O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETINING JIZZAX FILIALI

“AMALIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

O‘. HALIMOV

60540200 – Amaliy matematika

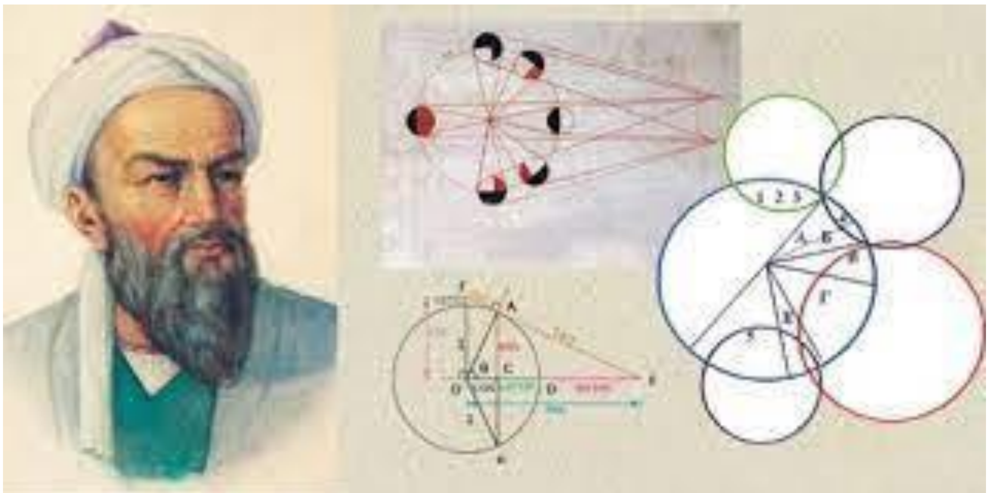
bakalavr ta’lim yo‘nalishlari talabalari uchun

“KOMPLEKS O’ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR NAZARYASI”

fanidan

O‘quv uslubiy majmua

VII-Simestr



Jizzax - 2023

MUNDARIJA

FANNING ANNOTATSIYASI

Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasi matematikaning tarkibiy qismi bo’lishi bilan bir qatorda matematika yutuqlarini hayotga bevosita qo’llash imkonini beradigan asosiy fanlardan biridir.

Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanini o’qitilishidan maqsad talabalarga muhim ahamiyatga ega bo’lgan Koshining integral teoremasi, Koshining integral formulasi, yagonalik teoremasi va analitik davom ettirish prinsipi, qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi hamda shu asosda yopiq kontur bo’yicha olingan aniq va xosmas integrallarni hisoblash usullari, elementar funksiyalar orqali konform akslantirish tushunchasidan samarali foydalanish usullarini o’rgatish, ularda kompleks analiz sohasiga tegishli muammolarni hal etishda yetarli bilim va ko’nikmalarni shakllantirish, kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasining muhim xususiyatlaridan unumli foydalana olish qobiliyatini rivojlantirishdan iboratdir.

TUZUVCHILAR HAQIDA MA’LUMOT:

MA’LUMOTNOMA

Halimov O‘ktam Haydarovich

2021 yil 5-yanvardan:
Mirzo Ulugbek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Jizzax filiali tayanch doktaranti

Tug‘ilgan yili:
09.04.1987

Tug‘ilgan joyi:
Buxoro viloyati, Qorako‘l tumani

Millati:
o‘zbek

Partiyaviyligi:
yo‘q

Ma’lumoti:
oliy

Tamomlagan:
2009 y. Jizzax davlat pedagogika instituti (kunduzgi) 2014 y. Jizzax davlat pedagogika instituti (magistratura)

Ma’lumoti bo‘yicha mutaxassisligi:
matematika o‘qitish metodikasi

Ilmiy darajasi:
yo‘q

Ilmiy unvoni:
yo‘q

Qaysi chet tillarini biladi:
rus tili

Davlat mukofotlari bilan taqdirlanganmi (qanaqa):
yo‘q

Xalq deputatlari, respublika, viloyat, shahar va tuman Kengashi deputatimi yoki boshqa saylanadigan organlarning a’zosimi (to‘liq ko‘rsatilishi lozim)
Yo‘q

MEHNAT FAOLIYaTI

2005-2009 yy. - Jizzax davlat pedagogika instituti talabasi
2009-2012 yy. - Buxoro viloyati, Qorako‘l tuman qishloq xo‘jalik kasb-hunar kolleji o‘qituvchisi

2012-2014 yy. - Jizzax davlat pedagogika instituti magistranti

2014-2021 yy. - Jizzax davlat pedagogika institutining matematika o‘qitish metodikasi kafedrasi o‘qituvchisi

2021- 2023 - Mirzo Ulugbek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Jizzax filiali tayanch doktaranti

2023- 2024**-** Mirzo Ulugbek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Jizzax filiali Amaliy matematika kafedrasi katta o‘qituvchisi

Fanni o'zlashtirish bo'yicha Davlat ta'lim standartlari asosida qo'yilgan talablar

Fanni o'zlashtirish darajasi (saviyasi)

1. Matematik analiz, chiziqli algebra va geometriya kurslaridan olingan bilimlarni to'ldirish, hamda o'zlashtirilgan bilim va ko'nikmalarni kompleks o'zgaruvchili funksiyalarga moslab qo'llay bilish, kompleks sonlar va ular ustida amallar bajarish, kompleks hadli sonly ketma-ketlik va qatorlar, haqiqiy parametrli kompleks qiymatli funksiyalar, chiziq, Jordan jizig'I va soha, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi va integrali, funksional qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari, darajali qator uchun yaqinlashish radiusi va sohasi kabi tushunchalar bilan tanishish va ularning asosiy xossalarini o'rganish. Regulyar, analitik, garmonik va qo'shma garmonik, meromorf funksiyalar haqida **tasavvurga ega bo'lishi;**

2. Bir va ko'p bog'lamli sohalarda Koshi teoremasi va integral formulalari, Koshi tipidagi integrallar, analitik funksiya hosilalari formulalari, analitik funksiyalarning yagonalik teoremasi, analitik davom ettirish prinsipi, maxsus nuqtalar va ularni tiplarga ajratish, Loran qatori va uning yagonaligi, qoldiq tushunchasi va uni hisoblash formulalari, konform akslantirish, chiziqli, kasr chiziqli, Jukovskiy, trigonometric, ko'rsatkichli gunksiyalar orqali konform akslantirishlar haqida umumiy **tasavvurga ega bo'lishi**, **teoremalardagi shart va tasdiqni farqlay bilishi**, ularning **muhimligini anglashi** va nazariy bilimlardan *amalda foydalana bilishi* lozim**;**

2. Avval o'rganilgan fanlar bilan bog'liqligi

Maktab, akademik litsey va kollejlar matematikasi. Matematik analiz, algebra, geometriya, differensial va matematik fizika tenglamalari.

3. Fan bo'yicha o'quv mashg'ulotlari turlari va ularning semestrlar bo'yicha hajmi (soatlarda)

№	Dars turi / Yo'nalish	Mustaqil Ta'lim	Ma'ruza	Amaliyot	Seminar	Jami
1	Amaliy matematika VII semestr	90	30	30	-	150
4	JAMI	90	30	30	-	150

3. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan fan dasturi va sillabusi

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

"TASDIQLAYMAN"

(OTM rektori)

2023 yil "__" ________

KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR NAZARIYASI

O'QUV DASTURI

Bilim sohasi:	500 000 — Tabiiy fanlar, matematika va statistika
Ta'lim sohasi:	540 000 — Matematika va statistika
Ta'lim yo'nalishi:	60540200 — Amaliy matematika

Toshkent – 2023

Fan/modul kodi KUFB406	O'quv yili 2026-2027	Semestr 7	ECTS – Kredit 6
Fan/modul turi Majburiy	**Ta'lim tili** O'zbek/rus		**Haftadagi dars soatlari** 4

	Fanning nomi	Auditoriya mashg'ulotlari (soat)	Mustaqil ta'lim (soat)	Jami yuklama (soat)
1.	Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi	60	120	180

2.

I. Fanning mazmuni

Fanni o'qitishdan maqsad – talabalarni kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining asoslari, elementar funksiyalar yordamida bajariladigan konform akslantirishlar, golomorf funksiyalar va ularning xossalari, chegirmalar nazariyasi bilan tanishtirish, kompleks analiz metodlari va ular yordamida turli masalalarni yechish ko'nikmalarini hosil qilishdan iborat.

Fanning vazifasi – talabalarda nazariy bilimlar, amaliy ko'nikmalar, mantiqiy fikrlash, to'g'ri xulosa chiqarish, matematik madaniyatini oshirish hamda ilmiy dunyoqarashini shakllantirishdan iborat.

II. Asosiy nazariy qism (ma'ruza mashg'ulotlari)

II.I. Fan tarkibiga quyidagi mavzular kiradi:

1-mavzu. Kompleks tekislik.

Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks tekislik. Riman sferasi. Kompleks tekislikda chiziqlar va sohalar.

2-mavzu. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar.

Funksiya limiti, uzluksizligi va differensiallanuvchiligi. Koshi-Riman shartlari. Golomorf funksiya tushunchasi. Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi. Konform akslantirishlar.

3-mavzu. Kompleks o'zgaruvchili elementar funksiyalar.

Kasr-chiziqli funksiya va uning xossalari. Kasr-chiziqli akslantirishlarning klassifikatsiyasi. Jukovskiy funksiyasi, darajali va ko'rsatkichli funksiyalar, trigonometrik funksiyalar, logorifmik fuksiyalar va ularning xossalari.

4-mavzu. Kompleks argumentli funksiyalarning integrali.

Kompleks argumentli funksiyalarning integrali, xossalari, egri chiziqli integrallar bilan bog'lanishi. Koshi teoremasi. Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Koshining integral formulasi.

5-mavzu. Darajali qatorlar.

Abel teoremasi. Koshi—Adamar formulasi. Golomorf funksiyalarni qatorga yoyish. Teylor qatorlari. Koshi tengsizliklari. Liuvill va Morera teoremalari. Yagonalik teoremasi. Veyershtrass teoremasi.

6-mavzu. Golomorf funksiyalarning xossalari.

Golomorf funksiyaning nollari. Loran qatorlari. Maxsus nuqtalar va ularning turlari.

7-mavzu. Chegirmalar nazariyasi elementlari.

Chegirmalar nazariyasi va uning tadbiqlari. Jordan lemmasi.

III. Amaliy mashg'ulotlari buyicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlardan maqsad ma'ruza materiallari bo'yicha talabalarning bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirish va kengaytirishdan iborat. Bunda talabalar amaliy mashg'ulotlarda misol va masalalarni yechishda, yechimlarni tahlil qilishda olgan nazariy bilimlarini qo'llay olishlari nazarda tutiladi.

Amaliy mashg'ulotlar uchun quyidagi mavzular tavsiya etiladi:

1. Kompleks sonlar va ular ustida amallar.
2. Kompleks sonlarni geometrik tasvirlash. Kompleks tekislik.
3. Stereografik proeksiya. Riman sferasi.
4. Kompleks tekislikda chiziqlar va sohalar.
5. Kompleks o'zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi.
6. Kompleks o'zgaruvchili funksiya differensiallanuvchiligi. Koshi—Riman shartlari. Golomorf funksiya tushunchasi.
7. Garmonik fuksiyalar va ularning xossalari.
8. Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi. Konform akslantirishlar.
9. Kasr-chiziqli funksiya va uning xossalari (doiraviylik, simmetriyani saqlash xossalari).
10. Jukovskiy funksiyasi.
11. Darajali funksiyalar.
12. Ko'rsatkichli funksiyalar.
13. Trigonometrik funksiyalar.
14. Logorifmik fuksiyalar.
15. Kompleks argumentli funksiyalarning integrali.
16. Koshi teoremasi. Boshlang'ich funksiya tushunchasi.
17. Koshining integral formulasi yordamida integral xisoblash.
18. Darajali qatorlar. Koshi—Adamar formulasi.
19. Golomorf funksiyalarni qatorga yoyish. Teylor qatorlari.
20. Veyershtrass teoremasi.

21.Golomorf funksiyaning nollari.
22.Loran qatorlari. Maxsus nuqtalar va ularning turlari.
23.Chegirmalar va ularni hisoblash.
24.Chegirmalar nazariyasining ayrim tadbiqlari.

IV. Mustaqil ta'lim va mustaqil ishlar

Hozirgi davr mutaxassisidan yuqori darajadagi tayyorgarlik, mustaqil ravishda qarorlar qabul qila olish, belgilangan vazifalarni bajarish uchun ko'p ma'lumotlar orasidan kerakligini tanlab olish va bu ma'lumotlarni qayta ishlay olish talab qilinadi.

Talabalarning mustaqil ta'limidan asosiy maqsadlar quyidagilardan iboratdir:

- yangi bilim olish usullarini egallash, jarayonlarni mustaqil tahlil qila olish;
- auditoriyadagi mashg'ulotlarda olgan bilimlarini mustahkamlash, chuqurlashtirish, kengaytirish va tartibga solish;
- ma'lumotlar va maxsus adabiyotlar bilan ishlashni o'rganish;
- o'quv materiallarini mustaqil o'rganish;

Mustaqil ta'lim uchun tavsiya etiladigan mavzular:

1. Stereografik proeksiya.
2. Kasr chiziqli funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar.
3. Garmonik funksiyalar.
4. Jukovskiy funksiyasi, darajali va ko'rsatkichli funksiyalar.
5. Trigonometrik funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar.
6. Koshi tipidagi integral.
7. Chegirmalar yordamida xosmas integrallarni hisoblash.

Mustaqil o'zlashtiriladigan mavzular bo'yicha talabalar tomonidan referatlar tayyorlash va uni taqdimot qilish tavsiya etiladi.

V. Fan o'qitilishining natijalari (shakllanadigan kompetensiyalar)

Fanni o'zlashtirish natijasida talaba:

- golomorf funksiyalar, konform akslantirishlar, kompleks o'zgaruvchili funksiya integrali, Teylor va Loran qatorlari, chegirmalar nazariyasi haqida ***tasavvur va bilimga ega bo'lishi***;
- golomorf funksiyalar, konform akslantirishlar, kompleks o'zgaruvchili funksiya integrali, Teylor va Loran qatorlari, chegirmalar nazariyasiga oid masalalarni yechishni bilishi va ulardan foydalanish ***ko'nikmalariga ega bo'lishi***;
- talaba nazariy bilimlarni puxta o'zlashtirgan bo'lishi, mavzularning mohiyatini tushungan bo'lishi va amaliy masalalarni yechishda nazariy ma'lumotlarni tadbiq eta bilish ***malakasiga ega bo'lishi kerak.***

4.	**VI. Ta'lim texnologiyalari va metodlari:** – ma'ruzalar; – interfaol keys-stadilar; – amaliy mashg'ulotlar (mantiqiy fiklash, tezkor savol-javoblar); – guruhlarda ishlash; – taqdimotlar qilish;
5.	**VII. Kreditlarni olish uchun talablar:** Fanga oid nazariy va uslubiy tushunchalarni to'la o'zlashtirish, tahlil natijalarini to'g'ri aks ettira olish, o'rganilayotgan jarayonlar haqida mustaqil mushohada yuritish va joriy, oraliq nazorat shakllarida berilgan vazifa va topshiriqlarni bajarish, yakuniy nazorat bo'yicha yozma ishni topshirish.
6.	**Asosiy adabiyotlar** 1. Худойберганов Г., Ворисов А. К., Мансуров Х. Т. Комплекс анализ. Т. "Университет", 1998. 2. Туйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К., Джумабаев Д.Х., Китманов А.М., Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанидан мустакил ишлар, Т. "Мумтоз сўз", 2018. (Лотин алифбосида) 3. Садуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х. Т., Ворисов А. К., Туйчиев Т. Т. Математитк анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами (комплекс анализ) 3 қисм. Т. "Ўзбекистон", 2000. 4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. M. URSS, 2015. 5. Волковский Л. И., Лунц Г. А., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М. «ФИЗМАТЛИТ», 2002. **Qo'shimcha adabiyotlar** 6. Palka B. P. Complex analysis. Springer, Germany, 1995. 7. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. M. URSS, 2015. 8. Сирожиддинов С. Х., Салохитдинов М. С., Максудов Ш. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси. Т. "Ўқитувчи", 1979. 9. Сидоров Ю. В., Федорюк И. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1984. 10. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М. «Наука», 1972. **Vebsaytlar** 11. http://www.ziyonet.uz/ 12. http://www.allmath.ru/

	13. http://www.mcce.ru/ 14. http://lib.mexmat.ru/ 15. http://www.webmath.ru/ 16. http://www.exponenta.ru/
7.	O'quv dasturi O'zMU Kengashning 2023-yil 25-avgustdagi 1-sonli bayonnomasi bilan tasdiqlangan.
8.	**Fan/modul uchun ma'sullar:** J.K.Tishabayev – Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti "Matematik analiz" kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari nomzodi; T.O'.Otaboyev – Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti "Matematik analiz" kafedrasi katta o'qituvchisi, fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori;
9.	**Taqrizchilar:** T.T.Tuychiyev – Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti "Matematik analiz" kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi; J.J. Karimov – Toshkent shahridagi Turin politexnika universiteti dotsenti, fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETINING JIZZAX FILIALI

O'quv-uslubiy bo'lim tomonidan ro'yxatga olindi
№ BD-60540200-2.32
2023-yil "21" 06

«TASDIQLAYMAN»
O'quv ishlari bo'yicha direktor o'rinbosari
[illegible]
2023-yil "21" 06

KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR NAZARIYASI
FAN SILLABUSI

Bilim sohasi: 500000 – Tabiiy fanlar, matematika va statistika

Ta'lim sohasi: 540000 – Matematika va statistika

Ta'lim yo'nalishi: 60540200 – Amaliy matematika

Umumiy o'quv soati -150 soat
Shu jumladan:
Ma'ruza – 30 soat (7–semestr)

Amaliy mashg'ulot – 30 soat (7–semestr)

Mustaqil ta'lim – 90 soat (7–semestr)

Fan sillabusi Oliy va o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi yo'nalishlari bo'yicha o'quv-uslubiy birlashmalar faoliyatini muvofiqlashtiruvchi kengashining 2020-yil 29-avgustdagi 4 – sonli bayonnomasi bilan maqullangan "Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazaryasi" fan dasturi asosida tayyorlangan.

Tuzuvchilar: F.Almurotov _____ O'zMUJF, "Amaliy matematika" kafedrasi v.b.dotsenti, PhD.

B.Po'latov _____ O'zMUJF, "Amaliy matematika" kafedrasi katta o'qituvchisi.

J.Ibrohimov _____ O'zMUJF, "Amaliy matematika" kafedrasi assistent o'qituvchisi.

Taqrizchi: Sh.Qurbonov – SamDU, "Matematik fizika va funksional analiz" kafedrasi dotsenti, PhD.

Fan sillabusi "Amaliy matematika" kafedrasining 2023-yil "25" ___06___dagi 11 -sonli yig'ilishida muhokamadan o'tgan va fakultet uslubiy Kengashiga muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri: ___________ X.Sharipov

Fan sillabusi "Amaliy matematika" fakulteti uslubiy Kengashida muhokama etilgan va filial ilmiy-uslubiy Kengashiga muhokama uchun tavsiya qilingan. (2023 -yil "26" 06 dagi 11 - sonli bayonnoma).

Fakultet uslubiy Kengashi raisi: ___________ S.Aliboyev

Fan sillabusi filial ilmiy-uslubiy Kengashida muhokama etilgan va foydalanishga tavsiya qilingan (2023 - yil "21" 06 dagi 11 - sonli bayonnoma).

O'quv-uslubiy bo'lim boshlig'i: ___________ A.Ko'chimov

2

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETINING JIZZAX FILIALI

O‘quv-uslubiy bo‘lim tomonidan ro‘yxatga olindi	**«TASDIQLANDI»** O‘quv ishlari bo‘yicha direktor o‘rinbosari
№ __________________	________R.A.Abduraxmanov
2023-yil "___"________	2023-yil "___"________

KOMPLEKS O’ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR NAZARYASI FAN SILLABUSI

Bilim sohasi:	500000 – Tabiiy fanlar, matematika va statistika
Ta’lim sohasi:	540000 – Matematika va statistika
Ta’lim yo‘nalishi:	60540200 – Amaliy matematika

Umumiy o‘quv soati	-150 soat
Shu jumladan:	
Ma’ruza	– 30 soat (7–semestr)
Amaliy mashg‘ulot	– 30 soat (7–semestr)
Mustaqil ta’lim	– 90 soat (7–semestr)

Fan sillabusi Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Kengashining 20221-yil 25-avgustdagi 1 – sonli buyrug’I bilan tasdiqlangan “Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazaryasi” fan dasturi asosida tayyorlangan.

Tuzuvchilar: **O‘. Halimov** _____ O‘zMUJF, “Amaliy matematika” kafedrasi v.b.dotsenti, PhD.

Taqrizchi: Sh.Qurbonov – SamDU, “Matematik fizika va funksional analiz” kafedrasi dotsenti, PhD.

Fan sillabusi “Amaliy matematika” kafedrasining 2023-yil “___” ____________dagi ___ -sonli yig‘ilishida muhokamadan o‘tgan va fakultet uslubiy Kengashiga muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri: ____________ X.Sharipov

Fan sillabusi “Amaliy matematika” fakulteti uslubiy Kengashida muhokama etilgan va filial ilmiy-uslubiy Kengashiga muhokama uchun tavsiya qilingan. (2023 - yil “___” ____dagi ___ - sonli bayonnoma).

Fakultet uslubiy Kengashi raisi: ____________ S.Aliboyev

Fan sillabusi filial ilmiy-uslubiy Kengashida muhokama etilgan va foydalanishga tavsiya qilingan (2023 - yil “___” ____dagi ___ - sonli bayonnoma).

O‘quv-uslubiy bo‘lim boshlig‘i:________ A.Ko‘chimov

Modul / kurs sillabusi

Amaliy matematika
60540200 – Amaliy matematika– ta’lim yo‘nalishi

Kurs:		Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazaryasi
Kurs turi:		Majburiy
Kurs kodi:		**KUFB405**
Yil:		2023/2024
Semestr:		7
Ta'lim shakli:		Kunduzgi
Mashg‘ulotlar shakli va semestrga ajratilgan soatlar:		150
Ma’ruza		30
Amaliy mashg’ulot		30
Mustaqil ta’lim		90
Kredit miqdori:		5
Baholash shakli:		Sinov va imtihon
Kurs tili:		O‘zbek
Kurs maqsadi (KM)		
KM1	Fanni o‘qitishdan maqsadi – talabalarni kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazaryasining asoslari, elemenat funksiyalar yordamida bajariladigan conform akslantirishlar, golomof funksiyalar va ularning xossalari, chegirmalar nazaryasi bilan tanishtirish, kompleks analiz metodlari va ular yordamida turli masalalarni yechish ko’nikmalarini hosil qilishdan iboratdir. Fanning vazifasi – talabalarda nazariy bilimlar, amaliy ko’nikmalar, mantiqiy fikrlash to’g’ri xulosa chiqarish, matematik madaniyatni oshirish hamda ilmiy dunyoqarashni shakllantirishdan iboratdir.	
Kursni o‘zlashtirish uchun zarur boshlang‘ich bilimlar		
1	Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazaryasining fanini o’rganishda talaba matematik analiz va algebra fanlariga oid tushunchalar: To‘plam, qism to’plam, akslantirish, fazo, qism fazo, yuza, hajm, funksiya, limit, uzluksizlik, kompleks son, integral va hokazolar haqida boshlang`ich bilimga ega bo`lishi kerak.	
Ta'lim natijalari (TN)		
	Bilim jihatdan:	
TN 1	Kompleks sonlar va ular ustida amallarni bilishi	
TN 2	Kompleks tekislikda chiziqlar va sohalarni farqlay olishi	
TN 3	Funksiya limiti, uzluksizligi va differensiallanuvchanligini bilishi	
TN 4	Kasr-chiziqli va elementar funksiyalarning xossalarini bilishi	
TN 5	Kompleks argumentli funksiyalarning integrali xossalarini bilishi	
TN 6	Darajali qatorlar haqida tushunchalarga ega bo’lishi	
TN 7	Golomorf funksiyalarning nollarini topa olishi	

TN 8	Ilmiy bilimlar, tadqiqot ishlarida olingan natijalarni matematik qayta tahlil qilishni, kompleks analizning zamonaviy metodlarini va asosiy prinsiplarini bilishi
TN 9	Fan va texnikada, xalq xo'jaligida va boshqa sohalarda uchraydigan amaliy masalalarni hal etishda matematik metodlardan amaliyotda qo'llash mexanizmini bilish
TN 10	olgan nazariy bilimlarini amaliy masalalarni yechishga tadbiq eta bilish, ayrim matematik muammolarni hal etishda mantiqiy mushoxada qilish, fazoviy tasavvur etishi, qo'llanishini ta'min etishni bilishi
Kurs mazmuni	
Mashg'ulotla shakli: ma'ruza (M)	
16.	Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks sonning geometrik tasviri. Modul va argument haqidagi teorema. Muavr formulasi va n-tartibli ildiz chiqarish formulasi.
17.	Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri. Cheksiz usoqlashgan nuqta.
18.	Ketma-ketlikning limitik nuqtasi. Bolsano-Veyershtrass teoremasi. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari. Koshi kriteriyasi.
19.	Uzluksizlik va tekis uzluksizlik tushunchalari. Kantor teoremasi. Geyne –Borell lemmasi.
20.	Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Hosila mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari (Koshi-Riman shartlari).
21.	Analitik funksiyalar. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar. Analitik funksiyani berilgan haqiqiy yoki mavhum qismining koeffitsenti bo'yicha tiklash.
22.	Bir yaproqlilik tushunchasi, Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi. Konform akslantirish.
23.	Elementar funksiyalar (chiziqli, kasr-chiziqli, darajali), ko'rsatkichli, trigonometrik, eksponensial, logarifmik, Jukovskiy funksiyalari orqali konform akslantirish.
24.	Kompleks funksiyaning integrali. Integralning mavjudlik sharti. Integralni xisoblash. Kompleks funksiya integralining xossalari.
25.	Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi. Murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi. Boshlang'ich funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. Nyuton-Leybnits formulasi.
26.	Darajali qatorlar. Abelning birinchi teoremasi. Koshi-Adamar formulasi. Golomorf funksiyalarni Teylor qatorlariga yoyish.
27.	Yagonalik teoremasi. Analitik davom ettirish prinsipi. Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyish.
28.	Golomorf funksiyaning nollari. Loran qatorlari. Maxsus nuqtalar va ularning turlari.
29.	Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.
30.	Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasini aniq integrallarni hisoblashga tadbiqi. Jordan lemmasi.
Mashg'ulotlar shakli: Amaliy mashg'ulot (A)	
A1	Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Misollar yechish.
A2	Kompleks sonning geometrik tasviri. Kompleks sondan n-tartibli ildiz chiqarish. Misollar yechish.
A3	Kompleks tekislikda chiziqlar va sohalar.
A4	Kompleks o'zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi.

A5	Kompleks o'zgaruvchili funksiya differensiallanuvchanligi. Koshi–Riman shartlari.
A6	Garmonik funksiyalar va ularning xossalari
A7	Elementar funksiyalar (chiziqli, kasr-chiziqli, darajali), ko'rsatkichli, trigonometrik, eksponensial, logarifmik, Jukovskiy funksiyalari orqali konform akslantirish. Misollar yechish.
A8	Kompleks funksiyaning integrallarini hisoblash. Misollar yechish.
A9	Koshining integral formulasi yordamida integrallarni hisoblash.
A10	Darajali qatorlar. Koshi–Adamar formulasi.
A11	Golomorf funksiyalarni qatorga yoyish. Teylor qatorlari
A12	Golomorf funksiyaning nollari.
A13	Loran qatorlari. Maxsus nuqtalar va ularning turlari
A14	Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.
A15	Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasini aniq integrallarni hisoblashga tadbiqi. Jordan lemmasi.
Mashg'ulot shakli: Mustaqil ta'lim uchun tavsiya etiladigan mavzular (MT)	
MT1	Stereografik proyeksiya.
MT2	Kasr chiziqli funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar.
MT3	Garmonik funksiyalar
MT4	Jukovskiy funksiyasi, darajali va ko'rsatkichli funksiyalar.
MT5	Trigonametrik funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar.
MT6	Koshi tipidagi integral.
MT7	Chegirmalar (qoldiqlar) yordamida xosmas integrallarni hisoblash

Kredit-modul tizimida talabalar bilimini baholash mezonlari

Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirining 2018-yil 9-avgustdagi "Oliy ta'lim muassasalarida talabalar bilimini nazorat qilish va baholash tizimi to'g'risidagi Nizomni tasdiqlash haqida"gi 19-2018-son buyrug'i bilan tasdiqlangan nizom asosida belgilaniladi.

Unga ko'ra 100 ballik tizim asosida tashkil etiladi.

1-jadval

Baholashni 5 baholik shkaladan 100 ballik shkalaga o'tkazish JADVALI

5 baholik shkala	100 ballik shkala	5 baholik shkala	100 ballik shkala	5 baholik shkala	100 ballik shkala
5,00 — 4,96	100	4,30 — 4,26	86	3,60 — 3,56	72
4,95 — 4,91	99	4,25 — 4,21	85	3,55 — 3,51	71
4,90 — 4,86	98	4,20 — 4,16	84	3,50 — 3,46	70
4,85 — 4,81	97	4,15 — 4,11	83	3,45 — 3,41	69
4,80 — 4,76	96	4,10 — 4,06	82	3,40 — 3,36	68
4,75 — 4,71	95	4,05 — 4,01	81	3,35 — 3,31	67
4,70 — 4,66	94	4,00 — 3,96	80	3,30 — 3,26	66
4,65 — 4,61	93	3,95 — 3,91	79	3,25 — 3,21	65
4,60 — 4,56	92	3,90 — 3,86	78	3,20 — 3,16	64
4,55 — 4,51	91	3,85 — 3,81	77	3,15 — 3,11	63
4,50 — 4,46	90	3,80 — 3,76	76	3,10 — 3,06	62
4,45 — 4,41	89	3,75 — 3,71	75	3,05 — 3,01	61
4,40 — 4,36	88	3,70 — 3,66	74	3,00	60

4,35 — 4,31	87		3,65 — 3,61	73		**3,0 dan kam**	**60 dan kam**

“Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazaryasi” fani bo‘yicha talabalar bilimini baholash va nazorat mezonlari

№	Nazorat turlari	Nazorat shakli	Ajratilgan ballar		
			Eng yuqori ball	O‘tish balli	Umumiy ball
1	Joriy nazorat	Amaliyot mashg‘ulotda talabaning faolligi	20	30	20
2	Oraliq nazorat	Yozma ish yoki Test	15		30
		Mustaqil ish	15		
3	Yakuniy nazorat	Yozma ish yoki Test	50	30	50
	Jami		**100**	**60**	**100**

Izoh: Joriy va oraliq nazorat hamda mustaqil ishlarni baholash mezonlari

Talaba joriy nazoratda 4 ta topshiriq bajaradi va har bir topshiriqga misollar beriladi. Talaba 2 marta oraliq nazorat (1-oraliq 7 ball, 2-oraliq 8 ball) topshiradi. Semestr davomida talaba 2 ta mustaqil ish topshiradi (har bir mustaqil ishga mavzular beriladi).

Quyidagi holatlarda talabaga 5 ball qo‘yiladi:

-barcha savollarga to‘liq javob bersa;
-xatolarga yo‘l qo‘ymasa;
-javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa;
-fikrlar asosli va faktik ma’lumotlarga asoslangan bo‘lsa.

Quyidagi holatlarda talabaga 4 ball qo‘yiladi:

- savolga javob berish jarayonida ba’zi kamchiliklarga yo‘l qo‘ygan bo‘lsa;
- ayrim juz’iy noaniqliklarga yo‘l qo‘ygan bo‘lsa;
- o‘z fikrini asoslashda ayrim kamchiliklarga yo‘l qo‘ysa;

-bildirilgan fikrlar faktik ma’lumotlarga asoslanib berilsa;

Quyidagi holatlarda talabaga 3 ball qo‘yiladi:

- savolga javob berish jarayonida ba’zi kamchiliklarga yo‘l qo‘ygan bo‘lsa;
- ayrim juz’iy noaniqliklarga yo‘l qo‘ygan bo‘lsa;
- o‘z fikrini asoslashda ayrim kamchiliklarga yo‘l qo‘ysa;
- fikrlar asosli lekin faktik ma’lumotlarga asoslanmagan bo‘lsa;

Quyidagi holatlarda talabaga 2-0 ball qo‘yiladi:

- barcha savolga ham to‘g‘ri javob bera olmasa;
- barcha savollarga berilgan javoblar noto‘g‘ri va asossiz bo‘lsa.

Yakuniy nazorat baholash mezonlari

Yakuniy nazorat yozma ish variantlari 5 ta topshiriqdan iborat bo‘lib, unda talaba har bir topshiriq uchun 10 ballik tizimda baholanadi.

1	Talaba savolga yozma va og‘zaki to‘liq javob bersa, umuman xatoga yo‘l qo‘ymasa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa.	10
2	Talaba savolga yozma va og‘zaki to‘liq javob bersa, umuman xatoga yo‘l qo‘ymasa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan asoslashda ayrim kamchiliklarga yo‘l qo‘ysa.	9
3	Talaba savolga to‘liq yozma yozsa, og‘zaki javob berishda ba’zi kamchiliklarga yo‘l qo‘ysa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa.	8
4	Talaba savolga qisman yozma yozgan, to‘liq og‘zaki javob bersa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa.	7
5	Talaba savolgato‘liq yoza olmasa, to‘liq og‘zaki javob bersa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa.	6
6	Talaba savolga to‘liq yoza olmasa to‘liq og‘zaki javob bera olmasa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa.	5
7	Talaba savolga to‘liq yoza olmasa to‘liq og‘zaki javob bera olmasa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘liq asoslanmagan bo‘lsa.	4
8	Talaba savolga qisman yozma javob yozgan va og‘zaki qisman javob bergan bo‘lsa, javobi mantiqiy asoslanmagan bo‘lsa.	3
9	Talaba savolga qisman yozma javob yozgan va og‘zaki umuman javob bermagan bo‘lsa, javobi mantiqiy asoslanmagan bo‘lsa.	2
10	Talaba savolga umuman yozma javob yozmagan va og‘zaki javob bermagan bo‘lsa, javobi mantiqiy asoslanmagan bo‘lsa.	1

Yakuniy nazorat test shaklida bo‘lganda har bir talabaga 25 ta test beriladi. Har bir test 2 balldan baholanadi. O‘tish bali -30 ball (15 ta test) va maksimal ball – 50 ball (25 ta test)

Asosiy adabiyotlar

1	Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T. *Kompleks analiz*. T. Universitet, 1998.
2	Tuychiyev T.T., Tishabayev J.K., Djumabayev D.X., Kitmanov A.M., *Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanidan mustaqil ishlar*, T. ―Mumtoz so’z‖, 2018.
3	Sadullayev A., Xudoyberganov G., Mansurov X. T., Vorisov A. K., Tuychiyev T. T. *Matematitk analiz kursidan misol va masalalar to’plami* (kompleks analiz) 3 qism. T. ―O’zbekiston, 2000.
4	Shabat B. V. Введение в комплексный анализ M. URSS, 2015.
5	Volkovskiy L. I., Luns G. A., Aramanovich I. G. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного* M. «FIZMATLIT», 2002.

Tavsiya qilinadigan qo‘shimcha adabiëtlar

1	Palka B. P. *Complex analysis*. Springer, Germany, 1995.
2	Privalov I. I. *Введение в теорию функций комплексного переменного*. M. URSS, 2015.
3	Sirojiddinov S. X., Saloxitdinov M. S., Maqsudov Sh. *Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyayasi*. T. ―O’qituvchi, 1979.

4	Sidorov Yu. V., Fedoryuk I. V., Shabunin M. I. *Лекции по теории функций комплексного переменного*. M., «Nauka», 1984.	
5	Bisadze A. V. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного* M. «Nauka», 1972.	
11	**Axborot manbalari (saytlar):** 1. http://www.ziyonet.uz/ 2. http://www.allmath.ru/ 3. http://www.mcce.ru/ 4. http://lib.mexmat.ru/ 5. http://www.webmath.ru/ 6. http://www.exponenta.ru/	

Sillabus muallifi:	**O‘. Halimov** O‘zMUJF, “Amaliy matematika” kafedrasi v.b. dotsenti, PhD
E-mail:	*uktam-8719@mail.ru*
Tashkilot:	O‘zMUJF, “Amaliy matematika” kafedrasi

4. Mashg'ulotlarning pedagogik texnologiyasi

MA'RUZA

1-mavzu. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks sonning geometrik tasviri. Modul va argument haqidagi teorema. Muavr formulasi va n-tartibli ildiz chiqarish formulasi.

Kompleks sonning geometrik tasviri. Modul va argument haqidagi teorema. Muavr va n-tartibli ildiz chiqarish formulalari

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Kompleks sonlar haqida tushuncha. 2. Kompleks sonning geometric tasviri. 3. Kompleks sonning moduli va argumenti tushunchalari. 4. Kompleks sonning moduli va argumenti tushunchalari haqidagi teoremalar. 5. Muavr formulasi. 6. n-tartibli ildiz chiqarish formulasi.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	Tinglovchilarga kompleks sonlar haqida tasavvur uyg'otish uni amalda qo'llanilishini milollarda ko'rsatish bilan ko'nikmalarni mustahkamlash, ba'zi matematika masalalarini oson yechimini shu mavzu orqali ko'rsatish, ushbu fandan tinglovchilarga qiziqish uyg'otish va iloji boricha keyingi mavzularda keng qo'llash mumkinligini tushuntirish.
Pedagogik vazifalar: Kompleks sonlar haqida tushuncha, kompleks sonning geometric tasviri kompleks sonning moduli va argumenti tushunchalari, kompleks sonning moduli va argumenti tushunchalari haqidagi teoremalar. muavr formulasi. *n*-tartibli ildiz chiqarish formulasi tushunchalar bilan tanishtirish; • Kompleks sonlarning o'ziga xos jixatlari bilan tanishtirish; • Kompleks sonlardan foydalanish usullarini o'rgatishi; • Kompleks sonlar nazariy axamiyati haqida tushunchalar berish;	*O'quv faoliyati natijalari*: -kompleks sonlar bilan tanishadilar; -kompleks sonlarning o'ziga xos jixatlari bilan tanishadilar; -kompleks sonlar va ulardan foydalanish usullarini o'rganadilar; -kompleks sonlar axamiyati haqida tushunchalar oladilar.

• Kompleks sonlar xaqida ma'lumot berish;	

Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

2-mavzu. Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri. Cheksiz usoqlashgan nuqta.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Kompleks sonlar limitlari nazariyasining asosiy prinsipi. 2. Kompleks sonli ketma-ketlikning limitik nuqtasi tushunchasi. 3. Chegaralangan va chegaralanmagan kompleks sonli ketma-ketliklar. 4. Bolsano-Veyershtrass teoremasi. 5. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik tushunchasi. 6. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari. 7. Koshi alomati.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad:* O'quvchining matematik analiz kursidan o'zlashtirgan haqiqiy sonlar ketma-ketligiga oid bilimlarini kompleks hadli ketma-ketliklar, chegaralanganlik, yaqinlashish hamda uzoqlashuvchi ketma-ketliklar, ularmning xossalari kabi bilimlar bilan boyitish. Ketma-ketliklarning yaqinlashish tushunchalari bilan tanishtirish, ularning haqiqiy sonlar ketma-ketligidan farqli va o'xshash jihatlarini ajratishga o'rgatish.

	b) Tarbiyaviy maqsad: talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.
Pedagogik vazifalar: kompleks sonli ketma-ketliklar haqida tushuncha, Kompleks sonli ketma-ketliklarning yaqinlahishi. Kompleks sonli ketma-ketliklar haqidagi ba'zi teoremalar va asosiy tushunchalar bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -kompleks sonlar limitlari nazariyasining asosiy prinsipi; -kompleks sonli ketma-ketlikning limitik nuqtasi tushunchasi; -chegaralangan va chegaralanmagan kompleks sonli ketma-ketliklar; -Bolsano-Veyershtrass teoremasi; -yaqinlashuvchi ketma-ketlik tushunchasi; -limitlar nazariyasining asosiy teoremalari; -Koshi alomati kabi tushunchalar hosil qiladi.
Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

3-mavzu. Ketma-ketlikning limitik nuqtasi. Bolsano-Veyershtrass teoremasi. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari. Koshi kriteriyasi.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza

Ma'ruza rejasi	1. Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri. 2. Steriografik proyeksiya formulalari. 3. Steriografik proyeksiyaning ososiy xossasi.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad:* O'quvchida kompleks sonlar tekisligi, cheksiz uzoqlashgan nuqta haqida bilim hosil qilish, kompleks sonlar tekisligi va chekli radiusga ega bo'lgan Riman sferasi nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish ko'nikmasini hosil qilish hamda uning xossalarini o'rgatish mavzuning asosiy maqsadi hisoblanadi. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.
Pedagogik vazifalar: kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri, steriografik proyeksiya formulalari va uning asosiy xossasi kabi tushunchalari bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri; -steriografik proyeksiya formulalari; -steriografik proyeksiyaning asosiy xossasi kabi tushunchalarni hosil qiladi.
Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

4-mavzu. Uzluksizlik va tekis uzluksizlik tushunchalari. Kantor teoremasi. Geyne –Borell lemmasi.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***

O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi sonli qatorlar tushunchasi. 2. Qator yaqinlashishing zaruruiy sharti. 3. Absolyut yaqinlashuvchi qator tushunchasi. 4. Qatorlarni qo'shish va ayirish. 5. Ikkilangan qatorlar haqida teorema. 6. Qatorlarni ko'paytirish. 7. Koshi kriteriyasi.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad:* Kompleks sonli qatorlar, yaqinlashish, absolyut yaqinlashish, uzoqlashuvchi qatorlar, cheksiz uzoqlashgan nuqta, yaqinlashuvchi qatorlar ustida amallar va qatorlarning muhim xossalarini o'rgatish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.
Pedagogik vazifalar: **y**aqinlashuvchi va uzoqlashuvchi sonli qatorlar, qator yaqinlashishing zaruruiy sharti, absolyut yaqinlashuvchi qator tushunchasi, qatorlarni qo'shish va ayirish, ikkilangan qatorlar haqida teorema, qatorlarni ko'paytirish, Koshi kriteriyasi kabi tushunchalari bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: - **y**aqinlashuvchi va uzoqlashuvchi sonli qatorlar tushunchasi; -qator yaqinlashishing zaruruiy sharti; -absolyut yaqinlashuvchi qator tushunchasi; -qatorlarni qo'shish va ayirish; - ikkilangan qatorlar haqida teorema -qatorlarni ko'paytirish; -Koshi kriteriyasi kabi tushunchalar hosil qiladi.
Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy

Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

5-mavzu. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Hosila mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari (Koshi-Riman shartlari).

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya hosilasi. 2. Analitik funksiya tushunchasi. 3. Kompleks o'zgaruvchili funksiya differensiali. 4. Hosila mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari. Koshi – Riman sharti.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad:* Kompleks o'zgaruvchili funksia orttirmasi va hosilasi tushunchasini haqiqiy o'zgaruvchili funksiya kabi kiritish, muhim farqlarni ajratish, sohada regulyar, monogen va analitik funksiya tushunchalarini berish, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning diffrernsiallanuvchanligini ta'minlaydigan zaruriy va yetarli shartlarni bayon qilish, talabaga bu tushunchalarni yetkazib berish, ularda komplek o'zgaruvchili funksiya diffrensiali, analitik, regulyar funksiyalar haqida ko'nikma hosil qilish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.
Pedagogik vazifalar: Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarni differensiallash, hosila mavjudligining	*O'quv faoliyati natijalari*: -kompleks o'zgaruvchili funksiya hosilasi; -analitik funksiya tushunchasi;

zaruriy va yetarli shartlari tushunchalari bilan tanishtirish.	-kompleks o'zgaruvchili funksiya differensiali; -hosila mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari. Koshi – Riman sharti kabi tushunchalar hosil qiladi.

Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

6-mavzu. Analitik funksiyalar. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar. Analitik funksiyani berilgan haqiqiy yoki mavhum qismining koeffitsenti bo'yicha tiklash.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar sifatida. 2. Berilgan garmonik haqiqiy yoki mavhum qismi yordamida analitik funksiyani tiklash.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad:* talabalarga analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari, garmonik funksiyalar, ularning qo'shma garmonik funksiyalar haqida tushuncha hosil qilish, qo'sma garmonik funksiya sifatida ifodalanuvchi haqiqiy yoki mavhum qismi orqali analitik funksiyani tiklash usulini o'rgatish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Pedagogik vazifalar: Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar sifatida, analitik funksiyani berilgan garmonik qismi bo'yicha tiklash tushunchalari bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar sifatida; -berilgan garmonik haqiqiy yoki mavhum qismi yordamida analitik funksiyani tiklash kabi tushunchalar hosil qiladi.
Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

7-mavzu. Bir yaproqlilik tushunchasi, Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi. Konform akslantirish.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Qoldiq tushunchasi. 2. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi. 3. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad*: Qoldiq tushunchasi. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari o'rgatish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.
Pedagogik vazifalar: qoldiq tushunchasi, qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi, qoldiqlarni hisoblash formulalari tushunchalari bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -qoldiq tushunchasi; -qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi; -qoldiqlarni hisoblash formulalari bilan tanishadilar.

Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

8-mavzu. Elementar funksiyalar (chiziqli, kasr-chiziqli, darajali), ko'rsatkichli, trigonometrik, eksponensial, logarifmik, Jukovskiy funksiyalari orqali konform akslantirish.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	4. Qoldiq tushunchasi. 5. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi. 6. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad*: Qoldiq tushunchasi. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari o'rgatish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.
Pedagogik vazifalar: qoldiq tushunchasi, qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi, qoldiqlarni hisoblash formulalari tushunchalari bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -qoldiq tushunchasi; -qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi; -qoldiqlarni hisoblash formulalari bilan tanishadilar.
Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.

Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

9-mavzu. Kompleks funksiyaning integrali. Integralning mavjudlik sharti. Integralni xisoblash. Kompleks funksiya integralining xossalari.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. To'g'rilanuvchi chiziqlar. 2. Kompleks funksiyaning integrali. 3. Integralning mavjudlik sharti. 4. Integralni hisoblash. 5. Integralning xossalari. 6. Integralning sohaning funksiyasi sifatida additivligi. 7. Integral belgisi ostida limitga o'tish va takroriy integrallarning tergligi haqidagi teoremalar.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad:* talabalarga kompleks funksiyaning integrali va uning xossalari bilan tanishtirish, integrallarni hisoblashni o'rgatish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish mantiqiy va ijodiy qobiliyatini, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Pedagogik vazifalar: Kompleks funksiyaning integrali va uning xossalari tushunchalari bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -to'g'rilanuvchi chiziqlar; -kompleks funksiyaning integrali; -integralning mavjudlik sharti; -integralni hisoblash; -integralning xossalari; -integralning sohaning funksiyasi sifatida additivligi; -integral belgisi ostida limitga o'tish va takroriy integrallarning tergligi haqidagi teoremalar kabi tushunchalar hosil qiladi.

Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

10-mavzu. Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi. Murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi. Boshlang'ich funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. Nyuton-Leybnits formulasi.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Asosiy lemma va uning isboti. 2. Oddiy kontur uchun Koshinning integral teoremasi uning isbotini soda holga keltirish. 3. Oddiy kontur uchun Koshinning integral teoremasining sodda hol uchun isboti. 4. Teorema shartlarining muhimligini ko'rsatuvchi misollar.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad: o*ddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi va uning isbotini o'rgatish, misollar yechish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Pedagogik vazifalar: oddiy kontur uchun Koshinning integral teoremasi tushunchasi bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -asosiy lemma va uning isboti; -oddiy kontur uchun Koshinning integral teoremasi uning isbotini soda holga keltirish; -oddiy kontur uchun Koshinning integral teoremasining sodda hol uchun isboti; -teorema shartlarining muhimligini ko'rsatuvchi misollar bilan tanishadilar.
Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

11-mavzu. Darajali qatorlar. Abelning birinchi teoremasi. Koshi-Adamar formulasi. Golomorf funksiyalarni Teylor qatorlariga yoyish.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Darajali kompleks qatorning yaqinlashish sohasi. Abelning birinchi teoremasi. 2. Darajali kompleks qatorning yaqinlashish doirasi. 3. Manfiymas sonlar ketma –ketligining yuqori limiti. 4. Koshi –Adamar formulasi.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad:* kompleks o'zgaruvchili funksional qatorning xususiy holidan iborat darajali qator, uning yaqinlashish sohasi, yaqinlashish radiusi haqida umumiy ma'lumotlar berish, darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish doirasi haqida tasdiqlarni o'rgatish va uni misollar orqali o'quvchiga tushuntirish bilan talabada kompleks hadli darajali qator haqida bilim va ko'nikma hosil qilish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli

	topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Pedagogik vazifalar: darajali qatorlar, Abelning birinchi teoremasi, Koshi –Adamar formulasi tushunchalari bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -darajali kompleks qatorning yaqinlashish sohasi. Abelning birinchi teoremasi; -darajali kompleks qatorning yaqinlashish doirasi; -manfiymas sonlar ketma –ketligining yuqori limiti; -Koshi –Adamar formulasi kabi tushunchalar hosil qiladi.

Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

12-mavzu. Yagonalik teoremasi. Analitik davom ettirish prinsipi. Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyish.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi. 2. Boshlang'ich funksiya mavjudligining yetarli sharti.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad:* murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi, boshlang'ich funksiya mavjudligining yetarli shartlfrini o'rgatish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi

	jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.	
Pedagogik vazifalar: murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi, boshlang'ich funksiya mavjudligining yetarli sharti tushunchalari bilan tanishtirish.		*O'quv faoliyati natijalari*: -murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi; -boshlang'ich funksiya mavjudligining yetarli sharti kabi tushunchalarni hosil qiladi.
Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.	
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy	
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.	
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.	
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.	

13-mavzu. Golomorf funksiyaning nollari. Loran qatorlari. Maxsus nuqtalar va ularning turlari.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Bir bog'lamli va ko'p bog'lamli sohalar uchun Koshining integral formulalari. 2. Analitik funksiyaning cheksiz differensiallanuvchanligi.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad: b*ir bog'lamli va ko'p bog'lamli sohalar uchun Koshining integral formulalari, analitik funksiyaning cheksiz differensiallanuvchanligi o'rgatish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini

	hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Pedagogik vazifalar: bir bog'lamli va ko'p bog'lamli sohalar uchun Koshining integral formulalari, analitik funksiyaning cheksiz differensiallanuvchanligi tushunchalari bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -bir bog'lamli va ko'p bog'lamli sohalar uchun Koshining integral formulalari; -Analitik funksiyaning cheksiz differensiallanuvchanligi kabi tushunchalarni hosil qiladi.

Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

14-mavzu. Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Bir nuqtadagi maxsuslikni yo'qotish haqidagi teorema. 2. Liuvill teoremasi. 3. Regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari va ularning xillari. 4. Butun va meromorf funksiyalar.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad:* maxsuslikni yo'qotish haqidagi teoremalar, Luivill teoremasi, regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari, butun va meromorf funksiyalarni o'rgatish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish. *c) Rivojlantiruvchi maqsad:* talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish

	hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.
Pedagogik vazifalar: Maxsuslikni yo'qotish haqidagi teoremalar, Luivill teoremasi, Regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari, butun va meromorf funksiyalar tushunchalari bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -bir nuqtadagi maxsuslikni yo'qotish haqidagi teorema; -Liuvill teoremasi; -Regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari va ularning xillari; -butun va meromorf funksiyalar kabi tushunchalarni hosil qiladi.
Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

15-mavzu. Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasini aniq integrallarni hisoblashga tadbiqi. Jordan lemmasi.

***Vaqt*: 80 minut**	***Tinglovchilar soni: 25-30***
O'quv mashg'ulotining shakli va turi	Ma'ruza
Ma'ruza rejasi	1. Loran teoremasi. 2. Loran qatorining regulyar va asosiy qismlari. 3. Loran qatorining yagonaligi.
O'quv mashg'uloti maqsadi:	*a) Ta'limiy maqsad:* Loran qatori, uning asosiy va regulyar qismi, koeffisientlari va qatorning yagonaligini o'rgatish. *b) Tarbiyaviy maqsad:* talabalarni mustaqil fikrlash va faol mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o'zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish, o'z atrofidagi jarayonlarni idrok etish va uni talqin qilishga o'rgatish hamda fanga bo'lgan qiziqishni o'stirish.

	c) Rivojlantiruvchi maqsad: talabalardagi izlanuvchanlik faoliyatini rag'batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko'nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.
Pedagogik vazifalar: Loran qatori, uning regulyar va asosiy qismlari, Loran qatorining yagonaligi tushunchalari bilan tanishtirish.	*O'quv faoliyati natijalari*: -Loran teoremasi; - Loran qatorining regulyar va asosiy qismlari; -Loran qatorining yagonaligi kabi tushunchalarni hosil qiladi.
Ta'lim usullari	Muammoli ma'ruza, namoyish yetish, savol-javob, aqliy xujum metodi.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy
Ta'lim vositalari	Ma'ruzalar matni, marker, doska, skotch slaydlar, tarqatma materiallar va qog'ozlar.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnik vositalardan foydalanishga va kichik guruhlarda ishlashga mo'ljallangan auditoriya.
Monitoring va baholash	Og'zaki so'rov: tezkor-so'rov, taqdimot, topshiriq.

5.« Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi» fani bo'yicha reyting nazoratlari grafigi

Amaliy matematika yo'nalishi uchun

Ta'lim yo'nalishi: Amaliy matematika
O'quv shakli: kunduzgi; Semestr:7.
Jami o'quv yuklama -150 soat, Ma'ruza-30 soat, Amaliy mashg'ulot -30 soat, Mustaqil ish - 90 soat.

№	Ishchi o'quv dasturidagi mavzular tartib raqami.(qo'shimcha topshiriq mazmuni)	O'quv yuklamasi					Baxolash turi	Nazorat shakli	Ball		Muddati (hafta)
		Ma'ruza	Amaliy	Laboratoriya	Mustaqil ish	Jami			Maksimal	Saralash	
1	1-8, 1-8 qo'shimcha mavzu bo'yicha referat	16	16		60	92	1-JB 1-OB	Kundalik nazorat, davomat, nazorat ishi, laboratoriya, kurs ishi, uy ishi, kollokvium Himoya Og'zaki	15 10	9 6	Oktabr 3-hafta Oktabr 3-hafta
2	9-15 9-15 amaliy topshiriq	14	14		30	58	2-JB 2-OB	Kundalik nazorat, davomat, nazorat ishi, laboratoriya, kurs ishi, uy ishi, kollokvium Himoya Og'zaki	15 10	9 6	Dekabr 2-hafta Dekabr 2-hafta
3							Ya B	Og'zaki	50	30	2024 y yanvar
3	JAMI	30	30		90	150			100	60	

6. Baholash mezonlari.

Kredit-modul tizimida talabalar bilimini baholash mezonlari

Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirining 2018-yil 9-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalarida talabalar bilimini nazorat qilish va baholash tizimi to‘g‘risidagi Nizomni tasdiqlash haqida”gi 19-2018-son buyrug‘i bilan tasdiqlangan nizom asosida belgilaniladi.

Unga ko‘ra 100 ballik tizim asosida tashkil etiladi.

1-jadval

Baholashni 5 baholik shkaladan 100 ballik shkalaga o‘tkazish JADVALI

5 baholik shkala	100 ballik shkala	5 baholik shkala	100 ballik shkala	5 baholik shkala	100 ballik shkala
5,00 — 4,96	100	4,30 — 4,26	86	3,60 — 3,56	72
4,95 — 4,91	99	4,25 — 4,21	85	3,55 — 3,51	71
4,90 — 4,86	98	4,20 — 4,16	84	3,50 — 3,46	70
4,85 — 4,81	97	4,15 — 4,11	83	3,45 — 3,41	69
4,80 — 4,76	96	4,10 — 4,06	82	3,40 — 3,36	68
4,75 — 4,71	95	4,05 — 4,01	81	3,35 — 3,31	67
4,70 — 4,66	94	4,00 — 3,96	80	3,30 — 3,26	66
4,65 — 4,61	93	3,95 — 3,91	79	3,25 — 3,21	65
4,60 — 4,56	92	3,90 — 3,86	78	3,20 — 3,16	64
4,55 — 4,51	91	3,85 — 3,81	77	3,15 — 3,11	63
4,50 — 4,46	90	3,80 — 3,76	76	3,10 — 3,06	62
4,45 — 4,41	89	3,75 — 3,71	75	3,05 — 3,01	61
4,40 — 4,36	88	3,70 — 3,66	74	3,00	60
4,35 — 4,31	87	3,65 — 3,61	73	**3,0 dan kam**	**60 dan kam**

“Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazaryasi” fani bo‘yicha talabalar bilimini baholash va nazorat mezonlari

№	Nazorat turlari	Nazorat shakli	Ajratilgan ballar		
			Eng yuqori ball	O‘tish balli	Umumiy ball
1	Joriy nazorat	Amaliyot mashg‘ulotda talabaning faolligi	20	30	20
2	Oraliq nazorat	Yozma ish yoki Test	15		30
		Mustaqil ish	15		
3	Yakuniy nazorat	Yozma ish yoki Test	50	30	50

	Jami		**100**	**60**	**100**

Izoh: Joriy va oraliq nazorat hamda mustaqil ishlarni baholash mezonlari

Talaba joriy nazoratda 4 ta topshiriq bajaradi va har bir topshiriqga misollar beriladi. Talaba 2 marta oraliq nazorat (1-oraliq 7 ball, 2-oraliq 8 ball) topshiradi. Semestr davomida talaba 2 ta mustaqil ish topshiradi (har bir mustaqil ishga mavzular beriladi).

Quyidagi holatlarda talabaga 5 ball qo‘yiladi:

-barcha savollarga to‘liq javob bersa;
-xatolarga yo‘l qo‘ymasa;
-javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa;
-fikrlar asosli va faktik ma’lumotlarga asoslangan bo‘lsa.

Quyidagi holatlarda talabaga 4 ball qo‘yiladi:

- savolga javob berish jarayonida ba’zi kamchiliklarga yo‘l qo‘ygan bo‘lsa;
- ayrim juz’iy noaniqliklarga yo‘l qo‘ygan bo‘lsa;
- o‘z fikrini asoslashda ayrim kamchiliklarga yo‘l qo‘ysa;

-bildirilgan fikrlar faktik ma’lumotlarga asoslanib berilsa;

Quyidagi holatlarda talabaga 3 ball qo‘yiladi:

- savolga javob berish jarayonida ba’zi kamchiliklarga yo‘l qo‘ygan bo‘lsa;
- ayrim juz’iy noaniqliklarga yo‘l qo‘ygan bo‘lsa;
- o‘z fikrini asoslashda ayrim kamchiliklarga yo‘l qo‘ysa;
- fikrlar asosli lekin faktik ma’lumotlarga asoslanmagan bo‘lsa;

Quyidagi holatlarda talabaga 2-0 ball qo‘yiladi:

- barcha savolga ham to‘g‘ri javob bera olmasa;
- barcha savollarga berilgan javoblar noto‘g‘ri va asossiz bo’lsa.

Yakuniy nazorat baholash mezonlari

Yakuniy nazorat yozma ish variantlari 5 ta topshiriqdan iborat bo‘lib, unda talaba har bir topshiriq uchun 10 ballik tizimda baholanadi.

1	Talaba savolga yozma va og‘zaki to‘liq javob bersa, umuman xatoga yo‘l qo‘ymasa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa.	10
2	Talaba savolga yozma va og‘zaki to‘liq javob bersa, umuman xatoga yo‘l qo‘ymasa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan asoslashda ayrim kamchiliklarga yo‘l qo‘ysa.	9
3	Talaba savolga to‘liq yozma yozsa, og‘zaki javob berishda ba’zi kamchiliklarga yo‘l qo‘ysa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa.	8
4	Talaba savolga qisman yozma yozgan, to‘liq og‘zaki javob bersa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa.	7
5	Talaba savolgato‘liq yoza olmasa, to‘liq og‘zaki javob bersa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa.	6
6	Talaba savolga to‘liq yoza olmasa to‘liq og‘zaki javob bera olmasa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘g‘ri bo‘lsa.	5
7	Talaba savolga to‘liq yoza olmasa to‘liq og‘zaki javob bera olmasa, javobi ilmiy va mantiqiy jihatdan to‘liq asoslanmagan bo‘lsa.	4
8	Talaba savolga qisman yozma javob yozgan va og‘zaki qisman javob bergan bo‘lsa, javobi mantiqiy asoslanmagan bo‘lsa.	3
9	Talaba savolga qisman yozma javob yozgan va og‘zaki umuman javob bermagan bo‘lsa, javobi mantiqiy asoslanmagan bo‘lsa.	2

10	Talaba savolga umuman yozma javob yozmagan va og‘zaki javob bermagan bo‘lsa, javobi mantiqiy asoslanmagan bo‘lsa.	1

Yakuniy nazorat test shaklida bo‘lganda har bir talabaga 25 ta test beriladi. Har bir test 2 balldan baholanadi. O‘tish bali -30 ball (15 ta test) va maksimal ball – 50 ball (25 ta test)

7.Fan bo’yicha kalendar ish reja

Kurs mazmuni

Mashg‘ulotla shakli: ma'ruza (M)

Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks sonning geometrik tasviri. Modul va argument haqidagi teorema. Muavr formulasi va n-tartibli ildiz chiqarish formulasi.

Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri. Cheksiz usoqlashgan nuqta.

Ketma-ketlikning limitik nuqtasi. Bolsano-Veyershtrass teoremasi. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari. Koshi kriteriyasi.

Uzluksizlik va tekis uzluksizlik tushunchalari. Kantor teoremasi. Geyne –Borell lemmasi.

Kompleks o’zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Hosila mavjud bo’lishining zaruriy va yetarli shartlari (Koshi-Riman shartlari).

Analitik funksiyalar. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo’shma garmonik funksiyalar. Analitik funksiyani berilgan haqiqiy yoki mavhum qismining koeffitsenti bo’yicha tiklash.

Bir yaproqlilik tushunchasi, Hosila moduli va argumentining geometrik ma’nosi. Konform akslantirish.

Elementar funksiyalar (chiziqli, kasr-chiziqli, darajali), ko’rsatkichli, trigonometrik, eksponensial, logarifmik, Jukovskiy funksiyalari orqali konform akslantirish.

Kompleks funksiyaning integrali. Integralning mavjudlik sharti. Integralni xisoblash. Kompleks funksiya integralining xossalari.

Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi. Murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi. Boshlang’ich funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. Nyuton-Leybnits formulasi.

Darajali qatorlar. Abelning birinchi teoremasi. Koshi-Adamar formulasi. Golomorf funksiyalarni Teylor qatorlariga yoyish.

Yagonalik teoremasi. Analitik davom ettirish prinsipi.

Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyish.

Golomorf funksiyaning nollari. Loran qatorlari. Maxsus nuqtalar va ularning turlari.

Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.

Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasini aniq integrallarni hisoblashga tadbiqi. Jordan lemmasi.

Mashg‘ulotlar shakli: Amaliy mashg‘ulot (A)

Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Misollar yechish.

Kompleks sonning geometrik tasviri. Kompleks sondan n-tartibli ildiz chiqarish. Misollar yechish.

Kompleks tekislikda chiziqlar va sohalar.

Kompleks o’zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi.

Kompleks o’zgaruvchili funksiya differensiallanuvchanligi. Koshi–Riman shartlari.

Garmonik funksiyalar va ularning xossalari

Elementar funksiyalar (chiziqli, kasr-chiziqli, darajali), ko’rsatkichli, trigonometrik, eksponensial, logarifmik, Jukovskiy funksiyalari orqali konform akslantirish. Misollar yechish.

Kompleks funksiyaning integrallarini hisoblash. Misollar yechish.

Koshining integral formulasi yordamida integrallarni hisoblash.

Darajali qatorlar. Koshi–Adamar formulasi.

Golomorf funksiyalarni qatorga yoyish. Teylor qatorlari

Golomorf funksiyaning nollari.

Loran qatorlari. Maxsus nuqtalar va ularning turlari

Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.

Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasini aniq integrallarni hisoblashga tadbiqi. Jordan lemmasi.

Mashg‘ulot shakli: Mustaqil ta’lim uchun tavsiya etiladigan mavzular (MT)

Stereografik proyeksiya.

Kasr chiziqli funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar.

Garmonik funksiyalar

Jukovskiy funksiyasi, darajali va ko’rsatkichli funksiyalar.

Trigonametrik funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar.

Koshi tipidagi integral.

Chegirmalar (qoldiqlar) yordamida xosmas integrallarni hisoblash

8. Mashg’ulotlarning texnologik xaritasi

1. Tashkiliy qism *(3-6 minut):* Dars xonasining darsga tayorligini va sanitariya holatini kuzatish, talabalarning davomatini qayd etish, talabalarning darsga tayyorligini tekshirish.

2.O’tilgan mavzuni mustahkamlash *(8-12 minut):* Avval o’tilgan mavzular talaba tomonidan qay darajada o’zlashtirilganligini aniqlash maqsadida sodda munozarali topshiriqlar, o’z – o’zini tekshirish savollariga javoblar olish maqsadida qisqa muddatli munozarali, jonli muloqotni amalga oshirish, individual, kichik guruhlarda yoki guru bo’yicha topshiriq berish yoxud test nazoratini amalgam oshirish. Talabalarni mavzu bo’yicha asosiy tushuncha va natijalar haqida fikr – mulohazalarni bayon qilishga o’rgatish, jonli muloqat, kichik guruhlarga bo’lish, va aqliy hujum usullaridan foydalanib, o’zlashtirishga erishish. Asosiy iboralarga alohida izoh berish va o’tilgan mavzudan tug’ilgan savollarga javob berish orqali uni mustahkamlash.

3.Yangi mavzu bayoni *(45-55 minut):* Boshqa fanlardan va ushbu fandan oldin o’tilgan bilim va ko’nikmalarga asoslangan holda, yangi mavzuning tayanch iboralariga e’tibor berib fikrlar hujumi, aqliy hujum, boomerang, kichik guruhlarga bo’lish va bahs-munozara kabi pedagogic texnologiyalarning mosini tanlash orqali yangi mavzuni bayon qilish. Undagi yangi tushunchalarni sodda misollarga tatbiq qilish, talabalarni mustaqil ishlashga yo’naltirish, bahs-munozarani qo’llab jonli muloqotni ta’minlash orqali ularni talaba ongiga yetkazish. Amaliy mashg’ulot va seminarda ma’ruzadagi tushunchalarni misol va topshiriqlarda mustahkamlash, talabalarning mustaqil ishlashini uzviy nazorat qilish bilan mavzuga oid yangi bilimlarning o’zlashtirilishiga erishish.

4. Yangi mavzuni mustahkamlash *(8-15 minut):* Talabalar bilan mavzu yuzasidan dars oxirida savol-javob o’tkazish, ulardan oson yechiladigan misollar so’rash, oson yechiladigan va qisqa muddatli test topshiriqlari so’rash va tushinilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish bilan o’tilgan mavzuni mustahkamlash.

5. Uy vazifa berish va baholash *(3-6 minut):* Mavzuni o’qish va konspekt qilishni ta’kidlash, mavzudagi tayanch iboralarni yodlash va mohiyatini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Ma’ruza darsida mavzu bo’yicha har bir talabaga test savollari tuzishni, amaliyot darsida mavzuga oid turli toifali aniq belgilangan misollarni yechishni, seminar darsida esa ma’ruza va amaliyot darslarida ochiq qoldirilgan tushunchalarni o’rganishni vazifa qilib berish tavsiya etiladi.

Dars davomida faol qatnashgan va qoniqarsiz qatnashgan talabalarni ta’kidlash va yanada faolroq bo’lishga chorlash. Qo’yilgan ballarni e’lon qilish va qayd etish.

9. Maruzalar ishlanmasi

1-mavzu: Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks sonning geometrik tasviri. Modul va argument haqidagi teorema. Muavr formulasi va n-tartibli ildiz chiqarish formulasi.

Dars rejasi:

1. Kompleks son tushunchasi.
2. Kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallari.
3. Kompleks sonlarni ayirish va bo'lish amallari.
4. Kompleks sonlarning tekislikdagi nuqtalar yoki vektorlar orqali tasvirlash.
5. Qo'shish va ayirish amallarinng geometrik ma'nosi.
6. Modul va argument haqida teorema.Muavr formulasi.
7. n -tartibli ildiz chiqarish formulasi.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1] - [14]

Dars maqsadi: Kompleks sonlar, kompleks sonlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari, kompleks sonning geometrik tasviri, kompleks sonning trigonometric va ko'rsatkichli shakli, kompleks sonning moduli va argumenti. Muavr formulasi, kompleks sondan n -darajali ildiz chiqarishni o'rgatish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *Kompleks son,qo'shish va ko'paytirish amallari, mavhum birlik, o'zaro qo'shma kompleks sonlar,kompleks sonning moduli, kompleks sonning argumenti,modul va argument haqidagi teorema, Muavr formulasi,* $n-$ *tartibli ildiz chiqarish formulasi.*

1.1. ***Kompleks son tushunchasi***.

Ta'rif 1.1. *Ma'lum bir tartibda olingan 2 ta haqiqiy sonlardan tashkil topgan* $\alpha=(a,b)=\alpha$ *juftlik kompleks son deyiladi.*

Agar b=0 bo'lsa, $\alpha=(a,0)$ deb olinadi. Demak, biz shu vaqtga qadar bilgan haqiqiy sonlar to'plami kompleks sonlar to'plamining qism to'plami bo'lar ekan.

1.2. ***Kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallari.*** Agar bizga ikkita $\alpha=(a,b)$ va $\beta=(c,d)$ kompleks sonlar berilgan bo'lsa, u holda ularning yig'indisi deb $(a+c,b+d)$ kompleks songa aytiladi va u xuddi haqiqiy sonlardagi kabi $\alpha+\beta$ kabi belgilanadi. Agar qaralgan kompleks sonlar haqiqiy son bo'lganda bu kiritilgan qo'shish amali haqiqiy sonlar arifmetikasi qo'shish amali bilan ustma-ust tushadi. Haqiqatan ham agar $\alpha=(a,0)$, $\beta=(c,0)$ bo'lsa, u holda

$$\alpha\pm\beta=(a,0)+(c,0)=(a+c,0)=a+c.$$

Ikkita $\alpha=(a,b)$ va $\beta=(c,d)$ kompleks sonlarning ko'paytmasi deb $(ac-bd,ad+bc)$ ko'rinishdagi kompleks songa aytiladi va bu son $\alpha\beta$ kabi belgilanadi. Bu holda ham agar $\alpha=(a,0)$, $\beta=(c,0)$ bo'lsa, u holda

$$\alpha\beta=(a,0)(c,0)=(ac-0,a0+0c)=ac.$$

Demak, ko'paytirish amali ham haqiqiy sonlar arifmetikasining ko'paytirish amaliga qarama-qarshi emas. Bu amallar arifmetikaning 5 ta qonuniyatiga bo'ysunadi:

a) qo'shishning kommutativligi: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

b) ko'paytirishning kommutativligi: $\alpha\beta=\beta\alpha$;

c) qo'shishning assosiativligi: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$;

d) ko'paytirishning assosiativligi: $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$;

e) ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi, ya'ni taqsimot qonuni: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar bajarish jarayonida quyidagi son muhim ahamiyatga ega: bu $i=(0,1)$ sondir. Bu sonning kvadratini hisoblaymiz: $i^2=(0,1)(0,1)=(0-1,0)=-1$. Demak, $i=\sqrt{-1}$. Bu son mavhum birlik deb ataladi. Qo'shish va ko'paytirish amallarining kiritilishidan foydalanib har qanday kompleks sonni quyidagi shaklda yozish mumkin:

$$\alpha=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi.$$

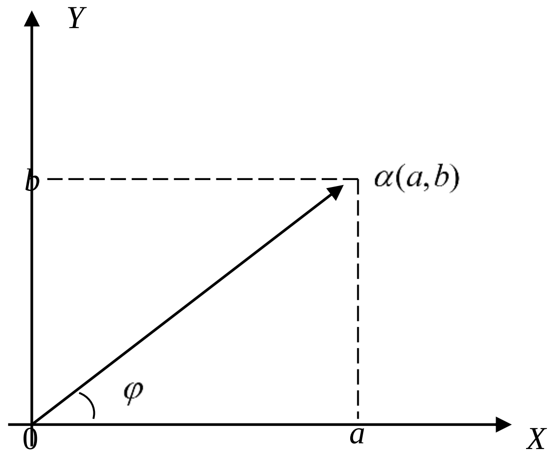
Kompleks sonning bu tasviri odatda uning *algebraik ko'rinishi* deyiladi. a haqiqiy songa α komnpleks sonning haqiqiy qismi, b ga esa mavhum qismining koeffisienti deyiladi va mos ravishda quyidagicha belgilanadi: $a=\operatorname{Re}\alpha$, $b=\operatorname{Im}\alpha$.

Ikkita kompleks sonlar $\alpha=a+bi$ va $\beta=c+di$ teng bo'lishi uchun $a=c$, $b=d$ bo'lishi zarur va etarli,ya'ni $\alpha=\beta\Leftrightarrow a=c, b=d$. Agar kompleks sonlarning haqiqiy qismlari teng bo'lib, mavhum qismlari faqat ishorasi bilan farq qilsa, u holda ular o'zaro qo'shma kompleks sonlar deyiladi va $\alpha=a+bi$ va $\overline{\alpha}=a-bi$ kabi belgilanadi. Bu yerdan $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2$.

1.3. ***Kompleks sonlarni ayirish va bo'lish amallari.*** Bu amallarni mos ravishda qo'shish va ko'paytirish amallariga teskari amallar sifatida aniqlaymiz. $\beta=c+di$ sondan $\alpha=a+bi$ sonning ayirmasi deb shunday z kompleks songa aytamizki, u $\alpha+z=\beta$ tenglikni qanoatlantirsin. Bu tenglikning ikkala tomoniga ($-\alpha$) ni qo'shsak, $z=\beta+(-\alpha)=(c-a)+(d-b)i$ tenglik hosil bo'ladi.

$\alpha\neq 0$ uchun $\frac{1}{\alpha}$ nimadan iborat? Avval shu amalni aniqlaymiz. $\alpha\neq 0$ bo'lganda $\frac{1}{\alpha}$ deb shunaqa z kompleks songa aytamizki, u quyidagi munosabatni qanoatlantirsin: $\alpha\cdot z=1$. Bu tenglikning ikkala tomonini $\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}$ ga ko'paytirsak, $z=\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}$ ni hosil qilamiz, ya'ni $\frac{1}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}$. U holda $\alpha\neq 0$ bo'lganda β ning α ga bo'lish amalini $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\beta$ kabi aniqlaymiz. Demak, bo'lish amalini bajarish uchun kasrning surat va maxrajini maxrajning qo'shmasiga ko'paytirish kerak ekan. Har bir kompleks sonni noldan farqli istalgan kompleks songa bo'lish mumkin. Natijada yagona kompleks son hosil bo'ladi.

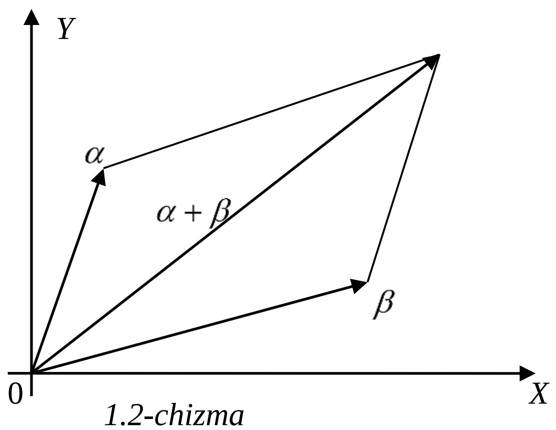
1.4.Kompleks sonlarning tekislikdagi nuqtalar yoki vektorlar orqali tasvirlash. Dekart koordinatalar sistemasida har bir $\alpha=a+bi$ kompleks sonni koordinatalari a va b lardan iborat $\alpha=(a,b)$ nuqta orqali tasvirlash mumkin. Agar tekislikda (a,b) nuqta berilgan bo'lsa, u holda unga yagona $a+bi$ sonni mos qo'yish mumkin. Demak, barcha kompleks sonlar to'plami va tekislikning barcha nuqtalari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin. Bunday moslikda haqiqiy sonlarga OX o'qining nuqtalari, sof mavhum sonlarga esa OY o'qining nuqtalari mos kelgani uchun OX o'qi haqiqiy o'q, OY o'qi esa mavhum o'q deb aytiladi. Nuqtalari kompleks sonlarni tasvirlovchi tekislikka kompleks sonli tekislik yoki qisqacha kompleks tekislik deb aytiladi va C bilan belgilanadi. Koordinata boshi 0 sonni tasvirlagani uchun u nol nuqta deb aytiladi. Bundan tashqari, har bir kompleks $\alpha=a+bi$ songa $O(0,0)$ nuqtadan chiquvchi va $\alpha(a,b)$ nuqtaga boruvchi $\vec{\alpha}(a,b)$ vektorni ham mos qo'yish mumkin. Bunday moslik ham o'zaro bir qiymatli bo'ladi. Bu vektorning $r=\sqrt{a^2+b^2}$ uzunligiga α kompleks sonning moduli deyiladi va $|\alpha|=r=\sqrt{a^2+b^2}$ kabi belgilanadi: (1.1-chizmaga qarang)



1.1-chizma

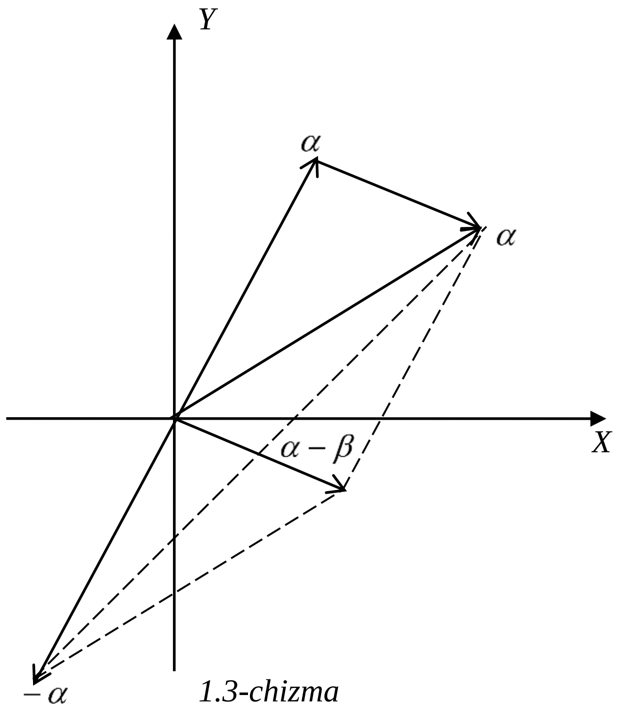
Bu vektorning haqiqiy o'qning musbat qismi bilan tashkil qilgan φ burchagiga α kompleks sonning argumenti deyiladi va $Arg\alpha$ kabi belgilanadi. Argumentning $0\le\varphi<2\pi$ qiymati uning bosh qiymati deb aytiladi va $\arg\alpha$ kabi belgilanadi.U holda $Arg\alpha=\arg\alpha+2\pi k$ .1-chizmadan $a=r\cos\varphi, b=r\sin\varphi$ ni olamiz. U holda har bir kompleks $\alpha=a+bi$ sonni $\alpha=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Kompleks sonning bu ko'rinishi uning *trigometrik shakli* deyiladi.

1.5. ***Qo'shish va ayirish amallarinng geometrik ma'nosi.*** Faraz qilaylik, bizga 2 ta $\alpha=a+bi, \beta=c+di$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin, u holda ularning yig'indisi $\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$ bo'ladi.Kompleks sonlarning yig'indisiga $\vec{\alpha}$ va $\vec{\beta}$ vektorlarning yig'indisi mos keladi,ya'ni tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bilan ustma-ust tushuvchi va tomonlarining uzunliklari mos ravishda $|\vec{a}|$ va $|\vec{b}|$lardan iborat bo'lgan parallelogramning dioganali mos keladi(2-chizmaga qarang.).



1.2-chizma

$\beta-\alpha=\beta+(-\alpha)$ deb olsak va $\vec{\beta}$ va $(-\vec{\alpha})$ vektorlarni qo'shsak, $\beta-\alpha$ ayirmaga α nuqtadan chiquvchi va β nuqtaga boruvchi vektor mos kelishiga ishonch hosil qilamiz.Demak, $|\beta-\alpha|$ - α va β vektorlar orasidagi masofadan iborat bo'lar ekan (3-chizmaga qarang).



1.3-chizma

1.6. ***Modul va argument haqidagi teorema.*** Bizga ikkita α va β kompleks sonlar quyidagi trigonometrik shaklda berilgan bo'lsin:

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \beta=\rho(\cos\psi+i\sin\psi).$$

U holda ularni ko'paytirib quyidagi tenglikni olamiz:

$$\alpha\beta=r\rho[(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)+i(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi)]=r\rho[\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)].$$

Bundan $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$, $Arg(\alpha\beta)=Arg\alpha+Arg\beta$ ekanligiga, yani quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

Teorema-1.1. *Ikkita kompleks sonlar ko'paytmasining moduli ular modullarining ko'paytmasiga, argumenti esa ular argumentlarining yig'indisiga teng.*

Bu modul va argument haqidagi teoremadir. Matematik induksiya usuli orqali oson ko'rsatish mumkinki, ushbu teorema tasdig'i ko'paytuvchilar soni n $(n\geq 2)$ cheklita bo'lganda ham o'rinlidir:

$$|\alpha\beta\cdots\gamma|=|\alpha||\beta|\cdots|\gamma| \qquad \text{va} \qquad Arg(\alpha\beta\cdots\gamma)=Arg\alpha+Arg\beta+\cdots+Arg\gamma.$$

Agar bu munosabatlarda ko'paytuvchilarning soni n ta bo'lib, ularning hammasi bir biriga teng bo'lsa, u holda $|\alpha^n|=|\alpha|^n$, $Arg\alpha^n=nArg\alpha$ kelib chiqadi. Agar $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ shaklida berilgan bo'lsa, u holda yuqorida aytilganlardan

$$\alpha^n=[r(\cos\varphi+isi\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \qquad (1.1)$$

hosil bo'ladi. Odatda (1.1) ga *Muavr formulasi* deyiladi va u kompleks sonni darajaga ko'tarish amalini ifodalaydi.

1.7. Kompleks sondan n -tartibli ildiz chiqarish formulasi. n -tartibli ildiz chiqarish amalini n -darajaga ko’tarish amaliga nisbatan teskari amal sifatida aniqlaymiz: $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sonning n -tartibli $\sqrt[n]{\alpha}$ ildizi deb n -darajaga ko’targanda α hosil bo’ladigan $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ kompleks songa aytiladiki, yani $z^n = \alpha$. U holda (1.1) formulaga ko’ra

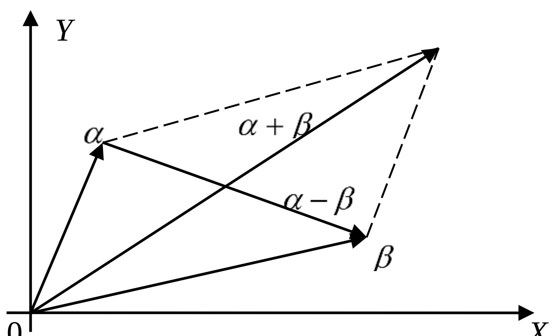
$$z^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ ,$$

Bundan $\rho^n = r$ va $n\psi = \varphi + 2\pi k,$ yoki $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in Z$, ya’ni

$$z_k = \sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}). \qquad (1.2)$$

Bu formulada ildizning n ta har xil qiymatlarini topish uchun $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ deb olish kifoya.

Yana modul va argument haqidagi teoremani $\alpha\dfrac{\beta}{\alpha} = \beta$ ko’paytma uchun qo’llasak, $|\alpha|\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = |\beta|$, yoki $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \dfrac{|\beta|}{|\alpha|}$ va $Arg\alpha + Arg\dfrac{\beta}{\alpha} = Arg\beta$, yoki $Arg\dfrac{\beta}{\alpha} = Arg\beta - Arg\beta\alpha$ munosabatlarni hosil qilamiz. Quyidagi 4-chizmada uchburchak tomonlari orasidagi ma’lum munosabatlardan foydalanib, $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ va $|\alpha - \beta| \ge \big||\alpha| - |\beta|\big| \ge |\alpha| - |\beta|$ tengsizliklarni olamiz.



1.4-chizma

Yangi mavzuni mustahkamlash *(10 minut):* Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o’tkazish, oson yechiladigan misollar so’rash, tushinilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifasini berish va baholash *(5 minut):* Mavzuni o’qish va konspekt qilish, mavzudagi tayanch iboralarni yodlash va mohiyatini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan va qoniqarsiz qatnashgan talabalarni ta’kidlash va yanada faolroq bo’lishga chorlash. Qo’yilgan ballarni e’lon qilish.

1-mavzu bo’yicha o’z-o’zini tekshirish savollari

1. Kompleks son ta’rifini ayting
2. Kompleks sonlarni qo’shish va ayirish amallarini keltiring.
3. Kompleks sonlarni ko’paytirish amallarini keltiring.

4. Kompleks son haqiqiy qismi, mavhum qismi deb nimaga aytiladi va u qanday belgilanadi?.
5. Kompleks sonning geometrik tasviri deganda nimani tushinasiz?
6. Kompleks sonning moduli va argument nima va ular qanday belgilanadi?
7. Ko'paytmaning moduli va argumenti ko'paytuvchilarning modullari va argumentlari orqali qanday ifodalanadi?
8. Muavr formulasini yozing.
9. Kompleks sonning n -tartibli ildizi den nimaga aytiladi?

2-mavzu: Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri. Cheksiz usoqlashgan nuqta.

Dars rejasi:

4. Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri.
5. Steriografik proyeksiya formulalari.
6. Steriografik proyeksiyaning ososiy xossasi.

Mavzu bo’yicha adabiyotlar: [1], [2], [5], [6], [8]

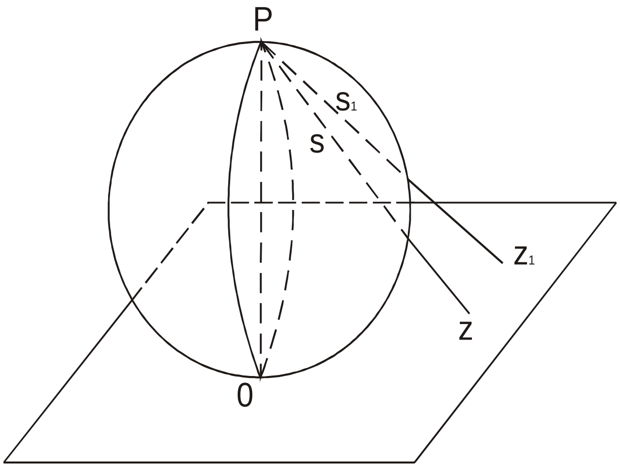
Dars maqsadlari: O’quvchida kompleks sonlar tekisligi, cheksiz uzoqlashgan nuqta haqida bilim hosil qilish, kompleks sonlar tekisligi va chekli radiusga ega bo’lgan Riman sferasi nuqtalari orasida o’zaro bir qiymatli moslik o’rnatish ko’nikmasini hosil qilish hamda uning xossalarini o’rgatish mavzuning asosiy maqsadi hisoblanadi.

Mavzu bo’yicha tayanch iboralar: *Cheksizga intiluvchi ketma –ketlik, sferaning qutbi, steriografik proyeksiya, Riman sferasi, cheksiz uzoqlashgan nuqta, kengaytirilgan kompleks tekislik, steriografik proeksiya formulalari, steriografik proyeksiyada aylana aksi haqidagi teorema.*

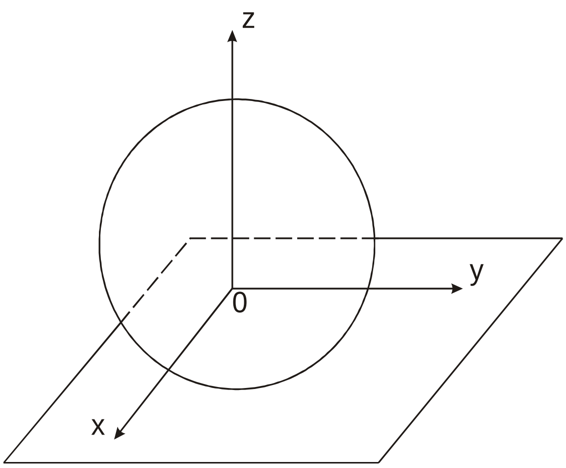
1 . Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri. Biz natural sonlar ketma-ketligi $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ misolida ko’rishimiz mumkinki, chegaralanmagan va chekli limitik nuqtaga ega bo’lmagan ketma –ketliklar mavjuddir. Bunday ketma– ketliklar cheksizga intiladi deb aytamiz va bu munosabatni

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \tag{2.1}$$

kabi belgilaymiz. (2.1) munosabat $\{z_n\}$ ketma – ketlikning chekli limitik nuqtaga ega emasligini ifodalaydi. Bu munosabatni geometrik jihatdan tushuntirish uchun ketma – ketlik sonlarini sfera nuqtalari bilan tasvirlaymiz. Shu maqsadda XOY tekislikning markazi O nuqtaga urinuvchi sfera olamiz.



3.1-chizma



3.2-chizma

Shu O nuqtadan chiquvchi tekislikka perpendikulyar sferaning diametri sferani biror P nuqtada kesib o’tadi. Sferaning bu nuqtasini uning qutbi deb ataymiz. Ma’lumki, har bir $z = x + iy$ kompleks songa kompleks tekislikda aniq bir $z(x, y)$ nuqta mos keladi. Bu nuqtani P nuqta bilan P_z to’g’ri chiziq kesmasi orqali tutashtiramiz. P_z kesma sferani biror S nuqtada kesadi. Bu nuqtani $z = x + iy$ nuqtaning sferadagi tasviri sifatida qabul qilamiz. Va aksincha, agar sferaning $S_1 \neq P$ nuqtasini P sfera qutbi bilan tutashtiruvchi nurni tekislik bilan kesishguncha davom ettirsak, u holda tekislikda qandaydir Z_1 nuqtani hosil qilamizki, uni tekislikning S_1 nuqtaga mos nuqtasi sifatida qabul qilamiz. Natijada kompleks sonlar tekisligigining barcha nuqtalari va sferaning barcha nuqtalari (uning qutbidan tashqari) o'rtasida o'zaro bir qiymatli uzluksiz moslik o'rnatiladi.

Endi P nuqtaning sfera boshqa nuqtalari bilan munosabatini qaraymiz. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ bo'lsa, u holda z_n nuqtalarning sferadagi tasvirlari shunaqa S_n nuqtalardan iboratki, $n \to \infty$ da bu nuqtalar P nuqtaga yaqinlashadi. Bundan ko'rinadiki , cheksiz uzoqlashgan nuqtaning sferadagi tasviri sifatida P nuqtani olish tabiiy va P nuqtaga mos tekislikning yagona nuqtasi cheksiz uzoqlashgan nuqta deb aytiladi. Shunday qilib, tekislikning cheksiz uzoqlashgan nuqtasi bilan birga barcha nuqtalari va sferaning barcha nuqtalari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin ekan. Bunday moslik steriografik proeksiya deb aytiladi.

Nuqtalari barcha kompleks sonlar va cheksizni ifodalovchi sfera Riman sferasi deyiladi.

Kompleks sonlar va cheksizning sferada tasvirlashning afzalligi tekislik yagona cheksiz uzoqlashgan nuqtasining ravshan ifodalanishidir. Agar sfera P nuqtasining atrofi deb, uning P nuqtani saqlovchi va OP diametrga perpendikulyar tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan qismini olsak, u holda cheksiz uzoqlashgan nuqtaning atrofi uning steriografik proyeksiyasidan , ya'ni markazi O nuqtada bo'lgan biror doiraning tashqarisidan iborat bo'ladi. Cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofi tushunchasini kiritgandan so'ng, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ munosabatni geoometrik jihatdan chekli nuqtaga intilish kabi ifodalash mumkin: agar cheksiz uzoqlashgan nuqtaning ixtiyoriy atrofida $z_1, z_2, z_3, ..., z_n, \ldots$ketma –ketlikning chekli sondagi nuqtalaridan tashqari barcha nuqtalari yotsa , u holda $\{z_n\}$ ketma – ketlik cheksiz uzoqlashgan nuqtaga yaqinlashadi deb aytamiz.

Kelgusida z orqali tekislikning ixtiyoriy nuqtasini belgilaymiz. Bu tekislikni kompleks o'zgaruvchi tekisligi, yoki qisqacha kompleks tekislik deb ataymiz va C kabi belgilaymiz. Kompleks tekislik cheksiz uzoqlashgan nuqta bilan birgalikda kengaytirilgan kompleks tekislik deyiladi va $\overline{C}$ belgilanadi.

Cheksiz uzoqlashgan nuqta O nuqta kabi aniq argumentga ega emas.

3.2. Steriografik proyeksiya formulalari. Bu qismda biz kompleks son komponentlari yoki koordinatalari orqali sferadagi mos nuqta koordinatalarini topish va unga teskari masalani yechish bilan shug'ullanamiz. Buning uchun $O\xi\eta\zeta$ fazoviy koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, $O\xi$ va $O\eta$ o'qlar tekislikning OX va OY o'qlari bilan ustma-ust tushadigan qilib, hamda $O\zeta$ o'qni esa OP diametr yo'nalishi bo'yicha olamiz. Soddalik uchun OP diametr uzunligini birlik sifatida qabul qilamiz. U holda sfera markazi $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ nuqtadan va radiusi $r = \frac{1}{2}$ dan iborat bo'ladi. Agar sfera nuqtasini (ξ,η,ζ) deb olsak, u holda bu nuqta quyidagi tenglamani qanoatlantiradi (3.2- chizmaga qarang):

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \quad \text{yoki} \quad \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta) \tag{3.2}$$

Ushbu (0,0,1), ((ξ,η,ζ)) va $(x, y, 0)$ nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotadi. Shuning uchun bu nuqtalar quyidagi munosabatlarni qanoatlantirishi kerak:

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}$$

Bu yerdan

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta} \quad \text{va} \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta} \tag{3.3}$$

Formulalar kelib chiqadi. Ulardan foydalanib z ni tiklaymiz:

$$z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}, \tag{3.4}$$

va (3.2) ga ko'ra

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta}{1-\zeta}. \tag{3.5}$$

(3.3) va (3.4) formulalar z nuqta yoki z kompleks son koordinatalarini sferaning mos nuqtasi koordinatalari orqali ifodalaydi. Endi teskari formulalarni keltirib chiqaramiz. (3.5) formuladan ζ ni topamiz:

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

ξ ning bu ifodasini (3.3) ga qo'yib,

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \tag{3.6}$$

formulalarni hosil qilamiz. (3.6) formulalar sfera nuqtasi koordinatalarini z kompleks son koordinatalari orqali ifodalaydi. Shunday qilib 3.2-qismga qo'yilgan masala to'la yechildi.

3.3. Steriografik proyeksiyaning asosiy xossasi.

Teorema-3.1. *Steriografik proyeksiyada tekislikning har bir aylanasi sferaning aylanasiga o'tadi va aksincha.*

Bu yerda aylana tushunchasi keng ma'noda, ya'ni to'g'ri chiziqlni radiusi cheksizga teng aylanadan iborat deb tushunish kerak.

Isbot. Tekislikdagi ixtiyoriy aylana quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \tag{3.7}$$

Bu yerda A, B, C, D ixtiyoriy haqiqiy sonlardan iborat. Agar $A = 0$ bo'lsa, u holda aylana to'g'ri chiziqqa aylanadi. Steriografik proyeksiyada (3.7) aylananing aksini topish uchun x, y o'zgaruvchilarni ularning (3.3) va (3.5) ifodalari bilan almashtiramiz:

$$\frac{A\zeta}{1-\zeta} + \frac{B\xi}{1-\zeta} + \frac{C\eta}{1-\zeta} + D = 0,$$

bu yerdan

$$\mathrm{B}\xi + C\eta + (A - D)\zeta + D = 0 \tag{3.8}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu chiziqli tenglama bo'lib, fazoda tekislikni ifodalaydi, ya'ni sferadagi mos $S(\xi, \eta, \zeta)$ nuqtaning koordinatalari ikkita (3.2) sfera tenglamasini hamda (3.8) tekislik tenglamasini qanoatlantiradi. Bu yerdan ko'rinadiki, tekislik aylanasining aksi (3.2) sfera va (3.8) tekislikning kesishmasi, ya'ni sfera aylanasidan iborat. Tekislikning to'g'ri chizig'iga sferaning P nuqtadan o'tuvchi aylanasi mos keladi. Chunki, agar (3.8) da $A = 0$ bo'lsa, u holda $(0,0,1)$ nuqta bu tenglamani qanoatlantiradi. Bu moslik geometrik nuqtai nazardan ham ravshandir. Chunki, tekislikning cheksiz uzoqlashgan nuqtasiga sferaning P qutbi mos keladi. Aksincha, agar sferaning ixtiyoriy aylanasi berilgan bo'lsa , u holda A, B, C, D sonlarning ixtiyorligidan foydalanib, uni sfera bilan kesishish natijasida hosil qiluvchi tekislikning tenglamasini (3.8) shaklda ifodalash mumkin va shu tenglamaga ξ, η, ζ larning (3.6) ifodalarini qo'ysak, (3.7) tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama esa tekislikda keng ma'noda tushuniladigan aylanani ifodalaydi. *Teorema-3.1 isbot bo'ldi.*

Yangi mavzuni mustahkamlash *(10 minut):* Talabalar bilan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushinilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifa berish va baholash *(5 minut):* Mavzuni o'qish va konspekt qilish, mavzudagi tayanch iboralarni yodlash va mohiyatini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan va qoniqarsiz qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

2-mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Cheksiz uzoqlashgan nuqta deganda nimani tushunasiz?
2. Riman sferasi nima?
3. Steriografik proyeksiyaning asosiy mohiyati va afzalligi nimadan iborat?
4. Kompleks sonlarni sfera nuqtalari bilan, tasvirlashning afzalligi nimada?
5. Cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofi nima?
6. Steriografik proyeksiya formulalari nima va ular qanday isbotlanadi?
7. Steriografik proyeksiyaning asosiy xossasi nimadan iborat va qanday isbotlanadi?

3-mavzu: Ketma-ketlikning limitik nuqtasi. Bolsano-Veyershtrass teoremasi. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari. Koshi kriteriyasi.

Dars rejasi:

8. Kompleks sonlar limitlari nazariyasining asosiy prinsipi.
9. Kompleks sonli ketma-ketlikning limitik nuqtasi tushunchasi.
10. Chegaralangan va chegaralanmagan kompleks sonli ketma-ketliklar.
11. Bolsano-Veyershtrass teoremasi.
12. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik tushunchasi.
13. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari.
14. Koshi alomati.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1] - [14]

Dars maqsadlari: O'quvchining matematik analiz kursidan o'zlashtirgan haqiqiy sonlar ketma-ketligiga oid bilimlarini kompleks hadli ketma-ketliklar, chegaralanganlik, yaqinlashish hamda uzoqlashuvchi ketma-ketliklar, ularmning xossalari kabi bilimlar bilan boyitish. Ketma-ketliklarning yaqinlashish tushunchalari bilan tanishtirish, ularning haqiqiy sonlar ketma-ketligidan farqli va o'xshash jihatlarini ajratishga o'rgatish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *Kompleks sonlar limitlari nazariyasining asosiy prinsipi, kompleks sonli ketma-ketlikning limitik nuqtasi, nuqta atrofi, chegaralangan va chegaralanmagan kompleks sonli ketma-ketliklar, yaqinlashuvchi kompleks sonli ketma-ketlik, Koshi alomati.*

2.1.Kompleks sonlar limitlari nazariyasining asosiy prinsipi. Haqiqiy sonlar limiti nazariyasini quyidagi prinsip asosida qurish mumkin. Bizga $n \to \infty$ da uzunliklari nolga intiluvchi va har biri keyingisini o'z ichiga olgan

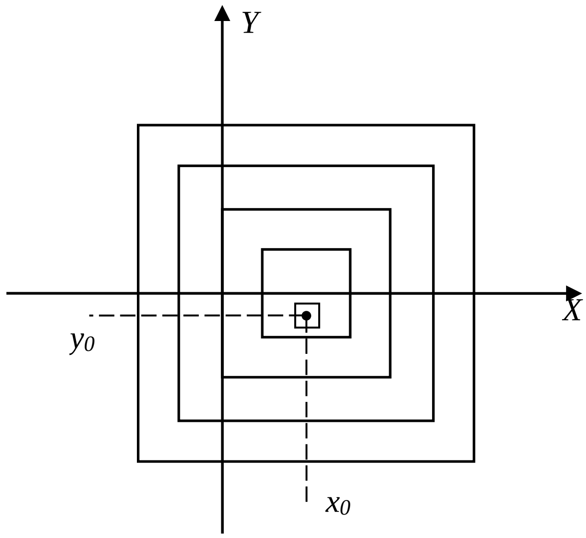
$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \cdots \tag{2.1}$$

haqiqiy o'q kesmalaridan iborat ketma-ketlik berilgan bo'lsa, u holda son o'qining yagona x_0 nuqtasi mavjudki,u barcha i_n kesmalarga qarashli bo'ladi, ya'ni $x_0 \in i_n, \ \forall n \in N$.

Teorema-2.1. *Faraz qilaylik bizga*

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \cdots \tag{2.2}$$

tomonlari koordinata o'qlariga parallel, har biri keyingisini o'z ichida saqlagan va dioganallarining uzunliklari $n \to \infty$ da nolga intilib boruvchi to'g'ri to'rtburchaklar ketma-ketligi berilgan bo'lsa, u holda tekislikning yagona z_0 nuqtasi mavjudki, u (2.2) ketma-ketlikning barcha to'rtburchaklariga qarashli bo'ladi, ya'ni $\exists \ z_0 \in C, \forall n \in N, z_0 \in r_n$ *(2.1-chizmaga qarang.)*



2.1-chizma

Isbot. (2.2) to'g'ri to'rtburchaklarning haqiqiy va mavhum o'qlardagi proeksiyalarini

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \cdots$$
$$j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots$$

bilan belgilaymiz. U holda teorema shartiga ko'ra i_n va j_n oraliqlarning uzunliklari ham $n \to \infty$ da nolga intilgani uchun yuqoridagi mulohazalarga asosan haqiqiy o'qda yotuvchi yagona x_0 nuqta va mavhum o'qda yotuvchi yagona y_0 nuqta mavjudki, ular bir vaqtda i_n va j_n kesmalarning barchasiga qarashli bo'ladi, ya'ni $\forall n$ uchun $x_0 \in i_n, y_0 \in j_n$. U holda $\forall n$ uchun $z_0 = x_0 + iy_0 \in r_n$ va bu z_0 nuqta ham yagonadir. *Teorema-2.1 isbot bo'ldi.*

Bu prinsip kompleks sonli ketma-ketlik limitlari nazariyasining asosiy prinsipi deyiladi.

2.2. *Kompleks sonli ketma-ketlikning limitik nuqtasi tushunchasi*. Faraz qilaylik, har biri kompleks sondan iborat

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \tag{2.3}$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Ta'rif-2.1. *Agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun $|z_n - z| < \varepsilon$ tengsizlik n ning biror natural sondan katta cheksiz ko'p qiymatlari uchun bajarilsa, u holda z kompleks son (2.3) ketma-ketlikning limitik nuqtasi (soni) deyiladi.*

Odatda $U_\varepsilon(z) = \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}$ nuqtalar to'plami (doira) z nuqtaning ε atrofi deyiladi.

Endi bu ta'rifni geometrik nuqtai nazardan quyidagicha ayta olamiz: z nuqtaning har qancha kichik atrofini olmaylik, unda (2.3) ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari yotsa, u holda z nuqta (2.3) ketma-ketlikning limit nuqtasi deyiladi.

Misol 2.1. $1, -1, 1, -1, \cdots$ ketma-ketlikning limitik sonlari (nuqtalari) ikkita. Bu 1 va -1 sonlardir. Chunki 1 va -1 nuqtalarning ixtiyoriy atrofida mos ravishda cheksiz ko'p sondagi 1 va -1 nuqtalar yotadi.

Misol 2.2. $z_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1} + i\dfrac{n^2}{n^2+2}$ ketma-ketlik ham ikkita $1+i, -1+i$ limitik nuqtalarga ega.

2.3. Chegaralangan va chegaralanmagan kompleks sonli ketma-ketliklar.

Ta'rif-2.2. *Biror* $M > 0$ *son topilib, barcha* $n \in N$ *natural sonlar uchun* $|z_n| < M$ *tengsizlik bajarilsa, u holda (2.3) ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.*

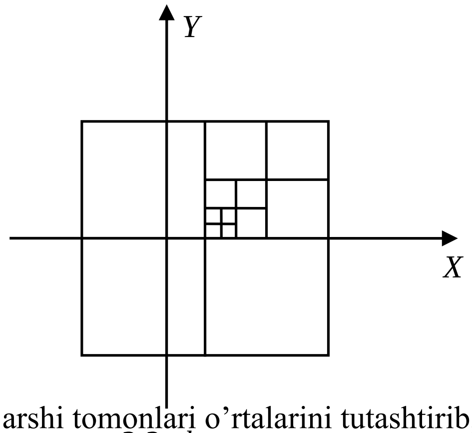
Geometrik nuqtai nazardan (2.3) kompleks sonlar ketma-ketligining chegaralangan bo'lishi uchun uning barcha hadlari markazi nol nuqtada yotuvchi biror M radiusli ochiq doiraga qarashli ekanligini bildiradi.

Agar musbat M sonning qanday bo'lishidan qat'iy nazar (2.3) ketma-ketlikning hech bo'lmaganda bitta z_{n_0} nuqtasi topilib, $|z_{n_0}| > M$ tengsizlik bajarilsa, ya'ni z_{n_0} nuqta $|z| < M$ doiraning tashqarisida yotsa, u holda (2.3) ketma-ketlik chegaralanmagan deyiladi.

2.4.Bolsano-Veyershtrass teoremasi.

Teorema-2.2. *Har qanday chegaralangan cheksiz ketma-ketlik hech bo'lmaganda bitta limitik nuqtaga ega.*

Isbot. Teorema shartlari bajarilsa (2.3) ketma-ketlik hadlarini tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan biror r_1 kvadratning ichiga joylashtirish mumkin (2.2-chizmaga qarang).



Bu kvadratning qarama-qarshi tomonlari o'rtalarini tutashtirib, uni to'rtta kongurent kvadratlarga bo'lish mumkin.Ulardan hech bo'lmaganda bittasida (2.3) ketma-ketlikning cheksiz ko'p nuqtalari yotadi. Bu bo'lakni r_2 bilan belgilaymiz va yuqoridagidek to'rtta teng qismlarga ajratamiz.Y angi bo'laklarning hech bo'lmaganda bittasida (2.3) ketma-ketlikning cheksiz ko'p nuqtalari yotadi. Uni r_3 bilan belgilab, bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz. Natijada har biri keyingisini o'z ichida saqlovchi, dioganallari uzunliklari $n \to \infty$ da nolga intiluvchi kvadratlar ketma-ketligi $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ hosil bo'ladi. Limitlar nazariyasining asosiy prinsipga ko'ra tekislikning yagona z_0 nuqtasi mavjudki, u barcha kvadratlarga bir vaqtda qarashli bo'ladi. Shu nuqta (2.3) ketma-ketlikning limitik nuqtasi bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun $\forall \varepsilon > 0$ son uchun z_0 nuqtaning $U_\varepsilon(z) = \{z \in C : |z - z_0| < \varepsilon\}$ atrofini olamiz. r_n kvadratlarning tuzilishidan ma'lumki, $n \to \infty$ ular z_0 nuqtaga cheksiz tortilib boradi va yetarlicha katta indeksli r_n kvadratlarning barchasi $U_\varepsilon(z)$ atrofda joylashadi. Ularning har biri (2.3) ketma-ketlikning cheksiz ko'p nuqtalarini saqlagani uchun $U_\varepsilon(z)$ atrofda ham (2.3) ketma-ketlikning cheksiz ko'p nuqtalari joylashadi.Demak, z_0 nuqta (2.3) ketma-ketlikning limitik nuqtasi bo'ladi. *2.2-Teorema isbot bo'ldi.*

2.2-chzma

Bolsano-Veyershtras teoremasidan chegaralangan cheksiz ketma-ketlikning hech bo'lmaganda bitta limitik nuqtaga ega bo'lishi kelib chiqadi.

2.5.Yaqinlashuvchi ketma-ketlik tushunchasi. Agar (2.3) ketma-ketlikning limitik nuqtasi yagona bo'lsa, u holda u yaqinlashuvchi deyiladi.Ya'ni (2.3) ketma-ketlikning nuqtalari bitta nuqta atrofida to'plansa, bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi. Shunday qilib, chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun u yagona limitik nuqtaga ega bo'lishi lozim, ya'ni $\forall \varepsilon > 0$ son

uchun $\exists N = N(\varepsilon)$ nomer topilib, $\forall n > N$ lar uchun $|z_n - z| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa u holda (2.3) ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti z ga teng deyiladi hamda $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ kabi belgilanadi.
Geometrik nuqtai nazardan bu ta'rifni quyidagicha ifodalash mumkin: z nuqtaning har qanday $\varepsilon > 0$ atrofida (2.3) ketma-ketlikning ma'lum nomerdan boshlab barcha nuqtalari yotsa, u holda u z nuqtaga intiladi deyiladi.

2.6. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari. Faraz qilaylik, bizga ikkita

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \tag{2.3}$$

va

$$z'_1, z'_2, \dots z'_n \dots \tag{2.4}$$

kompleks sonli ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketliklardan foydalanib quyidagi

$$w_1, w_2, \dots, w_n, \dots \tag{2.5}$$

kompleks sonlar ketma-ketligini tuzamiz. Bu yerda

$$w_n = z_n \pm z'_n$$

yoki

$$w_n = z_n z'_n$$

yoki

$$w_n = \frac{z_n}{z'_n}, z'_n \neq 0 \ \forall n = 1,2,\dots.$$

Agar (2.3) va (2.4) ketma-ketliklar mos ravishda z_0, z'_0 limitlarga intilsa, u holda (2.5) ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti mos ravishda

$$w_0 = z_0 \pm z'_0, w_0 = z_0 z'_0, w_0 = \frac{z_0}{z'_0}, (z'_0 \neq 0)$$

ga teng boladi. Boshqacha aytganda,

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm z'_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} z'_n, \quad \lim_{n\to\infty} z_n z'_n = \lim_{n\to\infty} z_n \lim_{n\to\infty} z'_n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z'_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z'_n} \ (z'_n \neq 0).$$

Bu teoremalarning isboti haqiqiy sonlar limitlari nazariyasidagi xuddi shu kabi teoremalar isboti kabidir.

2.7.Koshi alomati. Faraz qilaylik, bizga

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \tag{2.3}$$

kompleks sonli ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Teorema-2.3. (Koshi alomati). *(2.3) ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun* $\forall \varepsilon > 0$ *son uchun shunaqa* $N = N(\varepsilon)$ *nomer topilib, barcha* $m = 1,2,3...$ *natural sonlar uchun*

$$|z_{N+m} - z_N| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va etarlidir.

Geometrik nuqtai nazardan bu teoremani quyidagicha bayon qilish mumkin: *(2.3) nuqtalar ketma-ketligining yaqinlashuvchi bo'lishi uchun* $\forall \varepsilon > 0$ *son uchun shunaqa* $N = N(\varepsilon)$ *nomer topilib, shu nomerdan boshlab (2.3) ketma-ketlikning barcha nuqtalarining markazi* z_N *nuqtadan iborat* ε *radiusli doiraning ichida yotishi zarur va yetarlidir.*

Isbot. *Zaruriyligi*. (2.3) ketma-ketlikni yaqinlashuvchi,ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ deb, $|z_{N+m} - z_N| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishini isbotlashimiz kerak.(2.3) ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa,u holda

$\forall\varepsilon>0$ son qanday bo’lmasin shunday $N=N(\frac{\varepsilon}{2})$ nomer topilib, $\forall n\geq N$ uchun $|z_n-z|<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. U holda barcha $m=1,2,3...$ va $n=N$ uchun

$$|z_{N+m}-z_N|\leq|z_{N+m}-z|+|z-z_N|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

tengsizlikni olamiz.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, Koshi sharti bajarilsin.Ya’ni $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunaqa $N=N(\varepsilon)$ nomer topilib, shu nomerdan boshlab (2.3) ketma-ketlikning barcha nuqtalari z_N nuqtaning ε atrofida joylashsin.U holda (2.3) ketma-ketlik chegaralangan bo’ladi. Bolsano-Veyershtras teoremasidan bu ketma-ketlikning kamida bitta limitik nuqtaga ega ekanligi kelib chiqadi. Faraz qilaylik, (2.3) ning limitik nuqtalari ikkita har xil A va B nuqtalardan iborat bo’lsin.Ular orasidagi masofani $|A-B|>0$ bilan belgilab, ε ni $0<\varepsilon<\frac{1}{2}|A-B|$ deb tanlaymiz. Bu ε uchun ham Koshi sharti bajariladi: shunaqa $N=N(\varepsilon)$ nomer topilib,barcha $m=1,2,3...$ uchun $|z_{N+m}-z_N|<\varepsilon$ tengsizlik o’rinli bo’ladi, ya’ni $|z_{N+m}-z_N|<\varepsilon$ doiraning tashqarisida (2.3) ketma-ketlikning faqat cheklita nuqtalari yotishi mumkin.U holda A va B limitik nuqtalar shu doiraning yo ichkarisida,yoki chegarasida joylashadi, ya’ni $|A-B|\leq 2\varepsilon$ bo’ladi. Bu esa ε ning tanlanishiga ziddir. Bu qarama-qarshilik (2.3) ketma-ketlikning limitik nuqtalari ikkita har xil deyilgan farazimiz noto’g’ri ekanligini bildiradi. Demak, (2.3) ketma-ketlik chegaralangan va yagona limitik nuqtaga ega, ya’ni u yaqinlashuvchidir.

3-mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1.Ketma-ketlikning limitik nuqtasi deb nimaga aytiladi?
2.Ketma-ketlik qachon chegaralangan deyiladi?
3.Ketma-ketlik qachon yaqinlashuvchi deyiladi?
4.Uzoqlashuvchi yoki yaqinlashmaydigan ketma-ketlik deb nimaga aytilad? Misollar keltiring.
5.Limitlar nazariyasining asosiy teoremalarini ayting.
6.Koshi kriteriyasini ayting.

4-mavzu: Uzluksizlik va tekis uzluksizlik tushunchalari. Kantor teoremasi. Geyne –Borell lemmasi.

Reja:

1.Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.
2.Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi.
3.Kontor teoremasi.
4.Geyne-Borel lemmasi.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [5], [6]

Dars maqsadlari: kompleks o'zgaruvchili funksiyasi limiti, uzluksizligi va tekis uzluksizligi haqida tushunchalar berish ular orasidagi bog'lanishlarni tushuntirish, xossalarini o'rgatish va talabalarning matematik analizdan haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar haqidagi bilimlarini kompleks o'zgaruvchili funksiyalar uchun umumiylashtirish va tatbiq etishga o'rgatish orqali ularni mustaqil va ijodiy mushohada yuritishga o'rgatish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *kompleks funksiyaning uzluksizligi, sohaning limitik nuqtasi, ko'phadning uzluksizligi, ratsional funksiyaning uzluksizligi, tekis uzluksizlik, yopiq to'plam, chegaralangan to'plam, Kantor teoremasi,Geyne-Borell lemmasi.*

1.Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. Faraz qilaylik $w = f(z)$ bir qiymatli funksiya G sohada berilgan, a nuqta G sohaning limitik nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif 6.1. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilib, $|z-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z lar uchun $|f(z) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $w = f(z)$ funksiya $z \to a$ intilganda A songa intiladi deyiladi.

A va a sonlardan biri yoki ikkalasi ham ∞ bo'lgan holda ham bu ta'rif shunga o'xshash ifodalanishi mumkin.

Ta'rif 6.2. *Agar a limitik nuqta G ga qarashli bo'lib, $w = f(z)$ funksiyaning $z \to a$ dagi limiti $A = f(a)$ ga teng bo'lsa, ya'ni $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$ tenglik bajarilsa, u holda $w = f(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Uzluksizlik ta'rifini ε, δ tilida quyidagicha ifodalash mumkin.

Ta'rif 6.3. *Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ son topilib, $|z-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z lar uchun*

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \tag{6.1}$$

tegsizlik bajarilsa, u holda $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Geometrik nuqtai nazardan bu ta'rifni quyidagicha bayon qilish mumkin: agar z_0 nuqtaning ixtiyoriy yetarlicha kichik atrofidagi barcha nuqtalarga mos $w = f(z)$ nuqtalar $w_0 = f(z_0)$ nuqtaning istalgancha kichik atrofida joylashsa, u holda $w = f(z)$ funksiya $z = z_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi,.

Ta'rif 6.4. *Agar $w = f(z)$ funksiya G sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda u G sohada uzluksiz deyiladi.*

Agar $w = f(z)$ funksiya biror L chiziqda yoki yopiq $\overline{G}$ sohada aniqlangan bo'lsa, u holda $z_0 \in L$ yoki $z_0 \in \partial G$ nuqtalarda $w = f(z)$ funksiyaning uzluksizligi yuqoridagiga o'xshash ifodalanadi. Farqi shundan iboratki, (6.1) ni qanoatlantiruvchi z nuqtalar to'plami z_0 nuqtaning yetarlicha kichik ixtiyoriy atrofidagi barcha nuqtalar uchun emas, balki faqat atrofning L ga yoki

$\overline{G}$ ga qarashli nuqtalari uchungina talab qilish lozimdir. Kompleks o'zgaruvchili funksiya uzluksizlik ta'rifi shakl jixatdan haqiqiy funksiyaning uzluksizligi ta'rifiga o'xshash bo'lganligi uchun haqiqiy analizdagi uzluksiz funksiyalar ustidagi amallar kompleks analizda ham o'rinli bo'ladi.

Agar $f(z), g(z)$ funksiyalar $z = z_0 \in G$ nuqtada (G sohada) uzluksiz bo'lsa, u holda

1. $f(z) \pm g(z)$
2. $f(z) \cdot g(z)$;
3. $f(z)/g(z), g(z_0) \neq 0 (g(z) \neq 0, \forall z \in G)$

funksiyalar ham z_0 nuqtada (G sohada) uzluksiz bo'ladi.

Misol 6.1. $w = z^n, z \in C$ funksiyani aniqlanish sohasida uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Berilhan funksiya barcha kompleks z sonlarda aniqlangan, shuning uchun aniqlanish sohasi butun kompleks tekislik bo'ladi, ya'ni yuqoridagi ta'riflarda G sifatida C kompleks sonlar to'plamini olamiz. Faraz qilaylik $\forall z_0 \in G$ bo'lsin. U holda $w_0 = z_0^n$ bo'lib, $\forall z : |z - z_0| < \delta$ uchun

$$|w - w_0| = |z^n - z_0^n| = |z - z_0| |z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + ... + z_0^{n-1}| <$$
$$\delta((r_0 + \delta)^{n-1} + (r_0 + \delta)^{n-2} r_0 + ... + r_0^{n-1}) < n\delta(r_0 + \delta)^{n-1} < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan ko'rinadiki, $w = z^n$ funksiya butun kompleks C tekislikda uzluksiz bo'lar ekan.

Bu misol va yuqorida keltirilgan fikrga ko'ra $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ algebraik ko'phad C da uzluksiz, $R(z) = P_n(z)/P_m(z)$ ratsional funksiya esa $G = C / \{z, P_m(z) = 0\}$ sohada uzluksiz bo'ladi.

6.2. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning tekis uzluksizligi. Faraz qilamizki, $w = f(z)$ funksiya yopiq chegaralangan $\overline{G}$ sohada uzluksiz bo'lsin. Demak, $\forall z_0 \in \overline{G}$ nuqta uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0, \forall z \in \overline{G} : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ kelib chiqadi. Faraz qilamizki, $\{\delta(\varepsilon, z)\}_{z \in \overline{G}}$ to'plamning eng kichik musbat soni mavjud. U holda $w = f(z)$ funksiya $\overline{G}$ sohada tekis uzluksiz deb aytiladi. Biz tekis uzluksizlikning quyidagi ta'rifiga keldik:

Ta'rif 6.5. *Agar $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilib, ixtiyoriy bir juft $z', z'' \in \overline{G} : |z' - z''| < \delta$ nuqtalar uchun*

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa,u holda $w = f(z)$ funksiya $\overline{G}$ sohada tekis uzluksiz deb aytiladi.

Agar $\{\delta(\varepsilon, z)\}_{z \in \overline{G}}$ to'plamning eng kichik musbat soni mavjud bo'lmasa, u holda $w = f(z)$ funksiya $\overline{G}$ sohada tekis uzluksiz bo'lmaydi. Bu holda shunaqa musbat $\varepsilon > 0$ son mavjudki, $\forall \delta > 0$ son qanday bo'lmasin hech bo'lmaganda bir juft $z', z'' \in \overline{G}$ nuqtalar topiladiki, $|z' - z''| < \delta$ bo'lishiga qaramasdan $|f(z') - f(z'')| \geq \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Teorema 6.1. (Kontor teoremasi). *Agar $w = f(z)$ funksiya yopiq chegaralangan $\overline{G}$ sohada uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya $\overline{G}$ sohada tekis uzluksiz bo'ladi.*

Bu teoremani isbotlash uchun quyidagi Geyne – Borel lemmasidan foydalanamiz.

Lemma 6.1.(Geyne -Borel lemmasi). *Agar $\overline{G}$ yopiq chegaralangan sohaning har bir $z \in \overline{G}$ nuqtasi biror K_z doiraning markazi bo'lsa,u holda $\overline{G}$ sohani chekli sondagi $\{K_z\}$ doiralar bilan qoplash mumkin.*

Isbot. $\overline{G}$ sohaning chegaralanganligidan foydalanib uni tomonlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan biror kvadratning uchiga joylashtiramiz. Faraz qilamizki, lemma o'rinli emas. U holda bo'lakchalarning hech bo'lmaganda bittasining ichida joylashgan $\overline{G}$ ning qismi chekli sondagi K_z doiralar bilan qoplanmaydi. Bu kvadratchani Q_2 bilan belgilab , uni yuqoridagidek to'rtta kongruent bo'laklarga ajratamiz. Ulardan hech bo'lmaganda biri uchun uning ichida joylashgan $\overline{G}$ sohaning qismini chekli sondagi K_z doiralar bilan qoplash mumkin emas. Uni Q_3 bilan belgilaymiz va bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz. Natijada har biri keyingisini o'z ichida saqlagan dioganallari $n \to \infty$ da nolga intiluvchi va har birining ichida joylashgan $\overline{G}$ ning qismini chekli sondagi K_z doiralar bilan qoplash mumkin bo'lmagan kvadratlar

$$Q_1 \supset Q_2 \supset ... \supset Q_n \supset ... \qquad (6.2)$$

ketma –ketligini hosil qilamiz. Limitlar nazariyasining asosiy prinsipiga ko'ra barcha (6.2) kvadratlarga tegishli tekislikning yagona z_0 nuqtasi mavjudligini olamiz. Bu nuqtaning istalgan atrofida yetarlicha katta nomerli Q_n kvadratlar joylashib, ularning ichida yotuvchi $\overline{G}$ soha qismini chekli sondagi K_z doiralar bilan qoplash mumkin bo'lmaganligi uchun bu atrofda z_0 nuqtadan farqli $z \in \overline{G}$ nuqta albatta topiladi, yani z_0 $\overline{G}$ ning limitik nuqtasidir, shuning uchun $z \in \overline{G}$. U holda yetarlicha katta nomerli Q_n kvadratning dioganali $K_{z_0} \subset \{K_z\}$ doiraning ρ_{z_0} radiusdan kichik bo'lib, Q_n ning ichida yotuvchi $\overline{G}$ sohaning qismi bir K_{z_0} doira bilan qoplanadi. Bu qarama – qarshilikdan lemaning isboti kelib chiqadi. *Lemma 6.1 isbot bo'ldi.*

Kantor teoremasining isboti. Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya teorema shartiga ko'ra $\overline{G}$ sohaning har bir z nuqtasida uzluksiz bo'lsin. Ya'ni $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ mavjudki, ixtiyoriy $\xi \in \overline{G}$ va $|\xi - z| < \delta$ bo'lganda

$$|f(\xi) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajariladi.

Bu yerdan $\forall z \in \overline{G}$ uchun markazi z nuqtada, radiusi $\rho_z = \delta$ bo'lgan biror K_z doira mavjudki ixtiyoriy bir juft $z', z'' \in K_z$ nuqtalar uchun

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon \qquad (6.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar har bir $\forall z \in \overline{G}$ nuqtaga markazi shu nuqtadan iborat radiusi $\frac{1}{2}\rho_z$ ga teng K'_z doirani mos qo'ysak, u holda Geyne – Borel lemmasiga muvofiq cheklita $\{K'_z\}$ doiralar sistemasi topiladiki, u $\overline{G}$ sohani qamraydi. Bu doiralar radiuslarining eng kichigini δ bilan belgilaymiz. Mana shu δ ning tekis uzluksizlik ta'rifida qatnashuvchi δ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham,

$$\forall z', z'' \in \overline{G}, \quad |z' - z''| < \delta \qquad (6.4)$$

va

$$z' \in K'_\xi, \text{ ya'ni } \quad |z' - \xi| < \frac{1}{2}\rho_\xi \qquad (6.5)$$

bo'lsin. U holda

$$|z'' - \xi| \le |z'' - z'| + |z' - \xi| < \delta + \frac{1}{2}\rho_\xi \le \rho_\xi \qquad (6.6)$$

Bu yerdan $z^{''}$ nuqtaning ham K_{ξ} doiraga qarashli ekanligi va shuning uchun ham $\left| f(z^{'}) - f(z^{''}) \right| < \varepsilon$ tengsizlikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. *Kantor teoremasi isbot bo'ldi.*

6-mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya limiti deb nimaga aytiladi?
2. Uzluksiz funksiya deb nimaga aytiladi? (misolda tushuntiring)
3. Tekis uzluksiz funksiya deb nimaga aytiladi? (misolda tushuntiring)
4. Kantor teoremasini ta'riflang.

5-mavzu: Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Hosila mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari (Koshi-Riman shartlari).

Dars rejasi:

5. Kompleks o'zgaruvchili funksiya hosilasi.
6. Analitik funksiya tushunchasi.
7. Kompleks o'zgaruvchili funksiya differensiali.
8. Hosila mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari. Koshi – Riman sharti.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [5], [6]

Dars maqsadlari: Kompleks o'zgaruvchili funksia orttirmasi va hosilasi tushunchasini haqiqiy o'zgaruvchili funksiya kabi kiritish, muhim farqlarni ajratish, sohada regulyar, monogen va analitik funksiya tushunchalarini berish, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning diffrernsiallanuvchanligini ta'minlaydigan zaruriy va yetarli shartlarni bayon qilish, talabaga bu tushunchalarni yetkazib berish, ularda komplek o'zgaruvchili funksiya diffrensiali, analitik, regulyar funksiyalar haqida ko'nikma hosil qilish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *kompleks o'zgaruvchili funksiya hosilasi, sohada analitik funksiya, nuqtada analitik funksiya, kompleks o'zgaruvchili funksiya differensiali, erkli o'zgaruvchi differensiali, hosila mavjudligining zaruriy sharti, hosila mavjudligining yetarli shartlari.*

9.1.Kompleks o'zgaruvchili funksiya hosilasi tushunchasi. Faraz qilaylik, bizga biror G sohada bir qiymatli kompleks o'zgaruvchili $w = f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. $\forall z \in G$ nuqtani qayd qilib, unga Δz orttirma beramiz. Buning natijasida $f(z)$ funksiya

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$$

orttirma oladi. Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatan olamiz:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (9.1)$$

Ta'rif 9.1. Agar Δz ning nolga qanday intilishidan qat'iy nazar (9.1) nisbat biror aniq chekli songa intilsa, u holda $w = f(z)$ funksiya $\forall z \in G$ nuqtada differensiallanuvchi deyilib, shu limitning qiymatiga $w = f(z)$ funksiyaning z nuqtadagi hosilasi deb ataladi va u $f'(z)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z). \qquad (9.2)$$

9.2. Analitik funksiya tushunchasi.

Ta'rif 9.2. *Agar $w = f(z)$ funksiya biror $z = z_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda u shu nuqtada monogen deb aytiladi.*

Agar $w = f(z)$ funksiya biror G sohada bir qiymatli bo'lib, uning har bir nuqtasida monogen bo'lsa, u holda bu funksiya G sohada analitik deb aytiladi.

Kelgusida bir qiymatli analitik funksiyani golomorf yoki regulyar deb ham aytamiz.

9.2-Ta'rifga muvofiq, biror G sohaning har bir nuqtasida differensiallanuvchi $w = f(z)$ funksiya shu sohada analitik deyiladi. Bu holda $w = f(z)$ funksiya G sohaning har bir nuqtasida ham analitik deyiladi. Ya'ni $w = f(z)$ funksiyaning biror $z \in G$ nuqtada analitik bo'lishi uchun uning shu nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi bo'lishi talab qilinar ekan.

Kompleks o'zgaruvchili funksiya hosilasi ta'rifi shakl jihatdan haqiqiy o'zgaruvchili funksiya hosilasi ta'rifidan farq qilmaydi. Shuning uchun haqiqiy funksiyalarning barcha differensiallash qoidalari kompleks funksiyalar uchun ham o'rinli. Kompleks o'zgaruvchili funksiya differensiallanuvchan bo'lishi talabi haqiqiy ma'nodagi differensiallanuvchanlikdan keskin farq qilib, juda katta talabdan iboratdir. Shuning uchun ham sohada analitik funksiyalar o'ziga xos ajoyib xossalarga ega bo'lib, bunday xossalarga haqiqiy differensiallanuvchi funksiyalar ega bo'la olmaydi. Bu xossalarni biz kelgusida o'rganamiz.

Misol 9.1. $f(z) = z\operatorname{Re} z$ funksiyani aniqlanish sohasida analitiklikka tekshiring.

Yechish. Bu funksiya butun kompleks tekislikda aniqlangan bo'lib, u faqat $z = 0$ nuqtadagina differensiallanuvchi. Haqiqatan ham

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)\operatorname{Re}(z+\Delta z) - z\operatorname{Re} z}{\Delta z} = z\frac{\operatorname{Re}(z+\Delta z) - \operatorname{Re} z}{\Delta z} + \operatorname{Re}(z+\Delta z).$$

Bu yerdan

1) $z = 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\operatorname{Re}\Delta z = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$ bo'ladi;

2) $z \neq 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ limitning mavjud bo'lish yoki bo'lmasligi

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}(z+\Delta z) - \operatorname{Re} z}{\Delta z} \tag{9.3}$$

limitdan bog'liq. Oxirgi

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}$$

limit esa mavjud emas. Chunki agar $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ deb olsak, u holda

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\frac{0}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} 0 = 0$$

va agar $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ deb olganimizda esa quyidagi natijani olamiz:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1$$

Demak, (9.3) limit intilish yo'liga bog'liq holda turli qiymatlarni bergani uchun mavjud emas. Shuning uchun ham $\forall z \neq 0$ nuqtalarda $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ mavjud emas. Shunday qilib, $f(z) = z\operatorname{Re} z$ funksiya $z = 0$ nuqtada monogen bo'lib, barcha $\forall z \neq 0$ nuqtalarda differensiallanuvchi emas. Demak u $z = 0$ nuqtada va $\forall z \neq 0$ nuqtalarda ham analitik emas.

Misol 9.2. $f(z) = \operatorname{Re} z$ funksiya hech bir nuqtada differensiallanuvchi emas, chunki (9.3) limit hech bir nuqtada mavjud emas. Lekin bu funksiya butun C kompleks tekislikda uzluksiz.

Misol 9.3. $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Bu funksiya ham $f(z) = \operatorname{Re} z$ funksiya kabi butun C kompleks tekislikda uzluksiz bo'lib, C ning hech bir nuqtasida differensiallanuvchi emas. Bunga ishonch hosil qiling.

9.3. Kompleks o'zgaruvchili funksiya differensiali. Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya biror $z = z_0$ nuqtada monogen bo'lsin, u holda shu nuqtada $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0)$ hosila mavjud va bu yerdan

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) + \eta$$

tenglikni olamiz. Bunda $\eta = \eta(z, \Delta z)$ bilan $\Delta z \to 0$ da nolga intiluvchi funksiya (cheksiz kichik miqdor) belgilangan. Oxirgi tenglikdan

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \eta\Delta z \tag{9.4}$$

ni hosil qilamiz, ya'ni z_0 nuqtadagi funksiya orttirmasi ikki cheksiz kichik miqdorlarning yig'indisi shaklida ifodalanadi. Bu miqdorlarning biri $f'(z_0)\Delta z$ bo'lib, agar $f'(z_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda u Δz bilan bir xil tartibdagi cheksiz kichik miqdordir va uning koeffisienti Δz dan bog'liq emas. Ikkinchi miqdor $\eta\Delta z$ esa kichiklik tartibi Δz dan yuqoridir. Qaralayotgan orttirmaning $f'(z_0)\Delta z$ qismi funksiya orttirmasining chiziqli qismi yoki funksiya differensiali deb aytiladi va

$$dw = df(z_0) = f'(z_0)\Delta z$$

kabi belgilanadi.

Agar $w = z$ bo'lsa, u holda $dz = 1\cdot\Delta z = \Delta z$ teng bo'ladi, ya'ni erkli o'zgaruvchining differensiali uning orttirmasiga teng bo'ladi. Bu yerdan $dw = f'(z_0)dz$ yoki $f'(z_0)=\dfrac{dw}{dz}$. (9.4)

ifodadan ko'rinadiki, agar Δz argument orttirmasi cheksiz kichik bo'lsa, u holda funksiya orttirmasi Δw ham cheksiz kichik bo'ladi, ya'ni $w = f(z)$ funksiya $z = z_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Shunday qilib, agar $w = f(z)$ funksiya biror $z = z_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda u shu nuqtada albatta uzluksiz bo'ladi.

***9.4.* Hosila mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari. Koshi – Riman shartlari.** Biror G sohada bir qiymatli $w = f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar $z = x+iy$ deb olsak, u holda bu funksiyani $w = f(z) = u+iv$ shaklida ifodalash mumkin. Biz yuqorida ko'rdikki, $f(z)=\bar{z}=x-iy$ funksiya tekislikning hech bir nuqtasida differensiallanuvchi emas. Lekin uning haqiqiy qismi $u = x$ va mavhum qismining koeffitsenti $v=-y$ hamma yerda ixtiyoriy tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega. Bu yerdan $f(z)$ kompleks funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi uchun u va v funksiyalar bir-biri bilan qandaydir bo'glangan bo'lishi kerak degan xulosa kelib chiqadi. Biz quyida ushbu bog'lanishni oshkor qilamiz. Faraz qilaylik $w = f(z)$ funksiya biror $z = z_0 = x_0+iy_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda bu nuqtada

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=f'(z_0)$$

limit mavjud bo'ladi. U holda intilish yoliga bog'liq holda tanlangan quyidagi xususiy limitlar ham mavjud va ularning qiymatlari ham $f'(z_0)$ ga teng bo'lishi lozim:

1. $\Delta y = 0, \Delta x\to 0$ bo'lganda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}=f'(z_0); \qquad (9.5)$$

2. $\Delta x = 0, \Delta y\to 0$ bo'lganda esa

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=\frac{1}{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}=\frac{1}{i}\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}=f'(z_0). \qquad (9.6)$$

(9.5) va (9.6) dan

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$$

tenglikni olamiz. Bu yerda kompleks sonlarning tenglik ta'rifini qo'llasak

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (9.7)$$

munosabatlarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, agar $w = f(z)$ funksiya biror $z = z_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shu nuqtada (9.7) munosabatlarning bajarilishi zarurdir. Odatda (9.7) shartlar Koshi –Riman yoki Dalamber –Eyler shartlari deyiladi. (9.7) shartlar

$$w = f(z) = u+iv$$

funksiyaning $z = z_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun yetarli bo'la olmaydi. Quyidagi teoremada $w = f(z)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lishining yetarli shartlari keltiriladi.

Teorema 9.1. *Agar u va v funksiyalar biror $z_0 = (x_0, y_0) \in C$ nuqtada ikki o'zgaruvchili haqiqiy funksiyalar sifatida differensiallanuvchi bo'lib, shu nuqtada (9.7) Koshi–Riman shartlari bajarilsa, u holda $w = f(z) = u + iv$ funksiya $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.*

Isbot. u va v funksiyalar differensiallanuvchi bo'lganligii uchun ularning xususiy hosilalari mavjud bo'lib, u va v larning orttirmalarini

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \eta_1 \tag{9.8}$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \eta_2 \tag{9.9}$$

ko'rinishda ifodlash mumkin. Bu yerda η_1 va η_2 lar $\rho = \sqrt{d^2x + d^2y}$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorlardir. Endi $f'(z_0)$ ning mavjud ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $z = z_0$ nuqtada $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ limitning mavjud ekanligini isbotlash lozim. (9.7), (9.8), (9.9) munosabatlardan foydalanib (9.2) ko'rinishdagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + (\frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx)i}{dx + idy} + \frac{\eta_1 + i\eta_2}{dx + idy} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy + i\frac{\partial v}{\partial x}dx + i\frac{\partial u}{\partial x}dy}{dx + idy} + \eta_3\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{\Delta z \to 0}\eta_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z_0)\,.$$

Bu esa biz isbotlashimiz lozim bo'lgan tenglikdir. *Teorema 9.1 isbot bo'ldi.*

Koshi –Riman shartlari bilan birga qo'shimcha u va v funksiyalarning ikki o'zgaruvchili $w = f(z) = u + iv$ funksiyaning $z = z_0$ nuqtada differensiallanishi uchun yetarlidir.

5-mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi deb nimaga aytiladi?
2. Kompleks o'zgaruvchili funksiya qachon monogen deyiladi?
3. Kompleks o'zgaruvchili funksiya qachon sohada bir qiymatli analitik deyiladi?
4. Hosila mavjud bo'lishining zaruriy sharti nimadan iborat?
5. Hosila mavjud bo'lishining yetarli sharti nima?
6. Koshi-Riman sharti nimadan iborat?

6-mavzu: Analitik funksiyalar. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar. Analitik funksiyani berilgan haqiqiy yoki mavhum qismining koeffitsenti bo'yicha tiklash.

Dars rejasi:

3. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar sifatida.
4. Berilgan garmonik haqiqiy yoki mavhum qismi yordamida analitik funksiyani tiklash.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1] , [5], [6], [7]

Dars maqsadlari: talabalarga analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari, garmonik funksiyalar, ularning qo'shma garmonik funksiyalar haqida tushuncha hosil qilish, qo'sma garmonik funksiya sifatida ifodalanuvchi haqiqiy yoki mavhum qismi orqali analitik funksiyani tiklash usulini o'rgatish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar:: *Koshi-Riman shartlari, ikkinchi tartibli aralash hosilalarning tengligining etarli shartlari,garmonik funksiya,o'zaro qo'shma garmonik funksiyalar,ikkinchi jins egri chiziqli integralning integrallash chizig'ining formasidan bog'liq bo'lmasligi alomati.*

10.1.Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar sifatida. Faraz qilaylik, bizga biror G sohada bir qiymatli va analitik $w = f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. Kelgusida isbot qilamizki, agar funksiya G sohada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu sohada ixtiyoriy tartibli uzluksiz hosilalarga ega. Bu kompleks funksiyalarning ajoyib xususiyatlaridan biridir. Shu jumladan, $w = u + iv$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismidan iborat u va v funksiyalarning itiyoriy tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega ekanligi ham kelib chiqadi. Xususan, u va v funksiyalar barcha ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'ladi. Bundan tashqari ular o'tgan mavzuda isbotlangan Koshi-Riman shartlarini ham qanoatlantiradi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{10.1}$$

Agar bu tenglikning 1-shartini x bo'yicha, 2-sini y bo'yicha differensiallab, natijalarni qo'shib, keyin esa turli tartibda olingan ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning tengligi uchun yetarli shartlarning bajarilishini e'tiborga olsak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \tag{10.2}$$

tenglikni olamiz.

Yuqoridagi kabi (10.1) tenglikning 1-shartini y bo'yicha, 2-sini x bo'yicha differensiallab, natijalarni ayiramiz va yana aralash hosilalarning tengligidan foydalansak, u holda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \tag{10.3}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Ta'rif 10.1. *Agar ikki o'zgaruvchili haqiqiy $\varphi(x, y)$ funksiya G sohada ikki marta uzluksiz differensillanuvchi bo'lib, Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, ya'ni $\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ munosabat bajarilsa, u holda $\varphi(x, y)$ funksiyaga G sohada garmonik funksiya deyiladi.*

Bu ta'rifdan va (10.2), (10.3) munosabatlardan kelib chiqadiki, G sohada analitik $w = f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismi va mavhum qismining koeffisientlari u va v funksiyalar shu G sohada garmonik funksiyalardan iborat ekan.

Ta'rif 10.2. *Agar u va v funksiyalar o'zaro Koshi-Riman shartlari bilan bog'langan bo'lsa, u holda ularni o'zaro qo'shma garmonik funksiyalar deb ataymiz.*

10.2. Berilgan garmonik haqiqiy yoki mavhum qismi yordamida analitik funksiyani qurish. Faraz qilaylik, bizga biror bir bog'lamli chekli G sohada garmonik bo'lgan $\varphi(x,y)$ funksiya berilgan bo'lib, u shu sohada qandaydir analitik $w = f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismidan iborat bo'lsin: $\varphi(x,y) = u(x,y)$, $\mathrm{Re}\, f(z) = u(x,y)$. Endi biz $f(z)$ funksiyani tiklash masalasini qaraymiz. Bu masalani yechish uchun $f(z)$ funksiyaning mavhum qismi $v(x,y)$ funksiyani izlash kerak: $\mathrm{Im}\, f(z) = v(x,y) = ?$ Koshi-Riman shartlaridan foydalansak, $v(x,y)$ ning xususiy hosilalarini berilgan $u(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalari bilan ifodalash mumkin:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = P(x,y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = Q(x,y).$$

Endi o'z navbatida $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar ham xususiy hosilalarga ega va bu funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalardan iborat:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ va } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Bu yerdan $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tenglikning bajarilishini olamiz. U holda quyidagi teorema o'rinli.

Teorema 10.1. *Agar $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ $\frac{\partial P}{\partial y}$ va $\frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilalari bilan birgalikda tekislikdagi G sohada uzluksiz bo'lsa, u holda*

$$\psi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

egri chiziqli integralning ixtiyoriy (x_0, y_0) va (x,y) nuqtalarni tutashtiruvchi chiziqdan bog'liq bo'lmasligi uchun $\forall z \in G$ uchun $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tenglikning bajarilishi zarur va G soha bir bog'lamli bo'lganda esa yetarlidir. (L.D.kudryavsev.Kurs matematicheskogo analiza.Tom 2. 47.9,Teorema 4, str. 399-401).

Boshlang'ich nuqtani o'zgarmas deb olib, oxirgi nuqtani o'zgaruvchi deb qarasak, $\psi(x,y)$ funksiya G sohada aniqlangan bir qiymatli funksiyadan iborat bo'lib qoladi. Ikkinchi tomondan $\psi(x,y)$ funksiya xususiy hosilalariga P ning mos xususiy hosilalariga G sohada aynan teng:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial \psi}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

U holda ψ va v funksiyalar faqat o'zgarmas son bilan farq qiladi. Chunki ularning ayirmasining xususiy hosilalari aynan nolga teng. Shunday qilib,

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) + C.$$

Endi $v(x,y)$, $u(x,y)$ funksiyalar ikki o'zgaruvchili funksiyalar sifatida G sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, Koshi-Riman shartlarini qanoatlantiradi. Demak, kompleks funksiya differensiallanuvchi bo'lishligining etarli shartlari bajariladi. Shuning uchun $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiya G sohada analitik funksiyadir. Shunday qilib, analitik $f(z)$ funksiyani uning berilgan garmonik $\mathrm{Re}\, f(z) = u(x,y)$ qismi bo'yicha

$$f(z)=u(x,y)+i[\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy)+C]\,. \qquad (10.4)$$

ko'rinishda tiklash (qurish) mumkin ekan. Bu berilgan haqiqiy qismi bo'yicha analitik funksiyani tiklash formulasidir.

Shunga o'xshash $w=f(z)$ funksiyaning berilgan garmonik mavhum $v(x,y)$ qismi bo'yicha ham analitik $f(z)=u+iv$ funksiyani tiklash mumkin.

Misol 10.1. $u(x,y)=xy$ berilgan bo'lsa, u holda $w=f(z)=u+iv$ analitik funksiyani tiklang.

Yechish. Avvalo bu funksiyaning butun C kompleks tekislikda garmonik ekanligini ko'rsatamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x\,,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,.$$

Demak, $u(x,y)$ funksiya C da garmonik ekan. G soha bir bog'lamli va chekli bo'lganligi uchun (10.3) formulaga ko'ra

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy)+C\,.$$

$v(x,y)$ ni ifodalovchi integralning qiymati chiziqning shaklidan bog'liq bo'lmaganligi uchun integrallash chizig'i sifatida chizmada ko'rsatilgan chiziqni olamiz. U holda

$v(x,y)=\int_0^x -xdx+\int_0^y ydy+C=-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C$. Bundan $f(z)=xy-\frac{i}{2}(x^2-y^2)+iC$.

Agar bu yerda $x=\frac{z+\bar{z}}{2},y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ ekanligini hisobga olib, x va y larning o'rniga qo'yib, hosil bo'lgan ifodani soddalashtirsak, u holda

$$f(z)=\frac{z^2-\bar{z}^2}{4i}-\frac{i}{2}\frac{((z+\bar{z})^2+(z-\bar{z})^2)}{4}+iC=\frac{z^2-\bar{z}^2}{4i}-\frac{i}{2}\left(\frac{z^2+2z\bar{z}}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{\bar{z}^2+z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4}\right)+iC=\frac{z^2-\bar{z}^2}{4i}-\frac{i}{4}(z^2+\bar{z}^2)+iC=-\frac{i}{2}z^2+iC\,.$$

10- mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar sifatida.
2. Analitik funksiyaning ta'rifi va tasvirini ayting?
3. Garmonik funksiyaning ta'rifi va tasvirini ayting?
4. Qo'shma garmonik funksiya deb nimaga aytiladi?
5. Analitik funksiyaning haqiqiy qismi ta'rifi va tasvirini ayting?
6. Analitik funksiyaning mavhum qismlari ta'rifi va tasvirini ayting?
7. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar sifatida tasvirlanishini ko'rsating.
8. Berilgan garmonik haqiqiy yoki mavhum qismi yordamida analitik funksiyani tiklash formulalarini yozing.
9. Koshi-Riman sharti nimadan iborat?
10. Funksiya bir qiymatli analitik bo'lishi uchun uning haqiqiy va mavhum qismlari qanday bog'langan bo'lishi kerak?

7-mavzu: Bir yaproqlilik tushunchasi, Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi. Konform akslantirish.

Dars rejasi:

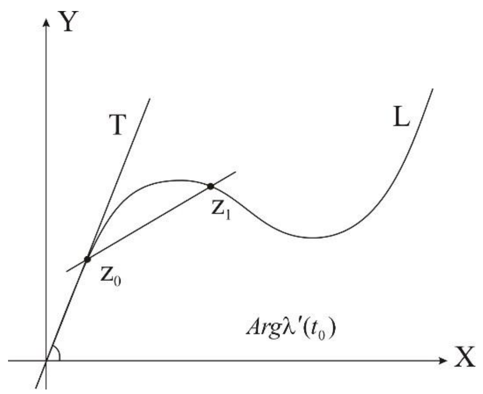
1. Hosila argumentining geometrik ma'nosi.
2. Hosila modulining geometrik ma'nosi.
3. Konform akslantirish tushunchasi.
4. Ba'zi muhim teoremalar**.**

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [5] - [8]

Dars maqsadlari: Hosila argumenti va modulining geometrik ma'nosi, konform akslantirish tushunchasi hamda unga oid ba'zi muhim tushunchalarni o'rgatish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *Kompleks funksiyaning hosilasi, egri chiziqqa o'tkazilgan urinma, ikki chiziq orasidagi burchak, konform akslantirish, 1-tur konform akslantirishlar, 2- tur konform akslantirishlar.*

22.1. Hosila argumentining geometrik ma'nosi. Avval son o'qining biror $E=[\alpha,\beta]$ segmentida $z=\lambda(t)$ uzliksiz kompleks funksiyani qaraymiz. Ma'lumki, bu funksiya tekislikda biror L uzluksiz egri chiziqni ifodalaydi. Faraz qilaylik, qandaydir $t_0\in E$ nuqtada E to'plam bo'yicha $\lambda'(t_0)$ hosila mavjud va $\lambda'(t_0)\neq 0$ bo'lsin. U holda L chiziqning t_0 ga mos $z_0=\lambda(t_0)$ nuqtasida T urinma mavjud va haqiqiy o'qning musbat qismi hamda T urinma orasidagi burchak $Arg\lambda'(t_0)$ ga teng ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $z_0=\lambda(t_0)$ va $z_1=\lambda(t_1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesuvchi o'tkazamiz. $\lambda'(t_0)\neq 0$ dan kelib chiqadiki, $z_1=\lambda(t_1)$ nuqtani $z_0=\lambda(t_0)$ nuqtadan farqli qilib tanlash mumkin. Agar bunga teskari fikrni faraz qilsak, u holda, shunaqa $\{t_{1_n}\}\to t_0$ ketma – ketlik topiladiki, $\forall$ natural n lar uchun $\lambda(t_{1_n})-\lambda(t_0)=0$ bajariladi. U holda, $\lambda'(t_0)=\lim\limits_{t_{1_n}\to t_0}\dfrac{\lambda(t_{1_n})-\lambda(t_0)}{t_{1_n}-t_0}=0$ bo'ladi. Bu esa $\lambda'(t_0)\neq 0$ talabga ziddir, ya'ni farazimiz noto'g'ri. U holda yuqorida tavsiflangan kesuvchining yo'nalishi $\dfrac{(z_1-z_0)}{t_1-t_0}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi. Shuning uchun



22.1-chizma

$\lim\limits_{t_1\to t_0}\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0}=\lambda'(t_0)\neq 0$ ning mavjudligidan $\lim\limits_{t_1\to t_0}Arg(\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0})=Arg\lambda'(t_0)$ ning mavjudligi yoki kesuvchilar limitik holatining mavjudligi, ya'ni L chiziqning z_0 nuqtasida o'tkaziladigan T urinmaning mavjudligi va OX o'qining musbat qismi hamda T urinma orasidagi burchakning $Arg\lambda'(t_0)$ ga tengligi kelib chiqadi. (22.1-chizmaga qarang).

Faraz qilamizki, biror $z_0\in G$ nuqtada $f'(z_0)$ hosila mavjud va $f'(z_0)\neq 0$ bo'lsin. z_0 nuqtadan biror $L: z=\lambda(t)$ $\left(\alpha\le t\le\beta, \lambda(\alpha)=z_0\right)$ egri chiziq o'tkazamizki, $\lambda'(t_0)$ mavjud va $\lambda'(t_0)\neq 0$ bo'lsin. L chiziqning $w=f(z)$ funksiya orqali akslantirishdagi aksi w tekislikdagi $\Gamma: w=f[\lambda(t)]=\mu(t),$ $\left(\alpha\le t\le\beta, \mu(t_0)=f(z_0)=w_0\right)$ tenglama orqali ifodalanadigan chiziq bo'lsin. U holda $\mu'(t_0)=f'(z_0)\lambda'(t_0)\neq 0$ bo'lib, G yegri chiziq w_0 nuqtada urinmaga ega va bu urinma hamda haqiqiy o'qning musbat qismi orasigadi burchak

$$Arg\mu'(t_0)=Arg[\lambda'(t_0)f'(z_0)]=Arg\lambda'(t_0)+Argf'(z_0)$$

ga teng. Bu erdan ko'rinadiki, L chiziqni $w=f(z)$ funksiya orqali akslantirishdagi G ning w_0 nuqtasidagi urinmani hosil qilish uchun L chiziqning z_0 nuqtasidagi urinmani L chiziqdan bog'liq bo'lmagan $Argf'(z_0)$ burchakka burish lozim yekan. Hosila argumentining geometrik ma'nosi ana shundan iborat. Shuning uchun z_0 nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy ikki chiziq orasidagi burchak $w=f(z)$ $(\exists f'(z_0)\neq 0)$ funksiya orqali akslantirishda ham qiymat va ham yo'nalish jihatdan saqlanadi.

22.2. Hosila modulining geometrik ma'nosi.

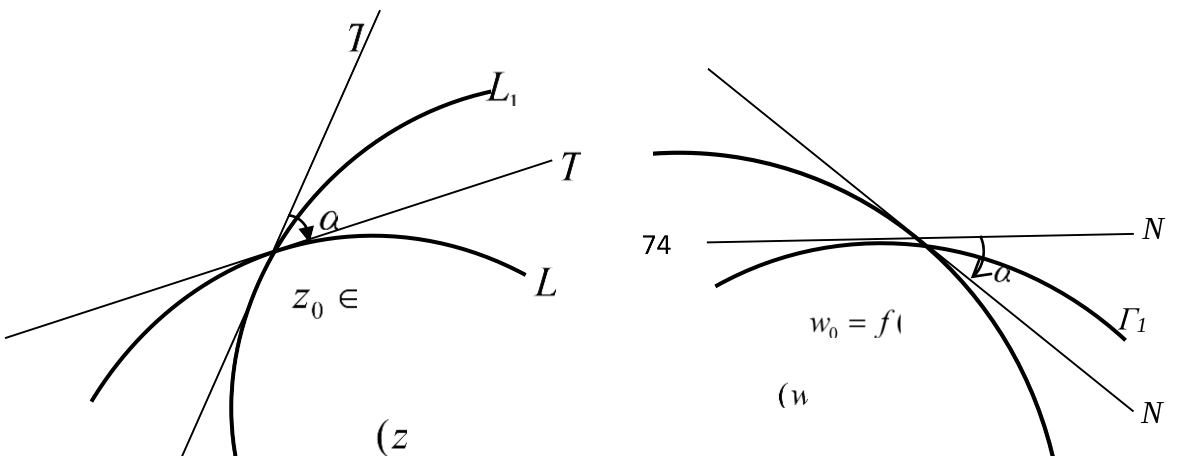
Tushunarliki, $\left|f'(z_0)\right|=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\left|f(z)-f(z_0)\right|}{\left|z-z_0\right|}$ bo'lib, bu yerdan hosila modulining geometrik ma'nosi $w=f(z)$ funksiya orqali akslantirishda z_0 nuqtadan chiquvchi vektorlar cho'zilish koeffisentlari (agar $\left|f'(z_0)\right|>1$ bo'lsa) yoki qisilish koeffisentlari (agar $\left|f'(z_0)\right|<1$ bo'lsa) ning $z\to z_0$ dagi limitidan iborat ekanligi kelib chiqadi.

22.3. Konform akslantirish tushunchasi.

Ta'rif 22.1. *Berilgan nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy ikki chiziq orasidagi burchakni saqlovchi va shu nuqtada o'zgarmas cho'zilishni ta'minlovchi uzluksiz funksiya orqali bajariladigan akslantirish shu nuqtada konform akslantirish deyiladi.*

Ta'rif 22.2. *Agar bunday akslantirish faqat burchaklar emas, balki ularni hisoblash yo'nalishi ham saqlansa, u holda bunday akslantirish qaralayotgan nuqtada birinchi tur konform akslantirish deyiladi.*

Quyidagi 22.2-chizmaga qarang:

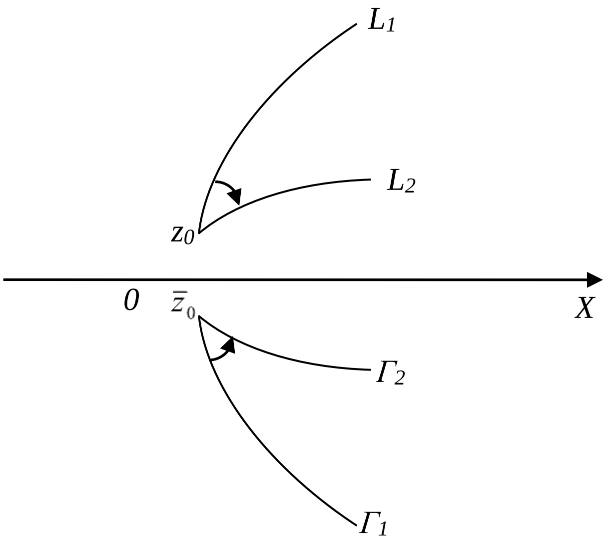


22.2-chizma

Ta'rif 22.3. *Agar bunday akslantirishda burchaklar saqlanib, ularni hisoblash yo'nalishi teskariga o'zgarsa, u holda bunday akslantirish qaralayotgan nuqtada ikkinchi tur konform akslantirish deyiladi.*

Ushbu mavzuning 22.1- va 22.2- qismlaridan kelib chiqadiki, biror G sohada regulyar $w = f(z)$ funksiya orqali bajariladigan akslantirish shu sohaning har bir $f'(z) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi z nuqtasida birinchi tur konform akslantirishdan iboratdir.

Ikkinchi tur konform akslantirishga $f(z) = \bar{z}$ funksiyani oddiy misol sifatida ko'rsatish mumkin (22.3- chizmaga qarang).



22.3- chizma

Ikkinchi tur konform akslantirishga umumiy misol sifatida $f'(z) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi regulyar funksiyaga qo'shma $w = \overline{f(z)}$ funksiya bajaradigan akslantirishni olish mumkin.

Ta'rif 22.4. *Agar f(z) akslantirish G sohada bir yaproqli va uning barcha nuqtalarida konform bo'lsa, u holda u G sohada konform akslantirish deyiladi.*

22.4. Ba'zi muhim teoremalar. Konform akslantirishga ta'luqli ba'zi muhim teoremalarni keltiramiz.

Teorema 22.1 (Sohaning saqlanish prinsipi). *Regulyar va aynan o'zgarmasdan farqli funksiya orqali akslantirishda sohaning aksi yana sohadan iborat bo'ladi.*

Teorema 22.2 (Riman teoremasi). *Chegarasi bittadan ortiq nuqtalardan tashkil topgan har qanday bir bog'lamli sohani* $|w| < 1$ *doiraga konform akslantiruvchi meromorf* $w = f(z)$

funksiya mavjud bo'lib, u $f(a)=0, \arg f'(a)=\lambda$ *(a - sohaning ixtiyoriy nuqtasi, $\lambda -$ ixtiyoriy haqiqiy son) shartlar yordamida yagona aniqlanadi.*

7- mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

10. Hosila argumentining geometric ma'nosi nimadan iborat?
11. Hosila modulining geometric ma'nosi nima?
12. Qachon akslantirish nuqtada (sohada) konform akslantirish deyiladi?
13. Konform akslantirish qanaqa turlarga ega?
14. Qanaqa funksiyalar 1- tur va 2- tur konform akslantirishlarning umumiy ko'rinishiga misol bo'la oladi?
15. Konform akslantirishga doir ba'zi muhim teoremalarni bayon qiling?

8-mavzu: Elementar funksiyalar (chiziqli, kasr-chiziqli, darajali), ko'rsatkichli, trigonometrik, eksponensial, logarifmik, Jukovskiy funksiyalari orqali konform akslantirish.

Dars rejasi:

1. Chiziqli akslantirish va uning asosiy xossalari.
2. Kasr – chiziqli akslantirish va uning asosiy xossalari.
3. Uchi cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi burchak tushunchasi.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1] - [14]

Dars maqsadlari: Chiziqli, kasr – chiziqli akslantirishlar va ularning asosiy xossalari, uchi cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi burchak tushunchalarini o'rgatish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *chiziqli asklantirish, kasr – chiziqli akslantirish, bir yaproqli akslantirish, to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik nuqtalar, aylanaga nisbatan simmetrik nuqtalar, teskari akslantirish, uchi cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi burchak.*

23.1. Chiziqli akslantirish va uning asosiy xossalari.

Ta'rif 23.1. Agar $w = f(z)$ akslantirishda $\forall z_1, z_2 \in G$, $z_1 \neq z_2$ nuqtalarga w tekislikdagi har xil $f(z_1) \neq f(z_2)$ nuqtalar mos kelsa, u holda $w = f(z)$ G sohada bir yaproqli deyiladi.

Chiziqli akslantirish $w = f(z) = \alpha z + \beta,\ \alpha,\ \beta \in C,$ ya'ni chiziqli funksiyadan iborat. Bu funksiya butun C kompleks tekislikda aniqlangan bo'lib, uning hosilasi $f'(z) = \alpha$ o'zgarmas va $\alpha \neq 0$ bo'lsa, noldan farqli bo'ladi. Shunga ko'ra $f(z)$ funksiya butun kompleks C tekislikda konform bo'ladi. Bu funksiya orqali akslantirishda (z) tekislik egri chiziqlariga o'tkazilgan urinmalar bir xil $Arg\alpha$ burchakka burilib, barcha nuqtalardagi cho'zilish $|\alpha|$ ga tengdir. Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda $Arg\alpha = 2k\pi$, $|\alpha| = 1$ bo'lib, burilish ham cho'zilish ham yuz bermaydi. Bu holda funksiya shakli $w = z + \beta$ bo'lib, tushunarliki, akslantirish butun kompleks tekislikni β vektorga siljitishdan iborat. Agar $\alpha \neq 1$ (va $a \neq 0$) bo'lsa, u holda akslantirishni $w - \gamma = \alpha(z - \gamma)$ shaklda ifodalash mumkin bo'lib, γ $\gamma = \alpha\gamma + \beta$ tenglamadan topiladi. Bu yerdan γ nuqtadan chiquvchi har bir $z - \gamma$ vector akslantirish natijasida $Arg\alpha$ burchakka burilib, $|\alpha|$ marta cho'zilib, γ nuqtadan chiquvchi $w - \gamma$ vektorga o'tishi kelib chiqadi. Shuning uchun $\alpha \neq 1$ (va $a \neq 0$) bo'lganda $f(z) = \alpha z + \beta, \alpha, \beta \in C,$ akslantirish butun tekislikni $\gamma = \beta/(1-\alpha)$ nuqta atrofida $Arg\alpha$ burchakka burish va shu nuqtaga nisbatan $|\alpha|$ marta cho'zishdan iborat bo'ladi. Ravshanki, bu markazi $\gamma = \beta/(1-\alpha)$ nuqtada, o'xshashlik koyeffisenti $|\alpha|$ bo'lgan va shu γ nuqta atrofida $Arg\alpha$ burchakka burishdan iborat o'xshashlik akslantirishidir.

23.2. Kasr- chiziqli akslantirish va uning asosiy xossalari.

Kasr- chiziqli akslantirishning umumiy shakli

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (23.1)$$

ko'rinishda bo'lib, unda $a, b, c, d \in C$ kompleks sonlar, $ad - bc \neq 0.$ Agar $ad - bc = 0$ bo'lsa, u holda $f(z) \equiv \lambda = const$- o'zgarmas bo'ladi. Kasr- chiziqli akslantirishning asosiy xossalari quyidagilardan iborat.

Xossa 23.1. *(23.1) kasr - chiziqli akslantirish butun kengaytirlgan kompleks tekislikni o'zini o'ziga konform va bir yaproqli akslantiradi.*

Isbot. $ad-bc\neq 0.$ dan $z\neq\delta=-\frac{d}{c}$ bo'lganda $f'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2};\frac{1}{(z-\delta)^2}\neq 0$ hosilaning mavjudligini olamiz. Demak, $w=f(z)$ akslantirish barcha $z\neq\delta$ chekli nuqtalarda birinchi tur konform akslantirish bo'ladi. Ravshanki,

$$\lim_{z\to\delta}\frac{az+b}{cz+d}=\infty \quad \text{va} \quad \lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}=\alpha.$$

$w=f(z)$ funksiyani $z=\delta$ va $z=\infty$ nuqtalarda quyidagicha aniqlaymiz: $f(\delta)=\infty$ va $f(\infty)=\alpha.$

$w=\frac{az+b}{cz+d}$ tenglamadan teskari funksiyani topamiz:

$$z=f^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}.$$

Avval faraz qilamizki, $w\neq\infty$ va $w\neq\alpha,$ u holda $z\neq\delta, z\neq\infty.$ Yuqoridagidek, $f^{-1}(\infty)=\delta$ va $f^{-1}(\alpha)=\infty.$

Shunday qilib, teskari finksiya ham kasr - chiziqli bo'lganligi uchun $w=f(z)$ funksiya kengaytirilgan kompleks tekislikni o'zini o'ziga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. $z=\delta$ va $z=\infty$ nuqtalarda $w=f(z)$ funksiyaning konformligini tekshirish mumkin bo'lishi uchun uchi cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi burchak tushunchasini kiritish kerak.

23.3. Uchi cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi burchak tushunchasi.

Buning uchun faraz qilamizki, C_1 va C_2 - ikki koordinatalar boshidan o'tuvchi chiziqlar bo'lib, θ burchakni tashkil qilsin. $\xi=\frac{1}{z}$ funksiya yordamida tekislikni o'zini o'ziga akslantiramiz. U holda C_1 va C_2 chiziqlar umumlashgan ma'noda uzluksiz C_1' va C_2' chiziqlarga akslanadilarki, bu chiziqlar $\xi=\infty$ nuqtadan o'tadilar. C_1' va C_2' chiziqlar ∞ nuqtada θ burchak tashkil qiladi deb aytamiz. Masalan, bu ta'rifga muvofiq haqiqiy va mavhum o'qlar ∞ da $\frac{\pi}{2}$ burchakni tashkil qiladi. Umuman, $z=\infty$ nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy ikki C_1' va C_2' chiziqlar shu nuqtada ularning $\xi=\frac{1}{z}$ akslantirishdagi akslari C_1 va C_2 lar koordinatalar boshida qanday burchak hosil qilsa shunday burchak tashkil qiladi deb aytiladi.

Endi xossa 23.1 ning isbotini davom ettiramiz.

Faraz qilaylik, ikki C_1 va C_2 chiziqlar uchi $\delta=-\frac{d}{c}$ nuqtada bo'lgan θ burchakni tashkil qilsin. $f(\delta)=\infty$ bo'lganligi uchun ularning aksi $C_1'=f(C_1)$ va $C_2'=f(C_2)$ chiziqlar $z=\infty$ nuqtadan o'tadi. Ta'rifga ko'ra ular orasidagi burchak $\xi=\frac{1}{w}$ akslantirishdagi ularning akslari C_1'' va C_2'' koordinatalar boshida tashkil qilgan burchakka teng. Ravshanki, C_1'' va C_2'' chiziqlar C_1 va C_2 chiziqlarning natijaviy $\xi=\frac{1}{w}=\frac{cz+d}{az+b}$ funksiya orqali akslantirishdagi akslaridan iborat. Lekin, oxirgi akslantirish kasr- chiziqli bo'lib, $z=\delta$ nuqtada (bu nuqtaning aksi $\xi=0$ dir) konformdir. Demak, C_1'' va C_2'' chiziqlar $\xi=0$ nuqtada θ burchak, ya'ni C_1' va C_2' chiziqlar

$w=\infty$ nuqtada θ burchakni tashkil qiladi. Shunday qilib, biz $w=f(z)$ funksiyaning $z=\delta$ nuqtada konform ekanligini ko'rsatdik. Bu xulosa α nuqtada teskari $z=f^{-1}(w)$ funksiya uchun o'rinlidir, ya'ni $w=f(z)$ akslantirish ham $z=\infty$ nuqtada konformdir. Demak, har bir kasr-chiziqli $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ($ad-bc\neq 0, c\neq 0$) funksiya kengaytirilgan $\overline{C}$ kompleks tekislikni o'zini o'ziga bir yaproqli va konform akslantiradi. Bu xulosa $w=\alpha z+\beta$ chiziqli akslantirish uchun ham o'rinlidir, lekin yagona farqi shundaki, cheksiz uzoqlashgan nuqta o'ziga o'tadi.

Xossa 23.2. *Ketma-ket ikki marta bajariladigan kasr-chiziqli akslantirishning natijasi kasr-chiziqli akslantirishdir. Kars-chiziqli akslantirishga teskari akslantirish ham kasr- chiziqli akslantirishdan iborat.*

Xossa 23.3. *Kasr - chiziqli akslantirishda ixtiyoriy aylana va to'g'ri chiziqning aksi yana aylana yoki to'g'ri chiziqdan iboratdir. Bu yerda aylanani keng ma'noda, ya'ni to'g'ri chiziqni ham radiusi cheksizga teng aylana deb tushunish lozim.*

Isbot. Bu xossani bevosita isbotlaymiz. Qandaydir $|z-z_0|=R$ aylanani olib, kasr-chiziqli akslantirishda uning nimaga o'tishini qaraymiz. Faraz qilaylik, kasr - chiziqli akslantirish $z=\dfrac{aw+b}{cw+d}$ ko'rinishda bo'lsin. z ning ifodasini aylana tenglamasiga qo'yib,

$|(a-cz_0)w+(b-dz_0)|=R|cw+d|$ ni yoki $|a'w+b'|^2=R^2|cw+d|^2$ ni olamiz. Ixtiyoriy ξ kompleks son uchun $|\xi|^2=\xi*\overline{\xi}$ yekanligini hisobga olib, oxirgi tenglikdan

$$(a'w+b')(\overline{a'}\overline{w}+\overline{b'})=R^2(cw+d)(\overline{cw}+\overline{d})$$

yoki

$$|a'|^2|w|^2+|b'|^2+a'\overline{b'}w+\overline{a'}b'\overline{w}=R^2(|c|^2|w|^2+|d|^2+c\overline{d}w+\overline{c}d\overline{w})$$

ni hosil qilamiz. Agar $w=u+iv$ deb olib, hosil qilingan tenglamani (u, v) tekislik dekart koordinatalari bo'yicha yozsak, u holda

$$A(u^2+v^2)+Bu+Cv+D=0$$

aylana yoki to'g'ri chiziq tenglamasiga ega bo'lamiz. Xossa isbot bo'ldi.

Ta'rif 23.2. z_1, z_2 *nuqtalar* $|z-a|=R$ *aylanaga nisbatan simmetrik deyiladi, agar ular* a *nuqtadan chiquvchi nurda joylashib, ulardan* a *nuqtagacha masofalarning ko'paytmasi* R *radiusning kvadratiga teng bo'lsa, ya'ni*

$$|z_1-a||z_2-a|=R^2$$

a *va* ∞ *nuqtalar o'zaro* $|z-a|=R$ *aylanaga nisbatan simmetrik deb aytiladi.*

Ta'rif 23.3. *Agar* z_1, z_2 *nuqtalar* L *to'g'ri chiziqning turli tomonlarida undan bir xil masofada joylashgan va* z_1, z_2 *nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi* L *ga perpendikulyar bo'lsa, u holda* z_1, z_2 *nuqtalar* L *to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik deyiladi.*

Masalan, $z, \overline{z}$ nuqtalar haqiqiy o'qqa nisbatan $z, \overline{z}$ nuqtalar mavhum o'qqa nisbatan hamda z va $\dfrac{1}{\overline{z}}$ nuqtalar $|z|=1$ aylanaga nisbatan simmetrikdir.

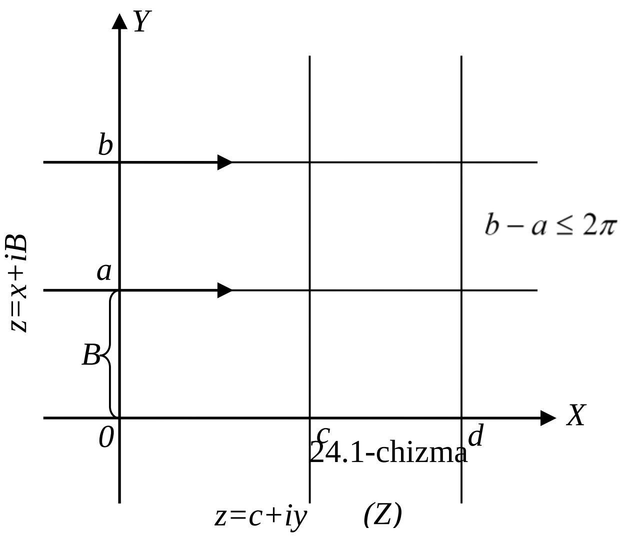
Xossa 23.4. *Agar* z_1, z_2 *nuqtalar* L' *aylana yoki to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik va ularning* $w=f(z)$ *kasr – chiziqli akslantirishdagi akslari* w_1, w_2 *bo'lsa, u holda* w_1, w_2 *nuqtalar* $\Gamma=f(L')$ *aylana yoki to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi.*

Teorema 23.3. *Agar* $z_1,\ z_2,\ z_3\ (z)$ *tekislikning,* w_1, w_2, w_3 *esa* (w) *tekislikning turli nuqtalari bo'lsa, u holda yagona kasr - chiziqli funksiya mavjudki, u* z_k *nuqtalarni* w_k *nuqtalarga akslantiradi va quyidagi formula yordamida aniqlanadi:*

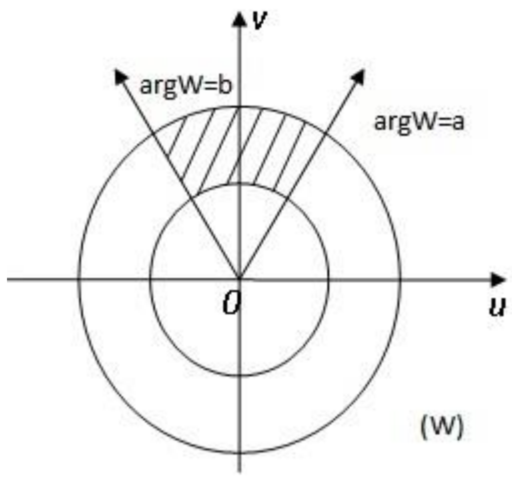
$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\,\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\,\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \qquad (23.2)$$

24.1. Ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar orqali akslantirishlar.

Ko'rsatkichli $w=e^z$ funksiya orqali akslantirishni o'rganish uchun avval haqiqiy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar oilasini qaraymiz. Ularning tenglamasi $z=x+iB,\ -\infty<x<\infty$, $B=const\in R$ dan iborat. $w=e^z$ funksiya orqali akslantirishda ularning aksi $w=e^{x+iB}=te^{iB}$, $0<t<\infty$, ya'ni $\arg w=B$ nurdan iborat. B sonni a vaziyatdan b vaziyatgacha uzluksiz o'zgartirsak, u holda $\arg w=B$ nur $\arg w=a$ vaziyatdan $\arg w=b$ vaziyatgacha uzluksiz burilib, natijada (z) tekisligida $a\le \operatorname{Im} z\le b$ gorizontal yo'lak (w) tekisligidagi $a\le \arg w\le b$ burchakka o'tadi (24.1-chizma).



24.1-chizma



Agar $a<\operatorname{Im} z<b$ ochiq yo'lakning eni $b-a\le 2\pi$ bo'lsa, u holda bu yo'lak $w=e^z$ funksiya yordamida $a<\arg w<b$ burchakka konform va bir yaproqli akslantiriladi. Agar $a<\operatorname{Im} z<b$ yo'lakning eni $b-a>2\pi$ bo'lsa, u holda u $w=e^z$ funksiya yordamida $0<|w|<\infty$ halqaga akslanadi, lekin bu holda akslantirishning bir yaproqliligi buziladi. Bu akslantirish butun C kompleks tekislikning har bir nuqtasida konform bo'ladi, chunki $(e^z)'=e^z\neq 0, \forall z\in C$.

Bundan tashqari $w=e^z$ funksiya $2\pi i$ davrlidir. Shunday qilib, quyidagi xulosaga ega bo'lamiz.

Xulosa 24.1 . *Har bir*

$$a+2k\pi<\operatorname{Im} z<b+2k\pi \quad (k\in Z\,) \qquad (24.1)$$

gorizontal yo'lak $w=e^z$ *funksiya orqali* $b-a\le 2\pi$ *bo'lganda*

$$a<\arg w<b \qquad (24.2)$$

burchakka bir yaproqli va konform akslanadi. Agar $b-a>2\pi$ bo'lsa, u holda (24.1) yo'lak

$$0<|w|<\infty \qquad (24.3)$$

halqaga akslanadi, lekin konformlik buziladi, chunki bu holda $w=e^z$ akslantirish (24.1) yo'laklarda bir yaproqli emas.

Teskari $z=\ln w$ akslantirish (24.2) burchakni (24.1) yo'laklarning biriga konform akslantiradi. Bu yerda k soni $\ln w$ funksiyaning (24.5) doiraviy sektorda tanlanadigan regulyar tarmog'idan bog'liq.

Endi $w=e^z$ funksiyaning akslantirish xossalarini tekshirishni davom ettirish uchun $z=B+iy,\quad \infty<y<\infty$ vertikal to'g'ri chiziqlar oilasini olamiz. Uning $w=e^z$ akslantirishdagi aksi $w=e^{B+iy}=e^Be^{iy}$ chiziqdan, ya'ni cheksiz marta o'tiladigan markazi $w=0$ nuqtadan, radiusi e^B dan iborat $|w|=e^B$ aylanadan iborat. Har bir uzunligi 2π ga teng kesmada y ning o'zgarishiga bir marta o'tiladigan to'la aylana mos keladi. Agar bu to'g'ri chiziqni $B=c$ vaziyatdan $B=d$ vaziyatgacha ($d>c$) o'ng tomonga uzliksiz siljitsak, u holda (z) tekisligida vertikal $c<\operatorname{Re} z<d$ yo'lak hosil bo'lib, uning (w) tekisligidagi aksi cheksiz marta o'tiladigan $e^c<|w|<e^d$ halqadan iborat bo'ladi.

Gorizontal va vertikal yo'laklar kesishganda (z) tekisligida to'g'ri to'rtburchakni hosil qiladi. Uning $w=e^z$ akslantirishdagi aksi (w) tekisligida burchak va halqaning kesishmasidan, ya'ni halqali sektordan iborat bo'ladi.

Xulosa 24.2. *$w=e^z$ funksiya ixtiyoriy butun k son uchun*

$$c<\operatorname{Re} z<d,\qquad a+2k\pi<\operatorname{Im} z<b+2k\pi \qquad (24.4)$$

to'rtburchakni $b-a\le 2\pi$ bo'lganda

$$e^c<|w|<e^d,\qquad a<\arg w<b \qquad (24.5)$$

doiraviy sektorga bir yaproqli va konform akslantiradi.

Teskari $z=\ln w$ funksiya (24.5) doiraviy sektorni (24.4) to'rtburchaklarning biriga bir yaproqli va konform akslantiradi.

24.2. Jukovskiy va unga teskari funksiyalar orqali akslantirishlar.

Ushbu

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \qquad (24.6)$$

funksiya Jukovskiy funksiyasi deyiladi. Unga teskari funksiya

$$z=w+\sqrt{w^2-1} \qquad (24.7)$$

dan iborat.

$$w'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\neq 0,\quad \forall z\in C/\{0,\pm1\}$$

bo'lganligi uchun bu funksiya 0, ±1 nuqtalardan tashqari C kompleks tekislikning barcha nuqtalarida regulyar va 1- jins konform akslantirishdan iborat. Bu funksiyaning akslantirishga doir xossalarini tekshirish uchun quyidagi chiziqlar oilasini qaraymiz:

1) $|z|=r$ - markazi 0 nuqtada va radiusi r bo'lgan aylanalar oilasi.

2) $\arg z=\varphi$ - $z=0$ nuqtadan chiquvchi nurlar oilasi.

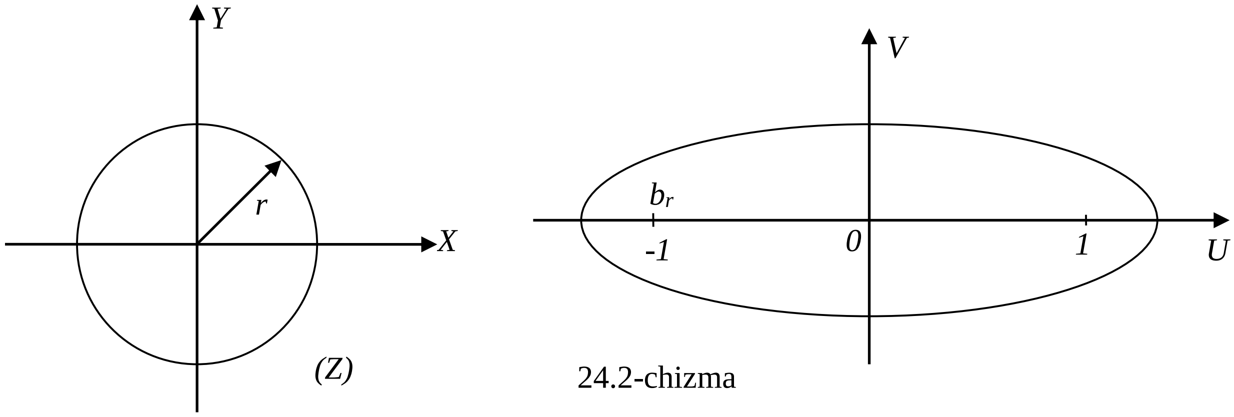
$|z|=r$ aylana $z=re^{i\varphi}, 0\le\varphi\le 2\pi$, parametrik tenglamaga ega. Jukovskiy funksiyasi uni $w=\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)=u+iv$ chiziqqa akslantiradi. Uning parametric tenglamasi

$$u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi \tag{24.8}$$

yoki oshkor tenglamasi $\frac{u^2}{a_r^2} + \frac{v^2}{b_r^2} = 1$ ko'rinishga ega, bu yerda

$$a_r = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}), \quad b_r = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \tag{24.9}$$

Demak, akslantirish natijasida $|z| = r$ chiziqning aksi fokuslari $-1, 1$ nuqtalardan va yarim o'qlari a_r, b_r dan iborat ellipsdir.



24.2-chizma

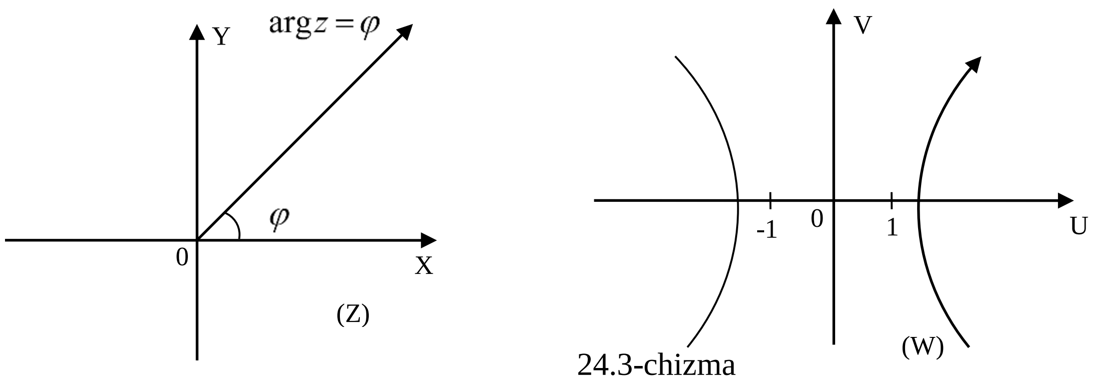
Agar $r < 1$ bo'lsa, u holda ellips soat strelkasi yo'nalishida, $r > 1$ bo'lsa, u holda ellips soat strelkasiga teskari yo'nalishda chiziladi. Agar $r = 1$ bo'lsa, u holda (24.8) dan $u = \cos\varphi, v = 0$ bo'lib, φ 0 dan 2π gacha o'zgarsa, u holda (u, v) nuqtalar (w) tekisligida ikki marta har xil yo'nalishda o'tiladigan $[-1, 1]$ kesmani, ya'ni $[-1, 1]$ kesimni chizadi.

Agar r ni 1 dan ∞ gacha uzluksiz o'zgartirsak, u holda (w) tekisligida hosil bo'ladigan ellipslar uzluksiz ravishda kengayib, cheksizga intiladi, chunki a_r, b_r mos ravishda 1 dan ∞ gacha va 0 dan ∞ gacha uzluksiz o'sadi. Natijada (w) tekisligida $[-1, 1]$ kesimning tashqarisi hosil bo'ladi. Ya'ni Jukovskiy funksiyasi $|z| = 1$ aylana tashqarisini $[-1, 1]$ kesim tashqarisiga akslantiradi. Endi bu akslantirishning bir yaproqliligini tekshiramiz. z va $\frac{1}{z}$ nuqtalarda Jukovskiy funksiyasi bir xil qiymat qabul qiladi. Agar (24.7) teskari funksiyaning ikki qiymatli ekanligini nazarga olsak, (w) tekislikning har bir w nuqtasiga (24.7) akslantirish faqat va faqat z va $\frac{1}{z}$ nuqtalarni mos qo'yadi. Bu yerdan Jukovskiy funksiyasining biror D sohada bir yaproqli bo'lishi uchun D soha va $\frac{1}{z}$ akslantirishdagi uning D' aksi bir- biri bilan kesishmasligi zarur va yetarlidir. ***Xulosa 24.3.*** *Jukovskiy funksiyasi* $|z| > 1$ *va* $|z| < 1$ *sohalarni* $[-1, 1]$ *kesmaning tashqarisiga bir yaproqli va konform akslantiradi.*

Endi $z = 0$ nuqtadan chiquvchi nurlarning aksini topamiz. Ularning parametrik tenglamasi $\arg z = \varphi$ yoki $z = re^{i\varphi}, 0 < r < \infty$ dan iborat. (24.8) dan ko'rinadiki, bu nurlarning aksi

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1 \tag{24.10}$$

tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni fokuslari -1 va 1 dan iborat giperbola shoxlarining biridan iboratdir.



24.3-chizma

Agar $\varphi = 0$ bo'lsa, u holda (24.8) dan $u = a_r, v = 0$ ni hosil qilamizki, bu $[1, \infty)$ kesimni ifodalaydi. Agar $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda (24.8) dan $u = 0, v = b_r$ ni olamiz, bu mavhum o'qni ifodalaydi. Agar $\varphi = \pi$ bo'lsa, u holda (24.8) dan $u = -a_r, v = 0$ kelib chiqadi va bu $(-\infty, -1]$ kesimdan iborat.

Xulosa 24.4. *Jukovskiy funksiyasi quyidagi bir yaproqli va konform akslantirishlarni amalga oshiradi:*

1) birlik $|z| < 1$ *doirani [-1,1] kesim tashqarisiga, ya'ni* $\overline{C}/[-1,1]$ *ga;*

2) yuqori yarim tekislik $\operatorname{Im} z > 0$ *ni* $C/\{(-\infty,-1] \cup [1,\infty)\}$ *ga, ya'ni* $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ *kesimning tashqarisiga;*

3) birlik yarim doira $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ *ni* $\operatorname{Im} w < 0$ *- quyi yarim tekislikka, chunki*

$$\operatorname{Im} w(\frac{1}{2} i) < 0;$$

4) bu yerda (w) *tekislikdagi sohalarni saqlagan holda* (z) *tekislikdagi sohalarni ularning* $\frac{1}{z}$ *funksiyasi orqali akslantirishdagi akslari bilan almashtirish mumkin.*

Xulosa 24.5. *Teskari (24.7) akslantirish esa teskari bir yaproqli va konform akslantirishlarni amalga oshiradi.*

23- mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Qanday akslantirish bir yaproqli deyiladi?
2. Chiziqli akslantirishning asosiy xossalari nimadan iborat?
3. Cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi burchak qanday kiritiladi?
4. Kasr –chiziqli akslantirish qayerda konform? Nima uchun?
5. Kasr – chiziqli akslantirishning asosiy xossalari nimadan iborat va ular qanday isbotlanadi?

9-mavzu: Kompleks funksiyaning integrali. Integralning mavjudlik sharti. Integralni xisoblash. Kompleks funksiya integralining xossalari.

Dars rejasi:

15. To'g'rilanuvchi chiziqlar.
16. Kompleks funksiyaning integrali.
17. Integralning mavjudlik sharti.
18. Integralni hisoblash.
19. Integralning xossalari.
20. Integralning sohaning funksiyasi sifatida additivligi.
21. Integral belgisi ostida limitga o'tish va takroriy integrallarning tergligi haqidagi teoremalar.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [4], [6], [8]

Dars maqsadlari: talabalarga kompleks funksiyaning integrali va uning xossalari bilan tanishtirish, integrallarni hisoblashni o'rgatish

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *to'g'rilanuvchi chiziqlar, to'g'rilanuvchi chiziqning uzunligi, silliq chiziq, bo'lakli silliq chiziq, kompleks funksiyaning integrali, integralning mavjudlik sharti, integralni hisoblash formulasi, integralning sohaning funksiyasi sifatida additivligi, integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi teorema, takroriy integrallarning tengligi haqidagi teorema.*

12.1.To'g'rilanuvchi chiziqlar. Biz kompleks funksiyaning to'g'rilanuvchi egri chiziq bo'yicha olingan integrali tushunchasini qaraymiz. Tekislikdagi to'g'ri chiziq ta'rifini 5-mavzuda keltigan edik. To'g'rilanuvchi chiziq nima?-degan savol tug'iladi.

Ta'rif 12.1. *Agar tekislikdagi chiziqqa ichki chizilgan barcha siniq chizqlarning uzunliklari yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda bu chiziq to'g'rilanuvchi chiziq deyiladi.*

***Ta'rif* 12.2.** *To'g'rilanuvchi chiziqning uzunligi deb shu chiziqqa ichki chizilgan siniq chiziqlar uzunliklarining aniq yuqori chegarasiga aytiladi, ya'ni* $d\Gamma = \sup dL$ *.Bu yerda* $d\Gamma$ *berilgan to'g'rilanuvchi* Γ *chiziqning uzunligi,* dL *unga ichki chizilgan siniq chiziqning uzunligi, supremum barcha* Γ *ga ichki chizilgan* L *chiziqlar bo'yicha olinadi.*

To'g'rilanuvchi chiziqqa misol sifatida aylanani olish mumkin. Ma'lumki, agar aylananing radiusi R ga teng bo'lsa, u holda shu aylanaga ichki chizilgan barcha siniq chiziqlarning uzunliklari aylana uzunligidan, ya'ni $2\pi R$ dan oshmaydi. Demak, ta'rif bo'yicha aylana to'g'rilanuvchi chiziqdir.

Ta'rif 12.3. *Agar chiziq uzluksiz o'zgaruvchi urinmaga ega bo'lsa, u holda u silliq deyiladi,ya'ni agar chiziqning parametrik tenglamasi* $z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \le t \le b)$ *bo'lib,* $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ *uzluksiz va noldan farqli bo'lsa, u holda bu chiziq silliq deyiladi.*

Misol 12.1. Har qanday aylana silliq chiziqdir.Haqiqatan, agar $|z-a| = R$ markazi a nuqtada bo'lgan R radiusli aylana bo'lsa,u holda uning parametrik tenglamasi $z = a + \mathrm{R}e^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$ bo'lib, $z'(t) = i\,\mathrm{R}e^{it}$ uzluksiz va noldan farqlidir.

12.2. Har qanday to'g'ri chiziq kesmasi silliq chiziqdir.(isbotlang.)

Ta'rif 12.4. *Agar chiziq chekli sondagi silliq bo'laklardan tashkil topgan bo'lsa,u holda u bo'laklari silliq chiziq deyiladi.*

Bo'laklari silliq chiziqqa oddiy misol – siniq chiziqdir.

Teorema 12.1. *Silliq va bo'laklari silliq chiziqlar to'g'rilanuvchi chiziqlardir.*

Isbot. Silliq chiziqning to'g'rilanuvchi ekanligini ko'rsatish kifoya. Faraz qilaylik, Γ silliq chiziqning parametrik tenglamasi

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \le t \le b)$$

bo'lsin.U holda unga ichki chizilgan har qanday siniq chiziqning uzunligi

$$dL=\sum_{k=o}^{n-1}\left|z(t_{k+1})-z(t_k)\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|x(t_{k+1})-x(t_k)+i(y(t_{k+1})-y(t_k))\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\left|x(t_{k+1})-x(t_k)\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\left|y(t_{k+1})-y(t_k)\right|\overset{\substack{Lagranj\\teoremasi}}{=}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left|x'(t_k^*)\right|(t_{k+1}-t_k)+\sum_{k=0}^{n-1}\left|y'(t_k^{**})\right|(t_{k+1}-t_k)\,, \qquad (12.1)$$

bu yerda $t_k<t_k^*,\ t_k^{**}<t_{k+1}$ qandaydir nuqtalar. $|x'(t)|$ va $|y'(t)|$ funksiyalar silliq chiziqning ta'rifiga ko'ra $[a,b]$ oraliqda uzluklsiz funksiyalardir. Shuning uchun ular chegaralangan:

$$|x'(t)|\le M_1, |y'(t)|\le M_2\,, \forall t\in[a,b]\ (\exists M_1,M_2>0 \text{ sonlar uchun}).$$

Shunga asosan (12.1) dan

$$dL\le M_1\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)+\ +M_2\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)=(b-a)(M_1+M_2)<\infty$$

tengsizlikni olamiz. Bu yerda $(b-a)(M_1+M_2)$ L ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmasdir. Shuning uchun to'g'rilanuvchi chiziq ta'rifiga ko'ra Γ to'g'rilanuvchidir.

12.2.Kompleks funksiyaning integrali. Endi kompleks o'zgaruvchili funksiya integralining ta'rifini beramiz. Tekislikdagi Γ to'g'rilanuvchi chiziqda $w=f(z)$ bir qiymatli funksiya berilgan bo'lsin. Γ chiziqning boshlang'ich α nuqtasidan oxirgi β nuqtasiga qarab uzluksiz harakat qilinganda ketma-ket uchraydigan $\forall\alpha=z_0,z_1,\ldots,z_n=\beta$ nuqtalarni olamiz va quyidagi integral yig'indini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(z_k)(z_{k+1}-z_k) \qquad (12.2)$$

$\tilde{A}$ chiziqning z_k va z_{k+1} nuqtalarini tutashtiruvchi qismini S_k,uning uzunligini esa dS_k bilan belgilaymiz.

Ta'rif 12.5. *Agar* $\max\limits_{0\le k\le n-1}dS_k\to 0$ *da (12.2) yig'indi* $\{z_k\}_{k=0}^n$ *nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan holda aniq chekli limitga intilsa, u holda* $f(z)$ *funksiya* Γ *chiziq bo'yicha integrallanuvchi deyiladi. Bu limitning qiymatiga* $f(z)$ *funksiyaning* Γ *chiziq bo'yicha integrali deb ataladi va u*

$$\int_\Gamma f(z)dz=\lim_{\substack{\max dS_k\to 0\\0\le k\le n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}f(z_k)(z_{k+1}-z_k)$$

kabi belgilanadi.

12.3.Integralning mavjudlik sharti.

Teorema 12.2. *Agar* $f(z)$ *funksiya* Γ *to'g'rilanuvchi chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda* $\int\limits_\Gamma f(z)dz$ *integral mavjuddir.*

Isbot. Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$z_k=x_k+iy_k\,,\ f(z_k)=u(x_k,y_k)+iv(x_k,y_k)=u_k+iv_k\,, \Delta z_k=z_{k+1}-z_k=\Delta x_k+i\Delta y_k\,.$$

U holda (12.2) yig'indi quyidagicha ifodalanadi.

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(z_k)(z_{k+1}-z_k)=\sum_{k=0}^{n-1}(u_k+iv_k)(\Delta x_k+i\Delta y_k)=$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{n-1}(v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k)\,. \tag{12.3}$$

Bu (12.3) ifodaning haqiqiy qismi va mavhum qismining koeffisenti haqiqiy analizda o’rganilgan $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ko’rinishdagi ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning integral yig’indilaridir.
Agar $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar Γ to’g’rilanuvchi chiziqda uzluksiz bo’lsa, u holda bunday integral mavjuddir.(G.M.Fixtengols, Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya,tom 3,1949.p.560 ga qarang).Teorema shartiga ko’ra $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalar to’g’rilanuvchi Γ chiziqda uzluksiz bo’lganligi uchun bu yerdan $\max\limits_{0\le k\le n-1} dS_k \to 0$ da (12.3) tenglikning o’ng tomonidagi har bir yig’indining mos ravishda aniq chekli $\int\limits_{\Gamma} udx - vdy$ va $\int\limits_{\Gamma} vdx + udy$ limitlarga intilishi kelib chiqadi. Demak, (12.3) ning chap tomoni ham aniq chekli limitga ega va bu limit quyidagiga teng:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma}(udx - vdy) + i\int\limits_{\Gamma} vdx + udy\,. \tag{12.4}$$

Teorema 12.2 isbot bo’ldi.

12.4. Integralni hisoblash.(12.4) formula quyidagicha yozilsa yaxshi esda saqlanadi:

$$\int\limits_{\tilde{A}} f(z)dz = \int\limits_{\tilde{A}}(u+iv)(dx+idy)\,. \tag{12.4$'$}$$

Bu integralni hisoblash maqsadida Γ chiziqni silliq va $z = z(t), (a \le t \le b)$ tenglamaga ega desak, $(12.4')$ dan quyidagiga ega bo’lamiz:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_a^b \{u[z(t)] + iv[z(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}dt = \int\limits_a^b f[z(t)]z'(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^b \mathrm{Re}\{f[z(t)]z'(t)\}dt + i\int\limits_a^b \mathrm{Im}\{f[z(t)]z'(t)\}dt\,. \tag{12.5}$$

(12.5) formulaga ko’ra kompleks funksiya integralini hisoblash masalasi haqiqiy funksiyalarning odatdagi aniq integrallarini hisoblashga keltirilar ekan.

Misol 12.2. $\int\limits_{|z-a|=R} \dfrac{dz}{z-a}$ integral hisoblansin. Bu yerda $|z-a| = R$ aylana soat strelkasiga teskari yo’nalishda o’tiladi.

Yechish. Aylana silliq chiziq bo’lib, uning parametrik tenglamasi $z = a + \mathrm{Re}^{it}, (0 \le t \le 2\pi)$ dan iborat. $dz = z'(t)dt = i\,\mathrm{Re}^{it}\,dt$ bo’lganligidan (12.5) ga asosan

$$\int\limits_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\,\mathrm{Re}^{it}\,dt}{\mathrm{Re}^{it}} = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i\,.$$

Vazifa: $\int\limits_{|z-a|=R} \dfrac{dz}{(z-a)^n}$ integral hisoblansin, bunda $n \ne -1$ butun son, aylanadagi yo’nalish *Misol 12.1* dagidek.

12.5. Integralning asosiy xossalari. Quyida keltiriladigan xossalarning barchasidagi integrallarni mavjud deb hisoblaymiz.

Quyidagi to’rtta xossa integral ta’rifidan bevosita kelib chiqadi.

$12.1^{\hat{\imath}}$. Agar Γ chiziqni musbat va manfiy yo'nalishlarda o'tishdan hosil bo'lgan chiziqlarni mos ravishda Γ^+ va Γ^- desak,u holda $\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz$.

$12.2^{\hat{\imath}}$. Ixtiyoriy kompleks o'zgarmas α uchun $\int\limits_{\Gamma} \alpha f(z)dz = \alpha \int\limits_{\Gamma} f(z)dz$.

$12.3^{\hat{\imath}}$. Agar $\tilde{A}$ chiziq bo'ylab musbat yo'nalishda harakat qilganda u ketma-ket uchraydigan $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$ chiziqlardan tashkil topgan bo'lsa, u holda
$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int\limits_{\Gamma_n} f(z)dz$.

$12.4^{\hat{\imath}}$. $\int\limits_{\tilde{A}} [f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)]dz = \int\limits_{\tilde{A}} f_1(z)dz + \int\limits_{\tilde{A}} f_2(z)dz + \cdots + \int\limits_{\tilde{A}} f_n(z)dz$

($12.1^{\hat{\imath}} - 12.4^{\hat{\imath}}$ xossalarini isbotlash talabalarga havola qilinadi).

$12.5^{\hat{\imath}}$. Agar Γ chiziqda $|f(z)| \le M,\ M = const$ tengsizlik bajarilsa, u holda

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)dz\right| \le Md\Gamma$$

tengsizlik o'rinli, bunda $d\Gamma -$ Γ chiziqning uzunligi.

Isbot. $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k)\right| \le \sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(z_k)||z_{k+1} - z_k| \le M \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \le Md\Gamma$.

Bu tengsizlikda $\max\limits_k ds_k \to 0$ da limitga o'tsak, $12.5^{\hat{\imath}}$ xossa kelib chiqadi.

$12.6^{\hat{\imath}}$. $12.5^{\hat{\imath}}$ xossa quyidagi yanada aniqroq tengsizlikdan ham kelib chiqadi.

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\Gamma} |f(z)||dz| = \lim_{\substack{\max ds_k \to 0 \\ k}} \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)||z_{k+1} - z_k|.$$

Bu xossaning isboti $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k)\right| \le \sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(z_k)||z_{k+1} - z_k|$ tengsizlikdan kelib chiqadi.

Kompleks analizda sohaning chegarasi bo'yicha olingan integrallar muhim rol o'ynaydi. Faraz qilaylik, D soha chegarasi chekli dona yopiq to'g'rilanuvchi Jordan chiziqlaridan iborat bo'lsin.

Ta'rif 12.6. *Agar $f(z)$ funksiya D sohaning chegarasi ∂D da uzluksiz bo'lsa, u holda ∂D bo'yicha musbat yo'nalishda $f(z)$ funksiyadan olingan integral deb, ∂D ni tashkil etuvchi barcha chiziqlar bo'yicha $f(z)$ dan olingan integrallarning yig'indisiga aytiladi:*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz,$$

bu yerda $\tilde{A}_k$ -chiziqlardagi integrallash yo'nalish shunaqaki, shu yo'nalish bo'ylab harakat qilganda soha chap tomonda qoladi.

12.6. Integral sohaning funksiyasi sifatida additivligi.

Teorema 12.3. *Agar D sohaning chegarasi cheklita to'g'rilanuvchi yopiq Jordan chiziqlaridan iborat bo'lib, $f(z)$ funksiya D sohaning yopig'ida uzluksiz bo'lsa va D soha to'g'rilanuvchi $\tilde{A}_k$ chiziqlar yordamida cheklita bir-birini qoplamaydigan D_k sohalarga bo'lingan bo'lsa, u holda*

$$\varphi(D) = \int\limits_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\partial D_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \varphi(D_k)$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Chizmadan ko'rinadiki, $\sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D_k} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz$ tenglikning chap tomonidagi yig'indi o'ng tomondagi integraldan barcha Γ_k chiziqlar ikki marta har xil yo'nalishlarda olingan integrallar qo'shilganligi bilan farq qiladi. Oxirgi integrallar yig'indisi nolga teng. Demak, tenglik o'rinli va *Teorema 12.3 isbot bo'ldi.*

12.7.Integral belgisi ostida limitga o'tish va takroriy integrallarning tengligi haqidagi teoremalar.

Teorema 12.4. *Faraz qilaylik,* $\tilde{A}$ *-to'grilanuvchi chiziq, E -qandaydir to'plam bo'lib,* $f(z,w)$ *funksiya* $\Gamma \times E$ *da aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar* $w \to w_0$, $w \in E$ *da* $f(z,w)$ *funksiya* $\varphi(z)$ *ga* Γ *da tekis intilsa, u holda* $\lim\limits_{\substack{w\to w_0 \\ w\in E}} \int_{\Gamma} f(z,w)dz \Rightarrow \int_{\Gamma} \varphi(z)dz$ *bo'ladi.*

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists \delta > 0$ son topiladiki, barcha $w \in E$, $|w - w_0| < \delta$ lar uchun $|f(z,w) - \varphi(z)| < \dfrac{\varepsilon}{d\Gamma}$ tengsizlik o'rinli.Integralning 6^0 xossasiga ko'ra

$$\left| \int_{\tilde{A}} [f(z,w) - \varphi(z)]dz \right| \le \frac{\varepsilon}{d\tilde{A}} \int_{\tilde{A}} |dz| = \frac{\varepsilon}{d\tilde{A}} d\tilde{A} = \varepsilon \,.\, \forall w \in E, |w - w_0| < \delta$$ uchun *Teorema 12.4* isbotlandi.

Teorema 12.5. *Agar* Γ *va* C *to'g'rilanuvchi chiziqlar bo'lib,* $f(z,w)$ *funksiya* $\Gamma \times C$ *da uzluksiz bo'lsa, u holda* $F(w) = \int_{\Gamma} f(z,w)dz$ *funksiya ham* C *da uzluksiz bo'lib,*

$\int_C \int_\Gamma f(z,w)dzdw = \int_\Gamma \int_C f(z,w)dwdz$ *tenglik o'rinlidir.*

Teorema 12.5 ning isboti ushbu kursga kirmaydi.

Yangi mavzuni mustahkamlash (10 minut): Talabalardan mavzu yuzasidan savol-javob o'tkazish, oson yechiladigan misollar so'rash, tushinilmagan tasdiq, teorema va formulalarni qayta izohlash va misollar asosida tushuntirish.

Uy vazifa berish va baholash (5 minut): Mavzuni o'qish va konspekt qilish, mavzudagi tayanch iboralarni yodlash va mohiyatini tushunish, muammoli topshiriqlarga mustaqil javob berishni tayinlash. Dars davomida faol qatnashgan va qoniqarsiz qatnashgan talabalarni ta'kidlash va yanada faolroq bo'lishga chorlash. Qo'yilgan ballarni e'lon qilish.

12- mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

16. To'g'rilanuvchi chiziqlarni ta'rifi va tasvirini ayting
17. Kompleks funksiyaning integrali ta'rifi va tasvirini ayting
18. Integralning mavjudlik shartini tushuntiring
19. Integralning xossalarini ayting
20. Integralning sohaning funksiyasi sifatida additivligi ko'rsating.
21. Integral belgisi ostida limitga o'tish va takroriy integrallarning tergligi haqidagi teoremalarni ayting
22. Kompleks argumentli funksiya integrali deb nimaga aytiladi?
23. Qanday funksiyani integrallash mumkin?

24. Kompleks argumentli funksiya integralining qanday xossalarini bilasiz? (misollar keltiring)
25. Integralning hisoblash formulalarini keltiring (misollar yordamida).

10-mavzu: Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi. Murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi. Boshlang'ich funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. Nyuton-Leybnits formulasi.

Dars rejasi:

5. **Asosiy lemma va uning isboti.**
6. **Oddiy kontur uchun Koshinning integral teoremasi uning isbotini soda holga keltirish.**
7. **Oddiy kontur uchun Koshinning integral teoremasining sodda hol uchun isboti.**
8. **Teorema shartlarining muhimligini ko'rsatuvchi misollar.**

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1] - [14]

Dars maqsadlari: *o*ddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi va uning isbotini o'rgatish, misollar yechish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: ***uzluksiz funksiya, bo'lakli silliq chiziq, asosiy lemma, kompleks funksiyadan bo'lakli silliq chiziq bo'yicha olingan integral,oddiy kontur, bir bog'lamli chekli soha, analitik funksiya, Koshining integral teoremasi.***

13.1. Asosiy lemma va uning isboti.

Asosiy lemma. ***Agar*** $w = f(z)$ ***funksiya biror*** D ***sohada uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy bo'lakli silliq*** C ***chiziq bo'yicha olingan*** $\int_C f(z)dz$ ***va*** $\forall\varepsilon > 0$ ***son uchun*** D ***sohada yotuvchi va*** C ***chiziqqa ichki chizilgan shunday*** P ***siniq chiziq topiladiki,***

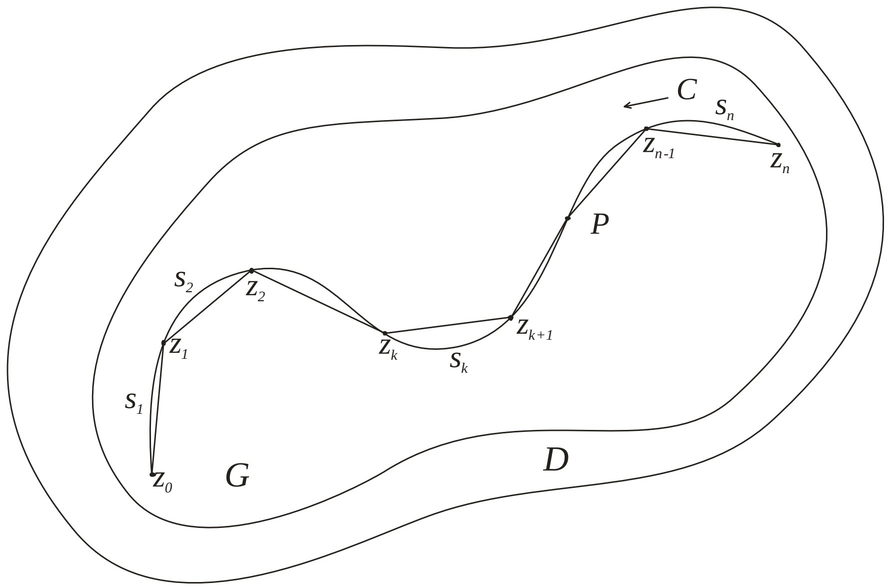
$$\left|\int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz\right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. **Shunday** G **soha olamizki, u chegaralangan bo'lib,** C **chiziqni o'zida saqlasin va** $\overline{G} \subset D$ **bo'lsin. Berilgan** $f(z)$ **funksiya** $\overline{G}$ **sohada uzluksiz bo'lganligidan Kantor teoremasiga ko'ra u shu sohada tekis uzluksizdir,ya'ni** $\forall\varepsilon > 0$ **son uchun** $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ **son topiladiki,** $\forall z', z'' \in \overline{G}$ **da** $|z' - z''| < \delta$ **tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar uchun**

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2l} \qquad \textbf{(13.1)}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi (bu yerda $l - C$ **ciziqning uzunligidir).** C **chiziqni uni musbat yo'nalishda o'tganda ketma-ket uchraydigan** $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ **nuqtalar bilan shunaqa** $s_1, s_2, \ldots, s_n$ **bo'laklarga ajratamizki, ixtiyoriy** k **uchun** s_k **bo'lakchaning uzunligi uchun** $ds_k < \delta$ **shart bajarilsin.Qo'shni nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari orqali shunaqa tutashtiramizki, natijada hosil bo'lgan** P **siniq chiziq** G **sohada yotsin. Istalgan holda nuqtalar sonini oshirish evaziga bunga erishish mumkin (13.1-chizmaga qarang).**



13.1-chizma

Endi o’tilgan 12-mavzuda yechilgan misolni eslatamiz: agar $C-$ boshlang’ich va oxirgi nuqtalari z_0 va z dan iborat bo’lgan ixtiyoriy bo’laklari silliq chiziq bo’lsa, u holda istalgan $n \neq -1$ butun son uchun

$$\int_C z^n dz = \frac{1}{n+1}(z^{n+1} - z_0^{n+1}). \qquad (13.2)$$

Bu yerda n manfiy bo’lsa, u holda C chiziq $z=0$ nuqtadan o’tmaydi. (13.2) formulaga ko’ra

$$S := \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{S_{k+1}} f(z_k)dz \qquad \mathbf{(13.3)}$$

va integralning 12-mavzuda isbotlangan 3^0 xossasiga ko’ra

$$\int_{\tilde{N}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{S_{k+1}} f(z)dz \qquad \mathbf{(13.4)}$$

(13.1), (13.3), (13.4) munosabatlar va 12-mavzuda qaralgan integralning 6^0 xossasiga binoan

$$\left|\int_C f(z)dz - S\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{S_{k+1}} [f(z) - f(z_k)]dz\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{S_{k+1}} |f(z) - f(z_k)||dz| < \frac{\varepsilon}{2l} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{S_{k+1}} |dz| = \frac{\varepsilon}{2l} l = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \mathbf{(13.5)}$$

Shunga o’xshash P ning qismlarini l_k orqali belgilab,

$$\int_P f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{l_{k+1}} f(z)dz, \quad \left|\int_P f(z)dz - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \mathbf{(13.6)}$$

O’rinli ekanligini ko’rsatamiz. Lemmaning isboti (13.5) va (13.6) tengsizliklardan kelib chiqadi:

$$\left|\int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz\right| \leq \left|\int_C f(z)dz - S\right| + \left|\int_P f(z)dz - S\right| < \varepsilon$$

Lemma isbot bo’ldi.

13.2. Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi va uning isbotini sodda holda keltirish.

Koshining integral teoremasi Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasi kursining eng asosiy teoremasidan iborat bo’lib, boshqa barcha muhim teoremalar shu teorema yordamida isbotlanadi.

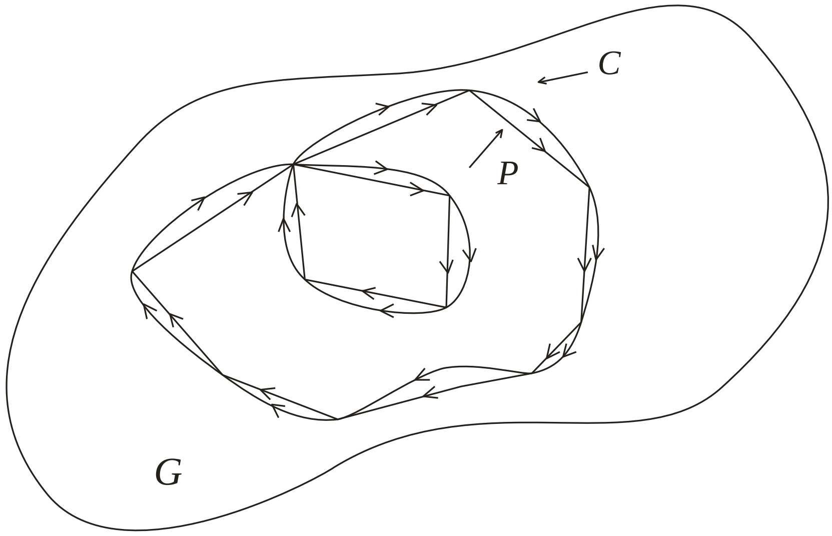
Teorema 13.1 (Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi). Agar $w = f(z)$ ***funksiya chekli va bir bog’lamli*** G ***sohada analitik bo’lsa, u holda*** G ***sohada yotuvchi ixtiyoriy yopiq bo’lakli-silliq*** C ***chiziq bo’yicha*** $f(z)$ ***funksiyadan olingan integral*** 0 ***ga teng, ya’ni***

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Bu teorema quyidagi teoremaga ekvivalent (teng kuchli).

Teorema* 13.2. *Agar Koshining integral teoremasining shartlari bajarilsa, u holda $f(z)$ funsiyadan G -da yotuvchi har qanday L bo'lakli silliq chiziq bo'yicha olingan integralning qiymati chiziqning formasi (shakli)dan bog'liq bo'lmasdan, uning boshlang'ich va oxitgi nuqtalaridangina bog'liq bo'ladi.

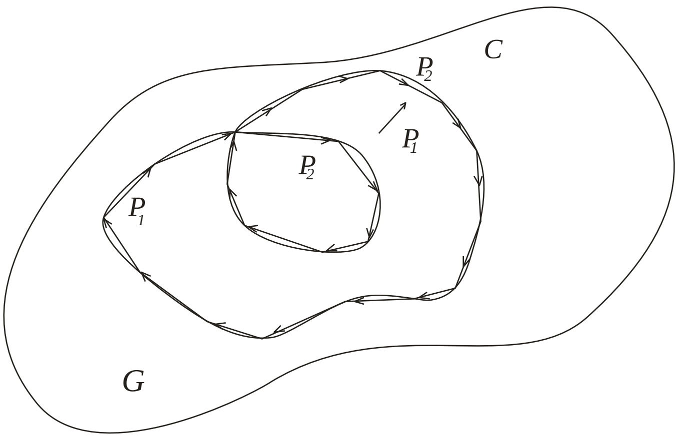
***Teorema 13.2* isbotini sodda holga keltiramiz. Asosiy lemmaga ko'ra agar biz teoremani *G* sohada yotuvchi ixtiyoriy yopiq siniq chiziq uchun isbotlasak, Koshi teoremasi isbot bo'ladi. Haqiqattan, asosiy lemmaga binoan $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunaqa *C* ga ichki chizilgan yopiq siniq P chiziq ($P \subset G$) topiladiki, $\left|\int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz\right| < \varepsilon$ bajariladi. Agar $\int_P f(z)dz = 0$ bo'lsa, u holda $\left|\int_c f(z)dz\right| < \varepsilon$, ya'ni $\int_C f(z)dz = 0$ (13.2-chizmaga qarang).**



13.2-chizma

Bu yerdan va integralning additivlik xossasidan, agar biz Koshi teoremasini *G* sohada yotuvchi ixtiyoriy ko'pburchakning perimetri uchun isbotlasak, u holda umumiy hol uchun Koshi teoremasining isboti kelib chiqadi (13.3- chizmaga qarang):

$$\int_P f(z)dz = \int_{P_1} f(z)dz + \int_{P_2} f(z)dz$$

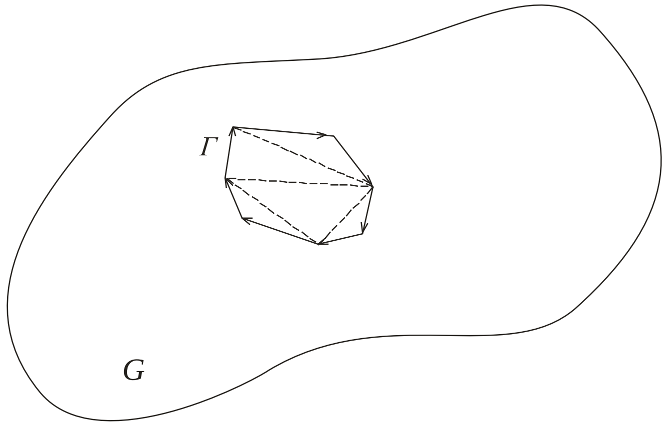


13.3-chizma

Har bir P ko'pburchakni chekli sondagi bir-birini qonlamaydigan $\Delta_k, k=\overline{1,n}$ uchburchaklarga ajlatish mumkin. Demak, integralning soha chegarasi funksiyasi sifatida additivlik xossasiga ko'ra

$$\int\limits_P f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Delta_k} f(z)dz$$

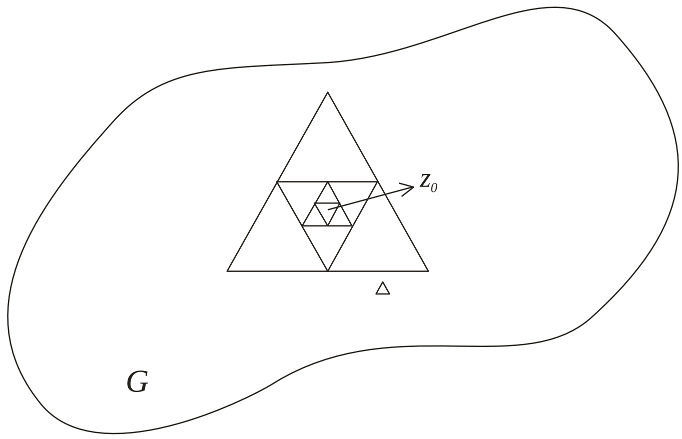
bo'lganligidan, Koshi teoremasining isboti uchun *G* sohada yotuvchi ixtiyoriy Δ uchburchakning perimetri bo'yicha olingan $\int\limits_P f(z)dz = 0$ ekanligini ko'rs atish kifoya (13.4-chizmaga qarang).



13.4-chizma

***13.3. Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasining sodda hol uchun isboti.* Faraz qilaylik, Δ G sohaga qarashli ixtiyoriy uchburchak, $\partial\Delta$ uning perimetri, $d(\partial\Delta)-\Delta$ uchburchak perimetrining uzunligi bo'lsin. U holda $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ ekanligini isbotlash kerak. Teskari fikrni, ya'ni**

$\left|\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz\right| = M > 0$ ni faraz qilamiz.



13.5-chizma

Δ uchburchak tomonlari o'rtalarini to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtiramiz.Natijada Δ uchburchak to'rtta kongruent (teng) $\Delta_i, i=1,2,3,4$ uchburchaklarga bo'linadi. Bu Δ_i uchburchaklarning hech bo'lmaganda biri (uni $\Delta^{(1)}$ deb belgilaymiz) uchun

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4} \qquad (13.7)^{(1)}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Aks holda integralning soha chegarasining funksiyasi sifatida additivlik xossasidan va uchburchak tengsizligidan quyidagi zidlik kelib chiqardi:

$$M=\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right|=\left|\sum_1^4 \int_{\partial\Delta_i} f(z)dz\right|\le \sum_1^4\left|\int_{\partial\Delta_i} f(z)dz\right|<4\frac{M}{4}=M\ .$$

$\Delta^{(1)}$ uchburchakni ham yuqoridagi kabi to'rtta kongruent uchburchaklarga ajratamizki, ulardan hech bo'lmaganda biri (uni $\Delta^{(2)}$ bilan belgilaymiz) uchun

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z)dz\right|\ge\frac{M}{4^2} \qquad (13.7)^{(2)}$$

tengsizlik o'rinli. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, natijada har biri keyingisini o'z ichida saqlovchi, va $\Delta^{(n)}$ uchburchak uchun

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)dz\right|\ge\frac{M}{4^n} \qquad (13.7)^{(n)}$$

o'rinli bo'lgan uchburchaklarning $\Delta,\Delta^{(1)},\Delta^{(2)},\ldots,\Delta^{(n)},\ldots$ ketma-ketligini hosil qilamiz.

Kompleks sonlar limitlari nazariyasining asosiy prinsipiga binoan G sohada yagona z_0 nuqta topiladiki, u barcha $\Delta^{(n)}$ uchburchaklarga qarashli bo'ladi. Bu z_0 nuqtada $w=f(z)$ funksiya differensiallanuvchi, ya'ni $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunaqa $\delta>0$ son mavjudki, har bir $z:|z-z_0|<\delta$ uchun

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon$$

yoki

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0| \qquad (13.8)$$

tengsizlik o'rinlidir.

$n\to\infty$ da $\Delta^{(n)}$ uchburchaklar z_0 nuqtada cheksiz tortilib borganligi tufayli shunaqa n_0 nomer topiladiki, $\forall n\ge n_0$ tengsizlik uchun barcha $\Delta^{(n)}\subset U_\delta(z_0)==\{z:|z-z_0|<\delta\}$. U holda mavzu 13.1-qismidagi (13.2) formula, (13.8) tengsizlik va integralning 6^0- xossasiga ko'ra $\forall n\ge n_0$ tengsizlik uchun

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)dz\right|=\left|\int_{\partial\Delta^{(n)}}[f(z)-\right.$$

$$\left.-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)]dz\right|\le\int_{\partial\Delta^{(n)}}|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)||dz|=\ \le$$

$$\varepsilon\int_{\partial\Delta^{(n)}}|z-z_0||dz|\le\varepsilon\frac{d(\partial\Delta)}{2^n}\int_{\partial\Delta^{(n)}}|dz|=\varepsilon\frac{d^2(\partial\Delta)}{4^n}. \qquad (13.9)$$

$(13.7)^{(n)}$ va (13.9) tengsizliklarni solishtirib, $\frac{M}{4^n}<\varepsilon\frac{d^2(\partial\Delta)}{4^n}$ yoki $M<\varepsilon d^2(\partial\Delta)$ ga ega bo'lamiz. Bu esa bizning $M>0$ degan farazimizga qarama-qarshidir. Demak, farazimia noto'g'ri. *Teorema 13.2 isbot bo'ldi.*

13.4. Teorema shartlarining muhumligini ko'rsatuvchi misollar. 13.1-teorema shartlaridan hech birini talab qilmasdan yoki shartlarning hech birini kamaytirib u o'rinli bo'ladi deb aytish mumkin emas:

1) funksiyaning differensiallanuvchilik shartini hech bir nuqtada talab qilmaslik mumkin emas. Haqiqatan ham agar $f(z)=\frac{1}{z},G=\{z:|z|<2\},C=\{z:|z|=1\}$ bo'lsa,u holda $\int_C\frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{e^{it}}dt=2\pi i\ne0$;

2) G sohaning chekli ekanligini talab qilmaslik mumkin emas.Agar $G=\{z:|z|>\frac{1}{2}\}$ deb olsak, u holda $C\subset G$ va yana $\int\limits_C \frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0$;

3) G sohaning bir bog'lamlilik shartini talab qilmaslik mumkin emas.Agar $G=\{z:\frac{1}{2}<|z|<2\}$ deb olsak, u holda $C\subset G$ va yana $\int\limits_C \frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0$;

4) $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{ze^z}{z^2+9}dz$ integralni hisoblang.Agar $G=\{z:|z|<2\}, C=\{z:|z|=1\}$ $f(z)=\frac{ze^z}{z^2+9}$ kabi tanlasak, u holda oddiy kontur uchun Koshi teoremasining hamma shartlari bajariladi. Demak, $I=0$.

***14.1.*Murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi.**

Avval quyidagi tasdiqni isbot qilamiz: *Agar w=f(z) funksiya biror yopiq bo'lakli silliq Γ Jordan chizig'i va uning ichkarisida analitik bo'lsa, u holda*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=0.$$

Isbot. *Γ* chiziq va uning ichkarisidan iborat yopiq sohaning har bir nuqtasi uchun markazi shu nuqtadan iborat shunaqa doira topiladiki, uning har bir nuqtasida *w=f(z)* funksiya analitikdir.Geyne-Borel lemmasiga ko'ra shu doiralarning cheklitasi mavjudki, ular birgalikda *Γ* chiziq va uning ichkarisini qoplaydi.Agar bu doiralarning summasini *G* bilan belgilasak, u holda *G* bir bog'lamli chegaralangan soha bo'lib, $\Gamma\subset G$ bo'ladi.Shuning uchun oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasiga binoan

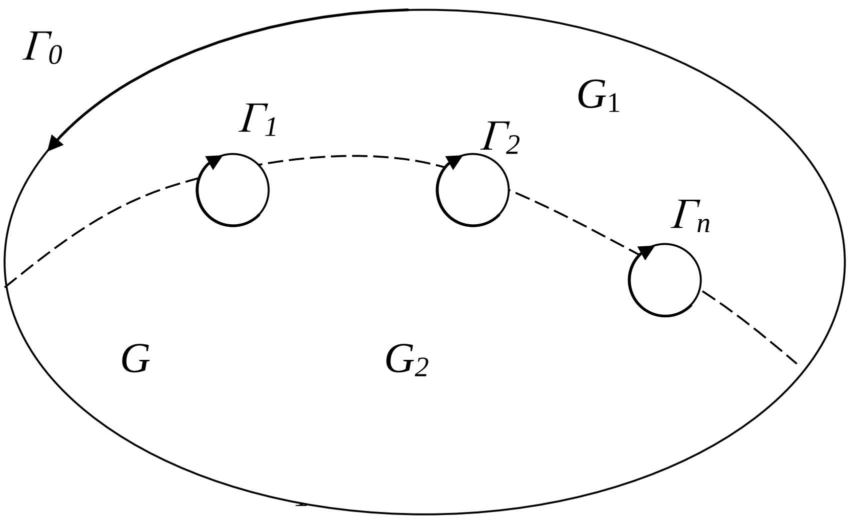
$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=0$$

dir. *Tasdiq isbot bo'ldi.*

Teorema 14.1 (murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi). *Agar G soha chegaralangan, chegarasi n+1 ta yopiq bo'lakli silliq Jordan chiziqlaridan iborat soha bo'lib, yopiq* $\overline{G}$ *sohada w=f(z) funksiya analitik bo'lsa, u holda*

$$\int\limits_{\partial G} f(z)dz=0 \Leftrightarrow \int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz \qquad (14.1)$$

(14.1-rasmga qarang)



Isbot. *G* soha chegarasi ∂G ning kompanentalarini to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirish orqali *G* ni ikkita bir bog'lamli G_1 va G_2 sohalarga ajratamiz.Integralning siha funksiyasi sifatida additivligiga ko'ra

$$\int_{\partial G} f(z)dz = \int_{\partial G_1} f(z)dz + \int_{\partial G_2} f(z)dz\ .$$

Isbot qilingan oxirgi fikrga binoan

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 0, i=1,2.$$

Demak,

$$.\ \int_{\partial G} f(z)dz = 0.$$

Teorema 14.1 isbot bo'ldi.

14.2. Boshlang'ich funksiya mavjudligining yetarli sharti. Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasidan *G* soha chekli va bir bog'lamli bo'lganda, boshlang'ich nuqtasi z_0 va oxirgi nuqtasi *z* dan iborat ixtiyoriy $\tilde{A} \subset G$ bo'laklari silliq chiziq bo'yicha *G* da analitik *w=f(z)* funksiyadan olingan integralning qiymati chiziqning formasidan bog'liq bo'lmasdan, uning z_0 va *z* nuqtalaridan bog'liq ekanligidan

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \qquad (14.2)$$

funksiyani aniqlash mumkin.Agar z_0 qayd qilingan, *z* esa o'zgaruvchi deb olsak, u holda *F(z) G* sohada bir qiymatli funksiya bo'ladi.Endi $\forall z \in G$ uchun *F(z)* funksiya hosilaga ega va $F'(z) = f(z)$ ekanligini ko'rsatamiz.Haqiqatan ham, *z* nuqta kichik atrofidan ixtiyoriy *z+1* nuqtani olib,

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda integral $z = z + h$ nuqtalarni tutashtiruvchi *L* to'g'ri chiziq kesmasi bo'yicha olinadi.Bu yerdan

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}[f(\zeta) - f(z)]d\zeta\ . \qquad (14.3)$$

$w = f(z)$ funksiya $\zeta = z$ nuqtada uzluksiz, chunki u *G* da differensiallanuvchi.
Shuning uchun

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, |\zeta - z| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \qquad (14.4)$$

tengsizlik bajariladi.Agar $|h| < \delta$ bo'lsa, u holda $\forall\zeta \in L$ uchun $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.Bu yerdan va (3) munosabatdan

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon\ ,$$

ya'ni $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$, yoki $\forall z \in G$ uchun $F'(z) = f(z)$.

Ta'rif 14.1. *Agar* $\forall z \in G$ *uchun* $\hat{O}'(z) = f(z)$ *bajarilsa, u holda G sohada analitik* $w = \hat{O}(z)$ *funksiya shu sohada aniqlangan f(z) funksiya uchun boshlang'ich funksiya yoki aniqmas integral deyiladi.*

Yuqorida biz quyidagi teoremani isbotladik.

Teorema 14.2. *Agar f(z) funksiya G sohada uzluksiz bo'lib, G da yotuvchi ixtiyoriy yopiq bo'lakli-silliq Γ chiziq uchun* $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ *bajarilsa, u holda f(z) funksiya G sohada boshlang'ich funksiyaga ega bo'lib, ulardan biri*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

kabi ifodalanadi.

Endi isbotlaymizki, agar *f(z)* funksiya boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda u cheksiz ko'p boshlang'ich funksiyalarga ega bo'ladi va ularning umumiy ko'rinishi

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + c$$

bu yerda $c = const \in C$ kabi ifodalanadi. Haqiqatan ham, agar

$$\psi(z) = \phi(z) - F(z)$$

deb olsak, bu funksiya hosilasi

$$\psi'(z) = \phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0 \quad (\forall z \in G)$$

tenglikni olamiz. U holda $\psi(z) = u + iv$ bo'lsa,

$$\psi'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\psi(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$

Bu yerdan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0,$$

ya'ni

$$u(x, y) \equiv const, v(x, y) = const$$

bo'lib, bundan $\psi(z) \equiv c \in C$ ekanligini olamiz.
Demak,

$$\phi(z) = F(z) + c = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi + C.$$

Faraz qilaylik, $\phi(z)$ $f(z)$ ning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. U holda $\phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi + C$ .Bu yerda $z = z_0$ deb olsak, $\phi(z_0) = C$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \phi(z) - \phi(z_0)$, ya'ni Nyuton-Leybnits formulasi o'rinli.

Demak, agar *G* bir bog'lamli chekli soha bo'lib, *w=f(z)* funksiya unda analitik bo'lsa, u holda integrallash jarayonini differensiallashga nisbatan teskari jarayon deb qarash mumkin ekan.

10- mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. To'g'rilanuvchi chiziqlarni ta'rifi va tasvirini ayting
2. Boshlang'ich funksiya mavjudligining yetarli shartini tushuntiring
3. Integralning xossalarini ayting
4. Integralning sohaning funksiyasi sifatida additivligi ko'rsating.
5. Integral belgisi ostida limitga o'tish va takroriy integrallarning tergligi haqidagi teoremalarni ayting

6. Murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasini isbotlang.
7. Qanday funksiyani integrallash mumkin?

11-mavzu: Darajali qatorlar. Abelning birinchi teoremasi. Koshi-Adamar formulasi. Golomorf funksiyalarni Teylor qatorlariga yoyish.

Dars rejasi:

5. Darajali kompleks qatorning yaqinlashish sohasi. Abelning birinchi teoremasi.
6. Darajali kompleks qatorning yaqinlashish doirasi.
7. Manfiymas sonlar ketma –ketligining yuqori limiti.
8. Koshi –Adamar formulasi.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [2], [5], [6]

Dars maqsadlari: kompleks o'zgaruvchili funksional qatorning xususiy holidan iborat darajali qator, uning yaqinlashish sohasi, yaqinlashish radiusi haqida umumiy ma'lumotlar berish, darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish doirasi haqida tasdiqlarni o'rgatish va uni misollar orqali o'quvchiga tushuntirish bilan talabada kompleks hadli darajali qator haqida bilim va ko'nikma hosil qilish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *kompleks hadli darajali qatorlar, darajali qatorning yaqinlashish sohasi, absolyut yaqinlashuvchi qator, Abelning birinchi teoremasi, darajali kompleks qatorning yaqinlashish doirasi, manfiymas sonlar ketma –ketligining yuqori limiti, Koshi-Adamar formulasi.*

8.1. Darajali kompleks qatorning yaqinlashish sohasi. Abelning birinchi teoremasi.

Ta'rif 8.1.

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+...+c_n(z-a)^n+... \tag{8.1}$$

ko'rinishdagi qatorlarga kompleks hadli darajali qator deyiladi, bunda $c_0, c_1, c_2, ..., c_n, \cdots$ va a berilgan kompleks sonlar, z - kompleks o'zgaruvchi.

Xususiy holda, agar (8.1) da $a=0$ bo'lsa, u holda

$$c_0+c_1z+c_2z^2+...+c_nz^n+... \tag{8.2}$$

ko'rinishdagi darajali qator hosil bo'ladi.

Darajali kompleks qator kompleks hadli funksional qatorning umumiy hadi $u_n(z)=c_nz^n$ bo'lgan xususiy holidan iboratdir.

Ta'rif 8.2. *(8.1) qator yaqinlashuvchi bo'ladigan barcha* z *nuqtalar to'plamiga (8.1) darajali qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.*

Aniqlanishidan (8.1) va (8.2) ko'rinishdagi istalgan darajali qatorlarning yaqinlashish sohalari mos ravishda $z=a$ va $z=0$ nuqtani o'zida saqlaydi. Yaqinlashish sohasi faqat bitta nuqtadan masalan, 0 nuqtadan iborat darajali qator mavjudmi yoki yo'qmi degan savol tug'iladi. Bu savolning javobi musbatdir, ya'ni bunday darajali qatorlar mavjud. Masalan,

$$1+z+2^2z^2+\cdots+n^nz^n+\cdots. \tag{8.3}$$

Haqiqatan ham, agar $\forall z_0 \neq 0$ kompleks son bo'lsa , u holda $\left|n^nz_0^n\right|=(n|z_0|)^n>2^n$ tengsizlik barcha $n>\dfrac{2}{|z_0|}$ lar uchun. Bundan qaralayotgan (8.3) qatorning $\forall z_0 \neq 0$ nuqtada uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi, chunki uning umumiy hadi nolga intilmaydi $\lim\limits_{n\to\infty} n^nz_0^n=\infty$.

Teorema 8.1. (Abelning birinchi teoremasi). *Agar (8.2) qator biror* $z=z_0 \neq 0$ *kompleks qiymatda yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda z ning* $|z|<|z_0|$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy qiymatida (8.2) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Geometrik nuqtai nazardan bu teoremani quyidagicha ifodalash mumkin: agar (8.2) qator biror $z = z_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda u markazi nol nuqtadan iborat va z_0 nuqtadan o'tuvchi aylananing ichkarisida yotuvchi har bir z nuqtada absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga muvofiq (8.2) qator biror $z = z_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashuvchidir, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$ bo'ladi. Bu ketma – ketlik chegaralangan ham bo'ladi, ya'ni shunday $M > 0$ son topiladiki, $\forall n$ - natural son uchun $\left|c_n z^n\right| < M$ o'rinlidir. U holda

$$\left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| = \left|c_n z_0^n\right| \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n < Mq^n, \text{ bunda } q = \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right) < 1. \tag{8.4}$$

Ikkinchi tomondan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyadan iborat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun (8.4) va Veyershtrass alomatiga ko'ra har bir $|z| < |z_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi z nuqtada (8.2) qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. *Teorema-8.1 isbot bo'ldi.*

Bu teorema asosida darajali qatorlar yaqinlashish sohasining tuzilishini aniqlash mumkin.

8.2. Darajali kompleks qatorning yaqinlashishi doirasi. Yuqorida yaqinlashish sohasi faqat 0 nuqtadan iborat (8.2) ko'rinishdagi (8.3) darajali qatorni qaradik. Yana shunaqa darajali qatorlar ham mavjudki, ularning yaqinlashish sohasi butun kompleks tekislikdan iborat bo'ladi. Masalan,

$$1 + z + \frac{1}{2^2} z^2 + \ldots + \frac{1}{n^n} z^n + \ldots \tag{8.5}$$

$\forall z \in C$ uchun $\left|\frac{1}{n^n} z^n\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n > 2|z|$. Bu tengsizlik va Veyershtrass alomatiga asosan (8.5) qator $\forall z \in C$ nuqtada absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. Endi faraz qilamizki, (8.2) darajali qator biror $z \neq 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lib, boshqa bir nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsin. Masalan, ushbu tasdiqni

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots \tag{8.6}$$

qator qanoatlantiradi. Chunki, (8.6) darajali qator $z = \frac{1}{2}$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lib, $z = 2$ nuqtada uzoqlashuvchidir. Nima uchun shundayligini tushuntirish talabalarga havola qilinadi.

Bunday qatorlar yaqinlashish sohasining tuzilishini Abelning birinchi teoremasi yordamida aniqlash mumkin. Buning natijasida biz yuqorida qaragan (8.6) qatorning xususiyatlariga ega bo'lgan har bir (8.2) darajali qator uchun markazi 0 nuqtada joylashgan biror $R,\ 0 < R < \infty$, radiusli doira mavjud bo'lib, uning har bir ichki nuqtasida (8.2) qator absolyut yaqinlashuvchi, har bir tashqi nuqtasida esa (8.2) qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar biz yaqinlashish sohasi faqat $\{0\}$ nuqtadan iborat qatorlarni markazi 0 nuqta radiusi R=0 dan iborat doirada yaqinlashuvchi va yaqinlashish sohasi butun kompleks tekislikdan iborat qatorlarni esa markazi 0 nuqtada radiusi $R = \infty$ dan iborat doirada yaqinlashuvchi deb qabul qilsak, u holda quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

***Teorema* 8.2.** *Har bir (8.2) ko'rinishdagi qator uchun markazi 0 nuqtadagi biror $R,\ 0 \le R \le \infty$ radiusli doira mavjudki,bu doiraning har bir ichki nuqtasida (8.2) qator absolyut yaqinlashuvchi va uning har bir tashqi nuqtasida (8.2) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.*

Bu doira (8.2) qatorning yaqinlashish doirasi, uning radiusi esa (8.2) qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi.

8.3.Manfiymas sonlar ketma –ketligining yuqori limiti. Faraz qilaylik

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{8.7}$$

manfiymas sonlar ketma – ketligi bo'lsin.

1. Agar (8.7) ketma – ketlik chegaralanmagan bo'lsa, u holda uning yuqori limiti deb ∞ ni qabul qilamiz.

2. Agar (8.7) ketma – ketlik chegaralangan bo'lsa, ya'ni $\forall n = 1,2,...$ uchun $a_n \le A$ bo'lsa, u holda u $[0, A]$ kesmada joylashib, Bolsano - Veyershtrass teoremasiga ko'ra hech bo'lmaganda bitta limitik nuqtaga ega bo'ladi. Bu ketma – ketlik barcha limitik nuqtalari to'plamini E bilan belgilamiz. Agar E chekli sondagi nuqtalar to'plamidan iborat bo'lsa, u holda ularning hamma limitik nuqtalaridan o'ngroqda joylashganiga mos keluvchi sonni (8.7) ketma – ketlikning yuqori limiti deb ataymiz. Agar E to'plam cheksiz bo'lsa, u holda bu hol uchun ham isbotlash mumkinki, barcha limitik nuqtalardan o'ngroqda joylashgan limitik A_0 nuqta mavjud bo'ladi. Shu nuqtaga mos keluvchi sonni (8.7) ketma – ketlikning yuqori limiti deb ataymiz. Shunday qilib, istalgan holda ham (8.7) ketma – ketlikning $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = l$ yuqori limiti mavjud va u $0 \le l \le \infty$ tengsizliklarni qanoatlantiradi.

8.4.Koshi –Adamar formulasi. Faraz qilaylik bizga kompleks hadli

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ... \tag{8.2}$$

darajali qator berilgan bo'lsin. Uning koeffisientlaridan foydalanib

$$|c_0|, |c_1|, \sqrt{|c_2|}, ..., \sqrt[n]{|c_n|}, ... \tag{8.8}$$

manfiymas sonli ketma – ketlikni tuzamiz.

Teorema-8.3 (Koshi -Adamar). *(8.2) qatorning yaqinlashish radiusi*

$$R = \frac{1}{l}, \ l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{8.9}$$

ga teng.

Odatda (8.9) formula Koshi –Adamar formulasi deyiladi.

Isbot. Isbotni quyidagi uch hol uchun alohida alohida bajaramiz.

1. $l = \infty, R = 0$; **2.** $l = 0, R = \infty$; **3.** $0 < l < \infty, R = \frac{1}{l}$.

1-hol. Faraz qilaylik $l = \infty\,(R = 0)$ bo'lsin, ya'ni (8.8) ketma –ketlik chegaralanmagan. U holda (8.2) qator $z = 0$ nuqtada yaqinlashuvchi va $z \ne 0$ nuqtalarda uzoqlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. (8.2) qatorning $z = 0$ nuqtada yaqinlashuvchanligi yuqorida ta'kidlanganidek ravshan. Faraz qilaylik (8.2) qator biror $z_0 \ne 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsin. Qator yaqinlashishining zaruriy shartiga ko'ra $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$ tenglik bajariladi. Bu yerdan $\{c_n z_0^n\}$ ketma – ketlikning chegaralanganligi, ya'ni $\exists M > 0$ son mavjud bo'lib , $\forall n = 1,2,...$ uchun $|c_n z_0^n| < M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Oxirgi tengsizlikni $z_0 \ne 0$ ekanligidan foydalanib $|c_n| < M / |z_0|^n$ yoki $\sqrt[n]{|c_n|} < \sqrt[n]{M} / |z_0| = M_1 > 0$ ko'rinishda tasvirlab, ko'ramizki, $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ ketma – ketlik chegaralangan ekanligini hosil qilamiz. Bu esa $l = \infty$ ga ziddir, ya'ni farazimiz noto'g'ri va shuning uchun bu holda (8.2) qator $\forall z_0 \ne 0$ nuqtada uzoqlashuvchi ekan. Bu esa bizga kerakli tasdiqdir.

2-hol. $l = 0$ bo'lsin. Bu holda biz (8.2) qator kompleks tekislikning ixtiyoriy nuqtasida yaqinlashuvchi ekanligini isbotlashimiz lozim. Bizga ma'lumki, (8.2) ko'rinishdagi ixtiyoriy qator $z = 0$ nuqtada yaqinlashuvchi. Shuning uchun (8.2) qatorning istalgan $\forall z_0 \ne 0$ nuqtada yaqinlashishini ko'rsatish kifoya . $l = 0$ bo'lsa, u holda (8.8) ketma – ketlik uchun $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0,$

ya'ni $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shuday n_0 natural son topilib , $\forall n > n_0$ larda $\sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $\varepsilon = \dfrac{1}{2|z_0|}$ deb olsak, u holda

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_0|}, \sqrt[n]{|c_n|}|z_0| < \frac{1}{2} \Rightarrow |c_n z_0^n| < \frac{1}{2^n}, \quad \forall n > n_0$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik va Veyershtrass alomatidan (8.2) qatorning z_0 nuqtada absolyut yaqinlashishi kelib chiqadi.

3-hol. Faraz qilylik, $0 < l < \infty$ bo'lsin. Bu holda biz $R = \dfrac{1}{l}$ ekanligini isbotlashimiz lozim. Buning uchun (8.2) qatorning dastlab $\forall z_1 : |z_1| < \dfrac{1}{l}$ nuqtalar to'plamida absalyut yaqinlashuvchi ekanligini, so'ngra $\forall z_2 : |z_2| > \dfrac{1}{l}$ nuqtalar to'plamida esa uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsatishimiz kifoya. 1) l yuqori limit bo'lganligi uchun $\forall\varepsilon > 0$, shunday n_0 nomer topiladiki, $\forall n > n_0$ uchun $\sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Agar $\varepsilon = (1 - l|z_1|)/(2|z_1|) > 0$ deb olsak, u holda

$$\sqrt[n]{|c_n|} < (l|z_1| + 1)/(2|z_1|) \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|}|z_1| < (l|z_1| + 1)/2 = q < 1$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik va Veyershtrass alomatiga muvofiq (8.2) qator z_1 nuqtada absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) Endi (8.2) qatorning $\forall z_2 : |z_2| > \dfrac{1}{l}$ nuqtalar to'plamida esa uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz. l limitik nuqta bo'lganligi uchun $\forall\varepsilon > 0$ son va n natural sonning cheksiz ko'p qiymatlari uchun $\sqrt[n]{|a_n|} > l - \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $\varepsilon = (l|z_2| - 1)/|z_2| > 0$ bo'lsa, u holda $\sqrt[n]{|c_n|} > 1/|z_2|$ yoki $\sqrt[n]{|c_n|}|z_2| > 1$ tengsizlik $n \in N$ ning cheksiz ko'p qiymatlarida bajariladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_2^n \neq 0$. Demak, $z = z_2$ nuqtada (8.2) qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi. Shuning uchun (8.2) qator $z = z_2$ nuqtada uzoqlashuvchidir. *Koshi –Adamar teoremasi to'la isbot bo'ldi.*

11-mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1.Darajali qator deb nimaga ayiladi?
2.Darajali qatorning yaqinlashish sohasi deb nimaga aytiladi?
3.Abelning 1-teoremasi nima haqida?
4.Haqiqiy sonlar ketma-ketligining yuqori va quyi limiti deganda nimani tushunasiz?
5.Darajali qatorning yaqinlashish radiusi uchun formulalarni yozing.
6.Koshi-Adamar formulasini yozing.
7.Yaqinlashish radiusi 0 ga va ∞ ga teng darajali qatorlar yozing. Bu nimani anglatadi?

12-mavzu: Yagonalik teoremasi. Analitik davom ettirish prinsipi. Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyish.

Dars rejasi:

1. Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyish.
2. Koshi tengsizligi (darajali qator koeffisentlari uchun).
3. Yagonalik teoremasi.
4. Analitik davom ettirish prinsipi.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1] - [14]

Dars maqsadlari: analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyish, Koshi tengsizligi, yagonalik teoremasi va analitik davom ettirish prinsplarini o'rgatish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *Analitik funksiya,Teylor qatori,yadro,tekis yaqinlashuvchi qator,yuagonalik teoremasi,analitik davom prinsipi.*

16.1.Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyish.

Teorema 16.1. *Agar* $w = f(z)$ *funksiya* G *sohada analitik bo'lsa, u holda har bir* $a \in G$ *nuqtaning biror atrofida bu funksiya*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, \forall z \in U_r(a), \qquad (16.1)$$

ko'rinishda ifodalanadi, bu yerda

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - a| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \forall \rho : 0 < \rho < r \text{ yoki } C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0,1,2,\ldots \qquad (16.2)$$

Teylor koeffisentlari, (16.1) qator esa $w = f(z)$ *funksiyaning a nuqta atrofidagi Teylor qatori deb ataladi.*

Isbot. Faraz qilamizki, $\forall a \in G$, a nuqtaning shunaqa yetarlicha katta $U_r(a)$ atrofini olamizki, $\overline{U}_r(a) \subset G$ shart bajarilsin.U holda Koshining integral formulasiga ko'ra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \forall z \in U_r(a). \qquad (16.3)$$

Koshi integrali yadrosini quyidagi qatorga yoyish mumkin:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z-a)} = \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\xi - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} \qquad (16.4)$$

Ma'lumki, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ yoyilma $|z| < 1$ doirada yaqinlashuvchi, ixtiyoriy $|z| \le r, r < 1$ yopiq doirada tekis yaqinlashuvchidir.Bu yerdan $\left|\frac{z-a}{\xi - a}\right| = \frac{|z-a|}{|\xi - a|} = \frac{|z-a|}{r} = \Theta < 1$ tengsizlikdan har bir qayd qilingan $z \in U_r(a)$ ixtiyoriy nuqta uchun ξ ga nisbatan $\partial U_r(a)$ atrof chegarasida (16.4) qator tekis yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.Agar biz (16.4) qatorni $\partial U_r(a)$ chegarada uzluksiz $f(\xi)$ funksiyaga ko'paytirsak,u holda uning tekis yaqinlashishi buzilmaydi.Shuning uchun (16.4) yoyilmaning ikkala tomonini $f(\xi)$ ga ko'paytirib, hosil bo'lgan qatorni integral belgisi ostida limitga o'tish mumkinligi haqidagi teoremaning natijasidan iborat bo'lgan tekis yaqinlashuvchi qatorni hadlab integrallash mumkin degan tasdiqqa muvofiq hadlab integrallab,hosil qilingan tenglikning ikkala tomonini $\frac{1}{2\pi i}$ ga ko'paytirib, (16.3) dan

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right)(z-a)^n$$ yoyilmani hosil

qilamiz.Bu yerdan va murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasidan foydalanib,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\forall z\in U_r(a)$$ va

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi,\forall\rho:0<\rho<r$$ yoyilmani olamiz.

Teorema 16.1 isbot bo'ldi.

Ta'rif 16.1. *Agar $w=f(z)$ funksiya G sohaning har bir nuqtasining biror atrofida darajali qatorga yoyilsa, u holda u G sohada regulyar funksiya deyiladi.*

Isbot qilingan 16.1-teoremadan G sohada analitik funksiyaning shu sohada regulyarligi kelib chiqadi.Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli.Bu esa Veyershtrass alomatidan kelib chiqadigan darajali qator yaqinlashish doirasining ichkarisida tekis yaqinlashishidan foydalangan holda oson isbotlanadi.Buni mustaqil isbotlang.

Shunday qilib, sohada (nuqtada) analitik va regulyarlik tushunchalari o'zaro ekvivalent ekan.

16.2.Koshi tengsizligi (darajali qator koeffisentlari uchun).

Teorema 16.2. *Agar*

$$f(z)=C_0+C_1z+C_2z^2+\ldots+C_nz^n+\ldots \quad (16.5)$$ *darajali*

qator $|z|<R$ doirada yaqinlashib, unda $|f(z)|<M$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda

$$|C_n|\le\frac{M}{R^n},(n=0,1,2,\ldots) \quad (16.6)$$ *Koshi*

tengsizligi o'rinli bo'ladi.

Isbot. Darajali (16.1) qator koeffisentlari C_n uchun (16.22) integral formulalardan foydalansak,

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=\rho}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi,(n=0,1,2,\ldots),\forall\rho:0<\rho<R.$$

Bu koeffisentlarni baholab, $|C_n|<M\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|=\rho}\frac{|d\xi|}{\rho^{n+1}}=\frac{M}{\rho^n}$ ni olamiz.

Oxirgi tengsizlik ixtiyoriy ρ $(\rho<R)$ uchun o'rinli bo'lganligidan unda $\rho\to R$ da limitga o'tsak,

$$|C_n|\le\frac{M}{R^n}$$

ga ega bo'lamiz. Koshi tengsizligi, ya'ni *Teorema 16.2 isbot bo'ldi.*

16.3.Yagonalik teoremasi. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi kursining eng muhim teoremalaridan biri analitik funksiyalarning yagonalik teoremasidir.

Teorema 16.3. *Agar $w=f(z)$ funksiya biror G sohada analitik bo'lib, $a\in G$ limitik nuqtaga ega biror $\{z_n\}\subset G$ ketma-ketlikda $f(z_n)=0$ bo'lsa, u holda G sohada $f(z)\equiv 0$.*

Isbot. Avval *a* nuqtaning biror atrofida $f(z)\equiv 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Umumiylikni kamaytirmasdan, $z_n\to a,n\to\infty$ deb faraz qilamiz. $a\in G$ bo'lganligi uchun uning biror $U_r(a)$ atrofida $f(z)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z-a)^m .$$ Agar unda $z=z_n$ deb olsak, u holda $f(z_n)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z_n-a)^m$. Oxirgi tenglikda $n\to\infty$ da limitga o'tsak, $0=C_0$ va $f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m(z-a)^m$ ni olamiz. U holda

$$\frac{f(z)}{z-a}=\sum_{m=1}^{\infty}C_m(z-a)^{m-1}$$

va undan $0=\sum_{m=1}^{\infty}C_m(z_n-a)^{m-1}$. Bu yerdan $n\to\infty$ da limitga o'tib, $C_1=0$ ni olamiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, barcha $m=0,1,\dots$ uchun $C_m=0$ ni,ya'ni $\forall z\in U_r(a)$ da $f(z)\equiv 0$ xulosaga ega bo'lamiz.Endi ixtiyoriy $\xi\in G$ nuqtada $f(\xi)\equiv 0$ ekanligini isbot qilamiz. Faraz qilaylik, G sohada biror ξ nuqta mavjudki,unda $f(\xi)\neq 0$. a va
ξ nuqtalarni G sohada yotuvchi biror $L\subset G$ siniq chiziq bilan tutashtiramiz. U holda L chiziqda biror a' nuqta mavjudki,u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) $f(z)$ funksiya L ning a dan a' gacha davom etadigan qismida nolga teng;
2) a' nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(a')\in G$ atrofida hech bo'lmaganda bitta ξ' nuqta mavjudki, $f(\xi')\neq 0$.

L chiziqdan shunaqa $z_n'\to a', n\to\infty$ ketma-ketlik olamizki, $f(z_n')=0$ bo'lsin. $a, z_n, f(z)$ lar uchun yuqorida bajarilgan jarayonni $a', z_n', f(z)$ lar uchun takrorlab a' nuqtaning biror atrofi $U_{r'}(a')$ da $f(z)\equiv 0$ ni olamiz.Bu esa a' nuqta tanlanishining ikkinchi shartiga ziddir. Demak, farazimiz noto'g'ri,ya'ni $\forall z\in G$ uchun $f(z)=0$. *Teorema 16.3 isbot bo'ldi.*

Misol 16.1. $f(z)=\sin\frac{1}{z}$.Bu funksiya $G=C\setminus\{0\}$ sohada analitik, $n\to\infty$ da

$$z_n=\frac{1}{n\pi}\to 0\notin G,\ f(z_n)=0 .$$

Lekin $f(z)\not\equiv 0$.Nima uchun yagonalik teoremasi o'rinli emas? Buning sababi shundan iboratki, $\{z_n\}$ kema-ketlikning limitik nuqtasi $0\notin G$.

16.3.Analitik davom ettirish prinsipi.

Ta'rif 16.2. *Agar D biror soha,* $E\subset D$ *biror to'plam bo'lsin. Agar*

1) $f(z)$ *funksiya E da aniqlangan,*

2) $F(z)$ *funksiya D sohada analitik,*

3) E da F(z)=f(z) bo'lsa, u holda F(z) funksiya f(z) funksiyaning E to'plamdan D sohaga analitik davomi deyiladi

12- mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyilmasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
2. $w=f(z)$ funksiya qachon G sohada regulyar funksiya deyiladi?
3. Darajali qator koeffisentlari uchun Koshi tengsizligini isbotlang.
4. Yagonalik teoremasini tushuntiring.
5. Analitik davom ettirish prinsipi nimadan iborat?

13-mavzu: Golomorf funksiyaning nollari. Loran qatorlari. Maxsus nuqtalar va ularning turlari.

Dars rejasi:

5.Bir nuqtadagi maxsuslikni yo'qotish haqidagi teorema.
6.Liuvill teoremasi.
7.Regilyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari va ularning xillari.
8.Butun va meromorf funksiyalar.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [5] - [8]

Dars maqsadlari: maxsuslikni yo'qotish haqidagi teoremalar, Luivill teoremasi, regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari, butun va meromorf funksiyalarni o'rgatish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *ko'p bog'lamli sohalar uchun Koshining integral formulasi, analitik davom, hosilalar uchun Koshining integral formulasi, yakkalangan maxsus nuqtalar, qutb maxsus nuqta, muhim maxsus nuqta, butun funksiya, meromorf funksiya.*

17.**1. Bir nuqtadagi maxsuslikni yo'qotish haqidagi teorema.**

Teorema 17.1. *Agar* $f(z)$ *funksiya biror D sohaning* $a \in D$ *nuqtasidan tashqari qolgan barcha nuqtalarida regulyar bo'lib,* $\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon M(\varepsilon) = 0$ *bo'lsa, bu yerda* $M(\varepsilon) = \max\limits_{|z-a|=\varepsilon} |f(z)|$*, u holda* $f(z)$ *funksiya D sohada regulyardir.*

Isbot. Umumiylikni kamaytirmasdan D sohaning chegarasi biror bo'lakli-silliq yopiq Jordan chizig'idan iborat bo'lib, unda $f(z)$ funksiya regulyar deb faraz qilamiz, *a* nuqtaning shunaqa $U_\varepsilon(a)$ atrofini olamizki, $\overline{U}_\varepsilon(a) \subset D$ bo'lsin, $D_\varepsilon = D \setminus \overline{U}_\varepsilon(a)$ belgilaymiz. U holda $f(z)$ funksiya yopiq $\overline{D}_\varepsilon$ sohada regulyar bo'ladi. Ixtiyoriy $z \in D_\varepsilon$ uchun ko'p bog'lamli sohalar uchun Koshining integral formulasiga binoan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int\limits_{|\xi - a| = \varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\right) \qquad (17.1)$$

Ikkinchi integralni baholaymiz. Teorema 17.1 shartiga muvofiq shunaqa ε_k ketma-ketlikni tanlaymizki,

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k M(\varepsilon_k) = 0 \qquad (17.2)$$

bo'lsin. Ikkinchi integralda $\varepsilon = \varepsilon_k$ deb olib va (17.2) munosabatdan foydalanib, uni modul bo'yicha quyidagicha baholash mumkin:

$$|I| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi - a| = \varepsilon_k} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|}|d\xi| \le \frac{1}{2\pi|z-a| - \varepsilon_k}\max_{|\xi - a| = \varepsilon_k}|f(\xi)| 2\pi\varepsilon_k \to 0, \ k \to \infty$$

Demak, (17.1) da $\varepsilon = \varepsilon_k$ deb olib, $k \to \infty$ limitga o'tsak, u holda

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \ \forall z \in D_0 = D \setminus \{a\} \qquad (17.3)$$

tenglikni hosil qilamiz. Regulyar funksiyaning cheksiz differensiallanuvchanligi haqidagi teoremaga ko'ra (17.3) munosabatning o'ng tomonidagi funksiya D sohada regulyardir. U holda (17.3) integral $f(z)$ funksiyaning D_0 sohadan D sohaga analitik davomidan iborat ekan. *Teorema 17.1* isbot bo'ldi.

Misol 17.1. Agar $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon M(\varepsilon)=0$ shartni kamaytirsak, u holda teorema o'rinli bo'lmaydi. Masalan, $w=\dfrac{1}{z-a}$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon M(\varepsilon)=1$ bo'lgani uchun, bu funksiyani $z=a$ nuqtaga analitik davom ettirib bo'lmaydi.

17.2. Luivill teoremasi.

***Teorema 17.2* (Liuvill).** *Agar $f(z)$ funksiya butun kompleks tekislik C da regulyar bo'lib, $\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{M(R)}{R^n}=0$ shart bajarilsa, u holda u darajasi $n-1$ dan oshmaydigan ko'phaddir, bunda* $M(R)=\max\limits_{|z|=R}|f(z)|$.

Isbot. Hosilalar uchun Koshining integral formulasiga ko'ra

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi,\ \forall z:|z|<R. \tag{17.4}$$

Teorema shartiga binoan shunaqa $\{R_k\}$ ketma-ketlik mavjudki,

$$k\to\infty,\ R_k\to\infty,\ M(R_k)=\overline{\overline{0}}(R_k^n). \tag{17.5}$$

(17.4) munosabatda $R=R_k$ deb olib, uning o'ng tomonini modul jihatdan baholaymiz:

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!}{2\pi}\max_{|\xi|=R_k}|f(\xi)|\frac{1}{(R_k-|z|)^{n+1}}2\pi R_k=\frac{\overline{\overline{0}}(R_k^{n+1})}{R_k^{n+1}}=\overline{\overline{0}}(1)$$

Demak, $f^{(n)}(z)=0\ \ \forall z\in C$. $f^{(n)}(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi

$$\int\limits_{z_0}^{z}f^{(n)}(\xi)d\xi+C$$

bo'lib, bu yerdan

$$f^{(n-1)}(z)=C_1=const \qquad \text{va}$$

$$f^{(n-2)}(z)=C_1z+C_2,....,$$

$$f(z)=C_1z^{n-1}+C_2z^{n-2}+...+C_n.$$

Teorema 17.2 isbot bo'ldi.

17.3. Regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari va ularning xillari.

Ta'rif 17.1. *Agar $f(z)$ funksiya biror $0<|z-a|<r$ $(a\in C,\ a\ne\infty,\ r>0)$ halqaga regulyar bo'lib, $z=a$ nuqtada aniqlanmagan bo'lsa, u holda $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi deyiladi.*

$f(z)$ funksiyaning $z=a$ nuqta atrofidagi xarakteriga qarab yakkalangan maxsus nuqtalar uch xilga ajraladi.

17.1°. Agar $\lim\limits_{z\to a}f(z)=A\ne\infty$ bo'lsa, u holda $z=a$ yakkalangan maxsus nuqta yuqotilib bo'ladigan (yoki bartaraf qilinadigan) maxsus nuqta deyiladi. Bu holda, agar $f(a)=A$ deb olsak, bu funksiya $z=a$ nuqtada ham regulyar bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon M(\varepsilon)=0$ shart $z=a$ nuqta atrofida bajariladi va shuning uchun $f(z)$ funksiyani $z=a$ nuqtaga analitik davom ettirish mumkin.

17.2°. Agar $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$ bo'lsa, u holda yakkalangan maxsus $z=a$ nuqta qutb maxsus nuqta deb aytiladi.

17.3°. Agar $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ mavjud bo'lmasa, u holda yakkalangan maxsus $z=a$ nuqta muhim maxsus nuqta deyiladi.

Ta'rif 17.2. *Agar $f(z)$ funksiya $z=a\neq\infty$ nuqtaning biror atrofida $f(z)=(z-a)^n f_1(z)$ ifodalanib, bu yerda $f_1(z)$ $z=a$ nuqtada regulyar va $f_1(a)\neq 0$ bo'lsa, u holda $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun n-tartibli nol deyiladi.*

Ta'rif 17.3. *Agar $f(z)$ funksiya $z=\infty$ nuqtaning biror atrofida $f(z)=z^{-n} f_1(z)$ ifodalanib, bunda $f_1(z)$ $z=\infty$ nuqtada regulyar va $f_1(\infty)\neq 0$ bo'lsa, u holda $z=\infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning n-tartibli noli deyiladi.*

Ta'rif 17.4. $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ *funksiyaning $z=a$ nuqtadagi nolining tartibiga $f(z)$ funksiyaning $z=a$ nuqtadagi qutbining tartibi deyiladi.*

Birinchi tartibli nol yoki qutb oddiy nol yoki qutb deyiladi.Agar $z=a\neq\infty$ bo'ib, $f(z)$ funksiya shu nuqtada regulyar bo'lsa, u holda n-tartibli nolning quyidagi alomati o'rinli: $z=a$ nuqtaning $f(z)$ funksiya uchun n-tartibli nol bo'lishligining zaruriy va yetarli sharti

$$f(a)=f'(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0,\ f^{(n)}(a)\neq 0$$

munosabatdan iborat.

Lemma 17.1. *Agar $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar $z=a$ nuqtada regulyar bo'lsa, u holda $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ funksiya shu nuqtada yo regulyar yoki $z=a$ nuqta bu nisbat uchun qutb maxsus nuqta bo'ladi* (Isbotlang!).

17.4. Butun va meromorf funksiyalar.

Ta'rif 17.5. *Butun kompleks tekislikda regulyar funksiya butun funksiya deyiladi.*

Masalan, $e^z, \sin z, \cos z, \mathrm{sh}z, \mathrm{ch}z$ butun funksiyalardir.

Ta'rif 17.6. *Agar $f(z)$ funksiya G sohaning har bir yopiq qismida chekli sondagi qutblardan tashqari regulyar bo'lsa (qutblar soha chegarasi atrofida to'planishi mumkin), u holda bu funksiya G sohada meromorf funksiya deyiladi.*

Masalan, $\mathrm{tg}z, \mathrm{ctg}z, \sec z, \mathrm{cosec}z$ funksiyalar butun kompleks tekislikda meromorf funksiyalardir.

13- mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

1. Bir nuqtadagi maxsuslikni yo'qotish haqidagi teoremani isbotlang.
2. Luivill teoremasini isbotlang.
3. Regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari va ularning xillarini aniqlang.
4. Yuqotilib bo'ladigan (yoki bartaraf qilinadigan) maxsus nuqta deb nimaga aytiladi? (misollar keltiring)
5. Qutb maxsus nuqta deb nimaga aytiladi?
6. Muhim maxsus nuqta deb nimaga aytiladi?
7. Regulyar funksiyaning n-tartibli noli deb nimaga aytiladi?
8. Butun va meromorf funksiyalar deb qanday funksiyalarga aytiladi?

9. Bir nuqtadagi maxsuslikni yo'qotish haqidagi teorema deb nimaga aytiladi?
10. Luivill teoremasini ayting.
11. Regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari va ularning xillarini bilasizmi? (misollar keltiring)
12. Butun va meromorf funksiya deb nimaga aytiladi? (misollar keltiring).

14-mavzu: Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.

Dars rejasi:

7. Qoldiq tushunchasi.
8. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi.
9. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1], [5], [6], [8]

Dars maqsadlari: Qoldiq tushunchasi. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari o'rgatish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *funksiyaning nuqtadagi qoldig'i, ko'p bog'lamli soha, bo'lakli silliq yopiq Jordan chizig'i, yakkalangan maxsus nuqta, n-tartibli nol, hosilalar uchun Koshining integral formulasi, qutb maxsus nuqta, muhim maxsus nuqta, Loran qatori.*

19.1. Qoldiq tushunchasi.

Lemma 19.1. *Agar $f(z)$ funksiya biror $K: r<|z-a|<R$ halqada regulyar bo'lsa, u holda* $\int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)dz,\ r<\rho<R$, *integralning qiymati ρ dan bog'liq emas.*

Isbot. Haqiqatan ham, lemmaning isboti uchun $\forall \rho_1<\rho_2 : r<\rho_1<\rho_2<R$ larni olib, $\int\limits_{|z-a|=\rho_1} f(z)dz = \int\limits_{|z-a|=\rho_2} f(z)dz$ tenglikni ko'rsatish kifoya. Buning uchun ichki radiusi ρ_1, tashqi radiusi ρ_2 dan iborat $K_1: \rho_1<|z-a|<\rho_2$ halqani olamiz. $\overline{K}_1 \subset K$ munosabatdan $f(z)$ funksiya $\overline{K}_1$ yopiq halqada regulyar ekanligini olamiz. Shuning uchun murakkab kontur uchun Koshining integral formulasiga muvofiq

$$\int\limits_{\partial K_1} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{|z-a|=\rho_1} f(z)dz = \int\limits_{|z-a|=\rho_2} f(z)dz .$$

Lemma 19.1 isbot bo'ldi.

Ta'rif 19.1. *Agar $f(z)$ funksiya uchun $z=a\neq\infty$ nuqta yakkalangan maxsus nuqta bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning $z=a$ nuqtadagi qoldig'i deb*

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho_1} f(z)dz \qquad (19.1)$$

ga aytiladi, bu yerda ρ yetarlicha kichik musbat son.

Ta'rif 19.2. *$f(z)$ funksiyaning $z=\infty$ nuqtadagi qoldig'i deb*

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R} f(z)dz \qquad (19.2)$$

ga aytiladi, bu yerda R yetarlicha katta ixtiyoriy musbat son.

*Lemma 19.1*ga ko'ra (19.1) va (19.2) integrallarning qiymatlari ρ va R dan bog'liq emas. Agar $a\neq\infty$ nuqtada $f(z)$ funksiya regulyar bo'lsa, u holda $\underset{z=a}{res}\, f(z)=0$. Lekin $a=\infty$ bo'ib, $f(z)$ funksiya $z=\infty$ da regulyar bo'lsa hamki, $\underset{z=\infty}{res}\, f(z)\neq 0$ bo'lishi mumkin. Masalan,

$f(z)=\frac{1}{z}; z=\infty$ $f(z)$ uchun regulyarlik nuqtasi bo'lsa ham (chunki, $f(\infty)=0$ deb aniqlash mumkin) $\underset{z=\infty}{res} f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{dz}{z}=-1\neq 0$.

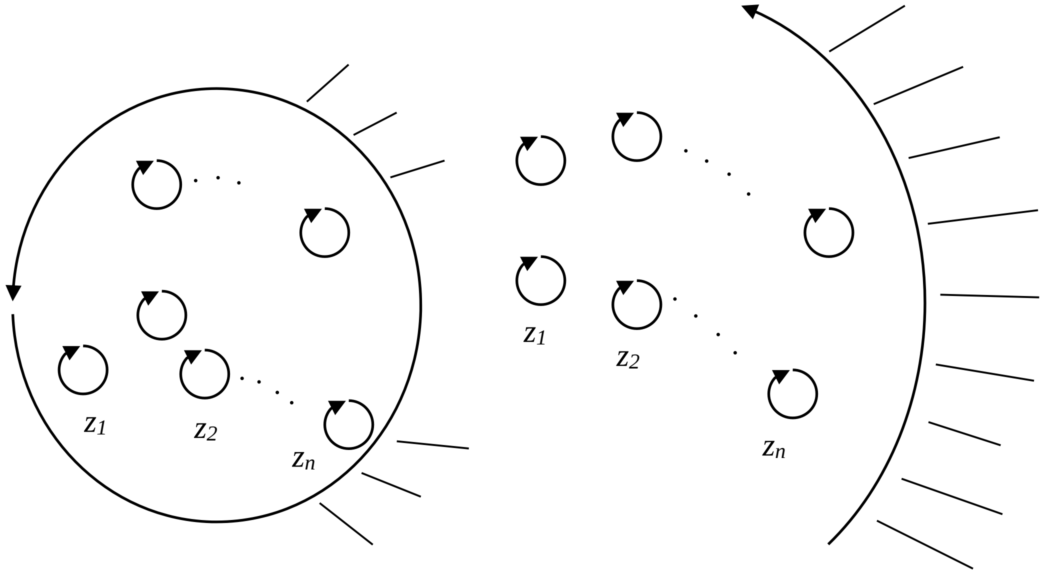
_19.2._ Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi.

Teorema 19.1. *Agar $f(z)$ funksiya chekli bog'lamli chegerasi cheklita bo'lakli silliq yopiq Jordan chiziqlaridan iborat G sohaning yakkalangan maxsus $z_1, z_2, ..., z_n \in G$ nuqtalaridan tashqari yopiq $\overline{G}$ sohada regulyar bo'lsa, u holda*

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res} f(z). \qquad (19.3)$$

Bunda $\infty\notin\partial G$, agar $\infty\in G$ bo'lsa, u holda bu nuqta ham z_k nuqtalar qatoriga qo'shiladi.

Isbot. Agar $z_k\neq\infty$ bo'lsa, $U_\varepsilon(z_k)=\{z \,|\, |z-z_k|<\varepsilon\}$; $z=\infty$ bo'lsa, $U'_\varepsilon(\infty)=\left\{z \,\middle|\, |z|>\frac{1}{\varepsilon}\right\}$ deb olib, ε ni shu qadar kichik qilib tanlaymizki, barcha $U_\varepsilon(z_k), U'_\varepsilon(\infty)$ atroflar o'zaro va ∂G bilan kesishmay, o'z chegaralari bilan birgalikda G soha ichida joylashsin. U holda (19.1-chizmaga qarang) $G_\varepsilon=G\setminus\left\{\bigcup_{k=1}^{n}\overline{U}_\varepsilon(z_k)\right\}$ yoki $\infty\in G$ bo'lsa, $G_\varepsilon=G\setminus\left\{\bigcup_{k=1}^{n}\overline{U}_\varepsilon(z_k)U\overline{U}'_\varepsilon(\infty)\right\}$ belgilashni olsak, G_ε - chegeralangan chekli bog'lamli soha bo'lib, $f(z)$ funksiya $\overline{G_\varepsilon}$ da regulyar bo'ladi.



19.1-chizma

Murakkab konturlar uchun Koshining integral teoremasiga muvofiq,

$$\int_{\partial G_\varepsilon} f(z)dz=0$$

yoki

$$\int_{\partial G} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial U_\varepsilon(z_k)} f(z)dz + A\int_{\partial U'_\varepsilon(\infty)} f(z)dz, \qquad (19.4)$$

o'rinli bo'ladi, bu yerda $A=\begin{cases}1, \infty\in G\\ 0, \infty\notin\overline{G}\end{cases}$. (19.1) va (19.2) formulalarga ko'ra

$$\int\limits_{\partial U_\varepsilon(z_k)} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \quad \int\limits_{\partial U'_\varepsilon(\infty)} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\ . \qquad (19.5)$$

Agar (19.5) qiymatlarni (19.4) ga qo'ysak, (19.3) formulani olamiz. *Teorema 19.1* isbotlandi.

19.3. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.

Teorema 19.2. *Agar* $F(z) = f(z)/g(z)$ *va* $f(z), g(z)$ *funksiyalar* $a \neq \infty$ *nuqtada regulyar bo'lib, shu nuqta* $g(z)$ *funksiya uchun n-tartibli nol bo'lsa, u holda*

$$\operatorname*{res}_{z=a} F(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n F(z)\right]\right\}. \qquad (19.6)$$

Isbot. n-tartibli nol ta'rifiga ko'ra $g(z) = (z-a)^n g_1(z)$ ifodalanib, $g_1(z)$ $z = a$ nuqtada regulyar va $g_1(a) \neq 0$. U holda

$$F(z) = f(z)/\left[(z-a)^n g_1(z)\right] = \varphi(z)/(z-a)^n .$$

Bu yerda $\varphi(z) = f(z)/g_1(z)$ $z = a$ nuqtada regulyardir. Qoldiq ta'rifi va Koshining hosilalar uchun integral formulasiga binoan

$$\operatorname*{res}_{z=a} F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho} F(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}dz = \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \qquad (19.7)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Agar $\varphi(z) = (z-a)^n F(z),\ z \neq a$, ni nazarga olsak, (19.7) dan (19.6) formulaning o'rinli ekanligini olamiz.

Bu formula chekli qutb maxsus nuqtalardagi qoldiqni hisoblash uchun qo'llaniladi.

Agar n=1 bo'lsa, u holda (19.6) formuladan

$$\operatorname*{res}_{z=a} F(z) = f(a)/g'(a) \qquad (19.8)$$

ni olamiz.

Agar $z = a$ muhim maxsus nuqta yoki $a = \infty$ bo'lsa, u holda bunday nuqtalarda qoldiqni hisoblash uchun quyidagi teorema qo'llaniladi. Bu teoremadan $z = a$ chekli qutb bo'lganda ham foydalanish mumkin.

Teorema 19.3. *Agar* $z = a \neq \infty$ *yakkalangan maxsus nuqta bo'lib,* $f(z)$ *funksiyaning shu nuqta atrofidagi Loran qatori* $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *berilgan bo'lsa, u holda*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1} \qquad (19.9)$$

Agar $a = \infty$ *nuqta atrofidagi Loran qatori* $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ *berilgan bo'lsa, u holda*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} \qquad (19.10)$$

Isbot. (19.9) formulani isbotlaymiz.

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho}(z-a)^n dz = c_{-1}$$

(hadlab integrallash mumkinligi Loran qatorining ixtiyoriy $|z-a| = \rho,\ r < \rho < R$ aylanada tekis yaqinlashishidan kelib chiqadi). (19.9) formula isbot bo'ldi. (19.10) formulani ham shunga o'xshash isbotlash mumkin. *Teorema 19.2* isbot bo'ldi.

Misol 19.1. $I=\int\limits_{|z|=4}\frac{z\cos\frac{1}{z-1}}{z^2+4}dz$ hisoblansin.

Yechish. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasiga ko'ra

$I=2\pi i[\underset{z=2i}{res}\ f(z)+\underset{z=-2i}{res}\ f(z)+\underset{z=1}{res}\ f(z)]=-2\pi i\underset{z=\infty}{res}\ f(z)=2\pi i$, chunki agar $f(z)$ funksiya $z=\infty$ da regulyar bo'lsa, u holda

$$\underset{z=\infty}{res}\ f(z)=\lim_{z\to\infty}z\left[f(\infty)-f(z)\right]=\lim_{z\to\infty}z\left(0-\frac{z\cos\frac{1}{z-1}}{z^2+4}\right)=-1.$$

14- mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari

13. To'g'rilanuvchi chiziqlarni ta'rifi va tasvirini ayting
14. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasini ayting
15. Qoldiqlarni hisoblash formulalarini keltiring.
16. Funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasidagi qoldig'i deb nimaga aytiladi?
17. $f(z)$ funksiyaning $z=\infty$ nuqtadagi qoldig'i deb nimaga aytiladi?
18. Kompleks argumentli funksiya integralining qanday xossalarini bilasiz? (misollar keltiring)
19. Integralning hisoblash formulalarini keltiring (misollar yordamida).

15-mavzu: Chegirmalar (qoldiqlar) nazariyasini aniq integrallarni hisoblashga tadbiqi. Jordan lemmasi.

Dars rejasi:

1. Berilgan chekli oraliq bo'yicha haqiqiy funksiya integralini hisoblash.
2. Berilgan cheksiz interval bo'yicha haqiqiy funksiya integralini hisoblash.
3. Jordan lemmasi.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [1] - [14]

Dars maqsadlari: berilgan chekli oraliq va cheksiz interval bo'yicha haqiqiy funksiya integralini hisoblashga o'rgatishda Jordan lemmasidan foydalanish.

Mavzu bo'yicha tayanch iboralar: *odatdagi Riman integrali, Rimanning xosmas integrali, qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi, yakkalangan maxsus nuqta, funksiyaning nuqtadagi qoldig'i, funksiyaning* $\arg z$ *ga nisbatan nolga tekis yaqinlashishi,* $\arcsin z$ *ning darajali qatorga yoyilmasi.*

20.1. Berilgan chekli oraliq bo'yicha haqiqiy funksiya integralini hisoblash. Faraz qilaylik chekli $[a,b]$ oraliqda haqiqiy $f(z)$ funksiya berilgan bo'lib, $\int_a^b f(x)dx$ Riman integralini hisoblash talab qilinsin. Buning uchun shunaqa bo'laklari silliq yuqori yarim tekislikda yotuvchi C qo'shimcha chiziq olamizki, $C \cup [a,b]$ chiziq biror chegaralangan bir bog'lamli D sohaning chegarasidan iborat bo'lsin. $f(z)$ funksiyani *[a, b]* kesmadan $\overline{D}$ sohaga shunday davom ettiramizki, natijada $f(z)$ yakkalangan maxsus $a_1, a_2, ..., a_n \in D$ nuqtalardan tashqari $\overline{D}$ da regulyar bo'lsin. Shu soha va $f(z)$ funksiya uchun qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasini qo'llasak, u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} f(z) \qquad (20.1)$$

munosabatni olamiz. Bu yerdan

$$\int_a^b f(x)dx + \int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} f(z). \qquad (20.2)$$

Agar $\int_C f(z)dz$ integralni bevosita hisoblash yoki $\int_a^b f(x)dx$ integral bilan ifodalash imkoniyati mavjud bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash masalasi yechiladi.

20.2. Berilgan cheksiz interval bo'yicha haqiqiy funksiya integralini hisoblash. Agar $(a,\ b)$ interval cheksiz bo'lsa, u holda kengayib boruvchi qo'shimcha shunaqa bo'lakli silliq chiziqlar oilasini olish lozimki, limitga o'tgan taqdirda $(a,\ b)$ interval hosil bo'lgan sohalar chegarasining bir qismi sifatida paydo bo'lsin. Agar $(a,b) = (-\infty, \infty)$ bo'lsa, u holda (20.2) ga o'xshash

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} f(z) \qquad (20.3)$$

ni olamiz. Agar bu yerda $\tilde{N}_R$ - o markazli R radiusli yuqori yarim aylana bo'lsa va $f(z)=F(z)e^{i\lambda z}$ ko'rinishga ega bo'lsa, u holda berilgan integralni hisoblash uchun $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} F(z)e^{i\lambda z}dz$ ni hisoblash kifoya. Ko'p hollarda $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} F(z)e^{i\lambda z}dz=0 \quad (\lambda>0)$ munosabatni ko'rsatish uchun quyidagi Jordan lemmasidan foydalaniladi.

20.3.Jordan lemmasi.

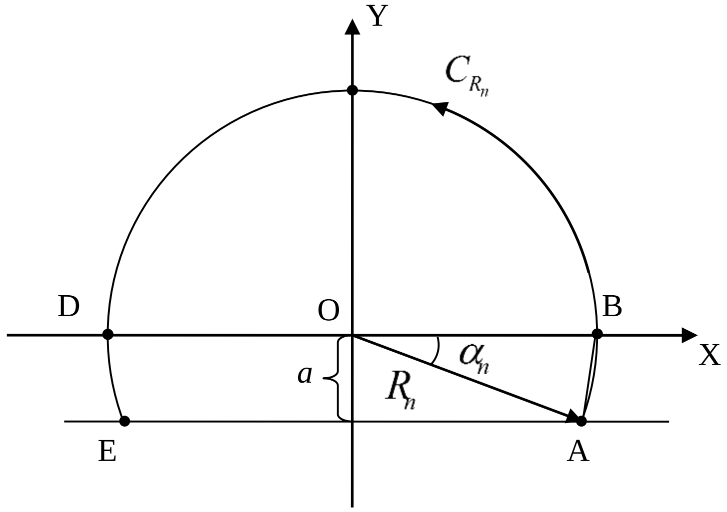
Jordan lemmasi 20.1*. Agar* $g(z)$ *funksiya* $C_{R_n}: |z|=R_n$, $\operatorname{Im} z>-a$ *aylana yoylarida* $n\to\infty (n\to\infty, R_n\to\infty)$ *da nolga* $\arg z$ *ga nisbatan tekis intilsa, ya'ni* $\forall\varepsilon>0$ *uchun shunaqa* $n_\circ(\varepsilon)$ *nomer topilib,* $\forall n>n_\circ$ *uchun* $|g(z)|<\varepsilon$, $\forall z\in C_{R_n}$ *bo'lsa, u holda* $\forall\lambda>0$ *uchun* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{C_{R_n}} g(z)e^{i\lambda z}dz=0$ *bo'ladi.*

Isbot. Quyidagi 20.1-chizmadan ko'rinadiki,

$$\sin\alpha_n=\frac{a}{R_n};\alpha_n=\arcsin\frac{a}{R_n}.\ \arcsin z=z+\underline{\underline{O}}(z^3)\ (z\to 0)$$

yoyilmadan foydalanib, $\alpha_n=\frac{a}{R_n}+\underline{\underline{O}}\left[\left(\frac{a}{R_n}\right)^3\right]\ (n\to\infty)$ ga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$\alpha_n R_n=a+\underline{\underline{O}}\left(\frac{a^3}{R_n^2}\right)\ (n\to\infty)$ kelib chiqadi.



20.1-chizma

Bu yerdagi oxirgi ikki munosabatlardan

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0 \tag{20.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n R_n=a \tag{20.5}$$

larni hosil qilamiz. Lemma shartiga ko'ra

$$M_n(g)=\max_{z\in C_{R_n}}|g(z)|\to 0,\ n\to\infty \tag{20.6}$$

Yana 20.1-chizmadan foydalanib, $\forall z = x + iy \in \overset{\cup}{AB}$ uchun

$$\left|e^{i\lambda z}\right| = e^{\operatorname{Re}(i\lambda z)} = e^{-\lambda y} \le e^{\lambda a} \qquad (20.7)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu yerdan, (20.5) va (20.6) dan

$$\left|\int\limits_{\breve{AB}} g(z)e^{i\lambda z}dz\right| \le \int\limits_{\breve{AB}} |\, g(z)\,\|\, e^{i\lambda z}\,\|\, dz\,| \le M_n(g)e^{\lambda a}\alpha_n R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (20.8)$$

ni olamiz. Shunga o'xshash

$$\left|\int\limits_{\breve{DE}} g(z)e^{i\lambda z}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (20.9)$$

Agar $\forall z \in \breve{BC}$ bo'lsa, u holda $z = R_n e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ va

$$\left|e^{i\lambda z}\right| = e^{\operatorname{Re}(i\lambda R_n e^{i\varphi})} = e^{-\lambda R_n \sin\varphi} \le e^{-\lambda R_n \frac{2}{\pi}\varphi} \qquad (20.10)$$

(ma'lumki, $\forall \varphi \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ uchun $\sin\varphi \ge \dfrac{2}{\pi}\varphi$). Lemma sharti va (20.10) tengsizlikdan foydalanib,

$$\left|\int\limits_{\breve{BC}} |g(z)|\left|e^{i\lambda z}\right||dz|\right| \le M_n(g)R_n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi}d\varphi = M_n(g)R_n\left(-\frac{\pi}{2\lambda R_n}\right)e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi}\varphi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= M_n(g)\frac{\pi}{2\lambda}(1 - e^{-\lambda R_n}) \to 0 \qquad (20.11)$$

bahoni hosil qilamiz. Shunga o'xshash

$$\int\limits_{\breve{DC}} |g(z)|\left|e^{i\lambda z}\right||dz| = \int\limits_{\breve{CD}} |g(z)|\left|e^{i\lambda z}\right||dz| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (20.12)$$

ni olish mumkin. Jordan lemmasining isboti (20.8), (20.9), (20.11) va (20.12) munosabatlardan kelib chiqadi. Agar $a \le 0$ bo'lsa, u holda lemaning isboti yanada osonlashadi, chunki isbotda $\breve{AB}$ va $\breve{DE}$ yoylar qatnashmaydi. *Lemma 20.1 isbot bo'ldi.*

Jordan lemmasini aylanalar yoylari oilasi uchun quyidagicha bayon qilish mumkin.

Jordan lemmasi *20.2*. *Agar g(z) funksiya* $C_R : |z| = R,\ \operatorname{Im} z > -a$ *aylanalar yoylari oilasida* $R \to \infty$ *da* $\arg z$ *ga nisbatan nolga tekis yaqinlashsa, u holda* $\forall \lambda > 0$ *uchun*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0$$

bo'ladi.

Misol *20.1*. Xosmas $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3)e^{ix}}{x^2 - 6x + 90}dx$ integral hisoblansin.

Yuqorida bayon qilingan fikrlarga binoan yetarlicha katta R>0 uchun quyidagi munosabat o'rinli

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{(x+3)e^{ix}}{x^2 - 6x + 90}dx + \int\limits_{C_R} \frac{(z+3)e^{iz}}{z^2 - 6z + 90}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} \frac{(z+3)e^{iz}}{z^2 - 6z + 90}. \qquad (20.13)$$

Endi $f(z) = \dfrac{(z+3)e^{iz}}{z^2 - 6z + 90}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini topamiz:

$$z^2-6z+90=0,\ z_{1,2}=3\pm\sqrt{9-90}=3\pm 9i\ .$$

Bu yerdan *f(z)* funksiyaning yuqori yarim tekislikda bitta *3+9i* dan iborat qutb maxsus nuqtaga ega ekanligi kelib chiqadi. $g(z)=\dfrac{z+3}{z^2-6z+90}$ funksiya $R\to\infty$ da $C_R:|z|=R$ aylanalar oilasida nolga $\arg z$ ga nisbatan tekis yaqinlashuvchi. Haqiqatdan ham,

$|g(z)|=\dfrac{|z+3|}{|(z-3+9i)(z-3-9i)|}\le\dfrac{|z|+3}{(|z|-\sqrt{90})^2}=\dfrac{R+3}{(R-\sqrt{90})^2}\to 0,\ R\to\infty\ \forall z\in C_R$ Jordan lemmasiga ko'ra $(\lambda=1)$ $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\dfrac{(z+3)e^{iz}}{z^2-6z+90}dz=0$. Agar (20.13) tenglikda $a_1=3+9i$ ni qo'yib, $R\to\infty$ limitga o'tsak va oddiy $z=3+9i$ qutbda qoldiqni hisoblash formulasidan foydalansak, u holda

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+3)e^{ix}}{x^2-6x+90}dx=2\pi i\ \underset{z=3+9i}{res}\frac{(z+3)e^{iz}}{z^2-6z+90}=2\pi i\frac{(6+9i)e^{i(3+9i)}}{2(3+9i)-6}=\frac{\pi e^{-9}}{9}(6+9i)e^{3i}$$

qiymatni hosil qilamiz.

15- mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirish savollari :

1. Berilgan chekli oraliq bo'yicha haqiqiy funksiyadan olingan integralni qanday hisoblash mumkin?
2. Berilgan cheksiz oraliq bo'yicha haqiqiy funksiyadan olingan integralni hisoblash qanday amalga oshiriladi?
3. Jordan lemmasi nimadan iborat va u qanday isbotlanadi?
4. Jordan lemmasini qo'llashga doir misol keltira olasizmi?

10.Amaliy Mashg'ulotlar Ishlanmasi

1-amaliy mashg'ulot. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks sonning geometrik tasviri. Modul va argument haqidagi teorema. n -darajali ildiz chiqarish (2 soat)

Dars rejasi:

1. Kompleks son va ular ustida arifmetik amallarga oid misollar yechish.
2. Kompleks sonlarning turli shakllariga oid mashqlar yechish.
3. Modul va argumentni hisoblashga doir misollar yechish.
4. Kompleks sondan n -darajali ildiz chiqarishga oid mashqlar yechish.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Dars maqsadi: o'quvchining kompleks son haqidagi nazariy bilimlarini misollar va topshiriqlarni yechish bilan mustahkamlash, ularninig amaliy ko'nikmalarini va ijodiy mehnat qobiliyatini o'stirish, o'z fikrini qat'iu matemati tilda ifodalash va boshqalarga yetkazib berishga o'rgatish.

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni.

1.1.Mashg'ulotning nazariy asosi.

Biz ma'ruzada ta'kidlaganimizdek, har bir (x, y) kompleks sonni $x+iy$ ko'rinishda tasvirlash mumkin. $x+iy$ ko'rinishdagi yozuvga kompleks sonning *algebraik shakli* deyiladi.

x songa $z=x+iy$ kompleks sonning haqiqiy qismi, y songa esa mavhum qismi deyiladi va $x=\mathrm{Re}(x+iy)=\mathrm{Re}\,z,\ \ y=\mathrm{Im}(x+iy)=\mathrm{Im}\,z$ ko'rinishda belgilanadi.

Kompleks sonning algebraik shakli yordamida $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ kompleks sonlarning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasini quyidagicha yozish mumkin

$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2.$$

Endi $i^2=-1$ ni hisobga olgan holda

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

tenglikni hosil qilamiz.

$x-iy$ son $z=x+iy$ kompleks songa qo'shma deyiladi va $\bar{z}$ ko'rinishda belgilanadi:

$$\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy.$$

$\sqrt{x^2+y^2}$ songa $z=x+iy$ kompleks sonning *moduli* deyiladi va $|z|$ yoki r bilan belgilanadi, ya'ni

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Kompleks tekislikda $z=x+iy$ nuqtaning holati x, y dekart koordinatalar sistemasida bitta nuqtani ifodalaydi. Agar r bilankoordinta boshidan z nuqtagacha bo'lgan masofani, φ - haqiqiy o'qning musbat yo'nalishi bilan z vektor orasidagi burchakni belgilaymiz. $r=|z|$ -bo'lib unga z kompleks sonning moduli, φ ga esa argumenti deyiladi va $\arg z$ kabi belgilanadi. Ular uchun quyidagi formulalar o'rinli:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ tg\varphi=\frac{y}{x},\quad x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

U holda Ixtiyoriy $z\neq 0$ kompleks sonning

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

*trigonometrik shakl*da tasvirlash mumkin. Matematik analizdagi $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ Eyler formulasidan $z=re^{i\varphi}$ *ko'rsatkichli shakli* hosil bo'ladi.

Ko'paytma va daraja shaklidagi sonlarning moduli va argumentini hisoblashda quyidagi tengliklar asqotadi:

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2,\ \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2,\ |z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.$$

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.\quad \textit{(Muavr formulasi)}$$

Ma'ruzadan ma'lumki, kompleks sonlar to'plamida ixtiyoriy $n\in N$ uchun $z^n=a$ tenglamani doimo n ta yechimga ega va ular quyidagicha aniqlanadi:

$$z_k=\sqrt[n]{r}\ e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),k=0,1,\dots,n-1.$$

Bunda r va φ mos ravishda $a\in C$ son moduli va argumenti.

1.2.Namunaviy yechilgan misollar

1.1-misol. $z=\dfrac{3-i}{2+3i}$ kompleks sonni algebraik shaklga keltirib, uning mavhum qismi, haqiqiy qismini toping.

Yechish. Bu bo'linma (kasr) shaklida berilgan kompleks sonni dastlab soddalashtiramiz. Buning uchun uning surat maxrajini maxrajdagi kompleks sonning qo'shmasiga ko'paytiramiz:

$$z=\frac{3-i}{2+3i}=\frac{(3-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{6-9i-2i+3i^2}{2^2+3^2}=\frac{6-11i-3}{13}=\frac{9-11i}{13}=\frac{9}{13}-\frac{11}{13}i.$$ Bu tenglikning o'ng tomonidagi kompleks son haqiqiy va mavhum qismi biz izlagan javob bo'ladi:

$$\text{J: } \operatorname{Re} z=\frac{9}{13}; \quad \operatorname{Im} z=-\frac{11}{13}.$$

1.2-misol. $z=1-i$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.

Yechish. a) $z=1-i$ kompleks son haqiqiy va mavhum qismlari $\operatorname{Re} z=x=1$ va $\operatorname{Im} z=y=-1$ bo'lib, uning moduli $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. $z=1-i$ nuqta to'rtinchi chorakda joylashganligi uchun $tg\varphi=\frac{1}{-1}=-1$ tenglamadan $\arg(1-i)=\frac{7\pi}{4}+2k\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,...$.

1.3-Misol. $|\operatorname{Re} z|<1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks tekislikning barcha nuqtalari to'plamini geometrik tasvirlang.

Yechish. a) $|\operatorname{Re} z|<1 \quad \Rightarrow \quad -1<x<1$. J: Mavhum o'qgacha bo'lgan masofasi birdan kichik nuqtalardan tashkil topgan yo'lak.

1.4-Misol. i ning darajalarini hisoblash fornulalarini keltiring:

Yechish. i ning kiritilishidan va natural ko'rsatkichli darajaning ta'rifidan foydalanib quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$i^1=i=\sqrt{-1}, \quad i^2=-1; \quad i^3=i^2\cdot i=-i; \quad i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1; \quad i^5=i^4\cdot i=i;$$

$$i^6=i^5\cdot i=-1 \text{ va hokazo.}$$

Umumiy holda ixtiyoriy $k=0, \quad 1, \quad 2,\cdots$ uchun quyidagi tengliklar o'rinlidir:

$$i^{4k}=(i^4)^k=1^k=1, \quad i^{4k+1}=i^{4k}\cdot i=1\cdot i=i,$$

$$i^{4k+2}=i^{4k}\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1, \quad i^{4k+3}=i^{4k}\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i.$$

1.5-Misol. Berilgan $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$ tenglamani yeching.

Yechish. Dastlab qavslarni ochib tenglmaning chap tomonida haqiqiy va mavhum qismlarni ajratamiz:

$$(x+3y)+i(2x-5y)=1-3i.$$

Kompleks sonlarning tengligi ta'rifiga asoslanib, bularning haqiqiy qisimlarini o'zaro hamda mavhum qismlarini o'zaro tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz: $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-5y=-3. \end{cases}$

Bu sistemani yechib, $x=-\frac{4}{11}, \quad y=\frac{5}{11}$ ekanligini topamiz. Bu esa berilgan tenglamaning yechimidir.

1.6-Misol. Muavr formulasi yordamida $\cos 3\varphi$ va $\sin 3\varphi$ larni φ ning trigonometrik funksiyalari orqali ifodalang.

Yechish. Muavr formulasi va qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanamiz:

$$z=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi+$$
$$+3i^2\cos\varphi\sin^2\varphi+i^3\sin^3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi+i(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi),$$

Ikkala qismdagi sonlarninig tengligidan ularning haqiqiy va mavhum qismlari tengligi kelib chiqadi:

$$\operatorname{Re} z=\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$
$$\operatorname{Im} z=\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi.$$

J: $cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$, $\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi$.

1.7-Misol . $\sqrt[4]{-i}$ ni hisoblang.

Yechish. Oldingi misollarda ko'rsatilganidek dastlab ildiz ostidagi $-i$ sonning trigonometric shaklini yozamiz.

$$-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}, \text{ chunki } r=1,\ \varphi=\frac{3\pi}{2}.$$

Ildiz chiqarish formulasidan quyidagi qiymatlarni olamiz:

$$\sqrt[4]{-i}=z_k=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}=$$
$$=\cos\frac{(4k+3)\pi}{8}+i\sin\frac{(4k+3)\pi}{8},\ k=0,1,2,3.$$

1.8-Misol. $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}$ ildizning qiymatlarini toping.

Yechish. Dastlab ildiz ostidagi kasrni trigonometrik shaklga keltirib olamiz:

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\quad -1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Kompleks sonlarni bo'lishga asosan quyidagi munosabatlarni olamiz:

$$\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

Chunki bo'linma argumentiga asosan $\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$.

Ildiz chiqarish formulasini qo'llab, berilgan ifodaning qiymartlarini olamiz:

$$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}=z_k=\sqrt[6]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{12}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{12}+2k\pi}{6}\right)=$$
$$=\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{(24k+1)\pi}{72}+i\sin\frac{(24k+1)\pi}{72}\right),\ k=0,1,2,3,4,5.$$

1.3.Mustaqil ishlash uchun misol va topshiriqlar.

1. Berilgan kompleks sonlarning haqiqiy va mavhum qismlarini toping:

a) $z=-3+4i$; b) $z=\dfrac{1}{1+i}$; v) $z=\left(\dfrac{i^{17}+2}{i^{39}+1}\right)^2$; g) $z=\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; d) $(1+2i)^6$;

i) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$; j) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; z) $\dfrac{(-2+2i)^5}{(-1+i)^3}+2i-5$; k) $\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}$;

2. Kompleks sonlarning moduli va argumentini toping.

a) i; b) $z=-12+5i$; v) $z=-i$; g) $z=1+i^{2001}$; d) $z=\dfrac{1-i}{1+i}$.

3. Quyidagi kompleks sonlarni trigonometrik shaklga keltiring: i; $-i$; -2; 3, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\cos\varphi+i\sin\varphi$; $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$.

4. Tenglamani yeching:

a) $x+2iy-3y+6ix=-1+8i$; b) $(5-8i)x+(7+3i)y=2-i$; v) $x^2+4=0$;

g) $y^2+3=0$; d) $(7+2i)x-(5-4i)y=-1-i$; j) $x^2-(4+3i)x+(1+5i)=0$.

5. Quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks tekislikning barcha nuqtalari to'plamini geometrik tasvirlang.

a) $|\mathrm{Re}\, z|>1$; b) $\mathrm{Re}\, z>0$; v) $|z|\le 1$; g) $1<|z-1|<3$.

6. Kompleks tekislikning quyidagi nuqtalar to'plamini tengsizlik yordamida yozing.

a) mavhum o'qdan chapda joylashgan yarim tekislik (o'qning nuqtalari kiradi);

b) haqiqiy o'qgacha bo'lgan masofasi birdan kichik nuqtalardan tashkil topgan yo'lak;

v) Markazi $z=0$ nuqtada, radiusi 1 ga teng mavhum o'qdan chapda joylashgan (aylanasiz) yarim doira;

g) umumiy $z=1+i$ markazga; radiuslari 1 va 2 ga teng bo'lgan aylanalar orasidagi (aylanalarsiz) xalqa.

7. Berilgan kompleks sonlarni algebraik shaklga keltiring.

a) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; b) $e^{i\frac{\pi}{6}}$; v) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$; g) $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

8. Muavr formulasi yordamida

a) $\cos 2\varphi$; b) $\sin 2\varphi$; v) $\cos 4\varphi$; g) $\sin 4\varphi$ d) $\cos 6\varphi$; e) $\sin 6\varphi$

larni φ argumentning trigonometrik funksiyalari orqali ifodalang.

9. Ifodaning qiymatini toping:

a) $(1-i\sqrt{3})^3(1+i)^2$; b) $(1+i\sqrt{3})^{-6}(1-i)^4$; v) $(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^{10}$;

g) $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{20}$; d) r; j) $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{\left(1+i\right)^{10}}$ z)

10. Quiydagi ildizlarning qiymatlarini hisoblang

a) $\sqrt{-4}$; b) $\sqrt[4]{-i}$, g) $\sqrt[8]{-i}$; d) $\sqrt[7]{-1+i}$; e) $\sqrt[9]{-1-i}$; j) $\sqrt[10]{\dfrac{\left(3\sqrt{3}+4\right)-i\left(4\sqrt{3}-3\right)}{3-4i}}$;

2-amaliy mashg'ulot. Ketma-ketlikning limitik nuqtasi. Bol'sano – Veyershtrass teoremasi. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari. Koshi kriteriyasi (2 soat).

Dars rejasi:
1. Kompleks sonlar ketma-ketligi va xossalariga oid misollar.
2. Qismiy ketma-ketlik va limitik nuqtaga oid ko'rsatmalar.
3. Kompleks sonlarning chegaralangan va chegaralanmaganligiga oid mashqlar.
4. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari, yaqinlashuvchanlik, Koshi kriteriyasiga doir misollar yechish.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Kompleks sonlar ketma-ketligi, limitik nuqta, nuqtaning atrofi, chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketlik, yaqinlashuvchi ketma-ketlik, ketma-ketlik yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartlari.*

Dars maqsadi. Ketma-ketlik, qismiy ketma-ketlik, limitik nuqtalar, chegaralangan ketma-ketlik, kompleks atrof, yaqinlashuvchanlik va uzoqlashuvchanlik kabi nazariy bilimlarni aniq misol va topshiriqlar vositasida mustahkamlash va o'quvchini mustaqil ishlashga yo'naltirish.

Darsning tarkibiy qismlari
1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni.

2.1.Darsning nazariy asosi.
Hadlari kompleks sonlardan tashkil topgan

$$z_1, z_2, ..., z_n, ... \quad \text{(yoki } \{z_n\}_{n=1}^{\infty}\text{)}$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2.1-ta'rif. *Agar* $a \in C$ *nuqtaning ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *atrofi* $U_\varepsilon(a) = \{z : |z - a| < \varepsilon\}$ *da* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari yotsa, u holda* a *songa ketma-ketlikning limitik nuqtasi deyiladi.*

2.2-ta'rif. *Agar* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlikning har bir hadini moduli biror musbat sondan kichik bo'lsa, ya'ni shunday chekli* $M > 0$ *son mavjud bo'lib, barcha* $n \in N$ *uchun*

$$|z_n| < M \ , \ n = 1,2,...$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.*

2.3*-ta'rif.* *Agar chegaralangan ketma-ketlik yagona limitik nuqtaga ega bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi.*

Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ sonlar uchun

$$|z_n - a| < \varepsilon \qquad (a \neq \infty)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik a kompleks songa yaqinlashadi deyiladi va

$$\lim_{n \to \infty} z_n = a$$

yoki $n \to \infty$ da $z_n \to a$ kabi belgilanadi.

2.4-ta'rif. *Agar ketma-ketlik chegaralanmagan yoki bittadan ortiq limitik nuqtaga ega bo'lsa, u holda u uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.*

2.5-ta'rif. *Agar* $\forall \varepsilon > 0$ *son olinganda ham shunday natural* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *son topilsaki, barcha* $n > n_0$ *natural sonlar uchun*

$$|z_n| > \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlikning limiti cheksiz deyiladi va*

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$$

yoki $n \to \infty$ *da* $z_n \to \infty$ *kabi belgilanadi.*

2.2.Namunaviy yechilgan misollar

2.1-Misol. Ta'rifdan foydalanib $z_n = \dfrac{n + in + 1 - i}{n}$ ketma-ketliklarning $a = 1 + i$ limitga ega ekanligini isbotlang.

Yechish. a) $\varepsilon > 0$ - ixtiyoriy son bo'lsin. $a = 1 + i$ nuqtaning ε - atrofini qaraymiz. Shunday N nomer topiladiki, $n > N$ da qaralayotgan ketma-ketlikning barcha z_n nuqtalari $a = 1 + i$ nuqtaning ε - atrofida joylashishini ko'rsatish kerak; boshqacha aytganda,

$$|z_n - (1 + i)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Shunday qilib,

$$\left|z_n-(1+i)\right|=\left|\frac{n+in+1-i}{n}-(1+i)\right|=\left|\frac{1-i}{n}\right|=\frac{\sqrt{2}}{n},$$

tenglik o'rinli, u holda

$$\frac{\sqrt{2}}{n}<\varepsilon$$

tengsizlik ixtiyoriy $n>N(\varepsilon)=\left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right]+1$ uchun bajariladi. Bunday nomerli hadlar soni cheksiz ko'p bo'lganligi uchun 1-ta'rifga asosan $a=1+i$ nuqta berilgan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning limitik nuqtasi bo'ladi. Uning yagonaligidan berilgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $a=1+i$ uning limiti bo'ladi.

2.2-misol. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1+in\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chegaralanmagan ekanligini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatdan ham kompleks son modulining ta'rifidan $|z_n|=\sqrt{1+n^2}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Ketma-ketlik chegaralanganlik ta'rifiga asosan, agar M - ixtiyoriy musbat son bo'ganda ham shunday n - natural son mavjudki $n>M$ tengsizlik bajariladi. Shuning uchun $|z_n|=\sqrt{1+n^2}>n>M$ munosabat bajariladi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning chegaralanmaganligini bildiradi.

2.3-Misol. **1** $\{z_n\}_1^{\infty}=\left\{\frac{n}{n+1}+i[1+(-1)^n]e^{2n}\right\}_1^{\infty}$ ketma-ketlikni chegaralanganlikka tekshiring.

Yechish. Bu ketma-ketlik chegaralanmagan. Haqiqatan ham kompleks son moduli ta'rifidan

$$|z_n|^2=\frac{n^2}{(n+1)^2}+[1+(-1)^n]^2e^{4n}$$

tengsizlik o'rinlidir. Xususiy holda $n=2m$ nomerli had uchun

$$|z_{2m}|^2=\frac{4m^2}{(2m+1)^2}+4e^{8m}>e^{8m},|z_{2m}|>e^{4m}.$$

Bu yerda m ixtiyoriy haqiqiy natural son bo'lganligi sababli ketma-ketlikning barcha hadlarini markazi koordinatalar boshida bo'lgan chekli radiusli aylana ichiga joylashtirish mumkin emas. z_n ketma-ketlikning limitik nuqtasi $z_0=1$ ekanligini tekshirish oson. Buning uchun $n=2m+1, m=1,2,\ldots$ deb z_n va z_n misollardagidek mulohaza yuritish kerak. z_n ketma-ketlikning boshqa limitik nuqtasi yo'qligini ko'rsating.

2.4-misol. $\{z_n\}=\{a^n\}$ $(a\in C,\ |a|<1)$ kompleks sonlar ketma-ketligini yaqinlashuvchilikka tekshiring va limitini toping.

Yechish. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olib, $|a|<1$ bo'lganda shunday n_0 natural son $n_0=n_0(\varepsilon)=\lfloor\log_{|a|}\varepsilon\rfloor$ ko'rinishda topiladiki (bu son $|a|^n<\varepsilon$ tengsizlikni yechib topiladi:

$$|a|^n<\varepsilon\Rightarrow\log_{|a|}|a|^n>\log_{|a|}\varepsilon\ \Rightarrow n>\log_{|a|}\varepsilon\ ),$$

ketma-ketlikning barcha $n>n_0$ nomerli hadlari uchun

$$|z_n| < |a|^n < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa ta'rifga binoan $|a|<1$ bo'lganda

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

bo'lishini bildiradi.

Agar berilgan ketma-ketlikda $a=1$ bo'lsa, u holda biz hadlarining hammasi o'zgarmas aynan $z_n = 1$ketma-ketlikka ega bo'lamiz va bu holda ta'rifga asosan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ va har qanday natural $n \in N$ son uchun $|z_n - 1| = |0| = 0 < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi va

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $|a| > 1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Demak, ketma-ketlik uzoqlashadi.

Agar $|a| = 1$, $a \neq 1$ bo'lsa berilgan ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, birlik aylanada yotuvchi turli qiymatlarni qabul qiladi va limitik nuqtasi yagona emas. Bu esa ushbu holda berilgan ketma-ketlikning uzoqlashuvchi ekanligini anglatadi.

2.5-Misol. $\{z_n\}_1^\infty = \left\{\dfrac{n}{n+1} + i\dfrac{n^2}{n^2+1}\right\}_1^\infty$ ketma-ketlikni yaqinlashuvchilikka tekshirib, yaqinlashuvchi bo'lsa, limitini toping

Yechish. Dastlab ketma-ketlik uchun $z_0 = 1+i$ limitik nuqta ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ta'rifga asosan avval $|z_n - z_0|^2$ ni baholaymiz:

$$|z_n - z_0|^2 = \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)^2 + \left(\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n^2+1)^2} < \frac{2}{(n+1)^2} < \frac{2}{n^2}$$

Bu yerdan $|z_n - z_0| < \dfrac{\sqrt{2}}{n}, n = 1,2\ldots$ tengsizlik hosil bo'ladi. ε ixtiyoriy musbat son uchun $N = N_\varepsilon = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right] + 1$ natural son topiladiki, ixtiyoriy $n > N$ uchun $|z_n - z_0| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan $\{z_n\}_1^\infty$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p $z_{N+1}, z_{N+2}, \ldots$ hadlari z_0 nuqtaning ε atrofida joylashishini ko'rsatadi. Demak ta'rifga asosan $z_0 = 1+i$ berilgan ketma-ketlikning limitik nuqtasi bo'ladi. Bu limitik nuqtaning yagona ekanligini, ya'ni $1+i$ dan boshqa limitik nuqtasi mavjud emasligini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan faraz qilaylik berilgan ketma-ketlikning z_0^* limitik nuqtasi mavjud bo'lsin. $z_0 = 1+i$ nuqtaning itiyoriy kichik $U_\varepsilon(z_0)$ atrofida ketma-ketlikning ma'lum $N = N_\varepsilon$ nomerdan boshlab hamma hadlari yotganligi sababli bu ketma-ketlikning $U_\varepsilon(z_0)$ atrofida yotmaydigan hadlarining soni cheklidir. z_0^* nuqtaning $U_\varepsilon(z_0) \cap U_{\varepsilon_1}(z_0^*) = \varnothing$ shartni qanoatlantiruvchi atrofini qaraylik (bu shartni qanoatlantiruvchi $U_{\varepsilon_1}(z_0^*)$ atrof mavjud, chunki $z_0 \neq z_0^*$). Hozirgi aytilganga ko'ra $U_{\varepsilon_1}(z_0^*)$ atrof berilgan ketma-ketlikning faqat chekli sondagi hadlarini o'zida saqlashi mumkinligini anglatadi. Bu esa z_0^* limitik nuqta degan farazimizga ziddir. Demak qaralgan ketma-ketlikning $z_0 = 1+i$ dan farqli birorta ham limitik nuqtasi mavjud emas.

2.6-Misol. $\{z_n\}_1^\infty = \left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1} + i\right\}_1^\infty$ ketma-ketlikning barcha limitik nuqtalarini toping.

Yechish. Dastlab bu ketma-ketlik uchun $1+i$ va $-1+i$ nuqtalar limitik nuqtalar ekanligini ko'rsatamiz. Ikki holni qaraymiz:

1-hol). $n = 2m, m = 1,2,\ldots$ bo'lsin. Bu holda

$$|z_n - (1+i)|^2 = \left(1 - \frac{2m}{2m+1}\right)^2 = \frac{1}{(2m+1)^2} < \frac{1}{4m^2} < \frac{1}{m^2}$$

Bu yerdan, $|z_{2m} - (1+i)| < \dfrac{1}{m}, m = 1,2,\ldots$ hosil bo'ladi. Yuqoridagi kabi $N = N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ deb olsak, barcha $m > N_\varepsilon$ uchun $|z_{2m} - (1+i)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan ko'rinadiki, qaralayotgan ketma-ketlikning $2N$ nomerdan boshlab barcha juft indeksli hadlari $U_\varepsilon(1+i)$ atrofda yotadi. Demak, $1+i$ ketma-ketlikning limitik nuqtasidir.

2-hol). $n = 2m-1, m = 1,2,\ldots$ bo'lsin. Xuddi yuqoridagidek qaralayotgan ketma-ketlikning $2N+1$ nomerdan boshlab barcha toq hadlari $U_\varepsilon(-1+i)$ atrofda yotishini ko'rsatish mumkin. Demak, $-1+i$ berilgan ketma-ketlikning limitik nuqtasi bo'ladi. Birinchi misolda ko'rsatilgani kabi berilgan ketma-ketlikning boshqa limitik nuqtalari mavjud emasligini tekshirish qiyin emas.

Ketma-ketlikning limiti ta'rifida limitning qiymati qatnashadi. Lekin har qanday (hatto yaqinlashuvchi) ketma-ketlik uchun ham ham limitning qiymatini topish hamma vaqt oson emas. Shu sababli amalda ketma-ketlik yaqinlashishining limitning qiymati qatnashmagan alomatini bilish zarurdir. Bu alomat Koshi kriteriyasidir.

2.7-Misol.2 Ushbu $z_n = \dfrac{a}{1^4} + \dfrac{a^2}{2^4} + \cdots + \dfrac{a^{n+m}}{(n+m)^4}, |a| < 1$ ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu ketma ketlik uchun $|z_{n+m} - z_n|$ ayirmani baholaymiz:

$$|z_{n+m} - z_n| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)^4} + \cdots + \frac{a^{n+m}}{(n+m)^4}\right| \le$$

$$\le |a|^n \left(\frac{|a|}{(n+1)^4} + \cdots + \frac{|a|^m}{(n+m)^4}\right) \le$$

$$\le \frac{|a|^m}{(n+1)^4} \frac{1-|a|^m}{1-|a|} < \frac{1}{1-|a|} \frac{|a|^m}{(n+1)^4} \to 0, n \to \infty, m = 1,2,\ldots$$

Demak Koshi kriteriyasiga asosan ketma-ketlik yaqinlashuvchidir.

2.3.Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar:

1. Ta'rifidan foydalanib, berilgan ketma-ketliklarni chegaralanganlikka tekshiring va ko'rsatilgan limitga ega ekanligini isbotlang.

a) $z_n = \dfrac{n+1}{n} + \dfrac{i}{n}$; $a = 1$. b) $z_n = \dfrac{n^2 + 3i}{n^2 - 2i}$; $a = 1$.

v) $z_n = \dfrac{in^2 + 2n^2 + 1}{n^2 + i}$; $a = 2 + i$. g) $z_n = \dfrac{in^3 + 3}{2n^3 - i}$; $a = \dfrac{i}{2}$.

2. Ushbu ketma-ketliklarning limitga (chekli yoki cheksiz) ega ekanligini aniqlang va limit mavjud bo'lsa uni toping. Kompleks tekislikda ketma-ketlikning birinchi beshta hadini tasvirlang.

a) $z_n = \left(\dfrac{e^{in}}{2}\right)^n$; b) $z_n = i^{(-1)^n}$; v) $z_n = \left(2 + \dfrac{i}{n}\right)^n$; g) $z_n = (-1)^n + \dfrac{i}{n}$.

3. a kompleks parametrning qanday qiymatlarida ketma-ketlik yaqinlashadi:

a) $\left\{\dfrac{a^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; b) $\left\{na^n\right\}_{n=1}^{\infty}$; v) $\left\{\dfrac{a^n}{1+a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; g) $\left\{1 + a + \ldots + a^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

4. Quyida berilgan ketma-ketliklarning barcha limitik nuqtalarini toping

a) $z_n = (-1)^n + i$, b) $z_n = \dfrac{2i}{n} + \dfrac{n(-1)^n}{n+5}$, v) $z_n = i^n$, g) $z_{n,m} = 2 - \dfrac{n}{m} i,\ n, m \in N$

d) $z_n = a^n + i^{\frac{n^2}{n+1}}$ e) $z_{n,m,k,l} = \dfrac{m}{n} + \dfrac{k}{l} i,\ n, m, k, l \in N$,

5. Quyidagi ketma-ketliklarning limitik nuqtalarini toping:

a) $z_n = \dfrac{2^n}{2^n + n} + (-1)^n \dfrac{2n}{2n+3} i$; b) $z_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{(n+1)^2} + \dfrac{\sqrt{n}+2}{2\sqrt{n}+1} i$;

v) $z_n = \dfrac{n+3}{4n+1} + [1 + (-1)^n] \dfrac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} i$; g) $z_n = 3^{-n} + (-1)^n \dfrac{(\sqrt{n}+1)^2}{n+1} i$;

d) $z_n = [3 + 2(-1)^n] \dfrac{(\sqrt{n}-1)^2}{2n+1} + \dfrac{3^n}{3^n + n} i$; e) $z_n = (-1)^n \dfrac{n}{2n-1} + i^n$;

j) $z_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1} + i$; z) $z_n = \dfrac{2n+1}{3n+2} + (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}} i$; i) $z_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^n + i \dfrac{n+1}{n}$

k) $z_n = 2 + i^n$; l) $z_n = n[1 + (-1)^n] + i\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2+1}$; m) $z_n = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{n}\right)^n + (-1)^n i$

6. Quyidagi ketma-ketliklarni yaqinlashishga tekshiring.

a) $z_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + e^{i\varphi} + \cdots + e^{in\varphi}\right),\ 0 < \varphi < 2\pi$; b) $z_n = \dfrac{a}{1^2} + \dfrac{a^2}{2^2} + \cdots + \dfrac{a^n}{n^2},\ |a| < 1$.

v) $z_n = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} i,\ |a_k| \le 2$

3- amaliy mashg'ulot. Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri. Cheksiz usoqlashgan nuqta. Steoreografik proyeksiya formulalari. Steoreografik proyeksiyaning asosiy xossasi. (2 soat)

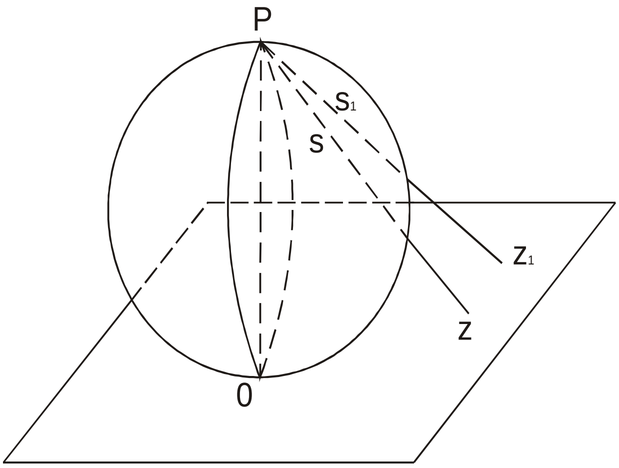
Dars rejasi:

7. Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri.
8. Steriografik proyeksiya formulalari.
9. Steriografik proyeksiyaning ososiy xossasi.

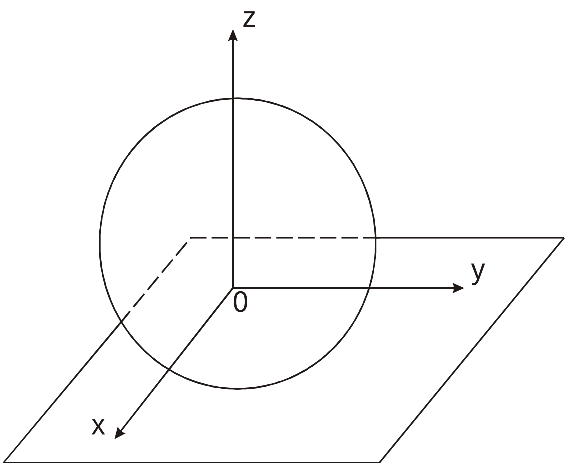
1 . Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri. Biz natural sonlar ketma-ketligi $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ misolida ko'rishimiz mumkinki, chegaralanmagan va chekli limitik nuqtaga ega bo'lmagan ketma –ketliklar mavjuddir. Bunday ketma– ketliklar cheksizga intiladi deb aytamiz va bu munosabatni

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \tag{2.1}$$

kabi belgilaymiz. (2.1) munosabat $\{z_n\}$ ketma – ketlikning chekli limitik nuqtaga ega emasligini ifodalaydi. Bu munosabatni geometrik jihatdan tushuntirish uchun ketma – ketlik sonlarini sfera nuqtalari bilan tasvirlaymiz. Shu maqsadda XOY tekislikning markazi O nuqtaga urinuvchi sfera olamiz.



3.1-chizma



3.2-chizma

Shu O nuqtadan chiquvchi tekislikka perpendikulyar sferaning diametri sferani biror P nuqtada kesib o'tadi. Sferaning bu nuqtasini uning qutbi deb ataymiz. Ma'lumki, har bir $z = x + iy$ kompleks songa kompleks tekislikda aniq bir $z(x, y)$ nuqta mos keladi. Bu nuqtani P nuqta bilan P_z to'g'ri chiziq kesmasi orqali tutashtiramiz. P_z kesma sferani biror S nuqtada kesadi. Bu nuqtani $z = x + iy$ nuqtaning sferadagi tasviri sifatida qabul qilamiz. Va aksincha, agar sferaning $S_1 \neq P$ nuqtasini P sfera qutbi bilan tutashtiruvchi nurni tekislik bilan kesishguncha davom ettirsak, u holda tekislikda qandaydir Z_1 nuqtani hosil qilamizki, uni tekislikning S_1 nuqtaga mos nuqtasi sifatida qabul qilamiz. Natijada kompleks sonlar tekisligigining barcha nuqtalari va sferaning barcha nuqtalari (uning qutbidan tashqari) o’rtasida o’zaro bir qiymatli uzluksiz moslik o’rnatiladi.

Endi P nuqtaning sfera boshqa nuqtalari bilan munosabatini qaraymiz. Agar $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ bo’lsa, u holda z_n nuqtalarning sferadagi tasvirlari shunaqa S_n nuqtalardan iboratki, $n \to \infty$ da bu nuqtalar P nuqtaga yaqinlashadi. Bundan ko’rinadiki , cheksiz uzoqlashgan nuqtaning sferadagi tasviri sifatida P nuqtani olish tabiiy va P nuqtaga mos tekislikning yagona nuqtasi cheksiz uzoqlashgan nuqta deb aytiladi. Shunday qilib, tekislikning cheksiz uzoqlashgan nuqtasi bilan birga barcha nuqtalari va sferaning barcha nuqtalari o’rtasida o’zaro bir qiymatli moslik o’rnatish mumkin ekan. Bunday moslik steriografik proeksiya deb aytiladi.

Nuqtalari barcha kompleks sonlar va cheksizni ifodalovchi sfera Riman sferasi deyiladi.

Kompleks sonlar va cheksizning sferada tasvirlashning afzalligi tekislik yagona cheksiz uzoqlashgan nuqtasining ravshan ifodalanishidir. Agar sfera P nuqtasining atrofi deb, uning P nuqtani saqlovchi va OP diametrga perpendikulyar tekislik bilan kesishdan hosil bo’lgan qismini olsak, u holda cheksiz uzoqlashgan nuqtaning atrofi uning steriografik proyeksiyasidan , ya’ni markazi O nuqtada bo’lgan biror doiraning tashqarisidan iborat bo’ladi. Cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofi tushunchasini kiritgandan so’ng, $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ munosabatni geoometrik jihatdan chekli nuqtaga intilish kabi ifodalash mumkin: agar cheksiz uzoqlashgan nuqtaning ixtiyoriy atrofida $z_1, z_2, z_3, ..., z_n, \ldots$ ketma –ketlikning chekli sondagi nuqtalaridan tashqari barcha nuqtalari yotsa , u holda $\{z_n\}$ ketma – ketlik cheksiz uzoqlashgan nuqtaga yaqinlashadi deb aytamiz.

Kelgusida z orqali tekislikning ixtiyoriy nuqtasini belgilaymiz. Bu tekislikni kompleks o’zgaruvchi tekisligi, yoki qisqacha kompleks tekislik deb ataymiz va C kabi belgilaymiz. Kompleks tekislik cheksiz uzoqlashgan nuqta bilan birgalikda kengaytirilgan kompleks tekislik deyiladi va $\overline{C}$ belgilanadi.

Cheksiz uzoqlashgan nuqta O nuqta kabi aniq argumentga ega emas.

3.2. Steriografik proyeksiya formulalari. Bu qismda biz kompleks son komponentlari yoki koordinatalari orqali sferadagi mos nuqta koordinatalarini topish va unga teskari masalani yechish bilan shug’ullanamiz. Buning uchun $O\xi\eta\zeta$ fazoviy koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, $O\xi$ va $O\eta$ o’qlar tekislikning OX va OY o’qlari bilan ustma-ust tushadigan qilib, hamda $O\zeta$ o’qni esa OP diametr yo’nalishi bo’yicha olamiz. Soddalik uchun OP diametr uzunligini birlik sifatida qabul qilamiz. U holda sfera markazi $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ nuqtadan va radiusi $r=\frac{1}{2}$ dan iborat bo’ladi. Agar sfera nuqtasini (ξ,η,ζ) deb olsak, u holda bu nuqta quyidagi tenglamani qanoatlantiradi (3.2- chizmaga qarang):

$$\xi^2+\eta^2+(\zeta-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \quad \text{yoki} \quad \xi^2+\eta^2=\zeta(1-\zeta) \qquad (3.2)$$

Ushbu (0,0,1), $((\xi,\eta,\zeta))$ va $(x,y,0)$ nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotadi. Shuning uchun bu nuqtalar quyidagi munosabatlarni qanoatlantirishi kerak:

$$\frac{\xi-0}{x-0}=\frac{\eta-0}{y-0}=\frac{\zeta-1}{0-1}$$

Bu yerdan

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta} \text{ va } y=\frac{\eta}{1-\zeta} \tag{3.3}$$

Formulalar kelib chiqadi. Ulardan foydalanib z ni tiklaymiz:

$$z=x+iy=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}, \tag{3.4}$$

va (3.2) ga ko'ra

$$x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{\zeta}{1-\zeta}. \tag{3.5}$$

(3.3) va (3.4) formulalar z nuqta yoki z kompleks son koordinatalarini sferaning mos nuqtasi koordinatalari orqali ifodalaydi. Endi teskari formulalarni keltirib chiqaramiz. (3.5) formuladan ζ ni topamiz:

$$\zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}.$$

ξ ning bu ifodasini (3.3) ga qo'yib,

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}, \quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2+1}, \quad \zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \tag{3.6}$$

formulalarni hosil qilamiz. (3.6) formulalar sfera nuqtasi koordinatalarini z kompleks son koordinatalari orqali ifodalaydi. Shunday qilib 3.2-qismga qo'yilgan masala to'la yechildi.

3.3. Steriografik proyeksiyaning asosiy xossasi.

Teorema-3.1. *Steriografik proyeksiyada tekislikning har bir aylanasi sferaning aylanasiga o'tadi va aksincha.*

Bu yerda aylana tushunchasi keng ma'noda, ya'ni to'g'ri chiziqlni radiusi cheksizga teng aylanadan iborat deb tushunish kerak.

2.2.Namunaviy yechilgan misollar

2.1-Misol. Ta'rifdan foydalanib $z_n=\frac{n+in+1-i}{n}$ ketma-ketliklarning $a=1+i$ limitga ega ekanligini isbotlang.

Yechish. a) $\varepsilon>0$ - ixtiyoriy son bo'lsin. $a=1+i$ nuqtaning ε - atrofini qaraymiz. Shunday N nomer topiladiki, $n>N$ da qaralayotgan ketma-ketlikning barcha z_n nuqtalari $a=1+i$ nuqtaning ε - atrofida joylashishini ko'rsatish kerak; boshqacha aytganda,

$$|z_n-(1+i)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Shunday qilib,

$$\left|z_n-(1+i)\right|=\left|\frac{n+in+1-i}{n}-(1+i)\right|=\left|\frac{1-i}{n}\right|=\frac{\sqrt{2}}{n},$$

tenglik o'rinli, u holda

$$\frac{\sqrt{2}}{n}<\varepsilon$$

tengsizlik ixtiyoriy $n>N(\varepsilon)=\left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right]+1$ **uchun bajariladi. Bunday nomerli hadlar soni cheksiz ko'p bo'lganligi uchun 1-ta'rifga asosan** $a=1+i$ **nuqta berilgan** $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ **ketma-ketlikning limitik nuqtasi bo'ladi. Uning yagonaligidan berilgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi va** $a=1+i$ **uning limiti bo'ladi.**

2.2-misol. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1+in\}_{n=1}^{\infty}$ **ketma-ketlikning chegaralanmagan ekanligini ko'rsating.**

Yechish. **Haqiqatdan ham kompleks son modulining ta'rifidan** $|z_n|=\sqrt{1+n^2}$ **tenglik o'rinli bo'ladi. Ketma-ketlik chegaralanganlik ta'rifiga asosan, agar** M **- ixtiyoriy musbat son bo'ganda ham shunday** n **-natural son mavjudki** $n>M$ **tengsizlik bajariladi. Shuning uchun** $|z_n|=\sqrt{1+n^2}>n>M$ **munosabat bajariladi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning chegaralanmaganligini bildiradi.**

2.3-Misol. **3** $\{z_n\}_1^{\infty}=\left\{\frac{n}{n+1}+i[1+(-1)^n]e^{2n}\right\}_1^{\infty}$ ketma-ketlikni chegaralanganlikka tekshiring.

Yechish. Bu ketma-ketlik chegaralanmagan. Haqiqatan ham kompleks son moduli ta'rifidan

$$|z_n|^2=\frac{n^2}{(n+1)^2}+[1+(-1)^n]^2e^{4n}$$

tengsizlik o'rinlidir. Xususiy holda $n=2m$ nomerli had uchun

$$|z_{2m}|^2=\frac{4m^2}{(2m+1)^2}+4e^{8m}>e^{8m},|z_{2m}|>e^{4m}.$$

Bu yerda m ixtiyoriy haqiqiy natural son bo'lganligi sababli ketma-ketlikning barcha hadlarini markazi koordinatalar boshida bo'lgan chekli radiusli aylana ichiga joylashtirish mumkin emas. z_n ketma-ketlikning limitik nuqtasi $z_0=1$ ekanligini tekshirish oson. Buning uchun $n=2m+1, m=1,2,\ldots$ deb z_n va z_n misollardagidek mulohaza yuritish kerak. z_n ketma-ketlikning boshqa limitik nuqtasi yo'qligini ko'rsating.

2.4-misol. $\{z_n\}=\{a^n\}$ $(a\in C,\ |a|<1)$ kompleks sonlar ketma-ketligini yaqinlashuvchilikka tekshiring va limitini toping.

Yechish. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olib, $|a|<1$ bo'lganda shunday n_0 natural son $n_0=n_0(\varepsilon)=\lfloor\log_{|a|}\varepsilon\rfloor$ ko'rinishda topiladiki (bu son $|a|^n<\varepsilon$ tengsizlikni yechib topiladi:

$$|a|^n<\varepsilon\Rightarrow\log_{|a|}|a|^n>\log_{|a|}\varepsilon\ \Rightarrow n>\log_{|a|}\varepsilon\ ),$$

ketma-ketlikning barcha $n>n_0$ nomerli hadlari uchun

$$\left|z_n\right| < \left|a\right|^n < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa ta'rifga binoan $|a|<1$ bo'lganda

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

bo'lishini bildiradi.

Agar berilgan ketma-ketlikda $a=1$ bo'lsa, u holda biz hadlarining hammasi o'zgarmas aynan $z_n = 1$ketma-ketlikka ega bo'lamiz va bu holda ta'rifga asosan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ va har qanday natural $n \in N$ son uchun $|z_n - 1| = |0| = 0 < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi va

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $\left|a\right| > 1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Demak, ketma-ketlik uzoqlashadi.

Agar $\left|a\right| = 1$, $a \neq 1$ bo'lsa berilgan ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, birlik aylanada yotuvchi turli qiymatlarni qabul qiladi va limitik nuqtasi yagona emas. Bu esa ushbu holda berilgan ketma-ketlikning uzoqlashuvchi ekanligini anglatadi.

2.5-Misol. $\{z_n\}_1^\infty = \left\{\frac{n}{n+1} + i\frac{n^2}{n^2+1}\right\}_1^\infty$ ketma-ketlikni yaqinlashuvchilikka tekshirib, yaqinlashuvchi bo'lsa, limitini toping

Yechish. Dastlab ketma-ketlik uchun $z_0 = 1+i$ limitik nuqta ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ta'rifga asosan avval $|z_n - z_0|^2$ ni baholaymiz:

$$|z_n - z_0|^2 = \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)^2 + \left(\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n^2+1)^2} < \frac{2}{(n+1)^2} < \frac{2}{n^2}$$

Bu yerdan $|z_n - z_0| < \frac{\sqrt{2}}{n}, n = 1,2\ldots$ tengsizlik hosil bo'ladi. ε ixtiyoriy musbat son uchun $N = N_\varepsilon = \left[\frac{\sqrt{2}}{n}\right] + 1$ natural son topiladiki, ixtiyoriy $n > N$ uchun $|z_n - z_0| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan $\{z_n\}_1^\infty$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p $Z_{N+1}, Z_{N+2}, \ldots$ hadlari z_0 nuqtaning ε atrofida joylashishini ko'rsatadi. Demak ta'rifga asosan $z_0 = 1+i$ berilgan ketma-ketlikning limitik nuqtasi bo'ladi. Bu limitik nuqtaning yagona ekanligini, ya'ni $1+i$ dan boshqa limitik nuqtasi mavjud emasligini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan faraz qilaylik berilgan ketma-ketlikning z_0^* limitik nuqtasi mavjud bo'lsin. $z_0 = 1+i$ nuqtaning itiyoriy kichik $U_\varepsilon(z_0)$ atrofida ketma-ketlikning ma'lum $N = N_\varepsilon$ nomerdan boshlab hamma hadlari yotganligi sababli bu ketma-ketlikning $U_\varepsilon(z_0)$ atrofida yotmaydigan hadlarining soni cheklidir. z_0^* nuqtaning $U_\varepsilon(z_0) \cap U_{\varepsilon_1}(z_0^*) = \varnothing$ shartni qanoatlantiruvchi atrofini qaraylik (bu shartni qanoatlantiruvchi $U_{\varepsilon_1}(z_0^*)$ atrof mavjud, chunki $z_0 \neq z_0^*$). Hozirgi aytilganga ko'ra $U_{\varepsilon_1}(z_0^*)$ atrof berilgan ketma-ketlikning faqat chekli sondagi hadlarini o'zida saqlashi mumkinligini anglatadi. Bu esa z_0^* limitik nuqta degan farazimizga ziddir. Demak qaralgan ketma-ketlikning $z_0 = 1+i$ dan farqli birorta ham limitik nuqtasi mavjud emas.

3-ma’ruza bo’yicha muammoli topshiriqlar

1. Sfera diametrini 2 yoki 3 birlik deb faraz qilib, stereografik proeksiya va unga oid (3.2) – (3.6) formulalarga o’xshash formulalar qanday o’zgaradi?
2. 1-savol javobiga asoslanib shu holda stereogarafik proeksiyaning asosiy xossasini ayting? Qanday o’zgarish bor?
3. Hosil qilgan formulangizda kompleks tekislikda o’zingiz biror aylana, yarim tekislik, yo’lak, to’g’ri to’rtburchak olib, uning Riman sferasidagi aksini yasang. Xulosa chiqaring.

4-amaliy mashg'ulot. Sonli qatorlar. Qatorlar ustida amallar. Karrali qatorlar haqida teorema. Qatorlarni ko'paytirish. (2 soat)

Dars rejasi:
1. Sonli qatorlar va ularda yaqinlashish tushunchasi.
2. Qator yaqinlashishing zaruruiy va yetarli sharti.
3. Qatorlarning absolyut yaqinlashuvchanligi.

Tayanch iboralar: *Sonli qatorlar, sonli qatorlarni yaqinlashishi va uzoqlashishi, qator yaqinlashishing zaruriy sharti, absolyut yaqinlashuvchi qatorlar, qatorning yig'indisi, qatorlarni qo'shish, ikkilangan qatorlar, qator yaqinlashishing zaruruy va yetarli sharti.*

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Darsning tarkibiy qismlari
1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni.

3.1.Darsning nazariy asosi .

Kompleks cheksiz $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning hadlaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ... \qquad (3.1)$$

yig'indisiga sonli qator deyiladi.

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n, \ . \ . \ .$$

qatorning qismiy yig'indilari deyiladi.

3.1-ta'rif. *Agar (3.1) qatorning S_n qismiy yig'indisi $n \to \infty$ da aniq S chekli limitga ega bo'lsa, u holda bu qator yaqinlashuvchi deyiladi va S - songa (3.1) qatorning yig'indisi deyiladi. Aks holda, (3.1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Agar qator yaqinlashsa, u holda, uning umumiy hadining limiti nolga teng bo'ladi. Lekin bu zaruriy shartdir, ammo yetarli emas.

Masalan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - garmonik qator uchun $z_n = \frac{1}{n} \to 0$ bo'ladi, ammo bu qator uzoqlashadi va uning yig'indisi cheksizdir.

Agar (3.1) qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan nomanfiy hadli qator yaqinlashsa, u holda (3.1) qatorga absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar qator absolyut yaqinlashsa, u holda u oddiy ma’noda ham yaqinlashadi.

(3.1) qatordan har xil yo’llar orqali qismiy cheksiz qatorlar

$$z_{\alpha_1}+z_{\alpha_2}+z_{\alpha_3}+\cdots,$$
$$z_{\beta_1}+z_{\beta_2}+z_{\beta_3}+\cdots\ , \qquad (3.2)$$
$$z_{\gamma_1}+z_{\gamma_2}+z_{\gamma_3}+\cdots$$

tuzish mumkin, bunda qatorning har bir hadi faqat va faqat bitta qismiy qatorning hadi bo’ladi.

3.1- asosiy teorema (sonli qatorning absolyut yaqinlashishi haqida). Faraz qilaylik (3.1) qator absolyut yaqinlashuvchi bo’lsin. U holda quyidagi tasdiqlar o’rinli bo’ladi:

1) (3.2) qatorlarning har biri absolyut yaqinlashadi;

2) (3.2) dagi qatorlar yig’indilari mos holda $S_1, S_2, S_3, \cdots$ orqali tuzilgan $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ qaator ham absolyut yaqinlashadi;

3) (3.1) qatorning yig’indisi S uchun $S=\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ tenglik o’rinlidir.

Qatorlarni yaqinlashuvchanlikka tekshirishda bizga quyidagi alomatlar qo’l kelashi mumkin.

1. Dalamber alomati. Agar $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ qator hadlari uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\lambda$$

limit mavjud bo’lib

$a)$ $\lambda<1$ bo’lsa, u holda $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ qator yaqinlashadi;

$b)$ $\lambda>1$ bo’lsa, u holda $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ qator uzoqlashadi;

$v)$ $\lambda=1$ bo’lsa, u holda $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ qatorning yaqinlashish masalasi ochiq qoladi.

2. Koshi alomati. Agar $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}=\lambda$ bo’lib,

$a)$ $\lambda<1$ bo’lsa, u holda $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ qator yaqinlashadi;

$b)$ $\lambda>1$ bo’lsa, u holda $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ qator uzoqlashadi;

$v)$ $\lambda=1$ bo’lganda qatorning yaqinlashish masalasi ochiq qoladi.

Ba,zi murakkabroq qatorlarni tekshirishda quyidagi alomatlardan foydalanishga to’g’ri keladi. Faraz qilaylik, ushbu

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+a_{n+1}+...=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (3.3)$$

musbat hadli qator hamda

$$B_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

bo'lsin.

3. Raabe alomati. Agar yetarlicha katta n natural sonlar uchun $B_n \geq r$ (r – o'zgarmas son) bo'lib, $r > 1$ bo'lsa, u holda (3.3) qator yaqinlashuvchi, agar biror n dan boshlab $B_n \leq 1$ bo'lsa, (3.3) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Endi quyidagi

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3.4}$$

qator berilgan bo'lib (a_n, b_n kompleks sonlar bo'lishi ham mumkin),

$B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2, ..., B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n, \quad n = 1,2,3,...$ bo'lsin.

4. Dirixle alomati. Agar $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ ketma-ketlik monoton ravishda nolga intilib, ushbu $b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$ qatorning xususiy yig'indisidan tuzilgan

$$B_1,\ B_2, ... B_n, ...$$

ketma – ketlik chegaralangan bo'lsa, u holda (4) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

5. Abel' alomati. Agar $a_1, a_2, a_3, .., a_n, ..$ ketma-ketlik monoton va chegaralangan bo'lib, $b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (3.4) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

3.2.Namunaviy yechilgan misollar

3.1-misol. $1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu qatorning qismiy S_{n+1} yig'indisi

$$S_{n+1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 + z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} + \frac{z^{n+1}}{1 - z}.$$

Bunda agar $|z| < 1$ bo'lsa $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$, agar $|z| > 1$ bo'lsa $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1} = \infty$ va agar $|z| = 1$ bo'lsa $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1}$ limit mavjud emasligigakelamiz. Ularning dastlabki ikkitasi ravshan, uchinchisi esa $|z| = 1$ bo'lganda $z = e^{i\varphi},\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ bo'lib, undan $z^{n+1} = e^{i(n+1)\varphi} = \cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi$ tenglik o'rinli va $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\varphi$ va $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\varphi$ limitlar mavjud emas.

Demak, qator $|z| < 1$ bo'lganda yaqinlashadi va uning yig'indisi $\frac{1}{z-1}$ bo'ladi. Ya'ni $1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1 - z},\ |z| < 1$.

Masalan, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$ bo'lgan holda $|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6} < 1$.

Bundan $1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i)+\cdots+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i)^n+\cdots=\dfrac{1}{1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}-i\frac{1}{3}}$.

3.2-Misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^3}$ qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Yechish. Berilgan qator hadlari absolyut qiymatidan qator tuzamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in}}{n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Bu garmonik qator yaqinlashadi (buning yaqinlashishini matematik analizdan ma'lim usullardan masalan, integral yoki Raabe alomati yordamida ko'rsatish mumkin). Shuning uchun berilgan kompleks hadli qator nafaqat yaqinlashadi balkim absolyut yaqinlashadi.

3.3-Misol. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+....+\frac{n}{2^n}+...$ qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Yechish. Bu qator uchun Dalamber alomatini qo'llaymiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}\right|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1.$$

Demak bu alomatga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

3.4-Misol. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}$ qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Yechish. Bu misolni Koshi alomatidan foydalanib yechamiz.

$$z_n=e^{in}=\cos n+i\sin n,\ \ n=1,2,3,...$$

$$\left|e^{in}\right|=\left|\cos n+i\sin n\right|=\sqrt{\cos^2 n+\sin^2 n}=1$$

Bo'lgani uchun Koshi alomatidan

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}=1,\quad \lambda=1.$$

bo'lganligi uchun Koshi alomati bu holda qator yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchilik masalasini ochiq qoldiradi. Shu sababli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos n \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sin n$$

qatorlarni alohida tekshirib ko'ramiz. Ma'lumki,

$$1+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

ayniyatda $x=1$ deb olsak

$$\sigma_n=1+\cos 1+\cos 2+...+\cos n=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\cos\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}.$$

tenglikni olamiz. Bundan ko'rinadiki, $n \to \infty$ da kasrning suratidagi sinus va kosinuslar aniq bir songa intilmaydi. Shu sababli $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ qator, va demak, berilgan qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

3.5-Misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$ qatorni yaqinlashuvchanlikka tekshiring.

Yechish. Ma'lumki, kompleks son moduli ta'rifidan

$$\left|e^{in}\right| = \left|\cos n + i \sin n\right| = 1, \qquad \left|\frac{e^{in}}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Bu tenglikning o'ng tomoni uzoqlashuvchi garmonik qatorning umumiy hadi bo'lgani uchun berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi emas. Endi uni shartli yaqinlashuvchilikka Dirixle alomati yordamida tekshiramiz:

$$\frac{e^{in}}{n} = \frac{1}{n}(\cos n + i \sin n) = \frac{\cos n}{n} + i \frac{\sin n}{n};$$

Quyidagi qatorlarni qaraymiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n \quad va \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n$$

Dastlab bu qatorning birinchisini tekshirib ko'raylik, buning uchun $a_n = \frac{1}{n}$ va $b_n = \cos n$ deb belgilaymiz. So'ngra

$$B_n = \cos 1 + \cos 2 + \cos 3 + ... + \cos n = \frac{\cos \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}}$$

ayniyatdan hamda

$$\left|\cos \frac{n+1}{2}\right| \le 1 \quad va \left|\sin \frac{n}{2}\right| \le 1$$

tengsizlikdan foydalansak, quyidagi tengsizlikni olamiz:

$$|B_n| \le \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}.$$

$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlik monoton kamayib, nolga intiladi. Demak, Dirixle alomatiga muvofiq, $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} \cos n$ qator yaqinlashuvchi. Xuddi shu usulda ikkinchi qatorning ham yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatish mumkin. Shunday qilib, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi, lekin absolyut yaqinlashuvchi emas ekan.

3.6-Misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)^n}{3^n}$ qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Yechilishi. Dastlab uning absolyut yaqinlashish masalasini tekshirib ko’raylik. Bu misolga Koshi alomatini qo’llash qulay:

$$\sqrt[n]{|c_n|}=\sqrt[n]{n\left|\frac{2i-1}{3}\right|^n}=\sqrt[n]{n}\,\frac{|2i-1|}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{5}\sqrt[n]{n},$$

chunki

$$|2i-1|==\sqrt[n]{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5};\ \sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}=p;$$

$$\frac{1}{n}\ln n=\ln p,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim p=1;$$

Biz bu o’rinda Lopital’ qoidasini tadbiq etdik, demak,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{3}\sqrt{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\frac{\sqrt{5}}{3}<1.$$

Shunday qilib, Koshi alomatiga muvofiq, berilgan qator absolyut yaqinlashar ekan.

3.3.Mustaqil ishlash uchun misol va topshiriqlar:

1. Quydagi qatorlarni shartli yoki absolyut yaqinlashuvchilikka tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{3n}}{i+n^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3i)^n}$; v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(in)^n}{(2n)!}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(in)^n}{(n!)^2}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2i-1)^n}{3^n}$, j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

2. Quydagi qatorlarning yig’indisini toping:

a) $1+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\cos 4\alpha+\frac{1}{8}\cos 6\alpha+\cdots$ b) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\sin 4\alpha+\frac{1}{8}\sin 6\alpha+\cdots$

v) $\frac{1}{3}\cos\alpha+\frac{1}{9}\cos 3\alpha+\frac{1}{27}\cos 5\alpha+\cdots$ g) $\frac{1}{3}\sin\alpha+\frac{1}{9}\sin 3\alpha+\frac{1}{27}\sin 5\alpha+\cdots$

Javoblar:

1. a) absolyut yaqinlashadi, b) absolyut yaqinlashadi, v) absolyut yaqinlashadi, g) absolyut yaqinlashadi, e) absolyut yaqinlashuvchi, j) absolyut yaqinlashadi.

2. a) $\frac{2(2-\cos 2\alpha)}{5-4\cos 2\alpha}$. b) $\frac{2\sin 2\alpha}{5-4\cos 2\alpha}$. v) $\frac{\cos\alpha}{2(1+3\sin^2\alpha)}$. g) $\frac{\sin\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$.

5-amaliy mashg'ulot.Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar. Soha tushunchasi. Jordan chizig'i (2 soat)

Dars rejasi:

1. Kompleks tekislikda egri chiziq tushunchasi
2. Soha tushunchasi
3. Jordan chizig'i

Tayanch iboralar: *Kompleks qiymatli funktsiya, chiziq, yopiq chiziq, ichki nuqta, ochiq tuplam, soha, tashqi va chegaraviy nuqta, yopiq soha, uzluksiz chiziq, Jordan chizig'i, bir bog'lamli soha, ko'p bog'lamli sohalar.*

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Dars maqsadi. Talabalarga haqiqiy o'zgaruvchili kompleks qiymatli funksiya tshunchasini o'rgatish, u orqali chiziqning parametrik tenglamasi hamda undagi yo'nalishni tanlash nazariy bilimlarni misol va topshiriqlar yechish bilan mustahkamlash va amaliy ko'nikmalar hosil qilishdan iborat.

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) -5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish - 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni - 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish - 5 minut.

Darsning bayoni

4.1. Darsning nazariy asosi .

x va y harakatdagi nuqtaning koordinatalari bo'lsin, u holda har bir x va y ga biror qoida yordamida $x = x(t)$, $y = y(t)$ haqiqiy sonlar mos keladi, bunda t $(\alpha \le t \le \beta)$ haqiqiy o'zgaruvchi (parametr). U holda kompleks son (x, y) juftlik orqali ifodalangani sababli, kompleks sonning $z = x + iy$ algebraik shakliga mos holada

$$z = x + iy = x(t) + iy(t) = \sigma(t)$$

ko'rinishdagi kompleks qiymatli funksiya berilgan deyiladi,b, bu yerda $x(t) = \operatorname{Re}\sigma(t)$ va $y(t) = \operatorname{Im}\sigma(t)$ -haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar.

4.1-ta'rif. $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$ *funksiyaning limiti*

$$\lim_{t \to t_0} \sigma(t) = \lim_{t \to t_0} x(t) + i \lim_{t \to t_0} y(t)$$

formula bilan aniqlanadi.

4.2-ta'rif. *Agar shu nuqta (kesma) da* $x(t)$ *va* $y(t)$ *funksiyalar uzluksiz bo'lsa, u holda* $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$ *funksiya nuqta (yoki kesma)da uzluksiz deyiladi.*

4.3-ta'rif. $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$ *funksiyaning hosilasi* $\sigma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ *formula bilan aniqlanadi.*

$\sigma(t) = x(t) + iy(t)$ funksiyaning integrali

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)dt + i\int_{\alpha}^{\beta} y(t)dt$$

formula bilan aniqlanadi.

Integralni hisoblash uchun Nyuton-Leybnis formulasi o'rinli bo'ladi.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

bu yerda $\Phi(t)$ funksiya $\sigma(t)$ ning boshlang'ich funksiyasidir, ya'ni $\Phi'(t) = \sigma(t),\ \alpha \le t \le \beta$.

Kompleks qiymatli $z = \sigma(t)$ uzluksiz funksiya chekli $\alpha \le t \le \beta$ kesmada berilgan bo'lsin. U holda

$$z = \sigma(t),\ (\alpha \le t \le \beta) \tag{4.1}$$

uzluksiz chiziq berilgan, (4.1) tenglamaga esa bu chiziqning parametrik tenglamasi deyiladi. Demak,

$$z = \sigma(t),\ \ (\alpha \le t \le \beta)$$

funksiya $[\alpha,\beta]$ segmentni kompleks tekislik nuqtalariga akslantiradi va bu nuqtalar to'plami esa kompleks tekislikda egri chiziqni ifodalaydi.

4.4-ta'rif. *Agar* $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ *bo'lsa, ya'ni egri chiziqning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari ustma-ust tushsa, bunday egri chiziqqa yopiq deyiladi.*

4.5-ta'rif. *Agar* $z = \sigma(t)$ *egri chiziqda* t *o'zgaruvchining ikkita turli* t_1 *va* t_2 $(t_1 \ne t_2)$ *qiymatlariga mos keladigan* $\sigma(t_1)$ *va* $\sigma(t_2)$ *nuqtalar ham turlicha bo'lsa, u holda egri chiziq Jordan chizig'i yoki qisqacha uzluksiz chiziq deyiladi.*

4.6-ta'rif. *Agar* $\sigma(t)$ *funksiya uzluksiz va noldan farqli* $\sigma'(t) \ne 0$ *hosilaga ega bo'lsa, u holda* $z = \sigma(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ *tenglama bilan berilgan chiziq silliq deyiladi.*

4.7-ta'rif. $|z - a| < \varepsilon$ *tengsizlikni qanotlantiruvchi* z *(* $z \in$ ***C)*** *nuqtalardan iborat to'plam* a *nuqtaning atrofi (*ε*-atrofi) deyiladi va* $U(a,\varepsilon)$ *kabi belgilanadi.*

4.8-ta'rif. *Agar* $a \in D$ *nuqta o'zining biror atrofi bilan* D *to'plamga tegishli bo'lsa,* a *nuqta bu to'plamning ichki nuqtasi deyiladi.*

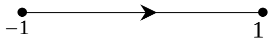
4.9-ta'rif. *Barcha nuqtalari ichki nuqtalardan iborat to'plam ochiq to'plam deyiladi. Agar* $a \in C$ *(* $a \in \overline{C}$ *) nuqtaning ixtiyoriy o'yilgan atrofida* $D \subset C$ $(D \subset \overline{C})$ *to'plamning hech bo'lmaganda bitta nuqtasi bo'lsa,* a *nuqta* D *to'plamning limit nuqtasi deyiladi.*

4.10-ta'rif. *Agar* D *to'plamning barcha limit nuqtalari shu to'plamga tegishli bo'lsa,* D *ga yopiq to'plam deyiladi.*

4.2.Namunaviy yechilgan misollar

4.1-misol. $z=\cos t,\ \pi \le t \le 2\pi$ tenglama bilan ifodalangan chiziqning geometrik o'rnini aniqlang.

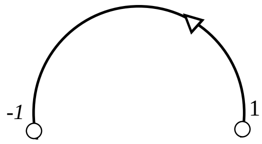
Yechish. Bu chiziq $z=-1$ nuqtadan $z=1$ nuqtaga yo'naltirilgan $[-1;\ 1]$ kesmadan iborat (1-rasm).



1-расм

4.2-misol. $z=e^{it},\ 0\le t\le \pi$ tenglama bilan ifodalangan chiziqning geometrik o'rnini aniqlang.

Yechish. Bu chiziq soat strelkasiga teskari yo'naltirilgan $|z|=1,\ \operatorname{Im} z\ge 0$ yarim aylanadan iborat (2-rasm).



2-расм

4.3-misol. Ushbu to'plamlarni ochiq yoki yopiq ekanligini aniqlang.

a) $D=\{z\in C: |z-a|<r\}$; b) $D=\{z\in C: |z-a|\le r\}$.

Yechish. a). Bu to'plam markazi a nuqtada, radiusi r ga teng bo'lgan doiradan iboratdir. Bunda $a\in C$ berilgan nuqta, r esa musbat son.

4.9-ta'rifga asosan bu to'plam ochiq to'plamdir.

b) Markazi a nuqtada, radiusi r ga teng bo'lgan ushbu $D=\{z\in C: |z-a|\le r\}$ to'plam yopiq doiradan iboratdir. 10-ta'rifga asosan bu yopiq to'plam bo'ladi.

4.4-misol. Bir bog'lamli sohaga misol keltiring.

Yechish. Kengaytirilgan kompleks tekislikning quyidagi sohalari bir bog'lamlidir:
a) $|z|>1$;

b) butun kengaytirilgan kompleks tekislik;

v) $z\ne a$ - kengaytirilgan kompleks tekislikdan a nuqtani chiqarib tashlangani.

4.5-misol. Bir bog'lamli bo'lmagan sohaga misol keltiring.

Yechish. Quyidagi sohalar bir bog'lamli bo'lmaydi:

a) $z\ne 1, i$ - kengaytirilgan kompleks tekislikdan 1 va i nuqtalarni chiqarib tashlangani;

b) butun kengaytirilgan kompleks tekislikdan $[0,1]$ va $[i,2i]$ kesmalarni qirqib olingani;

v) $1<|z|<\infty$.

4.6-misol. $f(z)=z^2+1+i$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismini toping.

Yechish. Berilgan funksiyada $z=x+iy$ ekanini e'tiborga olib, uni

$$f(z)=u+iv$$

ko'rinishda yozib**,** quyidagi tenglikni:

$$u+iv=z^2+1+i=(x+iy)\ +1+i=x^2+2ixy+(iy)^2+1+i=x^2-y^2+1+i(2xy+1).$$

hosil qilamiz. Bundan

$$u=u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+1;\ v=v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)=2xy+1.$$

4.7-misol. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2\operatorname{Im} z}{|z|}$ $(z\neq 0)$ limitni hisoblang.

Yechish. Avvalo $f(z)=\dfrac{z^2\operatorname{Im} z}{|z|}$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini topamiz:

$$f(z)=\frac{z^2\operatorname{Im} z}{|z|}=\frac{(x+iy)^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2y-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Demak, $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)=\dfrac{x^2y-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)=\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ma’lumki,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}v(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Bundan

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2\operatorname{Im} z}{|z|}=0$$

bo’ladi.

4.3.Mustaqil ishlash uchun misol va topshiriqlar

1. Ko’rsatilgan tenglama bilan qanday chiziq berilganini aniqlang va chizmasini chizing:

a) $z=i+2e^{it}$ $(3\pi\le t\le 5\pi)$. b) $z=it+2$ $(-\infty<t<\infty)$ v) $z=(1-i)t+i$ $(-\infty<t<\infty)$ g) $z=(1+i)t^2+1$ $(-\infty<t<\infty)$.

2. Ushbu tenglama bilan berilgan chiziqni chizmada tasvirlang:

a) $\left|\dfrac{z-1}{z+3}\right|=1$. b) $|z-2|+|z+2|=4$. v) $|z-2|+|z+2|=6$. g) $|z-2|-|z+2|=1$.

3. Ushbu tengsizliklar bilan kompleks tekislikdagi nuqtalar to’plami toping va chizmasini chizing:

a) $\left|\dfrac{z}{z+1}\right|<1$. b) $\left|\dfrac{1}{z}+1\right|>2$. v) $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|>2$. g) $|z-1|>3|z-3|$.

Javoblar:

1. a) $x^2+(y-1)^2=4$ aylana. b) $x=2$ to’g’ri chiziq. v) $x+y=1$ to’g’ri chiziq. g) $y=x-1$ $(x\ge 1)$ «ikkilangan» nur.

2. a) $x=-1$ to’g’ri chiziq. b) haqiqiy o’qning $[-2,2]$ kesmasi. v) Fokuslari 2 va –2, yarim o’qlari 3 va $\sqrt{5}$ bo’lgan ellips.

g) $\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=1$ giperbolaning chap tarmog’i.

3. a) $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ yarim tekislik. b) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{2}{3}\right)^2$ doira.

v) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{4}{3}\right)^2 < \frac{9}{16}$. g) $\left(x-\frac{13}{4}\right)^2 + y^2 < \frac{9}{16}$ doira.

6-amaliy mashg'ulot. Uzluksizlik va tekis uzluksizlik tushunchalari. Kantor teoremasi (2 soat)

Dars rejasi:

1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi va uzluksizligiga oid misollar
2. Funksiyaning uzilish nuqtalariga doir misollar yechish.
3. Tekis uzluksizlikka oid misollar yechish.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Kompleks o'zgaruvchi, funksiya, aniqlanish soha, soha chegarasi, limit, chegaralangan funksiya, chegaralanmagan funksiya, uzluksizlik, yo'nalish, tekis uzluksizlik.*

Dars maqsadi. Talabalarning kompleks o'zgaruvchili funksiya, uning uzluksizligi va tekis uzluksizligi haqida olgan nazariy bilimlarini misol va topshiriqlarni yechish orqali ko'nikma va malaka hosil qilish, ularni ijodiy ishlashga undash.

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Darsning bayoni.

5.1. Darsning nazariy asosi.

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya E to'plamda aniqlangan va a nuqta E to'plamga tegishli bo'lsin.

5.1-ta'rif. *Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilib, $|z-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ larda $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiyaga a nuqtada uzluksiz deyiladi.*

5.2-ta'rif. *Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda uzluksiz deyiladi.*

5.3-ta'rif. *Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, E to'plamning $|z_1 - z_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy z_1 va z_2 $(z_1, z_2 \in E)$ nuqtalarida $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda tekis uzluksiz deb ataladi.*

5.2.Namunaviy yechilgan misollar

5.1-Misol. **4** $f(z) = \dfrac{z^2 - (1+i)^2}{(z-1-i)(|z| + \mathrm{Re}(z-1))}$ funksiyaning aniqlanish sohasining chegarasini toping va chegaraning qaysi nuqtalarida funksiya limitga ega ekanligini aniqlang.

Yechish. Oldin funksiyaning aniqlanish sohasining chegarasini aniqlaymiz. Aniqlanish sohasining chegarasi shunday $z \in \mathbb{C}$ nuqtalar to'plamidan iboratki, ulr uchun quyidagi shartlar bajariladi:

$$|z| + \mathrm{Re}(z-1) = 0, \ z - 1 - i = 0$$

Bu yerdan $z = 1 + i$ va birinchi tenglamada $z = x + iy$ deb olsak, $x^2 + y^2 = (1-x)^2$ tenglama hosil bo'ladi, bu yerdan esa $y^2 = -2x + 1$ kelib chiqadi. Shunday qilib, funksiyaning aniqlanish sohasini D bilan belgilasak, uning chegarasi $\partial D = \{z : z = x + iy, y^2 = -2x + 1\} \cup \{1+i\}$ to'plamdan iborat bo'ladi. U vaqtda $\mathbb{C} \setminus \partial D = D.$ Demak ∂D to'plamning nuqtalari funksiyaning aniqlanish sohasining limitik nuqtalari bo'lib, ular D to'plamga qarashli emas. Endi $z_0 = 1 + i$ nuqtani olib, funksiyaning shu nuqtadagi limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{z \to 1+i} \frac{z^2 - (1+i)^2}{(z-1-i)(|z| + \mathrm{Re}(z-1))} = \lim_{z \to 1+i} \frac{(z-1-i)(z+1+i)}{(z-1-i)(|z| + \mathrm{Re}(z-1))} = \frac{2+2i}{\sqrt{2}+1-1} = \sqrt{2}(1+i).$$

Qolgan barcha chegara nuqtalarda funksiya limitga ega emas, chunki bu nuqtalarda maxraj nolga aylanganligi uchun funksiya chegaralanmagan.

5.2-Misol. **5** $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z(z^2+i)}{e^z - 1}, & z \neq 2\pi k i, k \in \mathbb{Z} \\ i, & z = 0 \end{cases}$ funksiyani aniqlanish sohasida uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi D ning chegarasi $\partial D = \{z : z = 2\pi k i, k \in Z\}, D = C \setminus \partial D.$ va istalgan $z_0 \in D (z_0 \neq 0)$ nuqtada funksiya uzluksizdir, ya'ni funksiyaning bunday nuqtadagi limiti, uning shu nuqtadagi qiy matiga teng. $z = 0$ nuqtada $f(z)$ funksiyani uzluksizlikka tekshiramiz. Quyidagi yoyilma

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

ixtiyoriy $z \in \mathbb{C}$ uchun o'rinli. Shuning uchun $\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$. Demak,

$$\lim_{z\to 0}\left[(z^2+i)\frac{1}{\frac{e^z-1}{z}}\right] \quad \text{va} \quad \lim_{z\to 0} f(z) = i = f(0)$$

Shunday qilib, $z=0$ nuqtada $f(z)$ funksiya uzluksiz ekan. Demak, berilgan funksiya D da uzluksizdir.

5.3-Misol. **67** $f(z)=\begin{cases}\frac{1}{z}, & |z|>1\\ z, & |z|=1\\ z^2, & |z|<1\end{cases}$ funksiyaning aniqlanish sohasini, uzilish nuqtalarini toping va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D=\mathbb{C}$ butun kompleks tekislikdir. $\{z:|z|<1\}\cup\{z:|z|>1\}$ to'plamda bu funksiya uzluksizdir. Funksiya uzluksizligini birlik aylana $|z|=1$ da tekshiramiz. $f(z)$ funksiya $|z|=1$ aylananing biror z' nuqtasida uzluksiz bo'lishi uchun z nuqta z' ga $|z|<1$ doiraning ichkarisidan, tashqarisidan va $|z|=1$ aylana bo'yicha intilganda limitlar mavjud bo'lib, quyidagi tengliklar bajarilishi kerak:

$$\lim_{|z|<1, z\to z'} f(z) = \lim_{|z|>1, z\to z'} f(z) = \lim_{|z|=1, z\to z'} f(z)$$

yoki $z'^2 = z' = \frac{1}{z'}$ bo'lishi kerak. Biz qarayotgan misol uchun bu shartlarni aylananing yagona $z'=1$ nuqtasi qanoatlantiradi. Demak funksiya birlik aylananing $z'=1$ nuqtasida uzluksiz bo'lib, qolgan nuqtalarda uzilishga egadir. Shunday qilib funksiyaning uzilish nuqtalar to'plami $\{z:z\in\mathbb{C},|z|=1\}\setminus\{1\}$ dan iborat.

5.4-Misol. $f(z)=\frac{1}{z+1+i}$ funksiyani **8** $E=\{z:|z|<1\}$ sohada uzluksizlik va tekis uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu funksiya o'zinig aniqlanish sohasida uzluksiz ekanligi ko'rinib turipti. Shu aniqlanish sohasida uning tekis uzluksizligini ko'rsatamiz. Agar $\forall z_1, z_2 \in E$ bo'lsa, u holda

$$f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{z_1+1+i}-\frac{1}{z_2+1+i}=\frac{z_2-z_1}{(z_1+1+i)(z_2+1+i)},$$

lekin $\forall z_1, z_2 \in E$ uchun $|z_1+1+i|>|1+i|-|z_1|>\frac{1}{4}$ va $|z_1+1+i|>\frac{1}{4}$ ekanligidan

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\frac{|z_1-z_2|}{\frac{1}{16}}=16|z_1-z_2|$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $\delta=\frac{\varepsilon}{16}$ deb olsak, $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu yerda δ faqat ε ga bog'liq bo'lib, z_1, z_2

nuqtalarning tanlanishiga bog'liq emas. Demak funksiya qaralgan sohada tekis uzliksiz ekan.

Bu tasdiqni tekis uzluksizlik haqidagi Kantor teoremasiga yordamida ham ko'rsatish mumkin edi. Haqiqatan ham, $\forall \xi \in \partial E$ chegara nuqtalarida funksiyaning limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{|z|<1, z\to\xi} \frac{1}{z+1+i} = \frac{1}{\xi+1+i}.$$

$f(z)$ ni ixtiyoriy chegaraviy nuqtaga uzluksiz davom ettiramiz. Shunday qilib, $f(z)$ funksiya $\overline{E} = E \cup \partial E$ yopiq va chegaralangan to'plamda aniqlangan va uzluksiz bo'ladi. Kantor teoremasiga asosan $\overline{E}$ tekis uzluksizdir.

5.5-Misol. $f(z) = \dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{\operatorname{Im} z}$ funksiya $z=0$ nuqtada limitga ega ekanligini tekshiring va agar limiti mavjud bo'lsa , uni toping.

Yechish. Avval $z_n = \dfrac{i}{n} \to 0$ nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz. $\operatorname{Re} z_n = 0$ ekanligidan $f(z_n) = 0$ va unga mos funksiyalar qiymatlari $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketligi 0 ga yaqinlashadi. Endi 0 ga yaqinlashuvchi $z_n' = \dfrac{1}{n} + \dfrac{i}{n^2}$ ketma-ketlikni olamiz. $\operatorname{Re} z_n' = \dfrac{1}{n}$ va $\operatorname{Im} z_n' = \dfrac{1}{n^2}$ shuning uchun $f(z_n') = 1$ va $\{f(z_n')\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik 1 ga yaqinlashadi. 0 ga yaqinlashuvchi ikkita $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{z_n'\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklarga mos keluvchi funksiyalar qiymatlarining $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{f(z_n')\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklari turli xil limitlarga ega. Bundan $f(z)$ funksiya $z=0$ nuqtada limitga ega emas degan xulosaga kelamiz.

5.6-Misol.9 $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$ *f*unksiyani $E = \{z : |z| < 1\}, \quad \partial E = \{z : |z| = 1\}$ sohada uzluksizlik va tekis uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida bu funksiya uzluksizdir. Ikkinchi tomondan, ∂E to'plamning ± 1 nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalarida uzluksiz davom ettirish mumkin. Bu nuqtalarning har birining atrofida funksiyaning moduli chegaralanmagandir, chunki $\lim\limits_{z\to+1} f(z) = \infty$. Shu sababli, ± 1 nuqtalar atrofida bu funksiya tekis uzluksizligining buzilishini oson ko'rsatish mumkin. $z_1 = 1-\delta, z_2 = 1-2\delta$ nuqtalar olamiz, bu yerda $0 < \delta < 1$, u vaqtda

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{1-(1-\delta)^2} - \frac{1}{1-(1-2\delta)^2} = \frac{(1-\delta)^2 - (1-2\delta)^2}{[1-(1-\delta)^2][1-(1-2\delta)^2]} =$$

$$= \frac{1-2\delta+\delta^2-1+4\delta-4\delta^2}{[1-(1-\delta)^2][1-(1-2\delta)^2]} = \frac{\delta(2-3\delta)}{4\delta^2(2-\delta)(1-\delta)} > \frac{1}{4}$$

Bu yerdan ko'rinadiki, qanday $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{1}{\delta}$ olmaylik, istalgan $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ va tanlangan z_1, z_2 nuqtalar uchun $|f(z_1) - f(z_2)| > \varepsilon_0$ bajariladi. Masalan, $\varepsilon = \dfrac{1}{16}$ bo'lsa, istalgan

$\delta, 0<\delta<\frac{1}{2}$, uchun $|f(z_1)-f(z_2)|>\frac{1}{16}$. Shunday qilib, $f(z)$ funksiya E to'plamda uzluksiz bo'lib, tekis uzluksiz emasdir.

5.7-misol. $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ funksiyani $E=\{z: \ |z|<1\}$ to'plamda tekis uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu funksiya o'zining aniqlanish sohasini barcha nuqtalarida uzluksizdir. Ikkinchi tomondan, bu funksiyani $\partial E=\{z: \ |z|=1\}$ to'plamning ± 1 nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalarida davom ettirish mumkin (5-misolga qarang). Bu nuqtalarning har birini atrofida funksiyaning moduli chegaralanmagandir, chunki $\lim\limits_{z\to+1} f(z)=\infty$. Shu sababli, ± 1 nuqtalar atrofida bu funksiya tekis uzluksizligining buzilishini oson ko'rsatish mumkin. $z_1=1-\delta$, $z_2=1-2\delta$ nuqtalarni olamiz, bu yerda $0<\delta<1$, u vaqtda

$$f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{1-(1-\delta)^2}-\frac{1}{1-(1-2\delta)^2}=\frac{(1-\delta)^2-(1-2\delta)^2}{\left[1-(1-\delta)^2\right]\left[1-(1-\delta)^2\right]}=$$

$$=\frac{1-2\delta-\delta^2-1+4\delta-4\delta^2}{\left[1-(1-\delta)^2\right]\left[1-(1-\delta)^2\right]}=\frac{\delta(2-3\delta)}{4\delta^2(2-\delta)(1-\delta)}>\frac{1}{4}.$$

Bu yerdan ko'rinadiki, qanday $0<\varepsilon_0<\frac{1}{8}$ olmaylik, istalgan $0<\delta<\frac{1}{2}$ va tanlangan z_1, z_2 nuqtalar uchun $\left|f(z_1)-f(z_2)\right|>\varepsilon_0$ bajariladi (masalan, agar $\varepsilon_0=\frac{1}{16}$ bo'lsa, istalgan δ , $0<\delta<\frac{1}{2}$ uchun $\left|f(z_1)-f(z_2)\right|>\frac{1}{16}$. Shunday qilib, $f(z)$ funksiya berilgan E to'plamda uzluksiz bo'lib, tekis uzluksiz emasdir.

5.3.Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1.Quyidagi funksiyalarning haqiqiy va mavhum qismlarini ajrating:

a) $f(z)=\bar{z}-\frac{1}{\bar{z}}$; b) $f(z)=\frac{z+i}{z-i}$; v) $f(z)=\overline{z^2}+|z|^2$; g) $f(z)=\frac{z-i}{z+i}$.

2. Ko'rsatilgan x va y o'zgaruvchilar funksiyasini $z=x+iy$ o'zgaruvchining funksiyasi sifatida yozing:

a) $f=\frac{x(ix-1)+iy(y+1)}{x^2+y^2}$; b) $f=\frac{y-ix}{x^2+y^2}$; v) $f=y^3-3x^2y+y+i(x^3-3xy^2-x)$;

g) $f=\frac{x^2+y^2+x+i(x^2+y^2-y)}{x^2+y^2}$.

3. Ushbu funksiyalarni ko'rsatilgan nuqtalarda limitga ega ekanligini aniqlang; agar limiti mavjud bo'lsa, u holda uni toping.

a) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$, $z=0$; b) $f(z)=\dfrac{|z|}{z}$, $z=0$; v) $f(z)=\dfrac{z}{z-i}$, $z=\infty$.

4. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini, uzluksizlik va uzilish nuqtalarini toping.

a) $f(z)=\begin{cases}\frac{1}{z}, & |z|>1;\\ z, & |z|=1;\\ z^2, & |z|<1.\end{cases}$ b) $f(z)=\begin{cases}\frac{1}{z^2}, & |z|>1;\\ z^2, & |z|=1;\\ z^3, & |z|<1.\end{cases}$

v) $f(z)=\begin{cases}e^{\frac{1}{z}}, & z\neq 0;\\ i, & z=0;\\ 1, & z=\infty.\end{cases}$ g) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2(z^2+1+i)}{\sin^2 z}, & z\neq 0;\\ 1+i, & z=0\end{cases}$

5. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasining chegarasini toping va chegaraning qaysi nuqtalarida funksiya limitga ega ekanligini aniqlang.

a) $f(z)=\dfrac{z^3-1}{(z-4)(z^2-1)}$; b) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{|z|-\operatorname{Im} z+1}$; v) $f(z)=\dfrac{z(z^5-1)}{(z-1)(e^z-1)}$.

6. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini, uzilish nuqtalarini toping va uzluksizlikka tekshiring.

a) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3+8}{z+2}, & z\neq -2\\ 1+i, & z=-2\end{cases}$ b) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^4-4}{z-2}e^z, & z\neq 2\\ 4e^z, & z=2\end{cases}$

v) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3-8}{z-2}\cos\dfrac{1}{z}, & z\neq 2;0\\ i, & z=0;2\end{cases}$ g) $f(z)=\begin{cases}(z+2)^3\sin\dfrac{1}{z}, & z\neq 0\\ 8, & z=0\end{cases}$

d) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(z-2)}{3(z-2)}, & z\neq 2\\ e, & z=2\end{cases}$ e) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{e^z-1}{z}, & z\neq 0\\ 1-i, & z=0\end{cases}$

j) $f(z)=\begin{cases}ctgz, & z\neq \pi k\\ 1-i, & z=\pi k\end{cases}$ z) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3-64}{2z-8}, & z\neq 4\\ i, & z=4\end{cases}$

i) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z(z^2+i)}{e^z-1}, & z\neq 2\pi ki, k=0,1,2\ldots\\ i, & z=0\end{cases}$ k) $f(z)=\begin{cases}e^{\frac{1}{z}}, & z\neq 0\\ i, & z=0\\ 1, & z=\infty\end{cases}$

l) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z^2}, & |z|>1\\ z^2, & |z|=1\\ z^3, & |z|<1\end{cases}$ m) $f(z)=\begin{cases}e^{\frac{1}{z^2}}, & z\neq 0\\ 1+i, & z=0\\ 2, & z=\infty\end{cases}$

n) $f(z)=\dfrac{z^2(z^2+1+i)}{\sin^2 z}, f(0)=1+i$; o) $f(z)=\dfrac{z^2(z^2+1+i)}{\sin^2 z}, f(0)=1$.

7. Quyidagi funksiyalarni uzluksizlik va tekis uzluksizlikka tekshiring:

a) $f(z)=\dfrac{1}{z+i+1}, |z|<1$, b) $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}, |z|<1$, g) $f(z)=\dfrac{z}{1-z^3}, |z|<1$,

d) $f(z)=\dfrac{1+z}{z^3+i+1}, |z|<1$, e) $f(z)=e^{-\frac{1}{z}}, 0<|z|<1$, j) $f(z)=e^{-\frac{1}{3z}}, 0<|z|<1$,

z) $f(z)=\dfrac{1}{z+1}, 0<|z|<1$, i) $f(z)=\cos\dfrac{2}{1-z}, 0<|z|<1$, k) $f(z)=\dfrac{Imz}{|z|}, 0<|z|<1$,

l) $f(z)=\dfrac{e^z}{z-i}, 0<|z|<1$, m) $f(z)=\sin\dfrac{\pi}{1+z}, 0<|z|<1$, n) $f(z)=\dfrac{Rez}{|z|}, 0<|z|<1$.

7-amaliy mashg'ulot.Funksional qatorlar. Tekis yaqinlashish. Qator tekis yaqinlashishining yetarli sharti (2 soat)

Dars rejasi:

1. Funksional qator tushunchasi
2. Tekis yaqinlashish
3. Qator tekis yaqinlashishining yetarli sharti
4. Qatorlar yig'indisining uzluksizligi haqida teorema
5. Qatorning tekis yaqinlashish alomatlari

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Funksional qator, qatorning tekis yaqinlashishi, qator tekis yaqinlashishining yetarli sharti, tekis yaqinlashish alomatlari, qator yig'indisining uzluksizligi, misollar, namunaviy misol.*

Dars bayoni.

6.1.Darsning nazariy asosi.

6.1-ta'rif. *Agar biror* $z_0\in E$ *uchun* $\{f_n(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlik* z_0 *nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.*

Agar $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik E to'plamning har bir nuqtasida yaqinlashsa, u holda bu ketma-ketlik E to'plamda yaqinlashuvchi deyiladi.

6.2-ta'rif. *$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik E to'plamda $f(z)$ funksiyaga yaqinlashsin. Agar $\forall\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ nomer topilib, barcha $n \in N,\ n > n_0$ va $z \in E$ uchun*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik $f(z)$ limitik funksiyaga E to'plamda tekis yaqinlashadi deyiladi.

6.1-teorema (Koshi kriteriyasi). *$\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ funksional ketma-ketlik E to'plamda tekis yaqinlashishi uchun $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ nomer topilib, barcha $n > n_0$, $m > n_0$ va $z \in E$ uchun*

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

E to'plamda aniqlangan $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning hadlaridan tuzilgan ushbu

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

ifoda funksional qator deyiladi va $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \qquad (6.1)$$

6.3-ta'rif. *Agar $n \to \infty$ da $\{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ funksional ketma-ketlik E to'plamda yaqinlashuvchi bo'lib,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$$

bo'lsa, u holda (6.1) funksional qator yaqinlashuvchi va $S(z)$ uning yig'indisi deyiladi hamda $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ko'rinishda yoziladi.

6.2-teorema (Koshi kriteriyasi). *(6.1) funksional qator E to'plamda tekis yaqinlashishi bo'lishi uchun $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ son topilib, barcha $m \geq n > n_0$ va $z \in E$ larda*

$$|S_m(z) - S_n(z)| = \left|\sum_{k=n}^{m} f_k(z)\right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Veyershtrass alomati. *Agar (6.1) qatorning hadlari barcha $z \in E$ uchun $|f_n(z)| \leq a_n$, $n = 1,2,...$ tengsizlikni qanoatlantirib, majorant $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (6.1) funksional qator E to'plamda tekis yaqinlashadi.*

6.2. Namunaviy yechilgan misollar.

6.1-misol. Hadlari $f_n(z)=z^n$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning $E=\{z:|z|<1\}$ to'plamda $f(z)=0$ limitik funksiyaga yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $|z^n-0|=|z^n|=|z|^n\to 0,\ n\to\infty$. Bundan $f(z)\equiv 0$. Shuning uchun $|f_n(z)-f(z)|=|z|^n$. Endi $|z|^n<\varepsilon$ tengsizlikdan

$$n\cdot\ln\frac{1}{|z|}>\ln\frac{1}{\varepsilon},\quad n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{|z|}},\ \varepsilon>0,\ |z|<1.$$

Demak, $n_0(\varepsilon,z)=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{|z|}}\right]+1$ deb tanlasak $n>n_0(\varepsilon,z)$ bo'lganda $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Berilgan funksional ketma-ketlik $|z|<1$ bo'lganda z o'zgaruvchining belgilab olingan qiymatlarida yaqinlashadi va uning limitik funksiyasi $f(z)\equiv 0$.

1-misolni chuqurroq tahlil qilaylik.

1-hol. Yetarlicha kichik $\varepsilon>0$ sonni belgilab olamiz, $\varepsilon=\varepsilon_0$. U holda, $n_0(\varepsilon_0,z)=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon_0}}{\ln\frac{1}{|z|}}\right]+1$ son $|z|$ birga yetarlicha yaqinlashganda, har qanday katta natural sondan katta bo'ladi, chunki $\lim\limits_{|z|\to 1}n_0(\varepsilon_0,z)=\infty$. Demak, bu yerda $n_0(\varepsilon,z)$ z- dan bog'liq bo'lib, uning aniq yuqori chegarasi cheksiz, ya'ni

$$\sup_{|z|<1}n_0(\varepsilon,z)=\infty.$$

2-hol. Endi shu misolda $|z|\le r,\ r<1$ deb olamiz. U holda $\ln\frac{1}{|z|}\ge\ln\frac{1}{r}$, bundan

$$n_0(\varepsilon,z)\le\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{r}}\right]+1 \quad \text{va} \quad \sup_{|z|\le r}n_0(\varepsilon,z)=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{r}}\right]+1<\infty,\quad \forall\varepsilon>0 \ \text{bo'ladi.}$$

Shuning uchun $|z|\le r, r<1$ tengsizlikning barcha qiymatlarida

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda $n_0(\varepsilon)=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{r}}\right]+1$.

Birinchi holda, ya'ni $|z|<1$ bo'lganda n_0 son $\varepsilon>0$ dan tashqari yana z nuqtadan ham bog'liq, ikkinchi holda esa n_0 faqat $\varepsilon>0$ dan bog'liq bo'lib, z nuqtaning

$|z|\le r,\ r<1$ to'plamdan tanlanishiga bog'liq emas. Bu hol muhim va quyidagi ta'rifning tabiiyligini ko'rsatadi.

6.2-misol. Hadlari $f_n(z)=z^{n-1}(1-|z|)$ iborat bo'lgan ketma-ketlikning $E=\{z:|z\le 1|\}$ to'plamda limitik $f(z)\equiv 0$, $z\in E$ funksiyaga tekis yaqinlashishini ko'rsating.

Yechish. $|f_n(z)-f(z)|=|z|^{n-1}(1-|z|)$ funksiya, ya'ni $|z|^{n-1}(1-|z|)=|z|^{n-1}-|z|^n$ ikkita uzluksiz funksiyalarning ayirmasi sifatida E to'plamda uzluksiz. Agar $|z|=t$, $0\le t\le 1$ deb belgilasak u holda, $\max\limits_{z\in E}|f_n(z)-f(z)|=\max\limits_{0\le z\le 1}(t^{n-1}-t^n)$, $\varphi(t)=t^{n-1}-t^n$, $0\le t\le 1$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz: $\varphi'(t)=(n-1)t^{n-2}-nt^{n-1}=t^{n-2}(n-1-nt)=0,\ t\ge 2,$ $t=\dfrac{n-1}{n}<1,\quad n\ge 2$. Shu nuqtada $\varphi(t)$ funksiya eng katta qiymatiga erishadi. Bu qiymat

$$\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n}<\frac{1}{n},$$

ya'ni $\max\limits_{z\in E}|f_n(z)-f(z)|<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, agar $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ bo'lsa. Endi ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun $n_0(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ deb tanlasak, u holda, barcha $n>n_0(\varepsilon)$ lar uchun

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

tengsizlik E to'plamning barcha nuqtalarida bajariladi. Demak berilgan ketma-ketlik E to'plamda tekis yaqinlashadi.

6.3-misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cos nz$ qatorning $E=\{z:|\operatorname{Im}z|\le\delta<\ln 2\}$ to'plamda tekis yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Yechish. Qatorning hadlari $f_n(z)=2^{-n}\cos nz$ butun kompleks tekislikda aniqlangan. Tekis yaqinlashish sohasini topamiz. Buning uchun majorant qatorning hadlarini topish zarur. Eyler formulasidan

$$|\cos nz|=\frac{|e^{inz}+e^{-inz}|}{2}=\frac{|e^{in(x+iy)}+e^{-in(x+iy)}|}{2}\le\frac{e^{n|y|}+e^{-n|y|}}{2}\le e^{n|y|},\quad y=\operatorname{Im}z.$$

Endi

$$|f_n(z)|=|2^{-n}\cos nz|\le 2^{-n}e^{n|y|}=e^{-n\ln 2+n|y|}\le e^{(-\ln 2+|y|)n}=e^{-n(\ln 2-|y|)}\le e^{-n(\ln 2-\delta)},\ |y|\le\delta<\ln 2.$$

Majorant qator $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n-1}^{\infty}e^{-n(\ln 2-\delta)}$ yaqinlashadi, chunki $\delta<\ln 2$. Demak, berilgan funksional qator E to'plamda tekis yaqinlashadi.

***6.4-Misol* 10** $f_n(z)=\dfrac{nz}{1+n^2|z|^2}$, $E=\{z:|z|\le 1\}$. ketma-ketlikni berilgan to'plamda tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu ketma-ketlikni E to'plamning har bir nuqtasida limitik $f(z)$ funksiyaga yaqinlashadi. Bu yaqinlashishning tekismasligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olamiz. Funksional ketma-k etlik yaqinlashishining ta'rifiga asosan, yetarlicha katta n uchun uyidagi tengsizlik bajarilishi kerak:

$$|f_n(z)-f(z)|=\frac{n|z|}{1+n^2|z|^2}<\varepsilon.$$

Bu tengsizlik

$$n|z|<\varepsilon(1+n^2|z|^2)$$

ga teng kuchlidir. Agar $n|z|=t$ deb olsak, u holda yuqoridagi tengsizlik

$$t<\varepsilon(1+t^2)$$

ko'rinishni oladi. Shu tengsizlikni yechamiz. Kvadrat uchhadning ildizlari $t_1=\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}, t_2=\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$ dan iborat. Bu yerda $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ deb olamiz. $\varepsilon>0$ bo'lganligi uchun $t>\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan t lar uchun yuqorida kerak bo’lgan tengsizlik bajariladi. Agar $t>\frac{2}{2\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}$ bo'lsa, u holda o’sha tengsizlik albatta bajariladi. Endi $n|z|=t$ ekanligini nazarda tutsak, $\forall n>\frac{1}{\varepsilon|z|}$ uchun tengsizlik bajariladi. Shu sababli agar $n_0(\varepsilon,z)=\left[\frac{1}{\varepsilon|z|}\right]+1$ deb olsak, u holda barcha $n\geq n_0(\varepsilon,z)$ lar uchun quyidagi tengsizlikni olamiz

$$\frac{n|z|}{1+n^2|z|^2}<\varepsilon$$

Lekin, bu yerda z ning nlga yaqin qiymatlarida $(0\in E)$ $n_0(\varepsilon,z)$ son ε o'zgarmagan holda ham istalgancha katta qiymatlarni qabul qiladi. Demak, barcha $z\in E$ nuqtalar uchun $n\geq n_0(\varepsilon,z)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n natural sonlar mavjud emas. Shuning uchun ta'rifga asosan funksional ketma-ketlik $f(z)\equiv 0$ ga tekis yaqilashmaydi.

Tekis yaqinlashishning boshqa ekvivalent ta'riflaridan foydalanib ham bunga ishonch hosil qilish mukin. $z_n=\frac{1}{n}\in E$ ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(z_n)-f(z_n)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}\right|=\frac{1}{2}>0$$

ga ega bo'lamiz. Bundan ko'rinadiki, tekis yaqinlashish sharti bajarilmaydi.

6.5-Misol. **11** $f_n(z)=\frac{n|z|}{1+n^2|z|^2}=\frac{1}{2},\quad G=\{z:\frac{1}{4}\leq|z|\leq 1\}$ ketma-ketlikni berilgan to’plamda limitik funksiyaga tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu ketma-ketlik uchun $f(z)\equiv 0$ limitik funksiyadir. Bu ketma-ketlikning G to'plmda tekis yaqinlashishini tekshiramiz:

$$|f_n(z)-f(z)|=\frac{n|z|}{1+n^2|z|^2}<\varepsilon$$

Bu tendsizlik $\forall n \ge n_0(\varepsilon, z) = \left[\frac{1}{\varepsilon|z|}\right]+1$ uchun bajariladi(6.4-misolga qarang). Lekin $\left[\frac{1}{\varepsilon|z|}\right] \le \left[\frac{\varepsilon}{4}\right]$ bo'lganligi uchun $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{\varepsilon}{4}\right]+1$ deb olsak, $\forall n \ge n_0(\varepsilon)$ va $\forall z \in G$ uchun bir vaqtda $\frac{n|z|}{1+n^2|z|^2} < \varepsilon$ tengsizlik o'rinlidir. Ta'rifga asosan berilgan $f_n(z)$ ketma-ketlik G to'plamda $f(z) \equiv 0$ ga tekis yaqinlashadi.

Shunday savol tug'iladi: Nima uchun 6.4-misoldagi ketma-ketlik E to'plamda tekis yaqinlashmasdan, G da tekis yaqinlashadi. Bu sababi shuki, 6.4-dagi ketma-ketlikning tekis yaqinlashishi E to'plamning 0 nuqtasi atrofida buzilyapti, G to'plam esa $z=0$ nuqtaning $\{z : |z| < \frac{1}{4}\}$ atrofini o'zida saqlamaydi.

6.6-Misol. 12 $f_n(z) = \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{n^2}, n = 1,2,\ldots, E_\delta = \{z : |z| \le \delta < 1\}$ funksional ketma-ketlikni tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu ketma-ketlikning limitik funksiyasi $f(z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^2}$ bo'lib, uni elementar funlsiyalar orqali ifodalash mumkin emas. $f_n(z)$ ketma-ketlikning tekis yaqinlashishini Koshi kriteriyasi yordamida ko'rsatamiz.

$$|f_{n_0+m}(z) - f_{n_0}(z)| = \left|\frac{z^{n_0+m}}{(n_0+m)^2} + \cdots + \frac{z^{n_0+1}}{(n_0+1)^2}\right| \le$$

$$\frac{|z|^{n_0+1}}{(n_0+1)^2}\left(1 + |z| + \cdots + |z|^{m-1}\right) = \frac{|z|^{n_0+1}}{(n_0+1)^2}\frac{1-|z|^m}{1-|z|} \le$$

$$\frac{1}{1-\delta}\frac{\delta^{n_0+1}}{(n_0+1)^2} < \frac{\delta^{n_0}}{1-\delta} < \varepsilon, |z| \le \delta < 1$$

Agar $n_0(\varepsilon) = \left[\left(\ln\frac{1}{\varepsilon} + \ln\frac{1}{1-\delta}\right)/\ln\frac{1}{\delta}\right]+1$ bo'lsa, $|f_{n_0+m}(z) - f_{n_0}(z)| < \varepsilon,$ tengsizlik bajariladi. Demak funksional ketma-ketlik E_δ to'plamda tekis yaqimlashuvchi ekan.

6.3.Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

1. Quyidagi funksional ketma-ketliklarni berilgan E to'plamda tekis yaqinlashuvchilikka tekshiring.

a) $f_n(z) = z^n(1-|z|), E = \{z : |z| \le 1\}$, b) $f_n(z) = n^2 z e^{-n|z|}, E = \{z : |z| \le 1\}$

v) $f_n(z) = \frac{z^n}{1+|z|^n}, E = \{z : |z| \le \frac{1}{2}\}$

2. Quyidagi funksional qatorlarni berilgan E to'plamda tekis yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang:

a) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^{-2n} \quad (E: |z| \geq 1)$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^{2n} \quad (E: |z| \leq 1)$.

v) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z} \quad (E: \operatorname{Re} z \geq \delta > 0)$. g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad (E: \operatorname{Re} z \geq \delta > 1)$.

3. Quyidagi funksional qatorlarning tekis yaqinlashishini ko'rsating:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n} z^n, \quad |z| \geq 1.$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 2^n z^n, \quad |z| \leq \frac{1}{3}.$ v) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} z^{-2n}, \quad |z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nz}, \quad Rez \geq 1.$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} z^{-2n}, \quad |z| \geq \sqrt{3}.$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad Rez \geq \delta > 1.$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{10} e^{-niz}, \quad Imz \leq -1.$ z) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-nz}, \quad Rez \geq \delta > 0.$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z}, \ Re\, z \geq \delta > 0.$

8-amaliy mashg'ulot. Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Koshi-Adamar formulasi (2 soat)

Dars rejasi:
1. Darajali qatorning yaqinlashish sohasiga oid misollar
2. Darajali qatorning yaqinlashish radiusini aniqlash

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Darajali qator, darajali qatorning yaqinlashish sohasi, yaqinlashish radiusi, yaqinlashish doirasi, Koshi-Adamar formulasi.*

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni

7.1.Darsning nazariy asosi

Hadlari kompleks o'zgaruvchili funksiyalardan iborat

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \tag{7.1}$$

ko'rinishdagi funksional qatorga darajali qator deyiladi. Agar $a=0$ bo'lsa (7.1) qator

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z^n + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{7.2}$$

ko'rinishda bo'ladi.

7.1-ta'rif. *(7.1) darajali qatorning yaqinlashish sohasi deb shu qator yaqinlashadigan barcha z nuqtalar to'plamiga aytiladi.*

7.1-teorema (Abel teoremasi). *Agar (7.2) darajali qator biror $z_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa u holda u*

$$K_0 = \{z : |z| < |z_0|\}$$

doirada absolyut,

$$K_1 = \{z : |z| \le R_1 < |z_0|\}$$

doirada esa tekis yaqinlashadi.

7.2-ta'rif. *Agar (7.2) darajali qator* $\{z \in C : |z| < R\}$ *doiradada yaqinlashuvchi,* $\{z \in C : |z| > R\}$ *sohada uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda* R *songa (7.2) darajali qatorning yaqinlashish radiusi,* $\{z \in C : |z| < R\}$ *doiraga esa yaqinlashish doirasi deyiladi.*

Har qanday darajali qator o'zining koeffisiyentlari ketma-ketligi $\{c_n\}$ bilan aniqlanadi. (7.1) darajali qator koeffisiyentlari yordamida ushbu

$$|c_0|, \quad |c_1|, \quad \sqrt{|c_2|}, \quad \sqrt[3]{|c_3|}, \quad ..., \quad \sqrt[n]{|c_n|}, \quad ... \tag{7.3}$$

Manfiymas sonlar ketma-ketligini tuzamiz.

Har qanday sonlar ketma-ketligining yuqori limiti mavjud bo'lganligi sababli (7.3) ketma-ketlikning ham yuqori limiti mavjud bo'ladi. Uni l orqali belgilaylik:

$$l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|} .$$

7.2-teorema (Koshi –Adamar teoremasi). *(7.2) darajali qatorning yaqinlashish radiusi* $R = \dfrac{1}{l}$ *songa teng bo'ladi.*

7.1-Natija. *Agar (7.2) qator*

$$K = \{z : |z - a| < R\}$$

doirada yaqinlashsa, u holda u istalgan kichik

$$K_1 = \{z : |z| \le R_1 < R\}$$

doirada tekis yaqinlashadi.

Ba'zan darajali qatorning yaqinlashish radiusini topishda

$$R = \frac{1}{l}, \quad l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

Dalamber formulasidan foydalanish qulay bo'ladi.

7.2.Namunaviy yechilgan misollar

7.1-Misol. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{i^n}{3^n} z^n$ darajali qatorlarning yaqinlashish radiusini toping.

Yechish. Koshi-Adamar formulasi dan foydalanamiz. Unga ko'ra darajali qatorning yaqinlashish radiusi $R = \dfrac{1}{l}$ bo'lib, bunda $l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. Endi shu limitni hisoblashga harakat qilamiz. Bizning holimizda

$$c_n = \frac{i^n}{3^n}, \ n = 1,2,3,\cdots$$

bo'lib, bundan

$$|c_n| = \left| \frac{i^n}{3^n} \right| = \frac{1}{3^n}$$

Ekanligini olamiz u holda biz hisoblamoqchi bo'lgan limit quyidagicha bo'ladi:

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

U holda izlangan yaqinlashish radius $R = 3$ bo'ladi. J: $R = 3$.

7.2-Misol. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+i)^n}{3^{n+1}\cdot 2^{n-1}}$ qatorlarning yaqinlashish doirasini toping.

Yechish. $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ formuladan foydalanamiz. Bunda misolning berilishiga ko'ra

$$c_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}\cdot 2^{n-1}} \text{ va } c_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}\cdot 2^n}$$

Bo'lib, ular orqali yaqinlashish radiusini hisoblash mumkin:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+2}\cdot 2^n\cdot(-1)^n}{3^{n+1}\cdot 2^{n-1}\cdot(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3\cdot 2}{-1}\right| = 6.$$

Demak, berilgan qatorning yaqinlashish radiusi $R = 6$ va yaqinlashish doirasi $|z+i| < 6$ bo'lar ekan. J: $|z+i| < 6$.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar:

1. Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish radiusini toping:

a). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}z^n$. v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{e^{in}}$. g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{3+n} - \frac{5}{4^{n-1}}\right)(z-2i)^n$.

2. Ushbu qatorlarning yaqinlashish doirasini toping:

a). $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{5^{n-1}\cdot 3^{1-n}}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$. v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+i)^n}{(2i)^n}$. g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$ j) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5} - \frac{5}{3^{n-2}}\right)(z-i)^n$

9-amaliy mashg'ulot. Kompleks o'zguruvchili funksiyaning hosilasi. Hosila mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari (2 soat)

Dars rejasi:
1. Hosila tushunchasi
2. Sohada analitik funksiya tushunchasi
3. Differensial tushunchasi
4. Hosila mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli sharti

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Kompleks o'zgaruvchi funksiyasining hosilasi, differensiali, monogenligi, hosila mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli sharti.*

Darsning tarkibiy qismlari
1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Darsning bayoni.

8.1.Darsning nazariy asosi.

Faraz qilaylik, $E \subset \mathbf{C}$ (**C**-kompleks tekislik) ochiq to'plamda aniqlangan va bir qiymatli $f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin.

8.1-ta'rif*. Agar*

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \qquad z, z+h \in \mathrm{E} \tag{8.1}$$

nisbat h *-orttirma ixtiyoriy yo'nalish bo'ylab nolga intilganda aniq chekli (yagona) limitga ega bo'lsa, u holda* $f(z)$ *-funksiya* $z \in E$ *nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Ushbu limitga* $f(z)$ *funksiyaning* z *nuqtadagi hosilasi deyiladi va* $f'(z)$ *kabi belgilanadi:*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}. \tag{8.2}$$

Nuqtada differensiallanuvchi funksiya shu nuqtada monogen funksiya deyiladi. Nuqtada monogen funksiya shu nuqtada hosilaga ega bo'ladi.

8.2-ta'rif*. Agar funksiya* E *- ochiq to'plamning har bir nuqtasida monogen bo'lsa, u holda bu funksiya* E *-to'plamda bir qiymatli analitik deyiladi.*

8.2.Namunaviy yechilgan misollar

8.1-misol. $w = f(z) = z\operatorname{Im} z$ funksiya differensiallanuvchi bo'ladigan barcha nuqtalarni toping, bu yerda $z = x + iy,\quad \operatorname{Im} z = y,\quad z = x + iy \in E = C$.

Yechish. Bu funksiyaning $z = 0$ nuqtadagi orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta w = f(z+h) - f(z) = (z+h)\operatorname{Im}(z+h) - z\operatorname{Im} z = (z+h)(\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} h) - z\operatorname{Im} z =$$
$$z\operatorname{Im} z + z\operatorname{Im} h + h\operatorname{Im} z + h\operatorname{Im} h - z\operatorname{Im} z = z\operatorname{Im} h + h\operatorname{Im} z + h\operatorname{Im} h.$$

Bundan (8.1) dagi nisbat quyidagicha yoziladi

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = z\frac{\operatorname{Im} h}{h} + \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} h$$

va $\lim\limits_{h\to 0}\operatorname{Im} h = 0,\quad \lim\limits_{h\to 0}\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z$. Ikkala limit ham z ($z \in \mathbb{C}$**)** -ning ixtiyoriy qiymatida mavjud. Endi birinchi qo'shiluvchi $z\frac{\operatorname{Im} h}{h}$ ning limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{h\to 0} z\frac{\operatorname{Im} h}{h} = z\frac{\operatorname{Im} h}{h}.$$

Agar $z = 0$ bo'lsa, bu limit mavjud va nolga teng. Demak, funksiya $z = 0$ nuqtada monogen va uning hosilasi nolga teng, ya'ni $f'(0) = 0$.

Agar $z \neq 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada funksiyaning monogen yoki

monogen bo'lmasligi $\frac{\operatorname{Im} h}{h}$ ifodaning limiti mavjud yoki mavjud emasligidan bog'liq bo'ladi. Endi limitni hisoblaymiz.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{Im} h}{h} = \begin{cases} 0, & \mathrm{h} = \mathrm{h}_1 + i\mathrm{h}_2 \quad \mathrm{h}_2 = 0, \quad \mathrm{h}_1 \to 0 \\ \frac{1}{i} & \mathrm{h} = \mathrm{h}_1 + i\mathrm{h}_2 \quad \mathrm{h}_1 = 0, \quad \mathrm{h}_2 \to 0. \end{cases}$$

Bu hisobdan ravshanki limit nolga intilish yo'lidan bog'liq ekan. Bu tanlab olingan ikkita yo'l bo'yicha nolga intilganda limitlar har xil (0 va $-i$). Demak, ifoda aniq yagona limitga ega emas, ya'ni limit mavjud emas.

Xulosa. 8.1-misolda (8.2) nisbatning limiti faqat va faqat $z = 0$ nuqtadagina mavjud, ya'ni funksiya nol nuqtada monogen va uning hosilasi $f'(0) = 0$. Agar $z \neq 0$ bo'lsa, (8.2) nisbatning limiti mavjud emas, ya'ni berilgan funksiya $z \neq 0$ bo'lgan qiymatlarida monogen emas. Funksiya $z = 0$ nuqtada monogen, ya'ni hosilaga ega, ammo bir qiymatli analitik emas.

8.2-misol. $w = e^z$, $z \in \mathbf{C}$ funksiyaning bir qiymatli analitiklikka tekshiring.

Yechish. Ta'rifga asosan $w = e^z$, $z \in \mathbf{C}$ funksiyaning bir qiymatli analitik ekanligini ko'rsatamiz

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z\frac{e^h - 1}{h},\quad \mathrm{h} = \Delta \mathrm{z},$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = e^z\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^z \cdot 1 = e^z,\qquad \mathrm{z} \in \mathbf{C}.$$

Demak, $w = e^z$ funksiya kompleks tekislikda monogen, ya'ni bu funksiya kompleks tekislikda bir qiymatli analitik bo'ladi va uning hosilasi $(e^z)' = e^z$.

8.3-Misol. 13 $f(z)=\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini topib, differensiallanuvchi nuqtalari to'plamini ko'rsating.

Yechish. Bu funksiya $e^z-1=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi z nuqtalardan tashqari butun kompleks tekislikda aniqlangan. Bu yerdan $z=2\pi k\,i, k=0,\pm1,\ldots$ kelib chiqadi. Shu nuqtalar to'plami cheksiz uzoqlashgan nuqta birgalikda bu funksiyaning aniqlanish sohasi D ning chegarasini tashkil qiladi. Shunday qilib, $\partial D=\{z=2\pi k\,i, k=0,\pm1,\ldots\}\cup\{\infty\}$ va $D=\mathbb{C}\setminus\partial D.$ Ravshanki, bu funksiya D sohada bir qiymatlidir. D sohaning ixtiyoriy z_0 nuqtasida funksiyaning differansiallanuvchiligini ko'rsatamiz. Bu nuqtada $f(z_0)=\dfrac{e^{z_0}+1}{e^{z_0}-1}$. Faraz qilaylik, $z_1=z_0+\Delta z\in D$ bo'lsin. u holda

$$f(z_1)=\frac{e_1^z+1}{e_1^z-1}=\frac{e^{z_0+\Delta z}+1}{e^{z_0+\Delta z}-1}$$

funksiyaning ortirmasini tuzamiz:

$$\Delta f(z_0)\quad=f(z_1)-f(z_0)=\frac{e^{z_0+\Delta z}+1}{e^{z_0+\Delta z}-1}-\frac{e^{z_0}+1}{e^{z_0}-1}=$$

$$=\frac{(e^{z_0+\Delta z}+1)(e^{z_0}-1)-(e^{z_0}+1)(e^{z_0+\Delta z}-1)}{(e^{z_0+\Delta z}-1)(e^{z_0}-1)}=$$

$$=\frac{e^{z_0}-1+e^{z_0}e^{z_0+\Delta z}-e^{z_0+\Delta z}-e^{z_0+\Delta z}+1-e^{z_0}e^{z_0+\Delta z}+e^{z_0}}{(e^{z_0+\Delta z}-1)(e^{z_0}-1)}=\frac{2e^{z_0}(1-e^{\Delta z})}{(e^{z_0+\Delta z}-1)(e^{z_0}-1)}.$$

Endi funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini tuzib, Δz nolga intilganda limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to0}\left[\frac{2e^{z_0}(1-e^{\Delta z})}{\Delta z(e^{z_0}-1)}\frac{1}{e^{z_0+\Delta z}-1}\right]=\frac{-2z_0}{(e^{z_0}-1)^2},$$

chunki

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{1-e^{\Delta z}}{\Delta z}=-\lim_{\Delta z\to0}\frac{e^{\Delta z}-1}{\Delta z}=-1$$

Demak, berilgan funksiya ta'rifga asosan D sohada analitikdir.

8.4-Misol. 14 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ funksiya differensiallanuvchi bo'lgan nuqtalar to'plamini topib, funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. Bu funksiya butun kompleks tekislikda aniqlangan, uzluksiz funksiyadir. Hosila ta'rifidan foydalanib, berilgan funksiyaning $\mathbb{C}$ kompleks tekislikning $z=0$ nuqtasidan boshqa birorta nuqtasida ham differensiallanuvchi emasligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $z_0\in\mathbb{C}$ nuqta funksiyaning orttirmasini tuzamiz:

$$\Delta f(z_0)=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=(z_0+\Delta z)\operatorname{Re}(z_0+\Delta z)-z_0\operatorname{Re}z_0=$$

$$z_0\operatorname{Re}z_0+z_0\operatorname{Re}\Delta z+\Delta z_0\operatorname{Re}z_0+\Delta z\operatorname{Re}z_0+\Delta z\operatorname{Re}\Delta z-z_0\operatorname{Re}z_0=\Delta z(\operatorname{Re}z_0+\operatorname{Re}\Delta z)+z_0\operatorname{Re}\Delta z.$$

Endi quyidagi nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \operatorname{Re} z_0 + \operatorname{Re}\Delta z + z_0 \frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}.$$

Bundan foydalanib (8.2) limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\operatorname{Re} z_0 + \lim_{\Delta z\to 0}\operatorname{Re}\Delta z + z_0 \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z} = \operatorname{Re} z_0 + z_0 \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}$$

Quyidagi ikki holni qaraymiz:

1-hol) $z_0 = 0$ bo’lsin, u holda $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = 0$ ni olamiz. demak, berilgan funksiya $z = 0$ nuqtada differensiallanuvchi va $f'(0) = 0$;

2-hol) $z_0 \neq 0$ bo’lsin, u holda agar $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}$ mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$ ham mavjud bo'ladi. Bu limitning mavjud emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ deb olamiz. U holda $\operatorname{Re}\Delta z = \Delta x$ va $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ uchun quyidagini olamiz

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{0 + i\Delta y} = 0;$$

$\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ uchun esa

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x + i0} = 1.$$

Shunday qilib, agar $z_0 = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$ mavjud emas , ya'ni bunday nuqtada funsiya differensiallanuvchi emas.

Demak qaralayotgan funksiya $z = 0$ da differensiallanuvchi bo'lib, lekin shu nuqtada analitik emas.

8.3.Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1. Funksiya differensiallanuvchi bo’ladigan barcha nuqtalarni toping:

a) $f(z) = z\operatorname{Re} z$; b) $f(z) = |z|^2$; v) $f(z) = \operatorname{Im} z$; g) $f(z) = z|z|^2$.

2. Ushbu funksiya kompleks tekislikning qanday nuqtalarida hosilaga ega ekanligini aniqlang. Bu nuqtalardagi hosilasi nimaga teng? Berilgan funksiya kompleks tekislikning biror nuqtasida bir qiymatli analitik bo’ladimi?

a) $f(z) = z^2 + i|z|^2$; b) $f(z) = x^2 + iy^2$; v) $f(z) = y\cdot x + i(x^2 - y^2)$; g) $f(z) = \frac{1}{z}$

3. Quyidagi funksiyalar qayerda differensiallanuvchi ekanligini aniqlang va hosilasini hisoblang:

a) $f(z) = ze^{-z}$; b) $f(z) = \frac{e^z}{z}$; v) $f(z) = \frac{z\cos z}{1+z^2}$; g) $f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$.

4. Quyidagi funksiyalar differensiallanuvchi bo'lgan nuqtalar to'plami topilsin va funksiyalarning hosilasi hisoblansin:

a) $f(z) = \bar{z}z$, b) $f(z) = x^2 + iy^2$, v) $f(z) = z\operatorname{Re} z$, g) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^y - y^3)$,

d) $f(z) = \operatorname{Im} z$, e) $f(z) = |z|^2$, j) $f(z) = x^2y^2$, z) $f(z) = z\operatorname{Im} z$, i) $f(z) = \bar{z}\operatorname{Im} z$,

k) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}$, l) $f(z)=\sqrt{|xy|}$, m) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{z}{z+1}}}{z^4-16}$, n) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{1-z^3}$,

o) $f(z)=\dfrac{\cos\frac{1}{z+i}}{\sin(\pi+z)}$, p) $f(z)=\dfrac{ctgz}{z^3+1}$, r) $f(z)=\dfrac{1}{tgz+ctgz}$, s) $f(z)=\dfrac{tg2z}{z^3-8}$.

10-amaliy mashg'ulot. Analitik funksiyalar. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar. Analitik funksiyani berilgan haqiqiy yoki mavhum qismining koeffitsenti bo'yicha tiklash. (2 soat)

Dars rejasi:

1. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismi
2. Koshi-Riman sharti
3. Qo'shma garmonik funksiyalar

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Analitik funksiya, analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismi, Koshi-Riman sharti, garmonik funksiya, qo'shma garmonik funksiyalar.*

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni.

9.1.Darsning nazariy asosi.

Faraz qilaylik, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z=x+iy$ funksiya E ($E\subset$ **S**) - ochiq to'plamda aniqlangan va shu to'plamning z nuqtasida hosilasi mavjud funksiya (monogen) bo'lsin.

Bu ikkala funksiya uchun quyidagi Koshi-Riman shartlari o'rinli bo'ladi:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9.1}$$

hosil qilinadi.

9.1-teorema. *E ochiq to'plamda aniqlangan $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ kompleks o'zgaruvchili funksiyaning E -da bir qiymatli analitik bo'lishi uchun $u(x,y)$ va $v(x,y)$*

funksiyalar shu to'plamning har bir nuqtasida birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lib, (9.1) Koshi-Riman shartini qanoatlantirishi zarur.

Agar $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalar to'liq differensialga ega bo'lsa, $f(z)$ funksiya E ochiq to'plamning har bir nuqtasida bir qiymatli analitik bo'lishi uchun (9.1) Koshi-Riman shartini bajarilishi yetarli.

9.1-ta'rif. *Haqiqiy o'zgaruvchili $u(x,y)$ funksiya D sohada ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lib, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, $u(x,y)$ funksiyaga D sohada garmonik funksiya deyiladi.*

9.2-ta'rif. *D sohada (9.1) Koshi-Riman sistemasining qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ va $v(x,y)$ garmonik funksiyalar o'zaro qo'shma garmonik funksiyalar deyiladi.*

Demak, D sohada bir qiymatli analitik $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari shu sohada o'zaro qo'shma garmonik funksiyalardan iborat bo'ladi.

9.2.Namunaviy yechilgan misollar

9.1-misol. Berilgan $|f(z)|=e^{r^2\cos 2\varphi}$ ($z=re^{i\varphi}$) funksiyaga ko'ra bir qiymatli analitik $f(z)$ funksiyani tiklang.

Yechish. Berilgan funksiyadan $\ln|f(z)|=r^2\cos 2\varphi$ topamiz. Endi

$$\ln f(z)=\ln|f(z)|+iArgf(z)=r^2\cos 2\varphi+iv(r,\varphi)$$

bir qiymatli analitik funksiya uchun uning haqiqiy qismi $u(r,\varphi)=r^2\cos 2\varphi$ berilgan va $\ln f(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$ funksiyani tiklash kerak. Bundan $f(z)=e^{u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)}$. Endi formuladan $v(r,\varphi)$ funksiyani tiklaymiz. Demak,

$$v(r,\varphi)=r^2\sin 2\varphi+c\Rightarrow \ln f(z)=r^2\cos 2\varphi+ir^2\sin 2\varphi+ic=z^2+ic\ ,\ z=re^{i\varphi}$$

va

$$f(z)=e^{z^2+ic},\ \frac{\partial v}{\partial\varphi}=r\frac{\partial u}{\partial r}=r\cdot 2r\cos 2\varphi=2r^2\cos 2\varphi\ \Rightarrow$$

$$v=\int 2r^2\cos 2\varphi d\varphi+\psi(r)=r^2\sin 2\varphi+\psi(r),\quad \frac{\partial v}{\partial r}=2r\sin 2\varphi+\psi'(r)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=2r\sin 2\varphi=2r\sin 2\varphi+\psi'(r)\Rightarrow\quad \psi'(r)=c=const$$

9.2-Misol. 15 Agar $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)=x^2-y^2$ bo'lsa, u holda $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ analitik funksiya topilsin.

Yechish. Berilgan funksiya butun kompleks tekislikda aniqlangan. Uning xususuiy hosilalarini topamiz.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2;\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

Bundan,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$$

Demak $u(x,y)$ funksiya aniqlanish sohasida ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega, bo'lib Laplas tenglamasini qanoatlantiradi. Shuning uchun u garmonik funksiyadir. Qo'shma garmonik $v(x,y)$ funksiyani topamiz. Ta'rifga asosan bu ikkala funksiya quyidagi munosabat orqali bog'langan:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Birinchi tenglamadan $\frac{\partial v}{\partial y}=2x$ ni olamiz. Bu yerdan,

$$v(x,y)=\int 2x\,dy+\varphi(x)$$

Bunda $\varphi(x)-$ ixtiyoriy uzluksiz funksiya yoki $v(x,y)=2xy+\varphi(x)$. Koshi-Riman shartlarining ikkinchisidan foydalanib, $\varphi(x)$ ni topamiz.

$$\frac{\partial v}{\partial x}= \quad 2y+\varphi'(x),\frac{\partial u}{\partial y}=-2y;-2y=-2y-\varphi'(x)$$

$$\varphi'(x)=0,\varphi(x)=c=\text{const.}$$

Demak,

$$v(x,y)=2xy+c$$

U holda izlanayotgan analitik funksiya $f(z)=x^2-y^2+i(2xy+c)$ dan iborat. Endi x va y larning z orqali ifodasini topamiz. Agar $z=x+iy,\bar{z}=x-iy$ ekanligini hisobga olsak, quiydagi munosabatlar kelib chiqadi $x=\frac{z+\bar{z}}{2},y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ U holda izlangan funksiyani olamiz:

$$f(z)=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i\left[2\frac{z+\bar{z}}{2}\frac{z-\bar{z}}{2i}+c\right]= =\frac{1}{4}(z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2)+$$

$$+\frac{1}{4}(z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2)+\frac{1}{2}(z^2-\bar{z}^2)+ic= \frac{1}{2}(z^2+\bar{z}^2)^2+\frac{1}{2}(z^2-\bar{z}^2)^2+ic=z^2+ic.$$

Bu yerdan analitik funksiya berilgan haqiqiy qismi yoki mavhum qismi orqali sof mavhum yoki haqiqiy o'zgarmas qo'shiluvchi aniqligida topilishi kelib chuqadi, degan xulosaga kelamiz. Bu o'zgarmasni topish uchun qo'shimcha shart berilishi kerak. masalan, yuqoridagi misolda qo'shimcha $f(0)=-1$ shart talab qilinsa, u holda $ic=-1$ tenglikdan $c=i$ ni olamiz. bu holda haqiqiy qismi x^2-y^2 dan iborat va $f(0)=-1$ shartni qanoatlantiruvchi analitik $f(z)$ funksiya yagona bo'lib, $f(z)=z^2-1$ ko'rinishga ega bo’ladi.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar:

1.Ushbu funksiyalarni garmoniklikka tekshiring:

a) $u(x,\ y)=x^2-y^2$; b) $u(x,\ y)=x\cdot y$; v) $u(x,\ y)=x^2+y^2$; g) $u(x,\ y)=\frac{x}{x^2+y^2}$.

2. $v(x,y)$ qo’shma garmonik funksiyani toping:

a) $u(x,y)=xy$; b) $u(x,y)=x^2-y^2+xy$;

v) $u(x,y)=e^x\cos y$, g) $u(x,y)=x\cos y shx-y\sin y chx$

3. Berilgan funksiyaga ko'ra bir qiymatli analitik funksiyani tiklang:

a) $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = y^3 - 3x^2y$;

b) $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 0$;

v) $\operatorname{Im} f(z) = v(x,y) = e^x \cos y$; g) $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y), \quad f(0) = 0$.

4. Haqiqiy qismi yoki mavhum qismi berilgan analitik funksiya topilsin:

a) $u(x,y) = 2e^x \cos y, f(0) = 2$. b) $v(x,y) = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$

v) $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ g) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2y, f(i) = 2i - 1$

d) $v(x,y) = 2(\operatorname{ch}x \sin y - xy), f(0) = 0$ e) $v(x,y) = 2\cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2, f(0) = 2$

j) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$ z) $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$

11-amaliy mashg'ulot.

Kompleks funksiyaning integrali. Integralning mavjudlik sharti. Integralni xisoblash. Kompleks funksiya integralining xossalari.

(2 soat)

Dars rejasi:

1. Kompleks argumentli funksiya integralining ta'rifi va xosslari.
2. Integralning mavjudligi.
3. Integralning xossalari.
4. Integrallarni hisoblash.
5. Tekis yaqinlashuvchi qatorni integrallash.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Silliq chiziq, kompleks argumentli funksiyaning integral yig'indisi, integral, boshlang'ich funksiya, parametrga bog'liq integrallar, integral belgisi ostida limitga o'tish, takroriy integrallar, bir bog'lamli soha, analitik funksiya, differensiallanuvchi funksiya, Koshi integrali.*

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati nazorati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni.

12.1.Darsning nazariy asosi:

$w = f(z)$ kompleks qiymatli uzluksiz funksiya L chekli egri chiziqda aniqlangan bo'lsin. L egri chiziqni $a = z_0,\ z_1, \ldots,\ z_n = b$ nuqtalar yordamida $S_1,\ S_2, \ldots,\ S_n$ yoylarga bo'linishini qaraymiz, bu yerda a chiziqning boshi, b esa oxiri. S_k–yoyning uzunligini l_k bilan belgilaymiz va $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} l_k$. Har bir S_k yoyda $\forall\varsigma_k$ ($\varsigma_k \in S_{k.}$) nuqtani tanlab

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)(z_k - z_{k-1}) \qquad (12.1)$$

integral yig'indini tuzamiz.

12.1-ta'rif. Agar (12.1) integral yig'indi $\lambda \to 0$ da z_k va ς_k nuqtalarning tanlanishidan bog'liq bo'lmasdan aniq chekli limitga ega bo'lsa, bu limitga $w = f(z)$ funksiyaning L egri chiziq bo'ylab integrali deyiladi va

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\left(z_k - z_{k-1}\right) \qquad (12.2)$$

ko'rinishda yoziladi.

12.1-teorema. (Koshi teoremasi bir bog'lamli soha uchun). Agar $w = f(z)$ funksiya bir bog'lamli chegaralangan D sohada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shu sohaga qarashli bo'lgan ixtiyoriy L to'g'rilanuvchi yopiq egri chiziq bo'yicha olingan integralning qiymati nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\int_L f(z)dz = 0\,.$$

12.2-tarif. D sohada $F(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi, agar barcha $z \in D$ uchun $F'(z) = f(z)$ bo'lsa.

12.2-teorema. Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu sohada boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

12.3-teorema. Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada differensillanuvchi bo'lsa, u holda Nyuton-Leybnis formulasi

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\varsigma)d\varsigma = F(z_1) - F(z_0)$$

o'rinli bo'ladi.

12.2.Namunaviy misollar.

12.1-Misol 16 Berilgan integralni hisoblang:

$$I = \int_\Gamma (z\bar{z} + z^2)dz,$$

bu yerda Γ chiziq $|z| = 1$ aylananing yuqori yarmi, ya'ni $|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi.$

Yechish. I ni hisoblash uchun $z - \alpha = re^{i\varphi}$ aylana tenglamasidan foydalanamiz. Bizning misolda $\alpha = 0, r = 1;$

$$z = e^{i\varphi}, dz = ie^{i\varphi}d\varphi, 0 \le \varphi \le \pi,\ z\bar{z} = e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = 1.$$

Shuning uchun

$$I = i\int_0^{\pi}(1+e^{2i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi \quad = \int_0^{\pi}(e^{i\varphi}+e^{3i\varphi})di\varphi = \left(e^{i\varphi}+\frac{1}{3}e^{3i\varphi}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$(e^{i\pi}-e^{0})+\frac{1}{3}(e^{3i\pi}-e^{0}) = -\frac{8}{3},$$

chunki $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, e^{3i\pi} = \cos 3\pi + i\sin 3\pi = -1$. Demak $I = -\frac{8}{3}$.

12.2-Misol. 17 Ushbu integralni hisoblang:

$$I = \int_{\Gamma} \operatorname{Re} z\, dz,$$

bunda Γ chiziq $z = z(t) = (2+i)t$, $0 \le t \le 1$ tenglama bilan aniqlangan.

Yechish. Ma'lumki,

$$z = x+iy, \operatorname{Re} \mathrm{mod}1mmz = x; dz = dx + i\,dy, x = 2t, \quad \text{ya'ni} \quad y = \frac{x}{2};$$

$$dx = 2\,dt, dy = dt; \operatorname{Re} \mathrm{mod}1mmz\, dz = x(dx + i\,dy) = x\,dx + ix\,dy = 4t\,dt + 2it\,dt.$$

Demak,

$$I = 4\int_0^1 t\,dt + 2i\int_0^1 t\,dt = 2+i.$$

12.3.Mustaqil ishlash uchum misol va topshiriqlar.

1.Quyidagi integrallarni hisoblang:

a) $\int_{\Gamma}(x^2+iy^2)dz;$ $\Gamma-$ chiziq $z_0 = 1+i$ va $z = 2+3i$ nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq.

b) $\int_{\Gamma}\bar{z}\,dz;$ bu yerda $\Gamma-$ chiziq $x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le 2\pi.$

v) $\int_{\Gamma}|z|\,dz;$ bunda Γ $z = -i$ nuqtadan chiqib, $z = i$ nuqtaga boruvchi kesma.

g) $\int_{\Gamma}|z|\,dz;$ $\Gamma-$ chiziq $z = -i$ nuqtadan chiqib, $z = i$ nuqtaga boruvchi yarim aylana, ya'ni $|z| = 1, \operatorname{Re} \mathrm{mod}1mmz \ge 0$.

d) $\int_{|z|=1}|z-1||dz|$

e) $\int_{\Gamma}z\sin z dz;$ $\Gamma-$ chiziq $z = 0$ nuqtadan, $z = i$ nuqtaga boruvchi kesma.

j) $\int_{\Gamma}\frac{dz}{z};$ bu yerda $\Gamma-$ chiziq $x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le 2\pi.$

z) $\int_{\Gamma}z^2\,dz;$ bu yerda $\Gamma-$ chiziq $z_0 = 1$ va $z_1 = i$ nuqtalarni tutahtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi.

2. $\int_{L}|z|dz$ integrallarni hisoblang, bunda L :

a) –1 va 1 nuqtalarni tutashtiruvchi to’g’ri chiziq kesmasi.

b) $|z|=1$ birlik aylananing quyi yarmi. Integrallash yo’lining boshlang’ich nuqtasi $z=-1$.

v) $z=-i$ nuqtadan $z=i$ nuqtaga boruvchi to’g’ri chiziq kesmasi.

g) $z=-i$ nuqtadan $z=i$ nuqtaga boruvchi $|z|=1$, $\operatorname{Re} z\geq 0$ yarim aylana.

3. a) $\int\limits_{|z|=1}|z-1||dz|$ integralni hisoblang.

b) $\int\limits_{L}\frac{\sin z^2}{(z-1)^2(z-i)^4}=0$ bo’ladigan L konturlarga ga misol keltiring.

4. Boshlang’ich funksiyani toping:

a) $f(z)=e^{az}$. b) $f(z)=\cos az$. v) $f(z)=\sin az$. g) $f(z)=ze^{az}$.

5. Qavs ichida ko’rsatilgan sohalarda quyidagi funksiyalarni boshlang’ich funksiyaga ega emasligini isbotlang:

a) $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}$ $(0<|z|<1)$. b) $f(z)=\frac{1}{z+1}$ $(0<|z+1|<\infty)$.

v) $f(z)=\frac{z}{1+z^2}$ $(1<|z|<\infty)$. g) $f(z)=\frac{1}{z(1-z^2)}$ $(0<|z|<1)$.

12-amaliy mashg’ulot.

Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi. Murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasi. Boshlang’ich funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. Nyuton-Leybnits formulasi. (2 soat)

Dars rejasi:

1. Kompleks argumentli funksiya integralining ta’rifi va xosslari.
2. Integralning mavjudligi.
3. Integralning xossalari.
4. Integrallarni hisoblash.
5. Tekis yaqinlashuvchi qatorni integrallash.

Mavzu bo’yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Silliq chiziq, kompleks argumentli funksiyaning integral yig’indisi, integral, boshlang’ich funksiya, parametrga bog’liq integrallar, integral belgisi ostida limitga o’tish, takroriy integrallar, bir bog’lamli soha, analitik funksiya, differensiallanuvchi funksiya, Koshi integrali.*

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati nazorati) 5 minut.

2. O‘tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.

3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.

4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni.

12.1.Darsning nazariy asosi:

$w = f(z)$ kompleks qiymatli uzluksiz funksiya L chekli egri chiziqda aniqlangan bo’lsin. L egri chiziqni $a = z_0,\ z_1, \dots,\ z_n = b$ nuqtalar yordamida $s_1,\ s_2, \dots,\ S_n$ yoylarga bo’linishini qaraymiz, bu yerda a chiziqning boshi, b esa oxiri. S_k–yoyning uzunligini l_k bilan belgilaymiz va $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} l_k$. Har bir S_k yoyda $\forall \varsigma_k$ ($\varsigma_k \in s_{k.}$) nuqtani tanlab

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)(z_k - z_{k-1}) \qquad (12.1)$$

integral yig’indini tuzamiz.

12.1-ta’rif. Agar (12.1) integral yig’indi $\lambda \to 0$ da z_k va ς_k nuqtalarning tanlanishidan bog’liq bo’lmasdan aniq chekli limitga ega bo’lsa, bu limitga $w = f(z)$ funksiyaning L egri chiziq bo’ylab integrali deyiladi va

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\left(z_k - z_{k-1}\right) \qquad (12.2)$$

ko’rinishda yoziladi.

12.1-teorema. (Koshi teoremasi bir bog’lamli soha uchun). Agar $w = f(z)$ funksiya bir bog’lamli chegaralangan D sohada differensiallanuvchi bo’lsa, u holda shu sohaga qarashli bo’lgan ixtiyoriy L to’g’rilanuvchi yopiq egri chiziq bo’yicha olingan integralning qiymati nolga teng bo’ladi, ya’ni

$$\int_L f(z)dz = 0 .$$

12.2-tarif. D sohada $F(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyasi deyiladi, agar barcha $z \in D$ uchun $F'(z) = f(z)$ bo’lsa.

12.2-teorema. Agar $f(z)$ funksiya bir bog’lamli D sohada differensiallanuvchi bo’lsa, u holda bu funksiya shu sohada boshlang’ich funksiyaga ega bo’ladi.

12.3-teorema. Agar $f(z)$ funksiya bir bog’lamli D sohada differensillanuvchi bo’lsa, u holda Nyuton-Leybnis formulasi

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\varsigma)d\varsigma = F(z_1) - F(z_0)$$

o’rinli bo’ladi.

12.2.Namunaviy misollar.

12.1-Misol 18 Berilgan integralni hisoblang:

$$I = \int_{\Gamma} (z\bar{z} + z^2)dz,$$

bu yerda Γ chiziq $|z| = 1$ aylananing yuqori yarmi, ya'ni $|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi.$

Yechish. I ni hisoblash uchun $z - \alpha = re^{i\varphi}$ aylana tenglamasidan foydalanamiz. Bizning misolda $\alpha = 0, r = 1;$

$$z = e^{i\varphi}, dz = ie^{i\varphi}d\varphi, 0 \le \varphi \le \pi,\ z\bar{z} = e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = 1.$$

Shuning uchun

$$I = i\int_0^{\pi}(1 + e^{2i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi \quad = \int_0^{\pi}(e^{i\varphi} + e^{3i\varphi})di\varphi = \left(e^{i\varphi} + \frac{1}{3}e^{3i\varphi}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$(e^{i\pi} - e^0) + \frac{1}{3}(e^{3i\pi} - e^0) = -\frac{8}{3},$$

chunki $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, e^{3i\pi} = \cos 3\pi + i\sin 3\pi = -1$. Demak $I = -\frac{8}{3}.$

12.2-Misol. 19 Ushbu integralni hisoblang:

$$I = \int_{\Gamma} \mathrm{Re}\, z\, dz,$$

bunda Γ chiziq $z = z(t) = (2 + i)t$, $0 \le t \le 1$ tenglama bilan aniqlangan.

Yechish. Ma'lumki,

$$z = x + iy, \mathrm{Re\,mod1}mmz = x; dz = dx + i\,dy, x = 2t, \quad \text{ya'ni} \quad y = \frac{x}{2};$$

$$dx = 2\,dt, dy = dt; \mathrm{Re\,mod1}mmz\, dz = x(dx + i\,dy) = x\,dx + ix\,dy = 4t\,dt + 2it\,dt.$$

Demak,

$$I = 4\int_0^1 t\,dt + 2i\int_0^1 t\,dt = 2 + i.$$

12.3.Mustaqil ishlash uchum misol va topshiriqlar.

1.Quyidagi integrallarni hisoblang:

a) $\int_{\Gamma}(x^2 + iy^2)dz;$ $\Gamma -$ chiziq $z_0 = 1 + i$ va $z = 2 + 3i$ nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq.

b) $\int_{\Gamma}\bar{z}\,dz;$ bu yerda $\Gamma -$ chiziq $x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le 2\pi.$

v) $\int_{\Gamma}|z|\,dz;$ bunda Γ $z = -i$ nuqtadan chiqib, $z = i$ nuqtaga boruvchi kesma.

g) $\int_{\Gamma}|z|\,dz;$ $\Gamma -$ chiziq $z = -i$ nuqtadan chiqib, $z = i$ nuqtaga boruvchi yarim aylana, ya'ni $|z| = 1, \mathrm{Re\,mod1}mmz \ge 0$.

d) $\int_{|z|=1}|z - 1||dz|$

e) $\int_{\Gamma}z\sin z dz;$ $\Gamma -$ chiziq $z = 0$ nuqtadan, $z = i$ nuqtaga boruvchi kesma.

j) $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z}$; bu yerda $\Gamma-$ chiziq $x=\cos t, y=\sin t, 0\le t\le 2\pi.$

z) $\int\limits_{\Gamma} z^2\,dz$; bu yerda $\Gamma-$ chiziq $z_0=1$ va $z_1=i$ nuqtalarni tutahtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi.

2. $\int\limits_{L}|z|dz$ integrallarni hisoblang, bunda L:

a) –1 va 1 nuqtalarni tutashtiruvchi to’g’ri chiziq kesmasi.

b) $|z|=1$ birlik aylananing quyi yarmi. Integrallash yo’lining boshlang’ich nuqtasi $z=-1$.

v) $z=-i$ nuqtadan $z=i$ nuqtaga boruvchi to’g’ri chiziq kesmasi.

g) $z=-i$ nuqtadan $z=i$ nuqtaga boruvchi $|z|=1$, $\operatorname{Re} z\ge 0$ yarim aylana.

3. a) $\int\limits_{|z|=1}|z-1||dz|$ integralni hisoblang.

b) $\int\limits_{L}\frac{\sin z^2}{(z-1)^2(z-i)^4}=0$ bo’ladigan L konturlarga ga misol keltiring.

4. Boshlang’ich funksiyani toping:

a) $f(z)=e^{az}$. b) $f(z)=\cos az$. v) $f(z)=\sin az$. g) $f(z)=ze^{az}$.

5. Qavs ichida ko’rsatilgan sohalarda quyidagi funksiyalarni boshlang’ich funksiyaga ega emasligini isbotlang:

a) $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}$ $(0<|z|<1)$. b) $f(z)=\frac{1}{z+1}$ $(0<|z+1|<\infty)$.

v) $f(z)=\frac{z}{1+z^2}$ $(1<|z|<\infty)$. g) $f(z)=\frac{1}{z(1-z^2)}$ $(0<|z|<1)$.

13-amaliy mashg'ulot.
Yagonalik teoremasi. Analitik davom ettirish prinsipi. Analitik funksiyalarni Teylor qatoriga yoyish. (2 soat)

Dars rejasi:
11. Regulyar funksiya. Analitik funksiya.
2. Yagonalik teoremasiga oid misollar yechish.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Regulyarlik, bir qiymatli analitik, differensiallanuvchanlik, integral formula, limitik nuqta, yagonalik teoremasi.*

Darsning tarkibiy qismlari
11. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni

11.11.Darsning nazariy asosi.

11.1-ta'rif. *Agar* $f(z)$ *funksiyani* $z=a\in$ ***C*** ***(*** $a\neq\infty$ ***)*** *nuqtaning biror atrofida yaqinlashuvchi darajali qatorga yoyish mumkin bo'lsa, ya'ni*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \quad \{z:|z-a|<r\}=U_r(a),$$

tasvir o'rinli bo'lsa, u holda $f(z)$ *funksiyaga* $z=a$ *nuqtada regulyar deb aytiladi. Bunda* $c_0,\ ...,c_1,\ ...,c_n,\ ...$ - *o'zgarmas koeffisiyentlar.*

Agar funksiya sohaning har bir nuqtasida regulyar bo'lsa, u holda bu funksiyaga shu sohada regulyar deb aytiladi.

11.1-teorema. Agar $f(z)$ funksiya $z=a$ nuqtada regulyar bo'lsa, u holda shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

11.2-ta'rif. *Agar* $f(z)$ *funksiya cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida aniqlangan va* $z=\infty$ *nuqta atrofida yaqinlashuvchi*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$$

qatorga yoyilgan ($|z|>R$ *sohada) bo'lsa, u holda* $f(z)$ *funksiya cheksiz uzoqlashgan nuqtada regulyar deyiladi.*

11.3-teorema. Agar $f(z)$ funksiya D sohada regulyar bo'lsa, u shu sohada ixtiyoriy tartibli hosilaga ega, uning hosilalari

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_r(a)}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)^{n+1}}\ ,\ z\in U_r(a)$$

formula bilan ifodalanadi, bunda $a\in D$, $\overline{U_r}(a)=\{z:\ \ |z-a|\le r,\quad r>0\}\subset D$.

11.1-teorema (yagonalik teoremasi). Agar $f(z)$ funksiya D sohada regulyar bo'lib, shu sohadan olingan turli xil $z_n\in D,\quad n=1,2,...$ nuqtalar ketma-ketligi $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ da $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a,\quad a\in D$ va $f(z_n)=0,\quad n=1,2,...$ bo'lsin. U holda D sohada $f(z)\equiv 0$ bo'ladi.

11.2-teorema (analitik davom ettirish prinsipi). E to'plam D sohaga tegishli bo'lgan a limitik nuqtaga ega bo'lsin. U holda E to'plamdan D sohaga analitik davom yagonadir.

11.2.Namunaviy yechilgan misollar

11.1-Misol. 20 $z=0$ nuqtaning atrofida analitik do'lib, $f(\frac{1}{n})=\frac{n}{n+1},n\in N$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya mavjudmi?

Yechish. Faraz qilaylik, $g(z)$ funksiya $z=0$ nuqta atrofida analitik bo'lib, $g(z)=\frac{n}{n+1},n\in N$ shart o'rinli bo'lsin. $g(z)$ funksiya analitik bo'lgani uchun uni $z=0$ nuqta atrofida qatorga yoyamiz:

$$g(z)=c_0+c_1z+...c_kz^k...$$

va

$$g(\frac{1}{n})=c_0+\frac{c_1}{n}+...\frac{c_k}{n^k}...=\frac{n}{n+1}.$$

Oxirgi tenglikdan c_k koefitsientlarni aniqlaymiz. Oxirgi tenglikda $n\to\infty$ da limitga o'tsak, $c_0=1$ ni hosil qilamiz. U holda

$$\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+...\frac{c_k}{n^k}+...=\frac{n}{n+1}-1=-\frac{1}{n+1}$$

bundan

$$c_1+\frac{c_2}{n}+...\frac{c_k}{n^{k-1}}+...=-\frac{n}{n+1}$$

ekanligini hosil qilamiz. Bu tenglikdan $n\to\infty$ da $c_1=-1$ ni hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib,

$$c_0=1,c_1=-1,c_2=1,c_3=-1,...c_k=(-1)^k$$

koeffisientlarni hosil qilamiz. Demak,

$$g(z)=1-z+z^2-z^3+...+(-1)^kz^k...=\frac{1}{z+1},\quad z\in\{|z|<1\}.$$

Haqiqatan ham, $g(z)=\frac{1}{z+1}$ funksiya $z=0$ nuqta atrofida analitik bo'lib, $g(z)=\frac{n}{n+1},n\in N$ shartni qanoatlantiradi. $z_n=\frac{1}{n}$ ketma-ketlikning limiti $z=0$ nuqta bo'lganligi uchun yagonalik teoremasiga asosan $g(z)=\dfrac{n}{n+1}$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya yagona bo'lib, $z=0$ nuqta atrofida $g(z)=f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ bo'ladi.

11.2-Misol . **21** $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^k$ funksiyaning analitik davomini toping.

Yechish. Bu qator $E=z:|z|<1$ doirada yaqinlashuvchi va analitik funksiyadan iborat. $|z|<1$ uchun $f(z)=-\dfrac{1}{1-z}$ bo'ladi. $F(z)=-\dfrac{1}{1-z}$ funksiya $D=\{z:|z-1|>0\}$ sohada analitikdir. Shuning uchun $F(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning E to'plamdan D sohagacha analitik davomi bo'ladi.

11.3.Mustaqil ishlash uchun mashqlar.

11. $z=0$ nuqtaning atrofida analitik do'lib, $f(z)=\dfrac{n}{n+1}, n\in N$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya mavjudmi, mavjud bo’lsa uni toping?

a) $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^5}$. b) $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^9}$. v) $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{2n^2+5}$

g) $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{2n+1}$. d) $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=e^{\frac{1}{n^3}}$. e) $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=\sin\frac{2n+1}{2}\pi$.

j) $f(\frac{1}{n})=e^{-n}$. z) $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=\sin\frac{1}{n^2}$. i) $2^{-n}<|f(\frac{1}{n})|<\frac{1}{2}$.

k) $f(\frac{1}{n})=\frac{\cos^2\pi n}{2n+1}$. l) $|f(\frac{1}{n})|<3^{-n}$.

2. Quyidagi funksiyalarning analitik davomini toping:

a) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, $|z|<1$. b) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$, $|z|<1$.

v) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2n}$, $|z|<1$. g) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{4n}$, $|z|<1$.

Javoblar:

2. a) $F(z)=\dfrac{1}{1+z}$, $z\in D=C/\{-1\}$. b) $F(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, $z\in D=C/\{\pm i\}$.

v) $F(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$, $z\in D=C/\{\pm 1\}$. g) $F(z)=\dfrac{1}{1-z^4}$, $z\in D=C/\{\pm 1, \pm i\}$.

14-amaliy mashg'ulot. Regulyar funksiyaning ajralgan maxsus nuqtalari. Qutb va muhim maxsus nuqtalar. Butun va meromorf funksiyalar. (2 soat)

Dars rejasi:

1. Regulyar funksiyaning yakkalangan masus nuqtalarini topish.

12. Maxsus nuqtalarni sinflarga ajratish. Tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta.

3. Qutb va nollar orasidagi bog'lanish.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Regulyar funksiyaning nollari, nolning tartibi (yoki karraligi), bir qiymatli xarakterdagi yakkalangan masus nuqta, tuzatib bo'ladigan, qutb va muhim maxsus nuqta.*

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
12. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni

12.1.Darsning nazariy asosi.

12.1-ta'rif. *Agar $f(z)$ funksiya a nuqtada regulyar bo'lib, $f(a)=0$ bo'lsa, u holda $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli deyiladi.*

12.2-ta'rif. *Agar $f(z)$ funksiya a ($a\neq\infty$) nuqtadan tashqari $0<|z-a|<\rho$ halqada regulyar bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning bir qiymatli xarakterdagi yakkalangan maxsus nuqtasi deyiladi.*

Agar $f(z)$ funksiya $\rho<|z|<\infty$ sohada regulyar bo'lsa u holda cheksiz uzoqlashgan nuqta $f(z)$ funksiyaning bir qiymatli xarakterdagi yakkalangan maxsus nuqtasi deyiladi.

12.3-ta'rif. *Agar $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ limit mavjud va chekli bo'lsa, bir qiymatli xarakterdagi yakkalangan a maxsus nuqta $f(z)$ funksiya uchun **tuzatib bo'ladigan** maxsus nuqta deyiladi.*

12.4-ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ *limit mavjud bo'lib, cheksiz uzoqlashgan nuqtaga teng bo'lsa ya'ni*

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$$

bo'lsa, u holda bir qiymatli xarakterdagi yakkalangan a *maxsus nuqta* $f(z)$ *funksiya uchun* ***qutb*** *deyiladi.*

12.5-ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ *limit mavjud bo'lmasa, bir qiymatli xarakterdagi yakkalangan* a *maxsus nuqta* $f(z)$ *funksiya uchun* ***muhim*** *maxsus nuqta deyiladi.*

12.12.Namunaviy yechilgan misollar.

12.1-misol. $f(z) = \dfrac{z}{z-3}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini toping va tipini aniqlang.

Yechish. $f(z) = \dfrac{z}{z-3}$ funksiya kompleks tekislikning $z = 3$ nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan va ikkita regulyar funksiyalarning nisbati sifatida regulyar bo'lib, yagona bir qiymatli xarakterdagi ajralgan maxsus nuqta $z = 3$ bo'ladi. Uning turini aniqlash maqsadida quyidagi integralni hisoblaymiz:

$$\lim_{z\to 3} f(z) = \lim_{z\to 3} \frac{z}{z-3} = \infty\ .$$

Demak, 12.4-ta'rifga ko'ra $z = 3$ nuqta berilgan funksiyaning qutb turdagi ajralgan maxsus nuqta bo'lar ekan.

12.2- Misol . 22 $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini toping va tipini aniqlang

Yechish. Bu funksuya uchun $z = 0$ ajralgan maxsus nuqtadir. $z = 0$ nuqtaning maxsus nuqta deyilishiga sabab, formal ravishda funksiya argumentiga 0 qo'yilsa, ushbu

$$f(0) = \frac{1-cos0}{0} = \frac{0}{0}$$

aniqmas ifoda hosil bo'ladi. Endi $f(z)$ dan $z \to 0$ bo'lganda limit olib o'sha nuqtaning xarakterini aniqlaumiz. Ma'lumki,

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots,$$

$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \ldots$$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \ldots\right) = \frac{1}{2}.$$

Demak, $A=\frac{1}{2}$ chekli son bo'lgani uchun $z=0$ nuqta berilgan $f(z)$ funksiyaning tuzatiladigan maxsus nuqtasi bo'ladi.

12.3-Misol. **23** $f(z)=\frac{1}{(z-1)z^2}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini toping.

Yechish. Ma'lumki funksiyaning maxsus nuqtalari $z=0$ va $z=1$ bo'ladi.

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)z^2}=\infty,\quad \lim_{z\to 1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)z^2}=\infty$$

ekanligidan bu maxsus nuqtalar qutb maxsus nuqtalar ekanligi kelib chiqadi. Bundan $z=0$ nuqta $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ funksiyaning ikki karrali noli hamda $z=1$ nuqta bu funksiyaning bir karrali noli bo'lgani uchun ular mos ravishda ikki karrali va oddiy qutblardan iborat bo'ladi.

12.4- Misol. **24** $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ funksiya uchun $z=0$ muhim maxsus nuqta ekanligini isbotlang.

Yechish. Ko'rinib turibdiki $z=0$ nuqta bu funksiyaning ajralgan maxsus nuqtasi bo'ladi. Uning muhim maxsus nuqta ekanligini isbotlash uchun $z=0$ ga intiluvchi shunday ikkita z_n va ξ_n kompleks sonlar ketma-ketligini topilib,

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)\neq \lim_{n\to\infty} f(\xi_n)$$

ekanligini ko’rsatish yetarli. Chunki bu holda $\lim_{z\to 0} f(z)$ limit mavjud bo’lmaydi va bu esa 12.5-ta’rifga binoan $z=0$ nuqtaning muhim maxsus nuqta ekanligini bildiradi.

Bu maqsadda Eyler formulasidan foydalanamiz:

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y),\; z=x+iy\,.$$

Biz nolga intiluvchi ketma-ketliklarni quyidagicha tanlaymiz:

$$z_n=\frac{1}{2n\pi i}\to 0,\; n\to\infty \text{ va } \xi_n=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i}\to 0,\; n\to\infty\,.$$

Bu tanlangan ketma-ketlik nuqtalarida berilgan funksiyaning qiymatlarini topamiz:

$$f(z_n)=e^{\frac{1}{\frac{1}{2n\pi i}}}=e^{2n\pi i}=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi=1\to 1,\; n\to\infty\,,$$

$$f(\xi_n)=e^{\frac{1}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+2n\pi)i}}}=e^{(\frac{\pi}{2}+2n\pi)i}=\cos(\frac{\pi}{2}+2n\pi)+i\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=i\to i,\; n\to\infty\,.$$

Demak, yuqorida ta’kidlaganimizga asosan $z=0$ nuqta $f(z)$ uchun muhim maxsus nuqta bo'ladi.

12.3.Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar:

1. Quyidagi funksiyalarning barcha nollarini toping va tartibini aniqlang:

a) $\frac{(z^2+9)^2}{z^4}$. b) $\frac{(z^2-16)^3}{(z-1)^5}$. v) $z\cdot\sin z$. g) $\frac{(z^2-\pi^2)\cdot\sin z}{z^2}$.

12. $z=a$ nuqta quyidagi funksiyalar uchun tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta ekanligini isbotlang:

a) $\frac{z^2-1}{z-1}$ $(a=1)$. b) $\frac{z^2-1}{z+1}$ $(a=-1)$. v) $\frac{z^3-z}{z+1}$ $(a=-1)$. g) $\frac{1-\cos z}{z^2}$ $(a=0)$.

3. $z=a$ nuqta quyidagi funksiyalar uchun qutb ekanligini isbotlang:

a) $\frac{1}{z}$ $(a=0)$. b) $\frac{1}{(z^2-1)^2}$ $(a=1)$. v) $\frac{z+i}{(z^2+1)^2}$ $(a=i)$. g) $\frac{1-\cos z}{z^2}$ $(a=0)$.

4. $z=a$ nuqta quyidagi funksiyalar uchun muhim maxsus nuqta ekanligini isbotlang:

a) e^z $(a=\infty)$. b) $\cos z$ $(a=\infty)$. v) $e^{\frac{1}{z^2}}$ $(a=0)$. g) $z^2\cos\frac{\pi}{z}$ $(a=0)$.

5. Quyidagi funksiyalarning maxsus nuqtalarini toping va tipini aniqlang.

a) $f(z)=\frac{1}{z}$. b) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$. v) $f(z)=\frac{z}{e^z+1}$. g) $f(z)=\frac{z^2-1}{z^2+1}$.

g) $f(z)=\frac{1}{z-z^3}$. d) $f(z)=\frac{z^4}{1+z^4}$. e) $f(z)=\frac{z}{\mathrm{tg}z}$. j) $f(z)=\mathrm{ctg}z-\frac{1}{z}$.

z) $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{\sin z}$. i) $f(z)=\mathrm{tg}z$. k) $f(z)=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{z}$. l) $f(z)=z^2\cos\frac{\pi}{z}$.

m) $f(z)=e^{\mathrm{tg}z}$. n) $f(z)=\sin e^{\frac{1}{z}}$. o) $f(z)=\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}$. p) $f(z)=z^2\sin\frac{z}{z+1}$.

r) $f(z)=\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$. s) $f(z)=\frac{(1-\cos z)(e^{z^2}-1)}{z^6}$. u) $f(z)=\frac{1}{\cos z-\cos\alpha}$.

f) $f(z)=\mathrm{ctg}z-\frac{2}{z}$.

15-amaliy mashg'ulot.
Loran qatori. Regulyar funksiyalarni Laron qatoriga yoyish (2 soat)

Dars rejasi:
1. Loran qatorining yaqinlashish sohasi.
2. Regulyar funksiyani Loran qatoriga yoyish.
12. Regulyar funksiyani Loran qatoriga yoyilmasining yagonaligi.
4. Loran qatori koeffisientlari uchun Koshi tengsizligi.
5. Maxsus nuqta atrofida Loran qatori.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Loran qatori, yaqinlashish sohasi, Loran qatorining bosh va to'g'ri qismi, qator koeffisientlari, Koshi tengsizligi yagonaligi..*

Darsning tarkibiy qismlari
1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
12. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni

12.1. Darsning nazariy asosi.

12.1-ta'rif. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ *qatorga* $f(z)$ *funksiyaning* a *nuqta atrofidagi Loran qatori,* $f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ *va* $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ *qatorlarga esa Loran qatorning bosh va to'g'ri qismlari deyiladi.*

$f(z)$ funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofidagi Loran qatorining bosh va to'g'ri qismlari quyidagicha bo'ladi

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n\,, \qquad f_2(z)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}\,.$$

1-teorema. $D:\rho<|z-a|<R$ *halqada regulyar bo'lgan* $f(z)$ *funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasi yagonadir.*

2-teorema. $f(z)$ *funksiya* $D:\rho_0<|z-a|<R_0$ *halqada regulyar bo'lsin. U holda bu funksiyaning shu halqadagi Loran qatorining koeffisiyentlari uchun*

$$|c_n|\le\frac{M}{R^n},\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

tengsizlik o'rinlidir.

3-teorema. *Yakkalangan a nuqta funksiyaning tuzatib bo'ladigan maxsus nuqtasi bo'lishi uchun, uning a nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasining bosh qismi aynan nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.*

4-teorema. *Yakkalangan a maxsus nuqta $f(z)$ funksiyaning qutbi bo'lishi uchun, uning a nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasining bosh qismida cheklita hadlar bo'lishi zarur va yetarlidir.*

5-teorema. *Yakkalangan a maxsus nuqta $f(z)$ funksiyaning muhim maxsus nuqtasi bo'lishi uchun, uning a nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasining bosh qismida cheksiz ko'p hadlar bo'lishi zarur va yetarlidir.*

12.2.Namunaviy yechilgan misollar

12.1-Misol. 25 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $1<|z|<2$ Funksiyani berilgan halqada Loran qatoriga yoying.

Yechish. Izlanayotgan qatorni quyidagicha hosil qilamiz:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}.$$

$|z|<2$ bo'lganligi uchun

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

va $1<|z|$ bo'lganligi uchun

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

bo'ladi. U holda

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

Loran qatori hosil bo'ladi.

***12.2-Misol.* 26** $f(z)=\dfrac{1}{z(z-4)^2}$, $0<|z|<4$ funksiyani berilgan xalqada Loran qatoriga yoying

Yechish. Avval $\dfrac{1}{z-4}$ funksiyani $0<|z|<4$ halqada Loran qatoriga yoyamiz:

$$\frac{1}{z-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{4}}=-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{4^2}+...\frac{z^n}{4^n}+...\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}.$$

Hosil bo'lgan qator $0 \le |z| < 4$ doiraning ichida tekis yaqinlashuvchiligidan Veyarshtrass teoremasiga muvofiq uni hadlab differensiallash mumkin:

$$-\frac{1}{(z-4)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{4^{n+1}} \text{ yoki } \frac{1}{(z-4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{4^{n+1}}.$$

U holda

$$\frac{1}{z(z-4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-2}}{4^{n+1}}$$

bo'ladi.

12.3-Misol. 27 $f(z) = \dfrac{z}{4+z^3}$ funksiyani $z = \infty$ nuqta atrofida Loran qatoriga yoing.

Yechish. $z = \infty$ nuqta atrofida $|z| > \sqrt[3]{4}$ bo'lganligi uchun

$$\frac{1}{4+z^3} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{4}{z^3}\right)} = \frac{1}{z^3}\left(1+\left(-\frac{4}{z^3}\right)+\left(-\frac{4}{z^3}\right)^2+\ldots+\left(-\frac{4}{z^3}\right)^n+\ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{z^{3n+3}}$$

Loran qatoriga ega bo'lamiz.

12.12.Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar:

1. Quyidagi qatorlarning yaqinlashish sohasini toping.

a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$. b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n$. v) $\sum_{n=-1}^{-\infty} (z-i)^n$. g) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$

2. $1 < |z| < 2$ halqada z -ning darajalari bo’yicha Loran qatoriga yoying.

a) $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$. b) $\frac{3}{z^2+z-2}$. v) $\frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$. g) $\frac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$.

12. Quyidagi funksiyalarni Loran qatoriga yoying

1. $f(z) = \frac{e^z}{z}, z_0 = 0$. 2. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}, 1 < |z| < 4$.

12. $f(z) = \frac{2}{1-z^2}$, $1 < |z+2| < 3$. 4. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$, $1 < |z| < 2$.

5. $f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+4)}$, $1 < |z| < 2$. 6. $f(z) = \frac{z^2}{(z^2-1)(z^2+4)}$, $1 < |z| < 2$.

7. $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z+2)}$, $1 < |z| < 2$. 8. $f(z) = \frac{z^2-z+2}{z^3-3z+2}$, $1 < |z| < 2$.

9. $f(z) = \frac{2z-3}{z^2+z-2}$, $0 < |z-2| < 1$. 10. $f(z) = z^2 \sin\pi \frac{z+1}{z}$, $0 < |z| < \infty$.

11. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}$, $0 < |z-1| < 1$. 12. $f(z) = \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z}}}$, $0 < |z| < \infty$.

112. $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(z+1)}$, $1<|z-1|<2$. 12. $f(z)=\dfrac{e^{z}}{z(1-z)}$, $1<|z-1|<\infty$.

15. $f(z)=e^{\frac{z}{2}(z-\frac{1}{z})}$, $0<|z|<\infty$.

Dars rejasi:

1. Funksiyaning ajralgan maxsus nuqtaga nisbatan qoldig'ini hisoblash.
2. Qutbga nisbatan funksiyaning qoldig'ini hisoblash.
3. Funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqtaga nisbatan qoldig'i.
13. Yopiq kontur bo'yicha olingan integralni hisoblash.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Funksiyaning ajralgan maxsus nuqtaga nisbatan qoldig'i, oddiy va karrali qutbagi qoldiqni hisoblash formulalari, cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi qoldiq, qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi, yopiq kontur bo'yicha olingan integrallarni qoldiq yordamida hisoblash.*

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
13. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni

13.1.Darsning nazariy asosi.

1-ta'rif. *$f(z)$ funksiyaning a nuqtadagi qoldig'i deb shu nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasining c_{-1} koeffisiyentiga aytiladi va ($\underset{z=a}{res}\, f(z)$ kabi belgilanadi), ya'ni*

$$\underset{z=a}{res}\, f(z)=c_{-1}.$$

Ma'lumki

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(\varsigma)d\varsigma,$$

bunda $\gamma_\rho=\{z:\ |z-a|<\rho,\ \ 0<\rho<R\}$ aylanabo'lib, unda soat yo'nalishiga teskari yonalish (musbat yo'nalish) tanlangan. Demak

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz=2\pi i\,\underset{z=a}{res}\, f(z)$$

formulani o'rinli.

Agar $z=a$ nuqta berilgan $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsa, u holda bu funksiyadan a nuqtaning yetarlicha kichik atrofi chegarasi bo'yicha olingan integralning qiymati shu nuqtadagi qoldiqni $2\pi i$ ga ko'paytirilganiga teng.

Agar a $f(z)$ funksiyaning regulyar nuqtasi bo'lsa, u holda

$$\underset{z=a}{res} f(z)=0.$$

a). Oddiy qutb bo'lgan hol. Agar a nuqta $f(z)$ funksiyaning oddiy qutbi bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning a nuqtagi qoldig'i

$$\underset{z=a}{res} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Xususiy holda, agar $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ bo'lsa, bu yerda $\varphi(z)$, $\psi(z)$ - a nuqtada regulyar funksiyalar bo'lib, $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$ bo'lganda

$$\underset{z=a}{res}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

b). Karrali qutb bo'lgan hol. Agar a nuqta $f(z)$ funksiyaning m-tartibli qutbi bo'lsa, u holda a nuqta atrofida qoldig'i

$$\underset{z=a}{res} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right].$$

ko'rinishda bo'ladi.

v). Cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi qoldiq

2-ta'rif. *$f(z)$ funksiyaning $z=\infty$ nuqtadagi qoldig'i deb shu nuqta atrofida $f(z)$ funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasining -c_{-1} koeffisiyentiga aytiladi ($\underset{z=\infty}{res} f(z)$ kabi belgilanadi), ya'ni*

$$\underset{z=\infty}{res} f(z)=-c_{-1}.$$

1-teorema (qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi). Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$ nuqtalardan tashqari hamma joyda regulyar bo'lib, D sohada yotuvchi γ-sodda yopiq chiziq $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$ nuqtalarni o'z ichida saqlasin. U holda

$$\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res} f(z),$$

formula o'rinli bo'ladi, bu yerda γ musbat yo'naltirilgan.

13.2.Namunaviy yechilgan misollar

***13.1-Misol.* 28** $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z+10)}$ funksiyaning ajralgan maxsus nuqtalaridagi qoldiqlarni hisoblang.

Yechish. Ko'rinib turibdiki, $z_1 = 1$ va $z_2 = -10$ nuqtalar $f(z)$ uchun oddiy qutbdir. Bizga ma'lumki, $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning oddiy qutbi bo'lsa, bu nuqtadagi qoldiq

$$\mathrm{res} f(z)|_{z=a} = \lim_{z\to a}[f(z)(z-a)]$$

formula yordamida, agar

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}, \phi(a) \neq 0, \psi(a) = 0$$

bo'lganda

$$\mathrm{res} f(z)|_{z=a} = \frac{\phi(z)}{\psi'(z)}|_{z=a}$$

formula yordamida topilar edi. Shunga ko'ra yuqoridagi misol uchun

$$\mathrm{res} f(z)|_{z=1} = \lim_{z\to 1}[f(z)(z-1)] = \lim_{z\to 1}[\frac{z^2}{(z-1)(z+10)}(z-1)] = \lim_{z\to 1}[\frac{z^2}{z+10}] = \frac{1}{11},$$

$$\mathrm{res} f(z)|_{z=-10} = \lim_{z\to -10}[f(z)(z+10)] = \lim_{z\to -10}[\frac{z^2}{(z-1)(z+10)}(z+10)] = \lim_{z\to -10}[\frac{z^2}{z-1}] = -\frac{100}{11}.$$

13.2-Misol. **29** $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+2)^3 z}$ funksiyaning barcha ajralgan maxsus nuqtalaridagi qildiqlarni hisoblang.

Yechish. Ko'rinib turibdiki, $z_1 = -2$ uch karrali qutb va $z_2 = 0$ oddiy qutbdir. Ma'lumki, $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun n karrali qutb bo'lsa quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$\mathrm{res} f(z)|_{z=a} = \lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-a)^n].$$

Shunga asosan yuqoridagi misolning $z_1 = -2$ nuqtadagi qoldig'ini hisoblaymiz:

$$\mathrm{res} f(z)|_{z=-2} = \lim_{z\to -2}\frac{1}{(2!)}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)(z+2)^3] = \lim_{z\to -2}\frac{1}{(2!)}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z+1}{(z+2)^3 z}(z+2)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}\left[-\frac{1}{2z^2}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to -2}\frac{2}{z^3} = -\frac{1}{8},$$

$z_2 = 0$ oddiy qutb ekanligidan

$$\mathrm{res} f(z)|_{z=0} = \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z+1}{(z+2)^3 z} = \lim_{z\to 0}\frac{z+1}{(z+2)^3} = \frac{1}{8}.$$

13.3-Misol. **30** $f(z) = z\sin\dfrac{1}{z+1}$ funksiyaning barcha ajralgan maxsus nuqtalaridagi qoldiqlarni hisoblang.

Yechish. $z = -1$ muhim maxsus nuqta. Chunki,

$$\lim_{z\to -1} z\sin\frac{1}{z+1}$$

Limit mavjud emas. Bu nuqtadagi qoldiqni hisoblash uchun ta'rifga asosan funksiyaning $z=-1$ nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasidagi c_{-1} koefitsientni, ya'ni, $\frac{1}{z+1}$ had oldidagi koefitsientni topamiz:

$$f(z)=z\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-...\right)=$$

$$=(z+1-1)\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-...\right)=$$

$$=1-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^2}+\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^4}-\frac{1}{5!(z+1)^5}-...$$

Demak,

$$\mathrm{res} f(z)|_{z=-1}=c_{-1}=-1.$$

13.4--misol. $\int\limits_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^3}dz$ integralni hisoblang.

Yechish. $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$ funksiya bitta $z=0$ maxsus nuqta (qutb) ga ega bo’lib, Loran qatoriga yoyilmasi

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^3}=\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots}{z^3}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!\,z}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}+\cdots$$

dan iborat. Bundan esa $\underset{z=0}{res}\frac{\cos z}{z^3}=c_{-1}=-\frac{1}{2}$. (13) formuladan

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^3}dz=2\pi i\,\underset{z=0}{res}\frac{\cos z}{z^3}=-\pi i.$$

13.3.Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

1. Hisoblang:

a) $\underset{z=\infty}{res}\frac{\sin z}{z^2}$. b) $\underset{z=0}{res}\frac{1}{z^3-z^5}$. v) $\underset{z=1}{res}\frac{1}{z^3-z^5}$. g) $\underset{z=1}{res}\frac{e^z}{(z-1)^2}$.

2. Barcha chekli maxsus nuqtalardagi qoldiqlarni hisoblang:

a) $\frac{1}{z+z^3}$. b) $\frac{z^2}{(1+z)^3}$. v) $\frac{1}{(z^2+1)^3}$. g) $\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$.

3. Integralni hisoblang (musbat, ya’ni soat strelkasiga teskari yo’nalish olingan):

a) $\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$. b) $\int\limits_{|z|=3}\frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$. v) $\int\limits_{|z-1|=1}\frac{dz}{1+z^4}$. g) $\int\limits_{|z|=2}\frac{z^3}{z^4-1}dz$.

13. Funksiyaning ajralgan maxsus nuqtalaridagi qoldiqlarni hisoblang.

a. $f(z)=\frac{1}{1-e^z}$. b. $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^4}$. v. $f(z)=\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$. g. $f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

d. $f(z)=\dfrac{1-e^{z^2}}{z^8}$. e. $f(z)=z^5\sin\dfrac{1}{z}$ j. $f(z)=\dfrac{z^7}{(z-2)(z^2+1)}$. z. $f(z)=z^2\sin\dfrac{\pi}{z+1}$.

i. $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-\pi)(z+9)^2}$. k. $f(z)=\dfrac{\mathrm{ctg}z}{z^2}$. l. $f(z)=\dfrac{1-\sin z}{\mathrm{tg}z}$. n. $f(z)=\dfrac{ze^{1-\frac{1}{z}}}{1-e^z}$.

o. $f(z)=\dfrac{z^3\mathrm{sh}z}{1-\cos z}$.

5. Funksiyaning $z=\infty$ dagi qoldig'ini hisoblang

a. $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z}$, b. $f(z)=\dfrac{1}{z+2}\cos\dfrac{1}{z}$, v. $f(z)=\dfrac{z}{z^3+1}\sin\dfrac{1}{z}$.

1. $I=\int\limits_0^{2\pi}R(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.

2. $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x)dx$ ko'rinishdagi integralni hisoblash.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Qoldiqlar nazariyasining aniq integrallarni hisoblashga tadbiqi, rasional funksiyaning integrali, Jordan lemmasi, logarifmik qoldiq, argument prinsipi, Rushe teoremasi.*

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni

Darsning nazariy asoslari

Faraz qilaylik chekli $[a,b]$ oraliqda haqiqiy $f(z)$ funksiya berilgan bo'lib, $\int\limits_a^b f(x)dx$ Riman integralini hisoblash talab qilinsin. Buning uchun shunaqa bo'laklari silliq yuqori yarim tekislikda yotuvchi C qo'shimcha chiziq olamizki, $C\cup[a,b]$ chiziq biror chegaralangan bir bog'lamli D sohaning chegarasidan iborat bo'lsin. $f(z)$ funksiyani $[a,b]$ kesmadan $\overline{D}$ sohaga shunday davom ettiramizki, natijada $f(z)$ yakkalangan maxsus $a_1,a_2,...,a_n\in D$ nuqtalardan tashqari $\overline{D}$ da regulyar bo'lsin. Shu soha va $f(z)$ funksiya uchun qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasini qo'llasak, u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} f(z) \qquad (14.1)$$

munosabatni olamiz. Bu yerdan

$$\int_a^b f(x)dx + \int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} f(z). \qquad (14.2)$$

Agar $\int_C f(z)dz$ integralni bevosita hisoblash yoki $\int_a^b f(x)dx$ integral bilan ifodalash imkoniyati mavjud bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash masalasi yechiladi.

Agar $(a,\ b)$ interval cheksiz bo'lsa, u holda kengayib boruvchi qo'shimcha shunaqa bo'lakli silliq chiziqlar oilasini olish lozimki, limitga o'tgan taqdirda $(a,\ b)$ interval hosil bo'lgan sohalar chegarasining bir qismi sifatida paydo bo'lsin. Agar $(a,b) = (-\infty, \infty)$ bo'lsa, u holda (14.2) ga o'xshash

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} f(z) \qquad (14.3)$$

formulani olamiz. Agar bu yerda $\tilde{N}_R$ - o markazli R radiusli yuqori yarim aylana bo'lsa va $f(z) = F(z)e^{i\lambda z}$ ko'rinishga ega bo'lsa, u holda berilgan integralni hisoblash uchun $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} F(z)e^{i\lambda z}dz$ ni hisoblash kifoya. Ko'p hollarda $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} F(z)e^{i\lambda z}dz = 0 \ \ (\lambda > 0)$ munosabatni ko'rsatish uchun quyidagi Jordan lemmasidan foydalaniladi.

14.1-Jordan lemmasi. Agar $g(z)$ funksiya $C_{R_n} :|z| = R_n, \operatorname{Im} z > -a$ aylana yoylarida $n \to \infty (n \to \infty, R_n \to \infty)$ da nolga $\arg z$ ga nisbatan tekis intilsa, ya'ni $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunaqa $n_\circ(\varepsilon)$ nomer topilib, $\forall n > n_\circ$ uchun $|g(z)| < \varepsilon, \forall z \in C_{R_n}$ bo'lsa, u holda $\forall \lambda > 0$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{C_{R_n}} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0$ bo'ladi.

Jordan lemmasini aylanalar yoylari oilasi uchun quyidagicha bayon qilish mumkin.

14.2-Jordan lemmasi. Agar *g(z)* funksiya $C_R :|z| = R, \operatorname{Im} z > -a$ aylanalar yoylari oilasida $R \to \infty$ da $\arg z$ ga nisbatan nolga tekis yaqinlashsa, u holda $\forall \lambda > 0$ uchun

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0$$

bo'ladi.

14.2.Namunaviy yechilgan misollar

14.1-Misol 31 $I = \oint\limits_{|z|=4} \dfrac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$ integralni hisoblang

Yechish. Avval integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtalarini topamiz, ya'ni

$$(z-\pi)^3 = 0, \quad z = \pi.$$

Bu nuqta $|z|=4$ aylana ichidagi sohada yotadi. $z=\pi$ uch karrali qutb ekanligidan bu nuqtadagi qoldiq quyidagicha topiladi:

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=\pi}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\pi}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)(z-\pi)^3]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\pi}\frac{d^2}{dz^2}(e^{iz}).$$

Endi e^{iz} funksiyadan 2 marta hosila olsak,

$$(e^{iz})''=(ie^{iz})'=i\cdot ie^{iz}=-e^{iz}$$

bo'lib,

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=\pi}=\frac{1}{2}(-e^{i\pi}).$$

Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasiga ko'ra,

$$I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}(-e^{i\pi})=-\pi i\cdot e^{i\pi}=-\pi i(\cos\pi+i\sin\pi)=\pi i.$$

14.5-Misol. 32 $I=\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2dz}{\sin^3 z\cos z}$. integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtalarini aniqlaymiz:

$$\sin^3 z\cos z=0,\quad z=\pi k,\quad z=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z.$$

Bundan faqat $z=0$ nuqta $|z|=1$ bilan chegaralangan sohada joylashgan. Demak, $z=0$ nuqtadagi qoldiqni hisoblaymiz. Buning uchun avval

$$\frac{\sin^3 z}{z^2}$$

funksiyani quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{\sin^3 z}{z^2}=\frac{(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...)^3}{z^2}=\frac{z^3(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+...)^3}{z^2}=z(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+...)^3.$$

U holda integral ostidagi funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+...)^3\cos z}.$$

Ko'rinib turibdiki, $z=0$ oddiy qutb. Demak qoldiq quyidagicha topiladi:

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=0}=\lim_{z\to0}[zf(z)]=\lim_{z\to0}\left[\frac{1}{z(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+...)^3\cos z}\cdot z\right]=1.$$

demak, qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasiga ko'ra

$$I=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(z)|_{z=0}=2\pi i.$$

14.3-Misol 33

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Yechish. Ma'lumki, agar $z=\infty$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun kamida ikki karrali nol bo'lsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

xosmas integral quyidagi formula yordamida hisoblanar edi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z)|_{z=a_k},$$

bunda $a_k, k=1,2,...,n$ sonlar $f(z)$ funksiyaning yuqori yarim tekislikdagi maxsus nuqtalari. Shunga ko'ra yuqoridagi integralni hisoblaymiz. Avval integral ostidagi funksiyaga mos

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$$

funksiyani tuzib olamiz. Ko'rinib turibdiki. $z_1 = -i$ va $z_2 = i$ nuqtalar $f(z)$ funksiyaning uch karrali qutb maxsus nuqtalari va $z_2 = i$ yuqori yarim tekislikda joylashgan. Demak. shu nuqtadagi qoldiqni hisoblaymiz:

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=i} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-i)^3}{(z^2+1)^3}\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[-\frac{12}{(z^2+1)^5}\right] = -\frac{3}{16}i.$$

Demak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot (-\frac{3}{16}i) = \frac{3}{8}\pi.$$

14.4-Misol. 34 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2 - 2ix - 2}$ integralni hisoblang.

Yechish. Ma'lumki, agar $f(z) = F(z)e^{imz}$ ko'rinishda va $z \to \infty$ $F(z) \to 0$ bo'lsa, Jordan lemmasi va qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasiga ko'ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

xosmas integral quyidagi formula yordamida hisoblanar edi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z)|_{z=a_k}, \tag{1}$$

bunda $a_k, k=1,2,...,n$ sonlar $f(z)$ funksiyaning yuqori yarim tekislikdagi maxsus nuqtalari. Shunga asosan yuqoridagi misolni hisoblaymiz.

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 2iz - 2}$$

funksiyani tuzib olamiz. Bunda

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 2iz - 2}$$

funksiya Jordan lemmasining shartlarini qanoatlantiradi. $f(z)$ funksiyaning maxsus nuqtalarini topamiz:

$$z^2 - 2iz - 2 = 0, \quad z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i$$

ildizlarga ega bo'lamiz. Bu nuqtalarning har ikkalasi ham oddiy qutb va yuqori yarim tekislikda joylashgan. Shu sababli har ikkala nuqtalardagi qoldiqni hisoblaymiz.**Ошибка! Источник ссылки не найден.** ga ko'ra

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=z_1} = \frac{e^{iz}}{2z-2i}|_{z=z_1} = \frac{e^{i-1}}{2+2i-2i} = \frac{e^{i-1}}{2},$$

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=z_2} = \frac{e^{iz}}{2z-2i}|_{z=z_2} = \frac{e^{-i-1}}{-2+2i-2i} = -\frac{e^{-i-1}}{2},$$

Demak

$$I = 2\pi i\left(\frac{e^{i-1}}{2} - \frac{e^{-i-1}}{2}\right) = \frac{2\pi i}{e}\left(\frac{e^{i}-e^{-i}}{2}\right) = -\frac{2\pi}{e}$$

14.5-Misol .35 $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x + p^2}$, $(0 < p < 1)$ integralni hisoblang.

Yechish. Ushbu misolni hisoblash uchun $e^{ix} = z$ almashtirish olamiz. U holda

$$dz = e^{ix} i dx, \quad dx = \frac{dz}{iz},$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x;$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Ma'lumki, $|z| = |e^{iz}| = 1$ birlik aylanani ifodalaydi. Bulardan esa

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{1-2p\frac{z^2+1}{2z}+p^2} = -\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{pz^2-(1+p^2)z+p}$$

kelib chiqadi. Integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtalari $z_1 = p$ va $z_2 = \frac{1}{p}$ qutblardan iborat. $p<1$ ekanligidan faqat z_1 birlik aylanad joylashgan z_2 esa birlik aylanadan tashqaridadir. Demak, z_1 nuqtadagi qoldiqni hisoblaymiz:

$$\operatorname{res} f(z)|_{z=z_1} = \frac{1}{[pz^2-(1+p^2)z+p]'}|_{z=z_1} = \frac{1}{[2pz-(1+p^2)]}|_{z=z_1} = \frac{1}{p^2-1}$$

Demak, qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasiga muvofiq

$$I = 2\pi i(-\frac{1}{i})\frac{1}{p^2-1} = \frac{2\pi}{1-p^2}.$$

14.3.Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar:

1. Berilgan aniq integrallarni hisoblang:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{3}\sin\varphi} d\varphi$. b) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3+\sin\varphi}$. v) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5+3\sin\varphi)^2}$. g) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4+\cos\varphi}$.

2. Xosmas integrallarni hisoblang:

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$. b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. v) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$. g) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

3. Integralni hisoblang:

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin x}{x^2+2x+2}dx$. b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$. v) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$. g) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}dx$.

4. Ko'rsatilgan sohalarda tenglamaning ildizlari sonini toping:

a) $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0 \quad (|z|<1)$. b) $z^4-3z+1=0 \quad (|z|<1)$.

v) $2z^4-5z+2=0 \quad (|z|<1)$. g) $z^3-12z+2=0 \quad (|z|<2)$

14. Qoldiqlar nazariyasidan foydalanib integralni hisoblang.

1. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^4-z^3}$. 2. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{z\sin z dz}{1-e^z}$ 3. $\oint\limits_{|z|=3}\frac{z\cos\frac{1}{z-1}dz}{z^2+4}$ 4. $\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}dz}{(z-1)(z-2)}$

14. $\oint\limits_{|z|=2}z\sin\frac{z+1}{z-1}dz$ 6. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^3dz}{z^4-1}$ 7. $\oint\limits_{|z|=2}z\cos\frac{z}{z+1}dz$ 8. $\oint\limits_{|z|=1}\sin\frac{z}{z+1}dz$

9. $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{ctg}z dz}{z}$ 10. $\oint\limits_{|z|=n}\mathrm{tg}\pi z dz$ 11. $\oint\limits_{|z|=1}z^5\sin^5\frac{1}{z}dz$ 12. $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$

13. $\oint\limits_{C}\frac{zdz}{(z-1)^2(z+2)}$, bunda C chiziq $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$ dan iborat. 14. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}dz}{1+z}$.

114. $\oint\limits_{|z|=\sqrt{3}}\frac{\sin\pi z dz}{z^2-z}$.

6. Qoldiqlar nazariyasidan foydalanib, quyidagi xosmas integrallarni hi soblang.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$. 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$. 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^4+6x^2+25)^2}$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4dx}{(a+bx^2)^4}$, $(a>0, b>0)$. 14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^6dx}{(x^4+a^4)^2}$, $(a>0)$. 6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+1)}$.

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2-x+2)dx}{x^4+10x^2+9}$. 8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4ix-5)^2}$. 9. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}$. (k o' r s a t m a : $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}$.)

10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad (a>0, b>0).$ 11. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^3}, \quad (a>0).$

7. Qoldiqlar nazariyasi va Jordan lemmasidan foydalanib, quyidagi xosmas integrallarni hisoblang. hi soblang.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}dx}{x^2-2ix-2}.$ 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}dx}{x^2-2ix+10}.$ 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2e^{ix}dx}{(x^4+6x^2+25)^2}.$

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+2)\sin 2xdx}{x^2-2x+2}$.(ko'rsatma $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+2)e^{2ix}dx}{x^2-2x+2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+2)\cos 2xdx}{x^2-2x+2}+i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+2)\sin 2xdx}{x^2-2x+2}$)

14. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos mxdx}{a^2+x^2}, \quad (a>0, m>0).$ (k o' r s a t m a: $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos mxdx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mxdx}{a^2+x^2}$)

6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{9+x^2}.$ 7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin xdx}{x^4+x^2+1}.$ 8. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3\sin axdx}{(x^2+1)^2}.$

9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)e^{ix}dx}{x^2-2x+2}.$ 10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos xdx}{(x^2-2x+10)^2}.$ 11. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}dx}{(x^2+4ix-5)^3}.$

12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-3)e^{ix}dx}{x^2-6x+109}.$ 13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)e^{-3ix}dx}{x^2-2x+5}.$ 14. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin mxdx}{x(x^2+1)}.$

114. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin xdx}{1+x^2}.$ 14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\cos xdx}{x^2-4x+5}.$

8. Qoldiqlar nazariyasi foydalanib, quyidagi aniq integrallarni hisoblang.

1. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{2+\cos\varphi}{4-\sin\varphi}d\varphi.$ 2. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{3+\cos\varphi}{5-\sin\varphi}d\varphi.$

3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{3+\cos\varphi}{6-\sin\varphi}d\varphi.$ 4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2}, \quad (0<p<1).$

14. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}, \quad (a>1).$ 6. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi}{a+b\cos\varphi}d\varphi, \quad (a>0, b>0).$

7. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos^2 3\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2}d\varphi, \quad (0<p<1).$ (k o' r s a t m a: $\cos 3\varphi$ va $\cos 2\varphi$ larni $\cos\varphi$ va $\sin\varphi$ orqali ifodalang.)

8. $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2p\sin\varphi+p^2}$, $(0<p<1)$. 9. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2+\cos\varphi}{4-\sin\varphi}d\varphi$.

10. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+a\cos\varphi}$, $(a>0)$.

15-amaliy mashg'ulot. Bir yaproqlilik tushunchasi, Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi. Konform akslantirish, Elementar funksiyalar (chiziqli, kasr-chiziqli, darajali), ko'rsatkichli, trigonometrik, eksponensial, logarifmik, Jukovskiy funksiyalari orqali konform akslantirish (2 soat)

Dars rejasi:

1. Bir yaproqlilik tushunchasi.
2. Hosila modulining geometric ma'nosi.
3. Hosila argumentining geometric ma'nosi.
4. Konform akslantirish.
5. 1,2-tur konform akslantirishlar.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Akslantirish, asli (proobraz), aksi (obraz), bir yaproqlilik, bir qiymatli, hosila argumenti, hosila moduli, konform akslantirish, burilish burchagi, chiziqlar orasidagi burchak, cho'zilish koeffisienti.*

Darsning tarkibiy qismlari

1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni

15.1.Darsning nazariy asosi

15.1-ta'rif. *Agar $w=f(z)$ funksiya E to'plamning turli xil nuqtalarida turli qiymatlar qabul qilsa, unga E to'plamda bir yaproqli deyiladi.*

Bir yaproqli $w=f(z)$ funksiya yordamidagi akslantirish o'zaro bir qiymatli bo'ladi va bir yaproqli deyiladi.

15.2-ta'rif. *$f(z)$ funksiya z_0 nuqtada bir yaproqli deyiladi, agar bu nuqtaning qandaydir atrofida bir yaproqli bo'lsa.*

15.1-teorema. *$f(z)$ regulyar funksiyaning $z_0 \neq \infty$ nuqtada bir yaproqli bo'lishi uchun $f'(z_0) \neq 0$ zarur va yetarlidir.*

$w = f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtada $f'(z_0)$ ($f'(z_0) \neq 0$) hosilaga ega bo'lsin. Funksiya hosilasining moduli $w = f(z)$ akslantirishda «cho'zilish» koeffisiyentini bildiradi (cho'zilishning saqlanishi).

15.3-ta'rif. *Agar $w = f(z)$ akslantirish D sohada bir yaproqli bo'lib, sohaning har bir nuqtasida konform bo'lsa, u D sohada konform akslantirish deyiladi.*

Ushbu

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

ko'rinishdagi funksiyaga kasr-chiziqli funksiya (kasr-chiziqli akslantirish) deyiladi.

15.1-lemma. $w = \frac{1}{z}$ ko'rinishdagi akslantirish $\overline{C}_z$ tekislikdagi aylana yoki to'g'ri chiziqni $\overline{C}_w$ tekislikdagi aylana yoki to'g'ri chiziqqa o'tkazadi.

15.2.Namunaviy yechilgan misollar

15.1--misol. $f(z) = z^2$ funksiyalrni bir yaproqlikka tekshiring.

Yechish. a) $f(z) = z^2$ funksiyani qaraylik. Bir yaproqlilik ta'rifidan agar $z_1^2 = z_2^2$ bo'lsa, bundan

$$z_1 = z_2 \quad \text{yoki} \quad z_1 = -z_2 .$$

tenglik bilan bog'langan ikki nuqta koordinata boshiga nisbatan simmetrikdir. $f(z) = z^2$ funksiya 0 nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtalar juftini saqlamaydigan D sohada bir yaproqlidir. Xususiy holda $f(z) = z^2$ funksiya $\operatorname{Im} z > 0$ yuqori yarim tekislikda bir yaproqli bo'ladi.

15.2--misol. $f(z) = e^z$ funksiyalarni bir yaproqlikka tekshiring.

Yechish. $f(z) = e^z$ akslantirish bir yaproqli bo'lishi uchun D soha qanoatlantirishi kerak bo'lgan shartni topamiz. Agar $e^{z_1} = e^{z_2}$, ya'ni $e^{z_1 - z_2} = 1$,

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \tag{15.1}$$

Bu akslantirish bir yaproqli bo'lishi uchun D soha (15.1) shartni qanoatlantiruvchi turli xil nuqtalar juftini saqlamasligi zarur va yetarlidir. Xususiy holda, $f(z) = e^z$ funksiya gorizontal $a < \operatorname{Im} z < b,\ 0 < b - a \leq 2\pi$ yo'lakda bir yaproqlidir.

15.3-misol. C_z tekislikdagi 1; i; -1 nuqtalarni mos ravishda C_w tekislikdagi 1; 0; -1 nuqtalarga akslantiruvchi kasr-chiziqli funksiyani toping.

Yechish. Kasr-chiziqli akslantirishning 5^0-xossasida keltirilgan

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

tenglikda

$$z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1$$

$$w_1 = -1,\ w_2 = 0,\ w_3 = 1$$

deb topamiz:

$$\frac{w-(-1)}{w-0}\cdot\frac{1-0}{1-(-1)} = \frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1} \Rightarrow w = \frac{z-i}{zi-1}.$$

Demak, izlanayotgan kasr chiziqli funksiya

$$w = \frac{z-i}{zi-1}$$

bo'ladi.

15.4--misol. Kompleks tekislik C_z da $z_1 = 1+i$ nuqta uchun ushbu $\{z \in C_z : |z| = 1\}$ aylanaga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtani toping.

Yechish. Izlanayotgan nuqtani z_1^* deylik. Bu nuqtani topishda

$$z_1^* - z_0 = \frac{r^2}{\overline{z_1 - z_0}}$$

formuladan foydalanamiz. $z_0 = 0$, $r = 1$ ekanligini e'tiborga olib

$$z_1^* = \frac{1}{\bar{z}_1}$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$z_1^* = \frac{1}{\bar{z}_1} = \frac{1}{\overline{1+i}} = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

ekan.

15.3.Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1. a) $w = 1-2iz$ akslantirishda $|z-1| < 2$ doiraning aksini toping.

b) $w = \frac{z+1}{z-2}$ akslantirishda $|z-1| < 2$ doiraning aksini toping.

v) $w = \frac{4z}{z+1}$ akslantirishda $\operatorname{Re} z < 1$ yarimtekislikning aksini toping.

g) $w = \frac{1-z}{1+z}$ akslantirishda $D = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ sohaning aksini toping.

2. $w = z^2$ akslantirishda quyidagi sohalarning aksini toping.

a) $\operatorname{Im} z > 0$. b) $\operatorname{Re} z > 0$. v) $|z| < 1,\ \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$. g) $|z| < 2,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi w(z) kasr-chiziqli funksiyani toping:

a) $w(0) = 4,\ w(1+i) = 2+i,\ w(2i) = 0$. b) $w(0) = 0,\ w(1+i) = 2+2i,\ w(2i) = 4$.

v) $w(i) = 2,\ w(\infty) = 1+i,\ w(-i) = 0$. g) $w(i) = 0,\ w(\infty) = 1, w(-i) = \infty$.

Javoblar:

1. a) $|w-1+2i|<4$. b) $|w-2|>4$. v) $|w-3|>1$. g) $-\frac{\pi}{2}<\arg w<0$.

2. a) $w \notin [0, +\infty]$. b) $w \in [-\infty, 0]$. v) $|w|<1$, $\frac{\pi}{2}<\arg w<\pi$ g) $|w|<4$, $\operatorname{Im} w>0$.

3. a) $w=2iz+4$, $|w-2|<2$. b) $w=\frac{2z}{z-1}$, $|w-2|>2$. v) $w=(1+i)\frac{z+i}{z-1}$, $|w-1|>1$.

g) $w=\frac{z-i}{z+i}$, $\operatorname{Im} w>0$.

4.Quyidagi funksiyalar qavs ichida ko'rsatilgan sohada bir yaproqli bo'lishini aniqlang:

1. a) $f(z)=z^2$ $\left(D:\left\{1<|z|<2,\ 0<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right\}\right)$. b) $f(z)=z+\frac{1}{z}$ $(D:\ |z|<1)$.

v) $f(z)=e^z$ $(D:\ |z|<4)$. g) $f(z)=z+\frac{1}{z}$ $(D:\ |z-i|<\sqrt{2})$.

Bir yaproqlilik tushunchasi, Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi. Konform akslantirish, Elementar funksiyalar (chiziqli, kasr-chiziqli, darajali), ko'rsatkichli, trigonometrik, eksponensial, logarifmik, Jukovskiy funksiyalari orqali konform akslantirish. (2 soat)

Dars rejasi:
1. Darajali funksiya orqali konform akslantirish.
2. Jukovskiy funksiyasi orqali konform akslantirish.

Mavzu bo'yicha adabiyotlar: [3], [4], [9], [13], [14]

Tayanch iboralar: *Darajali funksiya, Jukovskiy funksiyasi, konform Akslantirish doirani doiraga, nurni nurga akslantirish.*

Darsning tarkibiy qismlari
1. Tashkiliy qism (salomlashish, davomatni aniqlash va auditoriyaning darsga tayyorgarlik holati) 5 minut.
2. O'tilgan mavzuni mustahkamlash, uy vazifalarini tekshirish 20 minut.
3. Yangi mavzuning bayoni 50 minut.
4. Uy vazifalarini berish 5 minut.

Dars bayoni
15.1.Dartsning nazariy asosi.
Ushbu

$$w=z^n \tag{15.1}$$

ko'rinishdagi funksiya darajali funksiya (akslantirish) deyiladi, bunda n -natural son.

(15.1) funksiya butun C kompleks tekislikda regulyar, $n>1$ va $z\neq 0$ bo'lganda uning yordamida bajariladigan akslantirsh $C\setminus\{0\}$ to'plamning har bir nuqtasida konform akslantirish bo'ladi.

Ushbu

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

ko'rinishdagi funksiyaga Jukovskiy funksiyasi deyiladi.

15.2.Namunaviy myechilgan misollar

15.1--misol. Ushbu $w=z^3$ darajali funksiya yordamida C_z tekislikdagi

$$E=\left\{z\in C_z : 0<\arg z<\frac{\pi}{4}\right\}$$

to'plamning C_w tekislikdagi aksini toping.

Yechish. Berilgan E to'plamni

$$E=\left\{z\in C_z : \arg z=\frac{\pi}{4}\right\}=\left\{\varphi=\frac{\pi}{4},0<r<+\infty\right\}$$

deb,

$$w(E)=\left\{w\in C_w : \psi=3\cdot\frac{\pi}{4},0<\rho<+\infty\right\}=$$

$$=\left\{w\in C_w : \arg w=3\cdot\frac{\pi}{4}\right\}$$

bo'lishini topamiz.

15.2-misol. Jukovskiy funksiyasi yordamida C_z tekislikdagi

$$l=\left\{z\in C_z : |z|=1,\frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{7\pi}{4}\right\}$$

yoyning aksini toping.

Yechish. Ravshanki,

$$l=\left\{z\in C_z : |z|=1,\frac{5\pi}{4}<\arg z<\frac{7\pi}{4}\right\}=l=\left\{r=1\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}\right\}$$

Jukovskiy funksiysi xossalaridan uning haqiqiy va mavhum qismi uchun quyidagi tenglikni olamiz:

$$u=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\cos\varphi=\cos\varphi,\ v=\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin\varphi=0.$$

Agar $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$ bo'lganda $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\varphi<\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lishini e'tiborga olsak,

$$w(l)=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}<u<\frac{\sqrt{2}}{2},v=0\right\}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ekanini topamiz.

15.3.Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar:

1. $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ funksiya orqali akslantirishda quyidagi chiziqlarning aksini toping:

a) $|z|=1,\ \operatorname{Im} z>0$. b) $|z|=2$. v) $|z|=\frac{1}{2}$. g) $\arg z=\frac{\pi}{4}$.

2. $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ akslantirishda quyidagi sohalarning aksini toping:

a) $|z|>2$. b) $|z|<\frac{1}{2}$. v) $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$. g) $|z|<1,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.

3. $w=e^z$ funksiya orqali akslantirishda D sohaning obrazini toping:

a) $D:\ \{-\pi<\operatorname{Im} z<0\}$. b) $D:\ \{|z|<\pi\}$. v) $D:\ \left\{|z|<\frac{\pi}{2}\right\}$. g) $|z|<1,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.

Javoblar:

1. a) $\operatorname{Im} w=0,\ -1<\operatorname{Re} w<1$. b) $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2=1\quad (u=\operatorname{Re} w,\ v=\operatorname{Im} w)$.

v) $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2=1\quad (u=\operatorname{Re} w,\ v=\operatorname{Im} w)$. g) $u^2-v^2=\frac{1}{2},\ u>0\quad (u=\operatorname{Re} w,\ v=\operatorname{Im} w)$.

2. a) $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2>1\quad (u=\operatorname{Re} w,\ v=\operatorname{Im} w)$. b) $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2>1\quad (u=\operatorname{Re} w,\ v=\operatorname{Im} w)$.

v) $u^2-v^2<\frac{1}{2}\quad (u=\operatorname{Re} w,\ v=\operatorname{Im} w)$. g) $-\frac{\pi}{2}<\arg w<0$.

3. a) $\operatorname{Im} w<0$. b) $w\notin[-\infty,\ 0]$. v) $\operatorname{Re} w>0$. g) $|w|>1,\ w\notin[1,\ +\infty]$.

11. Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanidan talabalar mustaqil ishini tashkil qilish bo’yicha
ISHLANMA

Mustaqil ishni tashkil etish va nazorat qilish

Kadrlar tayyorlash milliy dasturining asosiy talablaridan biri tayyorlanayotgan mutaxassislarning chuqur nazariy va amaliy bilimlarga ega bo’lishi bilan bir qatorda o’z sohasi bo’yicha mustaqil faoliyat ko’rsata oladigan, o’z bilimi va malakasini mustaqil ravishda oshirib bora oladigan, sohasi bo’yicha muammoli vaziyatlarni to’g’ri aniqlab, to’g’ri tahlil qilib, to’g’ri qaror qabul qila oladigan, bozor iqtisodiyotining o’zgaruvchan sharoitiga tez moslasha oladigan, masalaga ijodiy yondashadigan shaxslar bo’lib yetishishidir.

Ikkinchi tomondan, har qanday soha bo’yicha axborot va bilimlar doirasi tez sur’atlar bilan kengayib borayotgan hozirgi sharoitda hamma ma’lumotlarni faqat dars mashg’ulotlari paytida berib bo’lmaydi.

Uchinchidan, tajriba ko’rsatadiki, talaba mustaqil ravishda shug’ullanganda va o’z ustida ishlagandagina bilimni chuqur o’zlashtirishi mumkin. Mustaqil ta’lim jarayonidagina talabalarning asosiy bilim, ko’nikma va malakalari shakllanadi, ijodiy ishga qiziqish paydo bo’ladi, mustaqil faoliyat ko’rsatish qobiliyati rivojlanadi. Shu sababli talabalarning mustaqil, o’qituvchilarning bevosita ishtirokisiz ta’lim olishlarini rejalashtirish, tashkil qilish va amalga oshirish, buning uchun barcha zaruriy imkoniyatlarni yaratish oliy ta’limning asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi. Qolaversa, dars mashg’ulotlari ham shunday tashkil qilinishi kerakki, talabalarni o’qitish bilan bir qatorda balki ko’proq ularni o’qishga o’rgatish, bilim olish yo’llarini ko’rsatish, mustaqil ta’lim olish uchun yo’llanma berish masalasi o’qituvchilarning diqqat markazida tursin.

Mustaqil ta’lim talabaning kafedra (o’qituvchi) tomonidan muayyan fan bo’yicha belgilangan topshiriqlarni o’qituvchining rahbarligida, lekin uning bevosita ishtirokisiz bajaradigan rejali ishidir.

Mustaqil ta’limni asosiy vazifalari quyidagilardan iborat:

- bilimlarni chuqurlashtirish va kengaytirish;
- ijodiy faoliyatga qiziqishni shakllantirish;
- ta’lim olish usullarini egallash;
- tushunish va fikrlash qobiliyatini rivojlantirish.

Talabada o’z qobiliyati va aqliy imkoniyatlariga ishonch uyg’otish, bosqichma-bosqich mustaqil bilim olishni to’g’ri tashkil qilishga o’rgatib borish lozim. Talabalarning mustaqil ravищda o’zlashtiriladigan bilimlari, ko’nikmalari mavzular bo’yicha oddiydan murakkabga yo’naltirilib boriladi. Mustaqil ta’limga ko’nika boshlagan talaba faqat rejalashtirilgan ishlarni bajaribgina qolmay, o’zining ehtiyoji, qiziqishi va qobiliyatiga qarab, o’zi zarur deb hisoblagan qo’shimcha bilimlarni ham mustaqil ravishda tanlab o’zlashtirishga o’rganib borishi lozim.

Talabalar mustaqil ishlarining shakli va hajmini belgilashda quyidagi jihatlar e'tiborga olinishi lozim:

- talabalar o'qishining bosqichi;
- muayyan fanning o'ziga xos xususiyati va o'zlashtirishdagi qiyinchilik darajasi;
- talabaning qobiliyati hamda nazariy va amaliy tayyorgarlik darajasi (tayanch bilimi);
- fanning axborot manbalari bilan ta'minlanganlik darajasi;
- talabaning axborot manbalari bilan ishlay olish darajasi.

Mustaqil bilim olishga namuna sifatida quyidagi topshiriqlarni keltirish mumkin:

Muammoli ma'ruza matnlari ustida ishlash.

Bunda o'rganiladigan materialning asosiy mazmuni berilib, ayrim holatlar savol tug'iladigan, munozaraga sabab bo'ladigan tarzda bayon qilinadi. Matnda munozara uchun savollar, maxsus topshiriqlar berilgan. Shuningdek, ma'ruza matnlarini talabadan to'ldirish, aniqlashtirish, qayta ishlab kelish, tahlil qilish, asoslab kelish talab qilinadigan shaklda tayyorlangan. Ma'ruza matnida albatta aniq darslik, o'quv qo'llanma va boshqa axborot manbalari, zarur hollarda ulardan foydalanish uchun ko'rsatmalar mavjud.

Mavzuni mustaqil o'zlashtirish.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fani o'zining o'qitilish xususiyatiga ko'ra boshqa fanlar uchun tayanch hisoblanadi. Shu maqsadda talabalarning bilim darajasi va qobiliyatiga qarab ishchi o'quv dasturida barcha mavzular yuzasidan talabalarga mustaqil ravishda o'zlashtirish uchun topshiriqlar rejalashtirilgan. Talabalar mustaqil ravishda qo'shimcha o'quv adabiyotlardan ushbu mavzuni konspektlashtiradi, tayanch iboralarning mohiyatini ochib berish va ular o'rtasidagi bog'liqlarni aniqlashtirishga asosiy urg'u bergan holda o'z-o'zini tekshirish savollariga ham javob tayyorlaydilar. O'zlashtirish qiyin bo'lgan, tushunmagan joylar yoki adabiyotlarni topish, konspektlashtirish, mavzuni tizimli bayon etish usullari bo'yicha kafedrada doimiy konsultasiya berish vaqti va o'qituvchisi belgilangan. Talaba mustaqil o'zlashtirilgan mavzusi bo'yicha tayyorlagan mustaqil ishini kafedrada komissiya ishtirokida bo'sh vaqtda himoya qiladi.

Mustaqil ta'lim mavzulari:

Mustaqil ta'lim uchun tavsiya etiladigan mavzular:

1. Stereografik proyeksiya.
2. Kasr chiziqli funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar.
3. Garmonik funksiyalar
4. Jukovskiy funksiyasi, darajali va ko'rsatkichli funksiyalar.

5. Trigonametrik funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar.

6. Koshi tipidagi integral.

7. Chegirmalar (qoldiqlar) yordamida xosmas integrallarni hisoblash

Mustaqil ta’limni bajarish uchun ko`rsatma.

1-mavzu: Stereografik proyeksiya.

Talaba ushbu mavzu orqali kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks sonning ko’rsatkichli va trigonometrik ko’rinishi. Kompleks sondan ildiz chiqarish. Kompleks sonlar ketma-ketligi. Soha va egri chiziq tushunchasi. Kompleks o’zgaruvchili funksiya. Differensillanuvchi funksiya. Analitik funksiya. Koshi- Riman shartlari. Hosilaning geometrik ma’nosi. Ba’zi elementar funksiyalarni konform akslantirish. Elementlar funksiyalar. Kompleks o’zgaruvchi bo’yicha integral. Koshi teoremasi va uning umumlashmasi. Koshining integral formulasi. Garmonik va qo’shma garmonik funksiyalar. Morera teoremasi. Liuvill teoremasi.

Qo’llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: 1, 2, 3, 4

2-mavzu: Kasr chiziqli funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar.

Talaba ushbu mavzu orqali tekis yaqinlashuvchi kompleks funksiyalar qatori. Veyershtrass teoremalari. Darajali qatorlar. Teylor qatori. Koshi tengsizligi va Liuvill teoremasi. Analitik funksiyaning nollari. Yagonalik teoremasi.

Qo’llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: 1, 2, 3, 4

3-mavzu: Garmonik funksiyalar

Talaba ushbu mavzu orqali tekis yaqinlashuvchi kompleks funksiyalar qatori. Veyershtrass teoremalari. Darajali qatorlar. Teylor qatori. Koshi tengsizligi va Liuvill teoremasi. Analitik funksiyaning nollari. Yagonalik teoremasi.

Qo’llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o’z-o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: 1, 2, 3, 4

4-mavzu: Jukovskiy funksiyasi, darajali va ko’rsatkichli funksiyalar.

Talaba ushbu mavzu orqali elementar funksiyalarni haqiqiy o’qdan kompleks tekislikga davom ettirish. Analitik davom ettirish. Riman sirti.

Qo’llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Pog’ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o’z- o’zini nazorat.*

Adabiyotlar: 1, 2, 3, 4

5-mavzu: Trigonometrik funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar.

Talaba ushbu mavzu orqali elementar funksiyalarni haqiqiy o'qdan kompleks tekislikga davom ettirish. Analitik davom ettirish. Riman sirti.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Pog'ona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z- o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: 1, 2, 3, 4

6-mavzu: Koshi tipidagi integral.

Talaba ushbu mavzu orqali soha va egri chiziq tushunchasi. Kompleks o'zgaruvchili funksiya. Differensillanuvchi funksiya. Analitik funksiya. Koshi- Riman shartlari. Hosilaning geometrik ma'nosi. Ba'zi elementar funksiyalarni konform akslantirish. Elementlar funksiyalar. Kompleks o'zgaruvchi bo'yicha integral. Koshi teoremasi va uning umumlashmasi. Koshining integral formulasi. Garmonik va qo'shma garmonik funksiyalar. Morera teoremasi. Liuvill teoremasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Bingo, blis, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: 1, 2, 3, 4

7-mavzu: Chegirmalar (qoldiqlar) yordamida xosmas integrallarni hisoblash

Talaba ushbu mavzu orqali bir qiymatli xarakterdagi yakkalangan maxsus nuqtadagi qoldiq. Qoldiqlar nazariyasining asosiy (Koshi) teoremasi. Qoldiqlar yordamida aniq integrallarni hisoblash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Ma'ruza, namoyish etish, savol-javob, "Bumerang", "Klaster", "Blis-so'rov", "Fikrlash xaritasi", "Veer", Charxpalak, B.B.B jadvali, kichik guruhlarda ishlash metodlari.*

Adabiyotlar: 2, 3, 4, 5, 6

O'ZLASHTIRISH NAZORATI:

Matematik analiz fanining mustaqil ish bo'yicha talabalar bilimini baholash mezonlari

Mustaqil ishni baholash (MB)

Talabalarni mustaqil ishlarini baholash har bir mustaqil ish mavzusini yakunlab topshirilgandan keyin amalga oshiriladi. Mustaqil ta'lim jarayonida ajratilgan topshiriq ishlarni viloyat, filial kutubxonalari yoki internetdan topib o'qiydi va qisqacha mazmunini qayd etib boradi hamda ko'rsatilgan shakllarda tayyorlab topshiriladi. Talaba tayyorlagan mustaqil ishini o'qituvchiga himoya qilib topshiradi va har bir mustaqil ish uchun ball to'plab boradi (maksimal ball 20 ball). Shu tariqa, talaba har bir mustaqil ishini baholashda quyidagicha ball to'plashi mumkin:

	Mustaqil ishni baholashga qo'yiladigan talablar	Ball
1	**Mavzuning yoritilishi:** **a) mavzuning keng yoritilishi**	7

	b) kutubxona va internet ma’lumotlaridan foydalanganligi **c) Teoremalarni to‘liq isbotlab berishi** **d) mavzu bo‘yicha kamida misol va masasalar yechish**	
2	**Savollarga og’zaki javob:** **a) berilgan barcha savollarga javob berish** **b) qisman xatoga yo’l qo’yish** **c) qisman to’g’ri javob berish**	8
	Jami	15

Semestrlar bo'yicha mustaqil ish uchun talabalar bilimini nazorat qilish turlari

Semestr	Nazorat turi	Soat	Maksimal ball	O‘tish ball
1	Mustaqil ish №1	12	2	1.2
	Mustaqil ish №2	12	2	1.2
	Mustaqil ish №3	12	2	1.2
	Mustaqil ish №4	12	2	1.2
	Mustaqil ish №5	12	2	1.2
	Jami	60	10	6
2	Mustaqil ish №1	12	2	1.2
	Mustaqil ish №2	12	2	1.2
	Mustaqil ish №3	12	2	1.2
	Mustaqil ish №4	12	2	1.2
	Mustaqil ish №5	12	2	1.2
	Jami	60	10	6

Har bir mustaqil ishni baholash mezoni

Qoniqarsiz (0-59%)	Qoniqarli (60-69%)	Yaxshi (70-89%)	A’lo (90-100%)
Ballar			
0-1.1	1.2-1.38	1.39-1.78	1.8-2
Mavzu deyarli yoritilmagan, kutubxona va internat ma’lumotlaridan noto’g’ri foydalanilgan, mavzu yuzasidan qo‘shimcha misollar ishlanmagan.	Mavzu keng yoritilmagan, kutubxona va internat ma’lumotlaridan qisman foydalanilgan, mavzu yuzasidan qo‘shimcha misollar qisman to‘g‘ri	Mavzu keng yoritilgan, kutubxona va internat ma’lumotlaridan qisman foydalanilgan, mavzu yuzasidan qo‘shimcha misollar qisman to‘g‘ri	Mavzu keng yoritilgan, kutubxona va internat ma’lumotlaridan keng foydalanilgan, mavzu yuzasidan qo‘shimcha misollar to‘g‘ri ishlangan. Mustaqil ish

Mustaqil ish bo‘yicha o‘g‘zaki savollarga umuman to’g’ri javob berilmagan	ishlangan. Mustaqil ish bo‘yicha o‘g‘zaki savollarga xatoga yo‘l qo‘yilgan	ishlangan. Mustaqil ish bo‘yicha o‘g‘zaki savollarga deyarli to‘liq javob berilgan	bo‘yicha o‘g‘zaki savollarga to‘liq javob berilgan

“Matematik analiz” fani bo‘yicha talabalar bilimini baholash va nazorat mezonlari

№	Nazorat turlari	Nazorat shakli	Ajratilgan ballar	
			Eng yuqori ball	Umumiy ball
1	Joriy nazorat	Amaliyot mashg‘ulotda talabaning faolligi	20	20
2	Oraliq nazorat	Yozma ish yoki Test	10	30
		Mustaqil ish	20	
3	Yakuniy nazorat	Yozma ish yoki Test	50	50
	Jami		100	100

12.1. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanidan nazorat ishlari ishlanmasi

1. Joriy va oraliq baholash uchun variant namunalari

Variant №1

1. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks sonning geometric va trigonometrik tasviri.
2. Kompleks qiymatli funksiyaning uzluksizlik va tekis uzluksizlik tushunchalari. Kantor teoremasi
3. Koshining integral formulasi yordamida $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{z^2+2}$ integralni hisoblang.
4. $(1+i)^8\left(2-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-5}$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.

Variant № 2

1. Ketma-ketlikning limitik nuqtasi. Bolsano-Veyershtrass teoremasi.
2. Darajali qatorlar. Abelning birinchi teoremasi va Koshi-Adamar formulasi.
3. Integralni hisoblang $\int\limits_{|z|=3} \frac{z^3 dz}{(z+i)^3}$
4. $z^3 = -2+2i$ tenglamaning barcha yechimlarini toping.

Variant №3

1. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari. Koshi kriteriyasi.
2. Ko'rsatkichli, trigonometrik va giperbolik funksiyalar. Eyler formulalari.
3. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasidan foydalanib $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}dz$ integralni hisoblang.
4. $\left(\frac{i^{2007}+1}{i^{57}+1}\right)^2$ kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismini toping.

Variant №4

1. Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri. Cheksiz uzoqlashgan nuqta.
2. Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi.
3. $z=0$ nuqtaning atrofida regulyar va $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n^3}$ shartni qanoatlantiruvchi $f(z)$ funksiya mavjudmi?
4. $f(z)=\frac{1}{1+z+z^2}$ funksiyani $z=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

Variant № 5

1. Sonli qatorlar. Qatorlar ustida amallar.

2. Bir bog'lamli soha uchun Koshining integral formulalari.
3. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasidan foydalanib $\int\limits_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^3}dz$ integralni hisoblang.
4. $|\operatorname{Im} z|<1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamining geometrik talqinini bering.

Variant № 6

1. Funksional qatorlar. Qator tekis yaqinlashishining yetarli sharti.

2. Regulyar funksiyaning ajralgan maxsus nuqtalari. Qutb va muhim maxsus nuqtalar.
3 $|\operatorname{Im}(z-2i)|<3$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks tekislikdagi barcha no'ktalar to'plamini geometrik talqinini bering.
4. $\left(\frac{i^{2011}+1}{i^{143}+1}\right)^3$ kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismini toping.

Variant №7

1. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.
2 Darajali qatorlar. Abelning birinchi teoremasi va Koshi-Adamar formulasi.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{3n^n} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
4. Kompleks parametr a ning qanday qiymatlarida $\left\{ \frac{a^n}{1+a^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik yaqinlashadi.

Variant № 8

1. Kompleks o’zgaruvchili funksiya va soha tushunchalari.. Jordan chizig’i.

2. Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyish. Morero va Veyershtrass teoremalari.
3. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} + i\frac{n^3}{n^3+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning limitik nuqtasini toping xamda yaqinlashuvchilikka tekshiring.
4. $f(z) = |z|^2$ funksiya differensialanuvchi bo’ladigan nuqtalar to’plamini toping va hosilasini hisoblang.

Variant № 9

1. Kompleks o’zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Hosila mavjud bo’lishining zaruriy va yetarli shartlari.

2. Qoldiqlar nazariyasini aniq integrallarni hisoblashga tadbiqi. Jordan lemmasi
3. $z=0$ nuqta atrofida regulyar va $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^6}$ (n=1,2,3, …) shartlarni qanoatlantiruvchi $f(z)$ funksiya mavjudmi?
4. $z = \frac{(1-i)^{15}}{(1+i)^{17}}$ kompleks sonning haqiqiy va mavxum qismlarini toping.

Variant № 10

1.Kompleks o’zgaruvchili funksiyalarning uzluksizlik va tekis uzluksizlik tushunchalari.
Kantor teoremasi.
2. Bir bog’lamli soha uchun Koshining integral formulalari.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-2n)^{-n}n^5z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
4. $z=(1+i^{2001})^5$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.

Variant № 11

1. Ko’p bog’lamli sohalar uchun Koshining integral formulalari.

2. Loran qatori. Uning regulyar va asosiy qismi hamda yagonaligi.
3. Koshining integral formulasidan foydalanib $\int\limits_{|z-1|=1}\frac{z^2\sin z}{(z-1)^2}dz$ integralni hisoblang.
4. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{2n}{3n+5}+i^n\frac{7n}{n^3+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning limitik nuqtasini toping hamda yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Variant №12

1. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.
2 Darajali qatorlar. Abelning birinchi teoremasi va Koshi-Adamar formulasi.
3. Koshining integral formulasi yordamida $\int\limits_{|z-1|=3}\frac{z^5(z+2)^2dz}{(z+1)^4}$ integralni hisoblang.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.

Variant № 13

1. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari. Koshi kriteriyasi.
2. Ko'rsatkichli, trigonometrik va giperbolik funksiyalar. Eyler formulalari.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{(2n+6)!} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
4. $z^3 = -1 + i$ tenglamaning barcha yechimlarini toping.

Variant № 14

1. Kompleks sonlarning Riman sferasidagi tasviri. Cheksiz usoqlashgan nuqta.

2. Oddiy kontur uchun Koshining integral teoremasi.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)^n}{(6n+1)!} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
4. Koshining integral formulasi yordamida $\int\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{z^4 - 1}$ integralni hisoblang.

Variant №15

1. Funksional qatorlar. Qator tekis yaqinlashishining yetarli sharti.

2. Regulyar funksiyaning ajralgan maxsus nuqtalari. Qutb va muhim maxsus nuqtalar.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(5n!)^2} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
4. Koshining integral formulasi yordamida $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{zdz}{(z+1)(z-1)^3}$ integralni xisoblang.

Variant № 16

1. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Hosila mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari.

2. Qoldiqlar nazariyasini aniq integrallarni hisoblashga tadbiqi. Jordan lemmasi
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n}{(3n+2)!} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
4. $z^4 = 1$ tenglamaning barcha ildizlarini toping.

Variant № 17

1. Kompleks sonning moduli va argumenti xaqidagi teoremalar. Muavr formulasi.
2. Loran qatori. Uning regulyar va asosiy qismi hamda yagonaligi.
3. Koshining integral formulasi yordamida $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{(z+2)\sin z dz}{(z+1)^4}$ integralni hisoblang.
4. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} + i^n \frac{n^3}{n^3+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning limitik nuqtasini toring xamda yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Variant № 18

1. Kompleks o’zgaruvchili funksiya tushunchasi. Soha tushunchasi. Jordan chizig’i.
2. Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyish. Morero va Veyershtrass teoremalari.
3. Koshining integral formulasi yordamida $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4-1}$ integralni hisoblang.
4. $z = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^7}$ kompleks sonning haqiqiy va mavxum qismlarini toping.

Variant № 19

1. Kompleks o’zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Hosila mavjud bo’lishining zaruriy va yetarli shartlari.
2. Qoldiqlar nazariyasini aniq integrallarni hisoblashga tadbiqi. Jordad lemmasi
3. $z=0$ nuqta atrofida regulyar va $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = -\frac{2}{n^7}$ (n=1,2,3, …) shartlarni qanoatlantiruvchi $f(z)$ funksiya mavjudmi?
4. $z^5 = 1 - i\sqrt{3}$ tenglamaning barcha ildizlarini toping.

Variant № 20

1. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalari. Koshi kriteriyasi.
2. Ko'rsatkichli, trigonometrik va giperbolik funksiyalar. Eyler formulalari.
3. Koshining integral formulasi yordamida $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{z\cos z dz}{(z+1)^3}$ integralni hisoblang.
4. $z=(1+i^{2013})^{15}$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.

Variant № 21

1. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi. Qoldiqlarni hisoblash formulalari.
2 Darajali qatorlar. Abelning birinchi teoremasiva Koshi-Adamar formulasi.
3. Koshining integral formulasi yordamida $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{(z+2)\sin z dz}{(z+1)^4}$ integralni hisoblang.
4. $z=\frac{(1-i)^{15}}{(1+i)^{27}}$ kompleks sonning haqiqiy va mavxum qismlarini toping.

Variant № 22

1. Uzluksizlik va tekis uzluksizlik tushunchalari. Kantor teoremasi.
2. Bir bog'lamli va ko'p bog'lamli sohalar uchun Koshining integral formulalari.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(3n+2)!} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
4. $z^4=1$ tenglamaning barcha ildizlarini toping.

Variant № 23

1. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. (kompleks son, mavhum birlik, xaqiqiy va mavhum qism, qo'shma kompleks son, algebraik, trigonometrik va ko'rsatkichli shakl, modul, argument)
2. $f(z)=\frac{z^2(z^2+2z-3i)}{\sin^2 z}$, $f(0)=-3i$ funksiyaning aniqlanish sohasini, uzluksizlik va uzulish nuqtalarini toping.
3. $f(z)=\frac{1}{(z+3)(z-4)}$ funksiyani $3<|z|<4$ xalqada Loran qatoriga yoying.
4.Koshining integral formulasi yordamida $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{(z^2-2)^2}$ integralni hisoblang.

Variant № 24

1. Kompleks sondan n-darajali ildiz chiqarish. (kompleks son, mavhum birlik, modul, argument, Muavr formulasi, n-darajali ildiz)
2. $f(z)=\frac{z^3(z^2+z-i)}{\sin^3 z}$, $f(0)=1-i$ funksiyaning aniqlanish sohasini, uzluksizlik va uzulish nuqtalarini toping.

3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(2^n+5^{-|n|})z^n$ Loran qatori yaqinlashuvchi bo'ladigan nuqtalar to'plamini toping.

4. Integralni xisoblang $\int\limits_{|z-1|=2}\frac{z^3}{(z^2+1)^2}dz$

Variant №25

1. Kompleks sonlar ketma-ketligi. Koshi kriteriyasi. Veyershtrass teoremasi (kompleks sonlar ketma-ketligi, limitik nukta, limit, chegaralanganlik, yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi ketma-ketliklar, Koshi kriteriyasi, Veyershtrass teoremasi)

2. $(1+i)^{10}\left(2-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-8}$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.

3. $z=0$ nuqtaning atrofida regulyar va $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4n-5}$ shartni qanoatlantiruvchi $f(z)$ funksiya mavjudmi?

4. Tenglamani yeching $z^4=-16i$.

Variant № 26

1. Riman sferasida kompleks sonlarning tasvirlanishi (kompleks sonlar (yoki Riman) sferasi, kengaytirilgan kompleks tekislik, cheksiz uzoklashgan nukta, stereografik proyeksiya)

2. $f(z)=\frac{z^3-1}{(z-4)(z^2-1)}$ funksiyaning aniklanish soxasini toping va shu soxada uzluksizlikka tekshiring.

3. $f(z)=\frac{1}{z(z-3)}$ funksiyani $z_0=1$ ning atrofida $1\le|z-1|<2$ xalqada Loran qatoriga yoying.

4. $z=(\sqrt{3}+i)^{100}$ kompleks son argumenti va modulini toping.

Variant № 27

1. Kompleks sonlar katori, yakinlashishi, absolyut yakinlashishi va xosalari. Koshi kriteriyasi (kompleks sonlar katori, yakinlashishi, yigindi, absolyut yakinlashishi, Koshi kriteriyasi, kator yakinlashishining yetarli sharti)

2. $z^3 = 1 - i$ tenglamaning barcha yechimlarini toping.

3. Koshining integral formulasi yordamida $\int\limits_{|z+i|=3} \cos z \dfrac{dz}{z+i}$ ni hisoblang.

4 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$ funksiyaning barcha chekli maxsus nuqtalardagi qoldiglarini hisoblang.

Variant №28

1. Kompleks tekislikda chiziq va soha. Haqiqiy o'zgaruvchining kompleks qiymatli funksiyasi.

2. $\left(\dfrac{i^{2001}-1}{i^{43}+1}\right)^3$ kompleks sonning haqiqiy va mavxum qismini toping.

3. $f(z) = \dfrac{1}{1-z+z^2}$ funksiyani $z=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

4.Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasidan foydalanib $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\cos 2z}{z^3} dz$ integralni hisoblang.

Variant №29

1. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning limiti. Uzluksizlik, tekis uzluksizlik

2. $f(z) = z^2 \operatorname{Im} z$ funksiya differensiallanuvchi bo'ladigan nuqtalar to'plamini toping.

3. $z=0$ nuktaning atrofida regulyar va $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{3n+5}$ (n=1,2,…) shartni qanoatlantiruvchi $f(z)$ funksiya mavjudmi?

4. Tenglamani yeching: $z^6 = -i + 1$

Variant №30

1. Ko'rsatkichli, trigonometrik va giperbolik funksiyalar. (ko'rsatkichli, trigonometrik, giperbolik funksiyalar, xossalari)

2. $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \pi$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamining geometrik o'rnini bering.

3. $\varphi(x,y) = xy + x$ ko'rinishda beriluvchi garmonik funksiyani toping.

4. $f(z)=\dfrac{2}{(z-3)(z+4)}$ funksiyani $3<|z|<4$ xalqada z ning darajasi bo'yicha Loran qatoriga yoying.

12.2. Yakuniy baholash uchun variant namunalari

Variant № 1

1. Kompleks sonlarning geometrik tasviri. Modul va argument haqidagi teorema.
2. $z^6=64$ tenglamaning barcha yechimlari topilsin.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,e^{-nz}\,(E:\operatorname{Re}z>\delta>0)$ qatorning tekis yaqinlashishi isbotlansin.
4. Integral hisoblansin: $\int\limits_{|z|=2}\dfrac{\sin z dz}{z^2+1}$

Variant № 2

1. Muavr formulasi va n-chi tartibli ildiz chiqarish formulasi isbotlansin.
2. $f(z)=e^{-\frac{1}{|z|^2}}$ funksiya $0<|z|<1$ halqada tekis uzluksiz bo'ladimi?
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^n+z^{-n}}(E:|z|\le\rho<1/2).$ qatorning tekis yakinlashishi isbotlansin.
4. Integral hisoblansin: $\int\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z^2-1}dz$

Variant № 3

1. Bolsano-Veyershtrass teoremasi va uning isboti.
2. $z^4+1=0$ tenglamani yeching.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-z}(E:\operatorname{Re}z\ge\delta>1).$ qatorning tekis yakinlashishi isbotlansin.
4. Integral hisoblansin: $\int\limits_{|z|=1/2}\dfrac{e^z dz}{z^2(1-z)}$

Variant № 4

1. Koshi kriteriyasi va uning isboti.
2. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}(1-e^{i\varphi}+e^{2i\varphi}-...+(-1)^n e^{in\varphi})\right\},\ -\pi<\varphi<\pi$ ketma- ketlikning yaqinlashishi isbotlansin va limiti topilsin.

3. $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ funksiya $0<|z|<1$ halqada tekis uzluksiz bo'ladimi?

4. $z=0$ nuqtaning biror atrofida regulyar va $f(\frac{1}{n})=e^{-n}$ shartni qanoatlantiruvchi f funksiya mavjudmi ?

Variant № 5

1. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti. Absolyut yaqinlashuvchi qator. Absolyut yaqinlashuvchi qator haqidagi teorema.

2. $f(z)=\sin\dfrac{1}{1+z}$ funksiya $0<|z|<1$ halqada tekis uzluksiz bo'ladimi?

3. $\{z_n\}_{n-1}^{\infty}=\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n+1}{n}i\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma- ketlikning limitik nuxtalari topilsin.

4. Integral hisoblansin: $\displaystyle\int_{|z-1|=1/2}\frac{e^z dz}{z(z-1)^3}$

Variant № 6

1. Qarrali qator haqidagi teorema. Qatorlarni hadlab ko'paytirish haqidagi teorema.

2. a parametrining qanday qiymatlarida $\{1+a+...+a^n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi?

3. $f(z)=\dfrac{z^3-1}{(z-4)(z^2-1)}$ funksiyani aniqlanish soxasida uzluksizlikka tekshiring.

4. Integral hisoblansin: $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin z^2}{z^2(z-5)}\,dz$

Variant № 7

1. Qatorlarni hadlab qo'shish va ayirish xaqidagi teorema. Qator xadlarning o'rnini almashtirish xaqidagi teorema.

2. $\mathrm{Re}(1/z)<1/2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z nuqtalarning geometrik o'rni topilsin.

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+z)\ln^2 n}$, $z\neq-2,-3,-4,...$. qatorning absolyut yaqinlashishi topilsin.

4. Integral hisoblansin: $\displaystyle\int_{|z-i|=1}\frac{\sin 2\,(z-1)}{(z-i)^2(z+6)}\,dz$

Variant № 8

1. Komples o'zgaruvchining funksiyasi, soha, Jordan chizig'i tushunchalari.
2. $\left\{\frac{1}{n}(1+e^{i\varphi}+...+e^{in\varphi})\right\}, 0<\varphi<2\pi,$ ketma-ketlikning yaqinlashishi isbotlansin va limiti topilsin.
3. $f(z)=\cos\frac{1}{1-z}$ funksiya $0<|z|<1$ xalqada tekis uzluksiz bo'ladimi?
4. Integral hisoblansin: $\int\limits_{|z+i|=1}\frac{\cos(2z+1)}{(z+i)^2(z-5)}dz$

Variant № 9

1. Geyne-Borel lemmasi va uning isboti.
2. $|z-i|+|z+i|<4$ tensizlikni qanoatlantiruvchi z nuxtalar to'plamining geometrik o'rni topilsin.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n, |z|<e.$ qatorning absolyut yaqinlashishi isbotlansin.
4. $z=0$ nuqtaning biror atrofida regulyar va $2^{-n}<\left|f(\frac{1}{n})\right|<2^{1-n}$

shartni qanoatlantiruvchi f funksiya mavjudmi ?

Variant № 10

1. Kantor teoremasi va uning isboti.
2. $-Cos\frac{\pi}{7}+i\,Sin\frac{\pi}{7}.$ kompleks sonning moduli va argumenti topilsin.
3. α haqiqiy parametrning qanday qiymatlarida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}e^{in}$ sonnli qator yaqinlashuvchi bo'ladi?
4. Integral hisoblansin: $\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z^2}{z^2(z+5)}dz$

Variant № 11

1. Funksional qator yig'indisining uzluksizligi xaqidagi teorema.
2. $|z-i|>1$ tensizlikni qanoatlantiruvchi z nuxtalarning geometrik o'rni topilsin.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(n!)^2}\,\frac{z^n}{1+z^n},\ |z|<\frac{1}{4}$ qatorning absolyut yaqinlashishi topilsin.
4. $f(z)=\cos\frac{2}{1-z}$ funksiya $0<|z|<1$ halqada tekis uzluksiz bo'ladimi?

Variant № 12

1. Funksional qatorning tekis yaqinlashish alomati va uning isboti.
2. $1+Cos\frac{\pi}{7}+i\,Sin\frac{\pi}{7}$. kompleks sonning modul va argumenti topilsin.
3. $f(z)=\frac{z^3+1}{(z-2)(z^2+1)}$ funksiyani aniqlanish sohasida uzluksizlikka tekshiring.
4. Integral hisoblansin: $\int\limits_{|z|=1/2}\frac{e^{z^2}}{z(1-z)^2}\,dz$

Variant № 13

1 Darajali qator. Abelning birinchi teoremasi.
2. $f(z)=\begin{cases}\frac{z^3+8}{z+2}, & z\neq-2\\ 1+i, & z=-2\end{cases}$ funksiyani aniqlanish sohasida uzluksilikka tekshiring.
3. $f(z)=\frac{\cos z}{Cos\,z-Sin\,z}$ funksiya qayerda differensiallanuvchi va hosilasi nimaga teng?
4. $z=0$ nuqtaning biror atrofida regulyar va $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=tg\,(\frac{1}{n^3})$ shartni qanoatlantiruvchi f funksiya mavjudmi ?

Variant № 14

1. Koshi – Adamar formulasi.
2. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(z-2)}{3(z-2)}, & z\neq 2\\ e, & z=2\end{cases}$ funksiyani aniqlanish sohasida uzluksilikka tekshiring.
3. $f(z)=\dfrac{1}{tg\,z+ctg\,z}$ funksiya qayerda differensiallanuvchi va hosilasi nimaga teng?

4. Integral hisoblansin: $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=2}\frac{\cos z}{(z+i)^2(z+4)}\,dz$

Variant № 15

1. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Differensiallash qoidalari.
2. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3-8}{z-2}, & z\neq 2\\ 4+i, & z=2\end{cases}$ funksiyani aniqlanish sohasida uzluksilikka tekshiring.
3. $f(z)=\dfrac{tg\,2z}{z^3-8}$ funksiya qayerda differensiallanuvchi va hosilasi nimaga teng?

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!\,e^{-n\alpha}z^n\ ,\alpha>1$ qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

Variant № 16

1. Iosila mavjudligining zaruriy sharti.
2. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{Sin(z+2)}{4(z+2)}, & z\neq -2\\ 1+2i, & z=-2\end{cases}$ funksiyani aniqlanish sohasida uzluksilikka tekshiring
3. $f(z)=\dfrac{ctg\,z}{z^3+1}$ funksiya qayerda differensiallanuvchi va hosilasi nimaga teng?
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\,z^n$ qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

Variant № 17

1. HIosila mavjudligining yetarli sharti.
2. $f(z)=\begin{cases}\dfrac{e^z-1}{z}, & z\neq 0\\ 1+i, & z=0\end{cases}$ funksiyani aniqlanish sohasida uzluksilikka tekshiring
3. $f(z)=(z^3+3z+1)\ Sec\,z$ funksiya qayerda differensiallanuvchi va hosilasi nimaga teng?

4. Integral hisoblansin: $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2}\frac{\cos(2z^2)}{(z-2i)^2(z+1)}\,dz$

Variant 18

1. Halqada regulyar funksiyalarni Loran qatoriga yoyish haqidagi Loran teoremasi va uning isboti.
2. Qutb maxsus nuqtada qoldiqni hisoblash formulasi va uning isboti.
3. $f(z)=\dfrac{z^7}{(z-2)(z^2+1)}$ funksiyaning barcha maxsus nuqtalaridagi qoldiqlarni hisoblang.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Variant 19

1. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasi va uning isboti.
2. Loran qatorining yagonaligi va uning isboti.
3. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$ funksiyaning barcha maxsus nuqtalaridagi qoldiqlari hisoblansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+1)}$.

Variant 20

1. Muhim maxsus nuqta va cheksizda qoldiqni hisoblash formulalari va ularning isboti.
2. Loran qatorining regulyar va bosh qismlari nimalardan iborat?
3. $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{(z^4}$ funksiyaning barcha maxsus nuqtalardagi qoldiqlari hisoblansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{|z|=1} z^3\sin^5\dfrac{1}{z}dz$.

Variant 21

1. Berilgan cheksiz oraliq bo'yicha haqiqiy funksiyaning integrali qanday hisoblanadi?
2. Jordan lemmasi nimadan iborat va qanday isbotlanadi?
3. $f(z)=z^5\sin\dfrac{1}{z}$ funksiyaning barcha maxsus nuqtalardagi qoldiqlari hisoblansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{dz}{z^4-z^3}dz$.

Variant 22

1. Logarifmik qoldiq haqidagi teorema nimadan iborat va u qanday isbotlanadi?
2. Chekli va cheksiz nuqtalardagi qoldiq qanday aniqlanadi?
3. $\operatorname{rez}_{z=\infty} z^4 \sin^5 \frac{1}{z}$ qoldiq hisoblansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}dx}{x^2-2x+2}$.

Variant 23

1. Rushe teoremasi va uning isboti.
2. Berilgan chekli oraliq bo'yicha haqiqiy funksiyaning integrali qanday hisoblanadi?
3. $\operatorname{rez}_{z=-1} z\cos\frac{z}{z+1}$ qoldiq hisoblansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4+10x^2+9}$.

Variant 24

1. Argument prinsipi nima va u qanday keltirib chiqariladi?
2. Loran qatori qayerda tekis yaqinlashadi?
3. $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}$ funksiyani $1<|z|<2$ halqada Loran qatoriga yoying.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2-2ix-2}$.

Variant 25

1. Modulning maksimum prinsipi nimadan iborat va u qanday isbotlanadi?
2. Shvars lemmasi nima haqida va u qanday isbotlanadi?
3. $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ funksiyani $1<|z|<2$ halqada Loran qatoriga yoying.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{|z|=1} \frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz$.

Variant 26

1. Hosila argumentining geometrik ma'nosi nima va u qanday isbotlanadi?
2. Darajali funksiya va unga teskari funksiya qanday akslantirishlarni amalga oshiradi?
3. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)}$ funksiyani $1<|z|<2$ halqada Loran qatoriga yoying.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{x^4+6x+25}$.

Variant 27

1. Hosila modulining geometrik ma'nosi nima?
2. I tur va II tur konform akslantirishlarning umumiy ko'rinishi?
3. $f(z)=\dfrac{z^3}{(z^2+1)(z^2-4)}$ funksiyani $1<|z|<2$ halqada Loran qatoriga yoying.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{(x^2+4ix-5)^3}$.

Variant 28

1. Chiziqli akslantirishning asosiy xossalarini isbotlang?
2. Konform akslantirishga doir ba'zi muhim teoremalarni keltiring?
3. $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-1)(z^2+4)}$ funksiyani $1<|z|<2$ halqada Loran qatoriga yoying.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{(x^2+4ix-5)^2}$.

Variant 29

1. Kasr-chiziqli akslantirishning I xossasini isbotlang?
2. Cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi burchak qanday kiritiladi?
3. $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}, n\in \mathrm{N}$ funksiyani barcha maxsus nuqtalardagi qoldiqlari hisoblansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{|z|=3}\dfrac{z\cos\dfrac{1}{z-1}}{z^2+4}dz$.

Variant 30

1. Kasr-chiziqli akslantirishning II-III xossalarini isbotlang?
2. Qachon akslantirish nuqtada (sohada) konform deyiladi?
3. $f(z)=\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{(z^4+1)^2}$ funksiyaning barcha maxsus nuqtalari topilsin va ularning turi aniqlansin.
4. Integralni hisoblang: $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}dz$.

Variant 31

1. Ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar orqali qanday akslantirishlarni amalga oshirish mumkin?
2. Loran qatorining yagonaligi nimani anglatadi?
3. $\operatorname{rez}_{z=-1} z^2\sin\dfrac{\pi}{z+1}$ qoldiq hisoblansin.
4. Integralni hisoblang: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}$.

Variant 32

1. Haqiqiy ratsional funksiyalarning cheksiz interval bo'yicha olingan xosmas integralini qanday hisoblash mumkin?
2. Rushe teoremasidan foydalanib algebraning asosiy teoremasini isbotlang.
3. $f(z)=\dfrac{1}{1-e^z}$ funksiyaning barcha maxsus nuqtalardagi qoldiqlari hisoblansin.
4. Integralni hisoblang: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-3)e^{ix}dx}{x^2-6x+109}$.

Variant 33

1. Jukovskiy funksiyasi va unga teskari funksiya qanaqa akslantirishni amalga oshiradi?
2. Jukovskiy funksiyasi qnday to'plamlarda bir yaproqli bo'ladi?
3. $f(z)=\operatorname{ctg}z-\dfrac{2}{z}$ funksiyaning maxsus nuqtalari topilsin va ularning turi aniqlansin.
4. Integralni hisoblang: $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^3+1}{z^4-1}dz$.

Variant 34

1. Trigonametrik funksiyalar orqali aksantirishlarni qanday amalga oshirish mumkin?
2. Sohalarni bir-biriga elementar funksiyalar yordamida konform akslantirish qanaqa go'yaga asoslangan?
3. $f(z)=\sin\frac{1}{\frac{1}{z}}$ funksiyaning maxsus nuqtalari topilsin va ularning turi aniqlansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{x^2+1}$.

Variant 35

1. Giperbolik funksiyalar orqali aksantirishlarni qanday amalga oshirish mumkin?
2. Yuqori yarim tekislikni birlik doiraga konform akslantirishning umumiy ko'rinishi qanaday topiladi?
3. $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$ funksiyaning maxsus nuqtalari topilsin va ularning turi aniqlansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz$.

Variant 36

1. Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyish haqidagi teorema va uning isboti.
2. Nuqtada (sohada) analitiklik va regulyarlik tushunchalarining ekvivalentligi isbotlansin.
3. $f(z)=\frac{1-e^{z^2}}{z^8}$ funksiyaning barcha maxsus nuqtalardagi qoldiqlari hisoblansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+8)^3}$.

Variant 37

1. Yagonalik teoremasi va uning isboti.
2. Darajali qator koeffisientlari uchun Koshi tengsizligi.
3. $f(z) = \dfrac{\sin\frac{1}{z}}{[z(z^2+1)]^2}$ funksiyaning maxsus nuqtalari topilsin va ularning turi aniqlansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x\sin x dx}{x^2+1}$.

Variant 38

1. Bir nuqtada maxsuslikni yo'qotish haqidagi teorema va uning isboti .
2. Liuvill teoremasi va uning isboti.
3. $f(z) = \dfrac{1}{\cos z - \cos\alpha}, (\alpha = const)$ funksiyaning maxsus nuqtalari topilsin va ularning turi aniqlansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{|z|=2} \sin\dfrac{z}{z+1} dz$.

Variant 39

1. Regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari va ularning xillari.
2. Butun va meramorf funksiyalar. Soxotskiy teoremasi va uning isboti.
3. $f(z) = \dfrac{(1-\cos z)(e^{z^2}-1)}{z^6}$ funksiyaning maxsus nuqtalari topilsin va ularning turi aniqlansin.
4. Integralni hisoblang: $\int\limits_{|z|=2} z\sin\dfrac{z+1}{z-1} dz$.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanidan yozma ish va og'zaki nazorat savollari

26. Kompleks son ta'rifini ayting
27. Kompleks sonlarni qo'shish va ayirish amallarini keltiring.
28. Kompleks sonlarni ko'paytirish amallarini keltiring.
29. Kompleks son haqiqiy qismi, mavhum qismi va u qanday belgilanadi?.
30. Kompleks sonning geometric tasviri deganda nimani tushinasiz?
31. Kompleks sonnin moduli va argument nima va ular qanday belgilanadi?
32. Ko'paytmaning moduli va argumenti ko'paytuvchilarniki orqali qanday ifodalanadi?
33. Muavr formulasini yozing.
34. Kompleks sonning n -tartibli ildizi den nimaga aytiladi?
35. Ildiz chiqarish formulasini yozing.
36. Ketma-ketlikning limitik nuqtasi deb nimaga aytiladi?
37. Ketma-ketlik qachon chegaralangan deyiladi?
38. Ketma-ketlik qachon yaqinlashuvchi deyiladi?
39. Uzoqlashuvchi yoki yaqinlashmaydigan ketma-ketlik deb nimaga aytilad? Misollar keltiring.
40. Limitlar nazariyasining asosiy teoremalarini ayting.
41. Koshi kriteriyasini ayting.
8. Cheksiz uzoqlashgan nuqta deganda nimani tushunasiz?
9. Riman sferasi nima?
10. Steriografik proyeksiyaning asosiy mohiyati va afzalligi nimadan iborat?
11. Kompleks sonlarni sfera nuqtalari bilan, tasvirlashning afzalligi nimada?
12. Cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofi nima?
13. Steriografik proyeksiya formulalari nima va ular qanday isbotlanadi?
14. Steriografik proyeksiyaning asosiy xossasi nimadan iborat va qanday isbotlanadi?
1. Kompleks sonlar qatori qachon yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) deyiladi?
2. Qatorning yig'indisi deb nimaga aytiladi?
3. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti nimadan iborat?
4. Absolyut yaqinlashuvchi qator deb nimaga aytiladi?
1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya qanday ta'riflanadi?
2. Teskari funksiya nima? Misol keltiring.
3. Chiziqning haqiqiy parametrli kompleks o'zgaruvchili funksiya orqali berilish usulini ayting.
4. Soha nima (misollar keltiring)?
5. Bir bog'lamli va ko'p bog'lamli sohalar qanday tuzilgan?
6. Jordan chizig'i nima (misollar keltiring)?
7. Jordan teoremasi qanday bayon qilinadi?
8. Kompleks o'zgaruvchili funksiya limiti deb nimaga aytiladi?
5. Uzluksiz funksiya deb nimaga aytiladi? (misolda tushuntiring)
6. Tekis uzluksiz funksiya deb nimaga aytiladi? (misolda tushuntiring)
7. Kantor teoremasini ta'riflang.
8. Geyne-Borell lemmasini ayting.
1. Funksional qator qachon yaqinlashuvchi deyiladi?
2. Funksional qator yiqindisi uzluksiz bo'lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak?
3. Funksional qatorning tekis yqinlashsish ta'rini ayting.
4. Veyershtrass teoremasini ayting.
8. Darajali qator deb nimaga ayiladi?
9. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi deb nimaga aytiladi?
10. Abelning 1-teoremasi nima haqida?
11. Haqiqiy sonlar ketma-ketligining yuqori va quyi limiti deganda nimani tushunasiz?

12. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi va doirasi uchun formulalarni yozing.
13. Koshi-Adamar formulasini yozing.
14. Yaqinlashish radiusi 0 ga va ∞ ga teng darajali qatorlar yozing. Bu nimani anglatadi?
7. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi deb nimaga aytiladi?
8. Kompleks o'zgaruvchili funksiya qachon monogen deyiladi?
9. Kompleks o'zgaruvchili funksiya qachon sohada bir qiymatli analitik deyiladi?
10. Hosila mavjud bo'lishining zaruriy sharti nimadan iborat?
11. Hosila mavjud bo'lishining yetarli sharti nima?
12. Koshi-Riman sharti nimadan iborat?
11. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar sifatida.
12. Analitik funksiyaning ta'rifi va tasvirini ayting
13. Garmonik funksiyaning ta'rifi va tasvirini ayting
14. Qo'shma garmonik funksiya deb nimaga aytiladi?
15. Analitik funksiyaning haqiqiy qismi ta'rifi va tasvirini ayting
16. Analitik funksiyaning mavhum qismlari ta'rifi va tasvirini ayting
17. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar sifatida tasvirlanishini ko'rsating
18. Berilgan garmonik haqiqiy yoki mavhum qismi yordamida analitik funksiyani tiklash formulalarini yozing.
19. Koshi-Riman sharti nimadan iborat?
20. Funksiya bir qiymatli analitik bo'lishi uchun uning haqiqiy va mavhum qismlari qanday bog'langan bo'lishi kerak?
21. Ko'rsatkichli funksiya qanday aniqlanadi?
22. Trigonometrik funksiyalar qanday aniqlanadi?
23. Ko'rsatkichli va trigonometrik funksiyalarni bir-biri bilan bog'lovchi qanday formulalarni bilasiz?
24. Ko'rsatkichli va trigonometrik funksiyalar qanday xossalarga ega?
25. Trigonometrik funksiyalarning nollari qanday ifodalanadi?
26. Giperbolik trigonometrik funksiyalar qanday aniqlanadi?
27. Ular o'zaro qanday bog'langan?
28. To'g'rilanuvchi chiziqlarni ta'rifi va tasvirini ayting
29. Kompleks funksiyaning integrali ta'rifi va tasvirini ayting
30. Integralning mavjudlik shartini tushuntiring
31. Integralning xossalarini ayting
32. Integralning sohaning funksiyasi sifatida additivligi ko'rsating.
33. Integral belgisi ostida limitga o'tish va takroriy integrallarning tergligi haqidagi teoremalarni ayting
34. Kompleks argumentli funksiya integrali deb nimaga aytiladi?
35. Qanday funksiyani integrallash mumkin?
36. Kompleks argumentli funksiya integralining qanday xossalarini bilasiz? (misollar keltiring)
37. Integralning hisoblash formulalarini keltiring (misollar yordamida).
38. Asosiy lemma nimadan iborat va u qanday isbotlanadi
39. Koshi teoremasi isbotining sodda holi qanday va bunday holga keltirish qanday bajariladi?
40. Koshi teoremasining sodda holi qanday isbotlanadi?
41. Koshi teoremasi shartlari kamaytirilsa, u o'rinli bo'ladimi?
42. To'g'rilanuvchi chiziqlarni ta'rifi va tasvirini ayting
43. Boshlang'ich funksiya mavjudligining yetarli shartini tushuntiring
44. Integralning xossalarini ayting
45. Integralning sohaning funksiyasi sifatida additivligi ko'rsating.

46. Integral belgisi ostida limitga o’tish va takroriy integrallarning tergligi haqidagi teoremalarni ayting
47. Murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasini isbotlang.
48. Qanday funksiyani integrallash mumkin?
49. Bir bog’lamli va ko’p bog’lamli sohalar uchun Koshining integral formulalasini tushuntiring?
50. Koshi integralining yadrosini ko’rsating
51. Koshi integralining zichligi deb nimaga aytiladi?
52. *w=f(z)* funksiya qachon ixtiyoriy tartibli hosilalarga ega bo’ladi va hosilalar uchun qanday integral formula o’rinli?
53. (15.1) formula qanday funksiya uchun o’rinli?
54. Analitik funksiyaning cheksiz differensiallanuvchanlik xossasini ayting
55. Koshining integral formulalarining mohiyatini tushuntiring (misollar yordamida).
56. Analitik funksiyalarni darajali qatorga yoyilmasi qanday ko’rinishda bo’ladi?
57. $w=f(z)$ funksiya qachon G sohada regulyar funksiya deyiladi?
58. Darajali qator koeffisentlari uchun Koshi tengsizligini isbotlang.
59. Yagonalik teoremasini tushuntiring.
60. Analitik davom ettirish prinsipi nimadan iborat?
61. Bir nuqtadagi maxsuslikni yo’qotish haqidagi teoremani isbotlang.
62. Luivill isbotlang.
63. Regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari va ularning xillarini aniqlang.
64. Yuqotilib bo’ladigan (yoki bartaraf qilinadigan) maxsus nuqta deb nimaga aytiladi? (misollar keltiring)
65. Qutb maxsus nuqta deb nimaga aytiladi?
66. Muhim maxsus nuqta deb nimaga aytiladi?
67. Regulyar funksiyaning n-tartibli noli deb nimaga aytiladi?
68. Butun va meromorf funksiyalar deb qanday funksiyalarga aytiladi?
69. Bir nuqtadagi maxsuslikni yo’qotish haqidagi teorema deb nimaga aytiladi?
70. Luivill teoremasini ayting.
71. Regulyar funksiyalarning yakkalangan maxsus nuqtalari va ularning xillarini bilasizmi? (misollar keltiring)
72. Butun va meromorf funksiya deb nimaga aytiladi? (misollar keltiring).
73. Loran qatori deb qanday qatorga aytiladi ?
74. Loran qatorining koeffitsientlari anday aniqlanadi?
75. Loran teoremasi nimadan iborat va u qanday isbotlanadi?
76. Loran qatori qaerda tekis yaqinlashadi?
77. Loran qatorining regulyar qismi nimadan iborat?
78. Loran qatorining asosiy qismi nimadan iborat?
79. Loran qatorining yagonaligi nimani anglatadi?
80. Funksiya Loran yoyilmasini hosil qilishga doir misol ko’rsata olasizmi?
81. To’g’rilanuvchi chiziqlarni ta’rifi va tasvirini ayting
82. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasini ayting
83. Qoldiqlarni hisoblash formulalarini keltiring.
84. Funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasidagi qoldig’i deb nimaga aytiladi?
85. $f(z)$ funksiyaning $z=\infty$ nuqtadagi qoldig’i deb nimaga aytiladi?
86. Kompleks argumentli funksiya integralining qanday xossalarini bilasiz? (misollar keltiring)
87. Integralning hisoblash formulalarini keltiring (misollar yordamida).
88. Berilgan chekli oraliq bo’yicha haqiqiy funksiyadan olingan integralni qanday hisoblash mumkin?

89. Berilgan cheksiz oraliq bo'yicha haqiqiy funksiyadan olingan integralni hisoblash qanday amalga oshiriladi?
90. Jordan lemmasi nimadan iborat va u qanday isbotlanadi?
91. Jordan lemmasini qo'llashga doir misol keltira olasizmi?
92. Logarifmik qoldiq haqidagi teorema nimadan iborat va u qanday isbotlanadi?
93. Argument prinsipi nima va u qanday keltirib chiqariladi?
94. Rushe teoremasi nima haqida va u qanday isbotlanadi?
95. Rushe teoremasidan foydalanib algebraning asosiy teoremasini isbotlay olasizmi?
96. Modulning maksimum prinsipi nimadan iborat va u qanday isbotlanadi?
97. Shvars lemmasi nima haqida va uni qanday isbotlash mumkin?
98. Hosila argumentining geometric ma'nosi nimadan iborat?
99. Hosila modulining geometric ma'nosi nima?
100. Qachon akslantirish nuqtada (sohada) konform akslantirish deyiladi?
101. Konform akslantirish qanaqa turlarga ega?
102. Qanaqa funksiyalar 1- tur va 2- tur konform akslantirishlarning umumiy ko'rinishiga misol bo'la oladi?
103. Konform akslantirishga doir ba'zi muhim teoremalarni bayon qiling?
104. Qanday akslantirish bir yaproqli deyiladi?
105. Chiziqli akslantirishning asosiy xossalari nimadan iborat?
106. Cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi burchak qanday kiritiladi?
107. Kasr –chiziqli akslantirish qayerda konform? Nima uchun?
108. Kasr – chiziqli akslantirishning asosiy xossalari nimadan iborat va ular qanday isbotlanadi?
109. Ko'rsatkichli va logarifmik funksiya orqali qanaqa akslantirishlarni
110. amalga oshirish mumkin?
111. Jukovskiy funksiyasi qanday to'plamlarda bir yaproqli bo'ladi?
112. Jukovskiy funksiyasi markazi nol nuqtadagi aylana va nol nuqtadan chiquvchi nurni nimaga akslantiradi?
113. Jukovskiy funksiyasi va unga teskari funksiya orqali qanaqa akslantirishlarni bajarish mumkin?
114. Darajali funksiya va unga teskari funksiya qanaqa akslantirishlarni amalgam oshiradi?
115. Trigonometrik va giperbolik funksiyalar orqali akslantirishlarni qanday amalga oshirish mumkin?
116. Sohalarni bir – biriga elementar funksiyalar yordamida konform akslantirish qanaqa g'oyaga asoslangan?
117. Yuqori yarim tekislikni birlik doiraga knform akslantirishning umumiy ko'rinishi qanday topiladi?
118. Birlik doirani birlik doiraga konform akslantirishning umumiy ko'rinishi qanday topiladi?
119. Vertikal $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$ yo'lakni birlik $|w| < 1$ doiraga chegaraviy $\pm\frac{\pi}{4}$ va $i\infty$ nuqtalarni chegaraviy ± 1 va i nuqtalarga o'tkazadigan konform akslantirish qanday topiladi?

13. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan testlar to'plami

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^{2n}$ **qator tekis yaqinlashadigan to'plamni ko'rsating.**

A) $|z| \le 1$; B) $|z| < \frac{1}{2}$; C) $|z| > \frac{1}{2}$; D) $|z| \ge 1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz^3}$ **qator qaysi to'plamda tekis yaqinlashadi**.

*$|\arg z| \le \frac{\pi}{7}$;

$\operatorname{Im} z \le 0$;

$\operatorname{Re} z \ge 0$;

$|\arg z| \le \frac{\pi}{2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ **- darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.**

*$\frac{1}{e}$;

e ;

1 ;

$2 \ln 2$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n$ **- darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.**

*1;

2 ;

$\frac{1}{2}$;

$\frac{3}{2}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{2^n z^n} \right)$**-qatorning yaqinlashish sohasini toping.**

*$\frac{1}{2} < |z| < 1$;

$1 < |z| < \frac{3}{2}$;

$1 < |z| < 2$;

$0 < |z| < \frac{1}{2}$

6)Berilgan darajali qatorntng qaysi biri $|z\rangle \frac{1}{3}$ **sohada yaqinlashadi.**

*$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n z^n}$;

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$;

$\sum_{n=0}^{\infty}3^n z^n$;

$\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

7)Berilgan funksiyani qaysi biri $z=0$ **nuqtada differensiallanuvchi.**

*$z\operatorname{Re} z$;

$\operatorname{Im} z$;

x^2y^2 ;

$2xy-i\left(x^2-y^2\right) \quad \left(z=x+yi\right)$

8) $f(z)=|z|^2$ **funksiya differensialanuvchi bo'ladigan nuqtalar to'plamini toping.**

*$z=0$ nuqtada;

butun tekislikda;

hyech joyda ;

haqiqiy o'qda

9)$U(x,y)=xy$ **garmonik funksiyaga qo'shma garmonik** $V(x,y)$ **funksiyani toping.**

*$-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+c$;

$\frac{1}{2}(x^2-y^2)+c$;

$\frac{1}{2}(x^2+y^2)+c$;

$(x^2+y^2)+c$

10)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^{10n}$ **-qator tekis yaqinlashadigan to'plamini toping.**

* $|z|\le 1$;

$|z|<10$;

$|z|>\frac{1}{10}$;

$|z|\ge 1$

11)$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$ **qator qaysi to'plamda tekis yaqinlashadi.**

*$\operatorname{Re} z\ge\delta>1$;

$|z|\le p<1$;

$|z|\le 1$;

$\operatorname{Re} z\le\delta<1$

12)$\int_C\frac{\sin z}{z^4-1}e^{z^{100}}dz=0$ **bo'ladigan yopiq konturni ko'rsating.**

*$|z+2|=\frac{4}{5}$;

$|z-i|=\frac{1}{2}$;

$|z-i|=\frac{2}{3}$;

$|z+i|=\frac{1}{2}$

13)Quyidagi integrallardan qaysi birining qiymati nolga teng.

* $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z^2+1)}dz$;

$\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z^2-1}dz$;

$\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z(z^4-1)}dz$;

$\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{shz}{z(z^3-1)}dz$

14) $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$ **funksiyaning qaysi sohada boshlang'ich funksiyasi mavjud.**

* $|z|<1$;

$0<\operatorname{Im} z<\infty$;

$1<|z|<\infty$;

$-\infty<\operatorname{Im} z<0$

15) $\int\limits_C \frac{\sin z}{z^2}dz=2\pi i$ **S – konturni ko'rsating.**

*$|z|=\frac{5}{6}$;

$|z+i|=\frac{3}{4}$;

$|z-i|=\frac{1}{2}$;

$|z+i|=\frac{2}{3}$

16)Qaysi integralning qiymati $2\pi i$ **ga teng.**

* $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}dz$;

$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z-2)}dz$;

$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$;

$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z(z-2i)} dz$

17)Qaysi nuqtada e^z funksiyaning qiymati i ga teng.

* $z = \frac{\pi i}{2}$;

$z = \pi i$;

$z = \pi i$;

$z = 2\pi i$

18)Qaysi funksiyaning $z = 0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyilmasi $\sum_{n=1}^{\infty}(z^{3n} - z^{3n+1})$ bo'ladi.

* $\frac{1}{1+z+z^2}$;

$\frac{1}{(1+z)(1+z^2)}$;

$\frac{1+z}{1-z+z^2}$;

$\frac{1}{1-z^3}$

19) $z = 0$ **nuqtaning atrofida regulyar va** $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^{10}} \left(n = 1,2,...\right)$ **shartni qanoatlantiruvchi funksiyani toping.**

* $f(z) = z^{10}$;

$f(z) = 0$;

mavjud emas;

$f(z) = \frac{1}{z^{10}}$

20)Quyidagi funksiyalarning qaysi birini haqiqiy o'qining qismida $D = \{z : z = \pi n, n = 0,\pm 1,\pm 2,...\}$ **sohaga analitik davom ettirish mumkin.**

* $ctgz$;

tgz;

$e^{\frac{1}{\cos z}}$;

e^{-tgz}

21) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{4n}$ **- funksiyani** $|z| < 1$ **doiradan analitik davom ettirish mumkin bo'lgan maksimal sohani ko'rsating.**

* $C \setminus \{-1;1;-i;i\}$;

$C \setminus \{-i;i\}$;

$C \setminus \{-i;i;1;2\}$;

$C\setminus\{-1;1;-2i;2i\}$

22) $F(z)=\dfrac{z^2}{z^2+1}$ **funksiya qaysi funksiyaning** $|z|>1$ **sohadan** $C\,|\,\{-i;i\}$ **sohaga analitik davom bo'ladi.**

$*\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ **;**

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ **;**

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n}$ **;**

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{3n}$

23) $z=0$ **nuqta qaysi funksiya uchun tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta bo'ladi.**

$*\dfrac{z}{tgz}$**;**

$\dfrac{z}{e^z+1}$ **;**

$\dfrac{z}{1-\cos z}$ **;**

$\dfrac{z^2-1}{z-1}$

24) $z=0$ **nuqta quyidagi funksiyalarning qaysi biri uchun qutb maxsus nuqta bo'ladi.**

$*\dfrac{z}{\left(e^z-1\right)^2}$;

$\dfrac{\sin z}{z}$;

$\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

$\dfrac{z}{tgz}$

25) $z=0$ **nuqta qayday funksiya uchun muhim maxsus nuqta bo'ladi.**

$*z^2\cos\dfrac{\pi}{z}$;

$\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

$\dfrac{1}{z}$;

$\dfrac{z}{1-\cos z}$

26) $\dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$ **funksiyaning tuzatib bo'ladigan maxsus nuqtasini ko'rsating.**

$*0$;

$\frac{\pi}{2}$;

$-\pi$;

$2\pi i$

27) $z^2 \sin\frac{z}{z+1}$ **funksiyaning qutb maxsus nuqtasini ko'rsating.**

*∞ **;**

0 **;**

1 **;**

-1

28) $z\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)$ **funksiyaning muhim maxsus nuqtasini ko'rsating.**

*0 **;**

∞ **;**

1 **;**

-1

29) $ztg^2 z$ **funksiyaning barcha nollari vam qutblarini toping hamda ularni tartibini aniqlang.**

* $z=0$ - uchinchi tartibli noll ; $\pm\pi;\pm 2\pi;...$ - ikkinchi tartibli nollar , $z=\pm\frac{\pi}{2};\pm\frac{3\pi}{2};...$ esa ikkinchi tartibli qutblar;

$z=0$ -ikkinchi tartibli noll; $\pm\pi;\pm 2\pi;...$ - birinchi tartibli nollar, $z=\pm\frac{\pi}{2};\pm\frac{3\pi}{2};...$ esa birinchi tartibli qutblar;

$z=0,\pm\pi\pm 2\pi,\pm 3\pi,...$ - ikkinchi tartibli nollar , $z=\frac{\pi}{2}+n\pi, n=0,\pm1,\pm2,...$ barchasi ikkinchi tartibli nollar;

$z=0;\pi;2\pi;3\pi;\ ...$ - birinchi tartibli nollar, $z=-\frac{\pi}{2};-\frac{3\pi}{2};...$ esa birinchi tartibli qutblar.

30) $f(z)=\frac{1}{1-z}$ **funksiya qaysi sohada tekis uzluksiz?**

* $|z|<\frac{1}{2}$;

$|z|<1$;

$|z|>1$;

$|z|<2$

31) $z_n=\frac{n}{n+1}+i^n\frac{n^2}{n^2-3}$ **ketma – ketlikning limitik nuqtalarini toping.**

*$1+i;1-i;\ 0;2$; $1-i;\ 1+i;\ 3;\ 1$; $0;2;\ i;-i$; $1;i;-i;3$

Qaysi ketma-ketlikning limitik nuqtalari $1+i$ **va** $-1+i$ **nuqtalardan iborat .**

* $z_n=\frac{(-1)^n n}{n+7}+i$;

$z_n = \frac{1}{n^2+1} + i\frac{n^2}{n^2+4}$;

$z_n = \frac{n}{n+1} + i^n\frac{n^3}{n^3+5}$;

$z_n = \frac{n+1}{n+3} + (-1)^n i$

32)Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $\overline{C} \setminus \{0\}$ da uzluksiz.

* $f(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{z}} & z \neq 0 \\ i, & z = 0 \\ 1, & z = \infty \end{cases}$;

$f(z) = \begin{cases} \frac{1-\cos z}{z^2}, & z \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & z = 0 \end{cases}$;

$f(z) = \frac{1-z^2}{1+z}$;

$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, |z| > 1 \\ z, \ |z| = 1 \\ z^3, \ |z| < 1 \end{cases}$

33) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ **tenglamaning** $|z| < 1$ **sohada ildizlarini sonini toping.**

*4;

7;

3;

2

34)$|z| < 1$ **sohada quyidagi tenglamalardan qaysi birining ildizlari soni 5 ta.**

* $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$;

$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$;

$z^4 - 3z + 1 = 0$;

$2z^4 - 5z + 2 = 0$

35)$\underset{z=1}{res}\, ze^{\frac{1}{z-1}}$ **qoldiq nimaga teng.**

* $\frac{3}{2}$;

$\frac{1}{2}$;

1;

$-\frac{3}{2}$

36) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$ **-funksiyaning** $z=1$ **maxsus nuqtadagi qoldig'ini hisoblang.**

$*-\dfrac{1}{2}$;

$-\dfrac{1}{4}$;

$\dfrac{1}{4}$;

$\dfrac{1}{2}$

37) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$ **funksiyaning** $1<|z|<2$ **xalqada** z **ning darajalari bo'yicha Loran qatoriga yoyilmasi qaysi javobda berilgan.**

$*\sum_{-\infty}^{-1}(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{5}+\sum_{0}^{\infty}\dfrac{-1}{5\cdot 4^{n+1}}z^{2n}$;

$\sum_{-\infty}^{-1}\frac{1}{3}z^{2n}+\sum_{0}^{+\infty}\dfrac{-1}{3\times 4^{n+1}}z^{2n}$;

$\sum_{-\infty}^{-1}z^{2n}+\sum_{0}^{+\infty}\dfrac{1}{4^{n+1}}z^{2n}$;

$\sum_{-\infty}^{-1}\dfrac{1}{5}z^{2n}+\sum_{0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{5\cdot 4^n}z^{2n}$

38)Qaysi javobda $f(z)=z\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)$ **funksiyaning barcha bir qiymatli xarakterdagi yakkalangan maxsus nuqtalari va ularning tipi to'g'ri berilgan?**

*$z=0$ tuzatib bo'ladigan, $z=\infty$ muhim maxsus nuqta;

$z=0$ va $z=\infty$ tuzatib bo'ladigan maxsus nuqtalar;

$z=0$ tuzatib bo'ladigan , $z=\infty$ qutb maxsus nuqta;

$z=0$ muhim, $z=\infty$ tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta;

39) $z=\dfrac{2-3i}{3+4i}$ **kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismini toping.**

$*-\dfrac{6}{25},-\dfrac{17}{25}$;

$-\dfrac{6}{5},\ \dfrac{7}{5}$;

$\dfrac{6}{25},\ -\dfrac{17}{25}$;

$\dfrac{6}{25},\ \dfrac{17}{25}$

40) $z=\left(1-i\sqrt{3}\right)^3(1+i)^2$ **kompleks sonning moduli va argumentini toping.**

$*|z|=16,\arg z=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,...$;

$\left|z\right| = 16, \arg z = 2k\pi, k = 0 \pm 1, \pm 2, ...;$

$\left|z\right| = 16, \arg z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$

$\left|z\right| = 16, \arg z = \pi + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$

41) $\left|\operatorname{Im} z\right| < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1$ **tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamining geometrik o'rnini toping.**

*Uchlari $-i,\ 1-i,\ 1+i,\ i$ nuqtalarda bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichki qismi ;

Uchlari $0, -i, 1-i,\ 1$ nuqtalarda bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichki qismi;

Uchlari $-1+i,\ -1-i,\ -i,\ i$ nuqtalarda bo'lgan to'g'ri to'rtburchak tashqi qismi;

Uchlari $-1, -1-i, 1-i; 1$ nuqtalarda bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichki qismi

42) $z = 0$ **nuqtaning atrofida** $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ **ratsional funksiyani Teylor qatoriga yoyilmasini toping.**

$*\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-3^{-n-1})z^n$;

$\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n - 3^{-n+1}\right)z^n$;

$\dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left((-1)^n - 3^{-n+1}\right)z^n$;

$\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-3^{-n})z^n$

43) $-\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n + 3^{-n-1}\right)z^n$ **qator** $z = 0$ **nuqtaning atrofida qaysi ratsional funksiyaning Teylor qatoriga yoyilmasidan iborat.**

$*\ f(z) = \dfrac{1}{(z-3)(z+1)}$;

$f(z) = \dfrac{1}{(z-3)(z-1)}$;

$f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z-1)}$;

$f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z+1)}$

44) $\operatorname*{res}_{z=-1}\dfrac{z^3}{(1+z)^4}$ **qoldiqning qiymatini toping.**

*1;

0;

-1;

2

45) $z=0$ **nuqtaning atrofida regulyar va** $f'(z)=f(z), f(0)=1$ **shartlarini qanoatlantiruvchi** $f(z)$ **funksiyaning** $z=0$ **nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyilmasini toping.**

* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$;

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$;

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$;

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

46) $F(z)=\frac{1}{1+z}$ **funksiya ushbu funksiyalardan qaysi birining** $|z|\langle 1$ **doiradan** $\mathbf{C}\setminus\{-1\}$ **sohadagi analitik davomi bo'ladi.**

* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1;$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)z^n, |z|<1;$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^z,\ |z|<1;$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,\ |z|<1$

47) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{n^2+1}$ **Loran qatori yaqinlashadigan nuqtalar to'plamini toping.**

* $|z|=1$;

$|z|>1;$

$1<|z|<2;$

$|z|<1$

48) $f(z)=\frac{1}{z(z-3)}$ **funksiyani (** $z-1$ **) ning darajalari bo'yicha** $1<|z-1|<2$ **halqada Loran qatoriga yoyilmasini toping.**

* $-\frac{1}{3}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}\right)$;

$\frac{1}{3}\left(\sum_{n=-\infty}^{-11}\frac{(z-1)^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\right)$;

$\frac{1}{3}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-1)^n 2^{-n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right)$;

$\frac{1}{3}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n 2^{-n}\right)$

49) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4)}$ **integralning javobini toping.**

*-2π;

$2\pi i$

-2π;

2π

50)Ushbu $\int_{|z+i|=1}\frac{dz}{1+z^2}$ **integralning qiymati nimaga teng?**

*π;

1;

0;

$\frac{\pi}{2}$

51)Ushbu $\int_{|z|=4}\frac{cosz}{z-2i}dz$ **integralning qiymati nimaga teng?**

*$2\pi i\cdot ch2$;

$2\pi i\sin i$;

π;

$\pi(2-e)$

52)Koshining tipidagi $\int_{|z|=4}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$ **integral ning javobini toping.**

*$2\pi i$;

$\pi(2-e)$;

π;

0

53)Quyidagi qatorlarning qaysi biri $f(z)=e^{az}$ **(** $a\neq 1$ **) funksiyaning** $z=0$ **nuqta atrofidagi Teylor qatori bo'ladi?**

*$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}$;

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$;

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n-1}z^n}{n+1}$;

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^{n-1}}{(2n+1)!}$

54)Quyidagi qatorlarning qaysi biri $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ funksiyaning $|z|<1$ doirada Teylor qatori bo'ladi.

$*\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$;

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$;

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$;

$\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}$

55) $f(z)=e^{-\frac{1}{|z|}}$ **(**$0<|z|<1$**) funksiya $z=0$ nuqtada qanday aniqlansa, u $|z|\le 1$ doirada tekis uzluksiz bo'ladi.**

* $f(0)=0$;

$f(0)=1+i$;

$f(0)=1$;

$f(0)=i$

56)Berilgan $\mathrm{Re}\, f(z)=U(x,y)=y^3-3x^2y$ **haqiqiy ko'ra analitik** $f(z)$ **funksiyani toping.**

* $f(z)=i(z^3+C)$;

$f(z)=z^2+C$;

$f(z)=z^3$;

$f(z)=z^3+z^2$

57) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}2^{|n|}z^n$ **Loran qatori qaysi to'plamda yaqinlashadi?**

$*\frac{1}{2}<|z|<2$;

$|z|>1$;

$1<|z|<2$;

$\mathrm{Re}\, z>-1$

58)Qoldiqlar nazariyasi yordamida $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$ **integral qiymatini toping.**

$*\frac{\pi}{8}ch1$;

$\frac{\pi\sqrt{2}}{2}sh1$;

$\frac{\pi}{12e^2}$;

$\frac{\pi}{2}(1-\frac{3}{2e})$

59) $\underset{z=1}{res}\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ **qoldiqning qiymati nimaga teng?**

* -1;
π ;
i ;
3

60) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$ **funksiyaning barcha bir qiymatli xarakterdagi maxsus nuqtalar topilsin?**

*$z=\pm\pi;\pm 2\pi;\cdots$ qutblar, $z=0$ tuzatiladigan maxsus nuqta ;
$z=1$ tuzatiladigan maxsus nuqta ;
$z=\pm\pi i;\pm 2\pi i;\cdots$ qutblar ;
$z=0$ qutb

61) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}2^n z^n$ **Loran qatori yaqinlashuvchi bo'ladigan nuqtalar to'plami topilsin?**

*Bo'sh to'plam ;
$\frac{1}{2}<|z|<2$;
$1<|z|<2$;
$\operatorname{Re} z>-1$

62)To'ldiruvchi sohaga o'tish yo'li bilan qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasidan foydalanib, $\int\limits_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$ **integralni hisoblang?**

*0;
$-\frac{2\pi i}{3}$;
$2\pi i\cdot cos1$;
$2\pi i$

63) i^{2007} **ning qiymatini toping.**

*$-i$;
i ;
1;
-1

64) $\underset{z=1}{res}\dfrac{1}{z^3(z-2)}$ **qoldiqning qiymatini toping.**

*$-\frac{1}{8}$;

$-\frac{1}{64}$;

$\frac{1}{32}$;

0

65) $J_n = \oint\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz$ **integralning qiymatini toping.**

* $J_n = \begin{cases} 0, & n = 0,1,\pm 2, \cdots \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$;

$J_n = 2\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$;

$J_n = \begin{cases} 0, & n = 0, -1, \pm 2, \cdots \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$;

$J_n = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

66) $f(z) = \frac{(z^3+1)^6}{(z^2+4)^{11}} e^{\frac{1}{z}}$ **-funksiyaning barcha nollarini toping va ularning tartibini aniqlang.**

* $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2}}$, $k = 0,1,2$ 6- tartibli noll, $z = \infty$ 4- tartibli nol; $z_{1,2} = \pm 2i$ 11-tartibli nol;

$z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2}}$, $k = 0,1,2$ 3- tartibli nol va $z = -2$ esa 11- tartibli nol ;

$z_{1,2} = \pm i$ 6 - tartibli nol va $z = \infty$ 2- tartibli nol.

67) $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ **funksiyaning barcha bir qiymatli xarakterdagi yakkalangan maxsus nuqtalari va turini toping?**

* $z_k = \frac{1}{k\pi}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ va $z = \infty$ nuqtalar birinchi tartibli qutblar;

$z = 0$ muhim maxsus nuqta, $z_k = 2k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ tuzatiladigan maxsus nuqtalar;

$z_k = \frac{1}{k\pi}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ nuqtalar ikkinchi tartibli qutb maxsus nuqtalar;

$z = 2k\pi i$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ birinchi tartibli qutblar.

68) $f(z) = \frac{1-\cos z}{(e^z - 1)^3}$ **funksiyaning barcha chekli maxsus nuqtalarini toping?**

* $z_k = 2k\pi i$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ nuqtalar 3-tartibli qutb maxsus nuqtalar va $z = 0$ esa 1-tartibli qutb ;

$z_k = 2k\pi i$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ nuqtalar ikkinchi tartibli qutb , $z = 0$ tuzatiladigan maxsus nuqta;

$z = 0$ va $z_k = \frac{1}{k\pi}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ nuqtalar birinchi tartibli qutb maxsus nuqtalar;

$z = 0$ muhim maxsus nuqta , $z_k = 2k\pi i$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ tuzatiladigan maxsus nuqta.

69) $z=a$ **yakkalangan maxsus nuqta** $f(z)$ **funksiya uchun qutb maxsus nuqta bo'lishligi uchun quyidagi shartlarning qaysi birining bajarilishi zarur va yetarlidir.**
* $z=a$ nuqta atrofida Loran qatorining asosiy qismi chekli sondagi hadlarini saqlashligidan iborat;
$z=a$ nuqta atrofida Loran qatorining asosiy qismi aynan nolga teng bo'lishi ; $z=a$ nuqta atrofida Loran qatorining asosiy qismi cheksiz ko'p sondagi hadlarini saqlashligidan iborat;
$f(z)=(z-a)\varphi(z)$, $z=a$ nuqta $\varphi(z)$ funksiya uchun oddiy qutb maxsus nuqta.

70) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^6}dz$ **integralni hisoblang?**
* $\frac{2\pi i}{5!}$;
$\frac{2\pi i}{7!}$;
$\frac{\pi i}{10}$;
$\frac{2\pi i}{3!}$

71) $\underset{z=2}{res}\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ **qoldiqni hisoblang**
*-1;
$2\pi i$;
$1+i$;
$\frac{e^{-10}}{2}$

72) $\underset{z=\infty}{res}\frac{1}{z+2}\cos\frac{1}{z}$ **qoldiqni hisoblang**
* -1;
2;
πi;
5

73) $\underset{z=\infty}{res}\frac{z}{z^3+1}\sin\frac{1}{z}$ **qoldiqni hisoblang**
*0;
-1;
1;
2π

74) $J=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^4}$ **integralni hisoblang.**
* $\frac{5\pi}{16}$;

$\frac{5\pi}{8}$;

$\frac{5i}{16}$;

$-\frac{5i}{16}$

75) $J=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\cos 5x}{x^2-2x+5}dx$ **integralni hisoblang.**

* $J=-\pi e^{-10}\sin 5$;

$J=e^{-10}\sin 5$;

$J=\pi e^{-10}\sin 5$;

$J=-\pi i\, e^{-10}\sin 6$

76) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^z}{z(1-z^2)^2}dz$ **integralning qiymatini toping.**

* $-\frac{\pi i}{4}$;

$2\pi\, sh1$;

πi ;

$2\pi i$

77) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz=?$

* $-\frac{\pi i}{e}$;

$\frac{\pi i}{e}$;

$\frac{\pi i}{ch1}$;

$-\pi\, ich1$

78) $z=\frac{1-i}{1+i}$ **- kompleks sonning modulini toping?**

*1;

0 ;

2 ;

$\frac{1}{2}$

79) $z=1+i^{2007}$ **- kompleks sonning argumentini toping?**

* $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$;

$\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$;

$-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$;

$-\frac{\pi}{4}$

80) $z^3=1$ **- tenglamaning barcha yechimlarini toping?**

*$1;\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$-1;\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$1;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$-1;\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$

81) a **kompleks parametrning qanday qiymatlarida** $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **ketma-ketlik yaqinlashadi.**

*Barcha qiymatlarida ;

a- ning musbat qiymatlarida

a ; $|a|\le 1$;

$\operatorname{Im} a\ge 0$

82) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}e^{in}$ **qator** α **haqiqiy parametrning qanday qiymatlarida yaqinlashadi.**

*α - ning barcha qiymatlarida ;

$\alpha<0$;

$\alpha>-1$;

$\alpha\ge 0$

83) $z=Re^{it},\pi\le t\le 2\pi\ (R>0)$ **parametrik tenglama qanday chiziqni tasvirlaydi?**

*$|z|=R,\ \operatorname{Im} z\le 0$;

$|z|=R,\ \operatorname{Im} z\ge 0$;

$|z|=R,\ \operatorname{Re} z>0$;

$|z|=R$

84) $f(z)=\begin{cases} e^{\frac{1}{z}}, & z\ne 0,\\ i, & z=0\end{cases}$ **- funksiya uzluksiz bo'ladigan nuqtalar to'plamini toping.**

*$C\setminus\{0\}$;

$C\setminus\{z:|z|=1\}$;

$C \setminus \{0, \pm i\}$;
$C \setminus \{\pm 1\}$

85) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^{-2n}$ **qator qaysi to'plamda tekis yaqinlashadi.**

*$|z| \geq 1$;

$|z| \leq 1$;

$0 < |z| \leq \frac{1}{2}$;

$|z| \leq \frac{3}{4}$

86) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\alpha}}$, $\alpha > 0$ **darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping?**

*∞ ;
e;
1;
2

87) $f(z) = z\,ch(az)$ **funksiyaning boshlang'ich funksiyani toping.**

*$\frac{z}{a}\ sh(az) - \frac{1}{a^2} ch(az) + C$;

$\frac{z^2}{a} sh(az) + \frac{1}{a^2} ch(az) + C$;

$\frac{z}{a} ch(az) - \frac{1}{a^2} sh(az) + C$;

$ch(az) + \frac{z}{a^2} sh(az) + C$

88) $f(z) = \frac{1}{a}(z - \frac{1}{a})e^{az} + C$ **funksiya qanday funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi?**

*ze^{az};

$z^2 e^{az}$;

$\frac{1}{a}(z+1)e^{az}$;

$z\,ch(az)$

89)Koshining integral formulasi yordamida integralni hisoblang $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz$ **?**

*$\pi i(e - e^{-1})$;

$\pi\ i e$;

$2\pi i\, ch1$;

$2\pi(e + \frac{1}{e})$

90) $z = 0$ **nuqtaning atrofida** $f(z) = \frac{1}{4 + z^2}$ **funksiyani Teylor qatoriga yoying.**

$* \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n+2}}$;

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} z^{2n}$;

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^{2n}$;

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2n \cdot z^{2n}$

91) $z=0$ **nuqtaning atrofida regulyar va** $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{5+n}$ $(n=1,2,\cdots)$ **shartni qanoatlantiruvchi funksiyani toping.**

* $f(z) = \frac{1}{5z+1}$;

$f(z) = \frac{z}{5+z}$;

$f(z) = \frac{z}{5z+1}$;

mavjud emas.

92) $z=0$ **nuqta qanday funksiya uchun tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta bo'ladi?**

* $\frac{1-\cos z}{z^2}$;

$\frac{1-\cos z}{z^4}$;

$\frac{z \cos z}{\sin z^2}$;

$\frac{e^{z^2}-1}{z^3}$

93) $\frac{\cos^2 \frac{1}{\sqrt{z}}}{z^3(z^4-1)}$ **funksiyaning muhim maxsus nuqtasini ko'rsating.**

* 0;

$-i$;

i;

1

94) qoldiqining qiymati $res \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}$ **bo'ladigan maxsus nuqtani toping.**

* i;

1;

$-i$;

$-i,\ i$

95) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}$ **funksiyani** $|z|<1$ **doiradan analitik davom ettirish mumkin bo'lgan sohani ko'rsating.**

*$C \setminus \{-1, 1\}$;

$C \setminus \{-i, i\}$;

$C \setminus \{-i, 1\}$;

$C \setminus \{-i, -1\}$

96) $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-1} dz$ **integralni hisoblang.**

*$2\pi i$;

$-2\pi i$;

e ;

$1-e$

97) $\int\limits_{C} \frac{e^{z^2} \sin z}{z(z^2+1)} dz = 0$ **bo'ladigan S- konturni ko'rsating.**

*$|z+1| = \frac{1}{2}$;

$|z-i| = \frac{1}{2}$;

$|z+i| = 1$;

$|z| = 1$

98) $f(z) \approx g(z)$ **(** $z \to a,\ z \in E$ **) asimptotik formula quyidagi shartlardan qaysi biri bajarilganda o'rinli bo'ladi.**

* $\lim\limits_{z \to a, z \in E} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$;

$\frac{f(z)}{g(z)}$ - nisbat E -to'plamda chegaralangan bo'lsa, ya'ni $\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \le M, z \in E$; $\lim\limits_{z \to a, z \in E} \frac{f(z)}{g(z)} = 2$

;

$\lim\limits_{z \to a, z \in E} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{2}$

99) $0 < |z-a| < \rho,\ \rho > 0, a \ne 0$ **sohaning chegarasini toping?**

*$z = a$ nuqta va $|z-a| = \rho$ aylanadan iborat;

$|z| = \rho$ aylanadan va $z = a$ nuqtadan iborat;

$z = 0$ va $z = a$ nuqtalardan iborat ;

$z = 2$ nuqta va $|z| = \rho$ aylanadan iborat.

100) $z = 1 - i$ sonning modulini toping.

* $\sqrt{2}$
1
2
3

Darslik va o'quv qo'llanmalar ro'yxati

1. Asosiy

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т. 1, М. Наука, 1985.
2. Худайберганов Г., Ворисов А.К., Мансуров Х.Т., Комплекс анализ. Т. Университет 1998.

3. Садуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Туйчиев Т. Математик анализдан мисол ва масалалар тўплами (Комплекс анализ) 3-қисм «Ўзбекистон» нашриёти 2000.
4. Волковыский А. Н. , Лунц Г. А. , Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного . М. «Наука» 1975.
5. А Садуллаев . Голоморфные функции многих переменных. Ургенч, Изд. отдель УрГУ, 2005.

2. Қўшимча

6. Сирожиддинов С. Х. , Салоҳиддинов М. С., Мақсудов Ш. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси. Т. "Ўқитувчи" 1979.
7. Привалов И. И. Вводние в теорию функций комплексного переменного. М. "Наука" 1977.
8. Сидиров Ю. В., Федорюк И. В., Шабуний М. И . Лекции по ТФКП М. "Наука" 1984.
9. Бицадзе А.В. Основи теории аналитических функций комплексного переменного . М. "Наука" 1972.
10. Евграфов М.А. , Сидоров Ю. В. , Федорюк М. В. , Шабунин М.И. , Бежанов К. А. Сборник задач по теории аналитических функций. М. "Наука" 1972.

Foydalangan asosiy atamalar va olimlar haqida ma'lumotlar
(Glossariy)
A

Adamar Jak (8.12.1865-17.10.1963)-fransuz matematigi, Parij FA (1912 y.) a'zosi.

Aksioma- biror matematik nazariya yaratishda boshlang'ich fakt (asos) deb qaraladigan va isbotsiz qabul qilinadigan jumla.

Analiz- Tahlil(analiz)- noma'lumdan ma'lumga, izlanayotgandan berilganga o'tish yo'li bilan fikr yuritish yoki isbotlash metodi (usuli). A. ning teskarisi, ya'ni teskari tartibda fikr yuritsh ***sintezdir.***

Grekcha ***analysis*** –yechish, bo'shatish.

Analitik funksiya, *golomorf, regulyar funksiya*- kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining asosiy tushunchasi. Agar $z = x + iy$ kompleks o'zgaruvchining bir qiymatli $w = f(z)$ funksiyasi markazi z_0 nuqtada, radiusi $r > 0$ bo'lgan biror $|z - z_0| < r$ doirada aniqlangan bo'lib,

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

darajali qator bilan tasvirlanadigan bo'lsa (bu qator Teylor qatoridan iborat bo'lishi shart), $f(z)$ funksiya $z = z_0$ nuqtada analitik funksiya deyiladi. $f(z)$ funksiya D sohada analitik deyiladi, agar bu sohaning har bir nuqtasida analitik bo'lsa.

Yoki

Bir qiymatli $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada analitik deyiladi, agar bu funksiya z_0 nuqtaning qandaydir atrofidagi har bir nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa.

Analitik davom ettirish – biror sohada analitik bo'lgan funksiyani ancha keng sohaga tarqatish.

Arifmetik ildiz- manfiy bo'lmagan sonning juft yoki toq darajali ildizining manfiy bo'lmagan qiymati.

Argument erkli o'zgaruvchi.

Arkkosinus – kosinusga teskari funksiya. A. bunday belgilanadi: $Arccosx$. A. ko'p qiymatli (cheksiz ko'p qiymatli) funksiya. Uning bir qiymatli tarmog'i A. ning bosh qiymati deyiladi va $arccosx$ tushuniladi, bunda $0 \leq arccosx \leq \pi, -1 \leq x \leq 1$.

Arksinus – sinusga teskari funksiya. A. bunday belgilanadi: $Arcsinx$. A. ko'p qiymatli (cheksiz ko'p qiymatli) funksiya. Uning bir qiymatli tarmog'i A. ning bosh qiymati deyiladi va $arcsinx$ tushuniladi, bunda $-\frac{\pi}{2} \leq arcsinx \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq x \leq 1$.

Asimptotik ifoda- $f(x)$ funksiyaning taqribiy qiymatlaridan biri.

Asimptotik baholar – $x \to a$ da $f(\mathrm{x}) = \mathrm{O}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))$, $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $f(x) \sim g(x)$ ko'rinishdagi munosabatlardir.

B

Bernulli (Bernoulli Yakob, 1667 - 1705) Shvesariya matematiki.

Bir jinsli funksiya $f(x, y)$ funksiya $\forall + \neq 0$ $F(tx, ty) \equiv t^m f(x, y)$ shartni qanoatlantirsa. m – chi darajali bir jinsli funksiya deyiladi.

Bessel (Bessel Friedrish Vishelm, 1784 - 1846) nemis matematiki.

Bog'lamli to'plam deyiladi agar $D \subset C$ to'plamga tegishli ixtiyoriy a va b nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq shu to'plamga tegishli bo'lsa.

Bir yaproqli funksiya – $w = f(z)$ **funksiya b.ya.** deyiladi, agar bu funksiyaga teskari $z = g(w)$ funksiya bir qiymatli bo'lsa.

D

D'Alamber Jak Leron (10.11.1717 -29.10.1783) fransuz matematigi, mexanik va filosofi. Parij FA a'zosi (1741 y.) Dalamber usuli o'zgarmas koeffisiyentli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimini topish usuli. D. birinchi bo'lib gidrodinamikada uchraydigan matematik fizikaning elliptik tipdagi tenglamasiga kompleps o'zgaruvchili funksiyalarni qo'llagan. D. va Eyler birinchi bo'lib analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini bog'lovchi tenglamani topgan, keyinchalik bu Koshi-Riman tenglamasi deb yuritilgan.

Dirixle Peter Gustav Lejen (13.2.1805-05.05.1859) –nemis matmatigi. Birinchi bo'lib qatorning shartli yarinlashishini tekshirgan va ifodalagan

E

Eyler (Euler Leonhard,27.11. 1707 – 18.09.1783) -fransuz, matematik, fizik, mexanik va astronomi. Peterburg, Berlin, London FA lari a'zosi.

Eyler tenglamasi

$$a_0 x^h y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} xy' + a_n y = f(x)$$

Eyler formulasi - $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$

G

Grin Djordj (14.7.1793-31.3.1841) – ingliz matematigi va fizigi

Garmonik funksiya – x va y ikki haqiqiy o'zgaruvchili $U(x, y)$ funksiya D sohada garmonik deyiladi , agar D sohada $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ tenglik bajarilsa.

I

Integrallovchi ko'paytuvchi – $\mu(x, y)$ ni tenglamaga ko'paytirganda tenglama to'liq differensialli tenglama bo'lsa.

Ichki nuqta –Agar $\boldsymbol{a} \in D$ nuqta o'zining biror atrofi bilan shu D to'plamga tegishli bo'lsa, a nuqta bu to'plamning ichki nuqtasi deyiladi.

J

Jordan (Jordan Camille, 1838 - 1922) fransuz matematiki

Jukovskiy Nikolay Yegorovich (17.01.1847-17.03.1921) – rus olimi, hozirgi zamon gidro va aerodinamikasinin asoschisi. Peterburg FA muxbir a'zosi (1894 y.)Birinchi bo'lib kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi metodini gidro va aerodinamikaga qo'llagan. J. nomi bilan funksiya va analitik funksiyalarning chegaraviy xossalaridagi bitta teorema ifodalanadi.

K

Kantor Georg (03.03.1845-06.01.1918) nemis matematigi, to'plamlar nazariyasining asoschisi. K.Veyershtrassning o'quvchisi

Koshi (Caushy Augustin Lauis, 1789 - 1857) fransuz matematigi, Parij FA a'zosi (1816 y.). Funksiya uzluksizligi ta'ifi, yaqinlashuvchi qatorlar nazariyasini, kompleks o'zgaruvchining geometric tasvirini nuqta sifatida ifodalagan. XVIII asrda L.Eyler va J.D'Alamberlar asos solgan analitik funksiyalar nazariyasini rivojlantirdi. Analitik funksiyani integral ko'rinishda ifodalash, bundan darajali qatorga yoyish, qoldiqlar nazariyasini ishlab chiqish va uni analizning ko'plab masalalarga tadbiqini ko'rsatgan.

Koshi masalasi (**boshlang'ich masala**) n – chi tartibli tenglamada noma'lum funksiya va uning dastlabki (n - 1) tartibgacha hosilalari argumentning birta qiymatida aniqlangan ya'ni $y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Kompleks son deb $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlarning tartiblangan (x, y) juftiga aytamiz va shartli ravishda $z = x + iy$ ro'rinishda yozamiz. Bunga k.s.ning *algebraik shakli* bo'lib, $x -$ uning haqiqiy qismi ($x = Rez$ kabi belgilanadi) deyiladi, y soni esa mavhum qismi ($y = Imz$ kabi belgilanadi), (0,1) juftlik mavhum birlik deyiladi va i simvoli bilan belgilanadi.

$z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ - *trigonometril shakli*, $r = |z|$ -moduli, $\varphi = Argz = argz + 2k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots,$ $\quad argz = \; arctg\frac{y}{x}$ – k.s.argumenti.

$z = re^{i\varphi}$ - k.s. ko'rsatkichli shakli deyiladi.

Koshi-Adamar formulasi - $R \in [0, \infty]$ son $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$ formula bilan aniqlanadi.

Koshi-Riman sharti- $\boldsymbol{\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}}$.

Konform akslantirish – z kompleks tekislikning D sohasini w kompleks tekislikning G sohasiga o'zaro bir qiymatli akslantirish konform deyiladi, agar bu akslantirish shu sohada burchakning saqlanish va cho'zilishning o'zgarmaslik xossasiga ega bo'lsa.

L

Lagrang (Ioseph Louis de Lagrange, 1736 - 1813) fransuz matematigi. Berlin FA prezidenti, Peterburg FA faxriy a'zosi. **Lagrange usuli** – o'zgarmasni variasiyalash usuli.

Laplas operatori - $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Limitik nuqta - $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}$ nuqta $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning limitik nuqtasi deyiladi, agar bu nuqtaning ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ atrofi $U_\varepsilon(a) = \{z: |z - a| < \varepsilon\}$da berilgan ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashgan bo'lsa.

Loran qatori- $\boldsymbol{f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n}$ **.**

M

Maxsus nuqta Ikki o'zgaruvchili chiziqli birjinsli o'zgarmas koeffisiyentli tenglama maxsus nuqtalari **sinflari**: egar, tugun, dikretik tugun, tug'ma tugun, fokus, markaz (Bu sinflash Puancare tomonidan taklif etilgan)

Maple matematik paket(misol va masalalar yechish ychyn dastur).

Maxsus yechim har bir nuqtasida yagonalik sharti bajarilmagan yechim.

Maxsus nuqta mavjudlik va yagonalik teoremasi shartlari bajarilmagan nuqta.

Muhim maxsus nuqta - $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning muhim maxsus nuqtasi deyiladi agar $\boldsymbol{\lim_{z\to a} f(z)}$ mavjud bo'lmasa**.**

O

Ochiq to'plam – barcha nuqtalari ichki nuqtalardan iborat to'plam.

P

Puancare (Poincare Henri Iules, 1854 - 1912) fransuz matematiki.

Pikar(Picard Emile Charle, 1856 - 1941) fransuz matematiki.

Pikar yaqinlashishlari (ketma – ket yaqinlanishlar)

$$y_n = (x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) dt \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Q

Qo'shma kompleks son - $\bar{z} = x - iy$ **son** $z = x + iy$ songa q.k. son deyiladi.

Qutb maxsus nuqta –$z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning qutbi deyiladi agar $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

R

Rikkati tenglamasi $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

Rikkati (Riccati Iacopo Francesco, 1676 - 1754) italiyan matematiki.

Riman sferasi – kengaytirilgan kompleks tekislikning cferaga stereogfafik proeksilash.

S

Soha- D to'plam soha deyiladi, agar bog'lamli va ochiq bo'lsa.

T

Tenglama – agar tenglamada bir o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, tenglama **oddiy differensial** tenglama deyiladi.

agar tenglamada bir nechta argumentga bog'liq funksiya o'z hosilalari bilan qatnashsa bunday tenglama **xususiy hosilali** differensial tenglama deyiladi.

Trayektoriya integral chiziqni holatlar fazosidagi izi.

To'liq differensialli tenglama

$F(x, y, x', \ldots, y^{(n)}) = 0$ tenglamanig chap tomoni biror funsiyaning to'liq differensialiga teng bo'lsa.

V

Veyershtrass Karl Teodar Vil'gelm (31.10.1815-19.02.1897) –nemis matematigi. Berlin FA a'zosi (1856 y.) Asosiy natijalari Analitik funksiyalarning biror sohada tekis yaqinlashuvchi qatorining yig'indisi analitik funksiya bo'lishi, butun funksiyalarni cheksiz ko'paytma ko'rinishda ifodalash

U

Umumiy yechim tenglama yechimi oshkor ko'rinishda

Umumiy integral tenglama yechimi oshkorlik ko'rinishda.

Ch

Chiziqli tenglama: birinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan $y' = p(x)y + q(x)$

n – chi tartibli bir jinsli bo'lmagan $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$

Birinchi tartibli bir jinsli $y' = (x)y$

n – chi tartibli bir jinsli. $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$.

Chegaraviy masala izlanuvchi funksiya va uning hosilalari qiymatlari argumentning ikkidan kam bo'lmagan qiymatlarida berilgan bo'lsa.

Chebishev(Чебышев Пафнутий Львович ,1821 - 1894) rus matematiki

Chegirma – yakkalangan maxsus z_0 nuqtaga nisbatan analitik bo'lgan $f(z)$ funksiyaning chegirmasi deb bu funksiyani shu nuqta atrofida Loran qatoriga yoyganda $(z - z_0)^{-1}$ ning koeffisentiga aytiladi.

Chegaralangan ketma-ketlik- Agar $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning har bir hadining moduli biror musbat sondan kichik bo'lsa, ya'ni shunday chekli $M > 0$ son mavjud bo'lib, barcha z_n lar uchun $|z_n| < M$ bo'lsa, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Y

Yaqinlashuvchi ketma-ketlik - ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi, agar chegarlangan va yagona limitik nuqtaga ega bo'lsa.

Yopiq to'plam deyiladi agar to'plamning barcha limitik nuqtalari shu to'plamga tegishli bo'lsa.

Yechim – Tenglama qaralayotgan fazoning ushbu tenglamani ayniyatga aylantiradigan yechimiga aytiladi.