O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

A. Xashimov, E. Mamurov, T. Adirov

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

O‘quv qo‘llanma

Toshkent
«Iqtisod-Moliya»
2012

УДК: 519.1(075)
КБК: 22.171
X24

Taqrizchilar: G‘ofurov M. – fizika-matematika fanlari doktori, prof.,
Hamdamov I. – fizika-matematika fanlari nomzodi.

A.Xashimov va boshq.
Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. O‘quv qo‘llanma / O‘zR. Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi, Toshkent Moliya instituti, – T.: «Iqtisod-Moliya», 2012. – 168 bet.

Ushbu o‘quv qo‘llanma O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta`lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan «Iqtisod va biznes» ta`lim sohasidagi barcha bakalavriat yo‘nalishlari uchun ta`lim standartlari talablariga muvofiq ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursi bo‘yicha yo‘zilgan. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani usullari hozirgi davrda iqtisodiy jarayonlarning mohiyatini ochib, ularning rivojlanish qonuniyatlarini bilishga imkon beradi. Bu usullar iqtisodchiga iqtisodiy jarayonning mexanizmini tushunishga, jarayonni boshqarishga va istiqbolni ko‘ra bilishga yordam beradi. Bu esa iqtisodchidan, iqtisodiy jarayonlarni statistik chuqur tahlil qilish va istiqbolni belgilashning quroli sifatida ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullarini o‘rganishni taqozo etadi.

УДК: 519.1(075)
КБК: 22.171

ISBN 978-9943-13- 371-6

© «IQTISOD-MOLIYA», 2012
© A.Xashimov, E.Mamurov,
T. Adirov, 2012

KIRISH

Ehtimollar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining muhim tarmoqlaridan biridir. Ehtimollar nazariyasi fanining paydo boʻlishiga qimor oʻyinlarining matematik modellarini va nazariyasini yaratish yoʻlidagi izlanishlar turtki boʻldi. Bu fanning dastlabki tushunchalari shakllangan davr XVI-XVII asrlar boʻlib, Kardano, Gyuygens, Paskal, Ferma kabi olimlarning nomlari bilan bogʻliqdir.

Ehtimollar nazariyasining keyingi rivojlanish davri Yakov Bernulli (1654-1705) nomi bilan bogʻliq. U isbotlagan, keyinchalik «Katta sonlar qonuni» nomini olgan, teorema oldingi toʻplangan faktlarning birinchi nazariy asoslanishi edi.

Ehtimollar nazariyasining keyingi yutuqlari Muavr, Laplas, Puasson kabi olimlarning nomlari bilan bogʻliq.

XIX asrning ikkinchi yarmidan boshlab ehtimollar nazariyasining rivojlanishiga V.Ya. Bunyakovskiy, P.L. Chebishev, A.A. Markov, A.M. Lyapunov kabi rus olimlari oʻz ilmiy izlanishlari bilan katta hissa qoʻshdilar. Fanning mustaqil fan boʻlib uygʻunlashishida va keyingi rivojida S.N. Bernshteyn, V.I. Romanovskiy, A.N. Kolmogorov, A.Ya. Xinchin, B.V. Gnedenko, N.V. Smirnov va boshqalarning xizmatlari katta boʻldi.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining Oʻzbekistonda oʻz oʻrinini topishida va rivojlanishida V.I. Romanovskiy, S.X. Sirojiddinov va T.A. Sarimsoqov kabi olimlarining hissalari behisobdir. Hozirgi kunda ularning shogirdlari tomonidan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani boʻyicha ham nazariy, ham amaliy tadqiqotlar davom ettirilmoqda.

1- QISM
EHTIMOLLAR NAZARIYASI

1- §. Ehtimollar nazariyasi haqida dastlabki tushunchalar. Ehtimollikning klassik ta'rifi

Ehtimollar nazariyasining dastlabki tushunchalari-tajriba, hodisa, elementar hodisa, ehtimollik, nisbiy chastota kabi tushunchalar bo'lib, ularni bayon qilishga o'tamiz.

Tajriba hodisani ro'yobga keltiruvchi shartlar majmui S ning bajarilishini ta'minlashdan iboratdir.

Tajribaning har qanday natijasi hodisadir.

Kuzatilayotgan hodisalarni 3 turga ajratish mumkin: muqarrar, mumkin bo'lmagan va tasodifiy.

Ma'lum bir S shartlar asosida, albatta, ro'y beradigan hodisa ***muqarrar hodisa*** deb ataladi va Ω bilan belgilanadi. Masalan, «-10° temperaturada (normal atmosfera bosimi ostida) suv muz holatda bo'ladi» hodisasi muqarrar hodisadir.

Ma'lum bir S shartlar asosida hech qachon ro'y bermaydigan hodisa ***mumkin bo'lmagan hodisa*** deb ataladi va $\varnothing$ belgi bilan belgilanadi. Masalan, «-10° temperaturada (normal atmosfera bosimi ostida) suv suyuq holatda bo'ladi» hodisasi mumkin bo'lmagan hodisadir.

Ma'lum bir S shartlar asosida yoki ro'y beradigan, yoki ro'y bermaydigan hodisa ***tasodifiy hodisa*** deb ataladi va lotin alfavitining katta $A, B, C, ...$ harflari bilan belgilanadi. Masalan, «10° temperaturada yomg'ir yog'adi» hodisasi tasodifiy hodisadir.

Misol. O'yin kubigi bir marta tashlanadi. Bu holda: Ω-{tushgan ochko 6 dan katta emas}-muqarrar hodisa; $\varnothing$-{tushgan ochko 9 ga teng}-mumkin bo'lmagan hodisa; A-{tushgan ochko juft son}-tasodifiy hodisa.

Demak, tajribada tasodifiy hodisaning ro'y berishini oldindan aytib bo'lmaydi. Tajribaning har qanday natijasi ***elementar hodisa*** deb ataladi va ω bilan belgilanadi. Tajriba natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha hodisalar to‘plami ***elementar hodisalar fazosi*** deb ataladi va Ω bilan belgilanadi.

Misollar.

1. Tajriba tangani ikki marta tashlashdan iborat bo‘lsin. Bunda elementar hodisalar quyidagicha bo‘ladi:
$\omega_1 = (гг), \omega_2 = (гр), \omega_3 = (рг), \omega_4 = (рр)$. Elementar hodisalar fazosi Ω to‘rtta elementdan iborat.

2. Agar tanga uch marta tashlansa, u holda

$$\omega_1 = (ггг), \omega_2 = (ггр), \ \omega_3 = (грр), \omega_4 = (ррр)$$

$$\omega_5 = (ррг), \omega_6 = (ргг), \omega_7 = (ргр), \omega_8 = (грг)$$

Elementar hodisalar fazosi sakkizta elementdan iborat.

3. Tajriba o‘yin kubigini ikki marta tashlashdan iborat bo‘lsin.
Bu holda $\omega_{ij} = (ij)$ bo‘lib, i birinchi tashlashda tushgan ochkoni bildiradi: $\Omega = \{\omega_{ij}\}, \ i = \overline{1,6}, \ j = \overline{1,6}$. Elementar hodisalar soni: $n = 36$.

4. Tajriba nuqtani [*α;b*] kesmaga tashlashdan iborat bo‘lsin. Bunda **Ω**=[*α;b*], ya’ni **Ω** [*α;b*] kesmadagi barcha nuqtalardan iborat bo‘lib elementar hodisalar soni cheksizdir.

Ehtimollar nazariyasi fanining predmeti: ommaviy bir jinsli tasodifiy hodisalar ro‘y berishning ehtimollik qonuniyatlarini o‘rganishdir.

Yuqorida aytilganidek, tajribaning natijasi hodisadir. Masalan, mergan nishonga o‘q uzmoqda, bunda o‘qning uzilishi-tajriba bo‘lsa, o‘qning nishonga tegishi esa hodisa bo‘ladi.

Bizning atrofimizda tasodifiy hodisalar vaqti-vaqti bilan emas, doimiy uchrab turadi. Misol uchun: Ertaga Toshkent shahrida nechta yo‘l transport hodisasi ro‘y beradi? Tez yordam punktlariga nechta bemor qo‘ng‘iroq qiladi? Murakkab texnik qurilmani sozlash uchun qancha vaqt talab qilinadi? Bu kabi savollarning bir xil o‘xshashligi bor, bu savollarga aniq javob berib bo‘lmaydi. Chunki bu voqealarga ta’sir etuvchi faktorlar to‘liq aniqlanmagan. Haqiqatan ham, birgina yo‘l transport hodisasini ro‘y berishi bir nechta faktorlarga bog‘liq: ob-havo, yo‘lning holati, yo‘lning yoritilganlik darajasi, haydovchi va piyodalarning psixologik holatlari, avtomobillarning yo‘ldagi joylashuvi va hokazo. Barcha shu kabi holatlarda bizni qiziqtirgan hodisalar tasodifiydir .

Ehtimollar nazariyasi hayotda uchraydigan har qanday tasodifiy hodisalarnimas, balki ulardan ma’lum bir xossalarga ega bo‘lganlarini o‘rganadi.

Biz yuqorida hodisalarni uch turga bo‘lgan edik. O‘z navbatida tasodifiy hodisalarni ham bir necha turlarga ajratiladi

Bitta tajribada biror tayin hodisaning ro‘y berishi qolgan hodisalarning ro‘y berishini yo‘qqa chiqarsa, bunday hodisalarga ***birga-likda bo‘lmagan hodisalar*** deb aytiladi.

Misollar.

5. Tanga tashlandi. «Gerb» tushishi «raqam» tushishini yo‘qqa chiqaradi. «Gerb» tushdi va «raqam» tushdi hodisalari birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

6. O‘yin kubigi tashlandi. Bunda $\Omega = \{\omega_i\}, (i = \overline{1,6})$ to‘plamda 6 ta elementar hodisa bo‘lib, ular birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

1, 2, 3, 4-misollardagi elementar hodisalar ham birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

Agar tajriba natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bitta-sining ro‘y berishi muqarrar hodisa bo‘lsa, u holda bu hodisalarga ***yagona mumkin bo‘lgan hodisalar*** deyiladi.

Agar bir nechta hodisalardan hech qaysi birining ro‘y berish imkoniyati boshqalariga nisbatan yuqoriroq deyishga asos bo‘lmasa, ular ***teng imkoniyatli hodisalar*** deyiladi. Yuqoridagi 5-misolda «gerb» tushdi va «raqam» tushdi hodisalari teng imkoniyatli hodisalardir. Bu tasdiq 1, 2, 3, 4, 6-misoldagi har bir elementar hodisa uchun ham o‘rinli.

Agar tajriba natijasida hodisalar to‘plamidan hech bo‘lmaganda bittasi albatta ro‘y bersa va ular juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmasa, u holda bu hodisalar to‘plami ***to‘la guruh*** tashkil etadi deyiladi. Yuqoridagi 5-misoldagi «gerb» tushdi va «raqam» tushdi hodisalari to‘la guruh tashkil etadi. Xuddi shu fikrni 1, 2, 3, 4, 6-misollardagi hodisalar to‘plamiga ham aytish mumkin.

Ehtimolning klassik ta’rifi. Ehtimol tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalardan biri bo‘lib, uning bir nechta ta’rifi mavjud.

Umumiy qilib aytganda, ***ehtimol*** - tasodifiy hodisaning ro‘y berish imkoniyatini miqdoriy jihatdan xarakterlovchi sondir. Quyida ehtimolning klassik ta’rifini keltiramiz.

Dastlab quyidagi misolni ko‘rib chiqamiz. Qutida 10 ta: 4 ta qizil, 4 ta ko‘k, 2 ta oq shar bo‘lsin. Qutidan tasodifiy tarzda shar olinganda uning rangli bo‘lish imkoniyati oq bo‘lishiga qaraganda ko‘proqligi aniq. Bu imkoniyatni son bilan ifodalaymiz va uni hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb ataymiz. Shunday qilib, hodisaning ro‘y berish imkoniyatini xarakterlovchi son hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb ataladi va p bilan belgilanadi. Hodisaning ro‘y bermaslik ehtimoli esa q bilan belgilanadi.

Bu misolda qutidan tasodifiy ravishda shar olinganda uning rangli bo‘lish ehtimolini topamiz. Olingan sharning rangli (hozir ham, keyinchalik ham rangli shar deb oq shardan boshqa rangdagi sharlarni tushunamiz) bo‘lishini A hodisa sifatida qaraymiz. Tajribaning har bir natijasini ω_i (i=1,2,3,…) elementar hodisa deb qaraymiz. Bizning misolda 10 ta elementar hodisa mavjud: ω_1, ω_2-oq shar olindi; $\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$-qizil shar olindi; $\omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}$-ko‘k shar olindi. Ko‘rinib turibdiki, ω_i hodisalar teng imkoniyatli bo‘lib, to‘la guruh tashkil etadi.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaning ro‘y berishiga olib keladigan elementar hodisalarni bu hodisaning ro‘y berishiga ***qulaylik tug‘diruvchi hodisalar*** deb ataymiz. Bizning misolimizda A hodisaning ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar 8 ta:

$$\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}.$$

Shunday qilib, A hodisaga qulaylik tug‘diruvchi hodisalardan qaysi bir bo‘lishidan qat’iy nazar bittasi ro‘y bersa A hodisa ro‘y beradi: bizning misolimizda agar $\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}$ hodisalardan hech bo‘lmaganda biri ro‘y bersa, A hodisa ro‘y beradi.

1-ta’rif (ehtimolning klassik ta’rifi). A hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb, hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi elementar hodisalar sonining to‘la guruh tashkil etuvchi, teng imkoniyatli elementar hodisalarning umumiy soniga nisbatiga aytiladi, ya’ni A hodisaning ro‘y berish ehtimoli

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda, m-A hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi elementar hodisalar soni; n-elementar hodisalarning umumiy soni.

U holda ta’rifga asosan, bizning yuqoridagi misolimizda $P(A)=0,8$.

Ehtimolning klassik ta’rifidan bevosita uning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1-xossa. Muqarrar hodisaning ehtimoli birga teng.

Haqiqatan ham, bu holda $m=n$ demak, $P(\Omega)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$.

2-xossa. Mumkin bo‘lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng.

Bu holda $m=0$ va $P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$.

3-xossa. Tasodifiy hodisaning ehtimoli nol va bir orasida yotuvchi sondir, ya’ni

$$0<P(A)<1.$$

Haqiqatan ham, bu holda $0<m<n$, shuning uchun $0<\frac{m}{n}<1$ demak, $0<P(A)<1$.

Shunday qilib, istalgan hodisaning ehtimoli quyidagi munosabatni qanoatlantiradi:

$$0\le P(A)\le 1. \tag{2}$$

Kombinatorika elementlari. Ehtimolning klassik ta’rifidan foydalanib amaliy va nazariy masalalar yechishda kombinatsiyalar sonini aniqlash muhim ahamiyatga ega bo‘lganligi sababli kombinatorikaning ba’zi bir formulalari ustida to‘xtab o‘tamiz.

2-ta’rif. n ta turli elementning k ta turli elementlaridan tuzilgan yoki tartibi bilan, yoki elementi bilan farq qiladigan kombinatsiyalarga o‘rinlashtirish deyiladi va mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlar soni

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)) \tag{3}$$

formula bilan topiladi.

Agar o‘rinlashtirishda $k=n$ bo‘lsa, o‘rinlashtirishlar soni ***o‘rin almashtirishlar*** (***faqat tartibi bilan farq qiladigan kombinatsiyalar***) soniga teng bo‘ladi va bu son

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)...1 \tag{4}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar o‘rinlashtirishda kombinatsiyalar hech bo‘lmaganda bitta elementi bilan farq qilsa, ularni n ta elementni k tadan *guruhlash* deyiladi va ularning soni

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{5}$$

formula bilan aniqlanadi.

Guruhlashning ba’zi xossalarini keltirib o‘tamiz.

0 faktoriali 1 ga teng, ya’ni $0! = 1$ deb qabul qilingan.

1-xossa. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

2-xossa. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

3-xossa. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

4-xossa. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$.

5-xossa. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

1-eslatma. Agar 2-ta’rifda keltirilgan n ta elementni k tadan o‘rinlashtirishda tanlashlar qaytariladigan bo‘lsa, ya’ni n ta turli elementdan bittalab olingan element fiksirlangandan so‘ng yana o‘rniga qaytarib qo‘yilib bu jarayon takrorlansa, tanlab olishlar soni

$$N = n^k \tag{6}$$

formula bilan aniqlanadi.

2-eslatma. Yuqorida guruhlash formulasi (5) da n ta elementning barchasi turli deb faraz qilindi. Agar ba’zi elementlar takrorlansa, u holda takrorlanadigan kombinatsiyalar soni boshqa formula yordamida hisoblanadi. Masalan, n ta element ichida i element n_i $(i = \overline{1,k})$ marta takrorlansa, u holda o‘rin almashtirishlar soni

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} \tag{7}$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Misollar.

7. 1, 2, 3, 4 raqamlaridan foydalanib har bir raqam bir marta qatnashadigan nechta to‘rt xonali son tuzish mumkin.

Yechish. $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

8. 25 ta xodimdan boshliq va uning o‘rinbosarini necha xil usulda saylash mumkin.

Yechish. $A_{25}^2 = 25 \cdot 24 = 600$.

9. 25 ta talabadan 3 ta delegatni necha xil usulda saylash mumkin.

Yechish. $C_{25}^3 = \dfrac{25!}{3! \cdot 22!} = \dfrac{23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300$.

O‘z -o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Hodisalarning turlarini ayting va ularga doir misollar keltiriing.
2. Elementar hodisa ta’rifini bering.
3. Tasodifiy hodisalarning turlarini ayting.
4. Ehtimolning klassik ta’rifini keltiring.
5. Kombinitorika haqida tushuncha bering.

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Qutida bir xil o‘lchamdagi 10 ta shar bor . Ularning 3 tasi qizil , qolganlari ko‘k . Tavakkaliga olingan sharning ko‘k chiqish ehtimolini toping.

2. Talaba programmadagi 20 savoldan 18 tasini biladi. Talabaning imtihon oluvchi taklif etgan 3 ta savolni ham bilish ehtimolini toping.

3. Qutida 6 ta qora, 9 ta oq shar bo‘lib, undan tavakkaliga 4 ta shar olindi. Olingan 4 ta sharning 3 tasi oq bo‘lish ehtimolini toping.

4. O‘yin kubigi tashlanganda toq son chiqish ehtimoli topilsin.

5. Loto o‘yini ishtirokchilari 1 dan 100 gacha nomerlangan loto sharlari joylashtirilgan qopdan tavakkaliga shar olishganda birinchi son 5 ga karrali bo‘lmasligi ehtimolini toping.

2- §. Ehtimolning statistik ta'rifi. Geometrik ehtimollik

Nisbiy chastota. Ehtimolning yuqorida keltirilgan klassik ta'rifi cheklangan bo'lib, bu ta'rifni har qanday turdagi masalalarga qo'llab bo'lmaydi. Jumladan, elementar hodisalar soni cheksiz yoki elementar hodisalar teng imkoniyatli bo'lmagan tajribalarda ehtimolni hisoblash uchun klassik ta'rifdan foydalanish mumkin emas, elementar hodisalarning teng imkoniyatliligini asoslash esa amaliyotda anchagina qiyin masaladir. Odatda, teng imkoniyatli hodisalar ro'y beradigan tajribalarda simmetriya saqlangan deb faraz qilinadi. Masalan, o'yin kubigining shakli muntazam ko'pyoq bo'lib, u bir jinsli materialdan tayyorlangan bo'lishi talab qilinadi, tangada ham shu holatni kuzatish mumkin. Ammo amaliyotda simmetriya saqlangan holatlar kamdan-kam uchraydi.

Shu sababli, hodisaning ehtimolini hisoblashda ehtimolning klassik ta'rifi bilan bir qatorda boshqa ta'riflardan ham foydalaniladi, jumladan, statistik ta'rifdan. Ehtimolning statistik ta'rifini kiritishdan oldin nisbiy chastota tushunchasini kiritamiz, chunki bu tushuncha statistik ta'rif tushunchasini kiritishda muhim ahamiyatga egadir.

Nisbiy chastota tushunchasi ham ehtimol kabi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

1-ta'rif. Kuzatilayotgan A hodisa yuz bergan tajribalar sonining umumiy tajribalar soniga nisbati A hodisaning nisbiy chastotasi deb ataladi va

$$W(A) = \frac{k}{n} \tag{1}$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda k - A hodisa yuz bergan tajribalar soni, n-umumiy tajribalar soni.

Hodisa ehtimoli va nisbiy chastotasi ta'riflarini taqqoslab quyidagi xulosani chiqarish mumkin: ehtimol tajribagacha, nisbiy chastota esa tajribadan so'ng hisoblangan qiymatdir.

Misollar.

1. Noyabr oyining 6, 7, 11, 12, 17, 21, 24-kunlarida yomg'ir yoqqan bo'lsa, noyabr oyi uchun yomg'ir yog'ish nisbiy chastotasi:

$$W(A) = \frac{7}{30}.$$

2. Nishonga otilgan 18 ta o‘qdan 15 tasi nishonga tekkan bo‘lsa, o‘qlarning nishonga tegish nisbiy chastotasi $W(A)=\frac{5}{6}$.

Ehtimolning statistik ta’rifi. Bir xil sharoitda o‘tkazilgan ko‘p miqdordagi tajribalar shuni ko‘rsatadiki, nisbiy chastota turg‘unlik xossasiga egadir. Bu xossaning ma’nosi quyidagicha: ***turli tajribalarda (bir xil sharoitda va bitta hodisa ustida) topilgan nisbiy chastota qiymatlarining bir-biridan farqi kam (tajriba soni qancha katta bo‘lsa , farq shuncha kam) bo‘ladi va bu nisbiy chastotalar bitta son atrofida tebranadi.*** Mana shu son hodisaning ro‘y berish ehtimoli bo‘ladi. Shunday qilib, nisbiy chastotani ehtimolning taqribiy qiymati sifatida qabul qilish mumkin. (Nisbiy chastotaning turg‘unlik xossasi keyinchalik to‘liq tushuntiriladi)

Misollar.

3. Bizning eramizdan 2000 yillar oldin Xitoyda o‘g‘il bola tug‘ilishlar sonining jami tug‘ilgan bolalar soniga nisbati deyarli 0,5 ga tengligi hisoblangan.

4. Fransuz olimi Laplas London, Peterburg va Fransiyada to‘plangan statistik ma’lumotlarga asoslanib, o‘g‘il bola tug‘ilishlar sonining jami tug‘ilgan bolalar soniga nisbati taxminan $\frac{22}{43}$ ga tengligini ko‘rsatgan. Bu son ko‘p yillar mobaynida o‘zgarmay qolishini tasdiqlagan.

5. Byuffon tangani 4040 marta tashlaganda 2048 marta «gerb», Pirson tangani 24000 marta tashlaganda 12012 martasida «gerb» tomoni tushgan.

Ehtimolning statistik ta’rifi: ***ehtimolning statistik ta’rifida ehtimollik sifatida nisbiy chastota yoki unga yaqinroq sonni olinadi.***

Umuman, agar tajribalar soni yetarlicha ko‘p bo‘lib, shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro‘y berish nisbiy chastotasi – $W(A)$ biror o‘zgarmas $p\in[0;1]$ son atrofida turg‘un ravishda tebransa, shu p sonni A hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb qabul qilamiz. Bunday usulda aniqlangan ehtimol hodisaning ***statistik ehtimoli*** deyiladi.

Klassik ta’rif uchun keltirilgan xossalar statistik ta’rifda ham saqlanib qolishini osongina tekshirib ko‘rish mumkin, ya’ni $0\le k/n\le 1$.

Geometrik ehtimollik. Yuqorida aytilganidek, tajriba natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan elementar hodisalar soni cheksiz bo‘lsa, bu holda ehtimolning klassik ta’rifidan foydalanish mumkin emas. Masalan, l kesma L kesmaning bir qismi bo‘lsin. L kesmaga tasodifiy tarzda nuqta qo‘yilsin. Bunda qo‘yilgan nuqta L kesmaning ixtiyoriy nuqtasida bo‘lishi mumkin, nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli uning uzunligiga proporsional bo‘ladi va l ning L kesmada qanday holatda joylashganligiga bog‘liq bo‘lmaydi deb faraz qilinsa, nuqtaning l kesmaga tushish ehtimolini ehtimolning klassik ta’rifi bilan aniqlash mumkin emas, bunday holatlardagi ehtimolning klassik ta’rifi kamchiliklarini yo‘qotish uchun ***geometrik ehtimollik*** tushunchasi kiritiladi.

Yuqoridagi misolda nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli

$$P = \frac{l\ (uzunligi)}{L\ (uzunligi)}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Misol.

6. Tasodifiy tarzda tashlangan nuqta muntazam ABC uchburchakning A uchidan chiqqan mediananing ixtiyoriy nuqtasiga tushadi. Bu nuqtaning AO *(O-ABC* uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi) kesmaga tushish ehtimoli topilsin.

Y*echish.* Ma’lumki, uchburchak medianalari kesishish nuqtasida uchburchak uchidan boshlab hisoblanganda 2:1 nisbatda bo‘linadi. Shu sababli, $AO = \frac{2}{3}m_A$ ($m_A - A$ uchdan chiqqan mediana uzunligi). U holda $P = \frac{2}{3}$.

Biror tekislikda yassi G soha berilgan bo‘lib, bu soha yassi g sohani o‘z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimolini topish talab etilsin. Bu erda Ω elementar hodisalar fazosi G ning barcha nuqtalaridan iborat. Shuning uchun, bu holda ham klassik ta’rifdan foydalana olmaymiz. Tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimoli uning yuziga proporsional bo‘lib, g soha G sohaning qayerida joylashganligiga bog‘liq bo‘lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$P = \frac{g\ (yuzi)}{G\ (yuzi)}$$

formula yordamida aniqlanadi.

Misol. 7. Radiusi R bo‘lgan doira ichiga tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan:

a) kvadrat ichiga;

b) muntazam uchburchak ichiga tushish ehtimollarini toping.

Nuqtaning yassi figuraga tushish ehtimoli bu figuraning yuziga proporsional bo‘lib, uning doiraning qayerida joylashishiga esa bog‘liq emas deb faraz qilinadi.

Yechish.

a) $P = \dfrac{кvadratning\ yuzi}{doiraning\ yuzi} = \dfrac{2R^2}{\pi R^2} = \dfrac{2}{\pi}$.

b) $P = \dfrac{uchburchak\ yuzi}{doira\ yuzi} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

1-eslatma*.* Yuqoridagi keltirilgan ta’riflar geometrik ehtimollar uchun xususiy hollar edi. Agar sohaning o‘lchovini mes deb belgilasak, u holda nuqtaning G sohaning qismi bo‘lgan g sohaga tushish ehtimoli

$$P = \frac{mes(g)}{mes(G)}$$

formula bilan hisoblanadi.

2-eslatma. Ehtimolning klassik ta’rifiga asosan muqarrar (mumkin bo‘lmagan) hodisaning ro‘y berish ehtimoli bir (nol) ga teng; teskari tasdiq ham o‘rinli (masalan, ehtimoli nolga teng bo‘lgan hodisa mumkin bo‘lmagan hodisadir). Ehtimolning geometrik ta’rifida esa teskari tasdiq o‘rinli emas. Masalan, G sohaga tashlangan nuqtaning G sohaning bitta aniq nuqtasiga tushish ehtimoli nolga teng (isboti keyinchalik uzluksiz tasodifiy miqdorlar tushunchasida beriladi), ammo bu hodisa ro‘y berishi mumkin, ya’ni bu hodisani mumkin bo‘lmagan hodisa deb ayta olmaymiz.

Tasodifiy hodisalar bo‘ysinadigan qonuniyatlarni bilish shu hodisalar rivojining qanday kechishini avvaldan ko‘ra bilishga imkon beradi.

Ehtimollar nazariyasi fanining usullari hozirgi davrda amaliyotning turli sohalarida, jumladan iqtisodiyot sohasida ham keng va samarali qo‘llanilmoqda. Tasodifiylik bilan bog‘liq bo‘lgan masalalar iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda, bu jarayonlarning kechishini bashorat qilishda, hamda ma’qul iqtisodiy yechimlar qabul qilishda qo‘llaniladi.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani usullari makro - va mikro-iqtisodiyotni rejalashtirish va tashkil etishda, turli texnologik jarayonlarni tahlil etishda, mahsulot sifatini nazorat qilishda, ommaviy xizmat ko‘rsatish jarayonini tahlil qilishda va boshqa ko‘plab sohalarda o‘z tadbiqlarini topmoqda.

3-eslatma. Hodisaning statistik ta’rifi ham noqulay, chunki bitta hodisaning ro‘y berish chastotalari ketma-ketligi turli tajribalarda turlicha bo‘ladi. Bundan tashqari, amalda biz chastotalar ketma-ketligini emas, balki uning chekli elementlarini olamiz, chunki hamma ketma-ketlikni olib bo‘lmaydi. Shu sababli, ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosda qurish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Geometrik ehtimollikka doir misollar.
2. Ehtimollar nazariyasining aksiomatik qurilishi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Nisbiy chastotani tushuntiring.
2. Ehtimollikning statistik ta’rifini keltiring. Uning ehtimolning klassik ta’rifidan farqi nimada?
3. Nisbiy chastotaning turg‘unlik xossasi nimadan iborat?
4. Geometrik ehtimol ta’rifini ayting.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Tanga 12000 marta tashlandi. Gerb tushishlar soni 6007 ta. Gerb tushishlar sonini nisbiy chastotasini toping.
2. Tekshirishda 100 ta detal ichidan 6 ta nostandart detal topildi. Nostandart detalning topilish nisbiy chastotasi aniqlansin.
3. Ikki talaba ma’lum bir joyda soat 12^{00} va 13^{00} orasida uchrashishni kelishib olishdi. Birinchi kelgan ikkinchisini chorak soat kutadi va so‘ngra ketadi. Agar har bir talaba kelish vaqtini (soat 12^{00} va 13^{00} orasidagi) o‘zlari tasodifiy tanlashsa, ularning uchrashish ehtimoli topilsin.
4. Tekislikda bir-biridan $2a$ masofada yotuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Tekislikka uzunligi $2l$ ($l < a$) bo‘lgan igna

tavakkaliga tashlangan. Ignaning birorta to‘g‘ri chiziqni kesish ehtimolini toping.

5. Radiusi R bo‘lgan doira ichiga tavakalliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan:

a) muntazam oltiburchak ichiga.

b) muntazam o‘n ikki burchak ichiga tushish ehtimolini toping.

3- §. Hodisalar ustida amallar. Ehtimollarni qo‘shish va ko‘paytirish teoremalari. Shartli ehtimollik

Hodisalarni qo‘shish va ko‘paytirish. Kuzatilayotgan yoki ustida tajriba o‘tkazilayotgan hodisa bir nechta hodisalarning natijasi, ya’ni bir nechta hodisalardan hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berishidan yoki bir nechta hodisalarning hammasi bir paytda ro‘y berishidan va hakozo-lardan, iborat bo‘lishi mumkin, bu esa kuzatilayotgan hodisani bilish uchun hodisalar ustida qo‘shish yoki ko‘paytirish amallarini bajarish demakdir. Shu sababli, quyida bu amallarning ta’rifini keltirib o‘tamiz.

1-ta’rif. Ikki A *v*a B hodisalarning $A+B$-yig‘indisi (birlashmasi) deb, yoki A, yoki B hodisaning, yoki ikkala hodisaniing ham ro‘y berishini bildiruvchi hodisaga aytiladi.

Masalan, mergan nishonga qarata ikkita o‘q uzdi: A-birinchi o‘qning nishonga tegishi, B-ikkinchi o‘qning nishonga tegishi bo‘lsa, $A+B$ -birinchi o‘qning, yoki ikkinchi o‘qning, yoki ikkala o‘qning ham nishonga tegishi bo‘ladi.

Xususiy holda, A va B hodisalar birgalikda bo‘lmasa, u holda $A+B$ hodisa ulardan faqat bittasining (qaysi biriligining ahamiyati yo‘q) ro‘y berishini ifodalaydi.

2-ta’rif. $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$-yig‘indisi (birlashmasi) deb, bu hodisalardan kamida bittasining ro‘y berishiga aytiladi.

Masalan, $A+B+C$ yig‘indi, A va B, A va C, B va C *yoki A, B* va C hodisalardan birining ro‘y berishini bildiradi.

Hech bo‘lmaganda bitta hodisaning ro‘y berish ehtimoli. Birga-likda bo‘lmagan hodisalar yig‘indisining ro‘y berish ehtimolini topish quyidagi teoremaga asoslanadi.

1-teorema. Agar A va B hodisalar birgalikda bo‘lmasa, u holda $A+B$ hodisaning ro‘y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Isbot. n-tajribada mumkin bo‘lgan barcha hodisalar soni; $m_1 - A$ hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar soni;

$m_2 - B$ hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar soni bo‘lsin. Yoki A hodisa, yoki B hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar soni $m_1 + m_2$ ga teng bo‘ladi. Bundan esa

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$$

munosabatni hosil qilamiz. Agar $P(A) = {m_1}/{n}, P(B) = {m_2}/{n}$ ekanligini e’tiborga olsak, u holda:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Ikki hodisa yig‘indisining ro‘y berish ehtimolini ko‘p sondagi hodisalar uchun ham umumlashtirish mumkin.

1-natija. Juft-jufti birgalikda bo‘lmagan chekli sondagi $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$-hodisalardan hech bo‘lmaganda birining ro‘y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{2}$$

Bu natija ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosda qurishda qo‘shish aksiomasi deb ataladi va

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=}^{n} P(A_i) \tag{3}$$

ko‘rinishda yoziladi. Agar $\{A_i\}$ hodisalar ketma-ketligi sanoqli (hodisa-lar soni cheksiz, ammo nomerlash mumkin) bo‘lsa, (3) ifoda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=}^{\infty} P(A_i). \tag{4}$$

Misol.

1.Qutida 6 ta qizil, 8 ta ko‘k va 6 ta oq shar bor. Qutidan tasodifiy ravishda olingan sharning rangli bo‘lish ehtimoli topilsin.

Y*echish.* A hodisa-qutidan olingan sharning qizil bo‘lishi; B hodisa-qutidan olingan sharning ko‘k bo‘lishi bo‘lsin, u holda:

$$P(A)=\frac{3}{10},\quad P(B)=\frac{2}{5}.$$

A va B hodisalar birgalikda bo‘lmaganligi sababli $P(A+B)$ ehtimolni topish uchun 1-teoremani qo‘llash mumkin:

$$P(A+B)=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}.$$

3-ta’rif. Ikki A va B hodisalarning AB-ko‘paytmasi (kesishmasi) deb, bu hodisalarning birgalikda (bir paytda) ro‘y berishini bildiruvchi hodisaga aytiladi.

Masalan, mergan nishonga qarata ikkita o‘q uzdi: A-birinchi o‘qning nishonga tegishi, B-ikkinchi o‘qning nishonga tegishi bo‘lsa, AB-birinchi va ikkinchi o‘qlarning nishonga tegishi bo‘ladi.

4-ta’rif. $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$ hodisalarning $A_1A_2...A_n$- ko‘paytmasi (kesishmasi) deb, bu hodisalarning birgalikda ro‘y berishini bildiruvchi hodisaga aytiladi.

5-ta’rif. Agar A hodisaning ro‘y berishi B hodisaning ro‘y berish ehtimolini o‘zgartirmasa va aksincha bo‘lsa, A va B hodisalar erkli (bog‘liqmas) hodisalar deyiladi

Masalan, ikkita mergan turli nishonga qarata bittadan o‘q uzdi: A-birinchi merganning nishonga tekkizishi, B-ikkinchi merganning nishonga tekkizishi bo‘lsa, A va B hodisalar erkli (bog‘liqmas) hodisalar bo‘ladi.

6-ta’rif. Agar $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi o‘zaro erkli bo‘lsa, u holda bu hodisalar juft-jufti bilan erkli deyiladi.

Masalan, agar A va B, A va C, B va C hodisalar erkli bo‘lsa, u holda A,B,C hodisalar juft-jufti bilan erkli bo‘ladi.

7-ta’rif. Agar $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$ hodisalar juft-jufti bilan erkli hamda har bir hodisa va boshqa hodisalarning mumkin bo‘lgan ko‘paytmalari erkli bo‘lsa, u holda $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$-birgalikda erkli hodisalar deyiladi.

Masalan, A,B,C hodisalar birgalikda erkli bo‘lsa, u holda A va B, A va C, B va C, A va BC, va AC, C va AB hodisalar erkli bo‘ladi.

Hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli. Erkli hodisalar ko‘paytmasining ro‘y berish ehtimolini topish quyidagi teoremaga asoslanadi.

2-teorema. Agar A va B erkli (bog‘liqmas) hodisalar bo‘lsa, u holda AB-ko‘paytmaning ro‘y berish ehtimoli hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{5}$$

Bu teoremadan quyidagi natijani olamiz.

2-natija. Agar $A_1,\ A_2,\ \ldots, A_n$ -birgalikda erkli hodisalar bo‘lsa, u holda $A_1A_2\ldots A_n$ ko‘paytmaning ro‘y berish ehtimoli hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasiga teng:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \text{ yoki}$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{6}$$

Misol.

2. I va II to‘plardan otilgan o‘qlarning nishonga tegish ehtimollari mos ravishda $p_1 = 0,8$ va $p_2 = 0,9$ bo‘lsin. Agar nishon yo‘q bo‘lishi uchun ikkala o‘qning unga tegishi shart bo‘lsa, nishonning yo‘q bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa-I to‘pdan otilgan o‘qning nishonga tegishi; B hodisa-II to‘pdan otilgan o‘qning nishonga tegishi bo‘lsin. Masala shartidan ko‘rinib turibdiki, nishon yo‘q bo‘lishi uchun AB hodisa ro‘y berishi kerak. To‘plardan otilgan o‘qlarning nishonga tegishi bir-biriga bog‘liqmas. Shuning uchun A va B hodisalar erkli hodisalardir. Demak, 2-teoremani qo‘llash mumkin:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72.$$

Shartli ehtimol. Tasodifiy hodisa tushunchasi u ma’lum bir S shartlar asosida ro‘y beradi yoki ro‘y bermaydi deb aniqlagan edi. Agar hodisaning ro‘y berish ehtimolini hisoblash uchun faqat S shartlarning bajarilishi yetarli bo‘lsa, ya’ni qo‘shimcha shartlar talab qilinmasa, u holda bu ehtimol ***shartsiz ehtimol*** deb ataladi; agar hodisaning ro‘y berish ehtimolini hisoblash uchun faqat S shartlarning bajarilishi yetarli bo‘lmasa, ya’ni qo‘shimcha shartlar talab qilinsa, u holda bu ehtimol ***shartli ehtimol*** deb ataladi. Masalan, ba’zi hollarda B hodisaning ro‘y berish ehtimoli A hodisa ro‘y berganligi sharti asosida hisoblanadi.

Shuni ham ta’kidlash kerakki, shartsiz ehtimol tushunchasi nisbiy tushunchadir, chunki unda ham S shartning bajarilishi talab qilinadi.

8-ta’rif. B hodisaning A hodisa ($P(A)>0$) ro‘y berganligi shartida hisoblangan ehtimoliga shartli ehtimol deb ataladi va $P_A(B)$ kabi belgilanadi.

Misol.

3. Qutida 4 ta oq, 3 ta qora shar bor. Qutidan qaytarilmasdan ikkita shar olindi. Agar birinchi olingan shar (A-hodisa) qora bo‘lsa, ikkinchi olingan sharning (B-hodisa) oq bo‘lish ehtimolini toping.

Y*echish.* Birinchi tajribadan so‘ng qutida 6 ta shar qoladi. Shu sababli

$$P_A(B)=\frac{2}{3}.$$

Xuddi shu natijani

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad (P(A)>0) \tag{7}$$

formula yordamida ham olish mumkin. Haqiqatan ham, birinchi tajribada qora sharning chiqish ehtimoli $P(A)=3/7$. $P(AB)$ ni klassik ta’rifdan topamiz. Hodisalarning umumiy soni-qutidagi ettita shardan ikkita sharning olinishi (rangi ahamiyatga ega emas) $A_7^2=7\cdot 6=42$ o‘rinlashtirish bilan aniqlanadi. AB-hodisaga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar soni $4\cdot 3=12$ ga teng. Demak, $P(AB)=2/7$.

U holda (7) formuladan foydalanib $P_A(B)=\dfrac{2}{3}$ natijani olamiz.

Ehtimolning klassik ta’rifidan foydalanib (7) formulaning to‘g‘riligini isbotlash mumkin.

B hodisaning A shart asosida ro‘y berish ehtimoli

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad (P(A) > 0)$$

formula bilan hisoblanadi.

3-teorema. Bir-biriga bog‘liq ikki A va B hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli - *P(AB)* uchun

$$P(AB) = P(A)P_A(B) \text{ yoki } P(AB) = P(B)P_B(A) \quad (8)$$

formula o‘rinli.

Isbot. n tajribaning A hodisa ro‘y beradigan yoki ro‘y bermaydigan jami hodisalar soni; n_1-A hodisa ro‘y berishga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar soni $(n_1 \le n)$; $m-$tajribaning A hodisa ro‘y berdi degan farazda B hodisa ro‘y beradigan hodisalar soni, ya’ni bu hodisalar AB hodisaning ro‘y berishiga qulaylik tug‘diradi.

A va B hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli:

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1}$$

$\frac{n_1}{n} = P(A)$ va $\frac{m}{n_1} = P_A(B)$ ekanligi e’tiborga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

AB=BA bo‘lganligi uchun teoremani *BA* hodisa uchun qo‘llab quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$$

3-natija. Umumiy holda $A_1,\ A_2,\ \ldots, A_n$ hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli-$P(A_1A_2...A_n)$ uchun

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n) \quad (9)$$

formula o‘rinli.

Shartli ehtimol tushunchasidan foydalanib, erkli hodisalarni boshqacha ta’riflash mumkin.

9-ta'rif. Agar A va B hodisalar uchun $P_A(B) = P(B)$ yoki $P_B(A) = P(A)$ bo'lsa, A va B erkli hodisalar deyiladi.

A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi va $\overline{A}$ kabi belgilanadi. Qarama-qarshi A va $\overline{A}$ hodisalar uchun

$$\begin{cases} A + \overline{A} = \Omega \\ A \cdot \overline{A} = \varnothing \end{cases}$$

munosabat o'rinli ekanligini tushunish qiyin emas.

A hodisaning ro'y berish ehtimoli $P(A) = p$, ro'y bermaslik ehtimoli $P(\overline{A}) = q$ deb olinadi va $p + q = 1$ tenglik har doim o'rinli bo'ladi.

Misol.

4. A hodisa kubik bir marta tashlanganda «6» ochko tushishini bildirsin. U holda $\overline{A}$ hodisa «6» ochko tushmasligini, ya'ni qolgan 1,2,3,4,5 ochkolardan birortasining tushishini bildiradi.

Eslatma. Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar birgalikda bog'liqmas bo'lsa, u holda ularga qarama-qarshi bo'lgan $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$ hodisalar ham birgalikda bog'liqmas bo'ladi.

4-teorema. Birgalikda bo'lgan ikkita hodisadan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolining ayrilganiga teng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{9}$$

Isbot. Ta'rifga ko'ra $A + B$ hodisa yoki $A\overline{B}$, yoki $\overline{A}B$, yoki AB hodisaning ro'y berishidan iborat, ya'ni

$$A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB \, .$$

$A\overline{B}$, $\overline{A}B$ va AB hodisalar birgalikda emas. Shuning uchun,

$$P(A + B) = P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) + P(AB). \tag{10}$$

Endi

$$A = AB + A\overline{B},\ P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}),\ B = A\overline{B} + AB,\ P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$$

munosabatlardan

$$P\left(A\overline{B}\right)=P(A)-P(AB) \quad \text{va} \quad P\left(\overline{A}B\right)=P(B)-P(AB)$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklarni (10) ifodaga qo‘ysak:

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right).$$

(9) formula $A_1, A_2, \dots, A_n$-hodisalar uchun quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (Bul formulasi)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n) \quad (11)$$

Misol.

5. I va II to‘plardan o‘q otishda nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda $p_1=0{,}8$ va $p_2=0{,}9$. Bir yo‘la otishda to‘plardan kamida birining nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa-I to‘pdan otilgan o‘qning nishonga tegishi; B hodisa-II to‘pdan otilgan o‘qning nishonga tegishi bo‘lsin. To‘plardan otilgan o‘qlarning nishonga tegishi bir-biriga bog‘liqmas. Shuning uchun A va B hodisalar erkli hodisalardir. Demak, 2-teoremani qo‘llash mumkin:

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)=0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}72.$$

U holda:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=0{,}8+0{,}9-0{,}72=0{,}98.$$

4-teoremani birgalikda erkli bo‘lgan $A_1, A_2, \dots, A_n$-hodisalar uchun umumlashtirish mumkin. Teoremani isbotsiz keltiramiz.

5-teorema. Birgalikda erkli bo‘lgan $A_1, A_2, \dots, A_n$-hodisalardan hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berish ehtimoli

$$P=1-q_1q_2\ldots q_n$$

formula bilan aniqlanadi. Bu erda $q_i=P(\overline{A}_i), i=\overline{1,n}$.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Ro‘y berish ehtimoli kichik hodisalarning amaliyotda uchramaslik prinsipi.
2. Ehtimollar nazariyasining aksiomatik qurilishi.
3. Hech bo‘lmaganda bitta hodisaning ro‘y berish ehtimoli.
4. n erkli hodisadan faqat k tasining ro‘y berish ehtimoli.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Hodisalar yig‘indisi va ko‘paytmasi amallarini ta’riflang.
2. Qarama-qarshi hodisalar ta’rifini bering.
3. Erkli hodisalar ta’rifini bering.
4. Shartli ehtimol ta’rifini keltiring.
5. Ehtimollarni qo‘shish teoremalarini ayting.
6. Ehtimollarni ko‘paytirish teoremalarini keltiring.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. A_1, A_2, A_3 erkli hodisalarning ro‘y berish ehtimollari mos ravishda p_1, p_2, p_3 ga teng bo‘lsin.

a) faqat bitta hodisaning ro‘y berish ehtimoli;

v) faqat ikkita hodisaning ro‘y berish ehtimoli;

s) uchala hodisaning ro‘y berish ehtimoli;

d) hech bo‘lmaganda bitta hodisaning ro‘y berish ehtimoli topilsin.

2. I va II to‘plardan o‘q otishda nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda $p_1 = 0,75$ va $p_2 = 0,86$. Bir yo‘la otishda to‘plardan kamida birining nishonga tekkizish ehtimolini toping.

3. Qutida 5 ta oq, 8 ta qora shar bor. Qutidan qaytarilmasdan ikkita shar olindi. Olingan sharlarning turli rangda bo‘lish ehtimolini toping.

4. Qutida 5 ta oq, 8 ta qora, 7 ta qizil shar bor. Qutidan qaytarilmasdan uchta shar olindi. Olingan sharlarning turli rangda bo‘lish ehtimolini toping.

5. Javonda 10 ta kitob bo‘lib, ulardan 4 tasi matematikaga oiddir. Tavakkaliga 3 ta kitob olinadi. Olingan kitoblardan hech bo‘lmaganda bittasi matematikaga oid bo‘lish ehtimoli qanday?

4- §. To‘la ehtimol va Bayes formulalari

Hodisalarning to‘la guruhi. Shu paytgacha biror bir hodisaning ro‘y berish ehtimolini hisoblashda bu hodisaning ro‘y berishi uchun sharoit yaratib beruvchi faktorlarni e’tibordan chetda qoldirdik. Amaliyotda esa bunday holatning uchrashi deyarli mumkin emas. Shu sababli, A hodisa ro‘y berishiga ta’sir etuvchi va ma’lum bir shartlarga bo‘ysinuvchi faktorlarni e’tiborga olgan holda uning ro‘y berish ehtimolini hisoblaymiz. Buning uchun to‘la guruh tashkil etuvchi hodisalar to‘plamining ba’zi bir xossalarni ko‘rib chiqamiz.

Ma’lumki, to‘la guruh tashkil etuvchi hodisalar quyidagicha ta’riflanadi.

1-ta’rif. Agar tajriba natijasida $A_1, A_2, \dots A_n$ -hodisalar to‘plamidan hech bo‘lmaganda bittasi ro‘y bersa va ular juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmasa, u holda bu hodisalar to‘plami *to‘la guruh* tashkil etadi deyiladi.

Ta’rifga binoan, agar $A_1, A_2 \dots, A_n$ hodisalar to‘la guruh tashkil etsa, u holda

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega, \quad A_i A_j = \varnothing, \qquad (i \neq j)$$

munosabatlar o‘rinlidir.

Misol.

1. Ikkita talaba biror sport normativini topshirmoqda. Bu sinovda: A_1-faqat bitta talabaning normativni topshirishi; A_2-ikkala talaba ham normativni topshirishi; A_3-talabalarning ikkalasi ham normativni topshira olmasligi bo‘lsa, bu hodisalar to‘plami to‘la guruh tashkil etadi.

To‘la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2, \dots A_n$ -hodisalar uchun xos bo‘lgan quyidagi teoremani keltiramiz.

1-teorema. To‘la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2, \dots, A_n$ -hodisalar ehtimollarining yig‘indisi birga teng:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 . \tag{1}$$

Isbot. Ta’rifga asosan to‘la guruh tashkil etuvchi hodisalardan hech bo‘lmaganda birining ro‘y berishi muqarrardir: muqarrar hodisaning ehtimoli esa birga teng bo‘lgani uchun

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1.$$

Ta'rifga asosan to'la guruhda istalgan ikkita hodisa birgalikda emas, shuning uchun qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Hodisalar to'la guruhi tushunchasi yordamida qarama-qarshi hodisalarni quyidagicha ta'riflash ham mumkin.

2-ta'rif. Agar ikkita hodisa to'la guruh tashkil etsa, u holda bu hodisalarga qarama-qarshi hodisalar deb ataladi.

Yuqoridagi 1-teoremaga asosan, qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{2}$$

Odatda, qarama-qarshi hodisalardan birining ehtimoli p orqali belgilansa, ikkinchisining ehtimoli q orqali belgilanadi. Shunday qilib, $p + q = 1$.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, ba'zan A hodisaning ehtimolini topishda avval $\overline{A}$ hodisaning ehtimolini hisoblash, keyin esa izlanayotgan ehtimolni quyidagi formula orqali topish qulay bo'ladi:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \tag{3}$$

Misol.

2. Qutida 20 ta detal bo'lib, ulardan 12 tasi standart. Tavakkaliga olingan 5 ta detal orasida kamida 1 standart detal bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. $A-$olingan detallar ichida kamida bittasi standart va $\overline{A}$-olingan detallar orasida bitta ham standart detal yo'q hodisalari qarama-qarshi hodisalardir.

Bunda $P(\overline{A})$ ehtimolni topish osonroq.

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_8^5}{C_{20}^5}, \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_8^5}{C_{20}^5}.$$

Endi qo'shish va ko'paytirish teoremalarining natijalari sifatida to'la ehtimol va Bayes formulalarini keltiramiz.

To‘la ehtimol formulasi. A hodisa to‘la guruh tashkil etuvchi birgalikda bo‘lmagan $B_1, B_2, ..., B_n$-hodisalardan bittasining amalga oshish shartida ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. $B_1, B_2, ..., B_n$-hodisalardan har birining ro‘y berish ehtimollari va $P_{B_i}(A), (i = \overline{1,n})$-shartli ehtimolliklar ma’lum bo‘lsin. U holda, A hodisaning ro‘y berish ehtimoli qanday topiladi savoliga quyidagi teorema javob beradi.

2-teorema. Agar A hodisa to‘la guruh tashkil etuvchi, birgalikda bo‘lmagan $B_1, B_2, ..., B_n$-hodisalardan bittasining amalga oshish sharti bilan ro‘y bersa, u holda A hodisaning ro‘y berish ehtimoli

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A) \quad (4)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Isbot. Teorema shartiga asosan, A hodisa ro‘y berishi uchun birgalikda bo‘lmagan $AB_1,\ AB_2,\ \ldots,\ AB_n$ hodisalardan bittasining ro‘y berishi zarur va yetarli, ya’ni

$$A = AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n.$$

teorema shartiga asosan $\{AB_i\} \quad (i = \overline{1,n})$ hodisalar to‘plami birgalikda bo‘lmaganligi va

$$P(B_1A) = P(B_1)P_{B_1}(A), P(B_2A) = P(B_2)P_{B_2}(A), ..., P(B_nA) = P(B_n)P_{B_n}(A)$$

bo‘lgani uchun

$$P(A) = P(AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_n) =$$
$$= P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

(4) formula **«to‘la ehtimol formulasi»** deb ataladi.

Bayes formulasi. To‘la ehtimol formulasi shartlarida A hodisaning ro‘y berishida $B_1,\ B_2,\ \ldots, B_n$-hodisalardan qaysi birining amalga oshishi oldindan ma’lum bo‘lmaganligi sabali $B_1,\ B_2,\ \ldots, B_n$-hodisalar ***gipoteza-lar*** deb ataladi.

Faraz qilamiz, tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, uning natijasida A hodisa ro‘y bergan bo‘lsin. $B_1,\ B_2,\ \ldots, B_n$ gipotezalarning ehtimollari qanday o‘zgarganligini (A hodisa ro‘y berganligi sababli) aniqlash masalasini qaraymiz. Boshqacha aytganda

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2), \ldots, P_A(B_n)$$

shartli ehtimollarni izlaymiz.

Ko‘rsatilgan ehtimollardan birini masalan, $P_A(B_1)$ ni topamiz. Ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra:

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A).$$

Bundan

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Bu munosabatdagi *P(A)* ehtimolni uning to‘la ehtimol formulasidagi ifodasi bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}$$

Qolgan gipotezalarning shartli ehtimollari ham shunga o‘xshash keltirib chiqariladi. Shunday qilib, ixtiyoriy B_k gipoteza uchun

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

formulalar o‘rinli.

Bu formulalar Bayes formulalari deb ataladi (Tom Bayes (1702-1761)-ingliz matematigi). Bayes formulalari tajriba natijasida *A* hodisa ro‘y berganligi ma’lum bo‘lgandan so‘ng B_k $(k = 1,2,...)$ gipotezalar-ning ehtimollarini qayta baholash imkonini beradi.

To‘la ehtimol formulasi va Bayes formulalarining qo‘llanishiga doir quyidagi misolni qaraymiz.

Misol.

3. Talabalarning saralash sport musobaqasida qatnashishi uchun kursning I guruhidan 4 ta, II guruhidan 6 ta, III guruhidan 5 ta talaba ajratilgan. I, II va III guruh talabalarining institut terma komandasiga kirish ehtimollari mos ravishda 0,9; 0,7; va 0,8 ga teng. Quyidagilarni toping:

a) tavakkaliga tanlangan talabaning terma komandaga tushish ehtimolini;

b) tavakkaliga tanlangan talaba terma komandaga kirgan bo‘lsa, uning I, II, III guruhdan bo‘lish ehtimollarini.

Yechish. Tanlangan talabaning terma komandaga kirishi - A hodisa bo‘lsin. U holda talaba tanlash hodisasini quyidagi elementar hodisalarga ajratish mumkin:

B_1-tanlangan talabaning I guruhdan bo‘lishi;

B_2-tanlangan talabaning II guruhdan bo‘lishi;

B_3-tanlangan talabaning III guruhdan bo‘lishi.

Masala shartiga ko‘ra B_1, B_2, B_3-hodisalar to‘la guruh tashkil etadi, chunki talaba tanlashda boshqa elementar hodisa bo‘lishi mumkin emas, hamda ular birgalikda bo‘lmaydi. U holda:

$$P(B_1)=\frac{4}{15};\ \ P(B_2)=\frac{6}{15};\ \ P(B_3)=\frac{5}{15};$$

$$P_{B_1}(A)=0{,}9;\ P_{B_2}(A)=0{,}7;\ P_{B_3}(A)=0{,}8.$$

a) tavakkaliga tanlangan talabaning terma komandaga kirish ehtimolini (4) formulaga asosan topamiz:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A)=$$

$$\frac{4}{15}\cdot 0{,}9+\frac{6}{15}\cdot 0{,}7+\frac{5}{15}\cdot 0{,}8=\frac{59}{75}.$$

b) Bayes formulasiga asosan:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{15}\cdot 0{,}9}{\frac{59}{75}}=\frac{18}{59};$$

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{15}\cdot 0{,}7}{\frac{59}{75}}=\frac{21}{59};$$

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)P_{B_3}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{15}\cdot 0{,}9}{\frac{59}{75}}=\frac{20}{59}\cdot$$

Misoldan ko‘rinib turibdiki, gipotezalarning ro‘y berish ehtimollarining qiymati saqlanib qolmaydi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Hodisalar to‘la guruhsiga ta’rif bering va misollar keltiring.
2. To‘la ehtimol formulasida qanday shartlar talab qilinadi?
3. Bayes formulasi va to‘la ehtimol formulalari orasidagi umumiylik, hamda farq qiluvchi jihatlarni ayting.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Birinchi qutida 3 ta oq va 4 ta qizil shar, ikkinchi qutida esa 5 ta oq, 4 ta qizil shar bor. Birinchi qutidan tavakkaliga 2 ta shar olinib ikkinchi qutiga solindi, so‘ngra ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan sharning oq shar bo‘lish ehtimolini toping.

2. Yig‘uvchiga birinchi zavoddan 5 ta, ikkinchi zavoddan 7 ta, uchinchi zavoddan esa 6 ta bir xil qutida detal keltirildi. Birinchi zavodda tayyorlangan detalning yaroqli bo‘lish ehtimoli-0,95; ikkinchi zavod uchun bu ehtimollik-0,85; uchinchi zavod uchun bu ehtimollik-0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan detal yaroqli chiqqan bo‘lsa, bu detalning qaysi zavodda tayyorlangan bo‘lish ehtimoli yuqori.

3. Omborga 3 ta firma tomonidan mahsulotlar 6:9:5 nisbatda yetkazib beriladi. Birinchi firma mahsulotlarining 90% i, ikkinchisining 80% i va uchinchisining 70% i a’lo sifatlidir. Ombordan tavakkaliga olingan bitta mahsulotning a’lo sifatli bo‘lmaslik ehtimoli qanday? Agar olingan mahsulot a’lo sifatli ekanligi ma’lum bo‘lsa, uning uchinchi firma tomonidan tayyorlanganlik ehtimolini toping.

5 -§. Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli formulasi

Erkli sinovlar ketma-ketligi. Ma'lumki, hodisani kuzatish uchun o'tkaziladigan tajribalar bir necha marta takrorlanishi mumkin. U holda bu tajribada ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi undan oldingi tajribalar natijasiga bog'liq bo'lishi yoki bog'liq bo'lmasligi mumkin. Masalan, qutida n ta qora, m ta oq shar bor. Tajriba qutidan bitta shar olinishi, A hodisa esa olingan sharning oq chiqishi bo'lsin. Buni ikki usulda amalga oshirish mumkin: a) har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng yana qaytarib qutiga solinadi; v) har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng qaytarib qutiga solinmaydi. Har birini alohida ko'rib chiqamiz.

a) Agar har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng yana qaytarib qutiga solinsa, har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli: $P(A)=\dfrac{m}{n+m}$.

b) Agar har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng qaytarib qutiga solinmasa, har bir tajribada $P(A)$ ehtimolning qiymatini hisoblash uchun oldingi tajriba natijasini ehtiborga olishga majburmiz. Haqiqatan ham, birinchi tajribada $P(A)=\dfrac{m}{n+m}$ bo'ladi, ikkinchi tajribada $P(A)=\dfrac{m-1}{n+m-1}$ (birinchi tajriba natijasi A hodisa bo'lsa) yoki $P(A)=\dfrac{m}{n+m-1}$ (birinchi tajriba natijasi $\overline{A}$ hodisa bo'lsa) va hakozo, ya'ni ikkinchi tajribadan boshlab har bir tajribaning natijasi oldingi tajribalar natijasiga bog'liq.

Bu misolning a) holatdagi tajribalar ketma-ketligini erkli sinovlar ketma-ketligi deb ataymiz.

1-ta'rif. Agar o'tkazilayotgan tajribalar ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi (ikkinchi tajribadan boshlab) oldingi tajribalar natijasiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu tajribalar ketma-ketligi erkli sinovlar ketma-ketligi deb ataladi.

Biz quyida bir nechta alohida sodda hodisalardan iborat bo'lgan ***murakkab hodisa*** tushunchasidan foydalanamiz.

Erkli sinovlar ketma-ketligining har bir tajribasida A hodisaning ro'y berish ehtimoli yo har xil, yoki bir xil bo'lishi mumkin. Biz soddalik uchun bu ketma-ketlikining har bir tajribasida A hodisa bir xil ehtimolga ega deb faraz qilamiz.

Faraz qilaylik, n ta erkli sinash o‘tkazilayotgan bo‘lib, ularning har birida A hodisa ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi mumkin bo‘lsin va har bir sinashda A hodisaning ehtimoli bir xil, chunonchi p ga teng deb hisoblansin, u holda ro‘y bermaslik ehtimoli $q=1-p$. Masalan, o‘yin soqqasini tashlashdan iborat tajriba o‘tkazilmoqda. Har bir tashlashda u yoki bu sonda ochkolar chiqish ehtimolligi oldingi tashlashlarda qanday ochko chiqqanligiga bog‘liqmasligi ravshan, binobarin biz A hodisa sifatida 3 ochkoning chiqishini qarasak, bu holda erkli sinovlar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz va $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$.

Binomial sxema. n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro‘y berishi va $n-k$ marta ro‘y bermaslik ehtimoli – $P_n(k)$ ni hisoblaymiz. Buning uchun ketma-ket o‘tkazilgan n ta tajribani bitta murakkab tajriba deb qarasak, bu tajribaning natijasi $A_1, A_2, ..., A_n$ ko‘rinishda bo‘lib, uning har bir A_i $(i=\overline{1,n})$ hadi yoki A, yoki $\overline{A}$ bilan ifodalanadi. Bunday hodisalar soni 2^n ta bo‘ladi. Haqiqatan ham, $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar ichida:

1) $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisaning $A_i = A$ $(i=\overline{1,n})$ shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta;

2) $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisaning $\overline{A}AA...A$ ko‘rinishdagi kombinatsiyalari soni n ta;

. . . .

k) $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisaning $\underbrace{AA...A}_{k}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}$ ko‘rinishdagi kombinatsiyalari soni C_n^k ta;

. . . .

n) $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisaning $A_i = \overline{A}$ $(i=\overline{1,n})$ shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta.

Shunday qilib, $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$ ketma-ketlikni hosil qilamiz, u holda guruhlash xossasiga asosan, $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

Agar n ta tajribada A hodisaning rosa k marta ro‘y berishini B hodisa deb qarasak,

$$B = (\underbrace{AA...A}_{k}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}) \cup (\underbrace{AA...A}_{k-1}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}A) \cup ... \cup \underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}\underbrace{AA...A}_{k} \qquad (1)$$

bo‘lib, u C_n^k ta haddan iborat bo‘ladi. Tajribalar ketma-ketligi erkli bo‘lganligi sababli ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra (1) ifodadagi har bir hadning ehtimolligi $p^k q^{n-k}$ bilan aniqlanadi, u holda (1) ifodada yig‘indidagi har bir had birgalikmasligini e’tiborga olsak:

$$P(B) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (2)$$

Boshlang‘ich belgilashlarga qaytib,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (3)$$

Bernulli (binomial) formulasini hosil qilamiz. (3) binomial formula deb atalishiga sabab u

$$(p+q)^n = C_n^n p^n q^o + C_n^{n-1} p^{n-1} q + ... + C_n^k p^k q^{n-k} + ... + C_n^0 p^0 q^n$$

Nyuton binomining umumiy hadini ifodalashidir.

Misol.

1. Har bir detalning standart bo‘lish ehtimoli $p = 0,8$ bo‘lsa, tavakkaliga olingan 5 ta detaldan 2 tasining standart bo‘lish ehtimolini toping.

Y*echish.* Bu holda $n = 5,\ m = 2,\ p = 0,8$ va $q = 0,2$. Bernulli formulasiga asosan.

$$P_5(2) = C_5^2\, 0,8^2 \cdot 0,2^3 = \frac{5!}{3!2!} 0,00512 = 0,0512.$$

2. Tanga 10 marta tashlandi. «Gerb»ning 3 marta tushish ehtimoli qanchaga teng?

Yechish. Bu hodisaning har bir tajribadagi ehtimoli 1/2 ga teng. Bundan,

$$P_{10}(3)=C_{10}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{10!}{3!7!}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{15}{28}$$

A hodisaning o‘tkazilayotgan *n* ta erkli sinovda kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=P_n(k_1)+P_n(k_1+1)+\ldots+P_n(k_2) \qquad (4)$$

formula bilan hisoblanadi.

2-ta’rif. Agar n ta erkli sinovda hodisaning k_0 marta ro‘y berish ehtimoli sinovning boshqa mumkin bo‘lgan natijalari ehtimollari ichida eng kattasi bo‘lsa, ya’ni

$$P_n(k_0)=\max_{0\le k\le n}\{P_n(k)\} \qquad (5)$$

bo‘lsa, u holda k_0 soni- ***eng ehtimolli son*** deb ataladi.

Eng ehtimolli son quyidagi qo‘sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np-q\le k_0\le np+p\,. \qquad (6)$$

Eng ehtimolli sonni aniqlash uchun hamma ehtimollarni hisoblab chiqmasdan, balki sinovlar soni *n* ni va har bir sinovda *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolini bilish kifoya ekan. Haqiqatan ham, eng ehtimolli songa mos keluvchi ehtimol

$$P_n(k_0)=C_n^{k_0}\,p^{k_0}q^{n-k_0}=\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!}\;p^{k_0}q^{n-k_0}$$ bo‘lsin.

Eng ehtimolli sonning ta’rifidan

$$P_n(k_0)\ge P_n(k_0-1),P_n(k_0)\ge P_n(k_0+1).$$

Bu tengsizliklarga mos ravishda $P_n(k_0),\ P_n(k_0-1),\ P_n(k_0+1)$ larning qiymatlarini qo‘yib quyidagilarga ega bo‘lamiz.

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!}p^{k_0}q^{n-k_0} \geq \frac{n!\, p^{k_0-1}q^{n-k_0+1}}{(k_0-1)!(n-k_0+1)!},$$

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!}p^{k_0}q^{n-k_0} \geq \frac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!}p^{k_0+1}q^{n-k_0-1}$$

Bu tengsizliklarni k_0 ga nisbatan yechamiz va quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$k_0 \leq np + p;\ k_0 \geq np - q$$

Oxirgi ikki tengsizlikni birlashtirib, eng ehtimolli sonni aniqlovchi tengsizlikka ega bo‘lamiz:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p$$

Bu tengsizlikni aniqlovchi intervalning uzunligini

$$np + p - (np - q) = p + q = 1$$

va hodisa n ta sinov natijasida butun son marta ro‘y berishini hisobga olsak, eng ehtimolli son k_0 quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

a) agar $np-q$ son kasr bo‘lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo‘ladi;

b) agar $np-q$ butun son bo‘lsa, u holda k_0 va k_0+1 eng ehtimolli sonlar mavjud bo‘ladi;

v) agar np butun son bo‘lsa, u holda eng ehtimolli son $k_0 = np$ bo‘ladi.

Misol.

3. Tanga 6 marta tashlanadi. Gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli sonini toping.

Yechish. Berilgan masalaning shartlariga asosan, $n = 6, p = q = 1/2$. U holda, **«gerb»** tushishining eng ehtimolli soni k_0 ni quyidagicha topamiz: $k_0 = np = 3$.

Demak, eng ehtimolli son 3 ekan.

Shunday qilib, eng ehtimolli sonni aniqlash jarayonida biz *np* sonning Bernulli sxemasida maxsus ahamiyatga ega ekanligiga ishonch hosil qilish imkoniga ega bo‘ldik. Bu shundan iborat bo‘ldiki, *np* songa eng yaqin bo‘lgan ikkita butun sonlardan biri (ba’zan ikkalasi, ba’zan o‘zi) eng ehtimolli son bo‘ldi.

1-eslatma. *np* son yuqoridagiga nisbatan ham muhimroq bo‘lgan talqinga ega. Chunonchi, np ni ma’lum ma’noda n ta tajribalardagi muvaffaqiyatlarning ***o‘rtacha soni*** deb qarash mumkin.

Misol.

4. Ma’lum korxonaning ishlab chiqarishda yaroqsizlikka yo‘l qo‘yish ehtimoli 0,05 ga teng. 100 ta mahsulot orasidagi yaroqsiz mahsulotlarning o‘rtacha soni nimaga teng?

Yechish. Izlanayotgan son $np = 100 \cdot 0,05 = 5$ ga teng bo‘ladi.

2-eslatma. Binomial sxemasida erkli sinovlar ketma-ketligining har bir sinashida A hodisaning ehtimoli bir xil, p ga teng deb hisoblangan edi. Endi esa bu ehtimollarni turlicha bo‘lsin deb faraz qilamiz, ya’ni $P(A_i) = p_i, P(\overline{A}_i) = q_i$, u holda (3) formula quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$P_n(k) = p_1 p_2 ... p_k q_{k+1} ... q_n + p_1 q_2 p_3 ... p_{k+1} q_{k+2} ... q_n$$
$$+ q_1 q_2 ... q_{n-k} p_{n-k+1} ... p_n \,. \tag{7}$$

(7) formulaning o‘ng tomonini hosil qilish uchun

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i z) \tag{8}$$

ko‘paytmani qarab z^k ning koeffitsientlarini olish kifoya, bu erda z ixtiyoriy parametr bo‘lib, $\varphi(z)$ funksiya $P_n(k)$ ehtimollarni hosil qiluvchi funksiya deb ataladi.

Polinomial sxema. Binomial sxemaning (Bernulli sxemasining) umumlashmasi bo‘lgan polinomial sxemani ko‘rib chiqamiz. Agar Bernulli sxemasida har bir tajribada faqat 2 ta hodisa $\overline{A}$ va A qaralgan bo‘lsa, polinomial sxemada har bir tajribada to‘la guruh hosil qiluvchi *k* ta hodisa qaraladi.

Tajriba shundan iborat bo‘ladiki, n ta erkli sinov o‘tkaziladi va ularning har birida to‘la guruh hosil qiladigan k ta $A_1, A_2, \ldots, A_k$ hodisaning faqat bittasi ro‘y berishi mumkin, bunda bu hodisalarning ehtimolliklari ma’lum:

$$p_1 = P\left(A_1\right),\ p_2 = P\left(A_2\right),\ \ldots,\ p_k = P\left(A_k\right).$$

n tajribada A_1 hodisa m_1 marta, A_2 hodisa m_2 marta, . . . , A_k hodisa m_k marta ($m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$) ro‘y berish ehtimoli quyidagiga teng bo‘ladi:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}. \qquad (9)$$

Xususiy holda, bu formuladan $k = 2$ bo‘lganda Bernulli formulasi kelib chiqadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Erkli sinovlar ketma-ketligini ta’riflang.
2. Berunulli formulasi nima uchun xizmat qiladi?
3. Bernulli formulasini keltirib chiqaring.
4. Eng ehtimolli son ta’rifini bering va hisoblash formulasini keltiring.
5. Erkli sinovlar ketma-ketligining polinomial sxemasi nima?

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Tanga 7 marta tashlandi. «Gerb» tomoni
a) 2 marta; b) kamida 3 marta; v) ko‘pi bilan 3 marta tushish ehtimollari topilsin.

2. O‘yin kubigi 50 marta tashlanganda 2 ochko tushishining eng ehtimolli sonini toping.

3. Turli masofadan bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda nishonga 4 ta o‘q uzildi.Har bir o‘qning nishonga tegish ehtimoli mos ravishda: $p_1 = 0,4; p_2 = 0,7; p_3 = 0,5; p_4 = 0,6$ bo‘lsa, birortasining ham nishonga tegmaslik, bittasining, ikkitasining, uchtasining va to‘rttasining ham nishonga tegish ehtimollari topilsin.

4. Nishon beshta zonadan iborat. Har bir zonaga o‘qning tegish ehtimollari $p_1 = 0,3; p_2 = 0,2; p_3 = 0,15; p_4 = 0,4; p_5 = 0,25$ bo‘lsin. Otilgan 13 ta o‘qdan 3 tasi birinchi, 4 tasi ikkinchi, 2 tasi uchinchi, 1 tasi to‘rtinchi, qolgan 3tasi esa beshinchi zonaga tegish ehtimollari topilsin.

5. Avtomat stanokda standart detal tayyorlash ehtimoli 0.9 ga teng. Avtomat stanokda tayyorlangan 6 ta detallar orasidan standartlarining eng ehtimolli sonini va bu sonning ehtimolini hisoblang.

6-§. Muavr-Laplasning limit teoremalari. Puasson teoremasi

n та erkli sinovda A hodisaning k marta ro‘y berish ehtimolini hisoblashga imkon beruvchi Bernulli formulasini keltirib chiqarish uchun har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimolini o‘zgarmas deb faraz qilganmiz. Agar n ning katta qiymatlarida $P_n(k)$ ehtimollarni hisoblashda Bernulli formulasidan foydalansak, hisoblashda juda qiyin bo‘lgan arifmetik amallarni bajarishimizga to‘g‘ri keladi. Masalan, biror korxonada yaroqsiz mahsulot chiqarish ehtimoli 0,25 ga teng bo‘lib, tayyor mahsulotdan 500 tasi tekshirilsin. Tekshirilgan mahsulotlar orasida 25 tasining yaroqsiz bo‘lish ehtimolini topilshi talab qilinsin. Bu holda har bir mahsulotning tekshirilishini bitta tajriba sifatida qarab, har birida A hodisaning (tekshirilgan bitta mahsulotning yaroqsiz deb topilishi) ro‘y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo‘lgan 500 ta erkli tajriba o‘tkazilyapti deb hisoblashimiz mumkin, u holda Bernulli formulasiga asosan:

$$P_{500}(25) = C_{500}^{25}\left(0,25\right)^{25}\cdot\left(0,75\right)^{475},$$

bu yerda

$$C_{500}^{25} = \frac{476\cdot 477\cdot\ldots\cdot 499\cdot 500}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 25}.$$

Bu misoldan ko‘rinib turibdiki, n ning katta qiymatlarida $P_n(k)$ ehtimollarni hisoblashni osonlashtirish uchun boshqa asimptotik formulalardan foydalanish zaruriyati tug‘iladi. Bu formulalar ehtimollar nazariyasida ***limit teoremalari*** deb ataluvchu teoremalarda keltiriladi.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi. Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p ($0<p<1$) o‘zgarmas bo‘lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning k marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k)$ uchun,

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\right) = 0 \qquad (1)$$

tenglik bajariladi, bu erda $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Bu teoremani Muavr 1730 yilda $p=\frac{1}{2}$ uchun, so‘ngra Laplas 1783 yilda $p\in(0;1)$ uchun isbotlagan. Biz esa bu teorema xulosasini isbotsiz qabul qilamiz.

Maxsus jadvallarda $\varphi(x)$ funksiyaning faqat x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlari keltirilgan. $\varphi(x)$ funksiya juft, ya’ni $\varphi(-x)=\varphi(x)$ bo‘lganligi uchun bu jadvallardan x ning manfiy qiymatlarida ham foydalaniladi.

Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning rosa k marta ro‘y berish ehtimoli taqriban quyidagiga teng:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x). \tag{2}$$

n ning katta qiymatlarida (2) ning aniqligi oshib boradi.

Misollar.

1. Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo‘lsa, 400 ta tajribada A hodisaning 80 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish. $n=400,\ k=80,\ p=0{,}2,\ q=0{,}8$.

$$P_{400}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\varphi(x)\approx\frac{1}{8}\varphi(x),\qquad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot 0{,}2}{8}=0$$

jadavaldan $\varphi(0)=0{,}3989$.

U holda: $P_{400}(80)\approx\frac{0{,}3989}{8}\approx 0{,}04986$.

2. Merganning o‘qni nishonga tekkizish ehtimoli: $p=0{,}75$. Mergan otgan 10 ta o‘qdan 8 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. $n=10,\ k=8,\ p=0{,}75,\ q=0{,}25$

(2) formuladan foydalansak:

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}}\ \varphi(x) \approx 0{,}7301 \cdot \varphi(x),$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0{,}75}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \approx 0{,}36$$

jadvaldan: $\varphi(0{,}36) = 0{,}3789$.

U holda: $P_{10}(8) = 0{,}7301 \cdot 0{,}3739 \approx 0{,}273$.

Endi bu masalani Bernulli formulasidan foydalanib yechimini topamiz va boshqa natijaga: $P_{10}(8) = 0{,}282$ ga kelamiz.

Javoblar orasidagi katta farqni n ning qiymati kichikligi bilan tushuntiriladi.

Ma'lumki, har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas bo'lsa, u holda n (kichik n larda) ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli Bernulli formulasiga asosan quyidagiga teng:

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

n ning katta qiymatlarida esa $P_n(k_1, k_2)$ ehtimolni hisoblash uchun quyidagi teoremadan foydalanamiz.

Muavr-Laplasning integral teoremasi. Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli $p(0<p<1)$ o'zgarmas bo'lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k_1, k_2)$ taqriban quyidagi aniq integralga teng.

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x'') - \Phi(x') \qquad (3)$$

bu yerda

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Laplas funksiyasi deb ataluvchi $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ integralning qiymatlari uchun maxsus jadval tuzilgan. Jadvalda integralning $0 \le x \le 5$ kesmaga mos bo'lgan qiymatlari berilgan, chunki $x > 5$ lar uchun $\Phi(x) = 0{,}5$ deb olish mumkin. $\Phi(x)$ funksiya toq, ya'ni $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, bo'lgani uchun jadvaldan $x < 0$ qiymatlat uchun ham foydalanish mumkin.

Misol. 3. Detalni texnik nazorat bo'limi (TNB) tekshirmagan bo'lish ehtimoli $p = 0{,}2$. Tasodifan olingan 400 ta detaldan kamida 70 ta ko'pi bilan 100 ta detalni TNB tekshirmagan bo'lish ehtimolini toping.

Y*echish.* $p = 0{,}2,\ q = 0{,}8,\ n = 400,\ k_1 = 70,\ k_2 = 100$, u holda

$$x' = \frac{70 - 400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = -1{,}25, \quad x'' = \frac{100 - 400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = 2{,}75.$$

(3) formulaga asosan,
$P_{400}(70,100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25)$.
Jadvaldan $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938;\ \ \Phi(1{,}25) = 0{,}3944$.

U holda $P_{400}(70,100) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$.

Nisbiy chastotaning o'zgarmas ehtimoldan chetlanishi. Faraz qilaylik, A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas p ga $(0 < p < 1)$ teng bo'lgan n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lsin. $\frac{k}{n}$ nisbiy chastotaning o'zgarmas p ehtimoldan chetlanishini absolyut qiymati bo'yicha oldindan berilgan $\varepsilon > 0$ sondan katta bo'lmaslik, ya'ni $\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon$ tengsizlik bajarilishining ro'y berish ehtimoli: $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right)$ ni baholaymiz. Yuqoridagi tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan $-\varepsilon \le \frac{k - np}{n} \le \varepsilon$ tengsizlik bilan almashtiramiz. Uni $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ ko'paytuvchiga ko'paytirsak: $-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$. Agar

$x' = -\varepsilon\sqrt{n/_{pq}}$, $\quad x'' = \varepsilon\sqrt{n/_{pq}}$ belgilashlarni kiritib, Muavr-Laplasning integral teoremasidan foydalansak:

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Shunday qilib:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \tag{4}$$

Xulosa qilib aytganda,

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon$$

tengsizlik bajarilishining ro‘y berish ehtimoli taqriban Laplas funksiyasining $x = \varepsilon\sqrt{n/_{pq}}$ dagi ikkilangan qiymatiga teng ekan.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi *p* ehtimol $p = \frac{1}{2}$ ning atrofida bo‘lganda $P_n(k)$ ni hisoblash uchun yaxshi natija beradi, lekin p bir yoki nolga yaqin qiymatlarni qabul qilsa bu formula ma’lum bir xatoliklarga olib keladi. Shuning uchun p bir yoki nolga yaqin qiymatlarni qabul qilganda $P_n(k)$ ni hisoblash uchun boshqa asimptotik formula topish zarurati tug‘iladi.

Biz *p* ning nolga yaqin qiymatlarini ko‘rish bilan chegaralanamiz, chunki *p* birga yaqin qiymatlarni qabul qilsa *p* ni *q* bilan almashtirish mumkin, ya’ni *p* ning o‘rniga *q* ni ishlatish mumkin, chunki $p \to 1 \Rightarrow q \to 0$.

$P_n(k)$ ehtimolning

$$P_n(k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}, \quad (1 - p = q)$$

ifodasini formal ravishda ikkita $n,\ p$ o‘zgaruvchilarning funksiyasi deb qarash mumkin. Faraz qilamiz, k fiksirlangan, n va p esa o‘zgaradi, ya’ni n va p lar mos ravishda cheksizlikka va nolga shunday intiladiki, natijada $\lambda = np$ miqdor chegaralangan bo‘lib qolaveradi: $\lambda = np = const$.

Bernulli formulasiga asosan,

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Bu yerda $np = \lambda \Rightarrow p = \lambda/n$ almashtirish bajaramiz. U holda,

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

n juda katta sonligini e’tiborga olib $P_n(k)$ o‘rniga $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k)$ ni topamiz. Shu sababli, $P_n(k)$ ehtimolning taqribiy qiymati topiladi, chunki n juda katta son bo‘lgani bilan chekli, bizda esa $n \to \infty$. Shuni ta’kidlash kerakki, $n \to \infty \Rightarrow p \to 0$, chunki $np = const$.

Shunday qilib,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Bundan esa quyidagi teoremaning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi

Puasson teoremasi. Agar n ta erkli sinovlar ketma-ketligida A hodisaning k marta ro‘y berishida, k fiksirlangan, n va p esa o‘zgaruvchan bo‘lib, n va p lar mos ravishda cheksizlikka va nolga shunday intilsaki, $\lambda = np$ miqdor chegaralangan bo‘lib qolaversa: $P_n(k)$ ehtimollik uchun

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (5)$$

munosabat oʻrinli boʻladi.

Bunda $\lambda = np$.

Misol. 3. Qoʻshma korxona isteʼmolchiga 5000 sifatli mahsulot joʻnatdi. Mahsulotning yoʻlda shikastlanish ehtimoli 0,001 ga teng boʻlsa, yoʻlda ikki yoki undan ortiq mahsulotning shikastlanish ehtimolini toping.

Yechish. Shikastlangan mahsulotlar sonini k desak, izlanayotgan ehtimol $P_{5000}(k \geq 2)$ boʻlib, u quyidagiga teng boʻladi:

$$P_{5000}(k \geq 2) = P_{5000}(2) + P_{5000}(3) + \ldots + P_{5000}(5000) =$$
$$= 1 - \left[P_{5000}(0) + P_{5000}(1)\right].$$

Bizning holda sinashlar soni katta va hodisa roʻy berish ehtimoli 0 ga yaqin boʻlganligi uchun Puasson teoremasidan foydalanamiz.

$\lambda = pn = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$ ekanligini eʼtiborga olsak:

$$P_{5000}(0) = \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} = e^{-5}; \quad P_{5000}(1) = \frac{5^1 \cdot e^{-5}}{1!} = e^{-5};$$

U holda: $P_{5000}(m \geq 2) = 1 - e^{-5} - 5e^{-5} = 1 - 6e^{-5} \approx 0{,}9596$.

Tavsiya etiladigan mustaqil taʼlim va referat mavzulari

1. Umumlashgan Bernulli sxemasi.
2. Umumlashgan lokal va integral teoremalar.
3. Stiltes integrali.

Oʻz-oʻzini tekshirish uchun savollar

1. Muavr-Laplasning lokal teoremasini taʼriflang.
2. Muavr-Laplasning integral teoremasini tushuntiring.
3. Puasson teoremasi qanday hollarda qoʻllaniladi?
4. Lokal va integral teoremalarning amaliy ahamiyati nimadan iborat?

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Urug‘lik bug‘doyning 0,06% i begona o‘tlar urug‘idan iborat. Tavakkaliga olingan 10000 dona urug‘dan 7 tasi; 10 tasi begona o‘tlar urug‘i bo‘lishini ehtimolini toping.
2. Kuzatilayotgan hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimoli 0,3 ga teng. 100 ta tajriba o‘tkazilganda bu hodisaning nisbiy chastotasi 0,2 va 0,4 oraliqda o‘zgarish ehtimolini toping.
3. 500 sahifali kitobni nashr qilishda bosmaxona 50 ta xatoga yo‘l qo‘ygan. Tavakkaliga olingan sahifada xato bo‘lish ehtimoli topilsin.
4. Agar har tajribada hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo‘lsa 600 ta tajribada bu hodisa 130 marta ro‘y berish ehtimolini toping.
5. Tuman soliq inspeksiyasining ma’lumotlariga ko‘ra, tumandagi mavjud kichik korxonalarning o‘rtacha 40% i soliqlarni o‘z vaqtida to‘lamaydi. Agar tumanda 300 ta kichik korxona bo‘lsa, soliqlarni o‘z vaqtida to‘lamaganlari soni 150 tadan ko‘p bo‘lishlik ehtimoli qanday?

7 -§. Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni. Amalda ko‘p uchraydigan diskret taqsimot qonunlari

Tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bilan biz oldindan tanishmiz. Masalan, tajriba o‘yin kubigi tashlanishidan iborat bo‘lsin. Bunda, $\Omega = \{\omega_i\}, (i = \overline{1,6})$ to‘plamda 6 ta elementar hodisa bo‘ladi. Ochkolar soni tasodifiy miqdor bo‘lsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlari esa uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bo‘ladi.

***1-ta’rif*.** Tasodifiy miqdor deb, tajriba natijasida mumkin bo‘lgan, oldindan noma’lum va tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan qiymatlardan bittasi va faqat bittasini tayin ehtimol bilan qabul qiladigan kattalikka aytiladi.

Tasodifiy miqdorlar, odatda, lotin alfavitining bosh harflari $X, Y, Z, \ldots$ bilan, ularning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari esa mos ravishda alfavitning kichik harflari $x, y, z, \ldots$ bilan belgilanadi. Masalan, $X : x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Tasodifiy miqdorlar ikki turga ajratib o‘rganiladi: a) diskret tasodifiy miqdorlar; b) uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Bu ikki tushuncha haqida ma’lumot berishdan oldin to‘plam va uning elementlari haqida ba’zi bir ma’lumotlarni berib o‘tamiz.

2-ta’rif. Agar to‘plam elementlarining sonini biror bir son bilan ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda bu to‘plam ***chekli to‘plam*** deb ataladi.

3-ta’rif. Agar to‘plam elementlarining soni cheksiz bo‘lib uning elementlarini nomerlash (natural sonlar to‘plami bilan o‘zaro bir qiymatli akslantirish) mumkin bo‘lsa, u holda bu to‘plam ***sanoqli to‘plam*** deb ataladi.

4-ta’rif. Agar to‘plam elementlarining soni cheksiz bo‘lib uning elementlarini nomerlash (natural sonlar to‘plami bilan o‘zaro bir qiymatli akslantirish) mumkin bo‘lmasa, u holda bu to‘plam ***kontiniuum quvvatli to‘plam*** deb ataladi. (Kontiniuum quvvatli to‘plam uning elementlarini [0;1] kesmadagi haqiqiy sonlar to‘plami bilan o‘zaro bir qiymatli akslantirish orqali ham aniqlanadi.)

Diskret tasodifiy miqdorlarning mumkin bo‘lgan qiymatlari ayrim ajralgan bo‘lib, uning mumkin bo‘lgan qiymatlarining soni yo chekli, yoki sanoqli bo‘ladi.

Misol.

1. X-tasodifiy miqdor 100 ta buyumdan iborat guruhdagi yaroqsiz buyumlar soni. Bu miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2, \ldots, x_{101} = 100$.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarining soni har doim kontiniuum quvvatga ega bo‘ladi. Masalan, **«Kalashnikov»** avtomatidan otilgan o‘qning eng uzoqqa uchish masofasi 2500 m bo‘lsin. U holda undan otilgan qandaydir o‘qning borib tushgan masofasini X tasodifiy miqdor deb qarasak uning qabul qiladigan qiymatlari $[0;2500]$ kesmadagi ixtiyoriy nuqta bo‘lishi mumkin.

Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarning aniq ta’rifi keyinchalik beriladi.

Biz hozir faqat diskret tasodifiy miqdorlar va ularning ba’zi bir xarakteristikalari bilan tanishib chiqamiz.

Taqsimot qonuni. Shunday qilib, diskret tasodifiy miqdorni tavsiflash uchun, eng avvalo, uning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarini ko‘rsatish lozim. Ammo, X tasodifiy miqdorning faqat mumkin bo‘lgan qiymatlari: $x_1, x_2, \ldots$ larni bilish uning xususiyatlarini ta’riflashga yetarli emas, chunki tasodifiy miqdor o‘zining har bir qiymatini har xil ehtimollik bilan qabul qilishi mumkin. Shu sababli, diskret tasodifiy miqdorni to‘liq aniqlash uchun $x_1, x_2, \ldots$ qiymatlardan tashqari $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots$ hodisalarning ehtimollarini ham, ya’ni $p_1 = P(X = x_1),\ p_2 = P(X = x_2), \ldots$ larni ham ko‘rsatish lozim.

5-ta’rif. Disket tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonunini ifodalash usullari va shakllari turlicha bo‘lishi mumkin.

X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilishining eng sodda shakli jadval bo‘lib, bunda miqdorning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlari yozilgan va ularga mos ehtimolliklar ko‘rsatilgan bo‘ladi:

$$X:\ x_1 \quad x_2 \ \dots \ x_n \dots$$
$$p:\ p_1 \quad p_2 \ \dots \ p_n \dots$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlar, odatda, ortib borish, yoki kamayib borish tartibida yoziladi.

Bundan tashqari, $\{X = x_i\}$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi birgalikdamasligi va $\{X = x_i\}$ hodisalar to‘plami to‘la guruh tashkil etganligi sababli

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \sum_i p_i = 1$$

tenglik har doim o‘rinli bo‘ladi. Ba’zan diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni grafik usulda-taqsimot ko‘pburchagi yordamida ham beriladi.

Taqsimot ko‘pburchagini hosil qilish uchun, absssissalar o‘qida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari, ordinatalar o‘qida esa ularga mos ehtimollar qo‘yiladi, keyin esa (x_1, p_1), (x_2, p_2),... nuqtalarni kesmalar bilan tutashtiriladi. Taqsimot qonuni formula (analitik) usulida ham beriladi.

Misol. 2. Tanga 5 marta tashlandi. «Gerb» tomonning tushish soni X tasodifiy miqdor bo‘lsin. X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4, 5 sonlardan iborat bo‘ladi. Tasodifiy miqdorning bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi yordamida hisoblanadi. Masalan, $P(X = 3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$ va hakozo. U holda

$$\begin{array}{ccccccc} X: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p: & \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32} \end{array}$$

ko‘rinishdagi jadvalni hosil qilamiz.

Diskret tasodifiy miqdorlarning amalda ko‘p uchraydigan taqsimot qonunlari. Diskret tasodifiy miqdorlarning amalda ko‘p uchraydigan quyidagi taqsimot qonunlari bilan tanishib chiqamiz.

1. ***Binomial taqsimot qonuni.*** n ta erkli tajriba o‘tkazilyotgan bo‘lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin.

n ta tajribada A hodisaning yuz berishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorni qaraymiz. Bu tasodifiy miqdorga mos jadval

$$\begin{array}{llllll} X: & 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ p: & P_n(0) & P_n(1) & P_n(2) & \ldots & P_n(n-1) & P_n(n) \end{array}$$

ko‘rinishda bo‘lib, bunda

$$P_n(k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}, \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n). \tag{1}$$

Bu jadvalda $P_n(k)$ $(k=\overline{0,n})$ ehtimollik binomial formuladan foydalanib hisoblanganligi sababli yuqoridagi jadval bilan xarakterlanadigan taqsimot qonuni *binomial taqsimot qonuni* deb ataladi. (1) formula esa binomial taqsimotning analitik ifodasi deyiladi.

Misol. 3. Do‘konga kirgan har bir xaridorning xarid qilish ehtimoli 0,25 ga teng bo‘lsa, do‘kondagi 4 ta xaridorning xarid qilishini X tasodifiy miqdor deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari: 0, 1, 2, 3, 4. $P_n(k)$ ehtimollarni Bernulli formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$P_4(0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}, \qquad P_4(1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{108}{256},$$

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{54}{256}, \qquad P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{12}{256},$$

$$P_4(4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{256}.$$

Olingan ma’lumotlarni jadvalga joylashtirib

$$\begin{array}{llllll} X: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ p: & \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{54}{256} & \frac{12}{256} & \frac{1}{256} \end{array}$$

taqsimot qonunini hosil qilamiz.

Puasson taqsimot qonuni. n ta erkli tajriba o‘tkazilyotgan bo‘lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. n ta tajribada A hodisaning yuz berishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorni qaraymiz. Agar X tasodifiy miqdorga mos jadval

$$\begin{array}{llllll} X: & 0 & 1 & 2 \ldots & k & \ldots \\ p: & p_0 & p_1 & p_2 \cdots & p_k & \cdots \end{array}$$

ko‘rinishda bo‘lib, X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan $\{x_k\}$ $(k=0,1,2,...)$ qiymatlarining ehtimollari

$$P_n(k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \left(k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\quad\right), \lambda = np = const \qquad (2)$$

formula bilan hisoblansa, X tasodifiy miqdor Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan deyiladi. (2) formula Puasson taqsimotining analitik ko‘rinishi deyiladi.

Misol. 4. Qo‘shma korxona iste’molchiga 3000 mingta sifatli mahsulot jo‘natdi. Mahsulotning yo‘lda shikastlanish ehtimoli 0,001 ga teng bo‘lsa, yo‘lda shikastlangan mahsulotlar sonini X tasodifiy miqdor deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing.

Y*echish.* Shartga asosan, $\lambda = 3$, $X: 0,1,2,...,3000$. U holda (2) formula yordamida X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzamiz.

$$\begin{array}{lllll} X: & 0 & 1 & \ldots & 3000 \\ p: & P_{3000}(0) & P_{3000}(1) & \ldots & P_{3000}(3000) \end{array}$$

Geometrik taqsimot qonuni. Erkli tajribalar o‘tkazilyotgan bo‘lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. A hodisa yuz berishi bilan tajriba to‘xtatiladi. X tasodifiy miqdor A hodisaning birinchi ro‘y berishigacha bo‘lgan tajribalar soni bo‘lsin. Agar ($k-1$)-tajribagacha A hodisa ro‘y bermasdan k-tajribada ro‘y bersa, bu murakkab hodisaning ehtimoli

$$P\left(X = k\right) = q^{k-1}p \qquad (3)$$

formula bilan aniqlanadi. (3) formulada $k = 1, 2, \ldots$ deb qarab

$$\begin{array}{lcccccc} X: & 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p: & p & qp & q^2p & \ldots & q^{k-1}p & \ldots \end{array}$$

jadvalni hosil qilamiz. Bu taqsimot qonuni geometrik taqsimot qonuni deb ataladi va (3) formula uning analitik ko'rinishi bo'ladi.

Misol. 5. X-kubikni tashlashda birinchi marta «6» ochko tushgun-cha o'tkaziladigan tajribalar soni bo'lsin. Ravshanki, bu holda X-diskret tasodifiy miqdor bo'lib, $p = 1/6$ parametrli geometrik taqsimot qonuniga bo'ysinadi. Ya'ni

$$\begin{array}{lcccccc} X: & 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p: & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} & \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} & \ldots & \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6} & \ldots \end{array}$$

Gipergeometrik taqsimot qonuni. Ma'lumki, N ta detalning ichida M ta standart detal bo'lganda tasodifiy ravishda olingan n ta detalning orasida k ta standart detal bo'lishining ehtimoli

$$P_n(k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \tag{4}$$

formula yordamida topiladi.

Agar X tasodifiy miqdorning

$$\begin{array}{lccccc} X: & 0 & 1 & \ldots & k & \ldots \\ p: & P(0) & P_n(1) & \ldots & P_n(k) & \ldots \end{array}$$

taqsimot qonunida $P_n(k)$ ehtimollar (4) formula yordamida hisoblansa, X tasodifiy miqdor gipergeometrik taqsimot qonuniga bo'ysinadi deyiladi va (4) formulani gipergeometrik taqsimotning analitik ko‘rinishi deb qabul qilingan.

Misol. 6. Qutida 7 ta shar bo‘lib ularning 4 tasi qora. Tasodifiy ravishda 3 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonidan iborat bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdorning qabul qilidigan qiymatlari: 0, 1, 2, 3. Bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollarini (4) dan foydalanib hisoblaymiz:

$$P_3(0)=\frac{C_3^0\cdot C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35},\quad P_3(1)=\frac{C_3^1\cdot C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35},$$

$$P_3(2)=\frac{C_3^2\cdot C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35},\quad P_3(3)=\frac{C_3^3\cdot C_4^0}{C_7^3}=\frac{1}{35}.$$

U holda quyidagi taqsimot qonuni hosil bo‘ladi:

$$\begin{array}{ccccc} X: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p: & \frac{4}{35} & \frac{18}{35} & \frac{12}{35} & \frac{1}{35} \end{array}$$

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Styudent taqsimoti.
2. Gamma taqsimoti.
3. Koshi taqsimoti.
4. Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Tasodifiy miqdor ta’rifini bering.
2. Tasodifiy miqdorlarning qanday turlari bor?
3. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb nimaga aytiladi?
4. Taqsimot qonuni qanday shakllarda berilishi mumkin?

5. Diskret tasodifiy miqdorlarning amalda ko‘p uchraydigan taqsimot qonunlarini keltiring.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Har o‘q uzishda o‘qning nishonga tegish ehtimol 0,8 ga teng bo‘lsa, otilgan 5 ta o‘qdan nishomga tekkanlari sonining taqsimot qonunini tuzing va taqsimot ko‘pburchagini chizing.

2. Qutida 10 ta shar bo‘lib ularning 6 tasi qora. Tasodifiy ravishda 5 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonidan iborat bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

3. Qutida 1000 ta detal bo‘lib har bir detalning yaroqsiz chiqish ehtimoli 0,003 ga teng. Olingan detallar uchun yaroqsizlarining taqsimot qonunini tuzing.

4. Qutida 11 ta shar bo‘lib ularning 4 tasi qora. Tasodifiy ravishda 5 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonidan iborat bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing va taqsimot ko‘pburchagini chizing.

5. Bankdan kredit olgan mijozlarning o‘rtacha 20 % i kreditni o‘z vaqtida qaytarmaydi. Berilgan 4 ta kreditdan o‘z vaqtida qaytarilganlar sonidan iborat tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing.

8-§. Diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari

Ma’lumki, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni X miqdorni to‘liq tavsiflab beradi. Ammo ko‘pincha taqsimot qonuni noma’lum bo‘lib, uni aniqlash katta qiyinchiliklar tug‘diradi va biz kam ma’lumot bilan chegaralanishimizga to‘g‘ri keladi. Ba’zida esa tasodifiy miqdorni umumlashtiruvchi sonlarni qo‘llash foydalidir. Bu sonlar tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari deb ataladi va ularning vazifasi tasodifiy miqdorning eng muhim xususiyatlarini qisqa shaklda ifodalashdir.

Matematik kutilma va uning xossalari. Tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalaridan biri ***matematik kutilma*** deb ataladi. Matematik kutilma tasodifiy miqdorning o‘rta qiymatiga taxminan tengdir. Juda ko‘p masalalarning yechimini matematik kutilmani bilish orqali hal etish mumkin. Masalan, viloyatlarni taqqoslovchi ko‘rsatkichlardan biri ularda yetishtirilgan hosilning o‘rtachasi, ya’ni matematik kutilmasidir.

1-ta’rif. X diskret tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarining mos ehtimollariga ko‘paytmalari yig‘indisiga uning matematik kutilmasi deb aytiladi.

X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

$$\begin{array}{lllll} X: & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p: & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

berilgan bo‘lsin. U holda uning $M(X)$-matematik kutilmasi

$$M(X) = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \ldots + x_n\,p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\,p_i \qquad (1)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni cheskiz, ya’ni X tasodifiy miqdor

$$\begin{array}{lllll} X: & x_1 & x_2 & \dots & x_n \dots \\ p: & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \cdots \end{array}$$

taqsimotga ega bo‘lsa, u holda uning matematik kutilmasi

$$M\left(X\right)=x_1\,p_1+x_2\,p_2+\ldots+x_n\,p_n+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\,p_i \tag{2}$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda oxirgi qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi. Aks holda, bu tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo‘lmaydi.

Misollar.

1. Taqsimot qonuni

$$\begin{array}{lcccccc} X: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ p: & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

ko‘rinishda bo‘lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. (1) formuladan foydalanamiz:

$$M\left(X\right)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5\,.$$

2. Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. Ma’lumki, Puasson qonuni quyidagi jadval bilan aniqlanadi:

$$\begin{array}{lcccccc} X: & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & k \\ p: & e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \dfrac{\lambda e^{-\lambda}}{2!} & \dfrac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} & \ldots & \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\,. \end{array}$$

U holda

$$M\left(X\right)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{\left(k-1\right)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda\,.$$

Shunday qilib, Puasson taqsimotini xarakterlovchi parametr λ X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini bildirar ekan.

3. Agar A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p bo‘lsa, bitta tajribada A hodisa ro‘y berish sonlarining matematik kutilmasini toping.

Yechish. Bitta tajribada A hodisaning ro‘y berishi sonlarini X tasodifiy miqdor desak, u faqat ikkita qiymat qabul qilishi mumkin: $x_1 = 1$ (A hodisa ro‘y berdi), bunda $P(X = x_1) = p$; $x_2 = 0$ (A hodisa ro‘y bermadi), bunda $P(X = x_2) = q$. U holda: $M(X) = p$.

X tasodifiy miqdor ustida n marta sinov o‘tkazilib, uning natijalari quyidagicha bo‘lsin:

$$\begin{array}{llll} X: & x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ n: & n_1 & n_2 & \ldots & n_k \end{array}.$$

Yuqoridagi satr X miqdorning kuzatilgan qiymatlarini, pastki satr esa bu qiymatlarning chastotalarini bildiradi, ya’ni x_i $(i = \overline{1,k})$ qiymatni X miqdor n_i marta qabul qilgan.

$\overline{X}$ orqali kuzatilgan barcha qiymatlarning o‘rta arifmetigini belgilaylik, u holda

$$\overline{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n},$$

yoki

$$\overline{X} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \ldots + x_k \frac{n_k}{n} = x_1 W_1 + x_2 W_2 + \ldots + x_k W_k$$

Bu yerda $W_1, W_2, \ldots, W_k$ - mos ravishda $x_1, x_2, \ldots, x_k$ qiymatlarning nisbiy chastotalari.

Demak, $\overline{X} = M(X)$, ya’ni X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning kuzatiladigan qiymatlari o‘rta arifmetigiga taqriban teng.

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. O‘zgarmas miqdorning matematik kutilmasi o‘zgarmasning o‘ziga teng:

$$M(C) = C.$$

Isbot. C o‘zgarmas miqdorni yagona C qiymatni 1 ga teng ehtimol bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Shuning uchun, $M(C) = C \cdot 1 = C$.

1-eslatma. X diskret tasodifiy miqdorning o‘zgarmas C kattalikka ko‘paytmasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_n \Rightarrow CX : Cx_1, Cx_2, \ldots, Cx_n.$$

2-xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchini matematik kutilma belgisi ostidan chiqarish mumkin:

$$M(CX) = CM(X).$$

Isbot. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$\begin{array}{lllll} X: & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p: & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

ko‘rinishda bo‘lsin. Uholda 1-eslatmaga asosan,

$$\begin{array}{lllll} CX: & Cx_1 & Cx_2 & \ldots & Cx_n \\ p: & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}.$$

Bundan CX tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblaymiz

$$M\left(CX\right) = Cx_1\,p_1 + Cx_2\,p_2 + \ldots + C\,x_n\,p_n = CM(X).$$

3-xossa. Chekli sondagi tasodifiy miqdorlar yig‘indisining matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalari yig‘indisiga teng:

$$M\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) = M\left(X_1\right) + M\left(X_2\right) + \ldots + M\left(X_n\right)$$

4-xossa. Chekli sondagi bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarining ko‘paytmasiga teng:

$$M\left(X_1X_2...X_n\right) = M\left(X_1\right)M\left(X_2\right)...M\left(X_n\right).$$

3-xossadan va 3-misoldan foydalanib quyidagi teoremani isbotlash mumkin

1-teorema. n ta bog‘liqmas tajribalarda A hodisa ro‘y berishining matematik kutilmasi: $M(X) = np$.

Matematik kutilmalarining tengligi tasodifiy miqdorlarning qabul qiladigan qiymatlari bir xil deb xulosa chiqarishga imkon bermaydi. Masalan,

$$\begin{array}{llll} X: & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ p: & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} Y: & -50 & 0 & 50 \\ p: & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{array}$$

tasodifiy miqdorlarda $M(X)=M(Y)=0$, ammo ularning mumkin bo‘lgan qiymatlari turlichadir. Shu sababli tasodifiy miqdorning tarqoqligini aniqlovchi ikkinchi sonli xarakteristika-*dispersiya* tushunchasini kiritamiz.

Dispersiya tushunchasini kiritishdan oldin tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi tushunchasini kiritib olamiz.

2-ta'rif. Tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi orasidagi farqni uning chetlanishi deb ataymiz va $X-M(X)$ ko‘rinishda belgilaymiz.

Tasodifiy miqdor chetlanishining muhim xossasini ko‘rsatuvchi quyidagi teoremani keltiramiz (teoremani mustaqil isbotlang) .

2-teorema. Tasodifiy miqdor chetlanishining matematik kutilmasi nolga teng:

$$M(X-M(X))=0\,.$$

Dispersiya va uning xossalari. Amaliyotda tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlarini uning o‘rtachasi atrofida joylashish tarqoqligini baholash zarurati tez-tez uchrab turadi. Masalan, merganlik darajasini baholashda. Shu sababli, dispersiya tushunchasi kiritiladi, chunki tasodifiy miqdor chetlanishi qiymatlar tarqoqligini baholay olmasligi 2-teoremadan ko‘rinib turibdi.

3-ta'rif. X tasodifiy miqdorning $D(X)$-dispersiyasi deb, uning chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$D(X)=M(X-M(X))^2\,. \tag{3}$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula ushbu ko‘rinishni oladi:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i\,. \tag{4}$$

4-ta'rif. X tasodifiy miqdorning $\sigma(X)$-o‘rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan arifmetik kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,. \tag{5}$$

Dispersiyaning o‘lchamligi tasodifiy miqdor o‘lchamligining kvadratiga tengdir. O‘rtacha kvadratik chetlanishniki esa tasodifiy miqdor o‘lchami bilan bir xil bo‘ladi.

Agar X biror bir qimmatbaho qog‘ozning daromadliligi bo‘lsa, $M(X)$ uning o‘rtacha daromadliligini, $D(X)$ esa riskini ifodalaydi.

Misol. Agar *A* hodisaning ro‘y berish ehtimoli p ga teng bo‘lsa, u holda A hodisaning bitta sinovda ro‘y berish sonining matematik kutilmasi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Y*echish.* Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

$$X: \; 0 \;\; 1$$
$$p: \; q \;\; p \, .$$

U holda,

$$M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$
$$D(X) = (0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p = qp^2 + pq^2(p+q) = qp;$$
$$\sigma(X) = \sqrt{pq}$$

Dispersiyani hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanish qulayroqdir:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

Tasodifiy miqdor dispersiyasi quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. O‘zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = 0 \, .$$

Isbot. C o‘zgarmas miqdorni C qiymatini 1 ehtimol bilan qabul qiladi deb qarash mumkin. U holda

$$M(C) = C \text{ va } D(C) = (C-C)^2 \cdot 1 = 0$$

2-xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchini dispersiya belgisidan tashqariga kvadratiga oshirib chiqarish mumkin:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3-xossa. Chekli sondagi o‘zaro bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar yig‘indisining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig‘indisiga teng:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$$

Natija. Bog‘liqmas ikkita tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig‘indisiga teng.

$$D(X_1 - X_2) = D(X_1) + D(X_2)$$

Ushbu natija ikkitadan ortiq tasodifiy miqdorlar uchun ham o‘rinli ekanligini isbotlash qiyin emas.

Misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadrat chetlanishini hisoblang.

$X:$	-2	1	3	6
$p:$	$0,4$	$0,2$	$0,1$	$0,3$

Yechish.

$$M(X)=2\cdot 0,4+1\cdot 0,2+30,1+6\cdot 0,3=1,5,$$

$$D(X)=M\big(X-M(X)\big)^2=$$

$$=(-2-1,5)^2\cdot 0,4+(1-1,5)^2\cdot 0,2+(3-1,5)^2\cdot 0,1+(6-1,5)^2\cdot 0,3=11,25$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{11,25}\approx 3,36.$$

Biz dispersiyani ta’rif bo‘yicha hisobladik. Endi $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$ formula bo‘yicha hisoblaylik. Buning uchun dastlab X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzib olamiz.

$X^2:$	4	1	9	36
$p:$	$0,4$	$0,2$	$0,1$	$0,3$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=13,5-2,25=11,25.$$

Endi tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘lanish darajasini aniqlashga yordam beruvchi ba’zi bir tushunchalarni kiritamiz.

5-ta’rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya momenti (yoki kovariatsiyasi) deb, quyidagi songa aytiladi:

$$K_{xy}=M\big[(X-M(X))(Y-M(Y))\big].$$

X va Y tasodifiy miqdorlar diskret bo‘lsa, u holda bu formula quyidagi ko‘rinishini oladi:

$$K_{xy}=\sum_{i,j}(x_i-M(X))(y_i-M(Y))p_{ij},$$

bunda $p_{ij}=P\big(X=x_i;Y=y_j\big)$.

Korrelyatsiya momenti ifodasini matematik kutilma xossalari asosida quyidagicha almashtirilish mumkin;

$$M(X-M(X))(Y-M(Y))=M[XY-XM(Y)-YM(X)+M(X)M(Y)]=$$

$$= M(XY) - M(X)M(Y) - M(Y)M(X) + M(X)M(Y) =$$
$$= M(XY) - M(X)M(Y).$$

3-teorema. Agar tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa, u holda korrelyatsiya momenti nolga teng bo‘ladi.

6-ta’rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsienti deb

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{6}$$

tenglik bilan aniqlanadigan kattalikka aytiladi.

Korrelyatsiya momenti uchun quyidagi

$$\left| K_{xy} \right| \le \sqrt{D_x D_y}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin, chunki $\left| r_{xy} \right| \le 1$.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liqmas bo‘lsa, u holda ularning korrelyatsiya koeffitsienti nolga tengligini ko‘rsatish qiyin emas.

Quyidagi teorema tasodifiy miqdorlar orasida bog‘lanishni tavsiflashda korrelyatsiya koeffitsientining ahamiyatini yana ham batafsil oydinlashtirib beradi.

4-teorema. Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorning chiziqli funksiyasi, ya’ni $Y = aX + b$ bo‘lsin, u holda agar $a > 0$ bo‘lsa, $r_{xy} = 1$, agar $a < 0$ bo‘lsa, $r_{xy} = -1$ bo‘ladi.

Isbot.

$$K_{xy} = M\left[\left(X - M(X)\right)\left(Y - M(Y)\right)\right] = M\left[\left(X - M(X)\right)\left(aX + b - M(Y)\right)\right] =$$
$$= M\left[\left(X - M(X)\right)\left(aX + b - aM(X) - b\right)\right] = aM\left[\left(X - M(X)\right)\right]^2 = aD(X) = a\sigma_x^2$$
$$\sigma_y^2 = D(Y) = a^2 D(X) = a^2 \sigma_x^2, \qquad \sigma_y = |a| \sigma_x,$$
$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{|a|\sigma_x^2} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Bir xil taqsimlangan o‘zaro erkli tasodifiy miqdorlar.

2. Boshlang‘ich va markaziy momentlar.
3. Asosiy diskret taqsimotlarning sonli xarakteristikalari.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Tasodifiy miqdor matematik kutilmasi va dispersiyasi ta’riflarini ayting.
2. Matematik kutilma va dispersiya tasodifiy miqdorning qaysi jihatlarini xarakterlaydi?
3. Matematik kutilma va dispersiyaning xossalarini keltiring.
4. Kovariatsiya nima?

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Qutida 11 ta shar bo‘lib ularning 4 tasi qora. Tasodifiy ravishda 5 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonidan iborat bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing va uning sonli xarakteristikalarini aniqlang.

2. Omborga 2000 ta mahsulot olib kelindi. Bu mahsulotlarning yo‘lda yaroqsiz holga kelish ehtimoli 0,05 ga teng. X tasodifiy miqdorni ombordagi mahsulotlarning yaroqsizlari deb qarab, uning taqsimot qonunini tuzing va matematik kutilmasini aniqlang.

3. Tanga 3 marta tashlandi. X tasodifiy miqdorni tanganing «gerb» tomoni tushishlar soni deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing va dispersiyasini aniqlang.

4. Ikki mergan nishonga qarata navbat bilan o‘q uzmoqda. Ularning nishonga o‘qni tekkizish ehtimollari mos ravishda: 0,75 va 0,9. Har bir merganda ikkitadan o‘q bo‘lib, o‘q nishonga tegishi bilan otishni to‘xtatadilar. Agar X tasodifiy miqdor otilgan o‘qlar sonidan iborat bo‘lsa uning taqsimot qonunini tuzing va matematik kutilmasini aniqlang.

5. Uchta qimmatbaho qog‘ozdan daromad olish ehtimollari mos ravishda 0.6 ; 0.7 va 0.8 ga teng. Daromad olinadigan qimmatbaho qog‘ozlar sonining taqsimot qonunini tuzing va matematik kutilishini toping.

9 -§. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot va zichlik funksiyalari

Taqsimot funksiyasi va uning xossalari. Ma'lumki diskret tasodifiy miqdorlarninig berilish usullaridan biri taqsimot qonunini, ya'ni u qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar ro'yxati va bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari ko'rsatilgan jadvalni tuzishdan iborat edi. Diskret tasodifiy miqdorlarning bu ko'rinishdagi berilish usullarini uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun qo'llab bo'lmaydi. Chunki uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar ro'yxatini tuzish mumkin emas. Shu sababli uzluksiz tasodifiy miqdorlarni ta'riflash uchun taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi.

1-ta'rif. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb, uning x (x-ixtiyoriy haqiqiy son) dan kichik qiymatlarni qabul qilish ehtimolini aniqlovchi

$$F(x) = P(X < x) \qquad (1)$$

funksiyaga aytiladi.

Ba'zan $F(x)$- funksiyani integral taqsimot funksiyasi deb ham ataladi.

Endi bu taqsimot funksiyasidan foydalanib uzluksiz va diskret tasodifiy miqdorlarning qat'iy ta'rifini berish mumkin.

2-ta'rif. Agar tasodifiy miqdorning $F(x)$-taqsimot funksiyasi uzluksiz va differentsiallanuvchi bo'lsa, tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

3-ta'rif. Agar tasodifiy miqdorning $F(x)$-taqsimot funksiyasi chekli yoki sanoqli sondagi I tur uzulishlarga ega bo'lsa, tasodifiy miqdor diskret tasodifiy miqdor deyiladi.

Taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Taqsimot funksiyaning qiymatlari [0;1] kesmaga tegishli:

$$0 \le F(x) \le 1$$

Isbot: Bu xossaning isboti taqsimot funksiyani ehtimol sifatida ta'riflanishdan, ya'ni $F(x) = P(X < x)$ ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Taqsimot funksiyasi kamaymaydigan funksiyadir, ya'ni $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.

Isbot: Faraz qilamiz $x_1 < x_2$ bo'lsin, u holda $(X < x_2)$ oraliqni quyidagicha yozib olish mumkin

$(X < x_2) = (X < x_1) + (x_1 \le X < x_2)$. *Bunda* $(X < x_1), (x_1 \le X < x_2)$ tasodifiy hodisalar birgalikda emasligidan quyidagi tenglikni yozish mumkin

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Endi taqsimot funksiyaning ta'rifidan foydalansak

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2) \qquad (2)$$

tenglikni hosil qilamiz. Ehtimolning nomanfiyligidan kerakli natijani olamiz

2-xossadan quyidagi natijalarni keltirib chiqarish mumkin.

1-natija. X tasodifiy miqdorning $[a;b)$ intervalda yotuvchi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli quyidagicha aniqlanadi.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Buning isboti (2) formulada $x_1 = a, x_2 = b$ almashtirishdan kelib chiqadi

2-natija. X uzluksiz tasodifiy miqdorning faqat bitta aniq qiymatni qabul qilishi ehtimoli nolga teng, ya'ni $P(X = x_0) = 0$.

Buning isboti (2) formulada $x_1 = x_0, x_2 = x_0 + \Delta x$ almashtirish so'ngra $\Delta x \to 0$ limitni hisoblashdan kelib chiqadi.

Shu sababli, uzluksiz tasodifiy miqdorning bitta qiymatni qabul qilish ehtimolini hisoblashning ahamiyati yo'q va shunga ko'ra quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$P(a < X < b) =$$
$$= P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

3-xossa. Agar tasodifiy miqdorning_mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \to a-0} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to b+0} F(x) = 1 \qquad (4)$$

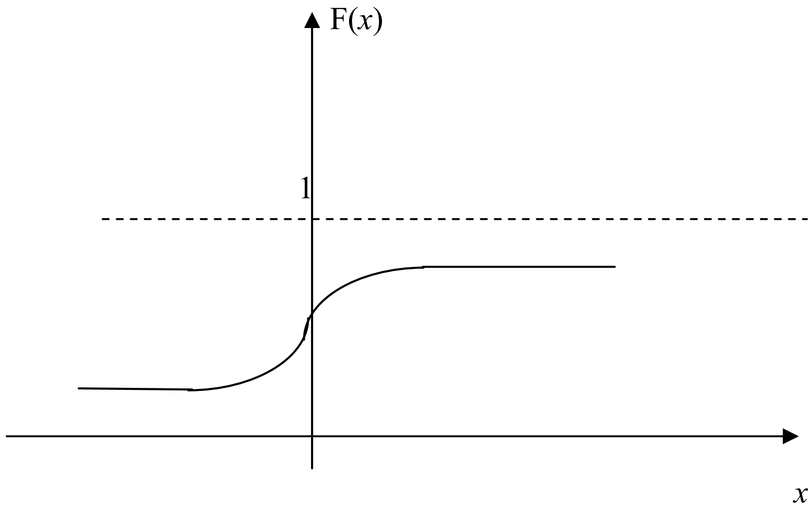
munosabatlar o'rinli bo'ladi.

3-natija. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari butun Ox o‘qda joylashgan bo‘lsa, u holda quyidagi munosabatlar o‘rinli:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \qquad (5)$$

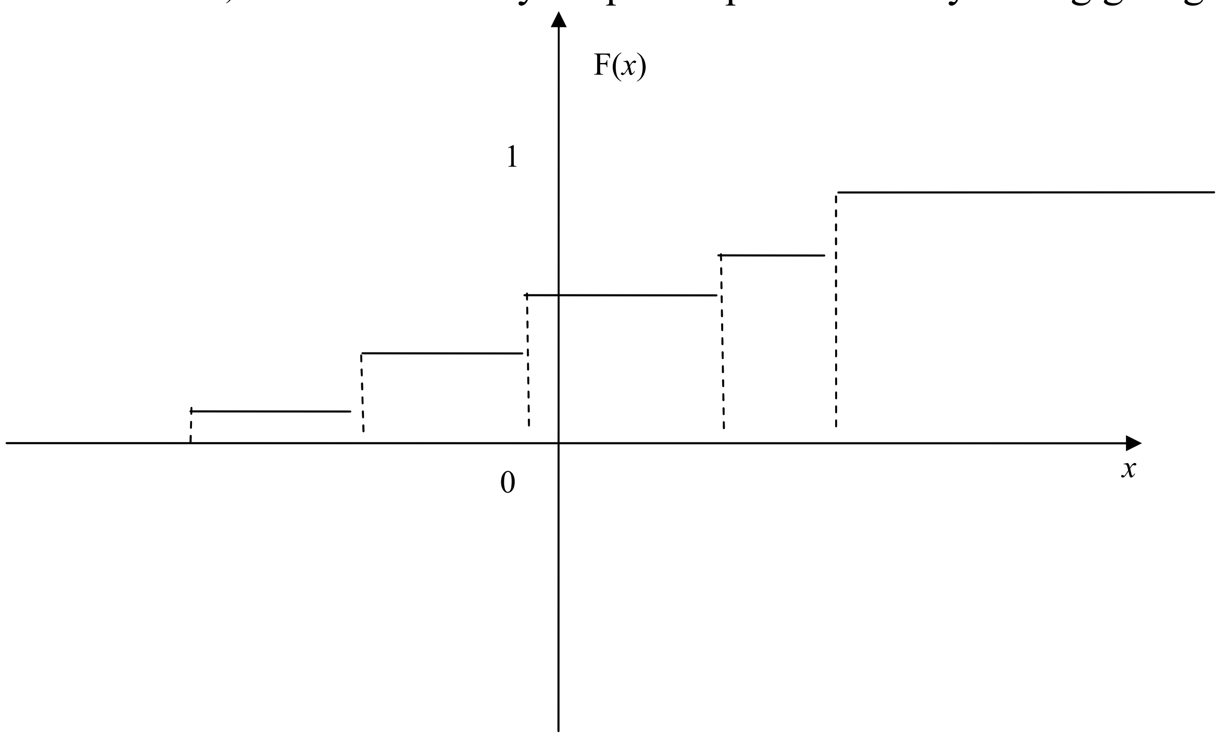
Yuqoridagi xossalardan foydalanib tasodifiy miqdorlar taqsimot funksiyasining grafigini sxematik chizish mumkin.

a) Uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining grafigi.



1-rasm

b) Diskret tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining grafigi.



2-rasm

Misollar.

1. X tasodifiy miqdor

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x \le -1, \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}, & agar \quad -1 < x \le 3, \\ 1, & agar \quad x > 3. \end{cases}$$

taqsimot funksiya bilan berilgan bo‘lsin. Sinash natijasida X tasodifiy miqdor $(0;2)$ intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish.

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Misol.

2. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi

$$\begin{array}{llll} X: & 1 & 4 & 8 \\ p: & 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{array}$$

taqsimot qonuni bilan berilgan bo‘lsin. Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x \le 1, \\ 0,3, & agar \quad 1 < x \le 4, \\ 0,4, & agar \quad 4 < x \le 8, \\ 1, & agar \quad x > 8. \end{cases}$$

Zichlik funksiyasi va uning xossalari. Yuqorida uzluksiz tasodifiy miqdorlarni taqsimot funksiyalari yordamida aniqlagan edik. Ammo uzluksiz tasodifiy miqdorlarni faqat taqsimot funksiyasi yordamida emas, balki boshqa funksiyalar bilan ham aniqlash mumkin. Buning uchun zichlik (differensial) funksiyasi tushunchasini kiritishimiz kerak bo‘ladi.

3-ta’rif. Tasodifiy miqdorning zichlik (differensial) funksiyasi deb, taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi va quyidagicha aniqlanadi

$$F'(x) = f(x). \tag{6}$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun zichlik funksiyasi muhim ahamiyatga ega bo‘lib, bu funksiya yordamida uzluksiz tasodifiy miqdorlarning barcha xarakteristikalarini aniqlash mumkin. Bu yerda ularning ba’zilarini keltirib o‘tamiz.

1-teorema. X uzluksiz tasodifiy miqdorning $(a;b)$ intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilishi ehtimoli zichlik funksiyasidan a dan b gacha olingan aniq integral bilan aniqlanadi:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Isbot. Ma’lumki, 1-natijaga asosan

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Agar bu yerda Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta’rifi (6) ifodadan foydalansak, quyidagini hosil qilamiz

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Bundan tashqari, X tasodifiy miqdorning $f(x)$ zichlik funksiyasi ma’lum bo‘lsa uning $F(x)$ taqsimot funksiyasini topish uchun quyidagi aniqmas integraldan foydalaniladi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{8}$$

Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. $f(x)$-zichlik funksiyasi nomanfiy funksiyadir, ya’ni $f(x) \ge 0$.

Isbot. Bu xossa $f(x)$ zichlik funksiyasi kamaymaydigan $F(x)$ taqsimot funksiyaning hosilasi ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Agar tasodifiy miqdor butun sonlar o‘qida aniqlangan bo‘lsa quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{9}$$

Isbot. Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta’rifiga asosan;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - 0 = 1.$$

1-eslatma. Agar X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $(a;b)$ oraliqdan iborat bo‘lsa, u holda yuqoridagi formula

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \tag{10}$$

ko‘rinishini oladi. Bu formula geometrik nuqtai nazardan Ox o‘q, $f(x)$ funksiya, $x = a$ va $x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi 1 ga tengligini bildiradi.

2-eslatma. Zichlik funksiyasi faqat uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun mavjud.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Aniq va aniqmas integral.
2. Xos va xosmas integral.
3. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari.
4. Uzluksiz funksiya va uning xossalari.

O‘z- o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Taqsimot funksiya va zichlik funksiyasi ta’riflarini keltiring.
2. Diskret tasodifiy miqdor uchun taqsimot funksiya, zichlik funksiyasi tushunchalari o‘rinlimi?
3. Taqsimot funksiya xossalarini keltiring.
4. Zichlik funksiya xossalari keltiring.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan..

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad agar \quad x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ 3\sin 3x, \quad agar \quad \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 0, \quad agar \quad x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Uning $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping.

2. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (0;1) intervalda $f(x) = C\operatorname{arctg}x$ kabi aniqlangan. Bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. C o‘zgarmas parametrni toping.

3. X uzluksiz tasodifiy miqdor

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x < 0, \\ 2e^{-2x}, & agar \quad x \geq 0. \end{cases}$$

qonun bo‘yicha taqsimlangan. Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning $(0{,}3;1)$ oraliqqa tushishi ehtimolini toping.

4. Mumkin bo‘lgan qiymatlari (1;4) oraliqda yotuvchi X – uzluksiz tasodifiy miqdor $x = 4$ nuqtada maksimumga erishadigan $F(x) = ax^2+bx+c$ taqsimot funksiyasiga ega. Noma’lum a,b,c parametrlarni toping va $P(2 < x < 3)$ ehtimolni hisoblang.

10-§. Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari. Amalda ko‘p uchraydigan uzluksiz taqsimot funksiyalari

Diskret tasodifiy miqdorlar kabi uzluksiz tasodifiy miqdorlarda ham matematik kutilma va dispersiya tushunchalari katta ahamiyatga ega. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun bu tushunchalar quyidagicha kiritiladi.

1-ta’rif. Mumkin bo‘lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo‘lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb,

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx \tag{1}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar Ox o‘qqa tegishli bo‘lsa, u holda matematik kutilma formulasi quyidagi ko‘rinishni oladi

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{2}$$

Bu holatda xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi, ya’ni

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx$$

integralning qiymati mavjud deb faraz qilinadi.

2-ta’rif. Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb uning chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo‘lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx \tag{3}$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari Ox o‘qqa tegishli bo‘lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx \tag{4}$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash uchun (3) va (4) formuladan foydalanish ba’zan noqulay hisoblanadi, shu sababli dispersiyani hisoblash uchun (3) formulaning qulay ko‘rinishini keltirib chiqaramiz.

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx=\int_a^b x^2 f(x)dx-2\int_a^b xM(X)f(x)dx+\int_a^b M^2(X)f(x)dx=$$
$$=M(X^2)-2M(X)\int_a^b xf(x)dx+M^2(X)\int_a^b f(x)dx=M(X^2)-M^2(X).$$

(4) formulaga ham bu ko‘rinishdagi formulani keltirib chiqarish mumkin. Shunday qilib, ko‘p hollarda dispersiyani hisoblash uchun

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X) \tag{5}$$

formuladan foydalaniladi.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \tag{6}$$

formula bilan aniqlanuvchi kattalik uzluksiz tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi deyiladi.

1-eslatma . Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyasi uchun ham diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyalariniki kabi xossalar o‘rinli bo‘ladi.

Misol.

1. Ushbu

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 0, \\ x, & agar \quad 0<x\le 1, \\ 1, & agar \quad x>1. \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Yechish: Ma’lumki

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{agar} \quad x<0,\\ 1, & \text{agar} \quad 0<x<1,\\ 0, & \text{agar} \quad x>1.\end{cases}$$

(1) formuladan foydalanib X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

(5) formuladan foydalanib X tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz:

$$Д(X)=\int_0^1 x^2 1dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Endi uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun amalda ko‘p uchraydigan ba’zi taqsimot va zichlik funksiyalarni hamda bu funksiyalarning xossalarini ko‘rib chiqamiz.

1. Tekis taqsimot qonuni.

3-ta’rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & agar \quad a<x\le b,\\ 0, & agar \quad x>b.\end{cases} \tag{7}$$

ko‘rinishda bo‘lsa bu tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda tekis taqsimot qonuniga bo‘ysinadi deyiladi.

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ formuladan foydalanib bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz.

1) Agar $x\le a$ bo‘lsa, u holda $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0.$

2) Agar $a<x\le b$ bo‘lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} 0dt+\int_a^x\frac{dt}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}.$$

3) Agar $x>b$ bo‘lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} f(t)dt+\int_{a}^{b} f(t)dt+\int_{b}^{x} f(t)dt=0+\frac{b-a}{b-a}+0=1.$$

Demak,

$$F\left(x\right)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & agar \quad a<x\le b, \\ 1, & agar \quad x>b. \end{cases} \tag{8}$$

Odatda, (7) zichlik funksiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdorni $(a;b)$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

$(a;b)$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uchun

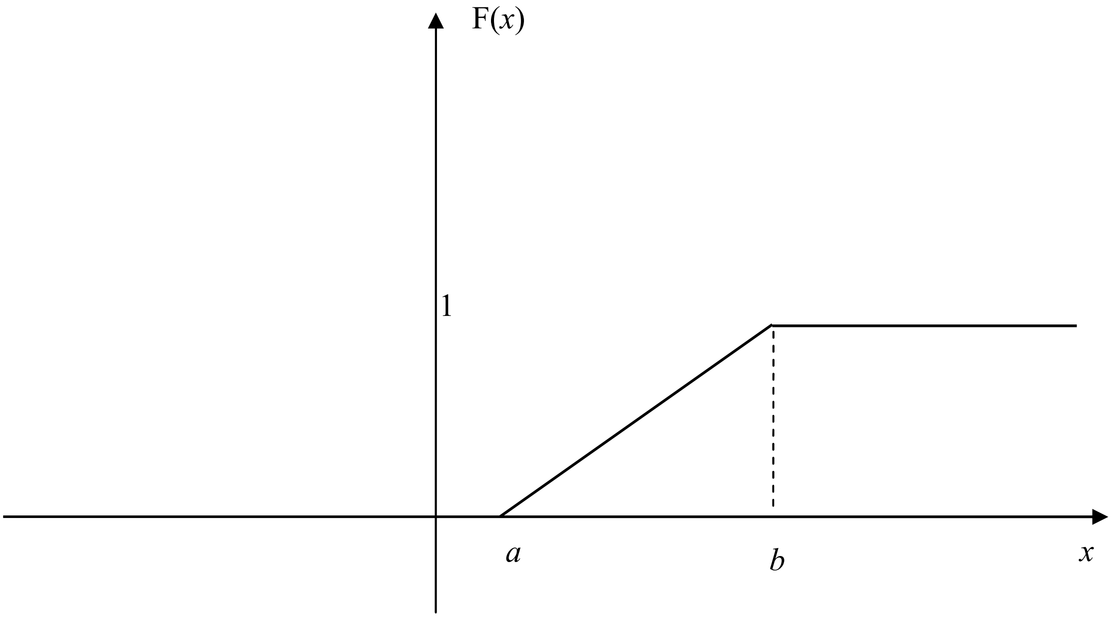
$$M(X)=\frac{a+b}{2}\ ,$$

dispersiyasi uchun esa

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

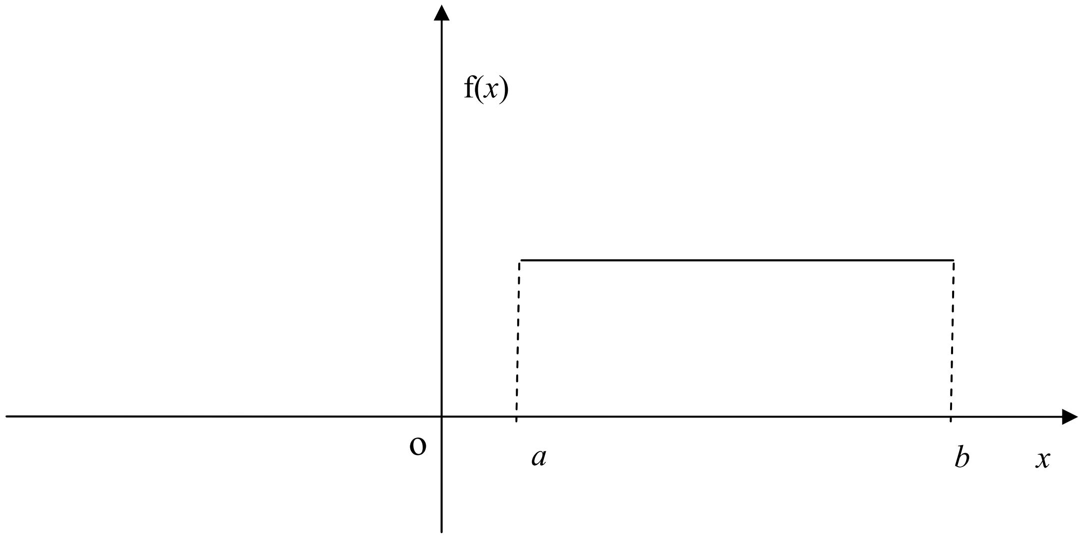
tenglik o‘rinli bo‘ladi.

(a,b) oraliqda tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasining grafigi (1-rasm) sxematik holda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



1-rasm

(a,b) oraliqda tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasining grafigi (2-rasm) sxematik holda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



2-rasm

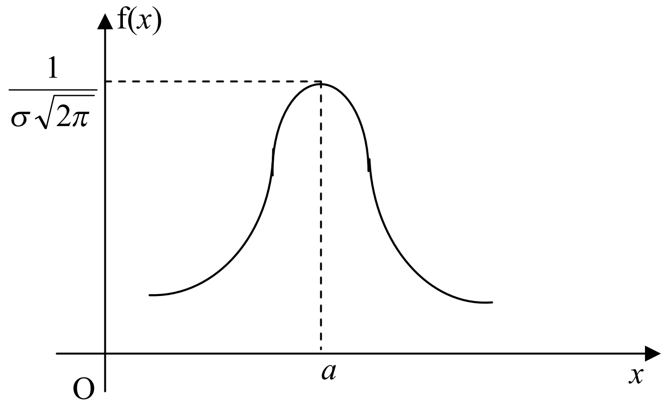
2. Normal taqsimot qonuni.

4-ta’rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (9)$$

ko‘rinishda bo‘lsa bu tasodifiy miqdor normal taqsimot qonuniga bo‘ysinadi deyiladi.

Bu zichlik funksiya grafigining (3-rasm) sxematik chizmasi quyidagi ko‘rinishga ega:



3-rasm.

Bu egri chiziq normal egri chiziq (Gauss egri chizig‘i) deb ataladi. Differensial hisoblash metodlaridan foydalanib $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ funksiyani tekshirsak u quyidagi xossalarga ega bo‘ladi.

1. Funksiya butun sonlar o‘qida aniqlangan.

2. x ning barcha qiymatlarida funksiya grafigi Ox o‘qidan yuqorida yotadi.

3. Ox o‘q funksiya grafigining gorizontal asimptotasi hisoblanadi.

4. $x=a$ nuqtada funksiya maksimumga erishadi va $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ qiymatni qabul qiladi.

5. $x=a$ chiziqqa nisbatan funksiya grafigi simmetrik joylashgan.

6. $(a-\sigma,\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}})$ va $(a+\sigma,\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}})$ nuqtalar funksiya grafigining burilish nuqtalari hisoblanadi.

(9) formuladan ko‘rinib turibdiki, normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ikki: *a* va σ (σ-sigma) parametrlar bilan aniqlanadi. Demak, normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini aniqlash uchun shu ikkita parametrning qiymatlarini bilish kifoya ekan. Bu parametrlarning ehtimoliy ma’nosi quyidagichadir: *a* parametr normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga, σ -uning o‘rtacha kvadratik chetlanishiga teng.

Darhaqiqat, (9) formula bilan aniqlanuvchi tasodifiy miqdorning aniqlanish sohasi $(-\infty;\infty)$ bo‘lganligi sababli (2) formulaga asosan:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Bu integralni hisoblash uchun yangi $z=\frac{x-a}{\sigma}$ o‘zgaruvchi kiritamiz. Bundan $x=\sigma z+a\Rightarrow dx=\sigma dz$, u holda

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=a\cdot$$

Shunday qilib, $M(X)=a$, ya’ni normal taqsimotning matematik kutilmasi *a* parametrga teng. Xuddi shunga o‘xshash, $D(X)=\sigma^2$ ekanligini ko‘rsatish mumkin. (Buni mustaqil bajarib ko‘ring)

2-eslatma. Umumiy normal taqsimot qonuni deb, a va σ parametrlarning qiymatlari ixtiyoriy bo‘lgan normal taqsimot qonuniga aytiladi.

Normalangan normal taqsimot qonuni deb, $a=0$ va $\sigma=1$ parametrli normal taqsimot qonuniga aytiladi. Har qanday umumiy normal taqsimot qonunini normalangan taqsimot qonuniga keltirish mumkin. Masalan, X tasodifiy miqdor a va σ parametrli normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdor bo‘lsa, u holda $Z=\dfrac{X-a}{\sigma}$ almashtirish bilan uni normalangan taqsimot qonuniga keltirish mumkin bo‘ladi, chunki $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$. Normalangan taqsimotning zichlik funksiyasi

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{10}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu funksiyaning qiymatlar jadvali ehtimollar nazariyasiga oid ko‘plab adabiyotlarda keltirilgan (1-ilovaga qarang).

3-eslatma. Umumiy normal taqsimot funksiyasi deb,

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy \tag{11}$$

funksiyaga, normalangan taqsimot funksiyasi deb esa,

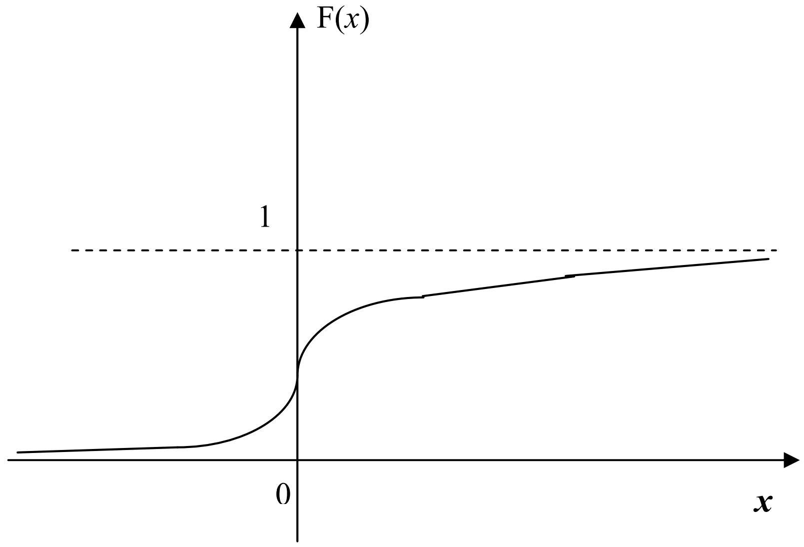
$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \tag{12}$$

funksiyaga aytiladi.

$F(x)$ va $F_0(x)$ funksiyalar orasida quyidagi munosabat (mustaqil keltirib chiqaring) mavjud

$$F(x)=F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$F_0(x)$ funksiyaning qiymatlari uchun maxsus jadval tuzilgan bo‘lib, uning grafigi quyidagicha shaklga ega:



4-rasm

$F_0(x)$ funksiya va Laplas $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ funksiyasi orasida quyidagicha munosabat (mustaqil keltirib chiqaring) mavjud

$$F_0(x) = 0,5 + \Phi(x).$$

3. Ko‘rsatkichli taqsimot.

5-ta’rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & agar \quad x > 0. \end{cases} \tag{13}$$

ko‘rinishda bo‘lsa bu tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga bo‘ysinadi deyiladi. (bu erda $\lambda > 0$ - o‘zgarmas musbat son)

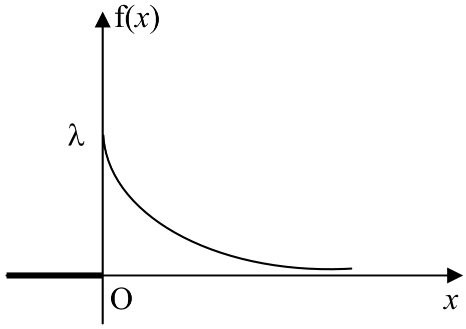
Ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz: $(x > 0)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0 + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

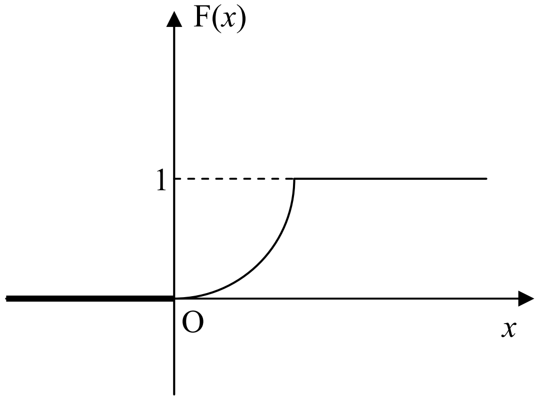
Demak,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & agar \quad x > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (5-rasm) va taqsimot funksiyasi (6-rasm) grafiklari quyidagi chizmada tasvirlangan.



5-rasm.



6-rasm.

Ko‘rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi, dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanishlari (mustaqil hisoblang) mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Normal taqsimot parametrlarining normal egri chiziq shakliga ta’siri.
2. Bitta tasodifiy argument funksiyasi va uning taqsimoti.
3. χ^2 - «xi kvadrat» taqsimoti.
4. F -Fisher-Snedekor taqsimoti.
5. Styudent taqsimoti.

O‘z- o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Taqsimot funksiya va zichlik funksiyasi ta’riflarini keltiring.
2. Diskret tasodifiy miqdor uchun taqsimot funksiya, zichlik funksiyasi tushunchalari o‘rinlimi?

3. Taqsimot funksiya xossalarini keltiring.

4. Zichlik funksiya xossalari keltiring.

5. Amalda ko‘p uchraydigan uzluksiz taqsimotlarga misollar keltiring.

6. Normal taqsimot qonuni parametrlarining ehtimoliy ma’nosini ayting.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha berilgan:

$$f(x) = a \cdot \cos x, \quad \text{agar} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ bo‘lsa,}$$

$$f(x) = 0, \quad \text{agar} \quad x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ bo‘lsa.}$$

Noma’lum a parametrni toping.

2. X uzluksiz tasodifiy miqdor

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x < 0, \\ 2e^{-2x}, & agar \quad x \geq 0. \end{cases}$$

qonun bo‘yicha taqsimlangan. Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning $(3;7)$ oraliqqa tushishi ehtimolini toping.

3. X tasodifiy miqdor $a = 0$, $\sigma = 2$ parametrli normal taqsimot qonuniga bo‘ysinsin. X tasodifiy miqdorning $(-2;3)$ oraliqqa tushish ehtimolini aniqlang.

4. X- uzluksiz tasodifiy miqdor (1; 5) oraliqda tekis taqsimot qonuni bilan berilgan bo‘lsa, uning matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

5. Quyidagicha funksiya berilgan:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \leq 0, \\ ce^{-x}, & \text{agar} \quad x > 0. \end{cases}$$

Noma’lum c parametrlarning qanday qiymatida bu funksiya biror X-uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo‘ladi?

11-§. Katta sonlar qonuni. Katta sonlar qonunining amaliy ahamiyati. Markaziy limit teoremasi haqida tushuncha

Ma’lumki, tajriba natijasida tasodifiy miqdor mumkin bo‘lgan qiymatlarning qaysi birini qabul qilishini oldindan aytib bo‘lmaydi, chunki bu juda ko‘p tasodifiy faktorlarga bog‘liq, bu faktorlarning esa hammasini hisobga olib bo‘lmaydi. Ammo bir tomondan shuni ham ta’kidlash kerakki, keng qamrovli shartlar ostida ko‘p sondagi tasodifiy miqdorlar yig‘indisi deyarli tasodifiylik xarakterini yo‘qotar ekan.

Amaliyot uchun juda ko‘p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta’siri tasodifga deyarli bog‘liq bo‘lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko‘ra bilishga imkon beradi. Bunday shartlar umumiy nomi «Katta sonlar qonuni» deb ataluvchi teoremalarda keltiriladi. Bular qatoriga Chebishev va Bernulli teoremalari mansub bo‘lib, Chebishev teoremasi katta sonlar qonunining eng umumiy, Bernulli teoremasi esa sodda holi hisoblanadi.

Dastlab quyidagi ta’rifni keltiramiz.

1-ta’rif. Agar $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi mos ravishda $M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n)$ matematik kutilishlarga ega bo‘lib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $n \to \infty$ da

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \to 1 \qquad (1)$$

munosabat bajarilsa, berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysinadi deyiladi.

Katta sonlar qonuniga oid teoremalarni isbotlashda Chebishev tengsizligidan foydalaniladi. Biz bu tengsizlikni isbotsiz keltiramiz.

Chebishev tengsizligi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{yoki} \quad P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (2)$$

Praktika uchun Chebishev tengsizligining ahamiyati cheklangan bo‘lib, u ba’zan trivial baho beradi. Chebishev tengsizligining nazariy ahamiyati juda kattadir.

1-teorema.(Chebishev teoremasi) Agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ juft-jufti bilan erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, ularning dispersiyalari yuqoridan tekis chegaralangan (ya’ni $D(X_i) \le C,\ i = 1, 2, \dots$) bo‘lsa, u holda musbat ε son har qancha kichik bo‘lganda ham

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1 \qquad (3)$$

munosabat bajariladi.

Shunday qilib, Chebishev teoremasi quyidagicha da’vo qiladi: agar dispersiyalari tekis chegaralangan ko‘p sondagi tasodifiy miqdorlar qaralayotgan bo‘lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar arifmetik o‘rtacha qiymatining ularning matematik kutilmalari arifmetik o‘rtacha qiymatidan chetlanishining absolyut qiymati istalgan musbat kichik sondan ham kichik bo‘lishidan iborat hodisani deyarli muqarrar deb hisoblash mumkin.

Isbot. Chebishev tengsizligini

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

tasodifiy miqdorga nisbatan qo‘llaymiz:

$$P\left(\left| \overline{X} - M\left(\overline{X}\right) \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{D\left(\overline{X}\right)}{\varepsilon^2} \qquad (4)$$

Matematik kutilma va dispersiyaning xossalaridan foydalanib va teorema shartlariga ko‘ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$M\left(\overline{X}\right) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M(X_i),$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \le \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Bu ifodalarni (4) tengsizlikka qo‘yib:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}{n^2\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

hamda ixtiyoriy hodisaning ehtimoli 1 dan katta emasligini hisobga olib,

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \le P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \le 1$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu munosabatdan $n \to \infty$ da teorema tasdig‘i kelib chiqadi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Chebishev teoremasida biz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari har xil deb faraz qilgan edik. Amaliyotda esa tasodifiy miqdorlar ko‘pincha bir xil $a = M(X_i)$ matematik kutilmaga va $D(X_i) = \sigma^2$ dispersiyaga ega bo‘ladi. U holda:

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n} na = a.$$

Qaralayotgan xususiy holda, Chebishev teoremasi quyidagicha ifodalanadi.

2-teorema. Agar $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar juft-jufti bilan erkli bo‘lib, bir xil a matematik kutilmaga va σ^2 chekli dispersiyaga ega bo‘lsa, u holda ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (5)$$

Faraz qilamiz, n ta erkli sinash o‘tkazilayotgan bo‘lib, ularning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p ga teng bo‘lsin. U holda hodisa ro‘y berishining nisbiy chastotasi qanday bo‘lishini oldindan ko‘ra bilish mumkinmi? Bu savolga Yakov Bernulli tomonidan isbotlangan quyidagi teorema ijobiy javob beradi.

3-teorema.(Bernulli teoremasi) Agar n ta erkli sinashning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p o‘zgarmas va sinashlar soni yetarlicha katta bo‘lsa, u holda hodisa ro‘y berishi nisbiy chastotasining p ehtimoldan chetlanishining absolyut qiymati ixtiyoriy kichik musbat sondan ham kichik bo‘lish ehtimoli birga yaqinlashadi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (6)$$

Isbot. A hodisa ro‘y berishlarining chastotasi μ_n ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mu_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n .$$

Bunda X_i- A hodisaning $i-$sinashdagi ro‘y berishlar sonini ifodalovchi tasodifiy miqdor. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar erkli bo‘lib, bir xil taqsimot qonuniga egadir. Ya’ni

$$\begin{array}{lll} X_1: \;\; 0 \;\; 1 & X_2: \;\; 0 \;\; 1, \;\ldots, & X_n: \;\; 0 \;\; 1 \\ p: \;\;\;\; q \;\; p & p: \;\;\;\; q \;\; p, \ldots, & p: \;\;\;\; q \;\; p \end{array}$$

Bu tasodifiy miqdorlar uchun

$$M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_n)=p, \qquad D(X_i)=pq\le\frac{1}{4}$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin. U holda

$$M(\mu_n)=M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)=np$$

va $M\left(\dfrac{\mu_n}{n}\right)=p$ ekanligini hisobga olsak:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Qaralayotgan holda Chebishev teoremasining barcha shartlari bajariladi.

Bernulli teoremasi sinashlar soni yetarlicha katta bo‘lganda nisbiy chastota nima uchun turg‘unlik xossasiga ega bo‘lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta’rifini asoslaydi.

Eslatma. Bernulli teoremasidan $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n}=p$ xulosani chiqarish mumkin emas. Teorema yetarlicha ko‘p sondagi tajribalarda nisbiy chastota har bir tarjribada hodisa ro‘y berishining o‘zgarmas ehtimoliga faqat ehtimol bo‘yicha yaqinlashishi haqidadir. k/n ning p ga ehtimol bo‘yicha yaqinlashishi analizdagi oddiy yaqinlashishdan farq qiladi. Bu farqni to‘g‘ri tushunish uchun ehtimol bo‘yicha yaqinlashish ta’rifini beramiz.

2-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $|x_n-x_0|<\varepsilon$ tengsizlikning bajarilish ehtimolligi $n\to\infty$ da birga intilsa, u holda $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik x_0 ga ehtimol bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi.

Chebishev teoremasining (yoki katta sonlar qonunining) mohiyati quyidagicha: ayrim olingan erkli tasodifiy miqdorlar o‘z matematik kutilmalaridan katta farq qiladigan qiymatlarni qabul qilsada, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning arifmetik o‘rtacha qiymati katta ehtimollik bilan tayin o‘zgarmas songa, chunonchi $\frac{1}{n}\sum M(X_i)$ songa yaqin qiymatlarni qabul qiladi.

Boshqacha qilib aytganda, ayrim tasodifiy miqdorlar anchagina sochilgan bo‘lishi mumkin, lekin ularning arifmetik o‘rtacha qiymatlarining tarqoqligi kam bo‘ladi.

Shunday qilib, har bir tasodifiy miqdor mumkin bo‘lgan qiymatlaridan qaysi birini qabul qilishini aniq ayta olmasak ham ularning arifmetik o‘rtachasi qanday qiymat qabul qilishini oldindan ko‘ra bilish mumkin.

Katta sonlar qonuniga ko‘ra, yetarlicha ko‘p sondagi erkli (dispersiyasi tekis chegaralangan) tasodifiy miqdorlarning arifmetik o‘rtacha qiymatlari tasodifiylik xarakterini yo‘qotadi. Bu esa quyidagicha izohlanadi: har bir miqdorning o‘z matematik kutilmasidan chetlanishi musbat ham, manfiy ham bo‘lishi mumkin, ammo arifmetik o‘rtachada ular o‘zaro yo‘qolib ketadi.

Chebishev teoremasining amaliy ahamiyatiga doir quyidagi misolni keltiramiz.

Odatda, biror fizik kattalikni o‘lchash bir necha marta amalga oshiriladi va ularning arifmetik o‘rtacha qiymati izlanayotgan o‘lcham sifatida qabul qilinadi. Qanday shartlarda bu usulni to‘g‘ri deb hisoblash mumkin?-degan savolga Chebishev teoremasi javob beradi.

Haqiqatan ham, har bir o‘lchash natijalarini $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qarab, bu tasodifiy miqdorlarga Chebishev teoremasini qo‘llamoqchi bo‘lsak, quyidagilar bajarilishi kerak:

1) ular juft-jufti bilan erkli;

2) bir xil matematik kutilmaga ega;

3) dispersiyalari tekis chegaralangan.

Agar har bir o‘lchashning natijasi qolganlariga bog‘liq bo‘lmasa, birinchi shart bajariladi.

Agar o‘lchashlar sistematik (bir xil ishorali) xatolarsiz bajarilsa, ikkinchi talab bajariladi. Bu holda hamma tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari bir xil bo‘lib, u haqiqiy o‘lchamga teng bo‘ladi.

Agar o‘lchash asbobi aniqlikni ta’minlay olsa, uchinichi talab ham bajariladi. Bunda ayrim o‘lchashlarning natijalari har xil bo‘lsada, ularning tarqoqligi chegaralangan bo‘ladi.

Agar yuqorida ko‘rsatilgan hamma talablar bajarilgan bo‘lsa, u holda o‘lchash natijalariga Chebishev teoremasini qo‘llashga haqlimiz. Bunda yetarlicha ko‘p sonda o‘lchashlar o‘tkazilsa, u holda ularning arifmetik o‘rtacha qiymati o‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatidan istalgancha kam farq qiladi.

Statistikada qo‘llanadigan tanlanma usul Chebishev teoremasiga asoslangan, bu usulning mohiyati shundan iboratki, unda uncha katta bo‘lmagan tasodifiy tanlanmaga asoslanib, barcha tekshirilayotgan ob’ektlar to‘plami to‘g‘risida mulohaza qilinadi.

Misollar

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$- erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagicha taqsimot qonuniga ega.

$$\begin{array}{lcc} X_n: & -a & a \\ p: & \dfrac{n+1}{2n+1} & \dfrac{n}{2n+1} \end{array}$$

Berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o‘rinlimi?

Yechish. Chebishev teoremasi shartlarini tekshiramiz:

$$M\left(X_n\right) = -a\frac{n+1}{2n+1} + a\frac{n}{2n+1} = -\frac{a}{2n+1},\ D(X) < a^2$$

Demak, dispersiyalari a^2 bilan tekis chegaralangan bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o‘rinli.

2. X - diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot bilan berilgan.

$X:$	0,1	0,4	0,6
$p:$	0,2	0,3	0,5

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $P\left(\left|X - M\left(X\right)\right| < \sqrt{0{,}4}\right)$ ehtimolni baholang.

Yechish.

$$M\left(X\right) = 0{,}1\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}44,$$

$$D\left(X\right) = 0{,}1^2\cdot 0{,}2 + 0{,}4^2\cdot 0{,}3 + 0{,}6^2\cdot 0{,}5 - 0{,}44^2 = 0{,}0364.$$

Demak,

$$P\left(\left|X - 0{,}44\right| < \sqrt{0{,}4}\right) \geq 1 - \frac{0{,}0364}{0{,}4} = 0{,}909.$$

Markaziy limit teoremasi haqida tushuncha. Ma’lumki, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar amaliyotda keng tarqalgan. Buni nima bilan asoslash mumkin. Bunga rus matematigi A.M. Lyapunov teoremasining quyidagi natijasi javob beradi:

Agar X tasodifiy miqdor juda ko‘p sondagi o‘zaro bog‘liqmas tasodifiy miqdorlarning yig‘indisidan iborat bo‘lib, har bir hadning yig‘indiga ta’siri e’tiborga olinmaydigan darajada juda kam bo‘lsa, u holda X ning taqsimoti normal taqsimotga yaqin bo‘ladi.

Masalan, tajriba qandaydir fizik kattalikni o‘lchashdan iborat bo‘lsin. Har qanday o‘lchash bu kattalikning taxminiy qiymatini beradi, o‘lchash natijasiga ta’sir etuvchi tasodifiy faktorlar esa juda ko‘p. Har bir faktor o‘lchash natijasiga e’tiborga olinmaydigan darajada bo‘lsa ham juda kam ta’sir ko‘rsatadi va xatolikni hosil qiladi. Ammo, bu faktorlarning soni juda ko‘p bo‘lganligi sababli xatoliklarning umumiy yig‘indisi sezilarli darajada xatolikni hosil qiladi.

Bu xatoliklar yig‘indisini juda katta sondagi o‘zaro bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar yig‘indisi deb qarab, bu yig‘indining taqsimoti normal taqsimotga yaqin ekanligi haqida xulosa qilishimiz mumkin.

Faraz qilamiz $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ - o‘zaro bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, ularning matematik kutilmalari $M(X_k) = a_k$ va dispersiyalari $D(X_k) = b_k^2$ chekli bo‘lsin.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Normalangan yig‘indining taqsimot funksiyasini quyidagicha belgilaymiz

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right).$$

Agar normalangan yig‘indining taqsimot funksiyasi *x* ning har qanday qiymatida $n \to \infty$ da normal taqsimotga intilsa, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz. \qquad (1)$$

bo‘lsa, $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ ketma-ketlik uchun markaziy limit teoremasi o‘rinli bo‘ladi.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni.
2. Tasodifiy miqdorlarning yaqinlashish turlari.
3. Bir xil taqsimlangan bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar uchun marakaziy limit teorema.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Katta sonlar qonunini ta’riflang.
2. Bernulli teoremasini va uning amaliy ahamiyatini ayting.
3. Katta sonlar qonunining mohiyati nimada?
4. Katta sonlar qonunining amaliy ahamiyatiga doir misollar keltiring.
5. Chebishev tengsizligini keltiring.

6. Markaziy limit teoremasini tushuntiring.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Agar $D(X)=0,002$ bo‘lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib $|X-M(X)|<0,2$ tengsizlikning bajarilishini ehtimol bo‘yicha baholang.

2. Agar $P\left(|X-M(x)|<\varepsilon\right)\geq 0,9; D(X)=0,04$ bo‘lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib ε ni toping.

3. Depozitga qo‘yilgan mablag‘ning muddatidan oldin talab qilinishi ehtimoli 0,08 ga teng. Depozitga mablag‘ qo‘ygan 1000 ta mijozdan kamida 70 tasi va ko‘pi bilan 90 tasi o‘z mablag‘larini muddatdan oldin talab qilishlari ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

2-QISM
MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

12-§. Matematik statistikaning vazifalari. Statistik taqsimot. Empirik taqsimot funksiyasi. Poligon va gistogramma

Matematik statistikaning asosiy vazifalari va masalalari

Matematik statistikaning birinchi vazifasi – statistik ma’lumotlarni to‘plash va (agar ma’lumotlar juda ko‘p bo‘lsa) gruppalash usullarini ko‘rsatish.

Matematik statistikaning ikkinchi vazifasi – statistik ma’lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq holda ishlab chiqish.

Matematik statistika yuqoridagi vazifalarni bajarish mobaynida shug‘ullanadigan ba’zi masalalarni keltirib o‘tamiz:

1) tasodifiy hodisa ro‘y berishi ehtimolining noma’lum qiymatini baholash;

2) noma’lum taqsimot funksiyani baholash;

3) ko‘rinishi ma’lum bo‘lgan taqsimot funksiyasining noma’lum parametrlarini baholash;

4) tasodifiy miqdorning bir yoki bir necha tasodifiy miqdorlarga bog‘liqligini va bog‘liqlik darajasini aniqlash;

5) statistik gipotezalarni tekshirish.

Shunday qilib, matematik statistikaning vazifasi ilmiy va nazariy xulosalar chiqarish maqsadida statistik ma’lumotlarni to‘plash va ularni tahlil qilish metodlarini yaratishdan iboratdir.

Bir jinsli obyektlar to‘plamini bu obyektlarni xarakterlovchi biror bir sifat yoki son belgisiga nisbatan o‘rganish talab qilinsin. Masalan, agar obyekt biror xil detallar partiyasi bo‘lsa, u holda detalning sifat belgisi bo‘lib, uning standartligi, son belgisi bo‘lib esa detalning o‘lchami xizmat qilishi mumkin.

Ba’zan tekshirish yalpi o‘tkaziladi, ya’ni to‘plamdagi obyekt-larning har birini o‘rganilayotgan belgiga nisbatan tekshiriladi. Lekin yalpi tekshirish amaliyotda nisbatan kam qo‘llaniladi. Masalan, to‘plam juda ko‘p obyektlarni o‘z ichiga olgan bo‘lsa, u holda yalpi tekshirish o‘tkazish maqsadga muvofiq emas. Bunday hollarda to‘plamdan chekli sondagi obyektlar tasodifiy ravishda olinadi va ular o‘rganiladi.

Tanlanma to‘plam (bundan keyin ***tanlanma***) deb umumiy to‘plamdan tasodifiy ravishda ajratib olingan obyektlar to‘plamiga aytiladi.

Bosh to‘plam deb tanlanma ajratiladigan obyektlar to‘plamiga aytiladi.

To‘plam (bosh to‘plam yoki tanlanma) hajmi deb, bu to‘plamdagi obyektlar soniga aytiladi. Masalan, 500 ta detaldan tekshirish uchun 50 ta detal olingan bo‘lsa, u holda bosh to‘plam hajmi $N = 500$, tanlanma hajmi esa $n = 50$.

Bosh to‘plamdan olingan tanlanma bo‘yicha bosh to‘plam haqida xulosa qilishga asoslangan usulga, ***tanlanma usul*** deb ataladi.

Tanlanmani ajratib olish ikki xil yo‘l bilan amalga oshirilishi mumkin: ob’ekt ajratib olinib uning ustida kuzatish o‘tkazilgandan so‘ng, u bosh to‘plamga qaytarilishi yoki qaytarilmasligi mumkin.

Takroriy tanlanma deb, shunday tanlanmaga aytiladiki, bunda olingan ob’ekt tajribadan so‘ng (keyingisini olishdan oldin) bosh to‘plamga qaytariladi.

Takroriy bo‘lmagan tanlanmada, ajratib olingan ob’ekt kuzatishdan so‘ng bosh to‘plamga qaytarilmaydi.

Odatda, qaytarilmaydigan tasodifiy tanlashdan foydalaniladi.

Tanlanmadagi ma’lumotlar bo‘yicha bosh to‘plamning bizni qiziqtirayotgan belgisi haqida yetarlicha ishonch bilan fikr yuritish uchun tanlanmaning obyektlari bosh to‘plamni to‘g‘ri tasvirlashi zarur. Bu talab qisqacha bunday ta’riflanadi: tanlanma ***reprezentativ*** (vakolatli) bo‘lishi kerak. Odatda, tanlanmaning reprezentativligini ta’minlash uchun bosh to‘plam har bir elementining tanlanmaga tushish ehtimoli teng deb olinadi.

Amaliyotda tanlanma ajratib olishda turli usullardan foydalaniladi. Bu usullarni 2 tipga ajratish mumkin:

1. Bosh to‘plamni qism to‘plamlarga ajratmasdan tanlanma olish, bunda: a) qaytarilmaydigan; b) qaytariladigan usullardan foydalaniladi.

2. Bosh to‘plamni qism to‘plamlarga ajratib so‘ngra tanlanma olish, bunda bosh to‘plam: a) tipik; b) mexanik; v) seriyalab qism to‘plamlarga ajratiladi, so‘ngra tanlanma ajratib olinadi.

Agar bosh to‘plamdan obyektlar bittadan tasodifiy ravishda olinib tanlanma olinsa, bu ***oddiy tasodifiy*** tanlash deyiladi.

Tipik tanlashda bosh to‘plamni uning **«tipik»** xususiyatlarini e’tiborga olgan holda qism to‘plamlarga ajratiladi, so‘ngra uning qism to‘plamlaridan tanlanma ajratib olinadi.

Mexanik tanlash bosh to‘plamni mexanik ravishda qism to‘plamlarga ajratiladi, so‘ngra uning qism to‘plamlaridan tanlanma ajratib olinadi.

Seriyali tanlash bosh to‘plamni qism to‘plamlarga seriyalab ajratiladi, so‘ngra uning qism to‘plamlaridan tanlanma ajratib olinadi.

Odatda, tanlanma ajratib olishda yuqoridagi usullardan aralash foydalaniladi, ya’ni ko‘rsatilgan usullardan birgalikda foydalaniladi. Masalan, bosh to‘plamni ba’zan bir xil hajmli seriyalarga ajratiladi, keyin oddiy tasodifiy tanlash bilan ayrim obyektlar olinadi.

Bosh to‘plamdan tanlanma olingan bo‘lsin. Bunda tanlanmaning x_i qiymati n_i $(i=1,2,...)$ marta kuzatilgan va $\sum_i n_i = n$ bo‘lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, variantalarning ortib yoki kamayib borish tartibida yozilgan ketma-ketligi esa ***variatsion qator*** deyiladi. Kuzatishlar soni- n_i chastotalar, ularning tanlanma hajmiga nisbati esa $W_i = \frac{n_i}{n}$ -nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi:

$$\begin{matrix} x_i: & x_1 & x_2 & ... & x_k & ... \\ n_i: & n_1 & n_2 & ... & n_k & ... \end{matrix} \quad \text{yoki} \quad \begin{matrix} x_i: & x_1 & x_2 & ... & x_k & ... \\ W_i: & W_1 & W_2 & ... & W_k & ... \end{matrix}. \qquad (1)$$

Shunday qilib, taqsimot qonuni ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslikni bildiradi.

Misol.

1. Hajmi 40 bo‘lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti:

$$\begin{matrix} x_i: & 2 & 6 & 12 \\ n_i: & 6 & 20 & 14 \end{matrix}$$

berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini yozing.

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo‘lamiz.

$$W_1 = \frac{6}{40} = 0{,}15;\ W_2 = \frac{20}{40} = 0{,}5;\ W_3 = \frac{14}{40} = 0{,}35$$

U holda, nisbiy chastotalar taqsimoti:

$$\begin{array}{llll} x_i: & 2 & 6 & 12 \\ W_i: & 0{,}15 & 0{,}5 & 0{,}35\,. \end{array}$$

Empirik taqsimot funksiya. Faraz qilamiz, X-son belgining statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: n_x-X belgining x dan kichik qiymatlari kuzatilgan kuzatishlar soni; n-umumiy kuzatishlar soni.

Ma’lumki, $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi: $\frac{n_x}{n}$. Agar x o‘zgaradigan bo‘lsa, u holda, nisbiy chastota ham o‘zgaradi. Demak, $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota x ning funksiyasidir.

1-ta’rif. Taqsimotning ***empirik funksiyasi*** (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir x qiymat uchun $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladi.

Demak, ta’rifga ko‘ra

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}. \tag{2}$$

Bu yerda $n_x - x$ dan kichik variantalar soni, n - tanlanma hajmi.

Misol.

2. Tanlanmaning quyidagi taqsimoti:

$$\begin{array}{llll} x_i: & 2 & 6 & 10 \\ n_i: & 12 & 18 & 30 \end{array}$$

bo‘yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

Yechish. Tanlanma hajmini topamiz. $n = 12+18+30=60$

$$F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x\le 2 \quad \text{bo‘lsa,} \\ 0{,}2, & \text{agar} \quad 2<x\le 6 \quad \text{bo‘lsa,} \\ 0{,}5, & \text{agar} \quad 6<x\le 10 \quad \text{bo‘lsa,} \\ 1, & \text{agar} \quad x>10 \quad \text{bo‘lsa.} \end{cases}$$

Bosh to‘plamning $F(x)$ - taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik funksiya $F_n^*(x)$ $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasini, nazariy taqsimot funksiya $F(x)$ esa $X<x$ hodisaning ro‘y berish ehtimolini aniqlaydi. $F_n^*(x)$ funksiya uchun $F(x)$ funksiyaning barcha xossalari o‘rinli. Ya’ni:

1) $F_n^*(x)\in[0;1]$;

2) $F_n^*(x)$-kamaymaydigan funksiya;

3) agar x_1-eng kichik varianta bo‘lsa, u holda $x\le x_1$ qiymatlar uchun $F_n^*(x)=0$; agar x_k-eng katta varianta bo‘lsa, u holda $x>x_k$ qiymatlar uchun $F_n^*(x)=1$.

Shunday qilib, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi bosh to‘plam nazariy taqsimot funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Haqiqatan ham, Bernulli teoremasiga asosan,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|F(x)-F_n^*(x)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Demak, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan bosh to‘plam nazariy (integral) funksiyasining taxminiy ko‘rinishi sifatida foydalanish mumkin.

Ko‘rgazmalilik uchun statistik taqsimotning turli grafiklari chiziladi, masalan, poligon va gistogramma.

Chastotalar poligonini yasash uchun Dekart koordinatalar sistemasida kesmalari (x_i,n_i) $(i=1,2,...)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq hosil qilish kerak. ***Nisbiy chastotalar poligonini*** yasash uchun esa Dekart koordinatalar sistemasida kesmalari (x_i,W_i) $(i=1,2,...)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq hosil qilish kerak bo‘ladi. Chastotalar va nisbiy chastotalar poligonini diskret tasodifiy miqdorlarning grafik usulda berilishi deb ham tushunish mumkin.

Agar kuzatilayotgan belgi uzluksiz bo‘lsa, u holda uni grafik usulda tasvirlash uchun gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir, buning uchun belgining kuzatiladigan qiymatlarini o‘z ichiga olgan intervalni uzunligi o‘zgarmas-h bo‘lgan bir nechta qismiy intervallarga bo‘linadi va har bir i-qismiy interval uchun n_i-ya’ni i-intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi topiladi. So‘ngra, Dekart koordinatalar sistemasida ***chastotalar gistogrammasi,*** asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figura, yoki ***nisbiy chastotalar gistogrammasi*** asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{h}$ nisbatga (nisbiy chastota zichligi) teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figura, yasaladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Matematik statistikaning vazifalarini ayting.
2. Tanlanma olishning qanday usullari bor?
3. Tanlanmaning reprezentativligi nimadan iborat?
4. Tanlanmaning statistic taqsimoti ta’rifini bering.
5. Empirik taqsimot funksiya ta’rifini keltiring.
6. Poligon va gistogramma qanday quriladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Quyidagi tanlanma berilgan: 2, 1, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3.

a) variatsion qatorni tuzing;

b) chastotalar jadvalini tuzing;

v) nisbiy chastotalar poligonini chizing.

2. Korxona ishchilaridan tavakkaliga 20 tasi tanlanib, ularning tarif razryadlari xaqida quyidagi ma’lumotlar olingan: 1, 2, 4, 6, 3, 4, 4, 2, 6, 3, 5, 3, 3, 1, 5, 4, 2, 5, 4, 3.

Shu ma’lumotlarga asoslangan holda:

a) tanlanmaning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang;

b) empirik taqsimot funksiyani tuzing.

3. Tanlanma

x_i	4	5	7	12
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko'rinishida berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

4. Chastotalar poligonini yasang.

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25

5. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Intervallar ro'yxati	Qismiy intervallar	Qismiy intervallardagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2-5	6
2	5-8	10
3	8-11	4
4	11-14	5
		$n = \sum n_i = 25$

13-§.Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Baholarga qo‘yiladigan talablar

Ma’lumki, matematik statistika masalaridan biri tanlanma asosida bosh to‘plam taqsimot funksiyasining noma’lum parametrlari uchun statistik baholar qurishdan iborat edi. Bu masala qanday hal qilinishini ko‘rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, bosh to‘plamning son belgisini o‘rganish talab qilinayotgan va belgining taqsimot funksiyasi nazariy mulohazalar asosida aniqlangan bo‘lsin. Bu taqsimotni aniqlaydigan noma’lum parametrlarni baholash masalasini ko‘rib chiqaylik. Masalan, bosh belgi, to‘g‘rirog‘i o‘rganilayotgan belgi bosh to‘plamda normal taqsimlanganligi oldindan ma’lum bo‘lsa, u holda matematik kutilmani va o‘rtacha kvadratik chetlanishni baholash, ya’ni taqribiy hisoblash zarur, chunki bu ikki parametr normal taqsimotni to‘liq aniqlaydi. Agar belgi Puasson taqsimotiga ega deyishga asos bo‘lsa, u holda bu taqsimotni aniqlaydigan $\lambda > 0$ parametrni baholash, ya’ni taqribiy hisoblash zarur.

Odatda, tadqiqotchi ixtiyorida tanlanma asosida olingan ma’lumotlar, masalan, tanlanma son belgisini n marta kuzatish natijasida olingan $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlar bo‘ladi. Demak, baholanayotgan belgining bahosi xuddi shu ma’lumotlar orqali ifodalanishi kerak.

Tanlanmadagi $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarni erkli $X_1, X_2, ..., X_n$-tasodifiy miqdorlar deb qarab, nazariy taqsimot noma’lum parametrining statistik bahosini topish uchun kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funksiya topish kerakki, u baholanayotgan parametrning taqribiy qiymatini bersin. Masalan, normal taqsimotning matematik kutilishini baholash uchun ushbu

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

funksiya xizmat qiladi.

Shunday qilib, nazariy taqsimot noma’lum parametrning ***statistik bahosi*** deb kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga aytiladi.

Statistik baho baholanayotgan parametrning yaxshi bahosi bo‘lishi uchun u ma’lum bir talablarni qanoatlantirishi lozim. Quyida mana shu talablarni ko‘rib chiqamiz.

Bosh to‘plam $F(x)$-nazariy taqsimot funksiyasining θ parametri noma’lum bo‘lib uning statistik bahosi θ^* bo‘lsin. Bosh to‘plamdan olingan n hajmli tanlanma bo‘yicha θ_1^* baho topamiz. Tajribani takrorlaymiz, ya’ni bosh to‘plamdan yana n hajmli tanlanma olib θ_2^* bahoni topamiz. Tajribani ko‘p marta takrorlab, $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_n^*$ sonlar ketma-ketligininі hosil qilamiz, umuman olganda, $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_n^*$ sonlar har xil bo‘ladi. U holda θ^* bahoni tasodifiy miqdor, $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_n^*$ sonlarni esa uning mumkin bo‘lgan qiymatlari sifatida qarash mumkin.

θ^* tasodifiy miqdorning $M(\theta^*)$-matematik kutilmasini hisoblaymiz. $M(\theta^*)$ va θ noma’lum parametr qiymatlarini taqqoslasak ular orasida:

1) $M(\theta^*) < \theta$;

2) $M(\theta^*) = \theta$;

3) $M(\theta^*) > \theta$.

munosabatlardan biri albatta o‘rinli bo‘ladi. Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo‘lmagan statistik bahoni ishlatish sistematik xatolarga olib keladi. Shu sababli, θ^* bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo‘lishini talab qilish tabiiy holdir.

Demak, $M(\theta^*) = \theta$ talabga rioya qilish sistematik xatolardan saqlaydi.

1-ta’rif. Agar bosh to‘plamdan ixtiyoriy hajmli tanlanma olinganda ham θ^* bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan θ parametrga teng, ya’ni $M(\theta^*) = \theta$, bo‘lsa, u holda θ^* baho ***siljimagan baho*** deb ataladi, aks holda θ^* siljigan baho deyiladi.

2-ta'rif. Agar θ^* baho va θ noma'lum parametrlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty} M(\theta^*) = \theta$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda θ^* baho ***asimptotik siljimagan baho*** deb ataladi.

Ammo shuni ham ta'kidlash keraki, siljimagan baho har doim ham baholanayotgan parametrga yaxshi yaqinlashadi deb hisoblash xato bo'ladi. Darhaqiqat, θ^* ning mumkin bo'lgan qiymatlari uning o'rtacha qiymati atrofida ancha tarqoq joylashgan, ya'ni $D(\theta^*)$-dispersiya anchagina katta bo'lishi mumkin. U holda l-tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha topilgan θ_l^*-baho $\overline{\theta^*}$-o'rtacha qiymatdan va demak baholanayotgan θ parametrdan ancha uzoqlashgan bo'lishi mumkin.

θ_l^* ni θ ning taqribiy qiymati sifatida qabul qilib, katta xatoga yo'l qo'ygan bo'lar edik. Shu sababli, statistik baholarga effektivlik talabi qo'yiladi.

3-ta'rif. Agar $\theta_l^* \in \theta^*$ bahoning dispersiyasi eng kichik, ya'ni $\inf\limits_{\theta_i^*} D(\theta_i^*) = \theta_l^*$ bo'lsa, u holda θ_l^* ***effektiv baho*** deb ataladi.

Umuman olganda, effektiv baho mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Juda katta hajmli (n yetarlicha katta bo'lganida) tanlanmalar qaralganda statistik baholarga asoslilik talabi qo'yiladi.

4-ta'rif. Asosli baho deb baholanayotgan parametrga $n\to\infty$ da ehtimol bo'yicha yaqinlashadigan θ^* bahoga aytiladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\theta^* - \theta\right| > \varepsilon\right) = 0$, bu yerda $\varepsilon > 0$–yetarli darajada kichik son.

Agar bahoning dispersiyasi $n\to\infty$ da nolga intilsa, u holda bunday baho asosli ham bo'ladi.

Agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \ldots, x_N$-qiymatlari turli bo'lsa, $\overline{x_B}$***-bosh to'plam o'rtachasi***

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1}$$

formula bilan topiladi; agar N hajmli bosh to‘plamning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_k$-qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, ..., N_k$ chastotalarga ega bo‘lib, $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$ bo‘lsa:

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i N_i \,. \qquad (2)$$

Bosh to‘plamning kuzatilayotgan X belgisini tasodifiy miqdor sifatida qarasak, uning matematik kutilmasi uchun $M(X) = \overline{x_B}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_n$-qiymatlari turli bo‘lsa, $\overline{x_T}$ *-tanlanma o‘rtacha*

$$\overline{x_T} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3)$$

formula bilan topiladi; agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_k$-qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ chastotalarga ega bo‘lib, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bo‘lsa:

$$\overline{x_T} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \qquad (4)$$

Bosh to‘plam o‘rtachasi-*M(X)* ning statistik bahosi sifatida

$$\overline{x_T} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ yoki}$$

$$\overline{x_T} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

-tanlanma o‘rtacha qabul qilinadi. $\overline{x_T}$ siljimagan baho ekanligiga, ya’ni $M(\overline{x_T}) = M(X)$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. $\overline{x_T}$ ni tasodifiy miqdor, $x_1, x_2, ..., x_n$-variantalarni erkli, bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Bu miqdorlar bir xil taqsimlanganligi uchun ular bir xil son xarakteristikalarga, jumladan, bir xil matematik kutilmaga ega: $a = M(X_i)$. Bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar arifmetik o‘rtacha qiymatining matematik kutilmasi ulardan bittasining matematik kutilmasiga teng, ya’ni

$$M(\overline{X_T}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{nM(X_1)}{n} = M(X_1) = a.$$

$X_1, X_2, ..., X_n$ miqdorlarning har biri va bosh to‘plamning X belgisi (uni ham tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz) bir xil taqsimotga ega ekanligini e’tiborga oladigan bo‘lsak, bu miqdorlarning va bosh to‘plamning sonli xarakteristikalari bir xil degan xulosaga kelamiz. Shunday qilib, $M(\overline{X_T}) = a = M(X)$. U holda $\overline{x_T}$ bosh to‘plam matematik kutilmasi uchun siljimagan baho ekan.

Ma’lumki, katta sonlar qonuniga (Chebishev teoremasi)asosan ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{x_T} - M(\overline{x_T})\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{x_T} - a\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

ya’ni n ortishi bilan $\overline{x_T}$ -tanlanma o‘rtachasi bosh to‘plam matematik kutilmasiga ehtimol bo‘yicha yaqinlashadi. Bundan esa, $\overline{x_T}$ baho a uchun asosli baho bo‘lishi kelib chiqadi.

Agar bosh to‘plamdan ancha katta hajmli bir nechta tanlanmalar olinib har birining tanlanma o‘rtachalari topiladigan bo‘lsa, ular o‘zaro taqriban teng bo‘ladi. Bu tanlanma o‘rtachaning *turg‘unlik xossasi* deyiladi.

Misol.

1. Tanlanmaning

x_i:	4	8	11
n_i:	5	10	5

statistik taqsimoti bo‘yicha bosh to‘plam matematik kutilmasining siljimagan bahosini toping.

Y*echish.*

(4) formuladan foydalanamiz. U holda

$$\overline{x_T} = \frac{4\cdot 5 + 8\cdot 10 + 11\cdot 5}{20} = \frac{155}{20} = 7{,}75.$$

Agar N hajmli bosh to‘plamning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_N$-qiymatlari turli bo‘lsa, *bosh to‘plam dispersiyasi*

$$D_B = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x_B})^2. \qquad (5)$$

formula bilan topiladi; agar N hajmli bosh to‘plamning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_k$-qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, ..., N_k$ chastotalarga ega bo‘lib, $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$ bo‘lsa:

$$D_B = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \overline{x_B})^2 . \qquad (6)$$

Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \qquad (7)$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$-qiymatlari turli bo‘lsa, *tanlanma dispersiya*

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_T})^2 \qquad (8)$$

formula bilan topiladi; agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, \ldots, x_k$-qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, \ldots, n_k$ chastotalarga ega bo‘lib, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ bo‘lsa:

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x_T})^2 . \qquad (9)$$

Misol.

2. Tanlanmaning

$$\begin{array}{llll} x_i: & 4 & 8 & 11 \\ n_i: & 5 & 10 & 5 \end{array}$$

statistik taqsimoti bo‘yicha uning dispersiyasini toping.

Yechish.

(4) formuladan foydalansak: $\overline{x_T} = 7,75$. Dispersiyani hisoblash uchun (9) formuladan foydalanamiz. U holda

$$D_T = \frac{5\cdot(4-7,75)^2 + 10\cdot(8-7,75)^2 + 5\cdot(11-7,75)^2}{20} = \frac{70,3125 + 0,625 + 70,3125}{20} = 7,0625\cdot$$

Dispersiyani hisoblashda (5), (6), (8), (9) formulalar noqulay, shu sababli, dispersiya va matematik kutilmalarning xossalaridan foydalanib, dispersiyani hisoblash uchun qulay bo‘lgan quyidagi formuladan foydalanish mumkin:

$$D = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2, \qquad \overline{x} = \frac{\sum_i n_i x_i}{n}, \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_i n_i x_i^2}{n} \quad . \tag{10}$$

Bosh to‘plam dispersiyasi uchun baho sifatida qaralayotgan tanlanma dispersiya $D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_T})^2$ qanday baho bo‘lishini ko‘rib chiqamiz. Qulaylik uchun $m = M(X)$, $\sigma_1^2 = D_B$ belgilashlar kiritib olamiz.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_T}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i - m - (\overline{x_T} - m)\right]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 -$$

$$-\frac{2}{n}(\overline{x_T} - m)^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) + \frac{n}{n}(\overline{x_T} - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 -$$

$$-\frac{2}{n}(\overline{x_T} - m)(\overline{x_T} - m)n + (\overline{x_T} - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - (\overline{x_T} - m)^2.$$

Agar $M(\overline{x_T} - m)^2 = D(\overline{x_T}) = \frac{1}{n}\sigma_1^2$ belgilashni e’tiborga olsak,

$$M(\sigma^2) = \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2\right) - M(\overline{x_T} - m)^2 = \sigma_1^2 - \frac{1}{n}\sigma_1^2 = \frac{n-1}{n}\sigma_1^2\cdot$$

Demak, tanlanma dispersiya -D_T bosh to‘plam dispersiyasi D_B uchun siljimagan baho bo‘lolmas ekan, shu sababli, bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan statistik baho sifatida

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_T \tag{11}$$

-«tuzatilgan» dispersiya olinadi.

Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishining bahosi sifatida $s = \sqrt{\frac{n}{n-1}D_T}$ - «tuzatilgan» o‘rtacha kvadratik chetlanish olinadi.

1-eslatma. $D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x_T})^2$ va

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x_T})^2$ formulalar maxrajlari bilan farqlanadi. U holda n ning katta qiymatlarida tanlanma dispersiyasi va «tuzatilgan» dispersiyalarning farqi juda kam bo‘ladi. Shu sababli, «tuzatilgan» dispersiyadan $n < 30$ hajmli tanlanmalarda foydalanish tavsiya etiladi.

2-eslatma. Agar tanlanmaning variatsion qatorida x_i - variantalarning qiymatlari katta sonlardan iborat bo‘lsa, u holda x_i variantadan $u_i = \frac{x_i - c_1}{c_2}$-shartli variantaga o‘tish orqali u_i-variantalari kichik sonlardan iborat yangi variatsion qator hosil qilinadi, so‘ngra yangi tanlanma uchun $\overline{u_T}$ va $D_T(u)$ lar topiladi. Oldingi tanlanmaning $\overline{x_T}, D_T(x)$ xarakteristikalarini topish uchun $\overline{x_T} = c_2\overline{u_T} + c_1$ va $D_T(x) = c_2^2 D_T(u)$ formulalardan foydalaniladi.

Variatsion qatorning ba’zi xarakteristikalari. Matematik statistika va uning tatbiqlarida variatsion qatorning tanlanma o‘rtachasi va tanlanma dispersiyasidan tashqari boshqa xarakteristikalari ham ishlatiladi. Shulardan ba’zilarini keltiramiz.

Eng katta chastotaga ega bo‘lgan varianta ***moda*** deb ataladi va M_0 kabi belgilanadi.

Mediana deb, variatsion qator variantalarini son jihatidan teng ikki qismga ajratadigan variantaga aytiladi va M_e kabi belgilanadi. Variantalar sonining juft yoki toqligiga qarab, mediana quyidagicha aniqlanadi.

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{agar} \quad n = 2k+1 \quad \text{bo‘lsa}, \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}, & \text{agar} \quad n = 2k \quad \text{bo‘lsa}. \end{cases}$$

Variatsiya qulochi R deb eng katta va eng kichik variantalar ayirmasiga aytiladi: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Variatsiya qulochi variatsion qator tarqoqligining eng sodda xarakteristikasi bo‘lib xizmat qiladi.

Variatsion qator tarqoqligining yana bir xarakteristikasi sifatida ***o'rtacha absolyut chetlanish*** θ ham ishlatiladi.

$$\theta = \frac{\sum_i n_i \left| x_i - \overline{x_T} \right|}{n}$$

Variatsiya koeffitsienti V deb tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishining tanlanma o'rtachasiga nisbatini foizlardagi ifodasiga aytiladi:

$$V = \frac{\sigma_T}{\overline{x_T}} \cdot 100\% .$$

Variatsiya koeffitsienti ikkita yoki undan ortiq variatsion qatorlarning tarqoqliklarini taqqoslash uchun xizmat qiladi: variatsion qatorlardan variatsiya koeffitsienti katta bo'lgani ko'proq tarqoqlikka ega bo'ladi.

Misol. Quyidagi

$$x_i: \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad 16$$
$$n_i: \quad 4 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

tanlanma uchun M_0, M_e, R, θ, V -xarakteristikalarni hisoblaymiz.

$M_0 = M_e = 3; \quad R = 15;$

$$\overline{x_T} = \frac{4\cdot 1 + 10\cdot 3 + 5\cdot 6 + 1\cdot 16}{4 + 10 + 5 + 1} = \frac{20}{20} = 4;$$

$$\theta = \frac{4\cdot|1-4| + 10\cdot|3-4| + 5\cdot|6-4| + 1\cdot|16-4|}{20} = 2{,}2;$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{4\cdot(1-4)^2 + 10\cdot(3-4)^2 + 5\cdot(6-4)^2 + 1\cdot(16-4)^2}{20}} \approx 3{,}24;$$

$$V = \frac{3{,}24}{4}\cdot 100\,\% = 80{,}1\,\%.$$

Tavsiya etiladigan mustaqil ta'lim va referat mavzulari

1. Baholashning momentlar usuli.
2. Haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli.
3. Shartli variantalar.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Statistik baho ta’rifini bering.
2. Siljimagan, asosli va effektiv baholar ta’riflarini keltiring.
3. $\overline{x}_T$ -bosh to‘plam matematik kutilmasi uchun siljimagan va asosli baho bo‘lishini tushuntiring.
4. D_T - tanlanma dispersiyasi bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljigan baho bo‘lishini tushuntiring.
5. Variatsion qatorning xarakteristikalarini ta’riflang.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Bosh to‘plamdan *n*=50 hajmdagi tanlanma ajratilgan. Quyidagi

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

taqsimot bo‘yicha bosh to‘plam o‘rtachasining siljimagan bahosini toping.

2. Guruhdagi 40 ta talabaning yozma ishlari baholarining chastotalari jadvali berilgan.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	8	25	4

Tanlanma o‘rtacha va tanlanma dispertsiyasini toping.

3. $n = 26$ hajmli tanlanma bo‘yicha tanlanma dispersiyasining $D_T = 3$ bahosi topilgan. Bosh to‘plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

4. n=10 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dipersiyasini toping.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

5. Ushbu n=100 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	26	28	12	8	2

14- §. Nuqtaviy va intervalli baholar. Ishonchli intervallar

Faraz qilaylik, bosh to'plam X belgisining taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ bo'lib, θ noma'lum parametr bo'lsin. Bosh to'plamdan olingan tanlanmaning kuzatilgan qiymatlari $x_1, x_2, ..., x_n$ bo'lsin.

1-ta'rif. Tanlanmadan tuzilgan ixtiyoriy $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga ***statistika*** deyiladi.

Nuqtaviy baholashda taqsimot funksiyaning noma'lum θ parametri uchun shunday $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ statistika qidiriladiki, $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ ni θ parametr uchun taqribiy qiymat deb olinadi. Bu holda $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ statistika θ parametrning bahosi deyiladi.

2-ta'rif. Agar noma'lum parametr bitta $\tilde{\theta}$ son bilan baholansa, u holda bu baho nuqtaviy baho deyiladi.

Biz yuqorida tanishgan statistik baholar: tanlanma o'rtacha, tanlanma «tuzatilgan» dispersiya, moda, mediana, variatsiya qulochi va boshqalar nuqtaviy baho hisoblanadi.

Tajribalar soni juda katta bo'lsa, nuqtaviy bahoning qiymati odatda, noma'lum parametrga yaqin bo'ladi. Ammo, kuzatishlar soni kam bo'lsa, $\tilde{\theta}$ nuqtaviy baho va θ parametr orasidagi farq sezilarli darajada bo'lishi mumkin. Bunday hollarda θ parametrni baholash uchun ***intervalli baholardan*** foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

3-ta'rif. Ikkita son (interval chetlari) bilan aniqlanadigan baho intervalli baho deb ataladi.

Intervalli bahoda bahoning aniqliligi va ishonchliligi tushunchalarini kiritishimiz kerak bo'ladi. Buni quyida ko'rib chiqamiz.

Tanlanma ma'lumotlari asosida topilgan $\tilde{\theta}$ -statistik xarakteristika θ parametrning bahosi bo'lsin. θ ni o'zgarmas son deb faraz qilamiz. Ma'lumki, $\tilde{\theta}$ ning aniqligi yuqori bo'lgan sari $|\theta - \tilde{\theta}|$ ning qiymati kamayib boradi, ya'ni $|\theta - \tilde{\theta}| < \delta \quad (\delta > 0)$ tengsizlikda δ qancha kichik bo'lsa, baho shuncha aniq bo'ladi. Shu sababli, δ ***bahoning aniqligi*** deb ataladi.

Statistik usullar $\tilde{\theta}$ baho $\left|\theta - \tilde{\theta}\right| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantirishini qat'iy tasdiqlay olmaydi, balki bu tengsizlik bajarilishining qandaydir γ ehtimolligi haqida xulosa qila oladi.

$\left|\theta - \tilde{\theta}\right| < \delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli γ θ parametrning $\tilde{\theta}$ baho bo'yicha ***ishonchliligi* (*ishonchlilik ehtimoli*)** deyiladi. Bu erda, $P\left(\left|\theta - \tilde{\theta}\right| < \delta\right) = \gamma$. Ko'p hollarda, ishonchlilik oldindan beriladi. Masalan, 0,95; 0,99; 0,999 va hokazo.

$P\left(\left|\theta - \tilde{\theta}\right| < \delta\right) = \gamma$ ehtimollikni quyidagicha yozib olamiz:

$$P\left(\tilde{\theta} - \delta < \theta < \tilde{\theta} + \delta\right) = \gamma. \qquad (1)$$

Bu munosabatni quyidagicha tushunish kerak: $\left(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta\right)$ interval θ noma'lum parametrni o'z ichiga olish (qoplash) ehtimoli γ ga teng.

$\left(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta\right)$ interval noma'lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplovchi ***ishonchlilik intervali*** deb ataladi.

1-eslatma. $\left(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta\right)$ interval tasodifiy chetki nuqtalarga ega, chunki turli tanlanmalar uchun $\tilde{\theta}$ ning qiymatlari turlicha bo'ladi. Shu sababli, tanlanma o'zgarsa $\left(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta\right)$ intervalning chetki nuqtalari ham o'zgaradi.

Ishonchlilik intervallarni topish qanday amalga oshirilishi bilan normal taqsimot qonuniga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorlar misolida tanishib chiqamiz.

Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. Ma'lumki, bu taqsimotni ikkita parametr: a va σ aniqlaydi. Faraz qilamiz ulardan biri, σ-o'rtacha kvadratik chetlanish, ma'lum ikkinchisi, a - matematik kutilma, noma'lum bo'lsin. Bu taqsimotning matematik kutilmasi a uchun ishonch intervalini γ ishonch bilan δ aniqlikda topamiz.

Tanlanma o'rtachasi $\overline{x_T}$ ni $\overline{X_T}$ tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz. X belgi normal taqsimlanganligi sababli tanlanma o'rtacha ham normal taqsimlangan bo'ladi. shu bilan birga, $\overline{X_T}$ ning parametrlari quyidagicha: $M(\overline{X_T}) = a;$ $\qquad D(\overline{X_T}) = \dfrac{\sigma^2}{n}.$

$P\left(\left|\overline{X_T}-a\right|<\delta\right)=\gamma$ munosabat o‘rinli bo‘lsin.U holda

$P\left(\left|X-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$

formuladan foydalanib, X ni $\overline{X_T}$ bilan σ ni esa $\sigma(\overline{X_T})=\sigma/\sqrt{n}$ bilan almashtirsak quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$P\left(\left|\overline{X_T}-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=2\Phi(t), \qquad (2)$$

bu erda $t=\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Bundan $\delta=\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ bo‘ladi. U holda (2) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$P\left(\left|\overline{X_T}-a\right|<\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t), \text{ yoki}$$

$$P\left(\overline{X_T}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X_T}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t). \qquad (3)$$

Shunday qilib, ishonch intervali $\overline{X_T}$ ni $\overline{x_T}$ ga almashtirganimizdan so‘ng $\left(\overline{x_T}-\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x_T}+\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ dan iborat bo‘ladi. Bundan $\left(\overline{x_T}-\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x_T}+\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ tasodifiy interval a parametrni $\gamma=2\Phi(t)$ ehtimol bilan $\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ aniqlikda qoplashi kelib chiqadi.

(3) dan quyidagi xulosalarni chiqaramiz: tanlanma hajmining ortishi baholash aniqligi oshishiga olib keladi; agar γ ishonchlilik orttirilsa, t parametr ortadi va bu esa baholash aniqligi kamayishiga olib keladi.

Misol.

1. X tasodifiy miqdor normal taqisimlangan bo‘lib uning o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=3$. Tanlanma hajmi $n=36$ va bahoning ishonchliligi $\gamma=0,95$ bo‘lsin. Noma’lum parametr a-matematik

kutilmaning $\overline{x_T}$ -tanlanma o‘rtacha bo‘yicha ishonchlilik intervallarini toping.

Yechish. Jadvaldan (2-ilovaga qarang) foydalanib t ni topamiz, ya’ni

$$2\Phi(t) = 0,95 \Rightarrow \Phi(t) = 0,475 \Rightarrow t = 1,96.$$

Bahoning aniqligi: $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0,98$. U holda ishonchlilik intervali: $(\overline{x_T} - 0,98; \overline{x_T} + 0,98)$.

Berilgan $\gamma = 0,95$ ishonchlilikni quyidagicha tushunish kerak: agar yetarlicha ko‘p sondagi tanlanmalar olingan bo‘lsa, u holda ularning 95%i shunday ishonchli intervallarni aniqlaydiki, bu intervallar parametrni haqiqatan ham o‘z ichiga oladi; 5 % hollardagina parametr interval chegarasidan tashqarida yotishi mumkin.

2-eslatma. Agar matematik kutilmani oldindan berilgan δ aniqlik va γ ishonchlilik bilan baholash talab qilinsa, u holda bu aniqlikni beradigan tanlanmaning minimal hajmi

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} \tag{4}$$

formuladan topiladi.

Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan va uning a-matematik kutilmasini $\overline{x_T}$ -tanlanma o‘rtachasi orqali baholashda σ-o‘rtacha kvadratik chetlanish noma’lum bo‘lsin. U holda

$$\overline{x_T} - t(\gamma, n)\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t(\gamma, n)\frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{7}$$

interval a uchun ishonch intervali bo‘lib xizmat qiladi. Bu erda s - «tuzatilgan» o‘rtacha kvadratik chetlanish; $t(\gamma, n)$ esa berilgan n va γ bo‘yicha maxsus jadvaldan topiladi.Bunday jadvallar ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaga oid adabiyotlarda beriladi (3-ilova).

Misol.

2. Bosh to‘plamdan $n = 10$ hajmli tanlanma olingan va quyidagi statistik taqsimot tuzilgan:

x_i:	–2	1	2	3	4	5
n_i:	2	1	2	2	2	1

Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan bo‘lsa, uning a-matematik kutilmasi uchun $\overline{x_T}$ bo‘yicha $\gamma = 0{,}95$ ishonchlilik bilan ishonchli intervalni toping.

Yechish. Tanlanma o‘rtachani va «tuzatilgan» o‘rtacha kvadratik chetlanishni mos ravishda quyidagi formulalardan topamiz:

$$\overline{x_T} = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i x_i}{n}, \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} n_i (x_i - \overline{x_T})^2}{n-1}}$$

U holda: $\overline{x_T} = 2,\ s = 2{,}4$. Jadvaldan (3-ilova) $\gamma = 0{,}95$ va $n = 10$ larga mos $t(\gamma, n) = 2{,}26$ ni topamiz. Topilganlarni (7) ifodaga qo‘yib: $0{,}3 < a < 3{,}7$ ishonchli intervalni hosil qilamiz. Bu interval noma’lum a-matematik kutilmani $\gamma = 0{,}95$ ishonchlilik bilan qoplaydi.

Bosh to‘plamning o‘rganilatgan X son belgisi normal taqsimlangan bo‘lsin. Uning σ-o‘rtacha kvadratik chetlanishi uchun tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha γ ehtimol bilan ishonch intervali topish talab qilinsin.

Ma’lumki, tanlanmaning s^2- «tuzatilgan» dispersiyasi σ^2-bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan bahodir. Shu sababli, σ-paremetrni s orqali baholaymiz. Buning uchun

$P\left(|\sigma - s| < \delta\right) = \gamma$, yoki $P\left(s - \delta < \sigma < s + \delta\right) = \gamma$

munosabat bajarilishini talab qilamiz. Tayyor jadvaldan foydalanish uchun $s - \delta < \sigma < s + \delta$ qo‘sh tengsizlikni teng kuchli

$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

tengsizlik bilan almashtiramiz. $q = \delta / s$ belgilashdan so‘ng

$$s\left(1 - q\right) < \sigma < s\left(1 + q\right), \ (q < 1) \tag{8}$$

ishonch intervalini hosil qilamiz. Agar $q > 1$ bo‘lsa ishonch intervali quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$0 < \sigma < s(1 + q). \tag{9}$$

bu yerda q, n va γ bo‘yicha maxsus jadvaldan (4-ilovaga qarang) topiladi.

Misol.

3. Bosh to‘plamning X son belgisi normal taqsimlangan va $n=50$ hajmli tanlanmaning «tuzatilgan» dispersiyasi: $s=1,5$ bo‘lsin. σ-noma’lum parametrni $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchlilik intervalini toping.

Yechish. Jadvaldan (4-ilova) $n=50$ va $\gamma=0,95$ qiymatlarga mos $q=0,21$ ni topamiz. Bu erda $q<1$ bo‘lgani uchun (8) tengsizlikdan foydalanib, $1,185<\sigma<1,815$ ishonchlilik intervalini topamiz.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Binomial taqsimotda ehtimolning nisbiy chastota orqali bahosi.
2. Styudent taqsimoti.
3. Gamma funksiya va uning xossalari.
4. χ^2 (xi kvadrat) -taqsimoti.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Statistik baho ta’rifini bering.
2. Ishonchlilik ehtimoli va ishonchli interval tushunchalarini ta’riflang.
3. Normal taqsimlangan bosh to‘plam matematik kutilishi uchun ishonchli intervallarni keltiring.
4. Ishonchli intervallarda qatnashuvchi parametrlarni izohlang.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X son belgisining noma’lum a-matematik kutilmasini $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervalini toping. Bunda o‘rtacha kvadratik chetlanish $\sigma=4$, tanlanma o‘rtacha $\overline{x_T}=10,2$ va tanlanma hajmi $n=16$ deb olinsin.

2. 10 ta erkli o‘lchashlar natijasida sterjen uzunligi (mm) uchun quyidagi ma’lumotlar olingan: 23, 24, 23, 25, 25, 26, 26, 25, 24, 25. O‘lchash xatoligini normal taqsimlangan deb faraz qilib, sterjen uzunligining matematik kutilmasi uchun $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan ishonch intervalini toping.

3. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining a-matematik kutilmasini tanlanma o‘rtacha bo‘yicha $\gamma = 0,925$ ishonchlilik va $\delta = 0,2$ aniqlik bilan baholash uchun tanlanmaning minimal hajmini toping. O‘rtacha kvadratik chetlanishni $\sigma = 1,5$ deb oling.

4. Bosh to‘plamdan $n = 12$ hajmli tanlanma olingan:

x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining a-matematik kutilmasini $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch oralig‘ini toping.

5. Bosh to‘plamning X-son belgisi normal taqsimlangan. n hajmli tanlanma bo‘yicha «tuzatilgan» o‘rtacha kvadratik chetlanishi s topilgan.

Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ ni $\gamma = 0,99$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch oralig‘ini toping, bunda $n = 10$, $s = 5,1$.

15-§. Korrelyatsiya nazariyasi elementlari. Funksional, statistik va korrelyatsion bog‘lanishlar. Korrelyatsion jadval. Korrelyatsiya nazariyasining ikki asosiy masalasi

Kundalik faoliyatimizdagi ko‘pgina amaliy masalalarda, tajribalarda o‘rganilayotgan Y belgining (tasodifiy miqdorning) bitta yoki bir nechta boshqa belgilarga (tasodifiy miqdorlarga) bog‘liqligini aniqlash va baholash talab qilinadi. Avvalam bor Y belgining bitta X tasodifiy miqdorga bog‘liqligini o‘rganamiz.

Ikki belgi funksional bog‘lanish bilan, yoki statistik bog‘lanish bilan bog‘langan, yoki umuman erkli bo‘lishi mumkin.

Misollar.

1. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti quyidagicha:

$$\begin{array}{lll} X: & 2 & 3 \\ p: & 0{,}6 & 0{,}4 \end{array}.$$

$Y = X^2$ funksiyaning taqsimoti topilsin.

Y*echish.* Y ning mumkin bo‘lgan qiymatlarini topamiz:

$y_1 = 4 \quad y_2 = 9$.

U holda Y ning taqsimoti:

$$\begin{array}{lll} Y: & 4 & 9 \\ p: & 0{,}6 & 0{,}4 \end{array}.$$

2. X uzluksiz tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo‘lib, $M(X) = a = 2$ va $\sigma(X) = 0,5$ bo‘lsa, $Y = 3X + 1$ chiziqli funksiyaning zichlik funksiyasini toping.

Y*echish.* Y ning sonli xarakteristikalarini topamiz:

$M(Y) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$, $\sigma(Y) = 3 \cdot 0,5 = 1,5$.

U holda Y ning zichlik funksiyasi: $g(y) = \dfrac{1}{1,5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-7)^2}{2\cdot(1,5)^2}}$.

Funksional bog‘lanishlar aniq va tabiiy fanlar: matematika, fizika, ximiya va shu kabilarda, ayniqsa, yaqqol kuzatiladi.

Masalan, termometrdagi simob ustunining balandligi X havo harorati Y haqida aniq va bir qiymatli ma’lumot beradi; aylana radiusi R va uning uzunligi C orasida $C = 2\pi R$ - geometriyadan ma’lum bo‘lgan formula bilan aniqlangan funksional bog‘lanish mavjuddir.

Iqtisodiy jarayonlarda, umuman jamiyatning boshqa sohalarida tasodifiy belgilar orasida qat'iy funksional bog'lanish kamdan-kam uchraydi. Buning asosiy sabablaridan biri belgilarga ta'sir etuvchi faktorlarning xilma-xilligi va tasodifiyligidir. Bu holatda belgilar orasidagi moslik statistik bog'lanish bo'lishi mumkin.

1-ta'rif. Agar miqdorlardan birining o'zgarishi ikkinchi miqdor taqsimotining o'zgarishiga olib kelsa, u holda bu ikki miqdor orasidagi bog'lanishga statistik bog'lanish deyiladi.

Masalan, agar $Y\left(Z_1,Z_2,V_1,V_2\right)$ va $X\left(Z_1,Z_2,U_1,U_2\right)$ (Z_i,V_i,U_i- tasodifiy faktorlar) lar berilgan bo'lsin. Bu holda Y va X lar orasidagi bog'lanish statistik bog'lanish deyiladi, chunki ularning har biri bog'liq bo'lgan tasodifiy faktorlar ichida umumiylari: Z_1,Z_2 va umumiy bo'lmaganlari: $V_{i,}$ U_i $(i=1,2)$ bor.

Statistik bog'lanishni matematik ifodalash murakkab, shu sababli uning xususiy hollaridan biri hisoblangan korrelyatsion bog'lanish bilan tanishib chiqamiz.

2-ta'rif. Agar bir-biriga statistik bog'lanishda bo'lgan ikki miqdordan birining o'zgarishi ikkinchi miqdor o'rtacha qiymatining o'zgarishiga olib kelsa, u holda bunday statistik bog'lanish ***korrelyatsion bog'lanish*** deb ataladi.

Bir-biri bilan korrelyatsion bog'lanishda bo'lgan tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz.

1. Mehnat unumdorligi X va jami ishlab chiqarilgan mahsulot Y;
2. Yig'ib olingan hosil miqdori Y va ishlatilgan o'g'itlar miqdori X;
3. Jami mahsulot miqdori X va korxonaning ish haqi fondi Y;
4. Sarflangan kapital mablag'lar X va shu mablag'lardan olingan sof foyda Y;
5. Korxonaning texnika bilan qurollanganlik darajasi X va mehnat unumdorligi ko'rsatkichi Y.

Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinib turibdiki, korrelyatsion bog'lanishni matematik ifodalash, ya'ni $y=f(x)$ ko'rinishda yozish, uchun ***shartli o'rtacha*** tushunchasini kiritishimiz kerak.

3-ta'rif. $X=x$ qiymatga mos keluvchi Y ning kuzatilgan qiymatlarining arifmetik o'rtachasini $\overline{y_x}$ -shartli o'rtacha deb ataymiz.

Xuddi shunday usulda $\overline{x_y}$ -shartli o'rtacha tushunchasi ham aniqlanadi.

4-ta'rif. $Y = y$ qiymatga mos keluvchi X ning kuzatilgan qiymatlari arifmetik o'rtachasini $\overline{x}_y$ -shartli o'rtacha deb ataymiz.

Misol.

3. X miqdorning $x_1 = 5$ qiymatiga Y miqdorning $y_1 = 6, \quad y_2 = 7, \quad y_3 = 8$ qiymatlari mos keladi. U holda:

$$\overline{y}_{x_1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{6+7+8}{3} = 7.$$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar (belgilar) ustida kuzatishlar o'tkazilgan bo'lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda $(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad ..., \quad (x_n, y_n)$ lardan iborat bo'lsa, X va Y orasidagi bog'lanishni (munosabatni) ushbu jadval ko'rinishida ifodalash mumkin.

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

Agar yuqoridagi jadvalda x_i va y_i lar turli qiymatlarini qabul qilsa, u holda shartli o'rtacha tushunchasidan foydalanmaymiz.

Agar kuzatishlar soni ko'p, ya'ni x_i qiymat m_{x_i} marta, y_j qiymat m_{y_j} marta, (x_i, y_j) juftliklar $m_{x_i y_i}$ marta takrorlanishi mumkin bo'lsa, u holda yuqoridagi jadval o'rniga *korrelyatsion jadval* yoki *korrelyatsion panjara* deb ataluvchi jadval hosil bo'ladi. $m_{x_i}, m_{y_j}, m_{x_i y_j}$ lar mos ravishda $x_i, y_j, (x_i, y_j)$ larning chastotalari deyiladi. $m_{x_i y_j} = m_{ij}$ belgilash kiritib quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

Bu yerda

$$\sum_i m_{ij} = m_{y_j}, \quad \sum_j m_{ij} = m_{x_i}, \quad \sum_i m_{x_i} = \sum_j m_{y_j} = n$$

Y \ X	y_1	y_2	$\dots$	y_l	m_x
x_1	m_{11}	m_{12}	$\dots$	m_{1l}	m_{x_1}
x_2	m_{21}	m_{22}	$\dots$	m_{2l}	m_{x_2}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_k	m_{k1}	m_{k2}	$\dots$	m_{kl}	m_{x_k}
m_y	m_{y_1}	m_{y_2}	$\dots$	m_{y_l}	n

Bu holatda shartli o‘rtacha tushunchasidan foydalanishimiz zarur.

Korrelyatsion panjarada shartli o‘rtacha topilishiga doir misol ko‘rib chiqamiz.

Misol.

4. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o‘rtacha - $\overline{y_x}$ ni toping.

X / Y	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n=30$

Yechish. Hisoblashlarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

X / Y	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n=30$
$\overline{y_x}$	9,5	11,7	13,125	13,8	13,5	

Belgilar orasidagi korrelyatsion munosabatlar (bog‘lanishlar) to‘g‘ri, teskari, to‘g‘ri chiziqli va egri chiziqli bo‘lishi mumkin. Masalan, to‘g‘ri korrelyatsion bog‘lanishda belgilardan birining ortishi (kamayishi) boshqasining o‘rtachasi ortishiga (kamayishiga) olib keladi, teskari bog‘lanishda esa aksincha va hokazo.

Masalan, daraxtning yoshi X ortib borishi bilan daraxtdagi xalqalar soni Y ortib boradi, havoning harorati X pasayishi bilan nafas olish tezligi Y kamayadi va h.k.

Y ning X ga korrelyatsion bog‘liqligi deb, $\overline{y_x}$ shartli o‘rtachaning x ga funksional bog‘lanishiga aytiladi: $\overline{y_x} = f(x)$. Bu tenglama Y ning X ga ***regressiya tanlanma tenglamasi*** (ba’zida Y ning X ga regressiya tenglamasi), $f(x)$ funksiya esa Y ning X ga tanlanma regressiyasi (ba’zida regressiya funksiyasi) deb ataladi. Bu tenglama grafigi esa Y ning X ga ***regressiya tanlama chizig‘i*** (ba’zida Y ning X ga regressiya chizig‘i) deyiladi.

X ning Y ga regressiya tanlama tenglamasi va regressiya tanlama chizig‘i ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi: $\overline{x_y} = \varphi(y)$.

Korrelyatsiya nazariyasi belgilar orasidagi bog‘lanishni o‘rganish jarayonida asosan quyidagi ikki masalani hal qiladi.

1-masala. Belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanish formasini aniqlash, ya’ni regressiya funksiyasining ko‘rinishini (chiziqli, chiziqsiz va h.k.) topish.

Agar $f(x)$ va $\varphi(y)$ regressiya funksiyalarining ikkalasi ham chiziqli bo‘lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanish ***chiziqli,*** aks holda esa ***chiziqsiz*** deyiladi.

2-masala. Korrelyatsion bog‘lanish zichligini (kuchini) aniqlash.

Y belgining X belgiga korrelyatsion bog‘lanishiining zichligi $X = x$ qiymatga mos Y ning mumkin bo‘lgan qiymatlari $\overline{y_x}$ -shartli o‘rtacha atrofida tarqoqligi darajasini baholaydi. Agar tarqoqlik katta bo‘lsa, Y belgi X belgiga kuchsiz bog‘langanligidan yoki ular orasida bog‘liqlik yo‘qligidan darak beradi. Aksincha, kichik tarqoqlik belgilar orasida ancha kuchli (zich) bog‘liqlik borligini ko‘rsatadi.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Bitta tasodifiy argument funksiyasi va uning taqsimoti.

2. Ikki tasodifiy argument funksiyasi.
3. Shartli matematik kutilma.
4. Bog‘liq va bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Belgilar orasida qanday bog‘lanishlar bo‘lishi mumkin?
2. Korrelyatsion bog‘lanish ta’rifini bering.
3. Korrelyatsion jadval qanday tuziladi?
4. Shartli o‘rtacha qiymat ta’rifini bering.
5. Regressiya tanlanma tenglamasi, regressiya funksiyasi va regressiya tanlanma chizig‘i ta’riflarini bering.
6. Korrelyatsiya nazariyasi ikki asosiy masalasini ayting.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o‘rtacha-$\overline{x_y}$ ni toping.

Y \ X	4	4,5	5	5,5	6
8	5	3	-	-	-
10	2	4	5	4	3
13	-	1	1	2	2

2. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o‘rtacha-$\overline{y_x}$ ni toping.

Y \ X	3	3,5	4	4,5	5
7	5	3	-	-	-
9	2	3	5	3	1
13	-	1	1	2	2

16-§. To‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi. Eng kichik kvadratlar usuli

Ma’lumki, korrelyatsiion bog‘langan X va Y belgilarning regressiya tanlanma tenglamasi

$$\overline{y_x} = f(x), \text{ yoki } \overline{x_y} = \varphi(y)$$

ko‘rinishda yozilib, agar $f(x)$ va $\varphi(y)$ regressiya funksiyalarining ikkalasi ham chiziqli bo‘lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanish chiziqli deb atalar edi. Biz mana shu chiziqli korrelyatsion bog‘lanishni atroflicha o‘rganib chiqamiz.

Buning uchun (X,Y) juftlikning son belgilari sistemasini o‘rganamiz. Bunda ikki: 1) ma’lumotlar gruppalanmagan; 2) ma’lumotla gruppalangan hollarni alohida-alohida qarashimiz kerak bo‘ladi.

1) Bosh to‘plam ustida o‘tkazilgan n ta erkli tajriba natijasida olingan ma’lumotlardan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ sonlar juftligi ketma-ketligini hosil qilingan bo‘lib, bu ma’lumotlarni gruppalash shart bo‘lmasin, ya’ni X belgining turli x qiymatlari va ularga mos Y belgining y qiymatlari bir martadan kuzatilgan bo‘lsin. Bunday holatda shartli o‘rtacha tushunchasidan foydalanish shart emas. Shuning uchun izlanayotgan

$$\overline{y_x} = kx + b \tag{1}$$

tanlanma regressiya to‘g‘ri chizig‘i tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin

$$y = kx + b\,. \tag{2}$$

Bu tenglamadagi burchak koeffitsientni ρ_{yx} bilan belgilab, uni Y ning X ga ***tanlanma regressiya koeffitsienti*** deb ataymiz. Shunday qilib, Y ning X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini

$$Y = \rho_{yx} x + b \tag{3}$$

ko‘rinishda izlaymiz.

Bu tenglamadagi noma’lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarni shunday tanlashimiz kerakki, natijada kuzatish ma’lumotlari bo‘yicha topilgan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ nuqtalarni xOy tekislikka joylashtirganimizda bu nuqtalar mumkin qadar (3) to‘g‘ri chiziqqa yaqin atrofda yotsin. Bunday talabni bajarishdan oldin $Y_i - y_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$ ifoda bilan aniqlanadigan chetlanish tushunchasini kiritib olamiz, bu erda Y_i-(3) tenglamadan kuzatilgan x_i qiymatga mos keluvchi ordinata; y_i esa x_i ga mos kuzatilgan ordinata. Noma’lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarni shunday tanlaymizki, chetlanishlar kvadratlarining yig‘indisi eng kichik, ya’ni $\min \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - y_i\right)^2$, bo‘lsin (noma’lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarni topishning bu usuli *eng kichik kvadratlar* usuli deb ataladi).

Har bir chetlanish noma’lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarga bog‘liq bo‘lgani uchun chetlanishlari kvadratlari yig‘indisining funksiyasi F ham bu koeffitsientlarga bog‘liq bo‘ladi:

$$F(\rho_{yx}, b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\rho_{yx} x_i + b - y_i)^2 .$$

Bu funksiyaning minimumini topish uchun noma’lum parametrlar bo‘yicha F ning xususiy hosilalarini hisoblab nolga tenglashtiramiz (hozircha ρ_{xy} o‘rniga ρ yozib turamiz):

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho + b - y_i) x_i = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho + b - y_i) = 0.$$

Elementar almashtirishlarni bajarib ρ va b ga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \rho \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \rho \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=}^{n} y_i \end{cases} \tag{4}$$

Bu sistemani yechib izlanayotgan parametrlarni topamiz (ixchamlik uchun i indekslarni tushirib qoldiramiz):

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}, \qquad b = \frac{n\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \tag{5}$$

Xuddi shu usulda X ning Y ga regressiya to‘g‘ri chiziqli tanlanma tenglamasini topish mumkin.

$$\overline{x_y} = \rho_{xy} y + c. \tag{6}$$

Misol.

1. Hajmi $n = 5$ bo‘lgan tanlanmaning

x_i :	1	1,5	3	4,5	5
y_i :	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

taqsimoti bo‘yicha Y ning X ga regressiya to‘g‘ri chiziqli tanlanma tenglamasini toping.

Yechish. Ma’lumotlar asosida quyidagi jadvalni tuzamiz:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,25	1	1,25
1,5	1,4	2,25	2,1
3	1,5	9	4,5
4,5	1,75	20,25	4,875
5	2,25	25	11,25
$\sum_i = 15$	$\sum_i = 8{,}15$	$\sum_i = 57{,}5$	$\sum_i = 26{,}975$

Jadvaldagi hisoblangan qiymatlarni (5) formulaga qo‘ysak:

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} = 0{,}202,$$

$$b = \frac{n\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{5 \cdot 57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} = 1{,}024.$$

U holda regressiya tanlanma tenglamasi: $y_x = 0,202x + 1,024$.

2) Faraz qilaylik, kuzatish natijasida olingan ma'lumotlar ko'p sonli (kamida 50 ta kuzatish o'tkazilishi kerak), ya'ni gruppalanadigan, bo'lib X belgining x qiymatiga va mos Y belgining y qiymati bir necha martadan kuzatilgan bo'lsin, ya'ni ma'lumotlar ichida takrorlanadiganlari ham bor va ular korrelyatsion jadval ko'rinishida berilgan deylik.

Quyidagi (soddalik uchun i indekslarni tushirib qoldiramiz):

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x \Rightarrow \sum x = n\overline{x}, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum y \Rightarrow \sum y = n\overline{y},$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x^2 \Rightarrow \sum x^2 = n\overline{x^2},$$

$\sum xy = n_{xy}xy$ ((x, y) juftlik n_{xy} marta kuzatilishi hisobga olingan)

ayniyatlardan foydalanib, (4) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} \left(n\overline{x^2}\right)\rho_{yx} + \left(n\overline{x}\right)b = \sum n_{xy}xy, \\ \left(\overline{x}\right)\rho_{yx} + b = \overline{y}. \end{cases} \tag{7}$$

Bu sistemani p_{yx} va b ga nisbatan yechib, izlanayotgan regressiya tanlama tenglamasini topamiz:

$$\overline{y_x} = \rho_{yx}x + b. \tag{8}$$

Ammo (7) sistemaning yechimini topishdagi ba'zi bir hisoblashlarni yengillashtirish maqsadida (8) tenglamani $\overline{y}$ uchun ham yozib:

$$\overline{y} = \rho_{yx}\overline{x} + b, \tag{9}$$

chunki $(\overline{x}, \overline{y})$ nuqta ham (8) tenglamaning yechimi bo'ladi, (8) va (9) tenglamalardan tenglamalar sistemasi hosil qilamiz va yangi sistemadan

$$\overline{y_x} - \overline{y} = \rho_{yx}(x - \overline{x}) \tag{10}$$

regressiya tanlama tenglamasini hosil qilamiz.

(7) sistemadan regressiya koeffitsientini topamiz:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\left(\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2\right)} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x^2}$$ (ma'lumotlar gruppalanmasa

$n_{xy} = 1$). (11)

1-eslatma. Agar (x_i, y_i) ma'lumotlarda katta sonlar qatnashsa x_i, y_j variantalardan mos ravishda $u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}$, $v_j = \frac{y_j - c_2}{h_2}$ shartli variantalarga o'tib hisoblashlarni ancha yengillashtirish mumkin.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Eng kichik kvadratlar usulining mohiyatini tushuntiring.
2. Belgilar orasidagi to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamalarini keltiring.
3. To'g'ri chiziqli regressiya tanlama tenglamasidagi parametrlarni izohlang.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini tuzing.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

2. Bir oylik ish haqi fondining-Y ishlab chiqarilgan jami mahsulot hajmi-X ga bog'liqligini o'rganish maqsadida 10 ta korxona bo'yicha quyidagi ma'lumotlar olingan. Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Корхоналар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X (млн. сум)	500	570	600	650	700	720	800	860	900	920
Y (млн. сум)	110	120	130	135	140	145	150	154	160	164

3. Quyidagi berilgan ma’lumotlar bo‘yicha 1 ga yerdan olingan hosil miqdori-Yning sarflangan o‘g‘it miqdori-X ga bog‘liqligi ifodalovchi to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

X (ц)	6	7	7,5	8	9	9,5	10
Y (ц)	25	27	26	30	32	35	38

4. Shahardagi 10 ta oziq-ovqat magazini bo‘yicha bir oylik tovar ayirboshlash hajmi -X va shu davr mobaynidagi muomala xarajatlari-Y hajmi o‘rganilgan. X ning Y ga bog‘liqligi ifodalovchi to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

X (млн. сум)	200	300	320	410	304	500	540	600	650	700
Y (млн. сум)	20	27	30	36	38	44	50	56	58	60

5. Quyidagi ma’lumotlar bo‘yicha arpa boshog‘idagi donlar soni-Y ning boshoqning uzunligi-Xga bog‘liqligini ifodalovchi to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini tuzing.

X	6	6,8	7	8	8,5	9	10	11	12	13	14	15
Y	11	14	16	20	22	24	24	28	28	30	31	33

17-§. Korrelyatsion bog‘lanish zichligi.Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti va tanlanma korrelyatsion nisbat

Ma’lumki, korrelyatsiya nazariyasining asosiy masalalaridan biri korrelyatsion bog‘lanish zichligini (kuchini) aniqlashdir.

Y belgining X belgiga korrelyatsion bog‘lanish zichligi Y ning $X = x$ ga mos qiymatlarining $\overline{y_x}$ shartli o‘rtacha qiymat atrofida tarqoqligi bo‘yicha baholanadi. Agar tarqoqlik katta bo‘lsa, u holda Y ning X ga kuchsiz bog‘langanligini yoki umuman bog‘lanmaganligini bildiradi. Tarqoqlikning kamligi esa ular orasida ancha kuchli bog‘lanish borligini ko‘rsatadi.

Y va X belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanish zichligini xarakterlovchi kattaliklar: korrelyatsiya tanlanma koeffitsienti va tanlanma korrelyatsion nisbatlar bilan tanishib chiqamiz. Bu ikki kattalikning vazifalari bir-biriga o‘xshasa ham turli shakldagi masalalarni hal qiladi. Shu sababli, bu ikki kattalikni alohida-alohida o‘rganamiz.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti belgilar orasidagi chiziqli bog‘lanish zichligini aniqlab beradi. Uning formulasini keltirib chiqarish uchun Y ning X to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini

$$\overline{y_x} - \overline{y} = \rho_{yx}(x - \overline{x}) \tag{1}$$

parametri ρ_{yx} ning

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x^2} \tag{2}$$

ifodasi ko‘rinishini o‘zgartiramiz. Buning uchun (2) tenglikning ikkala tomonini ham $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ nisbatga ko‘paytiramiz. U holda:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x^2}$$ (agar ma’lumotlar gruppalanmasa: $n_{xy} = 1$).

Hosil bo‘lgan tenglikning o‘ng tomonini r_T bilan belgilaymiz va uni tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti deb ataymiz:

$$r_T = \frac{\sum xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$$ (ma’lumotlar gruppalanmasa), (3)

yoki

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x \sigma_y} \text{ (ma'lumotlar gruppalansa).} \qquad (4)$$

Bu yerda $x,\ y$ lar mos ravishda X va Y belgilarning kuzatilgan qiymatlari; n_{xy} - kuzatilgan (x, y) juftlikning chastotasi; n - tanlanma hajmi; $\overline{x}$, $\overline{y}$ -mos tanlanma o‘rtachalar; σ_x, σ_y - tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishlardir.

r_T - tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti bosh to‘plam r - korrelyatsiya koeffitsientining bahosi hisoblanadi, shuning uchun Y va X kattaliklarning son belgilari orasidagi chiziqli bog‘liqligining o‘lchovi hisoblanadi.

Agar tanlanma yetarlicha katta hajmga ega va reprezentativ bo‘lsa, u holda belgilar orasidagi zichlik haqida tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha olingan xulosa ma’lum darajada bosh to‘plamga ham tarqatilishi mumkin. Masalan, normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bosh to‘plam korrelyatsiya koeffitsientini baholash uchun $(n \geq 50)$

$$r_T - 3\frac{1 - r_T^2}{\sqrt{n}} \leq r_B \leq r_T + 3\frac{1 + r_T^2}{\sqrt{n}}$$

formuladan foydalanish mumkin.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1-xossa. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining absolyut qiymati birdan ortmaydi, ya’ni $|r_T| \leq 1$, yoki $-1 \leq r_T \leq 1$.

2-xossa. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining absolyut qiymati ortsa, belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog‘lanish zichligi ortadi.

3-xossa. Agar $|r_T| = 1$ bo‘lsa, u holda kuzatilayotgan belgilar chiziqli funksional bog‘langan bo‘ladi.

4-xossa. Agar $|r_T| = 0$ bo‘lib, regressiya tanlanma chiziqlari to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi bog‘lanish chiziqli korrelyatsion bog‘lanish bo‘lmaydi.

1-eslatma. Agar $|r_T| = 0$ bo‘lsa, u holda o‘rganilayotgan belgilar chiziqsiz korrelyatsion bog‘lanishda (masalan, parabolik, ko‘rsatkichli va h.k.) va hattoki, funksional bog‘lanishda bo‘lishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan xossalardan tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining ma'nosi kelib chiqadi: tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti tanlanmada son belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog'lanish zichligini xarakterlaydi: $|r_T|$ kattalik 1 ga qancha yaqin bo'lsa, chiziqli korrelyatsion bog'lanish shuncha kuchli; $|r_T|$ kattalik 0 ga qancha yaqin bo'lsa, chiziqli korrelyatsion bog'lanish shuncha kuchsiz.

2-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining ishorasi regressiya koeffitsientlarining ishoralari bilan bir xil bo'ladi, bu quyidagi formulalardan kelib chiqadi:

$$\rho_{yx} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \qquad \rho_{xy} = r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{5}$$

3-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti tanlanma regressiya koeffitsientlarining geometrik o'rtacha qiymatiga teng:

$$r_T = \pm\sqrt{\rho_{yx}\rho_{xy}}.$$

Haqiqatan ham (5) dan:

$$\rho_{yx}\rho_{xy} = r_T^2 \Rightarrow r_T = \pm\sqrt{\rho_{yx}\rho_{xy}}.$$

Ildiz oldidagi ishora regressiya koeffitsientlari ishoralari bilan bir xil qilib olinishi lozim.

Misol.

1. Cho'chqa bolasining og'irligi Y (kg.) va yoshi X (haftalarda) orasidagi bog'lanish quyidagi jadval bilan berilgan.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,3	2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

Shu ma'lumotlar bo'yicha tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

Yechish. $r_T = \dfrac{\sum x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$ formulada zarur hisoblashlarni bajarsak, $r_T = 0{,}98$ ekanligini topamiz. Bundan esa cho‘chqa bolasining og‘irligi va yoshi orasidagi bog‘lanish kuchli, degan xulosaga kelamiz.

4-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini hisoblashni soddalashtirish uchun shartli variantaga o‘tish mumkin (bunda r_T ning qiymati o‘zgarmaydi).

Kuzatilayotgan (yoki biz o‘rganmoqchi bo‘lgan) X va Y belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog‘lanish zichligini baholash uchun r_T - korrelyatsiya tanlanma koeffitsienti xizmat qilsa, chiziqsiz yoki umuman ixtiyoriy ko‘rinishdagi korrelyatsion bog‘lanishning zichligini qanday baholash mumkin degan savol bo‘lishi tabiiydir. Umumiy holda korrelyatsion bog‘lanishning zichligini aniqlash uchun ***tanlanma korrelyatsion nisbat*** deb ataluvchi xarakteristika ishlatiladi. Bu xarakteristika bilan tanishib chiqishdan oldin tanlanma korrelyatsion nisbatni kiritish bilan bog‘liq bo‘lgan ba’zi tushunchalarni keltirib o‘tamiz.

1-ta’rif. Bosh to‘plamning biror bir gruppasiga tegishli belgilarning arifmetik o‘rtachasi gruppa o‘rtachasi deb ataladi.

Gruppa o‘rtachasini ba’zi hollarda shartli o‘rtacha deb ham yuritish mumkin. Yuqorida foydalanilgan shartli o‘rtacha tushunchasida bu holat yuz bergan.

Gruppa o‘rtachasi va gruppalar hajmi ma’lum bo‘lsa umumiy to‘plam o‘rtachasini (bosh to‘plam o‘rtachasi) topish mumkin.

Misol.

2. Ikki gruppadan tashkil topgan to‘plam o‘rtachasi topilsin:

Gruppa	birinchi		ikkinchi	
Belgining qiymatlari	1	6	1	5
Chastota	10	15	20	30
Hajm	10+15=25		20+30=50.	

Yechish. Gruppa o‘rtachalarini topamiz:

$$\overline{x}_1 = \frac{10\cdot 1 + 15\cdot 6}{25} = 4, \qquad \overline{x}_2 = \frac{20\cdot 1 + 30\cdot 5}{50} = 3{,}4.$$

Gruppa o‘rtachalari bo‘yicha umumiy o‘rtachani topamiz:

$$\overline{x} = \frac{25\cdot 4 + 50\cdot 3{,}4}{25 + 50} = 3{,}6.$$

2-ta'rif. Gruppaga tegishli belgilarning gruppa o'rtachasiga nisbatan dispersiyasi gruppa dispersiyasi deb ataladi:

$$D_{гр}(X_j)=\frac{\sum n_i\left(x_i-\overline{x_j}\right)^2}{N_j}, \qquad (6)$$

bu yerda n_i - x_i qiymatning chastotasi; j-gruppa nomeri; $\overline{x_j}$ - j gruppaning gruppa o'rtachasi; $N_j=\sum n_i$ - j gruppa hajmi.

Misol.

3. Ikki gruppadan tashkil topgan to'plamning gruppa dispersiyasi topilsin:

Gruppa	birinchi		ikkinchi	
Belgining qiymatlari	1	6	1	5
Chastota	10	15	20	30
Hajm	10+15=25		20+30=50.	

Yechish. 2-misoldan ma'lumki, $\overline{x_1}=4$, $\overline{x_2}=3{,}4$. Endi gruppa dispersiyalarini topamiz:

$$D_{гр}(X_1)=\frac{10\cdot(1-4)^2+15\cdot(6-4)^2}{25}=6,$$

$$D_{гр}(X_2)=\frac{20\cdot(1-3{,}4)^2+30\cdot(5-3{,}4)^2}{50}=\frac{115{,}2+76{,}8}{50}=3{,}84.$$

3-ta'rif. Gruppa dispersiyalarining gruppalar hajmi bo'yicha olingan arifmetik o'rtachasi gruppalar ichki dispersiyasi deb ataladi:

$$\overline{D_{гр}}=\frac{\sum N_j D_{гр}(X_j)}{n},$$

bu yerda, N_j - j gruppa hajmi; $n=\sum N_j$ -umumiy to'plam hajmi.

Masalan, 3-misolda gruppalar ichki dispersiyasini topsak:

$$\overline{D_{гр}}=\frac{25\cdot 6+50\cdot 3{,}84}{75}=4{,}56.$$

4-ta'rif. Gruppa o'rtachalarining umumiy to'plam o'rtachasiga (bosh to'plam o'rtachasi) nisbatan dispersiyasi gruppalararo dispersiya deb ataladi:

$$D_{гр}\left(\overline{x_j}\right)=\frac{\sum N_j\left(\overline{x_j}-\overline{x}\right)^2}{n},$$

bu yerda $\overline{x_j}$ - j gruppaning gruppa o'rtachasi; N_j - j gruppa hajmi; $\overline{x}$ - umumiy o'rtacha; $n=\sum N_j$ -umumiy to'plam hajmi.

Masalan, 3-misolda gruppalararo dispersiyani topsak:

$$D_{гр}\left(\overline{x_j}\right)=\frac{25\cdot(4-3,6)^2+50\cdot(3,4-3,6)^2}{75}=\frac{4+2}{75}=0,08.$$

Endi bu tushunchalardan foydalanib tanlanma korrelyatsion nisbat tushunchasini aniqlaymiz.

5-ta'rif. Y ning X ga tanlanma korrelyatsion nisbati deb,

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{\overline{y_x}}}{\sigma_y} \tag{6}$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Bu yerda $\sigma_{\overline{y_x}}=\sqrt{\frac{\sum n_x\left(\overline{y_x}-\overline{y}\right)^2}{n}}$ -shartli yoki gruppalararo o'rtacha kvadratik chetlanish; $\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum n_y\left(y-\overline{y}\right)^2}{n}}$ -o'rtacha kvadratik chetlanish; n - tanlanma hajmi; n_x - X belgining x qiymati chastotasi; n_y- Y belgining y qiymati chastotasi; $\overline{y}$ - Y belgining umumiy o'rtachasi; $\overline{y_x}$ - Y belgining $X=x$ ga mos shartli o'rtachasi.

X ning Y ga tanlanma korrelyatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{xy}=\frac{\sigma_{\overline{x_y}}}{\sigma_x} \tag{7}$$

Misol.

2. $n=50$ hajmli quyidagi korrelyatsion jadval bo'yicha Y belgining X belgiga korrelyatsion nisbati n_{yx} ni toping.

Y \ X	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\overline{y_x}$	21	15	20	

Yechish. $\overline{y}$-umumiy o‘rtachani topamiz:

$$\overline{y} = \frac{\sum n_i y_i}{n} = \frac{38 \cdot 15 + 12 \cdot 25}{50} = \frac{870}{50} = 17,4.$$

σ_y-o‘rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y \left(y - \overline{y}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{38 \cdot (15 - 17,4)^2 + 12 \cdot (25 - 17,4)^2}{50}} = 4,27$$

$\sigma_{\overline{y_x}}$-shartli o‘rtachaning o‘rtacha kvadratik chetlanishni (yoki gruppalararo o‘rtacha kvadratik chetlanish) topamiz:

$$\sigma_{\overline{y_x}} = \sqrt{\frac{\sum n_x \left(\overline{y_x} - \overline{y}\right)}{n}} = \sqrt{\frac{10(21 - 17,4)^2 + 28(15 - 17,4)^2 + 12(20 - 17,4)^2}{50}} = 2,73$$

.

Topilganlarni (6) formulaga qo‘ysak: $\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y_x}}}{\sigma_y} = \frac{2,73}{4,27} = 0,64$.

Tanlanma korrelyatsion nisbat uchun quyidagi xossalar o‘rinli. η_{yx} va η_{xy} kattaliklar uchun aniqlangan xossalar bir xil bo‘lganligi sababli tanlanma korrelyatsion nisbat xossalarini η kattalik uchun sanab o‘tamiz.

1-xossa. Tanlama korrelyatsion nisbat quyidagi qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0 \le \eta \le 1.$$

2-xossa. Agar $\eta = 1$ bo‘lsa, belgilar funksional bog‘lanishda bo‘ladi.

3-xossa. Tanlanma korrelyatsion nisbat tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining absolyut qiymatidan kichik emas: $\eta \ge |r_T|$.

4-xossa. Agar $\eta = |r_T|$ bo‘lsa, belgilar orasida chiziqli bog‘lanish bo‘ladi.

5-xossa. Agar $\eta = 0$ bo‘lsa, belgilar korrelyatsion bog‘lanishda bo‘lmaydi.

Tanlanma korrelyatsion nisbatning afzalligi uning istalgan korrelyatsion bog‘lanish, shu jumladan, chiziqli bog‘lanish zichligining ham o‘lchovi bo‘lib xizmat qilishidadir. Shu bilan birga, tanlanma korrelyatsion nisbat kamchilikka ham ega: u bog‘lanish shakli haqida hech qanday ma’lumot bermaydi.

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Shartli varianta va uning tatbiqlari.
2. Gruppa, gruppalar ichki, gruppalararo va umumiy dispersiyalar va ular orasida bog‘lanish.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Korrelyatsion bog‘liqlik zichligi qanday baholanadi?
2. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti xossalarini keltiring.
3. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti va regressiya tanlanma koeffitsienti orasida qanday munosabat bor?
4. Tanlanma korrelyatsion nisbat nima uchun xizmat qiladi? Uning xossalarini keltiring.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Berilgan jadval bo‘yicha X va Y tasodifiy miqdorlarning tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti topilsin.

X	-1	3	4	0	2	3	1	4
Y	2	0	1	-1	1	1	2	0

2. $n = 50$ hajmli quyidagi korrelyatsion jadval bo‘yicha Y belgining X belgiga tanlanma korrelyatsion nisbati η_{yx} ni toping.

Y \ X	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	n=50
y_x	21	15	20	

18-§. Egri chiziqli va to‘plamiy korrelyatsiya

Agar X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanish o‘rganilayotgan bo‘lib, $\overline{y_x} = f(x)$ yoki $\overline{x_y} = \varphi(y)$ regressiya grafiklari egri chiziq bilan tasvirlanadigan bo‘lsa u holda korrelyatsiya ***egri chiziqli*** deyiladi.

Egri chiziqli korrelyatsiya nazariyasida ham chiziqli korrelyatsiya nazariyasi kabi masalalar, ya’ni korrelyatsion bog‘lanish shakli va zichligini aniqlash bilan shug‘ullaniladi. Egri chiziqli korrelyatsiyada Y ning X ga regressiya funksiyalari ko‘rinishiga quyidagilar misol bo‘lishi mumkin:

$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ (ikkinchi tartibli parabolik korrelyatsiya);

$\overline{y_x} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (uchinchi tartibli parabolik korrelyatsiya);

$\overline{y_x} = \frac{a}{x} + b$ (giperbolik korrelyatsiya);

$\overline{y_x} = ae^{bx}$ (ko‘rsatkichli korrelyatsiya) va h.k.

Regressiya funksiyasining ko‘rinishini aniqlash uchun Dekart koordinatalar sistemasida $(x; \overline{y_x})$ nuqtalarning o‘rni topiladi va ularning joylashishiga qarab regressiya funksiyasining taxminiy ko‘rinishi haqida gipoteza qilinadi; o‘rganilayotgan masalaning mohiyatidan kelib chiqqan holda oxirgi xulosa qabul qilinadi.

Belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanishni ifodalovchi regressiya funksiyalarining noma’lum parametrlarni aniqlash yoki statistik baholash masalalari ham muhim hisoblanadi.

Regressiya funksiyasining noma’lum parametrlari eng kichik kvadratlar usuli yordamida baholanishi mumkin. Egri chiziqli korrelyatsiya zichligini baholashda tanlanma korrelyatsion nisbatdan foydalanamiz.

Egri chiziqli korrelyatsiyaning sodda hollaridan biri ikkinchi tartibli parabolik korrelyatsiya deb hisoblaymiz va bu ko‘rinishdagi korrelyatsiyaning noma’lum parametrlarini tanlanma ma’lumotlari yordamida baholaymiz.. Aniqlik uchun Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasini qaraymiz. Bunda regressiya tanlanma tenglamasi

$$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lib, a,b,c noma’lum parametrlarni tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha topish kerak bo‘ladi. Noma’lum koeffitsientlarni $v_i = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c), \quad i = 1,2,3,...,n$
chetlanishlar kvadratlarining yig‘indisi eng kichik bo‘ladigan qilib, tanlaymiz. Shu maqsadda, quyidagi funksiyani kiritamiz:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right)^2$$

Bu funksiyani ekstremumga tekshirib va tegishli almashtirishlardan so‘ng quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 \overline{y_{x_i}}, \\ a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i \overline{y_{x_i}}, \\ a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i} \overline{y_{x_i}}. \end{cases} \quad (2)$$

Kuzatish natijalari-(x_i, y_i) juftliklardan foydalanib a,b,c larga nisbatan tenglamalar sistemasi hosil qilamiz va undan a,b,c noma’lum parametrlar topiladi.

Misol.

1. Korrelyatsiya jadvali ma’lumotlari asosida $\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ ko‘rinishdagi Yning X ga regressiya tanlama tenglamasini toping.

$Y \backslash X$	1	1,1	1,2	n_y
6	8	2	-	10
7	-	30	-	30
7,5	-	1	9	10
n_x	8	33	9	$n = 50$

Yechish. Korrelyatsion jadval ma’lumotlari asosida quyidagt jadvalni tuzamiz.

x	n_x	$\overline{y_x}$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y_x}$
1	8	6	8	8	8	8	48
1,1	33	6,73	36,3	39,93	43,93	48,32	222,09
1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50
Σ	50	-	55,1	60,89	67,48	74,98	337,59

Bu jadvalning Σ qatoridagi sonlarni (2) ga qo‘yib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 74,98a + 67,48b + 60,89c = 413,93, \\ 67,48a + 60,89b + 55,10c = 373,30, \\ 60,89a + 55,10b + 50c = 337,59. \end{cases}$$

Bu sistemadan $a = 1,94$, $b = 2,98$, $c = 1,10$ yechimlarni topamiz. U holda regressiya tenglamasi $\overline{y_x} = 1,94x^2 + 2,98x + 1,10$ ko‘rinishda bo‘ladi. Tekshirish uchun tenglama bo‘yicha hisoblangan $\overline{y_x}$ ning qiymatlari bilan jadval bo‘yicha topilgan $\overline{y_x}$ ning qiymatlarini taqqoslash mumkin.

Yuqorida keltirilgan boshqa turdaga egri chiziqli regressiya tenglamalarining koeffitsiyetlarini topishda ham eng kichik kvadratlar usulidan foydalanish mumkin, ammo ba’zi hollarda oldin ma’lum bir almashtirishlarni amalga oshirish zarur. Masalan, $y = ax^b$ $(a > 0, b > 0)$ regressiya tenglamasidagi noma’lum a, b koeffitsiyentlarni topishda avvalam bor bu tenglamani $\ln y = \ln a + b \ln x$ ko‘rinishda yozib olamiz, so‘ngra $u = \ln x$, $z = \ln y$ belgilashlar yordamida $z = bu + \ln a$ chiziqli funksiyani hosil qilamiz.

Ba’zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki ikkitadan ko‘proq belgilar orasidagi bog‘lanishni o‘rganish zaruriyati tug‘iladi. Bu holda belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanish to‘plamiy (ko‘plik) korrelyatsiya deb ataladi.

To‘plamiy korrelyatsiyaning eng sodda holi bo‘lgan uchta belgi orasidagi chiziqli korrelyatsiyani qaraymiz. Bu holda X, Y va Z belgilar orasidagi korrelyatsion munosabat

$$z = ax + by + c \tag{3}$$

tenglama ko‘rinishida ifodalanadi. Bunda quyidagi:

1. Kuzatish ma’lumotlari bo‘yicha regressiyaning a, b, c koeffitsientlarni topish, ya’ni $z = ax + by + c$ tanlanma tenglamani topish;

2. Z belgi bilan ikkala Y va Z belgilar orasidagi bog‘lanish zichligini baholash;

3. Y fiksirlanganda (o‘zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va Y bog‘lanish zichligini topish masalalarini hal qilish zarur.

Birinchi masala eng kichik kvadratlar usuli bilan hal qilinadi. Analitik geometriyadan ma’lumki, (3) chiziqli bog‘lanish tenglamasini:

$$z - \overline{z} = a\left(x - \overline{x}\right) + b\left(y - \overline{y}\right) \tag{4}$$

ko‘rinishda yozib olish mumkin. Bu ko‘rinishda esa 1-masalani hal qilish osonroq..

Ba’zi elementar hisoblashlardan so‘ng a va b koeffitsientlar uchun quyidagi formulalarni topamiz:

$$a = \frac{r_{xz} - r_{yz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_x}, \qquad b = \frac{r_{yz} - r_{yx} r_{zx}}{1 - r_{xy}^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_y} \tag{5}$$

Bunda r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} − mos ravishda X va Z, Y va Z, X va Y belgilar orasidagi korrelyatsiya koeffitsientlari; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ − o‘rtacha kvadratik chetlanishlar.

Z belgining X va Y belgilar bilan bog‘liqliq zichligi quyidagi:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - 2 r_{xy} r_{xz} r_{yz} + r_{yz}^2}{1 - r_{xy}^2}}, \qquad 0 \le R \le 1 \tag{6}$$

umumiy tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti bilan baholanadi.

Shuningdek, Y fiksirlanganda (o‘zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va Y bog‘lanish zichligi mos ravishda:

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{\left(1 - r_{xy}^2\right)\left(1 - r_{yz}^2\right)}} \ , \tag{7}$$

$$r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy} r_{xz}}{\sqrt{\left(1 - r_{xy}^2\right)\left(1 - r_{xz}^2\right)}} \tag{8}$$

xususiy tanlanma korrelyatsiya koeffitsientlari bilan baholanadi.

Tabiatda turli-tuman jarayonlarni o'rganishda, tasodifiy jarayonlarning o'zaro bog'liqlik qonunlarini ochishda, hamda umuman prognozlash masalalarida korrelyatsion va regression analizning xulosalari katta ahamiyatga egadir. Xususan, iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda turli iqtisodiy ko'rsatkichlarning bir-biriga bog'liqligini aniqlash va shu asosda muhim xulosalar chiqarishda korrelyatsiya nazariyasining elementlari muvaffaqiyatli tatbiq etib kelinmoqda.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Egri chiziqli korrelyatsiya nima?
2. Egri chiziqli korrelyatsiyadagi regressiya funksiyalariga misollar keltiring.
3. To'plamiy korrelyatsiyani tushuntiring.
4. Tanlanma to'lamiy korrelyatsiya koeffitsienti va xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari nimani xarakterlaydi?

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Jadvaldagi ma'lumotlar asosida $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Y \ X	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
40	-	3	22	2	-	27
80	-	-	-	15	-	15
200	-	-	-	-	21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n = 100$

2. Jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida $\overline{x_y} = ay^2 + by + c$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni aniqlang.

Y \ X	6	30	50	n_y
1	15	-	-	15
2	1	14	-	15
3	-	2	18	20
4	16	16	18	50
n_x	32	32	36	$n = 100$

19 -§. Statistik gipotezalar. Statistik kriteriy

Amaliyotda, texnikada va iqtisodiyotda ko‘pincha tasodifiylik bilan bog‘liq bo‘lgan biror faktni aniqlashtirish uchun statistik usul bilan tekshirish mumkin bo‘lgan gipotezalarga tayanib ish ko‘riladi.

Ma’lumki, har qanday ilmiy asoslangan farazni gipoteza deb aytishimiz mumkin, ammo har qanday gipotezani stastistik gipoteza deb ayta olmaymiz, chunki uning alohida ajralib turadigan xususiyatlari bor, bu xususiyatlarni alohida ta’kidlash uchun biz quyidagi ta’rifni keltiramiz.

1-ta’rif. Statistik gipoteza deb, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, yoki agar tasodifiy miqdor bo‘ysinadigan taqsimot qonunning ko‘rinishi ma’lum bo‘lsa, u holda bu taqsimot qonunning noma’lum parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi.

Masalan, quyidagi gipotezalar statistik gipotezalarga misol bo‘la oladi:

1. Bir xil ishlab chiqarish sharoitlarida bir xil ishni bajarayotgan ishchilarning mehnat unumdorligi normal taqsimot qonun bo‘yicha taqsimlangan;
2. Parallel ishlayotgan stanoklarda tayyorlanayotgan bir xil turdagi detallarning o‘rtacha o‘lchamlari bir-biriga teng;
3. Normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi ikki to‘plamning dispersiyalari o‘zaro teng;

1-gipotezada taqsimotning ko‘rinishi haqida, 2 va 3-gipotezalarda esa parametrlar haqida faraz qilingan.

«Ertaga yomg‘ir yog‘adi», «Bu yil mo‘l hosil olamiz» kabi gipotezalar statistik gipotezalar bo‘la olmaydi, chunki ularda na taqsimot qonunining ko‘rinishi haqida, na uning parametrlari haqida so‘z boradi.

Oldinga surilgan gipoteza tanlanma natijalarga asoslanib tekshiriladi va natijada yoki qabul qilinishi yoki rad qilinishi mumkin.

Asosiy (yoki nolinchi) gipoteza deb ilgari surilgan H_0-gipotezaga, konkurent (yoki alternativ) gipoteza deb, asosiy gipotezaga zid bo‘lgan H_1-gipotezaga aytiladi.

Masalan, «X tasodifiy miqdor Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysunadi» gipotezasi surilgan bo‘lsin.

Bu holda:

$$H_0: \ P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (\lambda>0, k=0,1,2,3,...);$$

$$H_1: P(X=k)\neq\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Faqat bitta da’voni o‘z ichiga olgan gipoteza ***oddiy gipoteza***; bittadan ortiq sondagi da’volarni o‘z ichiga olgan gipoteza esa ***murakkab gipoteza*** deyiladi.

Masalan, agar X tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli taqsimot:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{agar} \quad x<0 \quad \text{bo‘lsa,}\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{agar} \quad x\geq 0 \quad \text{bo‘lsa.}\end{cases}$$

qonuniga bo‘ysinib, uning λ parametri noma’lum bo‘lsin. U holda $H_0: \lambda=2{,}5$ gipoteza oddiy gipoteza; $H_1: \ \lambda>2{,}5$ gipoteza esa murakkab gipotezadir.

Ilgari surilgan gipoteza to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri bo‘lishi mumkin, shu sababli uni tekshirib ko‘riladi va so‘ngra xulosa chiqariladi. Gipotezani tekshirish natijasida ikki turdagi xatolikka yo‘l qo‘yilishi mumkin.

Agar to‘g‘ri gipoteza rad etilsa, qilingan xatolikni I tur xatolik, agar noto‘g‘ri gipoteza qabul qilinsa qilingan xatolik II tur xatolik deb ataladi. Bu xatoliklarni jadvalda quyidagicha tasvirlash mumkin.

H_0-gipoteza	to‘g‘ri	noto‘g‘ri
Rad qilindi	I tur xatolik	To‘g‘ri qaror
Qabul qilindi	To‘g‘ri qaror	II tur xatolik

Amaliyotda I va II tur xatoliklarning oqibatlari har xil bo‘lishi mumkin. Masalan, agar samolyotga «uchishga ruxsat berilsin» degan to‘g‘ri qaror rad etilgan bo‘lsa, u holda bu I tur xatolik bo‘lib, bunday xatolik moddiy zararga olib kelishi mumkin; agar samolyotning nosozligiga qaramasdan «uchishga ruxsat berilsin» degan noto‘g‘ri qaror qabul qilinsa, u holda bu II tur xatolik bo‘lib, bunday xatolik halokatga olib kelishi mumkin.

Albatta, I tur xatolik II tur xatolikga qaraganda og‘irroq oqibatlarga olib keladigan misollar ham keltirish mumkin.

To‘g‘ri qarorni ikki holda qabul qilish mumkin:

1) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham to‘g‘ri bo‘lsa, gipoteza qabul qilinadi;

2) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham noto‘g‘ri bo‘lsa, gipoteza qabul qilinmaydi.

I tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli α bilan belgilanadi; u ***muhimlilik (qiymatdorlik) darajasi*** deb ataladi. Ko‘p hollarda $\alpha = 0{,}05$; $\alpha = 0{,}01$ deb olinadi.

Biz ma’lum taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi belgining noma’lum parametrlari haqida ilgari surilgan gipoteza statistik usulda qanday tekshirilishini ko‘rib chiqamiz.

Asosiy gipoteza ilgari surilgandan so‘ng, uning to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini tekshirib ko‘rish kerak bo‘ladi. Shu maqsadda maxsus tanlangan, aniq, yoki taxminiy taqsimoti ma’lum bo‘lgan tasodifiy miqdor ishlatiladi. Bu tasodifiy miqdorni K bilan belgilaymiz.

2-ta’rif. Statistik kriteriy (yoki oddiygina kriteriy) deb, asosiy gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan K-tasodifiy miqdorga aytiladi.

Masalan, agar normal taqsimot qonuniga ega X va Y bosh to‘plamlarning dispersiyalari tengligi haqidagi gipoteza tekshirilayotgan bo‘lsa, u holda K kriteriy sifatida «tuzatilgan» tanlanma dispersiyalar nisbati olinadi:

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2}. \qquad (1)$$

Turli tajribalarda dispersiyalar har xil, oldindan ma’lum bo‘lmagan qiymatlar qabul qilganligi uchun F tasodifiy miqdor bo‘lib, u Fisher-Snedekor qonuni bo‘yicha taqsimlangan.

Gipotezani tekshirish uchun kriteriyga kirgan miqdorlarning xususiy qiymatlari tanlanma bo‘yicha hisoblanadi va shunday qilib kriteriyning kuzatiladigan (xususiy) qiymati hosil qilinadi.

K_{kuzat} - ***kuzatiladigan qiymat*** deb, statistik kriteriyning tanlanma bo‘yicha hisoblangan qiymatiga aytiladi. Masalan, ikkita tanlanma asosida topilgan dispersiyalar: $s_1^2 = 20$ va $s_2^2 = 5$ bo‘lsa, u holda

$$K_{kuzat} = F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{20}{5} = 4$$

Tanlangan K kriteriyning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to‘plami kesishmaydigan ikkita qism to‘plamlarga ajratiladi:

$K = K^- \cup K^+, K^- \cap K^+ = \varnothing$.

Ulardan biri H_0-asosiy gipoteza rad qilinadigan, ikkinchisi esa asosiy gipoteza qabul qilinadigan qiymatlarini o‘z ichiga oladi.

3-ta’rif. Kritik soha deb, kriteriyning H_0-asosiy gipotezani rad qiladigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.

4-ta’rif. Gipotezaning qabul qilinish sohasi deb, kriteriyning asosiy gipotezani qabul qiladigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.

Statistik gipotezalarni tekshirishning asosiy printsiplari E. Neyman, K. Pirson va boshqa matematiklar tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, bu printsipni quyidagicha ta’riflash mumkin: agar kriteriyning kuzatiladigan qiymati kritik sohaga tegishli bo‘lsa, asosiy gipoteza rad qilinadi, agar kriteriyning kuzatilayotgan qiymati gipotezaning qabul qilinish sohasiga tegishli bo‘lsa, asosiy gipoteza qabul qilinadi.

Kriteriy bir o‘lchovli tasodifiy miqdor bo‘lgani uchun uning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to‘plami biror intervaldan iborat bo‘ladi. Shu sababli, kritik soha va gipotezaning qabul qilinish sohasi ham intervaldan iborat bo‘ladi, demak, ularni ajratib turuvchi nuqtalar to‘g‘risida gapirish mumkin.

5-ta’rif. Kritik nuqtalar deb, kritik sohani gipotezaning qabul qilinish sohasidan ajratib turuvchi nuqtalarga aytiladi.

Agar kritik soha $K > k_{кр}$ tengsizlik bilan aniqlansa, u holda uni ***o‘ng tomonli*** kritik soha, tengsizlik aksincha bo‘lsa ***chap tomonli*** kritik soha deyiladi. Agar kritik soha $K < k'_{кр}$, $K > k''_{кр}$ tengsizliklar bilan aniqlansa, u holda uni ikki tomonli kritik soha deyiladi.

Chap tomonli va ikki tomonli kritik sohalarni aniqlash o‘ng tomonli kritik sohani topishga o‘xshash bo‘lganligi sababli biz faqat o‘ng tomonli kritik sohani topish bilan tanishib chiqamiz.

Kritik sohani topish uchun kritik nuqtani aniqlash yetarli. Bu nuqtani aniqlash uchun esa α ning qiymati berilishi kerak. So‘ngra, quyidagi talabga asoslanib, $k_{кр}$ nuqta topiladi: H_0-asosiy gipoteza o‘rinli bo‘lishi shartida tanlangan K kriteriyning $k_{кр}$ nuqtadan katta bo‘lishi ehtimoli α-muhimlilik darajasiga teng bo‘lsin:

$$P\left(K > k_{кр}\right) = \alpha . \qquad (2)$$

Har bir kriteriy uchun (2) shartni qanoatlantiruvchi kritik nuqtalarni topish jadvallari mavjud.

Kritik nuqta topilgandan so‘ng, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha kriteriyning kuzatiladigan qiymati topiladi. Bunda agar $K > k_{кр}$ bo‘lsa, u holda H_0 asosiy gipoteza rad qilinadi; agar $K < k_{кр}$ bo‘lsa, u holda gipotezani rad qilishga asos yo‘q deyiladi.

1-eslatma. H_0 gipoteza qabul qilingan bo‘lsin. Shu bilan bu gipoteza isbotlandi deyish xato bo‘ladi. Aslida «kuzatish natijalari H_0 gipotezaga mos keladi va demak, uni rad qilishga asos yo‘q» deyish to‘g‘riroq bo‘ladi.

Amalda gipotezani katta ishonch bilan qabul qilish uchun boshqa statistik usullar bilan tekshiriladi yoki tanlanma hajmi orttirilib tajriba takrorlanadi. Gipotezani qabul qilishdan ko‘ra ko‘proq uni rad qilishga harakat qilinadi. Haqiqatan, ma’lumki biror umumiy da’voni rad qilish bu uchun bu da’voga zid bo‘lgan bitta misolni keltirish kifoya. Shu sababli ***kriteriy quvvati*** tushunchasi kritiladi.

6-ta’rif. Konkurent gipoteza to‘g‘ri bo‘lganda kriteriyning kritik sohada bo‘lish ehtimoli kriteriy quvvati deb ataladi.

Agar II tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli β bo‘lsa, u holda kriteriy quvvati $1-\beta$ ga teng bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, quvvat qancha katta bo‘lsa II tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli shuncha kam bo‘ladi. Yuqoridagi ta’riflardan ko‘rinib turibdiki, α ning kamayishi β ning o‘sishiga olib keladi va aksincha. Masalan, $\alpha = 0$ bo‘lsa, u holda barcha gipotezalar qabul qilinadi, jumladan, noto‘g‘rilari ham. Shu sababli, ikkala parametrni bir paytda kamaytirib bo‘lmaydi. I tur va II tur xatoliklarni kamaytirishning yagona yo‘li tanlanma hajmini oshirishdir.

Statistik gipotezani tekshirish qanday amalga oshirilishini quyidagi misolda ko‘rib chiqamiz.

Normal taqsimlangan ikki bosh to‘plamning dispersiyalarni taqqoslash. Dispersiyalar haqidagi gipotezalar, ayniqsa texnikada muhim ahamiyatga ega, chunki tarqoqlik xarakteristikasi bo‘lgan dispersiya mashina va uskunalarning, o‘lchov asboblarining, texnologik protsesslarning aniqligini baholashda juda muhim ko‘rsatkich hisoblanadi.

Normal taqsimlangan bosh to‘plam dispersiyalarining tengligi haqida gipoteza ilgari surilsa kriteriy sifatida $F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$ kattalik olinishni aytib o‘tgan edik. Bunda *F* tasodifiy miqdor bo‘ysinadigan Fisher-Snedekor taqsimotining erkinlik darajalari quyidagicha aniqlanadi: $k_1 = n_1 - 1, \quad k_2 = n_2 - 1$, bu erda n_1-hisoblanganda qiymati katta bo‘lgan «tuzatilgan» dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi, n_2-hisoblanganda qiymati kichik bo‘lgan «tuzatilgan» dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi. Kritik nuqta $k_{кр} = F_{кр}(\alpha; k_1, k_2)$ tenglik bilan jadvaldan aniqlanadi.

Misol. Normal taqsimlangan *X* va *Y* bosh to‘plamlardan olingan $n_1 = 11$ va $n_2 = 14$ hajmli ikkita erkli tanlanma bo‘yicha «tuzatilgan» dispersiyalar: $s_x^2 = 0{,}76, \quad s_x^2 = 0{,}38$ topilgan. $\alpha = 0{,}05$ muhimlilik darajasida quyidagi gipotezani tekshiring:

$H_0: \ D(X) = D(Y); \ H_1: \ D(X) > D(Y)$.

Yechish. Gipotezani tekshirish uchun $F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$ kriteriyni tanlaymiz. U holda

$$K_{кузат} = \frac{0{,}76}{0{,}38} = 2.$$

Fisher-Snedekor taqsimotining kritik nuqtalar jadvalidan $\alpha = 0{,}05$, $k_1 = n_1 - 1 = 10$, $k_2 = n_2 - 1 = 13$ bo‘yicha $k_{кр} = F_{кр}\left(0{,}05; 10{,}13\right) = 2{,}67$ kritik nuqtani topamiz. 2<2,67 , ya’ni $K_{кузат} < k_{кр}$ bo‘lgani uchun gipotezani rad qilishga asos yo‘q.

Tavsiya etiladigan muataqil ta’lim va referat mavzulari

1. Chap tomonli va ikki tomonli kritik sohalarni topish.
2. Kriteriy quvvatini topishga doir misollar.
3. Dispersiyalari ma’lum bo‘lgan ikki bosh to‘plamning o‘rta qiymatlarini taqqoslash.

4. Dispersiyalari noma'lum bo'lgan ikki bosh to'plamning o'rta qiymatlarini taqqoslash.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Statistik gipoteza ta'rifini bering. Misollar keltiring.
2. Statistik gipotezalarning turlarini ayting.
3. Birinchi va ikkinchi tur xatoliklar nimalardan iborat?
4. Statistik kriteriy nima?
5. Muhimlik darajasi va kriteriy quvvatini tushuntiring.
6. Kritik soha va kritik nuqta tushunchalarini ayting.

Mustaqil ishlash uchun misollar

Normal taqsimlangan X va Y bosh to'plamlardan hajmlari mos ravishda n_1 va n_2 bo'lgan ikkita erkli tanlanma ajratib olingan va ularning «tuzatilgan» dispersiyalari: s_x^2 va s_y^2 topilgan. α muhimlilik darajasida H_0: $D(X) = D(Y)$ asosiy gipotezani tekshiring, bunda H_1: $D(X) > D(Y)$.

a) $n_1 = 10, \quad n_2 = 15, \quad s_x^2 = 3{,}6, \quad s_y^2 = 2{,}4, \quad \alpha = 0{,}05$;

b) $n_1 = 13, \quad n_2 = 18, \quad s_x^2 = 3{,}6, \quad s_y^2 = 4{,}8, \quad \alpha = 0{,}01$;

c) $n_1 = 16, \quad n_2 = 12, \quad s_x^2 = 0{,}72, \quad s_y^2 = 2{,}4, \quad \alpha = 0{,}05$;

d) $n_1 = 14, \quad n_2 = 10, \quad s_x^2 = 1{,}6, \quad s_y^2 = 2{,}4, \quad \alpha = 0{,}01$.

20-§. Dispersiyalari ma’lum normal taqsimlangan bosh to‘plam o‘rtachalarini erkli tanlanmalar asosida taqqoslash

X va Y bosh to‘plamlar normal taqsimlangan va ularning dispersiyalari ma’lum bo‘lsin. Bu bosh to‘plamlardan mos ravishda n va m hajmli erkli tanlanmalar ajratib olinib ularning $\overline{x}$ va $\overline{y}$ tanlanma o‘rtachalari topilgan bo‘lsin.

Tanlanma o‘rtachalari bo‘yicha α-muhimlilik darajasida $H_0: \ M(X)=M(Y)$ asosiy gipoteza tekshirilsin.

Tanlanma o‘rtacha bosh to‘plam o‘rtachasi uchun siljimagan baho bo‘lganligi sababli, ya’ni $M(\overline{X})=M(X), \quad M(\overline{Y})=M(Y)$, asosiy gipotezani $H_0: \quad M(\overline{X})=M(\overline{Y})$ ko‘rinishda yozish mumkin.

Shunday qilib, tanlanma o‘rtachalarining matematik kutilmalari tengligi tekshiriladi. Chunki, odatda, tanlanma o‘rtachalari farq qiladi. Bu farq e’tiborga olinadigan darajada-mi savoli tug‘iladi. Agar asosiy gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, u holda tanlanma o‘rtachalari orasidagi farq e’tiborga olinmaydigan darajada kichik bo‘ladi. Agar asosiy gipoteza rad qilinsa, u holda tanlanma o‘rtachalari orasidagi farqni e’tiborga olish kerak, ya’ni bu farqni tasodiflar bilan tushuntirib bo‘lmaydi uni bosh o‘rtachalar turliligi bilan tushuntirish mumkin.

Asosiy gipotezani tekshirish uchun kriteriy sifatida

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}} \tag{1}$$

tasodifiy miqdorni qabul qilamiz. Turli tajribalarda $\overline{x}$ va $\overline{y}$ turli qiymatlarni qabul qilganligi sababli (1) ni tasodifiy miqdor deb qarashimiz mumkin.

Bu yerda

$$\left.\begin{array}{l}\sigma\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=\sqrt{D\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)}\\ D\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=D\left(\overline{X}\right)+D\left(\overline{Y}\right)\end{array}\right. \Rightarrow \sigma\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}, \quad \text{chunki}$$

$$D\left(\overline{X}\right)=\frac{D(X)}{n}, D\left(\overline{Y}\right)=\frac{D(Y)}{m}.$$

Z kriteriy - normalangan normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdor. Haqiqatan ham, $\overline{X}$ va $\overline{Y}$ normal taqsimlangan bosh to‘plamdan olingan tanlanma o‘rtachalari bo‘lganlig sababli normal taqsimlangan, u holda Z bu o‘rtachalarning chiziqli kombinatsiyasi bo‘lganligi sababli Z-normal taqsimlangan; ko‘rinib turibdiki, $M(Z)=0$, agar asosiy gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa $\sigma(Z)=1$, demak, Z -normalangan.

Kritik soha alternativ gipotezaning ko‘rinishiga qarab aniqlanadi.

1. $H_0:\ M(X)=M(Y)$, $H_1:\ M(X)\neq M(Y)$ bo‘lsin. Bu holda ikki tomonli kritik soha quriladi. Kriteriy quvvati (alternativ gipoteza to‘g‘ri bo‘lganda kriteriyning kritik sohada bo‘lish ehtimoli) eng katta quvvatga

$$P(Z<z_{чап\quad кр.})=\frac{\alpha}{2},\quad P(Z>z_{ўнг\quad кр.})=\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

bo‘lganda erishadi. Z-normalangan miqdor, bunday miqdorning taqsimoti nolga nisbatan simmetrik bo‘lganligi sababli, kritik nuqta nolga nisbatan simmetrik joylashadi. U holda $z_{ўнг\quad кр}=z_{кр}$ bo‘lsa $z_{чап\quad кр}=-z_{кр}$ bo‘ladi. Shunday qilib, kritik soha $Z<-z_{кр}$, $Z>z_{кр}$ tengsizliklar bilan, asosiy gipotezani qabul qilish sohasi esa $\left(-z_{кр}, z_{кр}\right)$ oraliq bilan aniqlanadi.

Ma’lumki, Laplas funksiyasi

$$P(0<Z<z)=\Phi(z) \tag{3}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Z taqsimot nolga nisbatan simmetrik bo‘lganligi sababli Z ning $(0,\infty)$ oraliqqa tushish ehtimoli $1/2$ ga teng. Bu oraliqni $(0, z_{кр})$ va $(z_{кр},\infty)$ oraliqlarga ajratish mumkin. U holda qo‘shish teoremasiga asosan

$$P(0<Z<z_{кр})+P(Z>z_{кр})=\frac{1}{2} \tag{4}$$

(2) va (3) tengliklarga asosan

$$\Phi(z_{кр})+\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\Phi(z_{кр})=\frac{1-\alpha}{2} \tag{5}$$

Bu tenglikdan $z_{кр}$ nuqtani topamiz.

Shunday qilib, $H_0: \quad M(X) = M(Y)$, $H_1: \quad M(X) \neq M(Y)$ gipotezalarni tekshirish uchun tanlanma asosida

$$Z_{кузат} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}$$

-kriteriyning kuzatish qiymatini va (5) dan Laplas funksiyasi jadvali asosida $z_{кр}$ kritik nuqtani topamiz.

Agar $\left|Z_{кузат}\right| < z_{кр}$ bo‘lsa asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q.

Agar $\left|Z_{кузат}\right| > z_{кр}$ bo‘lsa asosiy gipoteza rad etiladi.

Misol.

1. Normal taqsimlangan ikkita bosh to‘plamdan hajmlari mos ravishda $n = 60$ va $m = 50$ bo‘lgan erkli tanlanmalar olinib $\overline{x} = 1250, \overline{y} = 1275$ o‘rtachalari topilgan. Bosh to‘plam dispersiyalari: $D(X) = 120, \quad D(Y) = 100$. $\alpha = 0,01$-muhimlilik darajasida $H_0: \quad M(X) = M(Y)$, $H_1: \quad M(X) \neq M(Y)$ gipotezalarni tekshiring.

Y*echish.* Kuzatilayotgan qiymati:

$$Z_{кузат} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}} = \frac{1250 - 1275}{\sqrt{120/60 + 100/50}} = -12,5.$$

O‘ng kritik nuqta: $\Phi(z_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2} = \dfrac{1-0,01}{2} = 0,495$. Laplas funksiyasi jadvalidan: $z_{кр} = 2,58$. $\left|Z_{кузат}\right| > z_{кр}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etamiz, ya’ni tanlanma o‘rtachalari farqi e’tiborga olinishi kerak.

2. $H_0: \quad M(X) = M(Y)$, $H_1: \quad M(X) > M(Y)$ bo‘lsin. Bu holatda

$$P(Z > z_{кр}) = \alpha \tag{6}$$

talab asosida o‘ng tomonli kritik soha quriladi. Bu yerda ham yuqoridagidek fikr yuritamiz:

$$P(0 < Z < z_{кр}) + P(Z > z_{кр}) = \frac{1}{2}.$$

(2) va (6) tengliklarga asosan

$$\Phi(z_{кр}) + \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi(z_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2} \qquad (7)$$

Bu tenglikdan $z_{кр}$ nuqtani topamiz.

Shunday qilib, $H_0: \ M(X) = M(Y)$, $H_1: \ M(X) > M(Y)$ gipotezalarni tekshirish uchun tanlanma asosida $Z_{kuzat} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}$ - kriteriyning kuzatilagan qiymatini va (5) dan Laplas funksiyasi jadvali asosida z_{kr} kritik nuqtani topamiz.

Agar $Z_{kuzat} < z_{kr}$ bo‘lsa asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q.

Agar $Z_{kuzat} > z_{kr}$ bo‘lsa asosiy gipoteza rad etiladi.

Misol.

2. Normal taqsimlangan ikkita bosh to‘plamdan hajmlari mos ravishda $n = 10$ va $m = 10$ bo‘lgan erkli tanlanmalar olinib $\overline{x} = 14{,}3, \overline{y} = 12{,}2$ o‘rtachalari topilgan. Bosh to‘plam dispersiyalari: $D(X) = 22$, $D(Y) = 18$. $\alpha = 0{,}05$ - ma’nolilik darajasida $H_0: \ M(X) = M(Y)$, $H_1: \ M(X) > M(Y)$ gipotezalarni tekshiring.

Y*echish*. Kuzatiladigan qiymat:

$$Z_{kuzat} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}} = \frac{14{,}3 - 12{,}2}{\sqrt{22/10 + 18/10}} = 1{,}05.$$

Laplas funksiyasi jadvalidan: z_{kr}=1,64. $Z_{kuzat} < z_{kr}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q, ya’ni tanlanma o‘rtachalari farqini e’tiborga olmasa ham bo‘ladi.

Agar $H_0: \ M(X) = M(Y)$, $H_1: \ M(X) < M(Y)$ gipoteza tekshirilayotgan bo‘lsa Z ning taqsimot nolga nisbatan simmetrikligini e’tiborga olamiz va $H_0: \ M(X) = M(Y)$, $H_1: \ M(X) > M(Y)$ gipotezani tekshirishirib z_{kr} nuqtani topamiz. So‘ngra $z'_{kr} = -z_{kr}$ deb olib Z_{kuzat} ni hisoblaymiz.

Agar $Z_{kuzat} > -z_{kr}$ bo‘lsa asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q.

Agar $Z_{kuzat} < -z_{kr}$ bo‘lsa asosiy gipoteza rad etiladi.

Misol.

3. Normal taqsimlangan ikkita bosh to‘plamdan hajmlari mos ravishda $n = 50$ va $m = 50$ bo‘lgan erkli tanlanmalar olinib $\overline{x} = 142, \overline{y} = 150$ o‘rtachalari topilgan. Bosh to‘plam dispersiyalari: $D(X) = 28,2, \quad D(Y) = 22,8$. $\alpha = 0,01$-muhimlilik darajasida $H_0: \quad M(X) = M(Y)$, $H_1: \quad M(X) < M(Y)$ gipotezalarni tekshiring.

Y*echish.* Kuzatilayotgan qiymati: $Z_{kuzat} = -8$. Laplas funksiyasi jadvalidan: $z_{kr} = 2,33$. U holda $z'_{kr} = -z_{kr} = -2,33$ $Z_{kuzat} < -z_{kr}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etamiz.

Tavsiya etiladigan muataqil ta’lim va referat mavzulari

1. Taqsimoti ixtiyoriy bo‘lgan ikki bosh to‘plamning o‘rtachalarini taqqoslash.
2. Normal taqsimlangan dispersiyalari noma’lum ikki bosh to‘plamning o‘rtachalarini taqqoslash.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Statistik kriteriyni tushuntiring.
2. Ikki tomonli kritik soha qanday aniqlanadi?
3. Chap va o‘ng tomonli kritik soha qanday aniqlanadi?

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Normal taqsimlangan ikkita bosh to‘plamdan hajmlari mos ravishda $n = 30$ va $m = 20$ bo‘lgan erkli tanlanmalar olinib $\overline{x} = 600, \overline{y} = 550$ o‘rtachalari topilgan. Bosh to‘plam dispersiyalari: $D(X) = 120, \quad D(Y) = 100$. $\alpha = 0,05$-muhimlilik darajasida $H_0: \quad M(X) = M(Y)$, $H_1: \quad M(X) \neq M(Y)$ gipotezalarni tekshiring.

2. Normal taqsimlangan ikkita bosh to‘plamdan hajmlari mos ravishda $n = 40$ va $m = 50$ bo‘lgan erkli tanlanmalar olinib $\overline{x} = 1050, \overline{y} = 1275$ o‘rtachalari topilgan. Bosh to‘plam dispersiyalari:

$D(X)=120, \quad D(Y)=100$. $\alpha=0,01$-muhimlilik darajasida $H_0: \quad M(X)=M(Y)$, $H_1: \quad M(X)>M(Y)$ gipotezalarni tekshiring.

3. Normal taqsimlangan ikkita bosh to‘plamdan hajmlari mos ravishda $n=50$ va $m=50$ bo‘lgan erkli tanlanmalar olinib $\overline{x}=1050, \overline{y}=875$ o‘rtachalari $D(X)=120, \quad D(Y)=100$ topilgan. Bosh to‘plam dispersiyalari:. $\alpha=0,01$-muhimlilik darajasida $H_0: \quad M(X)=M(Y)$, $H_1: \quad M(X)<M(Y)$ gipotezalarni tekshiring.

21-§. Bosh to‘plam taqsimot qonuni haqidagi gipotezani tekshirish. Pirsonning moslik kriteriysi (χ^2 -kriteriy)

Ma’lumki, statistik gipotezada kuzatilayotgan belgining taqsimot qonuni haqidagi faraz ham ilgari surilar edi. Biz ko‘pgina amaliy masalalar o‘rganilayotganda uchraydigan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni noma’lum bo‘lib, bu taqsimot to‘g‘risidagi gipotezani statistik usulda tekshirishni ko‘rib chiqamiz.

X tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot qonuniga egaligi haqida da’vo qiluvchi $H_0: P(X < x) = F(x)$ gipotezani tekshirish talab etilsin. Buning uchun X ustida n ta erkli kuzatish o‘tkazib $x_1, x_2, \ldots, x_n$-tanlanma olamiz. Bu tanlanma bo‘yicha $F_n^*(x)$ empirik taqsimot funksiyasini qurish mumkin. Empirik taqsimot funksiyasi va nazariy (gipotetik) taqsimot funksiyasini taqqoslash maxsus tanlangan tasodifiy miqdor-***moslik (muvofiqlik) kriteriysi*** yordamida bajariladi.

1-ta’rif. Moslik kriteriysi deb, bosh to‘plam noma’lum taqsimotining taxmin qilinayotgan qonuni haqidagi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiluvchi kriteriyga aytiladi.

Bir qancha moslik kriteriylari mavjud: χ^2 («xi kvadrat») K. Pirson, Kolmogorov, Smirnov va boshqalar.

Normal taqsimot haqidagi gipotezani tekshirishda qo‘llaniladigan Pirson kriteriysiga batafsil to‘xtalamiz. Shu maqsadda empirik va nazariy chastotalarni taqqoslaymiz.

Odatda, empirik va nazariy chastotalarning farqi bo‘ladi. Masalan:

empir. chast.	6	13	38	74	106	85	30	10	4
nazar. chast.	13	14	42	82	99	76	37	11	2

Bunda quyidagi savollar tug‘iladi: Chastotalarning bunday farqlanishi tasodifiymi? Farqlanish sabablari nima? Bu kabi savollarga Pirson kriteriysi javob beradi. Bu kriteriy ham boshqa kriteriylar kabi gipoteza to‘g‘riligini tasdiqlamasdan, balki qabul qilingan α -muhimlilik darajasida kuzatish ma’lumotlari bilan uning mos yoki mosmasligini o‘rnatadi.

n hajmli tanlanma asosida:

$$x_i: \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_k$$
$$n_i: \quad n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_k$$

empirik taqsimot olingan bo‘lsin.

Bosh to‘plam normal taqsimlangan farazi asosida n_i^* nazariy chastotalar hisoblangan bo‘lsin. α-muhimlilik darajasida H_0: bosh to‘plam normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani tekshirish uchun kriteriy sifatida

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*} \qquad (1)$$

tasodifiy miqdorni olamiz.

Bosh to‘plam qaysi taqsimot qonuniga bo‘ysinishidan qat’iy nazar (1) tasodifiy miqdor $n \to \infty$ da k erkinlik darajali χ^2 taqsimot qonuniga intilishi isbotlangan, bu erda $k = s - 1 - r$, s-tanlanma gruppalari (xususiy intervallar) soni, r-faraz qilinayotgan, ya’ni tanlanma ma’lumotlari asosida baholanayotgan, taqsimot parametrlari soni. Masalan, normal taqsimotda $r = 2$ va hakozo.

O‘ng tomonli kritik sohani quramiz. Asosiy gipotezani to‘g‘ri deb faraz qilganimizda kriteriyning kritik sohaga tushish ehtimoli:

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{kr}(\alpha;k)\right) = \alpha \,. \qquad (2)$$

Shunday qilib, $\chi^2 > \chi^2_{kr}(\alpha;k)$ tengsizlik kritik sohani, $\chi^2 < \chi^2_{kr}(\alpha;k)$ tengsizlik esa asosiy gipotezani qabul qilish sohasini aniqlaydi.

$$\chi^2_{kuzat} = \sum \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} \qquad (3)$$

formula yordamida kriteriyning kuzatilgan qiymatini, jadvaldan α va k larga mos $\chi^2_{kuzat}(\alpha;k)$-kritik nuqtani topamiz va quyidagi xulosalarni chiqaramiz.

Agar $\chi^2_{kuzat} < \chi^2_{kr}$ bo‘lsa, u holda gipotezani rad etishga asos yo‘q.

Agar $\chi^2_{kuzat} > \chi^2_{kr}$ bo‘lsa, u holda gipoteza rad etiladi.

Misol.

1. $\alpha = 0,05$ bo‘lsa bosh to‘plam normal taqsimlangan gipotezasini quyidagi jadval asosida tekshiring:

empir. chast.	6	13	38	74	106	85	30	14
nazar. chast.	13	14	42	82	99	76	37	13

Yechish. χ^2_{kuzat} ni hisoblash uchun quyidagi jadvalni tuzamiz.

i	n_i	n_i^*	$n_i - n_i^*$	$(n_i - n_i^*)^2$	$(n_i - n_i^*)^2 / n_i^*$
1	6	3	3	9	3
2	13	14	-1	1	0,07
3	38	42	-4	16	0,38
4	74	82	-8	64	0,78
5	106	99	7	49	0,49
6	85	76	9	81	1,07
7	30	37	-7	49	1,32
8	14	13	1	1	0,08
Σ	366	366			$\chi^2_{kuzat} = 7,19$

Erkinlik darajalari soni: $k = s - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$.

Jadvaldan: $\chi^2_{kr}(0,05;5) = 11,1$ (5-ilovaga qarang).

$\chi^2_{kuzat} < \chi^2_{kr}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q. Demak, kuzatish ma’lumotlari gipoteza bilan mos.

Yuqoridagilardan ko‘rinadiki, Pirson moslik kriteriysining asosini empirik va nazariy chastotalarni taqqoslash tashkil etadi. Empirik chastota tajribadan topiladi. Bosh to‘plam normal taqsimlanganda nazariy chastota topish usullaridan birini quyida keltiramiz

1. X tanlanmaning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlar sohasi k ta bir xil uzunlikdagi (x_i, x_{i+1}) xususiy intervallarga bo‘linadi va har bir xususiy interval o‘rtasi $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ topiladi va i-intervalga tushgan variantalar soni n_i x_i^* variantaning chastotasi deb hisoblanadi.

Natijada

$$\begin{array}{lllll} x_i^*: & x_1^* & x_2^* & \dots & x_k^* \\ n_i: & n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{array}$$

taqsimot hosil qilinadi. Bu yerda $\sum n_i = n$.

2. Tanlanma o‘rtacha $\overline{x^*}$ va o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ^* hisoblanadi.

3. $Z = \dfrac{\left(X - \overline{x^*}\right)}{\sigma^*}$ miqdor bilan X tasodifiy miqdor normalanadi va (z_i, z_{i+1}) intervalning chetki nuqtalari: $z_i = \dfrac{\left(x_i - \overline{x^*}\right)}{\sigma^*}$, $z_{i+1} = \dfrac{\left(x_{i+1} - \overline{x^*}\right)}{\sigma^*}$ topiladi. Bunda Z ning eng kichik qiymati- $z_1 \to -\infty$, eng katta qiymati $z_k \to \infty$ deb olinadi.

4. $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ formula bilan X ning (x_i, x_{i+1}) oraliqqa tushish ehtimoli hisoblanadi. Bu yerda $\Phi(z)$-Laplas funksiyasi.

U holda nazariy chastota: $n_i^* = np_i$.

Shuni ta’kidlash kerakki, har bir oraliq kamida 5-10 ta variantani o‘z ichiga olishi lozim. Tanlanma hajmi ham yetarlicha katta, 50 dan kam bo‘lmasligi lozim. Variantalari soni kam oraliqlarni birlashtirish kerak.

Misol.

3. Bosh to‘plam normal taqsimlangan deb jadval asosida nazariy chastotalarni toping. Tanlanma hajmi $n = 200$.

i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15	6	14	16	21
2	6	8	26	7	16	18	24
3	8	10	25	8	18	20	20
4	10	12	30	9	20	22	13
5	12	14	26				

Yechish. 1. Xususiy intervallar o‘rtasini topamiz va quyidagi taqsimotni hosil qilamiz:

$$\begin{array}{llllllllll} x_i^*: & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 \\ n_i: & 15 & 26 & 25 & 30 & 26 & 21 & 24 & 20 & 13 \end{array}$$

2. Tanlanma o‘rtachasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishni topamiz: $\overline{x^*} = 12,63; \sigma^* = 4,695$.

3. (z_i, z_{i+1}) intervallarni topamiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

i	x_i	x_{i+1}	$x_i - \overline{x^*}$	$x_{i+1} - \overline{x^*}$	$z_i = \dfrac{x_i - \overline{x^*}}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x^*}}{\sigma^*}$
1	4	6	-	-6,63	$-\infty$	-1,41
2	6	8	-6,63	-4,63	-1,41	-0,99
3	8	10	-4,63	-2,63	-0,99	-0,56
4	10	12	-2,63	-0,63	-0,56	-0,13
5	12	14	-0,63	1,37	-0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	-	1,57	∞

4. p_i ehtimollikni va np_i nazariy chastotani topib quyidagi jadvalni tuzamiz:

i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	np_i
1	$-\infty$	-1,41	-0,5	-0,4207	0,0793	15,86
2	-1,41	-0,99	-0,4207	-0,3389	0,0818	16,36
3	-0,99	-0,56	-0,3389	-0,2123	0,1266	25,32
4	-0,56	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,12
5	-0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64

Tavsiya etiladigan mustaqil ta’lim va referat mavzulari

1. Binomial taqsimotlarning ikki ehtimolligini taqqoslash.
2. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining muhimliligi haqidagi gipotezani tekshirish.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Moslik kriteriylari nima?
2. Pirsonning moslik kriteriysi qanday formula bilan beriladi?

3. Pirson moslik kriteriysining qo‘llanilishini tushuntiring.
4. Nazariy chastota qanday hisoblanadi?

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. $\alpha = 0,05$ bo‘lsa bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani quyidagi jadval asosida tekshiring:

empir. chast.	6	13	38	74	106	85	30	14
nazar. chast.	13	14	42	82	99	76	37	13

2. $\alpha = 0,01$ bo‘lsa bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani quyidagi jadval asosida tekshiring:

empir. chast.	6	13	38	40	106	85	30	14	24
nazar. chast.	13	14	42	82	99	76	37	13	27

1- ilova

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$ funksiya qiymatlari jadvali

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1956
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

1- ilova (davomi)

3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-ilova

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ funksiya qiymatlari jadvali

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3686	1.57	0.4418
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	03708	1.58	0.4429
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4505
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4515
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4545
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582

2-ilova (davomi)

0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4066	1.77	0.4616
0.43	0.1664	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633

davomi

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.80	0.4641	2.00	0.4772	2.40	0.4918	2.80	0.4974
1.81	0.4649	2.02	0.4783	2.42	0.4922	2.82	0.4976
1.82	0.4656	2.04	0.4793	2.44	0.4927	2.84	0.4977
1.83	0.4664	2.06	0.4803	2.46	0.4931	2.86	0.4979
1.84	0.4671	2.08	0.4812	2.48	0.4934	2.88	0.4980
1.85	0.4678	2.10	0.4821	2.50	0.4938	2.90	0.4981
1.86	0.4686	2.12	0.4830	2.52	0.4941	2.92	0.4982
1.87	0.4693	2.14	0.4838	2.54	0.4945	2.94	0.4984
1.88	0.4699	2.16	0.4846	2.56	0.4948	2.96	0.4985
1.89	0.4706	2.18	0.4854	2.58	0.4951	2.98	0.4986
1.90	0.4713	2.20	0.4861	2.60	0.4953	3.00	0.49865
1.91	0.4719	2.22	0.4868	2.62	0.4956	3.20	0.49931
1.92	0.4726	2.24	0.4875	2.64	0.4959	3.40	0.49966
1.93	0.4732	2.26	0.4881	2.66	0.4961	3.60	0.499841
1.94	0.4738	2.28	0.4887	2.68	0.4963	3.80	0.499828
1.95	0.4744	2.30	0.4893	2.70	0.4965	4.00	0.499968
1.96	0.4750	2.32	0.4898	2.72	0.4967	4.50	0.499997
1.97	0.4756	2.34	0.4904	2.74	0.4969	5.00	0.499997
1.98	0.4761	2.36	0.4909	2.76	0.4971		
1.99	0.4767	2.38	0.4913	2.78	0.4973		

3-ilova

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ qiymatlar jadvali

n \ γ	0.95	0.99	0.999	n \ γ	0.95	0.99	0.999
5	2.78	4.60	8.61	20	2.093	2.861	3.883
6	2.57	4.03	6.86	25	2.064	2.797	3.745
7	2.45	3.71	5.96	30	2.045	2.756	3.659
8	2.37	3.50	5.41	35	2.032	2.729	3.600
9	2.31	3.36	5.04	40	2.023	2.708	3.558
10	2.26	3.25	4.78	45	2.016	2.692	3.527
11	2.23	3.17	4.59	50	2.009	2.679	3.502
12	2.20	3.11	4.44	60	2.001	2.662	3.464
13	2.18	3.06	4.32	70	1.996	2.649	3.439
14	2.16	3.01	4.22	80	1.001	2.640	3.418
15	2.15	2.98	4.14	90	1.987	2.633	3.403
16	2.13	2.95	4.07	100	1.984	2.927	3.392
17	2.12	2.92	4.02	120	1.980	2.617	3.374
18	2.11	2.90	3.97	∞	1.960	2.576	3.291
19	2.10	2.88	3.92				

4-ilova

$q_\gamma = q(\gamma, n)$ qiymatlar jadvali

n \ γ	0.95	0.99	0.999	n \ γ	0.95	0.99	0.999
5	1.37	2.67	5.64	20	0.37	0.58	0.88
6	1.09	2.01	3.88	25	0.32	0.49	0.73
7	0.92	1.62	2.98	30	0.28	0.43	0.63
8	0.80	1.38	2.42	35	0.26	0.38	0.56
9	0.71	1.20	2.06	40	0.24	0.35	0.50
10	0.65	1.08	1.80	45	0.22	0.32	0.46
11	0.59	0.98	1.60	50	0.21	0.30	0.43
12	0.55	0.90	1.45	60	0.188	0.269	0.38
13	0.52	0.83	1.33	70	0.174	0.245	0.34
14	0.48	0.78	1.23	80	0.161	0.226	0.31
15	0.46	0.73	1.15	90	0.151	0.211	0.29
16	0.44	0.70	1.07	100	0.143	0.198	0.27
17	0.42	0.66	1.01	150	0.115	0.160	0.211
18	0.40	0.63	0.96	200	0.099	0.136	0.185
19	0.39	0.60	0.92	250	0.089	0.120	0.162

5-ilova

χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari

Ozodlik darajalari soni k	α muhimlilik darajasi					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.00098	0.00016
2	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.020
3	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	13.3	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	15.1	12.8	11.1	1.15	0.831	0.554
6	16.8	14.4	12.6	1.64	1.24	0.872
7	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.24
8	20.1	17.5	15.5	2.73	2.18	1.65
9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.09
10	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.56
11	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.05
12	26.2	23.3	21.0	5.23	4.40	3.57
13	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.11
14	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.66
15	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.23
16	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.81
17	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.41
18	34.8	31.5	28.9	9.39	8.23	7.01
19	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.63
20	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.26
21	38.9	35.5	32.7	11.6	10.3	8.90
22	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	9.54
23	41.6	38.1	35.9	13.1	11.7	10.2
24	43.0	39.4	36.4	13.8	12.4	10.9
25	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	45.6	41.9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	49.6	45.7	42.6	17.7	16.0	14.3
30	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0

Adabiyotlar

Darslik va o‘quv qo‘llanmalar

1. Adirov T.X., Xamdamov I. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar va ularni yechishga oid ko‘rsatmalar. T.: «Iqtisod - Moliya», 2008.

2. Бабаджанов Ш.Ш. «Материалы для самостоятельных работ по теории вероятностей и математической статистике». Учебное пособие. Т.: « Iqtisod -Moliya» , 2006.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. М.: Высшая школа, 2008.

4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. -Ì.: ЮНИТИ, 2001.

5. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник. М.: Инфра-М, 1997.

6. Mamurov E.N., Adirov T.X. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T.: «Iqtisod -Moliya», 2007.

7. Бабаджанов Ш.Ш. Теории вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. Т.: ТМИ, 2004.

8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по «Теории вероятностей и математической статистике». Учебное пособие. 11-издание. М.: 2008.

Internet va ZiyoNet saytlari

http://www.rsl.ru/
http://www.msu.ru/
http://www.nlr.ru/
http://el.tfi.uz/pdf/enmcoq22_uzk.pdf
http://el.tfi.uz/pdf/enmcoq22_uzl.pdf

MUNDARIJA

1-QISM. EHTIMOLLAR NAZARIYASI

2-QISM. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

A. Xashimov, E. Mamurov, T. Adirov

Ehtimollar nazariyasi va
matematik statistika

O‘quv qo‘llanma

Muharrir: **E. Bozorov**
Badiiy muharrir: **M. Odilov**
Kompyuterda sahifalovchi: **U. Raxmatov**

Nashr. lits. AI № 174. Bosishga ruxsat 25.08.2012-y.da berildi.
Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$. Ofset qog‘ozi №2. «Times» garniturasi.
Shartli b.t. 10,5. Hashr hisob t.10,7. Adadi 200 dona.
Buyurtma № 30

«IQTISOD-MOLIYA» nashriyotida tayyorlandi
100084. Toshkent. Kichik halqa yo‘li, 7-uy.

«HUMOYUNBEK-ISTIQLOL MO‘JIZASI»
bosmaxonasida chop etildi.
100003. Toshkent. Olmazor, 171-uy.

Qaydlar uchun