

22.2.5 73

5421

 учебное пособие  
для педагогических  
институт

Е. М. Гершензон  
Н. Н. Малов

**КУРС  
ОБЩЕЙ  
ФИЗИКИ**

Механика

Е. М. Гершензон  
Н. Н. Малов

270  
770  
Жилин 770

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

## Механика

Допущено Министерством просвещения СССР  
в качестве учебного пособия для студентов  
физико-математических факультетов  
педагогических институтов

Издание второе, переработанное

Б. М. Гершензон  
Н. Н. Малов  
С. А. Яковлев

МОСКВА  
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1987

**Рецензенты**

кафедра общей физики Омского государственного педагогического института им. А. М. Горького; профессор, зав. кафедрой теоретической физики и методики преподавания физики Кирилловского педагогического института, доктор педагогических наук В. В. Муляковский

**Евгений Михайлович Гершензон, Николай Николаевич Малов**

**курс общей физики. механика**

Эта рецензия Н. А. Малова, В. А. Обломова, М. А. Иванова, Д. В. Антонова, Хузымова А. Ф. Издана в журнале «Учитель» редактор В. М. Писоварова  
Техническое редактирование Д. Д. Голышова, Е. В. Файншвар, Корректор К. М. Короткая

ИБ № 10096

Сдано в набор 14.08.86. Подписано в печать 21.12.86. Формат 60x90/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура литерат. Петерб. офсет. Усл. печ. с. 104 0,50 форм. Усл. кол. лит. 10,29. Усл. изд. — 18,01 (1,54) экз. Тираж 30 000 экз. Заказ № 304. Цена 80 коп. Служба Трудности Архива Библиотечного института «Учитель» (Москва) Государственной комиссии РСФСР по делам книжного издательства и книжной торговли 125080, Москва, 3-4 проезд Каланый рощи, 31. Запросите образцы Трудности Книжного Библиотечного института в Ленинградском Областном филиале Государственного комитета РСФСР по делам книжного издательства и книжной торговли (19006, Спб. ул. Чкаловская, 61).

**Гершензон Е. М., Малов Н. Н.**

Г42 Курс общей физики: Механика: Учеб. пособие для студентов физ. мат. фак. пед. ин-тов. — 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1987. — 304 с.: ил.

В этом издании изменены конструкции и формулы, исправлены ошибки в тексте, введены дополнения и исправления в ряде разделов, особенно в разделах «Силы трения», «Силы упругости», «Движение тел», «Движение жидкостей», «Движение газов», «Опасные явления природы», «Физические основы электродинамики».

430000000 — 431  
103(03) — 87 38—87

ББК 22.2

© Издательство «Просвещение», 1987

**ПРЕДИСЛОВИЕ**

Современная физика — одна из наиболее развитых наук, определяющая развитие естествознания и (в значительной степени) научно-технический прогресс. В педагогическом институте она изучается поэтапно: в курсе общей физики, курсе теоретической физики и специальных курсах.

Курс общей физики призван дать основные фундаментальные сведения о предмете. Настоящий «курс» предназначен для будущего учителя. Поэтому в нем есть «технические вузов», Авторы видели свою задачу в достаточно краткой и ясной изложении принципиальных вопросов экспериментальной физики, органичном введении в текст данных современной физики. Книга по возможности построена так, чтобы пользоваться при ее изучении знания можно было непосредственно использовать в процессе преподавания физики в средней школе. В рамках общей (экспериментальной) физики читатель знакомится с основными физическими явлениями и теориями, их объясняющими, и приобретает (на практических и лабораторных занятиях) навыки овладения ими при решении задач и выполнении физических измерений, без чего усвоение теории невозможно.

«Курс общей физики» написан в соответствии с программой по общей физике для педагогических институтов на основании многолетнего опыта чтения лекций на кафедре общей и экспериментальной физики Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина. В нем предпринята допускемая программой попытка нестандартного, но по ряду причин более рационального изложения материала. Вместо обычной последовательности разделов — «Механика», «Молекулярная физика», «Электричество и магнетизм», «Оптика и атомная физика» — принято построение: «Механика», «Электродинамика», «Оптика и атомная физика», «Молекулярная физика». Однако пособия могут быть использованы и при стандартной последовательности. Настоящее пособие посвящено первому разделу физики — «Механике».

При переработке книги для второго издания авторы учли многие замечания, сделанные в рецензиях, полученных от ряда физических кафедр педагогических институтов. Основные изменения, сделанные во втором издании, состоят в более подробном изложении ряда вопросов, трудных для понимания.

Авторы надеются, что читатель, интересующийся физикой, будет обращаться и к другим, более полным учебным пособиям (например, к «Общему курсу физики» профессора Д. В. Сивухина).

Авторы выражают глубокую признательность профессору В. С. Эткину, чьи идеи о построении «Курса» внесли значительный вклад в его создание, и также доцентам Н. Г. Итицкой и Ю. А. Гурвичу за большое число существенных замечаний, сделанных ими при обсуждении перерабатываемого текста, профессору В. В. Муляновскому и коллективу кафедры физики Омского педагогического института за внимательное редактирование рукописи.

## ВВЕДЕНИЕ

Обычно физику определяют как науку, изучающую наиболее общие свойства окружающей нас живой природы. Это определение не очень точно: химия, астрономия и другие отрасли знания также изучают неживую природу. Однако в данном случае некоторая неопределенность, обусловленная отсутствием точных границ между физикой и смежными отраслями знания, не вредит делу и попытке дать более точное определение не представляют интереса.

Гораздо важнее отметить, что *физика является экспериментальной точной наукой*. Она идет от простого наблюдения явлений к постановке целенаправленных опытов, позволяющих получить конкретное представление о процессах, происходящих в природе. Далее, по мере уточнения методов исследования, открывается возможность измерений тех или иных физических величин и формулировки количественных физических законов. Для этой цели привлекаются математические методы, позволяющие обобщить результаты исследований в сжатой форме. Физические законы позволяют предсказывать ход событий в определенных условиях. Проверка этих предсказаний дает возможность установить область применения того или иного закона и оценить точность предсказаний, а также точность производимых в физике измерений. Именно в этом смысле физики называют *точной наукой*: она не обладает абсолютно точными сведениями о природе, но может оценивать точность и надежность своих предсказаний.

Если на первых этапах развития физики в ней возникали представления, далекие от действительности и впоследствии совсем оставленные, то в наше время физика настолько развилась, что, как правило, появление новых сведений и создание новых теорий не влечет за собой полного крушения старых представлений: они входят в новую теорию как предельный случай. Так, механика Ньютона представляет предельный случай механики Эйнштейна и полностью сохраняет свое значение в области движений макроскопических тел, происходящих с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

Вся история развития физики убеждает в *реальности окружающего мира, существующего вне нас и независимо от нашего сознания*. В этом мире явления связаны друг с другом той или иной причинной связью. Человек способен с известной точностью познавать эти связи и пользоваться ими в практической жизни: на базе физики и ее закономерностей вырастают различные области техники. В то же время наши знания являются неполными и относительными. Неполнота их обусловлена неисчерпаемостью природы: чем глубже проникаем мы в ее тайны, тем больше новых загадок открывается перед нами. Относительность наших знаний проявляется в необходимости уточнять и совершенствовать наши представления и теории по мере открытия новых фактов. В то же время наши знания в абсолютных новых теориях, как уже говорилось выше, не уничтожают старые, а лишь определяют границы их применимости.

Они *знаются в физике верховным судьей*: если обнаруживается несоответствие ранее установленного физического закона новым фактам, закон заменяется более точным и устанавливаются случаи применения старого закона, в которых он соответствует фактам.

Знания, получаемые точными науками о природе, проверяются практикой, используются в технике. Если развитие физики помогает развитию техники, то и техника в свою очередь обогащает физику новыми, более совершенными приборами и методами исследования природы и ставит перед физикой новые задачи.

Итак, физика тесно связана с философией. Данные физики способствовали развитию философских представлений диалектического материализма; новые достижения физики подтвердили верность основных положений диалектического материализма. Физика в свою очередь позволяет физикам ориентироваться в мире новых физических фактов и идей.

Физика, развивавшаяся со времени Галилея (ее обычно называют *классической физикой*), имела дело по преимуществу с макроскопическими явлениями. В ее теоретических построениях господствовал идеал: все в мире можно свести к механике. Поэтому ученые широко пользовались механическими моделями изучаемых явлений. Так, один из крупнейших физиков XIX в. — Кельвин говорил, что он не понимает явления, пока не создаст его механическую модель.

Но так развитие электродинамики в третьей четверти XIX в. показала, что она не может быть сведена к механике. А в физике XIX в. исследователи столкнулись с качественно новыми явлениями, не допускающими наглядного толкования. От механических (и других наглядных) моделей пришлось отказаться. Академик А. Лангау так охарактеризовал современную физику: «Физик должен понять то, чего он не может себе представить».

В различных разделах физики (я в механике, особенно в электродинамике, специальной теории относительности) встречаются некоторые явления и их толкования, на первый взгляд непривычные и кажущиеся иногда противоречивыми. Изучая подобные вопросы, следует помнить, что подобные слова крупного физика XIX в. Людвиг Больцмана:

«...нашей задачей является не судить данные опыта по законам нашего мышления, а, наоборот, приспособить наш образ мыслей, представления и понятия к данным опыта...»

## КИНЕМАТИКА

## 1.1. Перемещение тела. Система отсчета

Одружающий нас мир материалов. Это означает, что он существует вне нашего сознания и независим от него. Образующая материя, действуя на наши органы чувств, вызывает у нас определенные ощущения. Критически анализируя эти ощущения, мы можем познавать закономерности, управляющие происходящим в мире и изменениями. Философы называют эти изменения движением. Но физики употребляют термин «движение» обычно в более узком (механическом) смысле: *движение — это перемещение или изменение положения физического тела в пространстве*. Так как все явления происходят в пространстве и во времени, то движение (в физическом смысле) присутствует во всяком изменении. Поэтому вполне естественно, что изучение физики начинается с исследования свойств и законов механического перемещения.

*Кинематика изучает изменение положения материальных тел (иногда их можно уподобить точкам) в пространстве с течением времени.* Понятия пространства и времени (в философии они рассматриваются как формы существования материи) являются первичными и в физике определены быть не могут; физика может только установить свойства, присущие пространству и времени.

Основываясь на результатах повседневного опыта, физика (классическая) считает двойства пространства и времени не зависящими от присутствия материи. *Пространство трехмерно, непрерывно, однородно и изотропно.* Однородность означает, что в любом месте пространства физическое явление в данных условиях протекает одинаково. Изотропность означает, что если бы система взаимодействующих тел повернулась на некоторый угол, то это не отразилось бы на ходе физических процессов в ней. Время классическая физика также считает однородным, непрерывным и не зависящим от присутствия материальных тел.

В рамках классической физики эти представления полностью оправдываются. Отклонения от них наблюдаются при скоростях движения, приближающихся к скорости света (см. гл. 4), вблизи очень массивных тел (например, Солнца, см. гл. 11) и в микромире.

Описание любого движения имеет смысл только по отношению к какому-либо телу (называемому телом отсчета); в кинематике выбор последнего совершенно произволен; но удачно выбранное тело отсчета позволяет выявить физические причины, вызывающие данное движение, и упростить расчеты. С телом отсчета связываются или иным система координат и часам, т. е. устройство позволяющее определять промежутки времени между происходящими событиями. Система координат и часы образуют систему отсчета.

Роль удобного выбора тела отсчета можно проиллюстрировать следующими историческими примерами: древнегреческий астроном Птоломеем считал Землю центром Вселенной и рассматривал движения небесных тел, в частности планет, относительно Земли. Орбиты движения планет оказались очень сложными (см. рис. 1, где показана траектория движения Марса по небесному своду, аблудаемая с Земли); причины этой сложности были непонятны.

Они прояснились, когда Н. Коперник (1473—1543) принял за тело отсчета Солнце. При этом орбиты планет получились близкими к круговым. Позже И. Кеплер (1571—1630) нашел, что истинная форма планетных орбит более сложна — это эллипсы с одним эксцентриситетом. И. Ньютону (1643—1727) удалось показать, что форма планетных орбит непосредственно определяется законом всемирного тяготения.

Мировоззренческое значение работ Коперника и Кеплера, в которых утверждалось, что Земля вращается вокруг своей оси и вокруг Солнца, а также Г. Галилея (1564—1642), считавшего, что открытие им спутника Юпитера вместе с Юпитером образует уменьшенное подобие Солнечной системы, чрезвычайно велико. Действительно, превращением Земли из центра мироздания в рядовое небесное тело был нанесен удар по реакционному учению католической церкви об особой роли Земли в мироздании. Кроме того, выбор гелиоцентрической системы позволял Ньютону доказать, что причиной движения Земли и планет вокруг Солнца является взаимное тяготение.

Но в чисто кинематическом отношении геоцентрическая система ничем не лучше и не хуже любой другой. Ею до сих пор широко пользуются в наблюдательной астрономии, морской и воздушной навигации. Да и метеорологи, сообщая населению, что «Солнце сегодня взойдет над столицей в 6 часов», используют геоцентрическую систему отсчета.

С телом отсчета можно связать любую систему координат; чаще всего используют *прямоугольную* (декартову) систему. Физическое тело, с размерами и внутренней структурой которого можно не считаться при изучении его движения, называется *материальной точкой*. Вводя это понятие, подчеркивают, что *материальной точкой* (в отличие от геометрической) *присписываются некоторые физические свойства, в частности масса, приращая рассматриваемому телу, и электрический заряд* (при изучении электродинамики).

Материальная точка является простейшей моделью действительного объекта. Но при правильном использовании этого понятия многие физические задачи решаются сравнительно легко и полностью. Так как реальное физиче-

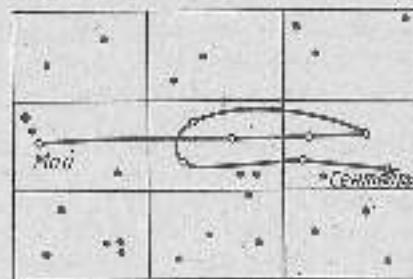


Рис. 1.1

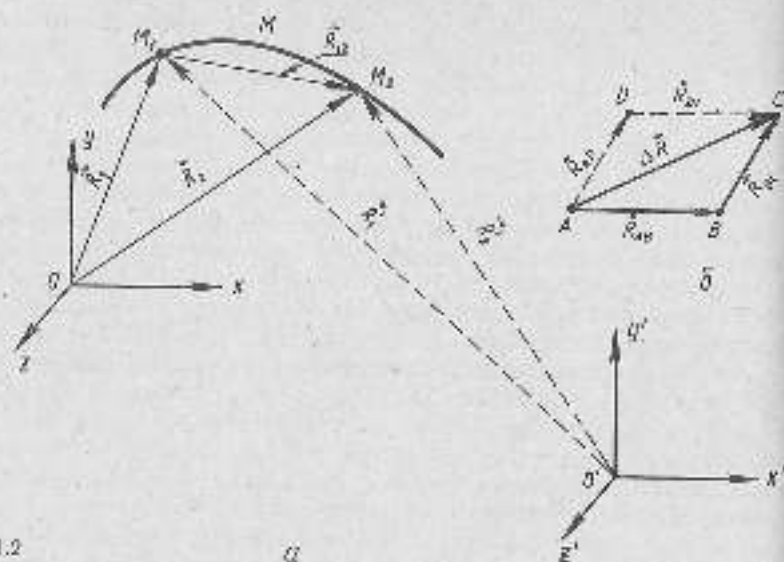


Рис. 1.2

ские тела конечных размеров можно разбить на множество материальных точек, то изучение его движения сводится к изучению движения системы этих точек. Иногда для краткости термины «материальная точка» мы будем опускать. В кинематике масса и электрический заряд никакой роли не играют, а потому и не вводятся.

Мгновенное положение  $M_1$  движущейся материальной точки  $M$  в прямоугольной системе координат  $OXYZ$  однозначно определяется (в момент  $t_1$ ) заданием ее радиус-вектора  $\vec{R}_1$  (рис. 1.2, а):

$$\vec{R}_1 = \vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1,$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы, определяющие положительные направления координатных осей, а  $x_1, y_1, z_1$  — проекция радиус-вектора  $\vec{R}_1$  на оси координат.

Линию, описываемую движущейся точкой, называют траекторией движения. Отрезок, соединяющий одно из положений точки ( $M_1$ ) с любым из последующих ее положений ( $M_2$ ) и направленный от начального положения к конечному, называют вектором конечного перемещения точки (или просто перемещением)  $\vec{R}_{12}$ , причем (см. рис. 1.2, а)

$$\Delta\vec{R} = \vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1.$$

Модуль вектора перемещения выражается в метрах. Каждому перемещению соответствует промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , выраженный в секундах. Вектор конечного перемещения, вообще говоря, не совпадает с участком траектории, пройденным точкой. Часто целесообразно рассматривать векторы элементарных перемещений  $d\vec{R}$ , совершаемых точкой за элементарные промежутки времени  $dt$ . Каждый такой вектор направлен по касательной к тра-

ектории в данной точке, проведенной в направлении движения. Симметричная сумма элементарных перемещений равна конечному перемещению:

$$\vec{R}_{12} = \int_1^2 d\vec{R}. \quad (1.1)$$

Математической точки зрения соотношение (1.1) выражает одно из основных свойств векторов, с физической точки зрения соответствует утверждению, что результат некоторого сложного процесса (например, ряда последовательных перемещений) есть сумма результатов отдельных процессов, если последние не влияют друг на друга (являются независимыми).

Следует подчеркнуть, что порядок, в котором совершаются перемещения, не влияет на окончательный результат. Это поясняется рисунком 1.2, б для случая двух последовательных перемещений: из точки  $A$  в точку  $B$  и затем в точку  $C$  или же из точки  $A$  в точку  $C$  (причем  $\vec{R}_{AB} = \vec{R}_{BC}$ ), а затем в точку  $C$  (причем  $\vec{R}_{AC} = \vec{R}_{BC}$ ):

$$\Delta\vec{R} = \vec{R}_{AB} + \vec{R}_{BC} = \vec{R}_{AC} + \vec{R}_{BC}.$$

Получившийся на рисунке параллелограмм называют *параллелограммом перемещений*, а сам процесс сложения двух векторов — *правилом параллелограмма*. Это правило верно и для векторов другой природы; мы еще вернемся к обсуждению возможности его использования в § 1.2 и 2.1.

На практике часто нужно знать *расстояние, пройденное точкой вдоль траектории*, — *длину пути*  $s_{12}$ . Эта скалярная величина определяется арифметической суммой модулей элементарных перемещений:

$$\Delta s = s_{12} = \int_1^2 dR. \quad (1.2)$$

Таким образом, перемещение  $\vec{R}_{12}$  — вектор, а путь (длина участка траектории  $s_{12}$ ) — скаляр. Важно твердо усвоить, что модуль конечного перемещения между двумя точками и длина соответствующего пути в общем случае различны друг от друга. Их значения одинаковы только в случае прямолинейного движения, происходящего в одном направлении. Например, модуль перемещения Земли вокруг Солнца (принятого за начало координат) составляет за полгода  $R_1 = 3 \cdot 10^8$  км, за год  $R_2 = 0$ ; а пройденные пути соответственно равны  $s_1 = 4,7 \cdot 10^8$  км и  $s_2 = 9,4 \cdot 10^8$  км (орбиту Земли считаем круговой, радиус ее равен  $1,5 \cdot 10^8$  км).

Если рассуждать о движении точки в другой системе координат  $O'X'Y'Z'$ , неподвижной относительно системы  $OXYZ$  (рис. 1.2, а), то положение  $M_1$  точки  $M$  в момент  $t_1$  будет определяться вектором

$$\vec{R}'_1 = \vec{i}'x'_1 + \vec{j}'y'_1 + \vec{k}'z'_1,$$

отличным от вектора  $\vec{R}_1$ .

В момент  $t_2 > t_1$  точка  $M$  окажется в положении  $M_2$ , характеризуемом соответственно радиус-векторами  $\vec{R}_2$  и  $\vec{R}'_2$ . При этом

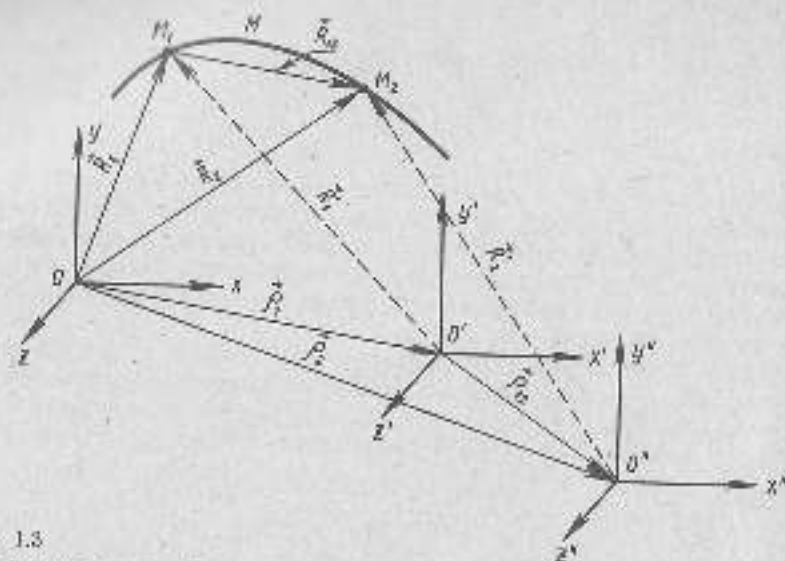


Рис. 1.3

переходе от одной системы координат к другой координаты точки изменяются, но сохраняется значение квадрат расстояния между двумя положениями ( $M_1$  и  $M_2$ ) точки, равный

$$R_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 = R_{12}'^2, \quad (1.3)$$

где индексы «2» относятся к точке  $M_2$ .

Очевидно, при этом вектор конечного перемещения также изменяется:

$$\vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{R}_2' - \vec{R}_1'.$$

Иногда приходится пользоваться системой координат  $O'X'Y'Z'$  движущейся относительно системы  $OXYZ$  (рис. 1.3). Пусть в нештрихованной системе в момент  $t_1$  радиус-вектор начала координат штрихованной системы был равен  $\vec{p}_1$ , а в момент  $t_2$  —  $\vec{p}_2$ . Если точка  $M$  за это время<sup>1</sup> переместилась в системе  $OXYZ$  на  $\vec{R}_1$ , то ее перемещение в штрихованной системе, как это следует из четырехугольника  $M_1M_2O'O'$  (с учетом направлений образующих его векторов), равно:

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{R}_{12} - \vec{p}_1, \quad (1.4)$$

где

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1.$$

<sup>1</sup> Следует иметь в виду, что в научной литературе и повседневной речи понятие «среднее время» имеет два смысла: 1) это момент, в который начинается (или кончается) то или иное явление, например, время восхода Солнца; 2) это промежуток времени, за который совершается векторный процесс (быстрота), например, время перелета из Москвы в Ленинград не превышает 1 ч. С этой двойственностью, обусловленной из-за общего языка, следует считаться.

Перемещение точки в движущейся системе отсчета равно векторной сумме ее перемещения в неподвижной системе отсчета и перемещения начала координат движущейся системы относительно неподвижной.

Важно отметить, что при этом рассуждении мы использовали кроме правил аналитической геометрии, отражающих свойства пространства) еще и предположение, что промежутки времени считаются в обеих системах одинаково. Это дополнительное физическое предположение, связанное с классическим представлением о независимости течения времени от движения, справедливо, как мы увидим позже (глава 4), лишь при скоростях, малых по сравнению со скоростью света в вакууме.

Траектории движения точки в разных системах отсчета выглядят различно. Так, если вблизи диска, насаженного на горизонтальную ось (система I), расположить линейку, параллельную плоскости диска (система II), и перемещать по диску вдоль линейки руку, держащую кусок мела (система III), то при одновременном движении руки и вращении диска траектория, записанная мелом на доске, является криволинейной; относительно линейки мел при этом перемещается прямолинейно, а относительно руки, держащей мел, он находится в покое.

Если материальная точка участвует одновременно в нескольких движениях (например, изучается движение относительно Земли пассажира, идущего по вагону движущегося поезда), то перемещение (за каждый элементарный промежуток времени  $dt$ ) также складывается векторно:

$$\vec{R} = \int d\vec{R}_i. \quad (1.5)$$

## 1.2. Скорость

Всякое перемещение происходит в пространстве и требует некоторого времени. Поэтому для характеристики движения точки целесообразно ввести понятие скорости движения.

Отношение перемещения  $\Delta \vec{R}$  ко времени его прохождения  $\Delta t$  называют средней скоростью на этом участке или за данный промежуток времени:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t}.$$

Но конечное перемещение, как мы видели выше, вполне отражает особенности движения. То же относится и к средней скорости. Более содержательно понятие мгновенной скорости (скорости в данной точке или в данный момент).

Мгновенной скоростью называют предел средней скорости, получающийся при стремлении промежутка времени  $\Delta t$  к нулю (т. е. производную от перемещения по времени):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt} = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z. \quad (1.6)$$

Мгновенная скорость направлена по касательной к траектории (в рассматриваемой точке), как и вектор  $d\vec{R}$ . Это легко показать на простом опыте: раскаленные частицы точильного камня, срывающиеся с него при заточке инструмента, движутся именно по касательной.

При прямолинейном движении вектор скорости направлен вдоль прямолинейной траектории.

Модуль скорости, равный модулю производной перемещения по времени, выражается в метрах в секунду (м/с).

Иногда (в практических приложениях) рассматривают *среднюю скорость*:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t},$$

равную отношению пройденного пути ко времени его прохождения. Так, средняя скалярная скорость обращения Земли вокруг Солнца равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ км/с} = 30 \text{ км/с}.$$

Обычно скорости в окружающем нас макром мире не превышают сотен метров в секунду. Космические ракеты движутся со скоростями порядка 10 км/с. Микрочастицы могут двигаться с громадными скоростями, приближающимися иногда к скорости света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^{10}$  м/с. Эта скорость является предельной для частиц вещества. Позже мы увидим, что она предельна и в случае передачи сигналов и в случае распространения взаимодействий.

Если материальная точка участвует сразу в нескольких движениях с мгновенными скоростями  $\vec{v}_i$ , то, как это следует из (1.6), полная мгновенная скорость точки равна векторной сумме отдельных мгновенных скоростей:

$$\vec{v} = \sum \vec{v}_i. \quad (1.7)$$

Сотношение (1.7) называют *правилом сложения скоростей*; впервые оно было сформулировано Галилеем. Подчеркнем еще раз, что при этом время считается текущим одинаково во всех системах координат, а расстояние между двумя точками (1.3) сохраняет свое значение при переходе из одной системы координат в другую. Таким образом, скорости, как и перемещения, складываются векторно. Это утверждение является следствием *принципа независимости движений*, позволившего по правилам векторной алгебры рассматривать любое движение как сумму составляющих, представлять результирующее перемещение и скорость как векторную сумму составляющих перемещений и скоростей.

Принцип независимости распространяется и на ускорения, рассматриваемые в § 1.3. Но в дальнейшем, например, при изучении вращательного движения твердого тела и некоторых вопросов специальной теории относительности, мы познакомимся с некоторыми исключениями, не подчиняющимися этому принципу.

### 1.3. Ускорение

При равномерном прямолинейном движении точки (для тела)

$$\vec{v} = \text{const}$$

изменения в любые равные промежутки времени одинаковы.

В реальных условиях тела редко движутся с постоянной скоростью. Поэтому для более полного описания движений необходимо уметь оценивать изменения скорости. Но скорость тела (точки) меняется и в пространстве (от точки к точке), и во времени (от момента к моменту). Далеко не очевидно, какое из этих изменений важнее для исследования движения. Гениальный основоположник механики Галилей выбрал изменение скорости во времени (называемое ускорением); дальнейшее развитие науки показало правильность выбора Галилея.

*Мгновенное ускорение равно отношению элементарного приращения скорости к промежутку времени, за который оно произошло:*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.8)$$

Таким образом, ускорение выражается первой производной от скорости (или второй производной от перемещения) по времени.

Ускорение характеризует быстроту изменения скорости. Направление вектора  $\vec{a}$  совпадает с направлением вектора  $d\vec{v}$ , определяющего изменение скорости за элементарный промежуток времени  $dt$ , и поэтому, вообще говоря, может не соответствовать направлению вектора  $\vec{v}$  (а следовательно, и  $d\vec{R}$ ). Только при движении по прямой эти векторы сонаправлены в случае ускоренного движения или противоположны при наличии замедления.

Как видно из определения ускорения, его модуль в СИ выражается в метрах в секунду за секунду (м/с<sup>2</sup>). Специального наименования единица ускорения, как и единица скорости, не имеет.

В общем случае скорость может изменяться и по модулю, и по направлению. Рассмотрим два близких положения движущейся точки (рис. 1.4). Изменение ее скорости найдем, построив треугольник скоростей. Это изменение

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

можно представить как сумму двух изменений скорости: по касательной  $\Delta \vec{v}_t$  и по нормали  $\Delta \vec{v}_n$  к участку траектории в точке 1. Делим  $\Delta \vec{v}$  на затраченное на перемещение время  $\Delta t$  и переходим к пределу (при  $\Delta t \rightarrow 0$ ), получим ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_t}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad (1.9)$$

модуль ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$



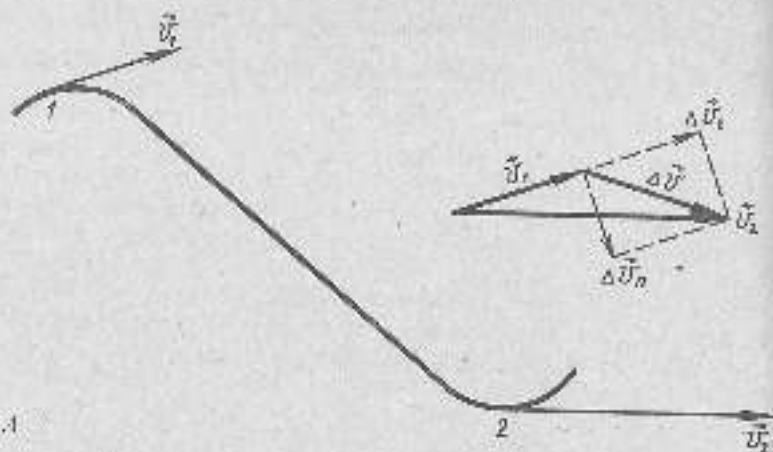


Рис. 1.4

Вектор  $\vec{a}_t$  направлен по касательной к траектории в точке 1 и определяет изменение модуля скорости. Вектор  $\vec{a}_n$  направлен по нормали к траектории (к центру кривизны элемента траектории, прилегающего к точке 1) и определяет изменение направления вектора ускорения. Эти ускорения называются соответственно *касательным* (тангенциальным) и *нормальным*.

При рассмотрении движений часто бывает полезным метод *годографа*. *Годографом* называется геометрическое место концов векторов, характеризующих некоторую физическую величину: эти векторы откладываются от некоторой произвольной точки. В соответствии с этим определением годографом радиус-векторов, определяющих мгновенные положения точки, является ее траектория.

На рисунке 1.5, а показана траектория равномерного прямолинейного движения, начавшегося (в момент  $t=0$ ) в точке А, последующие положения движущейся точки М переименованы. Годографом скорости в этом случае служит единственная точка (например, В; рис. 1.5, б).

Годографом скорости равноускоренного движения точки (без начальной скорости), начавшегося из начала координат (рис. 1.6, а, слева), является прямая, пробегаемая концом вектора скорости с постоянной скоростью (рис. 1.6, а, справа).

На рисунке 1.6, б слева доказана траектория точки, совершающей равноускоренное движение, возникшее в точке А с горизонтальной начальной скоростью  $v_0$  и постоянным ускорением  $a$ , направленным вертикально вниз. Годограф скорости этого движения дан на рисунке 1.6, б справа.

Разумеется, можно построить и годограф ускорений. Для равномерного движения (рис. 1.5) он не существует (нет ускорения). Для равноускоренных движений (рис. 1.6) он представляет единственную точку.

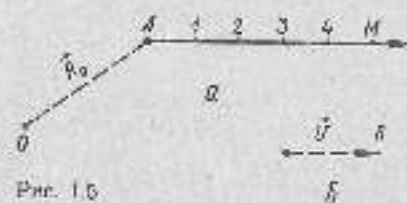


Рис. 1.6

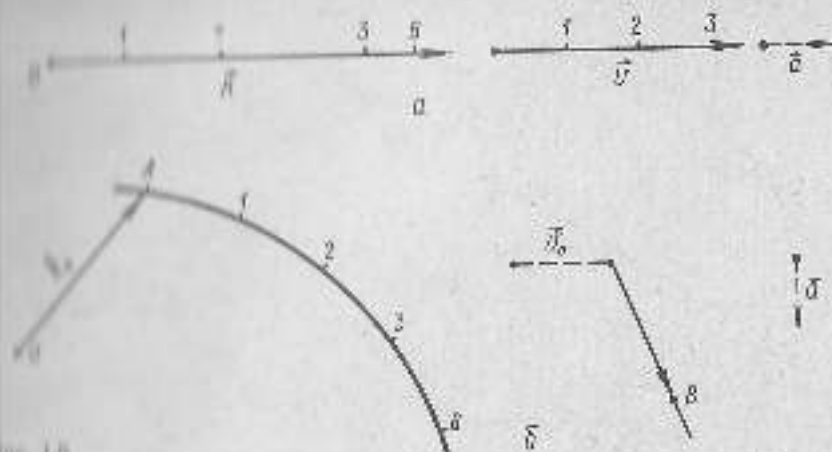


Рис. 1.7

Отметим одну особенность рассмотренных движений. Если они могут происходить неограниченно долго, то точка может удалиться от начального положения сколь угодно далеко. Такие движения называют *неограниченными* (инфинитными) в отличие от *ограниченных* (финитных).

Равноускоренное движение без начальной скорости (или при совпадении направления начальной скорости с направлением ускорения) есть движение неограниченное.

Но если начальная скорость  $v_0$  антинаправлена ускорению, то наибольшее смещение в направлении начальной скорости, как известно из школьного курса физики, равно:

$$R = \frac{v_0^2}{2a}$$

В противоположном же направлении точка может уйти сколь угодно далеко, так что и это движение неограниченное.

#### 1.4. Скорость и ускорение при движении по окружности (или при вращении твердого тела)

Опишем с помощью понятий, введенных в предыдущем параграфе, одно из простейших финитных движений — равномерное вращение точки по окружности. Выберем систему координат, начало которой совпадает с центром окружности.

Какое-либо направление радиуса (например, горизонтальное) примем за ось координат (рис. 1.7, а). Тогда мгновенное положение обращающейся точки М полностью определяется положением ее радиус-вектора, т. е. углом  $\alpha$ . Так как по предположению вращение точки происходит равномерно, то угол  $\alpha$  (*угловое перемещение*) растет пропорционально времени:

$$\alpha = \omega t + \alpha_0, \quad (1.10)$$

где  $\alpha_0$  — значение угла при  $t=0$ .

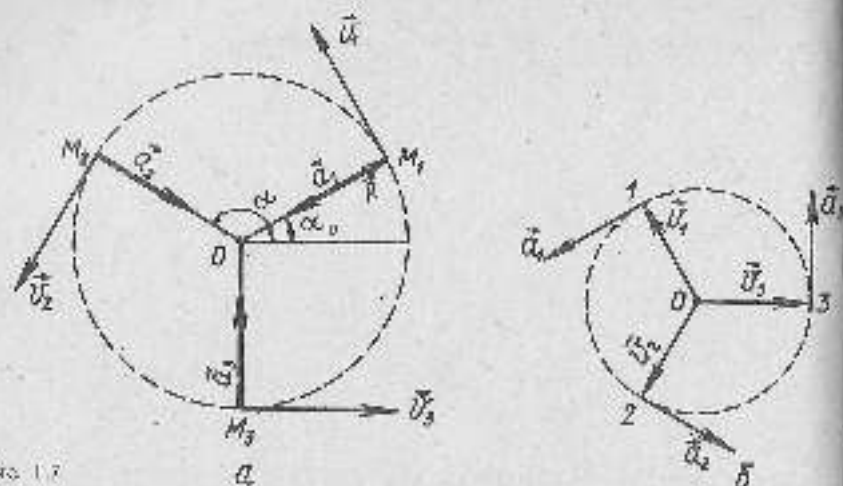


Рис. 1.7

Пусть продолжительность (период) одного полного оборота есть  $T$ . Тогда число оборотов за 1 с равно:

$$f = \frac{1}{T}$$

Эта величина называется частотой обращения и выражается в герцах (Гц):

$$1 \text{ Гц} = 1 \cdot \text{с}^{-1}$$

Так как за один оборот угол  $\alpha$  увеличивается на  $2\pi$ , то введенный выше коэффициент

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Его называют *угловой частотой* (угловой скоростью) и выражают в радианах в секунду.

Постоянная по модулю скорость перемещения точки по окружности  $v$  может быть определена с помощью этих величин:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi f R = \omega R \quad (1.11)$$

В любой момент (в любой точке траектории) вектор  $\vec{v}$  направлен по касательной в сторону движения обращающейся точки, т. е. направление скорости непрерывно изменяется, а ее модуль остается постоянным, поэтому существует только нормальное ускорение. Для его нахождения построим голограф скорости (рис. 1.7, б). Это окружность радиусом  $v$ , образуемая изображающей точкой, т. е. концом вектора  $\vec{v}$ , за время  $T$ . Поэтому реальное нормальное ускорение движущейся точки  $M$ , численно равное скорости изображающей точки, есть:

$$a = a_n = \frac{2\pi v}{T} = \frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (1.12)$$

Вектор нормального ускорения  $\vec{a}_n$  направлен перпендикулярно вектору скорости  $\vec{v}$ . Переносим вектор  $\vec{a}_n$  на длину 1.7, а, убеждаемся, что он всегда направлен к центру окружности (центростремительное ускорение) и равен:

$$a_n = -\frac{v^2}{R} = -\omega^2 R \quad (1.13)$$

Если точка по окружности обращается равномерно, то существует тангенциальное (касательное) ускорение  $a_t$ , модуль которого определяет изменение во времени модуля скорости (рис. 1.8):

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Это совпадает по направлению с направлением вектора  $\vec{v}$  при ускорении обращения; при замедлении обращения  $a_t$  направлено противоположно  $\vec{v}$ . Так как радиус окружности постоянен, то модуль тангенциального ускорения равен:

$$a_t = \frac{dv}{dt} R$$

Величина, характеризующая изменение угловой скорости со временем,

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

называется *угловым ускорением* обращающейся точки. Единица углового ускорения — радиан на секунду в квадрате ( $\text{рад}/\text{с}^2$ ).

Конечно, при этом движении имеется и нормальное ускорение

$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t}$ , так что полное ускорение точки есть:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Если твердое недеформирующееся тело вращается вокруг неподвижной оси, то все его точки движутся по окружностям, лежащим в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Для данной плоскости все окружности имеют общий центр, совпадающий с точкой пересечения оси вращения с этой плоскостью.

Очевидно, все точки тела имеют одинаковую угловую скорость  $\omega$ . Но модули их линейных скоростей различны:

$$v_i = \omega R_i$$

где  $R_i$  — расстояние  $i$ -й точки от оси вращения. При неравномерном вращении угловое ускорение  $\epsilon$  всех точек одинаково, а касательное ускорение зависит от  $R_i$ :  $a_{ti} = \epsilon R_i$ .

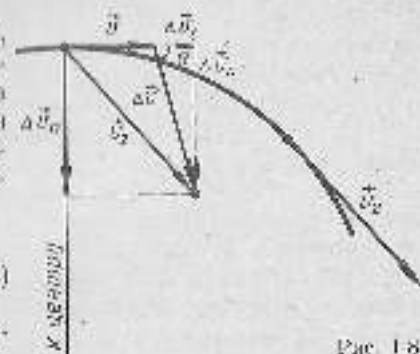


Рис. 1.8

Постоянство  $\omega$  и  $\epsilon$  делает их очень удобными при изучении вращательного движения твердого тела (см. главу 5).

Условимся изображать  $\omega$  и  $\epsilon$  отрезками на оси вращения имеющими длину, пропорциональную модулям этих величин. Отрезок  $\omega$  при этом направим, определив его «правилем буравчика»: если расположить ось буравчика вдоль оси вращения тела и поворачивать его так, чтобы движение его ручки соответствовало движению точек вращающегося тела, то направление поступательного перемещения буравчика (выскакивание или выкакивание) примет за положительное направление угловой скорости, рассматриваемой как вектор. Направление углового ускорения (его мы тоже будем рассматривать как вектор  $\epsilon$ ) совпадает с направлением вектора угловой скорости при ускорении вращения и антипараллельно ему при замедлении.

Векторы  $\omega$  и  $\epsilon$  можно перемещать вдоль оси. Удобно (но не обязательно) совмещать их начало с центром окружности, описываемой рассматриваемой точкой. Однако следует иметь в виду, что конечные угловые перемещения векторными свойствами не обладают и векторный характер можно условно приписать только элементарным угловым перемещениям<sup>1</sup>.

В качестве примера укажем, что вектор угловой скорости стрелок наручных часов направлен в руку. Угловая скорость секундной стрелки равна:

$$\omega_2 = 0.105 \text{ рад/с.}$$

а часовой — в 720 раз меньше:

$$\omega_1 = 1.46 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с.}$$

Обе скорости значительно превосходят угловую скорость вращения Земли вокруг Солнца:

$$\omega_3 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ рад/с.}$$

Угловые скорости вращающихся частей различных механизмов могут достигать очень больших значений — до нескольких тысяч радиан в секунду.

Используя векторный характер  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\epsilon}$ , можно установить векторную связь этих величин с линейными величинами; при этом следует помнить, что радиус-вектор всегда направлен от оси к движущейся точке, так что

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}].$$

Нормальное ускорение (см. 1.13) равно:

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}. \quad (1.15)$$

<sup>1</sup> Можно показать, что  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\epsilon}$  обладают векторными свойствами, хотя и не являются векторами в обычном смысле для механики (отличия от обыкновенных векторов (см., например, Е. Филон и Н. В. Козлов: Курс аналитической геометрии. — М.: Наука, 1975).

тангенциальное ускорение, рассматриваемое как вектор, таково:

$$\vec{a}_t = \vec{\epsilon}, \vec{R}. \quad (1.16)$$

Вектору  $\vec{a}_t$  такое же ускорение при неравномерном вращении есть:

$$\vec{a}_t = \vec{a} + \vec{a}_n;$$

его модуль равен

$$a = R \sqrt{\omega^2 + \epsilon^2}. \quad (1.17)$$

Вектор  $\vec{a}$  образует с вектором скорости  $\vec{v}$  угол  $\theta$ , причем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_n}{v} = \frac{\omega^2}{\epsilon}.$$

Угол  $\theta$  острый, если вращение ускоряется, прямой — если вращение замедляется, тупой — если вращение замедляется.

При движении по плоской произвольной траектории введенные нами понятия сохраняются, но в каждой точке траектории должен быть задан ее радиус кривизны (переменный).

На рисунке 1.9 изображены два положения движущейся точки. В положении 1 угол между векторами мгновенной скорости и тангенциального ускорения острый, поэтому скорость будет увеличиваться, а в положении 2 угол тупой, скорость уменьшается.

Если тело участвует одновременно в нескольких вращениях, то угловые скорости складываются векторно. В этом легко убедиться на опыте, заставляя шар, на поверхности которого нанесены цветные точки, участвовать одновременно в двух вращениях вокруг различных осей; при этом точки обращаются в плоскостях, в которых вектор суммарной угловой скорости расположен под острым углом. Угловые ускорения также складываются векторно.

В заключение приведем пример, из которого ясно, почему векторные свойства можно приписать лишь бесконечно малым угловым перемещениям. В § 1.1 отмечалось, что для линейных перемещений порядок их осуществления роли не играет (параллелограмм перемещений), т. е. они обладают векторными свойствами. Конечные угловые перемещения векторными свойствами не обладают. Если угловые перемещения конечны и они совершаются вокруг различных осей вращения, то порядок их осуществления влияет на полное угловое перемещение. Так, если брусок с поверхностями, окрашенными в разные цвета, сперва повернуть на  $90^\circ$  вокруг вертикальной оси, а затем на  $90^\circ$  вокруг горизонтальной, то он окажется обращенным к экспериментатору раньше другого конца, чем при тех же поворотах в другой последовательности (начиная со второго).

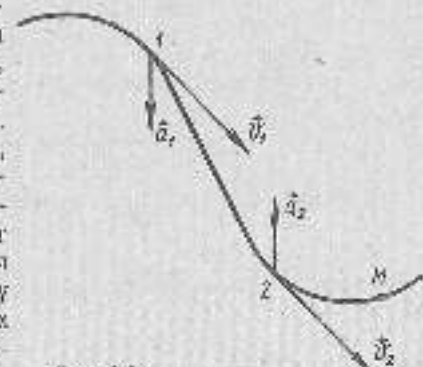


Рис. 1.9

Но при бесконечно малых угловых перемещениях описываемой движущейся точкой дуги можно принять за прямолинейные бесконечно малые перемещения (вращательные движения при этом сводятся к поступательным). Такие перемещения обладают всеми свойствами. Именно поэтому мы и могли рассмотреть угловую скорость, связавшую ее с бесконечно малым угловым перемещением, как вектор.

### 1.5. Решение задач в кинематике

До сих пор мы в основном рассматривали кинематику точек. Введенные при этом понятия приложимы без всяких оговорок к поступательному движению твердых (недеформируемых) тел. Напомним, что при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории. Поэтому для описания поступательного движения тела достаточно описать движение какой-либо его точки, например центра масс (см. § 2.8).

При обращении одного тела относительно другого первое можно принять за точку, если расстояние между центрами тяжести во много раз превышает размеры обращающегося тела. Так, Земля (радиус  $6,4 \cdot 10^3$  км), обращающаяся вокруг Солнца (расстояние  $R = 1,5 \cdot 10^8$  км), может рассматриваться как точка. Но если изучается вращение вокруг оси, проходящей внутри тела, то, конечно, тело нельзя считать материальной точкой.

Мы рассмотрим только такие задачи, где движущееся физическое тело можно считать точкой. Эти задачи могут быть двух типов.

1. *Дан закон перемещения*, т. е. зависимость радиус-вектора точки от времени; нужно найти скорость и ускорение. Эта относительно простая задача решается при помощи операции дифференцирования.

Пусть радиус-вектор движущейся точки, проведенный из начала координат, задан уравнением

$$\vec{R} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = \vec{r}(t),$$

что равносильно заданию трех скалярных уравнений:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

Дифференцируя один раз по времени, находим проекции скорости на соответствующие оси координат:

$$\dot{x} = \frac{df_1}{dt}; \quad \dot{y} = \frac{df_2}{dt}; \quad \dot{z} = \frac{df_3}{dt}.$$

При этом сама скорость равна:

$$\vec{v} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z}.$$

Повторное дифференцирование дает возможность определять ускорение:

$$\ddot{x} = \frac{d^2f_1}{dt^2}; \quad \ddot{y} = \frac{d^2f_2}{dt^2}; \quad \ddot{z} = \frac{d^2f_3}{dt^2}; \quad \vec{a} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}.$$

2. *Дано ускорение точки*, нужно найти законы изменения скорости и перемещения. Эта задача обратна первой; ее решают интегрированием. Из условия

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}(t), \quad d\vec{v} = \vec{a}dt$$

после интегрирования

$$\vec{v} = \int \vec{a}dt + \vec{C}_1 = \vec{v}(t) + \vec{C}_1,$$

где  $\vec{C}_1$  — постоянная интегрирования, для определения которой должна быть задана скорость в некоторый момент (начальное условие).

Далее, так как

$$d\vec{R} = \vec{v}dt,$$

то повторное интегрирование даст:

$$\vec{R} = \int \vec{v}(t)dt + \vec{C}_2(t + \vec{C}_3),$$

где  $\vec{C}_2$  — новая постоянная интегрирования, для нахождения которой нужно задать еще одно начальное условие, например значение вектора в некоторый момент времени. В процессе вычислений векторные функции могут быть заменены тремя скалярными.

Следует обратить внимание на важное обстоятельство: первая задача решена полностью и однозначно. Для однозначного решения второй задачи необходимо задать начальные условия, т. е. дополнительные сведения физического характера.

Приведем пример равноускоренное движение материальной точки. Подробно рассматривалось в начальном курсе физики. Поэтому мы рассмотрим более сложную задачу о движении точки, брошенной под углом  $\alpha_0$  к земному горизонту с начальной скоростью  $v_0$ ; точка имеет ускорение, вектор которого  $\vec{g}$  направлен вертикально вниз; сопротивление воздуха пренебрежем.

Выбрав систему координат (рис. 1.10; ось  $Z$  перпендикулярна плоскости чертежа), находим:

$$a_x = 0; \quad a_y = 0; \quad a_z = -g.$$

Таким образом, движение происходит в плоскости  $OXY$ , поэтому задача называется плоской.

Проекция  $a_y$  ускорения на ось  $Y$  по условию равна:

$$a_y = -g \sin \alpha_0.$$

Поэтому

$$a_y = -gt + C_1,$$

причем при  $t=0$  должно быть:

$$a_{y0} = v_0 \sin \alpha_0.$$

Следовательно,

$$a_y = -gt + v_0 \sin \alpha_0.$$

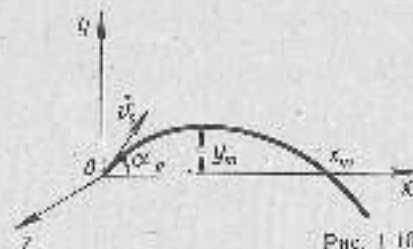


Рис. 1.10

Смещение по вертикали определим из уравнения

$$y = \int v_y dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha_0 + C_2 \quad (1)$$

Так как при  $t=0$  точка находилась в начале координат, то  $C_2=0$ .

Для проекций ускорения и скорости на ось  $X$  соответственно получаем:  $a_x = 0$ ;  $v_x = v_0 \cos \alpha_0 = v_0 \cos \alpha_0$ .

Поскольку горизонтальное смещение

$$x = v_0 t \cos \alpha_0 \quad (1)$$

(новая постоянная интегрирования снова обращается в нуль).

Новая скорость по модулю равна:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha_0 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin \alpha_0}$$

а мгновенное значение угла, образуемого ею с горизонтальной осью, может быть найдено по его тангенсу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y \text{ или } x_t - x_0}{v_0 \cos \alpha_0}$$

Проекция скорости на ось  $Y$  обращается в нуль в момент

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

При этом высота подъема точки наибольшая; она равна:

$$y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}$$

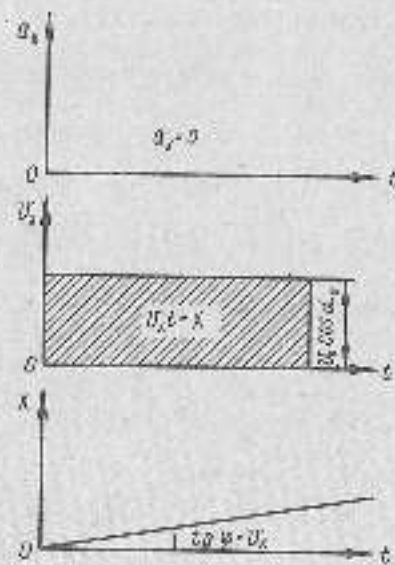
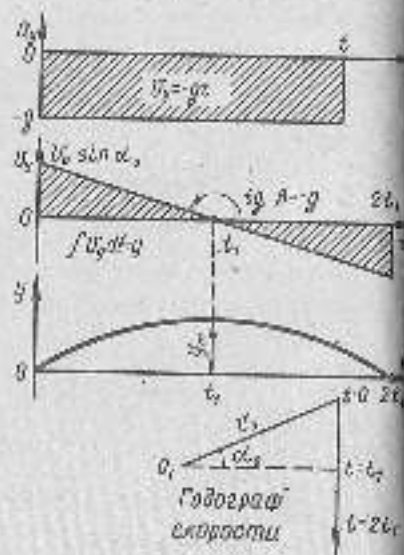


Рис. 1.1



Так как время прохождения какого-либо вертикального отрезка  $dy$  и разл. одно и то же, то до оси абсцисс точка опустится за время  $t$  и пройдет ее на расстоянии

$$x_0 = v_0 2t_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$$

т.е. дальности координат (дальности полета). При этом наибольшая дальность (при заданной скорости  $v_0$ ) получается при  $\alpha_0 = 45^\circ$ . Дальности при углах  $\alpha_0$  и  $90 - \alpha_0$  одинаковы.

Исключая время из уравнений (1.18) и (1.19), получим уравнение траектории в явном виде:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$$

Легко убедиться, что траектория представляет параболу, симметричную относительно наибольшей ординаты. Наглядное представление об особенностях рассмотренного движения дает опыт со струей воды, вытекающей под давлением из трубки, расщепленной под углом к горизонту.

На рисунке 1.11 эта же задача решена графически. Кроме того, там же приводится и график скорости.

### 1.6. Гармоническое колебательное движение. Сложение гармонических колебаний

Гармоническим колебанием называется движение, при котором положение относительно положения равновесия изменяется по закону косинуса (или синуса):

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.20)$$

Здесь  $X_m$  — амплитуда (наибольшее смещение точки относительно начала координат);  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  — мгновенная фаза;  $\varphi_0$  — начальная фаза (при  $t=0$ );  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  — двукратная (угловая) частота ( $T$  — период).

Таким образом, это (как и обращение точки по окружности) равномерное периодическое движение — через одинаковые промежутки времени  $T$  радиус-вектор  $\vec{R} = \vec{x}$  достигает прежнего значения.

Колебания, близкие к гармоническим, совершает тело, подвешенное на пружине, когда его вывели из положения равновесия и затем предоставили самому себе; так же движется маленький маятник, подвешенный на длинной нити, если его вывести из положения равновесия и отпустить. В обоих случаях амплитуды колебаний должны быть малы. Графики колебаний с разными начальными фазами показаны на рисунке 1.12.

Взяв произвольную по времени  $0t$  (1.20), находим скорость в гармоническом движении:

$$\dot{x} = -\omega X_m \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.21)$$

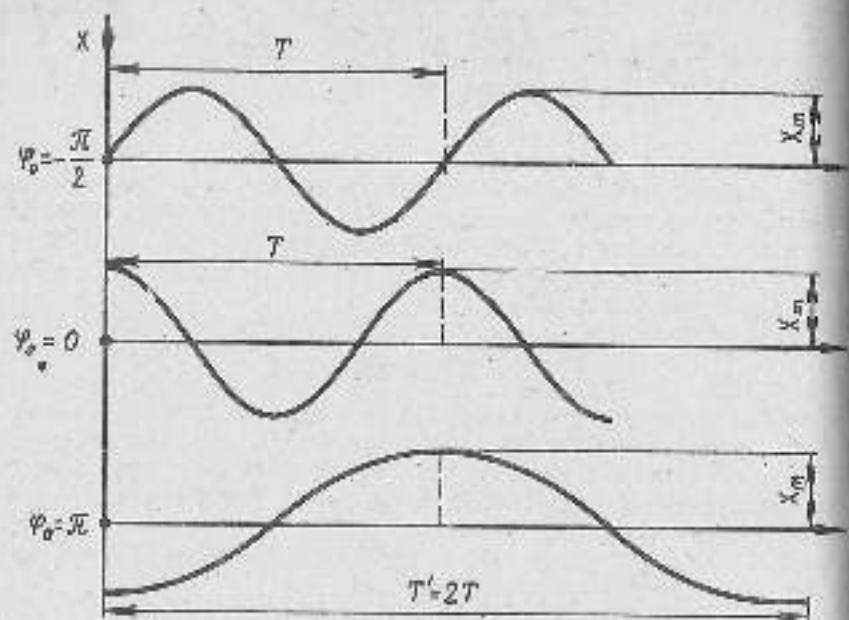


Рис. 1.12

Она так же, как и смещение, меняется по закону косинуса с той же угловой частотой  $\omega$ , но сдвинута по фазе (относительно смещения) на  $\pi/2$  (или во времени — на четверть периода).

Ускорение этого движения, равное

$$\ddot{x} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x. \quad (1.2)$$

также представляет гармоническую функцию; кроме того, она пропорциональна смещению и всегда направлена к положению равновесия ( $x=0$ ).

Гармонические колебания характерны не только для механических явлений; они играют существенную роль и в самых различных физических явлениях (электромагнитных, в атомной физике и др.). В частности, в технике легко получают гармонические колеблющиеся напряжения (их используют при передаче электрической энергии на большие расстояния, в промышленности, в радио-технике, телевидении и т. д.), что позволяет изучать особенности гармонического движения при помощи электрического осциллографа (краткое описание принципа действия этого прибора приведено в § 3.2).

Так как математическое описание гармонических колебаний различной физической природы одинаково, то и в дальнейшем мы часто будем прибегать к электромеханическим аналогиям.

Точка может участвовать одновременно в нескольких гармонических движениях. Получающееся при этом движение оказывается периодическим, но, вообще говоря, негармоническим.

Если движения складываются алгебраически (например, так все-таки складываются колебания давления в звуковых волнах), то сложение движений называют скалярным.

В скалярному сложению сводится и нахождение результирующего колебания векторов, расположенных вдоль одной прямой (например, двух перемещений).

Пусть нужно скалярно сложить два колебания одинаковой частоты:

$$x_1 = X_{m1} \cos \omega t; \quad x_2 = X_{m2} \cos (\omega t + \varphi).$$

Очевидно, что результирующее движение будет происходить с той же частотой:

$$x = x_1 + x_2 = X_m \cos (\omega t + \varphi). \quad (1.23)$$

Для нахождения амплитуды и начальной фазы суммарного движения применим элементарные тригонометрические преобразования:

$$\begin{aligned} x &= X_{m1} \cos \omega t + X_{m2} \cos \omega t \cos \varphi_0 - X_{m2} \sin \omega t \sin \varphi_0 = \\ &= X_m \cos \omega t \cos \varphi - X_m \sin \omega t \sin \varphi. \end{aligned}$$

Так как это соотношение должно выполняться в любой момент  $t$ , то коэффициенты при  $\cos \omega t$  (а также при  $\sin \omega t$ ) в обеих частях уравнения должны быть равны. Поэтому получаются два уравнения для определения  $X_m$  и  $\varphi$ . Несложные вычисления дают:

$$X_m^2 = X_{m1}^2 + X_{m2}^2 + 2X_{m1}X_{m2} \cos \varphi_0, \quad (1.24)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_{m2} \sin \varphi_0}{X_{m1} + X_{m2} \cos \varphi_0}.$$

Мы видим, что амплитуда  $X_m$  существенно зависит от разности начальных фаз  $\varphi_0$  и может меняться в пределах

$$|X_{m1} - X_{m2}| \leq X_m \leq X_{m1} + X_{m2}.$$

Представление о полученных результатах может дать опыт с маятником, приводимым в сложное движение двумя последовательными ударами, направленными по одной прямой.

Проще проиллюстрировать сложение колебаний в электрической цепи, питаемой источником переменногo напряжения, подавая на вход осциллографа одновременно напряжения с различных участков электрической цепи, содержащей (для создания сдвига фаз), кроме резистора, катушку индуктивности или конденсатор.

Еще удобнее воспользоваться двумя электрическими генераторами, допускающими независимую регулировку амплитуд складываемых колебаний. Однако при этом (даже если бы не будем менять начальную фазу) всегда наблюдается медленное (по сравнению с самими колебаниями) периодическое изменение амплитуды  $X_m$ ; его можно сделать очень медленным, но нельзя устранить полностью.

Объясняется это невозможностью получить равные частоты от двух независимых источников. В опыте всегда получаются колебания нескольких различных частот:

$$x_1 = X_{m1} \cos \omega t; \quad x_2 = X_{m2} \cos [(\omega + \Delta\omega)t + \varphi] \quad (\Delta\omega \ll \omega)$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$x_1 = X_{m1} \cos[\omega t + (\varphi_1 + \Delta\omega t)]$$

и истолковать как колебание с частотой  $\omega$  и медленно меняющейся начальной фазой. Так как суммарная амплитуда зависит от начальной фазы, то и происходит медленные периодические изменения амплитуды по мере того, как начальная фаза нарастает от  $0$  до  $2\pi$  и дальше.

Если амплитуды складываемых колебаний равны и  $\Delta\omega \ll \omega$ , сложение таких колебаний дает:

$$x = 2X_m \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) t\right]$$

(начальные фазы приняты равными нулю); результат можно толковать как колебание с медленно меняющейся амплитудой и постоянной частотой  $\omega + \frac{\Delta\omega}{2}$  (несгармонические!). Вид этих колебаний показан на рисунке 1.13, где воспроизведена осциллограмма колебаний и их развертка по времени.

При сложении подобных звуковых колебаний слышен звук определенной высоты (частоты) с периодически меняющейся громкостью (амплитудой); такой процесс называют *биениями*.

При сложении колебаний с сильно отличающимися периодами  $T_1$  и  $T_2$  также получается периодическое движение; его период равен общему наименьшему кратному периодов складываемых колебаний; но форма кривой  $x=f(t)$  в этом случае уже весьма далека от косинусоиды и зависит от соотношения амплитуд и начальных фаз.

В ряде практических приложений, в частности в акустике, оптике, радиотехнике, нужно знать не столько характер изменения периодического процесса во времени, сколько его спектральный состав (т. е. иметь сведения о частотах и амплитудах складываемых процессов).

Для изучения спектрального состава существуют специальные приборы — анализаторы спектра. Об устройстве акустических анализаторов речь будет идти позже (см. гл. 9); сейчас же воспользуемся дающим наиболее наглядные представления электронным анализатором.

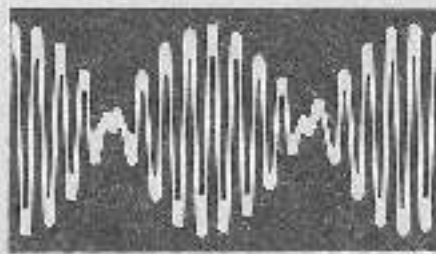


Рис. 1.13

Исследуемое напряжение подается на вход анализатора. Если исследуемое напряжение имеет составленную с частотой  $\omega$  составляющую в диапазоне рабочих частот прибора, то электронный анализатор дает вертикальный выброс пропорциональный амплитуде этой частоты.

На рисунке 1.14, а, б показаны сложившиеся колебания, записанные на обычном электронном осциллографе ( $a=f(t)$ ); они образованы складыванием гармонических колебаний семи частот, причем определены амплитуды (одинаковые в обоих случаях). Но начальные фазы у них различны. Форма получившихся сложных колебаний в обоих случаях резко различна. На рисунке 1.14, в показана спектрограмма  $f(\omega)$ , общая для них, так как относительные соотношения не влияют на работу такого спектроанализатора.

Таким образом, сложение нескольких гармонических колебаний разной частоты дает периодический, но не гармонический процесс.

Ж. Фурье (1768—1830) доказал, что периодическая функция  $f(t)$  периода  $T$ , удовлетворяющая некоторым специальным условиям (практически всегда выполняющимся в физике), может быть представлена рядом гармонических колебаний, носящим имя Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_{mk} \cos[k\omega t + \varphi_k] \quad (1.25)$$

Частоты этих колебаний (гармоник) являются целыми кратными «основной» частоте:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Такое разложение и производится автоматически в анализаторах спектра.

Осциллограммы и спектрограммы некоторых периодических движений показаны на рисунке 1.15, а, б (сигнал имеет вид периодически повторяющегося прямоугольного импульса) и 1.15, в, г (напряжение медленно нарастает с течением времени и относительно быстро спадает). В последнем случае амплитуды гармоник

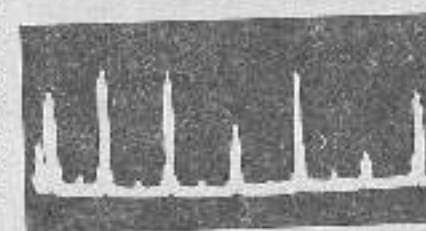
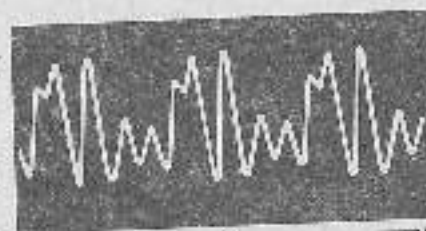


Рис. 1.14

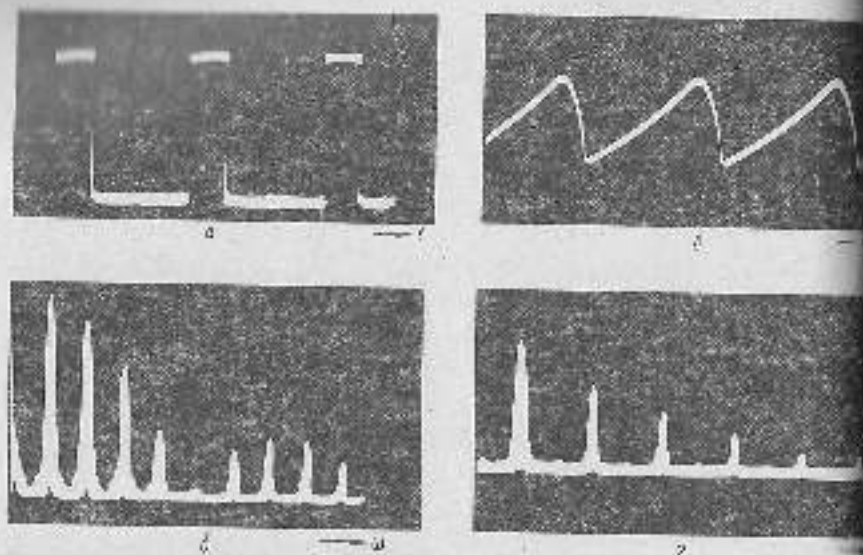


Рис. 1.16

обратно пропорциональным последовательным целым числам (1, 1/5, ...).

При сложении нескольких гармонических колебаний одинаковой частоты можно вместо сложных тригонометрических расчетов применить условный графический метод векторных диаграмм. Суть его состоит в следующем.

Выберем на плоскости произвольную ось  $OX$  и условим изображать скалярное колебание  $x = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$  при  $t = 0$  вектором  $\vec{X}_{m1}$ , длина которого равна  $X_{m1}$ , а угол между осью вектором равен углу начальной фазы  $\varphi_1$  (рис. 1.16).

Вообразим теперь, что этот вектор вращается вокруг точки  $O$  с угловой частотой  $\omega$ . Тогда проекция этого вращающегося вектора на ось  $OX$  в любой момент равна:

$$x = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

т. е. представляет мгновенное смещение.

Если теперь нужно сложить два колебания:

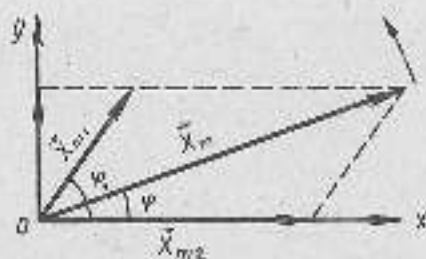


Рис. 1.16

$$x_1 = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = X_{m2} \cos \omega t,$$

то, построив соответствующие векторы, можно найти их геометрическую сумму  $\vec{X}_m$  (см. рис. 1.16).

Проецируя векторы на ось  $Ox$  и помня, что проекция суммы векторов равна алгебраической

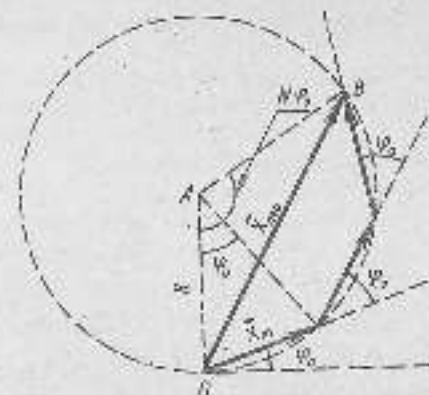


Рис. 1.17

суммой проекций векторов убеждаемся, что вектор изображает суммарное колебание, причем его амплитуду обозначим  $X_m$ , а фазу  $\varphi$ , так как именно результат, совпадающий с (1.24).

Изображенный векторный параллелограмм с течением времени вращается, но не меняет своей формы (здесь частоты обоих колебаний одинаковы). Поэтому вместо обычных вращающихся векторных диаграмм производить расчеты достаточно построить одну раз.

Если бы складываемые колебания отличались по частоте, то результирующий параллелограмм с течением времени изменял бы свою форму, и такое простое рассмотрение было бы невозможным.

Удобно методом векторных диаграмм можно показать на задаче суммирования  $N$  гармонических колебаний, имеющих равные амплитуды  $X_m$  и частоты  $\omega$ , с линейно нарастающей начальной фазой.

$$x = \sum_{n=1}^N X_m \cos(\omega t + n\varphi), \quad (1.26)$$

$$\varphi_n = \frac{2\pi n}{p}, \quad p - \text{целое число.}$$

Нарисуем эти колебания векторами, причем начало  $n$ -го вектора совмещается с концом  $(n-1)$ -го вектора. Тогда они образуют стороны правильного  $N$ -угольника (рис. 1.17). Около него можно описать окружность радиусом  $R = OA$ , причем

$$X_m = 2R \sin \frac{\varphi}{2}$$

Амплитуда результирующего колебания изображится вектором  $\vec{X}_m$ , причем сразу может быть найден его модуль:

$$X_m = 2R \sin \left( \frac{N\varphi}{2} \right) = X_m \left| \frac{\sin \left( n \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\varphi}{2} \right)} \right|. \quad (1.27)$$

Из полученного выражения видно, что найденная сумма обращается в нуль при целочисленных значениях отношения  $\frac{N}{p}$ ; наибольшее значение она принимает при полуцелых значениях этого отношения.



### 1.7. Метод комплексных амплитуд<sup>1</sup>

С методом векторных диаграмм тесно связан аналитический метод комплексных амплитуд, значительно облегчающий расчет при изучении колебательных процессов: они сводятся к простым алгебраическим операциям.

Для углубления сущности этого метода обратимся вновь к рисунку 1.16. Легко видеть, что мгновенные проекции сторон векторного треугольника на ось  $OY$  изменяются по синусоидальному закону; например, для суммарного вектора  $\vec{X}_\Sigma$  получим:

$$y = X_\Sigma \sin(\omega t + \varphi).$$

Если рассматривать плоскость чертежа как плоскость комплексных величин:

$$\dot{z} = a + jb; \quad j = \sqrt{-1},$$

считая вертикальную ось мнимой, то вектор  $\vec{X}_\Sigma$  представит комплексное число<sup>2</sup>:

$$\dot{z} = X_\Sigma \cos(\omega t + \varphi) + jX_\Sigma \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.28)$$

По известной теореме Эйлера

$$\dot{z} = X_\Sigma \exp[j(\omega t + \varphi)] = X_\Sigma \exp(j\varphi) \exp(j\omega t) = \dot{X}_\Sigma \exp(j\omega t), \quad (1.29)$$

где не зависящая от времени величина

$$\dot{X}_\Sigma = X_\Sigma \exp(j\varphi) \quad (1.30)$$

называется *комплексной амплитудой*. Она определяет амплитуду и начальную фазу вектора  $X_\Sigma$ , представляющего комплексное число  $\dot{z}$ .

Найдем производную по времени от выражения (1.29):

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{z}}{dt} &= j\omega \dot{X}_\Sigma \exp(j\omega t) = \omega \dot{X}_\Sigma \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) \exp(j\omega t) = \\ &= \omega X_\Sigma \exp\left[j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] \exp(j\omega t), \end{aligned} \quad (1.31)$$

так как  $\exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) = j$ .

Таким образом, дифференцирование комплексной величины сводится к умножению модуля на  $\omega$  и увеличению начальной фазы на  $\pi/2$ . Интегрирование же сводится к умножению на  $\frac{1}{\omega}$  и изменению начальной фазы на  $-\pi/2$ . Действительно,

$$\int \dot{z} dt = -\frac{j}{\omega} \dot{z} = \frac{X_\Sigma}{\omega} \exp\left[j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \exp(j\omega t). \quad (1.32)$$

<sup>1</sup> Этот параграф при первом чтении можно опустить, его разбирать не надо, обратимся к главе 7.

<sup>2</sup> Точку над буквой здесь следует понимать как символ комплексного числа.

Таким образом, основные операции математического анализа сводятся к простым операциям умножения и деления. Поэтому уравнения, содержащие производные (дифференциальные уравнения), заменяются алгебраическими уравнениями.

Также, из теории сложения комплексных чисел известно, что действительные и мнимые части суммируются порознь, так что если

$$\dot{z}_1 = a_1 + jb_1, \quad \dot{z}_2 = a_2 + jb_2,$$

то сумма

$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = \dot{z} = a + jb = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2). \quad (1.33)$$

Суть метода комплексных амплитуд такова: аналитическое представление колебания

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

рассматривается как действительная часть комплексного числа:

$$x = \operatorname{Re}(\dot{z}), \quad \dot{z} = \dot{X}_m \exp(j\omega t).$$

Все вычисления проводятся с этими комплексными представлениями, а в конечном результате физический смысл приписывается только действительной части решения; это можно сделать, основываясь на свойстве (1.33), если только все вычислительные операции были линейны.

Пусть, например, нужно сложить два колебания:

$$x_1 = X_{m1} \cos \omega t \quad \text{и} \quad x_2 = X_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (1.34)$$

Представим их комплексными числами:

$$\dot{z}_1 = X_{m1} \exp(j\omega t),$$

$$\dot{z}_2 = X_{m2} \exp(j\varphi_2) \exp(j\omega t).$$

Сумма их есть:

$$\dot{z} = \dot{Z} \exp(j\omega t) = Z \exp(j\varphi) \exp(j\omega t). \quad (1.35)$$

Очевидно, что

$$Z \exp(j\varphi) = (X_{m1} + X_{m2} \cos \varphi_2) + jX_{m2} \sin \varphi_2.$$

Поэтому получается:

$$x = \operatorname{Re}(\dot{z}) = Z \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.36)$$

При этом неизвестные амплитуда и фаза удовлетворяют уравнениям

$$Z^2 = X_{m1}^2 + X_{m2}^2 + 2X_{m1}X_{m2} \cos \varphi_2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_{m2} \sin \varphi_2}{X_{m1} + X_{m2} \cos \varphi_2}.$$

Полученные результаты, конечно, совпадают с ранее найденными (уравнение 1.24).

### 1.8. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Практический интерес представляет колебательный процесс, получающийся при сложении колебаний, происходящих в пространстве во взаимно перпендикулярных направлениях. Примером такого процесса является движение маятника (шара на нити), которое совершают последовательно два взаимно перпендикулярных движения с помощью двух ударов. Аналогичный опыт может быть осуществлен с электронным лучком в электронно-лучевой трубке, если на входы вертикального и горизонтального отклонений осциллографа подать два гармонических напряжения.

Вначале рассмотрим сложение взаимно перпендикулярных колебаний, происходящих с одинаковой частотой. Пусть даны колебания, описываемые соответственно уравнениями

$$x = X_0 \cos \omega t; \quad y = Y_0 \cos (\omega t + \varphi). \quad (1.36)$$

Траектория результирующего движения точки будет лежать внутри прямоугольника со сторонами длиной  $2X_0$  и  $2Y_0$ .

Чтобы определить явный вид траектории, исключим время (1.37). Для этого вычислим:

$$\frac{x}{X_0} = \cos \omega t; \quad \frac{y}{Y_0} = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi. \quad (1.37)$$

Умножим первое уравнение на  $\cos \varphi$  и вычтем из него второе. Получим:

$$\frac{x}{X_0} \cos \varphi - \frac{y}{Y_0} = \sin \omega t \sin \varphi.$$

Теперь умножим первое уравнение (1.38) на  $\sin \varphi$ :

$$\frac{x}{X_0} \sin \varphi = \cos \omega t \sin \varphi.$$

Возводя это уравнение в квадрат и складывая с предыдущим уравнением, также возведенным в квадрат, приходим к выражению

$$\left(\frac{x}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{Y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{X_0 Y_0} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (1.38)$$

представляющему уравнение эллипса, для которого направления колебаний  $x$  и  $y$  не являются главными осями.

Заслуживают внимания частные случаи:

а)  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi$ .

Тогда

$$\left(\frac{x}{X_0} + \frac{y}{Y_0}\right)^2 = 0; \quad y = \pm \frac{Y_0}{X_0} x.$$

Полученные уравнения означают, что движение происходит по прямой, проходящей через начало координат (положение равновесия) и лежащей в I и III квадрантах (при  $\varphi = 0$ ) или II и IV квадрантах (при  $\varphi = \pi$ ).

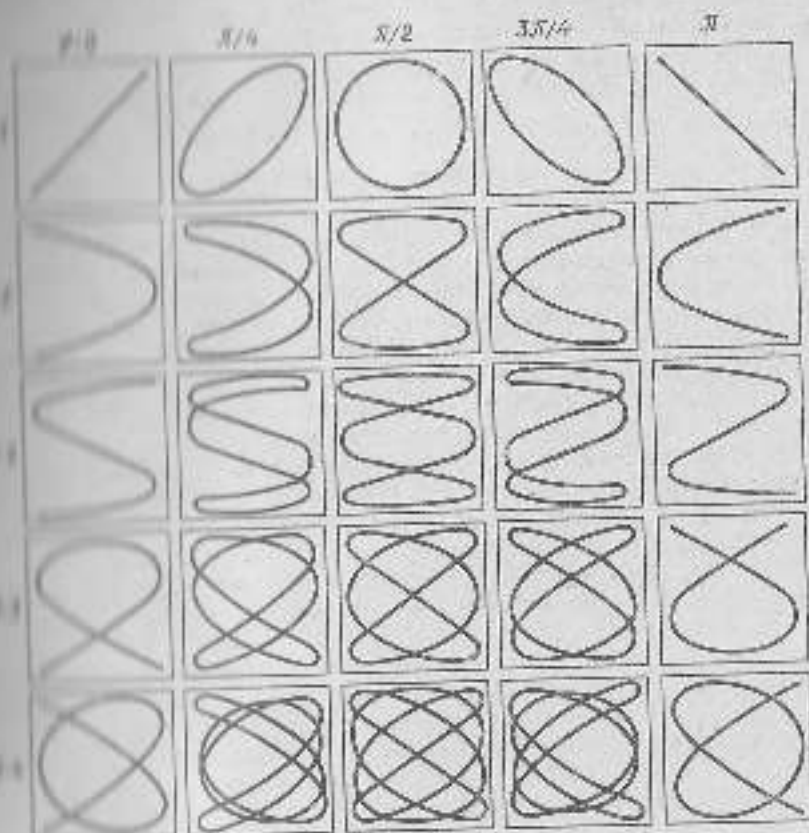


Рис. 1.10

б)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  или  $\frac{3\pi}{2}$ .

В этом случае

$$\left(\frac{x}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{Y_0}\right)^2 = 1.$$

Траектория представляет эллипс, для которого направления колебаний являются главными осями. В зависимости от значения фазового угла эллипс обегается точкой по часовой стрелке или против нее.

Если в данном случае амплитуды складываемых колебаний будут равны, то результирующее движение происходит по окружности, центр которой лежит в положении равновесия.

Отсюда следует и обратное утверждение: равномерное обращение точки по окружности с угловой частотой  $\omega$  можно рассмотреть как совокупность двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний той же частоты с амплитудами, равными радиусу окружности, и сдвигом по фазе  $\pi/2$ . В этом можно убедиться,

наблюдая теневые проекции, обращаются по окружности шарика на двух взаимно перпендикулярных экранах.

Если отношение частот складываемых колебаний равно отношению  $q/p$  небольших целых чисел, то получаются своеобразные траектории (фигуры Лиссажу), формы которых (при данном отношении частот  $\frac{q}{p}$ ) существенно зависят от начальных фаз колебаний.

На рисунке 1.18 показаны фигуры Лиссажу, получившиеся при различных отношениях частот (указаны слева) и различных начальных фазовых углах (указаны вверху). Складываемые движения происходят вдоль координатных осей, параллельных сторонам квадрата, содержащего фигуру Лиссажу, причем начало координат лежит в середине квадрата.

Эти оси могут быть получены на экране осциллографа, если попеременно выключать одно из напряжений.

Число пересечений фигур Лиссажу с осями координат обратно пропорционально частотам. Поэтому по виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной, что находит практическое применение.

При больших или нецелочисленных значениях  $p$  и  $q$  фигуры становятся весьма сложными и практического значения не имеют.

## ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ НЬЮТОНА

### 2.1. Первый закон Ньютона. Сила

Динамика в отличие от кинематики, устанавливающей только связь между перемещением и временем, рассматривает и причины, вызывающие то или иное перемещение.

Повседневный опыт показывает, что любое тело, движущееся на Земле или вблизи ее поверхности, само по себе останавливается, если каким-либо образом не воздействовать на него другими телами. Недостаточно критическая оценка результатов опыта (пока понятие о сопротивлении, испытываемом движущимся телом при взаимодействии с окружающей средой, еще не было создано в физике) приводила к мнению, что для поддержания движения даже с неизменной скоростью необходимо воздействие окружающих тел. Эта точка зрения господствовала в физике со времени величайшего философа древности Аристотеля (384—322 гг. до н. э.) до конца XV в.

Галилей, по видимому, первым осознал, что прекращение движения есть результат каких-то воздействий, препятствующих движению (трение). Он понял, что без взаимодействия тело должно двигаться равномерно и прямолинейно (либо покоиться), а взаимодействия с другими телами вызывают изменения движения, т. е. ускорения. Это умозаключение, выходящее за пределы непосредственного опыта, явилось одной из самых гениальных абстракций в истории физики.

Ньютон в своих законах динамики принял и развил мысль Галилея.

*Первый закон динамики Ньютона* гласит: всякое тело (точка) сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока внешние воздействия (силы) не выведут его из этого состояния.

Но описание движения возможно только в некоторой системе отсчета. Следовательно, первый закон предполагает существование хотя бы одной системы отсчета, где он выполняется.

Свойство физического тела (точки) сохранять состояние равномерного прямолинейного движения (или покоя) в отсутствие внешних воздействий называют *инерцией*. Равномерное прямолинейное движение свободной точки, не испытывающей внешних воздействий, называют движением по инерции, поэтому первый закон Ньютона часто называют *законом инерции*, а систему отсчета, в которой он выполняется, — *инерциальной системой отсчета* (ИСО). В § 2.6 будет показано, что любая система отсчета, движущаяся относительно ИСО равномерно и прямолинейно, сама является инерциальной.

Конечно, понятие ИСО есть понятие абстрактное. Для того чтобы другие тела не влияли на состояние расследуемой точки, они должны быть удаленными от нее: например, телом отсчета может быть какая-либо звезда. На практике можно найти более удобное тело отсчета, и эта абстракция применяется в механике весьма успешно.

Так, при приближенном описании движения планет системы отсчета, связанную с Солнцем, можно считать инерциальной. При более точном описании ИСО должна быть связана с центром масс Солнечной системы (см. § 2.8).

При изучении движения тел у поверхности Земли часто за ИСО можно принимать Землю (если продолжительность опыта весьма мала, т. е. вращение Земли вокруг ее оси не сказывается заметным образом).

Первый закон, утверждающий существование инерциальных систем, ничего не говорит о том, как именно изменяется состояние свободного тела (точки), если оно подвергается воздействию со стороны окружающих («внешних») тел.

В физике вместо слов «внешнее тело взаимодействует с рассматриваемым телом (точкой)» принято высказывание «какое-либо тело действует на точку с некоторой силой». При этом под силой понимается количественная характеристика взаимодействия.

Никакой другой смысл в термин «сила» в механике не вкладывается. Поэтому возникавшие в прежние десятилетия методологические споры, связанные с понятием «сила», в настоящее время (по крайней мере для физика) имеют лишь исторический интерес.

Повседневный опыт и точные эксперименты показывают, что единственным результатом действия силы на свободное (т. е. не взаимодействующую с третьим телом) материальную точку является сообщение ей ускорения.

Если тело (точка) несвободно, то конечный результат действия силы может быть иным. Прикрепим к концу вертикальной нерастянутой пружины шарик и осторожно отпустим его. Благодаря притяжению Земли (действию силы тяжести) шарик к нижний конец пружины начинают двигаться вниз с некоторым ускорением. Но как только шарик сместится, пружина растянется (деформируется) и появится еще сила упругости пружины, действующая на шарик и направленная вверх, так как пружина стремится сократиться, и потому ускорение уменьшается. В дальнейшем шарик будет совершать довольно сложное движение (затухающие колебания, см. гл. 7). В конце концов он останавливается, причем пружина оказывается растянутой на некоторый отрезок  $x$ . В этом случае конечным результатом действия силы является статическая деформация пружины, появление дополнительной силы, действующей со стороны растянутой пружины, и постоянное смещение груза.

Предполагая, что одинаковые причины в одинаковых условиях приводят к одинаковым результатам, мы можем сравнить силу, создаваемую ими деформация одной и той же пружины. Установим

два конца этой пружины, можно воздействовать на ту же пружину теми же силами. При этом, как показал экспериментально Гук (1638—1703), в известных пределах наблюдается прямая пропорциональность между растягивающей силой  $F$  и вызываемой ею деформацией  $x$ :

$$\vec{F} = k\vec{x} \quad (\text{закон Гука}).$$

Коэффициент  $k$ , зависящий от размеров и материала пружины, называется жесткостью. Пока он постоянен (при малых деформациях), сила называется силой упругости.

Как показывает опыт, силы обладают векторными свойствами — складываются геометрически. Если вызванная несколькими силами деформация остается упругой (коэффициент жесткости пружины постоянен), т. е. уравнение, связывающее силу и деформацию, линейное, то действие каждой из сил оказывается не зависящим от действия других. Поэтому, например, результат воздействия на материальную точку двух сил, направленных под углом друг к другу, может быть найден на векторного параллелограмма сил. Это утверждение дополняет сформулированный в § 1.2 принцип независимости движений правилом векторного сложения сил. Правильность этих утверждений называют принципом суперпозиции (наложения). Этот принцип широко используется не только в механике, но и в других разделах физики (например, при сложении электростатических полей, электромагнитных волн и др.).

## 2.2. Второй закон Ньютона. Масса, импульс

Весь дальнейший курс (если нет специальных оговорок) посвящен рассмотрению движений, описываемых в инерциальных системах отсчета.

Если свободное физическое тело (материальная точка), находящееся в покое или движущееся равномерно и прямолинейно, оказывается во взаимодействие с другими телами (точками), то согласно первому закону Ньютона его состояние изменяется. Но первый закон не отвечает на вопрос, каким будет это изменение.

С многочисленными явлениями, связанными с этим изменением, читатель встречается в повседневной жизни, с соответствующими экспериментами — в школьном курсе физики; некоторые опыты и эксперименты будут рассмотрены в следующих главах и параграфах.

Ньютон обобщил опытный материал, накопленный к его времени физикой, в своем втором законе механики. Для понимания этого обобщения следует учесть, что понятие силы и метод ее измерения уже установлены (см. § 2.1).

Основной результат всех опытов таков: под действием сил (т. е. в результате взаимодействия) свободная точка приобретает ускорение в направлении действующей силы.

Систематизируя эксперименты, можно сделать следующие частные выводы:

а) Если данная постоянная сила  $F$  действует на некоторую точку (точку) в течение разных промежутков времени  $\Delta t$ , то приращение скорости пропорционально силе и времени ее действия:

$$\bar{F}\Delta t = m\Delta\bar{v}.$$

Здесь  $m$  — постоянный множитель, характерный для данного тела.

б) Если одна и та же сила действует в течение времени  $\Delta t$  поочередно на разные тела, то приращения их скоростей будут разными:

$$\bar{F}\Delta t = m_i\Delta\bar{v}_i,$$

где  $m_i$  — величина, характерная для  $i$ -го тела (точки).

а) Если действовать разными силами на одно и то же тело (в течение неизменного времени  $\Delta t$ ), то приросты скорости у него получаются разными, но величина  $m$  не изменяется:

$$\bar{F}_i\Delta t = m\Delta\bar{v}_i.$$

Полученные выводы можно объединить в следующей формулировке: изменение скорости тела (точки) происходит в направлении действия силы; оно пропорционально приложенной силе и времени ее действия:

$$m\Delta\bar{v} = \bar{F}\Delta t. \quad (2.1)$$

При фиксированном значении выражения  $\bar{F}\Delta t$  изменение скорости обратно пропорционально  $m$ .

Постоянная для данного тела (материальной точки) величина  $m$  служит мерой инертности тела (точка), т. е. показывает, насколько значительно изменение скорости при данном воздействии на тело (точку). Эту величину называют *инертной массой* (или просто *массой*) тела (точки).

Из уравнения (2.1) следует, что если одна и та же сила действует одинаковое время на разные тела, то произведения  $m_i\Delta\bar{v}_i$  получаются одинаковыми:

$$m_i\Delta\bar{v}_i = \text{const} \text{ так как } \bar{F}\Delta t = \text{const}.$$

Приращение скорости легко измерить на опыте. Выбрав произвольное образцовое (эталонное) тело и приписав ему единичную массу  $m_0$ , можно опытным путем определять массы других тел:

$$m_2 = m_0 \frac{\Delta v_2}{\Delta v_0}. \quad (2.2)$$

Существуют другие (более точные) способы сравнения масс; некоторые из них рассматривались в школьном курсе физики.

Как известно, произвольно выбранный эталон единицы массы представляет собой платиновой-иридиевый цилиндр, а единица массы называется к и л о г р а м м о м (сокращенно: кг). Вода объемом 1 л имеет массу, весьма близкую к 1 кг.

Уравнение (2.1) содержит утверждение о независимости массы от движения тела. Это экспериментальный факт, установленный на основании сравнительно медленных движений макроскопических тел (скорости не превышают нескольких километров в секунду), а также при опытах с микрочастицами (атомы, молекулы, газы, ионы, электроны) при малых скоростях.

Но при скорости электронов (или ионов), близкой к скорости света в вакууме ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с), приращение скорости оказывается меньше того, что предсказывает уравнение (2.1). Это явление получило объяснение в специальной теории относительности (см. гл. 4).

В классической физике, где отношение  $v/c$  всегда много меньше единицы, можно считать массу не зависящей от скорости.

Однако возможны случаи, когда масса тела меняется во время движения по тем или иным причинам (например, масса самолета растет из-за расхода топлива, которое находится на его борту). Нельзя упустить, что масса тела может изменяться, и ввел массу под этот приращение:

$$\bar{F}\Delta t = \Delta(m\bar{v}). \quad (2.3)$$

В этой форме уравнения можно применять и для решения задач о движении тел с меняющейся массой.

Физическую (векторную) величину  $m\bar{v}$ , характеризующую состояние тела (точки), называют *механическим импульсом*  $\bar{p}$  движущегося тела (Ньютон пользовался малоудачными терминами «количество движения»):

$$\bar{p} = m\bar{v}.$$

Импульс — одна из важнейших физических величин.

Разделив (2.3) на  $\Delta t$  и переходя к пределу, получим *атомитическое выражение второго закона в формулировке Ньютона*:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}. \quad (2.4)$$

Скорость изменения механического импульса пропорциональна действующей силе и имеет одинаковое с ней направление. Мы при этом фиксируем пропорциональности в (2.4) равным единице.

В частном случае постоянной массы возможна такая формулировка: ускорение пропорционально силе, действующей на тело (точку), обратно пропорционально массе тела и совпадает с силой по направлению:

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}. \quad (2.5)$$

Так как единицы массы и ускорения уже установлены, то из (2.5) может быть определена единица силы. За единицу силы принимается такая сила, которая материальной точке массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с<sup>2</sup>. Эта единица называется ньютоном (сокращенно: Н).

Если сила отсутствует ( $\vec{F} = 0$ ), то равно нулю и ускорение. Этот результат совпадает с первым законом, чего и следовало ожидать. Но утверждать, что первый закон является просто частным случаем второго, — значит допустить ошибку; первый закон представляет самостоятельное, весьма содержательное утверждение, обобщающее один из постулирует существование инерциальных систем отсчета, в которых (а только в них) справедлив второй закон.

Ньютона показал, что если несколько малых тел объединяются в большее, то его масса равняется сумме масс малых тел:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Это свойство массы называют *аддитивностью*. Оно верно только в рамках классической механики.

Если на тело (материальную точку) действует одновременно несколько сил  $\vec{F}_i$ , то, написав уравнение (2.4) для каждой силы и просуммировав, в соответствии с принципом суперпозиции получим:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2.6)$$

где  $\vec{F}$  — сумма всех сил,  $d\vec{p}$  — полный прирост импульса.

При этом, однако, подразумевается весьма существенное обстоятельство: предполагается, что при действии силы на тело его свойства не меняются. А это не всегда справедливо.

Пусть, например, сила  $\vec{F}_1$  создает растяжение  $\vec{x}_1$  пружины, обладающей жесткостью  $k$ :

$$\vec{F}_1 = k\vec{x}_1.$$

Другая сила создаст другое растяжение:

$$\vec{F}_2 = k\vec{x}_2.$$

Если подействовать обеими силами одновременно, то суммарная сила будет складываться векторно:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}.$$

Но для растяжений принцип суперпозиции

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x}.$$

будет справедлив лишь при условии, что жесткость пружины не изменяется, т. е. если применим закон Гука. Опыт же показывает, что этот закон верен лишь для малых деформаций, а при больших деформациях жесткость изменяется, так что действительное растяжение при действии двух сил одновременно может оказаться не подчиняющимся принципу суперпозиции:

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \neq \vec{x}.$$

Уравнения (2.4) и (2.6) называют *уравнениями движения*. Действительно, пользуясь вторым законом, можно решать задачи двух типов:

а) по заданному движению определять силы, действующие в системе. Эти задачи требуют нахождения ускорений, что обычно связано с операцией дифференцирования;

б) по заданным силам определять характеристики получающегося движения. Эти обычно более сложные задачи требуют интегрирования уравнения движения.

Так как при интегрировании появляются постоянные интегрирования, то для определенности решения, кроме уравнения движения, требуется задание начальных условий (см. также § 1.5), т. е. дополнительных сведений, зависящих от состояния системы в определенное время. Эти условия находят путем измерений, выполняемых в системе. Часто точность этих измерений определяет и точность окончательного результата.

Заметим, что второй закон Ньютона, являющийся фундаментальным физическим законом, описывается дифференциальным уравнением второго порядка (относительно координат точки). Именно поэтому третья производная от смещения по времени не имеет в динамике общего значения, и ей не уделяется никакого внимания (хотя в отдельных задачах она может понадобиться). Поэтому же в кинематике рассматривались только две производные — скорость и ускорение.

Формулировка второго закона (2.4) совпадает с формулировкой, принадлежащей Ньютону. Но современный подход к ней несколько отличается.

Мы определили массу как меру инертности тела и пришли к этому понятию, рассматривая результаты опытов и экспериментов. Ньютон же постулировал понятие массы до введения законов: «Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее». Иногда в этом определении усматривают неясность, так как не определено понятие плотности. Но, как объясняет академик С. И. Вавилов — автор превосходной биографии Ньютона, — Ньютон, будучи последовательным атомистом, считал, что макроскопические тела состоят из мельчайших частиц, что эти частицы «самоотжественны», т. е. не меняются при объединении в тела (такое представление сохранялось в науке до открытия явления радиоактивности (до конца XIX в.). Поэтому для Ньютона плотность была величиной, пропорциональной числу частиц в единице объема, а масса — пропорциональной числу частиц в теле. Естественно, что с этой точки зрения аддитивность масс (утверждение, что масса двух тел равна сумме их масс) была простым следствием атомизма Ньютона. Термин «количество вещества», принятый и в современной системе физических величин, нельзя признать удачным. Обсуждая ньютоновское определение массы, М. В. Ломоносов (1711—1765) писал, что, конечно, в двух фунтах золота количество вещества больше, чем в одном фунте золота; но трудно сказать, одинаково ли оно и одним фунтом золота и одним фунтом железа. Этим соображением Ломоносов предвосхитил современное понимание термина «количество вещества». Ныне мерой количества вещества служит *моль* (производная от него единица,

употребляемая очень часто, — килохоль). По определению масса одного киломоля равна  $M$  килограммов, где  $M$  — масса молекулы вещества в относительных единицах (относительная единица определяется из условия: масса молекулы углерода  $C$  равна 12 относительным единицам).

Из этого определения следует, что 1 моль *любого* вещества содержит *одинаковое* число молекул. Это число называют *постоянной Авогадро*  $N_A$ ; методы ее определения рассматриваются в молекулярной физике и в химии. Постоянная Авогадро равна  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ .

Итак, по современному определению одинаковые количества вещества различных химических элементов и их соединений имеют различные массы.

Второй закон Ньютона является одним из фундаментальных законов природы. Так как решение уравнения (2.6) при заданных начальных условиях справедливо для любых значений времени, как больших, так и меньших нулевого (начального) значения, то это означает, что настоящее однозначно определяется прошлым и однозначно определяет будущее (так называемый детерминизм Лапласа, бывший философской основой физики послепютоновского периода). В настоящее время мы знаем, что действительность более сложна, и получаемые решения описывают ее лишь на ограниченном отрезке времени. А в микромире уравнение (2.6) вообще неприменимо. Это замечание будет разъясняться при последующем изложении физики.

Современной физике известно (с середины 30-х годов), что масса сложных микрочастиц меньше массы составляющих их частиц; например, масса ядра атома меньше суммарной массы образующих ядро протонов и нейтронов:

$$m_A < \sum m_p + \sum m_n.$$

Одной из причин этого уменьшения является излучение, обычно сопровождающее ядерные превращения и уносящее часть недостающей массы.

Кроме того, в 1905 г. А. Эйнштейн (1879—1955) установил тесную связь между массой и энергией материальной точки (таза).

Но при макроскопических процессах изменения массы лежат далеко за пределами точности современных измерений, так что сохранение массы, впервые доказанное на опытах с химическими превращениями Ломоносовым и позже — А. Лавуазье (1743—1794), признается и теперь.

### 2.3. Третий закон Ньютона

В *третьем законе* Ньютон подчеркивает, что силы всегда суть результат взаимодействия. Третий закон гласит: силы взаимодействия, испытываемые двумя материальными точками, равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей точки.

Аналитически он может быть выражен так:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

где  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  — силы, приложенные к разным материальным точкам (рис. 2.1). Это, например, могут быть силы взаимного тяготения двух материальных точек (рис. 2.1, а), или силы притяжения при электрическом взаимодействии, если точки заряжены разноименно, или силы электрического отталкивания, если заряды материальных точек одноименные (рис. 2.1, б).

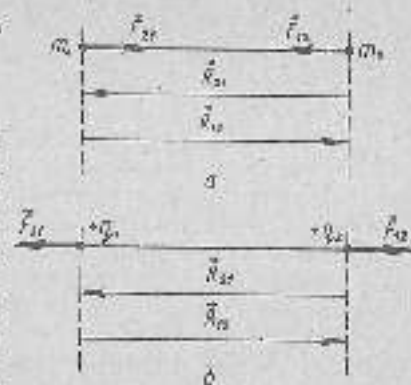


Рис. 2.1

Чтобы выяснить, как взаимодействуют два макроскопических тела, их (обозначив) разбивают на элементарные части массами  $dm_1$ ,  $dm_2$  и суммируют силы взаимодействия по всему объему тел. При этом невольно допускается, что масса распределена непрерывно, хотя хорошо известно, что тела состоят из отдельных молекул или атомов. Однако допущение непрерывности (очень удобное с математической точки зрения) применимо, так как масса молекул исчезающе мала по сравнению с массой макроскопического тела (тело массой 1 кг состоит примерно из  $10^{27}$  молекул). Конечно, Ньютон этого числа не знал, но, обладая гениальной интуицией, предугадал истину и оперировал с массой как с непрерывно меняющейся величиной, подобно длинам отрезков и промежуткам времени, создав для этого основы современного математического анализа.

Следует особо подчеркнуть, что *законы Ньютона применимы к силам любой природы*; нужно лишь знать модуль силы и ее направление. Если возникает вопрос о природе действующих сил, то он должен решаться дополнительными физическими исследованиями. Так, силы всемирного тяготения и силы взаимодействия разноименных электрических зарядов одинаково зависят от расстояния. Поэтому, изучив действие одних, можно автоматически перенести результаты на случаи действия других. Например, Земля могла бы обращаться вокруг Солнца, если бы оба тела имели противоположные электрические заряды, а гравитационное взаимодействие отсутствовало.

Возможны два вида взаимодействия тел.

1) Непосредственное взаимодействие при соприкосновении, когда одно из тел толкает или тянет другое. Впрочем, так как между телами всегда существуют промежутки межмолекулярного масштаба ( $10^{-9}$  м), то «непосредственность» является в некоторой степени условной.

2) Взаимодействие на расстоянии, когда тела удалены друг от друга на макроскопические расстояния. Ньютон возможность «действия на расстоянии» отвергал; он писал: «Предполагать... что тело может действовать на другое на любом расстоянии в пустом

пространстве, без посредства чего-либо передавая действие и силу, — это по-моему, такой абсурд, который несмыслим ни для кого, уже чего достаточно разбираться в философских предметах».

Но во времена Ньютона (и много позже, вплоть до начала XX в.) не было ничего известно о природе этого «чего-либо». Предположения о существовании всепроникающей эфир, делавшиеся физиками, оказались физически несостоятельными.

Современная физика связывает с веществом различные поля (гравитационные, электромагнитные) и считает, что взаимодействие осуществляется через них. Поля являются реальной формой существования материи (наряду с веществом). Они могут существовать и независимо от вещества. Так, сигнал, излученный радиостанцией (переменное электромагнитное поле), распространяется в пространстве и будет существовать, если даже радиостанцию разрушить.

Всякое поле, кроме индивидуальных характеристик, например напряженности, обладает импульсом и энергией. Взаимодействие поля с веществом сопровождается, в частности, обменом импульсом и энергией (см. гл. II).

Рассмотрим еще одну особенность взаимодействия. Пусть две материальные точки находятся в покое на некотором расстоянии друг от друга. Сила взаимодействия имеет при этом определенное значение. Если одна из точек переместится, то взаимодействие должно измениться. Возникает вопрос: сразу ли скажется это перемещение на второй точке или изменение взаимодействия произойдет с запозданием?

В классической механике, имевшей дело с малыми скоростями, никакого запаздывания не наблюдалось. Отсюда следовало, что взаимодействие распространяется весьма быстро (или даже мгновенно). Эта невозможность заметить запаздывание в изменении взаимодействия в XVIII в. привела физиков к представлению о мгновенном распространении взаимодействия; многие физики считали даже, что тела взаимодействуют друг с другом на расстоянии (без какого-либо физического процесса и разделяющей их среды). Выше уже было указано, что Ньютон считал такую точку зрения ошибочной.

Позже, во второй половине XIX и при изучении электродинамических явлений, оказалось, что электродинамическое взаимодействие распространяется со скоростью света (что подтверждено рядом прямых экспериментов) и с этим приходится считаться.

Скорость гравитационного взаимодействия пока не измерена. Но есть основания предполагать, что она близка к скорости света или равна ей.

Специальной теорией относительности доказывается, что скорость света есть предельная (наибольшая) возможная скорость распространения взаимодействия. Маленькие скорости вполне возможны: так, в воздухе упругие взаимодействия распространяются со скоростью всего 330 м/с, а в твердых телах эта скорость достигает нескольких километров в секунду (см. гл. 9).

Примеры приложения законов Ньютона к практическим задачам и следствия из этих фундаментальных законов рассматриваются в последующих главах книги.

## 2.4. Система физических величин, их единицы и размерности

Научая природу, физики вводят различные *физические понятия*, большинство которых может быть охарактеризовано количественно; тогда вводится понятие *физической величины*, указывается способ ее измерения и выбирается (довольно произвольно) единица этой величины. Например, понятие промежутка времени (длительности) измеряет ее единица — секунда; раньше она определялась как некоторая часть суток (длительности одного оборота Земли вокруг собственной оси). Когда выяснилось, что эта длительность не вполне постоянна, было принято более точное определение секунды.

После установления единицы времени любая длительность может быть сравнена с ней, т. е. охарактеризована определенным числовым значением. Если изменить единицу, изменится и это числовое значение, причем увеличение единицы вызовет пропорциональное уменьшение числового значения, и наоборот. Так, футбольное состязание продолжается 5400 с. Но если за единицу времени принять 1 ч, то числовое значение длительности состязания уменьшится в 3600 раз и составит 1,5 ч.

При установлении физических законов находят связи между различными физическими величинами. Так, в кинематике вводится физическая величина — скорость, определяемая отношением длины перемещения ко времени, затраченному на него:

$$\text{Скорость} \sim \frac{\text{Длина}}{\text{Время}} \quad (2.7)$$

Допустим, что единица перемещения (длины) уже выбрана: 1 м. Единицу скорости можно выбрать произвольно. Но логично (и удобно) принять коэффициент пропорциональности равным единице. Тогда получим:

$$1 \text{ скорости} = \frac{1 \text{ длины}}{1 \text{ времени}} = \frac{1 \text{ м}}{1 \text{ с}} = 1 \text{ м/с.}$$

Синциального названия (см. § 1.2) единица скорости не имеет.

Если бы были выбраны другие единицы длины и времени (например, 1 км и 1 ч), то числовое значение единицы скорости стало бы другим:

$$1 \text{ скорости} = \frac{1 \text{ км}}{1 \text{ ч}} = 0,28 \text{ м/с.}$$

Выбрав некоторые величины за *основные* (этот выбор произволен, как и определяемые числа основных величин), все остальные — вторичные или производные величины — можно выразить через



основные, пользуясь определениями или физическими законами. Так строится последовательная система физических величин и их единиц, дополняемая по мере развития науки новыми частями.

Первая система единиц была предложена во Франции в 1799 г. Ее авторы (Борда, Кондорсе, Лавуазье и Монж) предпослали ей лозунг: «На все времена, для всех народов». Это была ставшая общезвестной метрическая система.

В дальнейшем предлагались другие системы единиц. Никакая система не может удовлетворить потребности всех ученых и практиков. Так, астроном, имеющий дело с космическими расстояниями, выражает их в световых годах (расстояние, проходимое световой волной за год); специалист по элементарным частицам за единицу электрического заряда выберет заряд электрона и т. д.

У каждой системы единиц есть свои преимущества и недостатки. Нельзя ставить вопрос: «Какая из систем правильнее?» Он не имеет смысла.

В соответствии с ГОСТом в нашей стране преимущественной считается Международная система единиц (СИ).

В СИ имеется семь основных величин, но в механике нужны лишь три из них: время, длина, масса. Остальные будут выводиться по мере необходимости в других разделах курса.

В первоначальном варианте метрической системы единиц основные единицы длины и времени определялись соответственно как некоторая часть длины земного меридиана и некоторая часть суток. Но форма Земли может изменяться, да и измерения длины меридиана не особенно точны; продолжительность суток оказалась не строго постоянной. Поэтому в СИ основные единицы определяются иначе — через оптические характеристики атома, во-первых, строго неизменные в данных физических условиях и поддающиеся наиболее точному измерению (при современном состоянии измерительной техники).

Секунда равна промежутку времени, в течение которого эталон частоты (атомы в одной из разновидностей лазера) совершает 88 376 181 608 000 колебаний.

Читатель должен обратить внимание на поразительно высокую точность измерения частоты (ошибка возможна лишь в одиннадцатом десятичном знаке).

Из специальной теории относительности (см. гл. 4) известно, что скорость света в вакууме является постоянной величиной, не зависящей от условий ее измерения. Это позволяет ввести в СИ следующее определение единицы длины — метра.

Метр равен расстоянию, проходимому в вакууме красной электромагнитной волной за  $1/299\,792\,458$  долей секунды.

Таким образом, скорость света принята равной

$$c = 299\,792\,458 \text{ м/с.}$$

Третья основная единица — единица массы. Было бы логично связать ее определение с массой одной из элементарных частиц (например, стабильного протона — ядра атома водорода). Однако

такие измерения массы элементарных частиц в настоящее время точнее, чем массы макроскопического тела небольших размеров. Поэтому в СИ сохранено прежнее определение единицы массы (килограмм), приведенное в § 2.2<sup>1</sup>.

Остальные механические единицы являются производными от основных. При определении производных величин разрешается выражать их не только через основные, но и через ранее определенные производные величины. Так, например, работу можно выразить через силу и перемещение.

Кроме рассмотренных закономерностей построения системы единиц, в физике применяются еще формулы размерности.

Символическая формула, устанавливающая связь производных величин с основными (без количественной характеристики) называется формулой размерности.

Введем символы для основных величин СИ: длина —  $L$ , время —  $T$ , масса —  $M$ . Условимся в формулах размерности употреблять квадратные скобки. Тогда для некоторых уже известных нам величин формулы размерности выглядят так:

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = [L \cdot T^{-1}]$$

Обычно величину, входящую в нулевой степени, не пишут.

$$[F] = [ma] = [L \cdot T^{-2} \cdot M]$$

Очевидно, изменение масштаба единиц не сказывается на формуле размерности. Но эта формула позволяет определить, во сколько раз изменится вторичная единица, если изменить масштаб основных единиц.

Действительно, любая механическая величина может быть описана формулой

$$[x] = [L^a T^b M^c]$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не обязательно должны быть целыми числами. Если теперь изменить масштаб основных единиц соответственно в  $a$ ,  $b$ ,  $c$  раз, то единица величины  $x$ , очевидно, изменится в  $k = a^a b^b c^c$  раз. При этом числовое значение (в каком-либо конкретном случае) изменится в  $1/k$  раз.

В любом уравнении, выражающем физический закон или связывающем физические величины, размерность обеих частей обязательно должна быть одинакова. Это дает возможность контролировать справедливость устанавливаемых при физических расчетах соотношений.

Если закон связывает ранее установленные величины в новой комбинации, то приходится вводить коэффициент пропорциональности, обеспечивающий числовое равенство обеих частей уравнения в их одинаковую размерность.

<sup>1</sup> Читатель может увидеть название единицы массы «килограмм», содержащее приставку «кило» (тысяча). Эта неточность связана с историческим принципом, ранее широко известная была единица массы — грамм.

Так, квадрат периода колебаний  $T$  математического маятника определяется отношением длины маятника  $l$  к ускорению свободного падения  $g$ . Размерность здесь соблюдена. Но для получения числового соотношения необходимо ввести безразмерный множитель пропорциональности:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

Согласно закону всемирного тяготения, установленному Ньютоном, сила взаимодействия двух материальных точек пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния. Так как единицы длины, времени и массы и их размерности уже установлены, то в запись закона приходится ввести коэффициент пропорциональности — постоянную тяготения, имеющую определенное значение и размерность, а именно

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}; \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2; \quad [G] = [\text{Л}^2 \text{Т}^{-2} \text{М}^{-1}]$$

В конце книги приводится таблица важнейших величин, применяющихся в системе СИ.

Так как числовые значения физических величин иногда отличаются на много порядков, то введены множители для образования кратных и дольных величин, отличающиеся друг от друга на три порядка. Они также приводятся в конце книги.

## 2.5. Силы в механике Ньютона

Несмотря на кажущееся разнообразие взаимодействий, все они условно могут быть сведены к четырем фундаментальным взаимодействиям: гравитационному, электромагнитному, сильному (ядерному) и слабому. Последние — взаимодействия между микрочастицами, их изучают в ядерной физике. Так как в подавляющем большинстве явлений, рассматриваемых в данном курсе, атомные ядра никакими изменениям не подвергаются, то мы будем иметь дело главным образом только с парами двух типов взаимодействий. Заметим лишь, что по мере развития науки расширяется тенденция к более общему подходу в рассмотрении фундаментальных взаимодействий. Так, в свое время были объединены электрическое и магнитное взаимодействия, в последние годы создана единая теория для электромагнитного и слабого взаимодействий и ведется разработка еще более всеобъемлющих теорий.

Как уже указывалось, для решения механических задач необходимо знать модуль и направление действующих сил, а природа их не играет никакой роли (см. § 2.3).

Сам Ньютон знал только силы тяготения, упругие силы и силы трения. С современной точки зрения им соответствуют гравитационное и электромагнитное фундаментальные взаимодействия. Приведем о них лишь краткие сведения, необходимые для решения задач в механике: более детальное изучение сил и их свойств составляет в сущности предмет всего курса физики.

а) *Гравитационное взаимодействие* — взаимное притяжение всех тел природы, не зависящее от свойств промежуточной среды; широко известным примером является притяжение тел Землей.

Закон взаимодействия материальных точек массами  $m_1$  и  $m_2$  (закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном в конце XVII в.) записывается так:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{R_{12}^2} \vec{R}_{12}, \quad (2.8)$$

где постоянная тяготения  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ . Вектор  $\vec{R}_{12}$  (см. рис. 2.1, а) направлен от притягивающей точки к притягиваемой; первая цифра определяет притягивающую точку.

Этот закон можно представлять и в таком виде:

$$\vec{F}_{12} = m_2 \vec{\Gamma}_1,$$

где  $\vec{\Gamma}_1$  — величина, характеризующая силу, с которой материальная точка массой  $m_1$  притягивает единичную массу в той точке пространства, где находится точка массой  $m_2$ ; эту величину называют *ускорением* или *напряженностью поля тяготения* (понятие поля как определенной формы материи будет развито позже, в гл. 11). Вблизи поверхности Земли напряженность поля тяготения Земли есть *ускорение свободного падения* ( $\vec{\Gamma} = \vec{g}$ ), причем  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

б) *Электромагнитные взаимодействия*, возникающие между неподвижными или движущимися зарядами и связанными с ними электрическими и магнитными полями. Они обусловлены различными силами молекулярного и межмолекулярного типа. Механика Ньютона применима при макроскопических взаимодействиях и не слишком быстром движении заряженных частиц (ионов и электронов); но во микроскопическом мире механика Ньютона неприменима. В частности, взаимодействие между неподвижными электрическими зарядами (см. рис. 2.1, б; § 2.3) подчиняется закону, открытому Ш. Кулоном (1736—1806):

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon R_{12}^2} \vec{R}_{12} = q_2 \vec{E}_1,$$

где  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Ку}^2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  — электрические точечные заряды, выражаемые в кулонах (Ку);  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость однородной безграничной среды, окружающей заряды (она показывает, во сколько раз взаимодействие в данной среде уменьшается по сравнению с взаимодействием в вакууме;  $\epsilon$  — безразмерная величина);  $\vec{E}_1$  — напряженность в той точке поля, где находится заряд  $q_2$ . Ее единицей служит вольт на метр (В/м).

Электромагнитное действие на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $v$ , описывается более сложно — силой Лоренца. Она равна:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}],$$

где  $\vec{B}$  — напряженность электрического поля (она создается не

только неподвижными зарядами, но и другими причинами)  $\vec{B}$  — индукция магнитного поля, оно создается движущимися зарядами (токами) и другими причинами. Является магнитной индукцией  $\vec{e} = d\vec{A}$  (1а).

Скорости упорядоченно движущихся зарядов в твердых и жидких телах не превышают  $10^{-4} - 10^{-3}$  м/с. В газах они возрастают в десятки тысяч раз, а в вакууме могут быть доведены до скорости, близкой к скорости света; в этих последних случаях движение уже не подчиняется ньютоновской механике. Так как напряженности полей могут меняться со временем, то и электромагнитные силы могут быть функциями времени.

Электромагнитные воздействия определяют и известные уже Ньютону упругие силы, возникающие при деформации макроскопических тел. Малые деформации  $x$  подчиняются закону Гука (см. § 2.1):

$$\vec{F} = -k\vec{x},$$

где жесткость  $k$  — постоянная величина. При больших деформациях закон Гука нарушается.

Этими же взаимодействиями объясняются и силы трения между соприкасающимися покоящимися или движущимися телами, зависящие от относительной скорости последних. Эти силы рассмотрены в § 3.5 и 3.8.

Несмотря на кажущуюся простоту, законы Ньютона весьма содержательны и область их применения чрезвычайно широка.

Законам Ньютона подчинено движение небесных тел, космических кораблей, запускаемых человеком, разнообразных механизмов современной техники, заряженных частиц в слабых электрических и магнитных полях, молекул газа при не слишком больших давлении и не слишком низких температурах.

Отклонения от законов Ньютона наблюдаются в микромире, а также при очень больших скоростях, когда классическая механика замещается более общей — механикой специальной теории относительности. Но последняя не отменяет, как будет показано ниже, механику Ньютона, а выводит ее как предельный случай.

Применяя законы Ньютона к тем или иным проблемам, следует всегда помнить, что они сформулированы для инерциальных систем и применимы без оговорок только в таких системах отсчета. Подводя итог их первоначальному рассмотрению, отметим, что законы Ньютона, как и другие фундаментальные законы природы, являются обобщением опытных фактов, постулатами, которые могут быть проверены в области их применимости с достаточной для данного времени степенью точности, но не доказаны.

## 2.8. Преобразования и принцип относительности Галилея

Для описания движения материальной точки (или поступательно движущегося тела) нужно задать закон изменения со временем ее положения, скорости и ускорения.

Иногда при исследовании движений приходится переходить от одной системы отсчета (с системой координат  $OXYZ$ ) к другой (с системой координат  $O'X'Y'Z'$ ), движущемуся относительно первой с постоянной скоростью  $v$ .

Полагая (что не уменьшает общности рассмотрения), что соответствующие координатные оси обеих систем параллельны друг другу, эту скорость  $v$  направлена вдоль оси  $X$  и что отсчет времени ( $t = 0$ ) идет в тот момент, когда начала координат совпадают друг с другом, найдем соотношения, связывающие координаты  $(x, y, z$  и  $x', y', z')$  некоторой точки в обеих системах:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, & x &= x' + vt, \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= z, & z &= z'. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Эти кинематические соотношения называются преобразованиями Галилея (при их записи сделано важное физическое допущение: время в обеих системах течет одинаково, т. е.  $t' = t$ ).

Найдем теперь проекции скоростей  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}'$  и ускорений  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}'$  движущейся точки на оси координат и установим связь между ними, для упрощения записи применим часто используемые обозначения:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x} - v, & \dot{x} &= \dot{x}' + v, \\ \dot{y}' &= \dot{y}, & \dot{y} &= \dot{y}', \\ \dot{z}' &= \dot{z}, & \dot{z} &= \dot{z}'. \end{aligned}$$

Поэтому получается:

$$\ddot{x}' = \ddot{x}, \quad \ddot{y}' = \ddot{y}, \quad \ddot{z}' = \ddot{z}. \quad (2.10)$$

Далее,

$$\vec{x}' = \vec{x}, \quad \vec{y}' = \vec{y}, \quad \vec{z}' = \vec{z} \quad (\text{так как } \frac{dv}{dt} = 0).$$

Итак,

$$\vec{a}' = \vec{a}. \quad (2.11)$$

Таким образом, если известны положение и скорость точки в одной системе, то можно определить ее координаты и скорость в другой системе.

Эти величины (для данной точки) отличаются друг от друга. Однако расстояния между двумя точками  $(x_1 - x_2)$  и  $(x'_1 - x'_2)$ , как и относительные скорости этих точек  $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$  и  $(\dot{x}'_1 - \dot{x}'_2)$ , в обеих системах координат одинаковы.

Особенно важно, что ускорения точки  $\vec{a}'$  и  $\vec{a}$  в обеих системах одинаковы. Эти заключения справедливы для всех инерциальных систем. Уравнения (2.9) — (2.11) называются преобразованиями Галилея, а уравнения (2.10) — законами сложения скоростей Галилея.

Глубокий смысл преобразований Галилея будет выяснен в главе 4. Сейчас отметим лишь, что они основываются на убежденном ранее признании независимости движений.

Из преобразований Галилея следует, что ускорение данной материальной точки во всех инерциальных системах одинаково. Так как масса точки в ньютоновской механике не зависит от скорости, то и она постоянна во всех инерциальных системах отсчета. Силы в механике Ньютона могут зависеть от расстояния между взаимодействующими телами и от их относительных скоростей. Так как эти величины не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой, то силы также не меняются. Таким образом, форма второго закона Ньютона — основного закона классической механики — сохраняется в любых инерциальных системах отсчета.

Кроме того, все сказанное означает, что равномерное прямолинейное движение не является ни механическими явлениями и что никакими механическими опытами, произведенными внутри системы, невозможно обнаружить ее приближенное и равномерное движение. Иначе говоря, во всех инерциальных системах механические явления (при одинаковых начальных условиях) происходят одинаково.

Так, тело, падающее в вертикальном направлении, во всех инерциальных системах, движущихся равномерно и горизонтально, совершает одинаковое вертикальное перемещение.

Но наблюдатели, находящиеся в двух инерциальных системах, могут обнаружить, что в одной из них тело падает прямолинейно, в другой — по параболе, что объясняется различием начальных условий: для одного наблюдателя горизонтальная начальная скорость равна нулю, для другого отлична от нуля.

*Итак, основное уравнение механики не изменяется при преобразованиях Галилея, т. е. не зависит от архаичнейшего и равномерного движения системы отсчета.*

Это важное заключение, называемое *принципом относительности Галилея*, является одним из самых общих принципов классической механики. Сам Галилей, обосновавший это положение, проиллюстрировал его следующими замечательными словами: «Завяжите себя с каким-нибудь приятелем в возможно просторное помещение под палубой большого корабля и пустите туда мух, бабочек и других подобных маленьких летающих животных. Пусть будет там также большой сосуд с водой и в нем рыбки. Повесьте также на потолок ведро, из которого капля за каплей вытекает бы вода в другой сосуд с узким отверстием, находящийся внизу под ним. Пока не движется корабль, наблюдайте, как эти летающие животные с равной быстротой будут летать во все стороны комнаты. Увидите, что рыбки будут плавать безразлично во все стороны; падающие капли будут падать все в подставленный сосуд... Наблюдайте хорошенько за всем этим и постарайтесь привести в движение корабль с какой угодно быстротой. Если движение будет равно-

мерно, то вы не заметите ни малейшей перемены во всех указанных явлениях и ни по одному из них не в состоянии будете судить, движется ли корабль или стоит на месте... Капли будут падать, как прежде, в нижний сосуд, и на одна не упадет по направлению к корме, несмотря на то что, в то время как капля находится в воздухе, корабль уйдет вперед на несколько локтей. Чьбы в такой воде не с большим трудом будут плавать к одной, чем к другой стороне сосуда, и будут приходить с одинаковой ловкостью к поверхности, положенной на какое угодно место края сосуда. Паучки, бабочки и мухи будут летать до-прежнего во все стороны и не будут склоняться более около той стены, которая ближе к корме, как будто стали сдвигаться за быстрым ходом корабля, от которого они, находившись долго в воздухе, как будто разбегались. А причина одна, что все эти действия так соответствуют одно другому, заключается в том, что движение корабля обще всему находящемуся в нем — и воздуху».

В заключение сформулируем еще раз принцип относительности Галилея: законы механики выглядят одинаково во всех ИСО. В этих системах движущиеся равномерно и прямолинейно относительно ИСО, являются инерциальными. Механические явления во всех ИСО протекают одинаково (в одинаковых условиях).

## 2.7. Основные задачи динамики точек (простейшие примеры)

Задачи, решаемые в динамике, сводятся к двум основным:

1. Рассчитать движение по заданным силам (в начальных условиях).

2. По заданному движению найти вызывающие его силы.

В первом случае используются уравнения движения (второй закон Ньютона), причем действующие силы должны быть заданы в каждый момент времени. Кроме того, необходимо знание начальных условий — например значений смещения и скорости в начальный (или иной) момент времени. Интегрируя уравнение движения по времени, получают выражения для скорости и смещения в зависимости от времени.

Обычно эти решения используют для предсказания будущих движений относительно  $t=0$  (время положительное). Но с таким же успехом время можно считать и отрицательным, т. е. исследовать прошлое (когда, в обоих случаях предполагается, что никаких новых сил не появляется).

Так как силы и начальные условия могут быть заданы лишь в известной степени точно, то и полученные решения верны только с определенной точностью и с течением времени могут накапливаться значительные ошибки. Поэтому в реальных условиях (например, при космических полетах) через определенные промежутки времени истинное положение космического корабля проверяется опытным путем и эти новые данные используются как новые начальные условия для нового решения уравнений движения.

Во втором случае задается закон смещения (изменение координат точки со временем) и задача сводится к нахождению скорости и ускорений, по которым можно судить и о действующих силах.

Если изучается поступательное движение макроскопического тела, то все его точки движутся одинаково, поэтому достаточно изучить движение одной из них. Однако не следует забывать, что тело может двигаться и более сложным образом.

Примером задач первого типа служит задача о движении тела брошенного под углом к горизонту (см. § 1.5, задача 2). Там же нужно в условии задачи приписать точке массу, а вместо ускорения  $\vec{g}$  задать вертикальную силу  $\vec{F} = m\vec{g}$ .

Примером задач второго типа может быть такая: «Материальная точка, имеющая массу  $m$ , равномерно обращается по окружности радиусом  $R$  с угловой скоростью  $\omega = \cos \alpha t$ . Найти действующую силу».

Выберем оси координат, имеющие начало в центре окружности (рис. 2.2). Проецируя мгновенный вектор скорости на эти оси, находим проекция скорости:

$$\begin{aligned} v_x &= -v \sin \alpha = v \sin(\omega t + \varphi_0), \\ v_y &= v \cos \alpha = v \cos(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $v = \omega R$ , а значение угла  $\varphi_0$  определяется выбором начального отсчета времени. Если при  $t=0$  точка находилась в самом верхнем положении, то начальная фаза  $\varphi_0$  равна  $\frac{\pi}{2}$ .

Беря производные по времени, находим проекция ускорения:

$$a_x = \omega v \cos(\omega t + \varphi_0); \quad a_y = -\omega v \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Проекция силы, действующей на точку, равны:

$$F_x = ma_x; \quad F_y = ma_y.$$

Поэтому модуль силы, действующей на точку, равен:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega v = m\omega^2 R = m \frac{v^2}{R}.$$

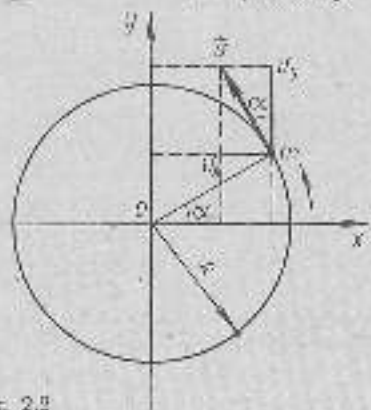


Рис. 2.2

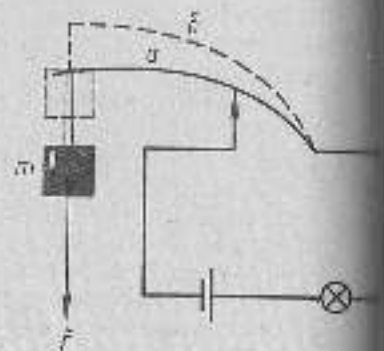


Рис. 2.3

Эта сила все время направлена к центру отсчета, поэтому ее часто называют центростремительной.

Обсудим теперь несколько демонстраций, так же показывающих законы Ньютона.

1. На массивной платформе расположена легкая закаливаемая в состоянии питания; цепь замыкается пружиной, изгиб которой приводит тело, то контакт нарушается в положении а) (рис. 2.3, пружина в положении б). Такой же результат даст изменение веса тела.

Прибор закрепляют на тросе, переброшенном через блок. Поднимая прибор, предоставляют ему возможность падать. При этом лампочка гаснет. Требуется объяснить явление.

Объяснение. Когда прибор был неподвижен относительно платформы, вес груза вызывал изгиб пружины, достаточно сильный, чтобы контакт замкнулся; лампочка горела.

Когда же тело падает (не совсем свободно, ускорение для него лишь несколько меньшим  $g$ ), то сила  $\vec{F} = m\vec{g}$ , ускорение соответственно, обеспечивая ускорение, и статически выгибает себя и пружину, но меньший, чем в первом случае. Выгиб изгиб уменьшается. Как только прибор останавливается, лампочка снова загорается.

2. На нити 1 (рис. 2.4) подвешен массивный шар (эта диск) массой  $m$  (нить растянута весом шара почти до предела прочности); к шару прикреплена такая же (или даже более прочная) нить 2.

Если сильно дернуть за конец нити 2, то она рвется. Если же дернуть ее с небольшой силой, то рвется нить 1.

Объяснение. Согласно второму закону Ньютона изменение импульса шара

$$\Delta p = \vec{F} \Delta t.$$

Изменившаяся сила  $\vec{F}$ , действуя очень малое время  $\Delta t$ , статически не изменяет импульса; шар не успевает изменить движение, а потому натяжение нити 1 практически не меняется. Нить же 2, растягиваемая большой силой  $F$ , рвется.

Когда же сила  $F$  невелика, то она не может разорвать нить 2. Длительность ее действия на шар увеличивается, его импульс растет; шар начинает двигаться вниз, увеличивая натяжение нити 1, что и приводит через некоторое время к ее разрыву.

3. На центробежную машину ставят сосуд с жидкостью (рис. 2.5, а): на раме, прикрепленной к вертикальной оси вращения сосуда, помещены маятники. При вращении сосуда маятники отклоняются от вертикали (тем больше, чем они дальше расположены от оси) и искривляются поверхности жидкости.



Рис. 2.4



$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \quad (2.16)$$

есть полный механический импульс системы, а  $\vec{F}$  — сумма внешних сил. Таким образом, из (2.16) следует, что *изменение полного импульса определяется только внешними силами*.

Полный импульс удобно представить как произведение массы системы

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

на некоторую скорость  $\vec{V}$ , определяемую из условия

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \quad (2.17)$$

Если система представляет сплошное тело, то эта скорость определяется выражением

$$\vec{V} = \frac{1}{M} \int \vec{v}_i dm_i$$

где интеграл берется по всему объему тела, имеющего массу  $M$ .

Полный импульс системы  $\vec{p}$  удобно приписать некоторой точке, имеющей массу  $M$ . Эту точку называют *центром масс* или *центром инерции*.

Координаты центра масс определяются выражениями

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \quad z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad (2.18)$$

получаемыми при интегрировании (2.18) по времени, так что радиус-вектор центра масс равен:

$$\vec{R} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M},$$

где  $\vec{r}_i$  — радиус-векторы точек системы.

Взяв производную по времени от (2.19), получим:

$$\dot{\vec{V}} = \frac{\sum m_i \dot{\vec{v}}_i}{M} = \frac{\vec{F}}{M},$$

что совпадает с (2.18). Таким образом, в выбранной системе отсчета удается описать движение системы как целого.

Следует иметь в виду, что центр масс, координаты которого определяются уравнением (2.19), может не совпадать ни с одной из материальных точек, образующих систему. Так, у однородного кольца центр масс лежит в его геометрическом центре. У тел не слишком больших размеров центр масс практически совпадает с центром тяжести. Но для больших тел, размеры которых превышают десятки километров (например, озеро Байкал), этого совпадения не будет, так как при расчете положения центра тяжести придется

учесть с непараллельностью вектора ускорения  $\vec{g}$  в различных частях объема воды озера.

В известном приближении Солнечную систему можно считать системой Солнце и планеты. Солнечной системы обращаются вокруг общего центра масс, а мы допускаем неточность, считая, что «планеты обращаются вокруг Солнца». Однако эта неточность мала, так как масса Солнца значительно (в 750 раз) превышает общую массу планет, а потому центр масс системы почти совпадает с центром масс Солнца.

У однородных симметричных тел, имеющих центр симметрии (шар, круглый диск, колесо, параллелепипед и т. д.), центр масс совпадает с ним. В более сложных случаях положение центра масс находится методами интегрального исчисления.

Если в симметричном однородном теле сделаны симметричные отверстия (например, в круглом диске радиусом  $R$  вырезан кружок радиусом  $r$ ), то удобно применить метод «отрицательной массы». Мысленно заменим отверстие двумя кружками радиусом  $r$  с массами  $m$  и  $-m$ . Центр масс получившегося большого диска (массой  $M$ ) лежит в его геометрическом центре  $O$ , который мы совместим с началом координат; поверхность диска совместим с плоскостью  $OY$ , ось  $Z$  направим за чертой, координатную ось  $X$  — по диаметру, проходящему через центры обоих кругов.

Пусть расстояние между центрами кругов равно  $x$ . Тогда, применяя уравнение (2.19), получим:

$$X(M - m) = -mx.$$

Отсюда находим (так как массы кружков пропорциональны квадратам их радиусов):

$$X = \frac{mx}{M - m} = -x \frac{r^2}{R^2 - r^2} = \frac{-x}{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1},$$

где знак минус означает, что центр масс и центр отверстия расходятся по разные стороны от начала координат.

Очевидно, ордината центра масс

$$Y = 0.$$

Если толщина диска равна  $H$ , то абсцисса центра масс

$$Z = \frac{H}{2}.$$

Из (2.18) следует, что

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.20)$$

т. е. изменение импульса (или скорости движения) центра масс определяется действием только внешних сил.

Если же система замкнута ( $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$ ), то

$$\dot{\vec{p}} = M\dot{\vec{V}} = \text{const.} \quad (2.21)$$

это означает, что внутренние силы не могут изменить скорости движения центра масс (хотя отдельные части системы движутся друг относительно друга и их импульсы изменяются).

Уравнение (2.21) называют *законом сохранения механического импульса для замкнутой системы*. В курсе теоретической физики будет доказано, что закон сохранения импульса тесно связан однородностью пространства.

Следует отметить, что если сумма проекций внешних сил вдоль осей координатных осей равна нулю, то хотя полный импульс системы и будет изменяться в соответствии с (2.20), но проекция импульса на эту ось будет сохранять свое значение. Например, при движении судов эскадры по спокойной поверхности океана проекция ее полного импульса на вертикальную ось не изменяется (равна нулю), хотя суда могут двигаться с различными скоростями в разных направлениях.

Наглядной иллюстрацией закона (2.21) является опыт с игрушечным локомотивом. Если последний подвесить на нитях (с уравновешивающей силой тяжести) и завести его механизм, то колеса начинают вращаться, но локомотив в целом относительно центра масс. Но достаточно постыгнуть локомотив на рельсы, закрепленные к горизонтальной поверхности тележки, стоящей на столе, ограничив возможность ее горизонтального движения (продержав ее рукой), как локомотив приходит в движение и ускоряется внешними силами взаимодействия его колес с рельсами (система стала незамкнутой).

Если же освободить тележку, то она качнется в сторону, но симметричную направлению движения локомотива, чем качественно подтверждаются третий закон Ньютона и закон сохранения импульса.

Простой наглядный прибор для проверки закона сохранения импульса изображен (в вертикальном осевом сечении) на рисунке 2.7.

Небольшая катушка  $K$ , питаемая постоянным током, одета на деревянный цилиндр  $H$ , имеющий с одного конца диск  $D$  и подвешена в горизонтальном положении. На продолжении ее оси подвешен керамический магнит  $M$  диаметром отверстия которого равен диаметру диска. Сначала ток в катушке отсутствует. Вся система неподвижна, так что импульс  $p = 0$ .

При создании тока в катушке возникают внутренние силы отталкивания (или притяжения), причем катушка и магнит приобретают импульсы ( $p_1$  и  $p_2$ ) противоположных знаков, но их модули пока неизвестны. Если теперь, разомкнув цепь, надеть магнит на диск так,

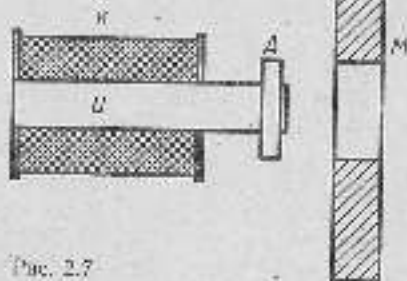


Рис. 2.7

установившись жесткая система, то при замыкании цепи никакие изменения наблюдаться не будут:

$$\dot{p}_1 + \dot{p}_2 = \vec{0}.$$

Это и можно быть: действуют только внутренние силы, не меняя момента начальной импульс системы, так как они равны по величине и противоположны по направлению.

На вертикальном подъеме ракеты скорости ее и выброшенных газов (относительно Земли) могут быть весьма значительны, но импульсы системы (ракета — газы) в отсутствие притяжения Земли изменены бы своего первоначального положения.

## § 2.9 Работа и кинетическая энергия

Запишем второй закон Ньютона в форме

$$d\vec{p} = \vec{F}_i dt. \quad (2.22)$$

Вектор  $\vec{p} = m\vec{v}$  характеризует состояние точки; его изменение (левая часть 2.22), очевидно, является характеристикой изменения состояния. Правая же часть (2.22) определяет взаимодействие точки с другими физическими телами (или материальными точками) — совершаемое в течение времени  $dt$ .

Интегрируя (2.22) за конечный промежуток времени  $(0, t)$ , находим, что результатом взаимодействия является конечный изменение механического импульса:

$$\Delta \vec{p} = \int_0^t \vec{F}_i dt. \quad (2.23)$$

Попробуем теперь подойти к рассмотрению того же вопроса с точки зрения позиций. Для этого умножим (2.22) скалярно на мгновенную скорость точки  $\vec{v}$ . Получим:

$$\vec{v} \cdot d\vec{p} = \vec{F}_i \cdot \vec{v} dt = \vec{F}_i \cdot d\vec{R}. \quad (2.24)$$

где  $d\vec{R} = \vec{v} dt$  — элементарное перемещение точки.

В классической механике масса постоянна, так что ее можно внести за знак дифференциала:

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F}_i \cdot d\vec{R} = F_i dR \cos(\vec{F}_i, d\vec{R}) = F_i dR. \quad (2.25)$$

Здесь  $F$  — проекция внешней силы на направление перемещения. Знак правой части зависит от знака косинуса; косинус положителен, если сила сонаправлена с перемещением.

Приращение вектора скорости можно представить в виде

$$d\vec{v} = d\vec{v}_\parallel + d\vec{v}_\perp,$$

где  $d\vec{v}_\parallel$  параллельно  $\vec{v}$ , а  $d\vec{v}_\perp$  перпендикулярно ему. Произведение

$$\vec{v} \cdot d\vec{v}_\perp = 0$$

может иметь любой знак. Произведение же  $\vec{v} \cdot d\vec{v}_\parallel$  равно нулю.



Физическую величину

$$dA = \vec{F}_1 \cdot d\vec{R},$$

равную скалярному произведению силы на элементарное перемещение, называют *элементарной работой силы*.

Принтегрируем (2.25):

$$m \int_{v_0}^{v_1} \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_{R_0}^{R_1} v dv = \int_{R_0}^{R_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{R}. \quad (2.26)$$

Левая часть интегрируется легко; в правой же сила может изменяться. Таким образом, из (2.26) получаем:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{R_0}^{R_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{R} = A. \quad (2.27)$$

Правая часть представляет работу силы на конечном перемещении, т. е. *работа является характеристикой процесса внешнего действия*.

Левая же часть определяет изменение *порой функции состояния* движущейся точки (тела). Функция, характеризующая состояние точки и равная

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.28)$$

где  $p$  — модуль импульса, называется *кинетической энергией*. Поэтому уравнение (2.27) можно прочитать так: *работа силы на некотором перемещении определяет изменение кинетической энергии движущейся материальной точки*:

$$A = \Delta W. \quad (2.29)$$

Значение  $A$ , как и  $\Delta W$ , может быть положительным или отрицательным. Сила, действующая в направлении перемещения, ускоряет точку и совершает положительную работу; при этом кинетическая энергия точки увеличивается.

Величины  $A$  и  $W$  отличаются по своему физическому смыслу, но имеют одинаковую размерность:

$$[A] = [W] = [FS] = [L^2T^{-2}M]. \quad (2.30)$$

Их принято выражать в одинаковых единицах. В СИ за единицу работы принят джоуль (сокращенно: Дж).

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}. \quad (2.31)$$

Если постоянная сила  $\vec{F}$  действует на прямолинейном отрезке перемещения  $\vec{R}$ , то для работы получается простое выражение

$$A = \vec{F} \cdot \vec{R}.$$

Ясно, что если на свободную точку (тело) действует только одна сила, то кинетическая энергия точки обязательно будет изменяться и работа при этом совершается.

На рисунке автомобиль, движущийся по шоссе равномерно и прямолинейно. В этом случае  $W = \text{const}$ . Но ведь двигатель, делая работу, создает силу тяги  $\vec{F}_1$ , действующую в направлении перемещения, т. е. совершающую положительную работу  $A_1$ . Не возникает ли здесь противоречия с уравнением (2.27)? Конечно, нет. Ведь в том, что, кроме силы тяги, на колеса автомобиля, взаимодействующие с полотном дороги, действует еще сила трения  $\vec{F}_2$ , тормозящая движение. Так как она направлена противоположно перемещению, то  $\alpha = 180^\circ$  и совершаемая ею работа отрицательна:  $A_2 < 0$ .

При этом так как по второму закону Ньютона  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ , т. е.  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ , то  $A_1 = -A_2$ .

Полная работа

$$A = A_1 + A_2 = 0.$$

В данном примере результатом работы сил является не изменение механических характеристик движения ( $v$ ,  $p$ ,  $W$ ), а нагревание шин и полотна дороги.

Этот пример заставляет внимательно присмотреться к особенностям результатов действия различных сил.

Отличается, что силы могут быть разбиты на два класса:

1) *консервативные силы (системы)*, результатом действия которых может быть изменение механического состояния системы (т. е. пространственных положений и скоростей ее частей);

2) *неконсервативные (диссипативные) силы*, в результате действия которых, кроме механических изменений, в системе происходят и механические изменения (например, нагревание частей системы).

Их дальнейшие свойства будут обсуждены более подробно. Если рассматривается система точек, то соотношение (2.29) можно использовать для каждой из них. Просуммировав по всем точкам, получим:

$$\sum \Delta W_i = -\sum A_i. \quad (2.32)$$

т. е. *полное изменение кинетической энергии равно полной работе сил, производимой над точками системы*.

Здесь следует отметить важную особенность работы внутренних сил в замкнутой системе: так как они не могут изменить импульса центра масс, то не изменяют и его кинетической энергии, хотя кинетическая энергия частей системы может при этом изменяться весьма значительно.

Действительно, пусть две отталкивающиеся точки в начальный момент закреплены и неподвижны относительно их центра масс (в некоторой системе отсчета). Затем их освобождают. Тогда их скорости и кинетические энергии (в этой системе отсчета) будут увеличиваться, хотя скорость центра масс останется неизменной.

*Физическая величина, определяемая работой, производимой над точкой в единицу времени*

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (2.33)$$

вызывается мощностью. Ее размерность:

$$[N] = [L^2 T^{-2} M].$$

Единица мощности в СИ называется ваттом (сокращенно Вт).

$$1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}.$$

Спокойно идущий человек развивает мощность около 50 Вт, тренирующийся спортсмен может развить кратковременную мощность до 1,5 кВт.

Следует заметить, что физическое понятие «работа» менее широко, чем общепринятое. Так, с точки зрения физики студент, изучающий книгу, или диктор телевидения, читающий «Новостную работу» не совершают.

Если тело одновременно участвует в поступательном и вращательном движении (например, колесо автомобиля движется относительно системы отсчета, связанной с шоссе и одновременно вращается), то его полная кинетическая энергия в этой системе равна:

$$W = \frac{1}{2} M V^2 + W_{\text{вр}}, \quad (2.35)$$

где  $\frac{1}{2} M V^2$  — кинетическая энергия поступательного движения центра масс в этой системе, а  $W_{\text{вр}}$  — кинетическая энергия вращательного движения колеса вокруг оси, проходящей через центр масс (см. гл. 5).

Это важное для решения задач соотношение называется *теоремой Кенига*; доказательство теоремы дается в теоретической физике. Мы воспользуемся этой теоремой, в частности, при изучении динамики твердого тела.

### § 2.10. Потенциальная энергия.

#### Закон сохранения и превращения энергии

Понятие энергии как характеристики состояния объекта является одним из основных не только в механике, но вообще в физике. Даже при изучении простейших механических движений оно сводится для несвободных тел лишь к кинетической энергии.

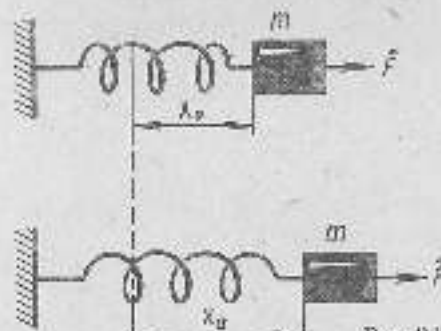
Выясним, что происходит при действии силы на несвободную точку (тело), на следующем простом примере.

Несвободная пружина с постоянной жесткостью  $k$  расположена горизонтально. Один ее конец закреплен (рис. 2.8), а к другому прикреплено тело массой  $m$  и приложена сила  $F$ , растягивающая пружину. Пусть в момент  $t=t_0$  растяжение пружины есть  $x=x_0$ , а скорость перемещения тела равна  $v_0$ . Сила упругости, развиваемая растянутой пружиной, равна  $f_0 = -kx_0$ . Так как внешняя сила продолжает действовать, то растяжение пружины увеличивается. Пусть оно достигает значения  $x_1$ .

Работу внешней силы рассмотрим ( $x_0 = x_0$ ). Вторым законом Ньютона дает:

$$F = F_0 + f = F - kx.$$

Если все векторы направлены по оси  $X$ , то в дальнейшем можно пользоваться скалярной формой закона (конечно, учитывая знаки проекции):



$$m \frac{dv}{dt} + kx = F, \quad (2.36)$$

Умножив обе части (2.36) на  $dx = v dt$  и проинтегрируем, получим полную работу, совершенную силой  $F$ :

$$A = \int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{v_0}^{v_1} m v dv + \int_{x_0}^{x_1} k x dx = \\ = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) + \frac{k}{2} (x_1^2 - x_0^2). \quad (2.37)$$

Мы видим, что в результате совершения работы не только увеличивается кинетическая энергия тела массой  $m$ , но и изменяется форма пружины, что учитывается вторым слагаемым, представляющим *прирост энергии деформации (потенциальной энергии)*.

Энергия деформации, как и кинетическая энергия тела, является функцией состояния пружины:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 + C, \quad (2.38)$$

где постоянная  $C$  определяет энергию деформации при  $x=0$ ; в данном частном примере принято, что  $C=0$ .

При надлежащем подборе внешней силы прирост кинетической энергии может быть сделан весьма малым, так что изменение энергии деформации (потенциальной энергии) будет играть основную роль.

Из приведенного примера видно, что *потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной*. Но так как при всех физических процессах важно не абсолютное значение потенциальной энергии, а ее изменение, то значение постоянной в (2.38) может быть выбрано произвольно.

Если теперь убрать силу  $F$ , то растяжение пружины начнет уменьшаться и, наконец, исчезнет. Пружина придет в первоначальное состояние ( $x=x_0$ ) и будет сжиматься дальше.

В рассмотренном примере развивавшаяся сила упругости пружины

$$\vec{f} = -kx$$

совершала отрицательную работу при растяжении и положительную — при сжатии; полная ее работа по замкнутой траектории  $(x_0, x_0)$  равна нулю:

$$A = - \int_{x_0}^{x_0} kx dx = 0.$$

Следовательно, сила упругости должна быть отнесена к классу консервативных сил.

Пример позволил выявить два свойства этой консервативной силы:

- а) она зависит только от величины деформации;
- б) ее работа по замкнутой траектории равна нулю.

Слово «потенциальная» подчеркивает зависимость энергии деформации взаимодействующих тел, а также от их взаимного расположения, и возможность получения работы за счет ее изменения.

Поясним сказанное простым примером. Пусть точка массой  $M$  скользит по наклонной плоскости без трения (рис. 2.9). На нее действует сила тяжести  $\vec{F} = M\vec{g}$ . Пусть в момент  $t=0$  точка находится в положении 1 и имеет скорость  $\vec{v}_1$ . В положении 2 ее скорость увеличится до значения  $\vec{v}_2$ , причём прирост кинетической энергии

$$\Delta W = \frac{1}{2} M (v_2^2 - v_1^2) = W_2 - W_1$$

равен работе, совершенной силой тяжести:

$$A = mg(y_1 - y_2). \quad (2.39)$$

Эта работа зависит только от ординат начальной  $(y_1)$  и конечной  $(y_2)$  точек траектории, но не от ее формы.

Если бы мы вернули точку в начальное положение, то работа силы тяжести при этом возвращении равнялась бы  $-A$ . Значит, работа силы тяжести по замкнутому контуру равна нулю и сила тяжести, как и сила упругости, является консервативной силой.

Назовем величину

$$U_1 = -Mgy_1 + C \quad (2.40)$$

потенциальной энергией *гравитации* точки массой  $M$  в точке с ординатой  $y$ . Тогда (2.39) можно представить в виде

$$A = -(U_2 - U_1) = -\Delta U.$$

Следовательно,

$$\Delta W = -\Delta U, \quad (2.41)$$

т. е. прирост кинетической энергии равен убыли потенциальной.

Из (2.41) следует:

$$U_1 + W_1 = U_2 + W_2 = E = \text{const}, \quad (2.42)$$

где  $E$  — полная механическая энергия точки. Такой же результат

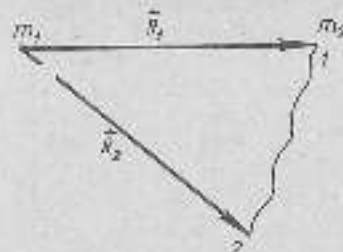
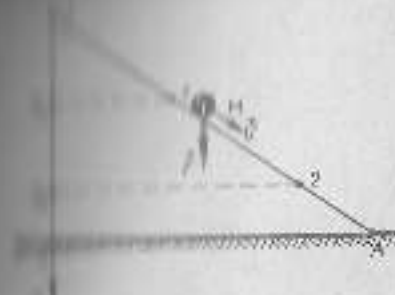


Рис. 2.10

получился бы и в примере с растянутой пружиной, если бы мы предположили, что в момент  $t=0$  она растянута на отрезок  $x_0$  и имеет нулевую скорость и в этот момент внешняя сила устраняется. Тогда, сокращаясь, пружина уменьшала бы свою потенциальную энергию, увеличивая кинетическую энергию тела массой  $m$ . Точку  $x=0$  тело пришло бы со скоростью  $\vec{v}$ , и сумма энергий  $W$  и  $U$  осталась бы постоянной (в отсутствие трения!). Результат (2.42) мы получили при условии, что сила  $F = \text{const}$ , но он остается справедливым и в случае силы взаимодействия, зависящей от расстояния.

Например, пусть две точки массами  $m_1, m_2$  притягиваются центральной силой  $\vec{F}(R)$ , зависящей только от расстояния  $R$  между ними и направленной по прямой, соединяющей эти точки (рис. 2.10). Если координат совместим с точкой массой  $m_1$ . Пусть точка массой  $m_2$  переходит по произвольному пути из положения 1 в положение 2'. Разбив траекторию на элементарные перемещения  $d\vec{R}$ , найдем элементарную работу силы  $\vec{F}$ :

$$dA = \vec{F}(R) \cdot d\vec{R}$$

Здесь  $dA$  является функцией только переменной  $\vec{R}$ .

Интегрируя по всей траектории, получим:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{R} = U(R_2) - U(R_1),$$

где  $U(R)$  — также функция только координат.

Полученное выражение доказывает, что работа силы зависит только от положения взаимодействующих точек; функция  $U(R)$ , от которой зависит от закона изменения силы  $F(R)$ , слова является потенциальной энергией точки массой  $m_2$  в соответствующих ее положениях.

Часто потенциальную энергию точки массой  $m_2$  в бесконечно удаленных точках пространства принимают равной нулю:

$$U(R) = 0 \quad R \rightarrow \infty$$

Разумеется, при этом на нее должны действовать и другие силы, не зависящие от  $R$ .

Тогда потенциальная энергия точки массой  $m_2$  на конечной точке пути от точки массой  $m_1$  будет всегда отрицательной, так как при сближении точек сила притяжения, действующая на массу  $m_2$ , совершает положительную работу, а потому потенциальная энергия уменьшается.

В этих случаях можно дать такое определение потенциальной энергии: *потенциальная энергия консервативной точки равна работе которую должны совершить силы тяготения для перемещения точки с места ее нахождения в бесконечность.*

Итак, если имеются только консервативные силы, то справедлив закон сохранения и превращения механической энергии, выражаемый формулой (2.42):

$$E = W + U = \text{const.}$$

При обращении планеты вокруг Солнца (если орбиту планеты можно считать круговой) сила тяготения все время перпендикулярна перемещению планеты, ее работа равна нулю. Поэтому планета движется, имея постоянную кинетическую и потенциальную энергию.

Но в общем случае криволинейного движения под действием сил тяготения (см. гл. II) возможно движение по эллипсу, гиперболе или параболе. В этом случае сила уже не перпендикулярна скорости и может совершать работу. В результате ее удаления от Солнца кинетическая энергия планеты увеличивается, а потенциальная — растет. При приближении к Солнцу значения энергий меняют знаки.

Так как кинетическая энергия всегда положительна, то из (2.42) можно сделать важные выводы о возможном характере движений.

Очевидно, всегда выполняется условие

$$E \geq U.$$

Если, кроме того, мы принимаем  $U(\infty) = 0$ , то при  $E > 0$  точка может удалиться в бесконечность, имея там конечную кинетическую энергию.

Если  $E = 0$ , то при  $W = 0$  получится  $U = 0$ , т. е. точка может уйти на бесконечность, где будет иметь нулевую скорость.

Наконец, если  $E < 0$ , то при  $W = 0$  получится  $U = E$ , а при  $W > 0$  получается  $U < E$ . В этом случае точка не может удалиться на бесконечное расстояние, ее движение ограничено областью значений  $U \leq E$ . При этом точка массой  $m_2$  может обращаться вокруг точки массой  $m_1$  по эллипсу или окружности (см. также гл. II).

Теперь несколько расширим рассмотрение вопроса об энергии, обсудив такую задачу. К концу вертикальной невесомой пружины (жесткость  $k$ ) подвешивают тело массой  $m$  и отпускают его. Сначала под действием силы тяжести  $\vec{F} = m\vec{g}$  тело движется ускоренно. Но при этом возникает сила упругости пружины, препятствующая движению.

При растяжении

$$x = \frac{mg}{k}$$

сила упругости обращается в нуль. Но тело имеет кинетическую энергию и поэтому продолжает двигаться вниз, однако замедленно, так как сила упругости по модулю превышает силу тяжести  $mg$ . Когда кинетическая энергия перейдет в энергию деформации пружины, тело остановится и начнет снова подниматься. Если действуют только консервативные силы (тяготения и упругости), то возникли бы незатухающие колебания, длящиеся неопределенно долго. Но на опыте оказывается, что колебания постепенно затухают и тело останавливается, причем конечное растяжение равно:

$$x = \frac{2mg}{k}.$$

При этом потенциальная энергия пружины возросла на величину, равную

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mgx.$$

Потенциальная энергия тела, притягиваемого Землей, уменьшилась на величину

$$\Delta U_2 = -mgx = -2 \Delta U_1.$$

Здесь есть кажущееся противоречие с уравнением (2.42): энергия системы уменьшилась.

В действительности, конечно, никакого противоречия нет; колебания системы прекращаются в основном вследствие действия не упругой нами силы сопротивления окружающего воздуха. Сила сопротивления, как будет показано в главе 3, зависит от относительных скоростей соприкасающихся тел (пружины, груза и воздуха). Она не является консервативной, неконсервативна и сама система.

При колебаниях, как показывает более глубокий экспериментальный и теоретический анализ процесса, увеличивается энергия беспорядочного движения частиц тела и окружающего воздуха — они благодаря трению нагреваются. Как известно, энергию беспорядочного движения рассматривают как часть внутренней энергии тела. При нагревании тела его внутренняя энергия получает прирост  $\Delta W_{int}$ .

В нашем случае только половина совершенной работы обеспечила деформацию пружины; вторая половина идет на увеличение внутренней энергии. Таким образом, вместо (2.42) следует написать более общее выражение:

$$E = W + U + W_{int} = \text{const.} \quad (2.43)$$

выражающее общий закон сохранения и превращения энергии:

в замкнутой системе сумма механической (кинетической и потенциальной) и внутренней энергии сохраняется; но энергия одного вида может переходить в энергию другого.

В связи с введением представления о внутренней энергии беспорядочного движения частиц макроскопического тела обсудим следующий вопрос: раньше мы утверждали, что увеличение скорости движения увеличивает свою кинетическую энергию. Не скажется ли на этом утверждении учет внутренней энергии?

Пусть частицы неподвижного тела массой  $m$  движутся беспорядочно со скоростями  $\vec{v}_i$ ; внутренняя энергия, обусловленная этими движениями, равна:

$$W_{in} = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2,$$

где сумма берется по всем частицам. Однако вследствие беспорядочности движения частиц тело в целом неподвижно, импульс равен нулю:

$$\vec{p}_0 = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Когда тело под действием внешних сил стало двигаться со скоростью  $\vec{V}$ , то скорости частиц стали равными  $\vec{v}_i + \vec{V}$  и полная кинетическая энергия равна:

$$W = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_i + \vec{V})^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \sum m_i + \vec{V} \sum m_i \vec{v}_i = W_{in} + \frac{1}{2} M V^2 \quad (M = \sum m_i)$$

а третье слагаемое равно нулю. Таким образом, прирост кинетической энергии был вычислен верно: приобретение телом кинетической энергии упорядоченного движения не сказывается на энергии беспорядочного движения частиц тела (конечно, при пренебрежении трением).

Если система незамкнута и неконсервативна, то ее механическая энергия ( $W + U$ ) может изменяться за счет работы внешних сил  $A_{внеш}$  и сил трения  $A_{тр}$ :

$$\Delta(W + U) = A_{внеш} + A_{тр}$$

В дальнейшем мы встретимся с другими видами энергии (электрической, магнитной, ядерной и пр.). Для замкнутой системы закон сохранения и превращения энергии всегда выполняется совершенно строго.

Теперь можно дать более точное определение понятия энергии: *энергия — общая количественная (скалярная) мера движения и взаимодействия всех видов материи. Она неуничтожима и несоизмерима, как и сама материя и ее движение. Возможны лишь превращения одних видов энергии в другие. Энергия системы является функцией состояния, а не процесса; она не зависит от того, каким образом достигнуто данное состояние.*

в XIX в., когда понятие энергии еще не вполне сформировалось, физики оперировали по преимуществу только понятием энергии и механического импульсом. Возникшая горячая дискуссия из понятий является «более правильной» мерой движения и его изменений. Теперь нам ясно, что понятие энергии не является неправильно. Обсуждение характера движения, но с разных точек зрения.

В ряде примеров мы покажем, как совместное рассмотрение понятий об изменении импульса и энергии, учитывая различные стороны механического взаимодействия, позволяет решать различные механические задачи.

Закон сохранения и превращения энергии и сохранения импульса отражают философский тезис о неуничтожимости материи и ее движения. Позже мы увидим (при ознакомлении с специальной теорией относительности), что инертные свойства материи (отраженные в понятии массы) неразрывно связаны с движением материи (отраженным в понятиях энергии и импульса).

В курсе теоретической физики будет показано, что закон сохранения энергии связан с однородностью времени.

В заключение отметим, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой импульс и энергия системы изменяются. Следовательно, из преобразований Галилея (2.10) видно, что скорости частей системы при этом изменяются, следовательно, изменяются импульс и кинетическая энергия. Потенциальная энергия, связанная только от относительного положения частей системы, не изменится, но полная энергия системы изменится. Однако в одной системе отсчета для замкнутой системы будут справедливы закон сохранения механического импульса и закон сохранения и превращения энергии.

Понятие потенциальной энергии и свойства сил, зависящих только от относительного положения взаимодействующих тел, более подробно будут рассмотрены в главе 11.

## НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНОВ МЕХАНИКИ ТОЧКИ

### 3.1. Простейшие примеры задач по механике

Законы Ньютона и законы сохранения механического импульса и энергии (в замкнутой системе) позволяют решить большое количество механических задач. Ниже на конкретных примерах показывается, как эти законы применяются.

1. *Вертикальное бросание тела.* Тело массой  $M$  брошено с начальной скоростью  $v_0$  вверх с поверхности Земли (после этого действие на него прекращается!). На какую высоту поднимется тело (точнее, центр масс тела)? С какой скоростью оно упадет на Землю?

Направим ось координат в этом направлении (рис. 3.1) и назовем потенциальную энергию системы «Земля — тело» равной нулю, когда тело находится на поверхности Земли.

Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + M g x.$$

Поэтому наибольшая высота подъема (при  $v=0$ ) равна:

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}.$$

При падении потенциальная энергия переходит в кинетическую и на поверхности ( $x=0$ ) для скорости падения будем иметь:

$$v = v_0 = \sqrt{2g x_m}.$$

Легко показать, что время подъема равно времени падения  $t_{\text{под}} = t_{\text{пад}}$ :

$$t_{\text{под}} = t_{\text{пад}} = \frac{v_0}{g}.$$

2. *Движение маятника.* При движении маятника кинетическая энергия (она наибольшая в момент прохождения маятника через положение равновесия, т. е. наивысшее положение) постепенно преобразуется в потенциальную энергию тяготения (она наибольшая в момент остановки маятника, центр масс которого находится на высоте  $x_m$ ):

$$U_m = m g x_m = W_m.$$

При  $x=0$  значение  $U$  получается:

$$U_m = \frac{m v_0^2}{2g}.$$

Интересно понимавший суть дела, поставил следующий вопрос. На нити длиной  $l$  подвешен небольшой шарик.

Можно заставить этот маятник качаться, подняв шарик на высоту  $x_m$  и предоставив затем самому себе. Если во время шарика через наивысшее положение ускорения поставить около него стерженек  $S$ , то высота подъема

шарика при гармоническом колебательном движении. Выясним, какое уравнение может происходить гармоническое колебательное движение (см. гл. 1, § 6), описываемое уравнением

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Его ускорение при гармоническом движении равно:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

для осуществления движения необходимо действие переменной силы, направленной против смещения. Значение проекции этой силы на направление ускорения на массу движущегося тела

$$F_x = m \ddot{x} = -m \omega^2 x = -kx. \quad (3.2)$$

Если сила вызывает гармонические колебания, она должна быть направлена противоположно и направлена против него. В случае маятника это есть сила упругости пружины, подчиняющаяся закону Гука.

В другом случае (см. ниже) сила, будучи пропорциональной смещению, является по своей природе силой упругости; тогда можно считать, что это «как бы упругая» (квазиупругая) сила.

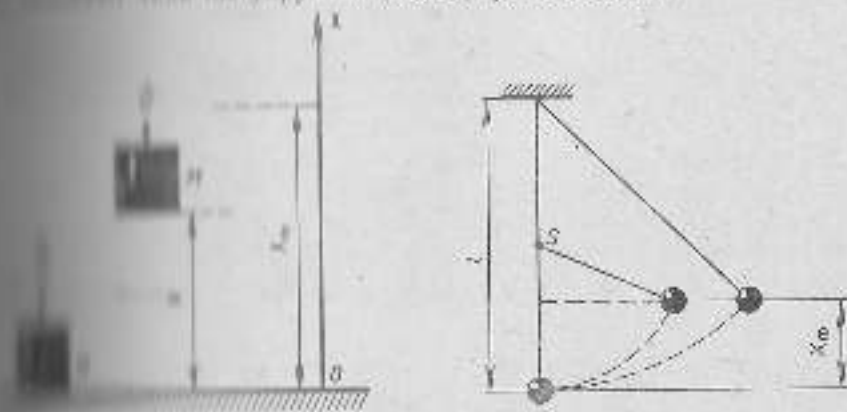


Рис. 3.2

Угловая частота колебаний (как видно из уравнения 3.2) делается массой тела и жесткостью:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Мгновенное значение кинетической энергии равно:

$$W = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 X_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

а потенциальной (для растянутой пружины):

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 X_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Так как сила упругости  $\vec{F} = -k\vec{x}$  консервативна, то полная механическая энергия постоянна:

$$E = W + U = \frac{1}{2} kX_0^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 X_0^2.$$

В процессе колебаний кинетическая энергия переходит в потенциальную и обратно. Это видно из приведенных выражений: значение кинетической энергии определяется квадратом синуса, а потенциальной — квадратом косинуса одного и того же аргумента. Частота этих преобразований энергии вдвое больше частоты колебаний самой системы.

Колебания могут быть обеспечены не только пружиной. Так, математический маятник (материальная точка массой  $m$  на длинной нерастяжимой нити длиной  $l$ ), если его вывести из положения равновесия, испытывает действие силы, возвращающей его в исходное положение (рис. 3.3) и равной

$$F = -F_s \sin \alpha = -mg \sin \alpha$$

(знак « $-$ » учитывает противоположность силы и смещения). При малых углах отклонения можно принять  $\sin \alpha \approx \alpha$ , тогда

$F = -mg\alpha$  и действующая на маятник сила оказывается пропорциональной угловому смещению (квазиупругой).

Если угол отклонения мал, то дугу, описываемую маятником, можно заметить дугой, имеющей мгновенную длину  $x = l\alpha$ . Уравнение движения примет вид:

$$ml\ddot{\alpha} = -mg\alpha.$$

Его решением будет гармоническая функция

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

причем частота колебаний, равная (см. задачу 1)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

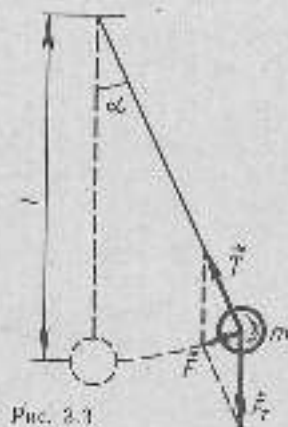


Рис. 3.3

математического маятника не зависит от массы. Постоянная  $g$  определяется начальными условиями (например, из значений  $x$  и скорости в момент  $t=0$ ).

В этом рассуждении мы пренебрегли неизбежным трением, из-за которого происходит постоянное затухание колебаний. Его влияние будет рассмотрено в главе 7.

**4. Движение обращения точки по окружности.** Для того чтобы тело обращалось вокруг некоторого центра, необходимо приложить к нему, способную сообщить ей центростремительное ускорение  $a_c$  (3.4). Это хорошо видно из опыта с пружиной, один конец которой закреплен (точка  $O$  на рис. 3.4), а на другом — надевается небольшое кольцо массой  $m$ , скользящее по твердому стержню.

В недеформированном состоянии пружина занимает не более половины длины стержня. Если, держа прибор в горизонтальном положении, привести его к поступательному движению в направлении  $OX$ , то сначала кольцо отстает от стержня, пружина растягивается и сообщает кольцо поступательное ускорение, направленное влево, после чего относительное движение стержня и кольца прекращается. При замедлении стержня пружина сжимается.

Если же вращать стержень вокруг точки  $O$  в горизонтальной плоскости, то сначала кольцо удаляется от точки  $O$ , растягивая пружину. При медленном вращении, когда сила

$$F_c = -m\omega^2 R = -kx,$$

необходимая для сообщения кольцу центростремительного ускорения, велика, пружина растягивается не очень сильно и кольцо движется вместе со стержнем, обращаясь вокруг точки  $O$ . Если увеличить угловую скорость вращения стержня, то пружина растягивается сильнее; в конце концов кольцо ударяется в твердый ограничитель  $B$ . Сжимаясь, ограничитель развивает силу упругости (силу реакции), которая, действуя на кольцо, обеспечивает (вместе с пружиной) необходимое центростремительное ускорение. А при отставании ограничителя кольцо при больших скоростях вращения сорвется с него.

**5. Циклотрон.** Магнитная составляющая силы Лоренца (см. § 2.5, б) перпендикулярна скорости заряженной частицы, поэтому при попадании последней (заряд  $e$ , масса  $m$ ) в магнитное поле с индукцией  $B_z$ , перпендикулярной первоначальной скорости  $v$ , частица начинает двигаться по окружности радиусом  $R$ , определяемым из условия

$$F = evB_z = \frac{mv^2}{R};$$

$$R = \frac{mv}{eB_z}. \quad (3.4)$$

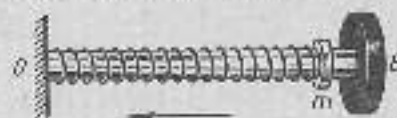


Рис. 3.4

При этом время одного оборота, равное

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{eB}$$

не зависит от скорости, так как разными скоростями отвечают разные радиусы окружностей. Эта особенность движения находит применение в некоторых типах ускорителей заряженных частиц (синхротронах).

Так как заряд электрона  $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл, масса  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  кг, скорость (в некоторых газоразрядных трубах)  $v = 10^7$  м/с, а небольшой электромагнит позволяет получить магнитное поле с индукцией  $B = 10^{-1}$  Тл, то радиус окружности описываемой электроном в этом поле, равен:

$$R \approx 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

При этом время одного оборота равно приблизительно  $3 \cdot 10^{-10}$  с.

**6. Камера Вильсона.** Одним из устройств, позволяющих изучать траектории элементарных заряженных частиц, является камера Вильсона. В ней можно наблюдать (или фотографировать) следы оставляемые частицей в виде капелек в пересыщенном паре. Камеру можно поместить в магнитное поле с индукцией  $B$ . Если частица влетит в камеру, имея скорость, нормальную к вектору индукции, то ее траектория искривится: по виду траектории можно судить о скорости частицы и знаке ее заряда, что значительно расширяет сведения о адронизированной частице. На рисунке 3.5 показаны траектории электрона и позитрона (они одновременно родились благодаря взаимодействию фотона с ядром одного из атомов металлической пластины, перегораживающей камеру Вильсона), вектор индукции  $B$  перпендикулярен плоскости чертежа.

**7. Фокусировка электронов.** Если скорость  $v$  заряженной частицы (например, электрона) составляет с направлением магнитной индукции угол  $\alpha$ , то проекция скорости на ось  $X$ , совпадающую с направлением с вектором  $B$ , равна  $v_x = v \cos \alpha$  (в этом направлении магнитная составляющая силы Лоренца отсутствует), меняться не будет. Искривление траектории зависит от проекции вектора скорости на ось  $Y$ :  $v_y = v \sin \alpha$ . Поэтому частица будет описывать винтовую линию, перемещаясь (за время одного оборота) вдоль линии индукции поля на расстояние

$$x = v_x T = 2\pi \frac{m}{e} \frac{v}{B} \cos \alpha.$$

Если в начальной точке электроны имели разные скорости, направленные под малыми углами к оси  $X$  ( $\cos \alpha \approx 1$ ), то тогда все они после каждого оборота вновь будут сходиться практически в одной точке, на этом основан один из способов фокусировки электронного пучка в вакуумных электронных приборах.

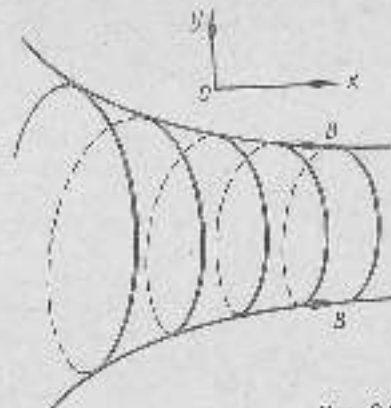


Рис. 3.6

Если магнитное поле неоднородно, то при движении электрона радиусы окружностей, последовательно описываемых электроном, уменьшаются; в области достаточно сильного поля электрон вообще не продирает (траектория показана на рис. 3.6). Достигнув области, где магнитная индукция достаточно велика, электрон возвращается обратно.

Земля представляет собой гигантский магнит. Приходящие к нам из космоса заряженные частицы, испытывая действие силы Лоренца, движутся сложным образом. В пространстве, окружающем Землю, образуются области, где заряженных частиц нет совсем, а также области их скопления. Вместе с частицами, рождающимися при ионизации молекул атмосферных газов солнечным излучением и другими причинами, космические частицы образуют вокруг Земли слой с повышенной концентрацией заряженных частиц, оказывающий существенное влияние на условия радиосвязи.

Подчеркнем в заключение, что так как магнитная составляющая силы Лоренца всегда перпендикулярна скорости, то частицы, движущиеся в магнитном поле, не меняют своей кинетической энергии, но лишь изменяют направление скорости движения; работа магнитной составляющей силы Лоренца всегда равняется нулю. Поэтому при движении в магнитном поле суммарная кинетическая энергия поступательного и вращательного движений частицы сохраняется неизменной; в неоднородном поле кинетические энергии поступательного и вращательного движений взаимно перераспределяются.

Эти выводы не относятся к частицам (ионам и электронам), движущимся в металлических (или жидких) проводниках, т. е. в обычных электрических токах и в частности, так как там процесс осложняется дополнительными взаимодействиями, например, с источниками электродвижущей силы, подключенным к электрической цепи, находящимся в постороннем магнитном поле. С этими явлениями мы встретимся при изучении электродинамики.



### § 3.2. Движение электронов в электронно-лучевой трубке

Приведем еще один пример применения законов механики к движению электронов в электронно-лучевой трубке, применяющейся основой таких приборов, как уже неоднократно упоминавшийся осциллограф, телевизор и многие другие.

Электронно-лучевая трубка осциллографа — это стеклянный баллон, имеющий узкое горло, постепенно расширяющееся к концу на который изнутри нанесен слой люминофорящий при попадании на него электронов (экран). В узкой части расположены катод *K*, являющийся источником электронов, и диодный анод с узким отверстием *A*, называемый *анодом* (рис. 3.7). Далее расположены два плоских конденсатора *C1* и *C2*, между их пластин лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Воздух из колбы выкачан, так что оставшиеся молекулы газов не препятствуют движению электронов в трубке.

Между катодом и анодом создается электростатическое поле, сообщаящее электронам, вылетающим из катода, значительную кинетическую энергию, равную:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \int_K^A e\vec{E} \cdot d\vec{x} = eU_0,$$

где  $e$ ,  $m$  и  $v_0$  — соответственно заряд, масса и скорость электронов;  $\vec{E}$  — напряженность электростатического поля в точках траектории, описываемой электронами;  $d\vec{x}$  — элементарное перемещение, направленное от катода к аноду.

Разность потенциалов между катодом и анодом

$$U_0 = \int_K^A \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

не зависит (как это будет показано в главе II) от формы траектории, поэтому все электроны приобретают одну и ту же кинетическую энергию.

Маленькое отверстие в аноде разрезает излучение электронов узкий «луч», идущий практически вдоль оси трубки. За анодом электроны движутся по инерции и попадают в конденсатор *C1*. В конденсаторе можно считать электростатическое поле перпендикулярное скорости электронов  $v_0$ . Оно практически однородно внутри конденсатора и исчезает за его пределами. Обозначим напряженность этого поля  $E_y$ . В этом поле электроны получают ускорение

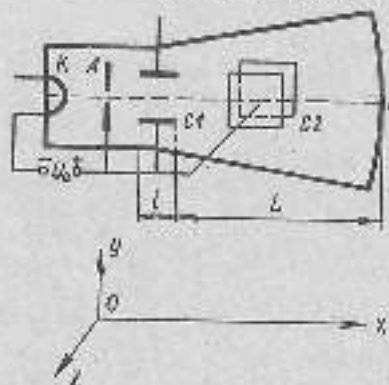


Рис. 3.7

$$a_y = \frac{e}{m} E_y,$$

а в направлении первоначальной скорости электронов  $v_0$ .

Если длина пластины равна  $l$  (рис. 3.8), то расстояние электроны пройдут за время

$$t = \frac{l}{v_0}$$



Рис. 3.8

электроны отклонятся в направлении оси *Y* на отрезок

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{l^2}{v_0^2} E_y.$$

В конце пластины скорость

$$v_y = a_y t = \frac{e}{m} \frac{l}{v_0} E_y.$$

После конденсатора электрон движется по параболе (см. § 1.5). В этих пределах прямолинейно, причем линия их движения образует с осью *X* угол, определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{l E_y}{2v_0^2}.$$

Поскольку, двигаясь к экрану, лежащему в плоскости *YOZ*, электроны значительно смещаются от отрезка

$$y_2 = l \operatorname{tg} \alpha.$$

На экране они попадут в точку, имеющую координаты

$$x = 0; y = y_1 + y_2 = \frac{l^2}{4v_0^2} \left( 1 + 2 \frac{l}{l} \right) E_y. \quad (3.6)$$

Так, отклонение по оси *Y* пропорционально напряженности  $E_y$  поля конденсатора *C1*.

В действительности длина пластины  $l$  конденсатора во много раз меньше расстояния его  $L$  от экрана, поэтому смещение  $y_2$  значительно превышает  $y_1$ .

Во втором конденсаторе напряженность поля направлена по оси *Z*, электроны испытывают отклонение  $z$ , пропорциональное  $E_z$ .

При использовании трубки в качестве осциллографа в конденсаторе *C1* создается поле напряженностью  $E_y$ , зависимость которого от времени нужно исследовать. В конденсаторе *C2* создается поле напряженностью  $E_z$ , которого медленно нарастает пропорционально времени и быстро уменьшается до нуля, как это показано на рисунке 3.9. Это поле называют полем *временной развертки сигнала*.

Если период  $T_y$  изменения напряженности  $E_y$  равен (или кратен) периоду  $T_z$  изменения напряженности  $E_z$ , то в данную точку экрана электроны будут попадать через каждый период  $T_y$ . Если

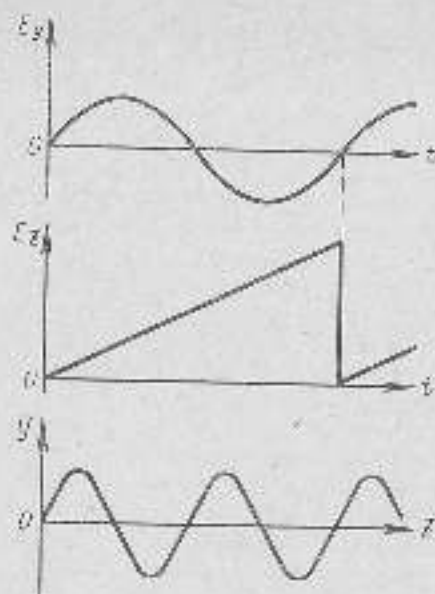


Рис. 3.3

Подобную запись механического колебания легко можно наблюдать, медленно колеблющийся маятник (ширик на занежке) кисточкой, предварительно смоченной тушью и касаясь поверхности горизонтального листа бумаги, находящегося на маятнике. Если привести маятник в колебание и одновременно перемещать лист перпендикулярно плоскости колебаний с постоянной скоростью, то кисточка запишет на листе кривую, изображающую зависимость от времени отклонения маятника от положения равновесия (от вертикали).

Хотя оба рассмотренных способа записи дают одинаковый результат, но их физическое содержание различно: маятник действительно совершает колебания, а *ни одна из* кисточек *не колеблется* (к экрану все они подлетают, двигаясь по направлению отдельных электронов последовательно под действием меньшего (по сравнению с периодом изучаемого напряжения) действительного электрического поля конденсатора в разные моменты времени, т. е. при разных фазах поля).

Мы не рассматриваем здесь усовершенствованный вариант схемы, делающий работу осциллографа весьма удобной и надежной.

Сначала осциллограф применялся только в электронике для изучения электрических процессов. Впоследствии появилось ряд устройств, позволяющих получать электрические изображения различных тем или иным безэлектрическим величинам: триггер, микрофон позволяет получить электрическое изображение пропорциональное звуковому давлению на мембрану микро-

как это обычно бывает, не слишком велик (меньше одной доли секунды), поэтому инерция светового луча не мешает глазу увидеть на экране видящую кривую.

$$y = f(x) = f(t).$$

так как смещение  $y$  пропорционально времени (см. рис. 3.3). По отклонению  $y$ , из уравнения (3.6), вычисляется  $E_z$ . Поэтому  $E_z$  — это кривая на экране осциллографа, зависящая от времени  $E_z$ , которая нас интересует. (Для кривой  $E_y$  период  $T_y = 2T_z$ ).

Эта кривая образует кучицы точек светящихся электронов, вращающихся вокруг точки экрана в различные моменты времени.

Эти части называют датчиками. Подавая напряжение на пластины конденсатора  $CI$  (в конденсаторе создается электрическое поле с напряженностью, пропорциональной напряжению), мы получаем возможность контролировать процесс осциллографа процессы безэлектрической природы. Осциллограф является практически безинерционным прибором, позволяющим последовать весьма быстропротекающим процессам.

Внутри электронно-лучевой трубки можно воздействовать электростатическим, но и магнитным полем, создавая токаны. В этом случае управление движением электронов происходит при помощи магнитной составляющей силы Лоренца. Она применяется, в частности, в трубках теле-

### 3.4. Равновесие материальной точки. Степени свободы

Если точка свободная покоящаяся в некоторой ИСО материальной не изменяла состояния покоя, согласно второму закону Ньютона необходимо и достаточно, чтобы суммарная действующая на нее сила равнялась нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (3.7)$$

Это векторное уравнение равносильно трем скалярным, требующим, чтобы сумма проекций вектора силы на оси координат была равна нулю:

$$\sum_i F_{ix} = 0; \quad \sum_i F_{iy} = 0; \quad \sum_i F_{iz} = 0. \quad (3.8)$$

Мы говорим, что свободная точка имеет три степени свободы, т. е. для определения ее положения достаточно трех независимых координат, соответственно и число условий равновесия равно трем.

Для твердого тела конечных размеров требование (3.7) не только необходимо, но оно уже недостаточно, так как при выборе центра масс возможно вращение тела вокруг центра масс относительно трех независимых вращений вокруг взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс. Поэтому, помимо трех условий равновесия (3.8), необходимо задать еще три дополнительных условия (3.9). Таким образом, *твердое тело имеет шесть степеней свободы*.

Если не идеально твердое (может деформироваться), то число степеней свободы еще увеличивается, так как части тела могут двигаться друг относительно друга. Если движение тела ограничивается, например оно может двигаться только поступательно по плоскости, то число степеней свободы уменьшается.

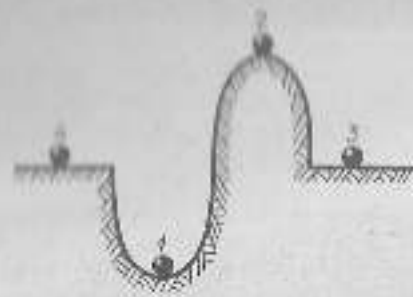


Рис. 3.10

Одна степень свободы присуща и твердому телу, способному вращаться вокруг неподвижной оси, так как его положение характеризуется углом поворота из начального состояния.

Во всех рассмотренных случаях число условий равновесия тела равно числу его степеней свободы.

На практике часто важно знать, является ли состояние покоя (равновесие) точки устойчивым или нет, т. е. вернется ли точка в положение равновесия при любом малом отклонении от него.

На рисунке 3.10 показаны четыре положения материальной точки, лежащей на твердой поверхности и притягивающейся к Земле.

Положение 1 (точка находится на дне ямки, в самом низком из возможных положений) соответствует *устойчивому равновесию*. Действительно, при любом смещении ее по поверхности в любом направлении она окажется выше дна ямки и сила тяжести вернет точку в начальное положение. Заметим, что в самом нижнем положении потенциальная энергия точки наименьшая.

Положение 2 (точка находится на узком, самом высоком участке горки) соответствует *неустойчивому равновесию*, так как при любом малом перемещении по поверхности она скатится вниз, т. е. еще дальше отойдет от первоначального положения, отвечающего наибольшей потенциальной энергии. Наконец, положения 3 и 4, при которых небольшое перемещение по поверхности не изменяет потенциальной энергии, соответствуют *безразличному равновесию*; смещенная из этих положений точка остается в покое в новом положении.

Так как в консервативных системах полная энергия равна сумме потенциальной и кинетической энергии, то наиболее устойчивое состояние равновесия, очевидно, возможно при нулевой кинетической энергии и минимальной потенциальной. В соответствии с рисунком 3.10, используя наглядные образы, говорят, что точка в положении 1 находится в «потенциальной яме», для выхода из которой требуется преодолеть потенциальный барьер, равный разности потенциальных энергий  $U_2 - U_1$  (чтобы перейти в положение 2) или  $U_4 - U_1$  (чтобы перейти в положение 4). Эта дополнительная энергия должна быть сообщена извне. А из положения 2 в положение 3 точка перейдет при любом внешнем воздействии. Эти представления применимы ко всем видам потенциальной энергии.

#### 3.4. Движение (поступательное) тела переменной массы

Законы механики могут быть применены к решению задачи о движении тела с переменной массой (например, ракеты).

*Ракета* — это устройство, движущееся вследствие того, что при быстром сгорании топлива внутри ракеты струя горячих газов уносит некоторый импульс, заставляя корпус ракеты перемещаться в сторону, противоположную направлению газа. При этом масса ракеты непрерывно уменьшается, что усложняет решение задачи.

Начнем с достаточно общего случая, когда систему «ракета — газы» нельзя считать изолированной от внешних воздействий (например, от притяжения к Земле).

Выберем систему координат, связанную с Землей, которую будем считать неподвижной.

Пусть мгновенное значение переменной массы ракеты равно  $M$ , скорость ее относительно Земли  $\vec{v}$ ; тогда мгновенный импульс ракеты равен:

$$\vec{p} = M\vec{v}.$$

Если на систему «ракета — газы» действует сумма внешних сил  $\vec{F}$ , то начальный импульс системы изменится на  $d\vec{p}_w$ .

Вследствие сгорания топлива из сопла ракеты вырываются газы со скоростью  $\vec{u}$  относительно ракеты. Это значит, что их скорость относительно Земли будет равна:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{u}.$$

Покидая ракету, газы за время  $dt$  уносят массу  $dM_1 > 0$  и соответственно импульс, равный

$$d\vec{p}_1 = \vec{v}_1 dM_1.$$

При этом скорость самой ракеты увеличится на  $d\vec{v}$  и изменение ее импульса составит:

$$d\vec{p}_2 = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - M\vec{v},$$

где изменение массы ракеты  $dM = -dM_1$ , так как  $dM - dM_1 = 0$ .

По второму закону Ньютона изменение суммарного импульса системы «ракета — газы» равно:

$$d\vec{p} = d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 + d\vec{p}_w = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - M\vec{v} + \vec{v}_1 dM_1 + d\vec{p}_w = \vec{F} dt.$$

Отсюда, пренебрегая бесконечно малой второго порядка  $dM dv$  и учитывая, что

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{u},$$

получим:

$$M d\vec{v} - \vec{u} dM + d\vec{p}_w = \vec{F} dt,$$

или

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dM}{dt} \vec{u} + \frac{d\vec{p}_w}{dt} = \vec{F}. \quad (3.3)$$

Это уравнение изучалось И. В. Мещерским (1831—1935) и носит его имя.

Мы знаем, что движение ракеты, кроме внешних сил  $F$ , обусловлено действием уходящих газов, которое определяется вторым слагаемым, стоящим в левой части уравнения (3.9) и имеющим размерность силы. Это слагаемое часто называют реактивной силой.

Следует помнить, что в этом уравнении скорость  $\bar{v}$  определена относительно Земли, а скорость  $\bar{u}$  — относительно ракеты, что с формальной точки зрения нехорошо. Однако для простых примеров, которые будут рассмотрены ниже, такая форма записи не пустыня и удобна. Кроме того, мы примем, что скорость  $u$  (скорость выхода газов из ракеты) постоянна.

Теперь действия внешних сил учитывать не будем, т. е. примем  $F = 0$ ,  $d\bar{p}_{\text{вн}} = 0$ .

Если начало отсчета времени совпадает с моментом зажигания топлива (начальная скорость ракеты равна нулю, а начальная масса равна  $M_0$ ), то движение ракеты будет прямолинейным; знаки векторов  $\bar{v}$  и  $d\bar{v}$  совпадают; знак вектора относительной скорости газов  $\bar{u}$  их противоположен. При этих предположениях уравнение (3.9) принимает вид:

$$M \frac{dv}{dt} = -v \frac{dM}{dt} \quad (3.10)$$

(здесь  $v$  — модуль вектора  $\bar{v}$ ).

Этот частный случай уравнения Мещерского (которое само есть следствие второго закона Ньютона) называется уравнением Циолковского. Несмотря на многочисленные упрощения, допущенные при его составлении, решение уравнения Циолковского очень поучительно.

Разделив переменные и интегрируя (3.10), получим:

$$-\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = \int_0^v \frac{1}{u} dv; \quad \frac{M}{M_0} = \exp\left(-\frac{v}{u}\right). \quad (3.11)$$

Таким образом, полезная масса  $M$  очень быстро уменьшается при увеличении конечной скорости. Так, при  $v/u$ , равном 2; 5 и 10, получается  $M/M_0$  соответственно равное 0,14;  $7 \cdot 10^{-3}$  и  $5 \cdot 10^{-5}$ .

Так как скорости  $v$ , при которых возможны космические полеты в пределах Солнечной системы (см. § 2.10 и гл. 11), должны достигать 11 км/с, а для выхода из сферы притяжения Солнца даже 16 км/с, то необходимость ступенчатых ракет (отдельные ступени освобождающиеся по мере выгорания топлива, сбрасываются с ракеты), предложенных Циолковским, совершенно очевидна.

Сопротивление воздуха, резко сказывающееся в нижних слоях атмосферы, еще ухудшает числа, приведенные выше.

Пользуясь уравнением (3.11), построим в функции аргумента  $x = \frac{v}{u} = \ln \frac{M_0}{M}$  графики следующих величин:

1) скорости ракеты относительно Земли (в долях  $u$ ):

$$v = \frac{v}{u} = x;$$

2) скорости газов относительно Земли (в долях  $u$ ):

$$v = \frac{v-u}{u} = x-1;$$

3) кинетической энергии ракеты относительно Земли (в долях  $\frac{1}{2} M_0 u^2$ ):

$$W = \frac{1}{2} M v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M_0 u^2 x^2 \exp(-x) = W.$$

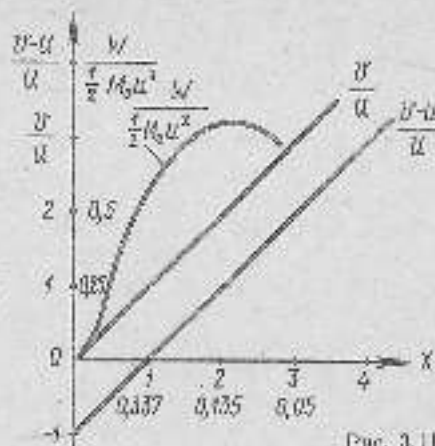


Рис. 3.11

Соответствующие графики изображены на рисунке 3.11. Как видно из рисунка, когда скорость ракеты  $v$  становится больше  $u$ , скорость газов относительно Земли делается положительной, т. е. ракета и газы движутся относительно Земли в одну и ту же сторону.

Действительно, векторы  $\bar{v}$  и  $\bar{u} = \bar{v} - \bar{v}$  при движении по прямой противоположны. Скорость газов относительно Земли равна  $v_1 = v - u$ . Она обращается в нуль при  $v = u$ . Пока скорость ракеты меньше скорости истекающих из нее газов ( $v < u$ ), то  $v_1 < 0$ ; когда  $v > u$ , то  $v_1 > 0$  — газы и ракета движутся в одном направлении. Заметим, что  $v > u$  достигается, как уже отмечалось, лишь тогда, когда масса истекающих из ракеты газов и отработанных сброшенных ступеней существенно превышает оставшуюся массу ракеты; ведь в отсутствие внешних сил положение центра масс системы «ракета — газы» не может измениться. При наличии внешних сил — силы тяжести и сопротивления воздуха — он вообще должен смещаться в Земле.

Кинетическая энергия ракеты максимальна при  $x = 2$ , т. е. когда масса ракеты составляет 0,135  $M_0$ . Этот результат может показаться странным: ведь работающий двигатель должен непрерывно ускорять ракету. Разумеется, так и происходит: скорость ракеты, как и кинетическая энергия единицы ее массы (см. 3.11)

$$W = \frac{W}{M} = \frac{1}{2} v^2 \quad (3.12)$$

непрерывно растет по мере сгорания топлива.

Так как возможности дальнейшего увеличения скорости выброса газов, образующихся при реакции горения, почти исчерпаны, то дальнейшие успехи в области космонавтики (например, полеты к звездам) требуют разработки совершенно новых типов топлива (не химических).

### 3.5. Проявление трения

До сих пор, изучая различные движения, мы почти всегда для упрощения пренебрегали сопротивлением среды, окружающей движущееся тело. Теперь следует его учесть; однако при этом не будем исследовать не физическую природу сил сопротивления, а только их проявление. Это связано с тем, что, несмотря на явное происхождение трения (оно обусловлено электромагнитным взаимодействием соприкасающихся при движении тел), строгое количественное рассмотрение сил трения является сложным и выходящим за пределы механики. Здесь будет дано только приближенное описание проявлений сил трения, которое необходимо для мысленного составления уравнения движения в задачах, где трение нельзя пренебречь.

**Жидкое трение.** Силы сопротивления, возникающие при движении твердого тела в жидкости или газе, называются силами жидкого трения. Простой опыт с поплавком, на который можно воздействовать легким толчком (или просто подуть), позволяет установить важнейшие особенности этого трения:

а) поплавок приходит в движение (постепенно!) при сколь угодно слабом, но достаточно длительном воздействии на него;

б) если прекратить воздействие, то поплавок постепенно останавливается;

в) время установления движения (и время торможения) растет при увеличении массы поплавка и зависит от его формы; от последней зависит и установившаяся скорость при постоянном воздействии.

Более тщательные опыты показывают, что при небольших скоростях (не более нескольких метров в секунду в жидкости и десятков метров в секунду в газе) сила жидкого трения пропорциональна скорости и направлена ей:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v}, \quad (3.14)$$

где  $r$  — постоянный коэффициент сопротивления, зависящий от состояния поверхности тела, его формы и природы жидкости. Размерность коэффициента сопротивления  $r$  есть:

$$[r] = [T^{-1}M].$$

Пусть некоторое тело массой  $m$  ускоряется силой  $\vec{F}$  и в начальный момент ( $t=0$ ) его скорость равна нулю. Составим уравнение движения, учитывая силу трения.

По второму закону Ньютона можно написать:

$$m \frac{dv}{dt} = -rv + F. \quad (3.14)$$

После деления на  $m$  это уравнение принимает вид:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} - \frac{F}{m} = 0 \quad (3.15)$$

(здесь  $\tau = \frac{m}{r}$  — так называемое время релаксации).

Введем новую переменную:

$$y = \frac{v}{\tau} - \frac{F}{m}; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{dy}{dt}$$

Подставив в (3.15), получим:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = 0.$$

Разделив переменные:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dt}{\tau}$$

Интегрируя за промежуток времени  $(0, t)$  и соответственно в интервале  $(y_0, y)$ , получим:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt; \quad y = y_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Так как начальная скорость была принята равной нулю, то окончательный результат будет такой:

$$v = \frac{F}{r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (3.16)$$

Таким образом, установившаяся скорость (при  $t \rightarrow \infty$ ) равна:

$$V = \frac{F}{r}.$$

Замечательно, что она не зависит от массы, последняя влияет лишь на время установления.

Если при достижении некоторой скорости  $v_1$  выключить двигатель, создававший силу  $F$ , и ввести новое начало отсчета времени:  $t=0$  в момент выключения двигателя, то уравнение движения (3.14) примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int_{v_1}^v \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt; \quad v = v_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.17)$$

Теперь можно выяснить смысл понятия «время релаксации». При  $t = \tau$  получается:

$$v = \frac{v_1}{e} = 0,37v_1.$$

т. е. скорость уменьшается в  $e = 2,7$  раза.

На рисунках 3.12 и 3.13 показаны графики уравнений (3.16) и (3.17). Особо кривых указаны их параметры.

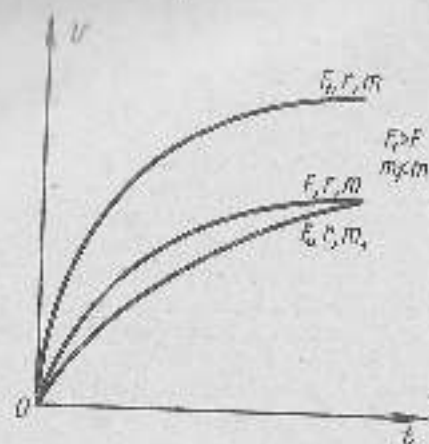


Рис. 3.12

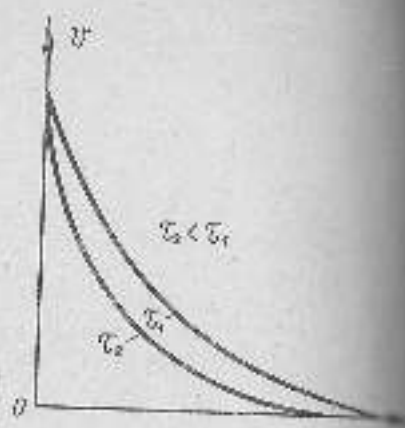


Рис. 3.13

Расчет коэффициента сопротивления сложен. Для шара радиуса  $r$  он был найден Стоксом:

$$r = 6\eta v_r$$

где  $\eta$  — вязкость среды, окружающей шар. У воды при  $20^\circ\text{C}$   $\eta = 10^{-3}$  кг/(м·с). Для глицерина при  $20^\circ\text{C}$   $\eta = 0,85$  кг/(м·с) при  $30^\circ\text{C}$   $\eta = 0,35$  кг/(м·с); для воздуха при  $20^\circ\text{C}$   $\eta = 2 \cdot 10^{-4}$  кг/(м·с).

У жидкостей вязкость с увеличением температуры уменьшается (вспомните плавление нагретого масла), а у газов — растет. Это свидетельствует о различном характере молекулярного движения в жидкости и газе.

Форма тела и его ориентация по отношению к вектору скорости сильно влияют на коэффициент сопротивления. В этом легко убедиться, делая попытку листу бумаги падать (под действием притяжения Земли) при разных его положениях и формах: 1) вертикально; 2) горизонтально; 3) в виде стрелки и 4) в виде комка неправильной формы.

Вообще говоря, коэффициент сопротивления возрастает при увеличении сечения движущегося тела, перпендикулярного вектору скорости.

На этом свойстве коэффициента сопротивления основано действие парашюта. Опытным путем найдено, что установившаяся скорость падения человека с высоты в несколько километров достигает 50—60 м/с. Конечно, приземление с такой скоростью губительно. Раскрывая парашют, человек значительно увеличивает площадь сечения, перпендикулярного вектору скорости. Благодаря этому скорость падения уменьшается до 2—4 м/с, что не представляет опасности при приземлении опытного парашютиста. Однако на раскрытие парашюта и торможение требуется известное время. Поэтому парашютисты неприменимы при прыжках с малой высоты.

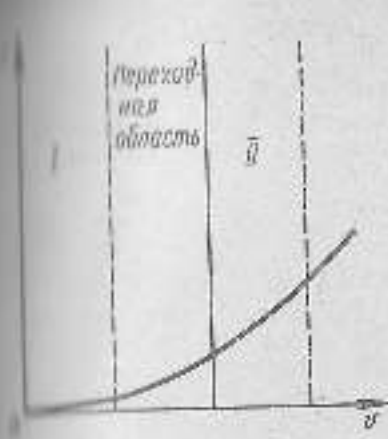


Рис. 3.14

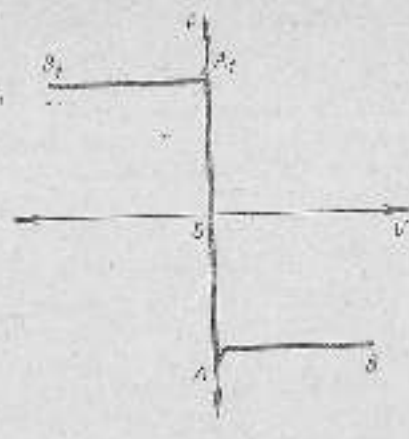


Рис. 3.15

При больших скоростях сила сопротивления растет быстрее скорости (рис. 3.14): если в области I сила сопротивления пропорциональна скорости, то в области II она зависит от квадрата скорости, в дальнейшем она возрастает еще сильнее, при скоростях, приближающихся к скорости звука в газе, законы движения претерпевают качественные изменения (они рассматриваются в «Молекулярной физике»).

**Сухое трение при поступательном движении.** Повседневный опыт учит, что для приведения в поступательное движение твердого тела, лежащего на горизонтальной поверхности другого твердого тела, нужно приложить к первому телу внешнюю силу  $\vec{F}$ , направленную горизонтально. Модуль этой силы должен превышать некоторое значение  $F_0$ . Это можно объяснить тем, что при попытке сдвинуть тело возникает (между поверхностями обоих тел) сила трения покоя:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}$ , противодействующая движению. Строго говоря, в этом случае происходит микроскопическое, ускользящее от наблюдения смещение, в результате чего и возникает сила трения. Если же  $\vec{F}$  будет по модулю чуть-чуть больше  $F_0$ , то верхнее тело начнет скользить по поверхности нижнего, причем для поддержания равномерного движения необходимо постоянное действие силы  $F_1$ . Следовательно, в при скольжении существует противодействующая движению сила трения, называемая *трением скольжения*  $F_{sc}$ . Она антипараллельна скорости.

Если еще увеличить внешнюю силу, то движение становится ускоренным. Опыт показывает, что сила трения скольжения в начале движения чуть-чуть уменьшается, а затем практически не зависит от скорости движения (при не слишком больших скоростях).

На рисунке 3.15 изображена зависимость силы сухого трения от относительной скорости движения трущихся тел. Отрезки  $OA$

и  $Q_A$  отвечают силе трения покоя, участки  $AB$  и  $A_1B_1$  — силе трения скольжения.

Г. Амонтон и Ш. Кулон показали экспериментально, что сила трения скольжения  $\vec{F}_{sk}$  пропорциональна силе, прижимающей верхнее тело (например, силе тяжести), но не зависит от площади соприкосновения тел:

$$\vec{F}_{sk} = -\mu \vec{F}_1 \frac{\vec{v}}{v} \quad (3.16)$$

где  $\vec{F}_1$  — прижимающая сила;  $\mu$  — коэффициент трения скольжения, имеющий нулевую размерность. Этот закон верен при наименьшем состоянии соприкасающихся поверхностей, что трудно осуществить на практике, поэтому он выполняется не очень точно.

Физическая картина трения довольно сложна. Здесь играет роль и непосредственное механическое взаимодействие между соприкасающимися элементарными участками обеих поверхностей и адгезионное взаимодействие других участков, не имеющих в данный момент механического контакта.

Коэффициент трения скольжения  $\mu$  легко определить: тело массой  $m$  кладут на наклонную плоскость и увеличивают угол наклона последней, пока не начнется скольжение. При этом (рис. 3.16), если соскальзывание начинается при угле наклона  $\alpha$ , получаем:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_{sk}, \quad F_2 = F' \sin \alpha = \mu F_1 = \mu F \cos \alpha; \quad \mu = \tan \alpha. \quad (3.17)$$

Для доказательства независимости силы трения скольжения от размеров соприкасающихся поверхностей иногда показывают следующий опыт: берут параллелепипед с тремя различными гранями и вышеуказанным способом измеряют коэффициенты трения, ставя параллелепипед попеременно на три разные грани; при этом коэффициент трения  $\mu$  во всех случаях должен получаться одним и тем же. Однако из-за большой зависимости  $\mu$  от состояния соприкасающихся поверхностей этот опыт требует предварительной подготовки граней (сглаживания шероховатостей, очистки от загрязнений и пр.), без чего результаты могут оказаться малоубедительными.

Не изучая сложного механизма трения, отметим, что для исключения сухого трения с успехом применяется смазка — создание жидкой пленки или отделение поверхностей друг от друга при помощи струи газа, подающейся под большим давлением («водяная подушка»).

Если тела очень долго соприкасались друг с другом, то сли-

ваются одно из них гораздо труднее, чем при кратковременном соприкосновении (именно о последнем шла речь до сих пор): здесь, помимо обычного трения, сказывается еще длительное воздействие прижимающей силы, создающее дополнительную деформацию нижнего тела (вдавливание верхнего).

Законы сухого трения применимы для твердых поверхностей. На снегу, например, дело обстоит совершенно иначе: чтобы снег не проваливался под тяжестью лыжника, требуется уменьшать давление на снежный покров (поэтому-то лыжи и имеют большую поверхность соприкосновения со снегом). Смазка лыж лужки не столько для уменьшения трения, сколько для ускорения возможного прилипания снега к лыжам.

Довольно широко распространено представление о вредности трения, так как для его преодоления приходится совершать работу. Однако это представление слишком односторонне: ведь в отсутствие трения мы не могли бы двигаться по горизонтальной поверхности, стулья не держались бы в петлях, чернила очень быстро вытирались бы из ручек и т. д.

Было бы невозможно и использование ленточной (ремешной) передачи кинетической энергии от некоторого источника энергии (двигателя с «ведущим» шкивом) к потребителю энергии — машине с «ведомым» шкивом.

### 3.8. Соударения тел и частиц

*Соударения* в физике называют *кратковременное взаимодействие сближающихся тел*, результатом которого является изменение их скоростей и состояния. На примере соударений особенно хорошо выясняется применение основных законов сохранения.

Соударения принято разделять на неупругие и абсолютно упругие; действительные соударения в той или иной степени соответствуют такой классификации.

При *неупругом соударении* взаимодействующие тела в результате соударения приобретают одинаковую скорость и движутся вместе как одно тело; таково (в первом приближении) соударение шаров из мягкой глины: при взаимодействии они деформируются, но не восстанавливают первоначальной формы. Это значит, что *внутренняя энергия шаров увеличивается за счет кинетической энергии и потенциальной энергии их взаимодействия*. Таким образом, рассматриваемая система тел неконсервативна.

Если потенциальной энергией взаимодействия соударяющихся тел можно пренебречь (например, при соударении небольших макроскопических незаряженных тел), то прирост внутренней энергии равен убыли кинетической. Поэтому законы сохранения энергии и импульса запишутся в этом случае так:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \Delta W_{int} \quad (3.20)$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V} \quad (3.21)$$

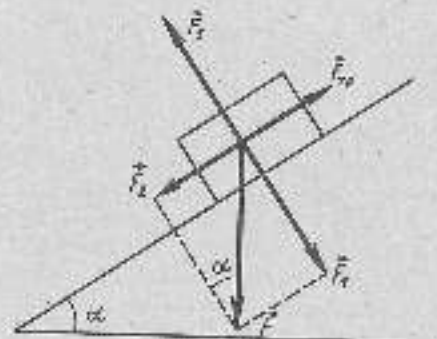


Рис. 3.16

где изменение внутренней энергии  $\Delta W_{ин}$  — положительная величина,  $m_1$  и  $m_2$  — массы тел;  $v_1$  и  $v_2$  — их скорости до соударения,  $V$  — скорость после соударения.

В уравнениях, описывающих неупругое соударение, имеется четыре неизвестные величины (три проекции скорости  $V$  и  $\Delta W_{ин}$ ); таково же и число независимых уравнений, поэтому задача о неупругом соударении разрешима в любом случае.

При этом если нам важен лишь окончательный результат соударения, то не нужно знать деталей сложного процесса взаимодействия частиц.

Рассмотрим частный случай центрального (лобового) соударения, когда скорости  $v_1$  и  $v_2$  направлены по прямой, соединяющей центры масс соударяющихся тел (или соударяющихся частиц). В этом частном случае векторное уравнение (3.21) заменяется одним скалярным:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V.$$

Отсюда скорость после соударения равна:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (3.22)$$

Из уравнения (3.20) находим:

$$\Delta W_{ин} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 > 0.$$

Изменение внутренней энергии, как и следовало ожидать, оказалось положительным.

Если скорость второго тела до соударения  $v_2 = 0$ , то

$$V = v_1 \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

и относительное изменение энергии

$$\frac{\Delta W_{ин}}{W} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Поэтому, например, при ковке металла молотом массой  $m_1$ , когда желательно кинетическую энергию молота преобразовать в энергию деформации и внутреннюю энергию металла, выгодно класть металл на массивную наковальню ( $m_1 \ll m_2$ ). Но при вбивании гвоздя требуется сообщить ему кинетическую энергию. Здесь выгодно иметь  $m_1 \gg m_2$ , т. е. относительно массивный молоток.

Одно из интересных практических применений неупругого соударения — *баллистический маятник*, служащий для определения больших скоростей, например скорости пули.

Маятник в этом случае представляет собой ящик с глиной или песком (масса его  $M$ ), подвешенный на длинном подвесе длиной  $h$  (рис. 3.17). Пуля (масса  $m$ ) влетает в маятник с горизонтальной скоростью  $\vec{v}$ , направленной к центру масс маятника, и застре-

вает в нем. Время взаимодействия пули с маятником очень мало по сравнению с периодом колебаний маятника. Поэтому система, практически не выйдя из вертикального положения, успевает приобрести скорость  $V$ , которую можно найти из закона сохранения импульса:

$$V = v \frac{m}{m + M} \quad (3.23)$$

Затем система движется вверх и на мгновение останавливается, когда центр масс поднимается на наибольшую высоту  $H$ . По закону сохранения энергии можно написать:

$$\frac{1}{2} (m + M) V^2 = (m + M) g H.$$

Учитывая (3.23), находим скорость пули:

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gH}.$$

Конечно, при этом кинетическая энергия системы «пуля — маятник»

$$W = \frac{1}{2} (m + M) V^2 = \frac{1}{2} m v^2 \frac{m}{m + M}$$

оказывается меньше кинетической энергии пули.

В ядерной физике иногда желательно использовать соударения для превращения кинетической энергии частиц в их внутреннюю энергию. Если массы частиц одинаковы, одна из них покоится (точнее обладает весьма малой скоростью  $v_2 = 0$ ), а скорость другой  $v_1 \ll c$ , так что можно еще пользоваться уравнениями (3.20) и (3.21), то при неупругом соударении получается:

$$V = 0,5v_1.$$

В этом случае прирост внутренней энергии равен:

$$\Delta W_{ин} = \frac{m_1}{4} v_1^2$$

и составляет лишь половину первоначальной кинетической энергии. Если же частицы равной массы соударяются, двигаясь навстречу друг другу с равными скоростями ( $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ ), то после соударения  $V = 0$ , прирост внутренней энергии  $\Delta W_{ин} = m_1 v_1^2$  и вся кинетическая энергия переходит во внутреннюю.

Как видно из этого расчета, переход к «встречным» пучкам частиц оказывается перспективным.

Если скорости частиц велики, то расчет производится по уравнениям специальной теории относительности (гл. 4).

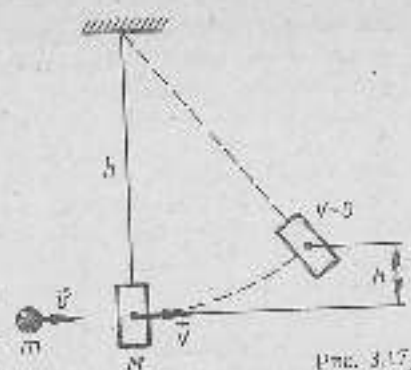


Рис. 3.17.



Перейдем к рассмотрению упругих соударений. Соударение называется упругим, если в результате его внутренняя энергия частиц не изменяется и частицы снова удаляются друг от друга.

Примером макроскопического упругого соударения может служить соударение шаров из эбеновой кости (после взаимодействия они практически полностью восстанавливают первоначальную форму). В качестве примера упругого соударения ядерных частиц можно привести соударение положительно заряженного ядра гелия ( $\alpha$ -частицы) с ядром другого атома, также несущим положительный заряд, если при взаимодействии не происходит перестройки атомного ядра. При этом непосредственного соприкосновения частиц не происходит.

При упругом соударении импульс и кинетическая энергия перераспределяются, причем обе величины сохраняются (замкнутая консервативная система). До соударения частицы, находясь на расстоянии  $R$ , обладали потенциальной энергией  $U$  взаимодействия друг с другом; после соударения, удаляясь на такое же расстояние, они снова будут иметь прежнюю потенциальную энергию. Поэтому изменения потенциальной энергии во время взаимодействия роли не играют. Следовательно, при расчетах достаточно использовать законы сохранения импульса и кинетической энергии:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (3.24)$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \quad (3.25)$$

Здесь  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  — скорости частиц после соударения. Таким образом, в этих случаях число неизвестных (шесть) превышает число уравнений (четыре) и в общем виде задача неразрешима; требуется задание дополнительных условий или ограничение общности постановки задачи.

Обсудим некоторые разрешимые частные случаи упругого соударения.

1. Пусть частица соударяется с неподвижной ( $v_2=0$ ), равной ей по массе ( $m_1=m_2=m$ ) частицей. Тогда уравнения (3.24) и (3.25) упрощаются:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \\ v_1^2 &= u_1^2 + u_2^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Полученные соотношения означают, что векторы скорости образуют прямоугольный треугольник. Следовательно, частицы разлетятся под прямым углом. Однако без каких-то дополнительных сведений невозможно указать направления скоростей обеих частиц. Очевидно, соударение не лобовое.

Предположим, что  $u_1=0$ . Тогда получим:

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_1. \quad (3.27)$$

т. е. частицы «обмениваются скоростями» (соударение лобовое). Предположим, что  $u_2=0$ , дает  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ . Это означает, что соударения не происходит.

2. Другой важный случай — лобовое соударение частиц разной массы. В этом случае векторные уравнение (3.24) заменяются одним скалярным:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Перепишем (3.28) в таком виде:

$$\begin{aligned} m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2(u_2^2 - v_2^2), \\ m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2). \end{aligned}$$

Если эти уравнения друг на друга, находим:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2.$$

Но

$$v_2 - u_2 = (u_2 - v_2) \frac{m_2}{m_1}.$$

Умножив первое уравнение на  $m_2/m_1$  и вычтя его из второго, получим:

$$u_2 = \frac{2m_1 v_2 - (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.29)$$

Складывая те же уравнения, найдем:

$$u_1 = \frac{2m_2 v_1 - (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.30)$$

Интересны следующие частные случаи.

Пусть массы равны ( $m_1 = m_2$ ). Тогда

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1.$$

Соударяющиеся частицы «обмениваются скоростями». Например, если частица соударяется с равной по массе неподвижной частицей, то она останавливается, а другая частица приобретает скорость первой.

Этот результат был уже найден раньше (уравнение 3.27) как частный случай уравнений (3.26).

В ядерных реакторах получают нейтроны (нейтральные частицы с массой, весьма близкой к массе атома водорода) со скоростями  $v$  порядка  $10^7$  м/с. Их необходимо замедлить, снизив скорость до  $u_1 = 3 \cdot 10^3$  м/с. Для этого их заставляют двигаться в среде, содержащей атомы тяжелого водорода (масса их вдвое превышает массу атома обычного водорода), — в «тяжелой воде», молекулы которой состоят из двух атомов тяжелого водорода и атома кислорода.

Начальную скорость ядер атомов тяжелого водорода (дейтронов) можно считать равной нулю. После лобового упругого соударения нейтрона с ядром тяжелого водорода скорость нейтрона составит согласно уравнению (3.30):

$$u_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_1 = \frac{1}{3} v_1.$$

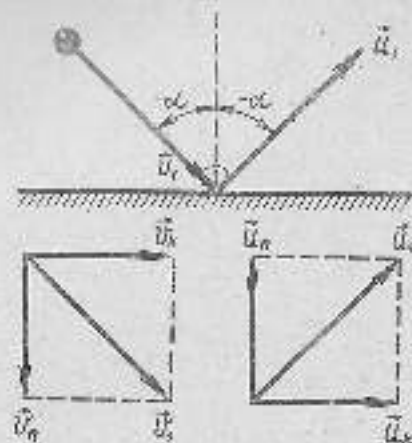


Рис. 3.18

практически необходим число соударений несколько больше указанного.

Толщина слоя тяжелой воды, в котором нейтроны будут замедлены, определяется полученным значением  $n$ .

С чисто механической точки зрения гораздо лучше было бы замедлять нейтроны в атомах водорода, где достаточно одного лобового соударения. Но есть ряд дополнительных соображений, выходящих за пределы механики и не позволяющих воспользоваться ядрами атомов водорода.

Если  $m \ll m_2$  и  $v_2 = 0$ , то

$$v_1 = -v_1, \quad v_2 = 0. \quad (3.31)$$

Такие условия создаются, например, при ударе шара о стенку. Шар, ударяющийся по нормали (стенка есть часть шара неопределенно большого радиуса, поэтому такое соударение является лобовым), отскакивает, меняя направление скорости на противоположное и сохраняя ее модуль.

Может возникнуть недоумение: если импульс шара изменяется, то стенка должна получить импульс и кинетическую энергию. У нас же оказалось, что  $v_2 = 0$ .

Суть дела заключается в том, что решение (3.31) есть предельный случай, верный для бесконечно массивной стенки. У реальной стенки (при сильном неравенстве масс) скорость оказывается исчезающе малой, как и доля кинетической энергии, отданной шаром стенке. Чем сильнее неравенство масс, тем точнее результат, описываемый уравнением (3.31).

Наконец, если вектор скорости  $\vec{v}_1$  образует с нормалью к стенке угол  $\alpha$  (рис. 3.18), то вектор следует разложить на касательную и нормальную составляющие. Очевидно, взаимодействие не может изменить касательной составляющей, но меняет знак нормальной составляющей скорости. Поэтому вектор  $\vec{v}_2$  будет наклонен к

После лобовых соударений конечная скорость будет равна:

$$v = \frac{v}{\gamma}$$

Если требуется уменьшить скорость в  $N$  раз, то необходимо число лобовых соударений составит:

$$n = \frac{\ln N}{\ln 2}$$

В нашем примере  $N = 3,3 \cdot 10^7$ ,  $n = 7$ .

Так как не все соударения лобовые, а при косых соударениях нейтрон теряет меньшую долю кинетической энергии, то

нормали под углом  $\alpha$ , т. е. шар после соударения будет двигаться на другую сторону нормали. При этом векторы  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  и нормаль будут лежать в общей плоскости (плоскость падения), определенной нормалью и вектором  $\vec{v}_1$ ; кроме того, скорости равны по модулю:  $v_1 = v_2$ .

Как известно, физика XVIII в. приписывала свету механическую корпускулярную природу; этой модели соответствовал тот факт, что свет отражается от зеркала по такому же закону, как и частица от плоской стенки. Но в дальнейшем выяснилось, что природа света иная — с современной точки зрения он представляет собой электромагнитные волны или, на другом языке, поток особых квантовых частиц, называемых фотонами, существенно отличающихся от частиц, рассматриваемых в классической механике. Этот вопрос детально будет рассмотрен в «Оптика и атомной физике». Сейчас отметим лишь, что, несмотря на иную физическую природу света, формальное выражение закона отражения при этом сохраняется.

Мы предполагали, что соударяющиеся объекты движутся поступательно и взаимодействуют только друг с другом. Поэтому полученные соотношения весьма приближенно (а иногда совсем плохо) выполняются, скажем, при игре на бильярде, где трение шаров о ступню и возможность сообщать им различные вращения весьма усложняют расчет условий движения и соударения шаров.

Кроме того, реальные макроскопические соударения обычно лишь приближенно можно отнести к упругим, так как разлетающиеся микроскопические тела обычно оказываются деформированными.

В мире атомных и ядерных соударений, когда взаимодействующие частицы разлетаются, упругие соударения получаются лишь при малых энергиях, причем внутренняя энергия взаимодействующих частиц не меняется. Но если частицы в результате взаимодействия приходят в возбужденное состояние, то соударение будет не вполне упругим и его описание окажется более сложным. Так, электрон, взаимодействующий с атомом, может ионизировать его, т. е. отдать часть энергии электрому атомной оболочки — соударение не будет ни чисто упругим, ни чисто неупругим.

## ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### 4.1. Границы применимости классической механики

Классическая механика Ньютона превосходно объясняет весьма широкий круг явлений макроскопического масштаба. На основании законов Ньютона основана почти вся современная техника. Однако уже в конце XIX в. выяснилось, что выводы механики противоречат некоторым опытным данным и возник вопрос о границах применимости механики Ньютона.

В частности, при изучении движения быстрых заряженных частиц — электронов ( $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг) — оказалось, что их движение не подчиняется законам механики. Действие электрического поля на электрон (с ничтожно малой начальной скоростью), можно сообщить ему кинетическую энергию за счет работы электрических сил.

Если свободный электрон пройдет в электрическом поле разности потенциалов  $U$ , то конечную скорость  $v$  можно вычислить из классического уравнения:

$$A = eU = W = \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad (4.1)$$

где  $A$  — работа сил электростатического поля. Отсюда

$$v = \sqrt{2U \frac{e}{m_0}}. \quad (4.2)$$

Пусть затем электрон, двигаясь по инерции, попадет на экран Э, покрытый слоем вещества, светящегося при торможении электронов; на экране появится светящаяся точка А (рис. 4.1) (в действительности опыт приводится не с единственным электроном, а с узким электронным лучком; но взаимодействие электронов друг с другом в условиях опыта несущественно).

Заставив лучок, летящий к экрану, пройти между пластинами заряженного плоского конденсатора, в котором создано электростатическое поле напряженностью  $\vec{E}$ ; на электрон подействует кулоновская сила (рис. 4.1)

$$\vec{F}_1 = -e\vec{E}.$$

Перпендикулярно плоскости чертежа можно создать магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , направленной на чертеже. Тогда электрон испытает дополнительно еще воздействие магнитной составляющей силы Лоренца

$$\vec{F}_2 = e[\dot{\vec{r}}, \vec{B}].$$

При этом след пучка как-то сместится по экрану трубки. Но можно подобрать условия опыта так, чтобы силы стали равными по модулю и антипараллельными:

$$eE = evB. \quad (4.3)$$

Тогда след пучка вернется в точку А. Из уравнения (4.3) можно найти скорость электрона

$$v = \frac{E}{B}.$$

Так как  $E$  и  $B$  поддаются измерению, и сравнить с теоретическим значением (4.2).

На рисунке 4.2 приведены результаты подобных опытов, проведенных впервые в самом начале XX в. Квадрат расчетной скорости  $v^2$  в функции  $U$  представляется наклонной прямой линией 1. Графиком квадрата истинной скорости является кривая 2; сопоставление графиков показывает, что при малых скоростях механика Ньютона хорошо отвечает опытам; но при скоростях, приближающихся к скорости света в вакууме, действительная скорость растет гораздо медленнее расчетной и не превышает скорости света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Расхождение теории с опытом можно было приписать трем причинам:

- уменьшению заряда электрона;
- увеличению массы электрона;
- неприложимости механики Ньютона к столь быстрым движениям.

Множество специальных экспериментов и опытных данных свидетельствует о неизменности заряда. Один из самых убедительных аргументов: если бы заряд зависел от скорости, то атомы не могли бы быть нейтральными, так как электроны движутся относительно ядра с различными и сопоставимыми со скоростью света скоростями; но нейтральность атомов проверена с высокой точностью.

Анализируя результаты описанных здесь и других опытов (в частности, оптических, рассмотрение которых возможно только в «Оптыке»), физики начала XX в. пришли к выводу, что для

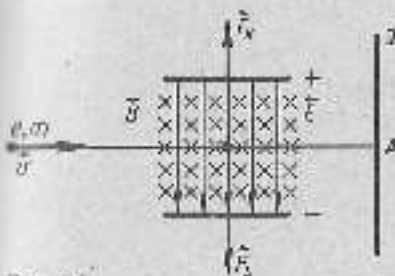


Рис. 4.1

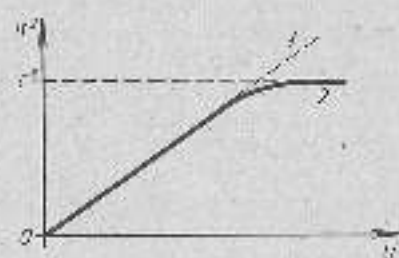


Рис. 4.2

согласования опытов с теорией следует приписать электрону импульс

$$\vec{p} = m_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.4)$$

(здесь  $\beta = \frac{v}{c}$ ), отличающийся от классического импульса  $\vec{p}_0 = m_0$

умножителем  $(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ , и истолковали этот результат как возрастание массы электрона со скоростью: это возрастание заметно только при скоростях, близких к скорости света (см. табл.):

$1 - \frac{v^2}{c^2}$	$\frac{v}{c}$	$1 - \beta^2$	$\frac{m}{m_0}$
$10^{-2}$	$1 + 1 \cdot 10^{-10}$	0,99	7,09
$10^{-3}$	$1 + 5 \cdot 10^{-8}$	0,999	10,01
0,1	1,0001	$1 - 5 \cdot 10^{-3}$	102
0,5	1,155	$1 - 5 \cdot 10^{-2}$	1000
0,9	2,294	$1 - 5 \cdot 10^{-3}$	10 000
0,99	3,202	$1 - 5 \cdot 10^{-4}$	1 000 000

Из таблицы видно, что при значениях  $\beta$ , близких к единице, введение поправки совершенно необходимо.

В технике с этой поправкой приходится считаться, например, при расчете современных ускорителей заряженных элементарных частиц и атомов.

В настоящее время, после создания специальной теории относительности, единственно правильным является утверждение, что при  $v \rightarrow c$  механика Ньютона становится неадекватной к описанию явлений. Однако по привычке физики часто говорят о «зависимости массы от скорости».

Затруднения возникли также при попытках применить механику Ньютона к вопросам распространения света. По Ньютону, скорость света, измеренная в ИСО, должна зависеть от относительной скорости движения источника и приемника. По образному выражению Эйнштейна, если «бежать навстречу свету», то его относительная скорость должна возрасти; если же «убегать от света», то она должна уменьшиться. Однако ряд очень точных опытов (они будут рассмотрены в «Оптика») показал, что определяемая в этих условиях скорость света в вакууме остается постоянной и равной  $c$ .

Для объяснения этих (и некоторых других) опытных результатов нужно было создать новую теорию, которая, объясняя эти факты, содержала бы ньютоновскую механику как предельный случай для малых скоростей ( $\beta \ll 1$ ).

Это и удалось сделать в 1905 г. А. Эйнштейну (1879—1955). Новая, релятивистская механика получила название специальной (частной) теории относительности (СТО).

<sup>1</sup> От lat. *relativus* — относительный.

Для лучшего понимания квинтэссенции идей Эйнштейна вспомним еще раз основы механики Ньютона.

#### 4.2. Механика Ньютона и принцип относительности Галилея

В основе механики Ньютона лежит представление об абсолютности однородного и изотропного пространства, а также об абсолютности однородного времени. Их свойства не зависят от присутствия вещества и происходящих физических процессов.

Для описания физических процессов необходимо выбрать систему отсчета (оси координат и часы), в которой будет производиться описание.

Механика Ньютона выделяет инерциальные системы отсчета (ИСО), движущиеся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, и утверждает их равноправие: во всех таких системах выполняются законы Ньютона и форма их записи не изменяется. Для дальнейшего важно утверждение, что никакими механическими опытами, проведенными внутри ИСО, нельзя обнаружить ее движение. Это важное утверждение называют *принципом относительности Галилея* (или механическим принципом относительности).

При исследовании движений приходится иногда переходить от одной системы отсчета (с координатной системой  $OXYZ$ ) к другой системе отсчета (с координатной системой  $O'X'Y'Z'$ ), причем вторая система отсчета движется относительно первой равномерно и прямолинейно с скоростью  $\vec{v}$ .

В § 2.6 были рассмотрены преобразования Галилея. Выяснилось, что координаты и скорости точек при этих преобразованиях изменяются, при этом действует закон сложения скоростей Галилея:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}; \quad \vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}; \quad (4.5)$$

здесь  $\vec{u}'$  и  $\vec{u}$  — скорости точки в обеих системах координат. Но расстояния между двумя точками и промежутки времени между двумя событиями оказались неизменными:

$$\Delta R = \Delta R'; \quad \Delta t = \Delta t'. \quad (4.6)$$

Ускорения точки в обеих системах отсчета одинаковы:

$$\vec{a}' = \vec{a}.$$

Так как массы в механике Ньютона не зависят от выбора системы отсчета (т. е. от движения тела), то во всех ИСО изменения импульса во времени также одинаковы:

$$d\vec{p} = \vec{F} dt = d\vec{p}' = \vec{F}' dt. \quad (4.7)$$

Следовательно, в соответствии со вторым законом во всех ИСО одинаковы и силы:

$$\vec{F} = \vec{F}'$$

Далее, в механике Ньютона предполагается, что взаимодействие передается мгновенно, с бесконечно большой скоростью. Действительно, пусть в момент  $t$  положение взаимодействующих тел изменится. Возникает вопрос: сразу ли это изменение скажется на силах, действующих на тело? Судя по записи закона, сразу. Если скорость распространения взаимодействия конечна, то должно возникнуть некоторое запаздывание. Если изменение положения произошло в момент  $t_1$ , то ускорение должно относиться к более поздней моменту  $t + \frac{R}{c}$ , где  $R$  — расстояние между взаимодействующими объектами,  $c$  — скорость передачи взаимодействия.

Представление о бесконечной скорости облегчает решение механических задач: достаточно иметь для всех систем отсчета одинаковые часы и посылать сигналы времени — они везде будут приниматься мгновенно, так как время во всех ИСО одинаково.

Бесконечно большое значение скорости распространения взаимодействия привнесло физику XVII—XIX вв., но не было (и не могло быть) проверено на опыте тогдашними средствами. Пока изучались медленные движения, это допущение не вело к противоречию с опытом.

Из абсолютности времени следует также, что два физических явления (события), одновременные в одной системе отсчета, будут таковыми же и в другой. Это очевидно для событий, происходящих в одном месте. Но для событий, происходящих в разных местах, это утверждение совсем не очевидно; оно основано на допущении бесконечной скорости распространения взаимодействия (значит, и сигналов).

### 4.3. Принцип относительности Эйнштейна

Анализируя основы механики Ньютона, А. Эйнштейн пришел к заключению, что *представление об абсолютности пространства и времени ошибочно*; например, расстояния между двумя точками или же промежутки времени между двумя событиями должны зависеть от движения наблюдателя, производящего измерение.

По Эйнштейну, всякое физическое явление (событие) должно описываться зависящими друг от друга пространственными координатами и временной координатой, определяющими место и время совершения события, причем следует учитывать скорость распространения сигнала. *Представление об абсолютности одновременности также ошибочно и должно быть пересмотрено.*

В основу своей теории, созданной в 1905 г., Эйнштейн положил два постулата:

1. Взаимодействия передаются с конечной скоростью, причем существует предельная скорость передачи взаимодействий (или сигналов), равная скорости света в вакууме  $c$ . Измеряемая во всех опытах скорость света в вакууме не зависит от относительного движения источника сигнала и их приемника и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Этот постулат — результат обобщения точных измерений скорости света в движущихся системах отсчета, выполненных в 1887 г. Мичерлихом и Лоренцем в оптических экспериментах.

2. Любое физическое явление во всех инерциальных системах отсчета (при одинаковых условиях) одинаково.

Несомненно, что Галилей утверждал то же самое, но лишь для механических явлений.

Ньютон и его последователи сохранили принцип Галилея для механических явлений. В те времена физики считали, что все явления могут быть сведены к механическому. Такое представление устоялось до конца XIX в. Когда же выяснилось, что это невозможно, то для сохранения равноправия всех ИСО оказалось необходимым принцип Галилея заменить более общим принципом, охватывающим все физические явления (события). Полагаясь на идеи Эйнштейна, чтобы сделать это обобщение.

Равноправие ИСО означает, что основные уравнения механики (и электродинамики), записанные с учетом постоянства скорости света, должны сохранять свой вид во всех инерциальных системах.

Во время создания специальной теории относительности уже были известны фундаментальные законы электродинамики, выраженные в уравнениях электромагнитного поля, написанных Максвеллом. Они не сохраняли форму при преобразованиях Галилея. Законы Ньютона в классической форме сохраняли свой вид при галилеевских преобразованиях. Следовательно, нужно было отказаться или от уравнений Максвелла, или от преобразований Галилея, или от формы законов Ньютона.

Эйнштейн пошел по второму пути. Он захотел преобразования Галилея изменить (преобразованиями Лоренца) и получил такое выражение для механического импульса. Тогда и уравнения механики, и уравнения электродинамики удовлетворяли постулатам Эйнштейна и преобразованиям Лоренца.

Особое значение Эйнштейн придавал понятию одновременности двух пространственно удаленных событий. Рассмотрим ход его рассуждений.

Прежде всего, коль скоро сигнал распространяется с конечной скоростью, уже нельзя обойтись одними часами в двух инерциальных системах отсчета. Напротив, в каждой из них должно быть поставлено множество часов, идущих одинаково точно и синхронно (т. е. показывающих в любой данный момент одно и то же время). В системе отсчета, где часы так синхронны, можно обеспечить одинаковость хода часов, измерив промежуток времени, в течение которого происходит группа событий, например излучение определенного числа световых волн атомами какого-либо газа (известно так и устанавливается в наше время эталоны времени). Все часы регулируются до тех пор, пока измеряемая ими длительность процесса не будет совпадать с длительностью, измеренной эталонными часами.

Для синхронизации отрегулируем часы Эйнштейна (предложим следующую мысленную операцию. Два наблюдателя (в системе, где часы неподвижны) располагаются в двух точках системы. Они

имеют зеркала, обращенные друг к другу и параллельные друг другу и часы. Старший наблюдатель с часами, источником световых сигналов и приспособлениями для их приема располагается на прямой соединяющей младших наблюдателей, и посылает сигналы. Они отражаются от зеркал младших наблюдателей и возвращаются к старшему, который меняет свое положение до тех пор, пока сигналы не вернутся к нему одновременно, т. е. он будет как раз посередине между младшими наблюдателями. Тогда он посылает в момент  $t$  по своим часам еще один сигнал и определяет момент его возвращения  $t + 2\Delta t$ . Значит, сигнал распространяется в одну сторону (к младшим наблюдателям) за промежуток времени  $\Delta t$ . Теперь старший наблюдатель прикалывает младшим в момент получения или еще одного сигнала установить на своих часах показания, равные  $t$ , а сам посылает сигнал в момент  $t + \Delta t$ .

Таким способом можно синхронизировать все часы в данной ИСО. Такая же операция производится с часами, неподвижными в другой ИСО. Для синхронизации часов обеих систем старшие наблюдатели располагаются в началах координат и в момент проставленного совпадения последних устанавливают на своих часах одинаковые показания (разумеется, эта операция предшествует операции, обеспечивающей общую синхронизацию всех часов).

#### 4.4. Относительность длины и длительностей.

##### Интервал

Рассмотрим теперь две неподвижные друг относительно друга ИСО (рис. 4.3); направления одних осей координат совпадают: в обеих системах имеются отрегулированные и синхронизированные часы. В начале координат штрихованной системы располагается источник света. В этой же системе движется зеркало 1 и 2, перпендикулярные оси абсцисс, и зеркала 3 и 4, перпендикулярные оси ординат. Расстояние между зеркалами равно  $h$ . В момент  $t=0$  из начала координат  $O'$  посылаются кратковременные сигналы в направлениях  $X$  и  $Y$ . Отразившись от соответствующих зеркал, они возвращаются к началу координат  $O'$  через промежуток времени

$$t' = t'' = t_0 = \frac{2h}{c}, \quad (4.8)$$

что и отмечает наблюдатель А, связанный с точкой  $O'$ . При этом он утверждает, что сигналы дости-

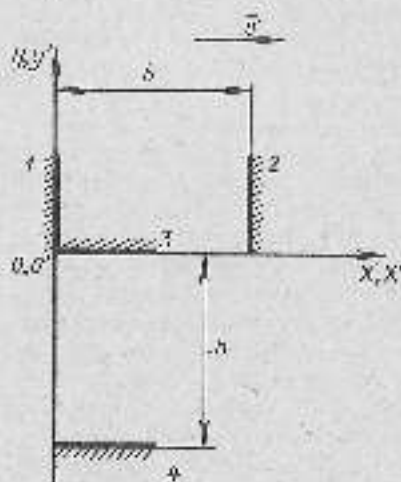


Рис. 4.3

ли зеркала 2 и 4 через промежуток времени

$$t_1 = t_2 = 0,5t_0 = \frac{h}{c}.$$

Точно же заключением сделает и наблюдатель В, связанный с началом  $O$  нештрихованной системы координат, совпадающим в момент  $t=0$  с началом  $O'$ , так как эти системы также неподвижны.

Как опишут эти же события наблюдатели, если в момент  $t=0$  штрихованная система будет двигаться относительно нештрихованной системы равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$ , параллельной оси абсцисс?

Наблюдатель А, связанный со штрихованной системой, останется при прежних утверждениях. Наблюдатель В, связанный с нештрихованной системой, находясь на позициях классической физики, должен рассуждать так: свет распространяется в «световой эфире» (гипотетическая среда, введенная физиками XVII—XIX вв., не допускавшими существования вакуума) со скоростью  $c$ . Эфир заполняет все пространство. Распространение света подчиняется закону сложения скоростей Галилея.

Следовательно, к зеркалу 2 свет движется со скоростью

$$c_2 = c - v$$

и достигает его через промежуток времени

$$t_1 = \frac{h}{c - v}.$$

После отражения его скорость становится равной  $c + v$  и для возвращения к зеркалу 1 потребуются время

$$t_2 = \frac{h}{c + v}.$$

Общее время движения сигнала есть:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2h}{c - v} + \frac{2h}{c + v} = \frac{2h}{c} \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad (4.9)$$

где

$$\beta = \frac{v}{c} < 1.$$

Поэтому с точки зрения наблюдателя В получается:

$$t_1 > t_2.$$

Что касается сигнала, идущего к зеркалу 4, то для неподвижного наблюдателя распространение происходит соответственно рисунку 4.4. Свет распространяется по гипотетическому треугольнику со сторонами  $h$  и  $vt_4$ . Поэтому свет достигнет зеркала 4 через промежуток времени, равный

$$t_4 = \frac{h}{c^2 - v^2} = \frac{h}{c} \frac{1}{1 - \beta^2}.$$

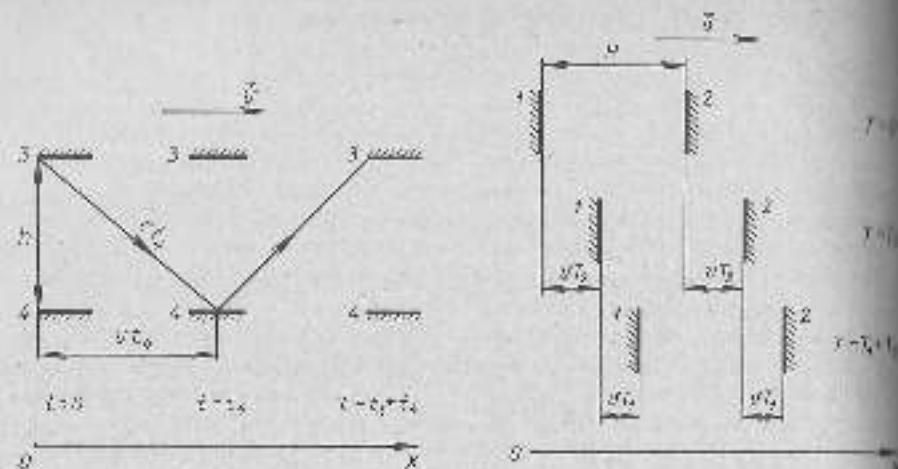


Рис. 4.4

Такое же время  $t_2$  требуется и на возвращение сигнала к зеркалу 2, так что общее время движения сигнала равно:

$$t_2 = t_1 + t_2 = \frac{2H}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4.10)$$

Итак, неподвижный наблюдатель, мыслящий классически, приходит к выводу о неодновременности возвращения сигналов:

$$t_2 \neq t_1. \quad (4.11)$$

Однако анализ весьма точных оптических опытов, повторявшихся со все большей точностью, показал, что в рассматриваемом выше опыте должно получаться

$$t_2 = t_1.$$

Таким образом, классический способ расчета, при котором предполагалось, что закон сложения скоростей Галилея и расстояния между зеркалами сохраняются при переходе от движущейся системы к неподвижной, привел к противоречию с опытом.

Объясним теперь рассмотренные выше эксперименты с точки зрения СТО, учтя первый постулат (см. § 4.3). Для отличия от ранее написанных формул будем обозначать промежутки времени прописными буквами  $T$ , а расстояния —  $H$ .

Расчет времени распространения светового сигнала вдоль оси  $X$  поясняется рисунком 4.5: пока свет дойдет до зеркала 2, оно успеет сместиться на расстояние  $vT_2$ . Поэтому путь, пройденный светом, есть:

$$cT_2 = H_2 + vT_2; \quad T_2 = \frac{H_2}{c-v}.$$

Возвращаясь к зеркалу 1, свет пройдет путь

$$cT_1 = H_1 - vT_1,$$

поэтому время его возвращения равно:

$$T_1 = \frac{H_1}{c+v}$$

А полная продолжительность процесса, когда свет распространяется вдоль оси абсцисс, равна:

$$T_2 = T_1 + T_2 = \frac{2H_2}{c} \frac{1}{1-\beta^2}. \quad (4.12)$$

Распространению света между зеркалами 3 и 4 по-прежнему соответствует рисунок 4.5 (с измененными обозначениями). Полная продолжительность этого процесса равна:

$$T_1 = \frac{2H_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4.13)$$

Но так как вдоль оси  $Y$  зеркала не движутся, то

$$H_2 = H_1 = H. \quad (4.14)$$

Согласно данным опыта продолжительность обоих процессов одинакова:

$$T_2 = T_1.$$

Поэтому должно быть:

$$H_2 = H \sqrt{1-\beta^2}, \quad (4.15)$$

т. е. если наблюдатель измеряет длину движущегося мимо него отрезка, расположенного вдоль направления движения, то он получит меньшее значение, чем при измерении длины того же неподвижного отрезка.

Подставив (4.15) в (4.12), получим значение  $T_2$ , измеренное наблюдателем  $B$  (в штрихованной системе):

$$T_2 = \frac{2H}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Сравнивая с (4.8), получаем:

$$T_2 = t_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (4.16)$$

т. е. эта длительность больше, чем длительность, измеренная наблюдателем  $A$  (в штрихованной системе):

$$T_2 > t_0.$$

Длина пути, пройденного световым сигналом, с точки зрения наблюдателя  $B$ , как видно из рисунка 4.5, равна:

$$x = 2H_2 + vT_2 - vT_1 = 2H_2 + \frac{vH_2}{c-v} - \frac{vH_2}{c+v} = \frac{2H_2}{1-\beta^2}.$$

При этом скорость света оказывается равной (см. 4.12):

$$c_2 = \frac{x}{T_2} = c,$$

как это и должно быть.

Что касается промежутка времени  $T_0$ , то, как видно из (4.10) (4.13) и (4.14), он равен:

$$T_0 = t_0,$$

т. е. в направлении, перпендикулярном движению, никаких изменений с длительностью событий (как и с длиной отрезков) не происходит.

Путь, пройденный светом в этом процессе, равен, как видно на рисунке 4.4:

$$2l = \frac{2h}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

и отношение

$$\frac{2l}{T_0} = c,$$

что и следовало ожидать.

Так как движение двух рассматриваемых выше ИСО относительно, то можно было бы считать штрихованную систему неподвижной, а нештрихованную — движущейся со скоростью  $-v$ . Очевидно, при этом наблюдатели поменялись бы ролями: наблюдатель  $A$  нашел бы изменение длин и длительности, наблюдатель  $B$  — нет. И при этом каждый был бы прав со своей точки зрения.

Таким образом, проводя измерения в собственной системе отсчета, каждый наблюдатель оценивает собственную длину отрезков как наибольшую, а промежутки собственного времени как наименьшие.

Возвращение обоих сигналов в начало координат (одновременные события), конечно, происходит одновременно для обоих наблюдателей; если бы было не так, то две системы ИСО оказались бы неравновесными. Но приход к зеркалам 2 и 4 (равновременные события) в штрихованной системе происходит одновременно ( $T_1 = t_1'$ ), а в нештрихованной — разновременно ( $T_2 \neq t_2$ ).

Прямое доказательство справедливости (4.16) имеется в ядерной физике. Известна нестабильная частица мюон, рождающаяся в космических лучах в атмосфере. Она обладает единичным электрическим зарядом; масса ее примерно в 270 раз превышает массу электрона; она движется (относительно лабораторий) со скоростью, весьма близкой к скорости света:

$$v = c(1 - 5 \cdot 10^{-6}) \text{ м/с.}$$

В условиях лабораторий можно определить среднее время жизни мюона в системе отсчета, связанной с ним. Оно оказывается равным

$$\tau_0 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Экспериментально установлено, что в атмосфере частица проходит путь, достигающий 500 м, следовательно, она наблюдается в течение промежутка времени, равного

$$T = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

Но это наблюдение происходит в системе отсчета, где мюон движется. Поэтому, используя уравнение (4.16), получаем, зная  $t_0$ :

$$T = \frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ с,}$$

что по порядку величины соответствует опыту.

Итак, в СТО длина отрезка и длительность промежутка времени изменяются относительно, зависящими от скорости системы отсчета.

Но, как показал Эйнштейн, в СТО существует инвариантное (не изменяющееся при переходе из одной ИСО в другую) соотношение между пространственным отрезком  $R$  и промежутком времени  $t$  (это называется интервалом):

$$S^2 = c^2 t^2 - R^2.$$

Глубокий физический смысл интервала выяснится в курсе теоретической физики. Здесь отметим лишь одно важное следствие. Пусть в начале некоторой системы отсчета, расположенной в некоторой среде (или в вакууме), находится источник каких-либо сигналов. Опущем из начала координат сферу радиусом  $R = ct$ . Так как любое взаимодействие (сигнал), по первому постулату Эйнштейна, распространяется со скоростью, не превышающей  $c$ , то можно утверждать, что никакое изменение, возникшее вне сферы через промежуток времени  $t < t$ , не может зависеть от сигнала, посланного из центра в момент  $t = 0$ .

Различие этого утверждения позволяет доказать, что, несмотря на относительность одновременности пространственно разделенных событий, их причинная связь никогда не нарушается, т. е. «причина» никогда не может стать «следствием», а всегда ему предшествует.

Так, при выстреле из револьвера причиной является расширение раскаленных газов, следствием — возникновение звуковой волны и вылет пули. Ни при каких условиях не может случиться, чтобы наблюдатель, пространственно удаленный от стрелка, заметил попадание пули и слышать или услышал звук (следствия) раньше, чем увидит световую вспышку (причину).

В заключение отметим, что анализ условий распространения света в движущихся системах отсчета, подробнее проводимый в «Оптике», приводит еще к одному важному выводу: переменное электромагнитное поле (свет является его частным случаем) существует само по себе, а не в типотетическом «эфире», как это предполагалось физикой XIX в., так как физики считали свет «колебаниями эфира».

В отличие от звука, представляющего колебания давления воздуха, переменное электромагнитное поле ни с какой средой не связано. Оно является новой формой материи наряду с давно известной ее формой — веществом.

При становлении СТО высказывались многочисленные возражения против первого постулата. Все они оказались несостоятельными. Приведем одно из возражений.



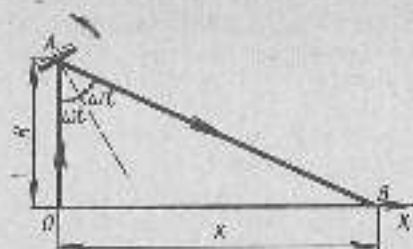


Рис. 4.6

образом, световой зайчик, движущийся по экрану, совмещающему с осью  $X$  (рис. 4.6), как будто бы проходит расстояние:

$$OB = x + R \operatorname{tg} 2\omega t,$$

двигаясь со скоростью

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2R\omega}{\cos^2 2\omega t}$$

(формула годится для углов  $\omega t \leq 45^\circ$ ). При приближении угла падения к  $45^\circ$  скорость светового зайчика, очевидно, может превзойти скорость света  $c$ . Это произойдет в момент  $t_1$ , определяемый условием

$$\cos^2 2\omega t_1 = \frac{2R\omega}{c}.$$

Ошибка, допущенная при этом рассуждении, поучительна. Ведь никакие фотоны не движутся вдоль оси  $X$ ; они лишь пересекают ее в разных точках. Фотон, летящий в направлении  $AB$  со скоростью  $c$ , достигнет точки  $B$  через промежуток времени

$$T = \frac{AB}{c} = \frac{R}{c \cos \omega t},$$

где  $t$  — момент, в который луч отражается в данном направлении. Но в момент  $t$  в точке  $B$  никаких фотонов еще нет!

Отношение

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{\cos \omega t}.$$

При стремлении угла  $2\omega t$  к  $90^\circ$  оно неограниченно растет, т. е. световой зайчик попадает в точку  $B$  со все большим запаздыванием, и никаких сверхсветовых скоростей фотоны в данном случае не имеют.

Отметим теперь, что бесконечно большая скорость распространения сигналов, неявно допускавшаяся классической физикой, иногда приводит к явно невозможным заключениям.

В примере, рассмотренном выше, при допущении бесконечной скорости сигнала моменты его послышки и возвращения просто совпали бы друг с другом.

Вот что писал сам Эйнштейн о связи между пространством и временем: «В дорелятивистской физике пространство и время были раздельными понятиями. Время приписывалось событиям независимо от выбора пространства отсчета. Механика Ньютона обладала относительностью по отношению к пространству отсчета, так что, например, утверждение, что два одновременных события произошли в одном и том же месте, не имело объективного (т. е. независимого от пространства отсчета) содержания. Но эта относительность не сказывалась на построении теории. О точках пространства и моментах времени говорили так, как будто они были абсолютной реальностью. Не замечалось, что основным элементом пространственно-временной локализации является событие, определенное четырьмя числами  $x, y, z, ct$ . Представление о чем-либо происходящем есть всегда представление о четырехмерном континууме, но понижение этого было затенено абсолютным характером дорелятивистского времени. После отказа от абсолютности времени и особенно одновременности сразу проявилась четырехмерность пространственно-временного представления».

Физической реальностью обладают не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие».

#### 4.5. Элементы релятивистской механики

Постоянство скорости света во всех ИСО, конечно, несовместимо с законом сложения скоростей Галилея (4.5) и, следовательно, с преобразованиями координат Галилея (см. § 2.6).

В специальной теории относительности преобразования Галилея заменены преобразованиями Лоренца, имеющими следующий вид (если при  $t=t'=0$  начала координат двух ИСО совпадают, одноименные оси параллельны друг другу и штрихованная система движется относительно неподвижной вдоль оси  $X$  со скоростью  $\vec{v}$ ):

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt); & x &= \gamma(x' + vt'); \\ y' &= y; & y &= y'; \\ z' &= z; & z &= z'; \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right); & t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Для нахождения закона преобразования скоростей возьмем дифференциалы от обеих частей всех уравнений:

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - vdt); & dx &= \gamma(dx' + vdt'); \\ dy' &= dy; & dy &= dy'; \\ dz' &= dz; & dz &= dz'; \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right); & dt &= \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right). \end{aligned}$$

Дели дифференциалы координат на дифференциалы соответствующих времен, получим выражения для преобразования скоростей:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \frac{dx}{dt}}; \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \frac{dx}{dt}};$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \frac{dx}{dt}}; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} \frac{1}{1 + \frac{v}{c} \frac{dx'}{dt'}};$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \frac{1}{1 + \frac{v}{c} \frac{dx'}{dt'}}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'} \frac{1}{1 + \frac{v}{c} \frac{dx'}{dt'}};$$

Таким образом, преобразование скоростей уже не подчиняется принципу независимости движений.

Если изучается распространение света вдоль оси  $X$  в вакууме ( $\frac{dx}{dt} = c$ ), то

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c, \quad (4.18)$$

как это и требуется вторым постулатом Эйнштейна.

При  $\beta \ll 1$  получаются преобразования Галилея как предельный случай преобразований Лоренца.

Не приводя длительных вычислений ускорений, укажем, что они не сокращаются при переходе от одной ИСО к другой.

Как уже указывалось, уравнения электродинамики Максвелла сохраняют свою форму при преобразованиях Лоренца. Приходя к преобразованиям Лоренца в механике, Эйнштейн получил новые выражения для механического импульса:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.19)$$

При его использовании второй закон Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (4.20)$$

сохраняет свою форму.

При  $\beta \ll 1$  из (4.19) и (4.20) для импульса и второго закона получаются классические выражения.

Так как при преобразованиях Лоренца ускорения не сокращаются, то их связь с силами существенно усложняется. Действительно, из (4.19) и (4.20), введя для сокращения обозначение

$$\mu = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

имеем:

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} + \dot{\mu} \vec{v} = \mu \frac{d\vec{v}}{dt} + \dot{\mu} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (4.21)$$

Таким образом, сила в общем случае не сонаправлена с ускорением. Сонаправленность сохраняется в двух частных случаях:

а) Пусть скорость меняется только по направлению. Тогда получаем:

$$v = \text{const}; \quad \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

б) Пусть скорость меняется только по модулю. Тогда уравнение (4.21) является скалярным:

$$\left( \mu + v \frac{d\mu}{dv} \right) \frac{dv}{dt} = F.$$

Сложная связь между силой и ускорением, естественно, не позволяет в релятивистской механике находить в соответствии с принципом суперпозиции результирующее ускорение тела как векторную сумму ускорений, сообщаемых телу отдельными силами. Однако выражение формулы второго закона Ньютона в релятивистском случае

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \text{где } \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

позволяет и при  $v \ll c$  по отношению к силам, импульсам и их производным по времени использовать принцип суперпозиции.

Заметим, что коэффициенты при ускорении в этих (и более сложных) случаях оказываются различными. Конечно, они имеют размерность массы.

Теперь рассмотрим простейший пример: движение точки, не имевшей начальной скорости, под действием постоянной силы.

Пусть на неподвижную точку массой  $m_0$  в момент  $t=0$  начинает действовать постоянная сила  $F$ . Второй закон в релятивистской форме дает:

$$F dt = dp = m_0 c db, \quad \text{где } b = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Интегрируя по времени от нуля до  $t$  и по  $b$  от нуля до  $b$ , получаем:

$$Ft = \frac{m_0 c b}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Следовательно,

$$\beta^2 = \frac{m_0^2 c^2}{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}.$$

При неограниченно возрастании времени получается в соответствии со вторым постулатом Эйнштейна:

$$\beta \rightarrow 1, \quad v \rightarrow c.$$

При малых  $\beta$  (малые  $v$ ) приходим к классическому результату

$$v = \frac{Ft}{m_0}$$

Но при больших  $t$  классическое приближение не годится, так как оно допускает  $v > c$ .

Рассчитаем работу силы в простейшем случае — пусть сила параллельна перемещению и в момент  $t=0$  скорость  $v_0=0$ . При элементарном перемещении  $odl$  работа равна:

$$dA = F dt = v dp.$$

Но импульс можно представить в виде

$$p = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Поэтому

$$dp = m_0 c (1-\beta^2)^{-3/2} d\beta$$

и элементарная работа равна:

$$dA = m_0 c \frac{v d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m_0 c^2 \frac{v d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

Интегрируя левую часть в пределах 0,  $A$  и правую — в пределах 0,  $\beta$ , находим работу силы  $A$  и равную ей кинетическую энергию  $W$ , приобретенную материальной точкой (или поступательно движущимся телом):

$$A = W = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \quad (4.22)$$

При  $\beta=0$   $W=0$ , как это и должно быть. При малых  $\beta$ , пользуясь приближенным выражением

$$(1-\beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2,$$

получаем:

$$W = m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{m_0 v^2}{2},$$

что соответствует классической механике. Но при больших значениях выражение (4.22) расходится с классическим.

#### 4.6. Релятивистская связь между массой и энергией

Уравнение (4.22) можно переписать в виде

$$W + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = E. \quad (4.23)$$

Второе слагаемое левой части, имеющее размерность энергии, привело Эйнштейна к гениальной мысли, что масса покоя тесно связана с энергией, так что уравнение (4.23) определяет полную

энергию тела  $E$ . Введем теперь в (4.23) релятивистский импульс, тогда получим:

$$E = m_0 c^2 \sqrt{\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1} = c \sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{1-\beta^2} + m_0^2 c^2} = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad (4.24)$$

Из соотношения (4.24) получаются весьма важные следствия. Пусть тело покоится ( $p=0$ ). Тогда

$$E = E_0 = m_0 c^2.$$

То есть покоящееся тело обладает энергией

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (4.25)$$

Этой энергией покоя (собственной энергией). При изменении физического состояния неподвижного тела его энергия покоя должна изменяться вместе с изменением внутренней энергии, составляющей часть собственной. Однако нагревание, электризация, плавление и т. д. изменяют полную энергию макроскопических тел ничтожно мало. Например, для изменения массы покоя водорода на 1% его следовало бы нагреть до температуры порядка  $10^7$  К<sup>4</sup>.

Соотношение (4.25), устанавливающее существование энергии покоя, неразрывно связанной с массой покоя, является одним из важнейших следствий специальной теории относительности. Открытие этой связи коренным образом изменило возможности энергообеспечения человечества. Не менее важно и методологическое значение этого соотношения, объединяющего ранее разрозненные физические понятия.

Уравнение (4.23) можно написать в виде

$$W = E - E_0. \quad (4.26)$$

показывающем, что кинетическая энергия есть разность между полной энергией и энергией покоя. Но ее значение отличается от классического. И только при малых скоростях ( $\beta \ll 1$ ) получается:

$$W = m_0 c^2 \left[ \frac{1}{1-\frac{1}{2}\beta^2} - 1 \right] \approx \frac{m_0 c^2 \beta^2}{2} = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Из вышесказанного следует, что ньютоновская механика применима в тех случаях, когда полная энергия мало отличается от энергии покоя. Если же полная энергия в десятки раз превышает энергию покоя, то ее практически можно считать кинетической энергией. Но, конечно, в этом случае классическая механика должна быть заменена СТО.

Если в уравнение (4.24) положить  $m_0=0$ , то получится:

$$E = pc.$$

<sup>4</sup> Напомним, что в СИ температура является четвертой основной величиной и выражается в кельвинах (К).

Этот неожиданный результат предполагает существование физических объектов, обладающих импульсом и энергией, но имеющих массу покоя; они не могут покоиться ни в какой системе отсчета. Таким объектом являются введенные в физику Эйнштейном кванты света — фотоны; они, конечно, движутся со скоростью света, но импульс равен:

$$p = \frac{E}{c}. \quad (4.27)$$

Созданная Планком в 1900 г. теория излучения и прошедшее количество света можно из оптики и атомной физики заставить приписать фотону энергию

$$E = h\nu, \quad (4.28)$$

где  $\nu$  — частота излучаемого света,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка, одна из важнейших постоянных квантовой физики.

Нагревание тела, поглощающего свет, свидетельствует о том, что свет обладает энергией. Световое давление на зеркало, экспериментально обнаруженное П. Н. Лебедевым в конце прошлого века, доказывает, что свет обладает импульсом.

Уравнение (4.25), связывающее собственную энергию с массой, имеет полное подтверждение в ядерной физике.

Как известно, ядра атомов состоят из ядер водорода — протонов и нейтральных частиц — нейтронов. Число протонов  $Z$  определяет место элемента в периодической системе Менделеева; сумма числа протонов  $Z$  и числа нейтронов  $N$  определяет массовое число элемента, т. е. округленную до ближайшего целого числа массу сложного ядра, выраженную в атомных единицах массы (1 а.е.м. =  $1,66 \cdot 10^{-27}$  кг).

По классическим представлениям, масса ядра должна равняться сумме масс частиц, образующих ядро. Опыты же показали, что для всех ядер выполняется условие:

$$m_n < Zm_p + Nm_n,$$

где  $m_n$  — масса покоя ядра;  $m_p$  — масса покоя протона;  $m_n$  — масса покоя нейтрона. Если умножить обе части неравенства на  $c^2$ , то получатся соотношения между соответствующими собственными энергиями:

$$E_n < E_p + E_n.$$

Поэтому можно сделать следующие заключения:

1. При образовании ядра из составных частиц происходит выделение энергии в количестве

$$\Delta E = (E_p + E_n) - E_n,$$

на каждое образовавшееся ядро. Это либо энергия излучения, либо кинетическая энергия, приобретаемая ядром при его образовании, впоследствии утрачиваемая при столкновениях с другими частицами.

2. Для разделения ядра на элементарные составные части (протоны и нейтроны) требуется сообщить ему энергию, не меньшую, чем  $\Delta E$  (так как продукты разделения могут обладать еще и кинетической энергией). Величина  $\Delta E$  называется энергией связи. Так как кванты  $\Delta E$  можно всегда излучать:

$$\Delta E = c^2 \Delta m, \quad (4.29)$$

то можно говорить о том, что ядро обладает недостатком (дефектом) массы  $\Delta m$ . Совокупная ядерная энергетика развивается на базе уравнения (4.29).

Подробное рассмотрение этих вопросов читатель найдет в «Опике и атомной физике».

#### 4.7. Соударения при релятивистских скоростях

Классическая теория соударений, рассмотренная в главе 3, различает три вида соударений:

1. Неупругие, когда частицы образуют одно целое, и кинетическая энергия частично переходит во внутреннюю.

2. Упругие, когда кинетическая энергия перераспределяется между частицами, внутренняя энергия не изменяется, частицы разлетаются.

3. Соударения, при которых кинетическая энергия частично переходит во внутреннюю, но частицы разлетаются. Последние встречаются чаще всего, но в общем виде мы их не изучали из-за сложности расчетов.

Во всех этих случаях масса частиц считается постоянной.

При релятивистских скоростях и взаимодействиях выполняются законы сохранения релятивистского импульса и полной энергии. Но при этом взаимодействия могут быть столь сильными, что изменяется масса покоя частиц, т. е. будут рождаться новые частицы. Разумеется, расчеты при этом усложняются. Поэтому мы ограничимся простейшими случаями.

1. Соударения частиц в ускорителях. В ускорителях часто используется неупругое соударение частицы массы  $m_0$ , имеющей большую скорость  $v$ , с медленно движущейся частицей равной массы, начальную скорость которой можно принять равной нулю. Закон сохранения релятивистского импульса дает:

$$m_0 c \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = M c \frac{V}{\sqrt{1-\beta_1^2}}, \quad (4.30)$$

При этом  $M$  не обязательно равняется  $2m_0$ . Закон сохранения полной энергии запишется так:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_0 c^2 = \frac{M c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \quad (4.31)$$

Для (4.31) и (4.30), найдя  $\beta_1$ :

$$\beta_1 = \frac{\beta}{1 + \sqrt{1-\beta^2}} < \beta.$$

Зная  $\beta$  и  $\beta_1$ , с помощью (4.30) находим массу:

$$M = 2m_0 \sqrt{\frac{1-\beta_1^2}{1-\beta^2}} \frac{\beta}{\beta_1} > 2m_0.$$

Прирост внутренней энергии (величина, наиболее интересующая экспериментаторов) равен убыли кинетической энергии:

$$\Delta W = (M - 2m_0)c^2.$$

Кинетическая энергия до соударения (4.22) равна:

$$W = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Коэффициент использования кинетической энергии:

$$\alpha = \frac{\Delta W}{W}.$$

Разумеется, он всегда меньше единицы.

В таблице приведены значения  $\beta$  и  $\alpha$  (для соударения быстрой частицы с неподвижной).

$\beta$	$10^{-2}$	0,5	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995
$\alpha$	1,01	0,48	0,17	0,11	0,08	0,07	0,31	0,29

Чтобы увеличить значения  $\alpha$ , были предложены ускорители частиц, работающие на встречных пучках. Полная масса соударяющихся частиц равна нулю, а скорости — равными по модулю и противоположными по направлению; из закона сохранения импульса найдем:

$$p_1 + p_2 = 0.$$

Полная кинетическая энергия частиц до соударения равна:

$$W_0 = 2W.$$

Так как после соударения частицы останавливаются, то коэффициент использования кинетической энергии в этом случае при любых значениях  $\beta$  равен единице. В этом большое преимущество встречных пучков.

Если после соударения (его нельзя назвать ни упругим, ни неупругим) движутся две частицы, то следует учитывать, что их массы покоя могут отличаться от масс покоя исходных частиц и что может происходить обмен не только кинетической, но и внутренней энергией. Для решения таких задач законов сохранения недостаточно и нужны дополнительные сведения или задание, например, предполагаемого направления движения одной из частиц, образующихся после соударения (см. «эффект Комптона»).

4. Поглощение фотона покоящимся свободным электроном. Пусть фотон имеет частоту  $\nu$ , электрон — массу покоя  $m_0$ . Скорость электрона после соударения обозначим через  $\nu$ . Закон сохранения импульса дает:

$$\frac{h\nu}{c} = m_0c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.32)$$

Закон сохранения полной энергии выведет так:

$$h\nu + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.33)$$

Выразим из (4.32)  $h\nu$  и подставим в (4.33), получим:

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad 1 - \beta = \sqrt{1-\beta^2} \quad (4.34)$$

Уравнение (4.34) удовлетворяется при  $\beta=0$ , что физически бессмысленно, так как противоречит закону сохранения импульса; другое возможное решение  $\beta=1$  противостоит первому постулату СТО.

Следовательно, свободный электрон не способен поглотить фотон, что вполне согласуется с опытами Даниеля.

Свободный электрон, имеющий до столкновения какую-либо скорость, также не способен поглотить фотон.

3. Эффект Комптона. В опытах Комптона фотоны, имеющие частоту  $\nu_0$ , соударялись с электронами атома, очень слабо связанными с ядром атома; после соударения частицы разлетались, при этом изменялась частота фотонов, а электроны приобретали большие скорости. Поэтому при расчете такого процесса электроны до соударения можно считать покоящимися. Составим уравнения сохранения импульса и энергии:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e \left( p_0 = \frac{h\nu_0}{c}, p = \frac{h\nu}{c}, p_e = \frac{m_0c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c} \right) \quad (4.35)$$

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.36)$$

Задача разрешима до конца, так как модуль скорости фотона не меняется и число неизвестных равно числу уравнений.

Нарисуем (рис. 4.7) векторную диаграмму импульсов (4.35). Пусть фотон рассеян на некоторый угол  $\varphi$ . Из векторного треугольника получим:

$$\frac{m_0c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left( \frac{h\nu_0}{c} \right)^2 + \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 - 2h^2\nu_0\nu \cos \varphi.$$

где  $\nu$  — новая частота фотона.

Умножив обе части уравнения на  $c^2$ , получим:

$$\frac{m_0^2c^4}{1-\beta^2} = (h\nu_0)^2 + (h\nu)^2 - 2h^2\nu_0\nu \cos \varphi. \quad (4.37)$$

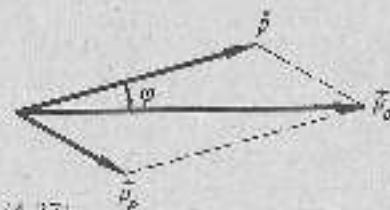


Рис. 4.7

## ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

## 5.1. Вращение твердого тела. Момент инерции

Продолжим рассмотрение классической механики, помня об ограниченности области ее применения. До сих пор мы изучали динамику точки, а также поступательное движение твердого тела, подставляя описываемое движением любой его точки. Обычно за эту точку выбирают центр масс тела. Простой опыт убеждает в неадекватности этого описания. Пусть дан параллелепипед (рис. 5.1, вид сверху), лежащий на горизонтальной плоскости. К нему привязана в точке  $A$  нить, причем точка  $A$  и центр масс  $C$  лежат в одной горизонтальной плоскости, а линия  $AC$  параллельна ребру параллелепипеда. Если тянуть нить с силой  $\vec{F}$ , направленной вдоль прямой  $AC$ , то параллелепипед движется поступательно. Если же горизонтальную силу  $\vec{F}$  направить под углом к линии  $AC$ , так что направление силы не будет проходить через центр масс, то одновременно с поступательным движением возникнет и поворот параллелепипеда, т. е. движение усложнится.

В первых главах мы уже обсуждали вращательное движение, но при этом всегда ограничиваясь либо обращением точки по окружности, либо движением тела с закрепленной осью вращения.

Рассмотрим динамику твердого тела, и прежде всего его вращения, причем будем предполагать, что при вращении заметных деформаций тела не происходит. Вращательное движение тела важно не только в связи с его распространенностью, но и потому, что в соответствии с принципом независимости движений *любое произвольное движение твердого тела может быть представлено совокупностью вращения его относительно центра масс и поступательного движения последнего*. В общем случае твердое тело может вращаться вокруг неподвижной точки; при этом движение можно свести к трем независимым вращениям вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку. Однако эта задача очень сложна и мы пока ограничимся рассмотрением вращения тела вокруг одной оси. Ось может быть неподвижна (например, ось ротора электрической машины, смонтированной в машинном зале); возможно также перемещение оси в пространстве. Например, ось вращения колеса, катящегося по шоссе, в каждый момент совпадает с линией соприкосновения колеса с шоссе (мгновенная ось); наконец, ось может быть свободной (например, у колеса, скатывающегося с наклонной плоскости и падающего в воздухе,



Рис. 5.1

В уравнении (4.36) перенесем  $h\dot{v}$  в левую часть и введем уравнение в квадрат:

$$m\dot{v}^2 + h^2(v - v_0)^2 + 2m\epsilon^2 h(v_0 - v) = \\ = m\dot{v}^2 + h^2 v_0^2 + h^2 v^2 - 2h^2 v_0 v + 2m\epsilon^2 h(v_0 - v) = \frac{m\dot{v}^2}{1 - \epsilon^2}.$$

Вычтем это уравнение из (4.37). После несложных вычислений найдем:

$$v(v - v_0) - \frac{h}{m\epsilon} v_0 v (1 - \cos \varphi).$$

Разделив на  $v_0 v$  и замечая, что  $\frac{v}{v_0} = \lambda$  — длина волны, приходим к окончательному результату:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m\epsilon v_0} (1 - \cos \varphi) = \frac{2h}{m\epsilon v_0} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (4.38)$$

Выразив длину волны и диаметра, получим:

$$\Delta\lambda = 0,0018 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{ нм}. \quad (4.39)$$

Итак, при рассеянии длина волны увеличивается, причем это увеличение не зависит от длины волны, а зависит только от угла рассеяния. Так как длины световых волн порядка сотен нанометров, то проверить уравнение (4.39) весьма трудно. Но в 1923 г. Клиффорд изучил рассеяние рентгеновских фотонов, которым отвечает длина волны в доли ангстрема. Расчет превосходно совпал с результатами опыта.

Далее можно вычислить угол рассеяния электрона и его скорость, причем опыт и здесь подтверждает теорию. Наконец, позже было показано, что число фотонов, рассеиваемых под некоторым углом, совпадает с числом электронов, рассеянных под соответствующим углом.

Таким образом, не подлежит никакому сомнению приложимость законов сохранения импульса и полной энергии к элементарным актам взаимодействия микрочастиц.

Специальная теория относительности не только выдержала многочисленные опытные проверки, но и трюком воплотила в технику: ядерная энергетика, теории ускорителей заряженных частиц, применение рентгеновских и гамма-излучений — все это требует учета эффектов, предсказываемых СТО.

Специальная теория относительности оказала большое влияние на методологию физики, объединив ранее разрозненные понятия (пространство и время, энергия и масса). Она отбросила ошибочные представления об абсолютном (независимом от материи) характере пространства и времени, а также и гипотетическом «эфире». Ее методы нашли применение во многих разделах современной физики.

нах вращения, проходящая через центр масс, движется вместе с телом).

Во всех случаях прежде всего бросается в глаза устойчивость приобретаемая телом при вращении. Так, металлический диск (например, монету) трудно поставить на ребро, чтобы при этом он стоял устойчиво, но, если закрепить его вокруг вертикальной диаметра, он приобретает значительную устойчивость. Если раскрутить диск вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр масс, и поставить ребром на горизонтальной плоскости, то он является устойчивым и даже может подниматься по наклонной плоскости. Такой же опыт можно провести с кольцом из металлической дробочки: если предварительно надеть кольцо на шкив двигателя с горизонтальной осью вращения, раскрутить его пальцем и осторожно сдвинуть со шкива, действуя силой, параллельной поверхности шкива, то дробочка, сорвавшись со шкива, подобно жесткому обручу, катится очень устойчиво.

Обобщая результаты подобных наблюдений, можно заключить, что твердое тело, вращающееся вокруг некоторых осей, проходящих через центр масс, будучи освобождено от внешних воздействий, сохраняет вращение неопределенно долго. Это заключение аналогично первому закону Ньютона для поступательного движения (центр масс тела в рассмотренном случае либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно, так что полный механический импульс тела не изменяется).

Возникновение вращения твердого тела всегда вызывается действием внешних сил, приложенных к отдельным точкам тела. При этом неизбежно возникают деформации и появление внутренних сил, обеспечивающих в случае твердого тела практической сохранение его формы. При прекращении действия внешних сил вращение сохраняется (если игнорировать от неизбежного трения). *Внутренние силы не могут ни вызвать, ни уничтожить вращение твердого тела.* Оно всегда возбуждается внешними силами. Действие внешней силы удобно наблюдать на крестовине (рис. 5.2), способной вращаться вокруг неподвижной оси симметрии, перпендикулярной плоскости чертежа.

На оси имеется два жестко связанных с ней шкива разных радиусов. На старших крестовине симметрично закрепляются четыре (одинаковых по форме и массе  $M$ ) цилиндра. Их расстояния до

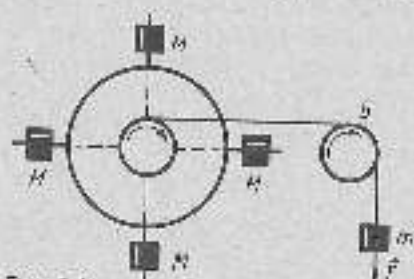


Рис. 5.2

оси можно менять, но каждый раз все четыре расстояния должны быть одинаковы.

Поэтому центр масс прибора лежит на оси вращения и не движется. Если сообщить крестовине толчок в плоскости чертежа, она будет равномерно вращаться (траншем ось в ее подпятниках кока преисбрежии). Центростремительные ускорения частей при-

бора обеспечиваются действием внутренних сил, возникших в начальный момент движения при малых деформациях тела.

Стаконки крестовину, нажимаем на малый шкив нить, перекинув ее через блок  $B$  и подвесим на ней тело массой  $m$ . Сила тяжести  $P = mg$  будет натягивать нить. Если эта сила очень мала, то трение покоя (в опорах оси вращения) не будет преодолено и вращения не возникнет. Увеличивая массу  $m$ , можно добиться возникновения ускоренного вращения. Меняя массу  $m$ , можно убедиться, что ускорение (угловое) увеличивается с ростом модуля силы  $P$ . Изменение расстояния от крестовины до блока на значении вращения практически не скалывается. Это наблюдение соответствует общему положению о допустимости переноса точки приложения силы, действующей на твердое тело, по линии ее действия без изменения результатов воздействия на тело.

Меняя положения грузов с массами  $M$  (при заданной силе), можно убедиться, что угловое ускорение при этом изменяется: оно уменьшится, если грузы малого шкива будут действовать на большей, то угловое ускорение возрастает. Таким образом, результатом действия внешней силы на тело, имеющее неподвижную ось вращения, является ускоренное вращательное движение тела. При этом движении линейные ускорения различных частей тела различны: они зависят не только от модуля силы, но и от положения точки ее приложения, а также от распределения масс в теле.

Конечно, в этом случае справедлив второй закон Ньютона. Но это удобно записать для углового ускорения (одинакового для всех частей тела), с которым мы познакомились в кинематике (см. § 1.4). Кроме того, придется ввести еще три новых понятия.

Прежде всего рассмотрим кинетическую энергию вращающегося тела. Отдельные элементы его (массами  $dm$ ) движутся с различными скоростями  $v$ , но угловая скорость  $\omega$  у всех элементов твердого тела одинакова. Обозначим кратчайшее расстояние элементов тела от оси вращения  $r$ . Полная кинетическая энергия вращающегося тела равна:

$$W = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (5.1)$$

где интеграл берется по всем элементам тела; при этом

$$I = \int r^2 dm, \quad (5.2)$$

есть величина, зависящая от распределения масс относительно оси вращения. Эту величину называют *моментом инерции тела относительно данной оси*. Она равна сумме элементарных моментов инерции  $dI = r^2 dm$  относительно той же оси. Единицей момента инерции в СИ служит килограмметр в квадрате.

Так как число возможных осей вращения для данного тела неопределенно велико, то таково же и число моментов инерции. Итем ни один из них не может равняться нулю, так как все элементарные моменты инерции положительны.

Можно доказать, что среди осей, проходящих через центр масс, имеются три особенные взаимно перпендикулярные оси. При равномерном вращении вокруг этих осей тело не оказывает влияния на подшипники, через которые проходят эти оси. Следовательно, подшипники можно было бы убрать, не влияя на вращение тела. Эти оси называются *главными осями*. При произвольной форме тела нахождение их затруднительно. Но у симметричных тел положение главных осей определяется легко. Так, у шара главными осями являются три любых взаимно перпендикулярных диаметра. У кругового цилиндра одна из осей совпадает с его геометрической осью, а две другие — любые два взаимно перпендикулярных диаметра поперечного сечения, содержащего центр масс. У прямоугольного параллелепипеда главные оси, параллельные его ребрам, проходят через центр масс параллелепипеда.

Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*. Их значения находятся методами интегрального исчисления.

Значения главных моментов для многих однородных симметричных тел даны в справочниках. Например, момент инерции кольца или трубы (тонкостенного кругового цилиндра) радиусом  $R$  толщиной стенок  $d \ll R$  и массой  $M$  относительно геометрической оси равен:

$$I_0 = MR^2.$$

Момент инерции сплошного кругового цилиндра (или диска) радиусом  $R$  и массой  $M$  относительно такой же оси равен:

$$I_0 = \frac{1}{2} MR^2.$$

Если ось вращения перпендикулярна оси симметрии цилиндра и проходит через центр масс, то (независимо от формы сечения) момент инерции равен:

$$I_0 = \frac{1}{12} Mh^2,$$

где  $h$  — высота цилиндра.

Наконец, для сплошного шара момент инерции относительно любого диаметра равен:

$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2,$$

где  $R$  — радиус,  $M$  — масса шара.

Для полового тонкостенного шара момент инерции относительно любого диаметра равен:

$$I_0 = \frac{2}{3} MR^2.$$

Если ось вращения не проходит через центр масс, то момент инерции  $I$  относительно этой оси будет больше, чем момент инерции  $I_0$

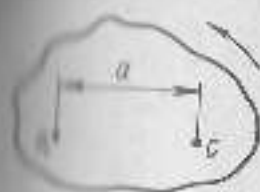


рис. 5.3

относительно оси, проходящей через центр масс параллельно первой оси. Оба момента связаны простой зависимостью; найдем ее. На рисунке 5.3 показаны сечение вращающегося тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения и проходящей через центр масс  $C$ , удаленный от оси вращения  $O_1$  на расстояние  $a$ . Вращение вокруг оси  $O_1$  можно рассматривать как вращение тела вокруг оси  $C$  и одновременно вращение центра масс вокруг оси  $O_1$  со скоростью  $V = \omega a$ .

Оба вращения происходят с одной и той же угловой скоростью. Поэтому для кинетической энергии тела имеем:

$$W = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 a^2,$$

где  $M$  — масса тела. Отсюда получаем соотношение, называемое *теоремой Штейнера*:

$$I = I_0 + M a^2. \quad (5.3)$$

У несимметричных тел выражения для  $I_0$  более сложны. В качестве примера приведем выражение  $I_0$  для диска с отверстием, рассмотренного в § 2.8. Читатель может самостоятельно найти  $I_0$ , если при расчете, что центр отверстия и центр масс лежат по разные стороны от центра диска на одном диаметре; что ось вращения, проходящая через центр масс, перпендикулярна плоскости диска. Пользуясь условными понятиями положительной и отрицательной массы, сохранив обозначения, принятые в § 2.8, и применяя теорему Штейнера, легко получить следующее выражение:

$$I_0 = \frac{M}{2R^2 - r^2} \{ R^2 - r^2 \}^2 (R^2 - r^2) + 2R^2 x^2 r^2.$$

Проверим результат для очевидных частных случаев:

а)  $r = 0$  (сплошной диск):

$$I_0 = \frac{MR^2}{2};$$

б)  $x = 0$  (центры отверстия и диска совпадают):

$$I_0 = \frac{MR^2}{2} + \frac{mr^2}{2},$$

где  $m = -M \frac{r^2}{R^2} < 0$  — «масса отверстия».

в)  $x = 0, R - r = d \ll R$  (очень тонкое кольцо):

$$I_0 = 2MRd = 2\pi R^2 m_0 R d = m_1 R^2,$$

где  $m_0$  — масса, приходящаяся на единицу поверхности;  $m_1$  — полная масса тонкого кольца, которое можно рассматривать в пределе как окружность.

Все эти результаты совпадают с приведенными выше моментами инерции.



**5.2. Момент силы и момент импульса относительно оси.**  
Уравнение движения вращающегося тела (второй закон Ньютона)

Внешняя сила, как мы видели, может изменить движение тела. Пусть твердое тело имеет неподвижную ось вращения и пусть к нему приложена произвольная сила  $\vec{F}$ . Разложим силу  $F$  на две составляющие  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ :

$$\vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{F}_2,$$

где  $\vec{F}_1$  перпендикулярна оси вращения, а  $\vec{F}_2$  параллельна ей (рис. 5.4, а). Сила  $F$  не может являть вращения вокруг оси, только будет создавать давление на подпятники и изгибать ось, однако мы будем считать ось достаточно прочной; поэтому силой  $\vec{F}_2$  можно не считать.

Силу  $F$  в свою очередь разложим на две:  $\vec{F}_3$ , действующую вдоль радиус-вектора  $\vec{R}$ , и  $\vec{F}_3$ , перпендикулярную ему (рис. 5.4, б). Сила  $F_3$  будет изгибать ось, но вращения не создаст; она для нас интереса не представляет. Сила  $F_3$ , модуль которой равен:

$$F_3 = F \sin \beta,$$

будет создавать вращение, сообщая телу ускорение.

Действуя на малом перемещении  $ds = R d\varphi = R \omega dt$  ( $\varphi$  — угловое перемещение), эта сила совершит работу:

$$dA = F_3 ds = RF_3 \omega dt, \quad (5.4)$$

в результате чего кинетическая энергия получит приращение:

$$dW = I \omega d\omega = dA,$$

Из последних двух соотношений находим:

$$I \frac{d\omega}{dt} = RF_3.$$

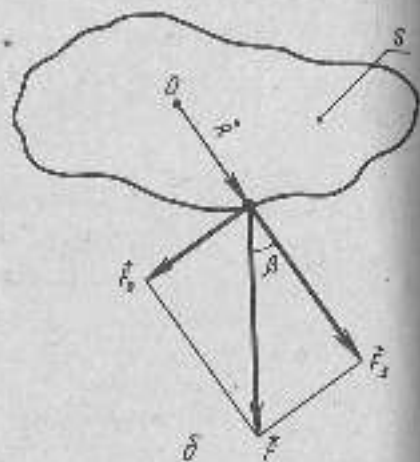
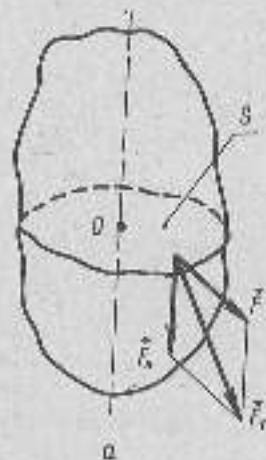


Рис. 5.4

Но  $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$  есть угловое ускорение тела. Таким образом,

$$I\alpha = RF_3 = RF \sin \beta.$$

В кинематике (см. § 1.4) мы представляли угловое ускорение вектором, параллельным оси вращения. Так как правая часть равенства есть модуль векторного произведения  $[\vec{R}, \vec{F}]$ , то, выбрав указанный порядок умножения, мы получим вектор  $\vec{M}$ , параллельный  $\alpha$ :

$$\vec{M} = [\vec{R}, \vec{F}]. \quad (5.5)$$

Величина  $M$  называется моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси вращения или вращающим моментом; в СИ ее модуль выражают в ньютон-метрах (Н·м).

Наименьший радиус-вектор  $\vec{R}$ , получающийся при угле  $\beta = 90^\circ$ , называется плечом силы относительно оси вращения<sup>1</sup>.

Учитывая написанные ранее соотношения, установим в векторной форме связь между угловым ускорением и моментом внешней силы, лежащий в плоскости вращения:

$$I\vec{\alpha} = \vec{M}. \quad (5.6)$$

Если мысленно перенести точку приложения силы  $\vec{F}$  в направлении действия последней, то момент силы не изменится.

На рисунке 5.5 показаны три таких положения (1, 2, 3) силы  $\vec{F}$  и соответствующие три векторным произведениям параллелограммы. Из рисунка видно, что все параллелограммы имеют общее основание  $OA = R$  и равные высоты, т. е. они равновелики. В § 3.1 мы уже пользовались перенесением точки приложения силы, создающей вращение, в направлении силы.

Если на тело действует несколько внешних сил, лежащих в плоскости вращения, то суммарный вращающий момент по принципу суперпозиции равен:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = I \sum \vec{\alpha}_i. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.6) показывает, что момент силы равен произведению момента инерции на сообщаемое силой угловое ускорение. Это уравнение по форме аналогично второму закону Ньютона:

$$F = m\alpha \quad (5.8)$$

и является аналитическим выражением второго закона Ньютона для вращательного движения.

<sup>1</sup> В школьном курсе физики момент силы определяется как скаляр, равный произведению силы на плечо.

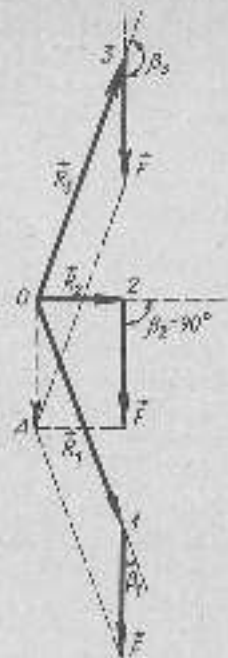


Рис. 5.5

Уравнение (5.6) можно формально вывести непосредственно из (5.8). Предположим, что точка массой  $m$  жестко связана стержнем длиной  $R$  с осью, перпендикулярной стержню. При вращении стержня придет во вращение и точка. Построим на стержне радиус-вектор  $\vec{R}$ , имеющий начало на оси вращения. Умножим (5.8) векторно на  $\vec{R}$  и, вспомнив, что  $\vec{a} = [\dot{\vec{e}}, \vec{R}]$ , где  $\vec{e}$  — условное ускорение, запишем:

$$\vec{R} \cdot \vec{F} = m [\vec{R} \cdot \vec{e}, \vec{R}].$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получаем:

$$\dot{M} = [\vec{R}, \vec{F}] - \vec{R} \cdot \dot{R} \dot{\omega} \vec{e} - \vec{R} \cdot \dot{\omega} m \vec{R} = m R^2 \dot{\omega} = \dot{L}$$

(второе скалярное произведение равно нулю).

В динамике материальной точки уравнение (5.8) было обобщено путем введения понятия механического импульса и приведено к виду

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Подобное же обобщение может быть сделано и в случае вращательного движения. Преобразуя выражение (5.6), получаем:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \frac{dL}{dt} = \dot{L}.$$

Величина  $\dot{L} = I\dot{\omega}$  называется *моментом механического импульса (относительно оси вращения)*. Это название объясняется тем, что  $L$  можно представить следующим образом:

$$\dot{L} = \int dm R \dot{\omega} = \int [\vec{R}, dm \dot{\vec{v}}] = \int [\vec{R}, dm \vec{v}] - \int [\vec{R}, d\vec{p}],$$

где  $\vec{v}$  — скорости элементов массой  $dm$ ,  $d\vec{p}$  и  $\vec{R}$  — соответствующие импульсы и радиус-векторы, проведенные от оси вращения. Все векторные произведения последнего подынтегрального выражения направлены по оси вращения.

Вводя  $L$  в уравнение (5.6), получаем обобщенное уравнение движения для вращающегося тела:

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M}, \quad (5.9)$$

где  $\vec{M}$  — момент силы, приложенной к телу.

Если на тело действует несколько сил, то по принципу суперпозиции можно обобщить уравнение (5.9) на этот случай, понимая под  $L$  суммарный момент механического импульса, а под  $\vec{M}$  — суммарный момент внешних сил.

Уравнение (5.4) определяло элементарную работу силы  $\vec{F}$ . Очевидно, также выражается работа силы  $\vec{F}$ . Развиваемая при этом мощность равна:

$$N = \frac{dA}{dt} = R F \omega.$$

Но  $R F \omega$  — модуль вращающего момента  $\vec{M}$ , параллельного вектору угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Поэтому мощность в общем случае может быть записана в виде скалярного произведения векторов  $\vec{M}$  и  $\vec{\omega}$ :

$$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}.$$

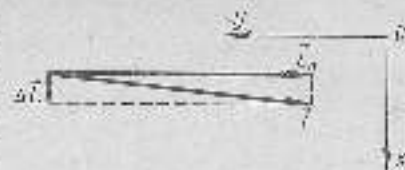


Рис. 5.6

Рассмотренные в начале главы опыты с крестообразной палочкой иллюстрируются полученными уравнениями. Устойчивость быстро катящегося колеса объясняется следующим образом. Пусть колесо расположено в плоскости  $XOZ$  (рис. 5.6) и катится вдоль оси  $X$ . Его момент механического импульса  $L_x$  велик. При случайном наклоне колеса влево (с точки зрения читателя) момент силы тяжести вызовет появление небольшого дополнительного момента механического импульса  $\Delta L_z$ , перпендикулярного  $L_x$ . Суммарный момент при этом почти не отличается от  $L_x$  ни по модулю, ни по направлению; следовательно, движение устойчиво. Если бы сначала колесо покоилось, то при его наклоне момент  $\Delta L$  вызвал бы быстрое падение колеса.

### 5.3. Закон сохранения момента импульса

Если момент внешних сил, действующих на тело, равен нулю, то из уравнения (5.9) следует, что

$$\vec{L} = \text{const.}$$

Момент механического импульса свободного тела постоянен. Это важное соотношение выражает третий закон сохранения в механике — *сохранение момента механического импульса для свободных тел*.

Этот закон может быть обобщен и на случай системы тел, взаимодействующих только друг с другом (т. е. на случай замкнутой системы). Его можно проверить на опыте с маломощным электродвигателем, подвешенным на длинных тонких нитях. Ось вращения ротора располагается вертикально, тогда влияние дитей (по крайней мере в начале вращения) будет мало; нитями могут служить неподводящие провода.

Двигатель подключают к электрической сети, зажав в руке его статор (внешнюю часть); при этом ротор приходит во вращение. Когда зажимают ротор, захватывая рукой выходящую наружу ось, во вращение приходит статор, причем в направлении, противоположном направлению вращения ротора. В этих двух случаях двигатель не является замкнутой системой: рука человека оказывает на него сильное воздействие.

Если не вмешиваться в движение двигателя, то статор и ротор одновременно вращаются в противоположные стороны. Наконец, если закрепить ротор относительно статора при помощи неподвижного винта, включенный двигатель остается в доуме.

Первые три части опыта доказывают, что момент внутренних сил (взаимодействие такой же обмотки двигателя) сообщает частям системы «статор — ротор» моменты импульса противоположных знаков. Замкнутая часть опыта позволяет проверить закон сохранения момента импульса количественно (до включения момента импульса был равен нулю).

При поступательном движении системы внутренние силы не могут изменить ни импульса системы, ни ее массу; поэтому скорость центра масс остается неизменной. При вращательном движении внутренние силы могут изменить распределение масс (и значит, момент инерции относительно оси вращения), но не могут изменить полного момента импульса. Следствием этого должно быть изменение угловой скорости вращения. Проверку этого интересного вывода удобно провести на «скамье Жуковского» — скамейке, которую вращают (без заметного трения) вокруг вертикальной оси.

Экспериментатор садится на скамейку, держа в вытянутых руках тяжелые гири (масса 3—5 кг), увеличивающие его момент инерции. Ему сообщают навес момент механического импульса, передавая скамейку во вращение с небольшой угловой скоростью  $\omega_1$ ; при этом он приобретает момент импульса

$$L = I_1 \omega_1,$$

где  $I_1$  — момент инерции экспериментатора (вместе со скамейкой и грузами).

Затем он прижимает руки к туловищу, уменьшая момент инерции (за счет действия внутренних сил, неспособных изменить момент импульса). Опыт показывает, что это приводит к заметному возрастанию угловой скорости, что согласуется с законом сохранения момента импульса, так как должно быть:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2.$$

Если снова развести руки, угловая скорость опять уменьшается.

В этих опытах момент импульса постояен, но кинетическая энергия вращательного движения изменяется. Действительно, выражая ее (см. уравнение 5.1) через  $L$ , найдем:

$$W = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}. \quad (5.10)$$

Таким образом, при уменьшении  $I$  энергия растет. Это объясняется тем, что экспериментатор, держа гири, напряжением своих мышц не только уравновешивает вертикальную силу притяжения гирь к Земле (этот эффект не играет роли), но и создает горизонтальную силу, обеспечивающую гири центростремительное ускорение. Эта сила направлена к оси вращения. Прижимая вытянутые руки к туловищу, экспериментатор совершает работу, и кинетическая энергия растет. Кроме того, требуется сообщить гири кинетическую энергию поступательного движения вдоль радиуса вращения. Но, допустим, что пережатие гирь происходит очень медленно, можно с ним не считаться.

Сделаем еще несколько опытов со «скамьей Жуковского».

Экспериментатору, сидящему на неподвижной скамейке, подают маховые колеса, закрепленные в раме и способные вращаться вокруг вертикальной оси. Колесо заранее приводят во вращение. Экспериментатор берет раму, причем ось вращения колеса должна быть во возможности соуправлена с осью вращения скамейки. При этом экспериментатор и скамейка остаются неподвижными, а момент механического импульса колеса не меняется, так как между колесом и экспериментатором нет жесткой связи. Теперь экспериментатор поворачивает раму так, чтобы ось колеса повернулась на  $180^\circ$  вокруг горизонтальной оси (это требует значительного усилия, так как маховое колесо для увеличения его момента инерции утяжеляют слоями металла, расположенным по периферии колеса). При этом экспериментатор (его момент инерции  $I_2$ ) приходит во вращение, причем его угловая скорость  $\omega_2$  совпадает по направлению с первоначальной угловой скоростью колеса, что отвечает закону сохранения момента импульса:

$$I_1 \omega_1 = -I_2 \omega_2 + I_2 \omega_2,$$

так  $I_1 \omega_1$  — первоначальный момент импульса колеса;  $-I_2 \omega_2$  — окончательный момент импульса колеса;  $I_2 \omega_2$  — момент импульса экспериментатора.

Если дать неподвижному экспериментатору неподвижное колесо и он сам приведет его во вращение, то он (вместе со скамейкой) придет во вращение в противоположную сторону.

Ряд иллюстраций сказанному мы наблюдаем во время выступлений фигуристов на льду.

Как и законы сохранения механического импульса и механической энергии, закон сохранения момента импульса обобщается на круг явлений, выходящих за пределы классической механики, например применительно к атомным, электромагнитным процессам и др. Он является одним из основных законов природы и, как доказывалось в курсе теоретической физики, тесно связан с изотропностью пространства.

#### 5.4. Мгновенные оси вращения

В § 5.1 говорилось о динамической устойчивости колеса, катящегося по горизонтальной поверхности. При этом движение колеса в каждый момент вращается вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией касания его с полом. Мгновенная ось сама поступательно перемещается в пространстве. Допустим, что движение колеса происходит без скольжения. Тогда его можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного движения центра масс колеса со скоростью  $v$  и вращения колеса вокруг оси, проходящей через центр масс, с угловой скоростью

$$\omega = \frac{v}{R},$$

где  $R$  — радиус колеса.

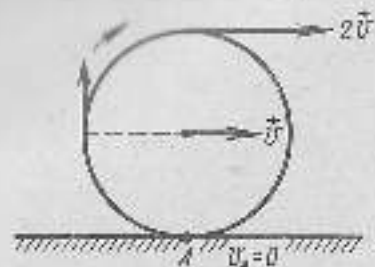


Рис. 5.7

отрывающихся от верхней части колеса, эта скорость направлена вперед.

Аналогично можно объяснить и такой простой опыт. С наклонной плоскости под действием силы тяжести скатываются два цилиндра одинакового радиуса, одинаковой массы, но с различными моментами инерции (один из цилиндров толстый и сделан из более плотного материала — он имеет больший момент инерции; другой цилиндр сплошной). Опыт показывает, что быстрее скатывается цилиндр с меньшим моментом инерции (сплошной). Действительно, работы силы тяжести в обоих случаях одинакова, так как центры тяжести обоих цилиндров опускаются одинаково, если они скатываются с одной наклонной плоскости. При этом тела приобретают кинетическую энергию, равную

$$W = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Но так как  $v = \omega R$ , то

$$W = \frac{M}{2} (v^2 + I/R^2 v^2).$$

Отсюда следует, что большему моменту инерции отвечает меньшая угловая скорость  $\omega$ , а значит, и скорость  $v$ .

Кинетическая энергия, приобретаемая катящимся цилиндром за счет потенциальной энергии тяготения, равна:

$$W = Mgh,$$

где  $h$  — разность высот центра масс в начале и в конце движения, поэтому конечная скорость поступательного движения цилиндра

$$v = \omega R = R \sqrt{\frac{2Mgh}{I + MR^2}} = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{I}{MR^2}}} < v_0, \quad (5.11)$$

где  $v_0$  — скорость, которую он приобрел бы при свободном падении или соскальзывании (без вращения) с той же высоты. Неравенство (5.11) вполне понятно, так как при скатывании цилиндр приобретает и энергию вращательного движения.

Подобное же уменьшение скорости центра масс происходит, если подпаленное дерево падает, опираясь на свое основание. Принимая

дерево за однородный стержень длиной  $H$  и массой  $M$ , напишем закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} Mgh = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

где  $I$  — момент инерции стержня относительно его конца, равный

$$I = \frac{1}{12} MH^2 + M\left(\frac{H}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} MH^2.$$

Так как скорость центра масс в этом случае есть

$$v = \frac{1}{2} \omega H,$$

то получается:

$$v = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{Mgh}{I}} = \sqrt{\frac{2}{3} gh} < v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Понятие о мгновенных осях позволяет разобраться и в известном опыте с «капризной катушкой». Упавшая на пол катушка ниток откатывается еще дальше, если потянуть за нитку, образующую с полом большой угол  $\alpha$  (рис. 5.8). Если же сообщить нитке наклон под меньшим углом  $\beta$ , то катушка послушно катится к вам в руки. Дело в том, что в обоих случаях возникает вращение вокруг мгновенной оси  $A$ , нормальной к плоскости рисунка. В первом случае создается момент, вызывающий вращение против часовой стрелки, и катушка откатывается; во втором случае момент создает вращение по часовой стрелке и катушка приближается к экспериментатору.

Кроме мгновенных осей, образованных соприкасающимися телами, возможны и свободные оси. Так, если подбросить параллелепипед (коробку спичек), одновременно сообщив ему вращение вокруг оси, проходящей через центр масс (для этой оси момент инерции должен быть наибольшим), то коробка устойчиво вращается, а ось вращения в то же время перемещается поступательно.

При этом мгновенная ось вращения является свободной: она не соприкасается с какими-либо телами (ровь воздуха в этом опыте не важна, он лишь тормозит движение; опыт превосходно удался бы и в вакууме). Интересно отметить, что легче всего получить устойчивое вращение вокруг свободной оси с наибольшим моментом инерции, труднее — с наименьшим и практически невозможно заставить тело устойчиво вращаться вокруг свободной оси с промежуточное значение.

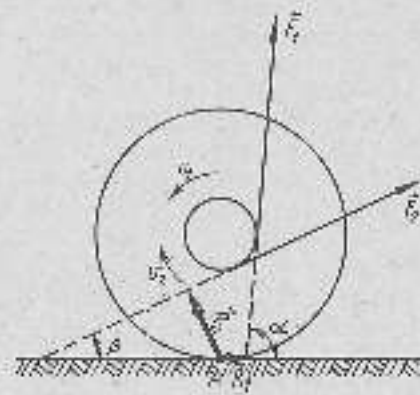


Рис. 5.8

Для изучения общего случая вращения тела вокруг неподвижной точки применяют такие же методы, что и для вращения вокруг оси. При этом вводит понятие *момента силы  $F$  относительно неподвижной точки*:

$$M = |\vec{R}, \vec{F}|,$$

где  $\vec{R}$  — радиус-вектор, проведенный из неподвижной точки к точке приложения силы. Этот момент можно рассматривать как векторную сумму трех моментов относительно трех взаимно перпендикулярных осей вращения, проходящих через неподвижную точку.

Подобным же образом вводится и момент импульса *относительно неподвижной точки*:

$$\vec{L} = [\vec{R}; \vec{p}]$$

Так как моменты инерции тела относительно различных осей, вообще говоря, различаются друг от друга, то вектор момента импульса (относительно точки)

$$\vec{L} = I_x \vec{\omega}_x + I_y \vec{\omega}_y + I_z \vec{\omega}_z$$

не совпадает по направлению с вектором угловой скорости

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z$$

что весьма затрудняет рассмотрение движения в общем виде.

Свободное твердое тело может совершать три независимых поступательных движения (относительно трех взаимно перпендикулярных координатных осей) и три независимых вращения (относительно трех главных осей). Следовательно, как уже отмечалось, оно обладает шестью степенями свободы. Такое движение весьма сложно, и мы не будем его рассматривать.

### 5.5. Рычаги. Пара сил

*Рычагом называется твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения и подверженное действию нескольких (не менее двух) моментов внешних сил.* Часто ось вращения проходит через центр масс, что позволяет не считаться с силой тяжести, действующей на рычаг.

Если внешние силы приложены по разные стороны относительно оси вращения  $O$ , то рычаг называют *рычагом первого рода*. Если же они лежат по одну сторону, то — *рычагом второго рода*. Так, ножницы — рычаг первого рода, а весло, установленное в уключину, — рычаг второго рода, так как точкой опоры (не вполне неподвижной) является конец весла, погруженный в воду. Схематическое изображение обоих рычагов дано на рисунке 5.9, а, б.

Конечно, рычаг может быть и не прямым, а силы могут быть направлены под любым углом к его оси.

Предполагается, что до приложения сил рычаг находился в покое. Интерес представляет нахождение условий равновесия рычага.

Так как ось рычага неподвижна, то он имеет одну степень свободы и для равновесия, т. е. для равномерного вращения, необходимо выполнить лишь одно требование: *сумма моментов внешних сил относительно оси должна быть равна нулю*. Оно является следствием уравнения (5.6).

На рисунке 5.9 след оси обозначен буквой  $O$ . Приписывая моментам, создающим вращение в противоположные стороны, разные знаки, получаем условие равновесия:

$$F_1 a - F_2 b = 0.$$

Отсюда

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a}.$$

Так как линейные перемещения точек приложения сил прямо пропорциональны длинам плеч рычага, то из этого соотношения следует «золотое правило» механики: *что проигрывается в расстоянии, то выигрывается в силе*. При этом предполагается, что вращение рычага равномерное или же что рычаг находился в равновесии, нарушенном исчезающе малой силой, добавленной к одной из сил (чтобы получить поворот в нужном нам направлении).

К вопросу о равновесии рычага можно подойти и с иной точки зрения. Пусть силы  $F_1$  и  $F_2$  параллельны друг другу и перпендикулярны оси рычага. Если рычаг при этом находится в равновесии, то это возможно потому, что некоторая воображаемая сила  $F$ , способная заменить реальные силы  $F_1$  и  $F_2$ , проходит через ось вращения  $O$ . Эту силу называют *равнодействующей данных сил*. Так как замена реальных сил равнодействующей не должна сказаться на состоянии рычага, то момент этой силы относительно любой оси вращения должен равняться сумме моментов сил  $F_1$  и  $F_2$  относительно той же оси.

Проведем ось через точки  $A$  и  $B$  (перпендикулярно плоскости чертежа, рис. 5.9, а). Получаем два условия:

$$F a = F_2(a+b); \quad F b = F_1(a+b).$$

Следовательно, должно быть:

$$F = F_1 + F_2 \quad (5.12)$$

и

$$\frac{a}{b} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (5.13)$$

т. е. точка приложения равнодействующей делит расстояние между силами на отрезки, обратно пропорциональные модулям сил.

Уравнения (5.12) и (5.13) определяют известные из курса средней школы правила сложения параллельных сил одного направления.

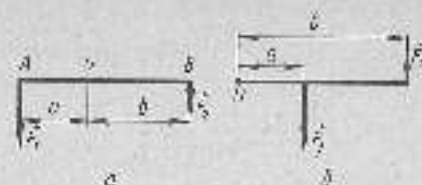


Рис. 5.9



Рис. 5.10

Повторяя те же рассуждения для рычага второго рода, найдем, что значения равнодействующей определяется разностью модулей составляющих сил; направлена равнодействующая в сторону большей силы. Положение точки приложения равнодействующей по-прежнему определяется уравнением (5.13).

Если человек несет на плече тяжелый брус, то он ходит полагая его на плечо, так, чтобы центр масс лежал на плече. В этом случае брус находится в равновесии, а сила давления на плечо равна весу бруса.

Если сместить брус немного вперед, то в переднем конце его придется приложить силу, направленную вверх (что по физиологическим причинам не очень удобно сделать); но при этом сила давления на плечо уменьшится.

Если же сместить брус немного назад, то к переднему концу придется приложить силу, направленную вниз (что сделать удобно), но при этом сила давления на плечо возрастет.

При сложении антипараллельных сил (рис. 5.10) возникает одно сложение. Пусть расстояние  $b = d - a$  между точками приложения сил задано, а разность модулей сил стремится к нулю. Как видно из уравнения (5.13), при этом расстояние  $a$  должно стремиться к  $b$ , что возможно только при неограниченном возрастании  $a$  и  $b$ .

Итак, система двух равных по модулю противоположно направленных сил, называемая парой сил, обладает особенностью: ее нельзя заменить одной силой, т. е. пара сил не имеет равнодействующей. Под действием пары сил тело приходит во вращение вокруг любой оси, перпендикулярной плоскости, содержащей пару. Действительно, так как точку приложения силы можно переносить в направлении действия силы, то всегда можно совместить на одной прямой эти точки и след оси вращения  $O$ . Как видно из рисунка 5.11, момент пары  $\vec{M} = [\vec{R}_1, \vec{F}] + [\vec{R}_2, \vec{F}] = [\vec{h}, \vec{F}]$

Но  $h \sin \alpha = h_0$ , где  $h_0$  — расстояние между силами (плечо пары). Поэтому получим:

$$\vec{M} = [h_0, \vec{F}] \quad (5.14)$$

т. е. вращающий момент пары сил не зависит от положения оси вращения.

Так как пара сил не вызывает движения центра масс (для этого нужна результирующая сила, отличная от нуля), то свободное тело под действием пары ускоренно вращается вокруг свободной оси, проходящей через центр масс тела. Эта ось перпендикулярна плоскости, содержащей пару.

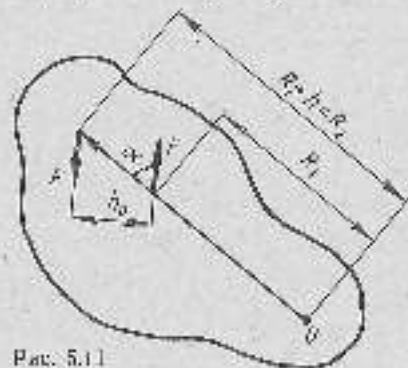


Рис. 5.11

## 5.6. Маятники

Законы динамики твердого тела применимы и при изучении движения маятников. Маятником (в широком смысле слова) называют тело, способное колебаться около своего положения равновесия под действием тех или иных сил.

Колебания пружинного маятника (рис. 5.12, а), при которых тело совершает поступательное движение, были рассмотрены в § 4.1, где было показано, что частота такого маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Здесь  $k$  — жесткость пружины, определяемая законом Гука:

$$F = -kx$$

( $x$  — деформация пружины,  $m$  — масса маятника).

Если маятник состоит из двух пружин, соединенных «последовательно» (рис. 5.12, б), то при смещении тела на расстояние  $x$  пружины растянутся различно, но сумма их деформаций всегда равна смещению:

$$x = x_1 + x_2$$

Силы упругости пружин будут одинаковы:

$$F_1 = -k_1 x_1 = F_2 = -k_2 x_2 = F = -kx,$$

где  $F$  — сила, действующая на тело массой  $m$ .

Поэтому получается:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

так что частота колебаний равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

и эти пружины равноценны одной пружине, имеющей жесткость:

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Если  $k_1 = k_2$ , то  $k = \frac{k_1}{2}$  и частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{2m}}$$

Следовательно, удлинение пружины уменьшает ее жесткость, что совершенно ясно, так как при деформации растягивается каждый элемент пружины.

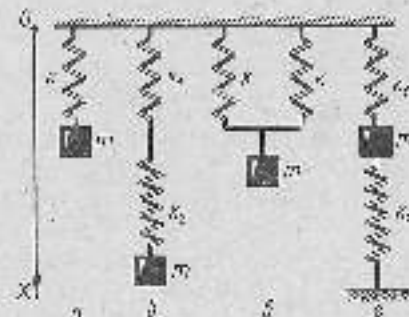


Рис. 5.12

При «параллельном» соединении пружин разной жесткости возникают сложные колебания. Ограничимся случаем одинаковых пружин:  $k_1 = k_2$  (рис. 5.12, а). При смещении тела на  $x$  возникают две силы, сужая их есть:

$$F_x = -2k_1 x.$$

Поэтому частота колебаний равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k_1}{m}}.$$

а такое же соединение равносильно одной пружине с жесткостью  $2k_1$ .

Наконец, в маятнике, показанном на рисунке 5.12, з (его пружины закреплены с двух сторон), при смещении тела возникают две силы, причем обе направлены к положению равновесия, так что полная сила упругости

$$F_x = -kx = -(k_1 + k_2)x$$

и частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Если пружины одинаковы, то

$$\omega = \sqrt{\frac{2k_1}{m}},$$

т. е. рассматриваемый маятник равносильен маятнику, показанному на рисунке 5.12, а. Этого и следовало ожидать, поскольку знак деформации второй пружины изменится при переносе точки ее крепления к телу.

До сих пор мы учитывали лишь продольную деформацию пружин. Но возможны и крутильные колебания, когда решающую роль играет закручивание нити подвеса, а ее продольной деформацией можно пренебречь. Так, симметричное тело (диск, гиря), подвешенное на тонкой нити, представляет собой крутильный маятник (рис. 5.13). Если повернуть его в горизонтальной плоскости на угол  $\alpha$ , то в закручивающейся нити подвеса возникнут силы, возвращающие тело в начальное положение. При небольших углах закручивания момент этих сил пропорционален углу (упругая деформация) и уравнение движения имеет вид:



Рис. 5.13

$$I\ddot{\alpha} = -D\alpha, \quad (5.15)$$

где  $I$  — момент инерции тела,  $D$  — постоянная кручения. Так как (5.15) по форме не отличается от (3.2), то будут совпадать и решения обоих уравнений. Следовательно, крутильный маятник совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}. \quad (5.16)$$

О постоянной кручения мы будем еще говорить в главе 7, здесь отметим лишь, что она пропорциональна четвертой степени диаметра и обратно пропорциональна длине нити. Поэтому в приборах, предназначенных для измерения малых моментов сил, применяются очень длинные и по возможности тонкие нити подвеса. При этих частота собственных колебаний оказываются малой, что делает измерения трудными при измерениях.

Если колебания тела, имеющего горизонтальную ось вращения, вызваны силой тяжести, то маятник называют физическим, таковым может быть любое тело, имеющее горизонтальную ось вращения  $O$ , проходящую выше центра тяжести  $C$  (рис. 3.14).

Если отклонить тело на угол  $\alpha$  и предоставить его самому себе, то возникает возвращающий момент, равный

$$M = -Fh \sin \alpha \approx -mgh \sin \alpha,$$

где  $h$  — расстояние от оси вращения до центра тяжести  $C$ . В случае малых углов отклонения синус можно заменить углом, тогда уравнение движения принимает вид:

$$I\ddot{\alpha} = -mgh\alpha.$$

Входящий в уравнение момент инерции  $I$  относительно оси  $O$  равен:

$$I = I_0 + ma^2,$$

где  $I_0$  — момент инерции относительно оси, проведенной через центр тяжести параллельно оси  $O$ . Очевидно, и здесь получаются гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_0 + ma^2}}. \quad (5.17)$$

Анализ этой формулы показывает, что частота обращается в нуль при  $h=0$ , если ось проходит через центр тяжести. При увеличении  $h$  частота растет и достигает наибольшего значения при

$$h_0 = \sqrt{\frac{I_0}{m}}.$$

Дальнейшее увеличение  $h$  сопровождается уменьшением частоты колебаний.

Для наглядной проверки уравнения (5.17) удобен маятник, имеющий форму равнобедренного треугольника с небольшим углом при вершине ( $10-15^\circ$ ). Вдоль самой длинной высоты делается ряд отверстий (начиная от центра масс и выше), для того чтобы можно было легко менять длину  $h$ . Напомним, что центр масс треугольника лежит на пересечении его медиан.

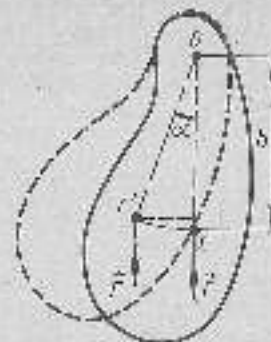


Рис. 5.14

Если маятник представляет собой маленький шарик, подвешенный на длинной нити (длина  $h$ ), то шарик приближенно можно уподобить материальной точке. Тогда момент инерции его

$$I \approx mh^2 \quad (5.18)$$

и из уравнения (5.17) для такого маятника (математического) получаются следующие значения частоты:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (5.19)$$

Здесь нельзя устремлять  $h$  к нулю, так как при этом потеряет силу приближение (5.18). Но пока оно допустимо, с уменьшением длины частота монотонно возрастает; кроме того, она не зависит от массы. Такой маятник называется *математическим*.

При движении маятников всех типов происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. Рассмотрим этот вопрос на примере пружинного маятника (результаты верны и для других типов).

Мгновенное значение кинетической энергии равно:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 X_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

Она принимает наибольшее значение дважды за период колебаний маятника — при прохождении его через положение равновесия.

Мгновенное значение энергии деформации (потенциальной), равное

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 X_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

принимает наибольшие значения также дважды за период — при наибольших отклонениях от положения равновесия.

Мгновенное значение полной энергии, равное:

$$E = W + U = \frac{1}{2}m\omega^2 X_0^2 = \text{const}, \quad (5.20)$$

оказывается постоянной величиной.

Конечно, эти значения энергий совпадают со значениями, найденными в § 3.1.

Рассмотренные колебания, происходящие под действием внутренних сил, называются *собственными колебаниями*.

В реальных условиях существует не учтенное нами трение, постепенно вызывающее убывание амплитуды, вплоть до прекращения движения. Такие *затухающие колебания* называются *свободными*. Они будут изучены в § 7.4.

Во всех рассмотренных случаях предполагалось, что маятник имеет одну степень свободы. В действительности это не всегда верно. Так, математическому маятнику можно сообщить последовательно два толчка в горизонтальной плоскости и двух взаимно перпендикулярных направлениях. Тогда он будет совершать одно-

временно два колебания, описывая одну из фигур Лиссажу (рис. 4.18). Такой маятник имеет две степени свободы.

Если в вертикальном пружинном маятнике использовать тело с переменным моментом инерции (горизонтальный стержень с перемещающимися вдоль него цилиндрами) и отрегулировать систему так, чтобы частота продольных колебаний была равна (или близка) частоте крутильных колебаний, то будет наблюдаться постепенный непрерывный переход одного вида колебаний в другой. Этот случай также соответствует двум степеням свободы.

Еще интереснее поведение пружинного маятника, у которого точка прикрепления нижнего конца пружины чуть-чуть смещена в сторону от вертикали, проходящей через центр масс тела, например конуса, обращенного острием вниз. Если частота колебаний при продольных деформациях пружины равна (или близка) частоте колебаний без заметной деформации пружины (физический маятник), то наблюдаются попеременные постепенные переходы от колебаний по вертикальной прямой к колебаниям в вертикальной плоскости. При неслучайном совпадении частот плоскость колебаний меняет свое положение в пространстве.

Если амплитуда колебаний маятников всех типов немала, то колебания перестают быть гармоническими, но остаются периодическими. Для физического или математического маятника гармоничность практически сохраняется для угла, меньших  $3-4^\circ$ . При увеличении угла отклонения частоты колебаний уменьшаются.

Интересной особенностью обладает «дуговой маятник» (рис. 5.15). Он представляет собой очень тонкую дугу окружности радиусом  $R$ , вращающуюся на произвольный центральный угол  $2\beta$ . Горизонтальная ось вращения маятника  $A$  расположена посередине дуги. Масса маятника  $m$ . Центр масс его лежит в точке  $C$ , расположенной ниже геометрического центра дуги  $O$ . Обозначим расстояние  $OC$  буквой  $y$ . Момент инерции относительно точки  $A$  есть:

$$I_A = I_C + m(R-y)^2.$$

Так как момент инерции относительно точки  $O$  равен:

$$I_O = mR^2 = I_C + my^2,$$

то получается:

$$I_A = 2mR(R-y).$$

При отклонении маятника на малый угол  $\alpha$  возникает вращающий момент, равный

$$M = -mg(R-y)\alpha.$$

Поэтому частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{mg(R-y)}{2mR(R-y)}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

оказывается не зависящей от  $m$  и  $y$ , т. е. одинаковой для всех дуг, включая полную окружность.

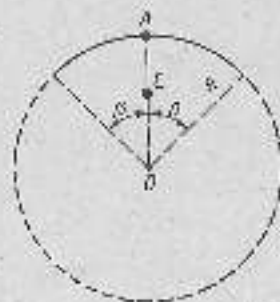


Рис. 5.15



Для демонстрации этого лобовитного свойства следует брать дуги, толщина которых в 15—20 раз меньше радиуса.

Особый случай использования маятника — баллистический — рассматривался в § 3.6.

### 5.7. Условия равновесия твердого тела

После знакомства с парой сил можно уточнить условия движения свободного твердого тела и в частном случае, когда действующие на него внешние силы лежат в одной плоскости. Пусть до приложения сил тело покоилось, тогда оно будет двигаться в плоскости действия сил (плоское движение).

Перенос сил в направлении их действия, можно произвести их сложение, причем всегда результат можно свести к силе  $\vec{F}$  приложенной к центру масс, и паре сил. При этом возможны такие случаи: а) если имеется только сила  $\vec{F}$ , то тело движется поступательно; б) если имеется только пара сил, то тело вращается вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости, содержащей пару; в) если имеется и сила, и пара сил, то тело движется поступательно, одновременно вращаясь вокруг оси, указанной выше.

В частном случае, когда действует только одна сила  $\vec{F}$ , не проходящая через центр масс  $C$  (рис. 5.16), можно мысленно приложить в центре масс две равные по модулю и противоположные по направлению силы ( $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$ ). Тогда мы приходим к случаю в.

Этот метод рассуждения очень часто применяется при решении практических задач статика. В задачах динамики его следует использовать с осторожностью, помня, что при повороте тела могут поворачиваться и силы. Если же параллельны сил движению, то будет изменяться плечо соответствующей пары.

Пример на применение этого метода в динамической задаче рассмотрен в § 5.8. Такие же соображения можно высказать и об общем случае движения твердого тела: оно может двигаться поступательно и вращаться вокруг центра масс.

Предположим, что вынуждено тело покоилось и мы хотим, чтобы движавшееся внешние силы не выводили его из состояния равновесия. Тогда мы должны потребовать выполнения шести условий равновесия (свободное тело имеет шесть степеней свободы).

Неподвижность центра масс требует обращения в нуль суммарной силы, действующей на тело:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}, \quad (5.21)$$

т. е.  $\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum F_{iz} = 0.$

Отсутствие вращения требует исчезновения вращающих моментов внешних сил:

$$\sum \vec{M}_i = \vec{0}, \quad (5.22)$$

$$\sum M_{ix} = 0; \sum M_{iy} = 0; \sum M_{iz} = 0.$$

Удобно бывает провести оси координат через центр масс. Эти шесть уравнений и решают вопрос о равновесии свободного тела.

Напомним, что если изучается движение материальной точки, то остаются три условия равновесия (5.21), так как точка не может вращаться вокруг самой себя. При изучении движения тела, имеющего неподвижную ось, имеется всего одно условие: сумма моментов сил относительно этой оси должна обращаться в нуль.

Помимо определения условий равновесия тела, представляет интерес и вопрос о его устойчивости. Если тело немного сместить из положения равновесия и предоставить самому себе, то возможны три случая:

1) оно самопроизвольно возвращается в положение равновесия (устойчивое равновесие);

2) оно остается в новом положении (безразличное равновесие);

3) оно еще дальше отходит от положения равновесия (неустойчивое равновесие).

Если тело имеет точку (или линию) опоры либо подвешено на нити или пружине и если действуют только консервативные силы (например, сила тяжести), то наиболее устойчивым будет состояние, отвечающее минимуму потенциальной энергии.

Таким состоянием любого маятника — при выведении его из положения равновесия потенциальная энергия растет и возникают силы, возвращающие маятник в первоначальное положение.

Это весьма общее положение можно продемонстрировать при помощи хитрой весов. Она состоит из опорного стержня  $A$  и горизонтального стержня, несущего два шарика массой  $m_1$  (их можно перемещать по перышкам) и имеющего выступ в виде призмы. Ребро призмы опирается на дно углубления в верхней части опорного стержня (рис. 5.17, а).

Условие равновесия требует, чтобы центр тяжести  $C$  подвижной части прибора лежал на вертикали, проходящей через ребро опорной призмы. При симметричной конструкции это равнозначно требованию равенства масс  $m_1$  и  $m_2$ . Если немного отклонить подвижную часть прибора, то центр масс сместится (рис. 5.17, б) и возникнет вращающий момент

$$\vec{M} = -H, \quad \vec{F} = -[H, m\vec{g}],$$

стремящийся вернуть его в первоначальное положение (здесь  $m$  — полная масса подвижной части;  $H$  — расстояние от ее центра тяжести до линии опоры).

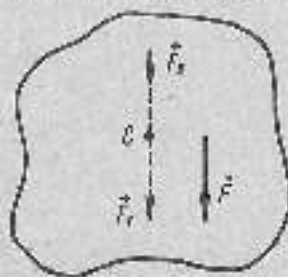


Рис. 5.16

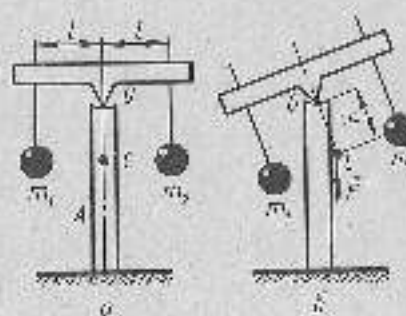


Рис. 5.17

При самом низком положении шара центр масс расположен низко и вращающийся момент возвращает систему в положение равновесия. Если же поднять шар, то центр тяжести также поднимется. При отклонении на тот же угол вращающий момент будет меньше, но система станет менее устойчивой. Когда точка  $C$  окажется выше линии опоры, система станет совершенно неустойчивой.

На горизонтальной плоскости тело находится в состоянии безразличного равновесия, если при его перемещении центр масс не изменяет высоты над поверхностью (однородный шар или цилиндр). Но если, например, высверлить отверстие в деревянном шаре и заполнить его металлом, то центр масс сместится относительно геометрического центра. Такой шар, если его толкнуть, ведет себя своеобразно, совершая сложное движение, в результате которого центр масс переходит в самое низкое положение.

Если на тело действуют силы трения, то условия устойчивости изменяются. Так, если на шероховатую поверхность горизонтальной доски положить брусок с шероховатой же поверхностью, то доску можно наклонить на значительный угол, не вызвав перемещения бруска относительно доски (действует сила трения покоя).

### 5.8. Качение

Рассмотрим явления, происходящие при качении твердого тела по твердому основанию, связанные с существованием трения. Мы увидим, что они сложны, так как приходится считаться сразу с несколькими видами трения. Поэтому данный трудный вопрос, имеющий важное практическое значение, будет рассмотрен лишь приближенно.

Если сообщить цилиндру горизонтальную скорость  $V_0$ , нормальную к его оси, и положить его без толчка на горизонтальную плоскость, то скорость перемещения его центра масс будет убывать, но возникнет вращение цилиндра. В каждый момент цилиндр будет вращаться вокруг мгновенной оси, совпадающей с образующей цилиндра, касающейся плоскости. Эта ось все время поступательно перемещается вместе с цилиндром. При этом угловая скорость сначала растет, а затем начинает убывать.

Если же раскрутить круговой цилиндр вокруг его оси и положить без толчка на горизонтальную плоскость, то он покатится по ней. При этом центр масс цилиндра приобретет скорость, увеличивающуюся от нуля до  $V$ , а затем снова уменьшающуюся до нуля. Угловая скорость цилиндра будет непрерывно убывать.

Оба явления родственны друг другу, поэтому мы ознакомимся только с первым, так как исследование второго не вызовет затем трудностей у читателя.

Итак, пусть однородный цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m$  в момент  $t=0$  имеет горизонтальную скорость  $V_0$  и кинетическую энергию  $\mathcal{W}_0 = \frac{1}{2} m V_0^2$ . Он положен на горизонтальную плоскость

(рис. 5.18). Начальная угловая скорость  $\omega_0 = 0$ .

Цилиндр начинает скользить по плоскости. Возникающую силу трения скольжения  $\vec{F}$  примем не зависящей от скорости скольжения. Скорость поступательного движения  $v$  начнет убывать. Одновременно возникнет вращение цилиндра по часовой стрелке. Угловая скорость  $\omega$  будет возрастать, а скорость  $v$  скольжения точек цилиндра, соприкасающихся в каждый момент с плоскостью по линии  $A$  (мгновенной оси вращения), будет уменьшаться.

Рассмотрим динамику и энергетику этого движения.

Приложим к центру масс цилиндра силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , равные по модулю силе трения скольжения  $\vec{F}$ :

$$F_1 = F_2 = F.$$

Сила  $\vec{F}_1$  создаст поступательное ускорение, направленное противоположно скорости и равно по модулю

$$a = \frac{F}{m}. \quad (5.23)$$

Пара сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  создаст угловое ускорение относительно оси цилиндра  $O$ :

$$\epsilon = \frac{FR}{I}, \quad (5.24)$$

где  $I$  — момент инерции цилиндра относительно этой оси.

Скорость поступательного движения цилиндра будет убывать по закону

$$v = V_0 - at, \quad (5.25)$$

а угловая скорость будет возрастать:

$$\omega = \epsilon t. \quad (5.26)$$

Скорость скольжения будет уменьшаться по закону

$$u = V_0 - at - \epsilon Rt \quad (5.27)$$

и обратится в нуль в момент  $T$ , равный

$$T = \frac{V_0}{a + \epsilon R} = \frac{m V_0}{F} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon},$$

где для сокращения дальнейших записей введем множительный и больший единицы параметр:

$$\alpha = 1 + \frac{I}{mR^2}$$

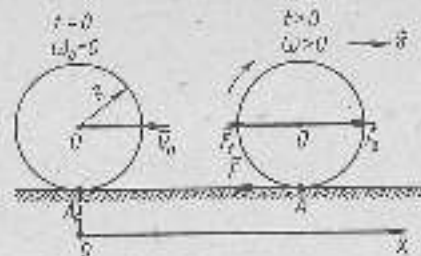


Рис. 5.18

Все дальнейшие вычисления делаются для момента  $T$ . Из (5.23) находим скорость поступательного движения

$$v_T = \frac{V_0}{\alpha}$$

и кинетическую энергию этого движения

$$W = \frac{W_0}{\alpha^2}. \quad (5.26)$$

Из (5.24) находим угловую скорость

$$\omega_T = \frac{V_0}{\alpha R}$$

и кинетическую энергию вращательного движения

$$W_{\omega} = \frac{1}{2} I \omega_T^2 = W_0 \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}. \quad (5.27)$$

Полная кинетическая энергия цилиндра в момент  $T$  равна:

$$W_T = W + W_{\omega} = \frac{W_0}{\alpha}. \quad (5.28)$$

Путь, пройденный в поступательном движении, есть:

$$x = V_0 T - \frac{1}{2} \alpha T^2 = \frac{W_0}{F} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Работа силы трения (внешней силы) на этом пути равна:

$$A_1 = -Fx = -W_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad (5.29)$$

Эта работа отрицательна и совершается за счет начальной кинетической энергии цилиндра. Кроме того, сила трения скольжения совершает положительную работу, раскручивая цилиндр. Действительно, за время  $T$  цилиндр поворачивается (относительно оси  $O$ ) на угол

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha T^2.$$

Поэтому с горизонтальной плоскостью (по линии  $A$ ) успевает соприкоснуться поверхность цилиндра, имеющая в развернутом виде длину

$$L = \varphi R = \frac{W_0}{F} \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}.$$

Работа силы трения скольжения на этой поверхности есть:

$$A_2 = W_0 \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha^2}\right).$$

Полная работа сил трения скольжения

$$A = A_1 + A_2 = W_0 \left(-1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) = W_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = W_T - W_0 < 0. \quad (5.30)$$

Она равна, как это и должно быть, изменению кинетической энергии цилиндра.

Таким образом, сила трения не только вызывает необратимую потерю энергии на нагревание трущихся поверхностей, равную

$$\Delta W = W_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), \quad (5.31)$$

но и способствует возникновению вращательного движения, причем часть кинетической энергии поступательного движения переходит в кинетическую энергию вращения.

В таблице приводятся относительные значения энергий для тонкостенной трубы ( $I = \alpha R^2$ ,  $\alpha = 2$ ) и для сплошного цилиндра ( $I = \frac{1}{2} \alpha R^2$ ,  $\alpha = 1.5$ ). Они относятся к моменту  $T$ .

Подобным же образом решается и задача о поведении цилиндра, предварительно раскрученного до угловой скорости  $\omega_0$  и помещенного без толчка на горизонтальную поверхность (начальная скорость поступательного движения  $V_0 = 0$ ). Этот цилиндр приходит в ускоренное поступательное движение, причем вращение его замедляется. Для момента  $T_1$ , когда скольжение прекращается, данные о распределении его первоначальной энергии приводятся в той же таблице.

	Цилиндр, скользит по шероховатой поверхности		
	отношение энергии $W/W_0$	путь $x$	длина $L$ поверхности
Кинетическая энергия поступательного движения (уравнение 5.26)	$\frac{1}{\alpha^2}$	0,25	0,50
Кинетическая энергия вращательного движения (уравнение 5.27)	$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}$	0,25	0,22
Необратимые потери энергии на нагревание (уравнение 5.31)	$1 - \frac{1}{\alpha}$	0,50	0,33

	Цилиндр, скользит по гладкой поверхности		
	отношение энергии $W/W_0$	путь $x$	длина $L$ поверхности
Кинетическая энергия поступательного движения (уравнение 5.26)	$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}$	0,25	0,22
Кинетическая энергия вращательного движения (уравнение 5.27)	$\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^2$	0,25	0,11
Необратимые потери энергии за нагревание (уравнение 5.31)	$\frac{1}{\alpha}$	0,50	0,67

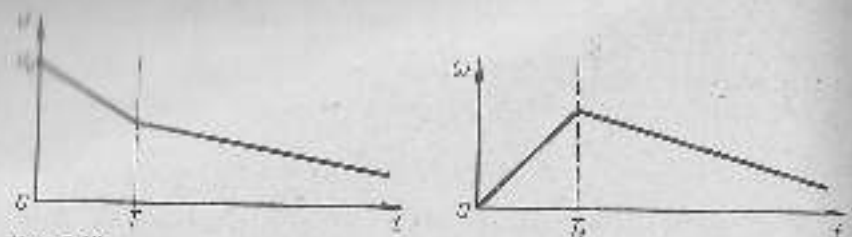


Рис. 5.18

После исчезновения скольжения, т. е. при  $t > T$  и  $t > T_1$ , качение, как показывает опыт, происходит с замедлением как поступательного, так и вращательного движения (рис. 5.19). В конце концов цилиндр останавливается. Следовательно, здесь происходит новый вид трения — трение качения; оно существовало и в первой части процесса, но там его можно было не учитывать, так как оно гораздо меньше трения скольжения (см. рис. 5.21 и пояснения к нему).

Трение качения можно объяснить деформациями поверхности, по которой катится цилиндр, и самого цилиндра. Законы этих деформаций сложны и до конца не исследованы. Но, во всяком случае, в результате деформаций возникают силы, замедляющие и поступательное движение, и вращение. Силы скольжения (как было показано выше) могут тормозить лишь одно из движений, вызывая ускорение второго.

Физическую картину трения качения упрощенно можно описать следующим образом. На рисунке 5.20, а в сильно преувеличенном масштабе показана деформированная плоскость. Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , возникающие в результате деформации полотна дороги и действующие на заднюю и переднюю половинки цилиндра, движущегося вправо, очевидно, неодинаковы, причем  $F_1 < F_2$ . Сложив их, получим силу трения качения  $\vec{F}_k$ . Перенесем ее точку приложения (рис. 5.20, б) в точку А, лежащую на одной горизонтали с осью О цилиндра, и разложим на составляющие  $\vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$ .

Сила  $\vec{F}_3$  вызывает торможение поступательного движения с ускорением  $\vec{a}_1$ , направленным в сторону, противоположную вектору  $\vec{v}$ , и равным по модулю

$$\vec{a}_1 = -\frac{\vec{F}_3}{m} \quad (5.34)$$

Сила  $\vec{F}_4$  создает торможение вращательного движения с угловым ускорением

$$\vec{\epsilon} = -\frac{r \cdot a_1}{I} \cdot m$$

Отрезок  $h$  называют «выносом» силы трения качения. Обычно он бывает очень мал по сравнению с радиусом цилиндра, чем и объясняется малость углового замедления.

Силы трения скольжения и качения легко сравнить в следующем опыте (рис. 5.21).

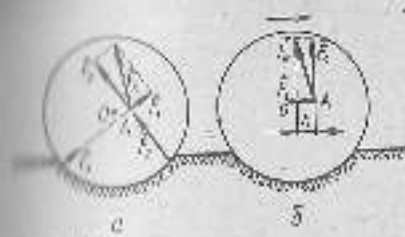


Рис. 5.20

Небольшой цилиндр снабжен рамой, к которой прикладывается внешняя горизонтальная сила  $F$ . Стопорный винт (его можно винтить в точке А) позволяет предотвратить вращение цилиндра. Если цилиндр катится, то для поддержания этого движения нужна малая сила. Если же ввернуть стопорный винт, то цилиндр начинает скользить и требуемая сила возрастает во много раз. Этот опыт объясняет пользу, приносимую подшипниками, где трение скольжения заменено трением качения.

При движении без скольжения возникает сила трения сцепления (покоя), действующая по линии касания цилиндра с плоскостью. Так как взаимодействующие точки находятся в относительном покое, то эта сила работы не совершает. Но роль ее иногда весьма важна. Так, трение сцепления позволяет осуществить передачу энергии при помощи бесконечного ремня (трансмиссия). Пусть на оси некоторого двигателя имеется шкив 1, соединенный бесконечным ремнем со шкивом 2, помещенным на оси некоторой машины (рис. 5.22). Благодаря трению сцепления шкив 1 увлекает ремень в направлении, указанном стрелкой. В свою очередь ремень благодаря тому же трению увлекает шкив 2, который совершает некоторую полезную работу. Однако если сцепление движению шкива 2 слишком велико, то сила трения сцепления (входящая верхний предел, как и сила трения покоя при поступательном движении) не может его преодолеть и ремень будет проскальзывать над шкивом (это же объясняется буксованием колес автомобиля при скользкой дороге и слишком большой мощности работы двигателя). При этом достаточно небольшой боковой силы, чтобы вызвать соскальзывание ремня, так как трение сцепления заменяется здесь трением скольжения, а последнее меньше.

По той же причине (угрюмость сверху силы трения покоя) при ходьбе по скользкой поверхности приходится идти осторожно, чтобы сила, с которой ноги отталкиваются от земли, не превысила силу трения сцепления.

Мы рассмотрели только самые простые законы движения твердого тела. Подчеркнем, что хотя мы считали иногда, что под внешними воздействиями тело не деформируется (и, в частности, его момент инерции не изменяется при

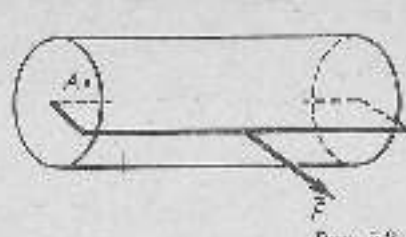


Рис. 5.21

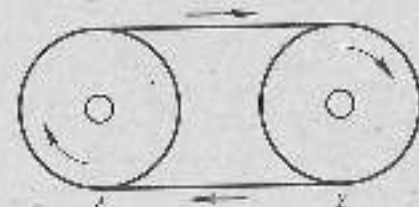


Рис. 5.22

моментами скорости вращения), но фактически весьма малые деформации, конечно, происходят. Возникающая при этом внутренняя сила и обеспечивает возможность движения тела как целого.

Но эти внутренние силы не способны изменить полный импульс тела на момент этого импульса. Поэтому во всех наших расчетах эти силы и не учитывались.

Мы не считались также с возможностью разрушения твердого тела под действием внешних сил, некоторые изображения о прочности тел будут рассмотрены в главе 7.

В заключение рассмотрим элементы теории движения само движущихся телозов (трамвай, автомобиль и др.).

Схема автомобиля с задними ведущими колесами показана на рисунке 5.23. Ведущие колеса (радиусом  $R$ ) приводятся в движение двигателями, действующими на ось радиусом  $r < R$  и создающим вращающий момент  $\vec{M} = [r, \vec{F}]$ , направленный к читателю. Но внутренняя сила не может сместить центр масс автомобиля. Это легко показать на опыте (см. § 2.8), подвесив на нитях любую заводную игрушку: колеса будут вращаться, а игрушка останется неподвижной.

Движение автомобиля обеспечивается внешней силой трения сцепления  $\vec{F}$ . Приложив к оси колеса силы

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F},$$

найдем (как и выше), что сила  $\vec{F}_1$  сообщает поступательное ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m},$$

где  $m$  — масса автомобиля, а пара сил  $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$  создает вращающий момент

$$\vec{M}_1 = [R, \vec{F}_1],$$

противоположный по знаку моменту  $\vec{M}$ , так что угловое ускорение

$$\vec{\alpha} = \frac{M - M_1}{I},$$

где  $I$  — момент инерции колеса относительно оси. Если движение происходит без скольжения, то выполняется еще дополнительное условие:

$$\vec{v} = \alpha R,$$



Рис. 5.23

Найдем связь между  $\vec{M}$  и  $\vec{F}$  для этого случая.

$$F = m\alpha R = \frac{mR}{I} (M - RF).$$

Поэтому

$$F = \frac{M}{R} \frac{I}{I + mR^2} \quad (5.35)$$

Так как масса автомобиля не велика по сравнению с массой колес, то можно с хорошим приближением принять:

$$F \approx \frac{M}{R}.$$

Так как трение сцепления имеет верхний предел  $F_0$ , то движение без скольжения возникнет, если будет соблюдено условие

$$M < RF_0 = M_0 \quad (5.36)$$

Чтобы начать движение без рывка, водитель должен обеспечить малое ускорение, т. е. равенство

$$\Delta \vec{F} = \vec{F} - \vec{F}_0 \quad (5.37)$$

должна быть мала. Несоблюдение условия (5.36) приведет к скольжению колес (пробуксовке); сила трения, а с ней и движущая сила резко уменьшится, и автомобиль может вообще не сдвинуться с места.

После достижения автомобилем желаемой скорости он движется с постоянной скоростью, причем

$$\vec{a} = \vec{0}, \quad \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{M} = [R, \vec{F}_1],$$

где  $\vec{F}_1$  — сила трения качения.

Работающий двигатель сообщает колесу момент механического импульса. При этом сам двигатель, связанный с корпусом машины, также приобретает равный по модулю и противоположный по направлению момент механического импульса. В нашем случае корпус автомобиля должен был бы вращаться по часовой стрелке. Этому препятствует сила тяжести, действующая на автомобиль. Давление передних колес на дорогу при движении уменьшается. Действительно, при резком выключении двигателя передок автомобиля слегка подпрыгивает.

Давление же на ведущие (задние) колеса несколько увеличивается, что выгодно, так как растет сила трения, а с ней и возможная движущая сила.

Так как автомобили с прицепами (для электровозов и тепловозов поездов) должны преодолевать трение колес движущих ими прицепов (вагонов), то приходится значительно увеличивать вес автомобиля (тепловоза), чтобы повысить предельную силу трения сцепления  $F_0$ .

Наконец, при торможении, когда к оси колеса прижимается тормозная колодка, создаются тормозный момент, его следует увеличивать постепенно, чтобы избежать нарушения условия (5.36) и не вызвать скольжения. Оно особенно опасно для перельсового транспорта, так как из-за малости среднего скольжения даже небольшие случайные скольжения, направленные не параллельно скорости, создают большое боковое ускорение. Автомобиль «записит», он становится неуравновешенным. Легко понять, что во избежание названного заноса автомобиль с задними ведущими колесами приходится выводить в управляемое состояние: сперва осторожно поворачивая



Если прекратить внешнее воздействие, сила дополнительного трения, прецессия мгновенно прекращается, так как перестает меняться момент механического импульса  $L_z$ . Дело в том, что дополнительный вращающий момент  $M_z$  определяет угловую скорость прецессии; поэтому при его исчезновении исчезает и скорость (и угол поворота, описанный за время  $\Delta t$  существования прецессии, конечно, остается). Привычным же для нас случаем является сообщение силой ускорения; при прекращении действия силы ускорение исчезает, но сохраняется приобретенная телом скорость.

Если прелессирующий гироскоп поставить на лист фанеры или твердого картона, который экспериментатор держит в руке, и быстро опустить лист вниз, то гироскоп начнет свободно падать, причем прецессия мгновенно прекратится и ось гироскопа во все время падения сохранит свое направление в пространстве.

В отсутствие трения прецессия продолжалась бы неопределенно долго. Силы трения уменьшают угловую скорость гироскопа и создают дополнительный момент механического импульса, заставляющий гироскоп вращиваться вокруг горизонтальной оси. Поэтому замедляющий свое вращение гироскоп в конце концов опрокидывается.

Довольно сложное явление сил трения удобнее обсудить, рассматривая поведение обычного волчка, опирающегося на тупую ось (у хорошего гироскопа ось также не идеально острая).

Пусть волчок, быстро вращаясь против часовой стрелки (если смотреть сверху) и обладая значительным моментом импульса  $L$  (рис. 5.26), случайно наклонился вправо. Если бы не было трения, то сила тяжести  $\vec{F}$  создала бы прирост импульса  $\Delta \vec{L}$ , направленный за чертеж, и волчок стал бы прецессировать вокруг вертикальной оси  $Y$  с угловой скоростью  $\Omega$ .

Но поскольку волчок опирается на тупое основание (в точке  $A$ ) и существует трение скольжения, направленное из-за чертежа к читателю, то возникает дополнительный прирост импульса  $\Delta \vec{L}$ , лежащий в плоскости чертежа и направленный слегка вверх. Складываясь с  $L$ , этот прирост заставляет  $L$  занять более вертикальное положение, т. е. волчок должен приподняться, что и наблюдается в действительности.

Конечно, это явление существует, лишь пока существует прецессия.

Способность гироскопа сохранять направление оси неизменным (в отсутствие трения) использу-

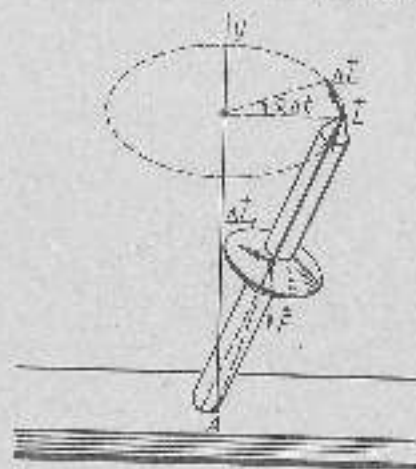


Рис. 5.26

ется в различных наводящих приборах, либо указывающих направление, либо автоматически устранивающих отклонения от заданного направления. Очень сложные конструкции для приборов здесь рассматриваться не могут.

## 5.10. Законы Ньютона и законы сохранения в механике

В нашем курсе обширный опытный материал по механике был обобщен в трех законах Ньютона. Как следствие, из них были выведены законы сохранения механического импульса, момента механического импульса и механической энергии для замкнутых консервативных систем. Затем закон сохранения энергии был обобщен и на немеханические виды энергии (например, внутреннюю энергию); при изучении СТО была установлена неразрывная связь между массой тела и его полной энергией, так что закон сохранения массы, постулированный Ньютоном, слился с законом сохранения энергии.

Не возможен и другой путь построения классической механики.

Можно постулировать законы сохранения и из них получить законы динамики. Так как понятие импульса и момента импульса обобщаются также на области немеханических явлений (в частности, на электромагнитные явления), то такой подход в некоторых отношениях является более общим. Строгий вывод дается в курсе теоретической физики. Здесь можно лишь показать на простых примерах, как законы Ньютона получаются из законов сохранения.

Подобный механической импульсе замкнутой системы

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \vec{V}M,$$

где  $\vec{V}$  — скорость движения центра масс;  $M$  — масса системы, сосредоточенная в центре масс (см. § 2.8).

Внутренние взаимодействия между телами системы не могут изменить полного импульса. Это утверждение равносильно первому закону Ньютона. Если же система подвергается внешнему воздействию, то импульс изменится. При этом (так как массы, по Ньютону, постоянны) можно писать для изменения импульса

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{V}}{dt}$$

и рассматривать правую часть уравнения как характеристику результата внешнего воздействия, назвав воздействие силой  $\vec{F}$ :

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}.$$

Таким образом получаем второй закон Ньютона: сила определяет ускорение, приобретаемое центром масс системы (или, в простейшем случае, свободной точкой).

Вернемся теперь к замкнутой системе (пусть она состоит из двух материальных точек), тогда

$$\sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}. \quad (5.39)$$

где  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  — внутренние силы, действующие между точками системы. Из (5.39) следует, что

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Эти силы не должны образовывать пару сил, так как это противоречило бы закону сохранения момента импульса (пара сил вызвала бы его изменение). Следовательно, силы должны быть направлены по прямой, проходящей через взаимодействующие точки. Таким образом, мы пришли к третьему закону Ньютона.

В теоретической физике будет показано, что законы сохранения неразрывно связаны со свойствами симметрии пространства и времени.

Здесь можно дать лишь очень неполное и нестрогое освещение этого глубокого по содержанию вопроса.

В современной физике установлено опытным путем и обосновано теоретически, что (по крайней мере в макромире и вдали от очень больших масс) пространство и время обладают следующими свойствами симметрии:

а) Пространство однородно. Это, в частности, означает, что при поступательном перемещении замкнутой механической системы из одного места в другое (без нарушения условий ее существования) ход физических процессов в ней не изменится. Следовательно, не изменится и ее полный импульс.

б) Пространство изотропно. Это, в частности, значит, что ход замкнутой механической системы как целого (без нарушения условий ее существования) не повлияет на дальнейший ход физических процессов в ней. Следовательно, сохранится и момент механического импульса системы.

в) Время однородно. Это, в частности, означает, что состояние и ход процессов в замкнутой системе не зависят от выбора начала отсчета времени. Можно показать, что отсюда следует сохранение энергии системы и независимость физических законов от времени.

г) Свойства пространства и времени таковы, что при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой, форма выражения физических законов не изменяется. Отсюда легко прийти к инерциальным системам отсчета, введенным Ньютоном в его первом законе.

Важность этих утверждений (часть из них может показаться очевидной) выяснится постепенно лишь при изучении теоретической физики.

## ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

### 6.1. Поступательное ускоренное движение системы отсчета. Сила инерции

Законы ньютоновской механики справедливы в инерциальных системах отсчета. Будут ли они выполняться в системах отсчета, движущихся с ускорением? Вопрос этот возникает вполне естественно, так как мы живем на вращающейся Земле (явно неинерциальной системе). Нужно выяснить, почему, несмотря на вращение Земли, в рассмотренных выше опытах получалось согласие с законами Ньютона.

Однако лучше начать с более простого случая: пусть система отсчета движется *поступательно* с некоторым ускорением относительно инерциальной системы отсчета (ИСО).

Для удобства сопоставления будем считать, что инерциальная система отсчета неподвижна. Очевидно, что при исследовании движений, когда все скорости, в том числе и относительные скорости самих систем отсчета, малы по сравнению со скоростью света в вакууме, мы можем пользоваться преобразованиями Галилея (см. § 2.6) и в соответствии с соотношением (2.11) утверждать, что ускорение неинерциальной системы отсчета (НИСО) будет одним и тем же в любой инерциальной системе. В огромном числе примеров неподвижной инерциальной системой можно считать даже Землю (когда ее собственным суточным вращением и ускоренным движением относительно Солнца и звезд можно пренебречь в условиях задачи).

Итак, пусть имеется неподвижная ИСО, связанная с Землей, и подвижная система, связанная, например, с ускоренно движущимся вагоном. Наблюдатели, находящиеся в каждой системе, описывают происходящие явления с точки зрения механики Ньютона. При этом предполагается, что они совершенно объективны и их толкования свободны от ошибок.

Наблюдатель, находящийся в ИСО, опишет многие явления, происходящие в подвижной системе, учитывая для их объяснения ускорение подвижной системы относительно неподвижной. Например, так будет объяснено опрокидывание назад бруска, стоящего в вагоне, получающем ускорение  $A$ , направленное вперед. При ускорении вагона благодаря трению покой приходит в движение основание бруска. На его еще неподвижный центр масс начинает действовать момент силы тяжести, отклоняющий брусок назад, причем возможно его падение.

Для наблюдателя, находящегося в подвижной неинерциальной системе (НИСО), никакого ускорения этой системы не существует:



она для него «неподвижна» и внезапное падение бруска по отношению к действию момента горизонтальной силы, приложенной к центру масс и направленной в сторону падения бруска. Эту силу называют силой инерции. Для наблюдателя в ИСО ее происхождение непонятно: ведь, с его точки зрения, никаких тел, взаимодействующих с бруском, кроме сцепления его основания с «неподвижной» опорой, нет.

Каждому знакомы своеобразные ощущения, которые испытывает стоящий пассажир в транспорте, движущемся ускоренно относительно Земли: при трогании с места или увеличении скорости движения на пассажира «начинает действовать сила», отклоняющая его назад, и, чтобы не потерять равновесия, он стремится наклониться вперед. Наоборот, при остановке транспорта, т. е. появлении ускорения, направленного против движения, корпус пассажира наклоняется вперед и ему приходится откидываться назад для удержания равновесия. Так как для пассажира в ИСО ускорения транспорта не существует, то движение, которое наблюдатель ИСО определял бы как движение по инерции (сохранение состояния неподвижности относительно Земли при трогании с места или неизменной скорости при остановке), наблюдатель ИСО определяет как ускоренное, происходящее под действием некоторой силы, которую в связи с этим не очень удачно и назвали «силой инерции». Еще раз подчеркнем, что эта сила есть только в ИСО, но наблюдатель в ИСО не сможет указать тел, взаимодействующих с которыми вызвало появление этой силы.

Теперь в полной мере ясно, что законы Ньютона, сформулированные для ИСО, в ИСО невыполнимы. Вернее, в ИСО не справедливы первый и третий законы Ньютона, а второй закон формально можно сохранить именно введением «сил инерции». Так как силы в ИСО не обязательно результат взаимодействия тел, третий закон в них, как уже отмечалось, неприемлем. Первый закон Ньютона также не выполняется — движение «по инерции» невозможно, так как тело, движущееся свободно в ИСО, в ИСО имеет ускорение. Возможность применения второго закона удобно пояснить количественным примером.

Пусть на тележке укреплен рама и на ней подвешен маятник. Тележка соединена лентой, переброшенной через блок, с гирей; опускаясь, гиря может сообщать тележке постоянное ускорение. Если тележка неподвижна (относительно Земли), то маятник висит вертикально. Если же она получит ускорение  $\vec{A}$ , то маятник отклонится назад (против ускорения тележки) и после нескольких качаний, которые мы не примем во внимание, установится под некоторым углом к вертикали; при этом его ускорение  $\vec{a}$  станет равным ускорению тележки  $\vec{A}$  ( $\vec{a} = \vec{A}$ ).

Свяжем с Землей неподвижную систему отсчета, а с тележкой — подвижную и попробуем исполнить явление в обеих системах.

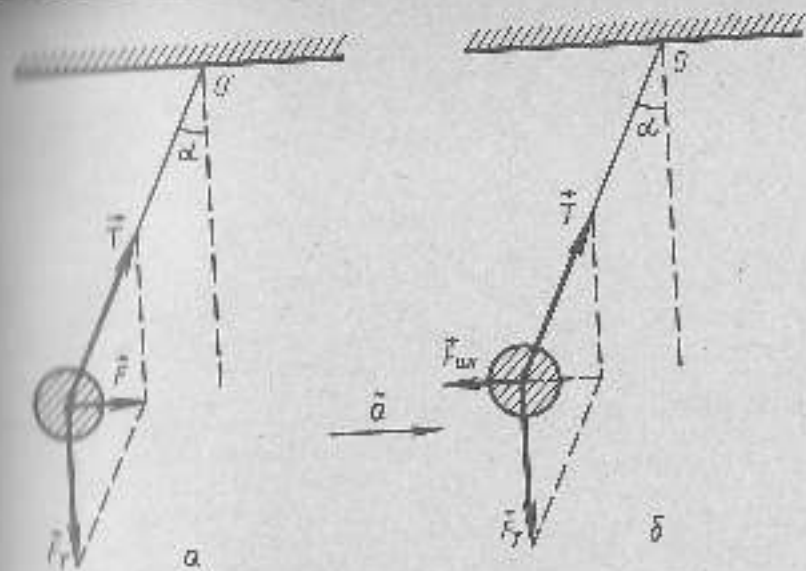


рис. 6.1

а) *Неподвижная система (ИСО)*. Когда тележка начала двигаться с ускорением, то она увлекла за собой и точку подвеса маятника (O на рис. 6.1, а). Сам же маятник еще остается в покое. Поэтому нить наклонилась, что привело к появлению сил, ускоряющей маятник. В установившемся состоянии сумма сил тяжести  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  маятника и натяжения нити  $\vec{T}$  дает силу  $\vec{F}$ , создающую ускорение  $\vec{a}$ :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{a}{g}. \quad (6.1)$$

Итак, явление силы  $\vec{F}$  связано с ускорением тележки (результат взаимодействия опускающейся гири с Землей). Таким образом, естественно, здесь законы Ньютона выполняются.

б) *Подвижная система (ИСО)*. Наблюдатель не знает о движении своей системы. Маятник отклонен от вертикали на угол  $\alpha$  и неподвижен относительно тележки (ускорение его в ИСО  $\vec{a}_0 = \vec{0} = -\vec{a} - \vec{A}$ ). Если применить второй закон Ньютона, то сумма действующих на маятник сил должна быть равна нулю. Следовательно, кроме силы тяжести и силы натяжения нити, существует еще одна сила — сила инерции  $\vec{F}_{ин}$  (см. рис. 6.1, б). Примем

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{ин} = \vec{0}.$$

Из написанных выше соотношений следует, что

$$\vec{F}_{ин} = -\vec{F}. \quad (6.2)$$

Таким образом, в ИСО второй закон Ньютона может быть формально сохранен путем отказа от третьего закона — приписав

вести силу инерции, для которой нельзя найти тело, взаимодействующее с которым вызывает ее появление.

В обоих приведенных примерах силу инерции называют гравитационной, так как рассмотренные системы имели только гравитационное ускорение.

Можно ли сказать, что описание движения в НИСО менее верно, чем в ИСО? Конечно, нет. Для описания движения можно выбрать любую систему отсчета.

Иногда говорят, что сила инерции — фиктивная сила, так как для неподвижной системы ее не существует. Но с таким же правом можно было бы назвать фиктивной силу, ускоряющую тело, так как она не существует для подвижной системы.

Говорят также, что подвижная система — система незамкнутой и что это обстоятельство и делает силу инерции не подчиняющейся третьему закону Ньютона. Но и эта точка зрения ошибочна, так как равномерно вращающаяся система также является инерциальной, хотя для равноускоренного вращения никаких внешних сил не требуется, и, следовательно, такая неинерциальная система может быть замкнутой. Поэтому термин «фиктивная» служит лишь напоминанием о том, что мы применяем второй закон Ньютона в ИСО, т. е. в условиях, для которых законы Ньютона в принципе справедливы, т. е. пользуемся им чисто формально; однако *хорошо термин «фиктивная» вообще не употреблять.*

Конечно, приведенные рассуждения справедливы и в более сложных случаях, когда в самой ИСО имеется ускоренное движение, например тело массой  $m$  движется относительно ИСО с ускорением. Тогда при переходе от ИСО к ИНСО, движущейся относительно первой поступательно с ускорением  $A$ , ускорения преобразуются по закону

$$\vec{a}_0 = \vec{a} - \vec{A}$$

где  $\vec{a}$  — ускорение тела в ИСО;  $\vec{a}_0$  — ускорение тела в ИНСО.

Силы преобразуются по закону

$$\vec{F}_0 = \vec{F} - \vec{F}_{ин}; \quad \vec{F}_{ин} = -m\vec{A}$$

где  $\vec{F}_0$  — сила в ИНСО;  $\vec{F} = m\vec{a}$  — сила, сообщаящая телу ускорение  $\vec{a}$  в ИСО.

При переходе от ИСО к ИСО правила преобразования таковы:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{A}; \quad \vec{F} = \vec{F}_0 - \vec{F}_{ин}$$

## 6.2. Энергетика движения и законы сохранения в ИНСО с поступательным ускорением

Так как в ИНСО третий закон Ньютона неприменим, то в этих системах отсчета энергетическое описание явлений усложняется. Покажем это на элементарном примере системы, состоящей из двух тел различной массы, взаимодействующих по закону тяготения.

Пусть сначала тела, имеющие массы  $M$  и  $m$ , расположены на одинаковом расстоянии  $R$  от центра  $R$ , закреплены и покоятся друг относительно друга.

Затем в момент  $t=0$  их освобождают и они начинают двигаться. Для простоты расчета примем, что перемещения очень малы по сравнению с расстоянием между телами, так что силы взаимодействия можно считать постоянными. На рисунке 6.2, а показано начальное состояние системы (масштаб расстояния не соблюден).

Задачу рассмотрим в трех системах.

а) Система, связанная с центром масс (ИСО, рис. 6.2, б). Начальный импульс равен нулю. Начальная энергия, потенциальная, зависящая только от взаимного положения тел и равная  $U$ .

На тела действуют внутренние силы

$$\vec{F} = M\vec{A} \quad \text{и} \quad \vec{f} = m\vec{a}, \quad \text{причем} \quad F = f = G \frac{mM}{R^2}$$

$\vec{F}$  сонаправлена с осью  $X$ ,  $\vec{f}$  направлена в противоположную сторону. Тела приобретают ускорения, связанные соотношением

$$\frac{A}{a} = \frac{m}{M}$$

и проходят пути  $X = VT$  и  $x = aT$ .

В момент  $t=T$  скорости тел равны соответственно:

$$\vec{V} = \vec{A}T; \quad \vec{v} = \vec{a}T; \quad \frac{V}{v} = \frac{m}{M}$$

Кинетическая энергия системы в этот момент есть:

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

Она численно равна убыли потенциальной энергии, определенной модулями перемещений  $x$  и  $X$  тел за время  $T$ :

$$W_k = -\Delta U$$

Импульс системы

$$\vec{p} = M\vec{V} + m\vec{v} = 0; \quad (6.3)$$

он равен начальному импульсу  $\vec{p}_0 = 0$ .

Таким образом, законы сохранения импульса и энергии выполняются.

б) Система отсчета, связанная с массивным телом (ИНСО, рис. 6.2, в). Наблюдатель, связанный с этим телом, обнаружит, что тело массой  $m$  движется к нему с ускорением  $a_0$ , причем

$$a_0 = a + A$$

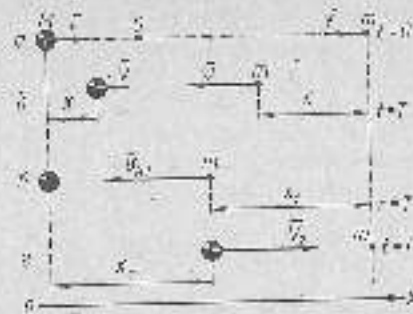


Рис. 6.2

и в момент  $T$  имеет скорость  $\vec{v}_n = \vec{a}T$ . Поэтому он вводит силу, действующую на тело массой  $m$ , равную

$$\vec{f}_n = m\vec{a}_n, \text{ или } f_n = m(a + A) = ma + mA.$$

Происхождение силы, имеющей модуль  $mA$ , этому наблюдателю неизвестно.

Затем он вычисляет кинетическую энергию в момент  $T$ :

$$W_n = \frac{1}{2} m v_n^2 = W_1 + \frac{1}{2} V^2 (m + M).$$

Эта энергия превышает убыль потенциальной энергии  $\Delta U_n$ , так как изменение расстояния между телами в случаях а) и б) одинаково, а потому  $\Delta U = \Delta U_n$ .

Итак, в ИИСО закон сохранения энергии не выполняется. Нарушается и закон сохранения импульса, так как при  $t=0$  импульс равен нулю, а в момент  $T$  он отличен от нуля.

Наблюдатель, находящийся в ИСО, ознакомившись с рассуждениями наблюдателя в ИИСО, скажет следующее.

Модули ускорения и скорости, введенные в ИИСО, равны:

$$a_n = a + A; \quad v_n = v + V.$$

Модуль силы

$$f_n = f + mA,$$

т. е. движущийся наблюдатель ввел силу инерции

$$\vec{f}_{in} = -m\vec{A}.$$

Кинетическая энергия  $W_n$  превышает кинетическую энергию  $W_1$

$$\Delta W_1 = W_n - W_1 = \frac{1}{2} V^2 (m + M).$$

Работа силы инерции на перемещении, совершенном малым телом, есть:

$$-mA \left[ -\frac{1}{2} (V - v) T \right] = \frac{1}{2} mV(V - v) - \frac{1}{2} V^2 \left( m + \frac{mv}{V} \right) = -\frac{1}{2} V^2 (m + M).$$

т. е. она как раз равна избытку кинетической энергии. Отношение

$$\frac{\Delta W_n}{W_1} = \frac{m}{M}$$

при сильном различии масс (например, Земля и камень) очень мало, поэтому *большое тело является почти инерциальной системой*.

в) Система отсчета, связанная с телом массой  $m$  (ИИСО, рис. 6.2, в). Рассуждая прежним образом, подвижный наблюдатель введет силу инерции

$$f_{i2} = M(A - a)$$

и вычислит кинетическую энергию

$$W_{i2} = \frac{1}{2} M (V + v)^2 = W_1 + \frac{1}{2} v^2 (M + m),$$

которая опять окажется больше изменения потенциальной энергии. Кроме того, он найдет, что импульс системы изменился. Происхождение силы, имеющей модуль  $MA$ , для наблюдателя в ИИСО тоже ему неизвестно.

Наблюдатель из ИСО опять объяснит результаты, полученные в ИИСО, тем, что была введена сила инерции

$$\vec{f}_{i1} = -M\vec{a},$$

которая совершила работу

$$Ma \frac{1}{2} (V + v) T - \frac{1}{2} v^2 (M + m) = W_{i2} - W_1 = \Delta W_{i2}.$$

При этом

$$\frac{\Delta W_{i2}}{W_1} = \frac{M}{m}.$$

т. е. данная система ИИСО очень далека от инерциальности.

В заключение сделаем одно важное замечание: в данной ИИСО силы инерции сообщают всем телам одинаковые ускорения  $A$  независимо от массы тел; в этом отношении они подобны силам тяжести. К этому важному сходству мы еще вернемся в главе 11.

### 6.3. Равномерно вращающаяся система отсчета.

#### Центробежная сила

Перейдем к равномерно вращающейся системе отсчета. Поставим на столешке центробежной машины узкий длинный сосуд с плоскими стенками, частично заполненный жидкостью, и укрепим на нем раму с несколькими маятниками. Сосуд совместим с одним из диаметров столешки. Приведем машину в равномерное вращение вокруг вертикальной оси. При этом маятники отклоняются от вертикали, а уровень жидкости искривится (рис. 6.3).

Оба эффекта выражены тем сильнее, чем больше угловая скорость вращения прибора  $\omega$  и чем дальше находятся маятники (или частицы жидкости) от оси вращения.

Обсудим эти явления в неподвижной ИСО и подвижной ИИСО, связанной с вращающейся столешкой.

а) *Неподвижная система (ИСО)*. Так как маятник вращается, то должна существовать сила  $F$ , сообщающая ему центростремительное ускорение. Она возникает благодаря наклону нити подвеса (см. § 6.1). Для возникновения силы, сообщающей жидкости центростремительное ускорение, ее поверхность должна искривиться. Перемещение частиц жидкости происходит вследствие нарушения ее первоначального покоя.

Каковы условия равновесия отклоненного маятника? В устойчивом состоянии он находится на расстоянии  $\rho$  от оси враще-

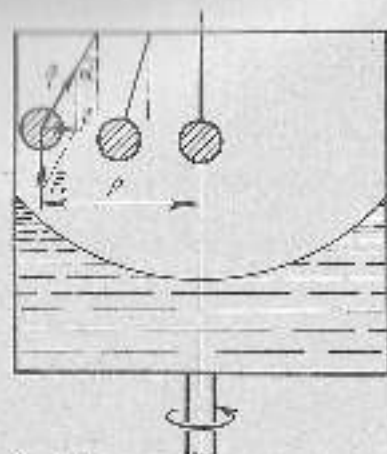


Рис. 6.3

ном и отклонен на угол  $\alpha$  (см. рис. 6.3). Поэтому сила, сообщающая маятнику центростремительное ускорение, равна:

$$\vec{F} - \vec{F}_r + \vec{N} = -m\omega^2 \vec{r}. \quad (6.4)$$

Как видно из чертежа,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{F_r} = \frac{\omega^2 r}{g}. \quad (6.5)$$

И этим объясняется поведение маятников: для центрального маятника  $r=0$ , и он не отклоняется от вертикали. Подобным же образом объясняется и поведение жидкости. Ее поверхность искривляется до тех пор, пока в каждой точке не будет выполняться условие (6.4), где роль натяжения играет сила реакции  $N$  нижележащих слоев жидкости, нормальная к касательной поверхности в рассматриваемой точке (рис. 6.4, правая часть). Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dr}{dz} = \frac{\omega^2 r}{g}. \quad (6.6)$$

Следовательно, поверхность жидкости вертикальной плоскостью, проходящей через ось вращения, ограничена параболой

$$g = \frac{\omega^2 r^2}{2z},$$

а вся поверхность жидкости является параболоидом вращения.

б) *Подвижная система ИКСО* — система отсчета, связанная с вращающимся ступицей. Если мы хотим сохранить второй закон Ньютона, то должны ввести силу инерции  $F_{ц.и.}$  (рис. 6.4, слева), удовлетворяющую условию

$$\vec{F}_{ц.и.} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

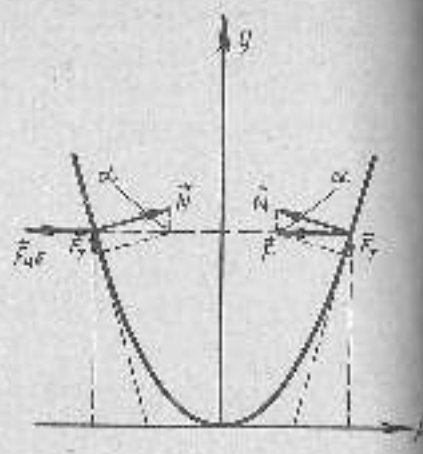


Рис. 6.4

Следовательно, получаем:

$$\vec{F}_{ц.и.} = -\vec{F} - m\omega^2 \vec{r}. \quad (6.7)$$

Эту силу принято называть *центробежной силой инерции*.

Из (6.7) следует, что центробежная сила инерции при медленных вращениях невелика. Именно поэтому вращения Земли вокруг своей оси (так же, как ее обращение вокруг Солнца) не сказывались на проводившихся ранее опытах, как и на большинства явлений, происходящих на Земле.

Но можно указать случаи, когда вращение проявляется. Приним Землю за однородный шар. Как известно, однородный шар притягивает тела с силой  $\vec{F}$ , направленной строго к центру и зависящей от расстояния до центра. Но так как тело, лежащее на Земле, участвует в ее вращении вокруг оси, то на него должна действовать сила  $\vec{F}_{ц.и.}$ , сообщающая центростремительное ускорение (неподвижная система отсчета). Поэтому (рис. 6.5) сила давления на поверхность Земли (т. е. вес тела) должна зависеть от широты. На полюсе  $\vec{F}_{ц.и.} = \vec{0}$ , поэтому вес равен силе притяжения. На экваторе же различие должно быть наибольшим. Однако даже здесь оно не очень велико. Действительно, приняв средний радиус Земли равным  $R = 6.4 \cdot 10^6$  м, находим:

$$a_{ц.и.} = (7.3 \cdot 10^{-8})^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \text{ м/с}^2 = 3.4 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2,$$

т. е. около 0,3% ускорения свободного падения. Кроме того, вектор  $\vec{F}_r = \vec{F} - \vec{F}_{ц.и.}$  отклонен от радиуса  $R$  на малый угол  $\beta$ , составляющий доли градуса и зависящий от географической широты.

Это незначительное влияние собственного вращения Земли могло бы быть измерено современными методами без труда. К сожалению, оно маскируется влиянием других причин — нестройной шарообразностью Земли и ее неоднородностью. Известно, что полярный радиус Земли меньше экваториального (примерно на 0,3%). Поэтому ускорение свободного падения, зависящее от радиуса, на экваторе меньше, чем на полюсе. Различие составляет около 0,6%, т. е. вдвое превышает уменьшение ускорения, обусловленное собственным вращением Земли.

Если бы центробежная сила (ИКСО) превратила силу тяготения тела, находящегося на экваторе, то тело не могло бы участвовать во вращении Земли и оторвалось бы от нее.

Необходимая для этого угловая скорость определяется условием

$$m\omega^2 R = mg,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = 1,25 \cdot 10^{-1} \text{ с}^{-1}.$$

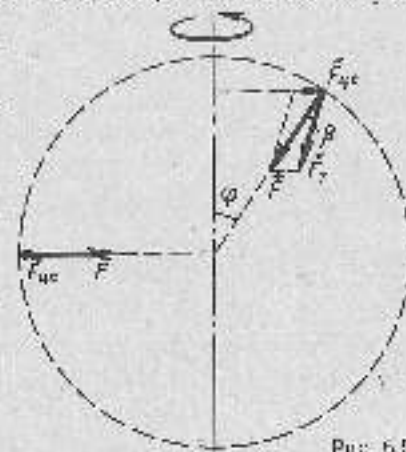


Рис. 6.5

Эта величина примерно в десять раз превышает действительную угловую скорость вращения Земли.

Если тело отсчета равномерно вращается, то для поддержания этого движения не требуется никаких внешних сил и систему можно считать замкнутой. Однако находящиеся там тела испытывают (с точки зрения наблюдателя в ИИСО) действие центростремительных сил инерции, если они неподвижны относительно системы отсчета.

Отметим еще одно важное обстоятельство: если наблюдатель в ИИСО обнаружит один-единственный маятник, отклоненный от вертикали, то без дополнительных исследований он не сможет установить, движется ли ИИСО с поступательным ускорением или же она вращается (относительно некоторой ИСО).

В заключение подчеркнем, что центростремительная сила всегда равна по модулю центростремительной силе и противоположна ей по направлению: ведь во вращающейся ИИСО центростремительная сила всю уравновешивается и никакого ускорения нет.

#### 6.4. Движение тела во вращающейся системе отсчета.

##### Сила Кориолиса

Если тело перемещается во вращающейся системе отсчета, то для описания его движения в ИИСО нужно ввести еще одну силу инерции, называемую *силой Кориолиса* (в честь французского механика).

Чтобы показать действие этой силы, укрепим над диском, свободно вращающимся вокруг оси, проходящей через его центр, линейку, совпадающую с одним из его радиусов  $R$  (эта линейка играет роль неподвижной ИСО). Проведем мелом от центра диска вдоль линейки, при этом на неподвижном диске мел опишет прямую  $OA$  (рис. 6.6).

Если же диск равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ , то траекторией мела на нем будет кривая  $OBC$ ; при обратном движении мела получится траектория  $CDO$ . При периодическом движении мела вдоль линейки (с постоянной по модулю скоростью  $v$ ) траектории получатся в виде розетки. Источником наблюдаемых фактов в двух системах отсчета.

а) *Неподвижная система (ИСО)*. Пока мел движется по линейке, проложив ее за время

$$\Delta t = \frac{R}{v},$$

диск успевает повернуться на угол, равный

$$\Delta \varphi = \omega \Delta t.$$

Поэтому мел попадет в точку  $C$ , причем длина дуги  $AC$  равна:

$$\Delta l = R \Delta \varphi = \omega R (\Delta t)^2. \quad (6.8)$$

В ИСО, конечно, никаких сил инерции вводить не приходится.

б) *Подвижная система (ИИСО)* (связана с диском). Так как мел движется по криволинейной траектории  $OBC$ , то на него должна была действовать сила; если считать ее постоянной, то он испытывал мелу ускорение

$$a = \frac{2\Delta v}{\Delta t^2}$$

Неподвижный наблюдатель (из ИСО) укажет наблюдателю в ИИСО, на вращающемся вращении его системы отсчета, на связь (6.8) между  $\Delta l$  и  $\Delta t$ . Тогда последний получит для ускорения  $a$  значение

$$a = 2\omega v.$$

Вектор  $\vec{a}$  во все время движения перпендикулярен векторам  $\vec{v}$  и  $\vec{\omega}$ . В курсе теоретической физики будет строго доказано, что для произвольного направления скорости тела во вращающейся системе отсчета получается:

$$\vec{a} = -2[\vec{\omega}, \vec{v}].$$

Это ускорение называют *ускорением Кориолиса*. Умножив его на массу движущегося тела  $m$ , наблюдатель в ИИСО получает силу Кориолиса

$$\vec{F}_c = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}]. \quad (6.9)$$

Такой же эффект наблюдается, если на платформе, свободно вращающейся вокруг вертикальной оси, расположить пушку  $P$  и мишень и произвести два выстрела: один — при неподвижной платформе (точка попадания  $A$ ), другой — при ее вращении (точка попадания  $B$ , рис. 6.7).

При количественном рассмотрении этого опыта (оно несколько сложнее предыдущего, и мы его производить не будем) нужно учесть, что снаряд покидает пушку, имея не только скорость  $v$ , но и перпендикулярную ей скорость  $\omega r$ , так как он участвовал во вращении платформы.

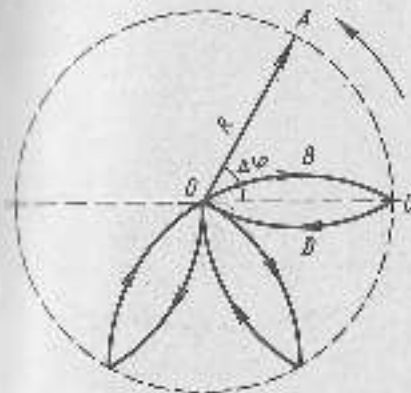


Рис. 6.6

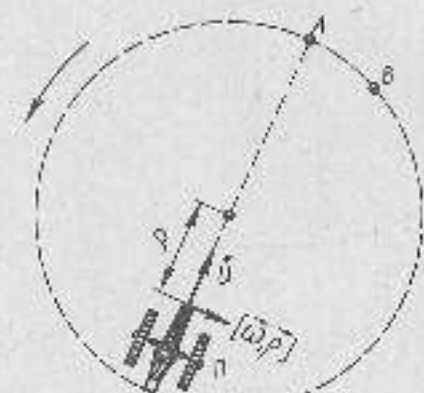


Рис. 6.7

С точки зрения неподвижного наблюдателя (ИСО) спярд смещается вправо от точки прицеливания по двум причинам:

а) он имеет составляющую начальную скорость  $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ , направленную влево;

б) диск поворачивается, унося влево точку прицеливания А. С точки зрения наблюдателя, находящегося на диске, снаряд отклоняется вправо под действием силы Кориолиса

$$F_c = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}].$$

Направление этой силы совпадает с направлением вектора  $[\vec{\omega}, \vec{v}]$  (на рисунке угла не показана).

На Земле проявление силы Кориолиса не очень заметно, так как в обычных условиях скорости  $\vec{v}$  пешехода, да и угловая скорость собственного вращения Земли также мала (угловая скорость обращения Земли вокруг Солнца еще меньше и может не учитываться). Но с силой Кориолиса (т. е. с вращением Земли) связываются при вычислении траекторий спутников, при стрельбе из дальновидных орудий.

Кроме того, малая сила, действуя длительное время, может дать ощутимый эффект. В качестве примера рассмотрим реку, текущую в северном полушарии в направлении меридиана с севера на юг (рис. 6.8). Прибавив формулу (6.9) к частице воды в реке, находим, что сила Кориолиса направлена в сторону правого берега. Поэтому он должен подниматься сильнее, чем левый, и за большие промежутки времени этот эффект может стать вполне заметным. Действительно, в ряде случаев это предположение подтверждается. Если река течет с юга на север, то сила Кориолиса меняет знак, так что снова поднимается правый берег.

Однако так как условия течения воды в реках очень сложны, то факт преимущественного подымания правого берега не следует целиком приписывать действию силы Кориолиса.

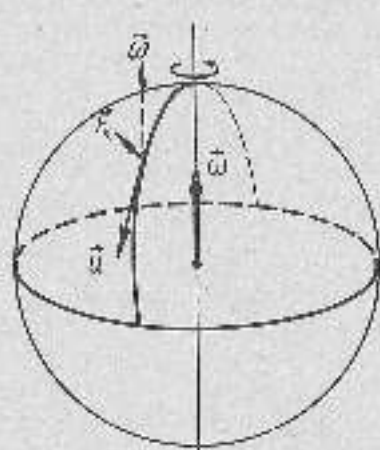


Рис. 6.8

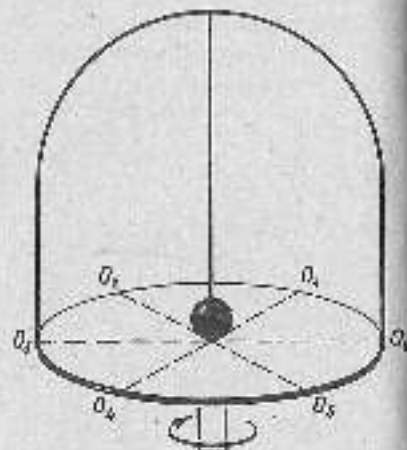


Рис. 6.9

В неподвижной системе координат (ИСО) рассмотренный эффект объясняется тем, что скорость движения частиц земли, образующих берега реки, обусловленная вращением Земли и направленная по касательной к кругу широты, зависит от широты. Очевидно, эта скорость растет по мере приближения к экватору. Поэтому струя, текущая, например, на юг, переходит в область больших скоростей. Так как Земля вращается с запада на восток, то струя будет оказывать более сильное влияние на западный (правый) берег.

Действие кориолисовой силы на потоки воздуха проявляется в распределении ветров, дующих над гладью океана; однако и здесь существует ряд дополнительных причин, определяющих направление ветра.

В чистом виде сила инерции Кориолиса проявляется в знаменитом опыте Фуко (1850 г.). Модель опыта легко показать, установив на столшке петробежной доски вертикальную рамку и укрепив на ней маятник (рис. 6.9). Заставим маятник качаться в плоскости рамки и начнем медленно поворачивать столшк вокруг вертикальной оси. При этом плоскость колебаний маятника сохранит свое положение относительно стен комнаты, а плоскость рамки последовательно занимает положения  $O_1O_2, O_3O_4, O_5O_6$ .

С точки зрения наблюдателя в неподвижной системе (ИСО) это вполне понятно: маятник не участвует во вращении столшкы, а доскаедный поворачивается в пространстве. С точки зрения наблюдателя в подвижной системе (ИСО) плоскость колебаний маятника поворачивается, и, следовательно, на маятник действует сила инерции Кориолиса (наблюдатель не видит рамки).

Реальный опыт Фуко, доказывающий суточное вращение Земли, удается в высокой аудитории с большим маятником (длина несколько метров). Для фиксации плоскости колебаний маятника его освещают сильных источником света в первоначальной плос-

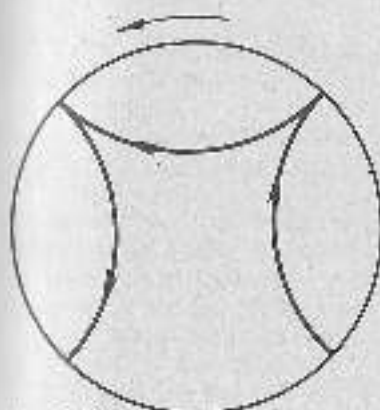


Рис. 6.10

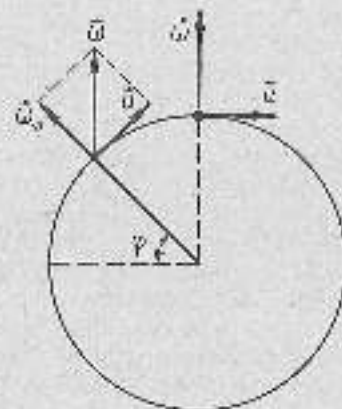


Рис. 6.11

кости качаний; полученную на экране темн нить подвеса отмечают, например, светлой чертой.

При первых колебаниях темн нить совпадает с этой чертой. Но через 5—10 мкс Земля успевает повернуться на 1—2° и смещение темн становится сплошь отчетливым. Чтобы запустить маятник без случайного бокового толчка (толчок искажал бы результаты опыта), маятник закрепляют в положении наибольшего отклонения нити от тонкой нити, а затем нить пережигают. Так как при этом маятник уже обладает скоростью, присущей той точке земной поверхности, где он покоился, то описываемая им розетка (рис. 6.10) отличается от розетки, показанной на рисунке 6.6: характерно, что маятник не проходит через положение равновесия (центр окружности). Впрочем, в реальном опыте Фуко период обращения Земли вокруг оси в тысячи раз превышает период колебаний маятника (а на рис. 6.10 это отношение равно всего лишь  $\frac{2}{1}$ ). Поэтому лепески реальной розетки искривлены так незначительно, что заметить это на глаз невозможно. Наблюдатель видит лишь постепенный поворот плоскости колебаний маятника вокруг вертикали, проходящей через точку подвеса маятника, и, следовательно, относительно стен здания, где находится маятник.

Легко сообразить, что для наблюдателя, находящегося на Земле, на долгие плоскости колебаний поворачивается с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли.

При этом вектор  $\vec{\omega}$  и вертикаль параллельны друг другу (рис. 6.11), так как все меридиональные плоскости перекаиваются по оси вращения Земли. Векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{v}$  при этом взаимно перпендикулярны. Если же маятник находится в точке с географической широтой  $\varphi$ , то нужно учитывать вертикальную (для данной точки) составляющую вектора  $\vec{\omega}$ :

$$\omega_{\perp} = \omega \sin \varphi.$$

Она и определяет угловую скорость поворота плоскости качаний маятника.

На экваторе маятник, колеблющийся в плоскости меридиана, не будет поддержан действием силы Кориолиса, так как векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{v}$  параллельны.

Если маятник качается в плоскости экватора, то сила Кориолиса направлена по радиусу Земли и в зависимости от направления скорости  $\vec{v}$  кориолисово ускорение то будет прибавляться к ускорению свободного падения, то вычитаться из него. Поэтому периоды колебаний двух одинаковых маятников, колеблющихся на экваторе в его плоскости и в плоскости меридиана, различны. Однако это различие настолько мало, что его невозможно обнаружить в лекционном опыте. Подчеркнем, что последние рассуждения об опыте Фуко мы вели в ИСО.

## УПРУГИЕ СИЛЫ. КОЛЕБАНИЯ

### 7.1. Упругие деформации. Закон Гука

В предыдущих главах книги сформулированы основные законы механики и обсуждены области их применения. Остальные главы посвящены более детальному анализу нескольких важных видов движения. Их рассмотрение проводится применительно к нерелятивистским скоростям.

В § 1.7—1.9 и 5.6 мы уже познакомились с колебательным движением и простейшими колебательными системами — маятниками. Колебательное движение возникает упругими или квазиупругими силами (или моментами этих сил), возвращающими тело в положение равновесия и по модулю пропорциональными линейному или угловому смещению:

$$F = -kx; \quad M = -k_1 \alpha; \quad k, k_1 \text{ — постоянные.}$$

Упругие силы возникают в телах при их деформации. Примером квазиупругой связи, т. е. связи, не связанной с упругой деформацией, но также пропорциональной смещению, может служить составляющая силы тяжести, возвращающая физической маятник в положение равновесия.

Прежде чем перейти к более глубокому изучению колебаний, кратко остановимся на основных видах упругих деформаций тел.

При действии силы на любое физическое тело его объем и форма могут измениться. Хорошо известно, что изменение формы жидкости или газа достигается сколь угодно малыми силами — в этих состояниях вещество не обладает упругостью формы. В твердом же состоянии упругость формы тела — для изменения формы твердого тела требуются значительные силы.

Но во всех агрегатных состояниях вещество обладает значительной упругостью объема — для его изменения требуются более или менее значительные силы. Газы обладают упругостью объема при сжатии. Но они самопроизвольно занимают сколь угодно большой предоставленный им объем. Это объясняется беспорядочным движением молекул газа, не имеющих определенных положений равновесия. В твердом теле частицы имеют определенные положения равновесия (точнее, хаотически колеблются около них), образуя так называемую кристаллическую решетку. При растяжении тела проявляются силы притяжения между его частицами; при сжатии на первый план выступают силы отталкивания, действующие между ними; в обоих случаях твердое тело сопротивляется изменению объема. Силы притяжения и отталкивания различно зависят от расстояния; в положении равновесия частота сумма этих сил равна нулю.

Примерная зависимость сил притяжения  $F_{пр}$  и отталкивания  $F_{от}$  от расстояния для случая двух молекул (одна из них находится в начале координат, другая — на расстоянии  $r$ ) показана на рисунке 7.1: положению равновесия соответствует расстояние  $r_0$ .

Имея кристаллическую решетку, твердое тело должно обладать в разных направлениях различиями по значению характеристик механических свойств (упругость, прочность), так как равновесные расстояния между частицами в разных направлениях различны. Однако многие интересные для техники материалы являются монокристаллами (единичными макроскопическими кристаллами). Они состоят из множества микркристаллов, беспорядочно расположенных в теле (поликристаллические тела). При этом анизотропия сглаживается и такие материалы оказываются практически однородными и изотропными.

В жидкости также отчетливо проявляются силы притяжения и отталкивания, хотя положения равновесия частиц жидкости не так фиксированы, как в твердом теле.

Теория упругости оперирует со значениями модулей различных деформаций (они определяются на опыте), но в ее задачи совершенно не входит объяснение причин, по которым какой-либо модуль имеет то или иное численное значение. Объяснение этого относится к области молекулярной физики и требует довольно обширных сведений о междумолекулярных силах. Мы вернемся к этому вопросу в последнем разделе курса, где будут рассмотрены идеи современной физики твердого состояния. Здесь лишь укажем, что все эти силы являются электромагнитными. Гравитационные силы, действующие между частицами тела, значительно слабее и не играют существенной роли.

Опыт показывает, что между внешней силой и создаваемой ею деформацией существуют сложные связи. Так, при растяжении прямого стержня сечением  $S$  и длиной  $l$  при малых силах удлинение  $x$  пропорционально силе  $F$  (участок  $OA$  кривой на рис. 7.2). Если, начиная с некоторого значения, уменьшать силу,

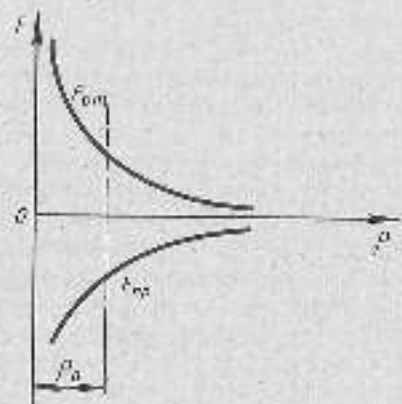


Рис. 7.1

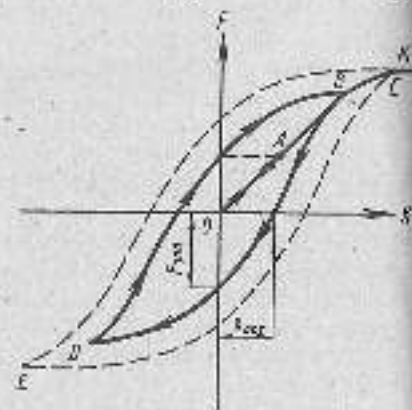


Рис. 7.2

то тело проходит через прежние состояния ( $AO$ ) и после прекращения действия силы восстанавливается начальная длина. Такие деформации называются упругими.

Полная работа сил упругости за цикл  $OAO$  равна нулю, и внутренняя энергия тела не изменяется. С такими деформациями, когда после прекращения действия силы деформация полностью исчезает, мы уже встречались (см. § 3.5).

Но сказанное верно лишь до определенного предела, называемого пределом упругости (точка  $A$ ). При больших силах деформации начинает расти быстрее силы (участок  $AC$ ). Если, выйдя из состояния  $B$ , начать уменьшать силу, то тело не пройдет уже через прежние состояния, деформация «отстает» от силы; при нулевой силе существует остаточная деформация  $x_{ост}$ , ее можно уничтожить, приложив силу противоположного направления, равную по модулю  $F_{ост}$ , иногда называемую «удерживающей силой».

При дальнейших изменениях силы получится зависимость, изображаемая кривой  $BDB$ ; увеличивая силу, мы снова приходим к состоянию  $B$ . Это явление — запаздывание деформации относительно силы — называется «механическим гистерезисом». Можно показать, что площадь петли гистерезиса  $BDB$  служит мерой работы, затраченной при получении деформации; эта работа идет на увеличение внутренней энергии тела — оно нагревается. Если первоначальное растяжение происходило до состояния, изображаемого точкой  $C$ , а затем сила уменьшалась, то состояния тела изображаются кривой  $CE$ ; при последующем увеличении силы получается верхняя кривая  $EC$  и петля замыкается.

Неупругие деформации существуют до предела прочности (точка  $K$ ). После превышения последнего деформация непрерывно растет (без увеличения силы), и в конце концов тело разрушается в одном из сечений, случайно оказавшемся более слабым, чем другие.

Далее нас будет интересовать лишь упругие деформации; при этом мы совершенно не будем касаться природы упругих сил, возникающих в теле, и зависимости от структуры тел постоянных коэффициентов в формальных законах, описывающих механические свойства тел (например, в законе Гука). Не учитываются также и влияния случайных неоднородностей, всегда имеющихся в реальных телах.

Рассмотрим прямой стержень длиной  $l$  и сечением  $S$ . Пусть он закреплен вдоль оси  $A$  и растягивается (или сжимается) силой  $F$ . Деформацию испытывает каждый элемент длины тела, а внешняя сила действует на все его сечение, поэтому более содержательно рассматривать относительную деформацию (например, удлинение  $\epsilon = \frac{x}{l}$ ) и силу, действующую на единицу площади сечения.

Представим сечение вектором  $\vec{S}$ , направленным по внешней нормали к сечению; модуль вектора принимается численно рав-



ных площади сечения  $S$ . Тогда между силой  $F$ , вызывающей деформацию, и длиной существует соотношение:

$$F = \sigma S,$$

где скалярная величина  $\sigma$ , называемая *напряжением*, характеризует деформацию лучше, чем сила  $F$ . Действительно, если мысленно выделить некоторый элемент деформируемого тела, то поскольку он находится в равновесии, на него со стороны соседних слоев действуют равные по модулю и противоположные по направлению силы. Поэтому в каждой точке тела существует напряжение  $\sigma$ .

Напряжение выражается в дин/см<sup>2</sup> (Па). Из курса школьной физики известно, что

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2.$$

Напряжение положительно при растяжении тела и отрицательно при сжатии.

Так как при упругих продольных деформациях усилием сила

$$\vec{F} = kx, \quad (7.1)$$

то, переходя к модулям векторов, получим:

$$\sigma S = \Delta l k.$$

Введя обозначение

$$k = E \frac{S}{L},$$

получаем:

$$\sigma = E \epsilon. \quad (7.2)$$

где постоянная  $E$  — *модуль продольного растяжения* (или *модуль Юнга*) — не зависит от размера тела, но определяется только свойствами материала.  $L$  выражается в тех же единицах, что и  $\sigma$ .

Из сказанного становится ясно смысл термина «жесткость»  $k$  применительно к стержню: жесткость определяется материалом стержня ( $E$ ) и отношением его поперечного сечения к длине ( $S/L$ ).

Уравнения (7.1) и (7.2) представляют собой закон упругих деформаций — так называемый *закон Гука*, полученный эмпирически и сформулированный в XVII в.

Обычно при достижении истинного предела упругости по оси откладывают относительную деформацию  $\epsilon$  и напряжение  $\sigma$  (на рис. 7.2 были отложены пропорциональные им величины  $x$  и  $F$ ).

При растяжении сечение тела сужается. Это можно наблюдать на опыте.

На вертикальный резиновый шнур плотно намотана металлическая шайба; при растяжении шнура она сжимается вниз.

Можно также считать  $S$  площадью, а  $L$  — длиной, деформированного элемента. Выбранный нами объект был связан с выбором вектора Юнга (8.2.2).

Это и свидетельствует об уменьшении поперечного сечения шнура. Что же касается изменения объема, то, как показывает опыт, он при растяжении всегда увеличивается, а при сжатии — уменьшается. Обсудим это. Пусть стержень имеет круговое сечение радиусом  $r$ . *Поперечной деформацией* при растяжении называют величину

$$\epsilon_{\text{пер}} = \frac{\Delta r}{r}. \quad (7.3)$$

Изменение объема при растяжении такого цилиндра составляет

$$\Delta V = \pi r^2 h [(1 + \epsilon)(1 + \epsilon_{\text{пер}})^2 - 1] = \pi r^2 h (\epsilon + 2\epsilon_{\text{пер}}).$$

Так как более высокими степенями малых относительных деформаций можно пренебречь.

Отношение  $\frac{\epsilon_{\text{пер}}}{\epsilon}$  называют *коэффициентом Пуассона*  $\nu$ . Так как  $\Delta V > 0$ , то всегда выполняется неравенство

$$\nu < 0.5. \quad (7.4)$$

У большинства материалов  $\nu$  близко к 0.5 и показать на опыте малое изменение объема трудно; однако у пробки и торнадо меньше. Поэтому, закрыв пробку на дне герметически закрытого сосуда, соединенного с манометром, и сжимая ее, легко обнаружить уменьшение давления воздуха в сосуде, доказывающее, что объем пробки уменьшается. Сжатие пробки осуществляется следующим образом. На ее торце надевается металлическая шапочка (диск с загнутыми краями хрями). К центру диска привинчивается проволока. Она пропускается через узкий вертикальный канал, просверленный по оси пробки, в малое отверстие в дне сосуда, просверленное на продолжении оси пробки. Инспектор следит за нижним концом проволоки, сжимая пробку.

При продольном растяжении объем увеличивается, но это трудно продемонстрировать.

Кроме указанных выше, применяются еще две характеристики упругих материалов: *предел упругости*  $\sigma_{\text{уп}}$  — максимальное напряжение, при котором деформация еще остается упругой, и *предел прочности*  $\sigma_{\text{пр}}$  — напряжение, при котором возникает текучесть материала, приводящая к его разрыву.

Упругие характеристики для стали и свинца приведены в таблице.

	$\sigma_{\text{уп}}$ , Па	$\sigma_{\text{пр}}$ , Па	$\nu$ , Па
Сталь	$2.3 \cdot 10^8$	$7.9 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-4}$
Свинец	$1.6 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-4}$

Из (7.2) видно, что даже на пределе упругости относительная деформация растяжения невелика:

$$\epsilon = \frac{\sigma_{\text{уп}}}{E} = 1.6 \cdot 10^{-8}.$$

Отметим важную особенность малых деформаций. Для них характерно, что упругие напряжения  $\sigma$  и деформации  $\epsilon$  возникают таким образом, как если бы других напряжений и деформаций не было, т. е. они подчиняются принципу суперпозиции. При воздействии больших сил, когда  $\sigma > \sigma_{\text{пред}}$ , принцип суперпозиции неприменим.

В частности, именно принцип суперпозиции был нами использован при вычислении изменения объема в случае растяжения цилиндра: возникновения продольной  $\epsilon$  и поперечной  $\epsilon_{\text{поп}}$  деформаций мы считали независимыми.

Можно показать, что любые упругие деформации всегда могут быть сведены к простейшим и характерные для них упругие постоянные могут быть выражены через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\mu$ , поэтому последние полностью характеризуют упругие свойства однородного изотропного материала.

Рассмотрим теперь некоторые другие типы деформаций. При всестороннем сжатии (эта деформация для газа или жидкости достигается при помещении их в сосуд с перемещающимися поршнями; если при этом в сосуде помещено твердое тело, то и оно подвергается всестороннему сжатию) относительное изменение объема  $V$  есть:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\sigma}{\beta}, \quad \sigma < 0. \quad (7.5)$$

Модуль объемного сжатия  $\beta$  всегда бывает несколько меньше, чем модуль Юнга.

Деформация сдвига (рис. 7.3) создается силой  $\bar{F}$ , действующей вдоль верхней грани тела, имеющего закрепленную нижнюю грань. Она характеризуется углом сдвига, для которого выполняются соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{F}{S\bar{G}},$$

где  $S$  — площадь грани;  $\bar{G}$  — модуль сдвига. Можно показать, что  $\bar{G} < 0,5E$ .

Практический интерес имеет деформация кручения. По существу, это тот же сдвиг, возникающий в цилиндре, имеющем закрепленное основание, при действии на другое основание вращающего момента  $M$ . При упругом кручении цилиндра длиной  $h$  и радиусом  $r$  угол закручивания другого основания равен:

$$\varphi = \frac{M}{D},$$

где модуль кручения

$$D = \frac{\pi r^4}{2} \bar{G}.$$

Поэтому в приборах для измерения очень малых вращающих моментов применяются очень тонкие длинные нити.

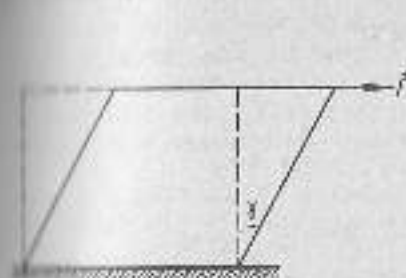


Рис. 7.3

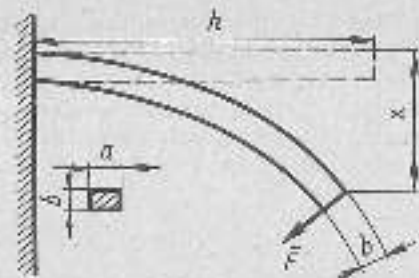


Рис. 7.4

Более сложна деформация изгиба, характеризующаяся «стрелой прогиба»  $x$  (рис. 7.4), т. е. наибольшим смещением из положения равновесия. На рисунке деформация сильно преувеличена, обычно  $\frac{x}{h}$  гораздо меньше. Для стержня, имеющего прямоугольное сечение, степень деформации существенно зависит от того, вдоль какой стороны сечения действует деформирующая сила. Если поперечное сечение  $S = ab$  и сила действует вдоль стороны  $b$ , то стрела прогиба

$$x = A \frac{h^3 F}{a^3 E};$$

безразмерный коэффициент пропорциональности  $A$  зависит от условий закрепления.

Так, для балки, изображенной на рисунке 7.4, коэффициент  $A = 1/48$ . Если ее положить на две опоры у концов балки и перенести точку приложения силы  $F$  в середину балки, то  $A = 1/48$ . Если концы балки закрепить жестко, то  $A = 1/128$ . Во всех трех случаях вес балки не принимается во внимание.

Влияние формы сечения легко показать на двух примерах. Тонкая стальная линейка, закрепленная одним концом (как на рис. 7.4), прогибается под действием собственной силы тяжести, если вертикально расположена узкая сторона сечения. Но она выдерживает без заметного прогиба груз, в несколько раз превышающий ее силу тяжести, если вертикально расположена широкая сторона сечения.

Так как при изгибе верхние слои стержня растягиваются, а нижние — сжимаются, то где-то посредине имеются слои, совсем (или почти совсем) не подвергающиеся деформации. Очевидно, их можно удалить, почти не влияя на деформацию и прочность стержня при изгибе. Поэтому сплошные стержни часто заменяются полыми трубами. Любопытно, что в процессе приспособления природа создала кости в виде трубок, а не в виде сплошных стержней.

Все сказанное выше справедливо для однородных изотропных тел. Конечно, обычные тела всегда не вполне однородны. Но современная техника позволяет выращивать макроскопические кристаллы, обладающие гораздо большей однородностью. Поэтому

у них предел упругости и предел прочности гораздо больше, чем у обычных поликристаллических тел. Это же относится и к кристаллическим (аморфным) телам, представляющим собой весьма вязкие жидкости (смола, стекло). Так, предел прочности очень тонких стеклянных нитей гораздо выше, чем стеклянных цилиндров больших сечений.

## 7.2. Энергия деформации. Вектор Умова

При деформации за счет работы  $A$  внешней силы  $\vec{F} = k\vec{x}$  в каждом элементе объема запасается энергия деформации. Найдем плотность этой энергии  $w$  для случая растяжения:

$$w = \frac{A}{\Delta S} = \frac{\int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x}}{\Delta S} = \frac{kx^2}{2\Delta S} = \frac{1}{2} E \epsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}. \quad (7.1)$$

Мы здесь пренебрегли изменением объема при деформации, так как оно относительно мало. Плотность энергии оказывается пропорциональной квадрату относительной деформации.

Приведем пример, позволяющий оценить эту энергию.

Плотность энергии при упругом растяжении стали, доведенном до предельного значения

$$\epsilon_{\text{пр}} = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{E} = \frac{3,2 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{11}} = 1,65 \cdot 10^{-3},$$

равна:

$$w_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \epsilon_{\text{пр}} \sigma_{\text{пр}} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ Дж/м}^3.$$

Как известно, относительное удлинение стального стержня, находящегося при комнатной температуре, при нагревании его на 1 К составляет:

$$\epsilon = 10^{-5}, \text{ т. е. около } 0,5\% \epsilon_{\text{пр}}.$$

Развивающееся при этом напряжение довольно велико:

$$\sigma = \epsilon E = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Но плотность энергии деформации  $w = 10 \text{ Дж/м}^3$  мала по сравнению с плотностью внутренней энергии

$$w_{\text{вн}} = C \cdot 1 \text{ К} = 3,5 \cdot 10^5 \text{ Дж/м}^3,$$

где  $C = 3,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{К)}$  — теплоемкость единицы объема стали.

В заключение отметим, что все вычисленные здесь плотности энергии исчезающе малы по сравнению с плотностью энергии покоя

$$w = \rho c^2 = 7 \cdot 10^{29} \text{ Дж/м}^3,$$

где  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$  — плотность стали,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

Тем не менее именно наличием дополнительной энергии  $\gamma$  те-

та деформированного силой  $\vec{F}$ , объясняется развитие упругой волны:

$$\vec{F}_{\text{уп}} = -k\vec{x}. \quad (7.7)$$

однонаправленной волны по модулю внешнему воздействию.

Даже для очень малых деформаций реальных тел закон Гука выполняется только приближенно; абсолютно упругих деформаций в природе не бывает, это идеализация.

Пусть, например, напряжение  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  — некоторая однозначная функция относительного удлинения  $\epsilon$ . Тогда в разложении (7.1) в ряд по степеням  $\epsilon$  отсутствует нулевой член, так как при  $\epsilon = 0$   $\sigma = 0$  (если тело не подвергалось действию сил, то нет и деформаций).

Поэтому

$$\sigma = E\epsilon + \alpha\epsilon^2 + \beta\epsilon^3 + \dots,$$

где коэффициенты  $\alpha, \beta, \dots$  — постоянные, зависящие от материала стержня.

Если относительно удлинение  $\epsilon$  столь мало, что высшими степенями  $\epsilon$  можно пренебречь, тогда получается закон Гука (7.2). При этом относительная ошибка при его использовании составляет:

$$\Delta = \frac{\alpha\epsilon^2}{E\epsilon} \sim \epsilon.$$

Теперь рассмотрим глубокую впадин Н. А. Умова (1846—1915) в потоке энергии при механических процессах. Хотя в механике ею пользуются редко, в электродинамике подобная идея оказалась очень плодотворной.

Если требуется привести в движение некоторое тело 1 (рис. 7.5), то это можно осуществить либо при помощи тяги его со стороны тела 2, либо толкая его телом, расположенным слева.

Пусть мгновенная скорость тела  $v$  направлена вправо. Это направление считаем положительным. Движущая сила  $F$  направлена так же. Элементарная работа этой силы за время  $dt$  равна:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Плотность сопряженного течения обозначим через  $\vec{S}_1$ . Тогда силу  $F$  можно представить в виде

$$\vec{F} = \sigma \vec{S}_1,$$

причем, как и раньше, здесь плотность характеризуется вектором  $\vec{S}_1$ , направленным в сторону внешней нормали  $\vec{n}$  к ускоряемому телу.

Тогда работа силы будет равна:

$$dA = \sigma \vec{v} \cdot \vec{S}_1 dt = -\vec{Y} \cdot \vec{S}_1 dt,$$

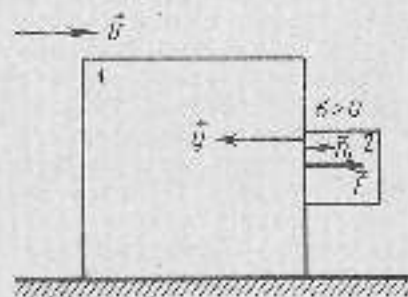


Рис. 7.5



Рис. 7.6

ности (в механике это называют вектором Умова). Единицей потока мощности в СИ является  $1 \text{ Вт/м}^2$ .

Такой же результат получается при толкании.

Вектор Умова отрицателен при туже, положителен при толкании, т. е. всегда направлен внутрь тела, проводимого в движение.

Вектор Умова дает весьма наглядное представление об обмене энергией взаимодействующими телами. Но, конечно, процесс взаимодействия, включающий в себя обмен энергией, не исчерпывается только этим обменом. Мы воспользуемся представлением о потоке энергии при изучении волновых движений как в механике, так и в электродинамике (где этот вектор применится наиболее часто), а также в оптике.

В § 7.1 и 7.2 рассматривались статические деформации (деформируемое тело находилось в состоянии равновесия). При этом деформации распределены вдоль тела равномерно.

Если же сила сообщает телу некоторое ускорение, то деформации в нем распределяются неравномерно. Пусть на неподвижном стержне были сделаны отметки вдоль его оси на равных расстояниях друг от друга. Если приложить к торцу стержня силу (рис. 7.6), сообщающую телу ускорение  $\ddot{x}$ , то расстояния между отметками изменятся — они станут тем больше, чем ближе находятся отметки к этому торцу; силы, действующие между соседними участками стержня, убывают (в нашем примере) справа налево, так как каждый предшествующий участок создает силу, ускоряющую все участки, расположенные за ним.

### 7.3. Колебательные системы.

#### Уравнения колебательного движения

Если на твердое тело подействовать внешней силой, которая приведет к появлению в нем упругой деформации, а затем быстро снять деформирующее усилие, то возникнут колебания. Возникшие в результате воздействия на тело внутренние упругие силы, стремящиеся вернуть элементарные объемы тела в положение равновесия, не могут при снятии напряжения исчезнуть сразу. Каждый элемент объема, идя до положения равновесия, будет обладать конечной скоростью (энергия упругой деформации переходит в кинетическую) и поэтому пройдет положение равновесия по инерции. По мере дальнейшего движения будет увеличиваться отклонение от положения равновесия в противоположную сторону; пропорционально смещению будет возрастать инерциальная ему сила упругости, которая была равна нулю

где вектор  $\vec{F} = -\sigma \vec{v}$ , (7.8)

характеризующий мощность, проходящую через единицу площади в единицу времени, называется в общем случае потоком мощности.

при прохождении положения равновесия. При этом, например, сжатие будет замесяться сжатием. Затем процесс повторится в противоположном направлении. В отсутствие трения колебания продолжались бы сколь угодно долго (см. § 5.6). Наличие трения приводит к тому, что часть энергии колебаний переходит во внутреннюю энергию (тело нагревается), амплитуды смещения от положения равновесия со временем уменьшаются и колебания постепенно прекращаются.

Таким образом, колебательное движение создается благодаря тому упругости, возвращающей элемент объема упругого тела к положению равновесия, и наличию  $\eta$  этих элементов энергии.

Движение элемента объема подобно движению маятника, например, пружинного (см. § 5.6). Поэтому мы сначала углубим рассмотрение колебаний маятника, а позже (гл. 8) обратимся к изучению колебаний упругого тела.

Мы видели, что выведенный из положения равновесия и трением пренебреженным совершает гармонические колебания. Назовем их собственными колебаниями, а их частоту — собственной частотой (см. § 5.6)<sup>1</sup>.

В действительности сила трения всегда существует, поэтому колебания постепенно затухают. Колебания, происходящие в отсутствие внешнего периодического воздействия при наличии трения, называются свободными. На рисунке 7.7, где показано изменение смещения  $x$  в функции времени  $t$ , изображены такие свободные колебания, которые затухают со временем; смысл чисел, стоящих у кривых, пояснен в § 7.4.

Если же на маятник действует внешняя периодическая сила, причем действие ее достаточно длительно (точный смысл последних слов станет ясен из дальнейшего), то могут установиться вынужденные незатухающие колебания (см. § 7.5).

Запишем уравнение движения пружинного маятника массой  $m$  в случае простейшей упругой деформации — продольного растяжения (сжатия). Пусть на маятник, смещенный из положения равновесия на  $x$ , действует внешняя сила  $F_{\text{вн}}$ , параллельная смещению. Тогда уравнение движения в соответствии со сказанным имеет вид:

$$m\ddot{x} = \vec{F}_{\text{вн}} + \vec{F}_{\text{уп}} + \vec{F}_{\text{тр}} \quad (7.9)$$

В случае упругой деформации  $\vec{F}_{\text{уп}} = -kx$ . Законы трения могут быть различны (см. гл. 3). Мы здесь ограничимся простыми, но очень важным в практическом отношении случаем трения, когда сила трения пропорциональна скорости:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\dot{x}.$$

<sup>1</sup> Иногда эти колебания называют свободными, чтобы подчеркнуть, что движение происходит без воздействия внешних сил. Однако чаще используется понятие силы трения.

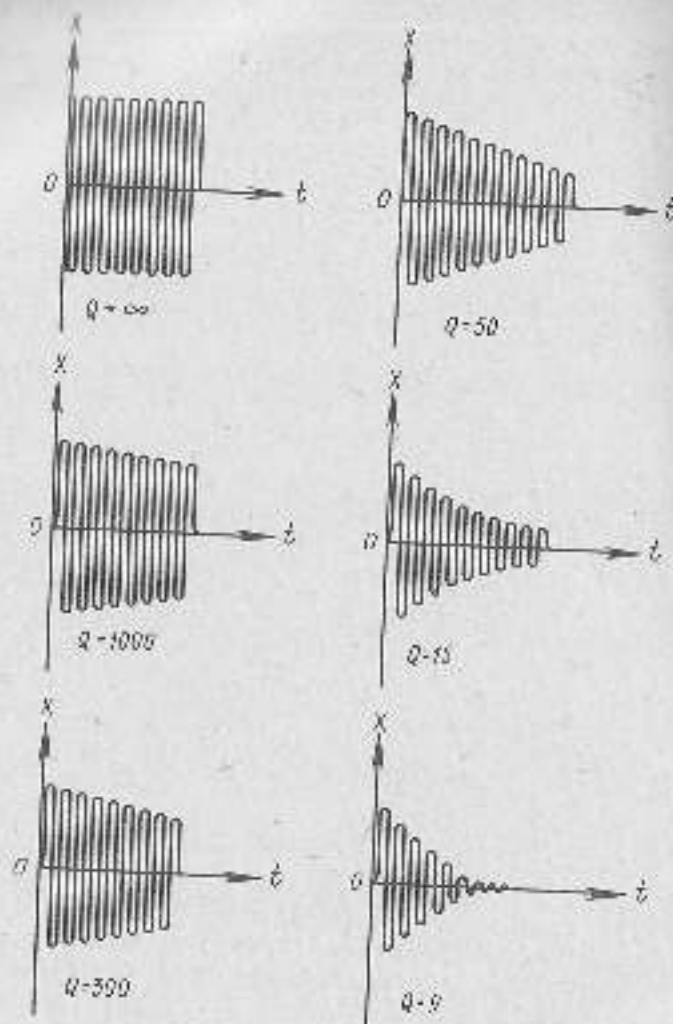


Рис. 7.7

где  $r$  — коэффициент трения — постоянная положительная величина; так характеризуется жидкое трение при не слишком больших скоростях движения.

Тогда уравнение движения (7.9) можно записать в виде

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{\text{вн}} \quad (7.10)$$

Так как все векторы параллельны, то уравнение (7.10) можно переписать в скалярной форме

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{\text{вн}} \quad (7.11)$$

Покажем, что по форме уравнение (7.11) типично для любого маятника с одной степенью свободы.

Полученное в 5-й главе для крутильного маятника уравнение движения (5.10) с учетом трения примет вид:

$$I\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = M, \quad (7.12)$$

где  $I$  — момент инерции маятника относительно оси вращения;  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\varphi}$  — угловое смещение, скорость и ускорение;  $D$  — постоянная кручения;  $M$  — модуль момента внешних сил;  $r$  — коэффициент трения при кручении.

Аналогичными являются уравнения движения для тел, колеблющихся под действием квазиупругих сил, например:

для математического маятника длиной  $l$  (при малых углах отклонения  $\varphi$ ):

$$I\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + mgl\varphi = M, \quad (7.13)$$

где  $I = ml^2$ ;

для физического маятника:

$$I\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + mgac\varphi = M, \quad (7.14)$$

где  $a$  — расстояние от оси до центра тяжести.

Уравнения (7.11—7.14) в математическом отношении одинаковы. Это неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка, правая часть которых характеризует внешнее воздействие (силу или момент силы при вращении системы).

У членов левой части коэффициентами при переменных являются постоянные, определяющие соответственно инертность тела ( $m$  и  $I$ ), потери на трение ( $r$ ), упругость ( $k$  и  $D$ ) или квазиупругость ( $mgl$  и  $mgac$ ).

Сходство уравнений для колебательных систем выходит далеко за пределы механики. Например, рассмотрим электрическую цепь, где к внешнему источнику ЭДС  $\mathcal{E}_{\text{вн}}$  подключены последовательно соединенные катушка индуктивностью  $L$ , конденсатор емкостью  $C$ , резистор сопротивлением  $R$ . Мгновенное значение заряда конденсатора обозначим  $q$ ; скорость его изменения  $\frac{dq}{dt} = \dot{q}$  определяет ток  $i$  в контуре; скорость изменения тока

$$-L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$$

определяет ЭДС самоиндукции, возникающую в катушке, обладающей индуктивностью  $L$ . Тогда  $L\dot{q}$  — разность потенциалов, поддерживаемая на катушке;  $R\dot{q}$  — разность потенциалов на резисторе (закон Ома);  $\frac{q}{C}$  — разность потенциалов на конденсаторе.

Сумма этих разностей потенциалов в каждый момент равна внешней ЭДС  $\mathcal{E}_{\text{вн}}$ .

<sup>1</sup> Так обычно характеризуют сопротивление всех проводников контура, хотя, конечно, это может быть и специально включенный элемент цепи с этим сопротивлением.

Таким образом, получается:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{1}{C}q = \mathcal{E}_m \quad (7.10)$$

что аналогично уравнению (7.11). При этом устанавливаются электромеханические аналогии следующих величин:

$$\begin{aligned} L &\sim m; & q &\sim x; & \mathcal{E}_m &\sim \mathcal{F}_m \\ R &\sim r; & \dot{q} &\sim \dot{x}; \\ \frac{1}{C} &\sim k; & \ddot{q} &\sim \ddot{x}; \end{aligned} \quad (7.16)$$

Эта формальная аналогия основана на физической схожести процессов. При колебаниях маятника его кинетическая энергия периодически переходит в потенциальную, причем часть энергии необратимо теряется из-за существования трения (переходы во внутреннюю энергию маятника и окружающей среды). При разряде конденсатора запасенная в нем энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля тока (и обратно), частично переходя необратимо во внутреннюю энергию резистора, нагреваемого током.

В дальнейшем, при анализе электрических явлений, мы убедимся в верности результатов, получаемых на основании электромеханической аналогии. Сейчас же это дает нам право при необходимости классифицировать результаты из механики соответствующим электрическим явлениям (наблюдение которых во многих случаях более удобно и надежно).

#### 7.4. Свободные колебания. Добротность колебательной системы

Рассмотрим особенности колебаний в отсутствие внешних сил ( $\mathcal{E}_m = 0$ ), т. е. свободных колебаний, на примере пружинного маятника. В этом случае правая часть уравнения движения (7.11), которое нужно занести в виде

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0, \quad (7.17)$$

где  $m$  — масса тела, находящегося на конце пружины с жесткостью  $k$ .

Если трения нет ( $r = 0$ ), решению уравнения соответствует гармонические колебания:

$$x = X_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (7.18)$$

изученным нами в § 5.6. Напомним, что в соответствии с § 5.6 частота собственных колебаний равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

а амплитуда и начальная фаза (как уже известно) могут быть определены, если, кроме уравнения движения, заданы два значения

или смещение или скорости в произвольные моменты времени (начальные условия).

Мгновенное значение кинетической энергии равно:

$$\mathcal{W}' = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2 \left( \omega_0 t - \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right),$$

а потенциальной энергии:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2 (\omega_0 t - \varphi_0)$$

Поэтому полная энергия, равная

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \quad (7.19)$$

не зависит от времени, так как упругая сила консервативна. Такие колебания, однажды возникнув, должны длиться неопределенно долго — мы назвали их незатухающими. Но тогда же было подчеркнуто, что представляемые в незатухающих колебаниях — идеализация, так как в действительности всегда существует трение, вызывающее потерю энергии и постепенное уменьшение амплитуды колебаний. Теперь мы учтем это обстоятельство.

Простое наблюдение за колебаниями пружинного маятника с двумя плоскими крыльями  $K$  (рис. 7.8), которые можно расположить сначала параллельно вектору скорости маятника, а затем — перпендикулярно ему, доказывает, что в первом случае колебания происходят длительное время без заметного уменьшения амплитуды, а во втором — амплитуда заметно падает уже во время нескольких колебаний. Дело в том, что воздух оказывает во втором случае более сильное сопротивление, чем в первом. Если зарегистрировать зависимость смещения от времени (практически это лучше сделать, записав на осциллографе затухающие электрические колебания, в соответствии с отмеченной выше (§ 7.3) электромеханической аналогией закон затухания должен быть одинаков), то получится кривая, подобная одной из кривых, изображенных на рисунке 7.7.

Затухание может быть вызвано разными причинами. Так, физический маятник, представляющий массивную медную пластину на стержне, колеблется в воздухе без заметного затухания. Но если пластинка движется между полюсами электромагнита, то и пластинке возникают индуцированные токи. По правилу Ленца, они противодействуют вызвавшей их причине (за эту причину движение маятника); поэтому при взаимодействии этих токов с магнитным полем электромагнита возникают тормозящие силы; кинетическая энергия маятника расходуется на нагревание пластины и постепенная уменьшается. Усиливая магнитное поле (сближением полюсов электромагнита или увеличением силы тока в его обмотках), можно добиться очень

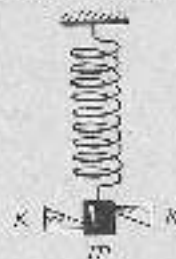


Рис. 7.8

сильного затухания — движение может даже потерять периодический характер, стать апериодическим.

Нам, однако, в первую очередь будут интересовать условия, когда периодичность движения сохраняется, а коэффициент трения остается достаточным, т. е. сила трения пропорциональна скорости.

Вернемся к уравнению колебаний пружинного маятника (7.11), где трение учтено (свободные колебания), и перепишем его, введя стандартные обозначения:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (7.20)$$

в виде

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (7.21)$$

Не имея возможности провести здесь строгое решение дифференциального уравнения (7.21), мы пойдем путем, несколько искусственным, но более доступным читателю.

Рассматривая кривые (рис. 7.7), являющиеся графиками некоторого решения, замечаем, что наибольшие отклонения (одного знака) монотонно убывают со временем. Обозначим через  $X_n$  амплитуду  $n$ -го максимума, а через  $X$  — амплитуду одного из последующих максимумов. Можно предположить, что убывание амплитуды пропорционально ее значению и времени:

$$dX = pXdt,$$

где  $p$  — постоянная. Разделив переменные, получаем:

$$\frac{dX}{X} = -pdt.$$

Интегрирование левой части от  $X_n$  до  $X$ , в правой — от нуля до  $t$  приводит к результату:

$$X = X_n \exp(-pt). \quad (7.22)$$

Но так как движение обладает повторяемостью, то можно предположить, что решение уравнения (7.21) имеет вид:

$$x = X_n \exp(-pt) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7.23)$$

Если это предположение верно, то при подстановке  $x$  и его производных в (7.21) должно получаться тождество.

Сначала найдем производные:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -X_n p \exp(-pt) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - X_n \omega_0 \exp(-pt) \sin(\omega_0 t + \varphi_0); \\ \ddot{x} &= X_n p^2 \exp(-pt) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \\ & - X_n \omega_0^2 \exp(-pt) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + 2X_n p \omega_0 \exp(-pt) \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned}$$

При подстановке в (7.21) множители  $X_n \exp(-pt)$  сократятся и остается:

$$\begin{aligned} p^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + 2p\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \\ - 2\omega_0 p \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - 2\alpha\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0. \end{aligned}$$

Это тождество должно выполняться в любой момент. Пусть  $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0$ . Тогда должно быть:

$$p^2 - \omega_0^2 - 2\alpha\omega_0 = 0. \quad (7.24)$$

Если же  $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}$ , то  $2p\omega_0 - 2\alpha\omega_0 = 0$ .

Отсюда следует, что

$$p = \alpha. \quad (7.25)$$

Вставив (7.25), получаем из (7.24):

$$\omega^2 - \omega_0^2 - \alpha^2 = 0. \quad (7.26)$$

Так как  $\omega$  — частота колебаний (действительная величина), то необходимо выполнение еще одного условия:

$$\omega_0 > \alpha. \quad (7.27)$$

Итак, мы показали, что наше предположение о решении уравнения свободных колебаний (7.21) в форме (7.23) обосновано.

Таким образом,

$$x = X_n \exp(-\alpha t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (7.28)$$

Величины  $X_n$  и  $\varphi_0$  могут быть определены, если будут известны два значения смещения (или скорости) в произвольные моменты времени, например при  $t = 0$  (начальные условия).

Здесь  $X_n \exp(-\alpha t)$  — убывающая со временем амплитуда свободных колебаний,  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  — частота свободных колебаний,  $\alpha$  — коэффициент затухания (вспомним, что  $\alpha = \frac{r}{2m}$  (см. 7.20) характеризует трение, а в частности при  $\alpha \rightarrow 0 \exp(-\alpha t) \rightarrow 1$ ,  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ , т. е. затухающие свободные колебания переходят в гармонические собственные колебания с неизменной амплитудой  $X_n$  и частотой  $\omega_0$ ).

Решение (7.28) легко получается при помощи метода комплексных амплитуд (см. § 7.6).

Из уравнений (7.26) и (7.28) следует, что затухание сказывается и на амплитуде, и на частоте — последняя, как и следовало ожидать, несколько уменьшилась. Однако во многих практических случаях, когда трение мало, этим влиянием на частоту можно пренебречь и приближенно считать частоту  $\omega_1$  равной частоте собственных колебаний  $\omega_0$ . Подчеркнем, что решение (7.28) описывает затухающие негармонические колебания. Хотя периодичность движения сохраняется, но о гармоничности говорить уже не приходится, так как множитель перед косинусом — непостоянная величина.

На рисунке 7.9, а изображен временной ход затухающего процесса, где удается проследить около тридцати колебаний. Результат гармонического анализа (см. § 1.7) этого процесса показан на рисунке 7.9, б (по оси абсцисс отложены частоты, по оси ординат — соответствующие амплитуды). Как видно, эти затуха-

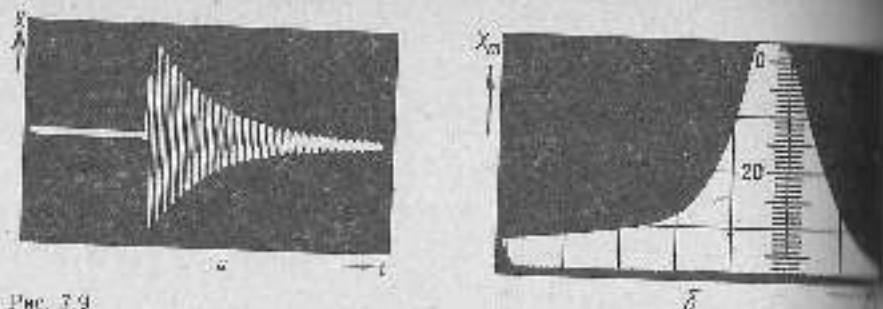


Рис. 7.9

ющие колебания имеют практически непрерывный спектр (характерная амплитуда соответствует частоте  $\omega_0$ ).

Выражение (7.28) обладает замечательной особенностью. Найдем отношение двух последующих смещений, отделенных промежуток времени, равным периоду колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ :

$$\frac{x_1}{x_2} = \exp(\alpha T_1) = \text{const.}$$

Обычно в расчетах используют величину

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \alpha T_1 \approx \alpha T_0. \quad (7.29)$$

называемую *логарифмическим декрементом затухания*.

Логарифмический декремент затухания — постоянная для данной колебательной системы величина.

Наряду с декрементом пользуются понятием *добротности*  $Q$

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega_1}{2\alpha}. \quad (7.30)$$

Можно показать, что добротность пропорциональна отношению полной энергии  $E$  колебательной системы к энергии  $W_0$ , теряемой за период:

$$Q = 2\pi \frac{E}{W_0}.$$

Очевидно, добротность, как и декремент, имеет нулевую размерность.

Связав, что затуханием можно пренебречь, если процесс изучается в течение времени, пока амплитуда уменьшится до 0,8 своего начального значения, соответствующее число колебаний  $n$  можно найти из соотношения

$$\frac{x}{x_0} = \exp(\alpha T_0 n) = \exp\left(\frac{n}{Q} \pi\right) = 1,25.$$

Отсюда

$$n = 0,075Q. \quad (7.31)$$

С другой стороны, если считать, что колебания практически

прекращаются, когда амплитуда упадет до 0,1 ее начального значения, то число колебаний, совершаемых системой до ее практически успокоения, окажется равным

$$N = 0,75Q. \quad (7.32)$$

Приведем несколько примеров.

Хороший камертон имеет добротность  $Q \approx 3000$ ; если он поставлен на резонансный ящик (при этом увеличивается доля энергии, теряемой на «излучение» — создание звука в окружающем воздухе), добротность падает в несколько десятков раз.

Манганин, при помощи которого хорошо демонстрируется опыт Фуко, должен иметь добротность порядка нескольких сотен.

Добротность маятника с крыльями, описанного выше, не превышает десяти (когда крылья перпендикулярны плоскости колебаний). Добротность электрических колебательных систем может достигать значений порядка  $10^4$ ; добротность атома, который тоже является колебательной системой, достигает  $10^6 - 10^7$ . Числа, стоящие у кривых (см. рис. 7.7), характеризуют добротность соответствующих колебательных систем.

Добротность можно представить и таким образом:

$$Q = \frac{m\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{k m}}{r} = \frac{p}{r}. \quad (7.33)$$

Величина  $p = \sqrt{k m}$  имеет ясный физический смысл: она равна отношению амплитуды упругой силы  $kX_0$  к амплитуде скорости  $\omega_0 X_0$ :

$$p = \sqrt{k m} = \frac{k}{\omega_0}. \quad [p] = T^{-1} M. \quad (7.34)$$

Эта важная характеристика системы называется *волновой* или *колебательным сопротивлением*.

До сих пор мы предполагали, что затухание невелико, так что выполнялось неравенство

$$\omega_0 > \alpha.$$

Если этого нет и затухание так велико, что  $\omega_0 < \alpha$ , то движение теряет периодический характер. Мы не будем аналитически исследовать этот случай и ограничимся лишь двумя замечаниями.

Если система выводится из положения равновесия толчком (т. е. ей сообщается кинетическая энергия), то она движется от положения равновесия до некоторого наибольшего отклонения (рис. 7.10, кривая  $\alpha$ ), а затем асимптотически приближается к поло-

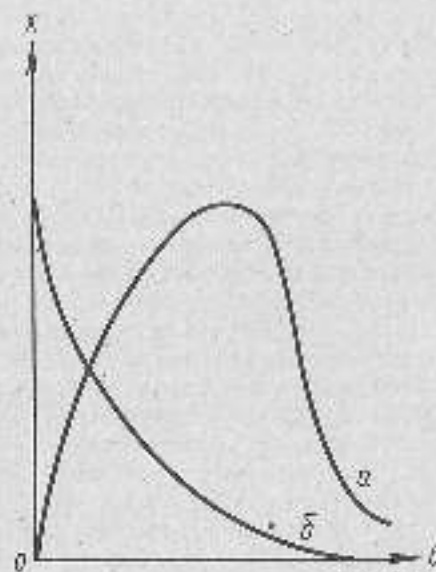


Рис. 7.10



жанию равновесия. Если систему предварительно вывести из положения равновесия, сообщив ей потенциальную энергию, и затем предоставить самой себе, то она также постепенно возвращается в положение равновесия (рис. 7.10, кривая б).

Можно показать, что для быстрого приближения системы к положению равновесия должно выполняться условие  $\omega_0 = \alpha$ .

### 7.5. Вынужденные колебания. Резонанс

Затухающие колебания происходят под действием сил, возникающих в самой колебательной системе, — силы упругости и силы трения. Для практики особый интерес представляет возможность возбуждения *нелатаухающих колебаний с помощью внешних сил*.

В этом случае для маятника, на примере которого мы ведем аналитическое рассмотрение, уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{\text{вн}} \quad (7.35)$$

Если внешняя сила  $F_{\text{вн}}$  постоянна по модулю, то она лишь смещает положение равновесия на отрезок, равный

$$x_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{вн}}}{k}.$$

и затухающие колебания происходят около этого положения. При этом потенциальная энергия деформированной пружины после прекращения затухающих колебаний равна:

$$U = \frac{1}{2} k x_{\text{ст}}^2 = \frac{1}{2} F_{\text{вн}} x_{\text{ст}}.$$

т. е. составляет только половину работы  $A = F_{\text{вн}} x_{\text{ст}}$ , совершенной внешней силой. Вторая половина работы расходуется на преодоление силы трения, о чем уже говорилось в главе 5.

Более интересно движение, возникающее под действием периодической внешней силы. Его называют *вынужденными колебаниями*.

Вынужденные колебания можно, например, возбудить периодически действующей кратковременной постоянной силой (толчки); время действия толчка примем много меньшим периода собственных колебаний системы.

Так, если ударять по маятнику (шар на нити) в те моменты, когда он проходит положение равновесия, причем направление силы удара совпадает с направлением мгновенной скорости, то после нескольких ударов шар раскачается сильно. Если же частота ударов не соответствует частоте системы, то одни удары будут ускорять, другие — замедлять движение и раскачать маятник сколь-нибудь сильно не удастся.

Из сказанного понятно, что сила, изменяющаяся по гармоническому закону, сможет сильно раскачать систему, если ее частота будет соответствовать собственной частоте системы.

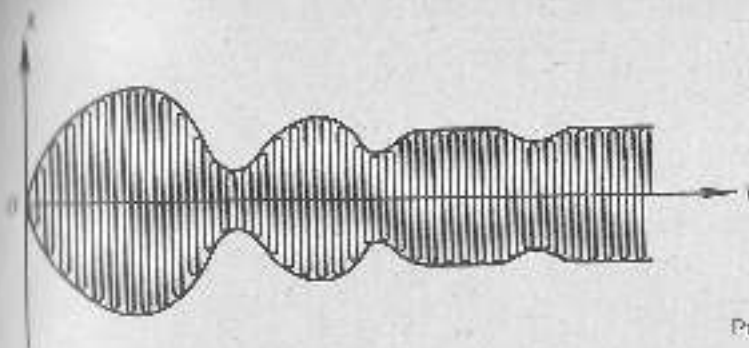


Рис. 7.11

Действительно, будем считать внешнюю силу меняющейся по гармоническому закону:

$$F_{\text{вн}} = F_0 \cos \omega t.$$

Вводя прежние обозначения, переищем уравнение (7.35) в виде

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega t, \quad \text{где } B = \frac{F_0}{m}. \quad (7.36)$$

Ясно, что под действием периодической силы должны возникнуть колебания с частотой изменения этой силы  $\omega$ . Однако опыт показывает, что они устанавливаются лишь постепенно. На рисунке 7.11 показана запись установления процесса вынужденных колебаний при  $\omega \neq \omega_0$ , а на рисунке 7.12 — при  $\omega = \omega_0$  (для двух разных значений добротности при одной и той же амплитуде внешней силы). В последнем случае характерно *монотонное нарастание амплитуды со временем, увеличение длительности процесса установления и рост амплитуды при увеличении добротности*.

Возникновение вынужденных колебаний удобно наблюдать на таком простом приборе. Волчок укреплен в кольце, к которому приварена пластина, несущая ряд плоских пружин разной длины (частоты их собственных колебаний растут при укорочении пружины). Волчок приводит в быстрое вращение; так как его децентрирование идеально, то он оказывает периодическое воздействие на пластину и приводит пружины в вынужденные колебания. Из-за трения частота вращения волчка (и, следовательно, частота возбуждения пружин) непрерывно убывает. Начальная частота вращения волчка должна значительно превышать собственные частоты всех пружин. В этом случае пружины сначала покоятся, а затем поочередно одна из пружин (начиная с самой короткой) колеблется сильнее всех, ее ближайшие соседи справа и слева колеблются слабее, более далекие колеблются совсем слабо или покоятся. Наибольшее возбуждение постепенно переходит ко все более длинным пружинам; потом они все усложняются, хотя волчок еще вращается — частота его вращения стала значительно меньше собственной частоты самой длинной пружины.

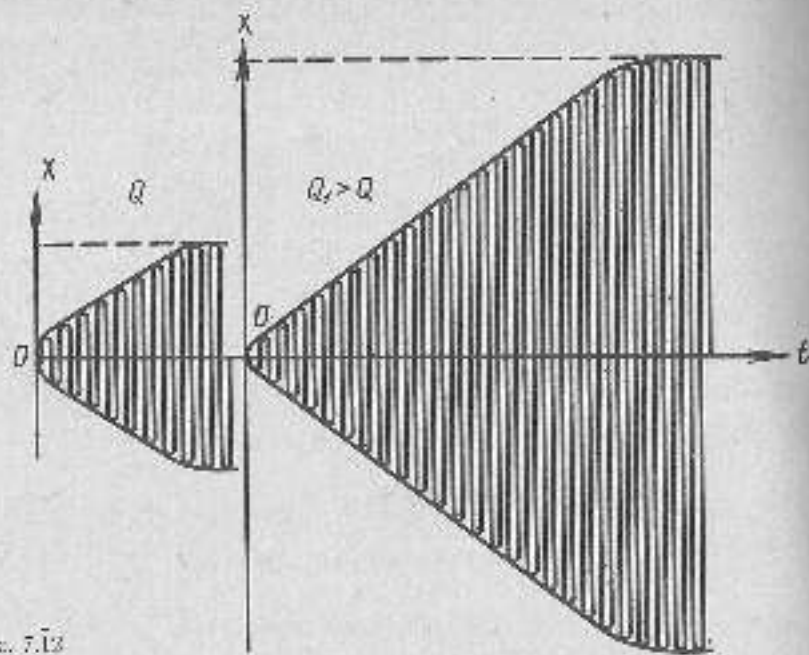


Рис. 7.13

Из этих наблюдений следует, что вынужденное движение носит колебательный характер и амплитуда зависит от соотношения между частотой вынуждающей силы и собственной частотой колебаний системы.

Детали процесса установления вынужденных колебаний мы здесь интересоваться не будем, это будет сделано при изучении электрических колебаний. Ограничимся пояснением: сложный процесс установления колебаний объясняется тем, что при нарушении состояния покоя системы обязательно возникают (кроме вынужденных) собственные колебания, складывающиеся с вынужденными. Поэтому процесс установления длится тем дольше, чем дальше существуют заметные собственные колебания, т. е. чем больше добротность. При этом в отдельные промежутки времени амплитуды могут превышать амплитуду установившихся колебаний (рис. 7.11).

Во избежание подобных перегрузок на практике амплитуду вынуждающей силы в начале движения делают малой и лишь постепенно доводят до нужного значения.

Теперь займемся исследованием установившихся колебаний. Предположим, что решением уравнения (7.36) является выражение

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (7.37)$$

где устанавливающаяся амплитуда  $X_m$  и разность фаз  $\varphi_0$  между вынуждающей силой и смещением должны быть определены.

Найдем скорость и ускорение:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega X_m \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = V_m \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \\ \ddot{x} &= -\omega^2 X_m \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \pi\right) = -\omega^2 x. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Подставляя их в уравнение (7.36), получаем:

$$-(\omega^2 - \omega_0^2) X_m \cos(\omega t + \varphi_0) + 2\alpha\omega X_m \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = B \cos \omega t.$$

Это выражение должно удовлетворяться тождественно при всех значениях времени. Можно было бы использовать аналитический метод, примененный в предыдущем параграфе. Но проще воспользоваться методом векторных диаграмм (см. § 1.8). Векторы, представляющие левую часть уравнения, взаимно перпендикулярны и зависят от частоты; их сумма равна одному и тому же вектору, представляющему правую часть уравнения. Поэтому, построив окружность диаметром  $B$ , можно утверждать, что вершины рассматриваемого векторного треугольника лежат на этой окружности (рис. 7.13).

Из прямоугольного треугольника сразу получается:

$$X_m^2 = \frac{B^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + 4\alpha^2\omega^2}; \quad \text{и } \varphi_0 = \frac{2\alpha\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (7.39)$$

Итак, амплитуда вынужденных колебаний зависит не только от амплитуды внешней силы, но и от соотношения между частотой вынуждающей силы  $\omega$  и собственной частотой  $\omega_0$ .

При постоянной силе ( $B=0$ ) амплитуда вынужденных колебаний равна:

$$X_m = \frac{B}{\omega^2} = \frac{f_s}{k} = X_{ст},$$

т. е. известному уже статическому смещению (вынужденных колебаний нет).

При увеличении частоты  $\omega$  (и при неизменной амплитуде внешней силы) амплитуда смещения растет, проходит через максимум и снова уменьшается, стремясь к нулю при неограниченном возрастании частоты. Это и понятно: инертная система не успевает следовать за очень быстрыми изменениями внешней силы.

Поэтому, например, электроизмерительные приборы постоянного тока не дают отклонений и цепи переменного тока ( $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ ).

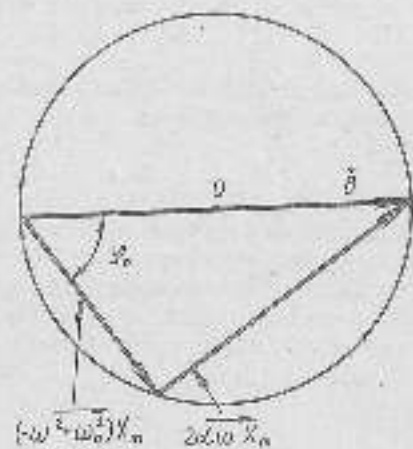


Рис. 7.13

Мы не будем подробно исследовать решение (7.39), так как больший практический интерес представляет поведение скорости (оно и более содержательно с физической точки зрения).

Уравнения (7.38) и (7.39) позволяют найти амплитуду скорости:

$$V_m = \frac{F_n}{m \sqrt{\left(\omega - \frac{\omega_0}{\alpha}\right)^2 + 4\alpha^2}} = \frac{F_n}{\sqrt{\left(m\omega - \frac{k}{\alpha}\right)^2 + c^2}} \quad (7.40)$$

и также фазовый сдвиг между скоростью и силой:

$$\lg \theta = -\operatorname{ctg} \varphi_0 = \frac{m\omega - \frac{k}{\alpha}}{r} \quad (7.41)$$

При выполнении условия резонанса

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.42)$$

амплитуда становится максимальной и равной

$$V_{m,r} = \frac{F_n}{r}$$

и фазовый сдвиг между внешней силой (7.36) и скоростью (7.38) обращается в нуль.

Вычислим работу внешней силы за период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T F_n \dot{x} dt = F_n V_m \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t + \theta) dt = \\ &= F_n V_m \left[ \cos \theta \int_0^T \cos^2 \omega t dt - \sin \theta \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt \right] = \\ &= F_n V_m \left[ \frac{\cos \theta}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t) d(\omega t) - \frac{\sin \theta}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\omega t dt \right] = \frac{F_n V_m \cos \theta}{2\omega} \end{aligned}$$

так как второй интеграл равен нулю. При  $\omega = \omega_0$  работа принимает наибольшее значение:

$$A_m = \frac{1}{2} \frac{F_n^2}{r} T \quad (7.43)$$

так как амплитуда скорости максимальная, а сила все время со направлена со скоростью.

Такое состояние системы называют *состоянием резонанса*. Это состояние наступает не сразу, так как по мере роста скорости растет и сила трения. Установившееся состояние наступит при выполнении условия  $F_{\text{ин}} = -F_{\text{тр}}$  или

$$F_m = F_{\text{тр}} = V_m r,$$

т. е. при  $V_m = \frac{F_m}{r}$ , что было найдено выше.

На рисунке 7.14 изображены *резонансные кривые* (амплитудно-частотные характеристики), определяющие зависимость квадрата амплитуды скорости от частоты. При этом по оси ординат отложена величина  $\beta = \left(\frac{V_m}{V_{m,r}}\right)^2$ , а по оси абсцисс — относительная расстройка (отклонение от резонансной частоты)  $\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0}$ , выраженная в процентах. Около кривых указаны значения добротности системы.

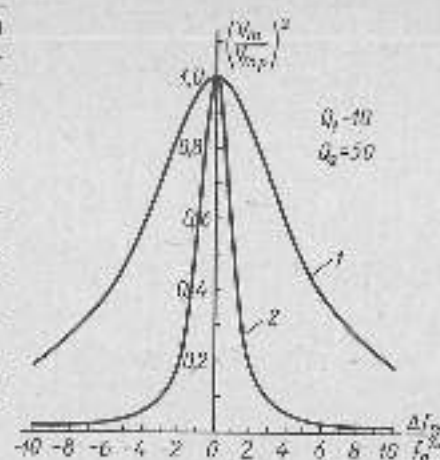


Рис. 7.14

Величина

$$\frac{2\Delta \omega}{\omega_0} = h,$$

при которой

$$\left(\frac{V_m}{V_{m,r}}\right)^2 = 0,5,$$

называется *шириной резонансной кривой*; она очень просто связана с добротностью. Действительно, из уравнений (7.40) и (7.42), если

$\left(\frac{V_m}{V_{m,r}}\right)^2 = 0,5$ , получаем:

$$0,5 \frac{F_n^2}{4\alpha^2 m^2} = \frac{F_n^2}{4\omega^2 \alpha^2 - m^2 \left(\omega - \frac{\omega_0}{\alpha}\right)^2}$$

После сокращений это уравнение приводится к виду

$$2 = 1 + \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{4\alpha^2 \omega^2}.$$

Отсюда

$$2\alpha\omega \approx 2\alpha\omega_0 = 2\omega_0 \Delta \omega.$$

Поэтому ширина кривой оказывается равной

$$h = \frac{2\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{2\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad (7.44)$$

Так как  $h$  может быть легко измерена по кривой, то получается практически удобный метод измерения добротности.

Амплитуда смещения при резонансе равна:

$$X_{c,r} = \frac{F_n}{2\alpha m \omega_0} = \frac{F_n \omega_0}{k} = X_{c,r} Q, \quad (7.45)$$

и смещения описываются уравнением

$$x_p = X_{c,r} Q \sin \omega t.$$

Таким образом, при высокой добротности системы амплитуда смеще-

ния может во много раз превысить статическое отклонение на амплитуду нерезонансных колебаний.

Из (7.39) следует, что наибольшая амплитуда смещения получается не на резонансной частоте, а на частоте, несколько меньшей; ее значение равно:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \approx \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\alpha^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Во многих практически важных случаях  $Q \gg 1$ , и можно считать

$$\omega = \omega_0$$

Таким образом, чем выше добротность, тем уже резонансная кривая и тем большие амплитуды скорости и смещения.

Явление резонанса во многих случаях очень полезно: им пользуются в акустике для усиления звучания музыкальных инструментов, в радиотехнике — для выделения нужного сигнала из множества других, отличающихся по частоте; в многоканальной телеграфии и т. д. Соответствующие колебательные системы обладают большой добротностью.

Но иногда резонанс оказывается вредным: он может вызвать колебания машины и их фундамент. Для устранения резонанса пользуются системами с малой добротностью.

В системе могут быть слабо выражены инертные ( $m \rightarrow 0$ ) или упругие ( $k \rightarrow 0$ ) свойства, тогда она не будет обладать собственной частотой. В этом случае внешняя периодическая сила также вызовет вынужденные колебания, описываемые уравнением (7.37), однако никаких резонансных явлений при этом не возникает.

При анализе решения (7.37) нам не понадобились начальные условия, так как мы искали частное (а не полное) решение дифференциального уравнения (7.35), справедливое после исчезновения заметных собственных колебаний.

В заключение заметим, что одновременное существование собственных и вынужденных колебаний связано с линейностью системы и подчиняется ее принципу суперпозиции.

Мы перешли к изучению влияния гармонической внешней силы. Если сила периодична, но не гармонична, то по теореме Фурье ее можно представить как сумму гармонических сил и тогда даваемые ими колебания будут в соответствии с принципом суперпозиции просто складываться.

## 7.6. Рассмотрение вынужденных колебаний методом комплексных амплитуд<sup>1</sup>

В § 7.5 при решении уравнения вынужденных колебаний (7.36) мы использовали метод векторных диаграмм. Тот же результат дает и аналитический метод комплексных амплитуд (см. § 1.8). Покажем это.

<sup>1</sup> При первом чтении этот параграф можно пропустить.

Предположим, что внешняя сила в уравнении установившихся вынужденных колебаний (7.36) задается в виде

$$\vec{F} = mB \exp(j\omega t),$$

где  $B$  — действительная величина. Решение ищем в виде

$$\dot{x} = \dot{X}_m \exp(j\omega t).$$

Подставив это решение в (7.36), находим комплексную амплитуду:

$$\dot{X}_m (-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2) = B,$$

откуда

$$\dot{X}_m = \frac{B}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2j\alpha\omega} = X_m \exp(-j\varphi).$$

Найдя модуль и фазу комплексного числа  $\dot{X}_m$ , получим действительную амплитуду и начальную фазу вынужденных колебаний:

$$X_m = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}; \quad \lg \varphi = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Так, решение имеет вид:

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

что совпадает с ранее найденным выражением (7.37).

## 7.7. Колебания в нелинейных системах

Во всех рассмотренных выше случаях параметры системы ( $\gamma$ ,  $m$ ,  $k$ ) были постоянны, а уравнения движения — линейны. При этом оказалось, что установившиеся вынужденные колебания происходят с частотой внешней периодической силы. Никаких дополнительных частот не возникало; постоянная сила вызывала лишь статическое смещение.

Но существует большой класс нелинейных колебательных систем, параметры которых зависят от состояния движения. Трудности анализа колебаний в таких системах связаны с тем, что они описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (поэтому и системы называют нелинейными); принцип суперпозиции к ним применить нельзя: он, как отмечалось в главе 2, справедлив лишь для линейных систем, т. е. систем, описываемых линейными уравнениями. Напомним приводившийся ранее пример: пусть на пружинный маятник действует сила, растягивающая пружину так значительно, что предел упругости (см. § 7.1) оказывается преобладающим. Тогда в выражении

$$\vec{F} = -kx$$

жесткость уже не постоянна, но зависит от силы:  $k = f(F)$ .

В этом случае прежними методами задачу решать, конечно, нельзя. Система будет вести себя по-разному при движении «туда» и «обратно» (скажется гистерезис, рассмотренный в § 7.1). При

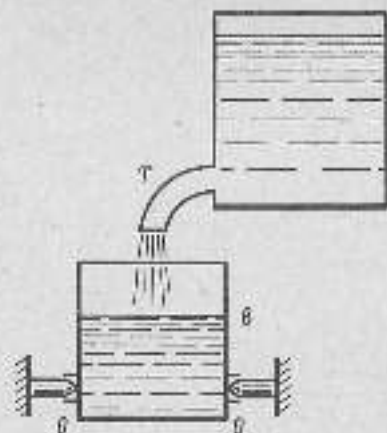


Рис. 7.15

немся при рассмотрении электрических явлений; здесь же с качественной стороны обсудим поведение нескольких простых систем.

На рисунке 7.15 изображена система, состоящая из источника энергии (водопровода), наполняющего через трубу  $T$  цилиндрический сосуд  $B$ ; этот сосуд может поворачиваться вокруг оси  $OO$ , расположенной так, что пустой сосуд находится в состоянии устойчивого равновесия. Но при заполнении сосуда водой его центр масс поднимается и устойчивость равновесия теряется — сосуд опрокидывается и быстро опорожняется, после чего возвращается в исходное состояние и процесс возобновляется. Изменение массы воды в сосуде со временем можно представить графически (рис. 7.16). Получающиеся колебания называются пилообразными или релаксационными. Период этих колебаний зависит от скорости подачи воды и от положения оси вращения. Нелинейность этой системы заключается в сложной зависимости вращающего момента, действующего на сосуд, от массы воды, запасенной в сосуде (так как по мере заполнения сосуда жидкостью меняется положение центра масс относительно оси вращения).

Подобные же колебания, получаемые в электрических цепях, применяются, в частности, для управления движением электронного луча в электронных осциллографах и телевизорах. Устройства для их получения называют релаксаторами.

Простым, очень наглядным примером нелинейной электро-механической системы, совершающей механические колебания под действием источника постоянной электродвижущей силы, явля-

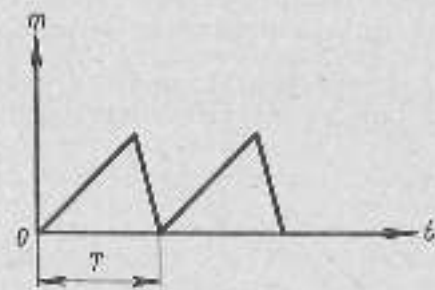


Рис. 7.16

двух одновременных воздействий отклик будет отличен от суммы откликов на каждое воздействие в отдельности и т. д.

Одной из важнейших особенностей нелинейных систем является возникновение частот, отличных от частоты внешней силы, что широко используется в технике. В частности, в некоторых нелинейных системах появляется возможность получить незатухающие колебания под действием постоянной внешней силы.

Точных методов решения нелинейных уравнений не существует, применяются лишь приближенные. К этому вопросу мы вер-

немся при рассмотрении электрических явлений; здесь же с качественной стороны обсудим поведение нескольких простых систем. Одной из важнейших особенностей нелинейных систем является возникновение частот, отличных от частоты внешней силы, что широко используется в технике. В частности, в некоторых нелинейных системах появляется возможность получить незатухающие колебания под действием постоянной внешней силы.

Подобные системы называются автоколебательными, так как колебания в них получаются под действием постоянной силы; но сама система управляет расходом энергии источника (то включая его, то выключая). Для таких систем характерны нелинейность какого-либо параметра и наличие «обратной связи», т. е. механизма, приводимого в действие внешней силой и в свою очередь воздействующего на источник. Так, в нашем примере нелинейность — это зависимость сопротивления цепи от протекающего по ней тока (при достаточной силе тока происходит разрыв цепи). Обратная связь осуществляется либо электромагнитным, либо упругим взаимодействием витков.

Частота колебаний определяется параметрами самой системы, а не источником питания. Колебания получаются негармоническими.

Если «обратная связь» осуществлена неправильно, то она не будет способствовать возникновению колебаний. Например, если изготовить пружину, у которой соседние витки намотаны встречными винтами, т. е. в противоположные стороны, то между витками при протекании тока возникнут силы отталкивания, пружина не сможет сжиматься и ртутный контакт не будет разрываться — никаких колебаний не получится.

К сожалению, жесткость такой пружины оказывается гораздо больше, чем в предыдущем случае. Поэтому ее собственные колебания имеют малую амплитуду, что уменьшает надежность опыта.

Очень наглядный электро-механический автогенератор изображен на рисунке 7.18. Катушка со стальным сердечником  $L1$ , питаемая источником постоянной ЭДС, подвешена на четырех пружинах к углам неподвижной рамы (на схематическом рисунке пружины не показаны). Катушка может совершать вертикальные колебания

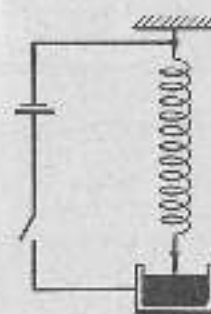


Рис. 7.17

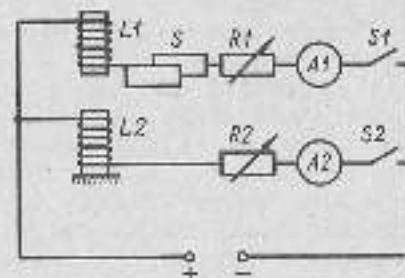


Рис. 7.18

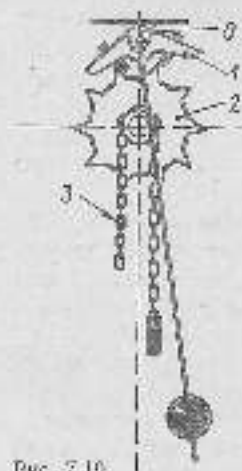


Рис. 7.10

с периодом 1—2 с. При движении вниз она замыкает контакт  $S$  и ток  $I_1$  в ней исчезает. Такая же неподвижная катушка  $L_2$ , питаемая тем же источником ЭДС, может быть (в случае необходимости) повернута вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее середину, на  $180^\circ$ . Резисторы  $R_1$  и  $R_2$  позволяют регулировать силу тока в катушках, измеряемую амперметрами  $A_1$  и  $A_2$ .

Если катушки установлены так, что токи в них имеют одинаковое направление, то при замыкании ключей  $S_1$  и  $S_2$  катушка  $L_1$  притягивается к катушке  $L_2$ ; причем контакт разорвется, ток  $I_1$  исчезнет. Упругая сила пружины вернет катушку  $L_1$  в первоначальное состояние, и процесс возобновится, так возникнут автоколебания.

При повороте катушки  $L_1$  на  $180^\circ$  сила притяжения между катушками  $L_1$  и  $L_2$  заменится силой отталкивания, контакт не разорвется, колебания не возникнут (обратная связь подобрали неверно).

Чисто механической автоколебательной системой являются часы с маятником («ходики»), изображенные на рисунке 7.11. Они имеют зубчатое колесо 2 с зубцами специальной формы. Зубцы при движении колеса 2 то задерживают, то освобождают пластину специальной формы 1, жестко связанную с осью  $O$ ; этой же осью закреплен маятник (колебательная система). С зубчатых колесом жестко связан шкив, несущий цепь 3; на концах цепи имеется тяжелая гиря (источник потенциальной энергии, питающий систему). При колебаниях маятника, пока зубцы задерживают пластину, направление силы, испытываемой пластиной, проходит через ось вращения и вращающий момент равен нулю. Когда же пластина сходит с зубцов, она (и маятник) испытывает кратковременный толчок, действие кратковременного вращающего момента, создаваемого опускающейся гирей и увеличивающей энергию маятника. Устройство рассчитано так, что потеря кинетической энергии маятником за половину периода как раз равна приросту энергии его за счет работы вращающего момента. Толчки происходят при прохождении маятником положения равновесия дважды за период.

В часах очень отчетливо проявляется *примечательное свойство автоколебательных систем: они не могут прийти в движение самостоятельно, их сперва нужно толкнуть*. Если толчок не слишком слаб, то работа силы, создающей вращающий момент, будет превышать потерю энергии и маятник будет раскачиваться. Если первоначальный толчок слишком слаб, то работа вращающего момента не сможет компенсировать потерю кинетической энергии и амплитуда будет уменьшаться, пока потеря на трение за период не сравняется с приростом энергии за счет опускающейся гири.

В обоих случаях устанавливается амплитуда колебаний, которая *независима от начальных условий*, что является отличительным признаком нелинейной колебательной системы.

Заметно, что сила сухого трения нелинейна (она может измениться при изменении направления скорости, но не зависит от ее модуля); поэтому автоколебания часто самопроизвольно возникают в системах с сухим трением.

Еще один тип колебаний — параметрические — имеет место в тех случаях, когда в процессе движения периодически изменяются параметры системы.

Так, при раскачивании на качелях можно увеличить амплитуду, обусловленную первоначальным толчком (от необходимости, так как самопроизвольно система в колебательное движение не придет), если приседать в моменты наибольшего отклонения качелей и встывать при прохождении ими положения равновесия. При этом потенциальная энергия (в поле тяжести Земли) при приближении уменьшается на меньшую величину, чем увеличивается при отдалении, так как человек приседает, будучи наклонен к вертикали, а встывает по вертикали; наклонная же потенциальная энергия определяется проекцией перемещения на вертикаль.

Таким образом, дважды за период колебаний качелей энергия системы получает приращение; если она больше потерь на трение, система может значительно раскачаться. Когда обе эти величины сравниваются, колебания станут устойчивыми. Изменяющим параметром здесь является момент инерции человека. Как и автоколебания, параметрические колебания оказываются не строго гармоническими; однако в обоих случаях это отличие можно сделать достаточно малым. Наиболее интересные применения параметрических колебаний нашли в радиотехнике.

Строго говоря, все указанные системы в сущности нелинейны и широко распространенное линейное рассмотрение их лишь приближенно, справедливое только при достаточно малых амплитудах колебаний.

8.1. Колебания в связанных системах.  
Образование волны

Для описания колебаний материальных точек или макроскопических тел, изучавшихся до сих пор, достаточно было задать закон изменения одной координаты: системы обладали одной степенью свободы. Но во многих случаях колебательные системы бывают связаны друг с другом. Так, два одинаковых маятника массами  $m$  (рис. 8.1), способные колебаться в плоскости, перпендикулярной чертежу, представляют собой простейшую связанную систему. Связь создаст нить, натягиваемая весом груза массой  $m_1$  (при этом  $m_1 \ll m$ ). Если вывести один маятник из положения равновесия и предоставить самому себе, то импульс и энергия от первого маятника будут передаваться второму, затем обратно. Положение нити связи влияет на скорость передачи движения: чем ниже расположена нить, тем сильнее связь между маятниками тем быстрее происходит обмен импульсом и энергией.

Такая же картина наблюдается, вообще говоря, если оба маятника выводятся из положения равновесия одновременно. И только в двух случаях возникает устойчивое движение (без обмена энергией и импульсом):

1. Если отклонить оба маятника (длиной  $l$ ) в одну сторону на равные малые углы и одновременно отпустить их, то при колебаниях нить связи не будет деформироваться; маятники будут колебаться синхронно, в одинаковой фазе. Частота колебаний равна при этом частоте колебаний каждого маятника в отдельности. Если считать маятники математическими, то эта частота равна

$$f_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

2. Если отклонить маятники в противоположные стороны на равные малые углы и одновременно отпустить их, то они будут колебаться в противоположных фазах, также не обмениваясь энергией. Так как нить связи при этом деформируется, создавая дополнительное ускорение, то частота в этом случае увеличивается до значения

$$f_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} + \Delta},$$

где положительное слагаемое  $\Delta$  зависит от деформации и натяжения нити связи.

Эти два колебания называют «нормальными» колебаниями системы.

Можно показать, что все другие случаи движения (различные углы начального отклонения и различные начальные фазы, при которых колебания происходят с общей энергией между маятниками) являются наложением двух нормальных колебаний (система имеет две степени свободы).

Такой же обмен энергией можно наблюдать и на перочке одинаковых маятников, связанных друг с другом: если возбудить колебания одного из них, то движение постепенно передается все дальше и дальше. Каждый маятник повторяет движение, совершаемое его соседом, но с некоторым запаздыванием по фазе. Принято говорить, что в данном случае по системе маятников распространяется волна.

В общем случае волной называют периодическое возмущение (нарушение равновесного состояния) среды (системы материальных точек), распространяющееся в этой среде и передающее импульс и энергию. Перенос вещества при этом не происходит.

Так как маятники в рассмотренных примерах движутся в направлении, перпендикулярном направлению процесса, то волна называется поперечной. Если же колебания происходят вдоль линии распространения (например, продольные колебания витков длинной пружины), то волну называют продольной. Система, содержащая  $n$  связанных одинаковых маятников, имеет  $n$  степеней свободы и  $n$  нормальных частот.

В рассмотренных примерах связь между частями системы была вызвана силами упругости — такую волну называют упругой. Но связь может быть и неупругими. Между электрически заряженными металлическими или диэлектрическими шариками — маятниками, не связанными упругими нитями, передача импульса и энергии осуществляется за счет сил кулоновского взаимодействия.

Между маятниками, выполненными в виде катушек с током, связь является электромагнитной (за счет силы Ампера). Обе эти системы являются электромеханическими.

Во всех случаях, о которых мы говорили выше, распространение волны происходит вдоль прямой линии, поэтому такую волну называют одномерной (или линейной). Примером одномерной волн в акустике служит поперечная волна, распространяющаяся по натянутой струне, или продольная волна, распространяющаяся вдоль воздушного столба в трубе, где она возбуждается поршнем, закрывающим все сечение трубы и периодически движущимся вдоль оси трубы.

На поверхности воды плоскую волну можно получать, приводя в колебание длинную пластину, сообщающую движение воде сразу по всей ширине водяной ванны. В пространстве волна будет практически плоской, если она создается плоским поршнем больших размеров.

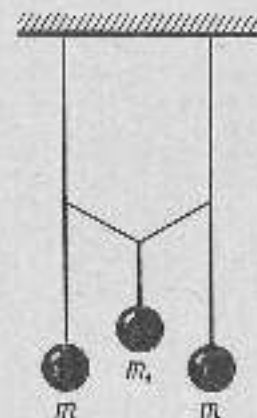


Рис. 8.1

колеблются взад-вперед, а процесс изучается в средней части волны, удаленной от поршня.

Если связанные колебательные системы распределены в плоскости, то получается двумерная волна. Ее легко наблюдать на поверхности воды. Создав возмущение в некоторой точке, замечаем, что оно распространяется в виде круговых волн. В данном случае волна не является упругой, так как движение частиц на поверхности воды в вертикальной плоскости обусловлено не упругими силами (жидкость не обрывается наизубу), а силой тяжести и силами поверхностного натяжения, существующими в поверхностном слое жидкости.

Однако кинематические характеристики поверхностных волн отличаются от характеристик упругих волн, поэтому первые могут служить моделью при изучении вторых.

В самом общем случае волна может распространяться в пространстве. Пусть волна возбуждается периодически пульсирующим шаром, находящимся в однородной изотропной упругой среде (например, в воздухе); тогда на любой шаровой поверхности, имеющей общий центр с пульсирующим шаром и радиус, превышающий радиус шара, все точки будут колебаться в одинаковой фазе — получается пространственная шаровая (сферическая) волна (ее плоское сечение для трех значений времени  $t$  показано на рис. 8.2, а).

Поверхность, содержащую точки, колеблющиеся в данный момент времени в одинаковой фазе, называют волновым фронтом. Линии, определяющие направление распространения волн, называются лучами. В однородной изотропной среде лучи нормальны к волновым фронтам.

Вдали от источника (рис. 8.2, б) небольшой участок фронта сферической волны практически является плоским; при этом все лучи, пронизывающие его, параллельны друг другу. В этом случае рассматриваемая часть волны называется плоской волной. В математическое описание наиболее просто и совпадает с описанием одномерной волны.

Плоскость, проходящую через луч и направление, в котором происходит колебания, называют плоскостью колебаний. Если в плоских волнах эта плоскость не меняет своего положения со временем, то поперечную волну называют линейно поляризованной

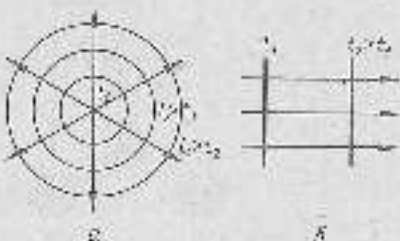


Рис. 8.2

как плоскополяризованной. Возможны и другие, более сложные типы поляризации; они будут рассмотрены в оптике.

Плоскость, перпендикулярную плоскости колебаний и также проходящую через луч, иногда называют плоскостью поляризации.

Для продольной волны положение плоскости колебаний, очевидно, определить однозначно не

возможно. Поэтому при рассмотрении продольных волн эти понятия не пользуются.

Кроме механических волн, обусловленных силами упругости, существуют механические волны, вызванные силами иной природы (например, упомянутые выше поверхностные волны на свободной поверхности жидкости), а также волны иной природы — электромагнитные (включающие и волны света). Несмотря на различную природу, распространение всех этих волн подчиняется общим математическим закономерностям (как это было и в случае колебаний). В дальнейшем упругие волны мы будем характеризовать обобщенным смещением, т. е. скалярной величиной  $z$ , которая может представлять как смещение частиц в продольной волне, происходящее в направлении луча, так и смещение в линейно поляризованной поперечной волне либо давление, создающееся в акустической волне.

Лишь при определении скорости распространения и изучении энергетических соотношений потребуется знание природы и типа волны.

Как и в случае колебаний, мы ограничимся волнами с малыми смещениями  $z$ , чтобы возникающие деформации можно было считать упругими, подчиняющимися закону Гука и, следовательно, принципу суперпозиции. Здесь применимость этого принципа становится особенно наглядной. Например, при распространении двух волн каждая из них распространяется так, как если бы другой не было, и результат их наложения является простым суммированием смещений составляющих волн.

Мы ограничимся рассмотрением только гармонических волн; более сложные волны могут быть представлены совокупностью этих простейших. Наконец, мы допустим, что скорость распространения волн не зависит от частоты колебаний (это допущение строго справедливо только для непоглощающих идеально прозрачных сред).

## 8.2. Бегущие волны. Скорость распространения волн

Если в неограниченной среде беспрепятственно распространяется одна-единственная волна, то ее называют бегущей. Наложение нескольких бегущих волн друг на друга создает, как мы увидим ниже (§ 8.4), более сложный процесс.

Составим уравнение бегущей волны, позволяющее определять смещение любой точки волны в любой момент времени. Для простоты начнем с одномерной волны, распространяющейся в положительном направлении вдоль оси  $X$  со скоростью  $v$ . Полученные результаты, очевидно, будут справедливы и для плоской волны.

Пусть точка, находящаяся в начале координат, движется по закону

$$z = Z_0 \cos \omega t = Z_0 \cos \left( 2\pi \frac{t}{T} \right). \quad (8.1)$$

Напомним, что  $z$  здесь обобщенное смещение,  $Z_0$  — его амплитуда.



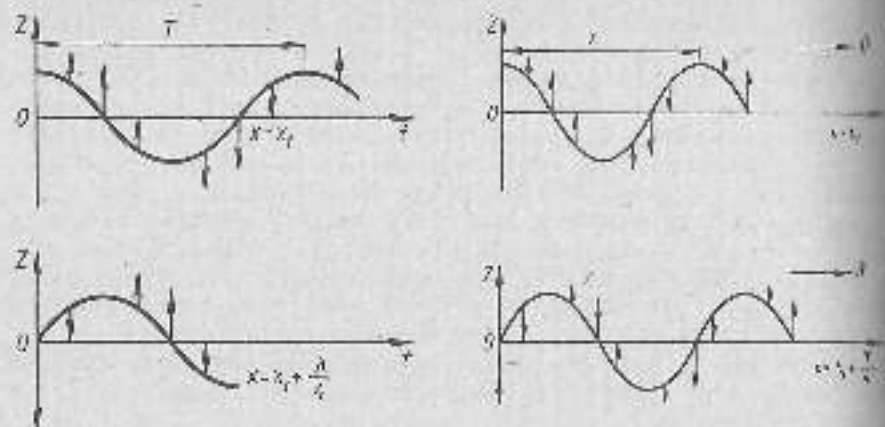


Рис. 8.3

Тогда точка, имеющая в положении равновесия координату  $x$ , будет двигаться по закону

$$z = Z_m \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right], \quad (8.2)$$

так как время запаздывания ее движения относительно первой точки есть:

$$\tau = \frac{x}{v}.$$

Уравнение (8.2) можно переписать в виде

$$z = Z_m \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] = Z_m \cos (\omega t - kx), \quad (8.3)$$

где  $\lambda = vT$  — расстояние, на которое волна распространяется за один период колебаний точек системы. Это расстояние называется *длиной волны* или *пространственным периодом*.

Очевидно, точки, удаленные друг от друга на расстояние  $\Delta x = \lambda$ , в любой момент колеблются в одинаковой фазе, так как при  $\Delta x = \lambda$  получается:

$$2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi.$$

Коэффициент

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

называют *волновым числом*: он определяет число волн, укладывающихся на отрезке длиной  $2\pi x$ ; подобно этому угловая частота  $\omega$  определяет число периодов  $T$ , «укладывающихся» на отрезке времени в  $2\pi$  с. Уравнение (8.2) и есть уравнение бегущей плоской волны. При заданном  $x$  оно позволяет определить положение точки (с координатой положения равновесия  $x$ ) в любой момент

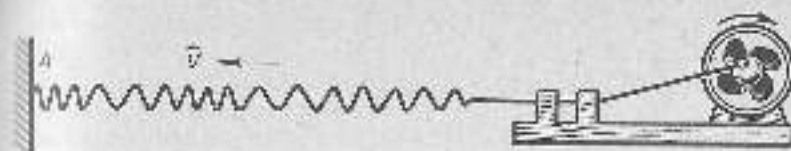


Рис. 8.5

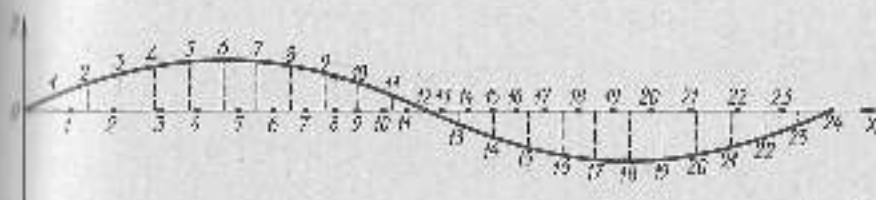


Рис. 8.6

времени  $t$ . При заданном  $t$  оно позволяет определить мгновенные положения всех колеблющихся точек.

На рисунке 8.3 показаны графики смещений во времени двух точек, положения равновесия которых  $x_1$ ,  $x_1 + \frac{\lambda}{4}$  отличаются на четверть длины волны.

На рисунке 8.4 показаны смещения различных точек той же волны в два разные момента времени, отличающиеся на четверть периода. Рисунок 8.4 можно назвать «моментальными фотографиями» бегущей волны. Стрелки у отдельных точек характеризуют относительные значения и направления их мгновенной скорости.

Мгновенная фотография продольной волны, образовавшейся на горизонтальной пружине в момент достижения волной закрепленного конца пружины  $A$ , показана на рисунке 8.5.

Мгновенное распределение точек, колеблющихся в бегущей продольной волне, можно получить из графика поперечной волны, если все вертикальные смещения повернуть на  $90^\circ$  (положительные — по часовой стрелке, отрицательные — против). Такая операция проделана на рисунке 8.6. Положение равновесия точек определяется пересечением вертикальных смещений с осью  $X$ ; номера точек во всепогодательной поперечной волне и основной (продольной) волне одинаковы.

На рисунке 8.6 отчетливо видно, что в продольной волне вблизи точек, находящихся в данный момент в положении равновесия (точки 12, 24), возникают сгущения или разрежения частиц среды; вблизи точек, находящихся в состоянии наибольшего отклонения от положения равновесия (точки 6 и 18) их относительные смещения самые малые.

Сопоставление рисунков наглядно показывает, что использование в (8.1) символика обобщенного смещения позволяет количественно описать как поперечные, так и продольные волны.

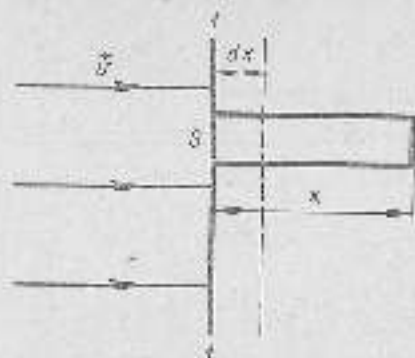


Рис. 8.7

Выражения (8.2) и (8.3) пригодны также для описания гармонических волн любой природы. Известно, что в одном моле любого газа содержится одно и то же число молекул, оно называется *постоянной Авогадро*:

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

При нормальных условиях (атмосферное давление  $p = 10^5$  Па, температура  $T = 273$  К) 1 моль газа занимает объем

$$V = 0,022 \text{ м}^3.$$

Следовательно, одна молекула встречается в среднем в объеме

$$\omega = \frac{V}{N_A} = 3,7 \cdot 10^{-26} \text{ м}^3$$

и среднее расстояние между молекулами

$$l = \sqrt[3]{\omega} = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Как будет показано в § 8.3, амплитуда смещения в звуковой волне средней громкости при частоте  $\omega = 6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  равна примерно

$$Z_m = 10^{-8} \text{ м}.$$

Таким образом, на рисунке 8.6 относительноый масштаб по осям  $Z$  и  $X$  более или менее соответствует этому случаю.

Найдем скорость распространения плоской продольной волны в однородной среде плотностью  $\rho$ .

Пусть поперечное сечение фронта волны, бегущей вправо, в момент  $t$  занимает положение  $l$  (рис. 8.7). При его движении возникает продольное сжатие (жесткое утолщение) на участке

$$dx = v dt$$

и через сечение  $S$  пройдет слева дополнительный (сжатый) элемент массы

$$dm = \rho v S dx,$$

обладающий механическим импульсом:

$$v dm = v^2 S \rho dx dt.$$

По второму закону Ньютона изменение импульса вызвано направленной вправо силой  $df$  (создаваемой деформированной средой, расположенной левее сечения  $l$ ):

$$df = S dp,$$

где  $dp$  — избыточное давление на границе раздела  $l$ . Плательму

$$S dp = S v^2 dp.$$

Или

отсюда находим скорость распространения волны:

$$v = \sqrt{\frac{df}{dp}}.$$

В частном случае продольной волны в твердом теле введем относительное смещение  $\epsilon = \frac{dx}{x}$  и модуль Юнга  $E$ . Так как

$$\epsilon = \frac{dx}{x} = \frac{dv}{v} = \frac{dv}{v} = \frac{dv}{v}$$

(изменение объема равно  $S dx$ , но  $S = \cos \alpha l$ ), то скорость продольной звуковой волны сжатия получится равной

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (8.4)$$

Можно показать, что для поперечных волн скорость распространения определяется величиной

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где  $G$  — модуль сдвига, связанный с модулем Юнга соотношением

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

( $\mu$  — коэффициент Пуассона, § 7.1).

Так как модуль сдвига меньше модуля Юнга, то поперечные волны распространяются медленнее продольных. Это дает возможность сейсмологам определять расстояния от их приборов до места возникновения землетрясения (порождающего волны), измеряя запаздывание прихода поперечных волн относительно продольных.

В теоретической физике показывается, что поперечная волна в натянутой струне (или в резиновом шнуре) распространяется со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{F}{m_0}}, \quad (8.5)$$

где  $m_0$  — масса единицы длины струны,  $F$  — сила ее натяжения.

Следует подчеркнуть, что скорость распространения волны не имеет никакого отношения к скорости движения отдельных точек. Пока амплитуды колебаний малы (а мы будем выжиматься только такими случаями), скорость распространения не зависит от амплитуды; в широком интервале частот она также не зависит и от частоты.

Так, в приведенном выше примере ( $Z_m = 10^{-8}$  м,  $\omega = 6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ) амплитуда скорости молекул  $Z_m \omega = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$ , а скорость звука в воздухе (см. ниже) равна 330 м/с.

Скорость распространения продольных волн в металлах составляет около 4500—5000 м/с, в воде — 1500 м/с (речь идет об упругих колебаниях — сжатия и расширения, которые можно возбудить в

глубине водоема). Неупругие поверхностные волны на воде распространяются гораздо медленнее (их скорость не превышает 0,1 м/с), что делает их удобными для наблюдений.

Упругие волны в газе (где имеют место только продольные волны), как будет доказано в молекулярной физике, распространяются со скоростью, равной

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \quad (8.6)$$

где  $M$  — молярная масса газа;  $T$  — абсолютная температура;  $R$  — газовая постоянная ( $R = 8,31$  Дж/(моль·К));  $\gamma$  — безразмерная величина, связанная с процессами, происходящими в газе при его деформациях (для воздуха  $\gamma = 1,4$ ). Так как молярная масса воздуха  $M = 29$  кг/моль, то для скорости звука при  $T_0 = 273$  К получается  $v = 330$  м/с. При другой температуре  $T$  скорость, как видно из формулы (8.6), равна:

$$v_t = 330 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

Обычно температура воздуха близка к  $T = 300$  К и скорость продольных колебаний в нем (скорость звука) близка к 330 м/с.

Уравнение (8.2) описывает волну, распространяющуюся в направлении оси  $X$ . При противоположном направлении второе слагаемое в аргументе меняет знак (так как  $v$  заменяется на  $-v$ ).

### 8.3. Энергия волны

Амплитуду колебаний всех точек одномерной (плоской) волны мы считали везде одинаковой, так как не учитывали затухания (мы его учтем позже). Математическое описание плоской волны наиболее просто; мы и будем вести расчеты для этого случая.

Для нахождения мгновенных скоростей точек волны следует фиксировать координаты точек волны (8.3) и взять частную производную по времени от смещения. При этом получим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \omega Z_m \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right); \quad k = \frac{\omega}{v} \quad (8.7)$$

Если волна распространяется в непрерывной среде плотностью  $\rho$ , то, выделив на волновом фронте участок  $S$ , на который опирается цилиндр длиной  $dx$ , найдем, что его мгновенная кинетическая энергия равна:

$$dW = \frac{1}{2} \rho S dx \omega^2 Z_m^2 \cos^2 \varphi(t, x) \quad (8.8)$$

где  $\rho S dx = dm$  — масса выделенного элемента объема среды, имеющая скорость  $\frac{\partial z}{\partial t}$ , а

$$\varphi(t, x) = \left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right)$$

Таким образом, как и в случае колебаний одиночного маятника, кинетическая энергия максимальна при прохождении колеблющихся в волне частиц через положение равновесия и обращается в нуль при наибольшем отклонении точек.

Скорость точек меняет направление при наибольшем отклонении их от положения равновесия.

Одиночный маятник, находящийся в положении наибольшего отклонения, имеет наибольшую потенциальную энергию. В волне дело обстоит иначе. Действительно, потенциальная энергия деформации определяется не абсолютным смещением, а значением относительного смещения соседних точек. Если, например, длинную спиральную пружину перемещать целиком вдоль ее оси, то никакой продольной деформации не произойдет даже при очень больших смещениях. Подобно этому, если тонкую металлическую или деревянную пластину передвинуть параллельно самой себе (не деформируя), то даже при очень больших смещениях изменение потенциальной энергии (энергии деформации) будет равно нулю. Но при растяжении пружины (или изгибе пластины) энергия деформации, конечно, появится. Итак, потенциальная энергия деформации зависит от относительного смещения точек в фиксированный момент времени  $t$  (рис. 8.8). Так, точка, имевшая в положении равновесия координаты  $(x, 0)$ , смещена в положение 1 с координатами  $(x, z)$ . Соседняя точка с координатами положения равновесия  $(x+dx, 0)$  смещена в положение 2 с координатами  $(x+dx, z+dz)$ ; в данном случае  $dz < 0$ . При этом

$$dz = -\frac{\partial z}{\partial x} dx$$

Поэтому относительное смещение равно:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\omega}{v} Z_m \cos \varphi(t, x) \quad (8.9)$$

Для потенциальной энергии элемента объема  $S dx$  для продольной волны получается выражение

$$dU = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 S dx = \frac{1}{2} \frac{E}{v^2} \omega^2 Z_m^2 S dx \cos^2 \varphi(x, t) \quad (8.10)$$

Сравнивая с (8.8), убеждаемся, что потенциальная энергия максимальна в те же моменты и в тех же элементах объема, где максимальна кинетическая энергия, т. е. при прохождении точек через положение равновесия. Такое отличие распределения энергии от случая одиночного маятника объясняется тем, что в волне точки обмениваются энергиями, а одиночный маятник только преобразует свою энергию из одного вида в другой.

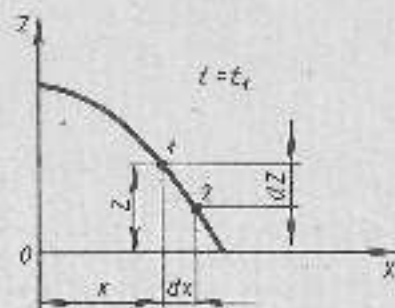


Рис. 8.8

Полный запас энергии волны в выбранном объеме равен:

$$\frac{E}{2} (Z_0 \omega)^2 \cos^2 \varphi(x, t) S \delta x \quad (8.11)$$

Множественная плотность энергии (энергия, проходящая за единицу объема) в волне равна:

$$\bar{w} = \frac{E}{2} (Z_0 \omega)^2 \cos^2 \varphi(x, t) = \rho (Z_0 \omega)^2 \cos^2 \varphi(x, t) \quad (8.12)$$

На практике нас не очень интересует, что делается в элементе объема в данный момент; *важнее* знать, что происходит во времени в среднем. Усредняя выражение (8.12) за период колебаний, получаем (так как средний квадрат косинуса за период равен 0,5):

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho (Z_0 \omega)^2 \quad (8.13)$$

Итак, *распространяющаяся волна несет с собой энергию*. Через поперечное сечение площадью  $1 \text{ м}^2$  за  $1 \text{ с}$  пройдет энергия, заключенная в объеме параллелепипеда с длиной, численно равной скорости волны  $v$ :

$$I = \bar{w} v = \frac{1}{2} (\rho v) (Z_0 \omega)^2 \quad (8.14)$$

Эту величину называют *интенсивностью волны или плотностью потока энергии*, а также *потоком мощности*. Она зависит от двух сомножителей: первый  $(\rho v)$  характеризует среду, второй — свойства колеблющейся точки в волне. Величина  $R = \rho v$  называется *удельным акустическим сопротивлением среды*. Вторым сомножителем можно связать с избыточным давлением, возникающим в волне: интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды и частоты. Если волна продольная, то относительное смещение служит одновременно и мерой относительного сжатия. Для наибольшего сжатия в соответствии с законом Гука имеем:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_m = \frac{v_m}{E} = \frac{v_0}{E}$$

где  $v_m$  — амплитуда напряжения,  $v_0$  — амплитуда избыточного давления. Пользуясь соотношением (8.14), находим:

$$\omega Z_0 = \frac{v_m v}{E} = \frac{v_0}{R} \quad (8.15)$$

Тогда для интенсивности получается полезное для практики выражение:

$$I = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{R} \quad (8.16)$$

Так, при распространении звука небольшой громкости в воздухе ( $R = 430 \text{ Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ ) амплитуда переменного избыточного давления равна примерно  $0,1 \text{ Па}$ , а атмосферное давление, как известно,

составляет около  $10^5 \text{ Па}$ . При периоде колебаний  $T = 10^{-3} \text{ с}$  амплитуда смещения слоев воздуха составит всего  $4 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ , а интенсивность звуковой волны  $10^{-3} \text{ Вт/м}^2$ . При той же амплитуде смещения в воде, обладающей удельным акустическим сопротивлением, равным

$$R_w = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1} = 3500 R,$$

энергия была бы соответственно больше (в 3500 раз).

Уравнение (8.14) можно представить в следующем виде:

$$I = \frac{1}{2} \left( E \frac{\partial x}{\partial t} \right)_m (\omega Z_0) = \frac{1}{2} \left( E \frac{\partial x}{\partial t} \right)_m \left( \frac{dx}{dt} \right)_m$$

Сравнив это с вектором Умова, введенным в главе 7 (уравнение 7.8), убеждаемся, что в пятом случае поток мощности для бегущей волны соответствует вектору Умова, также зависящему от напряжения и скорости.

До сих пор мы рассматривали плоскую волну. Чтобы написать уравнение круговой поверхностной волны, мы должны в уравнении (8.2) заменить  $x$  на  $r$  — радиус-вектор рассматриваемой точки, лежащей на фронте волны; начало вектора лежит в точке возбуждения волны. Кроме того, надо учесть, что амплитуда убывает с расстоянием, поскольку число точек, вовлеченных в колебание, растет пропорционально радиусу. Так как энергия колеблющейся точки пропорциональна квадрату амплитуды, то амплитуда в этой волне должна меняться обратно пропорционально корню квадратному из радиуса, поэтому для поверхностной круговой волны получается следующий закон движения:

$$z = Z_0 \cos(\omega t - kr) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr) \quad (8.17)$$

Таков же закон распространения цилиндрических пространственных волн, образующихся при распределении возбуждающих точек на оси цилиндра, перпендикулярной направлению распространения волн.

В сферической волне, где число возбуждаемых точек пропорционально квадрату радиуса, амплитуда убывает обратно пропорционально радиусу волны (начало его лежит в точке возбуждения). Поэтому *уравнение бегущей сферической волны имеет вид:*

$$z = Z_0 \cos(\omega t - kr) = \frac{B}{r} \cos(\omega t - kr) \quad (8.18)$$

В уравнениях (8.17) и (8.18)  $A$  и  $B$  имеют размерности соответственно  $[L^{3/2}]$  и  $[L^2]$ .

Если рассматривается ограниченная область, размеры которой малы по сравнению с радиусом волны, то в ее пределах заметного изменения амплитуды не происходит, а радиус-векторы оказываются практически параллельными друг другу; тогда мы снова приходим к плоской волне.

Если среда обладает заметным поглощением, то интенсивность  $I$  при прохождении пути  $dx$  уменьшается, причем

$$-dI = \alpha I dx.$$

Интегрируя это выражение на отрезке  $(0, x)$  и приняв в начале отрезка  $I = I_0$ , получаем интегральный закон поглощения энергии:

$$I = I_0 \exp(-\alpha x). \quad (8.19)$$

Величина  $\alpha$  называется *коэффициентом поглощения энергии*. Аналогичный закон может быть записан и для амплитуды избыточного давления:

$$p_n = p_0 \exp(-0,5\alpha x).$$

Для воздуха  $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ .

Звуковая волна (маровая), распространяясь в воздухе, обладает как за счет поглощения, так и за счет увеличения размеров ее фронта. Так как  $\alpha$  невелика, то на расстоянии до 1 км основной является вторая причина (ослабление в миллионы раз). На больших расстояниях, практически не представляющих особого интереса, роль поглощения становится решающей.

В области ультразвуковых частот ( $10^3$  Гц и выше) улучшаются возможности создания волн, имеющих почти плоский фронт; в этом случае ослабление волны определяется в первую очередь ее поглощением.

#### 8.4. Интерференция волн. Стоячие волны

Рассмотрим теперь, что произойдет, если в среде существуют одновременно волны, порождаемые источниками, удовлетворяющими следующим жестким требованиям:

- источники колеблются со строго одинаковой частотой;
- разность фаз между колебаниями источников длительное время (т. е. во все время изучения процесса, охватывающего большое число периодов) сохраняется постоянной. Взаимное влияние источников друг на друга не учитывается, хотя при малых расстояниях между источниками оно может иметь место;
- если волны поперечные, то колебания, создаваемые обоими источниками, происходят в одной плоскости.

Источники, удовлетворяющие этим условиям, называются когерентными. Они могут быть созданы различными способами. Так, два громкоговорителя, питаемые общим генератором переменного тока звуковой частоты, являются очень удобными для практики когерентными источниками упругих звуковых волн в воздухе.

Расстояние между когерентными источниками должно превышать длину волны, создаваемой ими в окружающей среде.

Простым примером чисто механических когерентных источников являются две проволоки, прикрепленные к общей горизонтальной пружине и погруженные своими концами в водяную ванну. Освещая ванну снизу (ее дно должно быть прозрачным) и наблюдая про-

ходящий свет на экран, мы увидим (в отсутствие волн) равномерно освещенное поле зрения. Когда же при колебаниях пружины в воде возникают поверхностные круговые волны, то различие в преломлении света на плоской и изогнутой поверхности воды приводит к образованию неравномерно освещенных участков. При колебаниях одной проволоки видны бегущие круговые волны, распространяющиеся от места погружения конца проволоки к краям ванны. При колебаниях обеих проволок получается неподвижная картина системы гипербол, имеющих фокусы в точках расположения источников. Следовательно, вся поверхность воды разбивается на области с различными амплитудами колебаний. Так как волны подчиняются принципу суперпозиции, то для описания полученной картины следует просто сложить колебания, возникающие в каждой точке поверхности воды.

Итак, пусть оба источника —  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 8.9) — колеблются по закону

$$z = Z_0 \cos \omega t. \quad (8.20)$$

В точку  $A$  волны приходят с различными фазами (различие зависит от расстояний  $R_1$ ):

$$z_1 = \frac{Z_0}{\sqrt{R_1}} \cos(\omega t - kR_1); \quad z_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{R_2}} \cos(\omega t - kR_2).$$

В условиях опыта  $R$  незначительно отличается от  $R_1$ . Поэтому, принимая для простоты равенство амплитуд обеих волн ( $R$  — среднее расстояние до источников), получаем:

$$z_1 = \frac{Z_0}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR_1); \quad z_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR_2). \quad (8.21)$$

В аргументе косинуса усредняем  $R_1$  и  $R_2$ . Складывая, находим:

$$z = z_1 + z_2 = \frac{2Z_0}{\sqrt{R}} \cos\left(\pi \frac{R_1 - R_2}{\lambda}\right) \cos(\omega t - kR). \quad (8.22)$$

Геометрическим местом точек, колеблющихся с одинаковой амплитудой, является *гипербола* (в пространстве это были бы гиперболические вращения с осью, проходящей через источники). Гипербола нулевого порядка, для которой разность хода волн равна:

$$\Delta = R_1 - R_2 = 0,$$

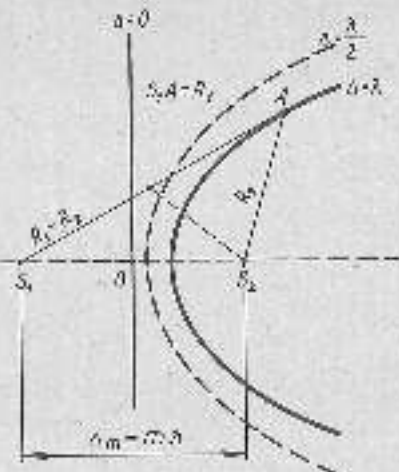


Рис. 8.9

вырождается в прямую, проходящую через середину расстояния между источниками перпендикулярно оси. Гиперболы с большими разностями хода располагаются по обе стороны от нулевой и тем дальше, чем больше разность хода. Наконец, гипербола, соответствующая наибольшей разности хода, вырождается в прямую, совпадающую с осью, причем для всех точек оси (вне отрезка  $S_1S_2$ ) эта наибольшая разность хода равна расстоянию между источниками:

$$\Delta_m = m\lambda, \quad (8.23)$$

При разности хода, равной целому числу волн:

$$\Delta = n\lambda \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

колебания имеют наибольшую амплитуду. При разности хода составляющей нечетное число полуволн:

$$\Delta = (2n-1)\frac{\lambda}{2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

амплитуда колебаний наименьшая (нулевая). Из-за инерции светового восприятия глаз видит неподвижные гиперболы разной степени освещенности, зависящей от амплитуды.

Явление, при котором происходит *перераспределение энергии колебаний в пространстве* (в зависимости от разности хода волн), называется *интерференцией волн*.

Если источники расположены слишком близко друг к другу, так что наибольшая разность хода не достигает половины длины волны, то в пространстве, где волны перекрываются, *интерференционная картина не возникает* (нет ни одного минимума).

Это легко проверить, слушая звук, создаваемый двумя когерентными громкоговорителями, постепенно приближаемыми друг к другу.

Большой практический интерес представляет частный случай интерференции, когда две плоские когерентные волны разной амплитуды распространяются навстречу друг другу (например, в одномерной неограниченной среде); при этом возникают *стоячие волны*. Полагая, что волны распространяются вдоль оси  $X$ , можем задать бегущие волны уравнениями

$$z_1 = Z_0 \cos(\omega t - kx), \quad z_2 = Z_0 \cos(\omega t + kx).$$

Тогда суммарное смещение будет описываться выражением

$$z = z_1 + z_2 = 2Z_0 \cos kx \cos \omega t. \quad (8.24)$$

Таким образом, вместо косинуса, являющегося функцией двух переменных, получается произведение двух косинусов, каждый из которых зависит от одной переменной. Это означает появление у суммарного процесса новых физических свойств.

Распределение скоростей в стоячей волне подчиняется уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -2\omega Z_0 \cos kx \sin \omega t. \quad (8.25)$$

Следовательно, имеются точки, постоянно находящиеся в покое, характеризуемые координатами  $x = \frac{\lambda}{2}(2n-1) = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$ , где  $n=0, 1, \dots$ . Они стоят друг от друга на  $\frac{\lambda}{2}$  и называются *узлами смещения*.

Распределение относительных смещений и, следовательно, потенциальной энергии деформации таково:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2kZ_0 \sin kx \cos \omega t. \quad (8.26)$$

Это означает, что имеются *узлы деформации* (при  $x = \frac{n\lambda}{2} = n\frac{\lambda}{2}$ , т. е. посредине между узлами смещения).

Мгновенные распределения смещений для трех моментов времени изображены на рисунке 8.10. Стрелками указаны мгновенные распределения скоростей. В момент  $t=0$  смещения всех точек наибольшие. В момент  $t_1$  смещения всех точек составляют 0,7 соответствующих амплитуд. Такое же соотношение существует и между скоростями точек.

Кинетическая энергия  $W \sim \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$  концентрируется вблизи точек, имеющих наибольшую амплитуду скорости (и, следовательно, абсолютного смещения). Эти области называются *лучностями скорости* (или абсолютного смещения); расстояние между ними равно половине длины волны.

Энергия деформации  $U \sim \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$  концентрируется вблизи точек,

обладающих *наибольшим относительным смещением* (наименьшим абсолютным). Эти области называются *лучностями деформации*; они также расположены на расстоянии полуwave друг от друга.

Из (8.25) и (8.26) следует, что максимумы обеих энергий, равные по абсолютному значению, смещены во времени на четверть периода.

Поэтому есть моменты, когда все точки на мгновение останавливаются ( $\omega t = n\pi$ ,  $n=0, 1, \dots$ ) и волна обладает только энергией деформации. Через четверть периода ( $\omega t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ) все точки среды одновременно проходят через свои положения равновесия с максимальными скоростями; деформации полностью исчезают, и волна обладает лишь кинетической энергией.

Так как мгновенное значение потока мощности пропорциональ-

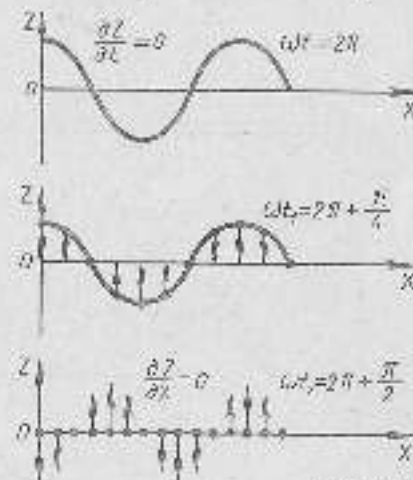


Рис. 8.10

но произведению  $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$ , то в стоячей волне оно пропорционально  $\sin 2kx \sin 2\omega t$ .

Следовательно, среднее значение потока мощности за период  $T$  равно нулю: в стоячей волне нет направленного переноса энергии. Происходит лишь периодическое ее перераспределение между соседними пучностями  $W$  и  $U$ .

Отметим в заключение, что скорости в пучностях деформации минимальны, поэтому пучности деформации иногда называют узлами скорости. Соответственно пучности скорости являются узлами деформации. Поэтому, говоря о пучностях и узлах, обязательно следует указывать, о какой физической величине (деформации или скорости) идет речь.

### 8.5. Отражение волн

Одномерные стоячие волны в лекционных условиях получают, заставляя бегущую волну отразиться назад от границы раздела двух сред.

Волна, дошедшая до границы раздела сред, частично отражается. Так, если левый конец горизонтального шнура жестко привязан к гвоздю, вбитому в стенку, а другой находится в руках экспериментатора, то при ударе по шнуру, например сверху вниз, можно заметить, что возникает местный изгиб шнура вниз — кратковременная деформация, бегущая по шнуру влево (рис. 8.11, а). После отражения от закрепленного конца отраженный изгиб имеет противоположный знак: шнур изгибается вверх. Это легко понять, если учесть, что у точки закрепления развиваются силы, препятствующие приходящему изгибу; они порождают изгиб противоположного знака, начинающий распространяться вправо (рис. 8.11, б). Смещение закрепленного конца все время отсутствует. Поэтому и в отраженной деформации, бегущей вправо, знак смещения

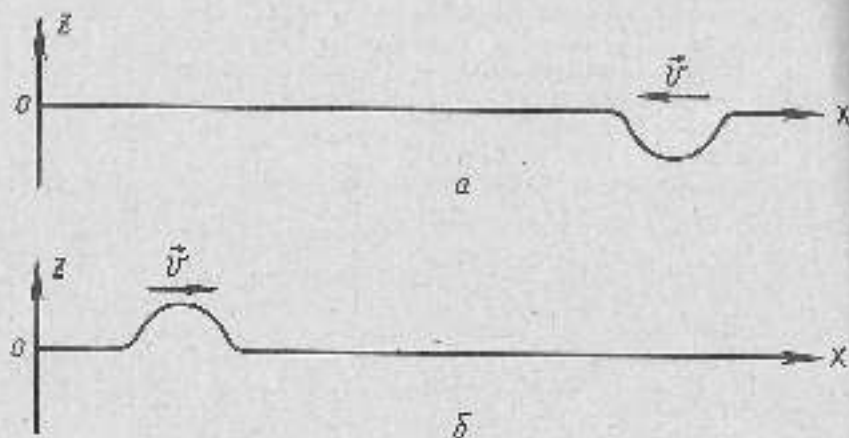


Рис. 8.11

является на обратный. Если отражается гармоническая волна, то такое изменение равносильно «потере» (или «приобретению») фазы волны.

Действительно, на закрепленном конце (граница раздела,  $x=0$ ) имеем:

$$z_{\text{отр}} = Z_0 \cos \omega t; \quad z_{\text{отр}} = -z = Z_0 \cos (\omega t \pm \pi).$$

Если второй конец шнура свободен (можно воспользоваться вертикально висающим шнуром и возбуждать его в одной из точек верхней части), то изгиб отражается на конце шнура без перемены знака смещения. Это значит, что при отражении бегущая (падающая) и отраженная волны на свободном конце шнура имеют смещение одинаковых знаков, в результате чего смещение удваивается. Но при этом на конце шнура отсутствует деформация.

При возбуждении шнура гармонической силой образуются бегущая и отраженная волны. При надлежащей длине шнура (см. ниже) создается стоячая волна.

Можно показать, что в общем случае (при нормальном падении волны на плоскую границу раздела сред 1 и 2) коэффициент отражения (по амплитуде) зависит от соотношения акустических сопротивлений сред:

$$\Gamma_z = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}. \quad (8.27)$$

Коэффициент отражения (по энергии) определяется квадратом выражения (8.27):

$$\Gamma_{\text{эф}} = \left( \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right)^2. \quad (8.28)$$

При равенстве акустических сопротивлений сред волна полностью проходит во вторую среду — отражение отсутствует. При большом различии акустических сопротивлений отражение получается почти полным.

Из (8.27) и (8.28) следует, что отражение энергии одинаково при переходе волны из среды 1 в среду 2 и при обратном переходе.

Амплитуда отраженной волны при этом также не меняется, фазы же оказываются противоположными.

При наклонном падении выражения для коэффициентов отражения усложняются.

Образование стоячих волн в одномерной среде (шнуре) удобно показать на следующем опыте. Камертон  $K$ , возбуждаемый элект-

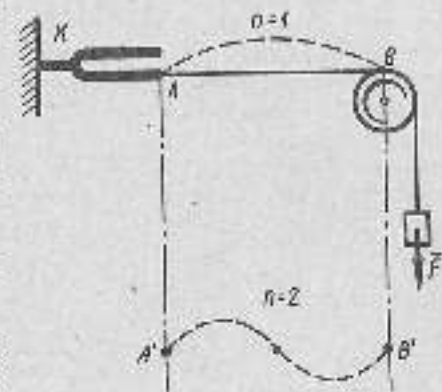


Рис. 8.12

ромагнитным способом, прикреплен к концу шнура (рис. 8.12), и движется по плоскости  $p$  и сцеплен  $S$ . Другой конец шнура переброшен через блок и натягивается весом груза, прикрепленного к этому концу. Так как скорость распространения волны зависит от натяжения шнура (уравнение 8.5), то, регулируя натяжение шнура подбором груза, можно получить на нем стоячие волны. Для этого необходимо, чтобы бегущие волны подходили к границе раздела в одной и той же фазе. Это возможно в том случае, если на участке среды, где мы хотим получить стоячую волну (оба конца участка закреплены или свободны), укладывается целое число полуволн (целое число четвертей волны).

Если же один конец участка среды закреплен, а другой свободен, то его длина должна равняться нечетному числу четвертей волны, так как при одном из отражений происходит описанный выше скачок фазы. Изменяя длину шнура и его натяжение, можно получить разное число волн при одной и той же частоте возбуждающих колебаний. Наибольшая частота возникающих волн соответствует основному тону, большие частоты — более высоким тонам (обертонам).

Когда на шнуре укладывается целое число полуволн (оба его конца можно считать закрепленными), то он колеблется в резонансе с возбуждающей силой, создаваемой камертоном, и амплитуда колебаний делается значительной. На рисунке 8.12 показаны два возможных типа возбужденных стоячих волн: при  $n=1$  возбуждается основной тон (частота колебаний наименьшая), при  $n=2$  — второй обертон.

Такое же распределение получилось бы у стержня со свободными концами, только на концах был бы максимум смещения, а посредине — нулевое смещение (при  $n=1$ ). Если же один конец стержня свободен, а другой закреплен (рис. 8.13), то интенсивные стоячие волны получаются при условиях, что на длине стержня укладывается нечетное число четвертей волны, так как на одном конце смещение должно быть нулевым, а на другом — наибольшим.

В опыте, описанном в § 7.5, вращающийся валок возбуждал стоячие волны (на основном тоне) в плоских пружинах; на каждой из них укладывалась четверть волны.

Камертон, изобретенный в самом начале XVIII в. — это U-образно изогнутый стержень, совершающий поперечные колебания на основной частоте. Края его ножек свободны, узел смещений (пучность относительных деформаций) находится у середины ножек. Там развиваются наибольшие силы, направленные вертикально. Они приводят прикрепленный к этой части вертикальный стержень (стебель камертона) в вертикальные продольные колебания.



Рис. 8.13

Обычно стебель крепится к верхней крышке деревянной резонансной ящика, длина которого в два-три раза больше двух других сторон. Ящик с одной стороны открыт. Поисками колеблющейся стержень возбуждает поперечные колебания верхней крышки ящика; в результате этого столб воздуха, заполняющего ящик, приходит в вынужденные резонансные продольные колебания, так как длина столба равна четверти длины волн в воздухе.

Специальная форма основания стержня камертона обеспечивает весьма малую амплитуду его качаний на обертонах. Поэтому вращение камертона возбуждают практически чистогармонические продольные волны, воспринимаемые ухом как чистые музыкальные тоны. Нельзя не отметить искусство старых мастеров, создавших столь совершенный источник звука в то время, когда теория колебаний только начиналась. Добротность современных камертонов очень высока ( $Q=10^4$ ).

Стоячие волны удобны для определения длины волны. Зная длину волны, можно найти частоту (при известной скорости распространения) или скорость (при известной частоте).

Стоячие волны (и соответствующие им частоты) являются нормальными волнами (частотами) системы (см. § 8.11).

При возбуждении колебательной системы кратковременным единичным ударом, например при ударе кувалдочком по ножке камертона, возникают колебания последнего на собственной частоте. Это объясняется тем, что возбуждающий импульс имеет непрерывный спектр; в последнем обычно содержится и собственная частота колебаний камертона. Поэтому и возникают интенсивные колебания.

Такое же явление происходит и при ударе по торцу прямолинейного упругого стержня, имеющего несколько собственных частот. Так как амплитуды высших гармоник обычно быстро уменьшаются с номером гармоника и одновременно уменьшается добротность стержня (по отношению к частотам гармоник), то звук, издаваемый стержнем, более или менее монохроматичен.

## 8.6. Принцип Гюйгенса

Вернемся к волнам, распространяющимся на поверхности воды или в пространстве. Если волна встречает на своем пути препятствие, линейные размеры которого соизмеримы с длиной волны, то ее фронт деформируется и волна не только отражается, но и огибает препятствие, что легко показать на водяных волнах, ставя на их пути небольшие преграды или сплошной экран с небольшими отверстиями. Отклонение волн от прямолинейного распространения (огибание препятствий) называется дифракцией.

Для определения волнового фронта при дифракции и других отклонениях от прямолинейного распространения современник Ньютона Х. Гюйгенс (1629—1695) предложил принцип, физическое содержание которого будет раскрыто в опыте. Этот принцип заключается в следующем. Если известны положение волнового фронта в момент  $t$ , направление распространения волны и скорость



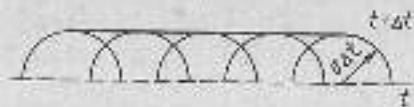


Рис. 8.14

ее распространения  $\vec{v}$ , то можно каждую точку волнового фронта рассматривать как источник вторичных элементарных когерентных волн (распространяющихся только вперед). Построив части шаровых элементарных волн, опирающиеся на мгновенный волновой фронт и имеющие радиус  $v\Delta t$ , и проведя их огибающую, получим положение волнового фронта в момент  $t + \Delta t$ . Отметим, что принцип Гюйгенса *какого-то не говорит о распределении амплитуд по деформированному волновому фронту*.

Поставим на пути волны непрозрачный экран с небольшим (по сравнению с длиной волны) отверстием. Согласно принципу Гюйгенса огибающая элементарных волн, выходящих из отверстия, оказывается почти полусферой, так как такое отверстие подобно точечному источнику волн. Если же на пути волны имеется экран с рядом малых отверстий (рис. 8.14), то огибающая будет почти плоской.

Пусть плоская волна, имеющая фронт, перпендикулярный плоскости чертежа, падает на плоскую границу раздела  $AD$  двух сред (рис. 8.15). Пользуясь принципом Гюйгенса, изучим сначала ее отражение. Положение следа волнового фронта в момент  $t$  показано линией  $AB$ . К моменту  $t + \Delta t$  колебания, идущие по направлению  $BD$ , достигнут границы раздела. Но за это время уже образуются отраженные волны, изображенные на рисунке. Их огибающая  $CD$  определит положение отраженного волнового фронта в момент  $t + \Delta t$ . Из равенства треугольников  $ABD$  и  $ACD$  получаем

$$\alpha = \beta. \quad (8.29)$$

т. е. угол падения равен углу отражения.

Кроме того, падающий луч  $KA$ , перпендикуляр  $Al$ , построенный из точки падения луча к границе раздела, и отраженный луч  $AC$  лежат в одной плоскости (плоскости падения), причем углы падения и отражения располагаются по обе стороны перпендикуляра. Положение плоскости падения определяется падающим лучом и перпендикуляром.

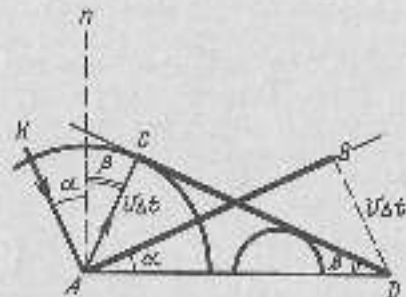


Рис. 8.15

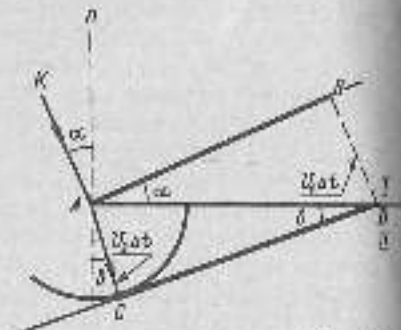


Рис. 8.16

Одновременно с отражением имеет место и преломление волн во вторую среду. Пусть скорости распространения волн в обеих средах равны соответственно  $v_1$  и  $v_2$  ( $v_1 > v_2$ ). Линия  $AB$  (рис. 8.16) представляет след плоского волнового фронта в момент  $t$ . Линия  $CD$  соответствует следу волнового фронта в момент  $t + \Delta t$ . Из треугольников  $ABD$  и  $ADC$  получаем:

$$\sin \alpha = \frac{v_1 \Delta t}{AD}, \quad \sin \gamma = \frac{v_2 \Delta t}{AD}; \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (8.30)$$

При этом падающий  $KA$  и преломленный  $AC$  лучи и перпендикуляр  $Al$ , построенный из точки падения луча к поверхности раздела, снова лежат в плоскости падения.

Соотношения (8.29) и (8.30) справедливы не только для лучей, но и для соответствующих им волновых фронтов.

Постоянное (не зависящее от угла падения) отношение

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12} \quad (8.31)$$

называют *относительным показателем преломления*.

Полученные здесь законы отражения, известные из школьного курса физики, были установлены опытным путем (для световых лучей) в III в. до н. э.; законы преломления нашел В. Снеллиус (1580—1626). Волновые свойства света в то время еще не были известны и законы формулировались только для лучей.

Принцип Гюйгенса при рассмотрении света как волнового процесса позволил не только получить законы отражения и преломления света, но и объяснить прямолинейность его распространения.

Введенные представления о волновом фронте как совокупности источников вторичных элементарных волн и описание волнового процесса как наложения этих вторичных волн оказались справедливы не только для световых, но и для любых волновых процессов независимо от их природы, и сохранили свое значение до настоящего времени.

Принцип Гюйгенса, в частности, указывает на возможность рассмотрения поведения волн во всем пространстве, если известны вторичные волны, порожденные в какие-либо ранние моменты времени.

Сам Гюйгенс в такой общей формулировке свой принцип не формулировал, его современную трактовку мы более подробно рассмотрим в «Оптике и атомной физике».

В заключение сделаем следующее замечание. Мы изучали волны на простейших примерах, когда тригонометрическая форма записи соответствующих выражений не приводила к трудностям при математических преобразованиях. На практике часто приходится сталкиваться со значительно более сложными волновыми явлениями. При их исследовании, как и при изучении колебаний в системах с одной степенью свободы, с успехом применяется метод комплексных амплитуд, в чем мы убедимся при изучении электромагнитных волн.

## ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ

## § 1. Волновая природа звука

Акустикой называют учение о колебаниях, распространении и восприятии ударов звуковых волн. Очевидно, прежде всего нужно показать на опыте, что звук имеет волновую природу.

Известный опыт со змеевиком, помещенным под колокол воздушного насоса, и последующий опыток воздуха из-под колокола доказывает, что для распространения звука необходима упругая среда. Волновые свойства звука обнаруживаются в интерференционных опытах (в частности, в опытах со стоячих волнах) и при явлениях резонанса. Для наблюдения интерференции звука в акустории нужно расположить два громкоговорителя, питаемых от одного звукового генератора, на расстоянии нескольких метров друг от друга. Большое расстояние между источниками необходимо для того, чтобы наибольшая разность хода волн, создаваемых громкоговорителями, была не слишком мала (см. § 8.4).

Предложим слушателю сидеть неподвижно, следует изменить расстояние между громкоговорителями, что, конечно, скажется на результатах интерференции волн и будет восприниматься слушателем как чередование усиления и ослабления звука.

Если же использовать звуковую волну длиной 2—3 м, чему отвечает частота около 100 Гц, и расположить источники на расстоянии, медведек длины звуковой, то при сближении источников интерференция не наблюдается (см. § 8.4).

Настоящую звуковую стоячую волну можно создать в газовом столбе. Для этого берется металлическая труба, с одной стороны закрытая массивным диском, а с другой — тонкой резиновой мембраной. Вдоль верхней образующей трубы просверлен ряд узких (радиус не больше 0,25 мм), близких друг к другу отверстий (расстояние 5—7 мм).

На нижней образующей делается отверстие для подведения горючего газа. Перед опытом трубу, расположенную горизонтально, заполняют газом и у всех отверстий зажигают небольшие язычки пламени. Получается линия одинаковых язычков, так как условия горения для всех отверстий практически одинаковы. Затем у резиновой мембраны устанавливается громкоговоритель, питаемый от звукового генератора. Изменяя частоту генератора, можно получить в трубе стоячую волну: при этом звуковое давление вдоль оси трубы распределяется неравномерно, образуются узлы и пучности давления. Поэтому и условия сгорания газа периодически меняются вдоль трубы. В этом опыте легко измерить длину волны.

Меняя частоту возбуждения, можно убедиться и том, что газовый столб имеет несколько собственных частот (см. § 8.5).

При обычно применяемой в опытах частоте, которую воспринимаемых человеческим ухом (около 1000 Гц), длина звуковой волны в воздухе составляет 0,2—0,3 м. В неподвижном газе она несколько больше, так как его молярная масса меньше, чем воздуха.

Резонансные свойства акустических систем можно показать на следующих опытах:

1. Если возбудить камертон, держа его в руке, то слышен слабый звук: поверхность колеблющихся ножек мая и отдачи звука во внешнее пространство (излучения) невелика. Если же оставить камертон на приданный ему резонансный ящик, то излучение резко возрастает за счет увеличения размеров излучающей поверхности (открытый конец ящика). Если камертон ставят на ящик, рассчитанный для камертона иной частоты, то заметного усиления звука не наблюдается, так как отсутствует резонанс.

Отметим додушно, что, если подставить звучащий камертон на крышку стола, излучение звука обычно заметно возрастает. Дело в том, что крышка стола (большая мембрана) обладает своими собственными частотами, одна из них может оказаться близкой к собственной частоте камертона.

2. Поставив на некотором расстоянии друг от друга два одинаковых камертона на резонансных ящиках и возбуждая один из них, можно затем заглушать колебания возбужденного; при этом будет слышен (более слабый) звук второго камертона, пришедшего в резонансные колебания. Если же слегка изменить частоту одного из камертонов, налов на ножку небольшой груз (при этом частота уменьшится), то резонансного возбуждения не происходит. При одновременном возбуждении обоих камертонов в первом случае (равные частоты) слышен звук определенной частоты с медленно уменьшающейся громкостью (последствие заглушения колебаний камертонов); во втором же случае (немного различные частоты) отчетливо слышны звуковые бисенны, частоту которых можно регулировать переключением груза вдоль ножки камертона.

3. Так как камертон обладает только одной собственной частотой и высокой добротностью, то он является превосходным гармоническим анализатором звука. Для демонстрации этого возьмем три камертона с одинаковой собственной частотой  $\omega_1$ . Первый оставим без изменений. На ножку второго наведем небольшой грузик. Возбуждая одновременно оба камертона, получим бисенны, происходящие 1—2 раза в секунду; при этом частота второго камертона будет равна  $\omega_1 - \Delta\omega$ . Затем наведем грузик на ножку третьего камертона и, возбуждая его одновременно со вторым, получим бисенны той же частоты, следовательно, собственной частота третьего камертона равна  $\omega_1 - 2\Delta\omega$ . Далее, возбуждем одновременно первый и третий камертоны. Принимая (для простоты расчета), что амплитуды колебаний камертонов одинаковы, получим изменения звукового давления, происходящие по закону

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 = p_0 \cos \omega_1 t + p_0 \cos [(\omega_1 - 2\Delta\omega) t] = \\ &= 2p_0 \cos (\Delta\omega t) \cos [(\omega_1 - \Delta\omega) t]. \end{aligned}$$

Но при этом второй камертон не придет в вынужденные колебания и чем можно убедиться, например, подвесив у края его ножки небольшой легкий (бузиновый) шарик, касающийся ножки; шарик останется неподвижным.

Объясняется это тем, что в негармоническом сложном звуке нет гармонической составляющей с частотой  $(\omega_1 - \Delta\omega)$ .

Звуковая волна, распространяющаяся в газе, является продольной (см. § 8.1). В § 8.3 было отмечено, что при умеренной громкости звука амплитуда смещения частиц в плоской волне имеет значения порядка  $10^{-5}$  м, что близко к среднему расстоянию между молекулами. Но для характеристики звука более важна амплитуда относительного смещения, определяющая возникающее избыточное (над имеющимся статическим атмосферным) давление; ее амплитуда (см. § 8.3) равна:  $p_0 \approx 0,1$  Па, т. е. в  $10^6$  раз меньше статического. Таким образом, в обычных условиях акустические колебания очень слабы по интенсивности.

## 9.2. Источники и приемники звука

Возбуждение и прием звука производится разнообразными устройствами, их можно разбить на две существенно различные группы: а) устройства, работающие на собственной частоте, и б) устройства, работающие на вынужденных частотах.

а) На собственных частотах работают камертоны, струны, воздушные столбы, используемые в различных музыкальных инструментах. Собственная частота колебаний струны может изменяться при изменении ее натяжения или длины; кроме того, в зависимости от места возбуждения струны (смычком) изменится относительная интенсивность возникающих обертонов, что определяет тембр звука. Убедиться в сложности звука музыкальных инструментов можно, наблюдая форму кривой создаваемого ими звукового давления и его спектр при помощи микрофона, подключенного к осциллографу и анализатору спектра.

Так как интенсивность излучения звука зависит от размера излучающей поверхности, то струнные инструменты снабжаются резонансными ящиками (объем, занятый воздухом в деке скрипки или рояля, обладает многими резонансными частотами в области звуков, порождаемых инструментом).

Органые трубы имеют определенные собственные частоты. Духовые инструменты — это те же трубы, но с регулируемой собственной частотой; для усиления излучения звука выходные отверстия труб духовых инструментов увеличиваются.

б) Существуют также акустические приборы, воспроизводящие или воспринимающие самые разнообразные звуки: к первым относятся телефоны и громкоговорители, ко вторым — микрофоны. Эти приборы работают на вынужденных колебаниях, и резонансные явления были бы здесь очень вредны, так как одним из основных требований к этой аппаратуре является ее широкополосность, т. е. спо-

собность воспроизводить без искажения звуки в широком диапазоне частот (от десятков герц до двадцати килогерц). Наличие резонанса (или резонансов) делает амплитудно-частотную характеристику устройства неравномерной, что приводит к искажению отдельных соотношений интенсивностей отдельных спектральных составляющих сложного звука и, конечно, искажению. Для устранения вредного влияния резонансов нужно либо убрать все собственные частоты, характерные для аппаратуры, из рабочей области частот (это практически трудно), либо же резко снизить добротность системы. Именно по последнему пути и идут на практике. Достаточно сравнить длительности звучания камертона (до его возбуждения) и громкоговорителя (после выключения питающего тока), чтобы ясно уловить различие в их добротности.

К основным частям наиболее распространенных в настоящее время динамических громкоговорителей относятся: магнит (или электромагнит), создающий радиальное магнитное поле; катушка, способная двигаться в этом поле и связанная с большой конусообразной мембраной — диффузором. При пропускании по катушке тока звуковой частоты катушка под действием силы Ампера приходит в вынужденные колебания и колеблет диффузор, создающий в окружающем пространстве упругие звуковые волны.

Амплитудно-частотная характеристика хорошего громкоговорителя, т. е. зависимость амплитуды излучаемого звука от частоты (при постоянной амплитуде силы тока в катушке), изображена на рисунке 9.1.

Широкополосность характеристики (разность между крайними частотами, воспроизводимыми без искажений) определяет качество громкоговорителя; у лучших громкоговорителей она велика (на характеристике имеются резонансные пики); эдак объясняется низкое качество звука, даваемого такими приборами. В качественных приборах шарнир плавсы соответствует всему диапазону слышимых звуков (от 20 до 20 000 Гц, см. § 9.3). На таком же принципе построены и электродинамические телефоны, только диффузор заменен в них небольшой мембраной.

Более распространенные электромагнитные телефоны имеют постоянный магнит, расположенный вблизи стальной мембраны. На магнит намотана катушка, обтекаемая током звуковой частоты. Магнитная индукция  $B_0$  постоянного магнита значительно превышает амплитуду  $B_m$  переменной индукции магнитного поля. Так как сила взаимодействия магнита с мембраной пропорциональна квадрату магнитной индукции, то получается:

$$F \sim (B_0 + B_m \cos \Omega t)^2 = B_0^2 + 2B_0 B_m \cos \Omega t + \frac{B_m^2}{2} + \frac{B_m^2}{2} \cos 2\Omega t$$

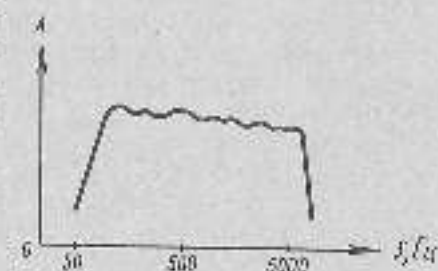


Рис. 9.1

Таким образом, телефон работает с искажениями — наряду с полезным сигналом частотой  $\Omega$  появляется звук двойной частоты, но амплитуда ее относительно невелика.

Если убрать постоянный магнит, то удвоение частоты легко заметить; но при этом требуются сильные токи.

Применяемые в акустических приборах мембраны представляют собой двумерную колебательную систему, обычно закрепленную по краям. Такая система обладает несколькими собственными частотами, зависящими от геометрии мембраны и способа ее закрепления. При резонансом возбуждении она приходит в поперечные колебания и в ней устанавливаются стоячие волны. Распределение по поверхности мембраны линий узлов и пучностей смещения можно наблюдать, предварительно насыпав на горизонтально расположенную мембрану тонкий слой легкого порошка или песка: частицы сбрасываются с линий пучностей смещения и собираются в узловых линиях (фигуры Хладни).

Кроме частотной характеристики излучателя звука, большое практическое значение имеет его характеристика направленности, т. е. зависимость излучения от направления. Откладывая в некотором масштабе отрезки, соответствующие интенсивности излучения в различных направлениях, и соединяя их концы плавной кривой, получают диаграмму направленности. Эта диаграмма тем острее, чем меньше отношение длины излучаемой волны к поперечному размеру излучателя ( $\lambda$  его диаметру). Поэтому диаграммы излучателей расширяются для низких частот. В акустических излучателях направленность невелика, а чем легче убедиться, проходя мимо звучащего уличного громкоговорителя.

Вращая вертикально стоящий кассетод вокруг вертикальной оси, легко заметить, что его излучение характеризуется довольно сложной диаграммой направленности.

Для мощных излучателей важен также коэффициент полезного действия, равный отношению излучаемой мощности к мощности затрачиваемой на питание прибора.

Чувствительностью излучателя называют отношение создаваемого им звукового давления к напряжению (или силе тока), питающему излучатель.

Обратное отношение определяет чувствительность приемника звука.

Наиболее распространенными приемниками звука являются различные микрофоны, позволяющие управлять электрическим током в цепи при помощи звуковых колебаний, воспринимаемых мембраной микрофона.

Электромагнитный телефон может служить и микрофоном, если включить его в цепь постоянного тока и создавать перед мембраной звуковое давление. Изменения зазора между мембраной и полюсами магнита вызовут изменения магнитной индукции и породят перемещенную составляющую силы тока звуковой частоты.

Существуют также электродинамические микрофоны, устроенные подобно электродинамическим телефонам.

В ленточных микрофонах подвижная катушка закреплена тонкой лакированной лентой (толщина — несколько микрометров), выполняющей одновременно и роль мембраны. Эти микрофоны реагируют на весьма слабые звуки.

Широко распространены чувствительные (хотя и менее свободные от искажений) угольные микрофоны. В них мембрана опирается на капсулу с угольным порошком и при колебаниях вызывает изменения сопротивления порошка. Микрофон включен в цепь постоянного тока, соединенную через трансформатор с телефонной сетью. Переменная составляющая силы тока создает ЭДС индукции во вторичной обмотке трансформатора. В конденсаторной микрофоне мембрана в то же время служит одной из обкладок конденсатора  $C$ , включенного последовательно с резистором  $R$  в цепь источника постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$  (рис. 9.2). При колебаниях мембраны меняется емкость (и заряд) конденсатора и в цепи подучается изменяющийся во времени ток.

Переменное напряжение  $u = iR$ , создающееся на резисторе, снимается через разделительный конденсатор  $C_1$  (чтобы устранить влияние постоянного напряжения) и подается на усилитель или в телефонную сеть.

Частотная характеристика микрофона (зависимость выходного напряжения от частоты при заданной амплитуде звукового давления) должна быть постоянной во всем диапазоне слышимых частот. Фактически она несколько искажена, как и у телефона.

Наконец, в пьезоэлектрических микрофонах звуковое давление вызывает появление переменной ЭДС на обкладках конденсатора, заключенного пьезоэлектриком (существуют соль, специальные керамики, кварц). Эти микрофоны отличаются малыми размерами и применяются, в частности, в слуховых аппаратах для лиц с пониженным слухом.

На этом же эффекте основаны звукопередатчики различных проигрывателей — игла, бегущая по борозкам пластиночной пластинки, создает давление на пьезоэлемент и порождает переменную ЭДС.

Обратный пьезоэффект (возникновение механических колебаний при подаче на обкладки пьезоэлемента переменного напряжения) используется для получения ультразвуковых колебаний (см. § 9.5).

В магнитофонах запись (воспроизведение) звука осуществляется за счет изменения намагничивающей специальной ленты, пропускаемой в узком зазоре магнитной головки, индукция магнитного поля которой пропорциональна силе тока в микрофоне (телефоне).

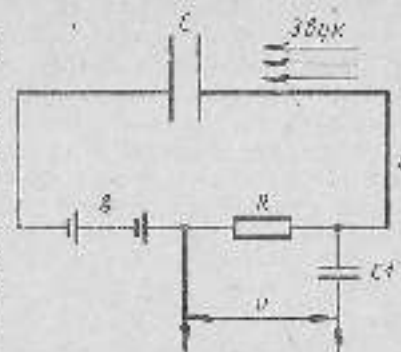


Рис. 9.2

### 3.3. Физиологическая акустика

Остановимся кратко на некоторых вопросах физиологической акустики. Нормальное человеческое ухо воспринимает звуки с частотами от 20 Гц до 20 кГц, но его чувствительность к различным частотам неодинакова. На рисунке 9.3 нижняя кривая соответствует наименьшему давлению  $p_0$  (интенсивности  $I_0$ ), еще воспринимаемому на слух. Оно называется порогом слышимости. Около частоты  $f = 3000$  Гц кривая имеет довольно размытый максимум, причем

$$p_0 \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Па}, \quad I_0 \approx 10^{-12} \text{ Вт/м}^2.$$

Верхняя кривая (изученная хуже нижней, так как ее изучение связано с опасной для уха перегрузкой) характеризует давление (интенсивности), вызывающие в ухе болевое ощущение (длительное или болевое порог). Это давление мало зависит от частоты и составляет примерно

$$p_{\text{бол}} \approx 30 \text{ Па}, \quad I_{\text{бол}} \approx 10 \text{ Вт/м}^2.$$

Вся область частот и давлений между этими кривыми доступна слуховому восприятию. В обычных условиях используется лишь очень небольшая часть этой области — природа, как всегда, обеспечивает безопасность работы живого организма.

Поразительная ширина диапазона интенсивностей, доступных восприятию:

$$\frac{I_{\text{бол}}}{I_0} = 10^{24},$$

у обычных измерительных приборов она редко превышает 100.

Примем среднюю интенсивность слышимого звука равной  $10^{-7}$  Вт/м<sup>2</sup> (при частоте 1000 Гц), находим амплитуду звукового давления (см. уравнение 8.18):  $p_a = (2R\rho)^{1/2} = 0,3$  Па, что составляет весьма малую долю атмосферного давления  $p_0$ , всего лишь  $3 \cdot 10^{-6} p_0$ .

Существует и иная оценка интенсивности, принятая во многих разделах науки и техники.

За наименьшую стандартную интенсивность принимают интенсивность  $I_0$ , определенную конкретными условиями эксперимента. Тогда уровень интенсивности (мощности) любой волны (независимо от частоты), имеющей интенсивность  $I$ , по определению равен

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (9.11)$$

Эта величина выражается в децибеллах (дБ).

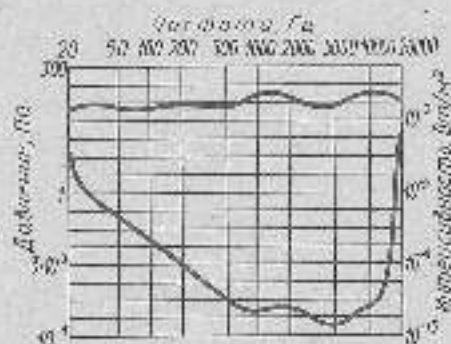


Рис. 9.3

Очевидно, 1 дБ соответствует интенсивности  $I = 1,26 I_0$ , так как  $\lg 1,26 = 0,1$ .

Удвоенная интенсивность соответствует увеличению уровня  $L$  на 3 дБ. Для самой широкой части области слышимости (рис. 9.3) получаем:

$$L = 120 \text{ дБ}.$$

В акустике физическому давлению интенсивности звука соответствует физиологическое понятие громкости. Пусть пороговая интенсивность на некоторой частоте есть  $I_0$ , а интенсивность данного звука той же частоты равна  $I$ . Величину

$$I_1 = 10 \lg \frac{I}{I_0}$$

выражаемую в ф о н а х, называют уровнем громкости.

Еще раз подчеркнем, что введенная характеристика количественной оценки восприятия звука «в логарифмической шкале» удобна потому, что слышимость звуков — их воспринимаемая громкость — пропорциональна не  $I$ , а  $\lg I$ . Эта особенность, расширяющая «динамический диапазон» восприятия, характерна не только для слуха (но, например, и для зрения).

Изменение уровня громкости в таком широком месте диаграммы слышимости, где интенсивности отличаются в  $10^{24}$  раз, составляет:

$$L_1 = 120 \text{ фонов}.$$

Но, например, при частоте 100 Гц, где порог слышимости равен  $I_{100} = 10^{-7}$  Вт/м<sup>2</sup>, максимальный уровень громкости составляет только

$$L_{100} = 80 \text{ фонов}.$$

Таким образом, число фонов определяет превышение интенсивности звука данной частоты над порогом слышимости на той же частоте.

Физической характеристике — частоте — соответствует физиологическая характеристика — высота тона. Если звук несложный, то высота поддается количественной оценке (музыкальные гаммы). Если звук сложен, высота может оцениваться только качественно.

Наконец, сложный спектральный состав звука (физическая характеристика) физиологи оценивают характеристикой «тембра», которая не поддается количественной оценке. Действительно, вопрос «У кого больше тембр?» не имеет смысла.

Замечательной особенностью уха является его способность реагировать только на высоту тона и амплитуду, но не на фазовые сдвиги в сложном звуке. Эта особенность была открыта Омах. Справедливости этого утверждения видно из того, что слушатели в концертном зале воспринимают мелодию одинаково, хотя, конечно, фазовые соотношения звуков, создаваемых разными инструментами, различны для слушателей в разных местах зала.

Имея два уха, мы можем определить направление, по которому приходит звук: мы поворачиваем голову, пока слуховые трубки в обоих ушах не сравняются. Однако при этом возможны ошибки в оценке направления прихода звука (спереди или сзади).

Если требуется получить сложный звук, то следует стремиться не к воспроизведению формы кривой звукового давления, но к *правильному воспроизведению амплитуд и фазов*. На рисунке 1.14 были изображены две кривые тока звуковой частоты, полученные при одних и тех же частотах и амплитудах, но при различных начальных фазах слагающих колебаний. Хотя кривые имеют различный вид, но на слух оба звука, воспринимаемые при обтекании этими токами обмоток громкоговорителя, кажутся совершенно одинаковыми.

Сложный механизм создания звуков речи человеком в общих чертах таков: мы выдыхаем воздух через голосовые связки, находящиеся в нижней части горла, бессознательно регулируя их положение. Выходящий в полость рта струя воздуха совершает затональные колебания. Собственные частоты полости регулируются положением языка, нёба, зубов и губ. Полость резонирует и обеспечивает достаточно мощное излучение звука. Если выдохнуть воздух и вдохнуть, например, гелий, то произносимые нами звуки имеют тембр, совершенно отличный от обычного тембра, так как замена воздуха гелием повышает резонансные частоты полости рта. Действительно, при данной форме резонатора его собственная длина волны

$$\lambda_0 = \frac{v}{f}$$

постоянна. В гелии (молярная масса  $M=4$  кг/моль) скорость звука больше, чем в воздухе ( $M=30$  кг/моль), примерно в 2,7 раза. Соответственно растет и собственная частота резонатора.

При произнесении той или иной гласной (на какой бы частоте она ни произносилась) в спектре звука обязательно присутствуют одна или две частоты, почти не меняющиеся при переходе от низких тонов к высоким (форманты гласной). Каждой гласной отвечают свои форманты.

Если воспроизводить звук, записанный на патефонной пластинке, вращая ее быстрее, чем она вращалась при записи (например, со скоростью 45 об/мин вместо обычных 33,3 об/мин), то все относительные частоты и все форманты будут воспроизведены с частотами, увеличенными в 1,35 раза. При этом (относительно небольшого) изменении частот все звуки воспринимаются как более высокие, но разборчивость речи еще сохраняется. Если же при воспроизведении звука выбрать еще большую скорость вращения пластинки (например, 78 об/мин), то наряду с резким повышением всех тонов совершенно исчезнет разборчивость, так как из-за сильного изменения частоты формант одна гласная превращается в другую.

Что касается понимания смысла воспроизятого звука, то этот сложный процесс, где наряду с физикой большую роль играют физиология и психология, выходит за рамки физики.

#### 9.4. Эффект Доплера

Если источник звука (или наблюдатель) движется относительно воздуха, то частота воспринимаемого звука отличается от частоты испускаемого. Это явление открыто Х. Допплером (1803—1853) и носит его имя.

Укрепив телефонную капсулу, питаемую током звуковой частоты, на конце длинного (1,5—2 м) шнура, можно, вращая капсулу перед аудиторией, показать эффект Доплера сразу большому числу слушателей.

При теоретическом рассмотрении явления следует подчеркнуть, что все скорости (звука, наблюдателя и источника) отсчитываются относительно воздуха — той среды, где распространяется звук.

Пусть в покоящемся воздухе, с которым связана система отсчета, находится наблюдатель и источник звука  $S$ , излучающий звук частотой  $f_0$  (длина волны в воздухе при этом равна  $\lambda_0 = \frac{v}{f_0}$ ).

Если и источник, и наблюдатель  $A$  покоятся относительно воздуха, то мимо уха наблюдателя пройдут (и будут им восприняты) за 1 с волны, занимающие отрезок, длина которого  $l_1$  численно равна  $v$  (рис. 9.4, а). Число этих волн равно:  $N_0 = \frac{v}{\lambda_0} = f_0$ . Если же наблюдатель приближается к источнику со скоростью  $u_1$ , то через 1 с он окажется в точке  $B$  (рис. 9.4, б). Мимо его уха пройдут волны, занимающие отрезок, длина которого  $l_2$  численно равна  $v + u_1$ ; их число

$$N = \frac{v + u_1}{\lambda_0} = f_0 \left( 1 + \frac{u_1}{v} \right) = f_1. \quad (9.2)$$

Следовательно, частота воспринимаемого звука увеличивается.

При удалении наблюдателя от источника число воспринимаемых им волн (и, следовательно, воспринимаемая частота) будет уменьшаться. Новое значение частоты, очевидно, равно:

$$f_2 = f_0 \left( 1 - \frac{u_2}{v} \right). \quad (9.3)$$

При  $u_2 > v$  наблюдатель будет обгонять звуковую волну и воспринимаемая им частота будет равна:

$$f = f_0 \left( \frac{v}{u_2} - 1 \right).$$

Во всех случаях предполагается, что источник начал звучать раньше, чем начал двигаться наблюдатель.

При  $u_1 = v$  звуковое давление около наблюдателя все время будет постоянным, так что в этом случае звук не воспринимается.

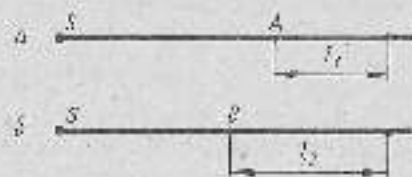


Рис. 9.4

Пусть теперь наблюдатель неподвижен относительно воздуха, а источник приближается к нему со скоростью  $u$ . Тогда длина волны, воспринимаемая наблюдателем, сократится по сравнению с  $\lambda_0$  на

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{u}{v}$$

Но так как между частотой и длиной волны существует известная связь:

$$f = \frac{v}{\lambda},$$

то воспринимаемая наблюдателем частота окажется равной

$$f_1 = f_0 \frac{v}{v - u} = f_0 \frac{1}{1 - \frac{u}{v}} = f_0 \left( 1 + \frac{u}{v} \right), \quad (9.4)$$

т. е. частота увеличивается. По тем же причинам для удаленной источника от наблюдателя длина волны, воспринимаемая последним, возрастет, а частота уменьшится до значения

$$f_2 = f_0 \frac{1}{1 + \frac{u}{v}}. \quad (9.5)$$

Формулы (9.2—9.5) можно объединить в следующую:

$$f = f_0 \frac{1 \pm \frac{u_1}{v}}{1 \mp \frac{u_2}{v}}, \quad (9.6)$$

где скорости  $u_1$  и  $u_2$  положительны, верхние знаки соответствуют сближению, нижние — удалению.

При малых значениях  $\frac{u_1}{v}$  и  $\frac{u_2}{v}$ , когда можно пренебречь вторыми степенями дробей, эта обобщенная формула приводится к виду

$$f = f_0 \left[ 1 \pm \frac{u_1}{v} \pm \frac{u_2}{v} \right], \quad (9.7)$$

где верхние знаки соответствуют сближению.

В заключение подчеркнем еще раз, что все скорости отсчитываются относительно воздуха, т. е. среды, где распространяется волна. Позже мы увидим, что эффект Доплера имеет место и в оптике; но в силу физических особенностей, присущих распространению света, он имеет другие количественные характеристики.

### 9.5. Ультразвук и инфразвук

Длина волны слышимых звуков довольно велика, а размеры звуковых излучателей обычно не слишком велики, поэтому, как правило, диаграмма направленности звуковых излучателей (см. § 9.2) сравнительно широка. Гораздо большая направленность получается при создании ультразвуковых колебаний (частоты от

10 кГц до сотен миллионов Гц; звуки более высоких частот называются гиперзвуками). Для их возбуждения используются два эффекта: пьезоэлектрический и магнитоэлектрический.

Пьезоэлектрический эффект — это способность некоторых кристаллов, в частности кварца, изменять размеры при создании в кристалле электрического поля.

Пусть  $k$  — толщина плоской пластинки кварца, т. е. расстояние между металлическими электродами, которые наносится (методом напыления металла) на его поверхность. Тогда собственные частоты колебаний пластинки определяются выражением

$$f = \frac{v}{2k} n$$

( $n = 1, 2, \dots$  — скорость ультразвука в кварце), так как при собственных колебаниях на расстоянии  $k$  укладывается целое число полуволн.

Подаяая на электроды напряжение, меняющееся с частотой  $f$ , можно привести пластину в интенсивные вынужденные резонансные колебания, и она станет мощным излучателем ультразвука. Для лучшего излучения акустические сопротивления кварца и среды, воспринимающей излучение, должны быть близки друг к другу; поэтому ультразвук хорошо излучается в жидкость, а также в твердое тело. Кварцевые пластинки способны излучать ультразвуковые колебания с основной частотой от десятков до тысяч кГц. Еще более высокие частоты получаются при возбуждении кварцевых пластинок на обертонах. Часто вместо монокристаллического кварца используется керамика (алюминат, титанат бария).

Магнитоэлектрический эффект заключается в способности ферромагнитных тел изменять свои размеры при намагничивании. Если ферромагнитный стержень поместить в продольное магнитное поле, меняющееся с ультразвуковой частотой, то он приходит в вынужденные колебания; при резонансе амплитуда этих колебаний резко возрастает. Таким образом, стержень также является ультразвуковым излучателем. Такие излучатели хорошо работают при низких ультразвуковых частотах (от сотен кГц до 1 кГц).

Для приема ультразвуковых колебаний используются такие же кварцевые пластинки (для ферромагнитных стержней), так как существуют обратные эффекты: кварцевая пластинка при механических воздействиях электризуется, а стержень изменяет свое намагничивание. Поэтому, связав кварцевую пластинку с электрическим усилителем, можно зарегистрировать периодические изменения ее электризации в ультразвуковом поле. Намагничивание ферромагнитного стержня, находящегося в ультразвуковом поле и помещенного в катушку, периодически изменяется. При этом в катушке возникает электродвижущая сила индукции, легко регистрируемая электрическими устройствами.

Применение ультразвуков весьма многочисленно, и здесь можно указать лишь важнейшие.

а) Так как диаграмма направленности ультразвукового излучателя может быть сделана очень узкой, а поглощение ультра-

## ГИДРОАЭРОДИНАМИКА

звуковых волн в воде не слишком велика, то возможна ультразвуковая подобная связь на значительных расстояниях. В частности, посылая с движущегося судна ультразвуковой импульс на дно и принимая импульс, отраженный дном, можно (до времени распространения импульсов) определять глубину океана во все время движения судна.

б) Пропуская ультразвуковой пучок через твердое тело или другие среды, можно изучать микроструктуру вещества и находить макроскопические неоднородности, не разрушая предмет исследования. На этом принципе основаны разнообразные дефектоскопы, а в последнее время с привлечением ЭВМ — и приборы медицинской диагностики.

в) Так как в ультразвуковой волне (благодаря высокой частоте) существуют громадные ускорения (в сотни раз превышающие ускорение свободного падения), то возможно получение различных физических интереснейших эффектов, не достижимых иными способами (например, получение эмульсий, кавитаций и др.).

*Кавитацией* называется образование и жидкости пузырьков воздуха, в которых жидкость интенсивно испаряется. Для образования пузырьков необходимо местное снижение давления в жидкости до значения, примерно равного давлению ее насыщенного пара. При распространении ультразвуковой волны возникают сильные местные уменьшения давления (из-за высокой частоты колебаний), позволяющие кавитации развиваться. При последующем увеличении давления пузырьки схлопываются, создавая кратковременные (порядка микросекунды) повышенные давления: они могут превышать атмосферное давление в сотни раз. При этом поверхностный слой приямка ультразвука частично разрушается. Это позволяет очищать ультразвуком загрязненные поверхности, причем весьма успешно. Кроме того, кавитация находит применение в биологии, в частности для разрыва живых клеток с целью выделения из них биологически активных веществ.

Инфразвуковыми волнами называются волны, соответствующие очень низким частотам (ниже 20 Гц). Укажем два интересных проявления этих волн. При волнении на море ветер, дующий вдоль поверхности моря, вызывает возникновение (в воздухе) колебаний с длиной волны, соответствующей расстоянию между гребнями водяных волн, — этому как раз и отвечают сверхнизкие частоты. Распространяясь в воздухе со скоростью, превышающей скорость распространения ветра и скорость распространения штормовых волн в море, инфразвуковые воздушные волны, достигая берега, служат предупреждением и приближающегося шторма. Инфразвуковые волны возникают в земной коре при землетрясениях и позволяют судить о местоположении очага землетрясения.

Инфразвуки, возникающие при взрывах или стрельбе из тяжелых орудий, могут быть использованы для определения направления на место взрыва (выстрела) с большого расстояния, так как в воздухе они поглощаются меньше, чем звуки более высоких частот.

## 10.1. Равновесие жидкости и газа. Закон Паскаля. Сила Архимеда

Движение жидкостей и газов, конечно, подчиняется законам механики Ньютона. Однако так как эти тела в отличие от твердых тел не сопротивляются изменению формы, то их движение обладает особенностями. Поэтому принято выделять учение о движении этих тел в особый раздел.

Это различие в поведении твердых тел, жидкостей и газов объясняется различными проявлениями межмолекулярных сил в этих трех состояниях веществ. Они подробно изучаются в молекулярной физике.

Здесь достаточно отметить, что обычная жидкость, будучи неподвижной, принимает форму сосуда, в который она налита (причем ее центр тяжести занимает наиболее из возможных положений) и образует свободную плоскую поверхность. Сила тяжести, действующая на жидкость, перпендикулярна этой поверхности. Так как полная сила тяжести складается из сил, действующих на каждый элемент массы жидкости, то ее называют *объемной* (или *массовой*) силой. Кроме того, на свободную поверхность может действовать еще какая-либо сила, например сила атмосферного давления. Она также перпендикулярна свободной поверхности жидкости. Если сосуд с жидкостью наклонить, то форма жидкости в сосуде изменится так, чтобы свободная поверхность опять оказалась плоской и горизонтальной.

При этих объема жидкости *кратчайшим* не является, так как для его изменения требуются значительные силы. Поэтому во многих случаях изменением объема можно пренебречь и считать жидкость несжимаемой — такое же допущение (касавшееся как формы, так и объема) делалось в механике твердых тел.

В отсутствие стенок небольшие объемы жидкости принимают форму капли. Это связано с особым составом молекул поверхностных слоев жидкости. В настоящей главе с этим встретиться не придется: мы будем считать жидкость однородной непрерывной средой.

Предоставленный самому себе газ распределяется по всей атмосфере. При помещении его в сосуд со стенками, препятствующими расширению, газ целиком заполняет весь сосуд. Таким образом, газ всегда находится в более или менее сжатом состоянии, что объясняется действием внешних сил.

Если жидкость заполняет часть сосуда, имеющего твердые стенки, и обладает свободной поверхностью (граничащей с газом), то равновесие жидкости возможно лишь при условии, что действующие



силы во всех точках свободной поверхности перпендикулярны ей. Действительно, если бы существовали силы, направленные вдоль поверхности, они сразу же вызвали бы перемещение верхних слоев жидкости. Именно поэтому в сосуде, неподвижном относительно Земли, свободная поверхность горизонтальна. Если же сосуд движется (например, вращается вокруг вертикальной оси), то при установившемся движении свободная поверхность, как мы видели в § 6.2, принимает форму параболоида вращения, тем и обеспечивается действие силы, создающей центростремительное ускорение.

Принято различать *силу давления*  $d\vec{F}$  на некоторую элементарную площадку  $dS$  (вектор  $d\vec{F}$  представляет собой произведение  $dS\vec{n}$ , где  $\vec{n}$  — единичный вектор, направленный по нормали к элементарной площадке  $dS$ ) и *давление*  $p$  — скалярную величину, связанную с силой давления соотношением

$$d\vec{F} = p dS. \quad (10.1)$$

Пусть жидкость находится в равновесии и испытывает силу внешнего давления. Выделим мысленно внутри жидкости произвольную площадку. Так как она находится в равновесии, то испытываемые ею силы давления не зависят от ориентации площадки. Иначе говоря, внешние силы давления передаются во все стороны **равномерно**, — это и есть известный **закон Паскаля** (Б. Паскаль, 1623—1662).

При рассмотрении задач гидростатики (когда на поверхность жидкости действуют лишь силы, перпендикулярные ее поверхности) удобно пользоваться принципом «затвердевания», предложенным С. Стевином (1548—1620) в начале XVII в.

Рассмотрим жидкость, находящуюся в открытом сосуде, и мысленно выделим в ней произвольную призму (рис. 10.1, а), причем грань 1 лежит на поверхности жидкости. Пусть внешнее давление на жидкость равно  $p_0$ . Силу тяжести пока учитывать не будем (это возможно, так как в соответствии с принципом суперпозиции действия сил независимы); но нельзя предположить, что сила тяжести отсутствует, так как при этом поверхность жидкости не была бы плоской.

Вообразим, что выделенная призма затвердела, не меняя объема и формы. Тогда она будет оставаться в равновесии и к ней можно приложить законы равновесия твердого тела: сумма сил, действующих на призму, должна равняться нулю.

Силы  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , действующие на соответствующие грани (рис. 10.1, б), перпендикулярны граням 1, 2, 3 и образуют треугольник, подобный треугольному сечению призмы  $ABC$  (рис. 10.1, а). Поэтому можно написать:

$$\frac{F_1}{b_1} = \frac{F_2}{b_2} = \frac{F_3}{b_3},$$

где  $b_i$  — длины соответствующих ребер призмы (рис. 10.1, а). Силы, действующие на грани 4, 5, расположенные симметрично, очевидно, равны по модулю и противоположно направлены. Умножив все знаменатели

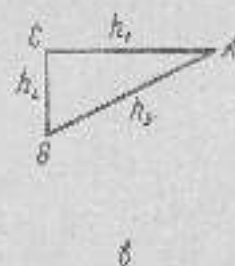
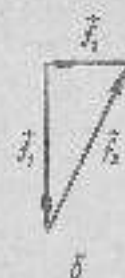
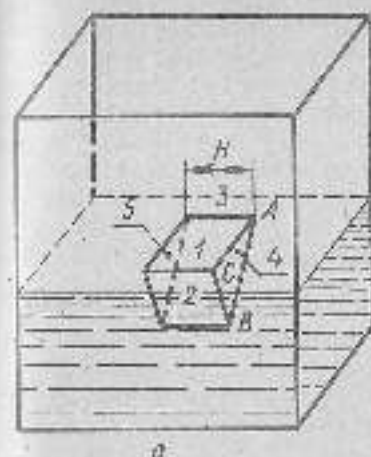


Рис. 10.1

на длину ребра  $b_i$ , мы не нарушим равенства, но в знаменателях получаются площади граней ( $S_i = b_i H$ ):

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = \frac{F_3}{S_3}.$$

Каждое из этих отношений определяет давление на соответствующую грань; поэтому

$$p_1 = p_2 = p_3. \quad (10.2)$$

Грань 1 лежит на поверхности жидкости, так что давление  $p_1$  равняется  $p_0$ . Таким образом, наш расчет соответствует закону Паскаля.

Рассмотрим теперь действие массовых сил. Для этого выделим в жидкости, находящейся в состоянии равновесия, вертикальный цилиндр с основанием  $S = 1 \text{ м}^2$  и высотой  $H$  (рис. 10.2). Пусть плотность жидкости равна  $\rho$  и жидкость практически несжимаема. Если цилиндр «затвердеет», то к нему можно применить условия равновесия твердого тела. На нижнюю грань сверху действует сила внешнего давления  $p_0 S$  и вес цилиндра  $\rho g H S$ . Эти силы уравновешиваются силой давления  $p S$ , действующей снизу. Следовательно,

$$p = p_0 + \rho g H. \quad (10.3)$$

Итак, к *внешнему давлению добавляется давление массовой силы* (весовое давление), обусловленное вышележащим (по отношению к рассматриваемому сечению) слоем жидкости. Это легко обнаружить, перевернув внутри жидкости небольшой легкий цилиндр, одно из оснований которого закрыто мембраной. Цилиндр заполнен воздухом, и его полость соединяется с манометром.

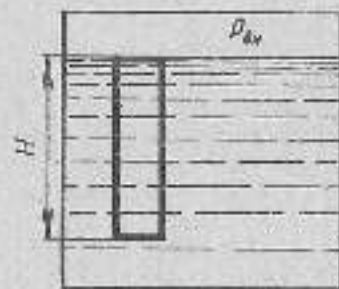


Рис. 10.2

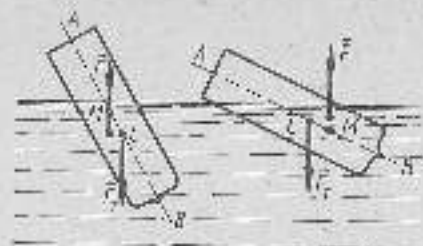


Рис. 10.3

приложения равнодействующей этих сил, направленной вертикально вверх, должна лежать на одной вертикали с центром тяжести выделенного объема жидкости (иначе возникло бы вращение объема). Следовательно, эта *равнодействующая и есть архимедова сила*:

$$\vec{F}_A = -\rho V \vec{g} - m \vec{g}. \quad (10.4)$$

Если удалить затвердевшую жидкость и заменить другим телом той же формы, то действие окружающих слоев не изменится, т. е. архимедова сила сохранится.

В случае, когда вещество тела однородно, его поведение определяется только соотношением между плотностями тела  $\rho$  и жидкости  $\rho_0$ . При  $\rho < \rho_0$  тело всплывает, при  $\rho > \rho_0$  — тонет. Если же тело неоднородно и его центр тяжести не совпадает с центром тяжести вытесненной им объема жидкости, то возникает еще и вращение тела. Так, в куске пластилина произвольной формы можно поместить (вблизи его поверхности) небольшое металлическое тело, подобрав его так, чтобы обеспечить плавание куска внутри жидкости. Если погрузить тело в жидкость, расположив металл сверху, то тело перевернется и металл окажется внизу. Если архимедова сила превышает силу тяжести, то тело всплывает и равновесие наступает при нахождении под водой лишь некоторой части тела.

Выведем плавающее тело (модель корабля) из положения равновесия, слегка наклонив его. При этом объем погруженной части тела (корабля) изменится, изменится и архимедова сила, причем точка ее приложения сместится в сторону более погруженной части тела (рис. 10.3). Образовавшаяся пара сил будет возвращать тело в первоначальное положение, если направление архимедовой силы пересечется с наклонившейся линией  $AB$ , содержащей центр тяжести тела, выше центра тяжести  $C$  (рис. 10.3, слева). Если же точка пересечения  $M$  окажется ниже центра тяжести, то тело перевернется (рис. 10.3, справа). Эта точка  $M$  называется *метациентром*. Для «устойчивости» корабля она должна располагаться выше центра тяжести последнего.

Давление жидкости на дно сосуда определяется весом столба жидкости с единицей основанием, опирающимся на дно:

$$p = \rho g H.$$



Рис. 10.4

Сила давления, действующая со стороны жидкости на дно, поддерживающую сосуд, т. е. вес жидкости, конечно, равен по модулю  $mg$  ( $m$  — масса жидкости) и не зависит от формы сосуда, а только от количества жидкости. Для сосуда с вертикальными стенками, показанного на рисунке 10.4, а, это очевидно. В случае, поясняемом рисунком 10.4, б, в силу давления жидкости на дно  $F_0$  прибавляется вертикальная составляющая  $\Delta F$  сил давления  $F$  жидкости на стенки, жестко связанные с дном. Для случая, представленного на рисунке 10.4, в, вертикальная составляющая сил вычитается из силы давления на дно. Таким образом, в общем случае полная сила, действующая на дно сосуда,

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \pm \Delta \vec{F} = mg,$$

где  $F_0 = pS$ .

Так как газы, подобно жидкостям, обладают упругостью объема (любой формы), то статика газов мало отличается от статик жидкостей. Различие возникает лишь из-за сравнительно легкой сжимаемости газов. Поэтому при больших объемах приходится учитывать различие в плотности газа в разных его слоях. Это усложняет расчеты, но не вносит ничего нового принципиально нового.

Рассчитаем зависимость атмосферного давления от высоты. Выберем ось координат  $h$  (рис. 10.5) и пастрику мысленно прямой цилиндра, нижнее основание которой совпадает с поверхностью Земли, где имеется давление  $p_0$ . На высоте  $h$  давление будет меньше; обозначим его  $p$ . На высоте  $h + dh$  давление еще меньше:  $p - dp$ . При равновесии

$$dp = -\rho g dh,$$

где  $\rho$  — плотность газа. Если температура газа постоянна по всей высоте столба, то между давлением и плотностью, по закону Бойля — Мариотта, существует простая связь:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Тогда легко выразить интегрирование в предлах  $(0, h)$  и  $(p_0, p)$  и найти давление:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right). \quad (10.5)$$

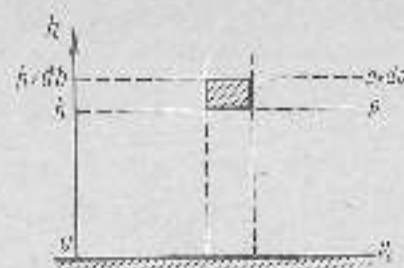


Рис. 10.5

Эта формула, называемая *барометрической*, строго верна для совершенно спокойной атмосферы постоянного состава и постоянной температуры.

Из соотношения (10.5), в частности, следует, что состав атмосферы должен с высотой изменяться — доля более тяжелых газов (кислород, азот) должна уменьшаться при увеличении высоты над Землей быстрее, чем доля более легкого водорода. В самом деле, если полное давление есть сумма отдельных давлений, создаваемых различными газами (закон Дальтона), а убыль давления для газов большей плотности должна происходить быстрее. В действительности состав атмосферы вплоть до довольно больших высот (порядка десятка километров) не меняется, что можно объяснить неучтенными при выводе формулы (10.5) явлениями ее перемешивания. Мы еще вернемся в молекулярной физике к формуле (10.5) и уясним ее глубокий физический смысл. Сейчас же отметим, что для практических целей удобно выразить высоту в километрах и, подставив величины, характеризующие воздух при нормальных условиях:  $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$ ;  $p_0 = 1,03 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , получить следующее выражение:

$$p = p_0 \exp(-Ah),$$

где  $A = 0,125 \text{ км}^{-1}$ .

На высоте величайшей вершины мира Джомолунгмы (Эвереста,  $h \approx 9 \text{ км}$ ; — давление должно равняться:

$$p = 0,3 p_0,$$

что более или менее хорошо отвечает действительности.

При малых высотах, разлагая (10.5) в ряд, находим:

$$p = p_0 - \rho_0 g h,$$

это простое соотношение справедливо примерно до высот порядка километра.

Архимедова сила определяет *подъемную силу аэростата*. Последний представляет собой капсулообразную оболочку, заполненную газом с плотностью, меньшей плотности воздуха. Если возникающая при этом подъемная сила превышает силу тяжести, действующую на аэростат, то он поднимается в верхние слои атмосферы. При этом избыточное давление внутри оболочки возрастает, что может привести к ее разрыву. Чтобы этого не случилось, внизу оболочки имеется небольшое отверстие, позволяющее части газа вытечь наружу (давление газа у отверстия равно давлению наружного воздуха). Подъем прекращается, когда подъемная сила сравнивается с силой тяжести, действующей на аэростат.

Представляют интерес случаи, когда жидкость, находящаяся в ускоренно движущемся сосуде, движется как одно тело, т. е. неподвижна относительно стенок сосуда.

Так, если сосуд с жидкостью падает вертикально с ускорением  $\vec{a}$ , то на глубине  $h$  гидростатическое давление вытекающего столба жидкости равно:

$$p = \rho(g - a)h.$$

При свободном падении ( $\vec{a} = \vec{g}$ ) получается:

$$p = 0,$$

т. е. состояние невесомости. Здесь начинают проявляться особенности поверхностного слоя жидкости (они будут рассмотрены в молекулярной физике) и жидкость принимает форму шара.

При движении сосуда под действием внешней силы  $\vec{F}$  с постоянным горизонтальным ускорением  $\vec{a}$  (рис. 10.6) в горизонтальных слоях на каждый элемент объема жидкости действует разность горизонтальных сил давления

$$dF = -dF_1 = (\rho_1 - \rho_2) dS = \rho a dS dx = a dm,$$

где  $dm$  — масса выбранного элемента объема.

Если сосуд равномерно вращается вокруг своей вертикальной оси, то, как было показано в § 6.2, поверхность жидкости принимает форму параболоида вращения, после чего жидкость движется вместе с сосудом как твердое тело. Поэтому внутри жидкости создается такое распределение давлений (в горизонтальных слоях), что каждый элемент объема под действием сил давления  $dF_1$  и  $dF_2$  приобретает необходимое центростремительное ускорение. Сила давления растет по направлению от оси вращения к стенке сосуда. Если в жидкости имеется искривление с плотностью, отличной от плотности жидкости, то под действием указанной выше силы оно будет перемещаться либо к оси, если его плотность меньше плотности жидкости, либо к стенке, если его плотность превышает плотность жидкости. На этом принципе работают различные центробежные сепараторы и центрифуги.

Интересен также случай «жидкого маятника»: на двух нитях подвешивается сосуд с водой (рис. 10.7), представляющий физический маятник. При возбуждении его колебаний вода в нем сначала движется сложным образом, но потом успокаивается, причем ее свободная поверхность все время остается параллельной дну сосуда. При этом на поверхностный элемент жидкости со стороны нижележащих слоев действует сила давления

$$dF_0 = p dS,$$

где  $dS$  — площадь горизонтальной грани.

Сумма сил  $dF_0$  и силы тяжести  $dF_1$ , действующей на элемент ( $dF_1 = \rho g h dS$ ),

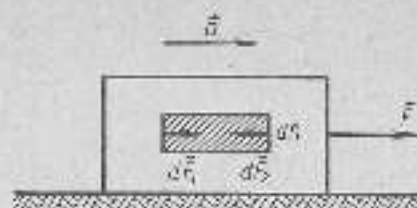


Рис. 10.6

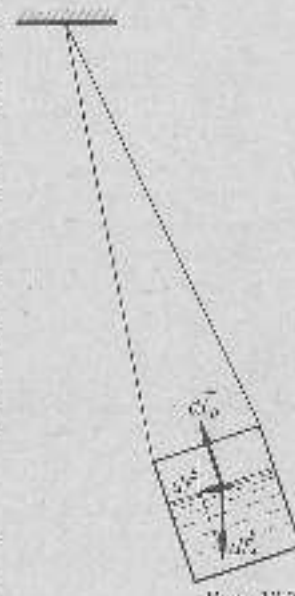


Рис. 10.7

$dh$  — высота элемента), как раз равна силе  $dF$ , необходимой для сообщения элементу касательного ускорения  $a$ , равного мгновенному ускорению сосуда.

При вращении жидкого шара вокруг оси симметрии (например, на ранних стадиях существования планет) необходимые центростремительные ускорения создаются вследствие деформации шара — он немного сжимается вдоль полярной оси и расширяется вдоль экваториальных диаметров. Так, у земного шара его экваториальный диаметр превышает полярный на 0,4%. Впрочем, степень сжатия в данном случае зависит не только от вращения, но и от ряда других причин (неоднородность Земли и др.).

## 10.2. Слойное (ламинарное) и турбулентное течение. Уравнение непрерывности струи

Переходя к изучению движения жидкостей и газов, сразу же отметим, что возможность перемешивания слоев жидкости существенно усложняет ее движение по сравнению с движением твердого тела.

Простой опыт убеждает в возможности течения двух типов: по сравнительно широкой трубе течет стационарный доток воды. Узкая трубка создает на оси трубы струю окрашенной воды (рис. 10.8, а). При малых скоростях течения оба потока текут не смешиваясь. Течение, при котором струя не перемешивается и в каждой точке сечения потока существует определенная скорость течения, называется *стационарным слоем* (ламинарным). В этом случае можно ввести понятие о *линии тока* — траектории индивидуального элемента объема жидкости, не пересекаемой никакой другой линией тока. Совокупность таких линий тока, опирающаяся на некоторое элементарное сечение, называется *трубкой тока*. Трубки тока не пересекаются друг с другом, и жидкость нигде не выходит через стенки трубки тока. Все сечение трубы, заполненной слоем потока жидкости, является макроскопической трубкой тока.

При увеличении скорости возникают более сложные явления. Струя окрашенной жидкости сначала начинает дрожать, и доток перемешивается с прозрачными струями, так что вся труба заполняется беспорядочно движущейся окрашенной жидкостью, но в целом

жидкость перемещается вдоль трубы (рис. 10.8, б); такое течение называют *турбулентным*. Оно, конечно, сложное явление.

В реальных условиях стационарное слойное течение возможно только под действием внешних сил, так как оно сопровождается трением жидкости о стенки трубы и внутренним трением слоев, текущих с относительно высокими, от-

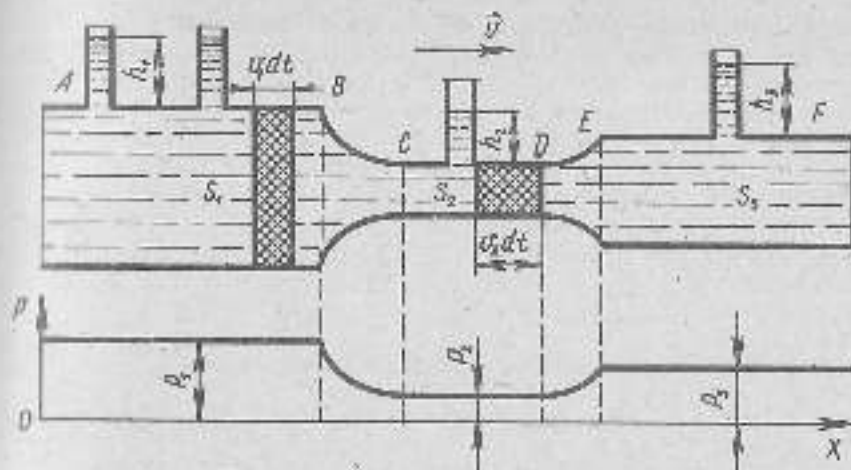


Рис. 10.9

личными от нуля (см. § 10.4, рис. 10.10). В идеализированном случае несжимаемой (что близко к действительности для жидкостей и часто выполняется и для газов) и лишенной трения жидкости (это допущение более грубо, но иногда применимо) течение ее по трубе, расположенной горизонтально, когда бы происходить и без действия внешних сил, за счет первоначального импульса, сообщенного жидкости. Если сечение трубы меняется и она заполнена жидкостью полностью, то условия течения и его описание усложняется. Но при стационарном течении через каждое сечение за одинаковые промежутки времени должна протекать жидкость одинаковой массы. Как видно из рисунка 10.9, эта масса может быть представлена произведениями:

$$\rho_1 S_1 v_1 dt = \rho_2 S_2 v_2 dt = dm = \text{const}, \quad (10.6)$$

где  $S_i$  — площадь сечения трубы;  $v_i$  — скорость в данном сечении;  $dt$  — выбранный промежуток времени;  $\rho_i$  — плотность жидкости. Уравнение (10.6) называется *уравнением непрерывности струи*. В случае несжимаемой жидкости ее плотность везде одинакова и вместо (10.6) получается закон *сохранения объема жидкости*:

$$S_1 v_1 = \text{const}, \quad (10.7)$$

Из этого выражения сразу же видно, что скорость течения обратно пропорциональна площади сечения (поэтому, например, через горные реки с быстрым течением переходят по возможности в широких местах). Но изменение скорости требует действия силы. Следовательно, на переходных участках  $BC$  и  $DE$  (где изменяется сечение трубы) должны возникать соответственно ускоряющие и замедляющие силы. Значит, давление на участке  $AB$  должно быть больше, чем на участке  $CD$ , а давление на участке  $EF$  должно быть меньше, чем на участке  $CD$ . На каждом из указанных участков

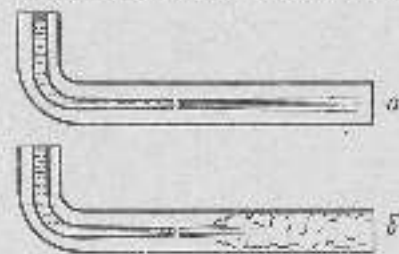


Рис. 10.8

(постоянные сечения трубы) давление сохраняется неизменным, так как ускорение так же отсутствует, а трением мы пренебрегаем. В этом можно убедиться, снабдив трубу манометрами, сечения которых параллельно линиям тока. Если участок трубопровода невелик, так что трение сказывается незначительно, то распределение давлений, измеренных манометрами (см. рис. 10.9), отвечает сделанным выше заключениям. Рассмотренное давление называется *статическим*.

При закрывании правого конца трубы и прекращении подачи жидкости все давления выравниваются, так как течение жидкости прекращается.

### 10.3. Уравнение Бернулли. Импульс струи

Перейдем теперь к установлению законов стационарного слоистого течения идеальной жидкости. Для общности рассмотрим наклонный участок трубопровода, находящегося в поле земного тяготения (рис. 10.10). Трубопровод считаем цилиндром, заполненным жидкостью во всех сечениях. Выделим мысленно некоторый элемент, например ограниченный сечениями 1, 2. За малое время  $dt$  он сместится в положение, ограниченное сечениями 1', 2'. При этом через сечение 1 протечет жидкость массой  $d\omega$ , занимающая объем  $S_1 v_1 dt$ . За это же время через сечение 2 пройдет жидкость такой же массы, занимающая такой же объем  $S_2 v_2 dt$ , но с иной скоростью течения. Если поток стационарен, то в объеме, заключенном между сечениями 1 и 2, никаких изменений не произойдет, хотя одни частицы заменятся другими. Поэтому нужно исследовать только изменения, происшедшие с элементами 1, 1' и 2, 2'.

Работа внешних сил, действующих на жидкость, складывается из работы сил статического давления и работы силы тяжести. Эта работа определяет изменение кинетической энергии выделенных объемов. Запишем уравнение закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{1}{2} \rho v_1 S_1 dt v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2 S_2 dt v_2^2 - p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt + g(h_1 - h_2) d\omega,$$

где  $h_1, h_2$  — высоты центра тяжести объемов 1, 1' и 2, 2' над горизонтом;  $p_1$  — статическое давление, создаваемое жидкостью, находящейся выше сечения 1;  $p_2$  — давление слоев, расположенных ниже сечения 2. Перейдем слева к одинаковым индексам в одну часть уравнения и сокращая массы  $d\omega = S_1 v_1 dt$ , получаем в любом сечении:

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gh = \text{const.} \quad (10.8)$$

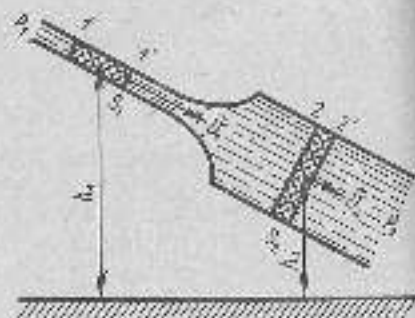


Рис. 10.10

Для удобства записи можно, конечно, умножить уравнение на постоянную плотность  $\rho$ . Тогда мы приходим к общепринятой форме закона *уравнения Бернулли* (Дантис Бернулли, 1700—1782) для стационарного слоистого потока идеальной жидкости:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh = \text{const.} \quad (10.9)$$

Силы трения, существующие в реальной жидкости, учесть труднее. При их учете мы должны были бы вместо (10.9) написать:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2 + \rho \frac{dA}{dm} = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2 + p_{тр}, \quad (10.10)$$

где  $dA$  — элементарная работа против сил трения;  $p_{тр}$  — изменение давления, соответствующее этой работе (отнесенной к единице объема жидкости). Отметим, что изменение давления  $p$ , зависит от расстояния между элементами 1 и 2, увеличиваясь вместе с ним, так как силы трения действуют и на жидкость, заключенную между сечениями 1 и 2.

При этом если сечение 1 расположено выше по течению, чем сечение 2, то слагаемое, учитывающее работу силы трения, отнесенную к единице объема жидкости, должно быть взято со знаком «минус». Следовательно, *давление во втором сечении окажется меньше, чем в идеализированном случае*. Поэтому даже для течения по горизонтальной трубе постоянного сечения в реальных условиях требуется создание некоторой разности давлений. Она неизбежно существует во всех опытах, но делается заметной лишь при достаточно длинных трубах.

Перейдем к обсуждению следствий из уравнения (10.9). Для измерения статического давления, как мы уже видели, нужен манометр с сечением, параллельным линиям тока жидкости (1 на рис. 10.11). Для измерения второго слагаемого, иногда называемого *динамическим давлением*, применяется трубка 2 с сечением, перпендикулярным линиям тока (см. рис. 10.11). Жидкость в ней тормозится, ее кинетическая энергия переходит в потенциальную, и высота подъема жидкости служит мерой суммы  $p + \frac{1}{2} \rho v^2$ . Эта трубка называется *трубкой Пито*.

По показаниям подобных манометров можно определить скорость течения и объем ежесекундно протекающей жидкости.

На таких же идеях основаны различные приборы для измерения полной массы жидкости, протекающей за некоторый промежуток времени (водомеры и газометры).

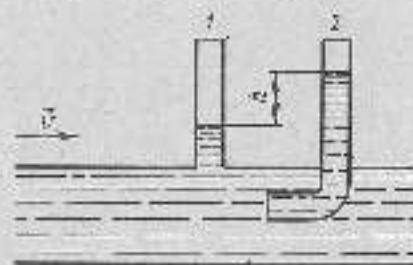


Рис. 10.11

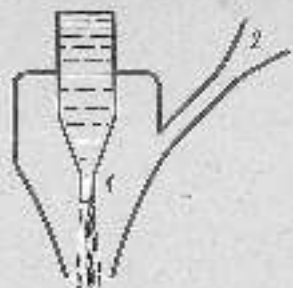


рис. 10.12

Уравнение Бернулли в форме (10.9) применимо к течению газа только в тех случаях, когда можно пренебречь изменением объема газа и возможными изменениями его внутренней энергии при сжатии и расширении.

Пусть, например, газ течет из очень широкого сосуда, где давление равно атмосферному, в узкий, где статическое давление меньше на 1%. Скорость газа в первом сосуде можно считать очень малой. Какова она во втором сосуде?

Пренебрегая малым изменением плотности газа, получим из уравнения Бернулли:

$$p_1 - p_2 = 0,01p = \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \frac{1}{2}\rho v^2 \approx \frac{1}{2}\rho v^2.$$

При нормальной температуре (273 К) плотность воздуха  $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$ . Поэтому скорость газа оказывается равной

$$v_2 = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = 40 \text{ м/с,}$$

что подтверждается опытом. Итак, уравнение (10.9) применимо и к газам, движущимся довольно быстро.

Если продувать струю воздуха между двумя шариками или плоскими поверхностями, например, кусками плотной бумаги, подвешенными на нитях, то наблюдается их взаимное притяжение. Это объясняется тем, что давление между ними в соответствии с уравнением Бернулли падает. Такой же эффект может возникнуть при движении больших судов в узком канале, где суда заметно уменьшают сечение потока жидкости. Поэтому движение в каналах строго регулируется.

Струя воды, вытекающая из узкого отверстия 1 (рис. 10.13), создает разрежение и увлекает окружающий ее газ, что позволяет от-

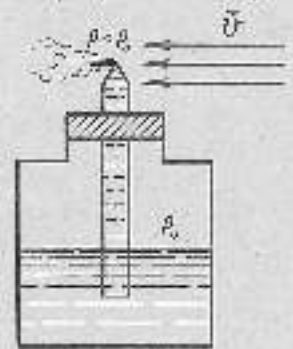


рис. 10.13

качивать воздух из не показанного на рисунке большого сосуда 2. Подобный простой водоструйный насос может создавать давление до сотых долей атмосферного.

Этот же принцип используется и в более совершенных насосах, рассматриваемых в молекулярной физике. На том же принципе работают пульверизатор (рис. 10.14) и автосохобильный карбюратор. По вливу струи газа увлекает жидкость, последняя при этом разбивается на мелкие капельки.

При изучении течения жидкостей приходится считаться не только с их энергией, но и с их механическим импульсом.

В рассмотренных выше примерах изменение импульса происходит (в горизонтальных трубах) в тех их участках, где изменилось сечение трубы. Изменение импульса жидкости массой  $dm$  в общем случае определяется действием силы  $\vec{F}$ :

$$(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dm = \int \vec{F} dt.$$

Здесь  $t$  — время протекания элемента массой  $dm$  через участок с меняющимся сечением;  $\vec{F}$  — сила, расчет которой довольно сложен.

Мы рассмотрим два простых примера:

1) Водопроводный кран (рис. 10.14) изменяет каждую секунду вытекающей жидкости массой  $\mu$ , действуя на нее с силой

$$\vec{F} = \vec{F}_1, \quad (10.11)$$

и сам испытывает действие силы  $\vec{F}_1$ . При этом

$$\vec{F} = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

2) Из широкого открытого сверху сосуда жидкость вытекает через малое отверстие площадью  $S$  (рис. 10.15), находящееся на глубине  $h$ . Стенки сосуда около отверстия закруглены, чтобы изменение скорости могло происходить постепенно: это позволяет не считаться со сжатием струи, имеющим место у стенок, образующих прямой угол. Уравнение (10.9) дает:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh.$$

Так как  $v_1 \ll v$ , то получим следующий результат:

$$v = \sqrt{2gh},$$

т. е. скорость вытекания такая же, какая была бы при свободном падении жидкости с высоты  $h$ . Этот результат был получен уже Исааком Ньютном и Габриэлем В. Торричелли (1608—1647).

Вытекающая вода уносит импульс, равный

$$dm\vec{v} = \rho v S dt \vec{v} = \vec{F} dt,$$

где  $\vec{F}$  — сила, действующая на воду, по модулю она равна:

$$F = \rho v^2 S = 2\rho g S h.$$

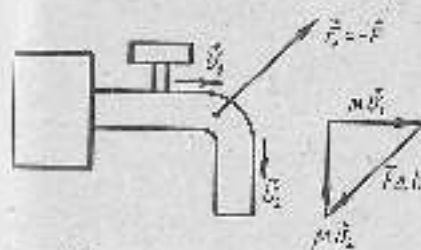


рис. 10.14

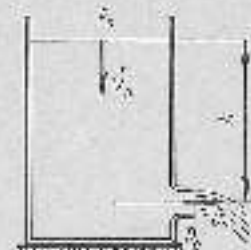


рис. 10.15

Такую же по модулю, но противоположную по направлению силу испытывает сосуд.

Эта сила, как и сила  $\vec{F}$ , в уравнении (10.11), есть реактивная сила, встречающаяся в уравнении Мещерякова (3.9).

Если бы отверстие было закрыто пробкой, то на нее действовала бы такая же сила (статическая):

$$F_{\text{ст}} = \rho g h S.$$

Различие в модулях сил  $\vec{F}$  и  $\vec{F}_{\text{ст}}$  объясняется перераспределением давлений внутри жидкости после открывания отверстия. Если изображенный на рисунке сосуд поставить на подвижную тележку, то после открывания отверстия тележка покатится влево.

Уравнение Бернулли описывает установившееся, не зависящее от времени течение жидкости. В процессе установления такого движения сила тяжести играет существенную роль. Пусть горизонтальная труба сначала не заполнена жидкостью. Затем ее начинают заполнять, подавая жидкость в узкий участок трубы под некоторым давлением. Струя, выходящая из узкой части в широкую, под действием силы тяжести растекается по дну и постепенно заполняет всю трубу. После этого течение становится стационарным.

Но если бы такая операция производилась в условиях невесомости, то струя двигалась бы через широкое сечение трубы по ее оси (мы не учитываем деформации струи под действием сил поверхностного натяжения), не заполняя объем широкой части. Движение могло бы быть стационарным, но пользоваться уравнением Бернулли было бы неудобно.

Если же заранее заполнить жидкостью всю трубу (при закрытом выходном отверстии), оставить ее соединенной с питающим устройством и открыть выходное отверстие, то стационарное течение установится и уравнение Бернулли будет применимо как в обычных условиях, так и в условиях невесомости.

Но и в этих случаях следует сделать одну оговорку. Из уравнения

$$\rho_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

получаем:

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \right].$$

Учитывая уравнение непрерывности струи (10.7), перепишем предыдущее уравнение в таком виде:

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right].$$

Если

$$\frac{S_1}{S_2} \gg 1,$$

то  $\rho_2$  может оказаться отрицательным, что физически невозможно.

Почему же уравнение Бернулли дало отрицательный результат? Возможно, что мы в самом начале предположили, что течение жидкости установилось. Но мы не определили условий, при которых оно существует. А уравнение Бернулли описывает, что происходит только при установившемся течении. В рассматриваемом случае условия не соответствуют требованиям, необходимым для установившегося течения (сечения  $S_1$  слишком малое); поэтому и уравнение Бернулли не может быть применено.

Нельзя (при заданных сечениях  $S_1$  и  $S_2$ ) задавать произвольные значения  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ; они могут не удовлетворить требованиям стационарности течения. Но могут быть заданы произвольные  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ; они всегда позволяют найти стационарные значения скоростей  $v_1$  и  $v_2$ .

В разветвленном водоводе (рис. 10.16, а), очевидно, давление  $p$  во всех параллельных трубах (их может быть и больше, чем три) должно быть одинаковым ( $p_1 = \text{const}$ ). Тогда из уравнения Бернулли следует, что скорости течения  $v_i$  все одинаковы:

$$v_i = \text{const}.$$

Из уравнения непрерывности в этом случае получаем:

$$vS = v_i \sum S_i, \quad v_i = v \frac{S}{\sum S_i}.$$

Полож из уравнения Бернулли находим общее давление:

$$p_i = p - \frac{1}{2} \rho (v_i^2 - v^2).$$

Таким образом, в сущности задача сводится к рассмотрению последовательно включенных труб с сечениями  $S$  и  $(S_1 + \dots + S_n)$ . Но могут быть разветвленные водоводы, выходящие отверстия которых не соединены друг с другом (рис. 10.16, б). В этом случае требование равенства давлений во всех разветвлениях отпадает.

На этом рисунке главная труба ( $S, \rho, v$ ) разветвляется на две. В общем случае число разветвлений больше. Примем его равным  $n$ . Режимы течения в разветвленных характеризуются величинами  $S_i, \rho_i, v_i$ .

При установившемся течении каждой трубки тока сечением  $S_i$  будет отвечать трубка тока с сечением  $m_i$  в perpendicularной части. Значения  $m_i$  заранее неизвестны. Можно составить следующие уравнения:

$$v_i m_i = v S_i \quad (n \text{ уравнений}),$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 =$$

$$= p_i + \frac{1}{2} \rho v_i^2 \quad (n \text{ уравнений}).$$

Кроме того

$$\sum m_i = S.$$

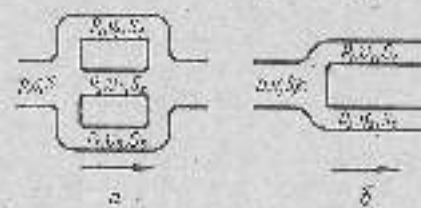


Рис. 10.16

Итак, имеется  $2n+1$  уравнений, содержащих  $4n+3$  величины. Заданы, как обычно, значения  $S$ ,  $S$  и  $\rho$ ,  $\sigma$  (т. е. всего  $n+3$  величины), мы получим  $3n$  неизвестных; определить их из  $2n+1$  уравнений, конечно, невозможно.

Но можно так изменить постановку задачи, что она станет разрешимой. Именно зададим сечения только в разветвлениях  $S_i$  (числом  $n$ ),  $\rho$  и  $\sigma$  и потребуем, чтобы в разветвлениях получились давления  $p_i$  (также числом  $n$ ).

Тогда число заданных величин составит  $2n+2$ , а число неизвестных сравняется с числом уравнений  $2n+1$ .

Из уравнений Бернулли определяются значения скоростей  $v_i$ , а из уравнений непрерывности струи — значения сечений  $\sigma_i$ . После этого определятся и площадь сечения главной трубы.

Конечно, при задании давлений  $p_i$  нужно соблюдать условие

$$p_i < p + \frac{1}{2} \rho v^2,$$

Можно также задать скорости  $v_i$ , соблюдая неравенство

$$\frac{1}{2} \rho v_i^2 < p + \frac{1}{2} \rho v^2,$$

и определять последовательно  $p_i$ ,  $\sigma_i$  и  $S$ .

Наконец, можно задать  $k$  значений давлений  $p_i$  и  $n-k$  значений скоростей  $v_i$  и определить остальные  $p_i$ ,  $v_i$ ,  $\sigma_i$  и  $S$ .

Но если бы были заданы  $S_i$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  и  $\sigma_i$ , причем, конечно, должно было бы быть удовлетворено и условие

$$\sum \sigma_i = S,$$

то могли бы получиться невозможные решения для некоторых скоростей:

$$\frac{1}{2} \rho v_i^2 > p + \frac{1}{2} \rho v^2,$$

что потребовало бы изменения  $\sigma_i$ : для сохранения суммы  $\sigma_i$  понадобилась бы измененная и других значений  $\sigma_i$ , т. е. задача оказалась бы неразрешимой.

Итак, оказывается, что *одновременное задание  $p_i$ ,  $\sigma_i$  и  $S$  невозможно*.

Следует заметить, что в практических условиях расчет водоводов делается не по уравнению Бернулли, а с учетом трения, имеющегося в жидкости. При этом для водоводов с открытыми выходными концами задача в общем виде не решается. Часто ее начинают считать с конца, задав давления на выходе, несколько большие атмосферного. Кроме того, на практике водоводы редко бывают горизонтальными, что также приходится учитывать при их расчетах.

В заключение оставшимся на достаточно подробном рассмотрении простого, но важного для практики устройства — сифона. Это необходимо, так как, к сожалению, широко распространено

ошибочное мнение, что сифон работает под действием атмосферного давления. Как известно, сифон это изогнутая трубка, верхний конец ее (рис. 10.17) находится в сосуде  $A$ , нижний — над сосудом  $B$ . Если трубка была заполнена жидкостью, то происходит самопроизвольное перетекание ее в сосуд  $B$ . Оно продолжается, пока конец трубки не выйдет из жидкости (в сосуде  $A$ ). Очевидно, атмосферное давление на жидкость в верхнем сосуде  $p_1$  меньше, чем во втором  $p_2$ , уже поэтому оно не может быть причиной перетекания.

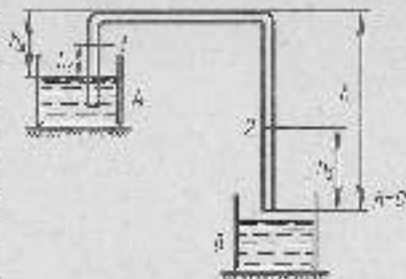


Рис. 10.17

Роль атмосферного давления сводится главным образом к деформации упроченной струи (растворенные в жидкости газы не могут образовывать больших пузырьков и нарушить целостность струи). Жидкость, освобожденная от растворенных газов (например, длительных кипячением), прекрасно течет и в вакууме. Работа сифона объясняется разностью сил тяжести, действующих на столбы жидкости в обоих коленах трубки.

Спешка, наброшенная на блок с горизонтальной осью вращения, сбегает в сторону своего более длинного конца, подтверждая сказанное выше о работе сифона.

Пусть сечение сосуда  $A$  много больше сечения трубки сифона. Тогда скорость  $v_1$  опускания уровня жидкости в нем очень мала по сравнению со скоростью  $v$  вытекания жидкости из отверстия трубки. Высоту уровня жидкости в сосуде  $A$  можно поддерживать постоянной. Так как трубка сифона имеет постоянное сечение, то скорость жидкости в ней везде постоянна и равна скорости истечения. Напишем уравнение Бернулли для этого уровня в нижнем конце трубки ( $h=0$ ):

$$p_1 + \rho g (h - h_1) + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2.$$

Отсюда получаем для скорости истечения:

$$v^2 = v_1^2 + 2g(h - h_1) + (p_1 - p_2) \frac{2}{\rho}.$$

Так как  $v \gg v_1$  и разность атмосферных давлений мала по сравнению со вторым слагаемым правой части, то получается:

$$v = \sqrt{2g(h - h_1)}. \quad (10.12)$$

как и в случае сосуда Торричелли, рассмотренного выше.

Интересно оценить статическое давление в сифоне.

Для уровней 0, 1 и 2 уравнения Бернулли дают:

$$p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g (h - h_1 + h_1) = \frac{1}{2} \rho v^2 + p_1 + \rho g h_1.$$



Таким образом,

$$p_1 = p_0 - \rho g (h - h_1 + h_1)$$

Оно меньше атмосферного и имеет минимум в горизонтальной части трубки сифона ( $h_1 = h_2$ ).

В течении трубки сифона, совпадающей с поверхностью жидкости в сосуде  $A$ , получается (так как  $h_1 = 0$ ):

$$p_2 = p_0 - \rho g (h - h_2)$$

Разность давлений

$$p_2 - p_1 = \rho g h$$

и гонит жидкость в трубку сифона, заставляя ее двигаться в трубке со скоростью  $v$ , найденной независимо в уравнении (10.12).

В правой трубке на уровне  $Z$  статическое давление, равное

$$p_1 = p_0 - \rho g h_2,$$

также меньше атмосферного, оно растет по мере отпускания жидкости по трубке, а в ее верхней точке равно давлению в горизонтальной части трубки, как это и должно быть.

#### 10.4. Трение в движущейся реальной жидкости.

##### Уравнение Пуазейля

Трение, существующее в реальной жидкости, значительно усложняет простое описание ее движения. Сложнейшей задачей по-прежнему остается.

Во-первых, для преодоления сил трения необходима внешняя сила (разность давлений даже на концах горизонтальной трубы). Это легко показать на опыте, заставляя, например, воду течь по узкой длинной трубке постоянного сечения, вдоль которой на разных расстояниях имеются манометры, измеряющие статическое давление (рис. 10.18). Опыт показывает, что разность давлений пропорциональна расстоянию между сечениями, в которых измеряется давление. Напомним, что в случае идеальной жидкости разности давлений не существовало бы. Если провести опыт с двумя трубками разных радиусов, то окажется, что разность давлений резко уменьшается при увеличении радиуса. Именно поэтому при опытах с достаточно широкими трубками можно было пренебречь силами трения.

Во-вторых, при существовании трения даже при стационарном течении скорости течения в сечении трубы (если жидкость смачивает стенки) меняется от нуля у поверхности стенки до наибольшего значения на оси трубы. Это легко доказать на опыте. Вертикальную трубку заполняют водой, затем сверху осторожно наливают подкрашенную воду и открывают кран  $K$  (рис. 10.19) так, чтобы течение было очень медленным. Вскоре сверху образуется окрашенный «язычок», имеющий форму парабола вращения.

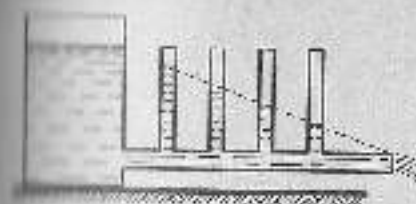


рис. 10.18

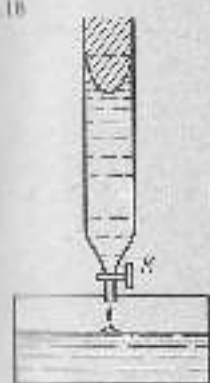


рис. 10.19

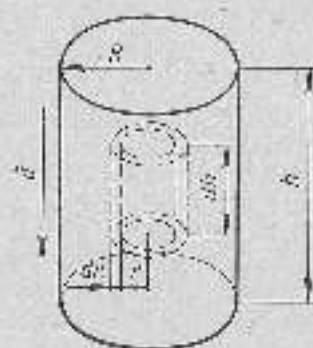
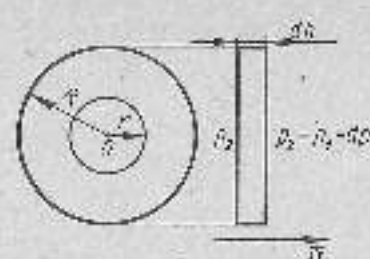


рис. 10.20

Это распределение скоростей является результатом существования трения между слоями жидкости, движущимися с различными скоростями.

Ньютоном показано, что при стационарном слоистом течении реальной жидкости по трубе, стенки которой смачиваются жидкостью (так что скорость течения у самой стенки равна нулю), скорость течения в отдельных слоях изменяется и направлена перпендикулярно направлению скорости. При этом между соседними слоями возникает сила трения

$$\vec{f} = \eta \frac{dv}{dr} dS \frac{\vec{r}}{r},$$

где  $dS$  — элемент поверхности соприкасающихся слоев;  $\eta$  — вязкость жидкости (см. § 3.4); радиус-вектор  $\vec{r}$  направлен от центра, так что  $\frac{dv}{dr} < 0$ .

Рассмотрим течение жидкости в отрезке трубы радиусом  $R$  (рис. 10.20). Выделим мысленно цилиндр радиусом  $r$ , высотой  $dh$ . Кроме тормозящей силы трения, действующей на его боковую поверхность, при стационарном течении к торцам цилиндра должны быть приложены силы давления, обеспечивающие ускорение. Суммарная сила должна равняться нулю:

$$\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r dh + \pi r^2 dp = 0.$$

Отсюда находим:

$$-ds = \frac{dv}{2\eta} \frac{dv}{dr} r dr.$$

Взяв интеграл по всему сечению трубы ( $0, R$ ) и полагая, что при  $r = R$  скорость равна нулю, находим наибольшую скорость (на оси трубы):

$$V = \frac{1}{4\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) R^2. \quad (10.13)$$

Интегрируя в пределах  $[V, v]$  и  $[0, r]$ , находим скорость слоя внутри трубы:

$$-\int_r^V ds = \int_0^r \frac{1}{2\eta} \frac{dv}{dr} r dr.$$

Следовательно,

$$v = V - \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} r^2. \quad (10.14)$$

Из (10.13) и (10.14) получаем окончательный вид закона распределения скоростей в трубе:

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} [R^2 - r^2]. \quad (10.15)$$

Если труба длиной  $l$  имеет постоянное сечение, то

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{l},$$

где  $p_1 - p_2$  — разность давлений на ее концах.

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{p_1 - p_2}{l} (R^2 - r^2). \quad (10.16)$$

Теперь можно найти объем жидкости, протекающей по трубе за некоторое время  $t$ . Выделим цилиндрический слой сечения  $2\pi r dr$  и высотой  $h = vt$ . Вся жидкость, заключенная в нем, протекает за время  $t$  через выбранное сечение. Суммирование по всему сечению трубы приводит к уравнению Пуассона, определяющему объем протекающей жидкости или массу, если результат интегрирования умножить на плотность жидкости:

$$M = \rho \int_0^R 2\pi r dr vt = \frac{\rho \pi}{2\eta} \frac{p_1 - p_2}{l} R^4 t = \mu t. \quad (10.17)$$

где  $\mu$  — масса ежесекундно протекающей жидкости, выраженная в килограммах в секунду ( $\text{кг}/\text{с}$ ).

Пользуясь уравнениями (10.14) и (10.15), можно найти кинетическую энергию ежесекундно протекающей жидкости:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^R \rho v^2 2\pi r dr = \frac{1}{4} \mu V^2. \quad (10.18)$$

Такая зависимость скорости течения от радиуса трубы позволяет легко регулировать поток жидкости (вспомните водопроводный кран).

Так как поток стационарен, то разность давлений требуется только для преодоления сил трения. В случае идеальной жидкости вместо (10.17) и (10.18) получим бы:

$$\mu_{\text{ид}} = \pi R^2 \rho V_{\text{ид}}, \quad W_{\text{ид}} = \frac{1}{2} \mu_{\text{ид}} V_{\text{ид}}^2.$$

## 10.5. Число Рейнольдса

В § 10.2. мы описали опыт, доказывающий, что при большой скорости течения реальной жидкости слоистое течение сменяется более сложным — турбулентным (см. рис. 10.8).

То же самое наблюдается и при набегании слоистого потока на какое-либо тело: при малых скоростях линии тока натягиваются, обтекают тело, но не перемешиваются, а позади тела снова стабилизируются параллельными друг другу. Если же скорость набегания увеличится, то возникает турбулентность и явления обтекания усложняются.

Для характеристики того или иного типа течения О. Рейнольдс (1842—1912) рассмотрел отношение кинетической энергии единицы объема жидкости (или обтекаемого тела) к потерям энергии на преодоление сопротивления движению. Для пояснения числителя Рейнольдса рассмотрим простейший случай шара, движущегося в жидкости. Система отсчета связана с жидкостью; начало координат находится в невозмущенном потоке, вдали от шара. Пусть радиус шара есть  $R$ , плотность  $\rho$ , скорость движения  $v$ . Кинетическая энергия шара

$$W \sim \rho R^3 v^2.$$

Работа сил сопротивления за секунду пропорциональна наибольшему сечению движущегося тела, перпендикулярному вектору скорости, вязкости жидкости  $\eta$  и скорости движения. В случае шара

$$A \sim R^2 \eta v.$$

Безразмерное отношение этих величин (коэффициент пропорциональности принимается равным единице) называется числом Рейнольдса:

$$\frac{W}{A} = \text{Re} = \frac{\rho R v}{\eta}. \quad (10.19)$$

В соответствии с критерием относительности Галаilea можно также рассмотреть набегание слоистого потока на кран.

При малых скоростях, когда возмущения потока невелики, он остается слоистым, этому случаю отвечают малые значения  $\text{Re}$ .

При увеличении скорости (и числа Рейнольдса) процесс развивается — возникает турбулентность.

Но при очень больших числах Рейнольдса, когда потери на преодоление трения относительно малы, турбулентность опять перестает играть заметную роль.

Эти соображения применимы и к течению жидкости в трубах. Отношение

$$\frac{\lambda}{\nu} = \nu$$

называют *критической вязкостью* и записывают число Рейнольдса в виде

$$Re = \frac{Rc}{\nu} \quad (10.20)$$

При сложном течении сопротивление движению тела пропорционально первой степени скорости (закон Стокса). При турбулентном движении оно возрастает и движущееся тело передает жидкости относительно большую долю своего механического импульса и энергии. Грубую идею возникающего при этом возрастания сопротивления можно провести на следующем примере. Пусть плоская пластина площадью  $S$  движется со скоростью  $v$ , нормальной к поверхности пластины. Тогда  $Svdt$  есть элементарный объем жидкости, отталкиваемой пластиной за время  $dt$ . Умножив это произведение на плотность жидкости  $\rho$ , получим массу отталкиваемой жидкости. Если она приобретает при этом скорость  $v$ , то передаваемый жидкости импульс равен:

$$dP = \rho S v^2 dt.$$

При этом сила сопротивления, действующая на пластину, равна:

$$F_1 = \frac{dP}{dt} = \rho S v^2,$$

т. е. пропорциональна квадрату скорости. Действительная сила сопротивления оказывается равной

$$F = C_d \rho v^2 S \quad (10.21)$$

где  $C_d$  — коэффициент, существенно зависящий от формы тела;  $S$  — площадь наибольшего поперечного сечения тела, перпендикулярного направлению потока.

Изюда выражения (10.21) считают общим для всех скоростей и  $C_d$  рассматривают как функцию скорости.

Зависимость силы сопротивления от числа Рейнольдса для шара графически представлена на рисунке 10.21, причем на участке I  $C_d = \frac{1}{2}$ , на участке II  $C_d = \text{const}$ , на участке III  $C_d \sim v$ . Участки разделены переходными областями, где  $C_d$  зависит от скорости более сложно.

Все сказанное справедливо и для тел иной формы. Однако следует подчеркнуть, что эти рассуждения верны лишь для скоростей, меньших скорости звука  $c_{зв}$ , которая в воздухе приблизительно равна 330 м/с. При звуковых и сверхзвуковых скоростях возникают

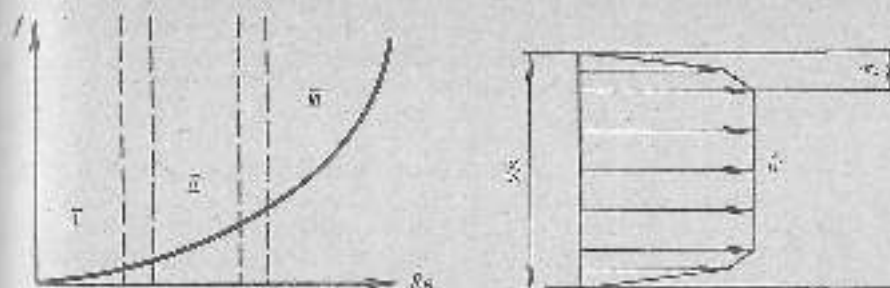


Рис. 10.21

Рис. 10.22

качественно новые явления; они будут рассмотрены в газодинамике, после изучения основ молекулярной физики и термодинамики.

При турбулентном движении жидкости в трубе круглого сечения, несмотря на сложность движения отдельных частиц, жидкость в целом течет вдоль оси трубы. При этом скорость у стенок постепенно растет от нуля до некоторого постоянного значения  $v_0$ , *поперечный срез, где происходит это возрастание, называется радиусом трубы* (рис. 10.22).

#### 10.6. Движение твердых тел в жидкости и газе. Циркуляция скорости. Подъемная сила

Явления, происходящие при движении твердого тела в жидкости или газе, во многих случаях удобно рассматривать, считая систему отсчета с телом. Набегающий на тело поток до взаимодействия будем считать считать, а вектор скорости потока — направленным горизонтально. При взаимодействии потока с твердым телом возникают так называемые *аэродинамические силы*, причем в соответствии с третьим законом Ньютона сила, испытываемая телом, равна по модулю и противоположна по направлению силе, действующей на поток. Сила, испытываемая телом, во многих случаях может быть представлена как сумма двух сил: первая (с коэффициентом  $C_x$ ), называемая *лобовым сопротивлением*, направлена параллельно скорости невозмущенного потока, вторая (с коэффициентом  $C_y$ ) перпендикулярна первой; ее называют *подъемной силой*, хотя она может (при горизонтальном движении) быть направлена как вверх, так и вниз (но всегда перпендикулярна скорости невозмущенного потока).

Разрабатывая гидродинамику, Л. Эйлера (1707—1783) пришел к парадоксальному выводу: идеальная жидкость или газ, лишенные трения, должны свободно обтекать тело, не обмениваясь с ним энергией. Если тело имеет симметричную форму (на рис. 10.23 показан сечение шара), то обтекание будет симметричным. При этом лобовое сопротивление отсутствует. В реальных условиях из-за трения в газе происходит некоторое перераспределение линий тока, обтекание становится несимметричным, и это приводит к появлению аэродинамических сил.

Обратимся снова к рисунку 10.23. На достаточном расстоянии от шара поток снова делается невозмущенным, частицы жидкости движутся с прежней скоростью  $v$ . Если считать, что за пределами участка  $B'C'$  поток остался невозмущенным, то показанную на рисунке часть потока можно считать продольным сечением микроскопической трубки тока и применить к ней уравнение Бернулли (хотя бы для качественных оценок).

Так как шар уменьшает свободное сечение трубки тока, то вблизи шара скорость потока должна изменяться: при подходе к сечению  $B'C'$  она должна расти; при удалении от него — убывать, стремясь к невозмущенному значению. В области  $A$  поток затормаживается. Следовательно, будет меняться и давление в различных частях невозмущенного потока.

В покоящейся жидкости давление на всяком участке поверхности шара было бы одинаково. Постоянно оно и в невозмущенном потоке. На рисунке 10.24 показаны силы, возникающие при обтекании шара идеальной жидкостью. В областях вокруг точек  $B$  и  $C$ , где скорость потока увеличена, силы давления на шар уменьшаются; это уменьшение условно показано стрелками, направленными от поверхности шара; в областях вблизи точек  $A$  и  $D$ , где поток затормаживается, силы давления на шар увеличиваются, что условно показано стрелками, направленными к поверхности шара.

Строго говоря, точки приложения этих сил следовало бы поместить на поверхности шара. Но картина, изображенная на рисунке, является в гидродинамике общепринятой, и мы ее будем использовать и в дальнейшем.

В силу симметрии все силы направлены по радиусам.

При идеализированном обтекании без трения обтекание симметрично и сумма сил равна нулю.

Если форма тела несимметрична (например, имеется полусфера), то, как видно из рисунка 10.25, в результате перераспределения давления лобовое сопротивление шара отсутствует, но возникает сила, направленная перпендикулярно невозмущенному потоку,

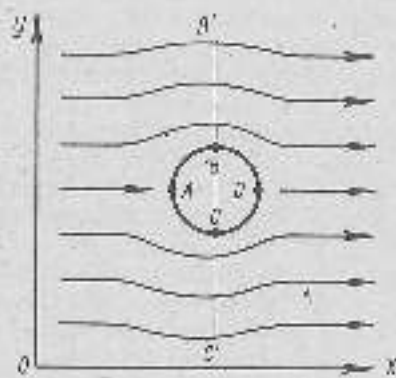


Рис. 10.23

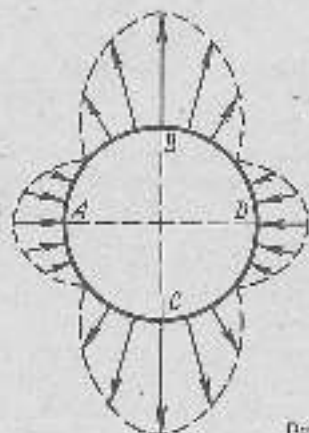


Рис. 10.24

подъемная сила. Следует подчеркнуть, что в идеальной жидкости лобовое сопротивление будет отсутствовать и при произвольной форме тела, так как без сил трения невозможен энергетический обмен между жидкостью и телом. В реальной жидкости (или газе) существование трения приводит к иным изменениям течения: несимметрия обтекания, обусловленная трением, вызывает появление лобового сопротивления и оказывает влияние на подъемную силу.

Точные расчеты коэффициентов  $C_x$  и  $C_z$  весьма сложны даже при сложном обтекании. Они еще более усложняются, когда течение теряет слоистый характер. Мы отметим лишь самые важные особенности возникающих при этом взаимодействий.

Вследствие трения скорость частиц жидкости в непосредственной близости к поверхности тела уменьшается; возникают силы, касательные к поверхности тела, направленные вдоль потока, т. е. создающие лобовое сопротивление.

Кроме того, нарушается симметрия обтекания, что приводит к перераспределению сил избыточного давления. Пока числа Рейнольдса невелики (в частности, при малых скоростях), искажение линий тока не приводит к их разрыву, поток остается слоистым.

Для шара в этих условиях картина обтекания показана на рисунке 10.26; соответствующее распределение сил избыточного давления изображено на рисунке 10.27.

Существенную роль играет следующий фактор: заметные возмущения течения происходят обычно в слое жидкости, прилегающем к поверхности движущегося тела, причем толщина этого «пограничного» слоя равна:

$$\delta = \frac{l}{\sqrt{Re}}$$

где  $l$  — продольный размер тела. При больших числах Рейнольдса этот слой тонок.

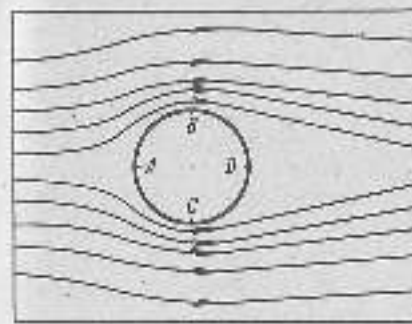


Рис. 10.26

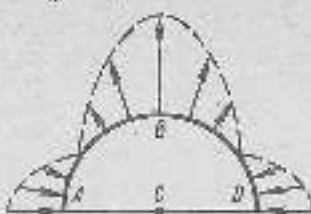


Рис. 10.25

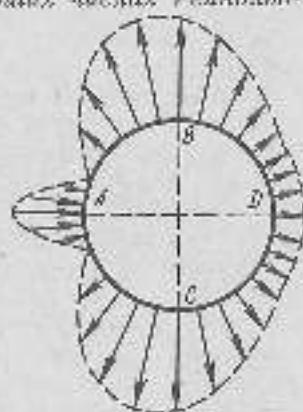


Рис. 10.27

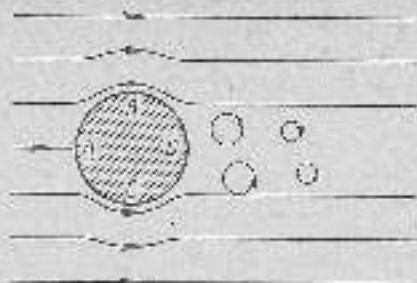


Рис. 10.28

Пусть шар радиусом  $R = 0,1$  м движется в воде ( $\eta = 10^{-2}$  Па·с,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>) со скоростью  $v = 10^{-2}$  м/с. Получаем:

$$Re = 100, \quad b = 10^{-3} \text{ м}, \quad \delta/R = 0,1.$$

При движении того же шара в воздухе ( $\eta = 2 \cdot 10^{-4}$  Па·с,  $\rho = 1,3$  кг/м<sup>3</sup>) со скоростью  $v = 30$  м/с получаются:

$$Re = 2 \cdot 10^3, \quad b = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \delta/R = 7 \cdot 10^{-2}.$$

Почти вся практическая аэродинамика имеет дело именно с такими случаями малой толщины слоя. За его пределами влияние вязкости почти не сказывается, а изменение характера течения можно описывать, пользуясь уравнением Бернулли (без учета вязкости).

Слой вязкости тормозит сдвиг жидкости, непосредственно прилегающую к поверхности тела (пограничный слой). Если это торможение значительно, то около сечения  $BC$  может образоваться отрыв линии тока, расположенный за пограничным слоем, от этого слоя, причем линии тока начнут загибаться, проникая в область, прилегающую к точке  $B$ ; здесь начинают образовываться вихри, среднее значение давления понижается (рис. 10.28). Так как вихри уносят импульс и энергию, то лобовое сопротивление будет возрастать. Кроме того, вихри обладают моментом импульса. Так как невозмущенный поток их не обладал, то вихри должны иметь разные знаки, причем их суммарный момент импульса равен нулю.

Образование вихрей существенно зависит от размеров и формы тела. Если имеются резкие изменения направления граничных линий тела, например если обтекается тонкая пластина (рис. 10.29), то условия для отрыва вихрей будут благоприятны. Вихри будут срываться с обоих краев одновременно часто, имея моменты импульса противоположных знаков, так что полный момент импульса окажется равным нулю. Позади тела вихри образуют так называемый «след», протяженность которого может значительно превышать длину тела. В пределах этого следа жидкость движется турбулентно. Лобовое сопротивление при этом, конечно, увеличивается, так как вихри уносят кинетическую энергию.

Конечно, условия обтекания и вихреобразования существенно зависят от формы тела. Поэтому лобовое сопротивление тел одинако-

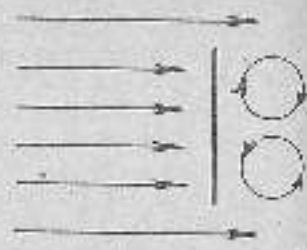


Рис. 10.29

вого сечения, но разной формы сильно отличаются друг от друга (см. рис. 10.30, где около каждого тела указан его коэффициент  $C_x$ . При этом предполагается, что поток дубегаея на тело в направлении стрелки).

Если симметрия набегающаго потока отсутствует, то может случиться, что условия образования вихрей одного знака облетаются и число их относительно возрастает. Тогда угловой момент механического импульса будет отличен от нуля. По закону сохранения момента импульса должен выполняться. Поэтому в таком случае должны возникнуть (и действительно возникают) вихри противоположного знака вокруг самого тела. Это приводит к доминирующему перераспределению давления вокруг тела.

Впервые на это важное обстоятельство указал и детально его изучил Н. Е. Жуковский (1847—1921).

Обратимся сначала к опыту, где такой эффект создается искусственно. Пусть легкий бумажный цилиндр скатывается с наклонной плоскости (рис. 10.31). Благодаря трению он захватывает прилегающие слои воздуха и сообщает им момент импульса — воздух вращается вместе с цилиндром. Поэтому, когда цилиндр покидает наклонную плоскость и начинает свободно падать, скорость обтекания с одной стороны цилиндра (для рис. 10.31 справа) оказывается меньше, чем с другой; в результате возникает поперечная (относительно потока воздуха) аэродинамическая сила, направленная влево и складывающаяся с силой тяжести, действующей на цилиндр.

Вследствие этого цилиндр, падая, описывает траекторию 1, более крутую, чем обычная траектория 2 (последнюю можно получить, скатывая тяжелый цилиндр, например деревянный), для которого аэродинамическая сила мала по сравнению с силой тяжести).

Тот же эффект позволяет поддерживать в струе воды или воздуха легкий шарик (например, для настольного тенниса), если удастся сообщить ему вращение в нужном направлении (рис. 10.32).

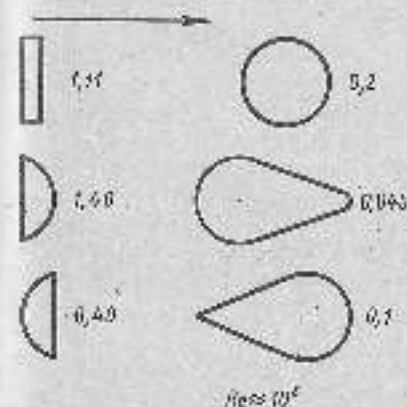


Рис. 10.30

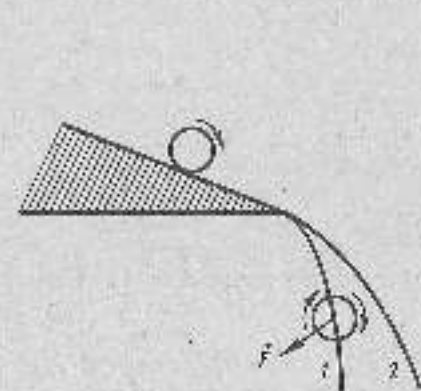


Рис. 10.31

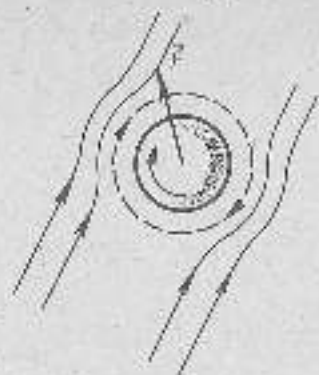


Рис. 10.32

Этот эффект, называемый *эффектом Магнуса*, пытались использовать в крупномасштабных устройствах, но практического применения он пока не получил.

У Жуковского возникла следующая идея: если выбором подходящей формы тела обеспечить вокруг него вихрь одного определенного знака, уносимых потоком, то вокруг тела должен образоваться устойчивый вихрь противоположного знака. Это поясняет рисунок 10.33.

При такой форме крыла самолета, когда от него отрывается вихрь воздуха, для которого характерно вращение против часовой стрелки, вокруг крыла из-за необходимости сохранения момента механического импульса возникает вихрь противоположного знака. Над крылом эта циркуляция воздуха окажется сонаправленной со скоростью обтекающего крыло воздуха, а под крылом — направленной в противоположную сторону. Тогда результирующая скорость потока над крылом будет больше, чем под крылом. Эта разность скоростей тем самым увеличивает давление на крыло снизу и уменьшает сверху добавочно к разности давлений, создаваемых при такой форме крыла, когда его асимметричный профиль приводит к большей скорости потока над ним за счет меньшего размера нижней части крыла. Тогда давление под телом окажется еще больше, чем над ним, и появится *дополнительная аэродинамическая сила, имеющая достаточно большую подъемную составляющую*.

Жуковским был разработан специальный профиль самолетного крыла, обеспечивающий подъемную силу, значительно превосходящую ту силу, какая создается без образования вихрей.

По Жуковскому, подъемная сила, получаемая при образовании вихря, пропорциональна скорости невозмущенного потока  $v_0$  и циркуляции скорости  $\Gamma$ , определяемой следующим образом:

$$\Gamma = \oint \vec{v}_0 \cdot d\vec{l} \sim \lambda v_0 \alpha \quad (10.22)$$

(здесь  $\lambda$  — длина хорды сечения крыла;  $\alpha$  — угол атаки, т. е. угол между касательной к профилю и направлением скорости  $\vec{v}_0$ ). Интеграл берется по контуру вихря. К сожалению, увеличение подъемной силы сопровождается и увеличением лобового сопротив-

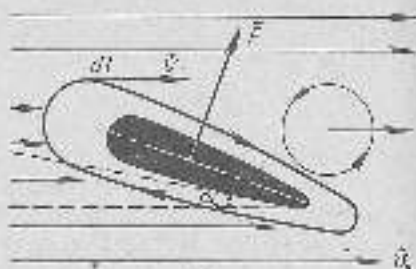


Рис. 10.33

ления. Оба эти силы пропорциональны квадрату скорости; следовательно, мощность, необходимая для полета в этих условиях, растет как третья степень скорости. Увеличение необходимой мощности влечет за собой увеличение веса двигателя, так что получить большую полезную нагрузку при больших скоростях полета очень трудно, но возможно.

Кроме того, так как вихреобразование начинается лишь при достаточно большой скорости, то самолет должен иметь ее при взлете и при посадке; поэтому длина взлетной полосы получается значительной, что требует больших затрат.

Практически во всех современных самолетах, летающих со скоростью, не превышающей скорости звука (около 1200 км/с), используется идея Жуковского, которую В. И. Ленин назвал «отцом русской авиации».

Вертолеты, т. е. аппараты с дополнительным горизонтальным винтом, могут взлетать и садиться при практически нулевой горизонтальной скорости, могут «висеть» в воздухе над определенной точкой земной поверхности. Но при горизонтальном полете их скорость невелика, так что вертолеты не могут заменить обычных самолетов, но лишь успешно дополняют их.

При горизонтальном полете самолета с постоянной скоростью динамика весьма несложна: сила тяги винта или турбины, возникающая при отбрасывании ими воздуха, уравновешивает силу лобового сопротивления, подъемная сила уравновешивает силу тяжести, действующую на самолет.

Изменяя ориентацию рулей и закрылков (подвижных участков на краях крыльев), летчик может изменять в полете соотношение действующих сил и регулировать режим полета.

Самолеты летают, «сцепившись» на воздух. Ракеты, где движение возникает за счет эффекта отдачи, не нуждаются в воздухе как опоре, а потому могут летать на очень больших высотах и даже в космосе. Аэродинамика при больших (сверхзвуковых) скоростях существенно отличается от рассмотренных здесь процессов. Для ее понижения необходимо знание термодинамики. Поэтому особенности движения со сверхзвуковой скоростью будут рассмотрены в молекулярной физике.

## ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ

## II.1. Взаимодействие тел. Вещество и поле

Всемирное тяготение (гравитация), как уже отмечалось в § 2.4, является одним из фундаментальных взаимодействий. Частные проявления этого взаимодействия многократно обсуждались в предыдущих главах. Здесь мы его изучим подробнее.

Для тяготения характерно взаимодействие тел, удаленных друг от друга. Например, Земля притягивается к Солнцу и в свою очередь притягивает его к себе. Как же передается сила тяготения?

Ньютон, установивший количественную характеристику тяготения, но не знавший его причины, именно при обсуждении этого вопроса написал замечательные слова: «Гидотес я не измышлю», подчеркивая этим нежелание делать высказывания, не опирающиеся на факты или на идеи, уже подтвержденные фактами.

Но он высказал и другую глубокую мысль: «Предполагать, что тело может действовать на другое на любом расстоянии в пустом пространстве, без посредства чего-либо передавая действие и силу,— это, по моему, такой абсурд, который немислим ни для кого, ужасного достаточно разбираться в философских предметах».

В настоящее время в физике считается, что взаимодействие между частицами вещества передается при помощи поля — особой формы материи, отличной от вещества и существующей наряду и одновременно с ним в пространстве, окружающем вещество. В конце курса физики мы увидим, что при определенных условиях поле и вещество могут испытывать взаимные преобразования.

Хотя часто говорят, что тело (вещество) «создает» поле тяготения (или электрический заряд «создает» электромагнитное поле), но этот способ выражения недостаточно точен: поле существует вместе с веществом. Более того, в электродинамике мы узнаем, что электромагнитное поле, возникающее при изменении электромагнитного состояния вещества, может затем существовать совершенно самостоятельно.

Сейчас установилась точка зрения, что все взаимодействия между телами в природе осуществляются благодаря полям. Именно посредством соответствующих полей осуществляется гравитационное притяжение всех тел, притяжение или отталкивание электрических зарядов, взаимодействие токов и т. д. Взаимодействие в *меняющихся во времени электромагнитном поле* успешно описывают, вводя понятие о «частицах» поля — фотонах, имеющих массу покоя, равную нулю; эти фотоны отталкиваются от частиц вещества. Но фотоны обладают импульсом и энергией и могут взаимодействовать с веществом.

Теперь пытаются связать взаимодействие вещества и *меняющегося во времени поля тяготения с особыми «частицами»* — гравитонами. Однако обнаружить гравитоны на опыте пока не удается. Это объясняется, по-видимому, недостаточной чувствительностью существующих приборов. Повышение чувствительности представляет громадные экспериментальные трудности, преодолеваемые очень медленно.

Нес так же и достаточно ясных представлений о взаимодействиях в постоянных (не меняющихся во времени) полях различной природы. Несмотря на существенное развитие наших представлений о природе гравитации (об этом будет еще говориться в конце главы), вопрос о способе передачи тяготения сейчас является в известной степени открытым. Поэтому мы сначала (§ 11.2 и 11.3) рассмотрим теорию тяготения Ньютона, сформулированную на языке сил тяготения, действующих между частицами вещества; при таком подходе, представляющем предельный случай полевого рассмотрения, скорость распространения взаимодействия считается бесконечно большой (по сравнению со скоростями взаимодействующих тел); роль промежуточной среды между ними не учитывается; допускается, что тела взаимодействуют на расстоянии (теория дальнего действия, см. § 2.3). Конечно, мы будем применять эту теорию лишь в тех пределах, где ее выводы не противоречат опыту. После этого (§ 11.4—11.6) будут развиты представления о поле тяготения и его основных свойствах.

II.2. Законы Кеплера.  
Закон всемирного тяготения

С давних пор люди задумывались над вопросом о строении окружающего мира. Как уже отмечалось, К. Птолемей одним из первых создал более или менее законченную картину Вселенной. Он считал Землю центром мироздания; все небесные тела двигались вокруг Земли по окружностям. Когда выяснилось, что небесные тела движутся более сложным образом, было сделано предположение, что они участвуют в нескольких круговых движениях.

По мере уточнения астрономических наблюдений устанавливались все большие отклонения от теории Птолемея<sup>1</sup>. Но только в XVI в. Н. Кеплерик показал, что описание движения небесных тел упрощается, если систему координат связать с центром Солнца. Еще через полвека И. Кеплер (1571—1630), обрабатывая очень точные наблюдения Т. Браге (1546—1601), а также свои собственные, нашел три количественных закона движения планет:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

<sup>1</sup> В настоящее время мы знаем, что философия Птолемея о Земле — центре мироздания — была совершенно ошибочна. Качественное же описание движения небесных тел в системе координат, связанной с Солнцем, вполне доступно, и мы до сих пор широко пользуемся на практике.

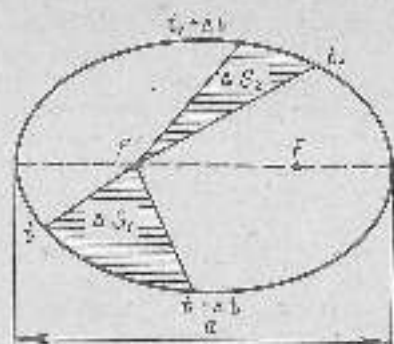


Рис. 11.1

2. Радиус-вектор, связанный с данной точкой, описывает в равные промежутки времени  $\Delta t$  равные площади  $\Delta S$  (рис. 11.1).

3. Кубы больших полуосей эллипсов пропорциональны квадратам времени обращения планет.

В 1687 г. Ньютон опубликовал закон всемирного тяготения, обобщивший физический смысл законов Кеплера и обобщающий их. Мы проследим за ходом мысли Ньютона, упростив математическую сторону дела. Вместо эллиптического

движения рассмотрим движение по круговым орбитам, что вполне допустимо, так как эллиптичность большинства планетных орбит очень незначительна. При этом формулировка законов Кеплера упрощается: Солнце окажется в центре круговой траектории. Смысл второго закона Кеплера сведется к утверждению постоянства угловой скорости обращения планеты, третий закон даст:

$$R^3 = C_2 T^2$$

где  $R$  — радиус орбиты,  $T$  — период обращения планеты,  $C_2$  — постоянная (для всех планет Солнечной системы) величина.

Ньютон при определении центростремительного ускорения планет применяет второй и третий законы Кеплера:

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{C_2}{R^2}$$

В это время уже было изучено движение спутников Юпитера, открытых Галилеем. Для них Ньютон получает:

$$a_c = \frac{4\pi^2}{R_1^2} C_{11} = \frac{C_{11}}{R_1^2}$$

где  $C_{11}$  — уже другая постоянная, меньшая, чем  $C_2$ . Наконец, для движения Луны вокруг Земли получается:

$$a_c = \frac{4\pi^2}{R_2^2} C_3 = \frac{C_3}{R_2^2}$$

где  $C_3$  — еще одна постоянная, меньшая, чем две первые.

Ньютон делает гипотезу, что каждая из постоянных зависит только от массы притягивающего тела:

$$C_2 = GM_s, \quad C_{11} = GM_J, \quad C_3 = GM_E,$$

где  $G$  — общий для всех случаев коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц, а  $M_s$ ,  $M_J$ ,  $M_E$  — соответственно массы Солнца, Юпитера, Земли. Постоянная  $G$  называется *постоянной тяготения* (или *гравитационной постоянной*) и является одной из фундаментальных физических постоянных.

Применяя теперь свой скорый закон, Ньютон приходит, что во всех случаях движение определяется центральной силой (направленной всегда к притягивающему телу):

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

где  $M$  и  $m$  — соответственно масса притягивающего и притягиваемого тела,  $R$  — расстояние между центрами тяжести тел, принимаемых за точки (это допустимо при их взаимном относительном удалении).

Если условиться, что радиус-вектор направлен из центра притягивающего тела, то закон всемирного тяготения Ньютона принимает вид:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{R^2} \vec{R} \quad (11.1)$$

Ньютон распространял закон (11.1) на все тела Вселенной. Он показал (в § 11.4 приводятся современные доказательства), что однородный шар создает во внешнем пространстве такую же силу, как материальная точка с массой, равной массе шара, расположенная в центре последнего<sup>1</sup>. Считая Землю однородным шаром, из условия ускорения свободного падения  $g$  у поверхности Земли с ускорением Луны, известным из астрономических наблюдений. Так как  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ,  $a_L = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$ , то получается:

$$\frac{g}{a_L} = 3600 = \left(\frac{R_L}{R_E}\right)^2$$

как и должно быть, так как расстояние от Земли до Луны  $R_L$  составляет 60 земных радиусов  $R_E$ .

Когда Ньютон открыл закон тяготения, расстояние от Земли до Луны было известно не очень точно. Поэтому результаты расчета, выполненного приведенным выше способом, были для него неубедительны. Ньютон задержал публикацию своего закона почти на два десятилетия. И лишь после того, как были получены более точные астрономические данные о значении  $R_L$  и равенство выполнялось с большей точностью. Ньютон обнаружил свое замечательное открытие — такая научная осторожность была характерна для этого величайшего ученого.

Следует также отметить, что при своих расчетах Ньютон не знал (и не знал и не узнал) ни одного численного значения масс небесных тел, и также постоянной тяготения.

В приведенном выше рассуждении не учитывались гравитационные взаимодействия планет. Они относительно малы, так как масса Солнца велика по сравнению с массой любой планеты (она в 750 раз больше суммарной массе всех планет); поэтому искажения траектории планет притяжением соседних планет незначительны и можно было с ними не считаться.

<sup>1</sup> Это же верно для шара, состоящего из элементов шаровых слоев разной плотности.



### 11.3. Постоянная тяготения.

#### Примеры применения закона всемирного тяготения

В формулу (11.1) входит коэффициент пропорциональности  $G$ . Так как единицы силы, массы и расстояния уже установлены, то нельзя произвольно располагаться этим коэффициентом — он должен быть определен из опыта. Это удалось сделать Г. Кавендишу (1731—1810) в 1798 г. при помощи крутильных весов, названных Кулоном в 1791 г. Эти весы состояли из небольшой гантели (стержень с небольшими шариками массой  $m$  на концах), подвешенной за середину на нити упругой и тонкой нити, заметки закручивавшейся уже под действием весьма малых сил. След нити, расположенной перпендикулярно чертежу, обозначен на рисунке 11.2 буквой  $O$ . К гантели одновременно приближали два больших свинцовых шара (их масса  $M$  достигала 150 кг); от вращения шаров составляла продолжение нити подвеса. Под действием силы тяготения гантель поворачивалась, нить поднималась и закручивалась. Измеряя угол закручивания, можно было рассчитать вращающий момент, испытываемый гантелью, и силу взаимодействия между малыми и большими шарами. Зная массы взаимодействующих шаров и расстояние между их центрами, можно было вычислить *постоянную тяготения*  $G$ . По современным уточненным данным,

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}. \quad (11.2)$$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли равно  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ , поэтому, зная  $G$  и радиус Земли и считая Землю однородным шаром, можно найти ее массу. Получается  $M_{\text{З}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ . Отсюда средняя плотность Земли  $\rho = 5500 \text{ кг/м}^3$ ; это значение более чем вдвое превосходит среднюю плотность поверхностных слоев Земли, что позволяет предполагать наличие внутри Земли явного ядра.

По известному центростремительному ускорению Земли определяют массу Солнца:

$$M_{\text{С}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 0,3 \cdot 10^6 M_{\text{З}}.$$

Зная ускорения спутников планет, можно найти массы последних. Масса планет, не имеющих спутников, определяется по данным о возмущениях или траекториях других планет.

Строго говоря, Солнце и планеты обращаются вокруг общего центра масс. Но так как масса Солнца много больше массы любой планеты, то центр масс системы лежит почти в центре масс Солнца, поэтому при наших рассуждениях мы и хотя бы считая Солнце неподвижным. Более того, изучая возмущения движения наиболее удалившей из известных в то время планет — Урана, Адамс и Леверье независимо друг от друга и практически одновременно (в 1846 г.) доказали, что эти возмущения могут быть объяснены, если их притягивает влияние еще более далекой планеты; положение последней на небесном своде было ими предсказано на основе

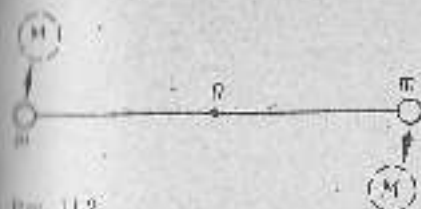


Рис. 11.2

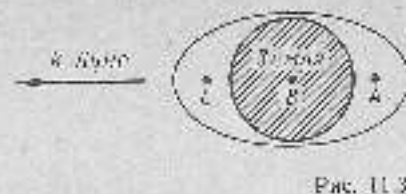


Рис. 11.3

или закона всемирного тяготения. Астрономы, действительно, обнаружили новую планету в указанном месте; она была названа Нептуном. В 1930 г. таким же образом была предсказана и обнаружена Плутон — еще более далекая планета Солнечной системы.

Решая общую задачу движения под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, Ньютон показал, что возможны не только круговые и эллиптические, но и гиперболические (они наблюдаются у многих комет) и параболические траектории.

В настоящее время справедливость закона тяготения проверена вплоть до самых больших доступных астрономам расстояний. Замечательно, что сила тяготения не зависит от промежуточной среды (от действия силы тяготения нельзя защититься) и от природы тяготеющих тел. Опытным путем доказано, что тяготению испытывают незаряженные элементарные частицы (опыты проводились с пучком нейтронов) и частицы света — фотоны. Обнаружить на опыте тяготение заряженных частиц трудно, так как другие взаимодействия у них значительно сильнее, чем тяготение. Однако нет сомнений, что закон тяготения распространяется и на заряженные элементарные частицы.

Действием силы тяготения со стороны Луны Ньютон объяснил возникновение приливов и отливов и казавшееся в то время совершенно непонятным явление их дважды в сутки (а не один раз).

Допустим для простоты, что Земля покрыта равномерным слоем воды (рис. 11.3). Ускорение, сообщаемое Луной, в точках А, В, С различно. Поэтому твердый земной шар с центром в точке В получит некоторое среднее ускорение; слой воды вблизи точки С — несколько большее, в слое воды вблизи точки А — несколько меньшее. Слой воды вблизи точки С будет несколько опережать земной шар, вблизи же точки А — отставать от него. Поэтому на линии, соединяющей центры Земли и Луны, образуются два водных выступа (приливы), движущиеся вокруг центра Земли по мере ее вращения вокруг собственной оси и обращения Луны вокруг Земли (происходящего с гораздо меньшей угловой скоростью). В то же время на концах диаметра, перпендикулярного линии АС, уровень воды понижается (отливы). Очевидно, в каждом элементе вращающегося слоя приливы должны происходить дважды в сутки (при перемене линии АС). Соответственно два раза в сутки должны происходить и отливы. Так как Земля не вся покрыта водой, существуют силы трения, силы Кориолиса и тяготения со стороны

Солнца, то истинная картина приливов и отливов оказывается гораздо сложнее. В частности, утверждение, что наибольшие приливы будут наблюдаться вдоль линии АС, оказывается не правильным. Но ньютонов принцип объяснения приливов остается в силе.

#### 11.4. Поле тяготения. Напряженность поля. Теорема Остроградского — Гаусса

До сих пор мы рассматривали тяготения в духе идей Ньютона: между телами действуют силы тяготения, зависящие в каждый момент времени от расстояния между этими телами в этот момент.

Совершенно не ставился вопрос: если одно из тел переместится, то мгновенно ли это скажется на силе, испытываемой другим телами? Неявно предполагалось, что можно не считаться со временем передачи взаимодействия. Это означало, что скорость движения взаимодействующих тел исчезающе мала по сравнению с (не известной!) скоростью передачи взаимодействия.

Так думал и поступал Ньютон в своих превосходно оправданных расчетах. Позже его последователи стали считать, что взаимодействие передается мгновенно. Эта точка зрения, просуществовавшая в физике почти 200 лет, получила название теории дальнего действия.

В § 11.1 уже указывалось, что сам Ньютон стоял на совершенно иной точке зрения. Он считал, что в среде, заполняющей пространство между взаимодействующими телами, что-то происходит. Но в его время не было фактов, которые позволили бы понять роль промежуточной среды, где взаимодействие передается от точки к точке (теория близкодействия).

Дальнейшее развитие физики показало, что прав был Ньютон: любое взаимодействие передается с конечной скоростью, не превышающей скорости света в вакууме (§ 4.1). По-видимому, тяготение передается со скоростью, равной (или близкой) к скорости света. В статических полях, где взаимодействующие тела неподвижны, скорость передачи взаимодействия роли не играет.

В трех следующих параграфах теория тяготения рассматривается с этой более современной точки зрения. При этом вводится представление о совершенно новом физическом объекте — поле тяготения (гравитационном поле).

По современным представлениям, вокруг любого тела существует поле тяготения — особая форма материи. Оно существует независимо от присутствия других тел, проявляя себя в силовом действии на эти тела. Это утверждение базируется на неоднократно наблюдавшемся в динамике суперпозиции: гравитационные поля нескольких материальных тел обладают тем свойством, что их взаимодействие с любым иным телом определяется геометрической суммой сил, создаваемых каждым полем. Вводимые нами характеристики поля определены в каждой точке, т. е. распределены в пространстве непрерывно.

Если в произвольную точку поля поместить небольшое «пробное тело» — материальную точку массой  $m$  и измерить силу  $\vec{F}$ , испытываемую этим «пробным телом», то рассматриваемую точку поля можно охарактеризовать векторной величиной — напряженностью поля  $\vec{G}$ , определяемой уравнением

$$\vec{F} = m \vec{G}. \quad (11.3)$$

Следовательно, напряженность характеризует силу, испытываемую в данной точке поля единичной массой. Таким образом, ускорение  $\vec{g}$  является напряженностью поля земного тяготения.

Напряженность поля, связанного с точечной массой  $M$ , на расстоянии  $\vec{R}$  от нее равна:

$$\vec{G} = -G \frac{M}{R^2} \vec{R}. \quad (11.4)$$

В поле, связанном с телом данной массы  $M$ , напряженность поля тяготения зависит только от координат рассматриваемой точки поля. Поэтому напряженность называют «функцией точки». Размерность напряженности равна:

$$[G] = [L T^{-2} M^{-1}].$$

В любом поле можно провести линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором напряженности в данной точке; такая линия называется *линией напряженности*. По определению направление линий напряженности считается совпадающим с направлением вектора напряженности. Например, линии напряженности поля тяготения, связанного с материальной точкой, начинаются в бесконечности и кончатся в этой точке.

Если в какую-либо точку поля поместить пробное тело, не имеющее начальной скорости, то оно придет в движение вдоль линий напряженности  $\vec{G}$  (капли таящей ледяной сосульки падают вертикально).

Если же тело имело начальную скорость, не совпадающую по направлению с  $\vec{G}$ , то его движение будет более сложным (струя воды из трубы, расположенной наклонно, образует параболу).

Условимся проводить через каждый элемент поверхности, нормальной к вектору напряженности, число линий, пропорциональное значению последней. Тогда получится удобный графический способ представления поля: оно тем сильнее, чем гуще располагаются линии напряженности.

Очевидно, что если силы подчиняются принципу суперпозиции, то это относится и к напряженностям: суммарная напряженность в данной точке поля находится векторным суммированием напряженностей:

$$\vec{G} = \sum_i \vec{G}_i.$$

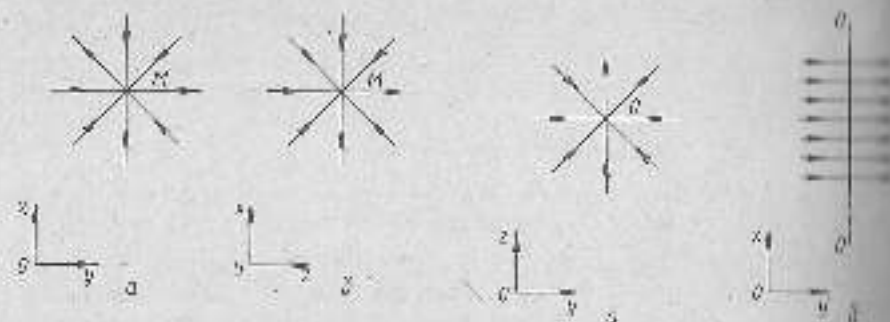


Рис. 11.4

В гравитационном поле, связанном с единичной материальной точкой массой  $M$ , все векторы напряженности направлены в эту точку. Такие поля называются полями центральных сил. Так как модуль напряженности в данном случае зависит только от расстояния между точкой  $M$  и пробным телом, то это поле обладает шаровой симметрией, а в каждом сечении, проходящем через точку  $M$ , поле имеет круговую симметрию (рис. 11.4, а, б).

Если поле связано с несколькими (или многими) материальными точками, то шаровой симметрии уже не будет. Так, поле, связанное с длинным бесконечно тонким стержнем, расположенным вдоль оси  $X$  (рис. 11.5, а, б), обладает круговой симметрией в сечениях, перпендикулярных оси стержня, но не имеет составляющей вдоль его оси. Наконец, поле, связанное с произвольно расположенными материальными точками, не обладает симметрией вообще.

Скалярная величина  $dN = \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S}$  называется *элементарным потоком вектора напряженности* через элемент площади, характеризуемый вектором  $d\vec{S}$ , нормальным к элементу ( $d\vec{S}$  представляет собой единичный вектор  $\vec{n}$ , умноженный на скаляр  $dS$ , равный площади). *Поток вектора напряженности через поверхность конечных размеров*

$$N = \int_S \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} \quad (11.3)$$

определяет число линий напряженности, пронизывающих последнюю. Размерность потока есть:

$$[N] = [L^3 T^{-2} M^{-1}]$$

Выбор положительного направления вектора  $d\vec{S}$ , вообще говоря, произволен. Если в поле выделяется элемент объема, охваченный некоторой замкнутой поверхностью, то за положительное направление  $d\vec{S}$  принимается направление внешней нормали. Поэтому поток положителен, когда линии напряженности «выходят» наружу из элемента, ограниченного рассматриваемой поверхностью.

Окружим точку массой  $M$  шаровой поверхностью  $S$  радиусом  $R$  с центром в этой точке (рис. 11.6).

Поток вектора напряженности в этом случае равен:

$$N = \int_S \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM. \quad (11.6)$$

Так как векторы  $\vec{\Gamma}$  и  $d\vec{S}$  везде противоположно направлены друг другу. Таким образом, поток вектора напряженности через шаровую поверхность, определяющий число линий напряженности, пронизывающих эту поверхность, в данном случае пропорционален массе точки  $M$ .

Построим теперь произвольную замкнутую поверхность площадью  $S_1$ , охватывающую точку  $M$  и ранее построенную шаровую поверхность площадью  $S$  (см. рис. 11.6). Из рисунка видно, что поток через обе поверхности одинаков, так как все линии, пронизывающие поверхность  $S$ , пересекут и поверхность  $S_1$ . Если какая-либо линия пересекает поверхность  $S$  несколько раз, то обязательно нечетное число раз, так что положительное и отрицательное слагаемые будут попарно уничтожаться и в сумме (11.5) каждая линия напряженности будет учтена лишь один раз.

Если внутри поверхности имеется несколько тел, то создаваемые ими *напряженности в каждой точке суммируются векторно, а потоки через элемент поверхности — скалярно*. Тела, расположенные вне замкнутой поверхности, дадут через нее нулевой поток; однако они создадут в каждой точке внутри поверхности некоторую напряженность поля. Все указанные свойства потока объединяются в одной из важнейших теорем теории поля, принадлежащей Остроградскому и Гауссу. Эта теорема гласит: если в поле, связанном со многими телами массами  $M_i$ , выделить произвольную замкнутую поверхность  $S$ , то поток вектора напряженности через эту поверхность равен:

$$N = \int_S \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \sum_i M_i, \quad (11.7)$$

где в сумму входят только массы точек, расположенных внутри поверхности.

Эта теорема позволяет легко находить напряженность поля при симметричном расположении материальных тел. Так, однородный шар создает во внешнем пространстве такое же поле, как материальная точка, помещенная в центре шара. Это легко получить, исходя из симметрии распределения поля.

Найдем напряженность поля однородного шара массой  $M$  и радиусом  $R_0$ . Выбрав внутри шара произвольную точку, отстоящую от центра на расстояние  $r$ , проведем через эту точку поверхность

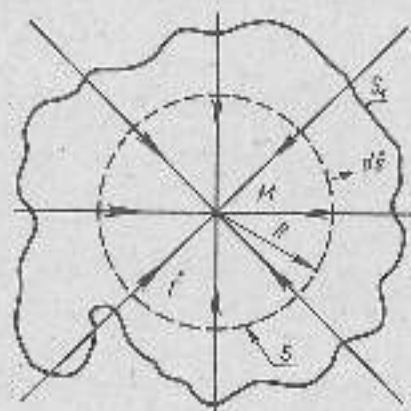


Рис. 11.6

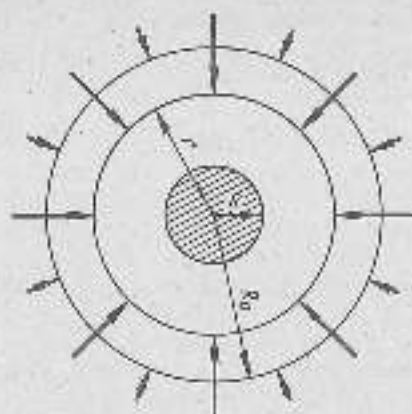


Рис. 11.7

то напряженность поля внутри однородного шара оказывается равной

$$\vec{r}_1 = -G \frac{M}{R_0^3} \vec{r}_1 \quad (11.8)$$

При  $r = R_0$  получаем, как и следовало ожидать:

$$\vec{r}_0 = -GM \frac{1}{R_0^2} \vec{R}_0$$

При  $r = R > R_0$  находим:

$$\vec{r} = -G \frac{M}{R^2} \vec{R},$$

что совпадает с (11.4).

В случае шарового слоя, имеющего радиусы  $r$  и  $R_0$  (рис. 11.7) и плотность  $\rho$  и, следовательно, массу

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho (R_0^3 - r^3),$$

для нахождения напряженности следует построить внутри слоя сферическую поверхность Остроградского — Гаусса (радиусом  $R$ ). Внутри ее сосредоточена масса

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho (R^3 - r^3).$$

В силу симметрии поток вектора напряженности через эту поверхность равен:

$$-4\pi R^2 \Gamma = 4\pi G m.$$

Поэтому напряженность внутри слоя равна:

$$\vec{r} = -\frac{G\rho}{R} \vec{R} = -\frac{4}{3} \pi \rho \frac{G}{R^2} (R^3 - r^3) \vec{R}$$

При  $R = R_0$  получаем, как и в случае шара:

$$\vec{r}_0 = -\frac{GM}{R_0^2} \vec{R}_0.$$

Снаружи слоя ( $R > R_0$ ) напряженность, как и в случае шара, равна:

$$\vec{r} = -\frac{GM}{R^2} \vec{R}.$$

Внутри шарового слоя ( $R < r$ ) нет никаких тел. Поэтому поток вектора напряженности через сферическую поверхность радиусом  $R < r$  равен:

$$N = \int \vec{r} \cdot d\vec{S} = 4\pi R^2 \Gamma = 0.$$

В силу симметрии все слагаемые под знаком интеграла имеют одинаковые знаки. Следовательно, напряженность внутри слоя равна нулю:

$$\vec{r}_{\text{вн}} = \vec{0}. \quad (11.9)$$

Зависимость напряженности  $\Gamma$  от расстояния для всех рассмотренных случаев показана на рисунке 11.8.

Если полость внутри однородного шара расположена несимметрично, то поле в ней существует. Действительно, пусть в однородном шаре имеется сферическая полость; центры шара  $O$  и полости  $O_1$  смещены на отрезок  $A$  (рис. 11.9).

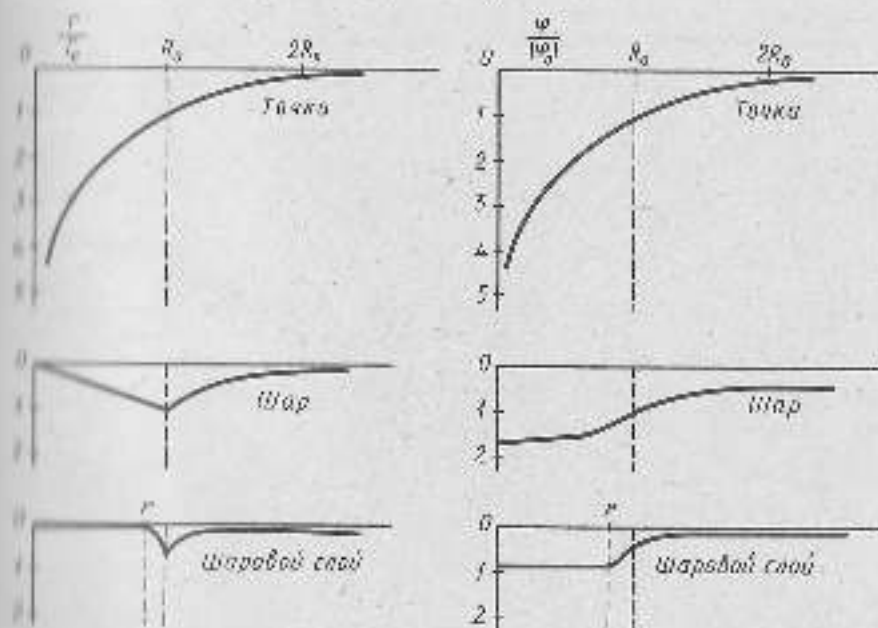


Рис. 11.8

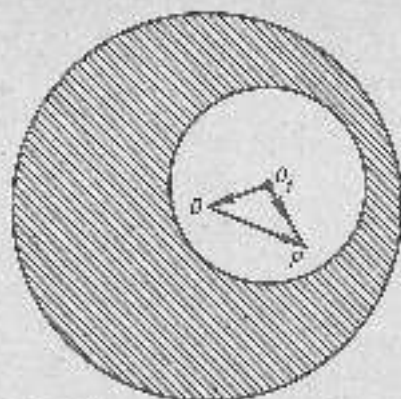


Рис. 11.9

частью шара, на поверхности которого лежит точка  $P$ ). По принципу суперпозиции получаем:

$$\vec{G} = \vec{G}_2 + \vec{G}_1 = -\frac{4}{3}\pi r (\rho_0 - \rho) \vec{G} - \frac{4}{3}\pi r \rho \vec{A},$$

где  $\vec{A} = \vec{r} - \vec{r}_0$  — вектор, направленный от центра малого шара  $O_1$  к центру большого шара  $O$ . Таким образом, поле в полости оказывается одинаковым во всех точках.

На рисунке 11.10 изображены линии поля (силошные кривые), связанные с двумя материальными точками равных масс. Очень важно уяснить, что картина поля определяет силу, испытываемую третьим (пробным) телом, помещенным в данное поле, но никак не

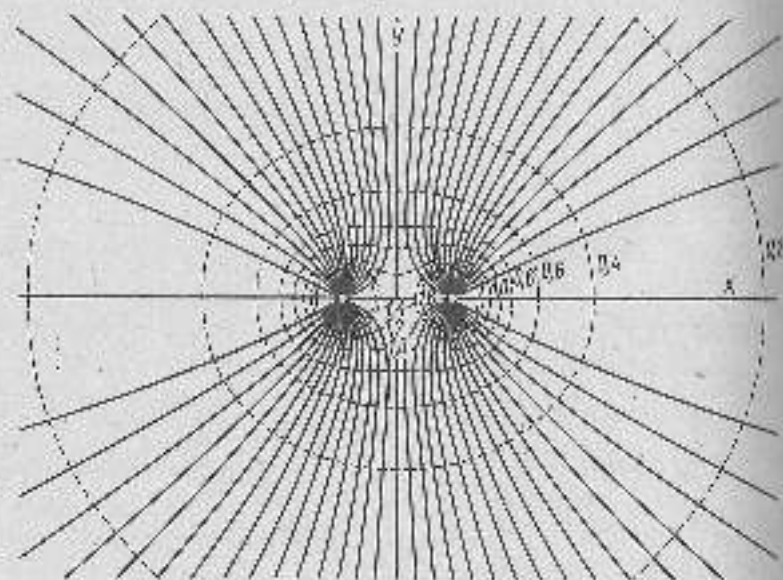


Рис. 11.10

Так как внутри полости нет тел, то поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность, построенную внутри полости, равен нулю. Но это не значит, что отсутствует и поле, так как отдельные элементарные потоки  $dN = \vec{G} \cdot d\vec{S}$  из-за отсутствия симметрии могут иметь разные знаки.

Для произвольной точки  $P$  в любом поле равно суммируем поля двух шаров: большого (радиусом  $r_0$ , плотностью  $\rho$ ) и малого (радиусом  $r$ , плотностью  $-\rho$ ) (так как внутри шара поле создается только той

частью шара, на поверхности которого лежит точка  $P$ ). По принципу суперпозиции получаем:

Значение пунктирных кривых на рисунках 11.10 и 11.11 в столбцах около них чисел будет показано в § 11.5.

Пусть массы равномерно распределены в протяженном теле, ограниченном сверху горизонтальной плоскостью, пересекющей плоскость чертежа по линии  $AA'$  (рис. 11.11). В этом случае поле во внешнем пространстве (над плоскостью  $AA'$ ) распределено, как показано на рисунке.

На расстояниях, достаточно малых по сравнению с длиной и шириной поверхности тела, напряженность поля одинакова во всех точках; эта область выделена на рисунке: подобное поле называется *однородным*.

Поле земного тяготения можно считать однородным в пределах небольшой области, примыкающей к поверхности Земли, когда можно не считаться с кривизной Земли.

Во всяком однородном поле напряженность постоянна во всех точках:

$$\vec{G} = \text{const.}$$

Гравитационная сила (11.1) обладает еще одной замечательной особенностью. Как показывает уравнение (11.4), хотя напряженность при возрастании расстояния от центральной точки поля убывает до нуля, но все же поток напряженности (11.7) остается постоянным. Это объясняется тем, что поверхность интегрирования (при использовании теоремы Остроградского — Гаусса) возрастает пропорционально квадрату расстояния, а напряженность убывает обратно пропорционально ему же.

Силы, обладающие этими свойствами (например, сила Кулона, описывающая взаимодействие между точечными электрическими зарядами), называются *дальнодействующими*.

Если центральная (не гравитационная) сила меняется по закону

$$F \sim \frac{1}{r^{\alpha}},$$

где  $\alpha > 0$ , то вследствие симметрии поток напряженности

$$N \sim \frac{1}{r^{\alpha}}$$

будет убывать с расстоянием, стремясь к нулю тем быстрее, чем больше значение  $\alpha$ . Такие силы в природе существуют (например, ядерные). Их называют *короткодействующими*.

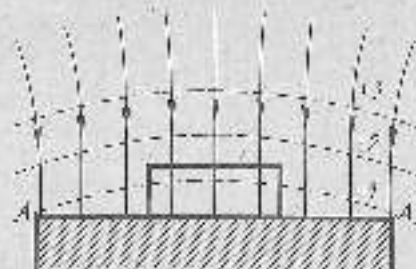


Рис. 11.11

**11.5. Работа силы тяготения. Потенциал поля тяготения. Потенциальная энергия. Связь потенциала с напряженностью**

Кроме векторной характеристики поля — его напряженности, определяющей силовое действие поля, вводится скалярная характеристика поля, связанная с работой сил поля. Эта характеристика называется *потенциалом* данной точки поля.

Рассмотрим работу сил тяготения в поле материальной точки массой  $M$  (рис. 11.12). Пусть пробное тело массой  $m$  перемещается по произвольному пути между точками 1 и 2. При этом движении, судя по форме траектории, на точку массой  $m$  действуют и какие-то иные силы. Но на основании принципа суперпозиции можно утверждать, что их действие не скажется на работе сил тяготения; эта работа равна:

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = -GMm \int \frac{dl}{R^2} \cos(\widehat{dl}, \widehat{F});$$

но

$$dl \cos(\widehat{dl}, \widehat{F}) = dR;$$

поэтому

$$A = GMm \left( -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = m(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (11.10)$$

Функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в поле материальной точки массой  $M$  зависят только от  $R_1$  и  $R_2$ :

$$\varphi = -G \frac{M}{R} + \text{const}. \quad (11.11)$$

Работа сил тяготения  $A$  оказалась *независимой от формы пути*; она полностью определяется положением начальной и конечной точек.

Ранее уже указывалось, что так бывает далеко не всегда; например, работа сил трения зависит от формы пути, так как сила трения в любой точке противодействует движению и зависит от скорости, а не от координат.

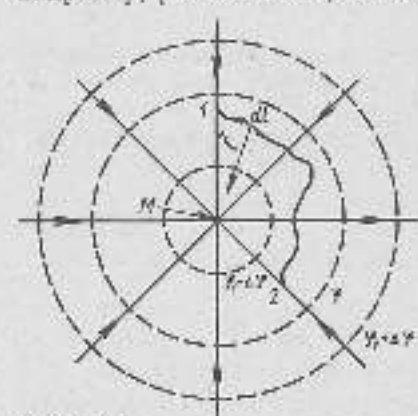


Рис. 11.12

Функцию

$$\varphi = -\frac{GM}{R} + \text{const}$$

называют *потенциальной функцией* (или просто *потенциалом*) точек поля, созданного материальной точкой массой  $M$ . Потенциал, как и напряженность, является «функцией точки», т. е. зависит лишь от координат.

Из уравнения (11.10) следует, что *работа сил поля не зависит*

от выбора постоянной в выражении (11.11). Эта постоянная не играет роли ни в каких физических приложениях потенциала, поэтому ее можно выбрать произвольно — всегда важна лишь разность потенциалов. В рассматриваемом случае разумно выбрать потенциал равным нулю на бесконечности ( $\varphi(R) \rightarrow 0$ ). Тогда выражение для потенциала точек поля упростится и примет вид:

$$\varphi = -\frac{GM}{R}, \quad [\varphi] = [L^2 T^{-2} M^{-2}]. \quad (11.12)$$

При этом потенциалы всех точек этого поля — отрицательны. Далее, из уравнения (11.10) следует, что работа сил тяготения по любой замкнутой траектории равна нулю:

$$A = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = m \oint \vec{\Gamma} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (11.13)$$

Интеграл, стоящий в уравнении (11.13), представляет собой *циркуляцию* вектора  $\vec{\Gamma}$  (см. § 10.6). Итак, циркуляция вектора напряженности поля тяготения равна нулю (независимо от формы выбранной замкнутой траектории).

В силу принципа суперпозиции уравнение (11.10) верно и для поля, созданного любой системой материальных точек массами  $M_k$ , причем под  $\varphi$  следует понимать скалярную сумму:

$$\varphi = \sum_k \varphi_k = -G \sum_k \frac{M_k}{R_k}.$$

Пользуясь (11.11), потенциал некоторой точки поля тяготения можно определить как работу, совершаемую силами поля при перемещении материальной точки единичной массы ( $m=1$ ) из этой точки в бесконечность. Следует отметить, что эта работа отрицательна, так как силы тяготения препятствуют удалению точки массой  $m$ .

Силы, подчиняющиеся условию (11.13), называются *консервативными*. Это же название присваивается системам, где действуют только консервативные силы (см. гл. 2).

К силам, не подчиняющимся условию (11.13), например силам трения, понятие потенциала неприменимо.

В поле можно построить *поверхности, содержащие точки с одинаковым потенциалом* (*экипотенциальные поверхности*). В поле, созданном материальной точкой, эти поверхности являются шаровыми поверхностями; центр поверхностей совпадает с самой точкой (см. рис. 11.12, где пересечения поверхностей равного потенциала с плоскостью чертежа показаны пунктиром).

В полости, охваченной шаровым слоем, напряженность поля равна нулю, а потенциал постояен (по всему объему полости). В самом шаровом слое, а также внутри сплошного шара поверхности равного потенциала также шаровые. На рисунке 11.13 показано сечение однородного шара плоскостью, проходящей через его центр. Следы экипотенциальных поверхностей на этой плоскости представляют собой окружности. Потенциал на поверхности шара принят равным  $-1$  Дж/кг.

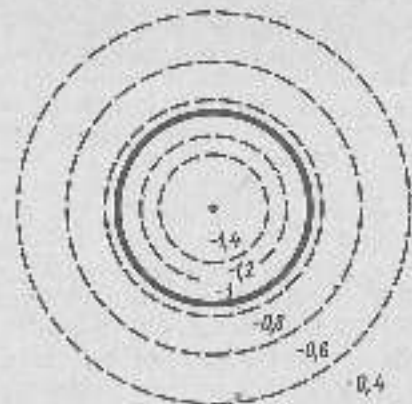


Рис. 11.13

Пунктирные кривые на рисунке 11.10 также представляют сечение плоскостью чертежа эквипотенциальных поверхностей; значения потенциалов соответствуют числам, стоящим у кривых.

В однородном поле поверхности равного потенциала — это плоскости, перпендикулярные линиям напряженности (средняя часть рис. 11.11 и 11.14). Заметим, что здесь нельзя говорить о потенциале бесконечно удаленных точек (ведь область однородного поля всегда ограничена!). Например, вблизи земной поверхности поле тяготения можно считать однородным в объеме с основанием в несколько сот квадратных метров и высотой 100–200 м.

У поверхности Луны (ее радиус в 3,7 раза меньше радиуса Земли) размеры области однородного поля соответственно уменьшаются в 3,7 раза. Чем более точны проводимые физиком измерения сил тяготения, тем меньше область поля, в которой оно может считаться однородным). В случае однородного поля за нулевой потенциал обычно принимают потенциал на поверхности тела, связанного с полем (например, на поверхности Земли). Тогда потенциалы всех точек поля вне тела положительны.

Эта условность в выборе нулевого значения потенциала и связанная с ней условность знаков, приписываемых потенциалу, не должна смущать читателя: во всех расчетах важно лишь изменение потенциала (разность потенциалов), а не его абсолютные значения; значения же, конечно, не зависят от выбора нулевых значений.

Если материальная точка массой  $m$  находится в поле, связанном с другими телами, то в точке  $A$  с потенциалом  $\varphi$  ее потенциальная энергия равняется:

$$U = m\varphi.$$

Если на бесконечности  $\varphi = 0$ , то  $U < 0$ , так как силы поля должны были совершить положительную работу при перемещении данной материальной точки из бесконечности в точку  $A$ . Конечно, при этом материальная точка приобрела кинетическую энергию.

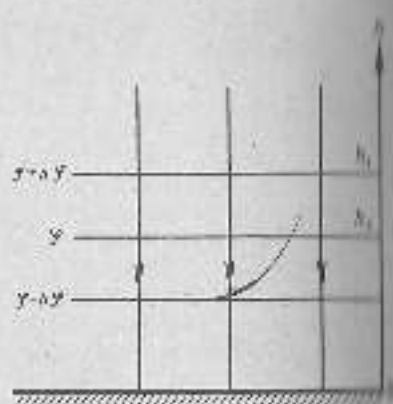


Рис. 11.14

Уравнение (11.10) можно представить в виде

$$A = W_2 - W_1 = \Delta W = m(\varphi_1 - \varphi_2) = U_1 - U_2 = \Delta U.$$

Итак, работа сил тяготения при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2 равна приросту кинетической энергии этой точки или убыли ее потенциальной энергии:

$$W_2 - W_1 = U_1 - U_2.$$

Так что полная механическая энергия точки

$$W_1 + U_1 = U_2 + W_2 = \text{const.} \quad (11.14)$$

Энергия в поле консервативных сил не меняется. С частным случаем этого закона мы встречались в динамике.

В однородном поле тяготения (см. рис. 11.14) значения потенциала тем больше, чем дальше расположена точка поля от выбранной в этом случае поверхности нулевого потенциала, причем потенциал пропорционален этому расстоянию, так что работа сил поля при перемещении точки массой  $m$  на расстояние  $h_2 - h_1$ :

$$A = m(\varphi_1 - \varphi_2) = m\Delta\varphi = m\Gamma(h_1 - h_2) = -\Delta U \quad (11.15)$$

равна, как и раньше, убыли потенциальной энергии точки.

Так как вектор силы, действующей на тело, помещенное в поле тяготения, направлен по касательной к линии напряженности, а работа сил тяготения при перемещении по эквипотенциальной поверхности равна нулю, то пересечения линий напряженности и поверхностей равного потенциала происходят всегда под прямым углом (см. рис. 11.10, 11.11, 11.12, 11.14).

Если условиться строить поверхности равного потенциала со значениями, отличающимися друг от друга на одну и ту же величину  $\Delta\varphi$ , то семейство эквипотенциальных поверхностей будет наглядно характеризовать свойства поля: чем ближе друг к другу поверхности, тем больше модуль напряженности поля. При этом вектор напряженности направлен по нормали в сторону убывания потенциала.

Из уравнения (11.11) следует, что потенциал и напряженность связаны между собой. Действительно, для поля, созданного материальной точкой массой  $M$ ,

$$\varphi = -G \frac{M}{R}; \quad \vec{\Gamma} = -\frac{d\varphi}{dR} \vec{R} = -G \frac{M}{R^2} \vec{R}. \quad (11.16)$$

В этом случае вдоль радиуса происходит самое быстрое изменение потенциала с расстоянием; в то же время радиус является нормалью к поверхности равного потенциала. Напомним, что начало радиус-вектора  $\vec{R}$  совпадает с началом координат, т. е. с точкой массой  $M$ .

В векторном анализе вводится векторная функция — градиент потенциала:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}, \quad (11.17)$$

где  $\vec{n}_0$  — единичный вектор, направленный в сторону быстрого изменения потенциала.

В прямоугольной системе координат вектор grad  $\varphi$  выражается так:

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (11.18)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы.

Выражения (11.16) можно представить в следующем виде:

$$\vec{F} = -\text{grad } \varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \vec{n}_0, \quad \varphi = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} + C. \quad (11.19)$$

Эти соотношения являются общими для всех гравитационных полей. Пользуясь ими, найдем распределение потенциала внутри однородного шара, имеющего радиус  $R_0$  и массу  $M$ . Выше было найдено, что во внешнем пространстве ( $r > R_0$ ) потенциал

$$\varphi = -\frac{GM}{r},$$

причем постоянная интегрирования принята равной нулю. На поверхности шара получается:

$$\varphi_0 = -\frac{GM}{R_0}$$

Так как  $\vec{n}_0 d\vec{r} = -d\vec{r}$ , то, пользуясь (11.19) и (11.18), находим, что внутри шара ( $r < R_0$ )

$$\varphi = -\int \frac{GM}{R_0^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{GM}{R_0} \frac{r^2}{2} + C_1.$$

Постоянная  $C_1$  уже не является произвольной. Она определяется из известного значения потенциала на поверхности шара. Так как при  $r = R_0$  должно быть:

$$\varphi = \varphi_0 \approx -\frac{GM}{R_0},$$

то получаем:

$$C_1 = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R_0},$$

и потенциал внутри шара определяется выражением

$$\varphi = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R_0} - \frac{GM}{2R_0^3} r^2.$$

Аналогично вычисляется и потенциал внутри шарового слоя. При этом в полости слоя ( $R_1 < r < R_2$ ) потенциал постоянен и его значение равно значению потенциала при  $r = R_1$ .

Распределение потенциала для всех рассмотренных случаев показано справа на рисунке 11.8, где его удобно сопоставить с распределением напряженности.

В § 7.2 мы нашли, что работа сил упругости так же, как и сил тяготения, определяется лишь начальной и конечной точками пути, позже мы узнаем, что таким же свойством обладают кулоновские силы взаимодействия между неподвижными электрическими зарядами. Поля, характеризующиеся потенциалом, называются потенциальными или безвихревыми полями в отличие от вихревых полей, где линии напряженности являются замкнутыми кривыми (примером вихревого поля служит магнитное поле вихревого тока).

Сведения, полученные при рассмотрении гравитационного поля, позволяют глубже понять сформулированный во второй главе закон сохранения и превращения механической энергии (2.28).

Рассматривая движение тела под действием гравитационных сил, мы убедились в том, что его полная механическая энергия не меняется. Сохранение механической энергии при движении тела в гравитационном поле обусловлено особым свойством этого поля — независимостью работы сил поля от формы и длины пути (или, что то же, равенством нулю циркуляции вектора напряженности по любому контуру). При этом предполагается отсутствие сил трения и потерь энергии на их преодоление. Поэтому теперь можно уточнить закон сохранения механической энергии (2.42), дав следующую его формулировку: если в системе действуют только консервативные силы, то энергия системы является чисто механической и сохраняется во времени:

$$E = W + U = \text{const.}$$

Многие реальные механические движения сопровождаются трением. Силы трения не являются консервативными, так как их работа зависит от формы и длины пути, а также от скорости движения. Следовательно, в системе с трением механическая энергия не остается постоянной. Она при движении уменьшается; часть механической энергии переходит во внутреннюю энергию движущихся тел (они нагреваются). В этом случае закон сохранения энергии формулируется в более общей форме (2.43).

В § 2.10 закон сохранения энергии применялся к замкнутым системам, содержащим все взаимодействующие тела. Для таких систем в любой инерциальной системе отсчета центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Если одно из двух взаимодействующих тел весьма значительно превосходит по массе второе тело, то первое можно считать неподвижным, т. е. считать, что его центр масс есть в то же время и центр масс системы.

Так мы рассуждаем, например, когда рассматриваем падение предметов на Землю под действием ее притяжения, пренебрегая собственным смещением Земли из-за взаимодействия с этими телами, и в ряде других случаев (см. также § 6.2).

Так можно поступить и при изучении взаимодействия Земли со спутником. Но при строгом изучении взаимодействия Земли с Луной или Солнца с планетой следует учитывать, что оба тела движутся относительно их общего центра масс.



### 11.6. Собственная потенциальная энергия

В предыдущем параграфе рассматривалась потенциальная энергия тел, находящихся в поле тяготения, связанном с другими телами. Но любое макроскопическое тело, находясь в поле тяготения, связанном с ним самим, также обладает потенциальной энергией (ее называют *собственной энергией*  $U_s$ ). Существование этой энергии объясняется тем, что каждая частица макроскопического тела находится в поле тяготения всех других частиц, образующих это тело.

Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Образование макроскопического тела и связанного с ним поля тяготения можно истолковать так: элементарные массы, составляющие тело, поочередно доставляются из бесконечности к началу координат ( $\vec{r} = \vec{0}$ ) (где это тело образуется). Первая масса  $dm$  доставляется без совершения работы сил тяготения; вторая, двигаясь в поле тяготения первой массы, подвергается действию ее сил притяжения, совершающих положительную работу, и т. д.

Пусть эти элементарные массы (плотности  $\rho$ ) образуют шар, радиус  $r$  которого растет от нуля до  $R_0$ , а масса — от нуля до  $M$ .

Когда радиус станет равным  $r$ , то потенциал на поверхности шара примет значение

$$\varphi = -\frac{Gm}{r},$$

где

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \text{ есть масса шара.}$$

Очередная приносимая элементарная масса равна:

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr.$$

Элементарная работа сил тяготения по переносу этой массы составляет:

$$dA = -\varphi dm.$$

Полная работа, совершаемая при образовании шара, равная убыли потенциальной энергии его частиц, есть:

$$A = -U_s = \int_0^{R_0} dA = -\frac{16\pi}{3} \rho^2 G \int_0^{R_0} r^4 dr = -\frac{2}{5} G \frac{M^2}{R_0} = \frac{2}{5} M\varphi_0, \quad (11.20)$$

где  $\varphi_0$  — конечное значение потенциала на поверхности шара.

В результате рассмотренного процесса образуется шар и в окружающем его пространстве возникло поле тяготения, каждая точка которого ( $r > R_0$ ) характеризуется потенциалом

$$\varphi = -\frac{GM}{r}$$

и напряженностью

$$\vec{\Gamma} = -\frac{GM}{r^2} \vec{r}.$$

Поскольку поле материально, мы вправе полагать, что потенциальная энергия (11.20) присуща как шару ( $U_s$ ), так и полю ( $U_p$ ), причем

$$U_s + U_p = U_e.$$

Распределение энергии в пространстве в физике характеризуют ее *объемной плотностью*  $\omega$ , по определению равной

$$\omega = \frac{dU}{dV}, \quad (11.21)$$

где  $U$  — энергия, заключенная в объеме  $V$ .

В нашей задаче удобно представить  $\omega$  в виде

$$\omega = Bf(r),$$

где  $r$  — радиус-вектор, проведенный к объему  $dV$ , а  $B$  — постоянная, не зависящая от  $r$ . Вид функции  $f(r)$  пока неизвестен.

Выделим в поле ( $r > R_0$ ) шаровой слой толщиной  $dr$  (рис. 11.15). Благодаря симметрии слой изотропен, поэтому энергия, сосредоточенная во всем объеме поля, равна:

$$U_s = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 \omega dr = 4\pi B \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr. \quad (11.22)$$

Но так как в поле шара энергия пропорциональна  $\frac{1}{r}$ , то должно быть:

$$f(r) = r^{-1}.$$

Интегрируя (11.22), получаем:

$$U_s = 4\pi \frac{B}{R_0}.$$

Учитывая (11.4), выразим  $\omega(r)$  через напряженность  $\Gamma(r)$ :

$$\omega(r) = \frac{\rho}{G^2 M^2} \Gamma^2(r).$$

и используем это выражение для вычисления плотности энергии внутри шара ( $r < R_0$ ), где напряженность поля определяется выражением (11.8). Находим:

$$\omega(r) = \frac{B}{G^2 \rho^2} \frac{G^2 M^2}{r^4} r^2 = B \frac{r^2}{R_0^2}.$$

Выбрав по-прежнему шаровой слой, найдем энергию внутри шара:

$$U_p = \int_0^{R_0} 4\pi r^2 \frac{B}{R_0^2} r^2 dr = \frac{4}{5} \pi B \frac{1}{R_0}. \quad (11.23)$$

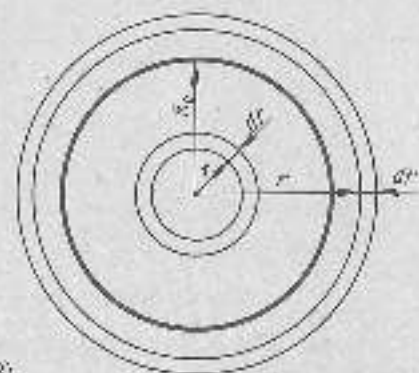


Рис. 11.15

Поэтому собственная энергия

$$U_s = U_s + U_n = 4\pi \frac{\rho}{R} + \frac{4\pi}{3} \frac{\rho}{R} = 0,6 M \rho c^2.$$

Следовательно, распределение энергии таково:

$$U_n = 0,5 M \rho c^2; U_s = 0,1 M \rho c^2.$$

Далее, из (11.23) следует, что

$$B = \frac{4\pi G \rho}{10} = \frac{1}{9} G M^2.$$

Поэтому плотность энергии

$$\omega(r) = \frac{B}{r^2} = -\frac{1}{8\pi G} \Gamma^2(r). \quad (11.24)$$

Соотношение (11.24) является общим для любых полей тяготения.

Итак, в поле шара сконцентрировано  $\frac{2}{3}$  всей собственной потенциальной энергии, причем большая часть ее сосредоточена вблизи шара. Так, 95% энергии поля тяготения Солнца ( $R_s = 7 \cdot 10^8$  м) сосредоточено в шаровом слое с наружным радиусом

$$R = 7 \cdot 10^8 \cdot 20 \text{ м} = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ м},$$

что всего в 4 раза больше радиуса орбиты Меркурия и в 360 раз меньше радиуса орбиты Плутона.

Согласно СТО (см. § 4.7) между массой покоя  $m_0$  физического тела и его энергией покоя  $E_0$  существует фундаментальная связь

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Интересно сравнить собственную потенциальную энергию шара и связанного с ним поля с энергией покоя шара:

$$\alpha = 0,6 \frac{G M \rho}{R \rho c^2} = 4,3 \cdot 10^{-10} \frac{M \rho}{R} = 1,9 \cdot 10^{-10} R \rho c^2.$$

Как видно из таблицы, обычно  $\alpha \ll 1$  и приближается к ней лишь в некоторых космических объектах.

Объект	$R$ , м	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\frac{M \rho}{R}$	$\alpha$
Нефтяное	$1,7 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{-10}$
Земля	$6,4 \cdot 10^6$	$5,5 \cdot 10^3$	$8,6 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-10}$
Солнце	$7,0 \cdot 10^8$	$1,4 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-10}$
Энергия тяги «Белый слепок»	$9 \cdot 10^7$	$2,2 \cdot 10^7$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-10}$

### 11.7. Космические скорости. Искусственные спутники

Одной из задач, рассматриваемых в классической механике, является «задача двух тел» — изучается движение двух тел (массы  $M$  и  $m$ ), взаимодействующих друг с другом по закону все-

мирного тяготения (11.1). Так как состояние движения центра масс этой системы, которая считается замкнутой, не может быть изменено действием сил тяготения (внутренних сил), то система отсчета, связанная с центром масс, является инерциальной; именно в ней и удобно решать указанную задачу. Если существует сильное неравенство  $M \gg m$ , то центр масс практически совпадает с центром масс большего тела. Поэтому система отсчета, связанная с этим телом, будет практически инерциальной. Так, при рассмотрении движения искусственного спутника систему, связанную с Землей, можно считать инерциальной и выбрать начало координат в центре Земли.

Влияние атмосферы на движение спутников здесь не учитывается.

Предсказанная К. Э. Циолковским эра космических полетов, для осуществления которой в СССР трудилась коллектива ученых под руководством академика С. П. Королёва (1906—1966) и академика М. В. Келдыша (1911—1978), наступила 4 октября 1957 г., когда был запущен первый в мире искусственный спутник Земли. Следующее крупнейшее достижение — первый облет Земли Юрием Алексеевичем Гагариным, совершенный 12 апреля 1961 г., останется навеки незабываемым в истории космонавтики. К сожалению, в рамках общего курса физики можно лишь кратко рассказать об основах космонавтики, совершенно не касаясь той громадной темы, какую она, используемая в мирных целях, уже приносит науке и народному хозяйству.

Вернемся к изучению движения спутников:

1. Если скорость спутника равна  $v$ , а расстояние от центра Земли до спутника составляет  $R_0$ , то полная энергия системы, складывающаяся из потенциальной и кинетической, равна:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m \varphi = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m M}{R_0}. \quad (11.25)$$

Пусть начальная скорость  $\vec{v}_0$  направлена от поверхности Земли вдоль радиуса; при начальных отрицательных значениях полной энергии (т. е. при  $v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R_0}}$ , где  $R_0$  — радиус Земли) спутник улетит бы от центра Земли на расстояние

$$R = R_0 \frac{1}{1 - \frac{v_0^2 R_0}{2GM}}$$

и затем упадет бы на нее, двигаясь ускоренно. На рисунке 11.16 изображена гипербола, характеризующая потенциальную энергию системы. Отрезок  $W$  представляет кинетическую энергию спутника, находящегося на расстоянии  $R$ , полная энергия  $E$  при этом отрицательна.

При положительных значениях полной энергии спутник выходит за пределы действия земного притяжения.

2. Если спутнику, находящемуся в точке  $A$  на небольшой высоте  $h$  над поверхностью Земли, сообщить незначительную ско-

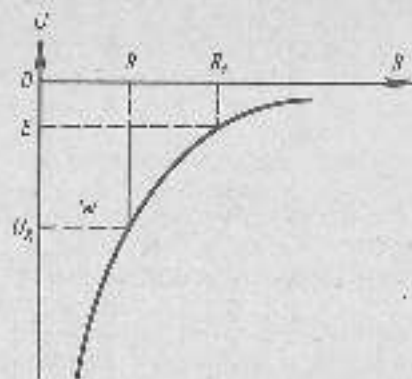


Рис. 11.16

рость  $\dot{\theta}_0$ , направленную перпендикулярно радиусу Земли, то, двигаясь по малому эллипсу (рис. 11.17), он опишет небольшую дугу эллипса и упадет на Землю. Так как малый участок эллипса почти не отличается от малого участка параболы, то (при очень малых  $h$ ), считая  $\Gamma$  постоянным и равным  $\dot{\theta}_0$ , получим результаты, найденные ранее при решении задачи 2 из § 1.5.

Когда скорость  $v_0$  такова, что сила притяжения Земли  $\vec{F} = m\dot{\theta}_0^2 \vec{r}$  как раз обеспечивает центростремительное ускорение движения спутника, т. е.

$$\frac{m\dot{\theta}_0^2}{R_0 + h} = m\dot{\theta}_0^2,$$

он будет двигаться по круговой орбите радиусом

$$R_0 + h = \frac{v_0^2}{g},$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{g(R_0 + h)}.$$

Считая  $h \ll R_0$ , находим значение скорости, называемой *первой космической скоростью*:

$$v_0 = \sqrt{gR_0} = 7,9 \text{ км/с}.$$

3. При увеличении начальной скорости можно добиться того, чтобы спутник неподвижно висел над земной поверхностью. Для этого, очевидно, нужно, чтобы его угловая скорость равнялась угловой скорости вращения Земли. Пусть спутник движется в плоскости земного экватора. Уравнение для определения необходимой скорости спутника таково:

$$G \frac{M}{(R_0 + h)^2} - \frac{4\pi^2}{T^2} (R_0 + h) = \frac{v^2}{(R_0 + h)},$$

где  $T$  — период обращения Земли вокруг своей оси.

Решение уравнения относительно  $R_0 + h$  даст:

$$R_0 + h = 42\,000 \text{ км, откуда } h = 35\,600 \text{ км.}$$

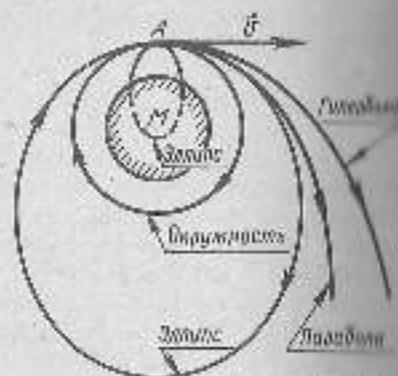


Рис. 11.17

Спутник, движущийся по круговой орбите радиусом  $R$ , находясь только под действием силы притяжения к Земле, обладает вполне определенной скоростью  $v$ , определяемой из условия

$$G \frac{M}{R^2} = \frac{v^2}{R} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Так как при этом его потенциальная энергия относительно Земли составляет:

$$U = -\frac{GMm}{R},$$

а кинетическая:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \frac{GM}{R},$$

то полная энергия спутника оказывается равной

$$E = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}G \frac{Mm}{R}. \quad (11.26)$$

Управление космическим кораблем имеет свои особенности. Так, если нужно перевести спутник с орбиты радиусом  $R$  на орбиту меньшего радиуса  $R_2$ , то нельзя просто увеличить тангенциальную составляющую скорости (двигателями, имеющимися на спутнике). Действительно, при увеличении скорости сила тяготения не сможет обеспечить необходимого центростремительного ускорения и спутник начнет удаляться от Земли, а орбита делается эллиптической. Если же при помощи двигателей уменьшить скорость спутника, то сила тяготения превысит (по модулю) силу, необходимую для обеспечения центростремительного ускорения, возникнет радиальное ускорение, направленное к Земле, кинетическая энергия начнет уменьшаться.

Управляя направлением полной скорости спутника, можно сделать ее нормальной к радиусу в тот момент, когда она будет равняться скорости, при которой возможно обращение по орбите только за счет сил тяготения; после этого будет происходить устойчивое движение по орбите уменьшенного радиуса. Согласно выражению (11.26) полная энергия при этом станет меньше, чем до начала маневра. Соответствующая часть энергии будет унесена уходящими газами.

Еще более показательный другой пример: пусть спутник имеет скорость  $\vec{v}_0$  и требуется повернуть вектор его скорости на  $90^\circ$ . Это можно сделать, создав добавочный импульс  $\vec{p}$  (рис. 11.18). Так как масса корабля при этом уменьшится за счет уходящих газов, то конечный импульс  $\vec{p}_1$  будет несколько меньше первоначального, а уравновешивающий импульс окажется больше его.

Вернемся к рисункам 11.16 и 11.17 и уравнению (11.25). При  $v > v_0$  и  $h \ll R_0$ , пока полная энергия спутника отрицательна, он движется по одной из эллиптических

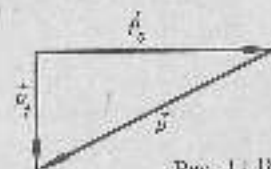


Рис. 11.18

орбит, внутри которых располагается круговая орбита. Когда же полная энергия обращается в нуль, то, так как начальная скорость была перпендикулярна радиусу, спутник уйдет из сферы земного притяжения, но двигаясь по параболе, кричим его скорость на бесконечности стремится к нулю.

Необходимая для этого случая начальная скорость, называемая *второй космической скоростью*, равняется:

$$v_2 = \sqrt{2gR_0} = 11 \text{ км/с.} \quad (11.27)$$

При дальнейшем увеличении начальной скорости спутник будет двигаться по гиперболическим орбитам, уходя за пределы действия земного тяготения. Теперь уже следует учесть движение Солнца. Перенесем начало координат в центр Солнца. Энергии спутника будет теперь определяться выражением

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - Gm \frac{M_3}{R_3} - Gm \frac{M_c}{R_c} - \frac{1}{2}mv^2 - Gm \frac{M_c}{R_c} \left[ 1 + \frac{M_c R_c}{M_3 R_3} \right],$$

где индекс «3» относится к его взаимодействию с Землей, а индекс «с» — с Солнцем; уравнение написано для момента запуска спутника;  $v$  — его скорость (относительно Солнца); расстояние до Солнца  $R_c = 1,5 \cdot 10^8$  км; расстояние до центра Земли  $R_3 = 6,4 \cdot 10^3$  км; масса Солнца  $M_c = 2 \cdot 10^{30}$  кг; масса Земли  $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$  кг.

Но

$$mG \frac{M_3}{R_3} = mgR_3,$$

где  $g = 9,8 \cdot 10^{-3}$  км/с<sup>2</sup> — ускорение в поле тяжести у земной поверхности. Поэтому для полной энергии (после подстановки указанных значений) получим:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - 15mgR_3.$$

При  $E > 0$  спутник сможет покинуть пределы Солнечной системы. Для этого нужно выполнить условие

$$v > v_3 = \sqrt{30gR_3} \approx 43 \text{ км/с.} \quad (11.28)$$

Скорость  $v_3$  называют *третьей космической скоростью*. Так как направление начальной скорости произвольное, то чтобы начальную скорость, сообщаемую космическому кораблю, сделать параллельной мгновенной скорости движения Земли вокруг Солнца (29,5 км/с). Тогда необходимая дополнительная скорость относительно Земли составит всего лишь 13,5 км/с.

Если скорость  $v$  превышает вторую космическую скорость, но полная энергия спутника (с учетом его взаимодействия с Солнцем) отрицательна, то спутник останется в Солнечной системе и будет обращаться вокруг Солнца.

Такова, например, судьба космических аппаратов «Вега», летевших мимо Венеры на встречу с кометой Галлея.

Создание искусственных спутников Солнца ныне стало реаль-

ностью. По-видимому, не представит особых затруднений и вывод космического корабля за пределы Солнечной системы.

Что же касается кораблей для межзвездных путешествий, то можно определенно утверждать, что на современных видах топлива они невозможны.

Действительно, предельная скорость  $v$  газов, покидающих ракетный двигатель (относительно ракеты), близка к 5 км/с. Расстояние до ближайшей звезды равно 4 св. годам ( $1 \text{ св. год} \approx 9,5 \cdot 10^{12}$  м). Если космический корабль должен будет долететь до звезды за 1000 лет, то его скорости должна равняться:

$$v = 1,2 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Тогда по уравнению Циолковского отношение начальной массы  $m_0$  к конечной массе  $m$  составит

$$\frac{m_0}{m} = \exp 240 = 10^{100}.$$

Уже при  $m = 1$  кг начальная масса превысит на много порядков массу Земли.

Обсуждаемые в популярной литературе гипотетические фотонные ракеты, где роль отходящих газов выполняет фотонный пучок, при современном уровне техники несущественны.

## 11.8. Вес тела

Уточним теперь широко распространенное понятие *вес тела*. Весом  $\vec{P}$  называют силу, с которой тело массой  $m$  действует на неподвижную относительно него опору (или неподвижный относительно него подвес), причем причиной этого действия является притяжение этого тела Землей, описываемое законом тяготения Ньютона:

$$\vec{P} = -m \frac{GM}{R^2} \vec{R} = m\vec{g}.$$

Сила  $\vec{P}$  может быть непосредственно измерена, например, при помощи пружинных весов. Так как весы могут быть проградуированы не там, где ими используются, а величина  $\vec{g}$  в разных местах земного шара различна, то при разных показаниях пружинных весов

$$\vec{P}_1 = m\vec{g}_1 = \vec{P}_2 = m_2\vec{g}_2$$

массы взвешиваемых тел не вполне одинаковы. Различия это мало, и в практических условиях их пренебрегают.

Если же взвешивание производится на рычажных весах (модуль  $\vec{g}$  на близко расположенных чашках, конечно, одинаков), то результат взвешивания не зависит от места, где оно производится: равновесие весов наступает при равенстве взвешиваемых масс. Поэтому в торговле следовало бы пользоваться только рычажными весами.

Вес тела не всегда равен по модулю  $F = mg$ . Так, пусть опора, например дно кабины лифта, вместе с находящимся на ней телом движется вертикально вниз с ускорением  $a$  (это значит, что, кроме  $\vec{F}$ , действуют аналогичные силы). Примем направление вниз за положительное, и пусть проекция  $a$  на это направление положительна. С таким же ускорением движется и тело, на которое (кроме силы  $\vec{F}$ ) действует сила реакции опоры  $\vec{N}$ , направленная вверх и равная по модулю весу тела (в условиях движения):  $\vec{N} = -\vec{P}$ . По второму закону Ньютона движение тела описывается уравнением

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{g} - \vec{P}.$$

Поэтому получается:

$$\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}.$$

Так как все векторы направлены вниз, то можно написать

$$P = m(g - a) < P_0 = mg. \quad (11.29)$$

При  $a=0$ , как и должно быть,  $P = P_0$ .

При  $a=g$  давление на опору исчезает. Это состояние тела принято называть невесомостью. Оно не изменится, если опору убрать.

При движении космических кораблей и спутников по околоземным орбитам (если двигатели корабля выключены) все части корабля и находящиеся в нем предметы находятся в состоянии невесомости — взаимодействие тел с опорами исчезает, так как все тела и опоры «свободно падают» на Землю.

Если же опоры, поддерживая действительно внешние силы, получают ускорение, направленное вниз и большее по модулю, чем  $g$ , то тело отстает от опоры и продолжает падать с ускорением  $a$ . Так как опоры нет, то вопрос о весе отпадает. При ускорении лифта, большем по модулю  $g$ , тело оторвется от пола лифта и достигнет потолка. Оно будет давить на него с силой

$$F = m(a - g),$$

направленной вверх. Иногда говорят, что при этом «вес изменил направление». Это, конечно, неверно, так как потолок не мешает телу двигаться под действием силы тяжести, т. е. вообще не является опорой (в первоначальном смысле этого слова).

В случае движения лифта вниз замедленно (проекция ускорения  $a$  отрицательна), выражение (11.29) примет вид:

$$\vec{P} = m(g + a) > \vec{P}_0.$$

т. е. вес превышает  $P_0$ .

Заметим, что при движении лифта вверх ускоренному движению соответствует  $P > P_0$ , а замедленному  $P < P_0$ .

Равномерное прямолинейное движение тела и опоры, конечно, никак не сказывается на значении веса, так как оно вообще не изменяет силовых взаимодействий.

Изменение веса происходит и при ускоренном движении тела и опоры в направлении, не совпадающем с вертикалью.

Так, в § 5.2 было выяснено: тело, лежащее на поверхности Земли, участвует во вращении вокруг земной оси благодаря тому, что из-за силы тяготения  $\vec{F} = m\vec{g}$  и реакции опоры возникает центростремительное ускорение

$$\vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r}$$

( $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $r$  — радиус круга широты, проходящего через точку, где лежит тело) и все тело оказывается равным:

$$\vec{F} = \vec{F}' - m\vec{a}_r = m\vec{g} - m\omega^2 \vec{r}.$$

На водоеме изменения веса не происходит:

$$\vec{F} = \vec{F}'.$$

### 11.9. Инертная и гравитационная массы

#### Границы применимости классической теории тяготения

В заключение уточним понятие массы. Во втором законе Ньютона масса выступает как мера инертности тела; ее принято называть *инертной массой*  $m$ . В законе тяготения сила определяется массами взаимодействующих тел; назовем их *гравитационными массами*  $M$ . Каково соотношение между  $m$  и  $M$  у некоторого тела? Ответ на этот вопрос мог дать только опыт.

Первые опыты подобного рода (не владея еще понятием массы) производит Галилей, давая телам падать с башни и измеряя время их падения. Он вывел из этих опытов заключение о действительности ускорения свободного падения для всех тел (в данном месте земной поверхности).

Теория тяготения объяснила, почему в данном месте ускорение свободного падения  $\vec{g}$  должно быть одинаковым для всех тел.

Конечно, опыты Галилея были несовершенны. Сам Ньютон провел точные опыты, изучая колебания однородных физических маятников одинаковой формы, сделанных из разных материалов.

Как известно из теории колебаний, период физического маятника зависит от отношения действующей на него силы тяжести (пропорциональной гравитационной массе  $M$ ) к моменту инерции маятника, зависящему от его инертной массы  $m$ , считывающей ускорение. Поэтому, измеряя периоды маятников, можно судить об отношении гравитационной массы к инертной. Ньютон обнаружил, что независимо от материала маятников и их формы всегда получалось

$$\frac{M}{m} = \text{const.}$$

Выбрав для обеих масс одинаковые длины, Ньютон нашел:

$$\frac{M}{m} = 1 \pm 10^{-4}.$$

Позже точность опытов была существенно повышена. Так, Этвеш (1899 г.) подтвердил равенство масс с точностью до  $10^{-9}$ . Дикке с сотрудниками (1964 г.) — до  $\sim 2 \cdot 10^{-11}$  и, наконец, Братинский и Пауов (1971 г.) — до  $10^{-12}$ . Дальнейшие исследования в этом направлении продолжаются.

В настоящее время пользуются единым понятием массы покоя  $m_0$  — меры инертности и тяготения физических тел (и материальных точек), неразрывно связанной с собственной энергией тела (точки)  $E$  фундаментальным соотношением Эйнштейна

$$E = mc^2.$$

А. Эйнштейн обратил внимание на одну особенность сил инерции: каждая из них сообщает ускорение, не зависящее от массы тела (напомним, что «силы инерции» есть только в ИИСО!). Но такой же особенностью обладает и сила тяготения.

Эта особенность позволяет подойти к тяготению с новой точки зрения. Представим себе наблюдателя, находящегося в лифте, неподвижном относительно Земли. Он замечает, что все тела, будучи подняты над полом и предоставлены самим себе, падают с одинаковым ускорением  $g$ . Тела же, достигшие пола, давят на него с силами, пропорциональными  $g$ . Если теперь лифт придет в ускоренное движение вниз в вертикальном направлении (с ускорением  $a$  относительно системы координат, связанной с Землей), то наблюдатель в кабине обнаружит, что ускорения всех свободных тел (относительно лифта) стали равны:

$$a_i = g - a$$

и силы давления на пол лифта также стали пропорциональны  $a$  (так как инертная масса равна тяготеющей).

Если лифт будет падать свободно (с ускорением  $g$  относительно Земли), то для наблюдателя, находящегося в лифте, проявления силы тяжести полностью исчезнут.

При этом никакими физическими опытами (внутри лифта) невозможно определить, что же произошло: изменилась тяготение или возникла сила инерции, противоположенная силе тяготения (поле тяготения предполагается однородным).

Так как однородные поля можно создать только в ограниченной области пространства, то и эквивалентность сил тяготения и сил инерции существует только в ограниченной области. Идея об эквивалентности сил тяготения и сил инерции положена Эйнштейном в основу общей теории относительности, представляющей более совершенную теорию тяготения, чем теория Ньютона: общая теория относительности справедлива и для ИИСО.

Классические представления о тяготении, строго говоря, применимы лишь к неподвижным телам.

Действительно, если расстояние между взаимодействующими телами меняется, то должно меняться и взаимодействие. Но согласно теории относительности скорость передачи взаимодействия конечна: она не может превышать скорости света в вакууме. Это

значит, что если в данном месте тело переместится сайпас, то в удаленной точке его поле изменится несколько позже. Этому запоздыванию теория Ньютона не учитывает. Так как она все же приводит к правильным результатам, то следует заключить, что скорости перемены тел очень малы по сравнению со скоростью передачи тяготения. Эта скорость еще не измерена, но есть основания думать, что она равна скорости света в вакууме. При ускоренном движении некоторого массивного тела вокруг него должны создаваться колебания поля тяготения — гравитационные волны. Их сейчас пытаются обнаружить, но достоверных результатов пока не получено.

Учет возможной нестационарности поля тяготения характерен для теории Эйнштейна. Есть в ней и еще важная особенность. Классические представления, кроме допущения бесконечной скорости распространения взаимодействия, основаны на том, что поле тяготения, связанное с любым телом, само совершенно не зависит от наличия других тел. Это приводит к двусмысленности уравнений, связывающих силы взаимодействия с массами тел, и как следствие к прихотливости принципа суперпозиции, позволяющего складывать как векторы напряженности нескольких полей тяготения. В новой теории тяготения учтен возможный нелинейный характер взаимодействий, т. е. утверждается, что достаточно сильные поля не подчиняются принципу суперпозиции, что, конечно, делает теорию очень сложной. В предельном случае малых скоростей взаимодействующих тел и не слишком больших сил тяготения теория Эйнштейна переходит в ньютоновскую.

В рамках общего курса физики обсуждение общей теории относительности и следствий из нее невозможно. В настоящее время накоплено довольно много экспериментальных данных, подтверждающих новую теорию. Так, например, теория относительности показывает, что в очень сильных полях тяготения пространство теряет свою однородность, что должно, в частности, сказаться на условиях распространения света. Наблюдения звезд во время солнечного затмения (когда они кажутся лежащими у края солнечного диска) и радиолокация Меркурия подтвердили теоретические предсказания (искривление траектории лучей и изменение скорости распространения света) с достаточной точностью.

Дальнейшее развитие идей общей теории относительности приводит к новым представлениям о строении Вселенной и ее развитии.

Нужно отметить, однако, что недостаточная полнота сведений о процессах во Вселенной и громадные математические трудности, возникающие при решении столь сложных вопросов, не позволяют получить их однозначного решения. Кроме того, создаваемые модели Вселенной существенно зависят от средней плотности вещества в ней, а ее значение известно недостаточно точно. Наблюдательный материал, накопленный современной астрономией и астрофизикой, также недостаточен пока для однозначного решения вопроса о строении Вселенной и ее развитии.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Важнейшие механические величины, их размерности и единицы СИ

Наименование	Единица			Б. ед.	
	Обозначение	Обозначение величины	Размерность	Наименование	Обозначение
Время (t)	T	Секунда	T	секунда	с
Длина (l)	L	—	L	метр	м
Масса (m)	M	—	M	килограмм	кг
Температура (t)	T	°	Θ	кельвин	К
Количество вещества (ν)	ν	—	N	моль	моль
Площадь (S)	S	S = l <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>	квадратный метр	м <sup>2</sup>
Объем (V)	V	V = l <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>	кубический метр	м <sup>3</sup>
Перемещение (s)	s	—	L	метр	м
Скорость (v)	v	v = $\frac{ds}{dt}$	L T <sup>-1</sup>	метр в секунду	м/с
Ускорение (a)	a	a = $\frac{dv}{dt}$	L T <sup>-2</sup>	метр на секунду в квадрате	м/с <sup>2</sup>
Плотность (масса или давление) (ρ)	ρ	ρ = $\frac{m}{V}$	M L <sup>-3</sup>	килограмм на метр в кубе	кг/м <sup>3</sup>
Сила (F)	F	F = $\frac{dP}{dt}$	M L T <sup>-2</sup>	ньютон	Н
Период (T)	T	—	T	секунда	с
Угол поворота	α, β, γ	α = $\frac{l}{R}$	1	радиан	рад
Угол поворота	α, Ω	Ω = $\frac{S}{R^2}$	1	стерадиан	ср
Частота (ν)	ν, f	f = $\frac{1}{T}$	T <sup>-1</sup>	герц	Гц
Угловая перемещение	α	—	1	радиан	рад
Угловая скорость (ω)	ω	ω = $\frac{dα}{dt}$	T <sup>-1</sup>	радиан в секунду	рад/с
Угловое ускорение (ε)	ε, α	α = $\frac{dω}{dt}$	T <sup>-2</sup>	радиан на секунду в квадрате	рад/с <sup>2</sup>
Момент (гравитации)	L	L = αR <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>	квадратный метр в квадрате	м <sup>2</sup>
Момент силы (M)	M	M = αR	L M T <sup>-2</sup>	килограмм-метр	Н·м
Момент инерции (момента инерции) (I)	I	I = αR	L <sup>2</sup> M T <sup>-2</sup>	килограмм-метр в квадрате на метр в кубе	кг·м <sup>2</sup>
Работа (A)	A	A = F l	L M T <sup>-2</sup>	джоуль	Дж
Мощность (N)	N	N = $\frac{A}{t}$	L M T <sup>-3</sup>	ватт	Вт

Буквы в скобках обозначают соответствующие скаляры и векторы.

Наименование	Единица			Единица	
	Обозначение	Обозначение	Размерность	Наименование	Обозначение
Энергия (E)	W, U, E	E = αv <sup>2</sup>	M L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	джоуль	Дж
Плотность энергии (e)	e	e = $\frac{E}{V}$	M L <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	джоуль на кубический метр	Дж/м <sup>3</sup>
Плотность (ρ)	ρ	ρ = $\frac{m}{V}$	L <sup>-3</sup> M	килограмм на кубический метр	кг/м <sup>3</sup>
Давление (p)	p	p = $\frac{F}{S}$	L <sup>-1</sup> M T <sup>-2</sup>	паскаль	Па
Напряженность электрического поля (E)	E	E = $\frac{F}{q}$	L T <sup>-2</sup>	вольт на метр	В/м
Потенциал электрического поля (φ)	φ	φ = $\frac{F}{q}$	L T <sup>-2</sup>	вольт	В
Потенциал скорости (ψ)	ψ	ψ = $\vec{v} \cdot \vec{S}$	Ω L <sup>2</sup>	—	—

Напомним, что радиан равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

$$1 \text{ радиан} = 0,017453 \text{ рад}.$$

Стереориан равен тангенсу угла в радианах в центре сферы, вырезанному из поверхности сферы площадью, равной площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Полный тангенс сферы описанной вокруг точки, равен 4π ср.

### Множители и приставки СИ для образования кратных и дольных единиц

Множитель	Обозначение	Наименование	Множитель	Обозначение	Наименование
10 <sup>9</sup>	Г	гига	10 <sup>-1</sup>	д	деци
10 <sup>6</sup>	М	мега	10 <sup>-2</sup>	с	санти
10 <sup>3</sup>	к	кило	10 <sup>-3</sup>	м	милли
10 <sup>2</sup>	Г	гекто	10 <sup>-4</sup>	мк	микро
10 <sup>1</sup>	—	—	10 <sup>-5</sup>	н	нано
10 <sup>0</sup>	—	—	10 <sup>-6</sup>	п	пико
10 <sup>-1</sup>	д	деци	10 <sup>-7</sup>	ф	фемто
10 <sup>-2</sup>	с	санти	10 <sup>-8</sup>	а	атто





— — — — —	157
— — — — —	45
Скорости 11	
— — — — —	209
— — — — —	292
— — — — —	11
— — — — —	290
— — — — —	12
— — — — —	11
— — — — —	292
— — — — —	16
Смещение В. 221	
Сопоставление 31, 117	
— — — — —	81
— — — — —	94
— — — — —	92
Стекло С. 238	
Стержень 299	
Температура 231	
Температура 6	
Теорема Кевала 64	
— — — — —	275
— — — — —	125
Течение жидкости (ламинарное) 244	
— — — — —	244
Торсион 9, 249	
Траектория 8	
Тренировка 86	
— — — — —	89
Трубка тока 244	
— — — — —	78
Угол В. А. 179	
Уравнение бегущей волны 206, 213	
— — — — —	247
— — — — —	186
— — — — —	64
— — — — —	245
— — — — —	256
— — — — —	84

Уровень траектории 231	
— — — — —	250
Ускорение 13	
— — — — —	14
— — — — —	167
— — — — —	13
— — — — —	14
— — — — —	49
— — — — —	17
Формула барометрическая 242	
— — — — —	47
Фурье Ж. 27	
Характеристика напряженности 229	
Центр масс (центр инерции) 58	
Циклотрон 75	
Циклоидальная К. 3, 84, 289	
Циркуляция вектора напряженности 29	
— — — — —	264
Частота обращения 16	
— — — — —	161
Число Рейнольдса 257	
Эдлер Л. 259	
Эвальд А. 42, 100, 256	
Энергия 70	
— — — — —	69
— — — — —	211
— — — — —	62
— — — — —	115
— — — — —	114
— — — — —	65, 86
— — — — —	117
— — — — —	286
Эффект Допплера 233	
— — — — —	119
— — — — —	264

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
Глава 1. Кинематика . . . . .	6
1.1. Переменная величина. Система отсчета . . . . .	6
1.2. Скорость . . . . .	11
1.3. Ускорение . . . . .	13
1.4. Скорость и ускорение при движении по окружности материальной точки (или при вращении твердого тела) . . . . .	15
1.5. Решение задач с кинематикой . . . . .	20
1.6. Гармоническое колебательное движение. Сложные гармонические колебания . . . . .	23
1.7. Метод комплексных амплитуд . . . . .	30
1.8. Сложные элементы периодических колебаний . . . . .	32
Глава 2. Законы динамики Ньютона . . . . .	35
2.1. Первый закон Ньютона. Сила . . . . .	35
2.2. Второй закон Ньютона. Масса, импульс . . . . .	37
2.3. Третий закон Ньютона . . . . .	42
2.4. Система физических величин, их единицы и размерности . . . . .	45
2.5. Статика в механике Ньютона . . . . .	48
2.6. Преобразования и принцип относительности Галилея . . . . .	50
2.7. Движение материальной точки (простейшие примеры) . . . . .	55
2.8. Записанные механические системы. Закон сохранения механического импульса . . . . .	67
2.9. Работа и кинетическая энергия . . . . .	61
2.10. Потенциальная энергия. Закон сохранения и превращения энергии . . . . .	64
Глава 3. Некоторые приложения законов механики точки . . . . .	73
3.1. Простейшие примеры задач по механике . . . . .	72
3.2. Движение электронов в электронно-лучевой трубке . . . . .	79
3.3. Рациональные материальной точки. Степени свободы . . . . .	81
3.4. Движение (вращательное) тела переменной массы . . . . .	82
3.5. Протекание времени . . . . .	96
3.6. Соударения тел и частиц . . . . .	91
Глава 4. Элементы специальной теории относительности . . . . .	98
4.1. Границы применимости классической механики . . . . .	98
4.2. Механика Ньютона и принцип относительности Галилея . . . . .	101
4.3. Принцип относительности Эйнштейна . . . . .	102
4.4. Относительность длины и длительностей. Интервал . . . . .	101
4.5. Элементы релятивистской механики . . . . .	111
4.6. Релятивистская связь между массой и энергией . . . . .	114
4.7. Соударения при релятивистских скоростях . . . . .	117
Глава 5. Динамика твердого тела . . . . .	121
5.1. Вращение твердого тела. Момент инерции . . . . .	121
5.2. Момент силы и момент импульса относительно оси. Уравнение движения вращающегося тела (второй закон Ньютона) . . . . .	126
5.3. Закон сохранения момента импульса . . . . .	129
5.4. Мгновенная ось вращения . . . . .	131
5.5. Рычаги. Центр сна . . . . .	133
5.6. Маятник . . . . .	137
5.7. Условия равновесия твердого тела . . . . .	142
5.8. Качение . . . . .	144
5.9. Гироскопы . . . . .	152
5.10. Законы Ньютона и законы сохранения в механике . . . . .	155

Глава 5. Движение в неинерциальных системах отсчета . . . . .	17
5.1. Поступательное ускоренное движение систем отсчета. Сила инерции . . . . .	17
5.2. Энергетика движения в аксоли вольтания и ПИСО с поступательным ускорением . . . . .	18
5.3. Равномерно вращающаяся система отсчета. Центробежная сила . . . . .	18
5.4. Движение тела на вращающейся системе отсчета. Сила Кориолиса . . . . .	18
Глава 7. Упругие силы. Колебания . . . . .	27
7.1. Упругие деформации. Закон Гука . . . . .	27
7.2. Энергия деформации. Вектор Умова . . . . .	27
7.3. Колебательные системы. Уравнение колебательного движения . . . . .	28
7.4. Свободные колебания. Добротность колебательной системы . . . . .	28
7.5. Вынужденные колебания. Резонанс . . . . .	28
7.6. Невзаимное взаимодействие колебаний телом взаимодействующих . . . . .	28
7.7. Колебания в волновых системах . . . . .	28
Глава 8. Волны . . . . .	29
8.1. Колебание в упругих системах. Образование волн . . . . .	29
8.2. Бегущие волны. Скорость распространения волн . . . . .	29
8.3. Система волн . . . . .	29
8.4. Интерференция волн. Стояние волн . . . . .	29
8.5. Образование волн . . . . .	29
8.6. Принцип Гюйгенса . . . . .	29
Глава 9. Элементы акустики . . . . .	31
9.1. Волновая природа звука . . . . .	31
9.2. Источники и приемники звука . . . . .	31
9.3. Физические основы акустики . . . . .	31
9.4. Эффект Доплера . . . . .	31
9.5. Ультразвук и инфразвук . . . . .	31
Глава 10. Гидродинамика . . . . .	33
10.1. Равновесие жидкости в тазе. Закон Паскаля. Сила Архимеда . . . . .	33
10.2. Скорость установившейся и турбулентной течений. Уравнение непрерывности струи . . . . .	33
10.3. Уравнение Бернулли. Изгибание струи . . . . .	33
10.4. Течение в вязкой жидкости. Уравнение Пуассона . . . . .	33
10.5. Число Рейнольдса . . . . .	33
10.6. Движение твердых тел в жидкости в тазе. Циркуляция скорости. Подъемная сила . . . . .	33
Глава 11. Всемирное тяготение . . . . .	35
11.1. Взаимодействие тел. Вещество и поле . . . . .	35
11.2. Закон Кеплера. Закон всемирного тяготения . . . . .	35
11.3. Потенциал тяготения. Примеры применения закона всемирного тяготения . . . . .	35
11.4. Поле тяготения. Напряженность поля. Теорема Остроградского-Гаусса . . . . .	35
11.5. Работа силы тяготения. Потенциал поля тяготения. Потенциальная энергия. Связь потенциала с напряженностью . . . . .	35
11.6. Собственная потенциальная энергия . . . . .	35
11.7. Космические скорости. Искусственные спутники . . . . .	35
11.8. Висител . . . . .	35
11.9. Видимая и гравитационная масса. Границы применимости классической теории тяготения . . . . .	35
Приложение . . . . .	37
Важнейшие механические величины, их размерности и единицы СИ . . . . .	37
Множители и префиксы СИ для образования десятичных кратных и дольных единиц . . . . .	37
Предельно-допустимая погрешность . . . . .	37

80 K.

80 K.