическое исследование этого режима затруднительно. Поэтому теоретические работы, посвященные анализу процессов при форсировке основного магнитного потока, выполнены с большими допущениями, а число их крайне ограничено. Математическое моделирование с использованием АВМ позволяет успешно решать эти задачи.

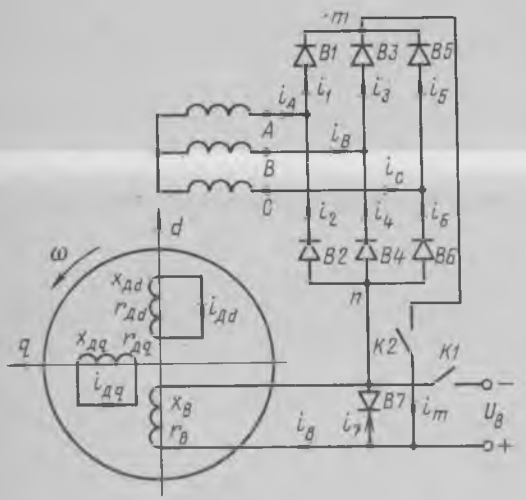


Рис. 4-23

Для увеличения основного магнитного потока возможно применение схемы форсировки возбуждения синхронного генератора от трех основных фаз через понижающий трансформатор и неуправляемый трехфазный двухполупериодный выпрямитель (рис. 4-23) или от вспомогательной трехфазной обмотки, которая подключается непосредственно к выпрямителю (для упрощения принципиальной схемы понижающий трансформатор на рисунке не показан).

Для составления модели системы «трехфазный синхронный генератор — выпрямитель — обмотка возбуждения» одним из наиболее удобных методов записи уравнений синхронного генератора является их запись в осях d, q, 0, так как позволяет освободиться от переменных коэффициентов.

Дифференциальные уравнения трехфазного генератора, записанные с учетом насыщения магнитной цепи и изменения частоты вращения ротора, могут быть представлены системой уравнений (4-40) и (4-57), в которых уравнение равновесия напряжений обмоток возбуждения имеет вид:

$$d\Psi_в/d\tau = u_{mn} - r_в i_в, \tag{4-91}$$

где u_{mn} — выходное напряжение выпрямительного моста.

Уравнение движения ротора с учетом потерь в стали

$$d\omega/d\tau = H_j^{-1}\,[M_{\text{мех}} + (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) - P_0\Psi_\delta^2/(\Psi_{\delta 0}^2\omega)], \qquad (4\text{-}92)$$

где P_0 — потери в стали при $\Psi_\delta = \Psi_{\delta 0}$.

Структурная схема модели синхронного генератора, составленная по уравнениям (4-40), (4-57), (4-91) и (4-92), показана на рис. 4-24. Для связи математической модели генератора с моделью

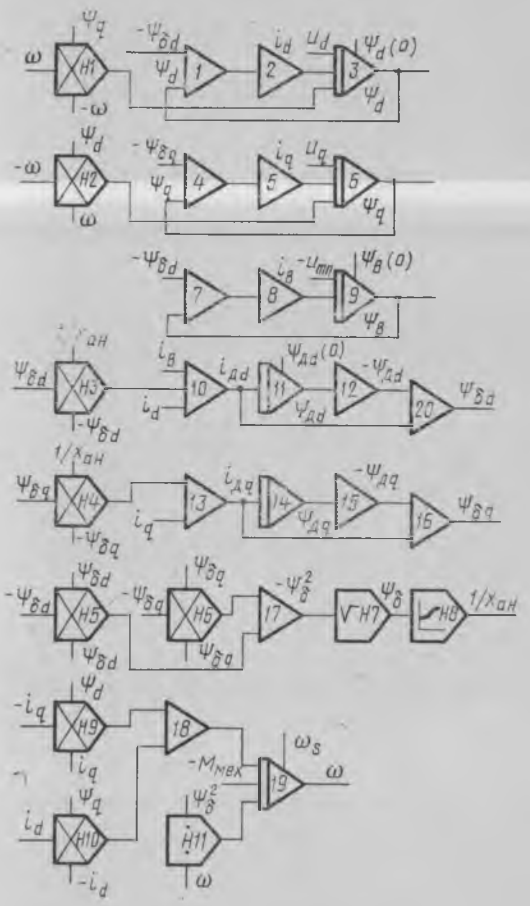


Рис. 4-24

выпрямительного моста необходимо перейти от токов i_d, i_q к фазным токам i_A, i_B, i_C, а также от фазных напряжений u_A, u_B, u_C к их продольной и поперечной составляющим u_d, u_q. Эти линейные преобразования осуществляются при помощи соотношений (4-84) и (4-90), преобразованных к такому виду:

$$\left.\begin{aligned} i_A &= i_d \cos\gamma - i_q \sin\gamma; \\ i_B &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i_q - \frac{1}{2} i_d\right) \cos\gamma + \left(\frac{1}{2} i_q + \frac{\sqrt{3}}{2} i_d\right) \sin\gamma; \\ i_C &= -i_A - i_B; \end{aligned}\right| \tag{4-93}$$

$$\left.\begin{aligned} u_d &= \frac{1}{3}(2u_A - u_B - u_C)\cos\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}(u_B - u_C)\sin\gamma; \\ u_q &= \frac{\sqrt{3}}{2}(u_B - u_C)\cos\gamma - \frac{1}{3}(2u_A - u_B - u_C)\sin\gamma. \end{aligned}\right| \tag{4-94}$$

Математическая модель уравнений (4-93) и (4-94) приведена на рис. 4-25.

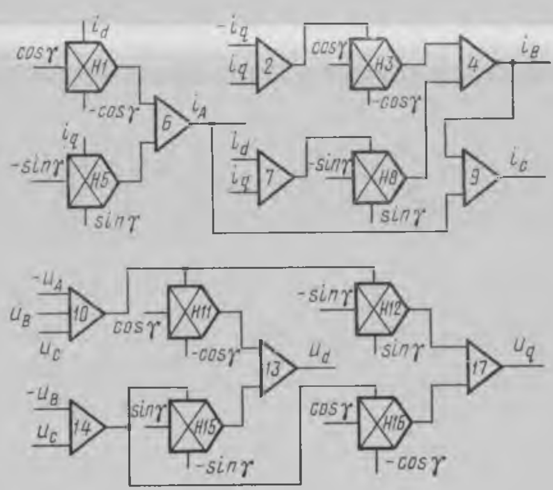


Рис. 4-25

Математическое моделирование выпрямителя сводится к нахождению токов и напряжений в различных элементах моста и нагрузке по полученным фазным токам i_A, i_B, i_C. Чтобы избежать операции дифференцирования, выпрямленное напряжение моста u_{mn}, прикладываемое к обмотке возбуждения (см. рис. 4-23), определим как падение напряжения на демпфирующем диоде $Д7$, включенном в обратном направлении:

$$u_{mn} = r_7 i_7, \tag{4-95}$$

где ток диода

$$i_7 = i_m - i_n. \tag{4-96}$$

Ток, протекающий по обмотке возбуждения, можно определить, решая уравнение равновесия напряжений контуров генератора.

Выпрямленный ток $i_н$ для любого момента времени представляет собой сумму токов одной из групп вентилей моста:

$$i_m = i_1 + i_3 + i_5. \tag{4-97}$$

Задаваясь логикой работы выпрямителя (см. § 4-6) и учитывая, что при отрицательных полуволнах токов в вентилях напряжения на выходах моста

$$u_{mn} = -u_1 = -r_1 i_1; \quad u_{mn} = -u_3 = -r_3 i_3; \quad u_{mn} = -u_5 = -r_5 i_5, \tag{4-98}$$

можно построить модель выпрямительного моста.

По известным значениям напряжений на вентилях u_1, u_3, u_5 определяются фазные напряжения на зажимах выпрямителя u_A, u_B, u_C по (4-89), а с помощью уравнений (4-94) — их составляющие по осям d и q — u_d, u_q.

Использование уравнений трехфазного синхронного генератора в осях d, q, 0 обусловливает необходимость применения блоков умножения для реализации периодических коэффициентов, содержащихся в уравнениях преобразования.

При моделировании синхронного генератора можно воспользоваться и уравнениями с периодическими коэффициентами, записанными в непреобразованной системе координат. В этом случае сложность модели не возрастает и, кроме того, появляется дополнительное ее достоинство, обусловленное тем, что в качестве переменных фигурируют не некоторые фиктивные величины в виде проекций реальных переменных на оси d и q, а сами реальные переменные.

Чтобы получить устойчивую универсальную математическую модель трехфазного синхронного генератора в фазовых осях, позволяющую достаточно просто учитывать насыщение стали по основному магнитному пути и по путям потоков рассеяния, необходимо потокосцепления фазных обмоток статора и ротора представить в виде потокосцеплений рассеяния соответствующей обмотки и проекций потокосцепления в воздушном зазоре на продольную и поперечную оси ротора.

Уравнения равновесия напряжений генератора в фазовых осях имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &d\Psi_A/d\tau = -u_A - r_A i_A; \quad d\Psi_B/d\tau = -u_B - r_B i_B; \\ &d\Psi_C/d\tau = -u_C - r_C i_C; \\ &d\Psi_в/d\tau = u_{mn} - r_в i_в; \quad d\Psi_{дd}/d\tau = -r_{дd} i_{дd}; \\ &d\Psi_{дq}/d\tau = -r_{дq} i_{дq}, \end{aligned}\right\} \tag{4-99}$$

где потокосцепления запишутся уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_A = x_{\sigma A} i_A + \Psi_{\delta d}\cos\gamma - \Psi_{\delta q}\sin\gamma;\\
&\Psi_B = x_{\sigma B} i_B + \Psi_{\delta d}\cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) - \Psi_{\delta q}\sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right);\\
&\Psi_C = x_{\sigma C} i_C + \Psi_{\delta d}\cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) - \Psi_{\delta q}\sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right);\\
&\Psi_{\text{в}} = x_{\sigma\text{в}} i_{\text{в}} + \Psi_{\delta d};\quad \Psi_{\text{д}d} = x_{\sigma\text{д}d} i_{\text{д}d} + \Psi_{\delta d};\quad \Psi_{\text{д}q} = x_{\sigma\text{д}q} i_{\text{д}q} + \Psi_{\delta q}.
\end{aligned}\right\} \tag{4-100}$$

Потокосцепления в воздушном зазоре по продольной и поперечной осям $\Psi_{\delta d}$ и $\Psi_{\delta q}$ представятся как

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_{\delta d} = x_{a\text{н}}\left[i_{\text{в}} + i_{\text{д}d} + i_A\cos\gamma + i_B\cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + i_C\cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right];\\
&\Psi_{\delta q} = x_{a\text{н}}\left[i_{\text{д}q} + i_A\sin\gamma + i_B\sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + i_C\sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4-101}$$

Для получения устойчивой модели генератора необходимо в систему (4-99) подставить токи, определенные через потокосцепления из систем (4-100) и (4-101):

$$\left.\begin{aligned}
&i_A = [\Psi_A - \Psi_{\delta d}\cos\gamma + \Psi_{\delta q}\sin\gamma]/x_{\sigma A};\\
&i_B = [\Psi_B - \Psi_{\delta d}\cos(\gamma - 2\pi/3) + \Psi_{\delta q}\sin(\gamma - 2\pi/3)]/x_{\sigma B};\\
&i_C = [\Psi_C - \Psi_{\delta d}\cos(\gamma + 2\pi/3) + \Psi_{\delta q}\sin(\gamma + 2\pi/3)]/x_{\sigma C};\\
&i_{\text{в}} = [\Psi_{\text{в}} - \Psi_{\delta d}]/x_{\sigma\text{в}};\\
&i_{\text{д}d} = [\Psi_{\text{д}d} - \Psi_{\delta d}]/x_{\sigma\text{д}d};\\
&i_{\text{д}q} = [\Psi_{\text{д}q} - \Psi_{\delta q}]/x_{\sigma\text{д}q}.
\end{aligned}\right\} \tag{4-102}$$

Из двух последних уравнений системы (4-102) найдем

$$\Psi_{\delta d} = \Psi_{\text{д}d} - x_{\sigma\text{д}d} i_{\text{д}d};\quad \Psi_{\delta d} = \Psi_{\text{д}q} - x_{\sigma\text{д}q} i_{\text{д}q}. \tag{4-103}$$

Насыщенное значение $1/x_{a\text{н}}$ определим из характеристики холостого хода в соответствии с выражением

$$1/x_{a\text{н}} = f(\Psi_\delta) = f\left(\sqrt{\Psi_{\delta d}^2 + \Psi_{\delta q}^2}\right). \tag{4-104}$$

Уравнение движения ротора в фазовых координатах:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{H_j}\Big\{M_{\text{мех}} &+ \Psi_{\delta d}\left[i_A\sin\gamma + i_B\sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \right.\\
&\left. + i_C\sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right] + \Psi_{\delta q}\left[i_A\cos\gamma + i_B\cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \right.\\
&\left. + i_C\cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\right]\Big\}.
\end{aligned} \tag{4-105}$$

Уравнения (4-99) — (4-105) являются уравнениями трехфазной симметричной синхронной машины, работающей на трехфазную симметричную нагрузку. При работе трехфазного синхронного генератора с симметричными обмотками на несимметричную нагрузку (в данном случае — выпрямительная нагрузка) точка соединения фаз обмотки статора и центральная точка эквивалентной звезды нагрузки неэквипотенциальны, что необходимо учесть при записи уравнений равновесия напряжений статорных контуров. С учетом этой особенности уравнения равновесия напряжений статора можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} d\Psi_{BC}/d\tau &= -r_B i_B + r_C i_C - u_B + u_C;\\ d\Psi_{CA}/d\tau &= -r_C i_C + r_A i_A - u_C + u_A,\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}106)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{BC} = \Psi_B - \Psi_C = x_{\sigma B} i_B - x_{\sigma C} i_C + \Psi_{\delta d}\cos(\gamma - 2\pi/3) -\\ &- \Psi_{\delta q}\sin(\gamma - 2\pi/3) - \Psi_{\delta d}\cos(\gamma + 2\pi/3) + \Psi_{\delta q}\sin(\gamma + 2\pi/3);\\ &\Psi_{CA} = \Psi_C - \Psi_A = x_{\sigma C} i_C - x_{\sigma A} i_A + \Psi_{\delta d}\cos(\gamma + 2\pi/3) -\\ &- \Psi_{\delta q}\sin(\gamma + 2\pi/3) - \Psi_{\delta d}\cos\gamma + \Psi_{\delta q}\sin\gamma.\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}107)$$

Вводя обозначения

$$i_{BC} = i_B - i_C; \quad i_{CA} = i_C - i_A, \qquad (4\text{-}108)$$

принимая $x_{\sigma A} = x_{\sigma B} = x_{\sigma C} = x_\sigma$ и подставляя (4-100) в (4-107), после некоторых преобразований получаем

$$\left.\begin{aligned} &i_{BC} = [\Psi_{BC} - \sqrt{3}(\Psi_{\delta d}\sin\gamma + \Psi_{\delta q}\cos\gamma)]/x_\sigma;\\ &i_{CA} = \frac{1}{x_\sigma}\left[\Psi_{CA} + \Psi_{\delta d}\left(\frac{3}{2}\cos\gamma + \frac{3}{2}\sin\gamma\right) -\right.\\ &\left. - \Psi_{\delta q}\left(\frac{3}{2}\sin\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma\right)\right].\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}109)$$

Для нахождения фазных токов i_A, i_B, i_C воспользуемся кроме уравнения (4-100) выражением

$$i_A + i_B + i_C = 0. \qquad (4\text{-}110)$$

Уравнения для напряжений, потокосцеплений и токов роторных контуров остаются без изменений и определяются из систем (4-99) и (4-102).

Уравнения выпрямительного моста и схема его модели остаются без изменения. На рис. 4-26 представлена математическая модель трехфазного синхронного генератора, составленная по уравнениям в непреобразованной системе координат. Из сравнения ее со схемой моделирования трехфазного синхронного генератора по уравнениям, записанным в осях d, q, видно, что обе схемы равноценны по использованному количеству решающих элементов.

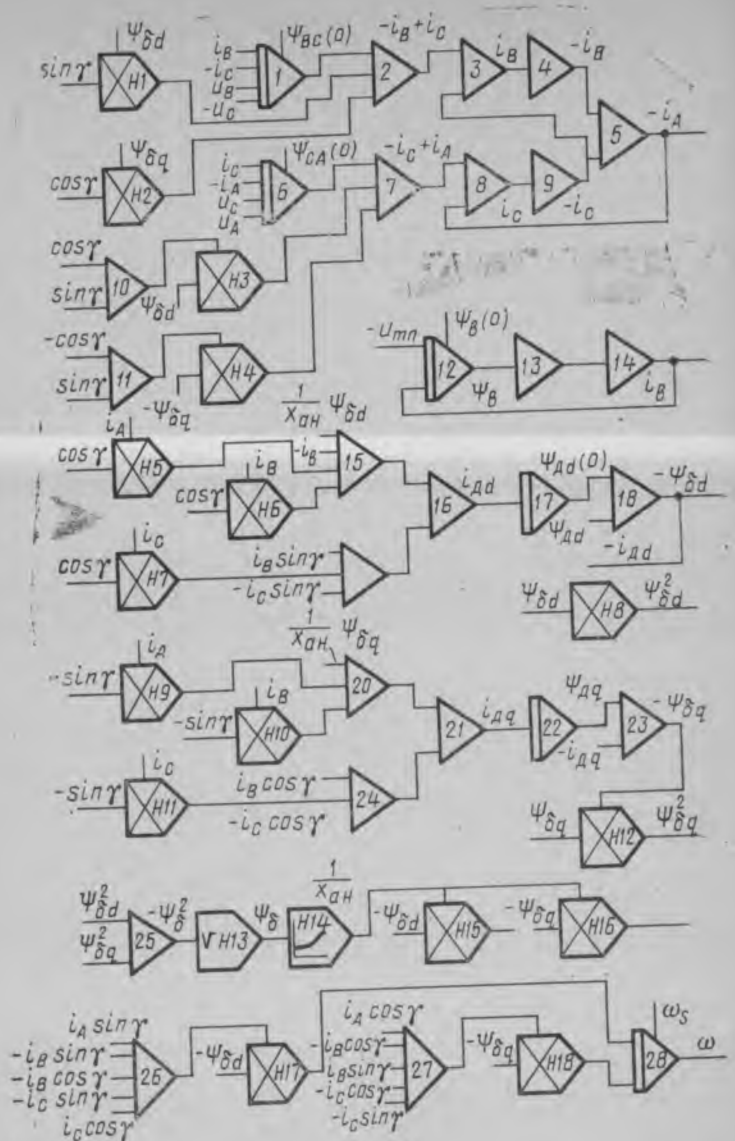


Рис. 4-26

При проведении исследований самовозбуждения и форсировки возбуждения обе рассматриваемые модели генератора работали надежно. На рис. 4-27, *а, б, в* приведены осциллограммы фазных токов i_A, i_B, i_C, тока в обмотке возбуждения $i_в$ и потокосцепления в воздушном зазоре Ψ_δ при форсировке потока. Параметры синхронной машины (о. е.): $x_d=1,05$; $x_в=1,2$; $x_{дd}=x_{дq}=1,02$; $r_A=r_B=r_C=0,005$; $r_{дd}=r_{дq}=r_в=0,002$; $H_j=\infty$.

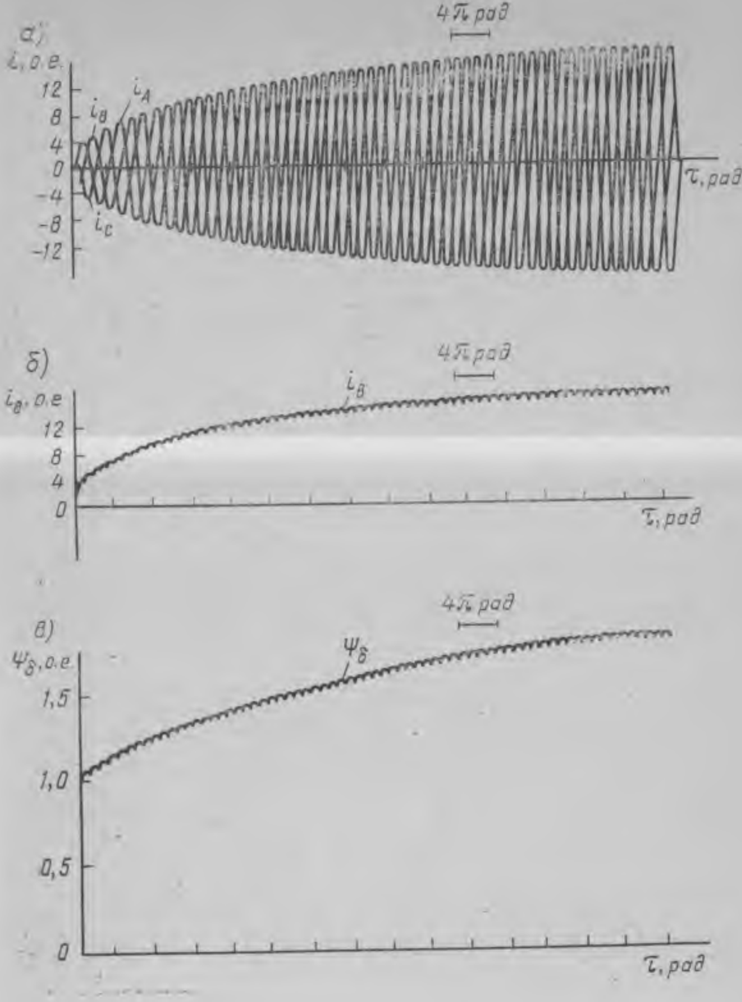


Рис. 4-27

Рассматриваемые модели позволяют проводить исследования синхронного генератора при работе его на нагрузку через неуправляемый выпрямитель. Для этого в схему решения необходимо ввести дополнительные решающие элементы, моделирующие уравнение нагрузки:

$$u_{mn} = i_7 r_7 = i_{н} r_{н} + L_{н} \frac{di_{н}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{н} dt, \qquad (4\text{-}111)$$

а напряжение на обмотке $u_в$ принять известным. При таком способе моделирования, когда напряжение на нагрузке определяется через падение напряжения на некотором бесконечно большом сопротивлении r_7, в схеме решения при любом характере нагрузки отсутствуют неустойчивые элементы.

На рис. 4-28 представлен характер изменения фазного тока $i_А$, тока нагрузки $i_н$ и тока ротора $i_в$ при внезапном включении синхронного генератора через выпрямительный мост на активную нагрузку для двух случаев: а) $r_н=0,16$; б) $r_н=0,48$.

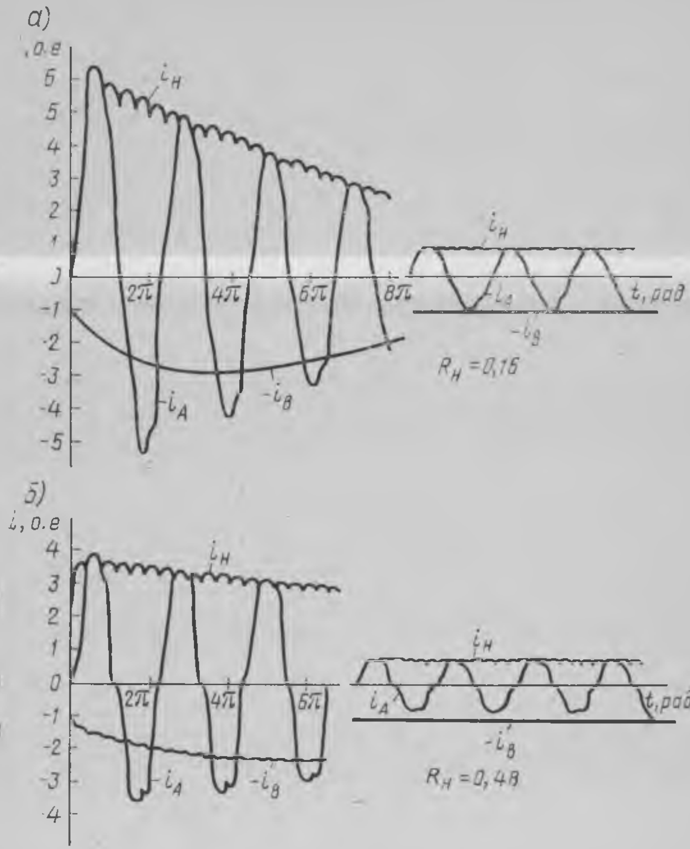


Рис. 4-28

Несмотря на одинаковую сложность обеих схем моделирования синхронного генератора, моделирование по уравнениям в непреобразованной системе координат предпочтительнее, так как позволяет учесть, в случае необходимости, и несимметрию фаз статора. При моделировании по уравнениям в непреобразованной системе координат явнополюсных синхронных генераторов возникают дополнительные трудности, обусловленные наличием периодических коэффициентов взаимной индуктивности между фазными обмотками статора. В этом случае предпочтительно моделирование синхронных генераторов по уравнениям в осях d, q, 0.

§ 4-8. Моделирование синхронного генератора, работающего на выпрямительную нагрузку, представлением вентилей их физическими аналогами

При моделировании сложных машинно-вентильных систем, например синхронного генератора, работающего совместно с непосредственным преобразователем частоты, синхронного генератора, работающего на нагрузку через трехфазную нулевую схему выпрямления с объединенными обмотками питания и т. д., возникают значительные трудности из-за сложности расчетной схемы (отсутствия нулевой точки источника питания, наличия большого количества управляемых и неуправляемых вентилей и т. д.).

Моделирование вентилей с применением операционных реле для задания логики работы схемы выпрямления приводит к необходимости использования большого количества решающих элементов и электронных следящих систем для определения потенциалов в узловых точках схемы. Кроме того, возникают трудности обеспечения устойчивости и точности решения. Так, например, для моделирования только трехфазной нулевой схемы выпрямления с объединенными обмотками питания требуется около 75 решающих усилителей и 9 электронных следящих систем.

Существенное упрощение моделирования может быть достигнуто при представлении вентилей их физическими аналогами. Рассматриваемая методика, совмещающая принципы математического и физического моделирования, обеспечивает хорошую надежность и малую погрешность решения.

При физическом моделировании вентильного преобразователя модельный вентиль должен отражать работу реального вентиля, что обеспечивается выбором масштаба напряжения. Параметры физических аналогов вентилей должны быть согласованы с параметрами решающих усилителей АВМ: напряжения должны изменяться в пределах ± 100 В, токи не должны превышать 10 мА. При моделировании неуправляемого вентильного преобразователя в качестве аналогов можно использовать, например, накальные и полупроводниковые вентили. При моделировании управляемого вентильного преобразователя логику его работы можно обеспечить с помощью релейных или электронных ключевых схем, а также маломощных тиристоров. При этом примыкающие к вентильному преобразователю индуктивности, емкости, активные сопротивления и синхронный генератор моделируют по обычным правилам.

При построении структурных схем решения рассматриваемого комбинированного моделирования используют два способа:

1) преобразование напряжений математической модели, пропорциональных реальным токам, в соответствующие токи физической модели вентильного преобразователя; осуществляется с помощью элементов типа «источник тока» (ИТ), а их обратное преобразование — с помощью элементов «преобразователь тока» (ПТ);

2) связь между аналоговой и физической частями модели; производится с использованием только элементов ИТ.

Особенности применяемых форм записи дифференциальных уравнений синхронных машин, а также методов их математического моделирования делают наиболее целесообразным использование второго способа.

Необходимое число ИТ определяется числом выводов вентильного преобразователя. Например, при моделировании мостового трехфазного неуправляемого выпрямителя необходимо пять *ИТ* (рис. 4-29). Токи выводов преобразователя i_A, i_B, i_C, I_d, $-I_d$ в виде напряжений, пропорциональных реальным токам и образованных в аналоговой части модели, подаются на *ИТ1—ИТ5*. На выходах *ИТ* образуются потенциалы u_A, u_B, u_C, u_k, u_a, которые могут быть измерены на выходах фазоинверторов *ИТ* и использованы для моделирования соответствующих дифференциальных уравнений цепей генератора и нагрузки. Напряжения фаз и нагрузки при этом можно измерить на выходах усилителей, а токи вентилей — путем их непосредственного осциллографирования с шунтов, включенных последовательно с моделью вентиля.

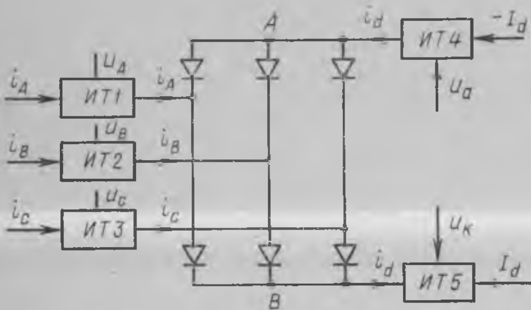


Рис. 4-29

Рассматриваемые способы позволяют осуществить физическое моделирование примыкающих к вентилям преобразователя сопротивлений утечек, паразитных емкостей, нагрузки и т. д. При физическом моделировании нагрузки (рис. 4-30) необходимое число ИТ сокращается.

Применение управляемых вентилей-аналогов, как уже отмечалось, затруднительно из-за отсутствия полупроводниковых приборов, хорошо сочетающихся с АВМ. Построение модели управляемой схемы выпрямления с релейными элементами требует применения больших масштабов времени ($m_t > 100$) во избежание значительных погрешностей решения, что в ряде случаев ограничивает возможности использования метода.

Рассмотрим использование метода для моделирования трехфазного синхронного генератора, работающего на активную нагрузку через управляемый мостовой выпрямитель. В результате моделирования синхронного генератора по полной системе дифференциальных уравнений, описывающих электромеханический переходный процесс, должны быть получены токи фаз синхронного генератора в виде напряжений на выходах соответствующих решающих элементов математической модели. Для моделирования синхронного генератора могут быть использованы различные формы записи его уравнений, наиболее рациональную из которых следует выбирать исходя из приведенных рекомендаций.

При использовании уравнений синхронного генератора в осях d, q, 0 структурная схема математической модели рассматриваемой системы приведена на рис. 4-31. Для преобразования напряжений математической модели синхронного генератора, пропорциональных реальным токам, применены источники тока *ИТ1*—*ИТ3*. При этом используется метод физического моделирования нагрузки $R_н$, что позволяет уменьшить необходимое число *ИТ*. Для выделения в схеме напряжений, пропорциональных току нагрузки $i_н$ и падению напряжения на нагрузке $u_н$, применена специальная схема, составленная из двух суммирующих усилителей, моделирующих уравнения

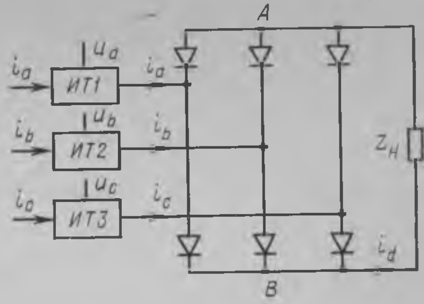


Рис. 4-30

$$i_н = i_1 + i_3 + i_5; \quad u_н = R_н i_н. \tag{4-112}$$

Использование осей d, q, 0 для записи уравнений синхронного генератора вызывает необходимость применения структурных схем преобразования координат d, q, $0 \to A$, B, C и A, $B, C \to d$, q, 0.

Аналогичным методом моделирования исследуются процессы зарядки емкостного накопителя энергии от трехфазного синхронного генератора через неуправляемый мостовой выпрямитель. Опыт эксплуатации рассматриваемых моделей подтверждает целесообразность их применения при анализе сложных машинно-вентильных систем.

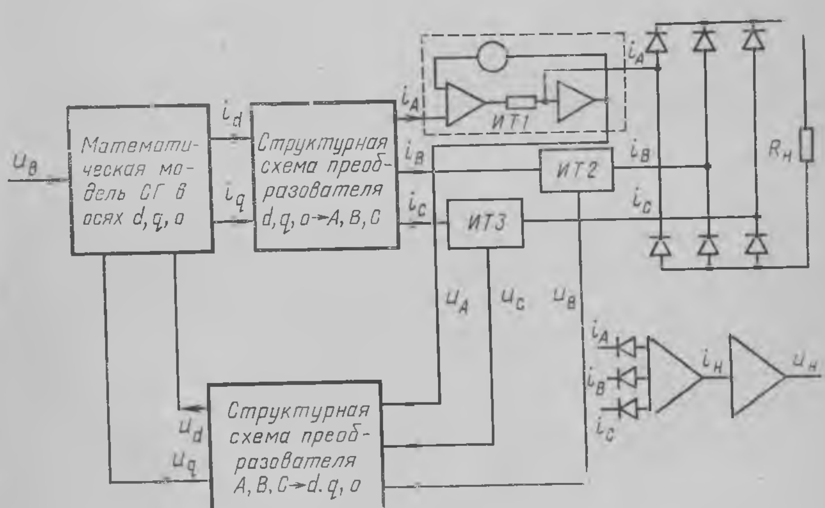


Рис. 4-31

ГЛАВА V
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСФОРМАТОРОВ И МАШИН ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 5-1. Моделирование магнитно-связанных контуров

Магнитно-связанный контур является одним из основных элементов многих электрических машин и аппаратов. Исследование трансформаторов, электромагнитных механизмов, цепей возбуждения электрических машин, а также решение задач учета вихревых токов, возникающих в магнитопроводах различных аппаратов, в ряде случаев сводится к изучению процессов в магнитно-связанных контурах.

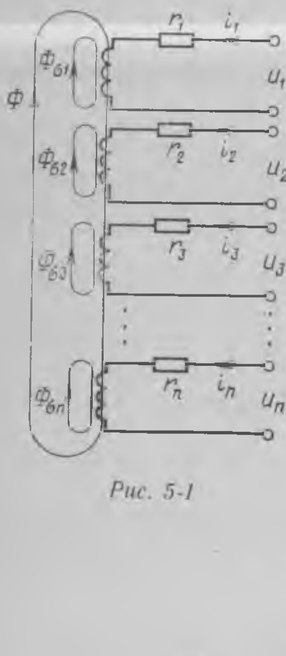


Рис. 5-1

Рассмотрим наиболее общий случай, когда на одном сердечнике расположены n контуров (рис. 5-1). Каждый из контуров связан общим потоком Ф и собственным потоком рассеяния $\Phi_{\sigma 1}$, $\Phi_{\sigma 2}$, ..., $\Phi_{\sigma n}$. К цепи каждого из контуров приложено внешнее напряжение u_1, u_2, ..., u_n. Частные случаи, когда, например, часть контуров короткозамкнута, могут быть получены при $u_n = 0$.

Дифференциальные уравнения переходных процессов для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= i_1 r_1 + p\Psi_1; \\ u_2 &= i_2 r_2 + p\Psi_2; \\ &\dots\dots\dots \\ u_n &= i_n r_n + p\Psi_n, \end{aligned}\right| \qquad (5\text{-}1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= L_{11} i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 + \dots + M_{1n} i_n; \\ \Psi_2 &= M_{21} i_1 + L_{22} i_2 + M_{23} i_3 + \dots + M_{2n} i_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Psi_n &= M_{n1} i_1 + M_{n2} i_2 + M_{n3} i_3 + \dots + L_{nn} i_n. \end{aligned}\right| \qquad (5\text{-}2)$$

Здесь L_{11}, L_{22}, ..., L_{nn} — собственные индуктивности контуров; M_{1n}, M_{2n}, ..., M_{nn} — взаимные индуктивности контуров

Приводя параметры всех обмоток к одному числу витков, получаем $M_{12}=M_{13}=\ldots=M_{1n}=M$.

Учитывая, что $L_{11}=L_{\sigma1}+M$, $L_{22}=L_{\sigma2}+M$, ..., $L_{nn}=L_{\sigma n}+M$, уравнения (5-2) можно записать иначе:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_1&=L_{\sigma1}i_1+M(i_1+i_2+i_3+\ldots+i_n);\\ \Psi_2&=L_{\sigma2}i_2+M(i_1+i_2+i_3+\ldots+i_n);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Psi_n&=L_{\sigma n}i_n+M(i_1+i_2+i_3+\ldots+i_n).\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}3)$$

Системы уравнений (5-1) и (5-3) могут быть решены на АВМ несколькими способами.

1. Разрешение уравнений относительно производных. При этом в равной степени можно использовать как дифференциальные уравнения (5-1), так и преобразованные уравнения, полученные путем подстановки (5-3) в (5-1).

Рассмотрим применение данного способа для моделирования двух магнитно-связанных контуров, переходные процессы в которых описываются уравнениями:

$$u_1=i_1r_1+p\Psi_1;\quad 0=i_2r_2+p\Psi_2, \quad (5\text{-}4)$$

где

$$\Psi_1=(L_{\sigma1}+M)\,i_1+Mi_2;\quad \Psi_2=(L_{\sigma2}+M)\,i_2+Mi_1. \quad (5\text{-}5)$$

Структурная схема решения уравнений (5-4) и (5-5) приведена на рис. 5-2. Принципиальных трудностей такой способ моделирования не вызывает. Однако, как видно из рисунка, в схеме реше-

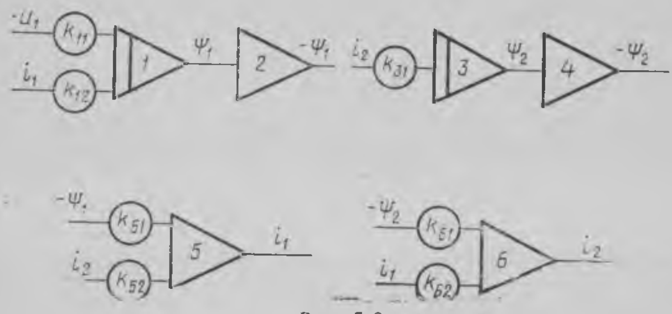


Рис. 5-2

ния имеются контуры, состоящие из четного числа суммирующих усилителей. Коэффициент передачи по контуру «усилитель *5* — усилитель *6*»

$$k=k_{52}k_{62}=\frac{M}{L_{\sigma1}+M}\cdot\frac{M}{L_{\sigma2}+M}<1.$$

Однако при малых значениях индуктивностей рассеяния может возникнуть неустойчивость модели, что является недостатком метода. Учет насыщения магнитной цепи также затруднителен.

2. Использование схемы замещения для потокосцеплений. Задачу можно решить физически более наглядно, если воспользоваться схемой замещения для потокосцеплений, составленной согласно системе уравнений (5-3) (рис. 5-3). В этой схеме активные сопротивления соответствуют индуктивностям и взаимным индуктивностям реальной цепи, а приложенные к схеме напряжения — потокосцеплениям. Потокосцепления, полученные в результате решения уравнений (5-1), подводятся к схеме замещения, которая служит нагрузкой усилителей. При этом в ветвях схемы проходят токи, пропорциональные реальным.

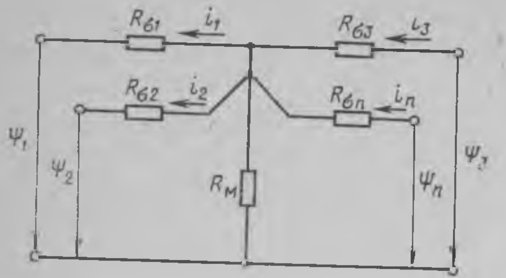


Рис. 5-3

Они могут измеряться и осциллографироваться. Однако использовать их для ввода в другие элементы схемы модели непосредственно нельзя. Поэтому их измеряют как падения напряжения на активных сопротивлениях, замещающих индуктивности рассеяния.

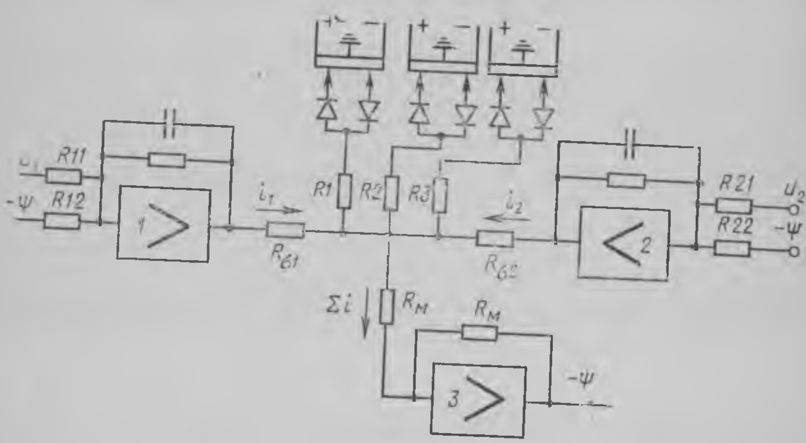


Рис. 5-4

Целесообразно сопротивление ветви намагничивания (рис. 5-4) рассматривать как входное сопротивление усилителя *3*, имеющего равное по величине сопротивление обратной связи. Тогда ток любой ветви будет пропорционален сумме напряжений на выходе усилителя и напряжению соответствующего интегратора. Чтобы ввести ток на вход каждого интегратора с одинаковыми коэффициентами усиления нужно подать напряжения с выхода соответствующего интегратора и с усилителя ветви намагничивания. Коэффициент усиления в данном случае будет зависеть от величины активного сопротивления обмотки. При использовании для моделирования потокосцеплений схем, состоящих из активных сопротивлений, легко учесть насыщение по пути главного потока, например, применяя нелинейное сопротивление ветви намагничивания. Однако в данном случае возникли бы затруднения в измерении токов. Проще всего учесть насыщение, если основное сопротивление $R_м$ выбрать на прямолинейном участке характеристики намагничивания трансформатора, а сопротивления R_1, R_2, R_3 и соответствующие опорные напряжения взять такими, чтобы апроксимировать нелинейную часть характеристики (рис. 5-5).

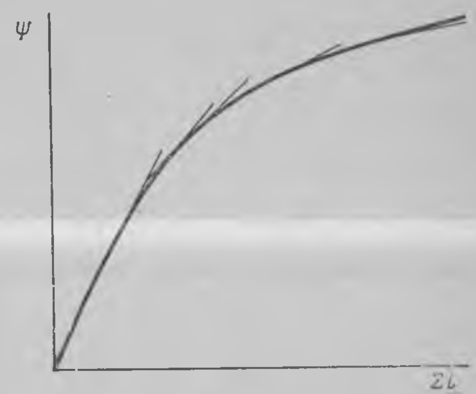


Рис. 5-5

Этот способ, основанный на физическом моделировании потокосцеплений, требует количества усилителей, только на единицу большего числа обмоток, поэтому его целесообразно использовать при большом числе магнитно-связанных контуров.

3. Преобразование исходных уравнений таким образом, чтобы в качестве параметров в них использовались постоянные времени и другие физические величины, которые были бы достаточно наглядными и доступными для непосредственных измерений.

Для достижения этого применяют структурный метод моделирования, при котором модель строится из звеньев, имеющих самостоятельный физический смысл. Этот метод является наиболее целесообразным, он позволяет учесть насыщение как по пути основного магнитного потока, так и по путям потоков рассеяния.

4. Разрешение уравнений относительно производных и учет нелинейности кривой намагничивания материала. Уравнения (5-3) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= L_{\sigma 1} i_1 + \Psi_{\mu н}; \\ \Psi_2 &= L_{\sigma 2} i_2 + \Psi_{\mu н}; \\ & \dots\dots\dots\dots \\ \Psi_n &= L_{\sigma n} i_n + \Psi_{\mu н}, \end{aligned}\right\} \tag{5-6}$$

где

$$\Psi_{\mu н} = x_{mн}(i_1 + i_2 + \dots + i_n);$$

$$x_{mн} = f(\Psi_{\mu н}).$$

Таким образом, приведенные уравнения (5-6) совместно с уравнениями (5-1) могут рассматриваться как уравнения переходных процессов магнитно-связанных контуров при учете насыщения по пути основного магнитного потока. Аналогично можно учесть насыщение и по путям потоков рассеяния. Схема модели, составленная для системы уравнений (5-1) и (5-6), приведена на рис. 5-6. Зави-

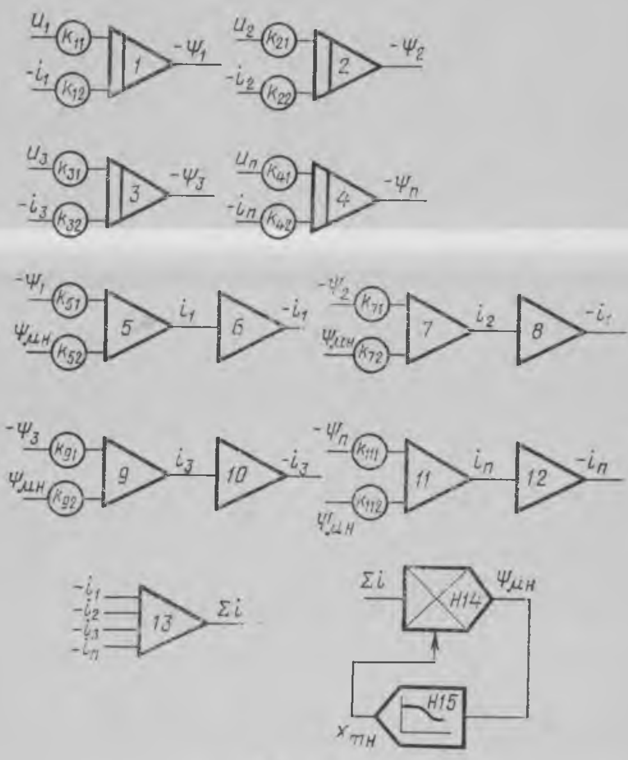


Рис. 5-6

симость $x_{mн}=f(\Psi_{\mu н})$, определяющая насыщение, находится по кривой намагничивания и набирается на блоке нелинейности.

Решить рассматриваемую задачу можно и другими модифицированными способами. Приведенные же здесь способы моделирования могут быть использованы для анализа переходных процессов многофазных трансформаторов.

§ 5-2. Моделирование трехфазного силового трансформатора

Необходимость математического моделирования трехфазных силовых трансформаторов возникает, как правило, при исследовании их работы в энергетических системах.

Как следует из анализа возникающих на практике задач, переходные процессы, происходящие в трансформаторах, часто рассматриваются как в натуральной трехфазной системе координат, так и в преобразованной. Учет нелинейности ветви намагничивания является при этом обязательным, так как ряд процессов, например возникновение внутренних перенапряжений в трансформаторах, связан именно с насыщением магнитопровода.

Рассмотрим моделирование трехфазного группового трансформатора по непреобразованным уравнениям *. Схема соединения обмоток трансформатора приведена на рис. 5-7.

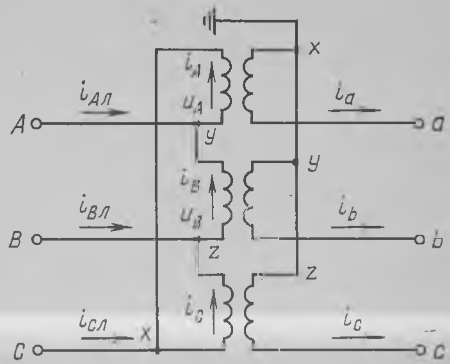


Рис. 5-7

Уравнения для первичной обмотки можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} u_A - u_C &= w_1 d\Phi_B/dt + L_{\sigma1} di_B/dt + r_1 i_B; \\ u_B - u_A &= w_1 d\Phi_C/dt + L_{\sigma1} di_C/dt + r_1 i_C; \\ u_C - u_B &= w_1 d\Phi_A/dt + L_{\sigma1} di_A/dt + r_1 i_A, \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}7)$$

где w_1 — число витков первичной обмотки; Φ_A, Φ_B, Φ_C — мгновенные значения рабочих потоков в фазах A, B, C трансформатора; r_1, $L_{\sigma1}$ — активное сопротивление и индуктивность рассеяния первичной обмотки трансформатора.

Приведем первичную обмотку трансформатора ко вторичной, т. е. к цепи нагрузки. Коэффициент приведения для фазных величин

$$k_ф = w_2/w_1,$$

где w_2 — число витков вторичной обмотки трансформатора. Коэффициент приведения для линейных величин

$$k_л = \sqrt{3}\, k_ф.$$

Система уравнений (5-7), приведенная к цепи нагрузки путем умножения правой и левой частей на $k_ф$, представится как

$$\left.\begin{aligned} (u_A - u_C)''/\sqrt{3} &= w_2 d\Phi_B/dt + L'_{\sigma1} di'_B/dt + r'_1 i'_B; \\ (u_B - u_A)''/\sqrt{3} &= w_2 d\Phi_C/dt + L'_{\sigma1} di'_C/dt + r'_1 i'_C; \\ (u_C - u_B)''/\sqrt{3} &= w_2 d\Phi_A/dt + L'_{\sigma1} di'_A/dt + r'_1 i'_A. \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}8)$$

---

* Применение аналоговых вычислительных машин в энергетических системах/*Груздев И. А.* и др. М., Энергия, 1970, с. 215.

В уравнениях (5-8) знак «штрих» отнесен к величинам, приведенным по коэффициенту $k_ф$, а «два штриха» — по коэффициенту $k_л$; $(u_A - u_C)'' = k_л (u_A - u_C)$ и т. д.— приведенные ко вторичной обмотке линейные напряжения на зажимах первичной обмотки; $i'_A = i_A/k_ф$, $i'_B = i_B/k_ф$, $i'_C = i_C/k_ф$ — приведенные ко вторичной обмотке токи в фазах первичной; $r'_1 = k_ф^2 r_1$, $L'_{\sigma 1} = k_ф^2 L_{\sigma 1}$ — приведенные активное сопротивление и индуктивность рассеяния первичной обмотки трансформатора.

Линейные токи трансформатора и токи в фазах первичной обмотки трансформатора, приведенные ко вторичной обмотке, связаны соотношениями:

$$\sqrt{3}\, i''_{Aл} = i'_B - i'_C; \quad \sqrt{3}\, i''_{Bл} = i'_C - i'_A; \quad \sqrt{3}\, i''_{Cл} = i'_A - i'_B. \tag{5-9}$$

Уравнения вторичной обмотки трансформатора запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} -w_2 d\Phi_A/dt + L_{\sigma 2} di_a/dt + r_2 i_a + u_a = 0; \\ -w_2 d\Phi_B/dt + L_{\sigma 2} di_b/dt + r_2 i_b + u_b = 0; \\ -w_2 d\Phi_C/dt + L_{\sigma 2} di_c/dt + r_2 i_c + u_c = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5-10}$$

где u_a, u_b, u_c — фазные напряжения на зажимах вторичной обмотки трансформатора.

МДС в фазах *A, B, C,* необходимые для создания в сердечниках фаз трансформатора потоков Φ_A, Φ_B, Φ_C, представятся как

$$F_{\mu A} = w_1 i_A - w_2 i_a; \quad F_{\mu B} = w_1 i_B - w_2 i_b; \quad F_{\mu C} = w_1 i_C - w_2 i_c. \tag{5-11}$$

Для приведенного трансформатора уравнения (5-11) примут вид

$$i_{\mu A} = i'_A - i_a; \quad i_{\mu B} = i'_B - i_b; \quad i_{\mu C} = i'_C - i_c. \tag{5-12}$$

Намагничивающие токи $i_{\mu A}$, $i_{\mu B}$, $i_{\mu C}$ определяются из характеристики холостого хода трансформатора по следующим зависимостям:

$$i_{\mu A} = f(\Phi_A); \quad i_{\mu B} = f(\Phi_B); \quad i_{\mu C} = f(\Phi_C). \tag{5-13}$$

Таким образом, получена система уравнений, описывающая переходные процессы в трехфазном трансформаторе при соединении обмоток по схеме «треугольник — звезда с заземленной нулевой точкой».

При исследованиях несимметричных режимов или анализе процессов в трансформаторе, работающем совместно с другими элементами энергетической системы, целесообразно записывать уравнения в осях α, β, 0. Однако при этом следует учитывать, что уравнения связи между потокосцеплениями и токами намагничивания надо записывать в осях *A, B, C*. Аналогично можно составить уравнения и при других схемах соединения обмоток трансформатора.

При моделировании трехфазных силовых трансформаторов, фазы которых выполнены на одном магнитопроводе, к полученной системе уравнений следует добавить уравнения для магнитной цепи трансформатора. Решение задачи в этом случае несколько усложнится.

Уравнения (5-8) — (5-13) нельзя непосредственно использовать для составления структурной схемы решения, так как в ней появляются неустойчивые контуры и возникает необходимость в операции дифференцирования.

Более эффективно в данном случае использование методики преобразования исходных уравнений к виду, удобному для моделирования, подобно тому, как это было сделано для магнитно-связанных контуров. В этом случае уравнения группового трехфазного силового трансформатора можно представить в следующем виде (для сокращения записи в уравнениях опущены штрихи, обозначающие приведенные величины):

для первичной стороны

$$\left.\begin{aligned} (u_A - u_C)/\sqrt{3} &= d\Psi_B/dt + r_1 i_B; \\ (u_B - u_A)/\sqrt{3} &= d\Psi_C/dt + r_1 i_C; \\ (u_C - u_B)/\sqrt{3} &= d\Psi_A/dt + r_1 i_A, \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}14)$$

где

$$\Psi_A = \Psi_{Am} + \Psi_{A\sigma}; \quad \Psi_B = \Psi_{Bm} + \Psi_{B\sigma}; \quad \Psi_C = \Psi_{Cm} + \Psi_{C\sigma};$$

для вторичной стороны

$$\left.\begin{aligned} -d\Psi_a/dt &= r_2 i_a + u_a; \\ -d\Psi_b/dt &= r_2 i_b + u_b; \\ -d\Psi_c/dt &= r_2 i_c + u_c, \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}15)$$

где $\Psi_a = \Psi_{Am} + \Psi_{a\sigma}$; $\Psi_b = \Psi_{Bm} + \Psi_{b\sigma}$; $\Psi_c = \Psi_{Cm} + \Psi_{c\sigma}$, $\Psi_{Bm} = f(i_{\mu B})$, $\Psi_{Am} = f(i_{\mu A})$ и $\Psi_{Cm} = f(i_{\mu C})$ — основные потокосцепления фаз B, A и C; $\Psi_{A\sigma} = L_{1\sigma} i_A$; $\Psi_{B\sigma} = L_{1\sigma} i_B$; $\Psi_{C\sigma} = L_{1\sigma} i_C$; $\Psi_{a\sigma} = L_{\sigma 2} i_a$; $\Psi_{b\sigma} = L_{\sigma 2} i_b$; $\Psi_{c\sigma} = L_{\sigma 2} i_c$ — потокосцепления рассеяния первичных и вторичных обмоток.

Токи первичной и вторичной обмоток фаз связаны с токами намагничивания соотношениями (5-12). Математическая модель трехфазного силового трансформатора, составленная по уравнениям (5-12) — (5-15), приведена на рис. 5-8.

Принципиальных трудностей при составлении и настройке математической модели трансформатора в данном случае не возникает. При необходимости нетрудно учесть и насыщение магнитной цепи по путям потоков рассеяния. Для этого в схему (рис. 5-8) следует ввести нелинейные блоки, на которых были бы набраны зависимости вида $i_n = f(\Psi_{n\sigma})$, где i_n — ток n-й обмотки трансформатора; $\Psi_{n\sigma}$ — потокосцепление рассеяния n-й фазы.

§ 5-3. Моделирование генераторов и двигателей постоянного тока

При математическом моделировании машин постоянного тока используют два подхода:

1) непосредственное применение дифференциальных уравнений электромеханических переходных процессов машины постоянного тока;

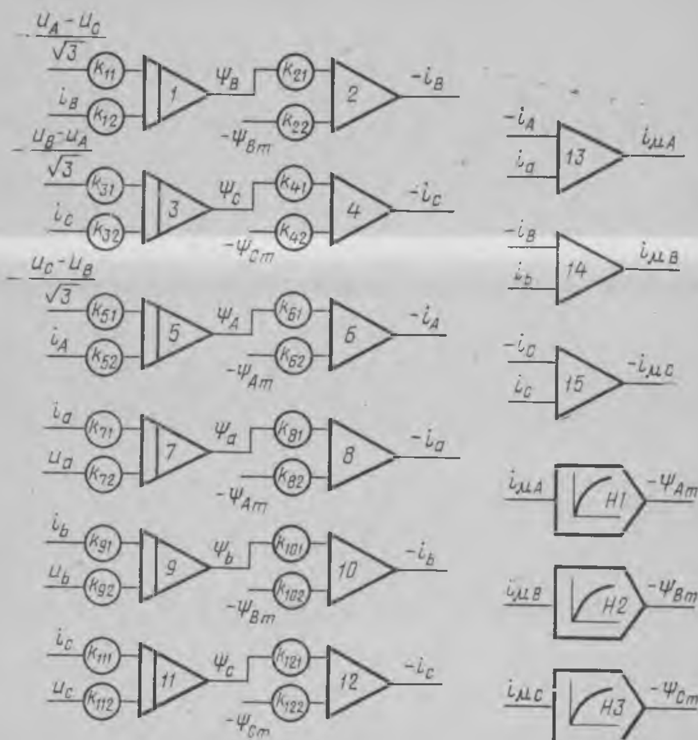


Рис. 5-8

2) структурное моделирование, при котором схемы для математического моделирования строятся из типовых звеньев, параметрами которых являются коэффициенты усиления, постоянные времени и т. д.

Первый подход является наиболее общим. В уравнениях при этом фигурируют конкретные параметры машины: активные сопротивления, индуктивности, сопротивления щеточных контактов и т. д. Поэтому при исследованиях легко проанализировать влияние отдельных параметров машины, учесть ряд факторов: насыщение магнитной цепи, реакцию якоря и т. д. Метод используется при исследованиях отдельных машин или их работы в несложной системе.

Второй подход используется при анализе электромеханических систем в электроприводе. Параметрами структурных схем в этом случае являются величины, получаемые экспериментально: постоянные времени, передаточные функции и т. д. Данный метод моделирования позволяет учитывать как различные варианты включения обмоток машины, так и влияние нелинейности кривой намагничивания, реакции якоря, потоков рассеяния обмоток.

Принципиальных отличий в моделировании двигателей и генераторов постоянного тока не существует. Режим работы машины постоянного тока отражается соответсвующим образом при записи исходной системы уравнений. Рассмотрим использование первого подхода при моделировании двигателя постоянного тока.

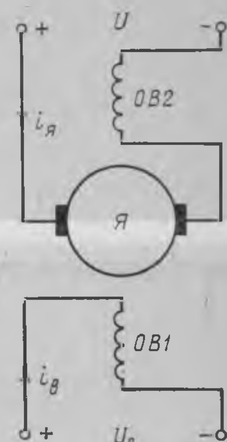


Рис. 5-9

Необходимость исследования переходных процессов электродвигателей постоянного тока часто возникает при проектировании электроприводов. Трудности практического решения подобных задач обусловлены тем, что дифференциальные уравнения, описывающие переходные процессы, например при изменении магнитного поля машины, являются нелинейными. Применение для исследований переходных процессов в двигателе постоянного тока АВМ позволяет учесть действие реакции якоря и вихревых токов, наличие дополнительных стабилизирующих обмоток, насыщение и т. д.

Сложность математического моделирования машины постоянного тока состоит не в трудности математического решения задачи, а в умении полно и точно выявить все факторы и зависимости, влияющие на работу машины, а также в правильности их выражения в математической форме для ввода в вычислительную машину.

Рассмотрим моделирование двигателя типа ПН-68, регулирование частоты вращения которого осуществляется ослаблением и усилением магнитного потока путем введения и шунтирования дополнительного сопротивления в цепи обмотки возбуждения (рис. 5-9). Двигатель имеет смешанное возбуждение. При моделировании учтем насыщение магнитной цепи, действие реакции якоря и вихревых токов в полюсах машины *.

Размагничивающее действие поперечной реакции якоря зависит от величины как тока якоря, так и потока, создаваемого обмоткой возбуждения. Ее действие может быть учтено введением дополнительной МДС $F_{р.я}$ или дополнительного потока реакции якоря $\Phi_{р.я}$. Для расчетов на АВМ удобно пользоваться зависимостью $\Phi_{р.я}=f(i_я)$, так как величина потока реакции якоря при изменении тока якоря в пределах $(0—3)I_{ном}$ мало зависит от тока возбуждения $i_в$. Зависимость потока реакции якоря от тока якоря показана на рис. 5-10.

* *Борисов В. А.* Исследование на электронной модели переходных процессов в электродвигателе постоянного тока. — Известия ВУЗов, Электромеханика, 1961, № 5, с. 30.

Насыщение магнитной цепи машины можно учесть по основной кривой намагничивания (рис. 5-11). Зависимости, приведенные на рис. 5-10 и 5-11, даны в координатах как реальных величин, так и машинных.

Влияние вихревых токов обычно учитывается действием короткозамкнутой обмотки, расположенной на полюсах машины. Для удобства вычислений ее число витков принимают равным числу витков обмотки возбуждения. Сопротивление же ее находят путем обработки осциллограммы ЭДС машины $e=f(t)$, вращаемой посторонним двигателем при отключенной обмотке возбуждения.

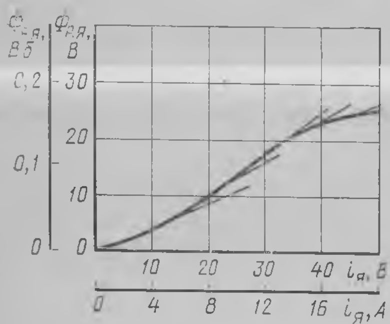


Рис. 5-10

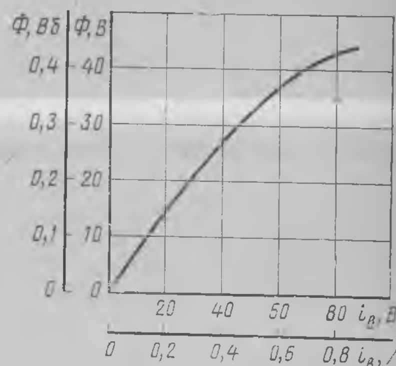


Рис. 5-11

В соответствии с принятыми условиями переходные процессы рассматриваемой схемы двигателя будут описываться уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
&U_{\text{в}}=i_{\text{в}}r_{\text{в}}+2pw_{\text{в}1}\sigma d\Phi/dt;\\
&\Phi=\Phi_{\mu}-\Phi_{\text{р.я}};\\
&\Phi_{\mu}=f\,(i_{\mu});\\
&i_{\mu}=i_{\text{в}}+i_{\text{в.т}}+i_{\text{я}}w_{\text{в}2}/w_{\text{в}1};\\
&i_{\text{в.т}}=-2pw_{\text{в}1}\sigma\,(d\Phi/dt)\,(1/r_{\text{в.т}});\\
&\Phi_{\text{р.я}}=\varphi\,(i_{\text{я}});\\
&U=C_e n\Phi+i_{\text{я}}r_{\text{я}}+L_{\text{я}}di_{\text{я}}/dt+2pw_{\text{в}2}\sigma d\Phi/dt;\\
&M_{\text{эм}}-M_{\text{мех}}=(GD^2/375)\,(dn/dt);\\
&M_{\text{эм}}=C_{\text{м}}\Phi i_{\text{я}},
\end{aligned}\right| \qquad (5\text{-}16)$$

где $U_{\text{в}}$, U — напряжения цепи возбуждения и якоря; $i_{\text{в}}$, $w_{\text{в}1}$ — ток и число витков параллельной обмотки возбуждения; $r_{\text{в}}$ — активное сопротивление цепи параллельной обмотки возбуждения *ОВ1*; p — число пар полюсов; σ — коэффициент рассеяния потока возбуждения; $\Phi_{\text{р.я}}$, Φ — поток реакции якоря и результирующий поток; Φ_μ — поток якоря, обусловленный действием обмоток возбуждения и МДС вихревых токов; $i_{в.т}$, i_μ — вихревой и результирующий токи, приведенные к параллельной обмотке возбуждения; $w_{н2}$ — число витков последовательной обмотки возбуждения $OB2$; $r_{в.т}$ — сопротивление фиктивной короткозамкнутой обмотки, эквивалентирующей действие вихревых токов; C_e, $C_м$ — конструктивные постоянные электродвигателя; $r_я$, $L_я$ — активное сопротивление и индуктивность цепи якоря; GD^2 — маховый момент привода; $M_{эм}$, $M_{мех}$ — момент двигателя и момент нагрузки на валу.

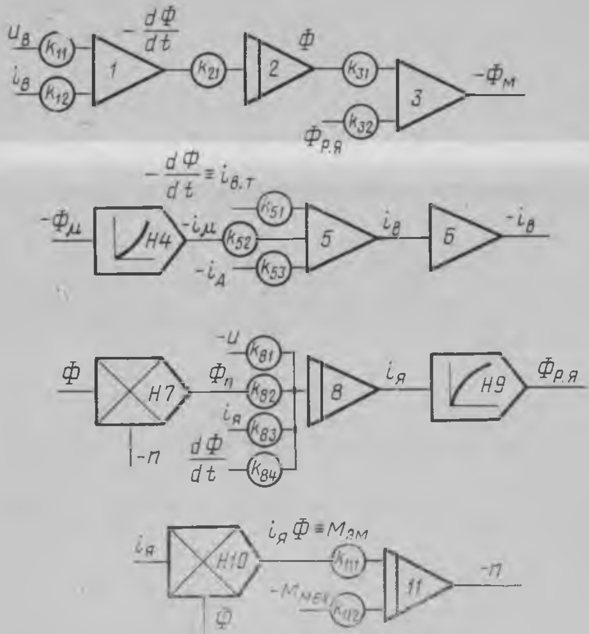


Рис. 5-12

Структурная схема модели, построенной по уравнениям (5-16), приведена на рис. 5-12.

По разработанной структурной схеме решения можно выполнить большой объем исследований по влиянию реакции якоря и стабилизирующей обмотки, индуктивности якорной цепи, вихревых токов и т. д.

В более простых случаях (без учета связи обмоток возбуждения с цепью якорного тока, при пренебрежении насыщением, без учета изменения частоты вращения машины и т.д.) схемы решения уравнений машины постоянного тока могут быть получены из приведенной как частный случай.

Моделирование ЭМУ продольного поля, являющихся частным случаем генераторов постоянного тока с независимым возбуждением, не вызывает дополнительных трудностей, а, наоборот, является более простым, так как магнитная система ЭМУ выполняется обычно ненасыщенной и необходимость учета насыщения отпадает.

§ 5-4. Моделирование электромашинных усилителей поперечного поля

ЭМУ поперечного поля широко применяют в автоматизированных электроприводах и системах регулирования. Теория ЭМУ поперечного поля рассмотрена во многих работах отечественных и зарубежных авторов. Как правило, при исследовании переходных процессов в ЭМУ считают, что магнитная система по продольной и поперечной осям ненасыщена, сопротивление щеточного контакта поперечной оси — величина постоянная, МДС коммутационных и вихревых токов изменяются по линейному закону. Однако такое представление ЭМУ и выводы, полученные на его основе, могут оказаться ошибочными, особенно при рассмотрении систем, работающих вблизи границ устойчивой работы. Ошибочным является также широко распространенное представление ЭМУ в виде двух последовательно соединенных инерционных звеньев без учета внутренних обратных связей.

Появление и совершенствование современных нелинейных АВМ позволило отказаться от указанных допущений, следовательно, более точно оценить количественное и качественное влияние основных обратных связей и нелинейностей на характер и время протекания переходных процессов.

При математическом моделировании ЭМУ поперечного поля можно использовать два различных подхода:

1) составление электронной модели на основе структурной схемы ЭМУ, состоящей из отдельных звеньев;

2) непосредственное применение дифференциальных уравнений переходных процессов ЭМУ, составленных для реальной машины.

Первый подход к моделированию ЭМУ достаточно полно систематизирован, его наиболее целесообразно использовать при анализе ЭМУ как элемента некоторой сложной электромеханической системы. Согласно этому методу, на основании уравнений переходного процесса ЭМУ в рассматриваемом режиме составляется структурная схема. Звенья ее отражают при этом передаточную функцию отдельных каскадов ЭМУ. Учет нелинейностей отдельных элементов ЭМУ, изменение частоты вращения якоря и т. д. осуществляются включением в структурную схему звеньев дополнительных нелинейностей. В структурных схемах ЭМУ используют постоянные времени отдельных каскадов, характеристики холостого хода и внешние характеристики, т. е. все те величины, которые могут быть получены экспериментально. Рассматриваемый метод моделирования ЭМУ может быть рекомендован для анализа систем автоматического регулирования.

Для специалистов, занимающихся разработкой и проектированием ЭМУ, предпочтителен второй подход к моделированию. В дифференциальных уравнениях, описывающих переходные процессы в ЭМУ, в качестве параметров фигурируют активные и индуктивные сопротивления обмоток, сопротивления щеточных контактов, угол сдвига щеток, степень компенсации реакции якоря и т. д. Математическая модель, составленная на основе этих уравнений, отражает реальные физические процессы ЭМУ и, следовательно, позволяет легко проанализировать влияние отдельных параметров на его выходные характеристики. В сравнении с первым подходом к моделированию второй подход позволяет проводить подробные исследования физической картины процессов в ЭМУ.

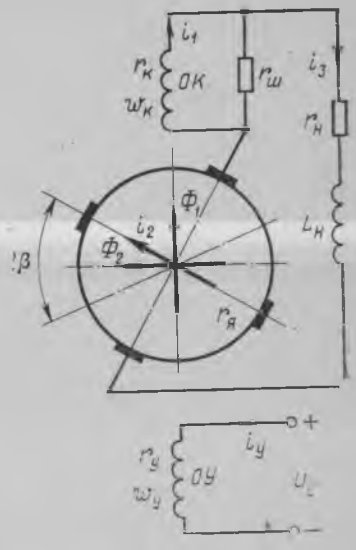


Рис. 5-13

Рассмотрим моделирование ЭМУ поперечного поля, проводимое по полной системе дифференциальных уравнений *. При составлении дифференциальных уравнений ЭМУ поперечного поля обычно не используют взаимные индуктивности между обмотками. Более наглядное решение получается, если оперировать с результирующими потоками, действующими по продольной и поперечной осям. Принципиальная схема работы ЭМУ поперечного поля при работе на активно-индуктивную нагрузку показана на рис. 5-13.

ЭМУ существенно отличаются от обычных генераторов постоянного тока малым значением МДС управляющей обмотки и малым сопротивлением короткозамкнутой поперечной цепи. Поэтому на режимы работы ЭМУ большое влияние оказывают факторы, которые обычно не учитываются в генераторах постоянного тока:

1) размагничивающее действие вихревых токов в стали якоря;

2) замедленная коммутация тока поперечной цепи;

3) сдвиг поперечных щеток, создающий по продольной оси намагничивающий или размагничивающий поток в зависимости от направления сдвига;

4) наличие потока в недокомпенсированной машине при неравенстве потоков продольной реакции якоря и компенсационной обмотки.

---

* *Константинов Г. Г., Скороспешкин А. И., Логунов В. П.* Математическое моделирование ЭМУ поперечного поля с гладким якорем на АВМ МН-14. — Известия ТПИ, 1968, т. 190, с. 65—69.

При ненасыщенной магнитной системе ЭМУ МДС за счет потерь в стали, действующая против МДС обмотки управления, пропорциональна току поперечной цепи. Такое допущение справедливо лишь при сохранении пропорциональной зависимости между током поперечной оси и поперечным потоком. При насыщении магнитной системы второй ступени усиления и смещении щеток с геометрической нейтрали это положение несправедливо. При этом считают, что МДС $F_{\text{ст}}$ за счет потерь в стали пропорциональна потоку поперечной оси:

$$F_{\text{ст}} = k'_{\text{ст}}\,\Phi_2 = k_{\text{ст}} e'_3, \tag{5-17}$$

где $k'_{\text{ст}}$ и $k_{\text{ст}}$ — коэффициенты пропорциональности между МДС $F_{\text{ст}}$ и потоком поперечной оси Φ_2 и ЭДС на продольных щетках e'_3.

Размагничивающее действие токов замедленной коммутации в секциях, коммутируемых короткозамкнутыми щетками усилителя, и соответствующая им МДС F_2 являются нелинейной функцией тока поперечной оси i_2. Эта нелинейность вносится в основном за счет нелинейной зависимости переходного сопротивления щеточного контакта от величины тока поперечной цепи; она особенно резко выражена при малых значениях поперечного тока.

Таким образом, поток по продольной оси может быть записан уравнением

$$\Phi_1 = \lambda_1 \left[i_{\text{у}} w_{\text{у}} + i_{\text{к}} w_{\text{к}} \mp x w_{\text{я}} i_{\text{я}} - k'_{\text{ст}}\,\Phi_2 - f_2(i_2) - (w_{\text{я}} - w_{\text{доп}})\, i_3\right], \tag{5-18}$$

где Φ_1, λ_1 — магнитный поток и проводимость по продольной оси; $w_{\text{у}}$, $w_{\text{к}}$, $w_{\text{я}}$, $w_{\text{доп}}$ — число витков обмоток управления, компенсационной, якоря и дополнительного полюса; $x = 2p\beta/\pi$ — относительное смещение с нейтрали щеток поперечной цепи (p — число пар полюсов; β — угол смещения); $k'_{\text{ст}}\,\Phi_2$ — МДС за счет потерь в стали якоря; $f_2(i_2)$ — МДС за счет реакции коммутационных токов в поперечной цепи.

Рассмотрим составление уравнения для потока по поперечной оси. Если магнитная цепь машины ненасыщена, а щетки расположены на геометрической нейтрали, магнитный поток прямо пропорционален поперечному току. При смещении щеток поперечной оси с нейтрального положения значение поперечного магнитного потока уменьшается на величину, пропорциональную x. В ЭМУ, как правило, продольные и поперечные щетки тесно связаны между собой, поэтому при смещении поперечных щеток смещаются и продольные, появляется поперечная составляющая продольного тока, пропорциональная величине относительного смещения щеток и току i_3. При насыщении магнитной цепи по поперечной оси нарушается пропорциональность между токами i_2, i_3 и результирующим потоком по поперечной оси.

Таким образом, выражение для поперечного потока можно представить в виде

$$\Phi_2 = s\lambda_2\left[(1 - x)\, w_{\text{я}} i_2 \mp x w_{\text{я}} i_3\right], \tag{5-19}$$

где s — функция, отражающая нелинейность характеристики холостого хода второй ступени усиления, для линейной части характеристики $s=1$; λ_2 — магнитная проводимость по поперечной оси для ненасыщенной магнитной системы.

Уравнения равновесия ЭДС принимают следующий вид:

для обмотки управления

$$U_у = r_у i_у + \sigma_у w_у p\Phi_1; \tag{5-20}$$

для поперечной цепи усилителя

$$e_2 = C\Phi_1 = r_я i_2 + f_1(i_2)\, i_2 + \sigma_я w_я p\Phi_2; \tag{5-21}$$

для продольной цепи усилителя

$$e'_3 = C\Phi_2 = r_3 i_3 - (\sigma_я w_3 - \sigma_к w_к)\, p\Phi_1 + r_к i_к + L_н p i_3; \tag{5-22}$$

для контура «компенсационная обмотка — шунтирующее сопротивление»

$$\sigma_к w_к p\Phi_1 + R_к i_к - r_ш i_3 = 0. \tag{5-23}$$

В уравнениях (5-20) — (5-23) $\sigma_у$, $\sigma_я$, $\sigma_к$ — коэффициенты рассеяния обмоток управления, якоря и компенсационной; C — коэффициент пропорциональности между потоками и ЭДС для якорной обмотки; $f_1(i_2)\ i_2$ — падение напряжения под щетками поперечной цепи; e'_3 — ЭДС, наведенная на продольных щетках за счет результирующего потока Φ_2; $r_3 = r_я + r_{доп} + r_к + r_{ш3}$ — суммарное активное сопротивление якоря, дополнительного полюса, компенсационной обмотки и переходного сопротивления щеточного контакта по продольной оси; $R_к = r_к + r_ш$ — общее сопротивление контура «компенсационная обмотка — шунтирующее сопротивление».

Изменение сопротивления щеточного контакта с изменением тока $f_1(i_2)$ существенно влияет на работу усилителя, поэтому учет нелинейности этого сопротивления очень важен.

Система уравнений (5-18) — (5-23) нелинейна, вследствие чего исследование ее методом математического моделирования с применением АВМ является практически единственно возможным методом исследования.

Для составления электронной модели ЭМУ приведем уравнения (5-18) — (5-23) к виду, удобному для моделирования:

$$p\Phi_1 = \frac{1}{\sigma_у w_у} U_у - \frac{r_у}{\sigma_у w_у} i_у; \tag{5-24}$$

$$p\Phi_2 = \frac{C}{\sigma_я w_я} \Phi_1 - \frac{r_я}{\sigma_я w_я} i_2 - \frac{1}{\sigma_я w_я} f_1(i_2)\, i_2; \tag{5-25}$$

$$p i_3 = \frac{C}{L_н} \Phi_2 - \frac{r_3}{L_н} i_3 + \frac{(\sigma_я w_я - \sigma_к w_к)}{L_н} p\Phi_1 - \frac{r_к}{L_н} i_к; \tag{5-26}$$

$$i_к = \frac{r_ш}{R_к} i_3 - \frac{\sigma_к w_к}{R_к} p\Phi_1; \tag{5-27}$$

$$i_2 = \frac{1}{s\lambda_2}\,\frac{1}{(1-x)\,w_{я}}\,\Phi_2 \pm \frac{x}{1-x}\,i_3; \qquad (5\text{-}28)$$

$$i_{у} = \frac{1}{\lambda_1 w_{у}}\,\Phi_1 - \frac{w_{к}}{w_{у}}\,i_{к} \pm \frac{x w_{я}}{w_{у}}\,i_2\,\frac{k_{ст}}{w_{у}}\,\Phi_2 + \frac{1}{w_{у}}\,f_2(i_2) + \frac{w_{я} - w_{доп}}{w_{у}}\,i_3. \qquad (5\text{-}29)$$

По уравнениям (5-24) — (5-29) составлена электронная модель ЭМУ при работе на активно-индуктивную нагрузку (рис. 5-14).

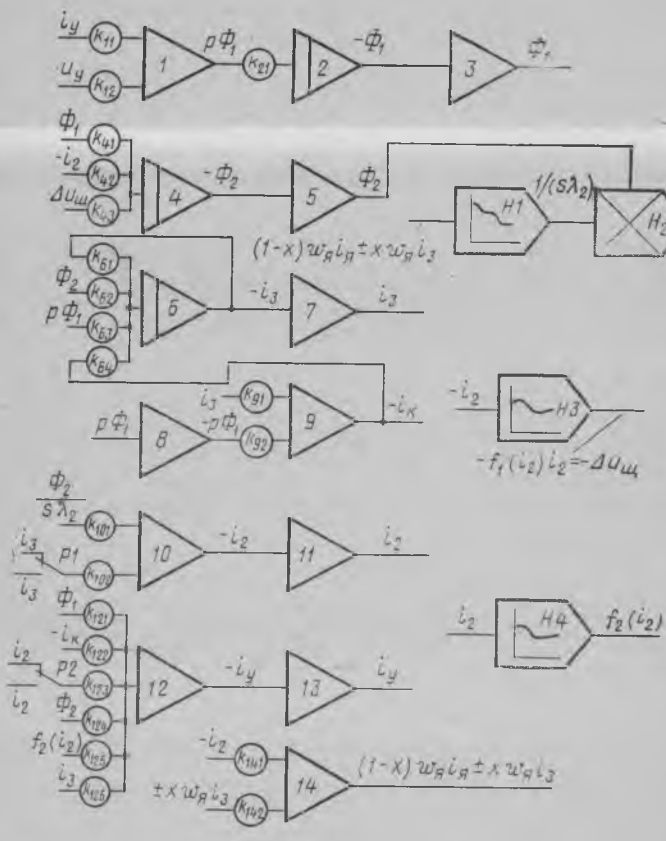


Рис. 5-14

Разработанная модель ЭМУ позволяет исследовать как нагрузочный режим, так и режим холостого хода. Во втором случае необходимо в уравнении (5-26) принять $L_{н} = \infty$, что на электронной модели будет соответствовать равенству нулю коэффициентов передачи блока *6*, моделирующего уравнение (5-26). Изменение положения переключателей *P1* и *P2* соответствует изменению направления сдвига щеток относительно направления вращения якоря.

Нелинейность характеристики холостого хода второй ступени усиления и соответствующее изменение постоянной времени поперечной цепи ЭМУ по мере насыщения магнитной цепи учитывается блоком нелинейности *H1*, где набрана зависимость

$$1/(s\lambda_2)=f\left[(1-x)\,w_я i_я \mp x w_я i_з\right].$$

МДС реакции коммутационных токов в поперечной оси $f_2(i_2)$ определяется на выходе блока нелинейности *H4*, на вход которого подается ток i_2.

Нелинейность сопротивления щеточного контакта учитывается с помощью блока *H3*, на котором набрана зависимость падения напряжения в щеточном контакте $f_1(i_2)\,i_2$ в функции тока поперечной цепи.

Не рассматривая здесь определение масштабных коэффициентов и коэффициентов передач решающих усилителей модели, отметим, что разработанная модель позволяет анализировать влияние нелинейностей характеристики намагничивания машины и сопротивления щеточного контакта, реакции коммутационных и вихревых токов, сдвига щеток с геометрической нейтрали, степени компенсации реакции якоря и т. д. Таким образом, применение нелинейных АВМ позволяет достаточно полно и физически правильно отразить и исследовать все процессы ЭМУ.

ЛИТЕРАТУРА

Дунаевский С. Я., Крылов О. А., Мазия Л. В. Моделирование элементов электромеханических систем. — М.: Энергия, 1971.

Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования системы автоматического регулирования. — М.: Физматгиз, 1963.

Кононенко Е. В., Сипайлов Г. А., Хорьков К. А. Электрические машины. Специальный курс. — М.: Высшая школа, 1975.

Копылов И. П. Электромеханические преобразователи энергии. — М.: Энергия, 1973.

Копылов И. П., Мамедов Ф. А., Беспалов В. А. Математическое моделирование асинхронных машин. — М.: Энергия, 1969.

Моделирование на аналоговых вычислительных машинах/*Архангельский Г. А., Знаменский А. А., Лукомский Ю. А., Чернышев Э. П.* — Л.: Энергия, 1972.

Постников И. М. Обобщенная теория и переходные процессы электрических машин. — Киев: Техника, 1966.

Применение аналоговых вычислительных машин в электрических системах/*Груздев И. А., Кадомская К. П., Кучумов Л. А.* и др. — М.: Энергия, 1970.

Сергеев Н. П., Вашкевич Н. П. Основы вычислительной техники. — М.: Высшая школа, 1973.

Трещев И. И. Методы исследования машин переменного тока. — Л.: Энергия, 1969.

Урмаев А. С. Основы моделирования на АВМ. — М.: Наука, 1974.

40 коп.