М.И.Пулатова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть I

«Фан»

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

БУХАРСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

М.И.ПУЛАТОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть I

Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебника для студентов высших образовательных учреждений

Издательство "Фан"
Академии наук Республики Узбекистан
Ташкент – 2011

УДК 51(076)
ББК 22. 1я73
П 88

Учебник «Высшая математика» (часть I) разработан по утвержденной программе для подготовки бакалавров по экономическим, техническим и технологическим специальностям вузов. Включает в себя лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии; дифференциальному и интегральному исчислению; функции многих переменных.

Для студентов экономических, технических и технологических направлений высших учебных заведений.

Ответственный редактор:
доктор физико-математических наук, профессор И.И.Сафаров

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент А.Бедарёв
кандидат физико-математических наук, доцент Ж.Жумаев

ISBN 978-9943-19-044-3

Светлой памяти родителей
посвящается

Настоящий учебник «Высшая математика» (*часть I)* предназначен, в первую очередь, для студентов экономических, технологических и технических специальностей, а также может быть полезным для всех категорий студентов, изучающих высшую математику в том или ином обьеме.

В учебнике, состоящем из 10 глав, излагается содержание учебного материала, включающего: введение в теорию множеств (множества и действия над ними); основы линейной алгебры (матрицы, определители и системы линейных уравнений); начала анализа (функции и их свойства, основы дифференциального и интегрального исчисления).

Каждая глава, помимо изложения теоретического материала, сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач различного направления, *в конце каждой главы даются вопросы и задания для самопроверки.*

В начале каждой главы дается историческая справка, посвященная тому или иному разделу высшей математики.

Данный учебник написан на основе современных педагогических технологий и является базой для подготовки к семестровым экзаменам по высшей математике.

Убеждена, *что настоящий учебник будет способствовать глубокому изучению студентами* курса высшей математики, *а также* смежным с ним дисциплинам.

Автор приносит глубокую благодарность рецензентам этой книги за ценные советы и замечания, которые способствовали значительному улучшению книги, а также Клычеву Улугбеку за помощь в оформлении рукописи.

От автора

Кто хочет ограничиться настоящим,
без знания прошлого, тот никогда
его не поймет....
Г.Лейбниц

ВВЕДЕНИЕ

Математика одна из самых древних наук. Математические познания приобретались людьми уже на самой ранней стадии развития под влиянием трудовой деятельности.

Уровень математических знаний среднеазиатских народов до арабского завоевания не установлен, так как арабы полностью уничтожили всю древнюю письменность. Однако можно предполагать, что он был не ниже, чем у вавилонян, китайцев, египтян и народов Индии.

С середины VIII века среднеазиатские города восстановили свою роль культурных центров. В частности, в 751 году в Самарканде было начато производство бумаги.

Одним из наиболее выдающихся ученых при дворе халифов был математик ал-Хорезми (780-847) – Мухаммад ибн Муса. В Багдаде был построен «Дом мудрости», представлявший собой нечто вроде академии с обсерваторией и библиотекой. С 815 года во главе этого дома стоял ал-Хорезми. Здесь он написал работы по астрономии, географии и математике. Около 820 года им были составлены астрономические таблицы «Зидж», в основу которых были положены таблицы Птоломея. Из математических работ ал-Хорезми, до нас дошли два трактата – арифметика и алгебра. Трактат по арифметике является первым в мировой литературе руководством для обучения счету (на латинском языке хранится в Кембриджском университете). Трактат «Ал-джабр» считается первым в мировой науке учебником по алгебре.

С «Домом мудрости» связаны и первые работы в области тригонометрии. Один из ученых «Дома мудрости» Ахмед ибн Абдалла ал-Мервази из Мерва (около 770-840) пользовался tg и ctg как отношениями сторон прямоугольного треугольника. Он ввел понятие косеканса.

Абу Мухаммад ал-Ходженди – математик и астроном из Ходжента сформулировал частный случай теоремы Ферма. В тригонометрии доказал теорему sin, в астрономии изобрел секстант, который был главным инструментом в обсерватории Улугбека.

Одним из выдающихся математиков X века был Абу-л-Вафа ал Бузджани (940-980). Он написал трактат об извлечении корней третьей, четвертой и седьмой степеней. Абу-л-Вафа ввел секанс и косеканс.

Абу Али ибн Сина (980-1037) – уроженец Афшоны близ Бухары. В одной из книжных лавок в Бухаре он случайно купил сочинение ал-Фараби, по которому познакомился с учением Аристотеля. «Данеш-наме» («Книга знаний») ибн Сины является энциклопедическим сочинением и содержит разделы, посвященные математике. Он также написал несколько комментариев к переводам работ греческих математиков.

Абу Райхан ал-Беруни (973-1048) из Хорезма, величайший ученый средневековой Средней Азии. В своем знаменитом трактате «Памятники минувших поколений» он излагает способы исчисления времени у различных народов, сопоставляет их и показывает, как следует переходить от одних систем к другим. Здесь проявляются его глубокие знания в области астрономии и математики. Он написал сочинение об извлечений корней третьей и высших степеней. Всего ал-Беруни написал более 150 трудов из разных областей знаний.

Мухаммад Тарагай Улугбек (1394-1449) уроженец Самарканда. Всю свою научную деятельность он посвятил астрономии. Математическими вычислениями он занимался постольку, поскольку они были нужны ему для астрономии. Большой интерес представляют его астрономические, географические таблицы, таблицы летоисчисления и тригонометрические таблицы.

В XVI-XVIII вв. для поддержания в рабочем состоянии весьма сложной оросительной системы, для проведения новых каналов требовались математические и астрономические знания. Их получали путем изучения трудов и трактатов древних ученых. Доказательством этому служат рукописи сочинений классиков, написанные в XVI и XVII вв. Известно также, что архитекторы Бухары продолжали самаркандскую традицию, требовавшую для выполнения идеи зодчего значительных математических познаний.

С XVI века и вплоть до XIX века преподаватели медресе и отдельные любители наук в лучшем случае занимались переписыванием древнейших трактатов. Преподавание математики в Средней Азии до XVII века находилось примерно на уровне преподавания математики в других странах.

ГЛАВА 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ. КОМБИНАТОРИКА

Сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника – теории множеств.

Н.Бурбаки

Историческая справка:

Проблемы, связанные с понятиями бесконечности, дискретности и непрерывности рассматривались в математике, начиная с VI века до н.э. Под влиянием сочинений Аристотеля эти проблемы широко обсуждались в странах Ислама и в Европе. Впервые проблема математической бесконечности была представлена в наиболее общем виде в теории множеств, основателем которой был Кантор.

Множество – одно из первоначальных неопределяемых математических понятий. Мы встречаемся с разными числовыми множествами, элементами которых являются числа той или иной природы (натуральные, целые, дробные, рациональные, иррациональные, действительные, комплексные, алгебраические и другие).

Если множество имеет бесконечно много элементов, то оно называется бесконечным. Например, множество всех положительных чисел. Если же множество содержит конечное число элементов, то оно называется конечным, например, множество сторон пятиугольника.

Поразительное открытие сделал Кантор в 1873 году. Все три множества натуральных, рациональных и алгебраических чисел - имеют одну и ту же мощность. Иначе говоря, множество рациональных чисел и множество алгебраических чисел являются счетными множествами.

В области теории множеств известны работы Б.Больцано, Р.Дедекинда, Л.Кронекера и других.

Теория множеств оказала огромное влияние на дальнейшее развитие науки в XX веке. В связи с теорией множеств возникали и развивались новые математические дисциплины, например: теория функций действительного переменного, теоретико-множественная топология, функциональный анализ и другие.

§1.1. Основные понятия теории множеств

Теория множеств - это раздел математики, в котором изучаются множества вне связи с конкретной природой элементов этих множеств.

Дав строгое обоснование математического анализа, теория множеств произвела в нем революцию. Теоретико-множественная аксиоматика теории вероятностей стала фундаментом теории вероятностей. Теория множеств применяется в качественной теории дифференциальных уравнений, в топологии, в вариационном анализе, но главное - это вопросы строения точечных множеств в n-мерном евклидовом пространстве. Основоположники теории множеств: Г. Кантор, Б. Больцано и Р. Дедекинд.

Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A,B,C,..., а элементы множества - строчными буквами a,b,c,... .

Множество, содержащее конечное число элементов, иногда задают перечислением его элементов, заключенных в фигурные скобки. Например, множество корней квадратного уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ записывается так: $\{2,3\}$.

Иногда множество x, элементами которого являются $x_1, x_2, ..., x_n$ обозначают $\{x\}$.

Факт принадлежности элемента a множеству A записывается:

$$a \in A,$$

а отрицание этого факта:

$$a \notin A,$$

Множество называется:

- ***конечным,*** если оно содержит конечное число элементов;
- ***бесконечным,*** если оно содержит бесконечное число элементов;

- ***пустым*** и обозначается Ø (или O), если оно не содержит ни одного элемента. Множество, элементами которого являются числа, называется ***числовым множеством.*** Применяются обозначения:

- N- множество натуральных чисел;
- Z - множество целых чисел;
- R- множество действительных чисел;
- Q- множество рациональных чисел.

Пусть a и b - действительные числа ($a < b$). Множество действительных чисел x, удовлетворяющих определенным неравенствам, называется **числовым промежутком.**

Множество действительных чисел **R** называется ***числовой прямой*** и обозначается $(-\infty, +\infty)$.

Если все элементы множества **A** входят в множество **B**, то говорят, что множество A входит в множество **B** (содержится в **B**) и обозначают:

$$A \subset B \text{ или } B \supset A.$$

В этом случае говорят, что множество **A** является ***подмножеством*** множества B . Так, очевидно:

$$N \subset Z.$$

Любое множество является подмножеством самого себя, т.е.

$$A \subset A \text{ или } A \supset A$$

Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Известно, что число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.

Из двух соотношений

$$A \subset B \text{ или } B \subset A.$$

следует, что A и B совпадают и пишут

$$A = B.$$

Это значит, что A и B состоят из одних и тех же элементов.

Если для множества X={x} существует такое число M, что все $x \leq M$, то говорят, что ***множество ограничено числом M сверху.***

Само число M в этом случае есть ***верхняя граница*** множества X.

Если для множества X={x} существует такое число N, что все $x \geq N$, то говорят, что ***множество ограничено числом N снизу.***

Само число N в этом случае есть ***нижняя граница*** множества X.

Если множество сверху (снизу) не ограничено, то за его верхнюю (нижнюю) границу принимают $+\infty$ ($-\infty$).

Имея верхнюю (нижнюю) границу, множество имеет бесчисленное множество верхних (нижних) границ. Наименьшая из всех верхних (наибольшая из всех нижних) границ множества называется точной верхней (нижней) границей и обозначается:

$$\sup X = \sup\{x\} \quad (\inf X = \inf\{x\})$$

(От слов: *supremum* - наивысшее; *infimum* – наинизшее).

§ 1.2. Операции над множествами

Из множеств с помощью определенных операций можно образовывать новые множества. ***Алгебра множеств*** пронизывает многие разделы математики, помогает систематизировать математические понятия и установить между ними логические связи.

Если все элементы множества A являются также элементами множества B, то говорят, что A ***содержится*** (или ***включается***) в B или что B ***содержит*** (или ***включает***) A и обозначают $A \subseteq B$ $(A \supseteq B)$ см.рис. 1.1.

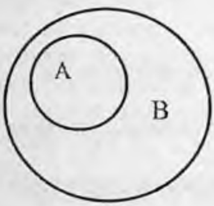


Рис. 1.1

Если $A \subseteq B$, то множество A называется ***подмножеством*** множества B; если при этом $A \neq B$, то A называют ***собственным подмножеством*** множества B и обозначают $A \subset B$. Отношения $\subseteq$ и $\subset$ между множествами называются соответственно ***включением*** и ***собственным включением***. Когда нет необходимости различать эти два вида включений, применяют знак $\subset$. Запись $A \not\subset B$ указывает, что A не является подмножеством B.

Основные операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность и дополнение множеств.

1. ***Объединением (логической суммой)*** множеств $A, B, C, \ldots$ называется множество, состоящее из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств $A, B, C, \ldots$ и обозначается $A \cup B \cup C \cup \ldots$. Случай объединения двух множеств показан на рис. 1.2 и рис. 1.3, трех - на рис. 1.4.

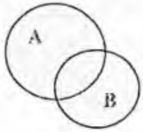


Рис. 1.2. A ∪ B

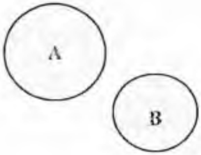


Рис. 1.3. A ∪ B

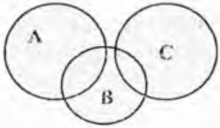


Рис. 1.4. A ∪ B ∪ C

2. ***Пересечением*** (или общей частью) множеств $A,B,C,...$ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно каждому из множеств $A,B,C,...$ и обозначается $A \cap B \cap C \cap ...$.

Если $A \cap B = \emptyset$, то эти множества являются непересекающимися или дизъюнктными. Случай пересечения двух множеств показан на рис. 1.5, трех множеств - на рис. 1.6.

Случай комбинации операций объединения и пересечения множеств показан на рис. 1.7.

Пример. Пусть $A=\{1,2,3,4,5\}$; $B=\{3,4,5,6\}$.

Тогда $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$; $A \cap B=\{3,4\}$.

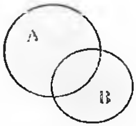


Рис. 1.5. A ∩ B

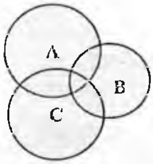


Рис. 1.6. A ∩ B∩C

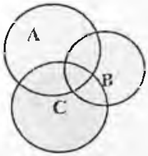


Рис. 1.7. (A∪B) ∩ (B∪C)

Свойства операций объединения и пересечения множеств:

1. $A \cup A = A \cap A = A$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
7. $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
8. $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
9. $A \cup B = B \cup A$
10. $A \cup (A \cap B) = A$
11. $A \cap (A \cup B) = A$
12. $A \cup \emptyset = A$
13. $A \cap \emptyset = \emptyset$
14. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
15. $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

3. ***Разностью*** множеств A и B, обозначаемой $A \backslash B$, называется множество, состоящее из таких элементов множества A, которые не принадлежат множеству B (рис. 1.8).

4. ***Симметрической разностью*** множеств A и B, обозначаемой $A \Delta B$, называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит или только множеству A, или только множеству B, т.е. $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (рис. 1.9).

5. Пусть $A \subset B$. ***Дополнением*** множества A относительно B, обозначаемым $C_B A$, называется множество, состоящее из элементов множества B, не принадлежащих множеству A (должно соблюдаться $A \subset B$), т.е. $C_в A = B \backslash A$ (рис.1.10).

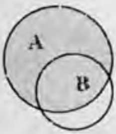


Рис. 1.8. $A \setminus B$

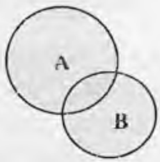


Рис. 1.9. $A \Delta B$

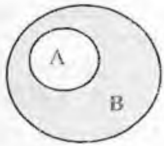


Рис. 1.10. $C_B A = B \setminus A$

Пример

Пусть $A = \{1,2,3,4,5\}$; $B=\{4,5,6,7,\}$; $C=\{3,4\}$;
Тогда $A \backslash B = \{1,2,3\}$; $A \Delta B = \{1,2,3,6,7\}$; $C_A C = \{1,2,5\}$;

Свойства операций разности, симметрической разности и дополнения множеств:

1. $A \setminus B \subseteq A$
2. $A \setminus A = \emptyset$
3. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
4. $A \Delta B = B \Delta A$
5. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$

12. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
13. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
14. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
15. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
16. $A \setminus (B) \setminus C = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
17. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

7. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \setminus B = A$

8. $A \cup C_E A = E$

9. $A \cap C_E A = \emptyset$

10. $C_E E = \emptyset$

11. $C_E \emptyset = E$

18. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

19. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

20. $C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

21. $C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

22. $A \subseteq B \Leftrightarrow C_E B \subseteq C_E A$

Все приведенные свойства операций над множествами легко проверяются путем логических рассуждений на основании определений этих операций.

§ 1.3. Элементы математической логики

Историческая справка:

Решающий шаг в создании математической логики – направления математики, посвященного изучению математических доказательств и вопросов обоснования математики, был сделан Джорджем Булем в 1847 г.

Д.Буль

Начало алгебраизации аристотелевой логики было положено шотландским математиком и логиком О.Морганом в 1858 г.

Американский философ, логик и математик Ч.Пирс ввел специальную символику для обозначения высказываний, выражающих отношения, в частности предикаты и кванторы $\forall x$ (квантор общности) и $\exists x$ (квантор существования), которые позволяют достичь однозначности высказываний.

Последний шаг в математизации логики в XIX веке был сделан Г.Фреге. Он ввел различие между простым утверждением высказывания и утверждением, что данное высказывание истинно. В последнем случае он ставил перед высказыванием знак $\vdash$.

Итальянский математик Д.Пеано применил символику математической логики для записи не только законов логики, но и математических аксиом.

Он ввел собственные символы для обозначения понятий, кванторов и таких связок, как «и», «или»,«не».

Логический язык был усовершенствован в работе Б.Рассела и Н.Уайтхеда «Основания математики» (1910-1913).

Рассел заявлял: «Тот факт, что вся математика есть не что иное, как символическая логика, - величайшее открытие нашего века».

В работах Фреге и Рассела был создан богатый логический аппарат, в результате чего, математическая логика стала полноценной математической дисциплиной.

Основные понятия и определения

Математика, как и ряд других точных наук, основана на *аксиомах* (утверждениях, принимаемых без доказательства), которые являются основанием теории, и *логике*, при помощи которой оперируют этими аксиомами и доказанными с их помощью теоремами для доказательства других теорем.

В логике *высказыванием называется любое утверждение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно либо истинно, либо ложно.*

Из определения высказывания следует, что не каждый набор слов и даже не каждое утверждение являются высказыванием.

Например:

1. Шесть является четным числом - истинное высказывание.
2. Семь больше пяти - истинное высказывание.
3. Два больше пяти - ложное высказывание.
4. Семь является четным числом - ложное высказывание.
5. Треугольник равнобедренный - не высказывание (не сказано, какой именно треугольник), нельзя судить об истинности или ложности.
6. Площадь круга меньше площади квадрата - не высказывание по тем же причинам (не указано, какого именно круга и какого именно квадрата).

Математические утверждения должны быть четкими и однозначно понимаемыми. Эта цель достигается использованием высказываний и *логических связок*, позволяющих из существующих высказываний формировать другие высказывания. Существует пять логических связок: частица *не* и союзы ***...и... , ...или... , если..., то..., ...тогда и только тогда, когда...*** .

Высказывания, сформированные без использования логических связок, называются *элементарными (простыми) высказываниями* и обозначаются строчными буквами латинского алфавита: *a, b, c, d*...

Высказывания, сформированные с использованием логических связок, называются *сложными (составными) высказываниями* и обозначаются прописными буквами латинского алфавита: *A, B, C*, D...

Каждая логическая связка имеет для обозначения свой собственный символ и производит *логическую операцию* над высказываниями, образовывая новое высказывание. Каждая логическая операция имеет название и обладает определенным логическим смыслом:

1. $\overline{p}$ (читается *не p*) обозначает высказывание, противоположное высказыванию *p* и называется *отрицанием* высказывания *p*. Данное высказывание истинно, когда *p* ложно и ложно, когда *p* истинно.

2. $p \wedge q$ (читается ***p и q***) обозначает высказывание, истинное только тогда, когда *p и q* оба истинны и называется *конъюнкцией* высказываний ***p и q***.

3. $p \vee q$ (читается *p или q*) обозначает высказывание, истинное тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний *p* или *q* (или оба) и называется *дизъюнкцией* высказываний *p* и *q*.

4. $p \rightarrow q$ (читается *если p, то q*) обозначает высказывание, истинное во всех случаях кроме того, когда *p* истинно, а *q* ложно, и называется *импликацией* высказываний *p* и *q*.

5. $p \leftrightarrow q$ (читается *p тогда и только тогда, когда q*)обозначает высказывание, истинное только тогда, когда p и *q* или оба истинны, или оба ложны, и называется *эквиваленцией* высказываний p и *q*.

Таблица 1

Свободная таблица истинности логических операций

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	-	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	-	1	1	1	1

Примеры

1. Отрицание

1.1. Дано высказывание: $\underbrace{\text{10 четное число.}}_{a}$ *Отрицание*: $\underbrace{\text{10 нечетное число.}}_{\overline{a}}$

Очевидно: высказывание $a = 1$ (истинно), $= 0$ (ложно).

1.2. Дано высказывание: $\underbrace{\text{0,3 целое число.}}_{b}$ *Отрицание*: $\underbrace{\text{0,3 целое число.}}_{\overline{b}}$

Очевидно: высказывание $b = 0$ (ложно), $\overline{b}=1$ (истинно).

2. Конъюнкция

2.1. Дано высказывание: $\underbrace{\text{6 четное число,}}_{a}$ *и* $\underbrace{\text{4 четное число.}}_{b}$

Запись в виде формулы: $a \wedge b$.

Очевидно: высказывание $a = 1$ (истинно), $b = 1$ (истинно). По определению онъюнкции: $a \wedge b=1$ (истинно).

2.2. Дано высказывание: $\underbrace{\text{6 четное число,}}_{a}$ и $\underbrace{\text{3 целое число}}_{b}$

Запись в виде формулы: $a \wedge b$.

Очевидно: высказывание $a = 1$ (истинно), $b = 0$ (ложно).

По определению конъюнкции: $a \wedge b =0$ (ложно).

3. Дизъюнкция

3.1.Дано высказывание: 3 *или* 2 есть делитель 9.

Данное высказывание состоит из двух элементарных высказываний:

a: 3 есть делитель 9 ; b: 2 есть делитель 9.

Запись в виде формулы: $a \vee b$.

Очевидно: высказывание $a =1$ (истинно), $b = 0$ (ложно).

По определению дизъюнкции: $a \vee b = 1$ (истинно).

3.2.Дано высказывание: 5 *или* 7 четное число.

Данное высказывание состоит из двух элементарных высказываний:

a: 5 четное число ; *b*: 7 четное число.

Запись в виде формулы: $a \vee b$.

Очевидно: высказывание a = 0 (ложно), *b*=0 (ложно).

По определению дизъюнкции: $a \vee b$=0 (ложно).

4. Импликация

4.1.Дано высказывание: если $\underbrace{\text{6 четное число}}_{a}$, *то* $\underbrace{\text{2 - делитель 6.}}_{b}$

Запись в виде формулы: $a \to b$.

Очевидно: высказывание *a* = 1 (истинно), *b*=1 (истинно). По определению импликации: $a \to b$=1 (истинно).

4.2.Дано высказывание: если $\underbrace{\text{7 четное число}}_{a}$, *то* $\underbrace{\text{2 - делитель 7.}}_{b}$

Запись в виде формулы: $a \to b$.

Очевидно: высказывание a=o (ложно), b=o (ложно).

По определению импликации: $a \to b$=1 (истинно).

5. Эквиваленция

5.1. Дано высказывание: $\underbrace{\text{10 четное число}}_{a}$, *тогда и только тогда, когда* $\underbrace{\text{2 делитель 10}}_{b}$

Запись в виде формулы: $a \leftrightarrow b$.

Очевидно: высказывание *a* = 1 (истинно). *b* =1 (истинно).

По определению эквиваленции: $a \leftrightarrow b$ = 1 (истинно).

5.2. Дано высказывание. $\underbrace{\text{11 четное число}}_{a}$ *тогда и только тогда, когда* $\underbrace{\text{2 – делитель 11}}_{b}$

Запись в виде формулы: $a \leftrightarrow b$.

Очевидно: высказывание *a* = 0 (ложно), *b* = 0 (ложно).

По определению эквиваленции: $a \leftrightarrow b$ = 1 (истинно).

§ 1.4. Алгебра логики

Любое сложное высказывание, образованное из элементарных высказываний с использованием логических операций, представляет собой ***формулу алгебры логики***.

Подобно тому, как в арифметике установлена последовательность выполнения арифметических операций, ***в алгебре логики***

установлена своя последовательность выполнения операций:

1. Операции в скобках.

2. Операция отрицания. Если под знаком <u>отрицания</u> находится совокупность операций, например $\overline{a \wedge b \vee c}$, то вначале выполняются эти операции, потом их отрицание.

3. Операция конъюнкции (^).

4. Операция дизъюнкции (v).

5. Операция импликации (→).

6. Операция эквиваленции (↔).

<u>Пример 1</u>

Дано высказывание:

$$A \equiv a \vee b \rightarrow c \wedge d \leftrightarrow k.$$

Указать порядок выполнения операций.

1) $c \wedge d$,

2) $a \vee b$,

3) $a \vee b \rightarrow c \wedge d$,

4) $a \vee b \rightarrow c \wedge d \leftrightarrow k$.

<u>Пример 2</u>

Дано высказывание:

$$B \equiv a \wedge b \vee \overline{a \wedge c} \rightarrow b.$$

Составить таблицу истинности (табл. 2):

Таблица 2

Таблица истинности высказывания **B**

a	*b*	*c*	$a \wedge c$	$\overline{a \wedge c}$	$a \wedge b$	$a \wedge b \vee \overline{a \wedge c}$	$a \wedge b \vee \overline{a \wedge c} \rightarrow b$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	1	0

Алгебра логики обладает законами, называемыми *основными эквивалентностями*, позволяющими упрощать формулы алгебры логики и приводить их к виду, удобному для решения поставленных задач.

Пример 3. Составить сводную таблицу истинности для правила де Моргана $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Таблица 3

Сводная таблица истинности

A	*B*	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Сводная таблица истинности показывает, что при одинаковых значениях истинности первоначальных высказываний *A* и *B* (1- и 2-й столбец) значения истинности проверяемых высказываний $\overline{A \wedge B}$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$ (4- и 7-й столбец) также одинаковы. Следовательно, эти высказывания эквивалентны, что и требовалось доказать.

Пример 4

Составить таблицу истинности для сложного высказывания *A* (табл.4):

$$A \equiv (p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r).$$

Решение: Высказывание *A* содержит три элементарных высказывания *p, q, r* ; его таблица истинности имеет $2^3 = 8$ строк.

Таблица 4

p	q	r	(p→q)	(q→r)	(p→q)∧(q→r)	(p→r)	A
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Составленная таблица истинности показывает, что на любом наборе значений истинности элементарных высказываний *p, q, r* сложное высказывание *A* всегда истинно. Следовательно, высказывание *A* – тавтология.

Аналогично можно найти ***тождественно ложные*** высказывания, например, $a \wedge \overline{a}$ всегда ложно.

Определение 1. Сложные высказывания, имеющие на любом наборе значений истинности входящих в них элементарных высказываний только истинное значение, называются ***тождественно истинными*** или тавтологиями.

Определение 2. Сложные высказывания, имеющие на любом наборе значений истинности входящих в них элементарных высказываний только ложное значение, называются **тождественно ложными.**

§ 1.5. Алгебра Буля

В алгебре логики широко используются алгебраический и функциональный языки.

При алгебраическом подходе логические операции интерпретируются как алгебраические, действующие на множестве из двух элементов {0;1} с использованием законов, представленных на основе ряда основных логических эквивалентностей.

При функциональном подходе каждой из основных логических операций сопоставляется определенная двузначная (например, 0 или 1) функция.

Функция n переменных, где каждая переменная принимает значение из множества {0;1}, а сама эта функция при любом наборе значений переменных принимает значение из того же множества {0;1}, называется ***функцией Буля*** или ***функцией алгебры логики n переменных.***

Число различных функций алгебры логики n переменных равно 2^{2^n}.

Как правило, булевы функции задаются таблицей.

Рассмотрим данный материал на примере.

Пример 1

Рассмотрим таблицу истинности для булевых функций одной переменной (табл.5). Она имеет $2^1 = 2$ строки и содержит $2^{2^1} = 4$ функции.

Таблица 5

Таблица истинности для $f(x)$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Видно, что две функции одной переменной являются постоянными, а две определяют унарную операцию отрицания:

$$f_1(x) \equiv 1, \quad f_2(x) \equiv x, \quad f_3(x) \equiv \bar{x}, \quad f_4(x) \equiv 0.$$

Пример 2

Рассмотрим таблицу истинности для булевых функций двух переменных (табл. 6). Она имеет $2^2 = 4$ строки и содержит 2^{2^2} = 16 функций.

Для краткости обозначим: $f_i = f_i$(x, y), (i=1,2,.....,16).

Из табл. 6 видно, что две функции являются постоянными, остальные содержат весь возможный набор унарных и бинарных логических операций.

Таблица 6

Таблица истинности для $f_i(x, y)$

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0

$f_1 \equiv 1$ $\quad$ $f_2 \equiv x \vee y$ $\quad$ $f_3 \equiv y \to x$ $\quad$ $f_4 \equiv x \to y$

$f_5 \equiv \overline{x \wedge y}$ $\quad$ $f_6 \equiv x$ $\quad$ $f_7 \equiv x \leftrightarrow y$ $\quad$ $f_8 \equiv \bar{x}$

$f_9 \equiv \overline{x \leftrightarrow y}$ $\quad$ $f_{10} \equiv \bar{y}$ $\quad$ $f_{11} \equiv y$ $\quad$ $f_{12} \equiv \overline{x \vee y}$

$f_{13} \equiv \overline{y \to x}$ $\quad$ $f_{14} \equiv \overline{x \to y}$ $\quad$ $f_{15} \equiv x \wedge y$ $\quad$ $f_{16} \equiv 0$

Без учета влияния ***случайных явлений*** *человек становится бессильным направлять развитие интересующих его процессов в желательном для него направлении.*

Б.В.Гнеденко

§ 1.6. Комбинаторика

В практической деятельности часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов осуществления некоторого события или число возможных способов расположения элементов.

Например, сколькими способами можно расположить 16 предметов по 2, сколькими способами 120 предметов можно распределить по 3 и т.д.

Задачи такого типа называются ***комбинаторными.***

Комбинаторные соображения лежат в основе решения различных задач, в том числе задач теории вероятностей и многих других.

Различают три вида соединений: размещения, перестановки, сочетания.

Размещения

Размещением *из n элементов по k элементов называется каждое его упорядоченное подмножество, содержащее k элементов.*

Размещения из *n элементов по k* элементов - это все подмножества, отличающиеся или составом элементов, или порядком их следования.

Так, если множество состоит из 3-х элементов *a*, *b*, *c*, то его размещения из 3-х элементов по 2 есть:

ab,ba,ca,ac,bc,cb.

Число всех размещений из n элементов по k элементов обозначается символом A_n^k.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$Очевидно:\ A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \qquad A_0^0 = 1$$

т.к. принято: 0!=1.

Пример

На факультете изучается 14 предметов. На среду нужно в расписание поставить 3 предмета. Сколькими способами можно это сделать?

Решение:

Способов постановки в расписание 3-х предметов из 14 столько, сколько можно составить размещений из 14 элементов по 3:

$$A_{14}^3 = \frac{14!}{(14-3)!} = \frac{11\cdot12\cdot13\cdot14}{11!} = 12\cdot13\cdot14 = 2184$$

Перестановки

Перестановками из n элементов называются размещения из n элементов по n элементов.

Очевидно, что перестановки различаются только порядком элементов.

Число перестановок n элементов обозначается P_n.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

Пример

Сколькими способами можно разместить на полке 6 книг?

Решение:

Число перестановок:

$$P_6 = 6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720$$

Ответ: 720-ю способами.

Сочетания

Сочетанием из n элементов по k элементов называется любое подмножество k элементов из множества n элементов.

Из определения следует, что различные сочетания отличаются неодинаковым составом элементов. Если же два подмножества различаются только порядком элементов, то они не считаются различными.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Пример

Из 10 объектов нужно отобрать 6. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)! \cdot 6!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$$

Ответ: 210-ю способами.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Приведите примеры множеств и числовых множеств.
2. Какие операции можно производить с множествами?
3. Что изучает логика?
4. Что представляет собой формула алгебры логики?
5. Дайте определения функции Буля.
6. Что изучает комбинаторика?
7. Дайте определение размещения, перестановки и сочетания. Приведите примеры.

ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Алгебра – это язык, не пользующийся словами,
а только математическими символами.
Д. Пойа

Историческая справка:

Так называемая «Линейная алгебра» появилась из решения систем двух и трех линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными. Такие системы умели решать еще древние вавилоняне. В связи с поиском наиболее рациональных приемов решения n линейных уравнений с m неизвестными возникла и начала развиваться в XVII веке теория определителей.

Дж. Кардано

Правило решения систем двух линейных уравнений по их коэффициентам дал итальянский математик Дж. Кардано.

Индексы в виде **2С, 3С, Сl, С2** применялись математиками Ф. ван Скоотеном, Ньютоном.

Лейбниц в 1693 году вводит не только индексы, но и двойные индексы.

Основы теории определителей заложил швейцарский математик Г.Крамер, известная под именем «правила Крамера» теорема была сформулирована им в 1750 году.

Термин «детерминант» - определитель происходит от латинского слова «determino»-«определяю» ввел О.Коши в 1815 году.

Знак определителя ввел английский математик В.Кэли.

Разработка теории матриц достигла большого развития в XIX веке. Понятие матрицы и ее ранга ввел английский математик Дж.Сильвестер.

Теория матриц применяется не только при исследовании систем линейных уравнений, но и во многих вопросах математического анализа, механики и физики.

§ 2.1. Определители

Определителем второго порядка называется число, которое символически обозначается

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и вычисляется по правилу $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

У элемента определителя a_{ij} первый индекс - i - номер строки; второй индекс - j - номер столбца.

Определителем третьего порядка называется число, которое символически обозначается:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и вычисляется по правилу

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Это правило называется ***правилом Саррюса.***

Ниже на иллюстрации показан способ запоминания группировки сомножителей, при этом произведения элементов определителя со своим знаком соединена сплошной линией, с противоположной - пунктирной.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Диагональ определителя от левого верхнего элемента к правому нижнему называется главной диагональю, от правого верхнего к левому нижнему - побочной диагональю (правило треугольника).

<u>Пример</u>

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

Свойства определителей:

< 1 >. Определитель не изменяется при замене строк столбцами.

Действие замены строк столбцами называется ***транспонированием.*** *Очевидно, строки и столбцы равноправны, а потому их можно называть* ***рядами.***

< 2 >. Определитель, ряд которого состоит из нулей, равен нулю.

< 3 >. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

< 4 >. Определитель поменяет знак, если в нем поменять местами два ряда.

< 5 >. Определитель увеличится в k раз, если элементы одного его ряда увеличить в k раз.

< 6 >. Определитель не изменится, если к элементам его ряда прибавить элементы параллельного ряда, умноженые на одно и то же число.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, полученный после вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, где i и j - номера строки и столбца соответственно, на пересечении которых находится элемент.

Таким образом, связь между минором M_{ij} и алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определяется формулой:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Определителем n-го порядка называется число, которое символически записывается:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель n - го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Рассмотрим приведенный материал на примерах.

Пример

Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение:

Вычисление определителя осуществляется разложением его по элементам первой строки:

$$\Delta = 2A_{11} - 1A_{12} + 1A_{13} =$$
$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} - 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot M_{13} =$$
$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (-4) + 2 + (-1) = -7.$$

Вычисление определителя разложением его по элементам второй строки:

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} - 1A_{22} + 2A_{23} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22} - 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot M_{23} =$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 2(-5) = -7.$$

Вычисление определителя разложением его по элементам первого столбца:

$$\Delta = 2A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 1A_{31} = 2 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + 1 \cdot (-1)^{3+1} M_{31} =$$
$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(2-6) + (2-1) = -7$$

В результате вычисления определителя разложением его по элементам различных рядов получен один и тот же результат. Удобно вычислять определитель по элементам того ряда, который содержит элементы, равные нулю.

Для практического использования удобно представить расположение знаков, с которыми нужно брать миноры в определителе третьего порядка для получения алгебраических дополнений; на схеме (+) – свой знак, (-) – противоположный:

$$\begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ (-) & (+) & (-) \\ (+) & (-) & (+) \end{vmatrix}$$

Очевидно, что в данном случае *алгебраические дополнения равны* своим минорам для элементов определителя, расположенных по главной и по побочной диагоналям. Для остальных элементов алгебраические дополнения равны минорам, взятым с противоположным знаком.

Еще один способ вычисления определителя третьего порядка.

$$\text{Пусть: } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Составим вспомогательную таблицу из столбцов определителя с добавлением первого и второго столбцов, см. ниже:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Произведение элементов, соединенных сплошной линией, следует брать со своим знаком, соединенных пунктирной линией - с противоположным знаком. Данный способ является правилом Сарриуса.

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 18 + 8 + 4 - 12 - 3 = 13 - 33 = -20.$$

§ 2.2. Матрицы

Историческая справка:

Если рассматривать вектор как элемент векторного пространства, то развитием понятия «вектор» является математическое понятие «матрица».

Термин «матрица» впервые появился в середине XIX в. в работах Гамильтона и Кэли. Понятие матрицы и ее ранга ввел английский математик Дж.Сильвестер. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Вейерштрассу, Жордану, Фробениусу.

Вейерштрасс

Матрицы встречаются во многих разделах чистой математики. Используются матрицы в теории кривых и поверхностей второго порядка, при записи квадратичных форм; в теории дифференциальных уравнений; в теории групп; в теории вероятностей и в других разделах математики.

Матричному исчислению обязана своим развитием квантовая теория.

В целом матричная алгебра - наиболее убедительный пример того, как одна и та же закономерность встречается при самых различных обстоятельствах.

Основные понятия и определения

Матрицей называется прямоугольная таблица элементов. Обозначаются матрицы заглавными латинскими буквами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Здесь a_{ij} - число, называемое ***элементом матрицы,*** состоящее на пересечении i - той строки и j - того столбца ($i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$). Показанную матрицу называют матрицей размера $m \times n$.

Матрица, у которой $m=n$, называется ***квадратной.***

Квадратная матрица, имеющая единицы по главной диагонали и остальные элементы, равные нулю, называется ***единичной*** и обозначается буквой E или I.

Матрица может иметь только одну строку (матрица-строка) или только один столбец (матрица-столбец).

Операция, при которой меняются местами строки и столбцы матрицы A с сохранением порядка элементов называется ***транспонированием.*** Полученная матрица называется ***транспонированной матрицей*** и обозначается A^T.

Две матрицы, имеющие одинаковые размеры, ***называются равными*** тогда и только тогда, когда равны их соответственные элементы.

Пусть даны две матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Используются сокращенные обозначения матриц:

$$A = \|a_{ij}\|, \qquad B = \|b_{ij}\|, \qquad где\ i = 1,2,3;\ j = 1,2,3.$$

Алгебра матриц

1. Чтобы *сложить две матрицы* (одинакового размера) нужно сложить их соответствующие элементы.

$$A + B = \left\|a_{ij} + b_{ij}\right\|.$$

2. Чтобы *матрицу умножить на число,* нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$\lambda A = \left\|\lambda \cdot a_{ij}\right\|.$$

3. Чтобы *умножить одну матрицу на другую* нужно воспользоваться правилом «строка на столбец». Умножение двух матриц *A и B* возможно только тогда, когда число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B* (в строке матрицы *A* столько же элементов, сколько элементов в столбце матрицы *B)*. Произведением матриц A и B будет матрица C, составленная определенным образом.

Рассмотрим умножение матриц в общем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Результатом умножения матрицы *A* на матрицу *B* будет матрица *C*, составляемая в виде: A×B=C=

$$= \begin{pmatrix} c_{11} = \sum\limits_{i=j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{i1} & c_{12} = \sum\limits_{i=j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{i2} & \cdots & c_{1p} = \sum\limits_{i=j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{ip} \\ c_{21} = \sum\limits_{i=j=1}^{n} a_{2j} \cdot b_{i1} & c_{22} = \sum\limits_{i=j=1}^{n} a_{2j} \cdot b_{i2} & \cdots & c_{2p} = \sum\limits_{i=j=1}^{n} a_{2j} \cdot b_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1} = \sum\limits_{i=j=1}^{n} a_{mj} \cdot b_{i1} & c_{m2} = \sum\limits_{i=j=1}^{n} a_{mj} \cdot b_{i2} & \cdots & c_{mp} = \sum\limits_{i=j=1}^{n} a_{mi} \cdot b_{ip} \end{pmatrix}.$$

Следует отметить ***порядок полученной матрицы C***: если матрица *A* порядка $m \times n$ умножалась на матрицу *B* порядка $n \times p$, то порядок полученной матрицы C равен $m \times p$.

Свойства произведения матриц

Если *A, B* и *C* такие матрицы, что для них имеют смысл произведения A·B=(A·B) и B·C=(B·C), тогда имеют смысл произведения:

$$(AB)\cdot C \quad \text{и} \quad A\cdot(BC)$$

и имеет место равенство:

$$(AB)\cdot C = A\cdot(BC).$$

В общем случае $A\cdot B \neq B\cdot A$, ***т.е. произведение матриц не обладает свойством коммутативности.***

Пример

Пусть даны две матрицы A и B. Рассмотрим их умножение, т.е. найдем AB и BA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 - 2\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 0\cdot 2 + (-1)(-1) + 1\cdot 3 & 0\cdot 1 - 1\cdot 2 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 2 - 1\cdot 1 + 0\cdot 3 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 0 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}\cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 2 & 2\cdot 2 - 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 & -1\cdot 2 - 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & -1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 2 & 3\cdot 2 - 0\cdot 1 + 2\cdot 1 & 3\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 8 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

т.е. $A\cdot B \neq B\cdot A$.

§ 2.3. Обратная матрица

Пусть A - *квадратная матрица.* Единственная матрица A^{-1}, от умножения которой на матрицу A как слева, так и справа, в результате получается единичная матрица Е, называется матрицей, ***обратной*** для матрицы A.

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E.$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы

< 1 >. Вычислить определитель матрицы A. Обозначить его $\Delta(A)$. Если $\Delta(A)=0$, матрица вырожденная, она не имеет обратной. Если $\Delta(A)\neq 0$, перейти к пункту 2.

< 2 >. Транспонировать матрицу A (поменять местами строки и столбцы) и полученную матрицу обозначить A^T .

< 3 >. Составить матрицу A* из алгебраических дополнений матрицы A^T.

Матрица A* называется взаимной или присоединенной для A.

< 4 >. Найти обратную матрицу A^{-1}; $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot A^*$.

Замечание: для проверки правильности вычисления обратной матрицы нужно вычислить $A^{-1}\cdot A$ и $A\cdot A^{-1}$. Если произведения равны между собой и равны единичной матрице E, то обратная матрица вычислена правильно.

Пример 1

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$ Найти обратную матрицу A^{-1}.

1. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0.$ Обратная матрица существует.

2. $A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$

3. $A^*=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -4 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$

4. $A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -4 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -4 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Аналогично находится $A\cdot A^{-1}$. При получении единичной матрицы в результате умножения матрицы на найденную обратную ей матрицу как слева, так и справа, следует, что обратная матрица найдена правильно.

§ 2.4. Ранг матрицы

1. ***Рангом матрицы*** называется *наибольший* из порядков тех определителей, отличных от нуля, которые можно составить из рядов матрицы.

Очевидно, что если равны нулю все определители порядка k, то ранг матрицы меньше числа k.

2. Наибольшее число линейно независимых строк (столбцов) матрицы ***называют рангом матрицы А.***

Эти определения эквивалентны.

Ранг матрицы ***А обозначают r*** **(А).**

Ранг матрицы можно найти двумя основными способами:

1) нахождением наибольшего из порядков определителей, отличных от нуля, составленных из рядов данной матрицы;

2) приведением матрицы к ступенчатому виду путем элементарных преобразований. Строки ступенчатой матрицы линейно независимы, следовательно, ранг матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Ступенчатая матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементарные преобразования матрицы:

1. Перестановка местами двух строк.
2. Исключение строки, состоящей из нулей.
3. Умножение всех элементов строки на одно и то же число, отличное от нуля.
4. Прибавление к элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Пример

Найти ранг матрицы приведением ее к ступенчатому виду путем элементарных преобразований.

Замечание. Число, на которое умножается строка матрицы указано напротив этой строки. Строка, с которой складывается данная строка, умноженная на соответствующее число, указана стрелкой.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \ \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-2) \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеются две ненулевых строки, следовательно, матрица имеет две линейно независимых строки, ранг матрицы $r(A) = 2$.

Особые виды матриц

Квадратная матрица A называется:
симметрической, если $A^т = A$;
кососимметрической, если $A^т = -A$;
ортогональной, если А не вырождена и $A^т = A^{-1}$.

Примеры матриц особых видов:

Симметрическая	*Кососимметрическая*	*Ортогональная*
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

§ 2.5.Системы линейных алгебраических уравнений

Основные понятия и определения

Уравнение называется ***линейным,*** если оно содержит переменные только в первой степени.

В общем виде система линейных алгебраических уравнений записывается (иногда с фигурной скобкой перед уравнениями):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

Числа *(i =1,2,⋯,m; j = 1,2, ⋯,n)* называются ***коэффициентами при переменных,*** а *(i =1,2,⋯,m)*- ***свободными членами.***

Система линейных уравнений называется ***неоднородной,*** если хотя бы одно из чисел $b_1, b_2,...,b_m$ не равно нулю.

$$\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2 \neq 0\right)$$

и ***однородной,*** если все числа $b_1, b_2,...,b_m$ равны нулю.

Решением системы уравнений называется совокупность числовых значений переменных, обращающих все уравнения системы в тождества (в верные равенства).

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной.*** Система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной.*** Совместная система, имеющая единственное решение, называется ***определенной.*** Совместная система, имеющая бесчисленное множество решений, называется ***неопределенной.***

§ 2.6. Решение системы уравнений матричным методом

Матрица, составленная из коэффициентов при переменных, называется ***матрицей системы.*** Обозначим ее А.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Обозначим: X - матрица переменных, B - матрица свободных членов. Тогда ***в матричной форме записи система линейных уравнений*** имеет вид:

$$A \cdot X = B, \quad \text{где} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если m = n (матрица A - квадратная), то для нахождения решения нужно обе части матричного уравнения умножить слева на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B; \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B;$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Матрица системы A, когда к ней добавлен столбец свободных членов, называется ***расширенной матрицей.*** Обозначим ее буквой D:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера-Капелли

Для того, чтобы система линейных уравнений была ***разрешима,*** *необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A равнялся рангу расширенной матрицы D:*

$$r(A) = r(D). \tag{2.3}$$

Если ранг матрицы A равен рангу матрицы D и равен числу переменных, то система имеет единственное решение, т.е. при

$$r(A) = r(D) = n. \tag{2.4}$$

Если ранг матрицы A равен рангу матрицы D, но меньше числа переменных, то система **имеет бесконечное множество решений** *(система неопределенная), т.е. при*

$$r(A) = r(D) < n. \tag{2.5}$$

<u>Пример 1</u>

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + z = -2 \end{cases}.$$

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Заданная система имеет вид $A \cdot X = B$ Матричная форма решения системы имеет вид:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

$$1)\ \Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -11 + 2 \cdot (-7) + 1 \cdot 5 = -20. \quad \Delta(A) \neq 0$$

Существует обратная матрица A^{-1}. Ранг матрицы A, что очевидно, $r(A) = r(D) = 3 = n$. Система имеет единственное решение. Найдем A^{-1}.

$$2)\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3)\ A^* = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -7 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 6 & -7 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 6 & -7 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -11 \cdot 4 + 6 \cdot 5 - 7 \cdot (-2) \\ 7 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-2) \\ 5 \cdot 4 - 10 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 0$; $y = -1$; $z = 2$.

§ 2.7. Решение системы уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса или ***метод последовательного исключения переменных*** наиболее удобен для практического нахождения решений системы уравнений.

Суть метода состоит в том, что из системы уравнений последовательно исключаются переменные до тех пор, пока система примет вид треугольника или трапеции (т.е. расширенная матрица системы примет ступенчатый вид).

Метод Гаусса ценен тем, что он применим к любой системе линейных уравнений. Недостаток метода в том, что только в процессе решения можно определить существование решения системы.

При решении системы уравнений нужно выписать расширенную матрицу и все преобразования выполнять со строками этой матрицы для приведения ее к ступенчатому виду. Иногда в расширенной матрице столбец свободных членов для удобства отделяют вертикальной чертой.

Пример 1

Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 2y - 5z = -9 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}.$$

Составим расширенную матрицу системы. Приведем ее к ступенчатому виду согласно элементарным преобразованиям матрицы. Поочередно умножим первую строку на соответствующее число (напротив строки перед стрелкой) и сложим с соответствующей строкой (указана стрелкой).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -9 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-2)\ \times(-4) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

Для получения нулевого коэффициента во втором столбце третьей строки во избежание дробей согласно элементарным преобразованиям матрицы предварительно умножим третью строку на 3 и сложим со второй строкой, умноженной на -11. Третья строка изменится, вторая - нет.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & 3 & 13 & 19 \\ 0 & 11 & 18 & 40 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-11) \\ \times 3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & 3 & 13 & 19 \\ 0 & 0 & -89 & -89 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :-89 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & 3 & 13 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Имеем систему уравнений «треугольного» вида:

$$\begin{cases} x-2y-5z=-9 \\ 3y+13z=19 \\ z=1 \end{cases}, \text{ откуда: } \quad \begin{aligned} &z=1; \\ &y=\frac{1}{3}(19-13)=2; \\ &x=4+5-9=0. \end{aligned}$$

Ответ: $x=0$; $y=2$; $z=1$.

§ 2.8. Решение системы уравнений по формулам Крамера

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}.$$

Определителем системы называют определитель, составленный из коэффициентов системы при переменых. Обозначим его Δ.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определителем замещения называют определитель, полученный из определителя системы заменой соответствующего столбца определителя системы столбцом свободных членов.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Формулы Крамера: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Доказано: система n линейных уравнений с n переменными, определитель которой отличен от нуля, имеет единственное решение. Это решение может быть найдено по формулам Крамера.

Если система n линейных уравнений с n переменными однородная, то она обладает решениями, отличными от нулевого тогда, когда определитель системы равен нулю.

Если определитель неоднородной системы линейных уравнений равен нулю, т.е. $\Delta = 0$, и при этом хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2, Δ_3 отличен от нуля, то система несовместна, т.е. не имеет ни одного решения.

Если при $\Delta = 0$ все определители $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3=0$, то система может не иметь решения. В случае, если при этом система имеет хотя бы одно решение, то она имеет бесконечное множество решений.

Пример

Установить, что система уравнений имеет единственное решение и найти это решение.

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x-3y-z=-7; \\ 4x+y-2z=0 \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-35.$$

Определитель системы $\Delta \neq 0$. Поэтому система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера. Для этого нужно найти определители замещения. Каждый из определителей будем вычислять разложением определителя по элементам столбца свободных членов, т. к. он содержит ноль, что сокращает количество вычислений.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -7 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot(6+1)+7\cdot(-4+3)=0;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -7 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-1\cdot(-4+4)-7\cdot(-2+12)=-70;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -7 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot(2+12)+7\cdot(1-8)=-35.$$

Применив формулы Крамера:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \textit{получим:}\ x=0;\ y=2;\ z=1.$$

Подстановка значений переменных в уравнения системы (провести самостоятельно) показывает, что решение системы найдено правильно.

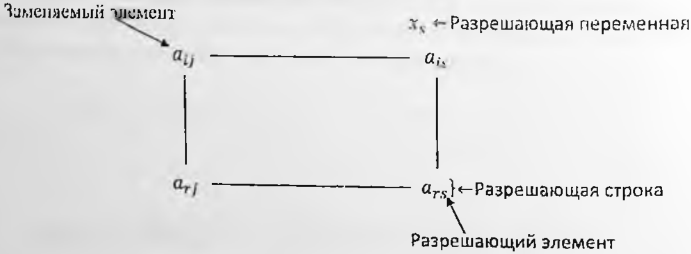
§ 2.9. Решение системы уравнений по методу Жордана – Гаусса

Метод Жордана—Гаусса решения систем линейных уравнений состоит в преобразовании расширенной матрицы системы $(A\backslash B)$ к виду, при котором r переменных системы (где r = rang $(A\backslash B)$) образуют диагональную матрицу с точностью до перестановки строк или столбцов, что позволяет сразу, без дополнительных преобразований, получить решение системы.

На каждом шагу решения выбирается *разрешающий элемент* $a_{rs} \neq 0$ (любой элемент матрицы A, отличный от нуля); r-я строка называется *разрешающей строкой, x_s – разрешающей переменной.* Для перехода к следующему шагу разрешающая переменная x_s исключается из всех остальных уравнений; элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, а элементы других строк заменяются на новые по следующему правилу (*правилу прямоугольника*):

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}}. \quad (*)$$

В формулах (*) исключения в числителе стоит произведение заменяемого и разрешающего элементов минус произведение элементов, стоящих в оставшихся углах прямоугольника:



После получения новой матрицы выбирается новый, отличный от нуля, разрешающий элемент в другой строке, вычисляется новая матрица и т.д., пока матрица А не будет приведена к диагональному виду.

Методом Жордана—Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 16 \end{cases}.$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & \boxed{1} & 4 & 2 & 6 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 16 \end{array}\right).$$

Шаг 1. В качестве разрешающего элемента удобно взять элемент, равный 1, например, $a_{12}=1\neq0$ (выделяем его квадратиком). Делим элементы разрешающей первой строки на разрешающий элемент a_{12}. Так как $a_{12}=1$, то элементы разрешающей строки не меняются. Разрешающую переменную x_2 следует исключить из остальных уравнений, поэтому в первой матрице все элементы второго столбца, кроме $a'_{12}=a_{12}=1$ будут равны нулю. Другие элементы новой матрицы находим по правилу прямоугольника:

Например:

$$a'_{21} = \frac{a_{21}\cdot a_{21} - a_{11}\cdot a_{22}}{a_{12}} = \frac{3\cdot 1 - 2\cdot 1}{1} = 1,$$

$$a'_{26} = \frac{a_{26}\cdot a_{12} - a_{22}\cdot a_{16}}{a_{12}} = \frac{10\cdot 1 - 2\cdot 16}{1} = -22 \text{ и т.д.}$$

Новая матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 16 \\ \boxed{-1} & 0 & -7 & -3 & -11 & -22 \\ -5 & 0 & -9 & -5 & -17 & -32 \end{array}\right).$$

Шаг 2. В качестве разрешающего элемента берем не равный нулю элемент из любой строки, кроме первой, например, $a_{21}=-1$, делим элементы разрешающей второй строки на (-1). Элементы первого столбца, кроме a_{21}, берем равными нулю, а остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника. Например,

$$a''_{14} = \frac{a'_{14}\cdot a'_{21} - a'_{11}\cdot a'_{24}}{a'_{21}} = \frac{2\cdot(-1) - 2\cdot(-3)}{-1} = -4,$$

$$a''_{36} = \frac{a'_{36}\cdot a'_{21} - a'_{31}\cdot a'_{26}}{a'_{21}} = \frac{(-32)\cdot(-1) - (-5)\cdot(-22)}{-1} = 78.$$

Новая матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -10 & -4 & -16 & -28 \\ 1 & 0 & 7 & 3 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 26 & \boxed{10} & 38 & 78 \end{array}\right).$$

Шаг 3. В качестве разрешающего берем элемент третьей строки, например, $a'_{34}=10\neq0$. После пересчета элементов получаем новую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0,4 & 0 & -0,8 & | & 3,2 \\ 1 & 0 & -0,8 & 0 & -0,4 & | & -1,4 \\ 0 & 0 & 2,6 & 1 & 3,8 & | & 7,8 \end{pmatrix}.$$

Так как все строки матрицы уже брались в качестве разрешающих, выписываем систему уравнений, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} x_2 + 0.4x_3 - 0.8x_5 = 3,2 \\ x_1 - 0,8x_3 - 0,4x_5 = -1,4. \\ 2,6x_3 + x_4 + 3,8x_5 = 7,8 \end{cases}$$

Полагая $x_3 = c_1, x_5 = c_2$, получим общее решение системы:

$$x_1 = -1,4 + 0,8c_1 + 0,4c_2; \quad x_2 = 3,2 - 0,4c_1 + 0.8c_2;$$

$$x_3 = c_1; \qquad x_4 = 7,8 - 2,6c_1 - 3,8c_2; \qquad x_5 = c_2,$$

где C_1, C_2 - любые числа.

$$Дано: A_{m \cdot n} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad X_{3 \cdot 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Задача:

Предприятие производит n-типов продукции, используя m-видов ресурсов. Нормы затрат ресурса i-го товара на производство единицы продукции j-го типа заданы матрицей A_{mn} затрат. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа X_{ij}, записанное матрицей X_{n}. Определить S - матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени.

Решение:

Матрица полных затрат ресурсов S определяется как произведение матриц, A и X, т.е. $S=A \cdot X$,
по условию задачи:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix},$$

т.е. за данный период времени будет израсходовано 930 ед. ресурса 1-го вида, 960 единиц ресурса 2-го вида, и 450 единиц ресурса 3-го вида, 690 единиц ресурса 4-го вида.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определения определителей II и III –го порядка.
2. Перечислите свойства определителей.
3. Назовите методы вычисления определителей.
4. Дайте определение матрицы.
5. Какие действия можно производить с матрицами?
6. Дайте определение ранга матрицы.
7. Назовите методы решения системы линейных уравнений.
8. Запишите формулы Крамера.
9. В чем состоит метод Жордана-Гаусса?

ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Я думаю, что нам необходимо иметь еще другой анализ, собственно геометрический или линейный, который давал бы нам возможность выражать непосредственно положение, подобно тому как с помощью алгебры выражают величину.

Г.Лейбниц

Историческая справка:

Г.Лейбниц

Чтобы иметь возможность для некоторых величин указывать не только их числовое значение, но и направление, было введено понятие вектора как направленного отрезка. Следовательно, вектор – абстракция математических объектов, характеризующихся модулем и направлением.

Примерами физических векторных величин являются перемещение, скорость, ускорение, напряженность электрического и магнитного полей.

Сам термин «вектор» (от лат. vector - несущий) впервые появился у Гамильтона в 1845г. Ему же принадлежат также термины «скаляр», «скалярное произведение», «векторное произведение».

Правила операций над векторами, привели к появлению сначала векторной алгебры, а затем и векторного анализа.

Основными понятиями векторного анализа являются «градиент», «дивергенция», «ротор».

Многие результаты векторного исчисления получены Грассманом и Клиффордом. Окончательный вид векторная алгебра и векторный анализ приобрели в трудах Д.Гиббса, который в 1901г. опубликовал обширный учебник по векторному анализу.

Гиббс показал связь векторной алгебры с теорией кватернионов и алгеброй Грассмана и был большим энтузиастом распространения векторного исчисления в различных областях точных наук.

Введение новых понятий заставило математиков отказаться от некоторых свойств, справедливых для понятий, рассматриваемых ранее. При введении операции векторного произведения пришлось отказаться от коммутативности произведения. Понятие вектора может быть введено аксиоматически, тогда вектор будет пониматься как элемент векторного пространства.

Развитием понятия «вектор», можно считать понятия «кватернион», «матрица» и «тензор».

§ 3.1. Векторы

Основные понятия

Величины, определяемые только численными значениями, называются *скалярными* или *скалярами.*

Величины, характеризуемые кроме численного значения еще и направлением, называются *векторными.*

Геометрически: *вектором* называется направленный отрезок прямой.

Арифметически: ***n-мерным вектором*** (арифметическим ***n*** - мерным вектором) называется любая конечная последовательность ***n*** чисел $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots a_n$, порядок записи которых фиксирован.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$ называются ***координатами*** вектора. Число *n* называется ***размерностью*** вектора.

Начало вектора находится в начале координат, координаты вектора определяются координатами конца вектора.

Каждому вектору соответствует матрица-строка или матрица-столбец.

Все присущие вектору свойства остаются неизменными, вне зависимости от того, в какой интерпретации (геометрической или арифметической) рассматривается этот вектор.

Векторы обозначаются двумя буквами с чертой $\overline{AB}$, где точка A - начало вектора, точка B - конец; или одной буквой: $\overline{a}$.

Пример обозначения вектора:

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n).$$

Модуль вектора $\bar{a}$ характеризует его длину и обозначается $|\overline{a}|$.

1. Вектор в n-мерном пространстве, модуль (длина) которого равен единице, называется ***единичным вектором.***

2. Вектор в n-мерном пространстве, i-тая координата которого равна единице, а остальные - нулю, называется ***i-ым ортом.***

3. Вектор, все координаты которого равны нулю, называется ***нулевым вектором*** или ***нуль - вектором*** и обозначается $\overline{0}$ или 0.

4. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются ***коллинеарными.***

5. Векторы, параллельные одной плоскости, называются ***компланарными.***

§ 3.2. Алгебра векторов

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с одним и тем же числом координат

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n); \overline{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

считаются равными тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты: $a_1=b_1$; $a_2=b_2$;; $a_n=b_n$.

Равенство векторов обозначается: $\overline{a} = \overline{b}$.

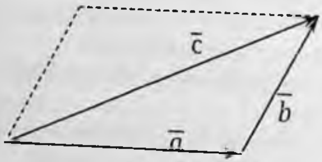


Рис 3.1

Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с одинаковым числом координат называется вектор $\overline{c} = \overline{a}+\overline{b} = (a_1+b_1; a_2+b_2; \cdots; a_n+b_n)$

Геометрически сумма векторов представлена на рис. 3.1.

Свойства сложения векторов:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (коммутативный закон):

2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (ассоциативный закон);

3) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$;

4) $\bar{b} - \bar{a} = \bar{b} + (-\bar{a})$; $\bar{a} + (-\bar{a}) = 0$,

где - $\overline{a}$ - вектор, ***противоположный*** вектору $\overline{a}$. Если вектор $\overline{a}=(a_1, a_2, , \cdots, a_n)$, то противоположный вектор $-\overline{a} = (-a_1, -a_2, , \cdots, -a_n)$.

Произведением вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, , \cdots, a_n)$ ***и числа (скаляра)*** λ **называется вектор** $\overline{c} = \lambda\overline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, , \cdots, \lambda a_n)$.

При этом длина (модуль) полученного вектора $\vec{c}$ равна произведению λ на длину вектора $\overline{a}$, а направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda>0$ и противоположно ему, если $\lambda < 0$.

Свойства произведения вектора и скаляра:

1) $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$ (дистрибутивный закон для векторов);

2) $(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$ (дистрибутивный закон для скаляров);

3) $\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$ (ассоциативный закон);

4) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.

§ 3.3.Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

Скалярное произведение векторов

Арифметически: ***скалярным произведением*** векторов

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n);\ \overline{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

обозначаемым $(\overline{a}, \overline{b})$ или $(\overline{a} \cdot \overline{b})$, называется *число*

$$(\overline{a}, \overline{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

равное сумме произведений соответствующих координат векторов.

Геометрически: *скалярным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *число*, равное произведению длин (модулей) этих векторов и косинуса угла между ними:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Оба определения скалярного произведения равноправны, они выводятся одно из другого путем математических преобразований. Как их следствие, получены формулы:

$$|a| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2)}; \quad \cos\varphi = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}.$$

Свойства скалярного произведения:

1) $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$ (коммутативность);

2) $(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{b}, \overline{a})$ (ассоциативность).

3) $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},\overline{c})+(\overline{b},\overline{c})$ (дистрибутивность);

4) $(\overline{a},\overline{a})>0$ при $\overline{a}\neq 0$; $(\overline{a},\overline{a})=0$ при $\overline{a}=0$;

5) $(\overline{a},\overline{b})=0$ при $\overline{a}\neq 0$; $\overline{b}\neq 0$ - условие перпендикулярности данных векторов

Единичные векторы (орты) прямоугольной декартовой системы координат по осям $0x;0y;0z$ обозначаются соответственно $\overline{i};\overline{j};\overline{k}$.

Очевидно: $(\overline{i},\overline{i})=1\cdot 1\cdot\cos 0=1$, $(\overline{i},\overline{j})=1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$ и т. д.

Скалярное произведение одноименных ортов (скалярный квадрат) равно единице.

Скалярное произведение разноименных ортов равно нулю.

Пусть - угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Очевидно:

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}.$$

Проекцию вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$ обозначим $пр_{\overline{a}}\overline{b}$. Очевидно, что

$$пр_{\overline{a}}\overline{b}=|b|\cdot\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi\cdot пр_{\overline{a}}\overline{b}.$$

Отсюда

$$пр_{\overline{a}}\overline{b}=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|}.$$

Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется третий вектор $\overline{c}$, обозначаемый $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ или $\overline{c}=[\overline{a},\overline{b}]$ и удовлетворяющий трем условиям:

1. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярен плоскости, содержащей векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2. Длина вектора $\overline{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на сторонах $|\overline{c}|=|\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

3. Вектор $\overline{c}$ имеет такое направление, что три вектора $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку.

Свойства векторного произведения.

1) $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$;

2) $\overline{a}\times\overline{b}=0$ при $|\overline{a}|\neq 0,|\overline{b}|\neq 0$, *если* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ коллинеарны;

3) $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$ (распределительный закон);

4) $\overline{a} \times \lambda\overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b})$ (сочетательный относительно числового множителя закон).

Векторное произведение ортов:

1. $\overline{i} \times \overline{i} = 0$, $\overline{j} \times \overline{j} = 0$, $\overline{k} \times \overline{k} = 0$;

2. $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$, $\overline{i} \times \overline{k} = -\overline{j}$, $\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}, \overline{k} \times \overline{j} = -\overline{i}$ и т. д.

Доказано, что для двух векторов .

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k} \quad \text{и} \quad \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$$

векторное произведение равно:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Пример

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k},$$
$$\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$$

как на сторонах.

Решение:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \overline{i}\,(2-2) - \overline{j}\,(-3-1) + \overline{k}(6+2) = 4\overline{j} + 8\overline{k} = 4(\overline{j} + 2\overline{k}).$$

Площадь параллелограмма

$S_{пар} = |\overline{a} \times \overline{b}| = 4\sqrt{1^2 + 2^2} = 4\sqrt{5}$ (кв. ед.).

Смешанное произведение

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число, полученное в результате скалярного произведения векторов $\overline{a} \times \overline{b}$ и $\overline{c}$.

Смешанное произведение обозначается

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \text{ или } (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}).$$

Свойства смешанного произведения

1. Знаки (×) и (·) можно менять местами:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}).$$

2. $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=0$ при $\overline{a}\neq 0, \overline{b}\neq 0, \overline{c}\neq 0$, если векторы компланарные или два вектора коллинеарные.

3. Смешанное произведение не изменяется при круговой перестановке векторов и меняет знак на противоположный, если поменять местами два вектора.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{a}=\overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b},$$

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=-\overline{b}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c}.$$

4. Геометрический смысл смешанного произведения: модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах, как на сторонах.

Смешанное произведение трех векторов равно определителю третьего порядка, элементы строк которого есть координаты векторов:

$$\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k};$$
$$\overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k};$$
$$\overline{c}=x_3\overline{i}+y_3\overline{j}+z_3\overline{k};$$

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

§ 3.4 Линейная зависимость векторов

Понятие линейной зависимости является основополагающим при рассмотрении свойств системы векторов.

Пусть дана совокупность векторов:

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p.$$

Совокупность векторов называется ***системой векторов.***

Данную систему векторов можно записать $\overline{a}_i (i=1,2,\cdots p)$, но в общем случае векторы системы могут обозначаться различными буквами, что усложняет запись (например, система векторов: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}$).

Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$ называется ***линейно независимой***, если не существует таких постоянных $\beta_i (i = 1,2, \cdots p)$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, чтобы выполнялось равенство:

$$\beta_1\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 + \cdots + \beta_p\overline{a}_p = 0. \qquad (*)$$

В противном случае, т.е. если такие постоянные существуют, то имеется хотя бы один вектор, являющийся линейной комбинацией остальных, а система векторов называется ***линейно зависимой.***

Вектор $\overline{a}$ является линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$ в том случае, если его можно представить в виде суммы произведений данных векторов на любые действительные числа $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_p$., т.е. в виде:

$$\overline{a} = \beta_1\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 + \cdots + \beta_p\overline{a}_p$$

Данное выражение также называют ***разложением вектора*** $\overline{a}$ по векторам $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$ или говорят, что ***вектор линейно выражается*** через векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$.

Основные свойства линейной зависимости систем векторов:

1. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор - нулевой.

2. Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

3. Система, состоящая более чем из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее векторов линейно выражается через остальные.

4. Если часть системы векторов линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима.

5. Если система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$ линейно независима, но после добавления к ней еще одного вектора $\bar{a}$ становится линейно зависимой, то вектор $\bar{a}$ линейно выражается через векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$.

6. Любая ступенчатая система векторов, например,

$$\begin{array}{lllll}
\overline{a}_1 & = & (a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}) \\
\overline{a}_2 & = & (0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}) \\
\overline{a}_3 & = & (0 & 0 & a_{33} & a_{34}) \\
\overline{a}_4 & = & (0 & 0 & 0 & a_{44})
\end{array}$$

линейно независима.

Доказательства свойств линейной зависимости систем векторов:

1. Если в системе только один вектор $\overline{a}$, то равенство $\beta \cdot \overline{a}$ при $\beta \neq 0$ выполняется только тогда, когда $\overline{a} = \overline{0}$.

2. Если система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$ содержит нулевой вектор, например $\overline{a}_1 = \overline{0}$, то условие линейной зависимости (*) выполняется:

$$1 \cdot \overline{a}_1 + 0 \cdot \overline{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \overline{a}_p = 0.$$

3. Если в системе векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$ один из векторов линейно выражается через остальные:

$$\overline{a}_1 = \beta_2 \overline{a}_2 + \cdots + \beta_p \overline{a}_p, \text{ то:}$$

$$(-1)\overline{a}_1 + \beta_2 \overline{a}_2 + \cdots + \beta_p \overline{a}_p = 0.$$

4. Пусть система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ линейно зависима, тогда для соблюдения условия (*) существует набор постоянных β_1, $\beta_2 \cdots \beta_m$, из которых хотя бы одно не равно нулю. Рассмотрим систему векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_m, \overline{a}_{m+1}, \cdots, \overline{a}_p$, составной частью которой является линейно зависимая система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_m$. Очевидно соблюдение условия линейной зависимости: $\beta_1 \overline{a}_1 + \beta_2 \overline{a}_2 + \cdots + \beta_m \overline{a}_m + 0 \cdot \overline{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \overline{a}_p = 0$, что обеспечивается наличием одновременно не равных нулю постоянных $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$, при этом остальные постоянные можно брать равными нулю.

5. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$ линейно независима, следовательно, выполнение равенства (*) возможно только при $\beta_1 = \beta_2 = \cdots \beta_p = 0$. Для системы векторов $\overline{a}, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$ при $\beta = 0$ выполнение равенства (*) возможно только при $\beta_1 = \beta_2 = \cdots \beta_p = 0$, что противоречит наличию линейной зависимости. Следовательно, постоянное $\beta \neq 0$ по условию линейной зависимости (*) $-\beta \overline{a} = \beta_1 \overline{a}_1 + \beta_2 \overline{a}_2 + \cdots + \beta_p \overline{a}_p = 0$, откуда следует $\beta \overline{a} = \beta_1 \overline{a}_1 + \beta_2 \overline{a}_2 + \cdots + \beta_p \overline{a}_p$, что и требовалось доказать.

6. Если бы рассматриваемая ступенчатая система векторов была линейно зависимой, то один из векторов можно было бы представить в виде линейной комбинации остальных, например $\overline{a}_1 = \beta_2 \overline{a}_2 + \beta_3 \overline{a}_3 + \beta_4 \overline{a}_4$. Это невозможно, т.к. первая координата вектора $\overline{a}_1$ отлична от нуля, а у остальных векторов равна нулю. Аналогично для остальных векторов.

Наличие линейной зависимости определяет многие свойства системы векторов, в частности:

1. Если система из двух векторов $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ линейно зависима, то выполняется:

$$\beta_1\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{a}_1 + \lambda\overline{a}_2.$$

Следовательно, рассматриваемые векторы коллинеарные (т.е. лежат на одной прямой или на параллельных прямых).

2. Если система из трех векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ и $\overline{a}_3$ линейно зависима, то выполняется:

$$\beta_1\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 + \beta_3\overline{a}_3 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{a}_1 = \mu\overline{a}_2 + \lambda\overline{a}_3.$$

Следовательно, рассматриваемые векторы компланарны, (т.е. параллельны одной плоскости).

Данный список свойств, зависящих от наличия линейной зависимости системы векторов, велик. Многие свойства будут приведены при дальнейшем изложении теоретического материала.

Наличие линейной зависимости в системе векторов в некоторых случаях очевидно, в частности система векторов:

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 &= (1,0,2,-1\ ); \\ \overline{a}_2 &= (-2,0,-4,2); \qquad\qquad \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + (-1)\overline{a}_3 = 0 \\ \overline{a}_3 &= (-1,0,-2,1); \end{aligned}$$

имеет очевидную линейную зависимость.

Однако в общем случае установить линейную зависимость бывает не так просто. Например, система векторов:

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 &= (3,1,4,-1\ ); \\ \overline{a}_2 &= (\ 1,-2\ ,3\ ,1\ ); \\ \overline{a}_3 &= (18,-1,29,-2) \end{aligned}$$

на первый взгляд не имеет линейной зависимости, но

$$5\overline{a}_1 + 3\overline{a}_2 - \overline{a}_3 = 0.$$

Для установления наличия линейной зависимости в системе векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots \overline{a}_p$ необходимо убедиться в существовании одновременно не равных нулю постоянных $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$, обеспечивающих выполнение равенства (*): $\beta_1\bar{a}_1 + \beta_2\bar{a}_2 + \ldots + \beta_p\bar{a}_p = 0$.

Аналитически доказательство равенства нулю суммы векторов (произведений вектора и скаляра) сводится к доказательству равенства нулю всех сумм одноименных координат (их произведений на скаляры). Пусть рассматриваемые векторы имеют координаты:

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}; \ \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}; \cdots; \overline{a}_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix};$$

тогда равенство (*) в матричной форме принимает вид:

$$\beta_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1 a_{11} \\ \beta_1 a_{21} \\ \vdots \\ \beta_1 a_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_2 a_{22} \\ \beta_2 a_{22} \\ \vdots \\ \beta_2 a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \beta_p a_{1p} \\ \beta_p a_{2p} \\ \vdots \\ \beta_p a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство можно записать в виде:

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1p}\beta_p = 0 \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2p}\beta_p = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \cdots + a_{np}\beta_p = 0 \end{cases},$$

что представляет собой систему однородных линейных уравнений с неизвестными $\beta_1, \beta_2 = \beta_p$ порядка $n \times p$ (n уравнений с p неизвестными).

Таким образом, *определение линейной зависимости в системе векторов сводится к решению системы линейных однородных уравнений.*

Очевидно нулевое решение системы $\beta_1 = \beta_2 = \cdots \beta_p = 0$.

Если система уравнений кроме нулевого имеет еще и ненулевые решения, то система векторов линейно зависима, если ненулевых решений нет, то система векторов линейно независима.

В пространстве R^n любая система из p векторов, в которой $p > n$, линейно зависима.

<u>Пример 1</u>

Установить наличие линейной зависимости в системе векторов:

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 &= (1 \quad 3 \quad -1 \quad 2); \\ \overline{a}_2 &= (2 \quad 1 \quad 2 \quad -3); \\ \overline{a}_3 &= (1 \quad 1 \quad 3 \quad 2); \\ \overline{a}_4 &= (-1 \quad 3 \quad 4 \quad 1). \end{aligned}$$

Условию линейной зависимости данной системы векторов с коэффициентами x_1, x_2, x_3, x_4 соответствует система линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times 3 \quad \times 2 \\ (-) \\ (+) \\ (-) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \times 4 \quad \times 7 \\ \times 5(-) \\ \times 5(-) \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -12 & -39 \\ 0 & 0 & 14 & 27 \end{pmatrix} : (-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 14 & 27 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \times 7 \\ \times 2(-) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 87 \end{pmatrix}.$$

Получена ступенчатая матрица коэффициентов системы линейных однородных уравнений треугольного вида. Следовательно, система уравнений имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
Заданная система векторов линейно независима.

<u>Задача:</u>

Предприятие выпускает 4 вида продукции P_1, P_2, P_3, P_4, в количествах 50, 80, 20, 120 единиц. При этом нормы расхода сырья составляют соответственно 7; 3,5; 10; 4 кг. Определить суммарный расход сырья и его изменения при изменениях выпуска продукции P_1, P_2, P_3, P_4, соответственно +5,-4,-2,+10 единиц.

<u>Решение:</u>

Пусть вектор выпуска продукции x=(50;80;20;120), а вектор расхода сырья y=(7;3,5;10;4). Тогда суммарный расход сырья S есть скалярное произведение векторов x и y, т.е.

$$S=(x,y)=50\cdot7+80\cdot3{,}5+20\cdot10+120\cdot4=1310 \text{ (кг)}.$$

По свойству скалярного произведения векторов изменение суммарного расхода сырья:

$$\Delta S= (x+ \Delta x,y)- (x,y)=(\Delta x,y)=+5\cdot7-4\cdot3{,}5-2\cdot10+10\cdot4=41 \text{ (кг)}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение скалярных и векторных величин.
2. Что называется вектором ?
3. Сформулируйте правила сложения, вычитания двух векторов и умножения вектора на число.
4. Какие векторы называются компланарными, коллинеарными, равными и противоположными?
5. Что называется проекцией вектора на ось?
6. Как записывается вектор в прямоугольном базисе?
7. Что называется скалярным произведением векторов и каковы его свойства?

ГЛАВА 4

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

До тех пор пока алгебра и геометрия двигались различными путями, их развитие было медленным, а применение ограниченным. Но когда эти науки объединились, они почерпнули друг у друга свежие силы и в результате быстро двинулись вперед к совершенству.

Ж. Лагранж

Историческая справка:

Ж.Лагранж

Аналитическая геометрия - наука, изучающая геометрические фигуры и преобразования, задаваемые алгебраическими уравнениями. Сочинение Рене Декарта «Геометрия» - первое сочинение по аналитической геометрии, сыгравшее огромную роль в дальнейшем развитии математики. Введение прямоугольных координат нашли свое воплощение в сочинении математика Ферма. На развитии аналитической геометрии большую роль сыграли работы: Ньютона, Монжа, Клеро, Лагранжа и других. Во второй половине XVIII века аналитическая геометрия вводится в программы вузов.

Рене Декарт

Первым учебником по аналитической геометрии был учебник Лакруа, в котором и появилось название этой науки - аналитическая геометрия.

В основе аналитической геометрии, созданной П.Ферма и Р.Декартом, лежат две идеи:

1) каждой точке плоскости ставится в соответствие два числа и наоборот;

2) любое уравнение с двумя неизвестными определяет некоторую линию на плоскости и наоборот.

Развитию пространственной аналитической геометрии способствовали работы Л.Эйлера, Г.Монжа и Ж.Лагранжа.

§ 4.1. Декартовая и полярная системы координат

Прямоугольные координаты на плоскости

Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси с одинаковой единицей длины.

Обозначим их Ox и Oy. За начало отсчета по обеим осям примем точку их пересечения O. При этом ось Ox называется осью абсцисс, Oy – осью ординат. Тем самым составим систему координат на плоскости. Из произвольной точки M опустим перпендикуляр MN и MP на Oy и Ox.

Пусть x называется *абсциссой, y - ординатой* точки, оба числа вместе -*координатами* точки M. Координаты записывают рядом с обозначением точки: $M(x;y)$.

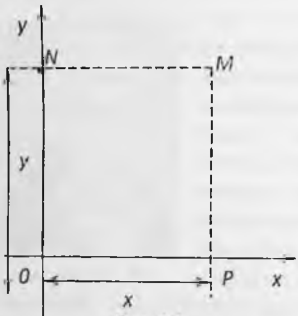


Рис. 4.1

При этом на первом месте в скобках пишут абсциссу точки.

Следовательно, каждой точке на плоскости в системе прямоугольных координат отвечает «упорядоченная» пара действительных чисел $(x;y)$, т.е. таких чисел, для которых известно, какое считается первым, а какое - вторым. Если точка M совершает движение по плоскости Oxy, то ее координаты будут меняться.

Полярная система координат

Пусть на плоскости задана некоторая точка O, называемая полюсом, проходящая через нее ось OP, называется полярной осью.

Будем определять положение произвольной точки M на плоскости относительно полюса O и полярной оси OP. $OM = r$ – полярный радиус. Угол между полярной осью и полярным радиусом обозначим через φ. Точка O - полюс, OP - полярная ось. Угол будем брать в границах между - *П* и *П*. φ - полярной угол $-\pi<\varphi\leq\pi$. Тогда каждой паре чисел, r и φ соответствует единственная точка плоскости, r и φ - полярные координаты произвольной точки M - $M(r;\ \varphi)$.

Связь между декартовыми полярпыми координатами одной и той же точки

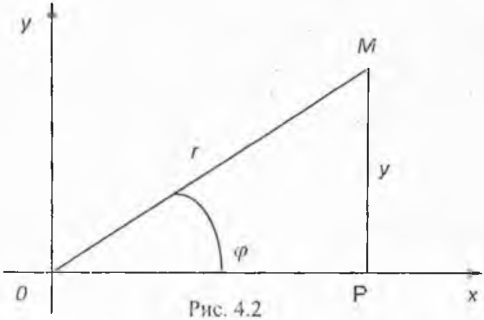


Рис. 4.2

$$\text{из} \quad \Delta OMP \Longrightarrow \left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Формула (4.1) означаст переход от полярной системы координат к декартовой, т.е. мы нашли декартовые координаты точки М (x;y)

Возведем обе части равенства (4.1) в квадрат и почленно сложим, чтобы найти полярные координаты точки *M(x;y)*:

$$x^2 = r^2\cdot\cos^2\varphi; \quad x^2+y^2 = (\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\cdot r^2,$$
$$y^2 = r^2\cdot\sin^2\varphi; \qquad x^2+y^2 = r^2.$$

Откуда:
$$r = \sqrt{x^2+y^2}; \quad tg\,\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (4.2)$$

Формула (4.2) означает переход от декартовой системы координат к полярной.

Пример

Дана точка M(1;1). Найти се координаты в полярной системе координат.

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; \quad tg\,\varphi = \frac{1}{1}; \ \varphi = \frac{\pi}{4}; \ \textit{тогда}\ M\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right).$$

§ 4.2. Прямая на плоскости

Одна и та же прямая на плоскости в одной и той же системе координат может иметь различные уравнения, различающиеся между собой только по форме записи.

При решении задач выбирают ту форму записи уравнения прямой, которая позволяет наиболее просто решить поставленную задачу.

Рассмотрим эти формы записи уравнения прямой.

<u>Уравнение прямой с угловым коэффициентом</u>

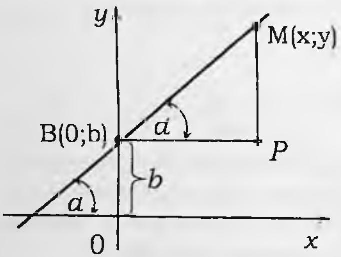


Рис.4.3

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс того угла, на который нужно в положительном направлении (против часовой стрелки) повернуть ось Оx вокруг начала координат О, чтобы прямая стала параллельной этой оси, например, угла α на рис. 4.3.

Пусть дана прямая, например, см. рис.4.3.

M(x, y) -произвольно выбранная точка, принадлежащая этой прямой.

α – угол, соответствующий угловому коэффициенту прямой.

b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Оу.

Очевидно: где бы на прямой ни лежала точка М (х,у), в треугольнике *BMP* всегда справедливо соотношение:

$$\frac{|MP|}{|BP|} = \operatorname{tg}\alpha, \text{т.е.} \frac{y-b}{x} = \operatorname{tg}\alpha = k,$$

где k -угловой коэффициент прямой.

Из последнего равенства получаем:

$$y = kx + b. \qquad (4.3)$$

Уравнение (4.3) *есть **уравнение прямой с угловым коэффициентом.***

Любая прямая, не параллельная оси Оу, может быть представлена в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом.

Исследование уравнения прямой с угловым коэффициентом

1) при $b = 0$, $y = kx$ – уравнение пучка прямых, проходящих через начало координат;

2) при $k = 0$, $y = b$ – уравнение прямой, параллельной оси Ох;

3) при $k = 0$ и $b = 0$, $y = 0$ – уравнение оси Ox.

Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом (нахождения углового коэффициента прямой) нужно уравнение прямой разрешить относительно у.

Пример 1

Найти угловые коэффициенты прямых:

1. $2x - y = 4$. *Имеем:* $y = 2x - 4$, $k = 2$.
2. $3x + 5y + 6 = 0$, $5y = -3x - 6$, $y = -\frac{3}{5}x - \frac{6}{5}$, $к = -\frac{3}{5}$.
3. $4x + 2y - 5 = 0$, $2y = -4x + 5$, $y = -2x + 2{,}5$. $к = -2$.

Пример 2

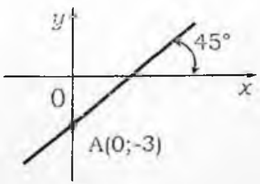


Рис.4.4

Прямая проходит под углом 45° к положительному направлению оси Ox (см.рис.4.4), и пересекает ось Оу в точке $A(0;-3)$. Написать уравнение с угловым коэффициентом этой прямой.

Решение

$$b = -3,\ k = \mathrm{tg}45° = 1.$$
$$y = x - 3.$$

Уравнение прямой в общем виде и его исследования

Общее уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$ определяет прямую линию. Исследуем ее уравнение:

1. Если $C=0$, то $Ax+By=0$. Это есть уравнение прямой, проходящей через начало координат.

2. Если $A=0$, то $By+C=0$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси OX.

3. Если $B=0$, то $Ax+C=0$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси OY.

4. Если $C=0$ и B=0, то эта прямая совпадает с осью OY.

5. Если $C=0$ и $A=0$, $By=0$, эта прямая совпадает с осью OX.

§4.3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку

Любую прямую, не параллельную оси Oy, можно задать уравнением (4.3): $y = kx + b$.

Потребуем от прямой, чтобы она прошла через заданную точку $M(x_0;y_0)$ с фиксированными координатами. Координаты точки должны удовлетворять уравнению прямой, т.к. прямая проходит через нее. Следовательно, для точки $M(x_0;y_0)$ должно быть справедливо соотношение (4.3):

$$y_0=kx_0+b. \tag{4.4}$$

Вычтем почленно уравнение (4.4) из (4.3). Получим:

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) называется ***уравнением прямой, проходящей через заданную точку*** *с координатами* $(x_0; y_0)$.

Пример

Найти уравнение пучка прямых, проходящих через заданную точку M: (3;2).

Решение:

Уравнение пучка прямых, согласно (4.5): $y-2=k(x-3)$.

Тривиальный случай: $x = 3$.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Две точки однозначно определяют единственную прямую.

Пусть прямая проходит через точку M_1 $(x_1; y_2)$. Тогда согласно (4.5), ее уравнение можно записать:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{4.6}$$

Потребуем от прямой, чтобы она прошла через точку $M_2(x_2;y_2)$. Тогда координаты точки $M_2(x_2;y_2)$ должны удовлетворять уравнению (4.6), т.е. должно быть справедливым соотношение:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1). \tag{4.7}$$

Почленно разделим (4.6) на (4.7). Получим:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.8}$$

Уравнение (4.8) ***называется уравнением прямой, проходящей через две заданные точки*** *с координатами* $(x_1; y_1)$ *и* (x_2, y_2) *соответственно.*

Пример

Написать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: M_1 (1;3) и M_2(-3;4).

Решение:

Согласно (4.8), имеем:

$$\frac{y - 3}{4 - 3} = \frac{x - 1}{-3 - 4}.$$

После преобразований получим уравнение прямой общего вида:

$$x + 4y - 13 = 0.$$

Уравнение прямой в отрезках на осях

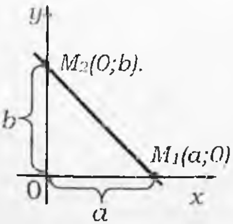


Рис.4.5

Пусть прямая отсекает от осей координат отрезки a и b соответственно. Тогда координаты точек пересечения прямой с осями координат соответственно $M_1(a;0)$ и $M_2(0;b)$. Эти точки лежат на прямой, а потому их координаты должны удовлетворять уравнению прямой (записанному в общем виде). Подставим координаты каждой точки в уравнение прямой общего вида:

$$Ax+By+C=0.$$

$$M_1(a;0):\ A \cdot a + B \cdot 0 + C = 0,\quad A \cdot a + C = 0,\qquad A = -\frac{C}{a};$$

$$M_2(0;b):\ A \cdot 0 + B \cdot b + C = 0,\quad B \cdot b + C = 0,\qquad B = -\frac{C}{b}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в уравнение прямой общего вида, получим:

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

Разделим обе части уравнения на (-C) и преобразуем:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

*Это уравнение называется **уравнением прямой в отрезках на осях** (a и b соответственно).*

Пример

Написать в общем виде уравнение прямой, отсекающей от положительных направлений осей координат Ox и Oy отрезки, равные 4 и 5 единицам, соответственно.

Решение:

Уравнение прямой в отрезках на осях имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, тогда

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1.$$

После преобразований получим уравнение прямой в общем виде:

$$5x + 4y - 20 = 0.$$

§ 4.4.Нормальное уравнение прямой

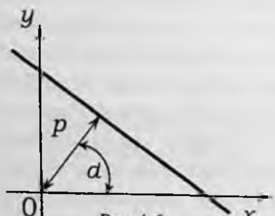


Рис.4.6

Расстояние от прямой до начала координат равно *p*, угол, образованный нормалью к прямой с осью O_x, как показано на рис. 4.6, равен α. Уравнение прямой имеет вид:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0. \qquad (4.9)$$

*Это уравнение называется **нормальным уравнением прямой.***

Для приведения уравнения прямой к нормальному виду нужно обе части уравнения прямой общего вида умножить на коэффициент перехода μ.

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.10)$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой, заданной уравнением общего вида $Ax + By + C = 0$, определяется формулой:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \qquad (4.11)$$

Пример 1

Расстояние от прямой до начала координат равно 5, угол, образованный нормалью к прямой с осью Ox, равен 30°. Написать уравнение прямой.

Решение:

Согласно (4.9), найдем значения коэффициентов и запишем уравнение прямой: $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, p = 5.$

Уравнение прямой:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 5 = 0,$$

$$\sqrt{3x} + y - 10 = 0\,.$$

Пример 2

Найти расстояние d от точки M(-2;3) до прямой 3x-4y + 5 = 0.

Решение:

Согласно (4.11), расстояние от точки до прямой:

$$d = \left|\frac{3\cdot(-2) - 4\cdot 3 + 5}{\pm\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = \left|\frac{-6 - 12 + 5}{\pm 5}\right| = \frac{13}{5}.$$

Угол между прямыми

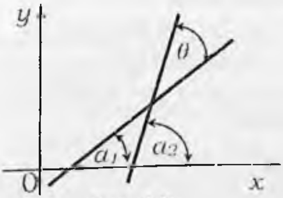


Рис. 4.7

Прямые заданы уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$. Пусть α_1 и α_2 – углы, соответствующие k_1 и k_2 соответственно, а θ - угол между прямыми, см. рис.4.7.

Очевидно, $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

$\theta < \frac{\pi}{2}: \quad tg\,\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$ – угол между двумя прямыми. (4.12)

$$\textit{При}\ \theta = 0°; \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}0° = 0, \boxed{k_1 = k_2}$$

- условие параллельности прямых.

$$\textit{При}\ \theta = \frac{\pi}{2}; \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \pm\infty, k_1 k_2 = -1, \boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$$

- условие перпендикулярности прямых.

<u>*Примечание*</u>. Если уравнения прямых заданы в общем виде, то признаком параллельности прямых является пропорциональность коэффициентов при *x и y*.

<u>Пример</u>

Даны две прямые, заданные уравнениями:

$$y = 2x\text{-}3 \quad \text{и} \quad y = x\text{-}1.$$

Найти угол θ между этими прямыми.

<u>Решение:</u>

Согласно (4.12), имеем:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{1-2}{1+2\cdot 1}\right| = \left|\frac{-1}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}, \qquad \textit{где}\ k_1 = 2, \qquad k_2 = 1;$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = 18{,}43°.$$

<u>Точка пересечения двух прямых</u>

Когда две прямые пересекаются, то ***существует единственная точка***, принадлежащая обеим прямым (если эти прямые не совпадают).

Для нахождения координат точки пересечения двух прямых необходимо найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Пример

Найти точку пересечения двух прямых:

$$2x - y + 2 = 0 \quad \text{и} \quad 4x + y + 4 = 0.$$

Решение:

Для нахождения точки пересечения двух прямых необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ 4x + y + 4 = 0 \end{cases}.$$

Для решения системы уравнений почленно сложим уравнения системы. Получим:

$$6x + 6 = 0, \quad x = -1.$$

Подставим найденное значение x в первое уравнение системы:

$$-2 - y + 2 = 0, \quad y = 0.$$

Координаты точки пересечения прямых (–1; 0).

Задача:

Даны координаты трех точек:

A(-6;8), B(6;-1), C(4;13).

Найти:

1. Длину отрезка AB.

2. Уравнение прямых AB и BC, проведенных через точки A, B и B, C соответственно.

3. Угловые коэффициенты прямых AB и BC.

4. Угол θ между прямыми AB и BC.

5. Расстояние от точки C до прямой AB. Уравнение перпендикуляра к прямой AB, проходящего через точку C. Координаты точки пересечения прямой AB и перпендикуляра.

6. Уравнение прямой, проходящей через точку С параллельно прямой AB.

7. Построить чертеж, на котором показать заданные точки, угол θ и прямые.

Решение:

1.Длина отрезка AB (расстояние между точками A и B) находится как модуль вектора $\overline{A\ B}$:

$$|AB| = \sqrt{(6+6)^2 + (-1-8)^2} = \sqrt{12^2 + (-9)^2} = \sqrt{225} = 15.$$

2.Уравнения прямых AB и BC находятся как уравнения прямых, проходящих через две заданные точки по (4.8)

$$AB: \frac{y-8}{-1-8} = \frac{x+6}{6+6}, \qquad \frac{y-8}{-9} = \frac{x+6}{12}, \frac{y-8}{-3} = \frac{x+6}{4}, 4(y-8) = -3(x+6),$$

$$3x + 4y - 14 = 0.$$

$$BC: \frac{y-13}{-1-13} = \frac{x-4}{6-4}, \quad \frac{y-13}{-14} = \frac{x-4}{2}, \frac{y-13}{-7} = \frac{x-4}{1},$$

$$y - 13 = -7(x-4),$$

$$7x + y - 41 = 0.$$

3.Угловые коэффициенты прямых AB и BC, k_{AB} и $k_{вс}$ соответственно, найдем, разрешив уравнения общего вида этих прямых относительно y:

$$AB: \ y = \frac{1}{4}(-3x + 14), \qquad y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{2}, \qquad k_{AB} = -\frac{3}{4}.$$

$$BC: \ y = -7x + 41, \ k_{BC} = -7.$$

4. θ между прямыми AB и BC определяется из соотношения (4.12):

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{-\frac{3}{4} + 7}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)(-7)}\right| = \left|\frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}}\right| = 1;$$

$$\theta = \operatorname{arctg} 1 = 45°.$$

5.Расстояние от точки С до прямой AB определяется по формуле (4.11):

$$d = \left|\frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 13 + -14}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{50}{5}\right| = 10.$$

Уравнение перпендикуляра к прямой AB, проходящего через точку C, определяется как уравнение прямой, проходящей через заданную точку, согласно (4.5), с учетом того, что по условию перпендикулярности прямых, имеем: $k = -\frac{1}{k_{AB}}$.

$$y - 13 = \frac{4}{3}(x-4), \quad 4x - 3y + 23 = 0.$$

Найдем координаты точки пересечения прямой AB и перпендикуляра к ней, обозначим ее N. Решив систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 23 = 0 \\ 3x + 4y - 14 = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на 4, второе на 3 и почленно сложим. Получим:

$$25x + 0 + 50 = 0, \quad x = -2.$$

Подставим найденное значение x во второе уравнение. Получим:

$$-6 + 4y - 14 = 0, \quad y = 5. \quad N(-2;5).$$

6.Уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB, определяется как уравнение прямой, проходящей через заданную точку согласно (4.5) с учетом того, что по условию параллельности прямых, $k = k_{AB}$.

$$y - 13 = \frac{-3}{4}(x - 4), \quad 3x + 4y - 64 = 0.$$

7.Построить чертеж. Нанесем на координатную сетку заданные точки и проведем прямые AB и BC. Нанесем точку N и проведем прямую CN.

Для проведения через точку C прямой, параллельной AB, найдем еще одну принадлежащую ей точку, приняв $x = 0$ (точку пересечения с осью Oy, обозначим P):

$$3 \cdot 0 + 4y - 64 = 0, \quad y = \frac{64}{4} = 16, \qquad P(0;16).$$

Проведем прямую через точки C и P.

Чертеж приведен на рис.4.8.

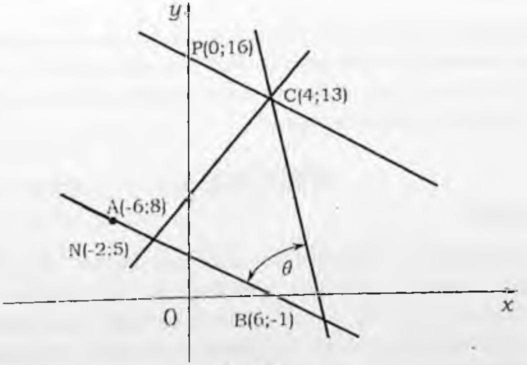


Рис.4.8

§ 4.5.Кривые второго порядка на плоскости

ОКРУЖНОСТЬ

Определение:

Окружностью *называется геометрическое место точек, равно удаленных от одной и той же точки, называемой центром.*

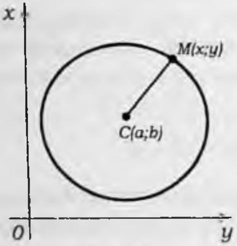


Рис.4.9

Окружность показана на рис.4.9.

Вывод уравнения окружности.

1. Пусть точка $M(x;y)$ принадлежит окружности.

2. $M\ (x,\ y)$ обладает свойством:

$MC = R$ *радиус.*

3.Свойство $M(x;y)$ в координатной форме имеет вид:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R = CM.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим ***уравнение окружности в канонической форме:***

$$\boxed{(x\ -\ a)^2\ +\ (y-b)^2\ =\ R^2} \qquad (4.13)$$

ЭЛЛИПС

Определение:

Эллипсом *называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$* (большая, чем расстояние между фокусами).

ГИПЕРБОЛА

Определение:

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная ($\pm 2a$) (не равная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами).

Выбор системы координат:

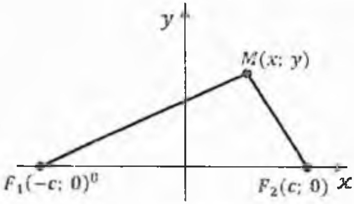


Рис.4.10

Расстояние между фокусами F_1 и F_2 равно 2с. Направим 0_x вправо через фокусы, а 0_y через середину F_1 F_2, перпендикулярно F_1 F_2 вверх.

Полученная система координат позволяет получить уравнение кривой в наиболее простой канонической форме.

Вывод уравнения эллипса (гиперболы).

1. Пусть точка M(x;y) принадлежит кривой.

2. M(x;y) обладает свойством:

- для эллипса: $MF_1 + MP_2 = 2a$;
- для гиперболы: $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$.

3. Свойство *M(x;y)* в координатной форме:

- для эллипса: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$;
- для гиперболы: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$.

Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$4cx=4\left(a^2+a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right),$$

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведя обе части в квадрат, получим:

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2[(x-c)^2+y^2],$$

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2x^2-2cxa^2+a^2c^2+a^2y^2,$$

$$c^2x^2+a^4-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0,$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Обозначив a^2-c^2 через b^2, получим :

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Разделив обе части последнего уравнения на $a^2 b^2$, получим:

уравнение эллипса в канонической форме:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}, \qquad \text{где } b^2=a^2-c^2. \qquad (4.14)$$

Аналогично можно вывести:

уравнение гиперболы в канонической форме:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}, \qquad \text{где } b^2=c^2-a^2. \qquad (4.15)$$

Эллипс показан на рис.4.11, а гипербола - на рис.4.12.

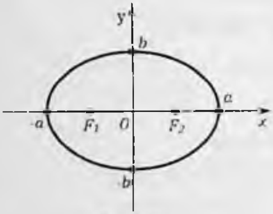


Рис.4.11

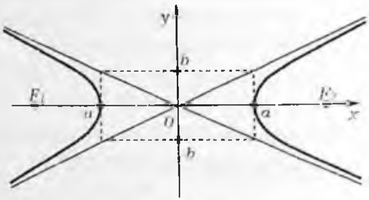


Рис.4.12

Асимптоты гиперболы проводятся как диагонали прямоугольника, точка их пересечения лежит в начале координат, а стороны прямоугольника равны $2a$ и $2b$. Стороны прямоугольника параллельны осям Ox и Oy соответственно, см. рис.4.12.

Оси координат являются осями симметрии гиперболы, при этом ось Oy не пересекает гиперболу.

В случае $b=a$ гипербола называется *равносторонней гиперболой,* ее уравнение получается из (4.15) и имеет вид:

$$x^2-y^2=a^2. \qquad (4.16)$$

Асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны между собой и делят пополам углы между ее осями симметрии.

Уравнение касательной к эллипсу (к гиперболе) в точке эллипса (гиперболы) $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}-1=0;\ \left(\frac{x\cdot x_0}{a^2}-\frac{y\cdot y_0}{b^2}-1=0\right).$$

ПАРАБОЛА

Определение:

Параболой *называется геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой фокусом, и прямой, называемой директрисой.*

Пусть p - расстояние от директрисы до фокуса. Ось Ox направим вправо, перпендикулярно директрисе через фокус. Ось Оу - через середину отрезка $LF = p$, рис.4.13, вверх. Координаты точки фокуса будут

$$F\left(\frac{p}{2};0\right).$$

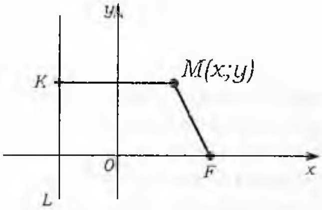


Рис.4.13

Вывод уравнения кривой.

1.Пусть точка $M(x;y)$ принадлежит параболе.

2.M $(x;y)$ обладает свойством:

$$MF=MK.$$

3.Свойство $M(x;y)$ в координатной форме имеет вид:

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат и упростим выражение.

После упрощения получим ***уравнение параболы в канонической форме:***

$$y^2=2px \qquad (4.17)$$

График параболы изображен на рис.4.14.

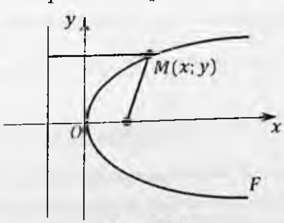


Рис.4.14

Уравнение касательной к параболе в точке параболы $M_0(x_o;y_o)$ имеет вид:

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0).$$

§4.6. Исследование эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям

ЭЛЛИПС

1. В каноническое уравнение величины x и y входят в четной степени. Поэтому главными осями эллипса являются оси координат, а центром эллипса является начало координат. Точки пересечения эллипса с главными осями называются вершинами эллипса. Вершины эллипса находятся в точках $(-a;0)$, $(a;0)$, $(0;-b)$ и $(0;b)$. Главная ось, образующая в пересечении с эллипсом отрезок, равный $2a$, называется большой осью эллипса. Другая главная ось называется малой осью эллипса.

2.Фокусы эллипса располагаются на большой оси эллипса.

3.Весь эллипс содержится внутри прямоугольника

$$|x| \le a, \quad |y| \le b.$$

ГИПЕРБОЛА

1.Гипербола, см рис.4.12, имеет две оси симметрии (главные оси симметрии) - в нашем случае, оси координат - и центр симметрии (центр гиперболы) - в нашем случае начало координат. Ось, с которой гипербола пересекается в двух точках, называется действительной осью гиперболы. Другая ось, не имеющая с гиперболой общих точек, называется мнимой осью гиперболы. Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.

2.В прямоугольнике, координаты точек которого удовлетворяют неравенствам $|x| < a$, $|y| < b$., нет точек гиперболы.

3.Уравнения асимптот гиперболы имеют вид:

$$y = \frac{b}{a}x \quad и \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

ПАРАБОЛА

1.Парабола, рис.4.14, с уравнением (4.17) имеет ось симметрии (ось параболы) - ось Ox. Точка пересечения параболы с осью называется вершиной параболы. Директриса параболы имеет уравнение:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

<u>Эксцентриситет эллипса и гиперболы</u>

Эксцентриситетом эллипса (гиперболы) называется величина, равная:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Выражения эксцентриситета имеют вид:

- для эллипса $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$; $\varepsilon < 1$;

- для гиперболы $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$; $\varepsilon > 1$.

Эксцентриситет эллипса меньше единицы, а эксцентриситет гиперболы больше единицы.

<u>Замечание</u>. Эксцентриситет окружности равен нулю.

Эксцентриситет эллипса характеризует меру «вытянутости»: чем больше ε, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$.

Эксцентриситет гиперболы дает числовую характеристику величины угла между ее асимптотами.

Задача:

Издержки (в сум) на изготовление партии деталей определяются по формуле: $y = ax + b$, *где* x *– объем* партии. Для первого варианта технологического процесса $y = 1{,}45x + 20$. Для второго варианта известно, что $y = 157{,}5$ (*сум*), *при* $x = 100$ (*дет*) *и* $y = 452{,}5$ (*сум*), *при* $x = 300$ (*дет*).

Провести оценку двух вариантов технологического процесса и найти себестоимость продукции при обоих вариантов при $x = 200$(*дет*)

Решение: Для 2-го варианта определяем параме[illegible] системы уравнений:

$$\begin{cases} 157{,}5 = 100ax + b \\ 452{,}5 = 300ax + b \end{cases}$$

Откуда $a = 1,475$ *и* $b = 10$, т.е.

$$y = ax + b \Rightarrow y = 1,475\,x + 10$$

Точку (x_0, y_0) пересечения двух прямых находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 1,45x + 20 \\ y = 1,475\,x + 10 \end{cases} \quad \textit{откуда} \quad \begin{matrix} x_0 = 400 \\ y_0 = 600 \end{matrix}$$

Очевидно, что при объеме партии $x < 400$ выгоднее второй вариант технологического процесса, при $x > 400$ – I – й вариант. Себестоимость продукции (сум) *при* $x = 200$

по I *– му варианту составляет* $y = 1,45 \cdot 200 + 20 = 300$, *а*

по II *– му*: $y = 1,475 \cdot 200 + 10 = 305$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Укажите различные случаи положения прямой относительно осей координат и соответствующие им уравнения.
2. Как проверить, лежит ли данная точка на данной прямой?
3. Что называется углом наклона прямой?
4. Что называется угловым коэффициентом прямой ?
5. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых ?
6. Как определить точку пересечения двух прямых ?
7. Какие линии второго порядка вы знаете?
8. Какую форму имеет эллипс?
9. Какую форму имеет парабола, определяемая уравнениями: $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2gy$? Как влияют параметры «p» и «g» на форму параболы?
10. Какую форму имеет гипербола?
11. Напишите уравнения асимптот гиперболы?
12. Дайте определение эксцентриситета эллипса.

ГЛАВА 5

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 5.1. Прямоугольные координаты в пространстве

Математика представляет искуснейшие изобретения, способные удовлетворить любознательность, облегчить ремесла и уменьшить труд людей.

Р. Декарт

Возьмем три взаимно перпендикулярные числовые оси, пересекающиеся в точке O; обозначим их Ox, Oy, Oz. Выберем на каждой из них положительное направление; противоположное направление будем считать отрицательным. Тем самым определяется система прямоугольных координат в пространстве.

Пусть M - некоторая точка пространства. Проведем через точку М три плоскости, перпендикулярные осям Ox, Oy, и Oz. В результате получим точки пересечения плоскостей с осями - M_x, M_y, M_z. Точка M_x - проекция точки M на ось Ox, точки M_y и M_z - проекции точки M на оси Oy и Oz соответственно.

Пусть x - координата точки M на оси Ox, y - координата точки M на оси Oy, z - координата точки M на оси Oz.

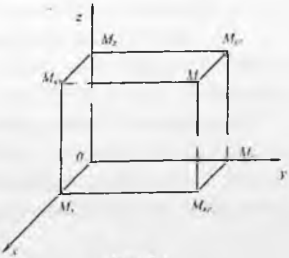


Рис. 5.1

Число x называется абсциссой точки, y - ординатой, а z - аппликатой. Три числа x, y, z называются координатами точки M, их записывают рядом с обозначением точки: $M(x; y; z)$. При этом на первом месте записывают x - абсциссу, на втором месте y - ординату и на последнем - аппликату z.

Следовательно, каждой точке пространства в системе координат $Oxyz$ отвечает «упорядоченная» тройка действительных чисел. Если точка M двигается, то ее координаты меняются. Справедливо и обратное утверждение. Пусть даны три числа x, y, z. Найдем на осях Ox, Oy, Oz соответствующие точки M_x, M_y, M_z и проведем через них плоскости, перпендикулярные осям. Получим единственную точку пересечения плоскостей -$M(x;y;z)$.

§ 5.2. Плоскость в пространстве

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (5.1)$$

Уравнение (5.1) называется ***общим уравнением плоскости.***

Коэффициенты при неизвестных A, B, C -координаты вектора $\bar{N}(A,B,C)$, нормального к плоскости. Коэффициент D непосредственного геометрического смысла не имеет, но числовое значение

$$p = \left|\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \qquad (5.2)$$

равно ***расстоянию от плоскости до начала координат. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости:***

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|. \qquad (5.3)$$

§5.3. Нормальное уравнение плоскости

Пусть:

p - расстояние от плоскости до начала координат;

$\bar{n}_0$ - единичный вектор нормали к плоскости, образующий с осями координат x,y,z углы α, β, γ соответственно. Тогда координаты вектора $\bar{n}_0$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Где бы на плоскости ни лежала точка $M(x, y, z)$, всегда справедливо соотношение: проекция радиус - вектора точки $M(x,y,z)$, обозначим его $\bar{m}$, направление нормали $\bar{n}_0$ всегда равно p. Отсюда следует, что скалярное произведение векторов $\bar{m}$ и $\bar{n}_0$:

$$(\bar{m}, \bar{n}_0) = p,$$

$$(\overline{m}, \overline{n}_0) - p = 0. \qquad (5.4)$$

Уравнение (5.4) представляет собой ***нормальное уравнение плоскости в векторной форме.*** Переходя к координатам, получим:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (5.5)$$

Уравнение (5.5) представляет собой ***нормальное уравнение плоскости в координатной форме.***

Очевидны две особенности уравнения (5.5):

1) сумма квадратов коэффициентов при x, y, z равна 1;

2) перед свободным членом p стоит знак (-).

Эти особенности учитываются при приведении уравнения плоскости к нормальному виду.

Общее уравнение плоскости приводится к нормальному виду умножением обеих частей уравнения на множитель:

$$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{Cz}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Перед корнем выбирается знак, противоположный знаку свободного члена D.

§5.4. Уравнение плоскости в отрезках на осях

Пусть плоскость $Ax + By + Cz + D=0$ отсекает от осей координат отрезки a,b,c *соответственно*, см.рис.5.2.

Потребуем, чтобы плоскость проходила через точки M_1, M_2, M_3, образованные пересечением плоскости с осями координат. Координаты этих точек должны удовлетворять уравнению плоскости, следовательно, для точек выполняется:

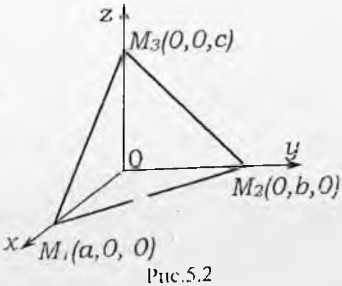


Рис.5.2

$$M_1(a; 0; 0;): \quad Aa + D = 0, \qquad A = -\frac{D}{a};$$

$$M_2(0; b; 0;): \quad Bb + D = 0, \qquad b = -\frac{D}{b};$$

$$M_3(0; 0; c;): \quad Cc + D = 0, \qquad C = -\frac{D}{c}.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в общее уравнение плоскости:

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

Разделим обе части уравнения на (*-D*) , получим уравнение:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}. \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) называется ***уравнением плоскости в отрезках на осях.***

§5.5. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку

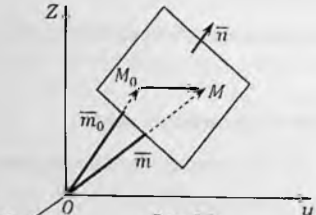


Рис. 5.3

Пусть $\overline{n}$ (A;B;C) - нормаль к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ (рис. 5.3), а заданная точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ лежит в этой плоскости. Пусть точка $M(x;y;z)$ - произвольная точка плоскости. Очевидно: векторы $\overline{m} - \overline{m}_0$ и $\overline{n}$ перпендикулярны, а потому их скалярное произведение равно нулю.

Таким образом, справедливо равенство:

$$(\overline{m} - \overline{m}_0, \overline{n}) = 0. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.7) представляет собой ***уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, в векторной форме.***

Переходя к координатной форме, получим:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.8) представляет собой ***уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, в координатной форме.***

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Пусть плоскость проходит через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Тогда ***в координатной форме уравнение этой плоскости:***

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.9)$$

<u>Пример</u>

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;0;2)$, $M_2(-1;1;0)$ и $M_2(0;-1;1)$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ (x-1)(-1-2) - y(2-2) + (z-2)(2+1) = 0,$$

$$x - z + 1 = 0.$$

Угол между плоскостями

Заданием плоскости задается вектор, нормальный к плоскости. Поэтому угол между плоскостями определяется при помощи угла между нормалями к плоскостям. Пусть заданы две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \text{ ее нормаль } \overline{n_1}(A_1;B_1;C_1);$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \text{ ее нормаль } \overline{n_2}(A_2;B_2;C_2).$$

Из скалярного произведения векторов нормали получены формулы:

Угол между плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{n}_1,\overline{n}_2)}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}. \qquad (5.10)$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$при\ (\overline{n}_1,\overline{n}_2) = 0; \qquad \boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.} \qquad (5.11)$$

Условие параллельности плоскостей:

$$при\ \overline{n}_1 = \lambda\overline{n}_2; \quad \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}.$$

Алгоритм решения задач

1. Составить уравнение плоскости, соответствующее условию задачи.

2. Определить неизвестные и их количество в этом уравнении.

3. Используя условие задачи, составить систему уравнений для нахождения неизвестных.

4. Искомые неизвестные, полученные в результате решения системы уравнений, подставить в искомое уравнение плоскости.

Задача 1

Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(-1,-1;2)$ и перпендикулярна к двум плоскостям:

1) $x - 2y + z - 4 = 0$, очевидно, что $\overline{n_1}$ (1;-2;1);

2) $x + 2y - 2z + 4 = 0$, очевидно, что $\overline{n_2}$ (1;2;-2).

Решение:

1.Условие того, что искомая плоскость проходит через заданную точку $M_0(-1;-1;2)$ определится в соответствии с уравнением (5.8):

$A(x + 1) + B(y + 1) + C(z - 2) = 0$, вектор нормали $\overline{n}$ $(A;B;C)$.

2.В уравнении три неизвестных. Это A,B,C. Для решения задачи нужно иметь два уравнения, чтобы два неизвестных выразить через третье.

3.Составим систему уравнений по условию перпендикулярности плоскостей (5.11).

Условие перпендикулярности искомой и первой плоскостей:

$(\overline{n}_1,\overline{n}_2) = 0$: $A - 2B + C = 0$.

Условие перпендикулярности искомой и второй плоскостей:

$(\overline{n}_1,\overline{n}_2) = 0$: $A + 2B - 2C = 0$.

Из системы двух уравнений имеем:

$$\begin{cases} A - 2B + C = 0 \\ A + 2B - 2C = 0 \end{cases};$$

$$A = \frac{C}{2}, B = \frac{3C}{4}.$$

4.Подставляя выражения в искомое уравнение плоскости, получим:

$$\frac{C}{2}(x+1)+\frac{3C}{4}(y+1)+C(z-2)=0.$$

Умножим обе части уравнения на $\frac{4}{C}$:

$$2(x+1)+3(y+1)+4(z-2)=0;$$
$$2x+3y+4z-3=0.$$

Задача 2

Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_o(2;\ 1;\ 3)$ и параллельна заданной плоскости.

$4x-y+2z=0.$

Решение:

1. Условие того, что искомая плоскость проходит через заданную точку $M_0(2;1;3)$ определяется в соответствии с уравнением (5.8):

$$A\,(x-2)+B\,(y-1)+C\,(z-3)=0.$$

2. В искомом уравнении три неизвестных. Это *A,B,C*. Найдем неизвестные.

3. Нормаль к искомой плоскости - вектор $\overline{n}$ *(A;B;C)*. Нормаль к заданной плоскости - вектор $\overline{n_1}$ (4;-1;2). Согласно условию параллельности плоскостей (5.12) при λ=1 выполняется $\overline{n}=\overline{n_1}$, следовательно, искомое уравнение принимает вид:

$$4(x-2)-(y-1)\ +\ 2(z-3)\ =\ 0;$$
$$4x-y\ +\ 2z\ -13\ =\ 0.$$

§5.6. Уравнения прямой в пространстве

Параметрические уравнения прямой

В пространстве A^n прямая определяется параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x_1=a_1+t\cdot p_1 \\ x_2=a_2+t\cdot p_2 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ x_n=a_n+t\cdot p_n \end{cases}$$

В пространстве A^3 параметрические уравнения прямой принимают вид:

$$\begin{cases} x = a + mt \\ y = b + nt. \\ z = c + pt \end{cases} \qquad (5.12)$$

В уравнениях (5.12) *(a;b;c)* - координаты точки, через которую проходит прямая, *(m;n;p)* - координаты направляющего вектора.

Канонические уравнения прямой

Разрешая уравнения (5.12) относительно параметра *t*, получим канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \qquad (5.13)$$

В уравнениях (5.13) *(a;b;c)* - координаты точки, через которую проходит прямая, *(m;n;p)* - координаты направляющего вектора.

Общие уравнения прямой

Две пересекающиеся плоскости в пространстве A^3 определяют прямую, по которой они пересекаются. Совокупность уравнений этих плоскостей называют общими уравнениями прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (5.14)$$

Уравнение плоскости в общем виде и его исследования

Общее уравнение плоскости имеет вид: Ax+By+Cz+D=0. Исследуем ее уравнение:

1. Если $D=0$, то $Ax+By+Cz=0$. Это есть уравнение плоскости, проходящей, через начало координат.

2. Если $A=0$, то $By+Cz+D=0$. Это есть уравнение плоскости, параллельной оси OX.

3. Если $B=0$, то $Ax+Cz+D=0$. Это есть уравнение плоскости, параллельной оси *OY*.

4. Если $C=0$ и B=0, то $Ax+D=0$, эта плоскость совпадает с осью *OY*

5. Если $C=0$ и $A=0$, *то* $By+D=0$, эта плоскость параллельна плоскости *OXZ* и т.д.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Запишите общее уравнение плоскости. Каков геометрический смысл входящих в него коэффициентов и свободного члена?

2. Укажите различные случаи положения плоскости и соответствующие им уравнения относительно системы декартовых координат Oxyz.

3. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

4. Запишите уравнение плоскости, проходящей через три точки.

5. Какие виды уравнений плоскости вы знаете?

6. Какие виды уравнений прямой в пространстве вы знаете?

7. Как вычислить угол между двумя прямыми в пространстве?

8. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.

ГЛАВА 6

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Должен был быть пройден долгий путь постепенной кристаллизации элементарных понятий и их обобщения, пока ученые пришли к необходимости общего определения функции и нашли его.

Г.Е. Шилов.

Историческая справка:

Г.Лейбниц

Понятие **«функция»** формировалось не сразу. Первые попытки очертить контуры зависимости делаются в конце XVII в. Г.Лейбницем и Я.Бернулли.

Термин **«функция»** (от лат.слова *function – совершение*) ввел Лейбниц в 1692 г.

Эйлер в 1748 г. дал такое определение: «Функция переменных величин есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из переменных величин и чисел и постоянных количеств». Он же ввел символ $f(x)$.

Л.Эйлер

Эйлер считал, что класс функций, являющихся произвольно начерченными кривыми, шире, чем класс функций, заданных аналитическими выражениями.

Большинству математиков казалось, что этот класс функций значительно уже, чем аналитические выражения.

Окончательное решение вопроса было получено в начале XIX века, когда Фурье показал, что сумма бесконечного ряда, состоящего из тригонометрических функций, может на различных участках выражаться различными формулами.

После этого он дал новое определение функции, подчеркнув в нем, что главным является задание значений функции, а совершается это задание некоторой единой формулой.

Дирихле уточнил определение функции, данное Фурье, и придал ему тот вид, которым пользуются и сейчас: **переменная величина «y» называется функцией переменной величины «x», если каждому значению величины «x» соответствует единственное определенное значение величины «y».**

В дальнейшем к словам **«каждому значению величины «x» добавили слова «принадлежащему некоторому множеству»** (ведь функция не обязательно определена для всех значений «x»). Это определение было окончательным для числовых функций числового аргумента.

Основные понятия и определения

Из курса элементарной математики известны:

- постоянная величина;
- переменная величина;
- независимая переменная величина x (аргумент);
- зависимая переменная величина y (функция). Пусть: X - множество значений аргумента x, Y - множество значений функции y.

Функция - это закон (соотношение), по которому для каждого значения независимой переменной $x \in X$ можно найти единственное значение зависимой переменной $y \in Y$.

На языке кванторов данное определение: функция это закон (соотношение), по которому

$$\forall x \in X \quad \exists! \, y \in Y.$$

Это определение функциональной зависимости позволяет при исследовании каждой отдельной функции ограничиться тем множеством X значений величины x, которое диктуется целью данного исследования с учетом математических, экономических, физических и др. соображений.

Пусть $X \in R$.

Функцией с областью определения X называется любое отображение множества X в R.

В случае задания функции пишут:

$$y = f(x),$$

где x - любое число из X (значение аргумента);
y - соответствующее данному x число из R (значение функции);

f - символ отображения.

Замечание: в случае задания функции пишут и так:

$$y = F(x);\ y = y(x);\ y = \varphi(x)\ \text{и т.д.}$$

Областью определения X (областью существования) функции называется множество тех значений аргумента, при которых функция определена, т.е. множество всех допустимых значений x, для которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Принято обозначать:

- область определения функции D (f);
- множество значений функции E (f).

§ 6.1. Способы задания функции

1 .Аналитический (с помощью формулы):

Функция иногда может быть задана несколькими аналитическими выражениями, например:

$$y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x < 1 \\ x+2 & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

Аналитическим способом задаются многие функции, связывающие экономические показатели.

Пусть:

R - суммарный доход;

P - цена единицы товара;

Q - количество единиц товара.

Тогда

$$R = P \cdot Q$$

2.Графический:

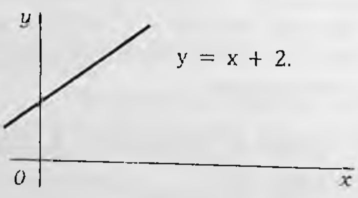


Рис.6.1

Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют соотношению $y = f(x)$. Выражение $y = f(x)$ называется уравнением графика данной функции.

На рис. 6.1 изображен график функции $y = x + 2$, т.е. множество точек, соответствующих уравнению графика функции, например, (1;3),(3;5),(5;7) и т.д.

Функция задана графически, если начерчен ее график.

Достоинство графического способа задания функции состоит в наглядности, а недостаток - в неточности числовых значений x и y, полученных с помощью чертежа.

3. *Табличный:*

Функция $y = f(x)$ задана табличным способом, если дана таблица, в которой для каждого числового значения x указано соответствующее ему числовое значение y.

§ 6.2. Периодические функции

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической,*** если существует такое число T, что для всех x имеет место равенство $f(x) = f(x+T)$. Данное T называется периодом функции. Все тригонометрические функции периодические.

Функции $y = \sin x, y = \cos x$ имеют период, равный 2π.

Функции $y = tg x, y = ctg\, x$ имеют период, равный π.

§ 6.3. Четные и нечетные функции. Симметрия

Функция $y = f(x)$ называется ***четной,*** если для нее справедливо соотношение $f(-x) = f(x)$, т.е. у четной функции при замене знака аргумента знак и числовое значение функции не изменяются. Четные функции имеют графики, симметричные относительно оси $0y$. Например, график четной функции $y = x^2$ показан на рис. 6.2.

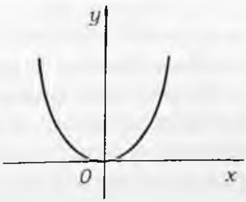


Рис.6.2

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной,*** если для нее справедливо соотношение $f(-x) = -f(x)$, т.е. у нечетной функции при замене знака аргумента знак функции изменяется, а числовое значение не изменяется.

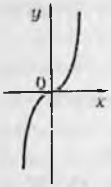
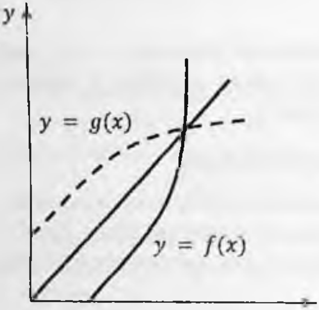


Рис.6.3

Нечетные функции имеют графики, симметричные относительно начала координат. Например, график нечетной функции $y = x^3$ показан на рис. 6.3.

Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными, называются ***функциями общего вида.*** Их графики не симметричны ни относительно оси Oy, ни относительно начала координат.

Обратные функции



Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой области X и пусть Y - множество значений функции. Это значит, что каждому значению $x \in X$ соответствует значение $y \in Y$. Выберем значение $y = y_0$ из Y. Тогда в области X обязательно найдется $x = x_0$ такое, что имеет место $f(x_0) = y_0$ (таких x_0 может быть несколько). Таким образом в области Y определяется функция $x = g(y)$. Она называется ***обратной*** для функции $y = f(x)$. Если одному значению y соответствует несколько значений x, то функция называется многозначной, вместо нее рассматривается несколько однозначных функций.

Если функция $x=g(y)$ является обратной для функции $y=f(x)$, то графики этих функций совпадают. Требуя, чтобы и у обратной функции аргумент обозначался буквой x, получим обратную функцию в виде $y=g(x)$. Функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют графики, симметричные относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов, т.е. относительно прямой $y = x$ *(рис.6.4)*.

§ 6.4. Теория пределов

Понятие числовой последовательности

Пусть известен закон (правило), по которому каждому числу n из натурального ряда

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots,$$

может быть поставлено в соответствие вещественное число x_n. По этому закону можно получить числовую последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$ члены которой x_n занумерованы и расположены в порядке возрастания номеров.

Числовая последовательность считается заданной, если существует правило, по которому можно найти x_n для любого n.

x_n называют *общим членом последовательности.*

Иногда числовую последовательность обозначают $\{x_n\}$. Будем представлять себе множество значений $\{x_n\}$ упорядоченным по возрастанию номеров, т.е. в виде числовой последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \tag{6.1}$$

Последовательность (6.1) называется *ограниченной,* если существует такое M, что $|x_n| \le M$, для всех n.

Последовательность (6.1) называется ***неограниченной,*** если для любого $A > 0$ существует такой номер N, что при $n > N$ для всех x_n имеет место неравенство $|x_n| > A$.

Примеры числовых последовательностей.

1. $x_n = \dfrac{1}{n}$; последовательность $1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \dots; \dfrac{1}{n}; \dots$
2. $x_n = (-1)^n \cdot n$; последовательность $-1; 2; -3; 4; \dots$

<u>Определение предела последовательности</u>

Постоянное число a ***называется пределом, последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно найти такой номер N, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Тот факт, что «а» есть предел последовательности $\{x_n\}$ записывается так

$$\lim x_n = a.$$

При этом говорят еще, что последовательность сходится к «а» и пишут

$$x_n \to a.$$

Неравенство (6.2) равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

или

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \tag{6.3}$$

Открытый промежуток ($a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$) длины 2ε с центром в точке «а» называют ε – ***окрестностью*** точки a.

С точки зрения геометрии.

Постоянное число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ все значения переменной x_n, начиная с некоторого номера, попадают в ε – ***окрестность*** точки a.

Не всякая переменная величина имеет предел. Переменная $x_n=(-1)^n$ не имеет предела.

Критерий Коши

Для того, чтобы последовательность (6.1) имела предел, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших n и m имело место неравенство

$$|x_n \; x_m| < \varepsilon.$$

Критерий Коши - характеристический критерий, т.е. одновременно он является и необходимым, и достаточным.

§ 6.5. Бесконечно малые величины

Бесконечно малой величиной, или просто ***бесконечно малой (б.м.)*** называется переменная x_n, стремящаяся к нулю.

Справедливо утверждение:

Для того, чтобы переменная x_n имела своим пределом постоянное число a, необходимо и достаточно, чтобы разность между переменной x_n и постоянной a была бесконечно малой.

Поэтому:

Постоянное число a называется пределом переменной x_n, если разность между ними $\alpha = x_n - a$ есть величина бесконечно малая.

Следовательно, если $\lim x_n=a$, то переменная может быть представлена в виде:

$$x_n = a + \alpha, \tag{6.4}$$

где α - б.м.

Справедливо и обратное утверждение:

Если переменная x_n может быть представлена в виде (6.4), то она имеет своим пределом постоянное число a.

Бесконечно большой величиной, или просто бесконечно большой (б.б.) называется переменная , стремящаяся к бесконечности.

Если $\lim |x_n| = +\infty$, то переменная величина x_n называется бесконечно большой.

Следовательно, бесконечно большая величина стремится или к $+\infty$, или к $-\infty$, или не стремится ни к какому пределу, принимая значения то положительные, то отрицательные, но по абсолютной величине безгранично возрастающие.

<u>Основные теоремы о пределах переменных величин</u>

1. Предел постоянной величины равен этой постоянной.

2. Переменная величина x_n может иметь только один предел.

3. Предел суммы конечного числа переменных величин равен сумме пределов этих величин.

4. Предел произведения конечного числа переменных величин равен произведению пределов этих величин.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

6. Предел частного двух переменных величин равен частному пределов этих величин за исключением случаев, когда и числитель и знаменатель стремятся или к нулю или к бесконечности.

7. Если переменные x_n и y_n такие, что $x_n > y_n$ хотя бы начиная с некоторого $n = N$, то справедливо неравенство $\lim x_n \geq \lim y_n$.

8. Если переменные x_n y_n и z_n такие, что $x_n > y_n > z_n$ при этом x_n и z_n имеют своим пределом одно и то же число a, то переменная y_n имеет своим пределом то же число a.

9. Если переменная x_n имеет своим пределом постоянное число а, то $x_n = a + \alpha$, где α - *б.м.*

10. Ограниченная монотонная переменная величина имеет конечный предел.

11. Если переменная x_n имеет конечный преде[illegible] то она является ограниченной, а именно: существуют такие числа [illegible], [illegible] для всех значений x_n, хотя бы начиная с некоторого $n = N$ имеют место неравенства

$$m \leq x_n \leq M.$$

§ 6.6. Свойства бесконечно малых величин

1. Алгебраическая сумма (произведение) конечного числа бесконечно малых величин сеть б.м.

2. Произведение ограниченной переменной величины и бесконечно малой величины есть б.м.

3. Сравнение бесконечно малых величин.

Для сравнения двух б.м. рассматривают предел их отношения.

Пусть α_n и β_n - две б.м.

- Если $\frac{\alpha}{\beta} = 0$, то α б.м. более высокого порядка малости, чем β.
- Если $\frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то β б.м. более высокого порядка малости, чем α.
- Если $\frac{\alpha}{\beta} = c$, то α и β две б.м. одного порядка малости.
- Если $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β эквивалентные или равносильные б.м.

Этот факт обозначается $\alpha \sim \beta$.

При нахождении пределов б.м. величину можно заменять эквивалентной ей б.м.

§ 6.7. Первый и второй замечательные пределы

<u>Первый замечательный предел</u>

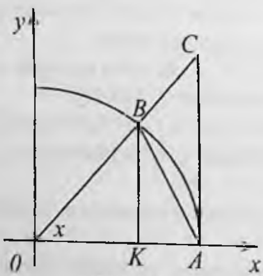


Рис.6.5

В круге единичного радиуса рассмотрим острый угол x, хорду AB, касательную к окружности в точке A. Тогда площадь треугольника ΔAOB < площади сектора AOB < площади треугольника ΔAOC. Здесь x - радианная мера угла $\angle AOB$.

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \operatorname{tg} x \quad (*)$$

Иллюстрация представлена на рисунке 6.5.

Полагая $0 < x < \frac{\pi}{2}$, разделим соотношение (*) на $\frac{1}{2}$ sin x. Получим:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Перевернем полученные дроби и устремим x к нулю. Применяя к соотношению теорему о сжатой переменной, получим ***первый замечательный предел:***

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{6.5}$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{6.6}$$

Полагая $\frac{1}{n} = \alpha$ при $n \to \infty$, $\alpha \to 0$, получим другую форму записи второго замечательного предела:

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{6.7}$$

Здесь e - иррациональное число, введенное в честь великого математика Л. Эйлера. $e \approx 2{,}7182\ldots$ Приближенно принимают $e = 2{,}72$.

Логарифмы с основанием e называют натуральными и обозначают $\ln x$. $\ln x = \log_e x$.

§ 6.8. Предел функции

Точка a называется ***точкой сгущения*** числового множества $X = \{x\}$, если в любой δ - окрестности этой точки содержатся $x \in X$, отличные от a. Точка сгущения при этом может принадлежать X, а может и не принадлежать.

Если a - предельная точка для X, то из X можно извлечь множеством способов последовательность вида

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

имеющую своим пределом число a.

Пусть в этой же области X, имеющей точку сгущения a, задана функция $y = f(x)$.

Поведение этой функции при приближении x к a представляет большой интерес.

Постоянное число A называется пределом функций $y = f(x)$ при $x \to a$, если, какую бы последовательность с пределом a, извлеченную из X, ни пробегала независимая переменная x, соответствующая последовательность значений функции

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots \tag{6.8}$$

имеет своим пределом число A.

Записывают этот факт так

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad (6.9)$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

Аналогично определяются понятия предела:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

Постоянное число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что как только $|x-a| < \delta$, так сейчас же

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \qquad (6.10)$$

где $x \in X$ и отлично от a.

Данное определение предела называется ***определением на языке «эпсилон-дельта»*** или ***определением по Коши.***

§ 6.9. Неопределенности

Историческая справка:

Понятие о бесконечном множестве, войдя в состав современной математики, коренным образом революционизировало ее.

П.С. Александров

В 1696г. Маркиз Гильом Франсуа Лопиталь без указания своей фамилии опубликовал «Анализ бесконечно малых для понимания кривых линий». Интересно отметить, что он предварительно просил у Лейбница согласия на выпуск этой книги. Лейбниц горячо одобрил инициативу Лопиталя.

Г. Лопиталь

Первый печатный курс дифференциального исчисления «Анализ бесконечно малых» Лопиталя состоит из предисловия и 10 глав. В предисловии дается краткий исторический обзор развития нового исчисления. Из предисловия мы узнаем также, почему книга издана анонимно. Оказывается, Лопиталь это сделал из - за скромности. Он пишет: «Я многим обязан знаниями гг. Бернулли, особенно младшему из них. Я без всякого стеснения пользовался их открытиями и открытиями г. Лейбница. Поэтому я не возражаю против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно, сам, довольствуясь тем, что они соблаговолят мне оставить ...»

В 10 главах книги излагаются определения постоянных и переменных величин и дифференциала («Бесконечно малая часть, на которую непрерывно увеличивается или уменьшается переменная величина, называется ее дифференциалом»), объясняются употребляющиеся обозначения dx, dy и др., выводятся правила дифференцирования алгебраических выражений, определяются дифференциалы высших порядков, применяется дифференциальное исчисление к нахождению касательных к кривым, к нахождению максимумов и минимумов, точек перегиба и возврата, изучаются эволюта и эвольвента, исследуются вопросы кривизны и т. п. В 9-й главе излагается знаменитое «правило Лопиталя» для раскрытия неопределенностей (6.10).

После геометрического доказательства этого правила Лопиталь приводит примеры его применения.

Что же касается самого Лопиталя, то основная его заслуга заключается не в скромном его вкладе в саму науку, а в том, что он был одним из первых ученых, которые оценивали могущество и красоту новых математических методов. Он первый энергично взялся за систематическое и доступное изложение основ дифференциального исчисления, он был одним из первых глашатаев и пропагандистов новых идей и замечательных методов математического анализа, с которыми неразрывно связан весь прогресс естествознания и техники.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty, 0\cdot\infty, \infty^0,\ 0^0,\ 1^0\,. \qquad (6.11)$$

Выражения (6.10) будем называть ***неопределенностями,*** а нахождение пределов выражений (6.10) - ***раскрытием, неопределенностей.***

Раскрытие неопределенностей

I. Алгоритм раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. Сократить на общий множитель, когда неопределенность задается отношением двух многочленов. В этом случае многочлены нужно разложить на множители. Если предел ищется при $x \to a$,

например, то $x \neq a$, а потому $x - a \neq 0$ и на множитель $(x - a)$, который иногда называют критическим множителем, можно сократить дробь.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-3}{x-1}=\frac{4-3}{4-1}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=\frac{-3}{3}=-1.$$

2. Перенести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель. Для этого числитель и знаменатель нужно умножить на выражение, сопряженное данному, и применить формулу сокращенного умножения, дающую разность квадратов.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x^2-4x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2}{(x-3)(x-1)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)(x-1)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{8}.$$

3. Применить первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{3\cdot 5x}=\frac{5}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\,.$$

4. Ввести вспомогательную функцию.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{5x}$$

Пусть:

$$\arcsin 3x = y.$$

Тогда

$$\sin y = 3x, \quad x = \frac{1}{3}\sin y.$$

При $x \to 0$ имеем $y \to 0$.

Переходим к новой переменной y.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{5x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{5\cdot\frac{1}{3}\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{3}{5}\cdot\frac{y}{\sin y} = \frac{3}{5}.$$

5. При выполнении определенных условий при раскрытии неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ возможно применение правила Лопиталя:

«Предел отношения, функций равен пределу отношения производных этих функций».

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-6} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x}{x^2-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{2x} = \frac{6}{2} = 3.$$

II. Алгоритм раскрытия неопределенностей $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Нужно вынести за скобку старшие степени числителя и знаменателя и сократить на общий множитель дробь.

При этом возможны три случая

$$\frac{\infty}{\infty} = \begin{cases} 0, \text{ если старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя}, \\ \infty, \text{ если старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя}, \\ \text{отношению коэффициентов при старших степенях, если старшие степени равны.} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^3-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{x\left(1-\frac{2}{x^3}\right)} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-2}{x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x}{2x^2-5x+1} = \frac{6}{2} = 3.$$

III. Алгоритм раскрытия неопределенностей $(\infty; -\infty)$

Неопределенное выражение сводится к одному из случаев $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ в результате:

1) приведения дробей к общему знаменателю, или
2) перенесения иррациональности в знаменатель.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4-12}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{1}{2}.$$

IV. Алгоритм раскрытия неопределенностей $(0\cdot\infty)$

Неопределенность сводится к одной из неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ при изменении формы записи произведения сомножителей:

$$a\cdot b = \frac{a}{\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

Пример

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \mathrm{ctg}x^{\{0\cdot\infty\}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{tg}x}^{\left\{\frac{0}{0}\right\}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1.$$

В общем случае неопределенности вида $0.\infty$, а также вида 0^0 и ∞^0 раскрываются при помощи логарифмического дифференцирования, что будет рассмотрено позднее.

V. Алгоритм раскрытия неопределенностей 1^∞

Неопределенность раскрывается сведением ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}3} = e^3.$$

Раскрытие неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ раскрывается:

1) вынесением за скобку старшей степени числителя, старшей степени знаменателя и сокращением на общий множитель;

2) применением правила Лопиталя.

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x}{x^2+x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=2\,.$$

$$2.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x}{x^2-4x+2}=\infty\,.$$

(старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя).

Раскрытие неопределенности $(\infty-\infty)$

Неопределенность $(\infty-\infty)$ сводится к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ в результате:

1) приведения дробей к общему знаменателю;

2) перенесения иррациональности в знаменатель.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\frac{x+1-2}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}.$$

Раскрытие неопределенности $(0\cdot\infty)$

Неопределенность $(0\cdot\infty)$ сводится к одной из неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ по правилу:

$$a\cdot b=\frac{a}{\left(\frac{1}{b}\right)};\quad a\cdot b=\frac{b}{\left(\frac{1}{a}\right)};$$

$$\lim_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos x}{\sin x}=1.$$

Раскрытие неопределенности (1^{∞})

Неопределенность (1^{∞}) легко раскрывается применением второго замечательного предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

§ 6.10. Непрерывность функции

Основные понятия и определения

Пусть функция $y=f(x)$ имеет график, см. рис. 6.6.

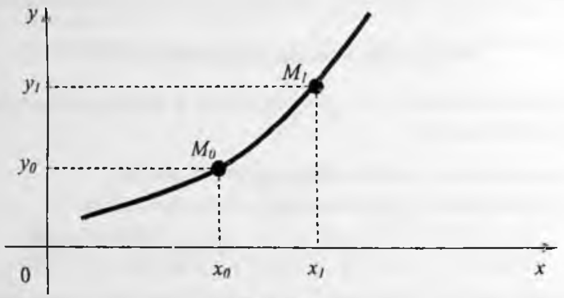


Рис. 6.6

$M_0\ (x_0, y_0)$ – фиксированная точка на графике,
$M_1\ (x_1, y_1)$ – подвижная точка.

Разность между двумя значениями аргумента (функции) $x_1 - x_0$ $(y_1 - y_0)$ называется ***приращением*** аргумента (функции) и обозначается $\Delta x = x_1 - x_0$ $(\Delta y = y_1 - y_0)$.

При движении точки M_1 по кривой Δx и Δy изменяются.

Определение 1:

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1. Функция определена в некоторой окрестности точки x_0 (это значит, что она определена и в самой точке x_0).

2. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ Другими словами бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.	2. предел функции равен функции от предела $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$$

Эти определения эквивалентны.

Определение 2:

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

Теорема:

Все элементарные функции непрерывны в тех точках, в которых они определены.

Условия непрерывности функции в точке

1. Функция должна быть определена в самой точке x_0 и некоторой ее окрестности.
2. Должны существовать конечные односторонние пределы.
3. Односторонние пределы должны быть равны между собой.
4. Будучи равными между собой пределы должны равняться значению функции в точке x_0, т.е. должно иметь место равенство

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в точке x_0 как слева, так и справа.

Точки разрыва функции

Точка x_0, в которой функция не является непрерывной, называется точкой разрыва функции.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва I рода,*** если конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = B$ существуют, но:

1) или они не равны между собой $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

В этом случае говорят, что функция имеет в точке разрыва x_0 скачок $r = |B - A|$;

2) или они равны между собой, но не равны значению функции в точке x_0.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва II рода,*** если хотя бы один из односторонних пределов или равен $\pm\infty$ или не существует.

Односторонняя непрерывность

Определено понятие непрерывности функции во внутренней точке x_0 промежутка. При этом при вычислении предела приближение x к x_0 могло осуществляться и слева и справа.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева (справа), если:

1) Функция определена в соответствующем конце промежутка.

2) Имеет место соотношение

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) \qquad (*)$$

$$\left(f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\right) \qquad (**)$$

x_0 - точка разрыва функции слева (справа), если эти соотношения не выполняются.

Непрерывность функции в точке равносильна ее непрерывности в этой точке одновременно слева и справа.

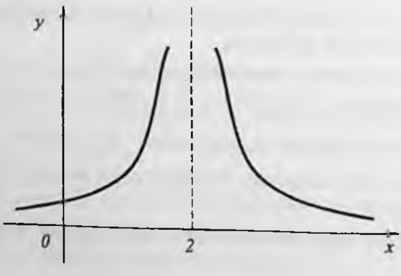
Задачи и примеры:

Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции.

Пример 1

$$y = \frac{1}{(2-x)^2}$$

При всех значениях $x \neq 2$ функция непрерывна. Функция разрывна при $x = 2$, т.к. она не определена в точке $x = 2$.



Односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{(2-x)^2}=\infty;\quad \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{(2-x)^2}=\infty;$$

x=2 – точка разрыва II рода.

Пример 2

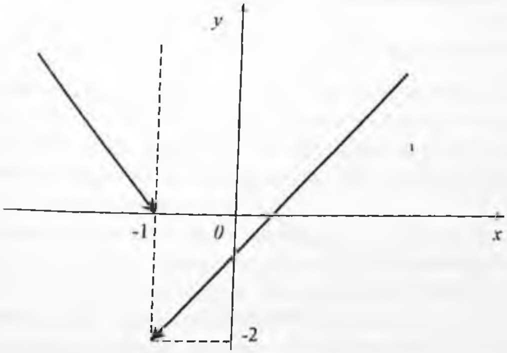
$$y=\begin{cases}-x-1 & \text{при } x<-1\\ x-1 & \text{при } x>-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1-0} y=\lim_{x\to -1-0}(-x-1)=0$$

$$\lim_{x\to -1+0} y=\lim_{x\to -1+0}(-x-1)=-2$$

Функция имеет скачок $r=|-2-0|=2$.

Односторонние пределы существуют и конечны, но не равны между собой. $x=-1$– точка разрыва I рода.



§ 6.11. Основные свойства непрерывных функций

1. Сумма, разность и произведение непрерывных функций есть непрерывные функции.

2. Если непрерывная функция $y=f(x)$ в точке x_0 не равна нулю, т.е. $f(x_0)\neq 0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ непрерывна в точке x_0.

3. Многочлен степени n непрерывен во всех точках $x_0\in R$.

4. Дробно-рациональная функция непрерывна во всех точках, в которых ее знаменатель не равен нулю.

5. Сложная функция непрерывных функций является непрерывной.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Первая теорема Больцано-Коши.

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков, то между a и b найдется точка с такая, что $f(c) = 0$, $(a < c < b)$.Геометрический смысл теоремы.

Если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси Ox на другую, где она лежит выше (ниже) оси, то она пересекает ось Ox, см. рис. 6.7.

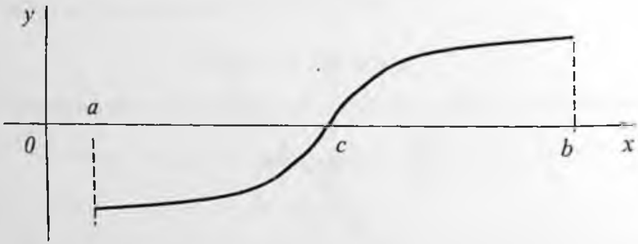


Рис. 6.7

Теорема утверждает: если для функции $y = f(x)$ выполнены условия теоремы, то существует корень уравнения $y = f(x)$, а так же указывает способ нахождения приближенного значения этого корня. Теорему называют теоремой о существовании корня и применяют в исследовании математической модели рынка.

Вторая теорема Больцано-Коши.

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает неравные значения $f(a) = A \neq f(b) = B$, то для любого C, лежащего между

A и B, найдется c, лежащее между a и b, такое, что $f(c) = C$, т.е. переходя от значения A к значению B функция, удовлетворяющая условиям теоремы, принимает и промежуточные значения.

Первая теорема Вейерштрасса.

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она ограничена и снизу, и сверху, т.е. существуют такие постоянные и конечные числа m и M, что $m \le f(x) \le M$ при $a \le x \le b$.

Вторая теорема Вейерштрасса.

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна а замкнутом промежутке $[a, b]$, то она достигает в этом промежутке своих точных верхней и нижней границ.

Другими словами, в промежутке $[a, b]$ найдутся такие точки x_1 и x_2, что значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будут соответственно наименьшим и наибольшим из всех значений функции $f(x)$ на этом отрезке.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Экономические процессы можно описывать функциональными зависимостями. При этом процессы, зависящие от одного параметра (аргумента) описываются функциями одной переменной. Процессы, зависящие от нескольких параметров, описываются функциями многих переменных.

Экономические процессы можно рассматривать с течением времени, тогда в роли переменной выступает время. В роли переменных могут выступать спрос, предложение, цена, доход, объем партии товара и др. экономические параметры.

Примерами функциональных зависимостей могут служить:

- производственная функция - соотношение, связывающее результаты производственной деятельности и обусловившие их факторы;

- функция выпуска (частный вид производственной функции) - соотношение, связывающее объем производства и наличие или потребление ресурсов.

Экономические процессы, выраженные функциональными зависимостями, могут быть исследованы методами дифференциального и интегрального исчисления для нахождения оптимальных величин составляющих их параметров.

Задача:

Постоянные издержки F (не зависящие от числа x единиц произведенной продукции) составляют 125 тыс.сум. в месяц, а переменные издержки $V(x)$ (пропорциональных x) – 700 сум. за каждую единицу продукции. Цена единицы продукции 1200 сум. Найти объем продукции x, при котором прибыль равна:

а) нулю,

б) 105 тыс. сум. в месяц.

Решение:

а. Издержки производства x- единиц продукции составляет:

$C(x) = F + V(x) = 125 + 0.7x$ (*тыс.сум.*). Совокупный доход (выпуска) от реализации этой продукции $R(x)$=1,2x, прибыль $P(x)$ = =$R(x) - C(x)$=0.5x-125 (*тыс.сум*). Точка безубыточности, в которой $P(x)$= 0.5x – 125 = 0, равна x = 250 *ед*.

б. Прибыль $P(x)$ равна 105 (*тыс.сум*), т.е. ($P(x)$= 0,5x-125=105 при x = 460(*ед*).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение функции. Что такое область определения функции, заданной формулой?
2. Перечислите способы задания функции.
3. Дайте определение четной и нечетной функции.
4. Что называется последовательностью?
5. Какая последовательность называется ограниченной?
6. Сформулируйте признак существования предела последовательности.
7. Дайте определение предела функции.
8. Что такое односторонние пределы функции?
9. Что такое первый и второй замечательные пределы?
10. Что такое точка разрыва, точки разрыва первого и второго рода?

ГЛАВА 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Что такое эти флюксии? Скорости исчезающе малых приращений. Они не есть ни конечные величины, ни бесконечно малые величины, но они и не нули?

Дж. Беркли

Историческая справка:

Два величайших математика XVIII века Ньютон и Лейбниц открыли свои формы анализа независимо друг от друга.

И. Ньютон

Разработанный Ньютоном математический аппарат, названный самим ученым **«теорией флюксий»**, в современной терминологии относится к теории производной.

Он утверждал, что геометрические образы - линии, поверхности, тела получаются в результате движения, а они осуществляются во времени. Для нахождения мгновенной скорости надо найти **«флюксию»** - предел отношения приращения пути к приращению времени, когда приращение времени стремится к нулю.

Переменные Ньютон назвал флюентами, а скорость движения флюент-флюксиями (производными по времени).

Г. Лейбниц

Если флюенту обозначить через y, то ее первой флюксией будет $\dot{y}$, второй $\ddot{y}$ и т.д.

Трактовка основного понятия производной – Ньютоном и Лейбницем была разной. Для Ньютона «флюксия» - скорость изменения «флюенты», для Лейбница - это отношение дифференциалов.

Однако вся Европа восприняла дифференциальное и интегральное исчисление в том виде, которое им придал Лейбниц – с более удобной терминологией и символикой (производная и интеграл, а не флюксия и флюента, исчисление дифференциалов, а не моментов).

Символ производной $\frac{dy}{dx}$, берет свое начало от Г.Лейбница. У него основным понятием была не производная, а дифференциал. Для обозначения приращения переменных величин, т.е.

$$\Delta y = y_2 - y_1 \text{ и } \Delta x = x_2 - x_1.$$

Л.Эйлер в середине XVIII века стал пользоваться греческой буквой Δ. Эти обозначения сохранились и до сих пор.

Сам термин «производная» (от французского слова «dérivée») впервые встречается у Л.Арбогаста в книге «Вычисление производных» (1800), а Коши используя начальную букву этого термина, стал обозначать производную символом Dy или $Df(x)$.

Понятие дифференциала и сам термин берут свое начало от Г.Лейбница.

Он разработал правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного. Ему принадлежит формула для многократного дифференцирования произведения (формула Лейбница)

§ 7.1. Производная функции

Основные понятия и определения

Производная - это фундаментальное понятие математического анализа. Роль производной очень велика, т.к. практически во всех приложениях математического анализа она позволяет получить локальную характеристику следуемого процесса в важнейшем отношении - она дает возможность количественно оценить изменяемость одной изучаемой величины в зависимости от количественного изменения другой, связанной с первой, величины.

Пусть $y = f(x)$ непрерывная функция и ее график имеет вид, как это показано на рис. 7.1.

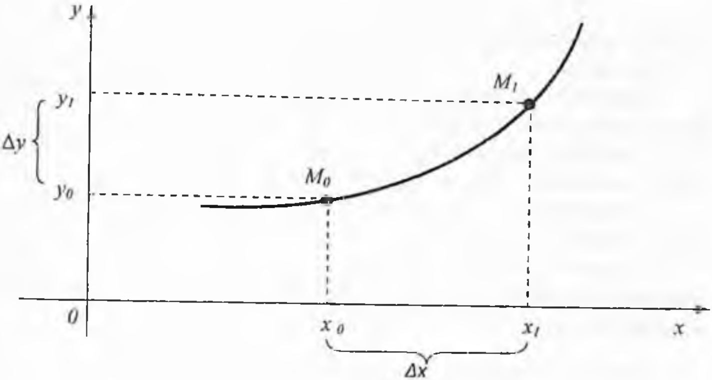


Рис. 7.1

Пусть:
$M_0\ (x_0;\ y_0)$ - фиксированная точка кривой;
$M_1\ (x_1;\ y_1\ )$ - подвижная точка кривой.

Алгоритм нахождения производной

1. Выберем и закрепим значение аргумента x_0 и найдем соответствующее ему значение функции $y_0 = f(x_0)$.

2. Дадим аргументу приращение Δx и обозначим новое значение аргумента $x_1 = x_0 + \Delta x$, новое значение функции $y_1 = y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$.

3. Найдем приращение функции $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

4. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

5. Будем искать предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Если этот предел, конечный или бесконечный, но определенного знака, существует, то он называется производной функции в точке x_0 и обозначается

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его бесконечно малому приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$.

Замечания.

1. Действие нахождения производной функции называется дифференцированием этой функции.

2. Значение аргумента x_0, закрепленное на первом этапе алгоритма. называется точкой дифференцирования.

3. Функция $y = f(x_0)$, имеющая в точке x_0 конечную производную, называется дифференцируемой в точке x_0.

4. Аналогично понятию производной вводятся понятия односторонних производных - левосторонней $f_-'(x)$ (производной слева) и правосторонней $f_+'(x)$ (производной справа):

$$f_-'(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0-0 \\ (\Delta x<0)}} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f_+'(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0+0 \\ (\Delta x>0)}} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теорема:

Для того, чтобы у функции в некоторой точке существовала производная, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали односторонние производные и чтобы они были равны.

$$f_-'(x) = f_+'(x).$$

Примеры нахождения производной

1. Продифференцировать функцию $y = x^2$.

1) $x_0, \quad y_0 = x_0^2$,

2) $\Delta x, \ x_1 = x_0 + \Delta x, \quad y_1 = (x_0 + \Delta x)^2$,

3) $\Delta y = y_1 - y_0 = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$,

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$,

5) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$,

x_0 – произвольная точка, поэтому $(x^2)' = 2x$. Функция дифференцируема при любом x.

2. Найти y' при $x = 0$ (только правостороннюю y'_+):

1) $x_0 = 0, \quad y_0 = \sqrt{0} = 0,$

2) $\Delta x, \quad x_1 = \Delta x, \quad y_1 = \sqrt{\Delta x}\ (\Delta x > 0),$

3) $\Delta y = \sqrt{\Delta x},$

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x},$

5) $y'_+ = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty,$

y'_- существует, но функция не дифференцируема.

§ 7.2. Непрерывность дифференцируемой функции

Теорема:

Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 дифференцируема, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство:

Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 дифференцируема.

Это значит, что существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$

По теореме теории пределов

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где α – б.м., $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда $\Delta y \to 0$, а это и значит, что функция в рассматриваемой точке непрерывна.

Теорема необратима. Из непрерывности функции в точке не следует ее дифференцируемость.

Так, функция

$$y = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ x & при \quad x > 0 \end{cases}$$

непрерывна при $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке, т.к. $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, как это было показано в рассмотренном выше примере.

§ 7.3. Формулы и правила дифференцирования

Вывод формулы дифференцирования для функции y=sin x

1. Выберем значение и найдем соответствующее ему значение функции $y_0 = \sin x_0$.

2. Дадим аргументу приращения Δx и обозначим новое значение аргумента $x_1 = x_0 + \Delta x$, новое значение функции $y_1 = \sin(x_0+\Delta x)$.

3. Найдем приращение функции

$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

4. Составим отношение: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$.

5. Будем искать предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ Если этот предел конечный, то он называется производной функции в точке x_0:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\frac{\Delta x}{2}} = \cos x_0.$$

Т.к. x_0 -произвольная точка, то для любой точки x

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Аналогично можно получить формулы дифференцирования для других функций. Формулы дифференцирования функций приведены в табл.7 и 8.

Вывод правил дифференцирования

$$y = uv$$

где u и v дифференцируемые функции аргумента x.

1. Выберем значение аргумента x_0. Обозначим соответствующие ему значения сомножителей и функции соответственно u_o, v_o, $y_o = u_o v_o$

2. Дадим аргументу приращение Δx. Тогда функция и сомножители получат приращение Δy, Δu и Δv соответственно. Обозначим новые значения:

$$x_1 = x_0 + \Delta x,\ u_1 = u_0 + \Delta u,\ v_1 = v_0 + \Delta v,\ y_1 = (u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v).$$

3. Найдем $\Delta y = y_1 - y_0 = (u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v) - u_0 v_0 = u_0 v_0 + {}$
$+ u_0\Delta v + v_0\Delta u + \Delta u\Delta v - u_0 v_0 = u_0\Delta v + v_0\Delta u + \Delta u\Delta v.$

4. Составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_0\Delta v + v_0\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x}.$$

5. Будем искать предел этого отношения при $\Delta x \to 0$.

В силу дифференцируемости рассматриваемых функций при $\Delta x \to 0$ имеем: $\Delta u \to 0, \Delta v \to 0, \Delta y \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_0 \Delta v + v_0 \Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u_0 \frac{\Delta v}{\Delta x} + v_0 \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \right) =$$
$$= u_0 v' + v_0 u'.$$

Т.к. x_0-любая точка, то $(uv)' = u'v + uv'$, т.е. производная произведения двух функций равна сумме произведений продифференцированной первой функции на вторую и первой функции на продифференцированную вторую.

Аналогичным образом можно вывести другие правила дифференцирования.

§7.4. Производная сложной функции

Теорема.

Пусть:

1) функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x_0 производную $u'_x = \varphi'(x_0)$;

2) функция $y = f(u)$ в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$ имеет производную $y'_u = f'(u)$.

Тогда сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ в указанной точке x_0 имеет производную $\{f[\varphi(x)]\}' = f'_u[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'_x(x_0)$,
равную произведению производной дифференцируемой функции по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента по независимой переменной.

Краткая запись: $\{y[u(x)]\}' = y'_u \cdot u'_x$.

Таблица 7

Формулы и правила дифференцирования

1. $c' = 0$	Производная постоянной.
2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	Производная степенной функции.
2.1. $x' = 1$	Частные случаи производной степенной функции.
2.2. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	

Продолжение табл. 7

2.3. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	Производная показательной функции
3.1. $(e^u)' = e^u \cdot u'$	Частный случай производной показательной функции.
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u} \cdot \log_a e \cdot u'$	Производная логарифмической функции.
4.1. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	Частный случай производной логарифмической функции.
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	Производные тригонометрических функций.
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	
7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = \sec^2 u \cdot u'$	
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$	
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	Производные обратных тригонометрических функций.
10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	

Таблица 8

Правила дифференцирования

1. $(u+v-w)' = u' + v' - w$	Производная суммы функций
2. $(uv)' = u'v + uv'$	Производная произведения двух функций.
2.1. $(cu)' = cu'$	Частный случай. Постоянный сомножитель выносится за знак дифференцирования.

Продолжение табл. 8

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	Производная частного двух функций.
3.1. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$	Частные случаи вынесения постоянной величины за знак дифференцирования.
3.2. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -c \cdot \frac{1}{v^2} \cdot v'$	

Примеры

1) $(x^8)' = 8x^7$

2) $\left(\sqrt[5]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

3) $(\cos 5x)' = -\sin 5x \cdot 5$

4) $(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$

5) $(\sin x \cdot \ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$

6) $\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-e^x(\sin x + \cos x)}{e^{2x}} = \frac{-(\sin x + \cos x)}{e^x}$

§7.5. Геометрический смысл производной

Касательной к кривой в точке M_0 называется прямая M_0T (рис 7.2), являющаяся предельным положением секущей M_0M, когда подвижная точка M, двигаясь по кривой, стремится совпасть с неподвижной точкой M_0.

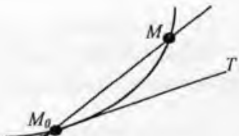


Рис. 7.2

Пусть:

$y = f(x)$ -непрерывная функция и ее график представлен на рис. 7.3.

$M_0(x_0; y_0;)$ – фиксированная точка кривой;

$M_1(x_1; y_1;)$ – произвольная точка кривой;

φ – угол, образованный секущей M_0M_1 с $0x$;

α -- угол, образованный касательной к кривой в точке M_0 с $0x$.

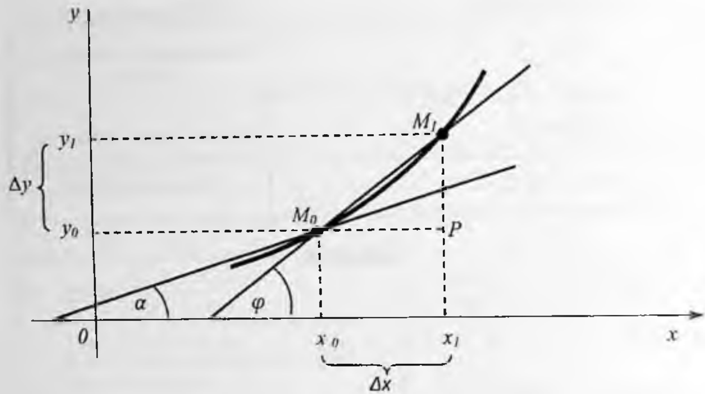


Рис . 7.3

На рис. 7.3 M_0P параллельна Ox, M_1P параллельна Oy.

В треугольнике M_0M_1P: $\frac{M_1P}{M_0P} = \text{tg}\varphi$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\varphi$

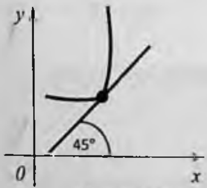
Пусть Тогда $\Delta x \to 0$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$, $\varphi \to \alpha$, $y' = \text{tg}\,\alpha$.

Следовательно:

$$y' = \text{tg}\,\alpha$$

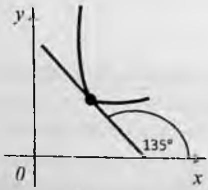
Таким образом, с точки зрения геометрии:

Производная функции $y = f(x)$ в точке равна угловому коэффициенту касательной к кривой в этой точке.



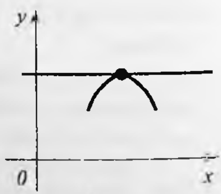
$y'_A = \text{tg}45° = 1$

Рис. 7.4



$y'_A = \text{tg}135° = -1$

Рис. 7.5



$y'_A = \text{tg}0° = 0$

Рис. 7.6

Производная с точки зрения механики

Пусть независимая переменная t символизирует время от какого-то начального момента t_0, а $s = f(t)$ - путь, пройденный телом за время t.

Тогда за период времени Δt тело пройдет путь Δs · Средняя скорость движения тела равна

$$V_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Для того, чтобы найти истинную скорость движения тела в определенной точке, нужно рассматривать бесконечно малый промежуток времени $\Delta t \to 0$;

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Аналогичные рассуждения применимы в случае нахождения истинного значения ускорения тела.

Первая производная пути по времени характеризует истинную скорость движения тела $\frac{ds}{dt} = V$ *в данной точке.*

Вторая производная пути по времени характеризует истинное ускорение движения тела $\frac{d^2s}{dt^2} = a$ *в данной точке.*

Пример

Пусть путь s (метров), пройденный телом за время t (секунд), описывается зависимостью

$$s = 5t^3 + 10.$$

Найти скорость и ускорение тела в момент времени $t = 2c$.

Решение:

Скорость тела в зависимости от времени описывается выражением

$$V = \frac{ds}{dt} = (5t^3 + 10)' = 15t^2.$$

В момент времени $t = 2\,c$, $V = 15 \cdot 2^2 = 60\,м/с$.

Ускорение тела в зависимости от времени описывается выражением

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = (15t^2)' = 30t$$

В момент времени $t = 2\,c$, $a = 30 \cdot 2 = 60\,м/c^2$.

Производная с точки зрения экономики

Как было рассмотрено с точки зрения механики, производная характеризует интенсивность изменения (скорость) какого-либо процесса относительно какого-либо фактора.

В экономике, аналогично рассмотренному ранее, производная характеризует интенсивность изменения экономических процессов относительно времени или других факторов, выступающих в качестве независимой переменной.

Например, если непрерывная функция $Q = f(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t, а величина $q_{cp} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ есть средняя производительность труда за время Δt, то очевидно, что величина

$$q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

характеризует ***производительность труда*** в момент времени t_0.

§7.6. Дифференцирование неявной функции

Соотношение, $F(x;y) = 0$ связывающее функцию y и независимую переменную x в виде F (x, y)=0 (т.е. не разрешенное относительно y), называется *неявной функцией*. Иными словами, неявная функция отличается от явной формой представления.

Так, $x + y = 4$ и $y = 4 - x$ есть одна и та же функция, но первое выражение представляется в неявной форме, а второе - в явной.

В связи с тем, что не всякую функцию можно представить в явном виде, т. е. разрешить относительно y, для дифференцирования неявной функции следует пользоваться правилом: нужно дифференцировать обе части выражения, представляющего неявную функцию, помня о том, что $x' = 1$, а $y' = y'$.

Примеры

1) $x^2 + y^2 = 1,\ 2x + 2y \cdot y' = 0,\ y \cdot y' = -x,\ y' = -\frac{x}{y};$

2) $x^2y^3 + y = x^3$, $2xy^3 + x^2 3y^2 y' + y' = 3x^2$,

$$y'(3x^2y^2 + 1) = 3x^2 - 2xy^3, \quad y' = \frac{3x^2 - 2xy^3}{3x^2y^2 + 1}.$$

Дифференцирование функции, заданной в параметрической форме

Функция задана в ***параметрической форме,*** если функциональная зависимость между переменными задана с помощью вспомогательных переменных - параметров, например, зависимость между x и y представлена в виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Psi(t)' \end{cases}$$

где t – параметр.

Исключая параметр t в параметрически заданной функции, можно x и y получить заданную функцию в виде $y = f(x)$.

Пример

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ –уравнение окружности в параметрической форме.

Возведя в квадрат обе части обоих уравнений и складывая эти уравнения почленно, получим:

$x^2 + y^2 = 1$ – уравнение окружности после исключения параметра t.

Производная функции, заданной в параметрической форме, выражается следующим образом:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример

Найти y'_x , если функция задана в виде:

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Решение:

$$x'_t = 3t^2, \quad y'_t = \cos t, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t}{3t^2}.$$

§ 7.7. Логарифмическое дифференцирование

Сложно-показательной функцией называют функцию вида $y = u^v$, где и u, и v - функции от x.

Получить формулу дифференцирования этой функции можно при помощи *логарифмического дифференцирования*, т.е. при помощи дифференцирования после предварительного логарифмирования.

Итак, пусть $y = u^v$.

Прологарифмируем обе части этого выражения:

$\ln y = \ln u^v, \ln y = v \ln u.$

Продифференцируем выражение:

$$(\ln y)' = (v \ln u)', \quad \frac{1}{y}y' = v'\ln u + v\frac{1}{u}\cdot u', \qquad y' = y\left(v'\ln u + v\frac{1}{u}u'\right),$$

$$y' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{1}{u}u'\right) = u^v\ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1}u'.$$

Таким образом, получено правило: для *того, чтобы получить производную сложно-показательной функции, нужно эту функцию продифференцировать дважды: один раз как показательную, другой раз как степенную, и полученные выражения сложить.*

$$u^v = u^v\ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1}u'.$$

Примеры

1) $(x^x)' = x^x\ln x + x \cdot x^{x-1} = x^x(\ln x + 1)$,

2) $\left(\sin x^{x^2}\right)' = \cos x^{x^2} \cdot \left(x^{x^2}\right)' = \cos x^{x^2}\left(x^{x^2}\ln x \cdot 2x + x^2 x^{x^2-1}\right)$.

§7.8. Производные высших порядков

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$, рассматриваемая на отрезке $[a; b]$. Допустим, что для каждого x *из* этого отрезка существует производная этой функции $y' = f'(x)$. Тогда эта производная сама зависит от точки дифференцирования x, т.е. является функцией от x. Поэтому можно поставить вопрос о производной этой функции $f'(x)$. Производная от $f'(x)$, т.е. производная от производной первого порядка, называется ***производной второго порядка*** исходной функции $y = f(x)$ и обозначается

$$y'', \quad f''(x) \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Точно так же производная от производной второго порядка называется ***производной третьего порядка*** исходной функции $y = f(x)$ и обозначается

$$y''', \quad f'''(x) \text{ или } \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Аналогично берутся и обозначаются производные более высоких порядков.

Пример

Найти производные функции

$$y = 2x^5 + 3x^4 + 4x^2 + 10x + 5$$

до третьего порядка включительно.

Решение:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 10x^4 + 12x^3 + 8x + 10;$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 40x^3 + 36x^2 + 8;$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 120x^2 + 72x.$$

§7.9. Дифференциал функции

Историческая справка:

В настоящее время «дифференцирование» понимают как вычисление дифференциалов функций, так и нахождение производных функций. Это своего рода недостаток терминологии, ибо дифференциал и производная - это не тождественные понятия. Под дифференциалом функции ныне понимают произведение производной на приращение аргумента:

Г.Лейбниц

$$dy = y'(x)\Delta x, \text{ или } dy = y'(x)dx, \qquad (7.1)$$

так как $dx = \Delta x$.

Не таков был смысл дифференциала при его возникновении. Лопиталь определял его как бесконечно малое приращение, т. е. как ту величину, которую мы обозначаем через Δy.

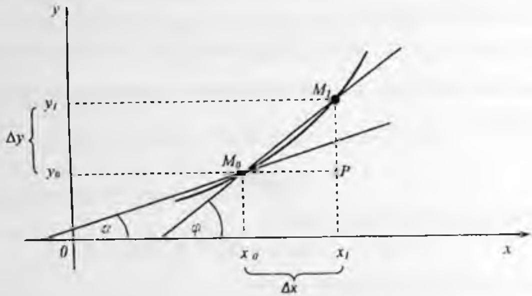


Рис. 7.3

Из прямоугольного треугольника M_0PM_1 (*см. рис.7.3*) следует:

$$M_1P = M_0P \times tga, \tag{7.2}$$

где представляет приращение аргумента, т.е. Δx, а tga - угловой коэффициент касательной в точке M_0, как мы уже знаем, есть производная Подставляя эти значения в (7.2), получаем:

$$M_1P = y'(x) \times dx = dy. \tag{7.3}$$

Таким образом, Δy представляет собой отрезок M_1P, приращение ординаты кривой, а dy - отрезок, приращение ординаты касательной.

Понятие дифференциала и сам термин берут свое начало от Лейбница.

Последний, однако, не дал точного определения дифференциала.

Исходя из первоначального понятия дифференциала, Лейбниц рассматривал и частные двух соответствующих дифференциалов, т.е. производные. Лишь со времен Коши, впервые ясно определившего производную как предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ при, понятие производной стало фундаментальным в дифференциальном исчислении, а понятие дифференциала определяется на основе производной.

Понятие дифференциала функции

С понятием производной тесно связано важное понятие дифференциала.

Пусть некоторая функция $y = f(x)$ имеет в точке производную $f'(x)$. Придадим аргументу приращение Δx, тогда Δy - соответствующее ему приращение функции. По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Следовательно, при $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$ при $\Delta x \to 0$.

На основании теоремы из теории пределов

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \text{где } \alpha - \text{б. м.}$$

Умножая обе части последнего выражения на Δx, получим:

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha \Delta x.$$

Приращение функции равно сумме двух слагаемых, причем второе слагаемое есть величина более высокого порядка малости, чем Δx.

Главная часть приращения функции называется ***дифференциалом функции*** и обозначается dy.

$$dy = y' \cdot \Delta x.$$

Но $\Delta x = dx$, следовательно,

$$dy = y' \cdot dx.$$

Геометрический смысл дифференциала

В треугольнике M_0NP рис. (7.7), очевидно:

$NP = M_0P \cdot \text{tg}\alpha$, $M_0P = \Delta x = dx$, $\text{tg}\alpha = y'$, $NP = \Delta x \cdot y' = dy$. Таким образом, $dy = NP$.

Дифференциал функции геометрически *представляет собой приращение ординаты точки, лежащей на касательной к графику функции.*

Очевидно, что с уменьшением Δx уменьшается разница между dy и Δy. Поэтому в приближенных вычис-

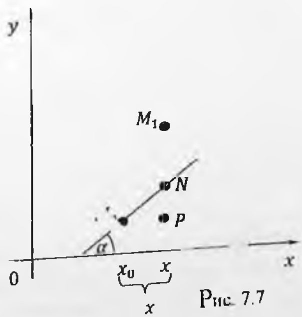


Рис. 7.7

лениях при малых Δx можно приращение функции заменять дифференциалом функции.

Алгоритм приближенных вычислений при помощи дифференциала

1. Записать функцию, значение которой нужно найти.
2. Выбрать «удобное» (близко лежащее к x) значение аргумента x_0 и вычислить соответствующее ему значение y_0.
3. Найти приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$.
4. Найти дифференциал функции и вычислить значение дифференциала в выбранной точке x_0.
5. Новое значение функции равно значению функции в точке x_0, сложенному с приращением функции, которое сложно найти, а потому нужно заменить дифференциалом.

Примеры

Найти:

$$\sqrt{27}$$

$y = \sqrt{x}$

$x_0 = 25,\ y_0 = \sqrt{25} = 5$

$\Delta x = 27 - 25 = 2$

$dy = y' \cdot \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x$

$dy|_{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 2 = \frac{1}{5}$

$\sqrt{25} \approx y_0 + dy = 5 + \frac{1}{5} = 5\frac{1}{5}$

$$\sin 31°$$

1. $y = \sin x$
2. $x_0 = 30°,\ y_0 = 30° = \frac{1}{2}$
3. $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175$
4. $dy = y' \cdot \Delta x = \cos x \cdot \Delta x$

   $dy|_{x_0} = \cos 30° \cdot 0{,}0175 = 0{,}015$
5. $\sin 31° \approx \frac{1}{2} + 0{,}015 = 0{,}515$

§7.10. Основные теоремы дифференциального исчисления

Поведение функции может быть исследовано с помощью производной этой функции, что и представлено в нижеследующих теоремах.

Теорема Ферма

Теорема:

Пусть функция $y = f(x)$:

1. Определена в замкнутом промежутке $[a;b]$.
2. Во внутренней точке c этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение.
3. В этой точке существует конечная производная $f'(c)$.

Тогда $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы

В теореме утверждается: при выполнении условий теоремы в указанной точке $f'(c) = 0$. т.е. касательная к кривой в этой точке параллельна оси Ox, (рис. 7.8).

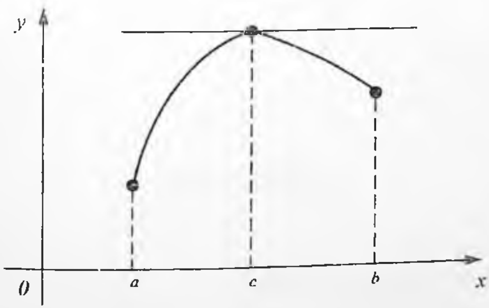


Рис.7.8

Замечания

1. Если $f(x)$ достигает наибольшего (наименьшего) значения в точке c, лежащей на одном из концов отрезка $[a;b]$, то не всегда $f'(c) = 0$, если даже $f'(c)$ существует и конечна (рис. 7.9).

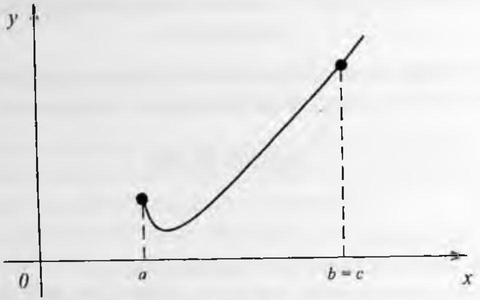


Рис.7.9

2. Теорема Ферма неприменима, если в точке c нет конечной производной (рис. 7.10).

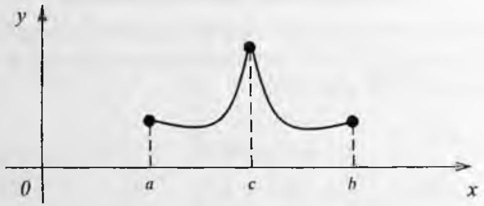


Рис.7.10

Теорема Ролля

Теорема:

Пусть функция $y = f(x)$:

1. Определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a;b]$.

2. Существует конечная производная $f'(x)$ хотя бы в открытом промежутке $(a;\ b)$.

3. На концах промежутка функция принимает равные значения $f(a) = f(b)$.

Тогда между a и b найдется такая точка c, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы

В теореме утверждается: при выполнении условий теоремы найдется такая точка c, что в указанной точке $f'(c) = 0$, т.е. в указанной точке касательная параллельна оси $0x$ (рис. 7.11).

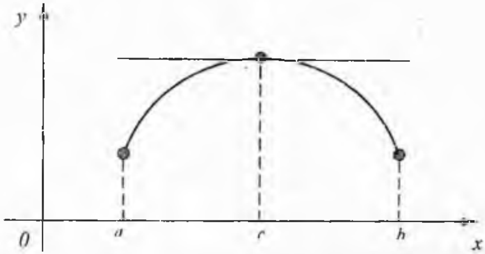


Рис.7.11

Теорема Лагранжа

Теорема:

Пусть функция $y = f(x)$:

1. Определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a;b]$.

2. Существует конечная производная $f'(x)$ хотя бы в открытом промежутке $(a;b)$.

Тогда между a и b найдется такая точка c, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Полученная формула носит название формулы Лагранжа или формулы конечных приращений.

Теорема Ролля - частный случай теоремы Лагранжа.

Геометрический смысл теоремы

В теореме утверждается: между a и b найдется точка c, в которой угловой коэффициент хорды равен угловому коэффициенту касательной, т.е. в этой точке касательная параллельна хорде (рис. 7.12).

AB - хорда, $k_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, в точке C, $k_C = f'(c)$.

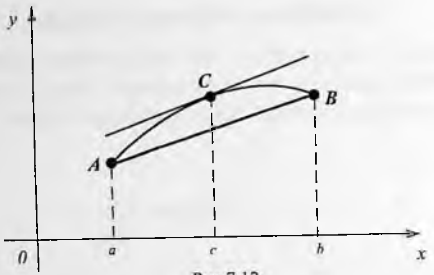


Рис.7.12

Теорема Коши

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$:

1. Определены и непрерывны в замкнутом промежутке $[a;b]$.

2. Имеют конечные производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ хотя бы в открытом промежутке $(a;b)$.

3. $\varphi'(x) \neq 0$ в открытом промежутке $(a;b)$.

Тогда между a и b найдется такая точка c, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Замечание.

Теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши при $\varphi(x) = x$.

§ 7.11. Вычисление пределов с помощью производных

Правило Лопиталя

$\left(\textit{для неопределенностей вида} \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \textit{и} \ \infty - \infty\right)$

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, возможно, самой точки x_0. И пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=0$, и $\varphi'(x) \neq 0$ при всех x из этой окрестности.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$.

Предел отношения функций равен пределу отношения производных этих функций, если предел отношения производных существует.

Приведенное утверждение имеет место и тогда, когда

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$;

2) когда рассматриваются односторонние пределы $(x \to x_0 \pm 0)$;

3) когда $x \to +\infty$.

Примеры

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$ (Первый замечательный предел).

2. Правило Лопиталя можно применять несколько раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Раскрытие неопределенностей вида $0^0, \infty^0, 1^0$

Вычисление пределов функций в любом из этих случаев можно осуществлять при помощи преобразования

$$f(x) = u^v = e^{\ln u^v} = e^{v\ln u}.$$

Поэтому в силу непрерывности показательной функции справедливо соотношение

$$f(a) = \lim_{x\to a} u^v = e^{\lim\limits_{x\to a} v\ln u}.$$

Пример

$$\lim_{x\to 0+0} x^{\operatorname{tg} x} = (0^0) = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{tg} x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}} = e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{-\sin^2 x}{x}} = e^{\left(\frac{0}{0}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{-2\sin\cos x}{1}} = e^0 = 1.$$

Иногда удобно искать не предел функции, а предел логарифма этой функции.

§7.12. Исследование функции

Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.

Леонардо да Винчи

Историческая справка :

Р. Декарт

В начале XVII в. стала ощущаться потребность в каких-то общих приемах исследования экстремальных задач. Попытки найти алгебраические способы отыскания максимумов и минимумов были сделаны Р.Декартом.

Латинские слова «maximum» и «minimum» означают соответственно «наибольшее» и «наименьшее» значения.

Первым прием для отыскания экстремумов изложил П.Ферма в своей работе «Метод исследования максимумов и минимумов» (1779). Свой метод он применил к задачам вписания в данный шар конуса наибольшего объема и т.д., т.е. применил его лишь к целым алгебраическим функциям.

В исследовании проблемы максимумов и минимумов важный вклад внес Г.Лейбниц. Для исследования возрастания и убывания функции он применил понятие дифференциала и вторую производную (точнее дифференциал d^2y) для исследования вогнутости и выпуклости кривой.

И. Ньютон

В своем «Дифференциальном исчислении» (1755) Л.Эйлер различает абсолютные экстремумы, от экстремумов относительных, а также рассматривает максимум и минимум функций нескольких переменных $f(x, y, z, ..., u)$

Для исследования функций на max и min Эйлер пользуется не только первой и второй производной но и производными более высоких порядков.

Лейбниц писал : «новый метод нахождения наибольших и наименьших значений ......

показывает, какую важную роль сыграла задача о нахождении экстремумов в становлении современной математики»

Лейбниц не только получает в качестве необходимого условия соотношение $f'(x) = 0$, но и использует второй дифференциал для различения максимума и минимума.

Исследования Ферма, Эйлера, Ньютона и Лейбница способствовали появлению единого способа отыскания экстремумов и перевода задачи с конкретным содержанием на язык математики

Учение о максимумах и минимумах находит многочисленные практические применения в нашу эпоху, когда вопросы повышения производительности труда занимают первостепенное место в экономике и в современном обществе.

Л. Эйлер

Исследование функции при помощи производных

Построение графика функции

Основные положения

В математическом анализе удобна графическая иллюстрация поведения функции, т.к. график функции дает наглядную картину ее поведения.

Метод построения графика функции «по точкам», взятым более или менее густо, но случайно, непригоден принципиально, т.к. он не отражает сам ход изменения функции. Например, возможно, что точки максимального и минимального значений функции окажутся между точками, взятыми для построения, и не будут нанесены на график. Или, например, у точек разрыва функция может стремиться к $+\infty$ $(-\infty)$, а случайно взятые точки не отразят эту картину.

В то же время с помощью производных первого и второго порядка можно установить промежутки возрастания (убывания) функции, промежутки выпуклости (вогнутости), точки максимума (минимума), точки перегиба.

Существуют методы, которые позволяют установить для графика данной функции те опорные точки и промежутки, с помощью которых график может быть построен с достаточной точностью, с учетом хода изменения функции.

В этом разделе будут даны методы исследования функций и построения их графиков.

Четность и нечетность функций

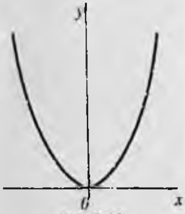


Рис. 7.13

Функция $y = f(x)$ называется ***четной,*** если для нее справедливо соотношение

$$f(-x) = f(x),$$

т.е. изменение знака аргумента не изменяет ни знака, ни числового значения функции.

Четные функции симметричны относительно оси Оу; $y = x^2$ (рис. 7.13); $y = \cos x$ (рис. 7.14). $y = x^2(x^2-1)$ - функции четные, т.к. $(-x)^2 = x^2$, $\cos(-x) = \cos x$, и т.д.

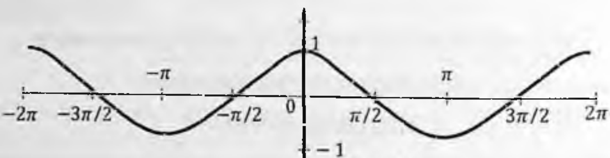
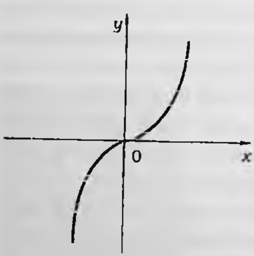


Рис. 7.14 $y = \cos x$



$y = x^3$

Рис. 7.15

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной,*** если для нее справедливо соотношение

$$f(-x) = -f(x),$$

т.е. при изменении знака аргумента знак функции изменяется на противоположный а абсолютное значение функции не изменяется.

Нечетные функции симметричны относительно начала координат.

$y = x^3$ (рис.7.15), $y = \sin x$ (рис.7.16) - нечетные функции.

$(-x)^3 = -x^3, \sin(-x) = -\sin x$.

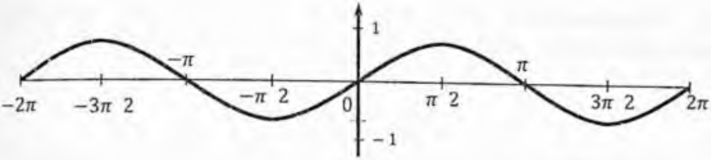


Рис.7.16 $y = \sin x$

Функция $y = x^3 + 4x$ – функция общего вида. Она ни четная, ни нечетная.

Периодичность функции

Периодической называется функция $y = f(x)$, для которой справедливо соотношение

$$f(x) = f(x + T),$$

где $T \neq 0$ - число, называемое ***периодом функции, которое,*** будучи прибавленным к аргументу, не изменяет значения функции.

Период функций $y = \cos x$, (рис.7.14), и $y = \sin x$ (рис.7.16), *равен* 2π.

Период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ *равен* π.

Это значит:

$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi)$ *и т.д.*

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x + 2\pi)$ *и т.д.*

Асимптоты

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближаются ветви кривой по мере удаления от начала координат (рис.7.17).

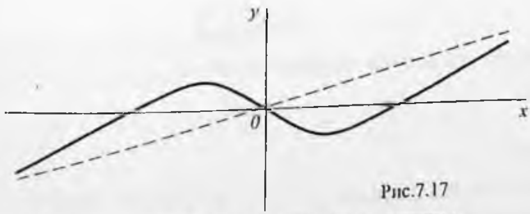


Рис.7.17

Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ является прямая , если имеет место хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty.$$

На вертикальные асимптоты рекомендуется проверять точки разрыва функции.

Пример 1

Дана функция $y = \frac{x+1}{(x+2)(x-3)}$

$\left.\begin{matrix} x = -2 \\ x = 3 \end{matrix}\right\}$ – две вертикальные асимптоты.

Наклонная ***асимптота*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (*при* $x \to -\infty$) имеет уравнение:

$$y = kx + b,$$

где

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx];$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx].$$

Наклонных асимптот нет, если хотя бы один из пределов для вычисленных параметров равен бесконечности.

Частный случай: При $k = 0$ и $b = 0$ имеем $y = 0$ - уравнение горизонтальной асимптоты.

Некоторые функции могут иметь односторонние асимптоты.

Построение графика функции рекомендуется начинать с построения асимптот.

Пример 2

Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^2}{x-3}$$

Решение.

$x = 3$ - точка разрыва.

Исследуем поведение функции слева и справа от точки $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2}{x-3}=\left(\frac{9}{-0}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x^2}{x-3}=\left(\frac{9}{+0}\right)=+\infty$$

$x = 3$ - вертикальная асимптота.

Для наклонной асимптоты

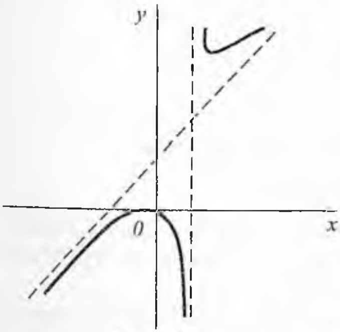


Рис. 7.18

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\quad k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-3)x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx];$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-3)}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+3x}{x-3}=3.$$

$y=x+3$ – уравнение наклонной асимптоты.

График функции представлен на рис. 7.18.

Пример 3

Найти вертикальную асимптоту графика функции

$$y = 3^{\frac{1}{x-4}}.$$

Решение:

$x = 4$ – точка разрыва функции.

Односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 4-0}3^{\frac{1}{x-4}}=3^{\frac{1}{-0}}=3^{-\infty}=\frac{1}{3^{+\infty}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 4+0}3^{\frac{1}{x-4}}=3^{\frac{1}{+0}}=3^{+\infty}=\infty.$$

x=4 – односторонняя асимптота. График рассматриваемой функции представлен на рис. 7.19.

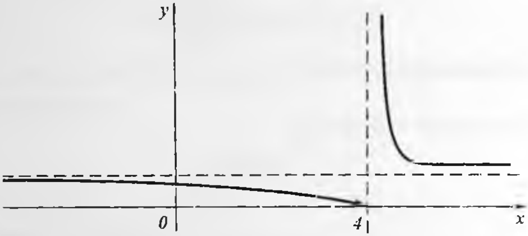


Рис. 7.19

§7.13. Возрастание и убывание функции

Основные понятия

Функция $y = f(x)$, определенная на интервале $(a; b)$, ***строго возрастает*** на этом интервале, если для любых $x_1; x_2 \in (a; b)$ из неравенства $x_2 > x_1$, следует $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$, определенная на интервале $(a; b)$, ***строго убывает*** на этом интервале, если для любых $x_1; x_2 \in (a; b)$ из неравенства $x_2 > x_1$, следует $f(x_2) < f(x_1)$

Для ***нестрого возрастающей*** (***неубывающей***) функции из $x_2 > x_1$, следует $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Для ***нестрого убывающей*** (***невозрастающей***) функции из $x_2 > x_1$, следует $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными.***

Признаки поведения функции

Теорема 1

Признак постоянства функции: Пусть функция $y = f(x)$:

- задана и непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- существует конечная производная $f'(x)$ при всех $x \in (a; b)$.

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была величиной постоянной, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in (a; b)$ имело $f'(x) = 0$.

Теорема 2

Признак возрастания (убывания) функции:

Пусть функция $y = f(x)$:

- задана и непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- существует конечная производная $f'(x)$при всех $x \in (a; b)$.

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была возрастающей (убывающей) на $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $x \in (a; b)$ имело место

$$f'(x) \geq 0 \; (f'(x) \leq 0).$$

Пример 1

Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^2 - 8x + 12.$$

Решение:

Функция имеет производную при всех

$$f'(x) = 2x - 8 = 2(x - 4).$$

$f'(x) < 0$ при $x < 4$. Функция убывает на интервале $(-\infty; 4)$.
$f'(x) > 0$ при $x > 4$. Функция возрастает на интервале $(4; +\infty)$.

Очевидно, графиком функции является парабола с вершиной в точке С (4: -4) и ветвями, направленными вверх.

§ 7.14. Экстремум функции

Основные понятия и определения

Точка x_0 называется точкой ***максимума*** функции $y = f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что имеет место неравенство $f(x_0) > f(x)$ для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности.

Точка x_0 называется точкой ***минимума*** функции $y = f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что имеет место неравенство $f(x_0) < f(x)$ для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности.

Определение максимума (минимума) предполагает, что функция задана по обе стороны от точки x_0.

Для обозначения максимума (max) и минимума (min) применяют объединяющий их термин - ***экстремум.***

Необходимое условие экстремума

На основании теоремы Ферма утверждается: если у функции $y = f(x)$ существует конечная двусторонняя производная $y' = f'(x)$ при всех $x \in (a; b)$, то в *точке* экстремума x_0 из этого промежутка $f'(x_0) = 0$.

Отсюда: *необходимое условие экстремума*

$$y'(x) = 0.$$

В точках, в которых двусторонняя конечная производная не существует, экстремум может существовать.

Точки, в которых выполняется соотношение $y'(x) = 0$ или конечная $y'(x)$ не существует, называются ***стационарными*** или ***критическими.***

Пример 1

$$y = x^{\frac{2}{3}};$$

$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ В точке $x = 0$ функция определена, а конечная производная y' не существует.

$\lim\limits_{x\to 0-0} y' = \left(\frac{2}{-0}\right) = -\infty,$

$\lim\limits_{x\to 0+0} y' = \left(\frac{2}{0}\right) = \infty.$

Конечной двусторонней производной в точке не существует, но при $x = 0$ функция имеет точку минимума $y_{min}(0) = 0$ (рис.7.20).

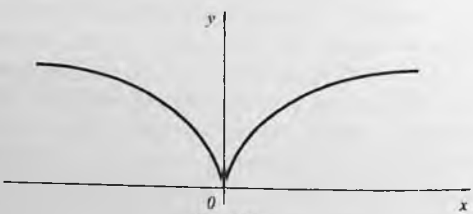


Рис. 7.20

Очевидно, что ***экстремум нужно искать только в тех точках, в которых $y' = 0$ или конечной двусторонней производной не существует,*** хотя экстремум есть не во всех критических точках.

Суть необходимого условия экстремума состоит в следующем:

- если в некоторой точке необходимое условие не выполняется, то в этой точке экстремума нет;

- если в некоторой точке необходимое условие выполняется, то нужно проверить выполнение достаточного условия.

Пример 2

Исследовать на экстремум функцию

$$y = x^3.$$

Решение:

$y' = 3x^2$, $y' = 0$, $3x^2 = 0$, $x = 0$ – критическая точка. В ней выполняется необходимое условие экстремума, но экстремума нет, $y' \geq 0$ при всех $x \in R$, функция возрастает.

Действительно, график функции $y = x^3$ - кубическая парабола, см.рис.7.15.

Следовательно, если x_0 - критическая точка, т.е. $f'(x_0) = 0$ или в этой точке не существует конечной двусторонней производной, то в ней возможен экстремум, и эту точку нужно подвергнуть дальнейшему испытанию.

Это испытание состоит в проверке выполнения достаточного условия.

Достаточные условия экстремума

Первое правило.

Пусть x_0 - критическая точка функции $y = f(x)$, нанесенная на числовую ось. Если при переходе через критическую точку x_0 или через точку, в которой нет конечной двусторонней производной, слева направо $y'(x)$ не меняет знак, то в этой точке экстремума нет.

Если $y'(x)$ меняет знак, то экстремум есть, при этом смена знака с (+) на (-) - max, с (-) на (+) - min.

Второе правило.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет не только первую производную в окрестности критической точки x_0, но и вторую производную в самой точке x_0, $f''(x_0)$.

Если $f''(x_0) > 0, \textit{то}\ x_0$ - точка минимума.

Если $f''(x_0) < 0, \textit{то}\ x_0$ - точка максимума.

Очевидно, что это правило не применимо к тем точкам, в которых нет конечной первой производной.

Алгоритм исследования функции на экстремум

1. Найти производную $y' = f'(x)$ и полученное выражение разложить на множители (для удобства вычисления знака y').

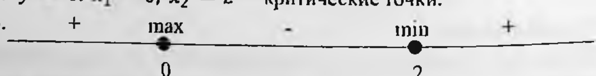
2. Приравнять y' к нулю. Корни уравнения $y' = O$ называются критическими точками. К критическим точкам присоединить те точки, в которых y' или обращается в бесконечность или не существует.

3. Точки, указанные в предыдущем пункте, нанести на числовую ось, разбивая ее на интервалы. Найти знаки производной y' в каждом интервале. Если при переходе через критическую точку слева направо y' не меняет знак, экстремума нет, если меняет - есть. При этом: смена знака с $(+)$ *на* $(-)\ -\ max, с\ (-)$ *на* $(+)\ -\ min$.

4.Найти значение функции в точках экстремума.

<u>*Пример 1*</u>

$$y = x^3 - 3x^2.$$

1. $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.
2. $y' = 0.\ x_1 = 0;\ x_2 = 2 -$ критические точки.
3. 

4. $y_{max}(0) = 0;\ \ y_{min}(2) = -4$ (рис. 7.21).

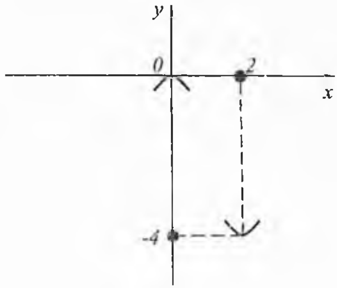
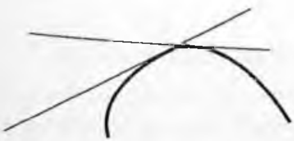


Рис. 7.21

§7.15. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

<u>Основные понятия и определения</u>

Кривая называется ***выпуклой*** на данном промежутке, если она лежит под касательной, проведенной в любой точке этого промежутка, и ***вогнутой,*** если она лежит над касательной, проведенной в любой точке этого промежутка.



Выпуклая кривая, $y'' < 0$
Рис.7.22

Вогнутая кривая, $y'' > 0$
Рис.7.23

Точка, при переходе через которую у кривой выпуклость сменяется вогнутостью и наоборот, называется ***точкой перегиба.***

На участке выпуклости кривой при движении слева направо касательная поворачивается по часовой стрелке: угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox, изменяется от острого к тупому и тангенс угла изменяется от положительного до отрицательного, т.е. первая производная убывает, а потому y'' отрицательна.

Отсюда следует: если функция дважды дифференцируема, то

$y'' \leq 0$ - необходимое условие выпуклости кривой;

$y'' \geq 0$ - необходимое условие вогнутости кривой.

Точки перегиба

Необходимое условие точки перегиба: если функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в x_0 точку перегиба, то

$$f''(x_0) = 0.$$

Достаточные условия точки перегиба:

1. Смена знака $f''(x_0)$ при переходе через критическую точку, т.е. через точку, в которой $f''(x_0) = 0$.

2. Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 k раз непрерывно дифференцируема, причем k нечетно и $k \geq 3$, и все производные порядка до $k-1$ включительно равны нулю, а $f^k \neq 0$, то в точке x_0 - точка перегиба.

При исследовании функции можно использовать любое из достаточных условий точки перегиба.

Алгоритм нахождения точек перегиба функции

1. Найти y'' и полученное выражение разложить на множители.

2. Решить уравнение $y'' = 0$. К корням этого уравнения присоединить точки, в которых не существует конечного значения y''. Полученные точки являются критическими точками.

3. Нанести критические точки на числовую ось, разбивая ее на промежутки. Найти знаки y'' в каждом промежутке. Если при переходе через каждую критическую точку y'' не меняет знак, то точки перегиба нет, а если меняет - в этой точке есть точка перегиба.

4. Найти значение функции в точке перегиба.

Пример 1

Найти точки перегиба графика функции

$$y = x^3 - 3x^2.$$

Решение:

1. $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$.
2. $y'' = 0$. $x = 1 -$ критическая точка.

- Пе р +

3. ———————•——————→

1

При переходе через точку $x = 1$ y'' поменяла знак с (-) на (+). Это значит, что при переходе через точку $x = 1$ слева направо выпуклость кривой сменяется вогнутостью, т.е. $x = 1$ – точка перегиба.

4. $y(1) = -2$; График функции (рис.7.24).

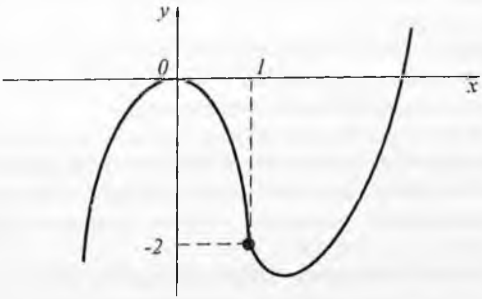


Рис. 7.24

Пример 2

Найти точки перегиба графика функции

$$y = x^4 + 3x^2.$$

Решение:

1. $y' = 4x^3 + 6x$, $y'' = 12x^2 + 6$.

2. При любых x $y'' \neq 0$. Не выполняется необходимое условие существования точки перегиба.

Кривая не имеет точек перегиба.

§7.16. План полного исследования функции и построение ее графика

<u>План полного исследования функции</u>

1. Найти область определения функции.
2. Установить : функция ограниченная или неограниченная.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Исследовать функцию на периодичность.
5. Исследовать функцию на четность и нечетность.
6. Исследовать функцию на симметричность.
7. Исследовать функцию на непрерывность. Если функция разрывная, то найти точки разрыва функции.
8. Найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции, если они есть.
9. Найти y' и исследовать функцию на возрастание *и* убывание, т.е. найти интервалы возрастания и убывания функции.
10. Исследовать функцию на экстремум.
11. Найти y'' и исследовать функцию на выпуклость и вогнутость, т.е. найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
12. Найти точки перегиба графика функции, если они есть.
13. Исследовать поведение графика функции вблизи точек разрыва, при $x \to -\infty$ и при $x \to \infty$.
14. Найти несколько дополнительных точек, т.е. найти координаты тех точек, которые характеризуют поведение графика функции.
15. Построить график функции.

Замечания.

1. Не всегда нужно исследовать функцию по всем указанным пунктам. Если характер поведения графика функции очевиден, нужно опустить соответствующие пункты исследования и приступить к построению графика функции.

2. Данные, полученные в результате исследования, нужно наносить на чертеж графика функции по мере их получения: получив точки пересечения графика с осями координат, нужно нанести их на график; получив уравнения асимптот - построить асимптоты и т.д.

3. Получив точки максимума и минимума, нужно нанести их на чертеж, отметив выпуклыми дугами точки максимума и вогнутыми - точки минимума.

4. Иногда для построения графика функции достаточно найти:

- область определения функции;
- точки пересечения графика функции с осями координат;
- асимптоты;
- точки экстремума;
- точки перегиба.

Если перечисленных данных недостаточно, то нужно проводить дальнейшие исследования по общему плану до тех пор, пока поведение графика функции не станет ясным.

Задача:

Количество работающих на предприятии x чел. И зарплата каждого из них $L(x)$ связана соотношением:

$$L(x) = 6000 - x^2 - \frac{54000}{x}.$$

Определить количество работающих на предприятии таким образом, чтобы зарплата каждого работника $L(x)$ принимала наибольшее значение.

Решение.

Пусть x – количество работающих, $L(x)$ – зарплата каждого работающего:

$$L(x) = 6000 - x^2 - \frac{54000}{x},$$

$$L'(x) = -2x + \frac{54000}{x^2} = \frac{54000 - 2x^3}{x^2} = \frac{2(27000 - x^3)}{x^2}.$$

$L'(x) = 0;\quad 27000 = x^3;\quad x = \sqrt[3]{27000} = 30$ – *критическая точка*

$+$ max $-$

$L_{max}(30) = 3300.$

Наибольшее значение $L(x)$ – принимает при $x = 30$, т.к. на рассматриваемом интервале $x \in (1;\infty)$ наибольшее значение функции совпадает с максимальным:

$$L(1) < 3300; \quad L(\infty) < 3300.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение производной функции, приведите обозначения производной?

2. В чем состоит геометрический и механический смысл производной?

3. Сформулируйте правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций.

4. Дайте определение дифференциала функции?

5. Сформулируйте правило вычисления дифференциалов функций.

6. Дайте определение производной второго порядка.

7. Сформулируйте признаки возрастания (убывания) функции на интервале.

8. Дайте определение максимума (минимума) функции.

9. В чем состоит необходимое условие существования экстремума?

10. Сформулируйте общее правило исследования функций на экстремум.

ГЛАВА 8

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В истории науки математика XVII в. занимает особое, весьма значительное место. XVII в. открывает новый период – период математики переменных величин.

К. А. Рыбников

Историческая справка:

Л. Эйлер

Правила дифференцирования были разработаны еще в трудах Г. Лейбница и братьев Бернулли. Например, теорема о независимости значения частных производных от порядка дифференцирования была известна еще в начале века. Л. Эйлер дал ей доказательство, распространив последние на частные производные высших порядков. В теории полного дифференциала Л. Эйлер показал, что в $df(x;y) = Pdx + Qdy$, частные производные должны удовлетворять условию: $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Символы $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ были введены около 1786 г. Лежандром. Необходимость, а затем достаточность данного условия, чтобы выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом, была доказана Эйлером. Он же, рассматривая функции трех переменных $f(x,y,z)$ и их полные дифференциалы вида $Pdx + Qdy + Rdz$, ввел условия: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$. С именем Эйлера связаны также и формулы дифференцирования сложных функций. Он разработал правила определения экстремумов двух переменных. Лагранж показал (1789), как отличать вид условного экстремума для функции многих переменных.

§ 8.1.Основные понятия

Любое отображение $D \to R$ называют ***функцией двух переменных*** с областью определения D и пишут $z = f(x;y)$, где f - символ соотвстствия.

Другими словами: Если каждой паре $(x;\ y)$ двух независимых переменных из области D по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение z из R то переменную величину z называют ***функцией двух независимых переменных*** x и y с областью определения D и пишут $z = f(x;y)$.

Аналогичным образом определяются функции многих переменных $z = f(x_1;x_2;\cdots x_n)$.

Пример 1

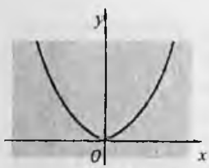


Рис.8.1

Найти и изобразить область определения функции $z = \frac{1}{x^2-y}$.

Решение. $x^2 - y \neq 0$. Область определения x0y плоскость x0y за исключением точек, лежащих на параболе $y = x^2$ (рис.8.1).

Пример 2

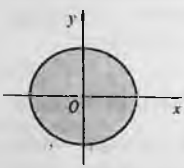


Рис.8.2

Найти и изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Решение: $9 - x^2 - y^2 \geq 0; \quad x^2 + y^2 \leq 3^2$.

Область определения - часть плоскости, лежащая внутри круга радиуса $r = 3$ центром в начале координат (рис.8.2).

Пример 3

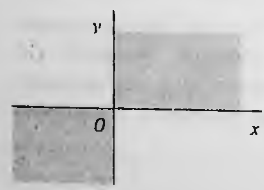


Рис.8.3

Найти и изобразить область определения функции $z = \sqrt{xy}$.

Решение. $xy \geq 0$.

Область определения - часть плоскости, в которой абсцисса и ордината каждой точки имеют одинаковые знаки, т.е. это часть плоскости, лежащая в первом и третьем координатных углах (рис. 8.3).

К числу функций нескольких переменных относятся производственные функции.

Производственными функциями называют функции, представляющие зависимости величин объемов выпускаемой продукции от переменных величин затрат ресурсов.

Производственные функции применяются не только в микроэкономических, но и в макроэкономических расчетах.

Простейшая производственная функция - функция зависимости объема произведенной работы V от объемов трудовых ресурсов R и вложенного в производство капитала K

$$V = f(K; R).$$

Одной из наиболее распространенных функций является функция Кобба-Дугласа

$$V = A \cdot K^{\alpha} \cdot R^{\beta},$$

$$\text{где } A = const, \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad 0 < \beta < 1, \qquad \alpha + \beta = 1.$$

Показатели α и β совпадают с коэффициентами эластичности $e_k(v)$ и $e_R(v)$.

Определение:

Эластичностью непрерывной функции называется предел относительного приращения функции к относительному приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$e_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{x}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Эластичность может быть выражена в виде отношения предельной и средней величины

$$e_x(y) = \frac{My}{Ay}.$$

Предел функции двух переменных

Основные понятия математического анализа, введенные для функции одной переменной, распространяются и на функции нескольких переменных.

Определение:

Постоянное число A называется пределом функции двух переменных $z = f(x;\ y)$ *при* $x \to x_0,\ y \to y_0$,если по любому $e > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что как только $|x \to x_0| < \delta$ и $|y \to y_0| < \delta$, так сейчас же $|f(x;y) - A| < \varepsilon$.

Этот факт обозначается так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = A.$$

В геометрических терминах определение имеет вид:

Пусть:

$M_0(x_0;y_0)$ - фиксированная точка из области D;

$M(x;y)$ - произвольная точка из области D, не совпадающая с точкой $M_0(x_0;y_0)$.

$|M_0M|$ - расстояние между точками M_0 *и* M;

$r > 0$ - постоянное число.

Постоянное число A называется пределом функции двух переменных $f(x;y) = f(M)$ при стремлении точки M к точке M_0, если для любого можно найти такое число $r > 0$, что как только расстояние $|M_0M| < r$, так сейчас же $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Этот факт обозначается так:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A.$$

§ 8.2.Частные и полное приращения функции двух переменных

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ – фиксированная точка из области D. а $M(x;y)$ – произвольная точка из области D, не совпадающая с точкой $M_o(x_o,y_o)$.

Разности $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$ называются ***приращениями аргументов.***

При указанных приращениях аргументов функция $z = f(x;y)$ может получить приращения:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x z &= f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0) \\ \Delta_y z &= f(x_0; y_0 + \Delta y_0) - f(x_0; y_0) \end{aligned}\right\} \text{частные приращения по x и y,}$$

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ полное приращение функции.

Непрерывность функции двух переменных

Функция $z = f(x;\ y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, если:

1. Она определена в этой точке и некоторой ее окрестности.

2. $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$ т.е. бесконечно малым приращениям независимых переменных отвечает бесконечно малое приращение функции.	2. $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$$ т.е. предел функции равен функции от предельных значений аргументов.

В противном случае функция терпит разрыв в точке $M_0(x_0; y_0)$,

Приведенное определение непрерывности задает непрерывность по всей совокупности переменных. Если имеет место непрерывность по всей совокупности переменных, то одновременно имеет место непрерывность по каждой переменной и по любым совокупностям переменных.

Доказано, что непрерывны:

1. Целая рациональная функция двух переменных на всей плоскости $x0y$.
2. Дробно - рациональная функция двух переменных во всех точках, в которых знаменатель функции отличен от нуля.
3. Степенно-показательная функция $z = x^y$ и другие.

§ 8.3. Частные производные функции двух переменных

Частной производной функции $z = f(x;\ y)$ по независимой переменной называется предел отношения соответствующего частного приращения функции по этой переменной к вызвавшему его приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Частная производная функции $z = f(x;\ y)$ по независимой переменной x обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}.$$

Другие обозначения z_x'; $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$; f_x' *и др.*

Частная производная функции $z = f(x;\ y)$ по независимой переменной y обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}.$$

Другие обозначения z_y'; $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$; f_y' *и др.*

Геометрический смысл частных производных

Пусть график функции $z = f(x;\ y)$ – поверхность. При $y = y_0$ в сечении поверхности плоскостью $y = y_0$ образуется кривая L_x.

Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *равна угловому коэффициенту касательной к кривой* L_x *в точке* $(x_0; y_0; z_0)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = tg\,\alpha$ *(рис.8.4).*

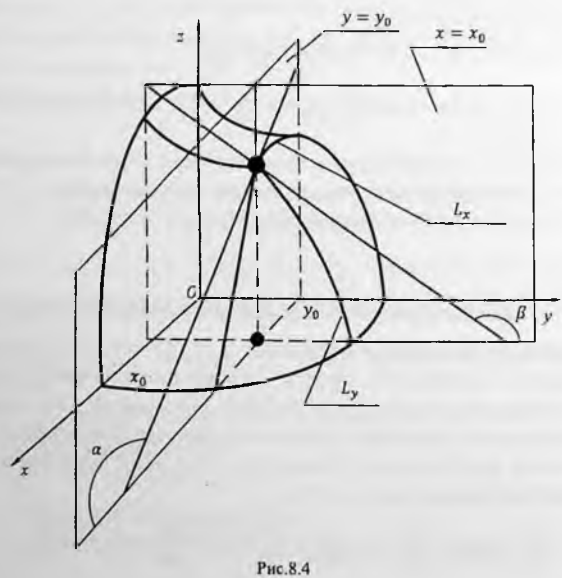


Рис.8.4

Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ равна угловому коэффициенту касательной к кривой L_y *в точке* $(x_0; y_0; z_0)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = tg\beta$ (рис.8.4).

Нахождение частных производных

Из определения частной производной следует: при нахождении частной производной функции нескольких переменных по некоторой переменной все остальные переменные следует рассматривать как постоянные величины.

Пример 1

Найти частные производные функции

$$z = x^3 y^5.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^5 \cdot 3x^2 = 3x^2 y^5; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cdot 5y^4 = 5x^3 y^4.$$

Пример 2

Найти частные производные функции

$$z = x^2 \sin y^3.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y^3 \cdot 2x = 2x \sin y^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y^3 \cdot 3y^2 = 3x^2 y^2 \cos y^3.$$

Пример 3

Найти частные производные функции

$$z = \frac{x}{x+y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y) - x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{(x+y)^2}.$$

§ 8.4. Дифференциалы функций двух переменных

Произведение частной производной функции $z = f(x;y)$ и приращения соответствующей независимой переменной называется ***частным дифференциалом*** этой функции и обозначается

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x; \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

Полагая приращения независимых переменных равными соответствующим дифференциалам независимых переменных, т.е. полагая $\Delta x = \partial x$; $\Delta y = \partial y$, получим выржения для частных дифференциалов

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx; \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Если частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ существуют в точке $(x_0; y_0)$ и в некоторой ее окрестности и непрерывны в этой точке, то по аналогии с функцией одной переменной устанавливается формула для полного приращения функции двух переменных

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \qquad (*)$$

где α и β зависят от Δx и Δy и вместе с ними стремятся к нулю.

Главная часть полного приращения функции Δz, равная

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \Delta y,$$

называется ***полным дифференциалом*** функции $z = f(x; y)$ и обозначается

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

С учетом того, что $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$, имеем:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Итак, *полный дифференциал функции двух переменных равен сумме частных дифференциалов.*

Функция двух переменных называется дифференцируемой в точке $(x_0; y_0)$, если для нее имеет место соотношение $(*)$.

Для достаточно малых Δx и Δy справедливо утверждение: полное приращение функции приближенно равно дифференциалу функции $\Delta z \approx dz$.

Алгоритм приближенных вычислений при помощи дифференциала

1. Записать функцию, значение которой нужно найти.

2. Выбрать «удобное» значение аргументов x_0 и y_0 и вычислить значение функции $z_0 = f(x_0; y_0)$. «Удобными» мы называем значения аргументов, близлежащие к заданным значениям, значение функции в которых легко вычисляется.

3. Найти Δx и Δy.

4. Найти полный дифференциал функции и вычислить его значение в точке $(x_0; y_0)$.

5. Искомое значение функции $z_1 = z_0 + \Delta z;\quad z_1 \approx z_0 + dz$.

<u>Пример 1</u>

Вычислить $\sqrt{3{,}05^2 + 3{,}96^2}$.

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. $x_0 = 3;$ и $y_0 = 4$. $z_0 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

3. $\Delta x = 0{,}05;\ \ \Delta y = -0.04$.

4. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \quad dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

$$dz|_{(3;4)} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} \cdot 0{,}05 - \frac{4}{\sqrt{9+16}} \cdot 0{,}04 = 0{,}03 - 0{,}032 = -0{,}002.$$

5. $\sqrt{3{,}05^2 + 3{,}96^2} = z_0 + \Delta z \approx z_0 + dz = 5 + dz|_{(3;4)} =$

$= 5 - 0{,}002 = 4{,}998.$

<u>Пример 2</u>

Вычислить $3{,}02^{1{,}97}$.

1. $z = x^y$.

2. $x_0 = 3;\ \ y_0 = 2$. $z_0 = 3^2 = 9$.

3. $\Delta x = 0{,}02$; $\Delta y = -0{,}03$.

4. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. $\quad dz = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x \cdot dy$.

$$dz|_{(3;2)} = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}2 + 9\ln 3 \cdot (-0{,}03) = 0{,}12 - 9 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}03 = -0{,}18.$$

5. $\quad 3,02^{1,97} = z_0 + \Delta z \approx z_0 + dz = 9 + dz|_{(3;2)} =$

$= 9 - 0{,}18 = 8{,}82$.

§ 8.5.Производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x;y)$ в некоторой области D имеет частную производную по некоторой переменной. Тогда эта частная производная, являясь функцией, может иметь в некоторой точке $(x_0;y_0)$ частные производные по той же переменной или по другой переменной.

Для заданной функции эти производные называются ***производными второго порядка.***

Например:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *или* z''_{xx} – *частная производная второго порядка по* x.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *или* z''_{xy} – *смешанная частная производная второго порядка.*

Теорема

Пусть в открытой области D:

– определена функция $z = f(x;y)$;

– существуют $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$;

– f''_{xy} *и* f''_{yx} непрерывны в некоторой точке $(x_0;y_0)$ этой области.

Тогда в этой точке смешанные производные равны:

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Пример

Найти частные производные второго порядка

$$z = x^3 \cdot \sin y.$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y \cdot 3x^2 = 3x^2 \sin y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3\sin y \cdot 2x = 6x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^3 \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 \cos y$$

Смешанные производные равны.

Дифференциалы высших порядков

Дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ является функцией x и y. Если существуют непрерывные частные производные второго порядка, то можно говорить о дифференциале $d^2 z$, называя его дифференциалом второго порядка.

Дифференциал второго порядка равен

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

§8.6.Производная сложной функции

Полная производная

Случай I

Если $z = f(x;y)$, где $\begin{cases} x = \varphi(u;v) \\ y = \psi(u;v) \end{cases} \Rightarrow$ тогда производная сложной функции $z = f[\varphi(u;v);\psi(u;v)]$ вычисляется по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Случай II

Если $z = f(x;y)$, где $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow$ тогда производная сложной функции $z = f[\varphi(t);\psi(t)]$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Случай III

Если задана функция $z = f(x,y,u,v)$, где y,u,v, в свою очередь, зависят от одного аргумента x:

$y = f(x)$, $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$, то z является функцией только одной переменной и производная $\frac{dz}{dx}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

т.к. $y,u,v,-$ функции только одного x, то частные производные обращаются в обыкновенные; кроме того, $\frac{\partial x}{\partial x}=1$, поэтому :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Эта формула полной производной $\frac{dz}{dx}$ (в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$).

Производная по направлению

Пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x;y)$, имеющая непрерывные частные производные z'_x и z'_y, и точка $M(x;y)$. Проведем из точки M вектор $\overline{s}$ с направляющими косинусами $\cos\alpha, \cos\beta$ $(\alpha+\beta=90°)$. На векторе $\overline{s}$ рассмотрим точку $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$. При переходе от точки M к точке M_1, функция $z = f(x;y)$ получит полное приращение

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y, \qquad (8.1)$$

где γ_1 и γ_2 - бесконечно малые, стремящиеся к нулю при $\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ стремящемся к нулю (рис. 8.5).

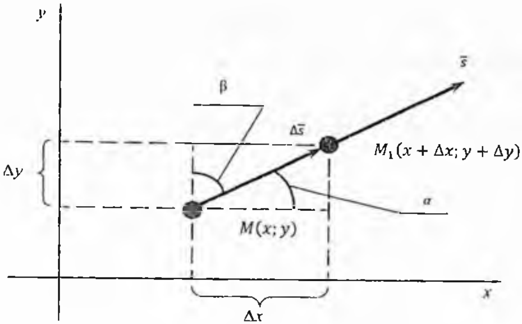


Рис. 8.5

Разделив соотношение (8.1) на Δs, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}+\gamma_1\frac{\Delta x}{\Delta s}+\gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta s}, \tag{8.2}$$

где $\frac{\Delta x}{\Delta s}=\cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta s}=\cos\beta$ = а, потому из (8.2) имеем:

$$\frac{\Delta z}{\Delta s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta+\gamma_1\cdot\cos\alpha+\gamma_2\cdot\cos\beta, \tag{8.3}$$

Пусть $\Delta s\to 0$. Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ при $\Delta s\to 0$ называется производной функции $z=f(x;y)$ в точке по направлению вектора $\bar{s}$ и обозначается

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Переходя к пределу в соотношении (8.3), получим

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta. \tag{8.4}$$

Очевидно, соотношение (8.4) утверждает: зная частные производные функции $z=f(x;y)$ можно найти производную этой функции по любому направлению, а каждая частная производная является частным случаем производной по направлению.

Пример

Найти производную функции

$$z = 2x^2 - 3y^2$$

в точке М (1;0) в направлении, составляющем с Ох угол в 30°.

Решение:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x;$ $\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 4 \cdot 1 = 4.$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y;$ $\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -6 \cdot 0 = 0.$

$\cos\alpha = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$\cos\beta = \cos(90° - 30°) = \cos 60° = \frac{1}{2}.$

По формуле (8.4):

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\beta; \quad \frac{\partial z}{\partial s} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}.$$

$\frac{\partial z}{\partial s} = 2\sqrt{3} > 0$. Следовательно, функция $z = f(x;y)$ в данном направлении возрастает.

§ 8.7. Градиент

Градиентом функции $z = f(x;y)$ называется вектор $\overline{grad\ z}$, координатами которого являются соответствующие частные производные данной функции

$$\overline{grad\ z} = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$$

Связь между производной функции по направлению и градиентом этой функции осуществляется соотношением

$$\frac{\partial z}{\partial s} = ПР_{\bar{S}}\overline{grad\ z},$$

т.е. производная функции $z = f(x;y)$ в данном направлении $\bar{S}$ равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня данной функции.

Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке.

Пример

Найти градиент функции

$$z = x^2 y$$

в точке M (3;4).

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 3^2 = 9.$$

$$\overline{grad\ z} = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} = 24\bar{i} + 9\bar{j}.$$

§ 8.8. Экстремум функции нескольких переменных

Историческая справка:

Конец XVIII в. ознаменовался серией исследований Эйлера, Лагранжа и других ученых. Вариационное исчисление при этом сравнительно быстро приняло завершенную форму в его наиболее элементарной части, относящейся к теории первой вариации. Рассматривался еще лишь слабый экстремум и соответственно лишь сравнительно гладкие кривые.

Лагранж

Главной задачей вариационного исчисления оказалась проблема отыскания экстремумов функций возможно более широкого класса. Ряд работ в XIX в. был посвящен именно этой теме. Однако, наряду с этим кругом проблем, оставалась нерешенной еще одна задача: как различить вид достигаемого экстремума. Относительно этой задачи еще Лагранж, опираясь, по - видимому, на аналогии с дифференциальным исчислением, указанные выше, отметил возможность применения второй вариации для решения этого вопроса.

В 1786г. Лежандр смог привести вторую вариацию к виду, из которого явствовало, что ее знак зависел от знака $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$. Это привело к так называемому условию Лежандра. Это условие оказалось и достаточным для слабого экстремума, что было показано К. Якоби в 1837г., при условии, что экстремаль может быть включен в поле экстремалей - в однопараметрическое семейство кривых, не пересекающихся между собой и заполняющих некоторую односвязную область. Чтобы на экстремали осуществлялся максимум (соответственно минимум), необходимо, чтобы вдоль нее

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \le 0 \quad \left(\text{соответственно } \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \ge 0\right).$$

Основные положения

Функция $z = f(x;y)$ во внутренней точке $M_0(x_0;y_0)$ области имеет максимум (минимум), если у этой точки есть окрестность такая, что значение функции в этой точке $f(x_0;y_0) \ge f(x;y)$ $\left(f(x_0;y_0) \le f(x;y)\right)$, где $M(x;y)$ любая точка из этой окрестности, не совпадающая с $M_0(x_0;y_0)$.

Если в точке $M_0(x_0;y_0)$ дифференцируемая функция имеет экстремум, то в этой точке частные производные функции равны нулю

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}. \qquad (8.5)$$

Точки, в которых выполняется условие (8.5), а также точки, в которых хотя бы одна из производных

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad и \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

не существует, называются ***критическими точками.***

Необходимое условие экстремума

Необходимым условием экстремума является выполнение условия (8.5):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

или хотя бы одна из частных производных должна не существовать.

Достаточное условие экстремума

Пусть:

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Тогда, если :

$\Delta < 0$ – экстремума нет;

$\Delta = 0$ – необходимы дополнительные исследования;

$\Delta > 0$ – экстремум есть,

$$\mathbf{max}, \ \text{если} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0;$$

$$\mathbf{min}, \ \text{если} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0.$$

Алгоритм исследования функции $z = f(x; y)$ на экстремум

1. Найти частные производные функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

2. Приравнять эти частные производные к нулю и решить систему (8.5)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

3. Точки, в которых выполняется условие (8.5), и точки, в которых хотя бы одна из частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует, назвать критическими.

4. Найти частные производные второго порядка и составить выражение

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

5. Вычислить значение Δ в критических точках и найти экстремум (если он есть).

Пример 1

Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение.

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$; $x(x^3 - 1) = 0$.

$$x_1 = 0; y_1 = 0. \qquad x_2 = 1; y_2 = 1.$$

3. $M_1(0;0)$, $M_2(1;1)$ – критические точки.

4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$.

$$\Delta = 6x \cdot 6y - 9 = 36xy - 9.$$

5. $\Delta|_{M_1(0;0)} = -9 < 0$ – экстремума нет.

$\Delta|_{M_2(1;1)} = 36 - 9 = 27 > 0$ – экстремум есть.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$. $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2(1;1)} = 6 > 0$. В точке $M_2(1;1)$ функция имеет минимум.

$z_{\min}(1;1) = 1^3 + 1^3 - 3 = -1$.

§ 8.9.Наибольшее и наименьшее значения функции

Основные положения

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D и имеет в этой области конечные частные производные.

По теореме Вейерштрасса в области D найдется точка $(x_0; y_0)$, в которой функция принимает наибольшее (наименьшее) значение.

Если точка $(x_0; y_0)$ лежит внутри области, то в ней функция принимает максимальное (минимальное) значение. Но свое наибольшее (наименьшее) значение функция может принимать и на границе области.

Алгоритм исследования функции на наибольшее (наименьшее) значение в области *D*.

1. Найти частные производные функции.

2 . Приравнять их к нулю.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$

и найти критические точки, присоединив к решению системы те точки, в которых частные производные не существуют.

4. Вычислить значения функции в критических точках и в граничных точках области.

5. Выбрать наибольшее (наименьшее) значение функции.

Пример

Число 12 разбить на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение:

Пусть:

x - одно слагаемое;

y - другое слагаемое;

тогда $12 - x - y$ – третье слагаемое.

Произведение чисел $z = x \cdot y \cdot (12 - x - y)$.

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 12y - 2xy - y^2$. $\frac{\partial z}{\partial y} = 12x - x^2 - 2xy$.

2. $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 12y - 2xy - y^2 = 0 \\ 12x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y \cdot (12 - 2x - y) = 0 \\ x \cdot (12 - x - 2y) = 0 \end{cases}$.

Решая систему, получим четыре критические точки:

$$O(0;0);\quad A(12;0);\quad B(0;12);\quad M(4;4).$$

Очевидно, функция $z = f(x;y)$ рассматривается внутри треугольника: $x > 0$; $y > 0$; $x + y < 12$ (рис. 8.6), т.е. область D ограничена прямыми $x = 0, y = 0, x + y = 12$.

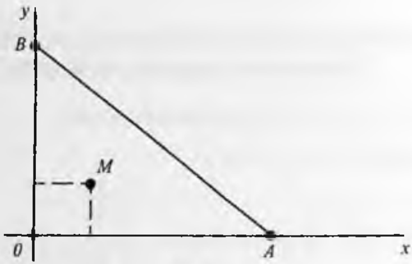


Рис. 8.6

Из критических точек $O(0;0)$; $A(12;0)$; $B(0;12)$; $M(4;4)$, координаты первых трех точек не удовлетворяют условию задачи, т.к. одна из координат равна нулю, следовательно, и произведение трех слагаемых равно нулю.

Исследуем точку $M(4;4)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12 - 2x - 2y.$$

$\Delta = -2y \cdot (-2x) - (12 - 2x - 2y)^2$.

$\Delta|_{M(4;4)} = 4 \cdot 4 \cdot 4 - (12 - 8 - 8)^2 = 64 - 16 = 48 > 0$.

Точка M(4;4) является точкой экстремума.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y;\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M(4;4)} = -2 \cdot 4 = -8 < 0.$$

Точка $M(4;4)$ является точкой максимума.

$z_{max} = 4 \cdot 4 \cdot (12 - 4 - 4) = 16 \cdot 4 = 64.$

Проверим границы области D.

На прямых $x = 0$ *и* $y = 0$ произведение искомых слагаемых обращается в ноль, т.к. один из сомножителей равен нулю.

На прямой $x + y = 12,\ x = 12 - y,\ 0 \le y \le 12,$

$z = (12 - y) \cdot y \cdot [12 - (12 - y) - y] = (12 - y) \cdot y \cdot [0] = 0.$

Следовательно, максимальное значение $z_{max} = 64$ и будет наибольшим значением функции.

Ответ: слагаемые 4;4;4.

Задача:

Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $K(x, y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$, где x – количество единиц I-го ресурса, y-II-го ресурса. Стоимость единицы I-го ресурса - 5, II-го – 10 ден.ед. Найти максимальную прибыль при использовании ресурсов.

Решение:

Производственная функция в денежном выражении равна доходу от использования ресурсов.

Издержки при этом равны:

$$C(x) = 5x + 10y.$$

Таким образом, функция прибыли равна

$$\pi(x, y) = 30\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} - 5x - 10y.$$

Требуется найти ее максимум.

Частные производные функции $\pi(x, y)$ равны

$$\pi'_x = 15x^{-1/2}\ \ y^{1/3} - 5;$$

$$\pi'_y = 10x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - 10.$$

Приравнивая их к нулю, находим решение $x = 81, y = 27.$,

Частные производные II-го порядка имеют вид:

$$\pi''_{xx} = -\frac{15}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}};$$

$$\pi''_{yv} = \pi''_{vx} = 5x^{-\frac{-1}{2}} \cdot y^{-\frac{-2}{3}}$$

$$\pi''_{yy} = -\frac{20}{3}x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{-5}{3}}.$$

$$\Delta = \pi''_{xx} \cdot \pi''_{yy} - \left(\pi''_{xy}\right)^2 = 25x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{4}{3}} > 0.$$

$$\pi''_{xx} < 0.$$

Найденная критическая точка есть точка максимума и значения прибыли равно 135 (ден.ед)

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется функцией двух независимых переменных; областью определения функции?

2. В чем состоит геометрический смысл функции двух переменных?

3. Что называется частной производной функции двух переменных?

4. Что такое экстремум функции двух переменных?

5. Сформулируйте необходимые условия существования экстремума функции двух переменных.

6. Какие точки называются критическими?

7. Сформулируйте достаточные условия экстремума функции двух переменных.

ГЛАВА 9
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В сокровищнице науки и культуры есть идеи, которые, возникнув в глубокой древности и развиваясь, служат человечеству и сейчас. К ним, безусловно, следует отнести идею интеграла в математике.

В. А. Никифоровский

Историческая справка:

И. Бернулли

Огромный вклад в развитие математического анализа внес И.Бернулли. В 1742 году вышли четыре тома его сочинений, в том числе «Интегральное исчисление». Изложенный в нем материал вошел в современные учебники анализа.

И.Бернулли принадлежат: правило раскрытия неопределенности вида 0/0, теория интегрирования рациональных дробей т.д. Для распространения идей математического анализа много сделал Гийом Лопиталь.

Леонард Эйлер многие результаты своих работ изложил в классических монографиях: «Введения в анализ», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление». Интеграл - одно из важных понятий математики, возникшее в XVII веке из потребностей отыскивать функции по заданным производным, к чему приводили задачи измерения площадей, объемов, длин дуг и ряд задач механики и физики. Термин «интеграл» происходит от латинского слова «integer» - целый. Современное обозначение интеграла принадлежит Л.Эйлеру. $\int f(x)\,dx$.

Л. Эйлер

Интегральное исчисление вместе с дифференциальным до настоящего времени является одним из основных математических инструментов многих физических и технических наук.

Основной задачей интегрального исчисления является обратная задача -отыскание функции по ее производной или заданному ее дифференциалу.

«По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюэнтами». Эта общая проблема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, которую Ньютон решает, главным образом, с помощью бесконечных рядов, содержит, в частности, задачу определения функции F (называемой первообразной), зная ее производную $F' = f$. Именно эта задача приводит к понятию неопределенного интеграла. В современных учебниках дается такое определение: $F(x)$ в данном промежутке называется первообразной функцией для $f(x)$, если во всем этом промежутке $f(x)$ является первообразной $F(x)$, и $F'(x) = f(x)$ *или* $dF(x) = f(x)dx$

Термин «первообразная» функция ввел в начале XVIII в. Лагранж.

Наряду с $F(x)$, функции $F(x) + C$ (С- любая постоянная) будут первообразными для $f(x)$ и вообще любая первообразная для $f(x)$ может быть представлена в виде $F(x) + C$. Последнее выражение и называется неопределенным интегралом функции и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

«Неопределенным» интеграл называется потому, что этот символ неявно включает произвольную постоянную С. Об историческом происхождении символа уже говорилось выше.

Многие задачи из механики и физики ведут к понятию первообразной функции и неопределенного интеграла, однако исторически, в частности у Ньютона, это понятие возникло из геометрии как задача квадратуры кривой.

§ 9.1. Первообразная функция

Пусть в некотором промежутке функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$, т.е.

$$F'(x)= f(x).$$

При этом, очевидно:

$$\{F(x) + C\}' = f(x).$$

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функцией для функции $f(x)$ в данном промежутке, а сумма $F(x) + C$ называется ***семейством первообразных*** функций для $f(x)$ в данном промежутке.

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\sin x + C)' = \cos x.$$

$\sin x$ – первообразная функция для функции $\cos x$,

$\sin x + C$ –семейство первообразных функций для функции $\cos x$.

Пусть $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, т.е $F'(x) = f(x)$.

Семейство первообразных $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** этой функции и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Геометрический смысл неопределенного интеграла - семейство интегральных кривых, образованных перемещением кривой графика функции $f(x)$ параллельно оси OY на произвольный отрезок C.

Отыскание для функции $f(x)$ всех ее первообразных, называемое ***интегрированием*** ее, составляет важнейшую задачу интегрального исчисления.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, произведение $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением.

Пример. Пусть $f(x) = \cos x$; тогда неопределенный интеграл от этой функции

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\int f(x)dx = f(x)dx,$$

то есть знаки d и $\int$, когда d находится перед знаком $\int$, взаимно уничтожаются.

2. Интеграл дифференциала функции $F(\ )$:

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

то есть знаки d и $\int$ уничтожаются и тогда, когда d стоит после знака $\int$, только к $F(x)$ нужно прибавить произвольную постоянную С.

Можно доказать, что любая, непрерывная в данном промежутке, функция $f(x)$ имеет в этом промежутке первообразную функцию.

Таблица основных интегралов

1) $\int 0 \cdot du = C$

2) $\int du = u + C$

3) $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C;\ (m \neq -1)$

4) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$

5) $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$

6) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

7) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

8) $\int e^u du = e^u + C$

9) $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

10) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln tg\frac{u}{2} + C$

11) $\int \cos u\, du = \sin u + C$

12) $\int tg\, u\, du = -\ln\cos u + C$

13) $\int ctg\, u\, du = \ln\sin u + C$

14) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C$

15) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + C$

16) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

17) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arcctg}\frac{u}{a} + C$

18) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$

19) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a} \right| + C$

20) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln tg \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C$

Простейшие правила интегрирования

<1>Неопределенный интеграл от алгебраической суммы дифференциалов равен алгебраической сумме интегралов от каждого дифференциала в отдельности

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

<2>Постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx.$$

<3>Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то $\frac{1}{a} F(ax + b)$ – первообразная для функции $f(ax + b)$, то есть

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + C.$$

Часто встречаются случаи, когда $a = 1$ или $b = 0$.

$$\int f(x + b)dx = F(x + b) + C; \quad \int f(ax)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax) + C$$

§ 9.2. Основные методы интегрирования

I. Непосредственное интегрирование

Интегрирование, которое можно произвести с помощью табличных интегралов (после преобразования подынтегральной функции, если это необходимо), будем называть ***непосредственным интегрированием.***

Примеры непосредственного интегрирования.

1) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C;$

2) $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C;$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + C;$

4) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + C.$

Интегрирование с помощью поправок

Интегрирование, при котором интеграл сводится к табличному в результате преобразования функции под знаком дифференциала путем умножения ее на постоянную величину или прибавления к ней постоянной величины, называется ***интегрированием с помощью поправок.***

При этом используются два свойства дифференциала:

1. Выражение не изменяется, если под знаком дифференциала к функции прибавить постоянную величину, т.е.

$$du = d(u + C).$$

2. Если под знаком дифференциала функцию умножить на постоянную величину, все выражение нужно разделить на эту же постоянную величину, т.е.

$$du = \frac{1}{C} d(uC).$$

Очевидно, имеют место равенства:

$$dx = d(x+2) = d(x-4) = d(x+8);$$

$$dx = \frac{1}{3} d(3x) = \frac{1}{5} d(5x) = 4d\left(\frac{x}{4}\right);$$

$$dx = \frac{1}{6} d(6x-5) = \frac{1}{7} d(7x+9).$$

Интегрирование с помощью поправок является частным случаем правила замены переменной в неопределенном интеграле, которое будет рассмотрено в дальнейшем.

Примеры интегрирования с помощью поправок

1) $\int \cos(x-3)\,dx = \int \cos(x-3)\,d(x-3) = \sin(x-3) + C;$

2) $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x d2x = \frac{1}{2} \sin 2x + C;$

3) $\int e^{4x} dx = \frac{1}{4} \int e^{4x} d4x = \frac{1}{4} e^{4x} + C;$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d2x}{\sqrt{3^2-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C;$

5) $\int \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d3x}{2^2+(3x)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{arctg}\,\frac{3x}{2} + C;$

6) $\int (3x-5)^6 dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^6 d(3x-5) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^7}{7} + C.$

1. Интегрирование выражений вида $\int \frac{u' dx}{u}$

Если в числителе дроби сомножителем dx является производная знаменателя, то интеграл сводится к табличному:

$$\int \frac{u' dx}{u} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

Примеры

1) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + 2} = \ln|\sin x + 2| + C.$ 2) $\int \frac{2x\, dx}{x^2 - 4} = \ln|x^2 - 4| + C.$

2. Интегрирование выражений вида $\int \frac{u' dx}{\sqrt{u}}$

Если в числителе дроби сомножителем dx является производная подкоренного выражения знаменателя (корень квадратный), то интеграл сводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{u' dx}{\sqrt{u}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$$

Пример

$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin x - 5}} = 2\sqrt{\sin x - 5} + C;$ $\int \frac{5x^4\, dx}{\sqrt{x^5 + 8}} = 2\sqrt{x^5 + 8} + C.$

3. Интегрирование выражений вида:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Метод интегрирования: в квадратном трехчлене нужно выделить полный квадрат.

Алгоритм выделения полного квадрата в квадратном трехчлене x^2+4x+5

1. Записать квадрат суммы (разности), т.е. написать:	
- скобку	(
- x в первой степени	$(x$
- тот же знак, что перед коэффициентом x	$(x +$
- половину коэффициента перед x	$(x + 2$
- закрыть скобку и записать квадрат скобки	$(x + 2)^2$
2. Вычесть квадрат второго слагаемого из скобок	$(x + 2)^2 - 4$
3. Записать свободный член и привести подобные члены	$(x + 2)^2 - 4 + 5 =$ $= (x + 2)^2 + 1$

Замечание:

Если коэффициент при x^2 не равен 1, его нужно вынести за скобку (и за знак интеграла).

Пример

Найти $\int \frac{dx}{4x^2+8x+5}$.

Решение:

выделим из квадратного трехчлена в знаменателе полный квадрат

$$4x^2 + 8x + 5 = 4\left(x^2 + 2x + \frac{5}{4}\right) = 4\left[(x^2 + 2x + 1) - 1 + \frac{5}{4}\right] = 4\left[(x + 1)^2 + \frac{1}{4}\right].$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{dx}{4x^2+8x+5} = \int \frac{dx}{4\left[(x+1)^2+\frac{1}{4}\right]} = \frac{1}{2} \cdot 2arctg\ \frac{x+1}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} arctg\ 2(x + 1) + c.$$

4. Интегрирование выражений вида

$$\int \frac{(mx + n)dx}{ax^2 + bx + c}; \qquad \int \frac{(mx + n)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Сначала нужно в числителе получить производную знаменателя (подкоренного выражения), а затем интеграл разбить на два интеграла: один интеграл берется по методу, изложенному ранее:

1) $\int \frac{x}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{-2}{x^2+2x+5}\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx - \frac{1}{2}\cdot 2\int \frac{dx}{x^2+2x+5} =$
$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2} + C;$

2) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6+6-6}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-12}{\sqrt{(x+3)^2+1}}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+6x+10} - 6\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2+1}\right| + C.$

II. Метод интегрирования подведением функции под знак дифференциала

Дифференциал функции $dy = y'dx \;\Leftrightarrow\; y'dx = dy$. Таким образом, для подведения функции под знак дифференциала ее нужно проинтегрировать. Очевидно:

1) $\cos x\,dx = d\sin x$;
2) $2\,x\,dx = d\,x^2$;
3) $\frac{1}{x}dx = d\ln x$;
4) $3\,x^2dx = d\,x^3$;
5) $e^x\,dx = d\,e^x$;
6) $x^3\,dx = \frac{1}{4}d\,x^4$;
7) $\sin x\,dx = -d\cos x$;
8) $\frac{dx}{x^2+1} = d\,arctg\,x$;
9) $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d\,tg\,x$;
10) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\arcsin x$.

Суть данного метода интегрирования состоит в том, что подводя под знак дифференциала некоторую функцию, мы сводим интеграл к табличному.

Примеры

1. $\int \cos x\cdot\sin^3 x\;dx = \int \sin^3 x\,d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + C;$

2. $\int \frac{x}{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+5)}{x^2+5} = \frac{1}{2}\ln|x^2+5| + C;$

3. $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x\cdot d\ln x = \frac{\ln^2 x}{2} + C;$

4. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C.$

III. Интегрирование методом замены переменной (подстановкой)

Замена переменной (подстановка) является сильнейшим приемом для интегрирования функций. Замену переменной интегрирования можно проводить различными способами. Рассмотрим два из них:

1. В качестве новой переменной t можно выбрать функцию $\psi(x) = t$, таким образом, чтобы имело место:

$$f(x)dx = g\,[\psi(x)] \cdot \psi'(x)dx = g(t)dt,$$

где $g(t)$ - функция, более удобная для интегрирования, чем $f(x)$.

$$1)\int \sin^3 x \cos x\, dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{vmatrix}$$

$$= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

2. Пусть

$$f(x)dx = F(x) + C.$$

Новую переменную t можно ввести следующим образом $x = \varphi(t)$. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ соотношение принимает вид:

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F\,[\varphi(t)] + C.$$

$$2)\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \\ t = \sqrt{x} \end{vmatrix}$$

$$= \int \frac{2tdt}{(t+1)t} = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1| + C = 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.$$

Замечание. В обоих случаях обязателен возврат к исходной переменной.

IV. Метод интегрирования по частям

По частям можно брать интегралы, подынтегральная функция которых есть произведение функций, одна из которых упрощается от дифференцирования, а другая легко интегрируется.

Формула интегрирования по частям

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Интегралы, берущиеся по частям, условно можно разбить на группы:

1. Подынтегральная функция является произведением многочлена и показательной или тригонометрической (но не обратной тригонометрической) функции. В этом случае за u принимается многочлен.

$$\text{а)}\ \int (x+1)\cos 2x\ dx = \begin{vmatrix} u = x+1 & dv = \cos 2x\,dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+1)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}(x+1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C;$$

$$\text{б)}\ \int (x-2)e^{2x}\,dx = \begin{vmatrix} u = x-2 & dv = e^{2x}\,dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x-2)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C;$$

2. Подынтегральная функция является произведением некоторой функции и логарифмической или обратной тригонометрической функции. В этом случае за *u* принимается логарифмическая или обратная тригонометрическая функция.

$$\text{в)}\ \int x\ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C;$$

3. Подынтегральная функция является произведением показательной и тригонометрической функций. В этом случае интеграл берется дважды, причем каждый раз за *u* принимается или только тригонометрическая, или только показательная функция.

$$\text{г)}\ \int e^x \sin x\ dx = \begin{vmatrix} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \sin x\ dx \\ v = \int \sin x\ dx = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -e^x\cos x + \int \cos x\cdot e^x\,dx = \begin{vmatrix} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \cos x\ dx \\ v = \int \cos x\ dx = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x\, dx + C.$$

Перенося интеграл из правой части равенства в левую, получим:

$$2\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C;$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x) + C.$$

4. Подынтегральная функция имеет вид: $\sin \ln x$, $\cos \ln x$, $\sec^{2k+1} x$, $\operatorname{cosec}^{2k+1} x$. В данном случае интеграл приводится к самому себе.

5. Подынтегральная функция есть произведение двух функций, одна из которых упрощается от дифференцирования, а другая легко интегрируется. В этом случае за u принимается функция, упрощающаяся от дифференцирования.

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{c} u = x, \;\; du = dx \\ dv = \dfrac{x}{\cos^2 x} \\ v = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot tg\, x - \int tg\, x\, dx = x \cdot tgx + \ln \cos x + C.$$

§9.3. Интегрирование тригонометрических функций

<u>Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, где хотя бы одно из чисел m, n - нечетное</u>

В данном случае из нечетной степени нужно выделить первую степень функции и подвести ее под знак дифференциала, оставшуюся четную степень функции преобразовать в ту функцию, которая находится под знаком дифференциала по формуле:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x\, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x\, d \sin x =$$

$$= \int \sin^4 x\,(1 - \sin^2 x) d \sin x = \int \sin^4 x\, d \sin x - \int \sin^6 x\, d \sin x$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C;$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\cdot \sin x\,dx = -\int \sin^2 x\,d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)d\cos x$$

$$= -\int d\cos x + \int \cos^2 x\,d\cos x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$, где оба числа m и n - четные

В этом случае нужно применить подходящую формулу понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

$$\int \cos^2 3x\,dx = \int \frac{1+\cos 6x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int 4\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cdot\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx + \frac{1}{8\cdot 2}\int \sin^2 2x\cos 2x\,d2x = = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$$

$$+ \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d\sin 2x = \frac{1}{16}x - \frac{1}{16\cdot 4}\sin 4x + \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3} + C.$$

Интегралы вида $\int tg^m x\,dx$ $\left(\int ctg^m x\,dx\right)$

Можно выделить $tg^2\alpha$ $(ctg^2\alpha)$ и заменить по формуле:

$$tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \quad \left(ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)$$

$$\int tg^3 8x\,dx = \frac{1}{8}\int tg\,8x\cdot tg^2 8x\,d8x = \frac{1}{8}\int tg\,8x\left(\frac{1}{\cos^2 8x} - 1\right)d8x =$$

$$= \frac{1}{8}\int tg\,8x\,d\,tg 8x - \frac{1}{8}\int tg\,8x\,d8x = \frac{tg^2 8x}{16} + \frac{\ln\cos 8x}{8} + C.$$

Интегрирование произведений синусов и косинусов, имеющих различные аргументы

Произведение необходимо преобразовать в алгебраическую сумму по одной из формул:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Пример

$$\int\sin 4x\ \sin 6x\ dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 10x)dx=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{20}\sin 10x+C.$$

§9.4. Интегрирование рациональных функций

Некоторые сведения из высшей алгебры

Целой рациональной функцией называется функция, представляемая целым относительно переменной x многочленом:

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

где $a_0,a_1,\dots,a_n$ – постоянные, называемые коэффициентами многочлена; число n - постоянная, называемая показателем степени многочлена.

Дробно-рациональной функцией называется отношение двух целых рациональных функций. Она определена при всех значениях x, кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль.

Дробно-рациональная функция называется *правильной* дробно-рациональной функцией, если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя и неправильной, если степень многочлена числителя больше или равна степени многочлена знаменателя.

Выделение целой части неправильной дробно- рациональной функции нужно производить делением многочлена числителя на многочлен знаменателя, но в случаях, когда дробь не громоздкая, можно поступить следующим образом:

1) $\frac{x-2}{x+1}=\frac{x+1-1-2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{3}{x+1}=1-\frac{3}{x+1};$

2) $\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{x}{x}-\dfrac{3}{x}=1-\dfrac{3}{x}$;

3) $\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=\dfrac{x^2-1+1-5}{x^2-1}=\dfrac{x^2-1}{x^2-1}-\dfrac{4}{x^2-1}=1-\dfrac{4}{x^2-1}$.

Деление многочлена на многочлен

Алгоритм

1.Первое вычитание

1.1.Первое слагаемое делимого ($2x^5$) делится на первое слагаемое делителя (x^2).

1.2.Результат ($2x^3$) записывается под делителем, умножается на весь делитель, и произведение ($2x^5-6x^3$) вычитается из делимого (x^3-3x).

$$
\begin{array}{r|l}
-\;2x^5-5x^3-3x & x^2-3 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^5-6x^3} & 2x^3+x \\
x^3-3x & \\
\underline{x^3-3x} & \\
0 &
\end{array}
$$

2.Второе вычитание.

2.1.Первое слагаемое (x^3) новой строки (x^3-3x) делится на первое слагаемое делителя(x^2).

2.2.Результат (x) записывается под делителем, умножается на весь делитель, и произведение (x^3-3x) вычитается из (x^3-3x).

$$\frac{2x^5-5x^3-3x}{x^2-3}=\quad 2x^3+x$$

Процесс продолжается до тех пор, пока или произойдет деление без остатка, или получится выражение, показатель степени которого меньше, чем показатель степени делителя (это дает остаток).

<u>Пример</u>

$$
\begin{array}{r|l}
-\;3x^4+2x+5 & x^2+3 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^4+9x^2} & 3x^2-9 \\
-9x^2+2x & \\
\underline{-9x^2-27} & \\
2x+27+5 &
\end{array}
$$

$$\frac{3x^4-2x+5}{x^2+3}=3x^2-9+\frac{2x+32}{x^2+3}.$$

Разложение правильных дробно-рациональных функций на простые (элементарные) дроби

Простыми называют дроби следующих типов:

$$1.\ \frac{A}{x-a};\qquad 2.\ \frac{A}{(x-a)^k};\qquad 3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\qquad 4.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

где A, M, M, a, p, q - действительные числа, $k = 2,3,\ldots;\ m = 2,3,\ldots$, квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

Справедливо утверждение: каждая правильная дробно-рациональная функция может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей.

Рассмотрим три случая разложения дробно-рациональных функций:

1. Множители знаменателя линейные, они различны. Количество простых дробей равно показателю степени знаменателя.

$$\frac{*****}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+4}.$$

2. Наряду с линейными различными множителями знаменателя (которых может и не быть) присутствуют повторяющиеся линейные множители. Количество простых дробей равно показателю степени знаменателя.

$$\frac{*****}{(x+5)x(x-7)^3} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-7)^3} + \frac{D}{(x-7)^2} + \frac{E}{x-7}.$$

3. Наряду с линейными множителями знаменателя встречаются выражения второй степени, не разлагающиеся на линейные множители. При этом у каждого сомножителя второй степени знаменателя при разложении числителем является линейная функция общего вида

$$\frac{*****}{(x-3)(x^2+4)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Mx+N}{(x^2+x+1)}.$$

В рассмотренных примерах A, B, C, D, E, M, N - неизвестные коэффициенты (числа). Для их нахождения существует множество методов. Рассмотрим два из них.

1. Алгоритм метода подстановки численных значений.

1.1. Дробь разложить на простые дроби.

1.2. Правую часть привести к общему знаменателю.

1.3. Знаменатели отбросить.

1.4. Дать числовые значения переменной x, полагая x равным корню каждого сомножителя знаменателя.

1.1. $\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\dfrac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-2}.$

1.2. $\dfrac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}=\dfrac{A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}.$

1.3. $x^2+x-1=A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+C(x+1).$

1.4.

$$x=0 \quad -1=-2A \quad A=\frac{1}{2}$$

$$x=-1 \quad -1=3B \quad B=-\frac{1}{3}$$

$$x=2 \quad 5=6C \quad C=\frac{5}{6}.$$

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{5}{6(x-2)}.$$

2. Алгоритм метода приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x

2.1. Дробь разложить на простые дроби.

2.2. Правую часть привести к общему знаменателю.

2.3. Знаменатели отбросить.

2.4. Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x.

Замечание. Часто удобно применять комбинацию обоих методов:

$$\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1};$$

$$\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)};$$

$$x^3-2x+2=A(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

по алгоритму 1:

$$x=1; \quad 1=2A; \quad A=\frac{1}{2}.$$

по алгоритму 2:

при x^3: $\quad 1 = B + C;$

при x^2 : $\quad 0 = A - B + D - 2C;$

при x : $\quad -2 = C - 2D.$

Отсюда $C = 1; D = \frac{3}{2}; B = 0.$

$$\frac{x^3 - 2x + 2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{x + \frac{3}{2}}{x^2+1}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Чему равна производная от первообразной для данной функции ?

2. Как могут отличаться две первообразные одной и той же функции ?

3. Как отличается первообразная данной функции от неопределенного интеграла от этой функции ?

4. Какое условие является достаточным для существования неопределенного интеграла от данной функции ?

5. Чему равна производная $\left(\int f(x)dx\right)'$?

6. Назовите основные методы интегрирования.

7. На какой формуле основан метод замены переменной в неопределенном интеграле ?

8. На какой формуле основан метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле ?

ГЛАВА 10

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

После Лейбница, быть может, уже не было человека, который бы полностью охватывал всю интеллектуальную жизнь своего времени

Н. Винер

Историческая справка:

Понятия интеграл и интегральное исчисление возникли из потребности вычислять площади любых фигур, поверхностей и объемов произвольных тел Предыстория интегрального исчисления исходит из глубокой древности. Идея интегрального исчисления была древними учеными предвосхищена гораздо в большей мере, чем идея дифференциального исчисления.

И. Бернулли

Символ $\int ydx$ был введен Лейбницем в 1686г. В нем знак $\int$ представляет как бы удлиненную букву S (первая в латинском слове Summa-сумма); ydx напоминает структуру слагаемых суммы.

Термин «интеграл» (от латинского integer-целый, т.е. целая, вся - площадь) был предложен в 1696г. Иоганном Бернулли и одобрен, хотя и неохотно Лейбницем, который до этого пользовался выражением «сумма всех ydx». К понятию определенного интеграла приводят и другие задачи геометрии, механики и физики, в которых требуется найти предел так называемой интегральной суммы, т.е. выражения: $\delta=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

О.Коши

Здесь ξ_i - произвольная точка на участке Δx_i. Итак,

$$\lim_{\Delta xi\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

Последнее обозначение для определенного интеграла ввел Ж.Фурье. Числа a и b называют соответственно нижним и верхним пределами интеграла. Если функция $f(x)$, называемая подынтегральной, непрерывна, то предел, о котором идет речь, существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a\ ,b]$ на участки Δx_iни от выбора на них точек ξi. Функцию $f(x)$ называют в этом случае интегрируемой. В такой общей форме это определение интеграла было впервые сформулировано немецким математиком Б.Риманом примерно в середине прошлого века. Поэтому интегральную сумму σ иногда называют римановой суммой.

Ж. Фурье

Определенный интеграл, рассматриваемый как предел интегральной суммы, О.Коши выдвинул как одно из важнейших понятий анализа; он пользовался символом

$$\int_a^b f(x)dx,$$

предложенным Фурье. Именно благодаря Коши этот символ вошел в общее употребление и сохранился поныне.

§ 10.1. Понятие определенного интеграла

К понятию определенного интеграла можно подойти при решении задачи нахождения площади криволинейной трапеции ABCD, см. рис. 10.1. Предлагаемое ниже определение определенного интеграла принадлежит немецкому математику Б. Риману. Поэтому отличают рассматриваемый интеграл от интеграла Лебега и интеграла Стилтьеса тем, что иногда пишут перед интегралом символ R. Мы будем рассматривать только интегралы Римана, поэтому символ R опускается.

Ограниченность функции на данном, промежутке - есть ***необходимое условие*** интегрируемости функции на этом промежутке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим способ определения площади криволинейной трапеции ABCD (рис. 10.1), ограниченной линиями: $y = f(x)$ – сверху;

$y = 0$ – снизу; $x = a$ – слева; $x = b$ – справа, приводящий к понятию определенного интеграла:

1) разобьем отрезок $[a,b]$ точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n = b$ на участки и обозначим и каждый участок, и его длину Δx_i;

2) внутри или на границе каждого Δx_i выберем точку ξ_i и обозначим значение функции в этой точке $f(\xi_i)$;

3) составим произведения $f(\xi_i)\Delta x_i$ (с точки зрения геометрии каждое произведение равно площади прямоугольника с высотой $f(\xi_i)$ и основанием Δx_i);

4) составим сумму этих произведений $\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i$. Она называется n – ой интегральной суммой (с точки зрения геометрии это сумма площадей прямоугольников, т.е. приближенное значение площади криволинейной трапеции, ограниченной указанными ранее линиями;

5) будем искать предел этой суммы при $\Delta x_i \to 0$. Если этот предел существует независимо ни от способов дробления отрезков на участки, ни от выбора точек ξ_i, то он называется ***определенным интегралом*** и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

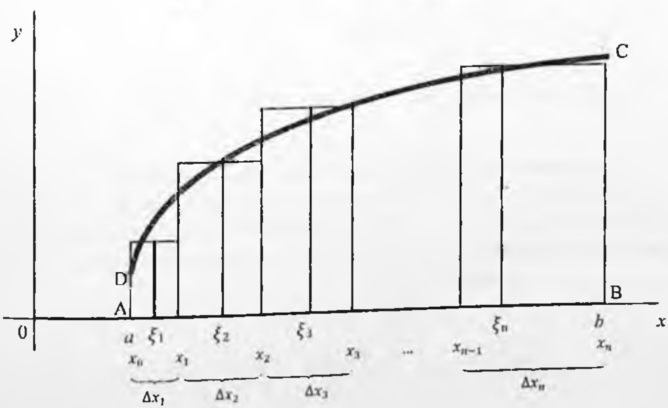


Рис. 10.1.Площадь криволинейной трапеции

Определенным интегралом называется предел n – й интегральной суммы при $\max \Delta x_i \to 0$.

В тех случаях, когда указанный предел существует, функция называется ***интегрируемой***, а a и b - ***нижним и верхним пределами интегрирования.***

Свойства определенных интегралов

В дальнейшем все рассматриваемые функции будем считать интегрируемыми на отрезке $[a,b]$, при этом $a < b$.

1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$;

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

6) если $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$;

7) ***теорема о среднем значении.*** Пусть функция $f(x)$ непрерывна. Тогда по теореме Вейерштрасса она принимает на отрезке $[a,b]$ наименьшее m и наибольшее M значения, а потому по теореме Больцана-Коши функция принимает и все промежуточные значения, т.е. найдется такая точка

$$c \in [a,b], \text{ что } \int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Геометрический смысл теоремы о среднем. Существует такая точка с между a и b, что площадь прямоугольника с высотой $f(x)$ и основанием $b - a$ равна площади рассматриваемой трапеции ABCD. Следовательно, существует такой прямоугольник, что его площадь равна определенному $\int_a^b f(x)dx$.

§10.2. Вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $x \in [a, b]$. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Этому интегралу с переменным верхним пределом с точки зрения геометрии соответствует площадь S криволинейной трапеции, ограниченной слева прямой $x = a$, справа прямой $x = x$, сверху кривой $y = f(x)$ снизу осью Ох (рис. 10.2).

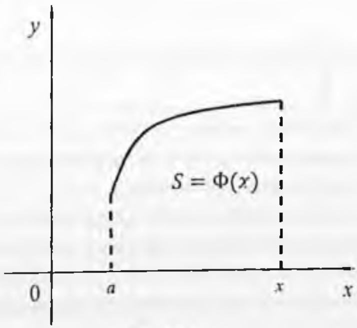


Рис. 10.2

Теорема Барроу

Производная интеграла с переменным верхним пределом по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, взятой в точке дифференцирования.

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Теорема утверждает: $\int_a^x f(t)dt$ есть первообразная функция для $f(x)$. Пусть $F(x)$ - другая первообразная для $f(x)$. Так как две первообразные одной и той же функции различаются на постоянную величину, имеет место равенство:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Пусть $x = a$ *. Тогда* $0 = F(a) + C; \quad C = -F(a).$

Пусть $x = b$*. Тогда* $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$

Это и есть ***формула Ньютона-Лейбница.*** Обычно ее записывают в виде:

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница утверждает: ***определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.***

Правило. Для вычисления определенного интеграла нужно найти первообразную подынтегральной функции (неопределенный интеграл) и из значения первообразной при верхнем пределе вычесть значение первообразной при нижнем пределе интегрирования.

Примеры

1) $\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3};$

2) $\int_{-1}^1 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^1 = \frac{1}{5}(1^5 - (-1)^5) = \frac{2}{5};$

3) $\int_2^4 \frac{dx}{x} = \ln x|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,d2x = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}$.

§10.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b udv = uv|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

Пример: $\int_1^2 x\ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = xdx; \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$

$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}(2^2\ln 2 - 1^2\ln 1) - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{4}(2^2 - 1^2) =$

$= 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

Замена переменной в определенном интеграле

Для вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, введем новую переменную t по правилу: $x = \varphi(t)$, требуя от $\varphi(t)$:

1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$ отрезке и не выходит за пределы отрезка $[a, b]$, когда t изменяется в отрезок $[\alpha, \beta]$;

2) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

3) $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.

При указанных условиях справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Замечания:

1) при замене переменной интегрирования обязательно ***нужно изменить пределы интегрирования***;

2) вычислив определенный интеграл с помощью замены переменной *не нужно* возвращаться к старой переменной.

Пример

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \begin{vmatrix} x = 2\sin t; & при\, x = 0 & t = 0 \\ dx = 2\cos t dt; & при\, x = 2 & t = \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

§ 10.4.Геометрические приложения определенного интеграла

Уравнения линий, ограничивающих область, заданы в прямоугольных координатах

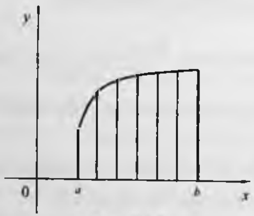


Рис. 10.3

а) область ограничена (рис. 10.3):

сверху - кривой, уравнение которой $y = f(x)$;

снизу - осью Ox;

слева - прямой $x = a$;

справа - прямой $x = b$.

Площадь области:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

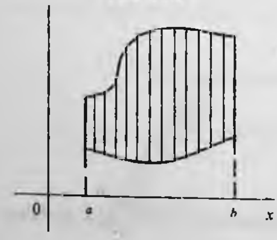


Рис. 10.4

b) область ограничена (рис.10 .4):

сверху - кривой, уравнение которой $y = f_1(x)$; снизу - кривой, уравнение которой $y = f_2(x)$; слева - прямой $x = a$; справа - прямой $x = b$.

Площадь области

$$S = \int_{a}^{b} [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

Задачи

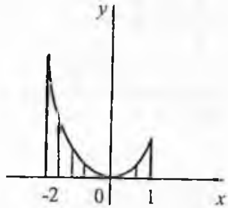


Рис. 10.5

1. Вычислить площадь области, ограниченной линиями (рис. 10.5):

$$y = x^2; y = 0;$$
$$x = -2;\ x = 1.$$

Решение:

$$S = \int_{-2}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{3}(1+8) = 3.$$

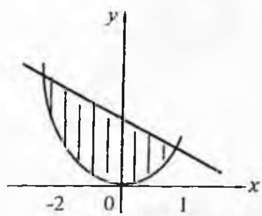


Рис. 10.6

2. Вычислить площадь области, ограниченной линиями (рис. 10.6):

$$y = x^2;\quad x + y = 2.$$

Решение:

Первая линия - парабола, вторая линия - прямая. Пределы интегрирования - абсциссы точек пересечения линий. Для нахождения их нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases};\qquad \begin{matrix} x^2 = 2 - x \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{matrix};\qquad \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{matrix}.$$

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = -\frac{(2-x)^2}{2}\Bigg|_{-2}^{1} - \frac{1}{3}(1+8) = 7{,}5 - 3 = 4{,}5.$$

3. Вычислить площадь области, ограниченной линиями (рис. 10.7):

$$xy = 6;\ x = 1;\ x = e;\ \ y = 0.$$

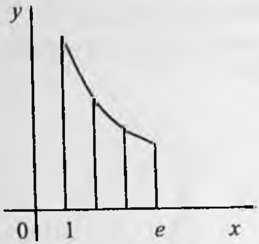


Рис. 10.7

Решение:

Первая линия - гипербола, ограничивающая область сверху. Площадь этой области:

$$S = \int_1^e \frac{6}{x} dx = 6 \ln x \Big|_1^e = 6(\ln e - \ln 1) = 6.$$

4. Вычислить площадь области, ограниченной прямой $y = -x$ и параболой $y = 2x - x^2$ (рис.10.8).

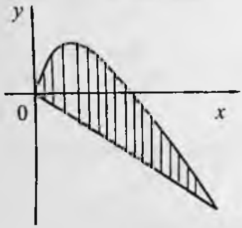


Рис. 10.8

Решение:

Для построения параболы приведем ее уравнение к каноническому виду. Для этого знак (–) вынесем за скобку, а внутри скобки выделим полный квадрат.

$y = 2x - x^2;$ $\qquad y = -(x^2 - 2x);$

$y = -[(x-1)^2 - 1];$ $\quad y = 1 - (x-1)^2;$

$y - 1 = -(x-1)^2.$

Имеем:

- точка (1; -1) - вершина параболы;
- ветви параболы направлены вниз.

Для нахождения границ интегрирования решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = -x \end{cases};$$

$$-x^2 + 2x = -x; \qquad x^2 - 3x = 0; \qquad x_1 = 0; \qquad x_2 = 3.$$

Площадь

$$S = \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)]\, dx = \int_0^3 (3x - x^2)\, dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Уравнения линий, ограничивающих область, заданы в полярных координатах

Пусть дан сектор АОВ, ограниченный дугой АВ и радиус-векторами ОА и ОВ (рис.10.9). Пусть уравнение кривой АВ в полярных координатах имеет вид: $r = r(\varphi)$ где $r(\varphi)$ – положительная непрерывная функция при всех $\varphi \in [\alpha; \beta]$.

Тогда площадь сектора АОВ, обозначенную S, определим из выражения:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

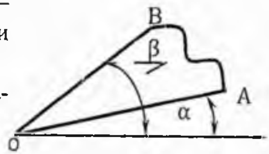


Рис. 10.9

Пример 1

Найти площадь области, заключенной внутри лемнискаты Бернулли (рис. 10.10):

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

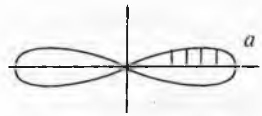


Рис. 10.10

Решение:

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}; \qquad \cos 2\varphi \geq 0;$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}; \qquad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

В силу симметрии можно вычислить одну четверть искомой площади, т.е. площадь половины лепестка:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\,\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

$$S = a^2.$$

Пример 2

Вычислить площадь области, ограниченной кардиоидой (рис. 10.11),

$$r = a\,(1 + \cos\varphi)$$

Решение:

В силу симметрии вычислим площадь половины области.

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}(1 + \cos\varphi)^2\, d\varphi =$$

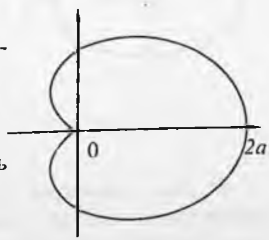


Рис. 10.11

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{3\varphi}{2}+2\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3\pi a^2}{4}.$$

$$S=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

Уравнения линий, ограничивающих область, заданы в параметрической форме

Область ограничена кривой, уравнение которой в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases};\qquad \text{где } \alpha\le t\le\beta,$$

двумя вертикалями, соответствующими $x=a$; $x=b$, отрезком оси Ох, выражается интегралом:

$$S=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

где α и β определяются из уравнений:

$$a=\varphi(\alpha);\quad b=\varphi(\beta);\ \text{где } \psi(t)\ge 0 \text{ на отрезке } [\alpha\,;\beta].$$

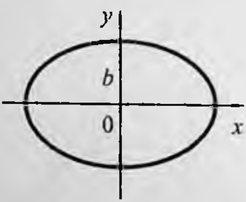


Рис. 10.12

Примеры

1. Найти площадь эллипса (рис. 10.12), уравнения которого в параметрической форме имеют вид:

$$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}.$$

Решение:

В силу симметрии вычислим площадь четверти эллипса. В уравнении $x = a\cos t$ t полагаем сначала $x = 0$, затем $x = a$ и получаем пределы интегрирования

$$\alpha = \frac{\pi}{2}; \quad \beta = 0.$$

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab\sin t\,(-\sin t)dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi ab}{4}$$

$$S = \pi ab.$$

2. Найти площадь области, ограниченной одной аркой:

циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и

осью Ox (рис. 10.13).

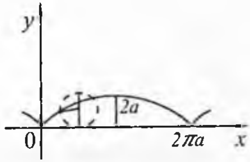


Рис. 10.13

Циклоида - кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по оси $0x$.

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(t-\sin t)'dt = a^2\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

3. Найти площадь области, ограниченной астроидой (гипоциклоидой) (рис. 10.14), уравнения которой:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}.$$

Площадь $S = \frac{3\pi a^2}{8}$

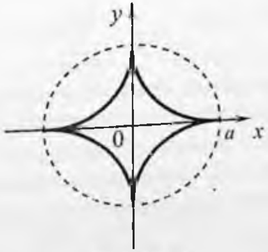


Рис. 10.14

§ 10.5. Длина дуги кривой

Пусть дана непрерывная незамкнутая кривая AB (рис. 10.15).

Рис. 10.15

1. Разобьем кривую точками $x_0 = A$, $x_1, \ldots, x_n = B$. Соединим эти точки прямыми. Обозначим и название каждого звена, и его длину Δx_i.
2. Составим сумму длин этих звеньев:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.$$

С точки зрения геометрии, эта сумма есть периметр вписанной в эту кривую ломаной.

3. Будем искать предел этой суммы при условии, что стремятся к нулю длины всех сторон ломаной или, другими словами, стремится к нулю длина наибольшего из звеньев ломаной. Если этот предел существует, то он и принимается за длину дуги кривой.

Длиной дуги кривой называют предел суммы длин вписанных в кривую ломаных, когда длина наибольшего из звеньев ломаной стремится к нулю:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.$$

Кривая, имеющая длину, называется ***спрямляемой.***

В зависимости от формы задания уравнения кривой (в прямоугольных координатах, в полярных координатах или в параметрической форме) применяются определенные интегралы с соответствующими формами записи подынтегрального выражения.

Длина дуги кривой $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 dx}$ – в прямоугольных координатах.

Пример

Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{x^3}$ от точки O(0;0) до точки A(4;8).

Решение:

Кривая - полукубическая парабола. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x dx} = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

Уравнения кривой заданы в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}; \qquad где\ \alpha \le t \le \beta.$$

Длина дуги кривой $L = \int \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$ - в параметрической форме.

Примеры

1. Вычислить длину астроиды (рис. 10.14),

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}.$$

Решение:

В силу симметрии кривой относительно обеих координатных осей, вычислим длину ее четвертой части, расположенной в первом квадранте. При этом параметр t изменяется от $t = O$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\varphi'(t) = a3\cos^2 t \sin t \qquad \psi'(t) = a3\sin^2 t\cos t$$

$$[\varphi'(t)]^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t \qquad [\psi'(t)]^2 = 9a^2\sin^4 t\cos^2 t$$

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2t$$

$$\frac{1}{4}L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{9}{4}a^2\sin^2 2t\, dt} = \frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3}{4}a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a$$

$$L = 6a.$$

2. Найти длину одной арки циклоиды (рис. 10.13),

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}.$$

Решение:

$$\varphi'(t) = a(1 - \cos t) \qquad\qquad \psi'(t) = a \sin t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Уравнение кривой задано в полярных координатах

$$r = r(\varphi); \qquad \alpha \le \varphi \le \beta.$$

Длина дуги кривой $L = \int_\alpha^\beta \int \sqrt{r^2 + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi.$

Пример

Найти длину кардиоиды (рис.10.11), $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Решение:

В силу симметрии кривой вычислим половину длины кардиоиды.

$$\frac{1}{2}L = \int_0^\pi a\sqrt{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2 \varphi}\, d\varphi = a \int_0^\pi \sqrt{1 + 2\cos\varphi + 1}\, d\varphi =$$

$$= a \int_0^\pi \sqrt{2(1 + cos\varphi)} d\varphi = a \int_0^\pi \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2a \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

$$= 4a \sin \frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 4a.$$

$$L = 8a.$$

Нахождение объема тела

1. Разобьем отрезок [a, b] на оси Ox точками,

$$x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$$

на части и разложим плоскостями $x = x_i$, проведенными через точки деления, все тело на слои. Обозначим каждый слой и его длину Δx_i.

2. Внутри или на границе каждого Δx_i выберем точку ξ_i, проведем через нее плоскость и обозначим площадь сечения данного тела этой плоскостью $S(\xi_i)$.

3. Составим произведения $S(\xi_i)\,\Delta x_i$. С точки зрения геометрии это объемы элементарных цилиндров.

4. Составим сумму этих произведений $\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$, это есть n-ная интегральная сумма. С точки зрения геометрии это сумма объемов элементарных цилиндров, т.е. приближенный объем тела.

5. Будем искать предел этой интегральной суммы при $\max \Delta x_i \to 0$.

Этот предел существует, т.к. по условию тело имеет объем, равный определенному интегралу:

$$\int_a^b S(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i.$$

Доказано: если тело имеет объем, то он выражается формулой:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Данный метод нахождения объема тела называется ***методом параллельных сечений.***

Нахождение $S(x)$ для тел произвольной формы затруднительно, поэтому данная формула используется в частных случаях (например, при вычислении объема тела вращения), имея колоссальное теоретическое значение.

§10.6. Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ох вращается криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = f(x)$; $y = 0$; $x = a$; $x = b$. Сечения полученного тела вращения плоскостями, перпендикулярными к оси Ох, являются концентрическими кругами, имеющими площади

$$S(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2.$$

Поэтому объем тела вращения

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Если криволинейная трапеция ограничена кривыми:

$$y_1 = f_1(x) \text{ – снизу,}$$
$$y_2 = f_2(x) \text{ – сверху,}$$

то объем тела вращения при вращении вокруг оси Ox:

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\} \, dx.$$

Замечание. Если тело получено вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = \varphi(y)$; $x = 0$; $y = m$; $y = n$, вокруг оси Oy, то объем тела вращения:

$$V_y = \pi \int_m^n x^2 dy = \pi \int_m^n [\varphi(y)]^2 \, dy.$$

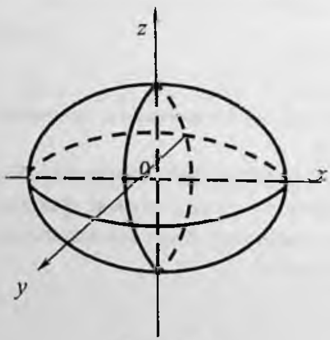


Рис. 10.16

Замечание. Если уравнение кривой задано в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)' \end{cases}$$

где $\alpha \le t \le \beta$, то в формуле объема нужно подставить $y = \psi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ и изменить пределы интегрирования на α и β.

Примеры

1. Найти объем тела, полученного от вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ оси Ох (рис. 10.16).

Решение:

Из уравнения эллипса

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

в силу симметрии можно найти половину объема тела, называемого эллипсоидом вращения:

$$\frac{1}{2}V=\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{b^2}{a^2}\pi\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{2}{3}\pi ab^2.$$

$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

2. Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ох одной арки циклоиды (рис. 10.13), уравнение которой:

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases},\quad где\ 0\le t\le 2\pi.$$

Решение:

$$Объем\ V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx;\quad dx=a(1-\cos t).dt.$$

$$V=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=$$

$$=\pi a^3\left(t-3\sin t+\frac{3}{2}t+\frac{\sin 2t}{2}-\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}=5\pi^2a^3.$$

Площадь поверхности вращения

Пусть на плоскости $x0y$ (в верхней полуплоскости) расположена кривая. При вращении кривой вокруг о и 0х будет получена ***поверхность вращения***.

Разобьем кривую точками и соединим эти точки прямыми, аналогично рассмотренному ранее. При вращении кривой вокруг оси Ох ломаная линия даст поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, образующие которых равны длинам соответствующих звеньев ломаной. Предел суммы площадей боковых поверхностей этих конусов (если он существует), когда длина максимального отрезка ломаной стремится к нулю, даст искомую площадь поверхности вращения.

1. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $a \le x \le b$, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\;dx.$$

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}; \qquad \text{где}\ \alpha \le t \le \beta, \qquad \text{то}$$

площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Пример

Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды (рис.10.14), уравнения которой

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}.$$

Решение:

В силу симметрии вычислим площадь поверхности образованной дугой астроиды, лежащей в первом квадранте $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, а затем удвоим результат.

Ранее было получено:

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2t.$$

Следовательно, $\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2} = 3a\sin t\cos t$.

Площадь поверхности

$$\frac{1}{2}S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\, 3a\sin t\cos t\,dt = 6\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt =$$

$$= 6\pi a^2\frac{\sin^5 t}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{5}\pi a^2, \qquad S = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

§10.7. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a;+\infty)$ и интегрируема в любой его конечной части.

Несобственным интегралом функции $f(x)$ называется

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

и обозначается символом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Интеграл называется ***сходящимся,*** если указанный предел конечен, и ***расходящимся,*** если предел бесконечен или не существует.

Пример

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} arctg\, x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(arctg\, b - arctg\, 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится.

Аналогично определяются несобственные интегралы:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$, заданная в конечном промежутке $[a;b]$, не ограничена в любой окрестности точки c этого промежутка.

Несобственный интеграл

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Несобственный интеграл называется ***сходящимся,*** если оба предела существуют и конечны, и ***расходящимся,*** если хотя бы один из пределов или не существует, или бесконечен.

Если подынтегральная функция непрерывна для всех значений x отрезка $[a;b]$, кроме $x = a$, то интеграл определяется так:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если подынтегральная функция непрерывна для всех значений x отрезка $[a;b]$, кроме $x = b$, то интеграл определяется так:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

На практике не так важно получить численное значение несобственного интеграла, как важно установить сходится он или расходится.

§ 10.8.Приближенное вычисление определенных интегралов

Было рассмотрено множество примеров вычисления интегралов, но это очень узкий класс интегралов. В большинстве случаев или невозможно получить первообразную функцию, или ее нахождение приводит к громоздким преобразованиям. Поэтому приходится вычислять определенные интегралы приближенно.

Суть методов приближенного вычисления интеграла состоит в том, что вычисление площади области (определенного интеграла) сводят к вычислению суммы площадей прямоугольников, трапеций или областей, ограниченных параболами (формула Симпсона).

Наибольшую погрешность при вычислениях дает формула прямоугольников. На практике обычно применяют формулу Симпсона, т.к. она при такой же затрате труда, как и при вычислениях по формулам прямоугольников и трапеций, дает меньшую погрешность.

Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и дифференцируема достаточное число раз на отрезке $[a;b]$.

Обозначим шаг деления отрезка $[a;b]$ на n частей

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + i\Delta x, \quad i = (0;1;2;\cdots;n), \qquad y_i = y(x_i).$$

1. Формула прямоугольников:

$$\int_a^b y(x)dx = \Delta x\cdot (y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) + R_n,$$

где погрешность

$$R_n = \frac{(b-a)^2}{2n} y'(\xi), \qquad (a \le \xi \le b).$$

2. Формула трапеций

$$\int_a^b y(x)dx = \Delta x\cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

где погрешность

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} y''(\eta), \qquad (a \le \eta \le b).$$

3. Формула парабол (формула Симпсона). Полагая $n = 2k$:

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\cdot (y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2k-1})$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2k-2}) + R_n,$$

где погрешность

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\, y^{(4)}(\mu), \qquad (a \le \mu \le b).$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Может ли быть положительной интегральная сумма отрицательной функции на отрезке?

2. Как из интегральной суммы можно получить определенный интеграл?

3. Как меняется определенный интеграл при замене пределов интегрирования?

4. Чему равна производная $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)$?

5. Чему равен определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по теореме о среднем?

6. Площадь какой фигуры выражает $\int_a^b f(x)dx$ для положительной функции $y = f(x)$?

7. Каков геометрический смысл определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ для отрицательной функции $y = f(x)$?

8. Какой формулой связаны определенный и неопределенный интегралы?

9. Как находится объем продукции по заданной производительности труда?

10. Как определяется несобственный интеграл от функции на бесконечном полуинтервале?

11. Как определяется несобственный интеграл от неограниченной функции?

Список рекомендуемой литературы

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.

2. Баврин И.И., Матросов В.Л. Общий курс высшей математики. М.: Просвещение, 1995.

3. Виноградов И.М. Элементы высшей математики. М.: Высшая школа, 1992.

4. Зайцев И.А. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1998.

5. Мантуров О.В. Курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1991.

6. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. Спб.: Высшая школа, 1999.

7. Петрова В.Т. Лекции по алгебре и геометрии. Части 1 и 2. М.: Валдос, 1999.

8. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1998.

ТОЛКОВЫЙ СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Абак (греч.abak)	счетная доска
Абсцисса (лат.abscissus)	отрезанная
Абсолют (лат.absolutus)	абсолютно
Адъюнта (лат.adjunctus)	присоединенный
Аксиома (греч.aksiom)	удостоенное, принятое положение
Анализ (→греч.analysis)	разрешение, освобождение
Аналогия (греч.analogia)	пропорция
Аргумент (лат.argumentum)	независимая переменная величина
Арифметика (греч.arithmos)	число
Асимптота (греч.asympthotos)	не сливаюшаяся
Базис (греч.basis)	основа
Бином (би...греч.nomos)	член, двучлен
Вариант (→лат.varians←variantis)	всевозможный вид
Вектор (лат.vector)	несущий
Геометрия (греч.demetreo)	измеряю
Гипербола (греч.hyperbola)	приращение
Горизонтал (греч.horizon)	ограничивающий
Градус (лат.gradus)	шаг, ступень
График (греч.graphikos)	изображение
Диагональ (греч.diagonalis)	проходящая через два угла
Директриса (лат.directrix)	направляющая
Детерминант (лат.determino)	определяю
Дифференциал (→лат.differenta)	разность
Индекс (лат.index)	указатель
Индукция (лат.inductio)	наведение
Интерпретация (лат.interpretatio)	истолкование, разъяснение
Интеграл (→лат.integral)	заново восстановленный
Интервал (лат.intervallum)	промежуточное значение
Иррационал (лат.irrationalis)	несоизмеримый
Квадрат (лат.quadratus)	четырехугольник
Коллинеарные векторы (лат.- co (cum) –linea)	вместе, сообща; - линия
Компьютер (англ.compute)	вычислять, подсчитывать

Контур (франц. contour)	внешнее изображение
Константа (лат.constans)	постоянная
Комплекс (→лат. complexus)	связь
Косинус (лат.complementi sinus)	синус дополнения
Котангенс (лат.complementi tangens)	тангенс дополнения
Лемма (греч.lemma)	введение
Лимит (→лат.limes←limites)	предел
Логарифм (греч. logos)	соотношение чисел
Максимум (→лат.maximum)	наибольшее
Медиана (→лат.mediana)	среднее
Метод (→греч. methods)	проверка
Минимум (→лат.minimum)	наименьшее
Минус (лат.minus)	менее
Монотон (греч.monotonos)	в одном направлении
Модель (франц.modele)	экземпляр
Модуль (лат.modulus)	мера, величина
Натурал (лат.naturalis)	естественный
Нуль (лат.nuluus)	никакой
Нормаль (лат.normalis)	прямой
Ордината (лат. ordinates)	упорядоченный
Орт (лат. orientation)	направление данного вектора
Параметр (греч. parametron)	соизмеримый
Параллель (греч. parallelos)	идущий рядом
Перпендикуляр (лат. perpendicularis)	отвес
Перспектива (лат. perspicio)	ясно вижу
Полином (греч.poly nomos)	многочлен
Проекция (лат.projectio)	бросание вперед
Прямой круговой конус (греч.konos)	- сосновая шишка
π (пи) (греч. perimetron)	окружность
Радикал (лат.radicalis)	корень
Радиус (лат.radius)	луч
Рационал (лат.ratio)	отношение
Сегмент (лат.segmentum)	отрезок
Синус (лат. sinus)	перегиб

Система (греч.sistema)	составленный из частей
Тангенс (лат. tangens)	касательная
Теорема (греч. teorema)	высказывание мнения
Тригонометрия (греч.trigon+ metreo)	измеряю треугольник
Тригонометрическая функция (греч.trigonom + metreo)	треугольник + измеряю
Факториал (англ.factor)	сомножитель
Фигура (лат.figura)	изображение
Формула (лат.formula)	образ, вид
Функция (лат.functio)	соответствие, отображение
Экстремум (лат.exstremum)	крайний
Элемент (лат.elementum)	приближенная часть

ОГЛАВЛЕНИЕ

П 88
Пулатова, М.И.

Высшая математика: Учебник для студентов высших образовательных учреждений. Ч. I / М.И.Пулатова; отв. ред. И.И.Сафаров; МВ и ССО РУз, Бухарс. инженерно-технический институт высоких технологий. – Т.: Фан, 2011. – 224 с.

УДК 51(076)
ББК 22.1 я 73

ISBN 978-9943-19-044-3

Утверждено к печати Министерством высшего и среднего специального образования РУз в качестве учебника для студентов высших образовательных учреждений (Приказ №373 от 27.10.2009 г.)

Редактор: *К.Загряжская*

Корректор: *С.Ульянчич*

Технический редактор: *М.Абидова*

Верстка: *Д.Джалилов, Д.Абдуллаев*

Лицензия издательства AI №138, 27.04.2009 г.
Изд. №3-107. Сдано в набор 13.10.2010.
Подписано в печать 07.10.2011. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 12,0. Усл.-печ. л. 13,02.
Тираж 100. Цена договорная.

Издательство «Фан» АН РУз. 100170, Ташкент, ул. И. Муминова, 9.

Отпечатано с оригинал-макета Издательства «Фан» АН РУз
в типографии ООО «Toshkent tezkor bosmaxonasi». Заказ №583.
100200, Ташкент, пр. Радиальный, 10.

Манзура Исхаковна
Пулатова

Доцент кафедры "Высшая математика" Бухарского инженерно-технического института высоких технологий, кандидат физико-математических наук, автор более 70 научных и научно-методических работ, а также учебно-практического пособия "Практические занятия по высшей математике" (2010 г.), учебных пособий для технических вузов "Высшая математика" ч. I и ч. II, соавтор учебника "Олий математика қисқа курси". Автор пособия "Краткий справочник студента по математическому анализу".

ФАН

ISBN 978-9943-19-044-3
9 789943 190443