Ahmedova N. M.

MATEMATIKA

Ahmedova Nilufar Mamasidiqovna. Qo‘qon DPI dotsenti
Matematika: O‘quv qo‘llanma.

Taqrizchilar: H. Xonboboev. Qo‘qon DPI o‘quv ishlari prorektori, texnika fanlari nomzodi,dotsent
X. Ustajalilova. Qo‘qon DPI matematika kafedrasi mudiri, pedagogika fanlari nomzodi, dotsent

tahrirchi: D.Nizomiddinova BTM kafedrasi katta o‘qituvchisi

Mazkur o‘quv qo‘llanma O‘zbekiston respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta`lim vazirligining 2016 yil 13 mart ilmiy kengashida tasdiqlanib, 2016 yil 6 aprel buyrug‘iga asosan 137-020 raqami bilan nasr guvohnomasini olgan.

Ushbu “Matematika” o‘quv qo‘llanmasi pedagogika institutlari va pedagogika kollejlari “Boshlang‘ich ta`lim” yo‘nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan.

Annotasiya

Ushbu “Matematika” o‘quv qo‘llanmasi pedagogika institutlari va pedagogika kollejlari “Boshlang‘ich ta`lim” yo‘nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, oltita bobdan iborat. Har bir bobda bir necha paragraflar bo‘lib, bu paragraflar boblarni turli yo‘nalishlarini ochib beradi. O‘quv qo‘llanma asosan To‘plam va unga bog‘liq boshlang‘ich tushunchalar, nomanfiy butun sonlar, son tushunchasini kengaytirish, haqiqiy sonlar va ular ustida amallar, algebra elementlari, matematik analiz asoslari mavzularini o‘z ichiga olgan bo‘lib, bu mavzularni “Boshlang‘ich ta`lim” yo‘nalishi namunali dasturi va talablariga moslab yozilgan. O‘quv qo‘llanma shu yo‘nalish talabalariga o‘qilgan ma`ruzalar asosida yozilgan.

Annotation.

This “Mathematics” manual, consists of six chapters, is intended for the students of the specialization “Primary education” of the Pedagogical Institutes and colleges. Every chapter contains several sections which explain various aspects of each chapter. Mainly this manual includes Aggregate and connected with it preliminaries, nonnegative whole numbers, enlarging the notion of number, real numbers and operations with them, elements of algebra, the basis of the mathematical analysis, these themes are written in accordance with the model program and requirements of the specialization “Primary education”. The manual is based on the lectures of this specialization.

O‘zbekiston Respublikasida ta’lim sohasida olib borilayotgan islahotlar sharoitida hozirgi zamon pedagogiga bir qator yangi talablar qo‘yilmoqda. Shunga ko‘ra hozirgi zamon o‘qituvchilari ta’lim va tarbiyaning yangi shakllari, maqsadi, usullari, vositalari va tashkiliy tomonlarini tanlashda o‘sib kelayotgan yosh avlod ehtiyojlarini hisobga olishlari zarur. Xuddi shu maqsadda hozirda institutimiz professor-o‘qituvchilari tomonidan qator izlanishlar, tashabbuslar amalga oshirilib kelinmoqda. Mazkur o‘quv qo‘llanmani ham mana shunday izlanishlarning mevasi deb aytish mumkin.

Ushbu “Matematika” o‘quv qo‘llanmasi pedagogika institutlari va pedagogika kollejlari “Boshlang‘ich ta`lim” yo‘nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, oltita bobdan iborat. Har bir bobda bir necha paragraflar bo‘lib, bu paragraflar boblarni turli yo‘nalishlarini ochib beradi. O‘quv qo‘llanma asosan To‘plam va unga bog‘liq boshlang‘ich tushunchalar, nomanfiy butun sonlar, son tushunchasini kengaytirish, haqiqiy sonlar va ular ustida amallar, algebra elementlari, matematik analiz asoslari mavzularini o‘z ichiga olgan bo‘lib, bu mavzularni “Boshlang‘ich ta`lim” yo‘nalishi namunaviy fan dasturi va talablariga moslab yozilgan. O‘quv qo‘llanma shu yo‘nalish talabalariga o‘qilgan ma`ruzalar asosida yozilgan.

O‘quv qo‘llanmada nazariy bilimlar bilan bir qatorda amaliy jihatlarga alohida o‘rin berilgan. Har bir mavzuning nazariy qismi amaliy jihatdan keng ochib berilgan va mustaqil yechish uchun etarlicha ma`lumotlar berilgan.

O‘quv qo‘llanma yutuqlar bilan birga ba`zi juz`iy kamchiliklardan ham holi emas. Ba`zi mavzularda bir oz talab darajasidan ko‘ra murakkablik seziladi. Lekin bu kamchiliklar qo‘llanmaning mazmuniga jiddiy zarar etkazmaydi. Qo‘llanmani nashrga tavsiya qilish mumkin.

X. Xonboboev
Qo‘qon DPI o‘quv ishlari prorektori, texnika fanlari nomzodi, dotsent

Ushbu “Matematika” o‘quv qo‘llanmasi pedagogika institutlari va pedagogika kollejlari “Boshlang‘ich ta`lim” yo‘nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, oltita bobdan iborat. Har bir bobda bir necha paragraflar bo‘lib, bu paragraflar boblarni turli yo‘nalishlarini ochib beradi. O‘quv qo‘llanma asosan to‘plam va unga bog‘liq boshlang‘ich tushunchalar, nomanfiy butun sonlar, son tushunchasini kengaytirish, haqiqiy sonlar va ular ustida amallar, algebra elementlari, matematik analiz asoslari mavzularini o‘z ichiga olgan bo‘lib, bu mavzularni “Boshlang‘ich ta`lim” yo‘nalishi namunabiy o‘quv dasturi va talablariga moslab yozilgan. O‘quv qo‘llanma shu yo‘nalish talabalariga o‘qilgan ma`ruzalar asosida yozilgan.

O‘quv qo‘llanmada nazariy bilimlar bilan bir qatorda amaliy jihatlarga alohida o‘rin berilgan. Har bir mavzuning nazariy qismi amaliy jihatdan keng ochib berilgan va mustaqil yechish uchun etarlicha ma`lumotlar berilgan.

O‘quv qo‘llanmada har bir mavzuning amaliy ishlanmalar, misollarning echilish usullari, va echib ko‘rsatilgan misollar bilan boyitilganligi e`tiborga loyiqdir. Mavzu so‘ngida keltirilgan savollar va mustaqil ishlash uchun berilgan misol va masalalar mavzuni to‘liq o‘zlashtirilishiga xizmat qiladi.

Shu jihatlariga alohida e`tabor qaratgan holda qo‘llanmani nashrga tavsiya etaman.

X.Ustajalilva
Pedagogika fanlari nomzodi.

I BOB. To‘plam va unga bog‘liq boshlang‘ich tushunchalar

1§. To‘plam

1.1.To‘plam elementlari. Bo‘sh to‘plam

To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalari bo‘lib, u ta’rifsiz qabul qilinadi. Buning sababi shundaki, u tushunchaga berilgan ta’rifning o‘zi ham yanada soddaroq tushunchaga asoslangan bo‘lishi kerak, ammo bunday tushunchaga ega emasmiz. "To‘plam" so‘zi matematikada "yig‘in", "to‘da", "uyum" ma'nosida ishlatiladi. (To‘plamlar nazariyasining asoschilari Cheh matematigi B.Bolsano, nemis matematiklari Georg Kantor R. Dedikentlar hisoblanadi).To‘plamning ta'rifini qidirmasdan, misollar bilan tushuntiramiz.

Masalan, respublikamizdagi barcha 9-sinf o‘quvchilari to‘plam hosil qiladi deyish mumkin, shuningdek o‘zbek alfavitidagi barcha harflar, barcha natural sonlar, hamma uzluksiz funksiyalar, tekislikdagi barcha nuqtalar, Qo‘qon shahridagi barcha chinorlar ham to‘plam tashkil etadi. Bunday misollarni ko‘p keltirish mumkin. Umuman, to‘plam tushunchasini anglashda uni turli narsalarning birlashmasi (majmuasi) ekanligini unutmaslik kerak.

Berilgan to‘plamni tashkil etuvchi ob’ektlar (narsalar) uning elementlari deyiladi. Odatda to‘plam berilganda uning elementlari bir yoki bir necha belgilarga muvofiq aniqlangan bo‘ladi. Bu belgilarga asoslanib ham bir narsa berilgan to‘plamning elementi ekanligi yoki elementi emasligini ayta olish mumkin. To‘plamda bir xil (bir-biridan farq qilib bo‘lmaydigan) elementlar bo‘lmaydi. Masalan $(x-1)(x+1)^3=0$ tenglamaning barcha ildizlari to‘plami 1, 1, -1, -1, -1 elementlardan iborat bo‘lmasdan, balki 1 va -1 elementlardan iborat.

Agar to‘plam birorta ham elementga ega bo‘lmasa bo‘sh to‘plam deyiladi va uni Ø (ba’zan esa ^ yoki 0) bilan belgilanadi. To‘plamlarni lotin alfavitining A, B, C, ..., X, Y, Z singari bosh harflari bilan, uning elementlarini esa a,b,s,..., x, y, z kabi kichik harflar bilan belgilaymiz. Biror a narsa A to‘plamning elementi ekanligi $a\in A$ ($A\ni a$) shaklida, a narsa A to‘plamga tegishli emasligini esa $a\notin A$ ($a\notin A$) ko‘rinishda yoziladi va ularni mos ravishda "a element A to‘plamga tegishli" "a element A to‘plamga tegishli emas" deb o‘qitiladi.

Matematikada asosiy sonlar to‘plamini quyidagicha belgilanadi: N - natural sonlar to‘plami, Z - butun sonlar to‘plami, Q – ratsional sonlar to‘plami, J - irratsional sonlar to‘plami, R - haqiqiy sonlar to‘plami, C - kompleks sonlar to‘plami.

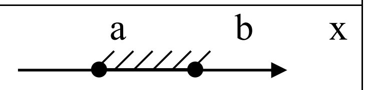
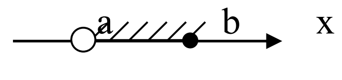
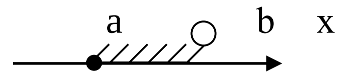
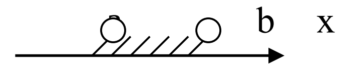
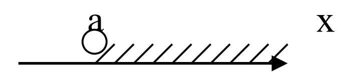
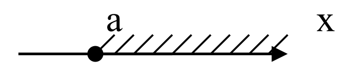
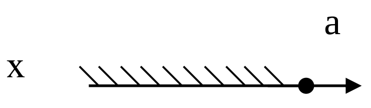
Agar berilgan A to‘plamning elementlari biror p(x) xossaga ega bo‘lsa, u to‘plamni $A=\{x: p(x)\}$ yoki $A=\{x \mid p(x)\}$ ko‘rinishda yozamiz. Bu holda p(x) xossa to‘plamning xarakteristik xossasi deyiladi.

1-misol. Agar A barcha juft natural sonlar to‘plami bo‘lsa, u holda uni quyidagicha belgilaymiz $A=\{x: x=2k, k\in N\}$.

Agar to‘plam chekli sondagi elementlardan iborat bo‘lsa uning barcha elementlarini ko‘rsatish bilan belgilanadi.

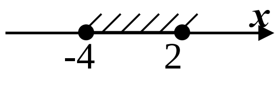
Masalan, A to‘plam 1,2,3,4,5 elementlardan iborat bo‘lsa, uni A={1,2,3,4,5} kabi yoziladi.

2-misol.

To‘plamni xarakteristik xossasi bilan berilishi	**To‘plamni belgilanishi.**	**To‘plamni sonlar o‘qida tasvirlanishi**
$\{x: x\in \mathbf{R}\ \ a\le x\le b\}$	[a, b]	
$\{x: x\in \mathbf{R}\ \ a< x \le b\}$	(a, b]	
$\{x: x\in \mathbf{R}\ \ a \le x <b\}$	[a, b)	
$\{x: x\in \mathbf{R}\ \ a <x <b\}$	(a, b)	
$\{x: x\in \mathbf{R}\ \ x>a \}$	(a, ∞)	
$\{x: x\in \mathbf{R}\ \ x\ge a \}$	[a, ∞)	
$\{x: x\in \mathbf{R}\ \ x<a\}$	(-∞,a)	
$\{x: x\in \mathbf{R}\ \ x\le a\}$	(-∞, a]	

3-misol. A to‘plam 24 sonining barcha natural bo‘luvchilari to‘plami bo‘lsa, uni A={x: 24$\vdots$x, x$\in$N}yoki A={1,2,3,4,6,8,12,24} ko‘rinishda yoziladi.
4-misol. $|x+1|\le$ 3 tengsizlikni yechimlari to‘plamini sonlar o‘qida tasvirlang.

Berilgan $|x+1|\le 3$ tengsizlikni yechamiz $-3\le x+1\le 3$; $-4\le x\le 2$. Demak, tengsizlikni yechimlari to‘plami A={x: x$\in$**R**, $-4\le h\le 2$} bu to‘plamni koordinatalar to‘g‘ri chizig‘idagi ifodasi quyidagicha:



SAVOLLAR

1. To‘plam tushunchasi qanday aniqlanadi?
2. Asosiy sonlar to‘plami qanday belgilanadi?
3. To‘plamni xarakteristik xossasi qanday aniqlanadi?
4. Bo‘sh to‘plam qanday belgilanadi?
5. To‘plamlar necha xil usul bilan berilishi mumkin?

1.2. To‘plamlar orasidagi munosabatlar

To‘plamlarning kesishmasi va birlashmasi

1 – ta’rif. Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamning ham elementi bo‘lsa, A to‘plam B to‘plamning **qismi** yoki **qism to‘plami** deyiladi va bu munosabatni $A \subset B$ yoki $B \supset A$ shaklda yoziladi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, har qanday A to‘plamning o‘zi o‘zining qism to‘plami, ya’ni $A \subset A$ ekani bevosita kelib chiqadi.

Bo‘sh to‘plam esa har qanday to‘plamning qismidir. A va Ø to‘plamlar A to‘plamning xosmas qismlari deyiladi; A to‘plamning hamma boshqa qismlari esa uning xos qismlari deyiladi.

1 – misol**.** *A={1, 3, 5}* , *B={1, 2, 3, 4, 5, 6}* bo‘lsa, u holda A to‘plam B to‘plamning xos qismi bo‘ladi, ya’ni $A \subset B$.

2 – misol. *A={1, 3, 5, 6}* va *B={1, 3, 4, 7, 8}* to‘plamlarning hech biri ikkinchisining qismi emas.

3 – misol. Barcha juft sonlar to‘plami barcha ratsional sonlar to‘plamining xos qismidir.

2 – ta’rif. Agar A to‘plam B to‘plamning qismi va B to‘plam A to‘plamning qismi bo‘lsa, A to‘plam B to‘plamga **teng** deyiladi va bu munosabat *A=B* shaklda yoziladi: demak *A=B* tenglik $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarning birgalikda bajarilishi bilan teng kuchlidir.

Masalan, *A={-1, 1}* va B to‘plam esa $(x-1)^2\ (x+1)^3$ ga tenglamaning barcha ildizlari to‘plami bo‘lsa, A top`lam B to‘plamga teng bo‘ladi.

3 – ta’rif. A va B to‘plamlarning aqalli bittasiga tegishli bo‘lgan elementlarning C to‘plamini A va B to‘plamlarning **birlashmasi** (yig‘indisi) va $C = A \cup B$ $(C = A + B)$ ko‘rinishida belgilanadi, A va B to‘plamlarni qo‘shiluvchi to‘plamlar, C esa yig‘indi to‘plam deyiladi.

4 – misol. *A={1, 3, 5,}* va *B={2, 3, 4,}* bo‘lsa $A \cup B$ *={1, 2, 3, 4, 5}* bo‘ladi.

Qo‘shiluvchi to‘plamlar soni ixtiyoriy bo‘lganda ham birlashma(yig‘indi) yuqoridagi kabi aniqlanadi va quyidagicha belgilanadi: $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k, \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$.

4 – ta’rif. Bir vaqtda ham A to‘plamga, ham B to‘plamga tegishli bo‘lgan elementlarning C to‘plami A va B to‘plamlarning **kesishmasi**(ko‘paytmasi) deyiladi va $C = A \cap B$ $(C = A \cdot B)$ ko‘rinishda belgilanadi. A va B to‘plamlar ko‘paytuvchi to‘plamlar, C ko‘paytma (kesishma) to‘plam deyiladi.

To‘plamlar soni har qanday bo‘lganda ham ularning kesishmasi $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k, \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ orqali belgilanadi.

5 – misol. *A=(-∞;7]* va *B=[1;+ ∞)* to‘plamlarning kesishmasini toping.
$A \cap B$=[1,7].

6 – misol. A – 3 ga karrali bo‘lgan natural sonlar to‘plami B – 4 ga karrali bo‘lgan natural sonlar to‘plami bo‘lsa, $A \cap B$ ni toping. $A \cap B$ - 12 ga karrali bo‘lgan sonlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

To‘plamlar ustidagi asosiy amallar quyidagi xossalarga ega bo‘ladi:

1. $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$ - kommutativlik xossasi.
2. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ - assosiativlik xossasi.
3. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),\ (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ - distributivlik xossasi.
4. $A\cup A=A\ \ A\cap A=A,\ \ B\subset A$ bo‘lsa, $A\cup B=A,\ \ A\cap B.$
Isbot: Bu tengliklarning isbotlari bir - biriga o‘xshash bo‘lgani sababli, ularning bittasini masalan $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ tenglikni isbotlaylik, buning uchun bu tenglikni chap tomonidagi ixtiyoriy elementi o‘ng tomonida borligini va aksincha o‘ng tomonidagi ixtiyoriy elementni chap tomonida borligini isbotlash kifoya $a\in(A\cup B)\cap C$ bo‘lsin, u holda $a\in(A\cup B)$ va $a\in C$ munosabat kelib chiqadi $a\in(A\cup B)$ munosabatdan $a\in A$ yoki $a\in B$ munosabatlarni kamida birining o‘rinligi kelib chiqadi. Agar $a\in A$ va $a\in C$ bo‘lsa, $a\in A\cap C$ bo‘ladi, agar $a\in B$ va $a\in C$ bo‘lsa, $a\in B\cap C$ bo‘ladi. Har ikki holda ham $a\in(A\cup C)\cup(B\cap C)$ ekanligi kelib chiqadi. Bularda $(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$ (1) munosabatni o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi $a\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$ birlashmaning ta’rifidan $a\in(A\cap C)$ yoki $a\in B\cap C$ munosabatlarning kamida biri o‘rinli. Agar $a\in A\cap C$ bo‘lsa, $a\in A$ va $a\in C$, agar $a\in B\cap C$ bo‘lsa, $a\in B$ va $a\in C$ bo‘ladi, bulardan $a\in A$ yoki $a\in B$ va $a\in C$ ekanligi kelib chiqadi, ya’ni $a\in(A\cup B)\cap C$ bo‘ladi.

Yuqoridagilardan $(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$ (2) munosabat o‘rinli bo‘ladi. Demak, (1) va (2) munosabatlarda $A\cup B\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

Savollar

1. Qism to‘plam qanday ta’riflanadi?
2. To‘plamlarning birlashmasi qanday ta’riflanadi?
3. Qo‘shiluvchi to‘plamlarni soni ikkitadan ko‘p bo‘lsa, ularning birlashmasi qanday aniqlanadi?
4. To‘plamlarni kesishmasiga ta’rif bering?
5. To‘plamlarni birlashmasi va kesishmasi qanday xossalarga ega?

1.3. To‘plamlar ayirmasi. To‘ldiruvchi to‘plam

Aytaylik B to‘plam A to‘plamning qism to‘plami bo‘lsin. B to‘plamga tegishli bo‘lmagan A to‘plamning barcha elementlaridan tuzilgan C to‘plam B ni A ga qadar **to‘ldiruvchi** to‘plam deyiladi va uni C_AB (B_A) ko‘rinishda belgilanadi, ya’ni $C_AB=A\setminus B$.

A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlarida tuzilgan C to‘plamni A to‘plamdan B to‘plamning **ayirmasi** deyiladi va C=A\B (yoki C=A – B) ko‘rinishida belgilanadi.

A va B to‘plamlarning simmetrik ayirmasi deb ushbu (A\B)∪(B\A) to‘plamga aytiladi va $A_\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ ko‘rinishda belgilanadi.

Bundan keyingi mulohazalarda qaraladigan to‘plamlar tayin bir to‘plamning qism to‘plamlari deb faraz qilinadi. Bunday to‘plamni biz **universal** to‘plam deb ataymiz va uni X harfi bilan belgilaymiz. Umuman aytganda, har bir qaralayotgan masala uchun o‘zining universal to‘plami bo‘ladi.

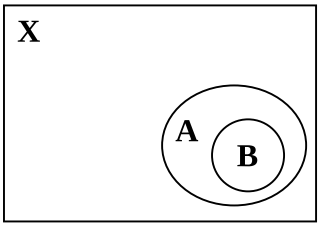
X ixtiyoriy universal to‘plam bo‘lib, A uning biror qism to‘plami bo‘lsin $(A\subset X)$. X to‘plamning A to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan iborat to‘plam A ning X ga qadar **to‘ldiruvchi** to‘plami deyiladi va uni C_XA (yoki CA, $\overline{A}$) ko‘rinishda belgilanadi.

Agar $A\subset X$ va $B\subset X$ bo‘lsa, $C_X(A\cup B)=C_XA\cap C_XB$ va $C_X(A\cap B)=C_XA\cup C_XB$ ayniyatlar o‘rinli. Bu ayniyatlarni ikkilik qonunlari deb ataladi.

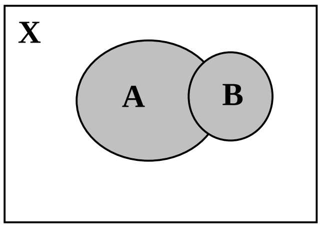
1 – misol. Agar A={1, 2, 3, 4, 5}, B={0, 2, 4, 6, 8} bo‘lsa, u holda
A\B={1, 3, 5} , B\A={0, 6, 8} bo‘ladi.

2 – misol. Agar A={1, 2, 3, 5, 7, 10} , B={2, 4, 6, 8, 10} bo‘lsa, u holda
$A\Delta B$={1, 3, 4, 5, 6, 7, 8} bo‘ladi.

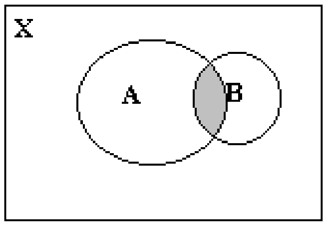
To‘plamlar ustida amallarning Eyler – Venn diagrammalaridagi tasvirlari 1.1 – chizmada berilgan.



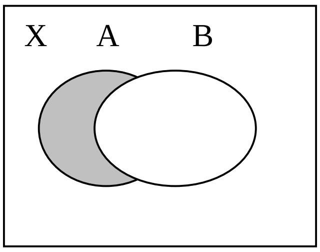
A ⊃ B



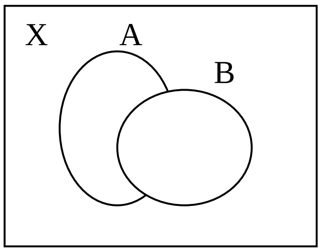
A ∪ C



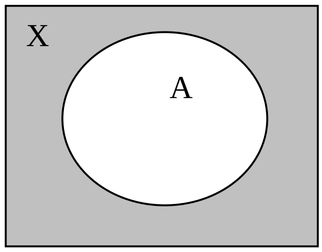
A ∩ B



A\B



A Δ B



C_XA

3 – misol. Ko‘paytirish amalining ayirish amaliga nisbatan distributivlik qonuni o‘rinli, ya’ni

$$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C) \qquad (1)$$

Yechish**:** $x\in(A\setminus B)\cap C$ ixtiyoriy element bo‘lsin, bundan $x\in(A\setminus B)$ va $x\in C$. $x\in A\setminus B$ bo‘lgani uchun ayirish amalining ta’rifiga ko‘ra $x\in A$ va $x\notin B$. Shunday qilib $x\in A,\quad x\in C$ demak, $x\in A\cap C$, ammo $x\notin B\cap C$. Oxirgi munosabatlardan $x\in(A\cap C)\setminus(B\cap C)$, demak

$$(A\setminus B)\cap C\subset(A\cap C)\setminus(B\cap C). \qquad (2)$$

Endi

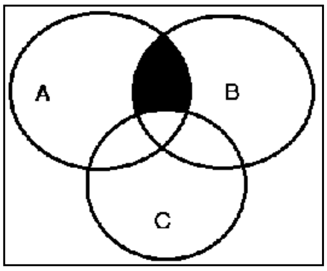
$$(A\setminus B)\cap C\supset(A\cap C)\setminus(B\cap C). \qquad (3)$$

ekanligini ko‘rsatamiz. $y \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ ixtiyoriy element bo‘lsin, u holda $y \in A \cap C$ va $y \notin B \cap C$ bundan $y \in A$, $y \in C$ va $y \notin B$, demak, $y \in (A \setminus B) \cap C$ shu bilan (3) munosabatni o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. (2) va (3) munosabatlardan (1) tenglikni to‘g‘ri ekanligi kelib chiqadi.

4 – misol. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ munosabatni Eyler – Venn diagrammalari yordamida isbotlang. Berilgan munosabatni chap va o‘ng tomonida turgan to‘plamlarni Eyler – Venn diagrammalardagi tasviri 1.2 – chizmada berilgan.

Savollar

1. Qanday to‘plamga to‘ldiruvchi to‘plam deyiladi?
2. A to‘plamdan B to‘plamni ayirmasi va B to‘plamdan A to‘plamni ayirmasi ta’rifida qanday farq qiladi?
3. Ikkilik qonuni deb qanday qonunga aytiladi?
4. Eyler – Venn diagrammasi haqida nima deyish mumkin?
5. Simmetrik ayirmaga ta’rif bering?



1.2 – chizma

1.4. To‘plamlarning dekart ko‘paytmasi

Aytaylik A va B bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Birinchi element A to‘plamga va ikkinchi element B to‘plamga qarashli bo‘lgan barcha (a,b) juftlardan iborat to‘plam A va B to‘plamlarning **Dekart** (to‘g‘ri) ko‘paytmasi deyiladi va A×B kabi belgilanadi.

Shunday qilib $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ to‘plam A va B to‘plamlarni Dekart (to‘g‘ri) ko‘paytmasi deyiladi. Agar A=B bo‘lsa, A×A to‘pam (a, b), $a \in A$ va $b \in A$ juftlikardan iborat bo‘ladi. A×Ø= Ø ×A= Ø bo‘ladi. To‘plamlarni Dekart ko‘paytmasi uchun A×B≠ B×A, va A×(B×C)≠(A×B)×C .

Agar A bo‘sh bo‘lmagan to‘plam berilgan bo‘lsa, uning elementlaridan tartiblashgan juftlik, uchlik va hokazo n – liklar tuzish mumkin. “Anor” so‘zining harflari tartiblashgan to‘rtlikni hosil qiladi.

Aytaylik $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lib, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$ bo‘lsin, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – tartiblashgan n – likni hosil qiladi. Ko‘p hollarda “tartiblashgan n - lik” o‘rniga qisqacha “**kortej**” deyiladi, n – kortej **uzunligi,** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lar esa uning komponenta (koordinata)lari deyiladi.

1 – misol. A={1, 2, 3}, B={a, b} berilgan bo‘lsa, A×B, B×A, A×A, B×B larni toping:

$A \times B = \{(1;a), (2;a), (3;a), (1; b), (2; b), (3; b)\};$

$B \times A = \{(a; 1), (b; 1), (a; 2), (b; 2); (a; 3), (b; 3)\};$

$A \times A = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3); (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\};$

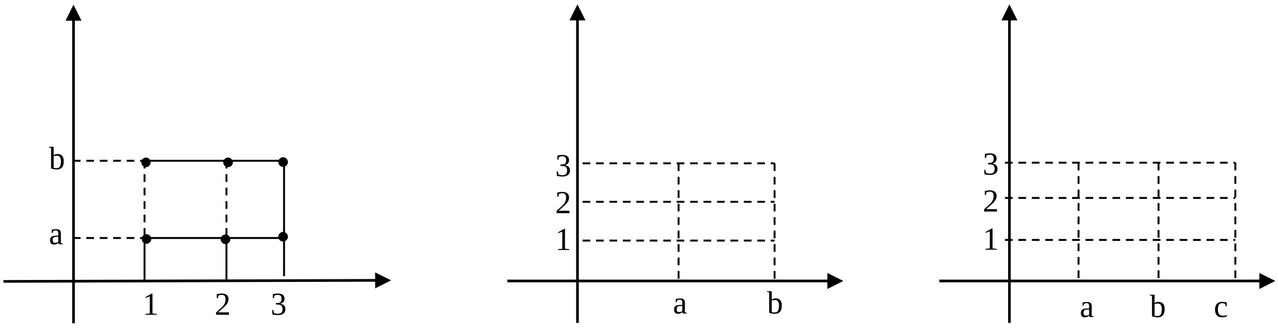
$B \times B = \{(a; a), (a; b); (b; a), (b; b)\}$

2 – misol. A=[1;3], B=[2;4] lar berilgan bo‘lsa, A×B, B×A larni toping:

$A \times B = [1;3] \times [2;4] = \{(a; b) : 1 \le a \le 3,\ 2 \le b \le 4\}$

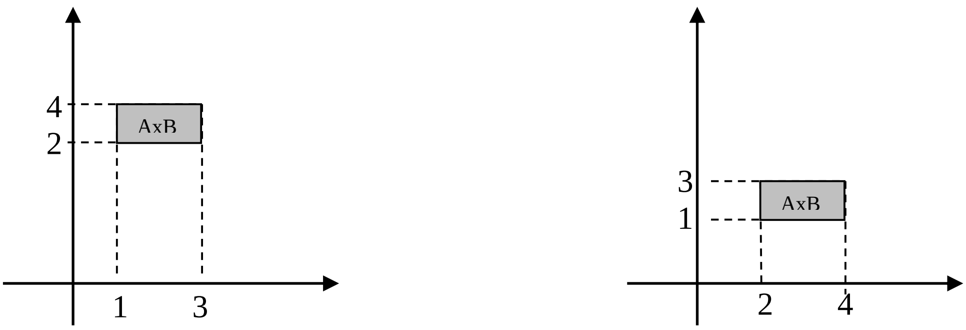
$B \times A = [2;4] \times [1;3] = \{(a; b) : 2 \le a \le 4,\ 1 \le b \le 3\}$

Yechish: $A\times B$ to‘plam elementlarini birinchi koordinatalarini (A ning elementlarini) Ox o‘qida, ikkinchi koordinatalarini (B ning elementlarini) Oy o‘qida tasvirlaymiz. Bu nuqtalardan, mos ravishda, Ox, Oy o‘qlarga perpendikulyar chiqaramiz. Bu perpendikulyarning kesishish nuqtalarini koordinatalari $A\times B$ to‘plamlar elementlardan iborat. Koordinatalari $A\times B$ ning elementlari (sonlar jufti) ga teng bo‘lgan barcha nuqtalar to‘plami. $A\times B$ to‘plamning geometrik tasviri deyiladi. 1 – misolda keltirilgan $A\times B$, $B\times A$, $A\times A$ to‘plamlarning geometrik tasviri 1.4 – chizmada, 2 – misolda keltirilgan $A\times B$, $B\times A$ to‘plamlarning geometrik tasviri 1.5 – chizmada tasvirlangan.



$A\times B$ $B\times A$ $A\times A$

1.4 – chizma.



1.5 – chizma.

3 – misol. Ixtiyoriy A, B, va C to‘plamlar uchun ushbu

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ munosabatning to‘g‘ri ekanligini isbotlang.

Yechish: a) ixtiyoriy $(x,y)\in A\times(B\cup C)$ bo‘lsin, bundan $x\in A$, $y\in B\cup C$ bo‘lganligi uchun birlashmani ta’rifidan $x\in A$, $y\in B$ yoki $y\in C$. Shunday qilib, $x\in A$ va $y\in B$ yoki $x\in A$ va $y\in C$ bulardan to‘g‘ri ko‘paytmaning ta’rifidan $(x;y)\in A\times B$ yoki $(x;y)\in A\times C$ Demak $(x;y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$ ya’ni, $A\times(B\cup C)\subset(A\times B)\cup(A\times C)$ (2)

b) ixtiyoriy $(x;y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$ bo‘lsin. Bundan $(x;y)\in(A\times B)$ yoki $(x;y)\in(A\times C)$. To‘g‘ri ko‘paytmaning ta’rifidan $x\in A$ va $y\in B$ bulardan $x\in A$ va $y\in B\cup C$. Demak, $(x;y)\in A\times(B\cup C)$ yoki

$$(A\times B)\cup(A\times C)\subset A\times(B\cup C) \qquad (3)$$

(2) va (3) munosabatlardan (1) tenglikni o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Savollar

1. To‘plamlarni ko‘paytmasi bilan dekart ko‘paytmasi o‘rtasida qanday farq bor?
2. To‘plamlarning dekart ko‘paytmasi uchun A×B = B×A tenglik o‘rinli bo‘ladimi?
3. To‘plamlarni to‘g‘ri ko‘paytmasi uchun distrbutivlik qonun o‘ringa ega bo‘ladimi?
4. Kortej deganda nimani tushunamiz?
5. Kortejni uzunligi qanday aniqlanadi?

1.5. To‘plamlarni sinflarga ajraish tushunchasi

Aytaylik A_1, $A_{2,}$, . . . , A_n to‘plamlar berilgan A to‘plamni qism to‘plamlari bo‘lib

a) $A_i \cap A_j = \varnothing \;\; i \neq j, \;\; i, j = 1, 2, ..., n.$

b) $A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n = A$ bo‘lsa, u holda A to‘plamni o‘zaro kesishmaydigan A_1,A_2, . .A_n **qism to‘plamlarga** (sinflarga) ajralgan deyiladi.

Masalan N natural sonlar to‘plamini juft sonlardan va toq sonlardan iborat ikkita sinfga ajratish mumkin.

1 – misol. X – uchburchaklar to‘plami, A, B, va S, lar uning qism to‘plamlari. Agar A, B, va S lar quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, X ning o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plamlaridan iborat bo‘ladimi?

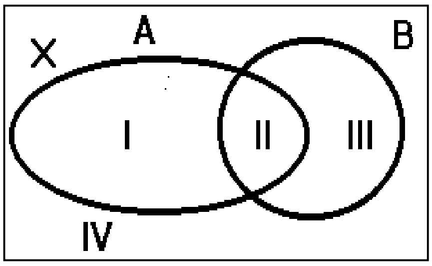
a) A – o‘tkir burchakli uchburchaklar to‘plami, B – o‘tmas burchakli uchburchaklar to‘plami, S – to‘g‘ri burchakli uchburchaklar to‘plami;

b) A – teng yonli uchburchaklar to‘plami, B – teng tomonli uchburchaklar to‘plami, S – turli tomonli uchburchaklar to‘plami.

Yechish: a) X to‘plamni yuqoridagi ikki shartni qanoatlantirishini ko‘rsataylik. A, B va S to‘plamlar jufti – jufti bilan kesishmaydi: bir vaqtda to‘g‘ri, o‘tkir va o‘tmas burchakli bo‘lgan uchburchak mavjud emas, shu bilan birga o‘tkir, o‘tmas va to‘g‘ri burchaklar uchburchaklar to‘plamlarini birlashmasi barcha uchburchaklar to‘plamiga teng bo‘ladi. Shunday qilib X to‘plam o‘tkir burchakli uchburchak, to‘g‘ri burchakli va o‘tmas burchakli o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlarga ajratildi.

d) teng yonli, teng tomonli va har xil tomonli uchburchaklar to‘plami o‘zaro kesishmasligini tekshiraylik. Ma’lumki teng tomonli uchburchaklar sinfi teng yonli uchburchaklar sinfini qismidan iborat bo‘lgani uchun, bu erda birinchi shart bajarilmadi. Shuning uchun X – uchburchaklar to‘plamini teng yonli, teng tomonli va har xil tomonli uchburchaklar sinfini ajratish mumkin emas.

2 – misol. X – uchburchaklar to‘plamida A – teng yonli uchburchaklar to‘plami va B – o‘tmas burchakli uchburchaklar to‘plamini ajratilgan, bu to‘plamlar uchun Eyler – Venn diagrammasini tuzamiz. X to‘plam nechta o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plamlar (sinflar)ga ajralishini ko‘rsataylik.



Yechish: A va B lar uchun $A \subset X$ va $B \subset X$ munosabat o‘ringa ega bo‘lganligi uchun A va B to‘plamlarni ifodalovchi figuralar X ni ifodalovchi to‘g‘ri to‘rtburchak ichiga chiziladi va A, B to‘plamlar kesishadi. Rasmdan ko‘rinadiki X to‘plam to‘rtta o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlarga ajraldi.

Bular I – o‘tmas burchakli bo‘lmagan teng yonli uchburchaklar to‘plami, II – o‘tmas burchakli teng uchburchaklar to‘plami, III – teng yonli bo‘lmagan o‘tmas burchakli uchburchaklar to‘plami, IV – teng yonli ham, o‘tmas burchakli ham bo‘lmagan uchburchaklar to‘plami. Shunday qilib X to‘plam o‘zaro kesishmaydigan I, II, III, IV qism to‘plamlarga (sinflarga) ajraldi. Bu o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plam (sinf) lar to‘plamlari ikkita xossasiga ko‘ra: “Teng yonli bo‘lish”, “O‘tmas burchakli bo‘lish” xossalariga ko‘ra ajratildi.

To‘plamlarni o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plam (sinf) larga ajratish, to‘plamlarni bir, ikki, uch va hokazo xossalariga ko‘ra ham ajratish mumkin. Bunda Eyler – Venn diagrammasidan foydalanish qulaydir.

Savollar

1. Qanday hollarda to‘plamlarni o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plamlarga ajralgan deyiladi?
2. To‘plamlarni sinflarga ajratish yagona usulda bo‘ladimi?
3. To‘plamlarni necha xil usul bilan sinflarga ajratish mumkin?
4. To‘plamlarni sinflarga ajratishda Eyler – Venn diagrammasidan qanday foydalanish mumkin.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. A={1, 2, 3, 4} va B to‘plamlar orasidagi munosabatlarni aniqlang; bunday

a) B={5, 6, 7}, b) B={1, 2, 3, 7, 8}, d) B={1, 2, 3}, e) B={1, 2, 3, 4}, f) B={1, 2, 3, 4, 5, 6}.

2. Qaysi hollarda A va B to‘plamlarda umumiy elementlarga ega:
   a) A – 4 – sinf o‘quvchilar to‘plami, B – a’lochilar to‘plami;
   b) A – jift sonlar to‘plami, B – toq sonlar to‘plami;
   d) A – 5 ga karrali sonlar to‘plami, B – 7 ga karrali sonlar to‘plami;
   e) A – to‘g‘ri burchakli uchburchaklar to‘plami, B – uchburchak to‘plami;
   f) A – teng tomonli uchburchak to‘plami, B – kvadratlar to‘plami.

3. A – barcha juft sonlar to‘plami. B – 6 ga karrali bo‘lgan natural sonlar to‘plami, C – 5 ga karrali bo‘lgan barcha natural sonlar to‘plami, D – 21 ning natural bo‘luvchilari to‘plami, E – toq sonlar to‘plami. Bu to‘plamlar A to‘plam bilan qanday munosabatda bo‘ladi.

4. A={a, b, s, d} to‘plamlar barcha qism to‘plamlarini tuzing, ular nechta?

5. . Quyidagi to‘plamlarning kesishmasi va birlashmasini toping:

a) A={a, b, c} va B={b, s, k, e} d) A={1, 2, 5, 6} va B={2, 3, 4, 5}

b) A={x, y, z} va B={α, β, γ}

6. “Geometriya” so‘zidagi harflar to‘plami bilin “geologiya” so‘zidagi harflar to‘plamining birlashmasi va kesishmasini toping.

7. $A=\{x: x\in N \quad x<10\},\ \ B=\{x: x\in Z,\ \ x>-4\}\ \ C=\{x: x\in N,\ 0<x<20\}$ to‘plamlar berilgan $A\cap C,\ A\cap B,\ B\cap C,\ A\cap B\cap C$ to‘plamlarni toping, ularni sonlar o‘qida tasvirlang, tengsizliklar yordamida yozing.

8. Quyidagi to‘plamlarning kesishmasi, birlashmasini toping va sonlar o‘qida tasvirlang. a) [8; 25] va [-1; 16] b) [-2, 1], [0; 9] va [-5; 1].

9. A={a, b, s, d, e}, B={s, d, f, k}, C={b, s, d, f, m} to‘plamlar berilgan. $K=(A\cup B)\cap C \quad R=(A\cup B)\cap C$ to‘plamlarning elementlarini toping. $m\in K,\ f\in R$ yozuvlari to‘g‘rimi?

10. $A=\{x: x\in R;\ -1\le x\le 2\},\ B=\{x: x\in R,\ 0\le x\le 4\},\ C=\{x: x\in R,\ -2\le x\le 0\}$ to‘plamlar berilgan sonlar o‘qi yordamida quyidagi to‘plamlarning xarakteristik xossalaridan foydalanib yozing: a) $A\cup B$; b) $A\cup C$; d) $B\cup C$; e) $B\cap C$; f) $A\cap B$; g) $A\cap C$; h) $(A\cup B)\cap C$; i) $A\cup B\cup C$; j) $A\cap B\cap C$.

11. To‘plamlarni sonlar o‘qida belgilab, ularning birlashmasi va kesishmasini toping.

a) $A=\{x/\ \frac{2}{3}\le x\le 4\frac{1}{2}\}$ va $B=\{x/\ -2\frac{1}{2}\le x\le 3\frac{1}{3}\}$

b) $A=\{x/\ -3{,}2<x<1{,}3\}$ va $B=\{x/\ -1{,}4<x<3{,}6\}$

d) $A=\{x/\ \frac{1}{2}<x\le\frac{5}{2}\}$ va $B=\{x/\ 2{,}1\le x<3{,}8\}$

e) $A=\{x/\ -\frac{3}{2}\le x\le\frac{8}{3}\}$ va $B=\{x/\ -\frac{5}{2}<x\le\frac{5}{2}\}$

12.O‘nli raqamlari A={2,5,7} to‘plamga, birlik raqamlari B={4,6} to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha ikki xonali sonlarni yozing.

13. Surati A={1,2} to‘plamdan, mahraji B={3, 4,5,6,7} to‘plamdan olingan barcha turli kasrlarni yozing.

14. Surat A={1,3,5,7,9,11} to‘plamdan, mahraji B={2,4,6,8,11,12} to‘plamdan olingan barcha kasr sonlarni yozing.

15. AxB to‘plam elementlarini yozing, bunda:

a) A={a,b,c,d,}, B={f,e} b) A={a,b,c,d}, B={x} d) A={a,b,c,d}, B={5} e) A={a,b,c,d}, B={1,2}

16. AxB={(1,2),(2,4),(4,16), (3,9), (5,25), (6,36)} to‘plam berilgan, A va B to‘plamlari elementlarini ko‘rsating.

17. A={5,9,4}, B={7,8,6} to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini tuzing. Hosil bo‘lgan to‘plamdan quyidagi xossalarga asosan qism to‘plamlar ajrating

a) juftliklarni birinchisi ikkinchisidan katta;

b) birinchisi 5 ga teng; B) ikkinchisi 7 ga teng; g) ikkinchisi 2 ga bo‘linadi.

18. Agar a) A={a,b,c}, B={3;5;9}

b) A={x;y},B={x,y,z}; d) A={3;5}, B={1;5}

bo‘lsa, AxB, BxA to‘plamlarni toping.

19. Quyidagi to‘plamlarni Dekart koordinatalar sistemasida geometrik tasvirini toping:

a) [1;3]x(-∞;3]

b) $[1;3]x(-\infty;3]$
d) $[1;4]$ x $(-\infty;+\infty)$
e) $[0;+\infty)$ x $\{1;3\}$
20. Ixtiyoriy A,B va C to‘plamlar ucnun quyidagi tenglikni isbotlang:
a) $(A\cup B)xC=(AxC) \cup (BxC)$ f) $(A\cap B)xC=(AxC) \cap (BxC)$
b) $(A\backslash B)xC=(AxC)\backslash(BxC)$ g) $Ax(B\backslash C)=(AxB)\backslash(AxC)$
d) $Ax(B\cup C)=(AxB) \cup (AxC)$ h) $A\cup B\subset C \Rightarrow AxB=(AxC)\cap(CxB)$
e) $(A\cap B)x(C\cap D)=(AxC)\cap(BxD)$
21. Ixtiyoriy A,B,C va D to‘plamlar uchun quyidagi tengliklar to‘g‘rimi?
a) $(AxB) \cup (CxD)=(A\cup C)x(BxD)$ d) $(AxB)xC=Ax(BxC)$
b) $Ax(B\cap C)=(AxB) \cap (AxC)$

2§. Moslik va munosabatlar

2.1. Akslantirish va ularning turlari. Teng quvvatli to‘plamlar

Aytaylik A va B lar ixtiyoriy tabiatli elementlarning bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlari bo‘lsin. Agar A to‘plamning har bir elementiga biror *f* qonun yoki qoida bo‘yicha B to‘plamning bitta va faqat bitta elementi mos (to‘g‘ri) keltirilgan bo‘lsa, A to‘plamni B to‘plamga *f* akslantirish aniqlangan deyiladi, uni $\boldsymbol{f}$**:A→B** yoki $A \xrightarrow{f} B$ ko‘rinishda belgilanadi. Agar akslantirish $\boldsymbol{f}$**:A→B** $\mathbf{a\in A}$ ni $\mathbf{b\in B}$ ga mos qo‘ysa, ***b*** ni ***f*** akslantirishda ***a*** ning aksi (obrazi), ***a*** ni ***f*** akslantirishda ***b*** ning asli (proobrazi) deyiladi va ***b=f(a)*** ko‘rinishda belgilanadi, A to‘plam ***f*** akslantirishning aniqlash sohasi $\boldsymbol{f}(\mathbf{A})=\{\mathbf{b}: \mathbf{b}=\boldsymbol{f}(\mathbf{a}), \mathbf{a}\in\mathbf{A}, \}\subset\mathbf{B}$ esa ***f*** ning o‘zgarish sohasi deyiladi, $\{(a,f(a)):a\in A\}$ to‘plamni ***f*** akslantirishning grafigi deyiladi.

*1-ta'rif***.** Agar ixtiyoriy $\mathbf{b\in B}$ uchun shunday $\mathbf{a\in A}$ topilsaki ***b=f(a)*** bo‘lsa. $\boldsymbol{f}$**:A→B** ni **syur'ektiv** akslantirish (yoki **A** to‘plamni **B** to‘plamning ustiga akslanadi) deyiladi, bu yerda ***f(A)=B.***

*2-ta'rif***.** Agar ixtiyoriy $\mathbf{a_1, a_2 \in A}$ lar uchun $\boldsymbol{f}(\mathbf{a_1})=\boldsymbol{f}(\mathbf{a_2})$ tenglikdan $\mathbf{a_1=a_2}$ tenglik kelib chiqsa $\boldsymbol{f}$**:A→B** akslantirishni **in'ektiv** akslantirish (yoki **A** to‘plam **B** to‘plamning ichiga o‘zaro bir qiymatli akslanadi) deyiladi.

3-ta'rif. Agar $\boldsymbol{f}$**:A→B** ham syur'ektiv ham in'ektiv bo‘lsa, uni **biektiv** akslantirish (yoki **A** to‘plamni **B** to‘plamning ustiga o‘zaro bir qiymatli akslanadi) deyiladi.

4-ta'rif. Har bir $x\in A$ uchun $\mathbf{p(x)}=f(q(x))$ munosabat bilan aniqlangan $p:A\to C$ akslantirish *f* va *q* akslantirishlarning ko‘paytmasi (kompozitsiyasi, superpozitsiyasi) deyiladi va $p=fq$ bilan belgilanadi.(2.1.1-chizma)

Agar $\boldsymbol{f}$**:A→B** va $\boldsymbol{q}$**:A→B** lar har bir $x\in A$ uchun f(x)=q(x) bo‘lsa, ular teng deyiladi va uni f=q kabi yoziladi.

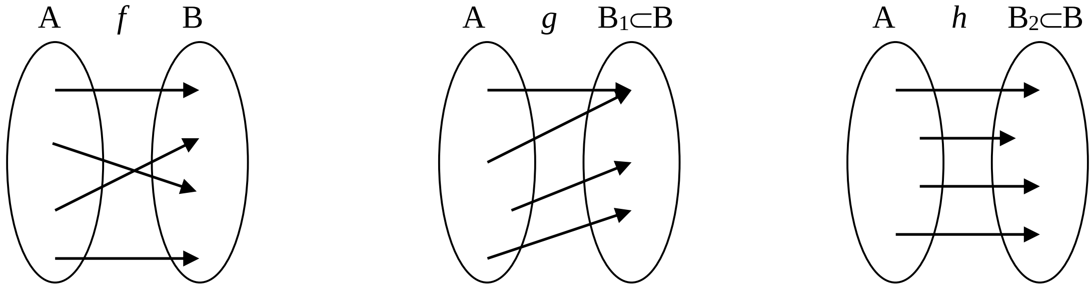
Ixtiyoriy $\boldsymbol{q}$**:A→B** ikkita $\boldsymbol{f}$**:B→C** va akslantirishlar berilgan bo‘lsin.

Xususiy holda A=B=C bo‘lsa, u holda, $fq:A\to A$ ko‘paytma bilan bir qatorda ko‘paytmasi $qf:A\to A$ ham qarash mumkin. Umumiy holda hamma vaqt ham $fq=qf$ tenglik o‘rinli bo‘lmaydi, shuning uchun umuman aytganda $fq\neq qf$.

Masalan, $f:R\to R$, $f(x)=x^2$, $q:R\to R$, $q(x)=2x+1$ bo‘lsa, $f(q(x))=f(2x+1)=(2x+1)^2$,

$q(f(x))=q(x^2)=2x^2+1$ bo‘lib $fq\neq qf$ munosabat o‘rinli.
Ixtiyoriy A to‘plamning barcha $\boldsymbol{x\in A}$ elementlari uchun $\boldsymbol{l(x)=x}$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\boldsymbol{l:A\to A}$ ni A to‘plamning **ayniy** – akslantirishi (birlik akslantirish) deyiladi va uni har bir A to‘plam uchun $\boldsymbol{e=l_A}$ bilan belgilaymiz. Ixtiyoriy A to‘plam uchun birlik akslantirish $\boldsymbol{l_A:A\to A}$ - bieksiyadir. Har qanday $\boldsymbol{f:A\to B}$ akslantirish uchun $\boldsymbol{fl_A=l_Bf=f}$ bo‘ladi.

$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$



f-in'ektiv ***g***-syur'ektiv ***h***- biektiv

2.1.1-chizma.
5-ta'rif. Agar $\boldsymbol{f:A\to B}$ akslantirish uchun shunday $\boldsymbol{q:B\to A}$ akslantirish mavjud bo‘lsaki $\boldsymbol{fq=l_B}$ va $\boldsymbol{qf=l_A}$ tengliklar o‘rinli bo‘lsa, ***f*** ni **teskarilanuvchan**, ***q*** ni esa ***f*** ga teskari deyiladi.
Ta'rifdan ko‘rinadiki q ham teskarilanuvchan, f esa unga teskari bo‘ladi.
f akslantirishga teskari akslantirishni f^{-1} bilan belgilaimiz.
f akslantirishga teskari f^{-1} akslantirish mavjud bo‘lsa, u yagona bo‘ladi.
Akslantirish teskarilanuvchan bo‘lishi uchun uning bieksiya bo‘lishi zarur va yetarlidir.
6-*ta'rif.* Agar A va B to‘plamlar uchun $\boldsymbol{f:A\to B}$ biektiv akslantirish mavjud bo‘lsa, ular teng quvvatli to‘plamlar deyiladi . Bu munosabatni $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ kabi belgilaymiz, bunda $\overline{\overline{A}}$ - A to‘plamning quvvati.
$N_n=\{1,2,\dots,n\}$- 1 dan n songacha bo‘lgan natural sonlar to‘plami bo‘lsin.
7-ta'rif. Agar bo‘sh bo‘lmagan A to‘plam uchun shunday p natural son mavjud bo‘lib, $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{N_n}}$ bo‘lsa, A ni **chekli** to‘plam deyiladi. Bunda to‘plamni $A=\{a_1,a_2,...,a_p,\dots\}$ cheksiz ketma – ketlik ko‘rinishda yozish mumkin. Bu chekli to‘plamlarning teng quvvatliligi ulardagi elementlar sonining tengligi demakdir. Shuning uchun $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{N_n}}=n$ deb yoziladi.
8-ta'rif. Barcha natural sonlar to‘plami bilan teng quvvatli bo‘lgan to‘plam sanoqli deyiladi. Bu to‘plamni $A=\{a_1,a_2,...,a_n,\dots\}$ cheksiz ketma-ketlik ko‘rinishda yozish mumkin.Masalan: A={2,4,6,...2n,...}- barcha juft natural sonlar to‘plami sanoqlidir $f:N\to A$, $f(n)=2n$ biektiv akslantirish.
Sanoqsiz bo‘lgan cheksiz to‘plamlar ham mavjud.
Teorema. (isbotsiz). R haqiqiy sonlar to‘plami sanoqsizdir.
9-ta'rif. R haqiqiy sonlar to‘plamining quvvati **kontinium** quvvatli deb ataladi.
Yuqoridagi teoremadan ko‘rinadiki cheksiz to‘plamlar uchun turli quvvatlar mavjud ekan.

Savollar

1. Akslantirishni aniqlash va o‘zgarish sohalari qanday aniqlanadi?
2. Syur’ektiv va in'ektiv akslantirishlarni farqi nimadan iborat?
3. Qanday akslantirishlarni teskarilanuvchan deyiladi?
4. Qanday akslantirishga ayniy akslantirish deyiladi?
5. Qanday to‘plamlar teng quvvatli deyiladi?

2.2.To‘plamdagi munosabatlar

Matematikada ko‘pincha biror to‘plamlarning elementlari orasidagi qandaydir munosabatlarni tekshirishga to‘g‘ri keladi. Masalan: a ning b ga tengligi, teng emasligi, katta-kichikligi, bo‘linish-bo‘linmasligi, ikki to‘g‘ri chiziqlarning paralelligi, perpendikulyarligi munosabatlari. Ularni mos ravishda:

$a=b$, $a\neq b$, $a<b$, $a>b$, $a//b$, $a\perp b$, ... ko‘rinishda belgilanadi.

1-ta'rif. $A_1, A_2, ..., A_n$ ixtiyoriy tabiatli elementlarning bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlari bo‘lsa, $A_1xA_2x...xA_n$ to‘g‘ri ko‘paytmaning har qanday S qism to‘plamini $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlarning elementlari orasida aniqlangan ***n-ap*** (***n*** o‘rinli) munosabat deyiladi.

Xususiy holda $A_1=A_2=...=A_n=A$ bo‘lganda $\forall(SA^n)$ ni A to‘plamning elementlari orasida aniqlangan ***n-ap*** (***n*** o‘rinli) munosabat deyiladi.

Agar p=1,2,3, bo‘lsa, **S** ni mos ravishda **unar**, **binar** va **ternar** munosabat deyiladi. Unar munosabat A to‘plamning ixtiyoriy qism to‘plamidan iborat.

$S\subset AxB$ binar munosabat berilgan bo‘lsin. U holda

$DomS=\{x:x\in A, \exists(y\in B), (x,y)\in S\}$, $ImS=\{y:y\in B, \exists(x\in A),(x,y)\in S\}$

to‘plamlarni mos ravishda S binar munosabatning **aniqlanish** va **o‘zgarish** sohalari deyiladi. Agar $\forall(a,b\in A)$ elementlar **S** binar munosabatda bo‘lsa, uni **aSb** yoki **$(a;b)\in S$** ko‘rinishda belgilaymiz.

Agar $S\subset(AxB)$, $R\subset(AxB)$ bo‘lib, $\forall(a\in A, b\in B)$ lar uchun $(a;b)\in S <=> (a;b)\in R$ bo‘lsa, $R\subset S$ deyiladi.

Agar $S\subset A^2$, $R\subset A^2$ bo‘lib, $\forall(a;b\in A)$ $\exists(c\in A)$ $(a;c)\in S\wedge(c;b)\in R$ bo‘lsa, *(a;b)* juftlar to‘plamini S va R binar munosabatlarning **ko‘paytmasi** (yoki **kompozitsiyasi**) deyiladi va uni **$S{\cdot}N$** ko‘rinishda belgilaymiz, ya'ni

$S{\cdot}R=\{(a;b):a,b\in A, \exists(c\in A), (a;c)\in S\wedge(c;b)>\in a\}$

Agar $S\subset A^2$ bo‘lsa, $(a;b)\in S$ bo‘lganda $S^{-1}=\{(b;a):(a;b)\in S\}$ to‘plamni S ga **teskari binar munosabat** deyiladi.

N_n orqali $\{1,2,3,...,n\}\subset N$ to‘plamni belgilaymiz.

Misollar: 1. N_3 to‘plamda $S=\{(1,2), (2;2), (1;3)\}$ va $T=\{(1;1), (2;2), (3;1)\}$ binar munosabatlar aniqlangan bo‘lsin, u holda $S{\cdot}T=\{(1;2); (2;2); (1;1)\}$, $T{\cdot}S=\{(1;2), (1;3), (2;2), (3;2), (3;3)\}$ bo‘ladi.

2. $A=\{6,8,9\}$ va $B=\{2,3,4\}$ to‘plamlarda $a\in A$, $b\in B$, a S b- “a son b ga karrali bo‘lish" munosabatidan iborat bo‘lsin, u holda

$S=\{(6;2),(6:3),(8;2),(8;4),(9;3)\}\subset AxB$,

$S^{-1}=\{(2;6),(3;6),(2;8),(4;8),(3;9)\}\subset BxA$,

$bS^{-1}a$ – “b son a ni bo‘luvchisi" munosabati bo‘lib,

Dom S=A, Im S=B, Dom S^{-1}=B, ImS^{-1}=A bo‘ladi.

2-ta'rif. A to‘plamda **S** binar munosabat aniqlangan bo‘lsin. U holda τ ni:

1) $\forall(a\in A)\ aSa\ ((a;a)\in S)$ bo‘lsa, refleksiv;

2) $\forall(a,b\in A)\ \rceil(aSa)\ ((a;a)\notin S)$ bo‘lsa, antirefleksiv;

3) $\forall(a,b\in A)\ (aSb \Rightarrow bSa),\ ((a;b)\in S\Rightarrow (b;a)\in S)$ bo‘lsa, simmetrik;

4) $\forall(a,b\in A)\ ((aSb\wedge bSa)\Rightarrow a=b),\ ((a,b)\in S\wedge(b;a)\in S\Rightarrow a=b),$ bo‘lsa, antisimmetrik;

5) agar $\forall(a,b\in A)\ (aSb\Rightarrow \rceil bSa),\ ((a;b)\in S\Rightarrow(b;a)\in S),$ bo‘lsa asimetrik;

6) agar $\forall(a,b,c\in A)\ (aSb\wedge bSc\Rightarrow aSc),\ ((a;b)\in S\wedge(b;c)\in S\Rightarrow(a;c)\in S),$ bo‘lsa, taranzitiv;

7) agar $\forall(a,b\in A)\ (a\neq b)\Rightarrow(aSb\vee bSa)(a\neq b)\Rightarrow((a;b)\in S\vee(b;a)\in S$ bo‘lsa, bog‘langan (chiziqli) binar munosabat deyiladi.

3-Misol. 1. A - tekislikdagi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami bo‘lsin. ixtiyoriy a,b to‘g‘ri chiziqlar uchun

a) (aSb)=(a//b) bo‘lsa, S,A dagi paralellik munosabati:

Yechimi. 1) $\forall(a\in A)\ a//a$ (refleksiv)

2) $\forall(a,b\in A)\ a//b\Rightarrow b//a$ (simmetrik)

3) $\forall(a,b,c\in A)\ (a//b\ \wedge\ b//c)\Rightarrow a//c$ (tranzitiv).

b) $aSb=a\perp b$ bo‘lsa, S perpendikulyarlik munosabati:

Yechimi. 1) $\forall(a\in A)\ \rceil(a\perp a)$ (antirefleksiv);

2) $\forall(a,b\in A)\ a\perp b\Rightarrow b\perp a$ (simmetrik) bo‘ladi:

2. $A=N,\ \forall(a,b\in N)\ a\tau \boldsymbol{b=(a=b)}$ tenglik munosabati:

Yechimi. 1) $\forall(a\in N)\ a=a$ (refleksiv);

2) $\forall(a,b\in N),\ a=b\Rightarrow b=a$ (simmetrik);

3) $\forall(a,b\in N)\ (a=b\wedge b=a)\Rightarrow a=b$ (antisimmetrik)

4) $\forall(a,b,c\in N)\ (a=b\wedge b=c)\Rightarrow a=c$ (tranzitiv) bo‘ldi.

3. $A=R\ \forall(a,b\in R)\ a\tau b=(a>b)$ tartib munosabati.

Yechimi. 1) $\forall(a\in R)\ \rceil(a>a)$ (antirefleksiv);

2) $\forall(a,b\in R)\ a>b\Rightarrow \rceil(b>a)$ (asimmetrik);

3) $\forall(a,b\in R)\ a\neq b\Rightarrow((a>b)\vee(b>a))$ (bog‘langan);

4) $\forall(a,b,c\in R)\ ((a>b)\wedge(b>c))\Rightarrow(a>c)$ tranzitiv bo‘ladi.

3-ta'rif. Agar A to‘plamda aniqlangan S - binar munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo‘lsa u holda S ni **ekvivalentlik** munosabati deyiladi va uni ~ ko‘rinishda belgilaymiz.

Yuqoridagi misollardan ko‘rinadiki "//","=" munosabatlari ekvivalentlik munosabati bo‘ladi.Agar A to‘plamda ekvivalentlik munosabati aniqlangan bo‘lsa, uni o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plamlarga ajratish mumkin.

4-ta`rif. Aytaylik A to‘plamda ~ - ekvivalentlik munosabati aniqlangan bo‘lsin, a∈A element orqali hosil qilingan **ekvivalentlik sinfi** deb $\bar{a}$={x:x∈A,x ~ a} to‘plamni aytiladi.

a ekvivalentlik sinfi quyidagi xossalarga ega:

1) $a\in\bar{a}$; 2) $\forall(u\in\bar{a})\ \bar{a}=\bar{u}$

5-ta'rif. A to‘plamda aniqlangan **S** binar munosabat antisimmetrik va tranzitiv bo‘lsa, **S** ni **A** to‘plamda aniqlangan tartib munosabati deyiladi.

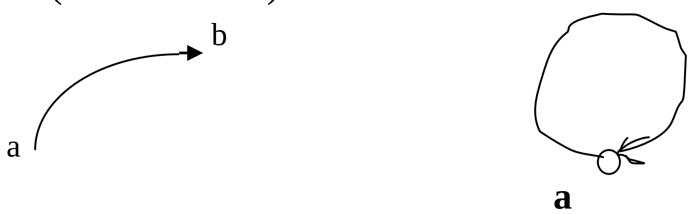
6-ta`rif. Agar A to‘plamda aniqlangan **S** tartib munosabati refleksiv bo‘lsa, u holda **S** ni **A** to‘plamda aniqlangan **noqat'iy tartib munosabati** deyiladi va uni ≥ ko‘rinishda belgilaymiz.

Agar A to‘plamda aniqlangan S tartib munosabati antirefleksiv bo‘lsa, u holda S ni A to‘plamda **qat'iy tartib munosabat** deyiladi va uni > ko‘rinishda belgilaymiz.

Tekislikda chekli sondagi nuqtalar va ularni tutashtiruvchi chiziqlardan tuzilgan figuralar **graflar** deyiladi. Grafni tashkil qilgan nuqtalar uchlari, uchlarini tutashtiruvchi chiziqlarni esa qirralari deyiladi. Uchlarini tutashtiruvchi chiziqlar to‘g‘ri yoki egri bo‘lishi mumkin, ikki qirrasini kesishgan nuqtasi grafning uchi bo‘lmasligi ham mumkin.

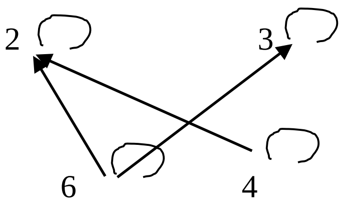
Agar grafning ikki uchini tutashtiruvchi qirrasi ma'lum yo‘nalishga ega bo‘lsa, uni orientirlangan graf deyiladi.

Chekli to‘plamda aniqlangan binar munosabatlarni orientirlangan graflar yordamida quyidagicha ifodalash mumkin: chekli A to‘plamning elementlarini tekislikdagi nuqtalar yordamida ifodalaymiz, $\mathbf{S \subset A^2}$ ga qarashli bo‘lgan (a,b) juftliklarga, agar a≠b bo‘lsa, uchlari a va b nuqtalar bo‘lgan a dan b ga yo‘nalgan qirrani, (a; a) juftlikka ma'lum yo‘nalishga ega bo‘lgan sirtmoqni (tugunni) mos qo‘yamiz. (2.2.1.-chizma)



2.2.1 - chizma

Misol. A={2,3,4,6}. to‘plamda aniqlangan S={(2;2), (3;3), (4;4), (6;6),(6;2),(6,3), (4;2)} binar munosabatni graf yordamida ifodalang (2.2.2.-chizma)



2.2.2- chizma

Binar munosabatlarning umumiy xossalarini turli ko‘rinishlarda quyidagicha - ifodalash mumkin:

№	Munosabat xossalari	Munosabat tilida	To‘plam tilida	Graf tilida

1	Refleksiv	$\forall(a\in A),(a;a)\in S, aSa$	$\nabla\subset S$	Grafning barcha uchlarida tugunlar bor
2	Antirefleksiv	$\forall(a\in A),(a;a)\in S, \neg(aSa)$	$S\cap\nabla=\varnothing$	Grafda birorta ham tugun yo‘q
3	Simmetriklik	$\forall(a,b\in A),(a;b)\in\tau\Rightarrow(b;a)\in S, aSb\Rightarrow bSa$	$S=S^{-1}$	Grafning bara uchlari qarama-qarshi yo‘nalgan qirralar bilan bog‘langan
4	Antisim-metriklik	$\forall(a,b\in A),(a;b)\in S\wedge(b;a)\in S\Rightarrow a=b$ $aSb\wedge bSa\Rightarrow a=b$	$S\cap S^{-1}\subset\nabla$	Grafning tugunlari bor bo‘lishi mumkin, agar uchlari birlashtirilgan bo‘lsa, qirralari bir tomonga yo‘nalgan bo‘ladi.
5	Tranzitivlik	$\forall(a,b,c\in A),(a;b)\in S\wedge(b;c)\in S\Rightarrow(a;c)\in S, aSb\wedge bSc\Rightarrow aSc$	$S\cdot S\subset S$	Agar bir necha uchlaridan yo‘l o‘tsa, bu uchlardan ixtiyoriy juftini birlashtiruvchi qirra mavjud bo‘ladi.

Bu jadvalda ***$\nabla=\{(x;x):\ \forall(x\in A)\}$.***

Savollar

1. Qanday munosabatni binar munosabat deyiladi?
2. Qanday munosabatlarni simmetrik munosabat deyiladi?
3. Binar munosabat ekvivalentlilik munosabat bo‘lishi uchun qanday shartlarni qanoatlantirish kerak?
4. Qanday to‘plamni faktor to‘plam deyiladi?
5. Binar munosabat tartib munosabat bo‘lishi uchun qanday shartlarni qanoatlantirishi kerak?
6. Graf deganda nimani tushunamiz?
7. Binar munosabatni grafi bilan grafigi o‘rtasida qanday farq bor?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. N to‘plamda aniqlangan quyidagi binar munosabatlar qanday xossaga ega ekanligini aniqlang, ularni aniqlanish va o‘zgarish sohalarini toping:

1.$S=\{(1;1),(2;2)\subset N^2$; 2. $S=\{(1;5)\}\subset N^2$;

3. $S=\{(1;2), (2;1),(1;1),(2;2),(3;5),(5;3),(3;3),(5;5)\}$;

4. $S=\{(1;3), (3;1), (4;5), (5;4)\}\subset N^2$; 5.$\forall(a,b\in N)$, $Sb\Leftrightarrow b<2a$;

6. $\forall(a,b\in N)$, $aSb\Leftrightarrow a=b^2$; 7. $\forall(a,b\in N)$, $aSb\Leftrightarrow a<b$;

8. $\forall(a,b\in N)$, $aSb\Leftrightarrow a\le b$; 9.$\forall(a,b\in N)$,$aSb\Leftrightarrow a-b=12$;

10. $\forall(a,b\in N)$, $aSb\Leftrightarrow |a-b|=12$; 11.$\forall(a,b\in N)$,$aSb\Leftrightarrow (a-b):10$;

12. $\forall(a,b\in N)$, $aSb\Leftrightarrow a=b$.

3.8. N_{10} to‘plamda bir vaqtda refleksiv va antirefleksif bo‘lmagan binar munosabatlar mavjudmi?

3.9. N_1, N_2, N_3 va N_n to‘plamlarning har birida nechtadan binar munosabatni aniqlash mumkin?

3.10. N_{10} to‘plamda $\forall(a,b\in N_{10})$

1) $aSb\Leftrightarrow a-b=8$; 2) $aSb\Leftrightarrow b=a^2$;

3) $aSb\Leftrightarrow a\cdot b=12$; 4) $aSb\Leftrightarrow b>a^2$.

aniqlangan binar munosabatlarni aniqlanish va o‘zgarish sohalarini toping. Ularning har biri qanday xossalarga ega ekanligini toping va grafini yasang.

3.11. N_3 to‘plamda aniqlangan

1) S={(1,1), (2;1), (2;3), (3;3)}; 2) T={(1;1), (2;1), (1;2), (2;2)}

3) R = {(1;2), (1;3), (2;3)}.

munosabatlarga teskari S^{-1}, T^{-1}, R^{-1} munosabatlarni toping va grafini yasang:

3.12. N_3 to‘plamda aniqlangan S={(1;1), (2;3), (1;2)} va T={(1;1), (1;3), (3;30) binar munosabatlarni ko‘paytmasini toping va grafini yasang

3.13. N_4 to‘plamda aniqlangan 5={(1;1),(2;3)}, T={(1;2),(2;3),(3;4)} munosabatlar uchun ST, TS, S^2, T^2 larni toping.

3.14. N_5 to‘plamda 1) ∇={(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5)}

2) S=∇∪{(1;2),(2;1),(3;5),(5;3)}, 3) R=∇∪{(1;3),(3;1),(4;5),(5;4)}

4) T = ∇∪{(1;4), (4;1), (2;4), (4;2),(1;2), (2;1)} binar munosabatlar berilgan:

a) har birini ekvivalentlik munosabati ekanligini isbotlang;

b) har bir munosabatini grafini yasang.

3.15. N_2, N_3, N_4 to‘plamlarning har birida nechtadan ekvivalentlik munosabatini aniqlash mumkin?

3.16. a) agar N_5 to‘plam A_1={1,2}, A_2={3}, A_3={4,5} ekvivalentlik sinflarga ajratilgan bo‘lsa, N_5 to‘plamni bu ekvivalentlik sinflarga ajratuvchi ekvivalentlik munosabatini toping va uni grafini yasang:

b) yuqoridagi misolni N_6, A_1={1,3), A_2={2}, A_3={4,5,6} bo‘lganda yeching.

3.17. N_5 to‘plamda aniqlangan S={(1;1),(2;1),(3,2),(1;5),(4;4)} S munosabatni noqat'iy tartib munosabatiga to‘ldiring.

3.18. N_3 to‘plamda berilgan

1) S={(1;2),(1;3),(1,4),(2;3),(4;2)}

2) T={(1;5),(2;3),(2,4),(2;6),(4;7)}

3) R={(1;2),(1;3),(1,4),(2;3),(2;4)} munosabatlardan qaysi biri tartib munosabati bo‘ladi?

3.21. *X={2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16}* to‘plamda R : “*x y* dan 2 ta kam” munosabati berilgan. Berilgan munosabatning grafi va grafigini yasang?

3.22. *X={-8; -6; -3; 0; 2; 3; 4; 5; 6; 8}* to‘plamda R : “*a* soni *b* sondan 2 ta ko‘p” munosabat berilgan. Berilgan munosabatning grafi va grafigini yasang?

3.23. *X={4; 2; 6; 3; 5; -3; -8; -6; 0}* to‘plamda R : “*a* soni *b* songa bo‘linadi” munosabati berilgan. Berilgan munosabatning grafi va grafigini yasang?

3.24. *C={1, 2, 3, 4, 5}* va *D={5, 6, 7}* to‘plamlar orasidagi moslik shunday berilganki, uning grafigiga tegishli juftliklarning 1 – komponenti C – to‘plamdan, 2 – komponenti D – to‘plamdan, olingan bo‘lib, birinchisidan katta. Berilgan va qarama – qarshi mosliklarning grafi va grafiklarini yasang.

3§ Algebraik amallar

3.1. Algebraik amallar va ularning turlari

1-ta'rif. $A\neq\varnothing$ ixtiyoriy tabiatli elementning to‘plami, n manfiy bo‘lmagan butun son bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $f:A^n\rightarrow A$ akslantirish A to‘plamda aniqlangan n o‘rinli yoki n-ap algebraik amal, n sonni esa f algebraik amalning rangi deyiladi.

A to‘plamda aniqlangan nol o‘rinli amal deb, A to‘plamning qandaydir elementini tayinlashni (ajratishni) aytiladi.

2-ta'rif. Agar $f:A^n\rightarrow A$ akslantirishning aniqlanish sohasi A^n ning to‘g‘ri qismidan iborat bo‘lsa, u holda f ni A to‘plamda aniqlangan qisman algebraik amal deyiladi.

Rangi 0,1 va 2 bo‘lgan algebraik amallarni mos ravishda **nolar**, **unar** va **binar** algebraik amallar deyiladi. Unar amalni operator ham deb ataladi.

Bundan buyon n-ap algebraik amal deyish o‘rniga n-ap amal yoki amal degan terminlarni ishlatishga kelishamiz. f - A to‘plamda aniqlangan ixtiyoriy amal bo‘lsin. Agar $f:A^n\rightarrow A$ akslantirishda $(a,b)\in A^2$ elementga $c\in A$ mos keltirilgan bo‘lsa, u holda f((a,b))=c yoki f(a,b)=c ko‘rinishda yozishning o‘rniga a f b=c yoki $(a,b)\rightarrow c$ yoki a | b=c yoki $a\perp b=c$ yoki a o b=c yoki a*b=c,... ko‘rinishda belgilash qabul qilingan. Qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish amallarini mos ravishda a+b=c, a-b=c, ab=c va a:b=c ko‘rinishda belgilanadi.

Misollar. 1. M - ixtiyoriy tabiatli elementlarning qandaydir bo‘sh bo‘lmagan to‘plami, $A=\{B:B\subset M\}$ bo‘lsin. U holda $f:A\rightarrow A$ akslantirshni $\forall(B\in A)$ $f(b)=M\backslash b$ ko‘rinishda aniqlasak, f A to‘plamda aniqlangan unar amal (operator) dan iborat bo‘ladi.

2. A 1- misoldagi to‘plam bo‘lsin. Agar $f:A^2\rightarrow A$ akslantirsh

$\forall(B_1,B\in A)$ $f(B_1,B_2)=B_1\cup B_2$ $f(B_1,B_2)=B_1\cap B_2$

ko‘rinishda berilsa, har ikkala holda ham f-A to‘plamda aniqlangan binar amaldan iborat bo‘ladi.

3. N natural sonlar to‘plami, $\forall(n\in N)$ tayinlangan natural son bo‘lsin. U holda $f:A^2\rightarrow A$ akslantirish $\forall(m_1,m_2,\ldots,m_n\in N)$ $f(m_1,m_2,\ldots,m_n)=(m_1,m_2,\ldots,m_n)$ ko‘rinishda berilsa, f-N to‘plamda aniqlangan n-ap amal bo‘ladi. Bu joyda $(m_1,m_2,\ldots,m_n)$,-$m_1,m_2,\ldots,m_n$ natural sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi.

4. Bo‘lish amali butun sonlar sistemasida aniqlangan qisman amaldan iborat.

Agar A to‘plamda * binar amal aniqlangan bo‘lsa, uni algebra deyiladi va (A, *) ko‘rinishda belgilanadi.

3- ta'rif. o va * lar A to‘plamda aniqlangan ixtiyoriy amallar bo‘lsin:

a) $\forall(a,b\in B)$ aob=boa bo‘lsa, u holda amal kommutativ (o‘rin almashtirish) xossasiga;

b) $\forall(a,b,c\in A)$ (aob)oc=ao(boc) bo‘lsa, u holda o- assotsiativ (gruppalash) xossasiga;

d) $\forall(a,b,c\in A)$ (aob)*c=(a*c)o(b*c) va c*(aob)=(c*a)o(c*b) bo‘lsa, mos ravishda * amal o amalga nisbatan o‘ng va chap distributiv (o‘ng va chap taqsimot) xossasiga ega deyiladi. Agarda * amal kommutativ bo‘lsa, oxirgida "o‘ng" va "chap" so‘zlari tushirilib qoldiriladi.

Misollar. 5. Sonlarni odatdagi qo‘shish va ko‘paytirish amallari kommutativ, assotsiativ va ko‘paytirish amali qo‘shish amaliga nisbatan distributiv, lekin qo‘shish amali ko‘paytirish amaliga nisbatan distributiv emas. Chunki a+bc=(a+b)(a+c) tenglik hamma vaqt ham – o‘rinli bo‘lmaydi.
6. Sonlarni ayirish amali kommutativ ham, assotsiativ ham emas.
7. Akslantirishlarning kompozitsiyasi assotsiativ amal bo‘lib, u kommutativ emas (tekshirib ko‘ring).
4-ta'rif. A to‘plamda o amal aniqlangan bo‘lsin. Agar $\exists(e_у,e_ч\in A)$ $\forall(a\in A)$ $aoe_у=a$ yoki $e_ч oa=a$ bo‘lsa, u holda $e_у$ va $e_ч$ elementlarini o amalga nisbatan mos ravishda o‘ng va chap neytral element deyiladi.
Misollar. 8. Butun sonlar sistemasida 0 qo‘shish amaliga nisbatan, 1 ko‘paytirish amaliga nisbatan ham o‘ng ham chap neytral elementlardir,
9. $\varnothing$ to‘plamlarning birlashmasi amaliga nisbatan universal to‘plam X to‘plamning kesishmasi amaliga nisbatan neytral elementlardir.
*5 - ta'rif***.** Aytaylik $A\neq\varnothing$, o - A to‘plamda aniqlangan amal, e o amalga nisbatan A to‘plamning neytral elementi bo‘lsin. Agar $\forall(a\in A)\exists(e_у,e_ч\in A)$ $aoe_у=e$, $a_ч o\underline{a}=e$ bo‘lsa, u holda $a_у$, $a_ч$ larni mos ravishda o amalga nisbatan a ga o‘ng va chap simmetrik elementlar deyiladi. Agar aoa'=a'oa=e bo‘lsa, a' ni o amalga nisbatan a ga (o‘z navbatida a ni a' ga) simmetrik element deyiladi.
Misollar. 10. Butun sonlarni qo‘shish amaliga nisbatan a ga ($-\xi$) simmetrik (qarama-qarshi) element bo‘ladi.
11. Ratsional sonlarni ko‘paytirish amaliga nisbatan $a\neq0$ ratsional songa
$a^{-1}=1/a$ simmetrik (teskari) element bo‘ladi.
6-ta'rif. Aytaylik o A to‘plamda aniqlangan amal va $B\subset A$ bo‘lsin. Agar $\forall(a,b\in B)\Rightarrow aob\in B$ bo‘lsa, B to‘plamni o amalga nisbatan yopiq deyiladi.
Misol. 12. Agar $B,C\subset N$, $B=\{2,4,6,...,2n,...\}$, $C=\{1,3,5,...,2n-1,...\}$ bo‘lsa, B natural sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan yopiq, C esa ko‘paytirish amaliga nisbatan yopiq.
7-ta`rif. Agar (A,*) algebrada e neytral element aniqlangan bo‘lsa (A,*,e) ni algebraik sistema deyiladi.

Savollar

1. Qanday algebraik amali kommutativ amal deyiladi?
2. Qanday amalga assotsiativ amal deyiladi?
3. Qanday element neytral element deyiladi?
4. Simmetrik elementga ta'rif bering?
5. Qanday to‘plamni biror amalga nisbatan yopiq deyiladi?

3.2. Yarim gruppa, monoid va gruppalar

1. Aytaylik $A\neq\varnothing$ to‘plam, * - A to‘plamda aniqlangan binar amal bo‘lsin.
*1-ta'rif***.** Agar A to‘plamda aniqlangan * binar amal assotsiativ bo‘lsa, ya'ni $\forall(a,b\in A)$, $(a*b)*c=a*(b*c)$ bo‘lsa, u holda A yarim gruppa deyiladi. Agar * amal + (qo‘shish) amali bo‘lsa, additiv yarim gruppa (ko‘paytirish) bo‘lsa, A - multiplikativ yarim gruppa deyiladi.

Agar * amal kommutativ bo‘lsa, ya'ni $\forall(a,b\in A)$, $a*b=b*a$ bo‘lsa, A ni kommutativ, agar A chekli bo‘lsa, A ni chekli yarim gruppa deyiladi.
$\forall(a,x,y\in A)$, $(a*x=a*y=>x=y)$ va $(x*a=y*a=>x=y)$ bo‘lsa, u holda A ni qisqartirishga ega bo‘lish yarimgruppa deyiladi.
Misollar. 1. $M\neq\varnothing$, $A=\{\varphi:\varphi: M\to M\}$ - akslantirishlarning ko‘paytirish (kompozitsiyasi) amalidan iborat bo‘lsin. U holda A yarim gruppa bo‘ladi. Chunki akslantirishlarni ko‘paytirish amali assotsiativlik xossasiga ega.
1. $A=\{e,a\}$ ikki elementli to‘plam bo‘lib, unda aniqlangan * amal Keli jadvali bilan berilgan bo‘lsin, u holda A yarim gruppa bo‘ladi. Lekin u qisqartirishga ega bo‘lmaydi, chunki $(a*e=a*a)\wedge(e*a=a*a)$ munosabatlardan a=e bo‘lishi kelib chiqmaydi.
2.

*	e	a
e	e	a
a	a	a

*2 - ta'rif***.** Agar A yarim gruppa bo‘lib, A to‘plam * amalga nisbatan e neytral element mavjud bo‘lsa, u holda **monoid** deyiladi.
Misollar. 3. Yuqoridagi 2-misolda keltirilgan yarim gruppa monoid bo‘ladi.
4. **N** algebra multiplikativ monoid bo‘lishini ko‘rsatish oson. **N** additiv yarim gruppa monoid bo‘lmaydi, chunki **N** to‘plamda qo‘shish amaliga nisbatan neytral element mavjud emas.
Aytaylik A yarim gruppa bo‘lsin, u holda

$\forall(a_1, a_2,...,a_n\in A)$ $a_1*a_2*...*a_n$ (1) simvolni

$a_1*a_2*...*a_n=(a_1*a_2*...*a_n)$
ma'nosida tushuniladi.

Agar * amal + (qo‘shish) dan iborat bo‘lsa, (1) ni qisqacha $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ko‘rinishda, * amal o (ko‘paytirish) dan iborat bo‘lsa, $\prod_{k=1}^{n} a_k$ ko‘rinishda belgilaymiz. Demak,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\ldots+a_n=(a_1+a_2+\ldots a_{n-1})+a_n \qquad (2)$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2\ldots a_n=(a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) a_n \qquad (3)$$

Xususiy holda $a_1=a_2=...=a_n=a$ bo‘lsa, u holda (2) $na=(n-1)a+a$, (3) esa $a^n=a^{n-1}\cdot a$ ko‘rinishga keladi.
Algebraning xususiy ko‘rinishlaridan biri gruppa tushunchasi bo‘lib, u matematika va uning tatbiqlarida muhim ahamiyatga ega.
*3-ta'rif***.** G to‘plamda aniqlangan * binar amal quyidagi shartlar (gruppa aksiomalari) ni qanoatlantirsa:

1°. $\forall(a,b,c\in G)$ $a*(b*c)=(a*b)*c$;
2°. $\exists(e\in G)$ $\forall(a\in G)$ $a*e=a$;
3°. $\forall(a\in G)$ $\exists(a'\in G)$ $a*a'=e$

u holda **G gruppa** deyiladi.

Agar yuqoridagi 1° - 3° shartlarga qo‘shimcha ravishda yana 4° $\forall(a,b\in G)$ $a*b=b*a$ bo‘lsa, u holda G ni kommutativ gruppa yoki **Abel** gruppasi deyiladi. Agar G chekli to‘plam bo‘lsa, G ni **chekli gruppa** G ning elementlari soni G gruppaning tartibi deyiladi. Agarda G cheksiz to‘plam bo‘lsa, G gruppaning tartibi cheksiz deyiladi.

Agar * binar amal + (qo‘shish) dan iborat bo‘lsa, G gruppani additiv deyiladi. Bu holda $\forall(a,b\in G)$ $a*b=a+b$ ko‘rinishda yoziladi va uni a va b elementlarni yig‘indisi deyiladi. Agar * amal o (ko‘paytirish) amalidan iborat bo‘lsa, G ni multiplikativ gruppa deyiladi, a*b ni $a\cdot b$ yoki ab ko‘rinishda belgilanadi hamda a va b elementlarning ko‘paytmasi deyiladi.

Misollar. 5. $A=\{x,y\}$-ikki elementli to‘plam, $G=\{y_1,y_2\}$ - A ni o‘zga biektiv akslantirishlar to‘plami bo‘lib, $\varphi_1(x)=x$, $\varphi_1(y)=y$, $\varphi_2(x)=y$, $\varphi_2(y)=x$ ko‘rinishda berilgan va ° akslantirishlarning ko‘paytmasi (kompozitsiyasi) dan iborat bo‘lsin, u holda G algebra Abel gruppasi bo‘ladi.

Haqiqatan ham, gruppaning 1° aksiomasining bajarilishini bevosita tekshirib ko‘rish mumkin. Masalan,

$[(\varphi_2 o\varphi_1)o\varphi_2](x)=(\varphi_2 o\varphi_1)o\varphi_2(x)=(\varphi_2 o\varphi_1)(y)=\varphi_2(\varphi_1(y))=\varphi_2(y)=x \Rightarrow (\varphi_2 o\varphi_1)\ o\varphi_2=\varphi_1$;

$[\varphi_2 o(\varphi_1 o\varphi_2)](x\}=\varphi_2 o(\varphi_1(x)))=\varphi_2(\varphi_1(y))=\varphi_2(y)=x \Rightarrow \varphi_2 o(\varphi_1 o\varphi_2)=\varphi_1$ bulardan $(\varphi_2 o\varphi_1)\ o\varphi_2=o_2 o(\varphi_1 o\varphi_2)$ kelib chiqadi. Qolgan mumkin bo‘lgan hollarni ham shu kabi tekshirib ko‘rish mumkin. 1°. G da φ_1 neytral element vazifasini bajaradi 2° φ_1 va φ_2 larning har biri o‘z – o‘ziga teskari bo‘ladi.

$(\varphi_2 o\varphi_2)(x)=\varphi_2(\varphi_2)(x)=\varphi_2(y)=x \Rightarrow \varphi_2 o\varphi_2=\varphi_1 o\varphi_1$,

$(\varphi_2 o\varphi_2)(y)=\varphi_2(\varphi_2)(y)=\varphi_2(y)=y\varphi_1(y) \Rightarrow \varphi_2 o\varphi_2=$

$(\varphi_1 o\varphi_1)(x)=\varphi_1(\varphi_1(x))=\varphi_1(x)$, $(\varphi_1 o\varphi_1)(y)=\varphi_1(\varphi_1(y))=\varphi_1(y) \Rightarrow \varphi_1 o\varphi_1=\varphi_1$

Demak, $\varphi_1^{-1}=\varphi_1$, $\varphi_2^{-1}=\varphi_2$

4°. $\varphi_1 o\varphi_2=\varphi_2 o\varphi_1$ ekanligini bevosita tekshirib ko‘rish oson. Demak, G Abel gruppasi ekan.

Gruppaning quyidagi xossalarini mul'tiplikativ gruppa uchun keltiramiz. Bu xossalar ixtiyoriy gruppalar uchun ham o‘ringa ega bo‘ladi. Bu holda * amal ko‘paytirish, $e=1$ $a^1=a^{-1}$ dan iborat bo‘ladi.

*1-teorema***.** Agar G gruppa bo‘lsa, $\forall a\in G$ uchun $a^{-1}a=1$ tenglik o‘ringa ega bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik $x\in G$ $a^{-1}\in G$ ga teskari element bo‘lsa, ya'ni $a^{-1}x=1$. U holda $a=a\cdot 1=a(a^{-1}\cdot x)=1\cdot x$, $a=1\cdot x$, $a^{-1}a=a^{-1}\cdot(1-x)=(a^{-1}\cdot 1)x=a^{-1}\cdot x=1$, ya'ni $a^{-1}x=1$.

Teorema isbotlandi.

*2-teorema***.** G gruppa bo‘lsa, $\forall a\in G$ $1\cdot a=a$ bo‘ladi.

Isbot. $\forall a\in G$ $a^{-1}\cdot a=1$ 3° aksiomadan esa $aa^{-1}=1$ kelib chiqadi. Shuning uchun $1\cdot a=(a\cdot a^{-1})a=a\cdot(a^{-1}a)=a\cdot 1=a$. Demak, $1\cdot a=a$.

3-teorema. Agar $ax=1$ va $ay=1$ bo‘lsa, $x=y$ bo‘ladi.

Isbot. $ay=1$ $u=a^{-1}$ shuning uchun 1-teoremadan $ya=1$ tenglik o‘rinli $y=y1=y(ax)=(ya)x=1x=x$. Demak, $x=y$.

1-natija. G gruppa bo‘lsa $\forall a\in G$ $(a^{-1})^{-1}=a$ bo‘ladi. Haqiqatan ham, $a^{-1}a=aa^{-1}=a$.

*2-natija***.** G ixtiyoriy gruppada $\forall a,b\in G$ $ax=b$ va $ya=b$ tenglamalar yagona $x=a^{-1}b$, $y=ba^{-1}$ yechimlarga ega.

3-natija. G gruppa bo‘lsa, 1(e) undagi yagona birlik (neytral) element bo‘ladi.
4-natija. $\forall a,b\in G$ uchun $(ab^{-1})=b^{-1}a^{-1}$ tenglik o‘ringa ega.

Haqiqatan ham, $(ab)(b^{-1}a^{-1})=a(bb^{-1})a^{-1}=(a1)a^{-1}=aa^{-1} = 1$.

4-ta'rif. G gruppaning $H\neq\varnothing$ qism to‘plami uning qism gruppasi (gruppa ostisi) deyiladi. Agar H G da aniqlangan amalga nisbatan o‘zi gruppa bo‘lsa.

*4-teorema***.** $H\neq\varnothing$ to‘plami G gruppaning qism to‘plami bo‘lsin. H G qism gruppasi bo‘lishi uchun a) $\forall a,b\in H \Rightarrow a*b\in H$; b) $a\in H \Rightarrow a'\in H$ shartlar o‘ringa ega bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Savollar

1. Yarim gruppa va monoid aksiomalarni ko‘rsating.
2. Gruppa aksiomalarini yozing.
3. Qanday gruppani Abel gruppasi deyiladi?
4. Chekli va cheksiz gruppalarga ta'rif bering.
5. Qanday gruppani qism gruppa deyiladi?

3.3. Halqa va maydonlar

Aytaylik E bo‘sh bo‘lmagan to‘plam. +, o undagi qo‘shish va ko‘paytirish amallari bo‘lsin.

*1-tarif***.** Agar E to‘plamda aniqlangan qo‘shish va ko‘paytirish amallari quyidagi aksiomalarni qanoatlantirsa E ni **halqa** deyiladi,

Ya'ni: 1. $\forall(a,b,c\in E)a+(b + c)=(a + b) + c$, 2) $\forall(a,b\in E)a+b=b+a$

3. $\forall(0\in E)\ \forall(a\in E)\ a + 0=a$, 4) $\forall(a\in E)\exists(-a)\in E a+(-a)=0$

5) $\forall(a,b,c\in E)\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)c$, 6) $\forall(a,b,c\in E)\ a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)ba+ca$

Agar E halqada 7. $\forall(a,b,c\in E)a\cdot b=b\cdot a$ aksioma o‘ringa ega bo‘lsa E kommutativ halqa deyiladi.

Agar E kommutativ halqada 8. $\exists 1\in E, 1\neq 0\ \forall(a\in E)a\cdot 1= a$ bo‘lsa E birlik elementga ega bo‘lgan holda yoki qism deyiladi. Agar E kommutativ halqada

8. $\exists 1\in E, 1\neq 0\ \forall(a\in E)a\cdot 1=a$
9. $\forall a\in E a\neq 0\exists a^{-1}\in E\ a\cdot a^{-1}=1$

aksiomalar o‘rniga ega bo‘lsa, E ni maydon deyiladi.

1-4 aksiomalardan E kommutativ additiv gruppa ekanligi kelib chiqadi, uni E halqaning additiv gruppasi deyiladi.

*2-ta`rif***.** Agar $\forall(a,b\in E)\ a\neq 0,\ b\neq 0 \Rightarrow a\cdot b=0$ bo‘lsa, u holda E halqaning a va b elementlarini **nolning bo‘luvchilari** deyiladi.

*3-ta`rif***.** Nolning bo‘luvchisiga ega bo‘lmagan halqani butunlik sohasi deyiladi.

Misollar. Z - butun sonlar to‘plami odatdagidek qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan kommutativ, birlik elementga ega bo‘lgan halqa bo‘ladi:

2. $K =Z[\sqrt{3}]=\{a +b\sqrt{3} :a,b\in Z]$ halqa bo‘ladi.

4-ta`rif. E halqa va $E\supset K\neq\varnothing$ uning qism to‘plami bo‘lib, K ham E dagi amallarga nisbatan halqa bo‘lsa K halqa E halqaning qism halqasi bo‘ladi.

*5-ta`rif***.** P maydon va $P \supset H \neq \varnothing$ uning qism to‘plami bo‘lib, P maydonda aniqlangan amallarga nisbatan N maydon bo‘lsa, N maydon E maydonning qism maydoni deyiladi.

6-ta`rif**.** Aytaylik P maydon E butunlik sohasi bo‘lsin. Agar

1. E P ni qism halqasi bo‘lsa.
2. $\forall(x \in P)\ \exists(a,b \in E) x=a \cdot b^{-1}$ shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda P ni E butunlik sohasini **nisbatlari maydoni** deyiladi.

Masalan, **Q** - ratsional sonlar maydoni Z butun sonlar halqasining nisbatlari maydoni bo‘ladi.

Agar E halqa bo‘lsa, $\forall a,b \in E$ uchun quyidagi tengliklar o‘ringa ega bo‘ladi:

1. $a+b=a \Rightarrow b=0$ 2. $a+b=0$ $b=-a$;
3. $(-a)=a$; 4. $a \cdot 0=0 \cdot a=0$;
5. $a(-b)=(-a)b=-(ab)$ 6. $(-a)(-b)=ab$

Agar P maydon bo‘lsa, quyidagi munosabatlar o‘ringa ega bo‘ladi:

1-teorema. Aytaylik E halqa K esa uni bo‘sh bo‘lmagan qism to‘plami bo‘lsin. K E halqaning qism halqasi bo‘lishi uchun a) $\forall a,b \in K$ $a+b,\ a \cdot b \in E$ b) $a \in K \Rightarrow (-a) \in K$ shartlarni o‘ringa ega bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Savollar

1. Halqa va maydon aksiomalarini yozing?
2. Qanday halqani kommutativ halqa deyiladi?
3. Qanday elementlarni nolning bo‘luvchilari deyiladi?
4. Butunlik sohasiga ta'rif bering.
5. Qanday maydonni nisbatlari maydoni deyiladi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi to‘plamlarda +, -, o, : amallarning qaysi biri algebraik amal bo‘ladi. Agar algebraik amal bo‘lsa, ular kommutativ, assotsiativ bo‘ladimi?

a) N b) $2N=\{2n:n \in N\}$ d) $T=\{2n-1:n \in N\}$
e) Z f) $2Z=\{2n:n \in Z\}$ g) Q h) R
i) $R \setminus \{0\}$ j) $R^+=\{x:x \in R, x>0\}$ k) $R \setminus Q$ l) $\{0\}$
m) $\{1\}$ n) $\{0,1\}$ o) $nZ=\{na:a \in Z\}$

2. Agar $A_1=\{0,1\}$, $A_2=\{0,1,2\}$, $A_3=\{0,1,2,3\}$ to‘plamlarda * amal mos ravishda quyidagi Kelli jadvali yordamida berilgan bo‘lsa, uni kommutativ va assotsiativ ekanligini isbotlang.

1)

*	0	1
0	0	1
1	1	0

2)

*	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

3)

*	0	1	3
0	0	1	3
1	1	2	0
2	2	3	1

3	3	0		2

1. $R^+=\{x{:}x\in R,\ x>0\}$ to‘plamda aniqlangan quyidagilarning qaysi biri amal bo‘ladi? Agar amal bo‘lsa, ular kommutativ va assotsiativ bo‘ladimi?

   a) $a*b=\dfrac{a+b}{2}$ b) a*b=a+b-1 d) $a*b=a{\cdot}b^2$

   e) $a*b=a^b$ f) $a*b=\sqrt{a\cdot b}$ g) $a*b=\log_a b$

   h) a*b=max{a,b} i) a*b=min{a,b} j) a*b=|a-b|

   k) a*b=a.

4. $A=\{a+b\sqrt{2}:a,b\in Z\}$ to‘plam qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan yopiq bo‘ladimi, bu to‘plamda qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan neytral elementlar mavjudmi?

5. Ikkitadan kam bo‘lmagan elementga ega bo‘lgan E to‘plamda o amal aob=b tenglik bilan aniqlangan bo‘lsa, E to‘plamda ° amalga nisbatan neytral element mavjud emasligini isbotlang.

6. N to‘plamda $a{\circ}b=a^b$ amalga nisbatan chap va o‘ng neytral elementlar mavjudmi?

7. Q to‘plamda aniqlangan $a\circ b=\dfrac{ab}{2}$ amal kommutativ va assotsiativ ekanligini isbotlang. Bu amalga nisbatan Q to‘plamda neytral element mavjudmi? a=8 elementga teskari elementni toping.

8. Quyidagi algebralarning qaysilari yarim gruppa, qaysilari monoid, qaysilari gruppa bo‘ladi.

a)(Z; +) b) (Z; ·) d) (Q; +) e) (Q; ·) f) (R;+) g) (R;+) h) (Z \{0}; ·)

i) (Q\{0}; ·) j) (R \{0}; ·) k) (n Z,+) bu erda $n\in N$;

l) ({-1;1}; ·) m) ($\{a^x;\ x\in R\}$; ·) bu erda $a\in R$, a>0,

9. 1) $(Z[\sqrt{2}]; +;0)$, $Z[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}: a,b\in Z\}$; $(Q[\sqrt{2};+0)$, $Q[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}: ab\in Q)$ algebralarni gruppa ekanligini isbotlang.

10. Agar $K=\left\{\begin{pmatrix} a, & b \\ 2b, & a\end{pmatrix}: a,b\in Q, a^2+b^2\neq 0\right\}$ bo‘lsa, (K; · ,1) algebraik sistemani gruppa ekanligini isbotlang.

11. Agar $K=\left\{\begin{pmatrix} a, & b \\ -b, & a\end{pmatrix}: a,b\in Q, a^2+b^2\neq 0\right\}$ bo‘lsa (K; · ,1) algebraik sistemani gruppa ekanligini isbotlang.

12. Agar $Q_0=Q\setminus\{0\}$ to‘plamda o binar amal quyidagicha, ya'ni $\forall(a,b\in Q_0)$ aob=$\dfrac{a\circ b}{2}$, kabi aniqlangan bo‘lsa, $(Q_0;\circ,2)$ algebraik sistemani gruppa ekanligini isbotlang.

13. Agar G=(G; °,1) gruppaning ixtiyoriy a elementi uchun $a^2=1$ shart bajarilsa, G ni kommutativ gruppa ekanligini isbotlang.

14. Agar G=(G; °,1) gruppa bo‘lsa, u holda $\forall(a,b\in G)$ $(a{\cdot}b)^{-1}b^{-1}a^{-1}$ ekanligini isbotlang.

15. Agar G={e,a,b} va F={e,x,y,z} to‘plamlar amallarga mos ravishda quyidagi Kelli jadvallari bilan berilgan bo‘lsa, bu to‘plamlarni shu amallarga nisbatan Abel gruppasi bo‘lishini isbotlang:

·	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

·	e	x	Y	z
e	e	x	Y	z
x	x	y	Z	e
y	y	z	E	x
z	z	e	X	y

16. Aytaylik $F=\left\{f_1(x)=x,\ f_2(x)=-x,\ f_3(x)=\frac{1}{2},\ f_4(x)=-\frac{1}{x}\right\}$

R\{0} to‘plamda aniqlangan funksiyalar to‘plamida amal $(f_i \cdot f_j)(x)=f_i(f_j(x))$ i,j=0,1,2,3,4,5 ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. U holda (E; ·; f_1) algebraik sistemani gruppa ekanligini isbotlang. Bu amal uchun Kelli jadvalini tuzing.

17. Aytaylik $E=\left\{f_0=x,\ f_1=\frac{1}{x},\ f_2=1-x;\ f_3=\frac{x}{x-1},\ f_4=\frac{x-1}{x}\right\}$

R\{0,1} to‘plamda aniqlangan funksiyalar to‘plamida amal $(f_i \cdot f_j)\ (x)=f_i(f_j(x))$ i,j=0,1,2,3,4,5 ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. U holda (E; ·; f_0) algebraik sistemani gruppa ekanligini isbotlang. Bu amal uchun Kelli jadvalini tuzing.

18. a) (2 Z;+;0) gruppa (Z; +, 0) gruppaning qism gruppasi ekanligini isbotlang.

b) ($\{2^x: x\in Z\}$; o ; 1) gruppa (Q\{0}; o ; 1) gruppaning qism gruppasi ekanligini isbotlang.

d) (Z; + ; 0) gruppa (Z[$\sqrt{2}$];+;0) gruppaning qism gruppasi ekanligini isbotlang.

19. Sonlarni odatdagidek qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan quyidagi to‘plamlarning qaysi biri halqa tashkil etadi?

a) 2Z; b) mZ; d) Q; e) Z[$\sqrt{2}$]; f) 2Z[$\sqrt{2}$]; g) Q[$\sqrt{2}$];

h) E={a+b$\sqrt{3}$+c$\sqrt{5}$: a,b,c$\in$Z}.

22. Aytaylik (E;+,0) - Abel gruppasi bo‘lsin. Agar E da ko‘paytirish amalini $\forall$(a,b$\in$E) a·b=0 kabi aniqlasak, (E;+, · ,0) ni halqa ekanligini isbotlang.

23. Agar (K;+, · ,0) halqa bo‘lsa, $\forall$(a,b)$\in$K lar uchun quyidagilarning to‘g‘ri ekanligini isbotlang.

a) a+b=a=>b=0 e) a+b=0=>b=-a

b) -(-a)=a g) a·0=0·a=0

d) a·(-b)=(-a)·b=-(ab) h) (-a)·(-b)=a·b

24. Agar $Q[\sqrt[3]{2}]$={a+b$\sqrt[3]{2}$+c$\sqrt[3]{4}$: a,b,c$\in$Q} bo‘lsa, ($Q[\sqrt[3]{2}]$;+, ^{o} ,0,1) ni maydon bo‘lishini isbotlang.

25. Maydon nolning bo‘luvchilariga ega emasligini isbotlang.

26. Agar (P;+, ^{o} ,0,1) maydon bo‘lsa, u holda quyidagilarni isbotlang:

a) $\forall$(a,b$\in$P) a·b=1=> $a\neq0\wedge b=a^{-1}$

b) $\forall$(a,b,c,d$\in$P) b≠0, d≠0 => $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

d) $\forall$(a,b$\in$P) a·b=0=> (a=0$\vee$b=0)

i) $\forall$(a,b,c,d$\in$P) a≠0, b≠0, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$

e) $\forall(a,b,c,d \in P)$ $b\neq0$, $d\neq0$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ <=> $ad=bc$

j) $\forall(a,b,c,d \in P)$ $b\neq0$, $c\neq0$ => $\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}$

f) $\forall(a,b,c,d \in P)$ $b\neq0$, $d\neq0$ $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm cd}{bd}$

k) $\forall(a,b \in P)$ $a\cdot b=a\cdot c$ => $b=c$

l) $\forall(a,b,c,d \in P)$ $b\neq0$, $\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=0 \Rightarrow -\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{(-a)}{b}$

m) $\forall(a,b \in P)$ $a\cdot b\neq0 \Rightarrow (a\neq0 \wedge b\neq0)$

4§. Kombinatorika elementlari

4.1. Birlashmalar

Kombinatorika masalasi. Elementlarning turli kombinatsiyalari va ularning sonini topish bilan bog‘liq masalalar **kombinatorika masalalari** deyiladi. Bunday masalalar matematika fanining tarmog‘i – kombinatorikada o‘rganiladi. Kombinatorika asosan, XVII – XIX asrlarda mustaqil fan sifatida vujudga kelgan bo‘lib, uning rivojida B. Paskal, P. Ferma, G. Leybnis, Y. Bernulli, L. Eyler kabi olimlar katta hissa qo‘sganlar.

Kombinatorikada, asosan, chekli to‘plamlar, ularning qism to‘plamlari, chekli to‘plam elementlaridan tuzilgan kortejlar va ularning sonini topish masalalari o‘rganilgani uchun uni to‘plamlar nazariyasining bir qismi sifatida qarash mumkin.

1-ta'rif. Har qanday narsalardan tuzilgan va bir-birlaridan yo shu narsalarning tartibi bilan yoki shu narsalarning o‘zlari bilan farq qiluvchi turli gruppalar umuman birlashmalar deb aytiladi.

Agar 10 xil raqam; 0, 1, 2, ..., 9 dan har birida bir necha raqamdan qilib gruppalar tuzsak, masalan: 123, 312, 8056, 5630, 42 va shunga o‘xshash turli birlashmalar hosil qilamiz. Ulardan ba'zilari, masalan, 123 va 312 faqat narsalarning tartibi bilan farq qiladi, boshqalari esa, masalan, 8056 va 312 o‘zlaridagi narsalar bilan (hatto narsalarning soni bilan ham) farq qiladi.

Birlashmalarni tuzgan narsalar elementlar deb ataladi. Elementlarni a, b, c, ... harflar bilan belgilaymiz.

Birlashmalar uch xil bo‘lishi mumkin; o‘rinlashtirish, o‘rin almashtirish va gruppalash. Ularning har birini ko‘rib chiqamiz.

4.2. To‘plamlar ustida yig‘indi va ko‘paytma qoidalari

Matematikada to‘plamlar ustida amallar bajarganda ularning birlashmasi, kesishmasi va Dekart ko‘paytmasida nechta element borligini bu amallarni bajarmasdan hisoblashga to‘g‘ri keladi.

Aytaylik A va B to‘plamlar bo‘lsin. A to‘plam elementlari sonini n(A), B to‘plam elementlari sonini n(B) deb belgilaylik. Bu holda quyidagi qoidalar o‘ringa ega bo‘ladi.

1. Yig‘indi qoidasi:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

Bu qoida qo‘shiluvchi to‘plamlar uchta bo‘lganda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+m(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

2. Ko‘paytma qoidasi:

$$n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)$$

To‘plamlar soni bir nechta bo‘lganda ham o‘rinli:

$$n(A_1\times A_2\times.....\times A_n)=n(A_1)\cdot n(A_2)...n(A_n)$$

Misol. Sinfda 40 ta o‘quvchi bor. Ulardan 32 tasi matematika to‘garagida, 21 tasi fizika to‘garagida shug‘ullanadi. 15 ta o‘quvchi ikkalasida ham shug‘ullanadi. Qancha o‘quvchi ikkalasida ham shug‘ullanmaydi.

Yechish. A – matematika to‘garagida shug‘ullanuvchi o‘quvchilar to‘plami, B – to‘garagida shug‘ullanuvchi oquvchilar to‘plami. Masala shartiga ko‘ra n(A)=32, n(B)=21, n(A$\cap$B)=15 bulardan $n(A\cup B)=n(A)+n(B)\cdot n(A\cap B)=32+21\cdot 15=53-15=38$ ikkalasida ham shug‘ullanmaydigan o‘quvchilar soni 40 – 38 = 2. Javob 2.

Savollar

1. Nyuton binomi formulasini keltiring.
2. Nyuton binomi qanday xossalarga ega?
3. Barcha binomi koeffisentlar yig‘indisi nimaga teng?
4. Binomi yoyilmasining umumiy hadini ifodalovchi formulani yozing.
5. Toq va juft o‘rinda turuvchi binomial koeffisentlar qanday xossaga ega?

4.3. O‘rinlashtirishlar

Turli birlashmalar tuzadigan narsalarimizning soni uchta (masalan, 3 karta) bo‘lsin; bu narsalarni a, b va c bilan belgalaymiz. Ulardan quyidagi birlashmalarni tuzish mumkin; bittadan:

a, b, c;

ikkitadan:

ab, ac, bc, ba, ca, cb

va uchtadan:

abc, acb, bac, bca, cab, cba,

Bu birlashmalardan, 2 tadan tuzilgan birlashmalarni olaylik. Ular bir-birlaridan, yo narsalari bilan (masalan, ab va ac) yoki narsalarning tartibi bilan (masalan, ab va ba) farq qiladi, ammo ulardagi narsalarning soni bir xil. Bunday birlashmalar uch elementni 2 tadan o‘rinlashtirish deb ataladi. m elementni n tadan **o‘rinlashtirish deb shunday birlashmalarga aytiladiki**, ularning har birida, berilgan m elementdan olingan n ta element bo‘lib, ular bir-birlaridan e elementlari bilan, yoki elementlarning tartibi bilan farq qiladi (demak, n≤m faraz qilinadi).

Masalan, yuqoridagi 3 tadan olingan birlashmalar uch elementdan tuzilgan 3 tadan o‘rinlashtirishlar bo‘ladi (faqat tartiblari bilan farq qiladi), 2 tadan olingan birlashmalar, uch elementni 2 tadan o‘rinlashtirish bo‘ladi (yo narsalari bilan yoki tartibi bilan farq qiladi). Berilgan m elementdan tuzilgan o‘rinlashtirishlar 1 tadan, 2 tadan, 3 tadan, ... va nihoyat, m tadan bo‘lishlari mumkin.

m ta elementdan tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlar sonini, ularning o‘zlarini tuzmasdanoq aniqlay olamiz. Bu sonni A_m^n shaklida belgilash qabul qilingan (bundagi A - fransuzcha "arrangemenS" degan so‘zning bosh harfi bo‘lib "o‘rinlashtirish" degan ma'noni beradi). Bu sonni topish uchun berilgan elementlardan mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlarni tuzishga imkon beradigan usulni ko‘rib chiqamiz.

Bizga m ta element: a, b, c, ..., k, l berilgan bo‘lsin. Eng oldin ularni 1 tadan joylashtirib, barcha o‘rinlashtirishlarni tuzamiz. Ma'lumki, ular m ta bo‘ladi. Demak: $A_m^1=m$. Endi 2 tadan joylashtirib, barcha o‘rinlashtirishlarni tuzamiz. Buning uchun oldingi 1 tadan tuzilgan o‘rinlashtirishlarning har biri eniga qolgan barcha m-1 ta elementni 1 tadan ketma-ket qo‘yib chiqamiz. Chunonchi, a element eniga, qolgan b, c, .., k, l elementlarning hammasini qo‘yib chiqamiz va shunga o‘xshash. U holda quyidagicha 2 tadan tuzilgan o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz:

m-qator
ab,ac,ad,....,ak,a1;(m-1 o‘rinlashtirish)
ba,bc,bd,....,bk,bl;(m-1 o‘rinlashtirish)
ca,cb,cd,....,ck,cl; (m-1 o‘rinlashtirish)
…………………
la,1b,1c,...,1k; (m-1 ma o‘rinlashtirish)

Barcha elementlar m ta bo‘lganlikdan har bir o‘rinlashtirishdan bir elementdan olsak m-1 ta 2 tadan o‘rinlashtirish hosil bo‘ladi va 2 tadan o‘rinlashtirishning umumiy soni (m-1)m bo‘ladi. Bulardan boshqa 2 tadan o‘rinlashtirishlar bo‘lmasligi ochiq ko‘rinib turibdi. Demak:

$\mathbf{A_m^2 = m(m-1)}$

Endi 3 tadan o‘rinlashtirishlar tuzish uchun hozirgina tuzilgan 2 tadan o‘rinlashtirishlardan har birini olib, uning yoniga qolgan barcha m-2 ta elementni bittadan qo‘yib chiqamiz. U holda quyidagi 3 tadan o‘rinlashtirishlarni topamiz:

(m-1)m qator
abc,abd,...,abk,abl; (m-2 o‘rinlashtirish)
acb,acd,...,ack,acl, (m-2 o‘rinlashtirish)
……………………
lka,lkb,..., (m-2 o‘rinlashtirish)

2 tadan o‘rinlashtirishlarning hammasi m(m-1) ga teng va har biridan (m -2) ta 3 tadan o‘rinlashtirish olingani uchun bunday o‘rinlashtirishlarning hammasi quyidagicha bo‘ladi:

$(m-2)[m(m-1)]=m(m-1)(m-2).$

Shunday qilib:

$A_m^3 = m(m - 1)(m - 2).$

Shunga o‘xshash:

$A_m^4 = m(m - 1)(m - 2)(m - 3).$

$A_m^5 = m(m - 1)(m - 2)(m - 3)(m - 4).$

va umuman:

$A_m^n = m(m - 1)(m - 2)\dots[m-(n - 1).$

O‘rinlashtirishlar sonining formulasi ana shunday; uni so‘z bilan quyidagicha aytish mumkin:

m ta elementdan n tadan olib tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlarning soni eng kattasi m bo‘lgan n ta ketma-ket butun sonlar ko‘paytmasiga teng.

Shunday qilib:

$A_4^2 = 4\cdot3 = 12$; $A_4^3 = 4\cdot3\cdot2=24$; $A_8^4 =8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$

va shunga o‘xshash.

Masalalar: 1) Sinfda 10 fan o‘qiladi va har kuni 5 xil dars o‘tiladi. Kunlik dars necha turli usul bilan taqsimlab qo‘yilishi mumkin?

Darslarning barcha mumkin bo‘lgan kunlik taqsimoti o‘n elementdan 5 tadan olib tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlarga juda o‘xshash ekanligi ravshan; shuning uchun taqsimot usullarining hammasi quyidagidan iborat bo‘lishi kerak:

$A_{10}^5=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6=30240$.

2) Butun sonlarning har biri uchta har xil qiymatli raqam bilan ifoda qilinadigan bo‘lsa, qancha butun son tuzish mumkin?

Izlangan son 9 ga qiymatli raqamdan 3 tadan olib tuzilgan o‘rinlashtirish sonidan iborat; demak, u $9\cdot8\cdot7=504$.

3) Har biri uchta turli raqam bilan ifoda qilinadigan bo‘lsa, qancha butun son tuzish mumkin?

10 ta raqam: 0,1,2,3,...,9 ni uchtadan joylashtirib $10\cdot9\cdot8=720$ o‘rinlashtirish tuzish mumkin, lekin bu son 0 raqami bilan boshlangan 3 tadan o‘rinlashtirishlarni chiqarib tashlash kerak. Bunday o‘rinlashtirish soni 9 ga qiymatli raqamni 2 tadan qancha o‘rinlashtirib tuzish mumkin bo‘lsa, shunchaga teng, ya'ni $9\cdot8=72$**;** demak, izlangan son 720-72=648**.**

n ta turli elementlardan **takrorlangan o‘rinlashtirish** soni $\overline{A_n^k} = n^k$ formula bo‘yicha topiladi.

2. *O‘rin almashtirishlar***.** Agar o‘rinlashtirishlar m ta elementdan n tadan olingan bo‘lsa, (ya'ni faqat elementlarining tartibi bilan farq qilsa) bunday o‘rinlashtirishlar o‘rin almashtirishlar deb ataladi. Masalan, ikki element a va b dan o‘rin almashtirish 2 ni 2 tadan o‘rinlashtirish bo‘ladi, ya'ni ab va ba : uch elementdan o‘rin almashtirish 2 ni 3 tadan o‘rinlashtirish bo‘ladi, ya'ni abc, acb, bac, bca, cab, cba va shular kabi m ta elementdan mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlar soni P_m bilan belgilanadi (bunda P fransuzcha "permuSaSion" so‘zining bosh harfi, uning ma'nosi, "o‘rin almashtirish" demakdir).

m ta elementdan o‘rin almashtirishlar m ni m tadan o‘rinlashtirish degan so‘z bo‘lgani uchun o‘rin almashtirishlar formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\mathbf{P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)...3\cdot2\cdot1=1\cdot2\cdot3...(m-1)m}$$

m ta elementdan mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlarning soni 1 dan m gacha natural sonlarning ko‘paytmasiga teng.

1) To‘qqizta har xil qiymatli raqam bilan nechta to‘qqiz xonali son yozish mumkin?

Izlangan son:

$P_9 = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9=362880$

2) 12 kishilik ovqat hozirlangan stolga 12 kishini necha turli o‘tkazish mumkin?
O‘tkazish turlarining soni quyidagiga teng: $1 \cdot 2 \cdot 3$ ... 12 = 479001600

Eslatma. 1 dan m gacha natural sonlarning ko‘paytmasi (qisqacha bunday belgilanadi: m! ning ortib borishi bilan juda tez o‘sadi: chunonchi, m=12 bo‘lganda u 479001600, m=100 bo‘lganda u shunday son bilan ifoda qilinadiki, uni tasvirlash uchun 158 raqam yozish kerak bo‘ladi. 0! = 1 deb qabul qilingan.

n ta turli elementdan takrorlash bilan chunonchi, birinchi tipdagi k ta elementdan, ikkinchi tipdagi k_2 ta elementda, ... n-tipdagi k_n ta elementdan tuzilgan, mumkin bo‘lgan o‘rin almashtirishlar soni

$$P(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_n)!}{k_1! k_2! ... k_n!}$$ **formula bilan** aniqlanadi.

4.4. Gruppalash

Agar m ta elementdan n tadan tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlarni bir – birlaridan, eng kamida bir element bilan farq qiladiganlarini tanlab olsak, u holda gruppalar deb aytilgan birlashmalarni hosil qilamiz. Masalan, to‘rt element *a, b, c* va *d* dan 3 tadan olib tuzilgan gruppalar bunday bo‘ladi:

abc, abd, acd, bcd

Agar bu gruppalarning har birida mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlarni qilsak, to‘rt elementdan 3 talab mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz:

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acd	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cad	*dab*	*dac*	*dba*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*

Bunday o‘rinlashtirishlarning soni 6·4=24 bo‘ladi. Shunday qilib *m* ta elementdan *n* tadan olib tuzilgan barcha o‘rinlashtirishlar soni *m* elementdan *n* tadan olib tuzilgan barcha gruppalar soni bilan *n* ta elementdan tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlar sonining ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$$A_m^n = C_m^n P_n ,$$

bunda C_m^n ifoda *m* ta elementdan *n* tadan olib tuzilgan barcha gruppalar sonini belgilaydi. (C – fransuzcha “**combinatsion**” so‘zining bosh harfi, uning ma’nosi “gruppalash” demakdir.) Bunday gruppalarning quyidagi formulasini chiqaramiz:

$$C_m^n = \frac{A_n^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)...[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3...n}.$$

Masalan:

$C_4^2 = \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6,\qquad C_4^3 = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}$ va shunga oʻxshash.

1) Bir vazifaga koʻrsatilgan 10 nomzoddan uch kishi saylanishi kerak. Saylovdagi turli imkoniyatlar qancha boʻlishi kerak?

Izlangan son oʻn elementni 3 tadan joylashtirib tuzilishi mumkin boʻlgan barcha gruppalar sonini tashkil qiladi, ya'ni

$$C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

2) 52 xil kartadan iborat dastadan 13 kartani necha xil qilib olish mumkin?
Izlangan son, 52 ta kartadan 13 tadan olib tuzilgan gruppalar sonidan iborat, ya'ni:

$$C_{52}^{13} = \frac{52\cdot 51\cdot 50....40}{1\cdot 2...13} = 635013559600.$$

4. Gruppalar soni formulasining boshqacha shakli. Gruppalar soni formulasining surat va maxrajini ushbu $1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ .\ (m\text{-}n)$ koʻpaytmaga koʻpaytirib, uni boshqacha shaklga keltirish mumkin; u holda suratda $m(m\text{-}1).\ .\ .\ [m\text{-}(n\text{-}1)]\ \cdot 1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ .\ (m\text{-}n)$ koʻpaytma chiqadi, bundan koʻpaytuvchilarning oʻrrnini alishtirib shunday yozsak boʻladi:

$$1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ .\ (m\text{-}n)[m\text{-}(n\text{-}1)]\ \ .\ .\ .\ m$$

Demak:

$$C_m^n = \frac{1\cdot 2\cdot 3....(m-1)m}{1\cdot 2\cdot 3....n\cdot 1\cdot 2\cdot 3...(m-n)} = \frac{P_m}{P_n\cdot P_{m-n}}.$$

5. Gruppalashning xossasi. Bu formula n ni $m\text{-}n$ bilan almashtirib, shuni chiqara olamiz:

$$C_m^{m-n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3....(m-1)m}{1\cdot 2\cdot 3....(m-n)1\cdot 2\cdot 3...n} = \frac{P_m}{P_n\cdot P_{m-n}}.$$

Bu formulani oʻtgan formula bilan solishtirib, shuni topamiz:

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

Quyidagi oddiy muhokama ham shu xulosaga keltiradi: agar m ta elementdan, bir gruppa tuzish uchun qanday boʻlmasin n ta elementni tanlab olsak, qolgan elementlarning hammasi $m\text{-}n$ ta elementdan bir gruppa tashkil qiladi. Shunday qilib, n ta elementdan tuzilgan har bir gruppaga $m\text{-}n$ ta elementdan tuzilgan bir gruppa toʻgʻri keladi, va aksincha; demak:

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

Bu munosabat, agar $n > \frac{1}{2}m$ boʻlsa, m ta elementdan n tadan olib tuzilgan gruppalar sonini topishi soddalashtirishga imkon beradi. Masalan:

$$C_{100}^{97} = C_{100}^3 = \frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3} = 161700.$$

n ta turli elementdan k tadan **takrorlangan gruppalar** soni $\overline{C_m^k} = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)}{k!(n-1)!}$ formula bilan aniqlanadi.

Savollar

1. O‘rinlashtirish sonini topish formulasini ko‘rsating.
2. Takrorlangan o‘rinlashtirishli sonini topish formulasini yozing.
3. *m* elementdan o‘rin almashtirishlar sonini topish formulasi qanday ifodalanadi, takrorlangani uchun formulasini yozing.
4. *m* elementdan *n* tada tuzilgan gruppalashlar soni qanday formula bilan topiladi?
5. *n* ta elementdan k tadan takrorlangan gruppalashlar sonini topish formulasini yozing.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Sinfda 40 ta o‘quvchi bor. Ulardan 32 tasi matematika to‘garagida, 21 tasi “Yosh rassomlar” to‘garagida shug‘ullanadi. 15 ta o‘quvchi ikkalasida ham shug‘ullanadi. Qancha o‘quvchi ikkalasida ham shug‘ullanmaydi?

2. Ingliz va nemis tillarini o‘rganayotgan 100 o‘quvchidan ingliz tilini 85 ta, nemis tilini 45 ta o‘quvchi o‘rganadi. Qancha o‘quvchi ikkala tilni ham o‘rganadi?

3. 200 ta talabadan ingliz tilini 28 ta, nemis tilini 30 ta, fransuz tilini 42 ta ingliz va nemis tilini 8 ta, ingliz va fransuz tilini 10 ta, nemis va fransuz tilini 5 ta talaba o‘rganadi. 3 ta talaba uchala tilni ham o‘rganadi. Qancha talaba faqat bittadan tilni o‘rganadi, qancha talaba birorta ham tilni o‘rganmaydi?

4. 80 ta maktab o‘quvchisidan 40 tasi futbol, 50 tasi voleybol o‘ynaydi. Ikkala o‘yinni o‘ynovchi o‘quvchilar qancha bo‘lishi mumkin? Hech bo‘lmaganda bitta o‘yinni o‘ynavchilarchi?

5. 25 ta o‘quvchidan 15 tasi matematikaga, 12 tasi ona tiliga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziquvchi o‘quvchilar soni qancha bo‘lishi mumkin. Hech bo‘lmaganda bittasiga qiziquvchilar – chi?

6. 25 ta o‘quvchidan 15 tasi matematikaga, 8 tasi o‘zbek tiliga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziquvchi o‘quvchilar qancha bo‘lishi mumkin. Hech bo‘lmaganda bitta fanga qiziquvchilar – chi?

7. $A=\{a, b, c, d\}$ va $B=\{m, f\}$ to‘plamlar berilgan. Berilgan to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qancha elementni o‘z ichiga olishi mumkin?

8 . Turnirda 50 ta shaxmatchi ishtirok etdi va har 2 tasi bir marta uchrashdi. Turnirda nechta partiya o‘ynalgan.

9. 7 kishi necha xil usulda kassaga navbatga turishi mumkin?

10. Sinfdagi 35 o‘quvchidan 28 tasi suzish seksiyasiga, 14 tasi voleybol seksiyasiga qatnashdi. Agar har bir o‘quvchi, hech bo‘lmaganda bitta seksiyaga qatnashsa, 2 la seksiyaga qatnashadigan o‘quvchilar nechta?

11. 30 o‘ringa 4 ta o‘quvchini nesha xil usulda o‘tkazish mumkin?

12. Futbol bo‘yicha mamlakat birinchiligida 18 ta komanda qatnashdi. Oltin, kumush, bronza medallari necha xil usulda taqsimlanishi mumkin?

13. Futbol chempionatida n ta komandalarning barchasi bir-biri bilan bir martadan o‘ynagandan keyin hammasi bo‘lib 120 marta o‘tkazildi. Chempionatda nechta komanda ishtirok etdi?
14. 9 ta bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtalar berilgan. Shu nuqtalar orqali nechta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?
15. 13 kishi bir-biri bilan salomlashganda, qo‘l berib ko‘rishishlar soni qancha bo‘ladi?
16. Talaba 6 kunda 4 ta imtihon topshirishi kerak. Buni necha xil usulda bajarish mumkin?
17. X = {a,b,c,d} to‘plam elementlaridan uzunligi 2 ga teng barcha kortejlarni tuzing. Bu kortejlar kombinatorikada nima deb ataladi. Kortejlar soni qancha bo‘ladi?
18. $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$ ekanini ko‘rsating.
19. 4 ta turli lavozimga nomzodlari ko‘rsatilgan 9 kishidan 4 kishini necha xil usul bilan saylash mumkin.
20. 9-sinfda 35 o‘quvchi bor. Ular bir-birlari bilan suratlarini almashishdi. Hammasi bo‘lib nechta surat almashilgan?
21. Sinfdagi 40 ta o‘quvchidan necha xil usul bilan sinf faollarini: sinfkomni, tozalik rahbarini va devoriy gazeta muharririni saylash mumkin?
22. 10 ta manzilgohga 10 ta xatni ikkita xat tashuvchi olib borishi kerak. Ular ishni necha xil usulda bo‘lib olishlari mumkin?
23. Talaba 4 ta imtihonni 6 kunda topshirishi kerak. Bunda necha xil usulda amalga oshirish mumkin?
24. 12 musabaqadosh o‘rtasida birinchi, ikkinchi va uchinchi mukofotlar necha xil usulda taqsimlanishi mumkin?
25. Har birida ikkitadan element bo‘lgan 210 ta o‘rinlashtirishni nechta har xil narsadan tuzish mumkin?
26 . Agar $A_n^5 = 18 \cdot A_{n-2}^4$ bo‘lsa n ni toping.
27. Yetti xonali 107 ta telefon nomerlarining qanday qismi yettita har xil raqamdan iborat bo‘ladi?
28. Agar:
a) A ={I}; b) A={7;8}; d) A={a;b;c} e) A={m;n;p;q}
bo‘lsa, A to‘plam elementlaridan mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlarni tuzing.
29. Ifodaning qiymatini toping.
a) $\frac{14!}{12!}$ b) $\frac{16!}{18!}$ d) $\frac{19!}{17!}$ e) $\frac{9!}{5!4!}$ f) $\frac{10!}{6!4!}$ g) 8!+9!
h) $\frac{7!+6!+5!}{8!-7!}$ i) 10!-11! j) $\frac{17!-16\cdot 16!-15\cdot 15!}{17!}$
30. Formulalarni isbotlang:
a) $\frac{(m+3)!}{m!} = (m+1)(m+2)(m+3)$
b) $\frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdot(n-m+2)\cdot(n-m+1)$ bunda n>m.

31. Musabaqada 6 ta talaba qatnashmoqda. O‘rinlarni ular o‘rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin.

32. Kasrni qisqartiring:

$a)\ \frac{n!}{(n-1)!};\quad b)\ \frac{(n-2)!}{n!};\quad v)\ \frac{(n-1)!}{n!};\quad g)\ \frac{2k(2k-1)}{2k!},\quad (k\in N).$

33. 0, 1, 2, 3, 4 raqamlardan foydalanib, nechta besh xonali son hosil qilish mumkin? Bunda raqamlar besh xonali sonda bir marta ishlatilishi kerak.

34. Amallarni bajaring:

$a)\ \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\qquad d)\ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{(p-2)!}$

$b)\ \frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\qquad e)\ \frac{m(m-1)(m-2)....(m-(k-1))}{m!},\quad (m>k).$

35. 9 ta o‘quvchi ro‘yxatini necha xil usul bilan tuzish mumkin?

36. 0, 1, 2, 3 raqamlardan, har bir sonda bir xil raqamlar bo‘lmaydigan qilib, mumkin bo‘lgan barcha to‘rt xonali sonlar tuzilsin. Nechta son hosil bo‘lgan?

37. a) M={1} b) M={1;2} d) M={a, b, c, d} bo‘lsin, M to‘plamning barcha to‘plamlarini tuzing va ular sonini toping.

38. 6 ta elementdan iborat to‘plamning nechta qism to‘plami bor?

39 . Quyidagilarni hisoblang:

$a)\ C_8^2\quad b)\ C_{17}^1\quad d)\ C_6^1\quad e)\ C_7^4\quad f)\ C_9^7\quad g)\ C_5^4+C_5^0\quad h)\ C_{100}^{100}+C_{100}^1$

40. O‘quvchi 6 ta kitobdan 4 tasini nechta usul bilan ajratishi mumkin?

41 . Ma’lum bo‘limda ishlash uchun 20 ishchidan 6 ishchini ajratish kerak. Buni nechta usul bilan amalga oshirish mumkin?

42. 9 – sinfda 35 ta o‘quvchi bor. Ulardan 4 tasini anjumanga delegat qilib saylash kerak. Bu saylovda necha xil imkoniyat bor?

43. 2310 sonining tub bo‘luvchilardan ikkitadan tub bo‘luvchiga ega bo‘lgan nechta murakkab son tuzish mumkin?

44 . Tenglik to‘g‘riligini isbotlang?

$a)\ C_7^4+C_7^3=C_8^4\qquad b)\ C_{10}^5+C_{10}^6=C_{11}^6$

45. Ifodani soddalashtiring:

$a)\ \frac{2}{n+1}C_{n+1}^{n+1}\qquad b)\ \frac{3}{2(2n-1)}C_n^{2n-3}$

46. Tenglamani yeching:

$a)\ C_x^2=1\qquad b)\ 12C_{x+1}^{x-1}=55A_{x+1}^2\qquad v)\ C_{x-3}^2=21\qquad g)\ C_x^4=0$

47. Tenglamalar sistemasini yeching:

$a)\ \begin{cases} C_x^y=C_x^{y+2} \\ C_x^2=153 \end{cases}\qquad b)\ \begin{cases} C_x^{y+1}=2{,}5x \\ C_{x-1}^y=0 \end{cases}$

48. $C_{m+1}^{n+1}:C_{m+1}^{n}:C_{m+1}^{n-1}=5:5:3$ munosabat berilgan. n va m ni toping.

49. $C_n^m=C_n^{n-m}$ formuladan foydalanib quyidagilarni hisoblang:

$a)\ C_{20}^{18}\qquad b)\ C_{94}^{94}\qquad d)\ C_{37}^{34}\qquad e)\ C_{1000}^{999}\qquad f)\ C_{100}^{98}\qquad g)\ C_{20}^{110}$

50. Quyidagi tengliklar to‘g‘riligini tekshiring:

$a)\ C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n \qquad b)\ C_{m+1}^7 = C_{m+1}^{m-6}$

5§. Matematik tushuncha

5.1.Tushunchaning hajmi va mazmuni. Tushunchani ta`riflash usullari

Matematika atrofimizni o‘rab turgan tabiat va jamiyat hodisalarini alohida tomonlarini o‘rganadi. Masalan geometriyada predmetlarni shakli va o‘lchamlari o‘rganiladi, uning boshqa xossalari qaralmaydi.

Matematika atrofimizdagi turli ob'ektlarni miqdoriy va fazoviy xossa va munosabatlarini o‘rganuvchi fandir. U turli-tuman hodisa va predmetlarni o‘rganish maqsadida turli matematik modellar yaratdi. Bu tashqi dunyo hodisalarining biron-bir majmuasini matematik simvolikalar yordamida tavsiflashdir. Matematik modellarni o‘rganish bilan birga u real voqelikni o‘rganadi. Masalan y=kx funksiyaning xossalari haqidagi bilimlar turli miqdorlar orasidagi vaqt bilan harakatdagi masofa orasidagi, buyum miqdori bilan narxi orasidagi va boshqa bog‘lanishlarni o‘ziga xos xususiyatlarini tavsiflash imkonini berdi.

Har qanday matematik ob'ekt ma'lum bir xossaga ega. Bu xossalarni shu ob'ektni boshqa ob'ektlardan farqlash imkonini beradi. Bu xossalarni muhim va muhim bo‘lmagan xossalarga ajratish mumkin.

Agar xossa ob'ekt uchun o‘ziga xos va xossasiz ob'ekt mavjud bo‘lmasa, bu xossa ob'ekt uchun muhim xossa hisoblanadi. Muhim bo‘lmagan xossa - bu shunday xossaki, ularning bo‘lmasligiga ta'sir etmaydi.

Masalan, kvadratni to‘rtta tomoni va to‘rtta burchagi to‘g‘ri degan xossa muhim xossadir. Uning tomoni gorizontal holatda turibdi degan xossa muhim emas xossadir. Ob'ektni muhim xossasini bilish u ob'ekt to‘g‘risida tushuncha hosil qilish demakdir.

1-ta`rif. Ob'ektni o‘zaro bog‘langan muhim xossalari to‘plami bu ob'ekt haqidagi tushunchalar mazmuni deyiladi. Matematik ob'ektlar bitta termin (so‘z, nom) bilan ifodalanadi.

Tushunchaning hajmi deganda bitta termin bilan ifodalanadigan ob'ektlar to‘plamiga aytiladi.Tushunchani hajmi va mazmuni orasida bog‘lanish mavjuddir. Tushunchani hajmi ancha katta bo‘lsa, uning mazmuni shuncha kichik bo‘ladi. Masalan "to‘g‘ri burchakli uchburchak" tushunchasi, "uchburchak" tushunchasini hajmidan kichikdir, lekin uning mazmuni ikkinichisidan kattadir. Boshlang‘ich matematika kursi turli tushunchalarga boy. Masalan, "raqam" "son", "qo‘shiluvchi", "yig‘indi", "kesma', "kesma uzunligi" kabi tushunchalar 1-sinfda ko‘riladi.

2-ta`rif. Ob'ektni bilish uchun uning muhim xossalarini ko‘rsatish kerak. Bu muhim xossalarni ko‘rsatish ob'ektni **ta'riflash** deyiladi.

Tushunchani ta'riflash turli usullarda amalga oshiriladi.

Oshkor ta'rif va oshkormas ta'rif. Misol. To‘g‘ri burchakli uchburchak ta'rifi oshkor ta'riflashdir. Boshlang‘ich sinfda oshkormas ta'riflash usulidan foydalaniladi.

Kvadrat ta'rifini strukturasini tahlil qilib ko‘raylik "Kvadrat deb hamma tomonlari teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakka aytiladi". U mana bunday: dastlab ta'riflanuvchi tushuncha "kvadrat" ko‘rsatiladi, keyin esa, ushbu: to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lishlik, hamma tomonlari teng bo‘lishlik xossalarini o‘z ichiga oluvchi, ta'riflovchi tushuncha kiritilgan.

"To‘g‘ri to‘rt burchak bo‘lishlik" xossasi "kvadrat" tushunchasiga nisbatan jips jihatdan tushunchadir. Ikkinchi xossa - "tomonlari teng bo‘lishlik" - bu tur jihatdan xossa ko‘rsatgichi, shu asosda kvadrat to‘g‘ri to‘rtburchakning boshqa turlaridan farq qilinadi.

Maktab matematika kursining boshqa ta'riflari ham xuddi shunday strukturaga ega. Bunday ta'riflar strukturasini sxematik ravishda quyidagicha tasvirlash mumkin.

Tushunchalarni bunday sxema bo‘yicha ta'riflash **jins** va **tur** jihatdan ta'riflash deyiladi.

Matematikada boshqa ta'riflash ham uchraydi. Masalan, "Uchburchak deb bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqta va ularni jufti-jufti bilan tutashtiruvchi uchta kesmadan iborat figuraga aytiladi" degan ta'riflashda uchburchakni yasash usuli ko‘rsatib ta'riflangan, shu sababdan bu ta'riflash **genetik** (kelib chiqish) ta'riflash deb ataladi. Tushuncha ta'rifiga quyidagi talablar qo‘yiladi:

1) ta'riflanuvchi va ta'riflovchi tushunchalar o‘zaro mutanosib bo‘lishi;
2) tushunchani o‘zini-o‘zi orqali ta'riflash mumkin emas;
3) tushunchada ortiqcha narsalarni bo‘lmaslik;

5.2. Fikr (mulohaza) tushunchasi. Fikrning inkori

Fikrlash(mulohaza yuritish) va uning tahlilini matematik mantiq kursi o‘rganadi. Mantiq fikrlash usullarining tahlilidan iboratdir. Matematik mantiq esa mantiq ob'ektlarini matematik usulda tekshiradigan fandir. Matematik mantiqda fikr (mulohaza) boshlang‘ich tushuncha bo‘lib, u ta'riflanmaydi. Uni rost yoki yolg‘onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gap deb tushunamiz.

Misollar. 1. Tekislikda berilgan ikkita turli nuqtadan bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tadi;

2. Oxirgi raqami 0 yoki 5 bilan tugaydigan butun sonlar 5 ga bo‘linadi;

3. Toshkent O‘zbekistonning poytaxti;

4. 16 natural son to‘la kvadrat emas;

5. 2>5.

Bu keltirilgan fikrlardan faqat birinchi uchtasi rost bo‘lib, qolgan ikkitasi yolg‘ondir.

O‘zbek tilidagi hamma fikrlarni A, B, C, ..., A_1, B_1, C_1, ... yoki a, b, c, ..., a_1, b_1, c_1, ... indeksli yoki indekssiz lotin harflari bilan belgilaymiz.

Agar A fikr bo‘lsa, u faqat rost yoki yolg‘on fikrlardan bittasigina bo‘lishi mumkin. Agar A fikr rost bo‘lsa, unga 1 ni, yolg‘on bo‘lsa 0 ni mos qo‘yamiz. 0 va 1 larni A fikrning rostlik qiymatlari deymiz.

Shunday fikrlar borki, ularni bir nechta tarkibiy qismlarga ajratish mumkin. Masalan, "p natural son tub yoki murakkab sondir" fikrni "p natural son tub", "p natural son murakkab" ikkita tashkil etuvchi fikrlarga ajratish mumkin. "Tub sonlar to‘plami cheksiz to‘plamdir" yoki "Sardorbek kinoga bordi" fikrlarini yuqoridagi kabi tashkil etuvchi fikrlarga ajratish mumkin emas.
1-ta`rif. Agar A fikrni ikkitadan kam bo‘lmagan tashkil etuvchi fikrlarga ajratish mumkin bo‘lmasa, u holda A ni elementar (sodda) fikr deyiladi, aks holda A ni murakkab fikr deyiladi.
Yuqorida keltirilgan misollardan birinchisi murakkab, keyingi ikkitasi esa elementar fikrlar. Matematik mantiqda "emas", "va", "yoki", "agar ... bo‘lsa, u holda .... bo‘ladi", "... bo‘lgan holda va faqat shu holda ... bo‘ladi" terminlar orqali elementar fikrlardan murakkab fikrlar, murakkab fikrlardan yana ham murakkabroq fikrlar hosil qilinadi va bu prosessni fikrlar ustida mantiq amallarni bajarish deyiladi. Eslatilgan terminlarni mantiq, bog‘lovchilar, propozitsional yoki mantiq amallar deyilib, ularni mos ravishda "inkor", "kon'yunksiya", "diz'yunksiya", "implikatsiya" va "ekvivalentsiya" deb ataladi.
Matematik mantiqning fikrlarni va fikrlar ustidagi amallarni o‘rganadigan bo‘limini fikrlar **algebrasi** deyiladi.
2-ta`rif. A fikrning inkori deb, A rost bo‘lganda yolg‘on va yolg‘on bo‘lganda rost bo‘ladigan yangi fikrga aytiladi hamda $\rceil$A (yoki $\overline{A}$) ko‘rinishda belgilanadi va uni A emas deb o‘qiladi.

A	$\rceil$A
1	0
0	1

1 - jadval

1. - jadvalni inkor amalining rostlik jadvali deyiladi.
Misol. A - "Toshkent O‘zbekistonning poytaxti", u holda $\rceil$A - "Toshkent O‘zbekistonning poytaxti emas" degan fikrdan iborat bo‘ladi.
Ba'zan fikrning inkorini "emas" mantiq bog‘lovchi bilan bir xil ma'noga ega bo‘lgan terminlar orqali ham ifodalanadi. Masalan, A - "Sardorbek bugun maktabga bordi" fikrning inkori $\rceil$A -"Sardorbek bugun maktabga bormadi", $\rceil$A - "Sardorbek bugun maktabga borgani yo‘q" kabi ifodalash mumkin.

Savollar

1. Tushunchaning hajmi va mazmuni qanday aniqlanadi?
2. Ob'ektni ta'riflash deganda nima tushuniladi?
3. Fikr qanday ta’riflanadi?
4. Qanday fikrlarga elementar (sodda) fikr deyiladi?
5. Fikrning inkori qanday ta'riflanadi?

5.3. Fikrlarni kon`yunksiyasi, diz`yunksiyasi implikasiyasi va ekvivalentsiyasi

1-ta`rif. A va B fikrlarning kon'yunksiyasi deb - u fikrlarning har ikkalasi rost bo‘lgandagina rost bo‘lib, qolgan hollarda yolg‘on bo‘ladigan A va B fikrlardan tuzilgan murakkab fikrga aytiladi va $A \wedge B$ ko‘rinishda belgilanadi, hamda "A va B" deb o‘qiladi.

2 - jadval kon’yunksiya amalining rostlik jadvali deyiladi.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2 - jadval

Misol. A - "Kecha havo ochiq bo‘ldi", B - "Kecha yomg‘ir yog‘madi" fikrlarni kon'yunksiyasi $A \wedge B$ - "kecha havo ochiq bo‘ldi va yomg‘ir yog‘madi" degan fikrdan iborat bo‘ladi.

2-ta`rif. A va B fikrlarning diz’yunksiyasi deb u fikrlardan har ikkalasi yolg‘on bo‘lganda yolg‘on, qolgan hollarda rost bo‘ladigan A va B fikrlardan tuzilgan murakkab fikrga aytiladi va $A \vee B$ ko‘rinishda belgilanadi hamda "A yoki B" deb o‘qiladi. 3-jadvalni diz’yunksiyaning rostlik jadvali deyiladi.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3 - jadval

Misol. A - "Ertaga havo ochiq bo‘ladi", B - "ertaga havo bulutli bo‘ladi degan” fikrlarning diz’yunksiyasi $A \vee B$ - "Ertaga havo ochiq yoki bulutli bo‘ladi" degan fikrdan iborat bo‘ladi.

3-ta'rif. A fikrdan B fikrning implikatsiyasi deb - faqat A fikr rost B fikr yolg‘on bo‘lgandagina yolg‘on bo‘lib, qolgan hollarda rost bo‘ladigan A va B fikrlardan tuzilgan murakkab fikrga aytiladi hamda A=>B (yoki $A \supset B$) ko‘rinishda belgilanadi va uni "Agar A bo‘lsa, u holda B bo‘ladi" deb o‘qiladi, bunda implikatsiyani sharti, B esa uni xulosasi deyiladi.

A	B	A=>B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

4 - jadval

4-jadvalni implikatsiyani rost jadvali deyiladi.

Misol. A - "Xushnudbek uyda qoladi", B - "Xushnudbek kinoga boradi" degan fikrlarning implikatsiyasi A=>B - "Agar Xushnudbek uyda qolsa, u holda Xushnudbek kinoga boradi" degan fikrdan iborat.

Eslatma. Matematik mantiqda qaraladigan fikrlar implikatsiyasi jonli tilda ishlatiladigan implikatsiyadan farqlidir. Jonli tilda implikatsiyani tashkil etuvchi fikrlar orasida qandaydir ma'noviy bog‘lanish mavjuddir, lekin matematik mantiqda fikrlar orasidagi ma'noviy bog‘lanishning bo‘lishi talab etilmaydi. Matematik mantiqda fikrlarni mazmuni emas, balki ularning rostlik qiymatlarini e'tiborga olinadi. Masalan, A - "Bir sutkada 30 soat bo‘ladi", B - "7 tub sondir", C - "Uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 200° ga teng", bu holda A=>B -"Agar bir sutka 30 soat bo‘lsa, u holda 7 tub son bo‘ladi" fikrdan, A=>C - "Agar bir sutka 30 soat bo‘lsa, u holda uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 200° ga teng bo‘ladi" fikrdan iborat bo‘lib, jonli tilda implikatsiyalardan iborat bo‘lgan bu fikrlar mazmunga ega emas. Shunday bo‘lishiga qaramasdan matematik mantiq nuqtai - nazardan implikatsiyadan iborat bo‘lgan har ikkala fikrlar ham rostdir. Umuman aytganda, matematik mantiqda yolg‘on fikrdan rost fikrni kelib chiqishi ham, yolg‘on fikrdan yolg‘on fikrni kelib chiqishi ham rostdir.

4-ta`rif. A va B fikrlarning **ekvivalentsiyasi** deb, u fikrlarning har ikkalasi ham bir xil rostlik qiymatlarga ega bo‘lgandagina rost bo‘ladigan, qolgan hollarda yolg‘on bo‘ladigan A va B fiklardan tuzilgan murakkab fikrga aytiladi, A<=>B (yoki A=V, yoki A~B) ko‘rinishda belgilanadi. A<=>V ni "A bo‘lgan holda va faqat shu holda B bo‘ladi", - deb o‘qiladi.

A	B	A<=>B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

5-jadval

5-jadval ekvivalentsiyaning rostlik jadvali deyiladi.

Misol. A - "Xushnudbek kitob ustida ishlaydi" B "Xushnudbek a'lochi" fikrlar bo‘lsin. U holda A<=>B - "Xushnudbek kitob ustida ishlagan holda va faqat shu holda a'lochi bo‘ladi" fikrdan iboratdir.

Ekvivalentsiya tushunchasi matematikada muhim rol o‘ynaydi. Ikkita fikrlardan birining rostligidan ikkinchisining rostligi kelib chiqadigan bo‘lgan hollarda unga murojaat qilinadi. Bu ekvivalentsiya ikki fikrlardan birini ikkinchisi uchun zaruriy va yetarli shart ham deyiladi.

Masalan, A - "3n juft sondir", B - "n juft sondir" fikrlar bo‘lsin. A<=>B - "**n** juft son bo‘lgan holda va faqat shu holda **3n** juft son bo‘ladi" fikrdan iborat bo‘ladi. A<=>B ekvivalentsiyani (misoldagi) matematikada A<=>B - "**3n** juft son bo‘lishi uchun, **n** ning juft son bo‘lishi zarur va yetarlidir" ko‘rinishda ifodalanadi.

Savollar

1. Ikki fikrni kon’yunksiyasiga misollar keltiring.
2. Ikki fikrni diz’yunksiyasi qanday ta'riflanadi?
3. A dan B ni implikatsiyasi bilan B dan A ni implikatsiyasi o‘rtasida qanday farq bor?
4. Ikki fikrni ekvivalentsiyasi qanday aniqlanadi?
5. Ekvivalentsiyani fikrlarning implikatsiyasi orqali ham aniqlash mumkinmi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi berilgan gaplarning qaysi birlari mulohaza bo‘ladi, agar mulohaza bo‘lsa uning mantiqiy qiymatini (rostlik qiymatini) toping.

a) Sirdaryo Orol dengiziga quyiladi
b) Kislorod - gaz
d) Universitetning matematika fakulteti studenti
e) $A_1 B_1 C_1$ uchburchak $A_2 B_2 C_2$ uchburchakka o‘xshash
f) 25 - toq son
g) Matematika - qiziqarli fan
h) Palov - juda mazzali taom
i) 27- tub son
j) $2+\sqrt{3}-\sqrt[3]{5}$
k) Agar uchburchakning hamma tomonlari o‘zaro teng bo‘lsa, u teng tomonli uchburchak deyiladi
l) Oy marsning yo‘ldoshi
m) Farg‘ona Sirdaryo qirg‘og‘ida joylashgan
n) Oybekning "Alisher Navoiy" asarida rosa 154 242 ta harf ishlatilgan
o) Yashasin O‘zbekiston yoshlari!
p) Bugun havo bulutli.

2. Quyidagi fikrlarning inkorini yozing va rostlik qiymatlarini toping.

a) Amudaryo Orol dengiziga quyiladi
b) 15 soni 7 ga qoldiqsiz bo‘linadi
d) $3 < 7$
e) $3 \geq 7$

f) 33-tub son
g) ning kvadrati 35 ga teng
3. Quyidagi ikki mulohazalardan qaysilari biri ikkinchisining inkori bo‘ladi?
a) $3 > 15$ va $3 < 15$
b) $27 > 9$ va $27 < 9$
d) "ABC o‘tkir burchakli uchburchak" va "ABC o‘tmas burchakli uchburchak"
e) "f - toq funksiya" va "f - juft funksiya"
f) "Hamma tub sonlar toq" va "hamma tub sonlar juft"
g) "Hamma tub sonlar toq" va "juft tub son mavjud"
h) "n natural son juft" va "n natural son toq"
4. Quyidagi mulohazalarni inkor amalisiz yozing:

a) $\rceil(a<b)$	e) $\rceil(a\le b)$	h) $\rceil(a\ge b)$
b) $\rceil(a>b)$	f) $\rceil(a\ne b)$	i) $\rceil(2\cdot 2=4)$
d) $\rceil(a:b)$	g) $\rceil(a=2b)$	j) $\rceil(a=b)$

5. Quyidagi mulohazalarning rostlik qiymatlarini toping.
a) 11 - tub son va 15 - tub son
b) 2 juft son yoki bu son tub
d) Sirdaryo Orol dengiziga quyiladi va $2+3=5$
e) $2\cdot 2=4$ yoki oq ayiqlar Afrikada yashaydi
f) $2\cdot 2=4$ va $2\cdot 2\le 5$ hamda $2\cdot 2\ge 4$
6. Agar
a) $A\wedge(2\cdot 2=4)$ b) $C\vee(2\cdot 2=5)$; mulohazalar rost
d) $B\wedge(2\cdot 2=4)$ e) $D\vee(2\cdot 2=5)$ f) $E\wedge(2\cdot 2=5)$ mulohazalar yolg‘on bo‘lsa, u holda A,B,C,D,E mulohazalarning rostlik qiymatlarini toping.
2.7. Quyidagi ifodalarning rostlik shartlarini aniqlang va ularni kon’yunksiya yoki diz’yunksiya shaklida ifodalang.

a) $a\cdot b\ne 0$	e) $\frac{a}{b}=0$	h) $\lvert a\rvert>3$
b) $a\cdot b=0$	f) $\lvert a\rvert=3$	i) $a^2+b^2\ne 0$
d) $a^2+b^2=0$	g) $\lvert a\rvert<3$	j) $\frac{a}{b}\ne 0$

8. Agar A - "9 soni 3 ga qoldiqsiz bo‘linadi", B - "8 soni 3 ga qoldiqsiz bo‘linadi" bo‘lsa, quyidagi mulohazalarning rostlik qiymatini toping. =>

a) $A \Rightarrow B$	e) $B \Rightarrow A$	h) $A \Rightarrow B$	k) $B \Rightarrow A$
b) $\rceil A \Rightarrow \rceil B$	f) $\rceil B \Rightarrow A$	i) $A \Rightarrow \rceil B$	l) $B \Rightarrow \rceil A$
d) $A \Leftrightarrow B$	g) $\rceil A \Leftrightarrow \rceil B$	j) $\rceil A \Leftrightarrow B$	m) $A \Leftrightarrow \rceil B$

9. Agar $A \Rightarrow B$ mulohaza rost bo‘lsa, $(\rceil A\wedge B)\Rightarrow(\rceil A\vee B)$ mulohaza haqida nima deyish mumkin?
10. Agar $A\Leftrightarrow B$ mulohaza rost bo‘lsa,
a) $A \Leftrightarrow \rceil B$; b) $\rceil A\Leftrightarrow B$; d) $\rceil A\Rightarrow B$; e) $B\Rightarrow A$ mulohazalar rostlik qiymatlari haqida nima deyish mumkin?
11. Agar $A \Rightarrow B$ mulohaza rost, $A\Leftrightarrow B$ mulohaza esa yolg‘on bo‘lsa, u holda $B\Rightarrow A$ mulohazaning rostlik qiymati haqida nima deyish mumkin?
12. Quyidagi murakkab fikrlar uchun rostlik jadvalini tuzing:

$a)\ (A \wedge B) \Rightarrow C$ $d)\ A \Rightarrow (\urcorner B \vee C)$ $f)\ (\urcorner A \vee B) \Rightarrow C$ $h)\ (A \wedge \urcorner B) \Rightarrow \urcorner C$

$b)\ A \wedge B \wedge C;$ $e)\ \overline{A} \vee \overline{B}$ $g)\ A \Rightarrow B$ $i)\ \overline{A} \Rightarrow \overline{C}$

13. Murakkab fikr berilgan. Sodda fikrlarni ajratib, ularni A, B, C, . . . harflar bilan belgilab, unga mos logik formula tuzing. α tekislikda yotmaydigan *a* to‘g‘ri chiziq *b* to‘g‘ri chiziqqa $||$ bo‘lsa, u holda *a* to‘g‘ri chiziq α tekislikka $||$ bo‘ladi.

6§. Predikat tushunchasi va ular ustida amallar

6.1. Predikatlar

Biz gaplarni simvollashtirish bilan murakkabroq tuzilgan mulohazalarning to‘g‘riligini tekshirishni o‘rganmoqchi, ya'ni predikatlar hisobi bilan batafsil tanishmoqchi emasmiz. Mulohazalarni simvollashtirishni o‘rganishning boshqa zarur tomonlari ham bor. Gaplarni simvollashtirish aytmoqchi bo‘lingan mulohazalarning har xil tushunish xavfini yo‘qotadi, mulohazalarni ifodalashni osonlashtiradi. Bundan tashqari, hozirgi zamon matematika adabiyotida simvolik tildan keng foydalanilayotganligi ham simvolik tilni o‘rganishni taqozo etadi. Shularni e'tiborga olib, bo‘limimizning oxirida predikatlar va ular ustidagi logik amallar bilan qisqacha tanishib, mulohazalarni simvolik ifodalashni o‘rganamiz.

Aytaylik N natural sonlar to‘plami bo‘lib, n uning ixtiyoriy elementini bildirsin, P(n) orqali quyidagi: gapni belgilaylik: n - tub son. P(n) gap fikr bo‘la olmaydi, chunki, uning chin yoki yolg‘onligi haqida umuman hech narsa deb bo‘lmaydi. Agar P(n) da n ning o‘rniga tayin bir sonni qo‘ysak, u holda ko‘rilayotgan gap fikr bo‘ladi. Masalan, *n=f* bo‘lganda P(n) - "1- tub son" degan fikrni bildiradi. Bu fikr yolg‘ondir. P(5) esa (ya'ni "5- tub son") chin fikrdir. Shunday qilib, P(n) simvol n haqidagi shunday gapni bildiradiki, u har bir tayin n da biror fikrga aylanadi. Avval kiritgan ta'rifimizga ko‘ra P(n) simvol n o‘zgaruvchining fikriy formasidir. Bunday gaplar matematik logikada predikatlar deyiladi.

"Predikat" so‘zi lotin, nemis, ingliz tillarida ishlatiladigan so‘z bo‘lib, "kesim" degan ma'noni bildiradi. Masalan P(n) da n harfi ega o‘rnida kelib, gapning qolgan "tub son" degan qismi kesimdir.

Umuman **M** biror bo‘sh bo‘lmagan to‘plam bo‘lsin va **x** bu to‘plamning ixtiyoriy elementini bildirsin. Agar **x** o‘zgaruvchining ***P(x)*** formasi **x** ning o‘rniga **M** to‘plamning ixtiyoriy tayin elementini qo‘yganimizda fikrga aylansa, u holda ***P(x)*** forma **M** to‘plamda berilgan predikat deyiladi. Masalan, natural sonlar to‘plamida "**x** son 5 ga bo‘linadi" degan gap predikatdir. Bu yerda x fikr hosil qilish uchun biror natural sonning nomini yozish kerak bo‘lgan o‘rinni ko‘rsatadi.

Fikr bilan predikatning farqini, obrazli qilib, anketa bilan uning formalarini (blankasining) farqiga taqqoslash mumkin. Anketa blankasi, bu bir nechta tayin bo‘sh joylar qoldirib tayyorlangan forma bo‘lib, bu bo‘sh joylarga aniq ma'lumotlarni yozish natijasida anketa deb ataladigan predmet hosil bo‘ladi.

Biz ko‘rgan predikat tushunchasini **M** o‘rinli forma tushunchasi bilan solishtirsak, u bir o‘rinli predikat ekanini ko‘ramiz. Albatta, **n** o‘rinli predikatlarni ham qarash mumkin. **n** o‘rinli predikat bu **n** ta o‘zgaruvchining formasi bo‘lib, o‘zgaruvchilarning o‘rniga mos ravishda ularning aniqlanish sohalaridan tayin qiymatlar qo‘yganimizda u fikrga aylanadi. Masalan, "**x** son va u songa bo‘linadi" va "**x<y**" ikki o‘rinli, "**z** son **x** va **y** sonlarning yig‘indisiga teng" uch o‘rinli predikatlardir.

Ayrim hollarda fikrlarni 0 o‘rinli predikatlar deb ham aytiladi. Predikat o‘zining aniqlanish sohasidagi o‘zgaruvchining (o‘zgaruvchilarining) har bir tayin qiymatida (qiymatlarida) chin yoki yolg‘on bo‘ladi. Shu nuqtai nazardan predikatlar ustida ham logik amallarni kiritish mumkin. Ishni bir o‘rinli predikatlardan boshlaymiz. Faraz qilaylik, ***P(x)*** va ***Q(x)*** ikkita bir o‘rinli predikat bo‘lib, bitta **M** to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. Mantiq amallar yordamida bu predikatlardan murakkab predikatlar tuzamiz. **M** to‘plamning ***P(x)*** ga yolg‘on qiymat beradigan elementlarida chin qiymat va ***P(x)*** ga chin qiymat beradigan elementlarida yolg‘on qiymat qabul qiladigan predikat ***P(x)*** predikatning inkori deyiladi. ***P(x)*** ning inkori fikrlar hisobidagi kabi $\urcorner$***P(x)*** orqali belgilanadi.

P(x) va ***Q(x)*** predikatlarning kon'yuksiyasi deb, **M** da aniqlangan shunday predikatga aytamizki, u **M** ning ***P(x)*** va ***Q(x)*** larga bir vaqtda chin qiymat beradigan elementlarida chin bo‘ladi va boshqa elementlarida yolg‘on bo‘ladi. ***P(x)*** va ***Q(x)*** predikatlarning kon’yunksiyasi $P(x)\wedge Q(x)$ orqali belgilanadi.

Diz’yunksiya (va tor ma'nodagi diz’yunksiya), implikatsiya va ekvivalentsiya amallari ham xuddi shunga o‘xshash fikrlar ustida kiritilgan mos amallardan kelib chiqib aniqlanadi.

Fikrlar mantiqdagi amallarni predikatlar fikrlarga nisbatan kengroq va shu bilan birga fikrlarga kelib taqaladigan tushunchadir.

Ko‘p o‘rinli predikatlar ustida ham mantiq amallar yuqoridagiga o‘xshash kiritiladi. Biz ularning ta'rifini keltirib o‘tirmasdan bir nechta misollarda tushuntiramiz.

Agar ***P(x)*** va ***Q(x)*** ikkita bir o‘rinli predikat bo‘lsa, u holda $P(x)\vee Q(x)$ va $P(x)\vee Q(y)$ predikatlarni chalkashtirmaslik kerak. $P(x)\vee Q(x)$ bir o‘rinli predikat, $P(x)\vee Q(y)$ esa ikki o‘rinli predikatdir.

Endi gaplarni tilda ifodalashga doir misollar ko‘raylik

1)"Har qanday ratsional son haqiqiy son bo‘ladi" (1)

degan gapni quyidagicha aytish ham mumkin:

“Har qanday **x** uchun **x** ratsional son bo‘lsa, **x** haqiqiy son bo‘ladi".

Biz "**x** - ratsional son" degan gapni ***P(x)*** orqali va "**x** - haqiqiy son" degan gapni ***Q(x)*** orqali belgilaymiz. U holda (1) ni ushbu:

"Har qanday **x** uchun ***P(x)*** => ***Q(x)***" (2)

simvolik ko‘rinishda ifodalash mumkin. Qabul qilingan belgilashimizga muvofiq, "5 - ratsional son" degan fikrni simvolik

P(5) **(3)**

ko‘rinishda yozish mumkin. Predikatlar ustida hozirgacha kiritilgan amallarga ko‘ra (2) va (3) ifodalar bo‘limning boshlanishida keltirilgan argumentdagi asoslarning simvolik tarjimasi bo‘ladi.

2) "Ayrim haqiqiy sonlar ratsional son ham bo‘ladi" degan gapni quyidagicha aytish ham mumkin:

"Shunday **x** mavjudki, **x** - haqiqiy son va **x** - ratsional son bo‘ladi". (4) Yuqorida kiritilgan predikatlardan foydalanib, gapimizni, quyidagicha simvolik yozishimiz mumkin:

"Shunday **x** mavjudki, $Q(x) \wedge P(x)$".

3) Ushbu

"Shunday **x** mavjudki, $Q(x) => P(x)$"   (5)

gap quyidagi gap bilan bir ma'noni anglatadi.

"Shunday **x** mavjudki, $\neg Q(x) \wedge P(x)$",   (6)

chunki biz "$Q(x) => P(x)$" formani unga ekvivalent bo‘lgan forma bilan almashtirdik. Lekin bu (6) gap avvalgi misoldagi (4) gap bilan bir xil ma'noni bildirmaydi. Haqiqatan, biz **x** ning aniqlanish sohasidan haqiqiy son bo‘lmagan predmetni topishimiz bilanoq, (5) ning haqiqatligiga rozi bo‘lishimiz kerak, ammo (4) da unday emas.

Kelishilganiga ko‘ra predikatning o‘zgaruvchisiga uning aniqlash sohasidan qiymat bersak, u holda fikr hosil qilamiz. Masalan, agar ***R(x)*** - "**x** o‘ninchi sinf o‘quvchisi" degan predikatni bildirsa, u holda **x** o‘rniga Muzaffar ismini qo‘yib, "Muzaffar 10 – sinf o‘quvchisi" degan fikrni hosil qilamiz. ***R(x)*** predikatdan unga "har qanday **x** uchun" degan ifodani qo‘shish bilan ham fikr hosil qilish mumkin.

Har qanday **x** uchun **x** – o‘ninchi sinf o‘quvchisi.   (7)

Albatta, biz (7) fikrni boshqacha ibora bilan quyidagicha ifodalashni; afzal ko‘ramiz (chunki, shunga odatlanganmiz).

"Har bir kishi o‘ninchi sinf o‘quvchisi"   (8)

Buning haqiqatan fikr ekaniga shubha yo‘q, chunki u tayin bir da'voni ifoda etyapti, shu bilan birga uning yolg‘onligiga shubha yo‘q, chunki jami insonlar 10 - sinf o‘quvchisi bo‘lishi mumkin emas. Shunga ahamiyat berish kerakki, agar *x* ning qiymatlar sohasi oldindan ko‘rsatilgan bo‘lsa (masalan, M to‘plam o‘n o‘quvchidan iborat bo‘lsa, ya'ni ularning familiyasi ko‘rsatilgan bo‘lsa), u holda bu fikrning chinlik qiymati boshqa bo‘lishi ham mumkin. Umuman, bunday fikrning chinlik qiymati predikatdagi o‘zgaruvchining qiymatlar sohasiga bog‘liq bo‘ladi.

6.2. Kvantor tushunchasi

Kelishilganiga ko‘ra predikatning o‘zgaruvchisiga uning aniqlash sohasidan qiymat bersak, u holda fikr hosil qilamiz. Masalan, agar ***R(x)*** - "**x** o‘ninchi sinf o‘quvchisi" degan predikatni bildirsa, u holda **x** o‘rniga Muzaffar ismini qo‘yib, "Muzaffar 10 – sinf o‘quvchisi" degan fikrni hosil qilamiz. ***R(x)*** predikatdan unga "har qanday **x** uchun" degan ifodani qo‘shish bilan ham fikr hosil qilish mumkin.

Har qanday **x** uchun **x** – o‘ninchi sinf o‘quvchisi.   (7)

Albatta, biz (7) fikrni boshqacha ibora bilan quyidagicha ifodalashni afzal ko‘ramiz (chunki, shunga odatlanganmiz).

"Har bir kishi o‘ninchi sinf o‘quvchisi"   (8)

Buning haqiqatan fikr ekaniga shubha yo‘q, chunki u tayin bir da'voni ifoda etyapti, shu bilan birga uning yolg‘onligiga shubha yo‘q, chunki jami insonlar 10 - sinf o‘quvchisi bo‘lishi mumkin emas. Shunga ahamiyat berish kerakki, agar *x* ning qiymatlar sohasi oldindan ko‘rsatilgan bo‘lsa (masalan, M to‘plam o‘n o‘quvchidan iborat bo‘lsa, ya'ni ularning familiyasi ko‘rsatilgan bo‘lsa), u holda bu fikrning chinlik qiymati boshqa bo‘lishi ham mumkin. Umuman, bunday fikrning chinlik qiymati predikatdagi o‘zgaruvchining qiymatlar sohasiga bog‘liq bo‘ladi.

"Har qanday x uchun" degan ifoda umumiylik kvantor deyiladi. "Har bir x uchun", "har qanday x uchun", "hamma x lar uchun" kabi iboralar bir ma'noda tushunilib, ular simvolik "$(\forall x)$" ko‘rinishda yoziladi (shu ma'noda turli adabiyotlarda "(x)", "$\forall(x)$", "$\forall x$" simvollardan ham foydalaniladi). $\forall$ simvol - ingliz tilidagi "All" - "hamma" so‘zi birinchi harfining teskari yozilganidir. Bu simvoldan foydalanib, (7) yoki (8) fikrni quyidagicha simvolik yozishimiz mumkin: $(\forall x)\ R(x)$.

Shunga o‘xshash, $R(x)$ predikatga "Shunday x mavjudki" degan ifodani qo‘shib, "o‘ninchi sinf o‘quvchisi mavjud" degan fikr bilan bir xil ma'noli fikrni hosil qilamiz. "Shunday x mavjudki", "biror x uchun", "kamida bitta x uchun", "birorta x topiladiki" iboralari predikatlar bilan birga kelganida bir xil ma'noda tushuniladi. Ular simvolik $\exists(x)$ yoki $(\exists x)$ yoki $\exists x$ ko‘rinishda yoziladi. $\exists$ - simvol ingliz tilidagi "ExisSs" - "mavjud" so‘zidagi birinchi harfning teskari yozilganidir. Shunday qilib, "$(\exists x)R(x)$" ifoda "o‘ninchi sinf o‘quvchisi mavjud" yoki "Shunday kishi topiladiki, u o‘ninchi sinf o‘quvchisidir" degan fikrning simvolik formasini bildiradi.

Kvantor faqat oddiy predikat (ya'ni oddiy forma) oldida kelmasdan, balki murakkab predikat oldida kelishi ham mumkin. Umumiylik kvantor uchun kiritilgan belgilashdan foydalanib, "har qanday ratsional son haqiqiy son bo‘ladi" degan fikrni batamom simvolik holda yozishimiz mumkin: $\forall(x)\ (\mathbf{P(x)} \Rightarrow Q(x))$.

Shunga o‘xshash "ayrim haqiqiy sonlar ratsional son hamdir" degan fikrni - simvolik tilda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$(\exists x)(Q(x)\wedge P(x))$$

(5) fikrning simvolik ifodasi ushbu

$$\exists(x)(Q(x) \Rightarrow P(x)) \qquad (9)$$

ko‘rinishda bo‘lib, u quyidagi fikrga teng kuchlidir:

$$\exists(x)(\rceil Q(x) \vee P(x)).$$

Yuqorida aytganimizdek, shuni esdan chiqarmaslik kerakki, x ning qiymatlar sohasida haqiqiy son bo‘lmagan predmet topilsa, biz (9) fikrni chin deb qabul qilishimiz kerak, chunki u fikr ushbu

$$Q(x) \Rightarrow P(x)$$

implikatsiyaga chin qiymat beradigan (ya'ni uni chin fikrga aylantiradigan) x mavjudligini da'vo qilyapti. Haqiqiy son bo‘lmagan x (tayin bir predmet) uchun $Q(x)$ yolg‘on bo‘ladi. Bu holda esa implikatsiyamiz chin bo‘ladi, ya'ni da'vo tasdiqlanadi. Shuning uchun ham (9) fikr bilan "airim
haqiqiy sonlar ratsional ham bo‘ladi" degan fikrni chalkashtirmaslik kerak - ular butunlay boshqa-boshqa fikrlardir. Umuman kvantorlarga qat'iy ta'rif berish mumkin.

Aytaylik, $P(x)$ biror **M** to‘plamda aniqlangan (ya'ni x ning qiymatlar sohasi **M** bo‘lgan) predikat bo‘lsin. Umumiylik kvantor bu shunday amalki, u $P(x)$ predikatga ushbu

"$\forall(x)$P(x)" ("hamma x lar **P(x)** xususiyatga ega") (10)

fikrni mos qo‘yadi. M to‘plamning hamma **a** elementlari uchun **P(a)** fikrlar chin bo‘lganda va faqat shu holda (10) fikr chin bo‘ladi. Boshqacha aytganda, (10) fikr M to‘plamda aynan chin bo‘lgan predikat uchun chin bo‘ladi. Agar M to‘plam faqat chekli sondagi ob'ektlardan iborat bo‘lsa, masalan, M={a,,a_2,...,a_n,}, u holda (10) fikrga teng kuchli bo‘lgan fikrni "oddiy fikrlarning" kon’yunksiyalari ko‘rinishida hosil qilish mumkin: $P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge ...\wedge P(a_k)$.
Bu esa umumiylik kvantorini aniq, tasavvur qilish uchun foydalidir.

Agar yana **P(x)** orqali biror M to‘plamda aniqlangan predikatni belgilasak, u holda mavjudlik kvantorni quyidagicha ta'riflash mumkin. Mavjudlik kvantori bu shunday amalki, u **P(x)** predikatga ushbu ***"∃(x)P(x)"*** ("Shunday ***x*** mavjudki, u **P(x)** xususiyatga ega bo‘ladi") (11) fikrni mos qo‘yadi. Kamida bitta **a∈M** uchun **P(a)** chin bo‘lganda bu fikr chin bo‘ladi. Shunday qilib, ***∃(x)P(x)*** fikr aynan yolg‘on predikatdan boshqa (M da aniqlangan) hamma predikatlar uchun chin qiymat qabul qiladi.

M to‘plam n ta elementdan iborat, ya'ni M={a_1, a_2,..., a_n"} bo‘lsa, u holda (11) fikrning chinlik qiymati ushbu
$\exists(x)P(x)\equiv P(a_1)\vee P(a_2)\vee\ldots\vee P(a_n)$ ekvivalentlikdan aniqlanadi.

Umumiylik kvantor va mavjudlik kvantor, mos ravishda kon’yunksiya va diz’yunksiya amallarini umumlashtiradi. Lekin M to‘plam cheksiz ko‘p elementga ega bo‘lganda bu amallar butunlay yangi amallar hisoblanadi, chunki cheksiz ko‘p fikrlar uchun kon’yunksiya va diz’yunksiya amallarni aniqlanmagan.

Mavjudlik kvantor bilan birga tor ma'nodagi mavjudlik kvantor ham uchraydi. Bu kvantor ***(∃!x)*** ko‘rinishda belgilanib, u **P(x)** predikatga shunday

$$(\exists!x)\ P(x)$$

fikrni mos qo‘yadiki, bu fikr M to‘plamdagi faqat bitta element uchun **P(x)** chin bo‘lganda va faqat shu holda chin bo‘ladi (agar M to‘plamda ikkita a va b element topilib, **P(a)** va **P(b)** chin bo‘lsa, **“*(∃!x)*P(x)”** fikr yolg‘on bo‘ladi). Tor ma'nodagi mavjudlik kvantor biz kundalik mulohazalarimizda ishlatadigan "faqat bitta *x* mavjudki" iborasiga mos keladi. Agar **P(x)** predikat aniqlangan M to‘plamning elementlari soni chekli, ya'ni M={a_1, a_2, ..., a_n} bo‘lsa, u holda
$\exists(x)P(x)\equiv P(a_1)\vee P(a_2)\vee\ldots\vee P(a_m)$
ekvivalentlik o‘rinli bo‘ladi.

Predikatlar va kvantorlardan foydalanib, simvolik tilda va simvolik ko‘rinishda berilgan gaplarni oddiy tilda ifodalashga doir misollar ko‘raylik.

1. Faraz qilaylik, A(*x*) - *x* o‘zgaruvchining ***F*** to‘plamda berilgan predikati bo‘lsin. Ushbu

a) $(\forall x\in M)\ A(x)$; c) $(\forall x\in M)\ (\overline{A}(x))$;
b) $(\exists x\in M)\ A(x)$; d) $(\exists x\in M)\ (\overline{A}(x))$.

fikrlarni so‘z bilan ifodalaymiz:

a) M to‘plamning har bir elementi A xususiyatga ega.
b) M to‘plamning A xususiyatga ega bo‘lgan elementi mavjud.
c) M to‘plamning har bir elementi A xususiyatga ega emas.
d) M to‘plamning A xususiyatga ega bo‘lmagan elementi mavjud.

Agar x o‘zgaruvchining qiymatlar sohasi M kontekstdan tushunarli bo‘lsa, u holda a) - d) fikrlarni quyidagicha yozish mumkin:

a) $(\forall x)\, A(x);$ c) $(\forall x)\, (\neg A(x));$

b) $(\exists x)\, A(x);$ d) $(\exists x)\, (\neg A(x)).$

Bu ifodalarning tabiiy ma'nosidan kelib chiqadiki, d) bilan a) va c) bilan d) bir-birlarining inkori bo‘ladi, ya'ni ushbu

$$\neg(\forall x\in M)\, A(x)\equiv(\exists x\in M)\, (\neg A(x))$$

$$\neg(\exists x\in M)\, A(x)\equiv(\forall x\in M)\, (\neg A(x)).$$

ekvivalentlik o‘rinli bo‘ladi. Bu ekvivalentliklar kvantorlar orasidagi munosabatini aniqlab, mavjudlik kvantorni umumiylik kvantor orqali va aksincha, umumiylik kvantorni mavjudlik kvantor orqali aniqlash mumkinligini ko‘rsatadi.

Agar formaga inkor va kvantor simvollari kirgan bo‘lsa, u holda ularning joylashish tartibi katta ahamiyatga ega. Masalan, $\neg\forall x$ (x - tub son) fikrning so‘z bilan ifodasi "tub bo‘lmagan son mavjud" bo‘lib, $\forall x(\neg$(x - tub son)) fikrning so‘z bilan ifodasi esa "har qanday son tub emas"dir.

6.3. Teoremalarning tuzilishi va ularning turlari

Biror bir fanni aksiomatik qurish uchun ba'zi bir tushunchalar, mosliklar va munosabatlar ta'rifsiz qabul qilinadi. Bu ta'rifsiz qabul qilingan tushunchalar, mosliklar va munosabatlarning hammasini boshlang‘ich tushunchalar deymiz. So‘ngra ana shu dastlabki tushunchalarning orasidagi bog‘lanishlarni ifodalovchi jumlalarni **aksiomalar** (aksioma – to‘g‘riligi hayotda tasdiqlangan, isbotsiz qabul qilinadigan matematik jumla hisoblanadi. Chekli sondagi fikrlar(aksiomalar) isbotsiz qabul qilinadi. Chekli sondagi aksiomalarni birgalikda aksiomalar sistemasi deyiladi. Tushunchalarning asosiy bo‘lmagan va ta'riflarga kiritilmagan xossalari, odatda isbotlanadi, ya'ni ta'riflardan, aksioma va ilgari isbotlangan xossalardan natija sifatida keltirib chiqariladi. Tushunchalarning isbot qilinadigan xossalari ko‘pincha teoremalar, ba'zan natijalar yoki alomatlar deb ataladi. Algebrada - formulalar, ayniyatlar, qoidalar deb ataladi.

Matematika fanini o‘rganish jarayonida turli teoremalarni isbotlashga to‘g‘ri keladi. Teoremalar algebra, geometriya va matematikaning boshqa sohalarida isbotlanadi. Teoremalar qanday bo‘lmasin ularni rostligi isbotlash bilan tekshiriladi.

Teoremalarni tuzilishi masalasini matematik logika tushunchalaridan foydalanib o‘rganiladi.

1-misol. 1-teorema**.** Agar berilgan son raqamlari yig‘indisi 3(9) ga bo‘linsa, bu son 3(9) ga bo‘linadi. Bu teorema natural sonlar to‘plamida ikkita predikatni implikatsiyasidan iborat ekanligini qurish mumkin. Agar x - ixtiyoriy natural son bo‘lsa, A(x) - "x sonning raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘linadi", B(x) - "x son 3 ga bo‘linadi". Bu holda yuqoridagi 1-teoremani A(x)=>B(x) ko‘rinishda yozish mumkin, bu impilikatsiya ixtiyoriy x natural son uchun rost bo‘ladi. Shunday qilib berilgan 1-teoremani quyidagicha yozish mumkin.

$$\forall(x\in N)(A(x)=>B(x)) \qquad (1)$$

2-misol. 2-teorema**.** Agar to‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlari teng bo‘lsa, u holda bu to‘rtburchak parallelogram bo‘ladi.

Bu teorema to‘rtburchaklar to‘plamida ikkita predikatlarning-implikatsiyasidan iborat bo‘ladi.

Barcha to‘rtburchaklar to‘plamini X orqali ifodalaylik, A(x) - "x to‘rtburchakda qarama-qarshi tomonlari teng", B(x) - "x to‘rtburchak parallelogram". Bu holda berilgan 2-teoremani quyidagicha yozish mumkin.

$\forall(x\in N)(A(x)\Rightarrow B(x))$ (2)

Yuqoridagilardan ko‘rinadiki, har qanday teoremani ikkita predikatlarning implikatsiyasi ko‘rinishda yozish mumkin ekan, ya'ni

$\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$

Bu teorema quyidagicha tuzilishga ega bo‘ladi.

1. A(x) - teoremaning sharti
2. B(x) - teoremaning xulosasi
3. $\forall(x\in X)$ - teoremaning tushuntirish qismi, bu yerda X, A(x) va B(x) predikatlarni rostlik sohasi (aniqlash sohasi).

Ba'zi teoremalar "Agar... bo‘lsa, ... bo‘ladi" ko‘rinishida bo‘lmasligi mumkin.

3-misol: 3-teorema**.** Rombning dioganallari o‘zaro perpendikulyar. Bu teoremani quyidagicha ifodalash mumkin:

Agar to‘rtburchak romb bo‘lsa, uning dioganallari perpendikulyar bo‘ladi. Bu teoremani predikatlar yordamida quyidagicha yozish mumkin.

A(x) - "x – to‘rtburchak romb"

B(x) - "x – to‘rtburchakning dioganallari o‘zaro perependikulyar".

X - barcha turtburchaklar to‘plami. Bu teoremani ifodasi $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$\forall(x\in X)(B(x)\Rightarrow A(x))$ teorema $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ teoremaga teskari teorema deyiladi. Bulardan ko‘rinadiki, berilgan teoremada shartini xulosasi bilan almashtirilsa, unga teskari teorema hosil bo‘ladi.

4-misol. 4-teorema**.** Agar natural son 3(9) ga bo‘linsa, uning raqamlari yig‘indisi 3(9) ga bo‘linadi.

Bu teorema 1-teoremaga teskari teoremadir.

$\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ teoremada B(x) shart A(x) uchun **zaruriy** shart. A(x) esa B(x) uchun **yetarli** shartdir.

Agar $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ va $\forall(x\in N)(B(x)\Rightarrow A(x))$ teoremalar rost bo‘lsa, uni $\forall(x\in N)(A(x)\Leftrightarrow B(x))$ ko‘rinishda yozamiz. Bunda A(x) va B(x) shartlar biri ikkinchisiga **zarur va yetarlidir.**

$\forall(x\in X)(\overline{A(x)}\Rightarrow\overline{B(x)})$ teorema $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ teoremaga **qarama-qarshi** teorema deyiladi.

$\forall(x\in X)(\overline{B(x)}\Rightarrow\overline{A(x)})$ va $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ teoremalar bir-biriga **qarama-qarshisiga teskari** teoremalar deyiladi. $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ teoremani rostligini isbotlash uchun, $\forall(x\in X)(\overline{B(x)}\Rightarrow\overline{A(x)})$ teoremaning rostligini isbotlansa. Teoremani isbotlashning bu usulini teskaridan faraz qilib isbotlash usuli deyiladi.

Savollar

1. Teoremani predikat va mantiqiy amallar yordamida yozing.
2. Berilgan teskari teoremani yozing.
3. Berilgan teoremaga teskari teorema bilan qarama-qarshi teoerma orasida qanday farq bor?
4. Qanday shartlar yetarli va zaruriy shart deyiladi?
5. Qarama-qarshisiga teskari teoremalarga misollar keltiring.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi teoremalarga teskari bo‘lgan tasdiqlarni ifodalang. Hosil bo‘lgan teskari tasdiqlardan qaysi biri rost, ya'ni teorema bo‘la oladi?

a) Agar ratsional sonlar ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda u fundamentaldir;

b) Agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda u chegaralangandir;

d) Agar uchburchak teng yonli bo‘lsa, u holda uning asosiga yopishgan burchaklari tengdir;

e) Agar to‘rtburchak romb bo‘lsa, u holda uning dioganallari o‘zaro perpendikulyardir;

f) Parallelogramm dioganallari kesishish nuqtasi uning simmetriya markazidir;

g) Agar qo‘shiluvchilarning har biri juft son bo‘lsa, u holda yig‘indi ham juft sondir;

h) Agar to‘rtburchakka aylana ichki chizish mumkin bo‘lsa, u holda bu to‘rtburchak rombdir;

i) Agar parallelogramm romb bo‘lsa, u holda uning dioganallari o‘zaro perpendikulyardir;

j) Agar $ax^2+bc+c=0$ ($a\neq0$) kvadrat tenglamaning ozod hadi c nolga teng bo‘lsa, u holda bu tenglamaning ildizlaridan biri nolga tengdir;

k) Agar ketma-ketlik monoton va chegaralangan bo‘lsa, u holda bu ketma-ketlik limitga ega.

2. 2.25-mashqda keltirilgan tasdiqlar uchun qarama-qarshi bo‘lgan tasdiqlarni ifodalang. Ulardan qaysi birlari to‘g‘ri, ya'ni teorema bo‘la oladi? Bu savolga berilgan javoblarni 2.25 - mashqda berilgan ikkinchi savolga berilgan javoblar bilan solishtiring. Ular mos tushadimi? (Agar qandaydir ikkita javob ustma-ust tushmasa, ulardan biri noto‘g‘ridir).

3. Quyida berilgan har bir teorema uchun barcha teoremalarni toping, ya'ni berilgan tasdiq uchun rost bo‘lgan teskari va qarama-qarshi bo‘lgan tasdiqlarni (agar ular mavjud bo‘lsa), qarama-qarshisiga teskari bo‘lgan tasdiqlarni toping.

a) Agar $a=0$ va $b=0$ bo‘lsa, u holda $a^2+b^2=0$ (a va b lar haqiqiy sonlar).

b) Agar a butun son b butun songa bo‘linsa, hamda b butun son c butun songa bo‘linsa, u holda a butun son c butun songa bo‘linadi.

d) Agar ab ko‘paytma c ga bo‘linsa va a son c ga bo‘linmasa, u holda b son c ga bo‘linadi.

e) Agar a son c ga bo‘linsa va b son c ga bo‘linsa, u holda a+b ham c ga bo‘linadi.

f) Agar aylanaga ikkita burchak ichki chizilgan bo‘lsa va ular bitta yoyga tiralgan bo‘lsalar, u holda bu burchaklar o‘zaro tengdir.

g) Agar to‘rtburchakda ikkita qarama-qarshi tomonlar teng bo‘lib, parallel bo‘lsa, u holda bu to‘rtburchak parallelogrammdir.
h) Agar ikkita vatarlar o‘zaro teng bo‘lgan doiralarga tegishli bo‘lib, o‘zaro teng bo‘lsalar, u holda bu vatarlar doira markazlaridan bir xilda uzoqlashgandirlar.
i) Agar a tekislik o‘zaro parallel bo‘lgan ikki to‘g‘ri chiziqning bittasiga perpendikulyar bo‘lsa, u holda bu tekislik ikkinchi to‘g‘ri chiziqqa ham perpendikulyardir.
j) Agar α tekislik β tekislikka perpendikulyar bo‘lgan a to‘g‘ri chiziq orqali o‘tsa, u holda α va β tekisliklar o‘zaro perpendikulyardirlar.
4. Quyida berilgan har bir teorema uchun barcha teskari va qarama-qarshi teoremalarni toping, hamda teoremaga teskari bo‘lgan teoremaning qarama-qarshisini toping.
a) Agar butun son 12 ga bo‘linsa, u holda bu son 3 ga ham, 4 ga ham bo‘linadi;
b) Agar to‘g‘ri to‘rtburchak kvadrat bo‘lsa, u holda uning dioganallari o‘zaro perpendikulyar va burchaklarni teng ikkiga bo‘linadi;
d) Agar parallelogramm kvadrat bo‘lsa, u holda uning dioganallari teng, o‘zaro perpendikulyar hamda kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi;
e) Agar piramida asos tekisligiga parallel bo‘lgan tekislik bilan kesilgan bo‘lsa, u holda uning yon qirralari va balandligi bu kesim orqali proportsional qismlarga ajraydi, bu holda kesimda hosil bo‘lgan ko‘pburchak piramida asosidagi ko‘pburchakka o‘xshash bo‘ladi, hamda kesim yuzi va piramida asosining yuzi nisbati ularning piramida uchigacha bo‘lgan masofalari nisbatining kvadratiga teng bo‘ladi.
5. Quyidagi teoremalarning mantiqiy strukturasini aniqlang va ularga teskari va qarama-qarshi bo‘lgan barcha teoremalarni toping.
a) Agar to‘rtburchakda qarama-qarshi tomonlar o‘zaro parallel bo‘lsa, u holda ular o‘zaro tengdir;
b) Agar to‘g‘ri chiziq ikkita tekislik kesishish chizig‘iga parallel bo‘lsa, u holda bu to‘g‘ri chiziq tekisliklarning har biriga ham paralleldir;
d) *a* tekislik va undan tashqarida o‘tgan a to‘g‘ri chiziq parallel bo‘ladi, agarda *a* tekislikda yotuvchi va a to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lsa;
e) Agar ikkita kesishuvchi tekisliklardan birida yotuvchi va ikkinchi tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lsa, u holda bu tekisliklar paralleldir;
f) a to‘g‘ri chiziq *a* tekislikka perpendikulyar bo‘ladi, agarda a to‘g‘ri chiziq *a* tekislikni kesib o‘tsa, hamda *a* tekislikda a to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan va o‘zaro parallel bo‘lmagan ikkita to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lsa.
6. Quyidagi teoremalar berilgan: "Bitta doirada yoki tengdosh bo‘lgan doiralarda: 1) katta vatar markazga yaqinroqdir; 2) teng vatarlar markazdan teng uzoqlashgandirlar; 3) kichik vatar markazdan uzoqroqda joylashgandir". Bu teoremalarga teskari bo‘lgan tasdiqlarning o‘rinli ekanligini to‘la diz’yunksiya prinsipidan foydalanib isbotlang va teskari teoremalarni ifodalang.

7. Quyidagi uchta teoremalarga teskari bo‘lgan teoremalarni ifodalang: "Musbat son a uchun: 1) agar b<c bo‘lsa, u holda ab<ac; 2) agar b=c bo‘lsa, u holda ab=ac; 3) agar b>c bo‘lsa, u holda ab>ac". Teskari teoremalar uchun isbot zaruriyati bormi? Javobingizni asoslang.

8. Butun sonlar to‘plamida quyidagi predikatlar berilgan:

C(x) : “x – 24 sonining bo‘luvchilari”

D(x) : “x – 72 sonining bo‘luvchilari”.

a) Berilgan to‘plamda D(x) predikat C(x) predikatdan logik kelib chiqishini isbotlang?

b) Agar . . . bo‘lsa, u holda . . . so‘zlar yordamida gap tuzing va teoremaning qismlarini ko‘rsating?

d) “zarur va etarli” so‘zlar yordamida gap tuzing.

7§. Algoritm. Boshlang‘ich sinflarda algoritmlar

Matematikada ko‘p sonli ayni bir turdagi masalalarni yechish ommaviy usullarini topish muammosi muhim o‘rin tutadi. Bunday bir turga mansub masalalarning yechimini matematik aniq buyruqdan chekli soni bilan ifodalanishiga Algoritm qurish deb aytiladi. Algoritm aniq matematik tushuncha bo‘lmagani uchun aniq matematik ta'rifga ega emas. Shuning uchun bu tushuncha faqat misollar yordamida, qiyosiy ta'riflash orqali aniqlashtiriladi.

Aytaylik cheksiz ko‘p masalalar to‘plami va ular har birining yechimi deganda nimani tushunish zarurligi berilgan bo‘lsin. Barcha masalalar va ular yechimlari ma'lum A alfavit so‘zlari yordamida kodlansin. Berilgan cheksiz ko‘p masalalarni yechish algoritmi mavjud deyiladi agar to‘plam har bir masalasi uchun chekli sondagi qadamlardan so‘ng ular yechimini aniqlovchi yagona usul qurish mumkin bo‘lsa, bunday qiyosiy ta'rifdagi "yagona", "chekli sondagi" tushunchalari matematik aniqlikka ega bo‘lmaganidan ta'rif matematik aniq emas.

Algoritm tushunchasining matematika faniga kirib kelishi o‘rta asrda yashab ijod etgan. O‘rta Osiyolik buyuk allomalardan biri al-Xorazmiy nomi bilan bog‘liqdir. Olimning to‘liq ismi Abu Abdulloh Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy al-Majmusiy. U 783 yilda Xorazmda tugilganligi va 850 yilda Bag‘dod shahrida vafot etganligi taxmin qilinadi. Dastlabki ma'lumotni Vatanida oladi. IX asr boshida al-Mahmud al-Rashid saroyida xizmat qiladi va uning buyrug‘iga ko‘ra Hindiston g‘arbiga safarga boradi va hind matematikasi bilan tanishadi. Muhammad Xorazmiy asarlarining umumiy soni hozirgacha ma'lum bo‘lmasada, uning fan tarixida muhim o‘rin tutgan arifmetika, algebra, astronomiya va geografiyadan yozgan beshta asari bizgacha yetib kelgan bo‘lib, bulardan biri Al-kitob al-muxtasar ibn hisob al-jabr va al-mukobala. Asar Evropada katta shuhrat qozonib, fransuz matematigi Viet (1540-1603; zamonigacha algebradan asosiy qo‘llanma sifatida foydalanib kelingan. Asarning arabcha qo‘lyozmasi hozirda Oksford universitetining kutubxonasida saqlanmoqda. Asar bir necha marta lotin tiliga tarjima qilingan bo‘lib, bulardan eng qadimgilari 1145 yili ingliz olimi Robert Chesterga taalluqli. Asarda 1 va 2-darajali tenglamalar klassifikatsiyasi, ularni yechish yo‘llari - algoritmi berilgan bo‘lib, algebra mustaqil va alohida fan sifatida bayon etilgan. Asar uch bo‘limdan iborat bo‘lib: 1-bo‘limda al-jabr va al-muqobala yordamida 1 va 2-darajali bir noma'lumli tenglamalarni yechish, ratsional va irratsional ifodalar bilan amallar bajarish hamda tenglama yordamida sonli masalalarni yechish yo‘llari berilgan; 2-bo‘lim geometriyaga bag‘ishlangan bo‘lib, bunda miqdorlarni o‘lchash va o‘lchashga doir masalalarga algebraning ba'zi bir tadbiqlari ko‘rsatilgan; 3-bo‘limda algebraning amaliy tatbiqi, ya'ni meros bo‘lishga doir masalalar berilgan.

1) Xorazmiy o‘z asarlarida uch xil miqdorlar bilan amal bajaradi: ildizlar, kvadratlar, oddiy son. Ildiz - har qanday noma'lum narsa ("shay"); Kvadrat - ildizning o‘zini-o‘ziga ko‘paytmasi; Oddiy son-ildizga va kvadratga tegishli bo‘lmagan son. Berilgan ax^2=bx^2; ax^2=c; bx=c ifodalarni hisoblash qoidalarini - algoritmini beradi.

Namuna sifatida quyidagi masalani yechishni ko‘raylik: kvadrat va yigirma bir dirham o‘n ildizga teng: $x^2+21=10x$.

Uni yechish usulini hozirgi zamon belgilashlari bilan parallel olib boramiz.

Xorazmiy usuli	**Hozirgi belgilashlarda**
1) ildiz sanog‘ini yarimlat, bu 5 bo‘ladi;	$\frac{b}{2}=\frac{10}{2}=5;$
2) yarimlangan ildiz sanog‘ini o‘z-o‘ziga ko‘paytir, bu 25 bo‘ladi;	$\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}=5\cdot 5=25;$
3) yarimlangan ildiz sanog‘ining kvadratidan yigirma birni ayir, bunda 4 qoladi;	$\left(\frac{b}{2}\right)^2-c=25-21=4$
4) to‘rtdan kvadrat ildiz chiqarsang 2 bo‘ladi;	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{4}=2;$
5) yarimlangan ildiz sanog‘idan 2 ni ayirsang 3 bo‘ladi;	$\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}=5-2=3;$
6) agar xohlasang yarim ildiz sanog‘iga 2 ni qo‘shsang 7 bo‘ladi;	$\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}=5+2=7;$

Demak, tenglamaning ikkala ildizi ma'lum bo‘ldi.

Xorazmiy yozadi: Bilingki, agar ildizlar sanog‘i yarmining kvadrati yigirma bir dirhamdan kichik $\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2<c\right)$ bo‘lsa, masala yechilmaydi; agar teng bo‘lsa, masala bitta yechimga ega ekanligi aniqlanadi.

Ushbu izlanishlar hozirgi zamon matematik mantiq va kibernetika fanlarining muhim qismi bo‘lgan algoritmlar nazariyasida asosiy rol o‘ynaydigan tushunchalardan biri - algoritm tushunchasi yaratilishiga asos bo‘ldi.

Boshlang‘ich sinflarda algoritmlar

a) O‘nli sanoq sistemasida yozilgan ko‘p xonali sonlarni qo‘shish algoritmi umumiy ko‘rinishda mana bunday ifodalanadi:

1. Ikkinchi qo‘shiluvchini tegishli xonalar bir-birining ostiga tushadigan qilib birinchi qo‘shiluvchining ostiga yozamiz.

2. Birlar xonasidagi raqamlar qo‘shiladi. Agar yig‘indi 10 dan kichik bo‘lsa, uni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga o‘tamiz.

3. Agar birlar raqamlarining yig‘indisi 10 dan katta yoki 10 ga teng bo‘lsa, uni $10+C_0$, bunda C_0 - bir xonali son ko‘rinishda yozamiz: C_0 ni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va birinchi qo‘shiluvchidagi o‘nlar raqamiga 1 ni qo‘shamiz, keyin o‘nlar xonasiga o‘tamiz.

4. O‘nlar bilan yuqoridagi amallarni bajaramiz, keyin yuzlar bilan va hokazo. Yuqori xona raqamlari qo‘shilgandan keyin bu jarayonni to‘xtatamiz.

b) 1. Ayriluvchini mos xonalar bir-birini ostida bo‘ladigan qilib kamayuvchining ostiga yozamiz.

2. Agar ayriluvchining birlar xonasidagi raqam kamayuvchining tegishli raqamidan katta bo‘lmasa, uni raqamidan katta bo‘lmasa, uni kamayuvchining raqamidan ayiramiz, so‘ngra keyingi xonaga o‘tamiz.

3. Agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta, ya'ni $a_0<b_0$ bo‘lib, kamayuvchining o‘nlar raqami noldan farqli bo‘lsa, kamayuvchining o‘nlar raqamini bitta kamaytiramiz, shu vaqtning o‘zida birlar raqami 10 ta ortadi, shundan keyin $10+a_0$ sonidan b_0 ni ayiramiz va natijani ayrmaning birlar xonasiga yozamiz, so‘ngra keyingi xonaga o‘tamiz.

4. Agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta bo‘lib, kamayuvchining o‘nlar, yuzlar va boshqa xonasidagi raqamlar nolga teng bo‘lsa, kamayuvchining noldan farqli birinchi raqamini olib, uni bitta kamaytiramiz, kichik xonalardagi barcha raqamlarni o‘nlar xonasigacha 9 ta orttiramiz, birlar xonasidagi raqamini esa 10 ta orttiramiz va $10+a_0$ ni ayiramiz. Natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga o‘tamiz.

5. Keyingi xonada bu jarayonni takrorlaymiz.

6. Kamayuvchining katta xonasidan ayirish bajarilgandan keyin ayirish jarayoni tugallanadi.

Bo‘lish va ko‘paytirish algoritmlari ham yuqoridagi kabi ta’riflanadi.

Bayon qilingan algoritmlarni amalda qanday bajarilishiga misollar keltiramiz.

Qo‘shish. 312+415 317+428 337+487

1)
$$\begin{array}{r} 312 \\ +\ \underline{415} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 312 \\ +\ \underline{415} \\ 7 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 312 \\ +\ \underline{415} \\ 27 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} 312 \\ +\ \underline{415} \\ 727 \end{array}$$

Ayirish. 786-235

1)
$$\begin{array}{r} 786 \\ -\ \underline{235} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 786 \\ -\ \underline{235} \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 786 \\ -\ \underline{235} \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} 786 \\ -\ \underline{235} \end{array}$$

1 51 551

Bo‘lish. 4004:4

1)	2)	3)	4)
4004 | 4	4004 | 4	4004 | 4	4004 | 4
4 | 1	4 | 10	4 | 100	4 | 1001
-	0	00	00
	0	0	0
	-	0	0
		0	0
		-	4
			4

II BOB. Nomanfiy butun sonlar

1§. Sanoq sistemalari.

1.1. Sanoq sistamasi tushunchasi

Kundalik turmushimizni sonlar, ularning yozuvi, turli hisob - kitoblarsiz umuman tasavvur etib bo‘lmaydi. Sonlarning paydo bo‘lishi va yozuvi uzoq o‘tmishga borib taqaladi. Oddiy matematik tushunchalarni – predmetlarning shakli va miqdor munosabatlari – insoniyatning ilk tarixiy davrida shakllangan. Ilk insoniyat sanash uchun barmoqlari to‘plamiga predmetlar to‘plamini mos qo‘yishgani fanda ma`lum. Yana tayoqchalar , tugunlar, o‘yiqlar ham ularga sanash va hisoblash uchun yordam bergan. Keyinchalik predmetlar sanog‘ini yozuvda ifodalash zarurati tug‘ildi va insoniyat buning uchun turli ifodalardan foydalana boshladi (rasmlardan, belgilardan, va nihoyat sonlar yozuvidan). Matematik tushunchalar, shu jumladan sanoq sistemalarining vujudga kelishi va rivojlanishi insonni yashash uchun mehnat qurollarini ishlata boshlagan davri bilan bog‘langan. Biz hozirgi kunda foydalanayotganimiz o‘nli sanoq sistemasi bo‘lib, matematik hisob - kitoblar va yana turli sohalarda asosan shu sanoq sistemasidan foydalanamiz. O‘nli sanoq sistemasi tarix fani taxminiga ko‘ra eramizning VI asrida hindistonliklar tomonidan qo‘llana boshlangan. Yevropaga X-XII asrlardan asosan Markaziy Osiyolik olimlarning qo‘lyozmalari asosida tanilgan. Bu davrda Markaziy Osiyoda fan tili arab tili bo‘lganligidan bu raqamlar arab raqamlari, allomalar ham arab olimlari atamasiga ega bo‘lgan.

1-ta`rif. Sanoq sistemasi deb sonlarni yozish, o‘qish va ular ustida amal bajarish usuliga aytiladi.

*2-ta`rif.* Berilgan sonning yozuvidagi belgilar o‘rnashgan o‘rniga qarab turli xil ma’noni anglatsa, bunday sanoq sistemasi pozitsion (pozitsion-pozitsiya so‘zidan olingan) sanoq sistemasi deyiladi. Ya`ni, raqamlar sonda o‘z pozitsiyasiga ega.

0, 1, 2..... 9 dan iborat raqamlar deb ataluvchi belgilar yordamida yozilgan sonlar o‘nlik sanoq sistemasida yozilgan sonlar deyiladi va u pozitsion sanoq sistemasidir. Masalan, d) 1101 -bu erda birinchi o‘rinda turgan 1 raqami 1ta bir likni bildirsa, 3-

o‘rinda turgan 1 raqami 1 ta yuzlikni, 4-o‘rinda turgan 1 raqami 1 ta minglikni anglatadi.

*3-ta`rif*. Agar raqamlar sonning qaysi o‘rnida kelishidan qat`iy nazar o‘z ma`nosini o‘zgartirmasa, bu sanoq sistemasi pozitsion bo‘lmagan – nopozitsion sanoq sistemasi deyiladi. Bunga qadimgi rim raqamlari, qadimgi Vavilonda sonlar yozuvi, qadimgi grek va slavyan yozuvlari misol bo‘ladi.

1.2.O‘nlik sanoq sistemasida sonlarning yozilishi

Bizga ma`lumki, o‘nli sanoq sistemasida 0 dan 9 gacha bo‘lgan raqamlardan foydalanamiz, ya`ni sonlarni shu belgilar yordamida ifodalaymiz. Bu raqamlar ketma - ketligi turli son xonalarini ifodalaydi. Masalan 7892 dan iborat belgilar 7 ming + 8yuz + 9 o‘n + 2 birlik sonini ifodalaydi. Bu yig‘indining yoyilmasi quyidagicha ifodalanadi: $7\cdot10^3+8\cdot10^2+9\cdot10+2\cdot10^0$. Ya`ni istalgan son o‘nning darajalari bilan ifodalanadi.

2-ta`rif. a natural sonining o‘nli sanoq sistemasida yozuvi deb bu sonni $a=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+a_{n-2}\cdot10^{n-2}+\dots+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0$ ko‘rinishda yozishga aytiladi. $a_1\dots a_n$ koeffisiyentlar 0 dan 9 gacha qiymatlar qabul qiladi va $a_n\neq0$.

10^n, 10^{n-1},… 10^2 ,10,1 xona birliklari deyiladi, bitta xonaning 10 ta birligi keyingi xonaning 1 ta birligini tashkil qiladi, 10 esa sanoq sistemaning asosi deyiladi.

$a=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+a_{n-2}\cdot10^{n-2}+\dots+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0$ berilgan sonni $a=a_na_{n-1}\cdot\cdot a_2a_1a_0$ ketma - ketlik ko‘rinishida yozish mumkin.

Sonlar yozuvidagi o‘ngdan dastlabki uchta xona bitta sinfga birlashtirilib, birlar sinfi deyiladi. Bular birlar, o‘nlar, yuzlar xona birliklaridir. Keyingi uchta raqam ikkinchi sinf bo‘lib, minglar sinfi deyiladi. Bu sinfga minglar, o‘n minglar, yuz minglar xona birliklari kiradi. Keyingi uchta xona birligi millionlar sinfini tashkil qiladi va hokazo.

1.3.O‘nli sanoq sistemasida arifmetik amallar

Sonlarni taqqoslash.

Natural sonlarning o‘nli yozuvi quyidagicha taqqoslanadi.

Agar

$a=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+a_{n-2}\cdot10^{n-2}+\dots+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0$

$b=b_m\cdot10^m+b_{m-1}\cdot10^{m-1}+b_{m-2}\cdot10^{m-2}+\dots+b_2\cdot10^2+b_1\cdot10+b_0$

a va *b* natural sonlar bo‘lib, quyidagi shartlardan biri bajarilsa, *a* soni *b* sonidan katta bo‘ladi:

1. n>m;
2. n=m, ammo $a_n=b_m;\ a_{n-1}=b_{m-1}\dots a_k=b_k$, ammo $a_{k-1}>b_{k-1}$.
3. n=m, $a_n=b_m$,

O‘nli sanoq sistemasida sonlar qo‘shish algoritmi. Agar natural a va b sonlar bir xonali bo‘lsa, ularning yig‘indisini topish uchun $A\cap B=\varnothing$, n(A)=*a* n(B)=*b* bo‘lgan A va B to‘plamlarning birlashmasidagi elementlarni sonini hisoblash kifoya. Lekin hisoblashni yengillashtirish maqsadida 1 dan 9 gacha bo‘lgan sonlar yig‘indisining jadvalini tuzib olish maqsadga muvofiq bo‘ladi. Bu jadval bir xonali sonlarni qo‘shish jadvali deyiladi.

Ko‘p xonali sonlarni qo‘shish ham shu jadvalga asoslanadi. Bilamizki,

har qanday ko‘p xonali sonlarni xona birliklari yig‘indisi shaklida ifodalash mumkin.

ixtiyoriy natural sonni qaraydigan bo‘lsak,

$a= a_n a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1 a_0$

$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ bo‘ladi. Bunda $a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0$ lar ; 0 dan 9 gacha bo‘lgan raqamlar bo‘ladi. $a_n \neq 0$.

Ko‘p xonali sonlarni og‘zaki qo‘shish qoidasini ko‘rib chiqaylik. Bu qo‘shish qonunlariga asosan amalga oshiriladi.

Masalan, 5642+136= 5 minglik + 6 yuzlik + 4 o‘nlik + 2 birlik)+(1 yuzlik + 3 o‘nlik + 6 birlik) gruppalash va o‘rin almashtirish xossalariga asosan:
5642+136=5minglik +(6 yuzlik + 1yuzlik) + (4 o‘nlik + 3 o‘nlik) + (2 birlik + 6 bir lik) = 5 minglik + 7 yuzlik + 7 o‘nlik + 6 birlik = 5776 yoki $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 6$ bo‘ladi. Bu esa yig‘indining o‘li yozuvi bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki, ko‘p xonali sonlarni qo‘shish uchun ularning mos xona birliklarini qo‘shish kerak ekan. Ya`ni, sonlarni yozma qo‘shish uchun qo‘shiluvchilar bir - birining ostiga shunday joylashtiriladiki, bunda sonlarning bir xil xona birliklari mos xona birliklari ostida bo‘ladi va o‘ngdan boshlab mos xona birliklari qo‘shilib, shu xona ostiga yozib boriladi.

Masalan,

$$\begin{array}{r} 5642 \\ +\ \underline{136} \\ 5776 \end{array}$$

O‘nli sanoq sistemasida qo‘shish algoriti umuman olganda quyidacha bo‘ladi:

1. Qo‘shiluvchilarni mos xona birliklari tagma – tag qilib ustun shaklida yozib olinadi. Masalan:

$$\begin{array}{r} 5642 \\ \underline{+136} \end{array}$$

2. Birlar xonasidagi raqamga birlar xonasidagi raqam qo‘shiladi. Agar yig‘indi 10 dan kichik bo‘lsa chiziq tagiga(yig‘indi xona birliklariga) mos xona birligi tagiga yoziladi va o‘nlar xonasiga o‘tamiz.
3. Agar birlar xonalarining yig‘indisi 10 ga teng yoki 10 dan katta bo‘lsa, uni $10+c$ ko‘rinishida olamiz va c ni yig‘indining birlar xonasiga yozamiz. Bunda c bir xonali son. O‘nlar xonasining qo‘shiluvchilariga 1 ni qo‘shib qo‘yamiz.
4. O‘nlar xonasida ham yuqoridagi amallarni bajaramiz va hokazo. Jarayon $b_{m+}\, a_n$ bajarilganda tugaydi.

O‘nli sanoq sistemasida sonlar ayirish. Bir xonali a sonini bir xonali sondan yoki 18 dan katta bo‘lmagan sondan ayirish shunday c sonini topishga keladiki, bunda $b=a+c$. bu ayirish bir xonali sonlarning qo‘shish jadvaliga asoslanadi.

Biz bilamizki, ko‘p xonali sonlar, ma`lumki, tagma-tag yozib olish yordamida bajariladi. Bu algoritm nimaga asoslanganini ko‘rib chiqaylik. 895-473 ayirmani qaraymiz. Bunda: $895=8 \cdot 10^2+9 \cdot 10+5$ va $473 = 4 \cdot 10^2+7 \cdot 10+3$ ekanini bilgan holda quyidagicha yozamiz:

$8\cdot10^2+9\cdot10+5-(4\cdot10^2+7\cdot10+3) = 8\cdot10^2+9\cdot10+5-4\cdot10^2-7\cdot10-3$

Ayirishga nisbatan ko‘paytirishning taqsimot qonuniga ko‘ra:

$(8-4)\cdot102+(9-7)\cdot10+5-3=4\cdot10^2+2\cdot10+2$

Bundan ko‘rinadiki, ko‘p xonali sonlarning ayirmasi tegishli xona raqamlarini ayirishga keltiriladi. 8-4, 9-7, 5-3 ayirmalarni qo‘shish jadvalidan topiladi.

Demak:

$$\begin{array}{r} -\,895 \\ \underline{473} \\ 422 \end{array}$$

Endi kamayuvchining biror xonasidagi raqam ayriluvchining o‘sha xonasidagi raqamdan kichik bo‘lgan xolni ko‘ramiz. Masalan 350-126.

$350=3\cdot10^2+5\cdot10+0$ va $126=1\cdot10^2+2\cdot10+6$

$350-126=(3\cdot10^2+5\cdot10+0)-(1\cdot10^2+2\cdot10+6)$

Sondan yig‘indini va yig‘indidan sonni ayirish qoidalariga ko‘ra yozib olamiz: $3\cdot10^2+4\cdot10+10$. Bundan $(3\cdot10^2+4\cdot10+10)-(1\cdot10^2+2\cdot10+6) = (3-1)\cdot10^2+(4-2)\cdot10+(10-6)=2\cdot10^2+2\cdot10+4=224$

Umuman, o‘nli sanoq sistemasida ko‘p xonali sonlarni ayirish algoritmi quyidagilarga asoslanadi:

$a=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+a_{n-2}\cdot10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0$

$b=b_m\cdot10^m+b_{m-1}\cdot10^{m-1}+b_{m-2}\cdot10^{m-2}+\cdots+b_2\cdot10^2+b_1\cdot10+b_0$ sonlari berilgan bo‘lsin.

- ayriluvluvchining mos xonalarini kamayuvchining mos xonalari ostida qilib tagma-tag yozamiz;
- agar ayriluvluvchining birlar xonasidagi raqami kamayuvchining tegishli raqamidan katta bo‘lmasa, ayirishni birlar xonasida bajaramiz va keyingi xonaga o‘tamiz;
- agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta, ya`ni $a_0> b_0$ bo‘lib, kamayuvchining o‘nlar raqami noldan farqli bo‘lsa, kamayuvchining o‘nlar raqamini bittaga kamaytiramiz va $10+ b_0$ sonidan a_0 ni ayiramiz. Natijani javobning birlar xonasiga yozib, keyingi xonaga o‘tamiz;
- agar ayriluvluvchining birlar xonasidagi raqami kamayuvchining tegishli raqamidan katta bo‘lib, kamayuvchining o‘nlar, yuzlar va boshqa xonasidagi raqamlar nol bo‘lsa, kamayuvchining noldan farqli keyingi birinchi raqamini olib, uni bittaga kamaytiramiz va qolgan kichik xonalarni o‘nlar xonasigacha 9 ga oshiramiz. Birlar xonasidagi raqamni $10+b_0$ deb olib, undan a_0 ni ayiramiz. Natijani javobning birlar xonasiga yozib, keyingi xonaga o‘tamiz;
- keyingi xonada jarayon takrorlanadi. Jarayon $b_m- a_n$ bajarilganda tugaydi

O‘nli sanoq sistemasida ko‘paytmani hisoblash algoritmi. O‘nli sanoq sistemasida ko‘paytirish amalini turli xonali sonlar ustida bajarish uchun bir xonali sonlarni ko‘paytirish jadvali tuzib olinadi. Masalan a va b bir xonali sonlarning ko‘paytmasini topish uchun $n(A)=a$ va $n(B)=b$ bo‘lgan A va B to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi elementlar sonini hisoblash yetarli.

Ko‘p xonali sonni bir xonali songa ko‘paytirish yig‘indini songa ko‘paytirish qoidasiga asosan amalga oshiriladi. Masalan:

$682 \cdot 6 = (600+80+2)\cdot6=600\cdot6+80\cdot6+2\cdot6 =3600+480+12=4092$ yoki

$$
\begin{array}{r}
682 \\
\times \quad 6 \\
\hline
4092
\end{array}
$$

Ko‘p xonali sonni ko‘p xonali songa ko‘paytirish sonni bir necha sonni yig‘indisiga ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra amalga oshiriladi. Masalan:

$2305 \cdot 472 = 2305 \cdot (400+70+2) = 2305 \cdot 400 + 2305 \cdot 70 + 2305 \cdot 2$

Shuni aytib o‘tish kerakki, bitta raqamidan tashqari boshqa raqamlari nollar bilan tugagan sonlarni ko‘paytirishda noldan farqli raqamlar ko‘paytirilib, ikkala ko‘paytuvchida nechta nol bo‘lsa shuncha nol sonning o‘ng tomoniga yoziladi. Demak,

$$
\begin{array}{r}
2305 \\
\times \quad 400 \\
\hline
922000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2305 \\
\times \quad 70 \\
\hline
161350
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2305 \\
\times \quad 2 \\
\hline
4610
\end{array}
$$

$2305 \cdot 400 + 2305 \cdot 70 + 2305 \cdot 2 = 922000 + 161350 + 4610$; buni tagma-tag ko‘paytirishda amalga oshirsak:

$$
\begin{array}{r}
2305 \\
\times \quad 472 \\
\hline
4610 \\
+16135 \\
\underline{9220} \\
1087960
\end{array}
$$

O‘nli sanoq sistemasida bo‘lishni bajarish algoritmi. Bir xonali va 89 dan katta bo‘lmagan ikki xonali sonlarni bir xonali songa bo‘lish ko‘paytirish jadvaliga asosida bajariladi.ko‘p xonali sonni bir xonali songa bo‘lish yig‘indini songa bo‘lish kabi bajariladi. Masalan: $7225:5=(7000+200+20+5):5$

Umuman olganda yozma bo‘lish amalini bajarish qoldiqli bo‘lish amaliga va bir xonali sonlarni bo‘lishga asoslanadi. Shuni aytish kerakki, sonlarni bo‘lish ko‘paytirishga teskari amal bo‘lganligi kabi, bo‘lish amalini boshlash ko‘paytmadagi kabi birlik xonasidan emas, balki eng yuqori n-chi xonadan boshlanadi. Yozma bo‘lish ham shu qoidaga asoslanadi. Masalan, yuqoridagi misolni olsak, avvalo 7000 sonining ichida 5 sonidan nechta borligini aniqlaymiz. Buning ucnun 7 raqamini ichidagi 5 raqami sonini aniqlaymiz. Bu bizga 1 va 2 qoldiqni beradi. Bu erda 1 soni javobning minglar xonasiga yoziladi, demak u 1000 sonini anglatadi. Minglar xonasidan yuzlar xona birligiga o‘tamiz. 2 qoldiq yuzlar xonasida qolyapti. Demak u 20 ta yuzlik bo‘ladi. Yigirmata yuzlikka ikkita yuzlikni qo‘shamiz, yigirma ikkita yuzlik hosil bo‘ladi. Uni 5 ga bo‘lsak, 4 yuzlik va 2 qoldiq qoladi. 4 raqamini yechimning yuzlar xonasiga yozamiz. Qoldiq esa 20 ta o‘nlikdan iborat va unga 2 onlikni qo‘shamiz. 22 o‘nlikni 5 ga bo‘lsak 4 o‘nlik va 2 qoldiq qoladi. Endigi 4 raqamini yechimning o‘nlar xonasiga yozamiz. Qoldiq 2 endi 20 ta birlikni anglatadi. Unga bo‘linmaning birlar xonasidagi 5 birlikni qo‘shamiz, 25 sonini 5 ga bo‘lsak 5 hosil bo‘ladi va jarayon tugallanadi. Bu jarayon bizga ma`lumki, quyidagicha yoziladi:

$$\begin{array}{r|l}
7225 & 5 \\
-\ 5 & 1445 \\
\hline
22 & \\
-\ 20 & \\
\hline
22 & \\
-\ 20 & \\
\hline
25 & \\
-\ 25 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Ko‘p xonali sonni ko‘p xonali songa bo‘lish ham shu tarzda amalga oshiriladi. Bunda bo‘luvchi necha xonali bo‘lsa bo‘linuvchining eng yuqori xonalaridan shunchasi bo‘luvchiga bo‘linish yoki bo‘linmasligi aniqlanadi. Agar bo‘linsa jarayon davom ettiriladi. Bo‘linmasa, bo‘linuvchining yana bir xonasi hisobga olingan holda qaraladi. Masalan, 1288:14. Bunda bo‘lishni 12 sonidan emas, 128 dan boshlaymiz, va hokazo:

$$\begin{array}{r|l}
128 & 14 \\
8 & \\
-\ 126 & 92 \\
\hline
28 & \\
-\ 28 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Savollar

1. Sanoq sistemalari haqida tushuncha bering?
2. O‘nli sanoq sistemasida sonlar qanday yoziladi va o‘qiladi?
3.O‘nli sanoq sistemasida sonlar qanday taqqoslanadi?
4. O‘nli sanoq sistemasida nomanfiy butun sonlar ustida arifmetik amallar bajarish algoritmlarini ayting.

Misollar

1 – misol. Berilgan sonni xona birliklarining yig‘indisi ko‘rinishida yozing.
$13567=1\cdot10^4+3\cdot10^3+5\cdot10^2+6\cdot10+7$

4 – misol. Ifodani taqqoslang:
1 – usul. 3785+635<3785+653
1 – qo‘shiluvchilar teng, 2 – qo‘shiluvchilarni taqqoslaymiz, 635<653. Demak, o‘ng tomon katta.
2 – usul. 3785+635<3785+653
4420<4438

5 – misol. Yig‘indini hisoblang:
38562+7296=45858

$$\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 38562 \\ 7296 \end{array} \\
\hline
45858
\end{array}$$

6 – misol. Ayirmani hisoblang:
6097342 – 589423=5507919

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 6097342 \\ 589423 \end{array} \\ \hline 5507919 \end{array}$$

7– misol. Ifodaning qiymatini toping:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 837 \\ 624 \end{array} \\ \hline 3348 \\ 1674 \\ 5022 \\ \hline 522288 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 837 \cdot 4=3348 \\ (837 \cdot 2) \cdot 10=16740 \\ (837 \cdot 6) \cdot 100=502200 \end{array}$$

8 – misol. Bo‘linmani toping:

2798784:4859=576

$$\begin{array}{r|l} 2798784 & 4859 \\ \cline{2-2} -24295 & 576 \\ \hline 36928 & \\ 34013 & \\ \hline 29154 & \\ 29154 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Berilgan sonlarni xona birliklarining yig‘indisi ko‘rinishida yozing:
38562, 138562, 7296, 48562, 100038562, 72963.

2. Ifodalarni taqqoslang:
a) 3956+72354 . . . . 3856+72354 ; g) 5627 – 486 – 321 . . . . 5627 – (486 + 321)
b) 43999+6135 . . . . 6135+43998 ; d) 3721 – (127 – 8) . . . . 3721 – 127 – 8
d) 3856+72354 . . . . 72354+3854 ; e) 1640 – (567+326) . . . . 1640 – 567+326.

3. Yig‘indini hisoblang:
a) 5378+2511 d) 823759+175241
b) 17831+21259 e) 1879894+3021006
d) 567489+3511 j) 37281+62719
e) 4208+965712 z) 49999+856666
f) (2000050+19897726)+2489+(117356+36)
g) 36250+(7999525+411095)+63750.

4. Ayirmani hisoblang:
a) 6097342 – 589423 e) 6345002 – 4909335
b) 10078563 – 6346935 f) 43040506 – 26305678
d) 5610 – 847 g) 73861 – 972
h) (485321+765809) – (8347+65432)

i) (57685 – 3794)+(1050010 – 5623)
j) 378631 – 325475

5. Ko‘paytmani toping:

a) 3781 · 495	g) 40007 · 7015
b) 3781 · 459	h) 7608 · 50002
d) 3781 · 954	i 4785 · 412
e) 3807 · 5060	j) (678+422) · 95 – 1378
f) 6070 · 4009	k) (1000 – 372) · 1005 – 52 · 37

6. Bo‘linmani toping:

a) 970408 : 9608	h) 309969 : 279
b) 40083042 : 5006	i) 104742 : 506
d) 170940 : 385	j) 279048 : 308
e) 1730600 : 3400	k) 428640 : 608
f) 188366 : 4957	l) 27642280 : 9004
g) 4231020 : 7005	m) 83640 : 205

1.4. O‘nli bo‘lmagan pozitsion sanoq sistemalari

Sanoq sistemasining eng qadimiy sistemasi vakili ikkilik sanoq sistemsidir. Bu sistema inson hisobni barmoqlari bilan emas, qo‘llari yordamida bajargan davrda vujudga kelgan. Bu sistemada sanoq sistemasining asosi ikki bo‘lib quyi raqam 1, yuqori raqam 2 bo‘lgan. Bu sistema izlarini hozir juftlab hisoblashlarda topish mumkin.

Qadimgi vavilonliklar esa noma`lum sabablarga ko‘ra oltmishtadan gruppalab sanaganlar. Ya`ni, oltmishlik sanoq sistemasidan foydalanganlar. Masalan,190 sonini 190=3·60+10 ko‘rinishida ifodalaganlar. Albatta bu sanoq sistemalarini pozitsion deb bo‘lmas edi. Chunki yozuvda vavilonliklar uchburchak va ponalardan foydalanganlar.

Hozirgi amaliyotda o‘nlik sanoq sistemasidan boshqa pozitsion sanoq sistemalari ham qo‘llaniladi. Masalan, personal kompyuterlarning ishlash prinsipi ikkilik sanoq sistemasiga asoslangan. Bu sistema yuqorida keltirilgan sistemadan farq qilib, raqamlari 0 va 1 dan iborat. Bu sistema hayotdagi ko‘p voqe`liklarni ifodalashi mumkin: rost va yolg‘on; bor va yo‘q, oq va qora va hokazo bo‘lib, boshqa vaziyat mavjud emas. Yoki oltitalab sanash natijasida yettilik sanoq sistemasi hosil bo‘ladi. Bunda ikkinchi xonadan boshlab har bir xona o‘zidan oldingi xonaning 7 ta birligiga teng bo‘ladi, ya’ni N sonini *7* lik sanoq sistemasida yozgan bo‘lsak, $a=\overline{a_n a_{n-1} ... a_1, a_0}$ $a= a_n \cdot 7^n+ a_{n-1} \cdot 7^{n-1}+\ldots+ a_2 \cdot 7^2+ a_1 \cdot 7+ a_0$ bo‘ladi. Xuddi shu kabi *k* lik sanoq sistemalarini hosil qilish mumkin.

O‘nlik sanoq sistemasining asosi deb 10 olinadi, ikkilik sanoq sistemasining asosi esa ikki, yettilik sanoq sistemasining asosi yetti va hokazo, *k* lik sanoq sistemaning asosi *k* dan iborat bo‘ladi.

1- ta’rif. *k* asosli sanoq sitemasida a sonining yozuvi deb uning $a_{(k)}= a_n\cdot k^n+ a_{n-1}\cdot k^{n-1}+\ldots+ a_2\cdot k^2+ a_1\cdot k+ a_0$ ko‘rinishidagi yozuviga aytiladi. bunda a_n, $a_{n-1,\ldots}$ a_2, a_1, a_0 koeffisiyentlar 0,1,2,…*k-1* qiymatlarni qabul qiladi va $a_n\neq 0$.
Masalan *a* $=5863_{(3)}$ bo‘lsa, $a_{(3)}=5\cdot 3^3+8\cdot 3^2+6\cdot 3^1+3\cdot 3^0$ yoki $a_{(3)}=5\cdot 3^3+8\cdot 3^2+6\cdot 3+3$ bo‘ladi. Bu yerda *k*=3. Bu son quyidagicha o‘qiladi: “ besh, sakkiz, olti, uch uchlik sanoq sistemasida”.
k lik sanoq sistemasidagi sonlar 0, 1, 2, 3, ... *k*-1 raqamlar yordamida yozilishidan, deylik, *5* lik sanoq sistemasida har qanday sonni 0, 1, 2, ..., 4 raqamlari yordamida yozish mumkinligi kelib chiqadi. Masalan,

nol- 0

Bir –1	Olti -11	O‘n bir-21
Ikki – 2	Etti – 12	O‘n ikki – 22
Uch –3	Sakkiz – 13	O‘n uch – 23
To‘rt – 4	To‘qqiz -14	O‘n to‘rt -24
Besh – 10	O‘n – 20	O‘n besh – 30

va h.k.z.

Ikkilik sanoq sistemasini qaraymiz. Bu sanoq sistemasida yozish uchun 0 va 1 raqamlari kifoya qiladi:

bir- 1	olti – 110	o‘n bir - 1011
ikki – 10	etti – 111	o‘n ikki - 1100
uch – 11	sakkiz – 1000	o‘n uch - 1101
to‘rt -100	to‘qqiz – 1001	o‘n to‘rt - 1110
besh – 101	o‘n – 1010	o‘n besh - 1111 va hokazo.

yoki $1111_{(2)}= 1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1$

O‘ndan farqli *k* asosli sanoq sistemasida sonlarni taqqoslash o‘nli sistemadagi kabi bajariladi. Masalan, $2201_{(3)}>2101_{(3)}$. Chunki bu sonlarning uchinchi xona birligida turgan raqamlargina turlicha bo‘lib, chapdagi sonda o‘ngdagidan katta raqam turibdi.

1.5.O‘ndan farqli pozitsion sanoq sistemalarida arifmetik amallar bajarish

Istalgan $k\neq 10$ sanoq sistemasida arifmetik amallar o‘nlik sanoq sistemasidagi kabi bajariladi. Buning uchun avval bir xonali sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish jadvalini tuzib olish muhim. Bu jadvallarga asoslanib ayirish va bo‘lish amali ham bajariladi.
Deylik, *k*= 7 bo1sin. Jadvalni pifagor jadvali ko‘rinishida tuzish qulay:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12

4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	11	12	13	14	15	16

Bu yerda satr va ustundagi sonlarning kesishishida son ularning yig‘indisini beradi. Bu jadvalga asoslanib, yettilik sanoq sistemasida qo‘shamiz: $3426_{(7)}+2351_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 3426_{(7)} \\ +\ 2351_{(7)} \\ \hline 6110_{(7)} \end{array}$$

Shu jadvaldan foydalanib ayirish amalini bajaramiz: $2356_{(7)}-435_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 2356_{(7)} \\ -\ 435_{(7)} \\ \hline 1621_{(7)} \end{array}$$

Endi yettilik sanoq sistemasida ko‘paytirish jadvalini tuzamiz:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	21	24
4	0	4	11	15	22	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

Ko‘paytirish amalini bajaramiz: $235_{(7)} \cdot 15_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 2356_{(7)} \\ \times\quad 15_{(7)} \\ \hline 15512 \\ +2356 \\ \hline 42402 \end{array}$$

Bo‘lish amali ham yuqoridagi jadvalga asoslanadi:

	6060 3	16
-	54	320 4
	36	
-	35	
	103	
-	103	
	0	

1.6. Bir sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemasiga o‘tish

O‘nli bo‘lmagan sanoq sistemalaridan o‘nli sanoq sistemasiga o‘tish. Asosi k bo‘lgan sanoq sistemasida yozilgan $a_{(k)} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1, a_0}$ ko‘rinishidagi sonni $a_{(k)} = a_n \cdot k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k + a_0$ deb yozib olamiz. Bu yerda koeffisientlar a_n, a_{n-1}, … a_2, a_1, a_0 va k o‘nli sanoq sistemasida yozilgan. Shunga ko‘ra k asosda yozilgan sonning o‘nli sanoq sistemasida yozuviga o‘tish uchun $a_{(k)} = a_n \cdot k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k + a_0$ ifodani o‘nli sanoq sistemasidagi kabi bajarib, uni o‘nli sanoq sistemasidagi yozuvini hosil qilamiz. Masalan $478_{(9)} = 4 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9 + 8 = 324 + 63 + 8 = 395_{(10)}$ bo‘ladi.

Sonning o‘nli sanoq sistemasidagi yozuvidan k asosli sanoq sistemasidagi yozuviga o‘tish uchun quyidagi xolni qarab chiqamiz: $a_{(k)} = a_n \cdot k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k + a_0$ ni $a_{(k)} = k(a_n \cdot k^{n-1} + a_{n-1} \cdot k^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot k + a_1) + a_0$ deb yozish mumkin. Bunda $a_0 < k$ bo‘lganligidan, a_0 ni $a_{(k)}$ sonining k ga bo‘lgandagi qoldiq deb qarash mumkin. Demak bunda $a_0 < k$ qoldiq, $a_n \cdot k^{n-1} + a_{n-1} \cdot k^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot k + a_1$ to‘liqsiz bo‘linma bo‘ladi. Xuddi shuningdek, $a_1 < k$ ni to‘liqsiz bo‘linmani k ga bo‘lgandagi qoldiq deb qarash mumkin va hokazo. Mana shu qonuniyatga asoslanib, sonning o‘nli yozuvidan k asosli sistemadagi yozuviga o‘tish amalga oshiriladi. $a_{(10)} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1, a_0}$ sonini k ga o‘nli sistemada bo‘lish qoidasi bo‘yicha qoldiqli bo‘lamiz. Hosil bo‘lgan qoldiq sonning k asosli sistemadagi yozuvining oxirgi raqami bo‘ladi. Chiqqan bo‘linmani yana k ga bo‘lamiz. Endigi qoldiq sonning oxiridan bitta oldingi yozuvi bo‘ladi. Jarayonni davom ettirib, $a_{(10)}$ ni k asosli sistemadagi barcha raqamlari topiladi. Masalan: $589_{(10)} = x_{(7)}$ ni topaylik:

589	7			
- 56	84	7		
29	-7	12	7	
- 28	14	- 7	1	7
1	14	5	- 0	0
	0		1	

Demak, $589_{(10)} = 1501_{(7)}$ bo‘ladi.

Berilgan ixtiyoriy asosli sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemasiga o‘tish uchun avval o‘nli sanoq sistemasiga, so‘ngra so‘ralayotgan sanoq sistemasiga o‘tiladi.
Masalan: $214_{(5)} = x_{(7)}$
Yechamiz: $214_{(5)}=2\cdot5^2+1\cdot5+4=36_{(10)}$. $36_{(10)}= x_{(7)}$

36	7	
35	5	7
1	0	0
	5	

bundan, $36_{(10)}= 51_{(7)}$ va $214_{(5)} = 51_{(7)}$ bo‘ladi.

Savollar

1. O‘nli bo‘lmagan pozitsion sanoq sistemalarida sonlar qanday yoziladi?
2. O‘nli bo‘lmagan pozitsion sanoq sistemalarida arifmetik amallar qanday bajariladi?
3. Bir sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemasiga o‘tish qoidalarini ayting va asoslang.
4. Ikkilik sanoq sistemasi haqida ma’lumot bering.

Misollar

1 – misol. 5007_8 sonni oltilik sanoq sistemasiga o‘tkazing.
Yechish: Berilgan sonni oldin 10 lik sanoq sistemasiga o‘tkazamiz. Buning uchun berilgan sonni xona birliklarining yig‘indisi ko‘rinishida yozib olamiz va natijani topamiz.: $5 \cdot 8^3+0 \cdot 8^2+7=5 \cdot 512+7=2560+7=2567$.

Endi 10 lik sanoq sistemasidagi 2567 sonni 6 lik sanoq sistemasiga o‘tkazamiz, buning uchun berilgan sonni 6 ga bo‘lamiz, bo‘lishni bo‘linmada 6 dan kichik son hosil bo‘lgunga qadar davom etamiz.

2567	6			
24	427	6		
16	-42	71	6	
12	7	- 6	11	6
47	6	11	- 6	1
$\boxed{42}$	1	6	5`	
5		5		

Demak, $5007_8=2567=15515_6$
2 – misol. 10010_2 va 11000_2 sonlarning yig‘indisi va ko‘paytmasini toping.
Yechish: 2 lik sanoq sistemasida qo‘shish va ko‘paytirish jadvalini tuzamiz.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Jadvaldan foydalanib berilgan sonlarning yig‘indisi va ko‘paytmasini topamiz.

$$\begin{array}{r} 10010_2 \\ 11000_2 \\ \hline 101010_2 \end{array}$$

3 – misol. $23012_4 – 2323_4$ yig‘indini va ayirmani hisoblang.

Yechish: 4 lik sanoq sistemasining alfaviti 0, 1, 2, 3 lardan iborat.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

4 – misol. $32012_4 \cdot 2312_4$

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

5 – misol. 573_8 va 413_8 sonlar ustida arifmetik amallarni bajaring.

Yechish: 8 lik sanoq sistemasining alfaviti 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sonlardan iborat.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

$$\begin{array}{r} +\,573_8 \\ 413_8 \\ \hline 1206_8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,573_8 \\ 413_8 \\ \hline 160_8 \end{array}$$

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Mustaqil yechish uchun misollar va masalalar

1. 1110001_2 sonni sakkizlik sanoq sistemasida yozing.
2. 2304_5 va 7526_8 sonlarni o‘nlik sanoq sistemasida yozing.
3. 87927 va 5275 sonlarni oltilik sanoq sistemasida yozing.
4. 100022_3 va 13572 sonlarni 12 lik sanoq sistemasida yozing.
5. 1487, 7693 va 1009 sonlarni 8 lik va 2 lik sistemasida yozing.
6. Quyidagi sonlarni 10 lik sanoq sistemasida yozing: 15402_8; 11000111_2; 526_7; 1324_5
7. Quyidagi sonlar yig‘indisini toping: 442_5 va 134_5; 1031_5 va 134_5
8. Amallarni bajaring va tekshiring:
   a) $222_3:2_3$ d) $1221_3:11_3$ f) $3275_8:15_8$
   b) $111111_2:11_2$ e) $2222_3:12_3$ g) $125246_7:11_7$
9. M = 5401_6 va N = 3052_6 sonlar berilgan. Ularni ikkilik sanoq sistemasida yozib, ikkala sanoq sistemasida arifmetik amallarni bajaring.
10. $23456_{10} = 125246_x$, x ni toping.
11. Amalarni bajaring:
    a) 3275_8+362_8 b) 5235_6-3421_6 d) $3412_5\cdot 21_5$ e) $302102_4:121_4$
    f) $563_8+217_8\cdot 15_8+2365_8-625_8:17_8$ g) $5501_6-3052_6+3455_6$
    h) $202112_3+210210_3-12020_3$ i) $132_8\cdot 47_8+2451_8$
12. M = 2154_6 va N = 3345_6 sonlarni 4 lik sanoq sistemasiga o‘tkazing va arifmetik amallarni bajaring.
13. R = 3320_8 va Q = 1534_8 sonlarni 5 lik sanoq sistemasiga o‘tkazing va arifmetik amallarni bajaring.
14. R = 1475_8 va Q = 1020_8 sonlarni 3 lik sanoq sistemasiga o‘tkazing va arifmetik amallarni bajaring.
15. M = 5401_6 va N = 3052_6 sonlarni 2 lik sanoq sistemasiga o‘tkazing va arifmetik amallarni bajaring.

2§. Nomanfiy butun sonlar to‘plamida bo‘linish munosabatlari

2.1.Nomanfiy butun sonlar to‘plamida sonlarning bo‘linishi

Sonlarni bo‘linishi nomanfiy butun sonlar to‘plamida qaraladi. Lekin sonning biror songa qoldiqsiz bo‘linishi masalasi ularning ayirmasi yoki yig‘indisi kabi aniqlanmaydi. Masalan nomanfiy butun sonlar to‘plamida *a* va *b* sonlarining ayirmasi mavjudligini sonning yozuviga qarab $\leq$ yoki $\geq$ munjsabatlarning birini bajarilishiga ko‘ra aniqlanadi. Yig‘indi va ko‘paytma esa har doim mavjud. *a* va *b* sonlarini bo‘linish yoki bo‘linmasligini bo‘lish amalini bajarmay turib aniqlash uchun ham ba`zi alomatlar mavjud.

1-ta`rif. Butun nomanfiy *a* soni natural *b* soniga qoldiqsiz bo‘linsa, *a* soni *b* soniga bo‘linadi yoki karrali deyiladi. Va *b* soni *a* sonini bo‘luvchisi deyiladi.
Ta`rifdan kelib chiqadiki, b soni a sonini bo‘luvchisi bo‘lsa, shunday c soni mavjudki, a=b·c bo‘ladi. Yani $(\forall a \in N_0\ \forall b \in N)\ (\exists c \in N_0)(a \vdots b \Leftrightarrow a = bc)$.

Masalan, 6 soni 42 sonining bo‘luvchisi bo‘ladi, yoki 42 soni 6 ga karrali. Chunki 42=6·7 bol`adi.

«Sonning bo‘luvchisi» tushunchasi umuman «bo‘luvchi» tushuchasidan farq qiladi. Sonning bo‘luvchisi shu sondan katta bo‘lmagani uchun bo‘luvchilar to‘plami cheklidir. Sonning karralilari to‘plami cheksizdir. $\forall a\in N_0$ uchun *na* ko‘rinishdagi barcha sonlar x ga karrali bo‘ladi, bu erda $n \in N_0$.

Bo‘luvchilar soniga qarab natural sonlar tub va murakkab sonkarga ajraladi.

Bo‘linish munosabati quyidagi xossalarga ega:

1°. Bo‘linish munosabati refleksiv, ya’ni ixtiyoriy natural son o‘ziga bo‘linadi, $(\forall a\in N)$ $(a \vdots a)$, chunki $\exists 1\in N_0,\ a = a\bullet 1$(ta’rifga ko‘ra). Bundan har qanday butun nomanfiy son birga bo‘linishi kelib chiqadi.

2°. Bo‘linuvchanlik munosabati antisimmetrikdir. Ya’ni $a \vdots b$ dan har doim $b \vdots a$ kelib chiqmaydi.

Isbot: $b \vdots a$ bo‘lishi uchun $b\geq a$ bo‘lishi kerak. Lekin bizda $a \vdots b$ va $a\geq b$. Bundan $a \vdots b$ *va* $b \vdots a$ bir vaqtda faqat $a=b$ bo‘lganda bajariladi.

3°. Bo‘linish munosabati tranziv, ya’ni $(\forall a,b,c\in N)a \vdots b\wedge b \vdots c\Rightarrow a \vdots c)$.

Isbot:

$$\left.\begin{array}{l} a \vdots b\Rightarrow a=dk \\ b \vdots c\Rightarrow b=cp \end{array}\right| \Rightarrow a=dk=c(pk)$$ bo‘linish ta’rifiga ko‘ra .

6°. 0 soni istalgan natural songa bo‘linadi, ya’ni $(\forall a\in N)0 \vdots a\Rightarrow 0=a\cdot 0$

7°. 0 dan farqli istalgan son 0 ga bo‘linmaydi

$(\forall a\in N_0\wedge a\neq 0)a \vdots 0$

Isbot: teskarisini faraz qilaylik $a \vdots 0\Rightarrow a=0\cdot b=b=0\Rightarrow a=0$ bu teorema shartiga zid. Demak, $a \vdots 0$

8°. 0:0 amali aniqlanmagan. Chunki, *0:0 = a* bo‘lsin, 0 = 0•a bajariladigan a- istalgan natural son bo‘lishi mumkin. Algebraik amal uning natijasi mavjud va yagona bo‘lsagina aniqlangan bo‘ladi. 0:0 natijasi istalgan son bo‘lgani uchun bu amal aniqlanmagan deyiladi.

2.2.Butun nomanfiy sonlarning yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasining bo‘linuvchanligi

1- teorema. Agar bir nechta natural sonlar s soniga bo‘linsa, ularning yig‘indisi ham s ga bo‘linadi.

Isbot: deylik *a* va *b* sonlari *c* ga bo‘linsin. Bundan shunday t, $p\in N$ mavjudki, a= c·t va b= c·p bo‘ladi o‘rniga qo‘ysak: *a+b*=c·t+ c·p= c(t+p). t+p=d deb belgilasak, *a+b=cd* bo‘ladi. Bundan $(a+b) \vdots c$ (ta’rifga ko‘ra). $a_1,a_2,\ldots a_n$ sonlarining har biri c ga b o‘linsa ularning yig‘ndisi ham c ga bo‘linishi shu kabi isbotlanadi. Berilgan teoremaga teskari teorema to‘g‘ri emas.

2–teorema. Agar $a\geq b$ bo‘lib,a va b sonlar c ga bo‘linsa, a-b ham c ga bo‘linadi. $(\forall a,b,c\in N_0)(a \vdots b, b \vdots c\wedge a\geq b\Rightarrow (a-b) \vdots c)$.

Isboti 1-teorema kabi.

3 -teorema. Agar ko‘paytmada ko‘paytuvchilardan biri natural c songa bo‘linsa, ko‘paytma ham c ga bo‘linadi. Ya’ni, $(\forall a,b,c\in N_0)(a\vdots c\Rightarrow ab\vdots c)$

Isbot: $a\cdot b$ ko‘paytmada $a\vdots c$ bo‘lsin. U holda t $\in$ N mavjudki, a =c · t bo‘ladi. Bundan $a\cdot b$=c·t·b=c ·(t ·b) va (t ·b)≥0 => $a\cdot b\vdots$c.

Ko‘paytuvchilar soni n ta bo‘lgan hol uchun ham teorema shunday isbot qilinadi.

4-teorema. Agar ko‘paytuvchilardan biri m ga, ikkinchisi n ga bo‘linsa, ko‘paytma mn ga bo‘linadi.

$(\forall a,b,m,n\in N_0)(a\vdots m\wedge b\vdots n\Rightarrow ab\vdots mn)$. Isboti 3 - teorema kabi.

5-teorema. Agar yig‘indida 1 ta qo‘shiluvchi n $\in$ N ga bo‘linmasa, qolgan hamma qo‘shiluvchilar n $\in$ N ga bo‘linsa ham yig‘indi n $\in N$ ga b o‘linmaydi.

Isbot: c=$a_1+a_2+...+a_n+r$, va $a_1\vdots m$, $a_2\vdots m,...a_n\vdots$m, lekin oxirgi qo‘shiluvchi r soni m ga karrali bo‘lmasin. Bundan yig‘indi c ham m ga karrali emasligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, c$\vdots$m bo‘lsin. c yig‘indini quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz: $r=c-(a_1+a_2+...+a_n)$. Bu yerda shartga ko‘ra $(a_1+a_2+...+a_n)\vdots$m va farazga ko‘ra c$\vdots$m. Bundan, yuqoridagi 2-teoremaga ko‘ra $r\vdots m$ bo‘ladi. Bu esa teorema shartiga zid. Demak qo‘shiluvchilardan biri r$\vdots$m emasligidan yig‘indi c$\vdots$m emasligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

2.3.Sonlarning bo‘linish alomati

Biror a sonini b soniga bo‘lishni bajarmay turib bo‘lininsh yoki bo‘linmasligini a sonining yozuvi orqali aniqlash bo‘linish alomati deyiladi. Umuman olganda matematikada barcha sonlar uchun umumiy qoida mavjud emas. Lekin ba`zi sonlar uchun bo‘linish qoidalari ma`lum bo‘lib, biz ularni ko‘rib chiqamiz. Bu alomatlar o‘nli sanoq sistemasi uchungina o‘rinlidir.

1) 2 ga bo‘linish alomati.a soni 2 ga bo‘linishi uchun sonning o‘ngdan oxirgi raqami 2 ga karrali bo‘lishi zarur va yetarli.

Isboti: a sonini $a=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$ deb yozib olamiz. Ma`lumki, bunda $a_n\neq 0$. $10\vdots 2$ bo‘lgani uchun $10^2\vdots 2$, $10^3\vdots 2$,…$10^n\vdots 2$ bo‘ladi. Bundan yuqoridagi 1-3-teoremaga ko‘ra $(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10)\vdots 2$ ekanligi kelib chiqadi. Bunga ko‘ra oxirgi a_0 raqami 2 ga bo‘linsagina a soni ham 2 ga bo‘linishi kelib chiqadi.

Ikkiga karrali 1 xonali sonlar 2,4,6,8 va 0 sonidir. Bu raqamlar, biz bilamizki, juft raqamlar raqamlardir va bu raqamlar bilan tugaydigan sonlar juft sonlar deyiladi.

2) 4 ga bo‘linish alomati. a soni 4 ga bo‘linishi uchun uning o‘ngdan oxirgi ikkita raqamidan hosil bo‘lgan son 4 ga bo‘linishi zarur va yetarli.

Isbot: a sonini $a=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$ deb yozib olamiz. $100\vdots 4$ bo‘lganligidan $(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10^2)\vdots 4$ bo‘lishi yuqoridagi 1-3-teoremalardan ma`lum. Qolgan $a_1\cdot 10+a_0$ (bu a sonining o‘ngdan oxirgi 2ta raqamidir) ham 4 ga bo‘linsa, shartga ko‘ra a soni ham 4 ga bo‘linadi.

3) 5 ga bo‘linish alomati. a soni 5 ga bo‘linishi uchun uning oxirgi raqami 0 yoki 5 bilan tugashi zarur va yetarli. (isboti uyga vazifa)

4) 10 ga bo‘linish alomati. Sonning yozuvi 0 raqami bilan tugasa va faqat shu holda son 10 ga bo‘linadi.
5) 9 ga bo‘linish alomati. *a* sonining o‘nli yozuvi raqamlari yigi`ndisi 9 ga bo‘linsa, bu son 9 bo‘linadi.
Isbot:10^n-1 ko‘rinishidagi sonlar 10 ga bo‘linishini isbotlaymiz. Haqiqatan $10^n-1=(9\cdot10^{n-1}+10^{n-1})-1=(9\cdot10^{n-1}+9\cdot10^{n-2}+10^{n-2})-1==(9\cdot10^{n-1}+9\cdot10^{n-2}+\ldots+10)-1=9\cdot10^{n-1}+9\cdot10^{n-2}+\ldots+9$. Hosil bo‘lgan yig‘indining har bir qo‘shiluvchisi 9 ga bo‘linadi, demak, 10^n-1 soni 9 ga bo‘linadi. $a=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+a_{n-2}\cdot10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0$ soni berilgan bo‘lsin. bu sonni quyidagicha yozish mumkin: $a=a_n\cdot(10^n-1)+a_n+a_{n-1}\cdot(10^{n-1}-1)+a_{n-1}+\cdots+a_2\cdot(10^2-1)+a_{2+}a_1\cdot(10-1)+a_1+a_0=[a_n\cdot(10^n-1+a_{n-1}\cdot(10^{n-1}-1)+\cdots+a_2\cdot(10^2-1)+a_1\cdot(10-1)]+a_n+a_{n-1}+\ldots a_1+a_0$. Bunda katta qavs ichidagi birinchi qo‘shiluvchi yuqorida isbotlaganimizga ko‘ra 9 ga bo‘linadi. Qavs tashqarisidagi ikkinchi qo‘shiluvchi esa *a* sonining o‘nli yozuvdagi raqamlari ketma-ketligidir. Shartga ko‘ra agar bu raqamlar yig‘indisi 9 ga bo‘linsa, *a* soni 9 ga bo‘linadi.
6) $9\,\vdots\,3$ bo‘lganligidan va bo‘linishning tranzitivligidan agar a soni 9 ga bo‘linsa, u 3 ga ham bo‘linadi.
7) 25 ga bo‘linish alomati.a soni 25 ga bo‘linishi uchun uning o‘nli yozuvi 00 yoki 25, 75 bilan tugashi zarur va yetarli. (isboti uyga vazifa)

Savollar

1. Nomanfiy butun sonlar to‘plamida bo‘linish munosabati ta’rifini ayting.
2. Bo‘linish munosabati qanday xossalarga ega?
3. Nomanfiy butun sonlar to‘plamida yig‘indi, ayirma va ko‘paytmaning bo‘linishi haqida teoremalarni ayting va birortasini isbotlang.
4. Bo‘linish alomati deb nimaga aytiladi? Qanday sonlarga bo‘linish alomatlarini bilasiz? Birortasini keltirib chiqaring.

Misollar

1 – misol. Agar a toq son bo‘lsa, u holda a^2-1 ni 8 ga bo‘linishini isbotlang.
Isboti: Har qanday toq sonni $2n-1$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu erda $n\in N$ shartga ko‘ra $(2n-1)^2-1$ni 8 ga bo‘linishini isbotlashimiz kerak. Qavslarni ochib chiqaylik: $(2n-1)^2-1=4n^2-4n+1-1=4n^2-4n=4n(n-1)$. Ma’lumki, 2 ta son ketma – ket kelgan sonlar ko‘paytmasi 2 ga bo‘linadi. Ko‘paytmada 4 soni mavjud, demak $4n(n-1)$ 8 ga bo‘linadi.
Shunday qilib $(2n-1)^2-1$ni 8 ga bo‘linishini isbotladik.
2 – misol. Matematik induksiya metodi yordamida a^5-a ni 5 ga bo‘linishini isbotlang.
Yechish: $a=1$, a^5-a ni 5 ga bo‘linishini ko‘rsataylik: 15 – 1= 0, 0 : 5. Demak chin. $a=k$ uchun chin deb faraz qilamiz, ya’ni $(k^5-k)\vdots5$. Berilgan tasdiqni $a=k+1$ uchun chinligini isbotlaymiz.
$(k+1)^5-(k+1)=\underline{k^5}+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1-\underline{k}-1=(k^5-k)+5(k^4+2k^3+2k^2+k)$
Birinchi qavsda turgan ifoda farazimizga ko‘ra 5 ga bo‘linadi, ikkinchi qavsda esa 5 ko‘paytuvchi bor. Yig‘indi biror songa bo‘linishi uchun har bir qo‘shiluvchini shu

songa bo‘linishi kifoya. Demak $\left[(k+1)^5-(k-1)\right]\vdots 5$. Bundan berilgan tasdiq ixtiyoriy a uchun o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

3 – misol. $\left[(2n-1)^3-(2n-1)\right]$ ifodani ixtiyoriy n da 24 ga bo‘linishini isbotlang.

Isboti: $n=1$ berilgan ifoda 24 ga bo‘linadi. $(2\cdot1-1)-(2\cdot1-1)\quad 0\vdots 24$ (chin).

$n>1$ bo‘lsin, u holda quyidagiga ega bo‘lamiz:
$(2n-1)^3-(2n-1)=(2n-1)\left[(2n-1)^2-1\right]=(2n-1)\left[4n^2-4n+1-1\right]=4n(2n-1)(n-1)=4n(n-1)(2n-1)$

Bu ifoda 4 koeffisient mavjudligi uchun 4 ga bo‘linadi, bundan tashqari 2 ta ketma – ket kelgan natural sonlar ko‘paytmasi 2 ga bo‘linadi $\underline{n(n-1)}$. Demak, $4n(n-1)(2n-1)$ ko‘paytma 8 ga bo‘linadi. Bu ko‘paytmani 3 ga bo‘linishini isbotlasak $\left[(2n-1)^3-(2n-1)\right]$ ifodani 24 ga bo‘linishini isbotlagan bo‘lamiz. Buning uchun quyidagi 3 holni ko‘ramiz:

a) n 3 ga bo‘linadi, ya’ni $n=3k$.

b) n sonni 3 ga bo‘lganda 1 qoldiq hosil bo‘ladi, ya’ni $n=3k+1$.

v) n sonni 3 ga bo‘lganda 2 qoldiq hosil bo‘ladi, ya’ni $n=3k+2$.

Birinchi holda: $4n(n-1)(2n-1)=4\cdot3k\cdot(3k-1)(2\cdot3k-1)=4\cdot3k(3k+1)(6k+1)$

Ko‘paytmada 3 koeffisent borligi uchun 3 ga bo‘linadi.

Ikkinchi holda: $4n(n-1)(2n-1)=4\cdot(3k+1)(3k+1-1)\left[2(3k+2)-1\right]=4\cdot3k(3k+1)(6k+1)$

Ko‘paytmada 3 koeffisent bor, shuning uchun ko‘paytma 3 ga bo‘linadi.

Uchinchi holda:

$$4n(n-1)(2n-1)=4\cdot(3k+2)(3k+2-1)\left[2(3k+2)-1\right]=4\cdot(3k+2)(3k+1)(6k+3)=$$
$$=4\cdot3(3k+1)(3k+2)(2k+1)$$

Ko‘paytmada 3 koeffisent bor, shuning uchun ko‘paytma 3 ga bo‘linadi.

Shunday qilib berilgan ifoda $4n(n-1)(2n-1)$ 8 va 3 ga qoldiqsiz bo‘linadi. 8 va 3 o‘zaro tub son bo‘lganligi uchun $\left[(2n-1)^3-(2n-1)\right]\vdots(8\cdot3)$, ya’ni 24 ga bo‘linadi.

Demak berilgan ifoda $(2n-1)^3-(2n-1)$ 24 ga bo‘linadi. Shuni isbot qilish kerak edi.

4 – misol. a sonni 3 ga bo‘lganda 1 qoldiq hosil bo‘ladi. a^2, a^3 sonlarni 3 ga bo‘lganda qanday qoldiq hosil bo‘ladi.

Yechish: a soni 3 ga bo‘linsa uni $a=3k$ ko‘rinishda yozish mumkin.

$a=3k+1$

a^2 sonni 3 ga bo‘lganda qoldig‘ini topaylik, ya’ni $a^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$.

Berilgan ifodani 3 ga bo‘linishini ko‘rsataylik. Bo‘linish munosabatining xossasiga asosan, har bir qo‘shiluvchi 3 ga bo‘linsa, yig‘indi ham 3 ga bo‘linadi. Birinchi 2 ta qo‘shiluvchi 3 ga bo‘linadi, 1 esa 3 ga bo‘linmaydi, demak 1 qoldiq. Shuning uchun a^2 ni 3 ga bo‘lganda 1 qoldiq hosil bo‘ladi.

a^3 ni 3 ga bo‘lgandagi qoldiqni topaylik, ya’ni $a^3=(3k+1)^3=27k^3+3\cdot9k^2+3\cdot3k+1$

Yuqoridagiga o‘xshash a^3 ni 3 ga bo‘lganda 1 qoldiq hosil bo‘ladi.

5 – misol. 368312 sonni 7, 11 va 13 larga bo‘linishini tekshiring.

Yechish: Ta’rifga ko‘ra M = 368, N = 312. Demak, M – N = 368 – 312 = 56.

56 soni 7 ga bo‘linadi, ammo 11 va 13 larga bo‘linmaydi. Demak berilgan 368312 soni 7 ga bo‘linadi, 11 va 13 larga esa bo‘linmaydi.

6 – misol. Agarda 3 xonali son 37 ga bo‘linsa, u holda shu raqamlardan ammo boshqa tartibda yozilgan 3 xonali son ham 37 ga bo‘linadi. Shuni isbotlang.

Isboti: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$

$\overline{abc} \vdots 37 \Rightarrow 10^2 a + 10b + c = 37 \cdot t \Rightarrow$

$\Rightarrow 10b = 37 \cdot t - 100a - c$ (1)

$\overline{abc}$ sonni boshqa tartibda yozaylik: $\overline{bca} = 100b + 10c + a$; $\overline{cba} = 100c + 10b + a$

(1)ni $10 \cdot 10b + 10c + a$ ga qo‘yamiz. Natijada

$10 \cdot (37t - 100a - c) + 10c + a = 10 \cdot 37t - 100 \cdot 10a - 10c + 10c + a = 10 \cdot 37t - 1000a + a = 10 \cdot 37t - 999a =$

$= 10 \cdot 37t - 37t \cdot 27a = 37(10t - 27a)$

Bundan 37 ga bo‘linishi kelib chiqadi. Shuni isbot qilish kerak edi.

Shunga o‘xshash $100c + 10a + b$ ni 37 ga bo‘linishini isbotlash mumkin.

7 – misol. x raqamning qanday eng kichik qiymatida $(471 + \overline{2 \times 3})$ soni 3 ga qoldiqsiz bo‘linadi?

Yechish: 471 soni 3 ga bo‘linadi, chunki $4 + 7 + 1 = 12$ $12 \vdots 3$ $\overline{2 \times 3} = 2 + x + 3 = x + 5$ bo‘linishi kerak. Demak $x = 1$. Javob $x = 1$.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. x raqamning qanday eng katta qiymatida $(558 + \overline{3 \times 2})$ soni 3 ga qoldiqsiz bo‘linadi.
2. $(2k+1)^2 - (2k-1)^2$ ifoda $k \in N$ da qanday sonlarga qoldiqsiz bo‘linadi.
3. Bir xil raqamlar bilan yozilgan 3 xonali sonni 37 ga bo‘linishini isbotlang.
4. $(100-1) \vdots 37$ va $(100-1) \vdots 27$ chinligidan, ixtiyoriy sonni $1000a+v$ ko‘rinishga keltirib, 37 va 27 bo‘linish alomatini keltirib chiqaring. Bu yerda v – berilgan sonni oxiri 3 ta raqamini hosil qilgan son.
5. Amallarni bajarmasdan turib, quyidagi yig‘indilarni bo‘linishini ko‘rsating.

$a)$ $153 + 784$; 9 *ga*; 8 *ga*;

$b)$ $648 + 1093 + 624$; 4 *ga*; 3 *ga*;

$d)$ $1599 + 3707$; 11 *ga*; 25 *ga*; 4 *ga*;

6. Ikki xonali son bilan uning raqamlarini teskarisiga almashtirishdan hosil bo‘lgan son ayirmasi 9 ga bo‘linadi. Shuni isbotlang.
7. Ikki xonali son bilan uning raqamlarini teskarisiga almashtirishdan hosil bo‘lgan son yig‘indisi 11 ga bo‘linadi. Shuni isbotlang.
8. Uch xonali son bilan, uning raqamlarini teskarisiga almashtirishdan hosil bo‘lgan son ayirmasi 198 ga teng. Isbotlang.
9. Ixtiyoriy butun son kabi bilan shu son orasidagi ayirma 6 ga bo‘linishini isbotlang.
10. Agar a juft son bo‘lsa, $a(a^2 + 20)$; $a(a^2 - 20)$; $a(a^2 + 4)$; $a(a^2 - 4)$ ni 8 ga bo‘linishini isbotlang.
11. a ixtiyoriy butun son bo‘lsa, $(a^2 + 3a + 1)^2 - 1$ ni 24 ga bo‘linishini isbotlang.
12. Quyidagi sonlarni 7, 11 va 13 bo‘linishini aniqlang: 367488; 378456.
13. Agar ixtiyoriy a natural sonni 3 ga bo‘lganda 1 qoldiq, $в \in N$ ni 3 ga bo‘lganda 2 qoldiq hosil bo‘lsa, u holda $a \cdot v$ ko‘paytmani 3 ga bo‘lganda 2 qoldiq hosil bo‘ladi. Isbotlang.

14. 3 ta ketma – ket kelgan N sonlar kublarining yig‘indisi 3 ga bo‘linishini isbotlang.
15. Ixtiyoriy n da $n^2(n^2 - 1)$ sonni 4 ga va 12 ga bo‘linishini isbotlang.
16. Ixtiyoriy n da $n^5 - n$ sonni 6 ga bo‘linishini isbotlang.
17. Ixtiyoriy butun n uchun $2^n+2^{n+1}+1$ ni 6 ga bo‘linishini isbotlang.
18. Quyidagilarni matematik induksiya metodi bilan isbotlang.

$a)$ $n^7 - n$ 7 ga bo‘linadi;

$b)$ $n^5 - 5n^3 + 4n$ 120 ga bo‘linadi;

$d)$ $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ 43 ga bo‘linadi;

$e)$ $3^{2n+1} + 40n - 67$ 64 ga bo‘linadi;

$f)$ $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ 25 ga bo‘linadi;

2.4. Tub va murakkab sonlar[1]

1-ta`rif. O‘zi va bir sonidan boshqa bo‘luvchilari bo‘lmagan sonlar tub sonlar deyiladi. Masalan, 17, 19, 23 sonlari tub sonlardir. Eng kichik tub son deb 2 qabul qilinadi.
2-ta`rif. bo‘luvchilari soni ikkitadan ko‘p bo‘lgan sonlar murakkab sonlar deyiladi. Masalan 4, 9, 21, 32 sonlari murakkab sonlardir.
1 soni tub ham murakkab ham emas, chunki uning bitta bo‘luvchisi bor xolos.

Tub sonlar quyidagi xossalarga ega:
1°. Agar r tub soni 1 dan farqli birorta n soniga bo‘linsa, r = n bo‘ladi.
Isbot: haqiqatdan ham r $\neq n$ bo‘lsa, r sonining 3 ta turli bo‘luvchisi bor bo‘ladi: 1, r, n. Bu esa shartga zid, demak, r-tub son bo‘la olmaydi.
2°. Agap r va q turli tub sonlar bo‘lsa, r tub son q tub songa bo‘linmaydi.
Isbot: r tub son bo‘lgani uchun u faqat 1 ga va r ga bo‘linadi. $q \neq r$ va g $\neq$1 (q -tub son, 1 tub son emas) bo‘lgani uchun $\overline{p \vdots q}$
3° Agar a va b natural sonlar ko‘paytmasi r tub songa bo‘linsa, bu sonlardan biri r ga bo‘linadi.
Isbot: Faraz qilaylik $a \vdots p$, u holda r -tub son bo‘lgani uchun ularning 1 dan boshqa umumiy bo‘luvchisi yo‘q $ab \vdots r \Rightarrow b \vdots r$.
4°, 1 dan katta istalgan natural sonning *hech* bo‘lmaganda 1 ta tub bo‘luvchisi bor.
Isbot: Teskarisini faraz qilaylik, 1 dan katta, birorta ham tub bo‘luvchisi yo‘q natural sonlar mavjud bo‘lsin. Bunday sonlar to‘plamini A bilan belgilasak, unda eng kichik son mavjud bo‘ladi, chunki natural sonlar to‘plami quyidan chegaralangan. Eng kichik element a bo‘lsin. a>1 bo‘lgani uchun u yoki tub, yoki murakkab son bo‘lishi kerak. a - tub son bo‘la olmaydi, chunki $a \in A$ va farazga ko‘ra a ning tub bo‘luvchisi yo‘q. a -murakkab son bo‘lsa, u o‘zidan va 1 dan farqli biror b natural bo‘luvchiga ega bo‘lar edi. $b \in A$, chunki $b<a$. Demak, b ning biror r tub bo‘luvchisi bor, u holda

[1] Bu mavzuni yoritishda N.Hamedova, Z.Ibragimova,T.Tasetovning “Matematika” –Toshkent “Turon-Iqbol”-2007 darsligidan foydalanildi. (Muallif).

tranzitivlik xossasiga ko‘ra, $a\vdots b \wedge b\vdots p \Rightarrow a\vdots p$ bu farazimizga zid. Demak 1 dan katta barcha natural sonlar hech bo‘lmaganda 1 ta tub bo‘luvchiga ega.
5°. a murakkab sonning eng kichik tub bo‘luvchisi $\sqrt{a}$ dan katta emas.
Isbot: a -murakkab son, r -uning eng kichik– tub bo‘luvchisi bo‘lsin. U holda a = bp bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki $r \le b$, aks holda b ning tub bo‘luvchilari r dan kichik bo‘lib, a soni r dan kichik tub bo‘luvchiga ega bo‘lib qolar edi. $r \le b$, tengsizlikning ikkala qismini r ga ko‘paytiramiz. $r^2 \le b$ = a ni hosil qilamiz, Bundan $r^2 \ge$ a *va* $r \le \sqrt{a}$ ga ega bo‘lamiz.
Bu xossadan sonning tub yoki murakkabligini tekshirishda, sonni tub ko‘paytuvchilarga ajratishda foydalaniladi. Masalan: 137 sonini olaylik 121<137<144 ya’ni $11^2<137<12^2$ bundan $11 < \sqrt{137} < 12$. Demak, 137 soni 12 dan kichik tub sonlarga bo‘linmasa, tub son bo‘ladi. 137 soni 2, 3, 5, 7, 11 sonlarining birortasiga ham bo‘linmaydi. Demak, 137 -tub son. 2, Eratosfen g‘alviri.

Tub sonlar jadvalini tuzishning qulay usulini eramizdan avvalgi III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi va astronomi aniqlagani uchun uni Eratosfen g‘alviri deb ataladi.

Bu usulga ko‘ra 2 dan biror n natural songacha bo‘lgan barcha natural sonlar yozib chiqiladi. So‘ng 2 dan boshqa barcha 2 ga karrali sonlar o‘chiriladi, bunda 2 dan boshqa barcha juft sonlar, ya’ni har ikkinchi son o‘chiriladi. 2 dan keyin o‘chirilmay qolgan 1 - son 3, endi 3 dan tashqari barcha 3 ga karrali sonlarni o‘chiramiz, bunda 3 dan boshlab har 3-son o‘chiriladi, ba’zi sonlar 2 martadan o‘chiriladi. 3 dan keyin o‘chirilmay qolgan son 5 bo‘lgani uchun 5 dan tashqari barcha 5 ga karrali, ya’ni har 5 -sonni o‘chiramiz. Shu taxlit l dan katta bo‘lmagan o‘chirilmay qolgan songacha davom ettiriladi.

Natijada n gacha bo‘lgan barcha tub sonlar qatoriga ega bo‘lamiz. Masalan n = 40 bo‘lsin. Quyidagi qatorga ega bo‘lamiz.

	1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~

1 dan 40 gacha bo‘lgan tub sonlar quyidagilardan iborat:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

Tub sonlar to‘plamining cheksizligi. Tub sonlar to‘plamining cheksiz ekanligi eramizdan avvalgi III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi Evklid tomonidan isbot qilingan.

Evklid teoremasi: Tub sonlar to‘plami cheksizdir. Isbot: tub sonlar to‘plami chekli deb faraz qilaylik. U holda $R = \{r_1, r_2, ... r_n\}$ tub sonlar to‘plamiga ega bo‘lamiz. a = $r_1, r_2, ... r_{n+1}$ sonni hosil qilaylik. a soni tub emas, chunki u $a_1, a_2, ... a_n$ tub sonlarning hammasidan katta va barcha tub sonlar to‘plami R ga kirmaydi. a soni murakkab ham bo‘la olmaydi, chunki 4° ga ko‘ra barcha murakkab sonlarning kamida 1 ta tub bo‘luvchisi bo‘lishi kerak, bu tub bo‘luvchi $r_1, r_2, ... r_n$ tub sonlarning biri bo‘lishi kerak, lekin a soni bu tub sonlarning birortasiga ham bo‘linmaydi, (ularning har biriga bo‘lganda 1 qoldiq chiqadi). Demak, R to‘plamga kirmaydigan 1 ta bo‘lsa ham tub son bor ekan. Bu qarama - qarshilik farazimiz noto‘g‘riligini ko‘rsatadi. Demak, tub sonlar to‘plami cheksiz ekan.

Arifmetikaning asosiy teoremasi.Matematikada ko‘pincha sonni ko‘paytuvchilarga ajratish, yoki uning bo‘luvchilarini topish masalasiga duch kelamiz. Shu o‘rinda quyidagi teoremani bilib qo‘yish foydalidir. Bu teoremani natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasi deyiladi va quyidagicha ifodalanadi:

Teorema. Har bir murakkab son yagona usul bilan tub sonlar ko‘paytmasiga ajratiladi.

Isboti: Teoremada sonning tub sonlar ko‘paytmasiga ajratishning mumkinligi va bunday ko‘paytmaning yagonaligi haqida gapiriladi. Bu tasdiqlarni alohida isbot qilamiz. Tasdiqlarning birinchisini teskarisini faraz qilish yo‘li bilan isbot qilaylik: Faraz qilamiz, tub sonlar ko‘paytmasi shaklida yozib bo‘lmaydigan murakkab sonlar mavjud. Ularning to‘plamini A bilan, to‘plamning eng kichik elementini a bilan belgilaymiz. a- murakkab son va u tub ko‘paytuvchilarga ajralmaydi. a murakkab son bo‘lgani uchun uning o‘zidan kichik murakkab bo‘luvchilari bor: a_1a_2 bo‘lsin. $a_1<a$, $a_2<a$ bo‘lgani uchun $a_1 \wedge a_2$ sonlari A to‘plamga kirmaydi, demak ular yoki tub sonlar ko‘paytmasiga ajraladi. $a_1=p_1...r_n \wedge$ $a_2=q_1...q_n$ bo‘lsin, u holda $a=p_1...p_nq_i...q_n$ shaklda tub ko‘paytuvchilarga ajraladi va bu farazimizga zid. Demak, tub sonlar ko‘paytmasiga ajralmaydigan murakkab son bo‘lishi mumkin emas.

Ikkinchi tasdiqni isbotlaymiz, ya’ni murakkab sonning tub sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida yagona usul bilan yozish mumkin. Faraz qilaylik, turlicha tub sonlar ko‘paytmasiga ajraladigan murakkab sonlar mavjud, ularning to‘plami A va eng kichik elementi a bo‘lsin. Farazga ko‘ra $a=r_1...r_m$ va $a=q_1...q_k$. Tengliklarning o‘ng tomonlarini tenglaymiz: $p_1...p_m= q_1...q_k$.

Bu tenglikning chap qismi p_i ga bo‘linadi, demak o‘ng qismi ham bo‘linishi kerak, $q_1...q_k$ tub sonlar bo‘lgani uchun, ularning biri, masalan, $q_1...p$ ga bo‘linadi, tub sonlar xossasiga ko‘ra $q_1...p_1$ bo‘ladi. Tenglikning ikkala qismini p_1 ga bo‘lsak, $p_2...p_n = q_2...q_k = c$ soniga ega bo‘lamiz, $c = a : p_1 \wedge p_1 \geq 2$ bo‘lgani uchun s>a va u A to‘plamga tegishli bo‘lmaydi, demak u tub sonlar ko‘paytmasi shaklida yagona usul bilan yoziladi. Demak, $p_2...p_n \wedge q_2...q_k$ yoyilmalar tarkibiga ko‘ra bir xil va faqat ko‘paytuvchilar tartibi bilangina farq qilishi mumkin. U holda $p_1p_2...p_n \wedge q_1q_2...q_k$ ham bir xil sonlardan iborat bo‘ladi. Bu esa, . farazimizga zid. Demak, istalgan murakkab son faqat bir xil usul bilan tub sonlar ko‘paytmasiga ajratiladi va turli ko‘paytmalar mavjud bo‘lsa, ular faqat ko‘paytuvchilar tartibi bilan farq qiladi. Bunday ko‘paytmada odatda sonning tub bo‘luvchilari o‘sib borish tartibida, bir xil ko‘paytuvchilarni esa, daraja ko‘rinishida yoziladi. Ko‘paytmaning bu shaklini sonning kanonik yoyilmasi deyiladi. a sonining kanonik yoyilmasi $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n}$ shaklida bo‘ladi, bu yerda $p1<p_2<...<p_n$.

Masalan, 150=2x3x5x5 bo‘lsa, kanonik yoyilmasi $2xZx5^2$ ko‘rinishida, 2000 soni uchun esa, $200=2^3x5^2$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Savollar

1. Tub va murakkab sonlar ta'rifini ayting, ularning qanday xossalari bor? Birortasini isbotlab ko'rsating?
2. Eratosfen g'alviri nima?
3. Tub sonlar to'plamining cheksizligini isbotlang.
4. Arifmetikaning asosiy teoremasini ayting va isbotlang.

Misollar

1 – misol. 50 dan kichik tub sonlar nechta?

Yechish: Ta'rifga ko'ra tub sonlar o'ziga va 1 ga bo'linadi.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,   Javob: 15 ta.

2 – misol. 1601 sonini tub son ekanligini aniqlash uchun uni ketma – ket 2, 3, 5, . . . va hokazo tub sonlarga bo'lib boriladi. Qanday tub songa yetganda bo'lishni to'xtatish mumkin?

Yechish: Agar n^2 dan kichik a natural son murakkab bo'lsa, u holda uning tub ko'paytuvchilaridan biri n dan kichik bo'ladi: 1601>402·37<40, 41>40.

Demak, 37 ga yetganda to'xtatish mumkin.

$$\begin{array}{r|l}
1601 & 37 \\ \cline{2-2}
-148 & 43{,}27027 \\ \cline{1-1}
121 & \\
-111 & \\ \cline{1-1}
100 & \\
-74 & \\ \cline{1-1}
260 & \\
-259 & \\ \cline{1-1}
100 &
\end{array}$$

3 – misol. Qaysi juftlik o'zaro tub sonlardan iborat:

(21, 14); (21, 10); (12, 15); (10, 15); (8, 14);

Yechish: Ikki son o'zaro tub bo'lishi uchun ularning 1 dan boshqa umumiy ko'paytuvchisi bo'lmasligi kerak. (21, 10) sonlar o'zaro tub sonlar, chunki 21=3·7; 10=2·5

4 – misol. n raqamning qanday qiymatlarida $50+n$ soni eng kam tub ko'paytuvchilarga ajraladi.

Yechish: 53 va 59 lar tub sonlar va ular 1 va 53, 1 va 59 ga ajraladi. Javob: 3 va 9

5 – misol. 1728 va 1575 sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajrating.

$1728=2^6\cdot 3^3$ $1575=3^2\cdot 5^2\cdot 7$

6 – misol. Tub sonlarni ko'rsating.

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21

1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Yechish: Bu sonlar, chunki birdan boshqa sonlar 2, 3, 5, 7,
7 – misol. 9225 ajrating va
Yechish:

$9225=3^2\cdot5^2\cdot41$

1575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
	1

9225	3
3075	3
1025	5
205	5
41	41
1	

qatorda 9 va 21 murakkab $9=3\cdot3$, $21=3\cdot7$, ya'ni o'zi va bo'luvchilari mavjud, qolgan 11, 13, 17, 19 sonlar tub.
sonini tub ko'paytuvchilarga uning nechta bo'luvchilari bor?

Agar n murakkab son bo'lsa, u holda uning bo'luvchilari soni kanonik yoyilmadagi ya'ni $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\ldots\cdot p_n^{\alpha_k}$ $\qquad \alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_k \in N$

$p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n - туб\ сонлар.$

$\delta=(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\ldots\cdot(\alpha_k+1)$ ko'paytma soniga teng, ya'ni (2+1)(2+1)(1+1)=18(ta)

8 – misol. 1575 sonning barcha bo'luvchilari yig'indisini toping.
Yechish:
$N = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\ldots\cdot p_n^{\alpha_k}$ bu erda $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_k$ natural sonlar.
$p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ - tub ko'paytuvchilar.
sonning barcha bo'luvchilari soni quyidagi formuladan topiladi.

157	3
5	3
525	5
175	5
35	7
7	
1	

$$S=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\frac{p_3^{\alpha_3+1}-1}{p_3-1}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{p_n^{\alpha_k+1}-1}{p_n-1}$$

$1575=3^2\cdot5^2\cdot7$

$$S=\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{2+1}-1}{5-1}\cdot\frac{7^{1+1}-1}{7-1}=\frac{26}{2}\cdot\frac{124}{4}\cdot\frac{48}{6}=13\cdot31\cdot8=3224$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. 30 dan kichik tub sonlar nechta?
2. 100 dan kichik tub sonlar nechta?
3. 3607 sonining tub son ekanligini aniqlash uchun uni ketma – ket 2, 3, 5 va hokazo tub sonlarga bo'lib boriladi. Qanday tub songa kelganda bo'lishni to'xtatish mumkin?

4. Qaysi juftlik o‘zaro tub sonlardan iborat.
(8; 14), (11; 22), (12; 35), (12; 34), (10; 26).
5. *n* raqamning qanday qiymatlarida 30+*n* soni eng kam tub bo‘luvchilarga ajraydi?
6. Tub sonlarni ko‘rsating.
a) 21, 23, 37, 27, 29, 31, 33, 39,
b) 41, 43, 47, 49, 51, 53, 57, 59,
d) 61, 63, 67, 69, 71, 73, 77, 79,
e) 81, 83, 87, 89, 91, 93, 97, 99,
7. Berilgan sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajrating.
144, 210, 800, 216, 343, 256, 1024, 750, 1078, 10227, 844, 21780, 45630, 1998.
8. Quyidagi sonlarni bo‘luvchilari sonini toping.
144, 210, 800, 216, 343, 256, 1024, 750, 1078, 10227, 844, 21780, 45630, 1998.

2.5. Sonlarning EKUBi va EKUKi

Sonlarni bo‘linishi haqida gapirar ekanmiz, bo‘luvchilarni har doim natural sonlar to‘plamiga tegishli bo‘lishini aytib o‘tamiz. Chunki biz bo‘linish amalini nomanfiy butun sonlar to‘plamida qarayotgan ekanmiz, nol soni bo‘luvchi bo‘la olmasligini va nol soni istalgan songa karrali ekanini eslatib o‘tamiz. Istalgan ikkita murakkab sonning bo‘luvchilarini ko‘rib chiqamiz. 36 va 24 sonini qaraylik. 36 sonining bo‘luvchilari to‘plami A={1,2,3,4,6,9,12,18} dan iborat. 24 sonining bo‘luvchilari to‘plami esa B={1, 2,4,6,8,12}. Bu ikki sonning bo‘luvchilari to‘plami A va B kesishmasi $A\cap B$={1,2,4,6,12}. Bu kesishma 36 va 24 sonlarining umumiy bo‘luvchilari bo‘ladi.

1- ta`rif. Iixtiyoriy ikkita *a* va *b* sonlarining umumiy bo‘luvchisi deb, ularning ikkisiga ham bo‘luvchi bo‘la oladigan songa aytiladi.

2-ta`rif. Umumiy bo‘luvchilarning eng kattasi *a* va *b* sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi deyiladi va EKUB(*a,b*) yoki B*(a,b*) deb belgilanadi.(B – bo‘luvchi so‘zidan.)

Masalan, yuqorida keltirilgan misolda B(24,36)=12 bo‘ladi.

EKUB ning xossalari:

1°. Ixtiyoriy $a,b\in N$ sonlarining EKUB i bor va yagonadir.

2°. Ixtiyoriy $a,b\in N$ sonlarining EKUB i *a* va *b* sonlarining eng kichigidan katta emas, ya`ni agar $a<b$ bo‘lsa, B(*a,b*)$\leq b$ bo‘ladi.

3°. Ixtiyoriy $a,b\in N$ sonlarining EKUB i shu sonlarning umumiy bo‘luvchilarining istalganiga bo‘linadi.

3-ta`rif. Agar EKUB(*a,b*)=1 bo‘lsa, bu sonlar o‘zaro tub sonlar deyiladi.

Masalan, B(24,9)=1. Chunki, bo‘luvchilar to‘plamlarining kesishmasi faqat 1 dan iborat.

Endi, ixtiyoriy ikkita *a* va *b* sonlariga karrali bo‘lgan sonlar to‘plamini qaraylik. Deylik, 8 va 12 sonlarini. 8 soniga karralilar A={ 16,24, 32, 40,48,…..}, 12 soniga karrali sonlar to‘plami B={24,36,48,60…} boladi. 8 va 12 sonlarining umumiy karralilari to‘plami $A\cap B$={24,48,…} Ko‘rinadiki, ixtiyoriy sonning karralilari

cheksizligidan ikki o‘zaro tub bo‘lmagan sonning umumiy karralilari to‘plami ham cheksizdir.
4-ta`rif. Iixtiyoriy ikkita a va b sonlarining umumiy karralisi deb ularning ikkisiga ham bo‘linadigan songa aytiladi.
5-ta`rif. a va b sonlarining umumiy karralilarni eng kichigi berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisi deyiladi va EKUK(a,b) yoki K(a,b) kabi belgilanadi.(K-karrali so‘zidan.)
Yuqorida keltirilgan misolimizda EKUK(8,12)=24 bo‘ladi.
EKUKning xossalari:
1°. Ixtiyoriy $a,b\in N$ sonlarining EKUK i mavjud va yagonadir.
2°. Ixtiyoriy $a,b\in N$ sonlarining EKUK i a va b sonlarining eng kattasidan kichik emas, ya`ni agar $a<b$ bo‘lsa, K(a,b)$\geq b$ bo‘ladi.
3°. $a,b\in N$ sonlarining ixtiyoriy umumiy karralisi shu sonlarning EKUK iga bo‘linadi.
Ava b sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi va eng kichik umumiy karralisi quyidagicha bog‘langan:
B(a,b)·K(a,b)=a·b. Ya`ni, berilgan sonlarning EKUB va EKUK ining ko‘paytmasi shu sonlarning ko‘paytmasiga teng. Bu tenglikdan
$K(a,b)=\dfrac{ab}{B(a,b)}$; yoki $B(a,b)=\dfrac{ab}{K(a,b)}$ ekanligi kelib chiqadi.
Murakkab songa bo‘linish alomatlari. Bo‘linish alomatlari mavzusida sonning 2 ga, 4 ga, 5 ga, 3 ga, 9 ga, 25 ga bo‘linish alomatlari keltirildi. Lekin boshqa murakkab sonlarga bo‘linish alomatlari mavjudmi?
Quyidagi teoremani qaraymiz:
1-teorema. Ixtiyoriy $a\in N$ son murakkab $b=nc$ ga bo‘linishi uchun, a soni n soniga ham, c soniga ham bo‘linishi zarur va yetarli. Bu yerda B(n,c)=1.
Isbot. a soni b soniga bo‘linsin. U holda $a \vdots b$ bo‘ladi. Ko‘paytirishning tranzitivligidan $b \vdots n$ va $b \vdots c$ ekanligidan $a \vdots n$ va $a \vdots c$ ekanligi kelib chiqadi.
Endi, $a \vdots n$ va $a \vdots c$ ekanligidan a n va c sonlari uchun umumiy karrali bo‘ladi. EKUKning xossasiga ko‘ra sonning istalgan umumiy karralisi ularning eng kichik umumiy karralisiga bo‘linadi, bundan, a$\vdots$K(n,c). shartga ko‘ra B(n,c)=1 bo‘lganidan K(n,c)=n·c ga teng. Demak, $a \vdots b$ bo‘ladi. Teorema isbotlandi.
Bu teoremaga asosan qator alomatlarni keltirib chiqarish mumkin.
1. a soni 6 ga bo‘linishi uchun uning 2 ga ham, 3ga ham bo‘linishi zarur va yetarli.
2. a soni 15 ga bo‘linishi uchun uning 5 ga va 3 ga bo‘linishi zarur va yetarli.
3. a soni 12 ga bo‘linishi uchun uning 4ga va 3ga bo‘linishi zarur va yetarli va hokazo.
Bu teoremani ko‘p marta qo‘llash ham mumkin. Masalan son 156 ga bo‘linishi uchun u 12 ga va 13 ga bo‘linishi zarur va yetarli. O‘z navbatida bu son 4ga va 3 ga karrali bo‘ladi. Shunig uchun fikrimizni quyidagicha ifodalymiz: son 156 ga bo‘linishi uchun u 13 ga, 4ga va 3ga bo‘linishi zarur va yetarli.

2.6.Sonlarning tub ko‘paytuvchilarga yoyish usuli bilan ularning EKUB va EKUK ini topish

Sonni tub sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida yozish uni tub ko‘paytuvchilarga ajratish deyiladi.

Masalan, 78=2·3·13. Istalgan murakkab son tub ko‘paytuvchilarga ajraydi va bu yoyilma yagona ekanligi Tub va murakkab sonlar mavzusida aytib o‘tildi. Sonlarni tub ko‘paytuvchilarga yoyish yoki sonning kanonik ko‘rinishda yozish uning EKUK va EKUB ini topishda qo‘llaniladi. Masalan 264 va 360 sonlarini EKUK va EKUB ini topaylik. Buning uchun ularning kanonik yoyilmasini yozib olamiz:

$264=2^3\cdot3\cdot11$ $\qquad$ $360=2^3\cdot3^2\cdot5$

			360	2
264	2		180	2
132	2		90	2
66	2		45	3
33	3		15	3
11	11		5	5
1			1	

264 va 360 sonlarining kanonik yoyilmasiga kiruvchi umumiy tub ko‘paytuvchilarning eng kichik darajadagilarini ajratamiz. Bu tub ko‘paytuvchilar: 2^3,3. Bu tub ko‘paytuvchilarning ko‘paytmasi 264 va 360 sonlarini EKUB I bo‘ladi. Ya`ni B(264,360)= $2^3\cdot3=24$.

Umuman, berilgan *a* va *b* sonning EKUB ini topish uchun:

- ularning kanonik yoyilmasini topamiz;
- kanonik yoyilmadagi umumiy tub sonlar ko‘paytmasini eng kichik dardjalarini ajratamiz;
- bu kichik darajali tub sonlarning ko‘paytmasi berilgan *a* va *b* sonining EKUBi bo‘ladi.

Endi, EKUKni kanonik yoyilma yordamda topish usulini qaraymiz. 264 va 360 sonlarining kanonik yoyilmasidan barcha tub ko‘paytuvchilarning eng yuqori darajadagilarini ajratamiz:2^3,3^2,5,11. 264 sonida 5 sonini 0-darajada qatnashyayti deb olish mumkin. Bu tub ko‘paytuvchilarning ko‘paytmasi 264 va 360 sonini EKUKi bo‘ladi.Ya`ni, K(264,360)= $2^3\cdot3^2\cdot11\cdot5=3960$.

Berilgan sonning kanonik yoyilmasini topish uchun:

- sonlarning kanonik yoyilmasini tuzamiz;
- kanonik yoyilmalardagi barcha sonlarning eng katta darajalilarini ajratamiz;
- bu katta darajali tub sonlarning ko‘paytmasi berilgan sonlarning EKUKi bo‘ladi.

Evklid algoritmi. Kanonik yoyilma usulida EKUK va EKUBni topish ba`zan noqulay va uzoq hisob-kitoblarni talab qiladi. Berilgan sonning EKUB va EKUKini topishning soddaroq usuli Evklid algoritmi hisoblanadi va u u quyidagi mulohazalarga asoslanadi.

1. Agar *a* soni *b* ga bo‘linsa, B(*a*,*b*)=*b* bo‘ladi, chunki *b* ning o‘zidan katta bo‘luvchisi yo‘q.

2. Agar *a* soni *b* ga bo‘linmasa, *a=bq+r* va ,UB(*a,b*)=UB(*b,r*) bo‘ladi (UB- umumiy bo‘luvchilar), ya’ni *a* soni *b* ga qoldiqli bo‘linadi, *a* va *b* ning umumiy bo‘luvchilari to‘plami *b* va *a* ni *b* ga bo‘lishdagi qoldiq *r* ning umuiy bo‘luvchilari to‘plami bilan ustma-ust tushadi. *d*= UB(*a,b*) bo‘lsin. ($a:d \wedge b:d$)->(*r=a–bq):d* (ayirmaning bo‘linishi haqidagi teoremaga ko‘ra) *d*= UB(*b,r*). Aksincha *d*= UB(*b,r*) bo‘lsin, u holda *a=bq+r* ham *d* ga bo‘linadi, (yigindini bo‘linishi haqidagi teoremaga ko‘ra), bundan *d*= UB(*a,b)* degan xulosa kelib chiqadi.
3. $a = bq + r \wedge abr \in N$ bo‘lsa B(*a,b*)=B(*b,r*) bo‘ladi. 2–mulohazaga ko‘ra *a,b* va *b, r* sonlarining umumiy bo‘luvchilari to‘plamlari bir xil, demak bu to‘plamlarning eng katta elementlari ham bir xil bo‘ladi.
Ana shu 3 ta mulohazaga tayanib *a, b* sonlarining EKUB ini topishni *b, r* sonlari EKUBini topish bilan almashtirish mumkin bo‘ladi. Agar *b r* ga karrali bo‘lsa, $B(br) = r, b = rq_1 + r_{1,} bo'lsa\ B(b,r) = B(r,r_1)$ va hokazo. Bu jarayon biror qoldiq o‘zidan keyingi qoldiqqa qoldiqsiz bo‘linguncha davom etadi va shu oxirgi 0 dan farqli qoldiq B(*a, b*) bo‘ladi.
Masalan: B(728,455) ni topish kerak bo‘lsin. Ketma -ket bo‘lishni ixcham ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin: B(728,455)=91

			728	455
			455	1
		455	273	=r
		273	1	
	273	182	$=r_1$	
	182	1		
182	91	=B(*a,b*)		
182				

Savollar

1. Sonlarning eng kichik umumiy karralisi va eng katta umumiy bo‘luvchisi deb nimaga aytiladi
2. Sonlarning EKUKi va EKUBini topish algoritmlarini ayting.
3. Sonlarning EKUKi va EKUBining qanday xossalari bor?
4. Murakkab songa bo‘linish alomatini ayting. Misollar keltiring.

Misollar

1 – misol. 132 va 360 sonlarning EKUB i va EKUK ini toping.
Yechish: 132 va 360 sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratamiz.
$132=2^2\cdot3\cdot11$ $360=2^3\cdot3^2\cdot5$

360	2
180	2
90	2

45 3

15 3

5 5

1

132	2
66	2
33	3
11	11
1	

Ta’rifga ko‘ra EKUB berilgan sonlarning yoyilmalarining har birida qatnashgan tub ko‘paytuvchilarni eng kichik darajalarida olinadi:

EKUB(132; 360)=$2^2 \cdot 3^1$=12.

Ta’rifga ko‘ra EKUK berilgan sonlarning yoyilmalarining birortasida bo‘lsa ham qatnashgan tub ko‘paytuvchilarning eng katta darajalarida olinadi:

EKUK(132; 360)=$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$=3960.

2 – misol. 728, 455 va 117 sonlarning EKUB va EKUK ini toping.

Yechish: 3 ta sonning EKUB ini topish uchun Evklid algoritmini 2 marta qo‘llaymiz. Bunda birinchi sonlar juftini ularning EKUB i bilan almashtiramiz, ya’ni oldingi misolda EKUB (728; 455)=91 edi. Endi

EKUB (91; 117)=13

117 | 91
-91 | 1
91 | 26
78 | 3
26 | 13
26 | 2
0

13 noldan farqli oxirgi qoldiq. Shuning uchun berilgan sonlarning EKUBi 13.

Demak, EKUB (728, 455, 117)=13

$$EKUK(728,455)=\frac{728\cdot 455}{EKUB(728\cdot 455)}=\frac{728\cdot 455}{91}=3640$$

Ta’rifga ko‘ra

$$a\cdot в = EKUB(a;в)\cdot EKUK(a;в) \qquad (1)$$

Demak, EKUK (728; 455)=3640.

Endi 3640 va 117 sonlarning EKUKini topamiz. Yana (1) formuladan foydalanamiz:

$$EKUK(3640;\ 117)=\frac{3640\cdot 117}{13}=32760$$

Shunday qilib,

EKUB (728; 455; 117)=13

EKUK (728; 455; 117)=32760

3 – misol. 60, 252, 264 sonlarning EKUB va EKUKini tub ko‘paytuvchilarga ajratish orqali toping.

Yechish: Berilgan sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratamiz.

60	2	$60=2^2\cdot 3\cdot 5$	252	2	$252=2^2\cdot 3^2\cdot 7$	264	2	$264=2^3\cdot 3\cdot 11$
30	2		126	2		132	2	
15	3		63	3		66	2	
5	5		21	3		33	3	
1			7	7		11	11	
			1			1		

EKUB (60, 252, 264)$=2^2\cdot 3^1=12$ ya’ni umumiy tub bo‘luvchilarni eng kichik darajalari bilan bog‘liq.

EKUK (60, 252, 264)$=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11=27720$, ya’ni barcha qatnashgan tub bo‘luvchilarni eng katta darajalari bilan oldik.

4 – misol. 728 ta konfet, 182 ta olma va 819 ta yong‘oq bor. Shulardan eng ko‘pi bilan nechta bir xil sovg‘a xalta tayyorlash mumkin?

Yechish: Eng ko‘pi bilan sovg‘alar tayyorlash uchun berilgan 728, 182 va 819 sonlarning EKUB ini topishimiz kerak.

728	2	$728=2^3\cdot 7\cdot 13$	182	2	$182=2\cdot 7\cdot 13$	819	3	$819=3^2\cdot 7\cdot 13$
364	2		91	7		273	3	
182	2		13	13		91	7	
91	7		1			13	13	
13	13					1		
1								

EKUB (728; 182; 819)$=7\cdot 13=91$, umumiy bo‘luvchilarni eng kichik darajasi bilan oldik.

Demak, 91 ta bir xil sovg‘a tayyorlash mumkin va har bir sovg‘a xaltaga 8 ta konfet, 2 ta olma va 9 ta yong‘oq solingan bo‘ladi.

5 – misol. Quyidagi sonlardan qaysi biri 12 ga qoldiqsiz bo‘linmaydi:
9216, 13626, 12024, 18312, 52308.

Yechish: Berilgan son 12 ga bo‘linishi uchun bir vaqtda 3 ga va 4 ga bo‘linishi kerak. 4 ga bo‘linishi uchun uning oxirgi ikki raqamidan tuzilgan son 4 ga bo‘linishi kerak. Demak, 26 ya’ni 13626 soni 4 ga bo‘linmaydi.

Javob: 13626 soni 12 ga bo‘linmaydi.

Mustaqil yechish uchun misollar va masalalar

1. $x=220350$; $y=3{,}21\cdot 106$; va $z=1024145$ sonlardan qaysilari 15 ga qoldiqsiz bo‘linadi?
2. $x=30118$; $y=3{,}3\cdot 105$; va $z=102588$ sonlardan qaysilari 12 ga qoldiqsiz bo‘linadi?
3. $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}$ n ixtiyoriy natural son bo‘lsa, yig‘indini 14 ga bo‘linishini isbotlang.
4. 1320, 3600, 1485 sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratib, EKUB va EKUK ini toping.
5. Evklid algoritmi yordamida 108 va 45 sonlarning EKUB va EKUK ini toping.
6. Evklid algoritmi yordamida 1001 va 6253 sonlarning EKUB va EKUK ini toping.

7. 3 ta maktabga teng miqdorda daftarlar jo‘natildi. 1 – maktabga har bir pachkada 150 tadan, 2 – maktabga har bir pachkada 10 tadan, 3 – maktabga har bir pachkada 200 tadan daftar bor edi. Har bir maktabga nechtadan daftar jo‘natilgan.

8. Quyidagi sonlar uchun Evklid algoritmi yordamida EKUB va EKUK ni toping.

a) 1960 va 588 e) 391; 437 va 299
b) 15283 va 10013 f) 899; 155 va 124
d) 846 va 246 h) 132; 143; 156 va 289

9. 1224 ta konfet, 204 ta mandarin va 306 ta vafli bor. Shulardan nechta bir xil sovg‘a tayyorlash mumkin.

10. Agar a) EKUB (a; b)=5 va EKUK (a; v)=105;
b) EKUK (a; b)=75 va a · v=105;
d) EKUK (a; b)=224 va a : v=7 : 8;
e) EKUB (a; b)=7 va a · v=1470;
ma’lum bo‘lsa, a va b sonlarni toping.

11. Turistlar 1 – kuni velosipedda 56 km, 2 – kuni 72 km yo‘l bosishdi. Har kuni turistlar bir xil tezlikda yo‘l bosishdi va yo‘lda vaqt va tezlik butun son bilan ifodalangan bo‘lsa, masala shartini qanoatlantiruvchi eng katta tezlikni toping.

12. Turistlar 1 – kuni 36 km, 2 – kuni 32 km, 3 – kuni 24 km yo‘l yurishgan va yo‘lda vaqt va tezlik butun son bilan ifodalangan. Agar tezlik o‘zgarmas va mumkin bo‘lgandan katta bo‘lsa, turistlar yo‘lda necha soat bo‘lishgan.

13. Quyidagi kasrlarni qisqartiring:

$$\frac{21120}{30720}; \quad \frac{10013}{15283}$$

14. Kasrni umumiy mahrajga keltiring:

$$\frac{83}{2942} \text{ va } \frac{29}{1816}$$

15. 420 va 156 ning umumiy bo‘luvchilari nechta?
16. 840 va 264 ning umumiy bo‘luvchilari nechta?
17. 594 va 378 ning umumiy bo‘luvchilari nechta?
18. 630 va 198 ning umumiy bo‘luvchilari nechta?
19. 15 va 25 sonlari EKUK ining natural bo‘luvchilari nechta?
20. 8 va 12 sonlari EKUK ining natural bo‘luvchilari nechta?
21. 270 va 300 sonlari EKUK ining 4 va 6 sonlarining EKUK iga nisbatini toping.
22. 21 va 35 sonlarining EKUK i bilan EKUB ining yig‘indisini toping?
23. n raqamining qanday qiymatlarida $10+n$ va n sonlarining EKUK isi 60 bo‘ladi?
24. Sonning eng katta umumiy bo'luvchisini toping.

$a)$ 8104 va 5602; $f)$ 187 va 180; $j)$ 795 va 2585;
$b)$ 5555 va 11110; $g)$ 2165 va 3556; $k)$ 42628 va 33124;
$d)$ 980 va 100; $h)$ 5400 va 170; $l)$ 71004 va 154452;
$e)$ 5345 va 4856; $i)$ 78999 va 80000; $m)$ 1000 va 999.

III BOB. Son tushunchasini kengaytirish

1§.Ratsional sonlar.

1.1. Manfiy va musbat sonlar

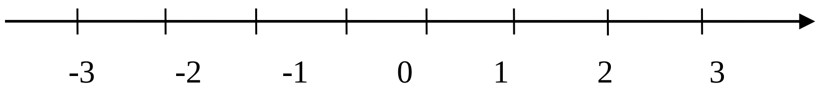
2 natural sonning yig‘indisi yana natural son bo‘ladi. Lekin ikki natural sonlarning ayirmasi natural son bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan: 2-1=1. l€N, lekin 1-2 ayirmaga teng bo‘ladigan natural son mavjud emas. Demak yangi sonlarni kiritish kerak. Bunday sonlar 0 va manfiy sonlardir. Ulardan farqlash uchun natural sonlarni musbat sonlar deb ataymiz.

Quyidagi masalani ko‘raylik:

Do‘konga kirganda 2 so‘m pulimiz bo‘lsin. Agar 1 so‘mga qalam olsak, u holda 2-1=1 so‘m pulimiz qoladi. Agar yana bitta qalam olsak, pulimiz qolmaydi, buni esa 0 raqami bilan belgilaymiz: 1-1=0. agar yana bitta qalam olsak, u holda sotuvchiga 1 so‘m qarz bo‘lamiz. 1 so‘m pul va 1so‘m qarz butunlay boshqa narsalar. Ularni bir-biridan farqlash uchun “-” minus ishorasidan foydalanamiz. U holda oxirgi qalamni olgach 0-1=-1 so‘m pulimiz qoladi. (1 so‘m qarz): Agar yana bitta qalam olsak 2 so‘m qarz bo‘lamiz: -1-1=-2.

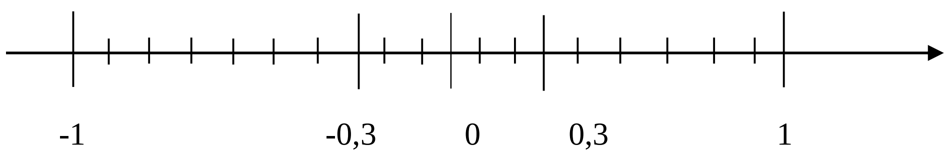
Agar do‘konga kirib har bir metri 2 so‘m 30 tiyin bo‘lgan lentadan 1 m olsak, u holda 30 tiyin qarz bo‘lamiz: 2-2,3=-0,3.

Xullas yonimizdagi pulni musbat sonlar desak, u holda qarzimiz manfiy sonlar bo‘lar ekan. Musbat va manfiy sonlarni son o‘qida ifodalash qulay.



Son o‘qida avval 0 ni belgilab olamiz. Undan bir birlik o‘ngda 1 ni, yana birlik o‘ngda 2 ni, 2 dan bir birlik o‘ngda 3 ni, so‘ngra boshqa natural sonlarni belgilab chiqamiz. 0 dan chap tomonda esa manfiy sonlar joylashadi.

Son o‘qiga o‘nli kasrlarni ham joylashtirib chiqaylik. Masalan 0,3 ni son o‘qida joylashtirish uchun 0 dan 1 gacha bo‘lgan kesmani teng o‘nta kesmachaga ajratamiz va uchinchi kesma oxiriga 0,3 ni joylaymiz. Shunga o‘xshash, son o‘qida – 0,3 ni va boshqa sonlarni ham joylashtirishimiz mumkun.



Son o‘qi yordamida sonlarni qo‘shish va ayirish amallarini bajarib ko‘raylik: 1 ga 2 ni qo‘shish uchun son o‘qida 1 ni topamiz va 2 birlik o‘ngga siljiymiz. Natijada 3 ga kelamiz: 1+2=3. 3 dan 2 ni ayirish uchun son o‘qida 3 dan boshlab, 2 birlik chapga siljib 1 ga kelamiz: 3 – 2=1. 2 dan 3 ni ayirish uchun son o‘qida 2 dan 3 birlik chapga siljiymiz va –1 ga kelamiz: 2 – 3= -1.

Demak, biror songa musbat son qo‘shilganda o‘ng tomonga, musbat son ayrilganda chap tomonga qarab siljiymiz. Bundan esa son o‘qida o‘ngroqda joylashgan son chaproqdagisidan katta bo‘ladi degan xulosaga kelamiz.

Biror songa manfiy son qo‘shilganda yoki ayrilganda qaysi tomonga siljish kerakligini aniqlab olaylik. Bir o‘rtog‘idan 1 so‘m, ikkinchisidan 2 so‘m qarzi bo‘lgan bolaning hammasi bo‘lib 3 so‘m qarzi bo‘ladi: -1+(-2)= -3 (matematikada ketma – ket 2 marta amal belgisini yozib bo‘lmaydi, shuning uchun –2 ni qavsga olib yozdik).

Demak, -1 ga –2 ni qo‘shishda son o‘qida –1 dan boshlab ikki birlik chapga siljib – 3 ga kelamiz (xuddi –1 dan 2 ni ayirganimiz kabi).

Endi 3 so‘m qarzimizni to‘lasak, 1 so‘m qarzimiz qoladi. –3- (-2)= -1 Demak, -3 dan –2 ni ayirish uchun son o‘qida –3 dan boshlab 2 birlik o‘ngga siljiymiz va –1 ga kelamiz (xuddi –3 ga 2 ni qo‘shgan kabi).

Sonning moduli deb son o‘qida u joylashgan nuqtadan koordinata boshi O gacha bo‘lgan masofaga aytiladi. Demak, musbat son moduli uning o‘ziga teng, manfiy sonning moduli uning ishorasini tashlab yuborishdan hosil bo‘lgan songa, 0 ning moduli 0 ga teng bo‘ladi. Son moduli manfiy bo‘la olmasligini eslatib o‘tamiz.

a sonning moduli $|a|$ bilan belgilanadi. Yuqoridagi ta`rifni matematikada quyidagicha yoziladi:

$$|a| = \begin{cases} a, agar\ \ a \geq 0\ \ bo'lsa \quad (a - musbat\ \ yoki\ \ 0) \\ -a, agar\ \ a < 0\ \ bo'lsa(a - manfiy\ \ son) \end{cases}$$

Sonning moduliga misollar keltiramiz:

$|-2| = 2;\quad |3| = 3;\quad |-4{,}8| = 4{,}8;\quad |5{,}871| = 5{,}871;\quad |0| = 0.$

Koordinata boshi 0 dan barobar uzoqlikda joylashgan sonlar **o‘zaro qarama – qarshi** sonlar deyiladi. Masalan, 1 va –1; -3 va 3; -5,7va 5,7; 123,42 va –123,42 juftliklar o‘zaro qarama-qarshi sonlardir.

Berilgan songa qarama – qarshi son topish uchun uning faqat ishorasini teskarisiga almashtirish kifoya. Masalan: -1; 3; 2,7; va -3,421 larga 1; -3; -2,7; va 3,421 lar qarama – qarshi sonlardir. O‘zaro qarama – qarshi sonlar yig‘indisi 0 ga teng.

Ikkita sonni bir – biri bilan solishtirishda ularning son o‘qida qanday joylashishidan foydalanamiz:

Har qanday musbat son har qanday manfiy sondan katta.

0 har qanday manfiy sondan katta va har qanday musbat sondan kichik.

Ikkita manfiy sondan moduli kattasi kichik.

Masalan, $-5 < 2;\quad 0 > -4;\quad 0 < 7;\quad -7 < -5.$

Ikki son ko‘paytmasini moduli ko‘paytuvchlar modullari ko‘paytmasiga teng bo‘lib, ko‘paytma ishorasi quyidagi qoida bo‘yicha topiladi:

Agar ko‘paytuvchilar bir xil ishorali bo‘lsa, ko‘paytma musbat va ko‘paytuvchilar har xil ishorali bo‘lsa, ko‘paytma manfiy bo‘ladi:

$$(+)\cdot(+)=(+)$$
$$(+)\cdot(-)=(-)$$
$$(-)\cdot(+)=(-)$$
$$(-)\cdot(-)=(+)$$

Bo‘lish amali ham bo‘linma ishorasi yuqoridagi qoida boyicha topiladi.

Masalan, $2 \cdot 3 = 6;\quad 2 \cdot (-3) = -6;\quad -2 \cdot 3 = -6;\quad -2 \cdot (-3) = 6 \ va\ 6:3 = 2;$
$6:(-3) = -2;\quad -6:3 = -2;\quad -6:(-3) = 2.$

Manfiy va musbat sonlarni qo‘shish va ayirish quyidagi sodda qoida asosida bajariladi.

Agar sonlar bir xil ishorali bo‘lsa, ularning modullari qo‘shiladi va ishorasi saqlanib qoladi.

Agar sonlar har xil ishorali bo‘lsa, moduli kattasining modulidan moduli kichigining moduli ayriladi va moduli kattasining ishorasi qo‘yiladi.

Masalan,

$$2 + 3 = 5;\quad -2 - 3 = -5;\quad -2 + 3 = |3| - |2| = 1;\quad 2 - 3 = -(|3| - |2|) = -1.$$

Agar yig‘indida yoki ayirmada sonlardan biri qavs yordamida yozilgan bo‘lsa, ko‘paytma ishorasini topish qoidasi yordamida avval uning ishorasi aniqlab olinadi.

Masalan.

$$-2 - (-3) = -2 + 3 = 1;\quad (-2) + (-3) = -2 - 3 = -5.$$

1.2. Ratsional sonlar va ular ustida arifmetik amallar

1. [AB] va [DEJ kesmalar berilgan bo‘lsin. [DE] ni birlik kesma deb qabul qilib, uning uzunligini e bilan belgilaymiz. Agar [DE] kesma [AV] ga k marta joylashsa, |AB|=ke bo‘ladi; aks holda [DE] ni n ta . Teng – bo‘laklarga bo‘lamiz, [DE] ning n - bo‘lagi [AV] ga m marta joylashsin, u holda $|AB| = \frac{m}{n}e$ bo‘ladi. Birinchi holda |AV| uzunlik natural son bilan, ikkinchi holda - kasr son bilan ifodalanadi.

1-ta’rif. $\frac{m}{n}, m \in Z_0, n \in N$ ko‘rinishda yozilgan sonlar kasrlar deyiladi. Istalgan butun $a \in Z_0$ sonni ham kasr ko‘rinishda yozish mumkin,

Masalan: 5 ni $\frac{15}{3}$,0 ni $\frac{0}{2}$...

2-ta’rif. Agar mq=np ,bo‘lsa, u holda $\frac{m}{n}$ kasr $\frac{p}{q}$ ga teng kuchli

deyiladi, ya’ni $\left(\forall \frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right)\left(mq = np \Rightarrow \frac{m}{n} \approx \frac{p}{q}\right)$.

Teng kuchlilik (~) munosabati ekvivalentlik munosabati bo‘lganligi uchun, u barcha kasrlar to‘plamini sinflarga ajratadi.

Ta’rif. Teng kuchli kasrlar sinfi nomanfiy ratsional son deyiladi va barcha nomanfiy ratsional sonlar to‘plami Q_0 - bilan belgilanadi.

Ta’rif. Agar $mq < nr$ bo‘lsa, $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ bo‘ladi,

Demak, Q_0 da "kichik" munosabati o‘rnatilgan, ya’ni Q_0 - tartiblangan .

3-ta'rif. $r_1 = \frac{m}{n} \cdot r_2 = \frac{p}{q}$ ratsional sonlarning yig'indisi deb, shunday *r*- ratsional songa aytiladiki, u $r = \frac{mq + np}{nq}$ teng, ya'ni $r_1 + r_2 = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$.

Xossalari:

1°, $(\forall r_1 \cdot r_2 \in Q_0)(r_1 + r_2 = r_2 + r_1)$

2°. $(\forall r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \in Q_0)[(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3)]$

4-ta'rif. r_1 va r_2 ratsional sonlarning ko'paytmasi deb, shunday r - soniga aytiladiki, $r = r_1 \cdot r_2 = \frac{mp}{nq}$

Xossalari:

$1^0.(\forall r_1.r_2 \in Q_0)(r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1)$

$2^0.(\forall r_1.r_2.r_3 \in Q_0)[(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)]$

$3^0.(\forall r_1.r_2.r_3 \in Q_0)[r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3]$

4. Ayirish va bo'lish amallari qo'shish va ko'paytirishga teskari amallar sifatida ta'riflanadi.

5-ta'rif. r_t va g_2 ratsional sonlarining ayirmasi $r_1 - r_2 = r$ deb, shunday ratsional g soniga aytiladiki, u $r + r_2 = r_1$ ni qanoatlantiradi.

Agar $r_1 \geq r_2$ bo'lsa, u holda $r_1 - r_2 = r$ ayirma har doim mavjud va bir qiymatlidir.

Ta'rif. $r_1, \textit{ва}, r_2$ larning bo'linmasi $r_1 : r_2 = r$ deb, shunday r ga aytiladiki, u $r_2 * r = r_1$ ni qanoatlantiradi.

Bo'linma har doim mavjud va bir qiymatli agar g_2=0 bo'lmasa. 5. Nomanfiy ratsional sonlar to'plami quyidagi xossalarga ega.

1°. Q_0- cheksiz va sanoqli.

2°. Q_0- tartiblangan.

3°. Q_0 - zich to'plam.

Savollar

1. Kasr va ratsional son tushunchasini ta'riflang.
2. Ratsional sonlar ustida arifmetik amallar bajarish qoidalarini ayting.
3. Ratsional sonlar to'plami qanday xossalarga ega?

Misollar

1-misol. Berilgan misollarni qulay usulda yeching va qanday qonunlardan foydalanganligingizni ayting.

$a)\ 13\frac{17}{23}+5\frac{13}{15}+7\frac{6}{23}$

$b)\ 1\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot 2\frac{2}{3}$

$d)\ 2\frac{5}{8}\cdot(\frac{16}{23}+\frac{8}{21})$

Yechish: $a)\ 13\frac{17}{23}+5\frac{13}{15}+7\frac{6}{23}=13\frac{17}{23}+7\frac{6}{23}+5\frac{13}{15}=(13\frac{17}{23}+7\frac{6}{23})+5\frac{13}{15}=21+5\frac{13}{15}=26\frac{13}{15}$

Berilgan yig‘indini hisoblashda:

1) qo‘shishning kommutativligidan ($5\frac{13}{15}$ va $7\frac{6}{23}$ qo‘shiluvchilarning o‘rni almashtirildi).

2) qo‘shishning assosiativligidan foydalandik ($13\frac{17}{23}$ va $7\frac{6}{23}$ qo‘shiluvchilarni qavsga oldik).

$b)\ 1\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot 2\frac{2}{3}=\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}=(\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7})\cdot(\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3})=1\cdot 2=2$

Berilgan ko‘paytmani hisoblashda:

1) ko‘paytirishning kommutativligidan ($\frac{3}{4}$ va $\frac{5}{7}$ ko‘paytuvchilarni o‘rni almashtirildi).

2) ko‘paytirishning assosativligidan foydalandik.

$v)\ 2\frac{5}{8}\cdot(\frac{16}{23}+\frac{8}{21})=\frac{21}{8}\cdot(\frac{16}{63}+\frac{8}{21})=\frac{21}{8}\cdot\frac{16}{63}+\frac{21}{8}\cdot\frac{8}{21}=\frac{2}{3}+1=1\frac{2}{3}$

Berilgan ifodaning qiymatini topishda ko‘paytirishning qo‘shishga nisbatan distributivligidan foydalandik.

2 - misol. Kvadrati 3 ga teng bo‘lgan ratsional son mavjud emasligini isbotlang.

Isboti: Teskarisidan isbotlash usulidan foydalanamiz. Faraz qilaylik, kvadrati 3 ga teng ratsional son mavjud bo‘lsin. $\frac{m}{n}$ - qisqarmaydigan ratsional son bo‘lsin. Farazga ko‘ra $(\frac{m}{n})^2=3$. Bu tenglikdan $m^2=3n^2$ (1) ni hosil qilamiz. Agarda m^2 3 ga bo‘linsa, *m* soni ham 3 ga bo‘linadi. Shuning uchun *m* sonini 3*p* ko‘rinishida, ya’ni *m=3r* deb yozishimiz mumkin, bu erda $p\in N$. Berilgan (1) tenglikda *m* o‘rniga *3r* ni qo‘yamiz, natijada $9p^2=3n^2$ yoki $3p^2=n^2$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan *n* sonining 3 ga bo‘linishi kelib chiqadi, ya’ni *n=3q* $q\in N$. Demak, $\frac{m}{n}$ kasr qisqaruvchan ekan. Bu esa shartga zid.

Shunday qilib, kvadrati 3 ga teng ratsional son mavjud emasligini isbotladik.

3 – misol. Amallarning komponentlari orasidagi bog‘lanishga asoslanib, tenglamani eching.

$2\frac{1}{7}\cdot(4\frac{5}{12}+(2x-1\frac{1}{2})\cdot 2\frac{1}{3})-1\frac{2}{5}=10\frac{79}{140}$

Yechish: Kamayuvchini topish uchun ayirmaga ayriluvchini qo‘shamiz.

$$2\frac{1}{7}\cdot(4\frac{5}{12}+(2x-1\frac{1}{2})\cdot 2\frac{1}{3})=10\frac{79}{140}+1\frac{2}{5}$$

$$2\frac{1}{7}\cdot(4\frac{5}{12}+(2x-1\frac{1}{2})\cdot 2\frac{1}{3})=11\frac{79+56}{140}$$

$$2\frac{1}{7}\cdot(4\frac{5}{12}+(2x-1\frac{1}{2})\cdot 2\frac{1}{3})=11\frac{27}{28}$$

No‘malum ko‘paytuvchini topish uchun ko‘paytmani ma’lum ko‘paytuvchiga bo‘lamiz:

$$4\frac{5}{12}+(2x-1\frac{1}{2})\cdot 2\frac{1}{3}=11\frac{27}{28}:2\frac{1}{7}$$

$$4\frac{5}{12}+(2x-1\frac{1}{2})\cdot 2\frac{1}{3}=5\frac{7}{12}$$

No‘malum qo‘shiluvchini topish uchun ko‘paytmani ma’lum ko‘paytuvchiga bo‘lamiz.

$$2x-1\frac{1}{2}=1\frac{1}{6}:2\frac{1}{3}$$

$$2x-1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Kamayuvchini topish uchun ayirmaga ayriluvchini qo‘shamiz

$$2x=1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$2x=2$$

No‘malum ko‘paytuvchini topish uchun ko‘paytmani ma’lum ko‘paytuvchiga bo‘lamiz.

$$x=2:2$$

$$x=1$$

Javob: $x=1$

Mustaqil yechish uchun misollar

1.Butun sonlar ustida amallarni bajaring

$a)$ $143+(-42+85-52)\cdot 9-124;$

$b)$ $-56\cdot((-43+54)-65:5-82);$

$d)$ $-53\cdot(44+86-200\cdot 5+300:(-6));$

$e)$ $660:(-88+44+92:2)+840:(-3);$

$f)$ $48\cdot(-86\cdot 2-95)+(-842)\cdot 31.$

2.Hisoblang :

$a)\ 78\cdot 29+6573:313-408.$ $\quad j)\ 477\cdot 85-7784:56+10809.$

$b)\ 927:103+(247-82):5-1.$ $\quad k)\ (395\cdot 52-603)\cdot 25-960\cdot 64.$

$d)\ 25\cdot(28\cdot 105+7236:18):6\cdot 25.$

$e)\ 1092322:574+152\cdot 93-(96\cdot 125-82215:9).$

$f)\ 79348-64\cdot 84:28+6539:13-11005.$

$g).\ 3121350-(15125:25+302\cdot 804-(3044+2056):17)\cdot 9.$

$h)\ (110292:14:101+4129-3127)\cdot(1237-23138:23).$

$i)\ 4097\cdot 7-7659+64\cdot 105-6992:38:23.$

3.Quyidagi misollarni qulay usulda yeching va ratsional sonlarni qo‘shish va ko‘paytirishning qanday xossalaridan foydalandingiz?

a) $\frac{2}{15}+1\frac{5}{13}+3\frac{1}{5}+4\frac{3}{26};$ $\quad$ f) $\frac{5}{8}\cdot\frac{17}{18}\cdot 1\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{17};$

b) $2\frac{4}{9}+3\frac{1}{14}+5+2\frac{6}{14}+3\frac{5}{9};$ $\quad$ g) $\left(4\frac{2}{5}+3\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{5}{11};$

d) $5\frac{15}{24}+3\frac{23}{33}+1\frac{32}{48}+1\frac{7}{24}+\frac{10}{33};$ $\quad$ h) $3\frac{11}{12}+5\frac{3}{15}+1\frac{2}{9};$

e) $\frac{3}{5}\cdot 3\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3};$ $\quad$ i) $\frac{7}{12}\left(5\frac{3}{21}+\frac{12}{7}\right);$

4.Amallarning komponentlari orasidagi bog‘lanishga asoslanib *x* ni toping.

a) $17\frac{3}{11}+\left(12\frac{3}{22}-x\right)=23\frac{4}{5}$; 16) $21\frac{3}{4}-\left(x+5\frac{1}{8}\right)=6\frac{5}{8}$;

b) $27\frac{1}{4}-\left(x+2\frac{7}{20}\right)=23\frac{4}{5}$; 17) $\left(43\frac{27}{100}-x\right)-23\frac{3}{4}=17\frac{1}{2}$

d) $13\frac{3}{7}+\left(33\frac{3}{14}-x\right)=42\frac{1}{3}$; 18) $23\frac{3}{7}+\left(13\frac{3}{14}-x\right)=43\frac{1}{3}$;

e) $\left(16\frac{3}{14}-x\right)-6\frac{3}{17}=3\frac{14}{17}$; 19) $123\frac{2}{3}-\left(37\frac{7}{10}-x\right)=113\frac{1}{3}$;

f) $\left(2x-17\frac{2}{3}\right)-3\frac{4}{15}=12\frac{3}{5}$; 20) $2\frac{1}{2}\cdot\left(4\frac{5}{12}+x\cdot 2\frac{1}{3}\right)-1\frac{2}{5}=10\frac{79}{140}$;

5.Ifodaning qiymatini toping:

$a)\ \left(45\frac{1}{2}-2\frac{3}{8}\right)-\left(5\frac{5}{6}+6\frac{3}{4}\right)+\left(10\frac{2}{3}-5\frac{5}{8}\right);$

$b)\ \left(36\frac{4}{5}-12\frac{3}{10}\right)-\left(4\frac{2}{15}+1\frac{1}{30}\right)+\left(20\frac{11}{12}-10\frac{3}{8}-\frac{3}{16}-3\frac{1}{48}\right);$

$d)\ \left(12\frac{1}{2}-3\frac{5}{6}\right)-\left(2\frac{8}{9}+1\frac{4}{5}\right)-\left(5\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}\right)-\left(6\frac{9}{40}-5\frac{11}{90}\right);$

$e)\ 56\frac{1}{4}-\left\{\left(1\frac{5}{6}+2\frac{13}{14}\right)+\left[27\frac{13}{30}-\left(15\frac{5}{12}-12\frac{13}{20}\right)\right]\right\};$

$f)\ \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3};\quad g)\ 3\frac{1}{3}\cdot3\frac{13}{53}\cdot3\frac{1}{88};\quad h)\ 5\frac{1}{4}:1\frac{2}{7}:5\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{22};\quad i)\ \left(1\frac{11}{24}+1\frac{13}{56}\right)\cdot9:1\frac{2}{5};$

$j)\ \frac{8\frac{1}{2}}{15:\frac{5}{17}};\quad k)\ \frac{\frac{28}{29}:\frac{7}{29}}{\frac{7}{9}:\frac{1}{9}};\quad l)\ \frac{4\frac{4}{5}:\frac{4}{17}}{3\frac{2}{5}}\quad m)\ 8\frac{13}{16}\cdot\frac{47}{64}:1\frac{1}{35}:3\frac{1}{2}:$

6.Amallarni bajaring.

$a)\ a)2:\frac{3}{5}+\frac{3}{5}:2+1\frac{1}{2}:6+6:\frac{1}{2}\qquad f)\ 6\frac{1}{4}\cdot8-3\frac{2}{3}\cdot5\frac{1}{2}+2\frac{2}{5}\cdot4\frac{7}{12}$

$b)\ 2\frac{1}{2}\cdot48-3\frac{3}{8}:\frac{1}{8}+5\frac{5}{12}:\frac{7}{36}\qquad g)\ \left(3\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}+5\frac{5}{6}+4\frac{3}{5}\right)\cdot24$

$d).\ a)\ \left(3\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}+5\frac{5}{6}+4\frac{3}{5}\right)\cdot24\qquad h)\ \left(5\frac{5}{8}+18\frac{1}{2}-7\frac{5}{24}\right):16\frac{2}{3}$

$e)\left(12\frac{5}{12}+1\frac{2}{3}-3\frac{5}{6}+2\frac{3}{4}\right):\left(2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-\frac{7}{9}\right);\quad i)\ 48\frac{3}{8}\cdot6\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{12}-2\frac{5}{6}+1\frac{75}{94}\cdot\left(1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-13:26\right)$

$7.a)\ \frac{12\frac{4}{5}\cdot3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}:4\frac{4}{7}}:\qquad b)\ \frac{28\frac{4}{5}:13\frac{5}{7}+6\frac{3}{5}:\frac{2}{7}}{1\frac{11}{16}:2\frac{1}{4}};$

$d)\ \frac{2\frac{3}{8}:\frac{3}{4}+24\frac{7}{9}}{7\frac{1}{8}-175\frac{4}{5}:24};\qquad e)\ \frac{\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}\right)\cdot3\frac{3}{5}}{14-15\frac{1}{8}:2\frac{1}{5}}.$

1.3. O‘nli kasrlar va ular ustida amallar.

1. Ta’rif. Mahraji o‘n yoki uning darajalaridan iborat bo‘lgan kasr o‘nli kasr deyiladi, ya’ni $\frac{m}{10}(\forall n,m\in N)$ ko‘rinishdagi kasr o‘nli kasrdir.

Agar $m = m_k \cdot 10^k + ... + m_0, n \le k, булса,$

$$\frac{m}{10^n} = \frac{m_k \cdot 10^k + ... + m_n \cdot 10^n + m_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + m_0}{10^n} = m_k 10^{k-n} + ... + m_n + \frac{m_{n-1}}{10} + ... + \frac{m_0}{10^n}.$$

Agar $m_k \cdot 10^{k-n} + ... + m_n = M$ deb belgilasak, u holda $\frac{m}{10^n}$ kasrni $M, m_{n-1}m_{n-2}...m_0$ ko‘rinishda yozamiz. Masalan, 1). $\frac{571}{100} = \frac{571}{10^2} = 5{,}71$

2). $\frac{32}{10000} = \frac{32}{10^4} = 0{,}0032$

$(\forall m, n, s \in N)$ uchun $\frac{m}{10^n} \approx \frac{10^s m}{10^{n+s}}, , chunki, , m \cdot 10^{n+s} = 10^n \cdot 10^s \cdot m... \frac{m}{10^n} \approx \frac{10^s m}{10^{n+s}}$ bo‘lganligi uchun, $M, m_{n-1}...m_0$, ва, $M, m_{n-1}...m_0 00...0$ kasrlari teng kuchli.

2. O‘nli kasrlarni qo‘shish algoritmi quyidagichadir:
1) Qo‘shiluvchilarning verguldan keyingi raqamlarini (kasr qismini) nollar yozish bilan tenglashtiramiz.
2) Vergullarni hisobga olmasdan natural sonlar kabi qo‘shamiz.
3) Yig‘indida har bir qo‘shiluvchida nechtadan raqam bo‘lsa, shuncha raqam ajratib vergul qo‘yamiz.
Xuddi shu usul bilan kasrlarni taqqoslash va ayirish algoritmlari keltirib chiqariladi.

3. $M, m_{n-1}...m_0, ва, , P, p_{q-1}...p_0$ o‘nli kasrlari berilgan. Ularni $\frac{m}{10^n} ва, , \frac{p}{10^q}$ ko‘rinishda yozamiz.

$\frac{m}{10^n} \cdot \frac{p}{10^q} = \frac{m \cdot p}{10^{n+q}}$ kasrini mahrajsiz yozish uchun, m.p natural sonining o‘nli yozilishidan n+q ta raqam oxiridan sanab vergul ajratamiz. Bundan quyidagi algoritm kelib chiqadi: O‘nli kasrlarni ko‘paytirish uchun:
1) Ko‘paytuvchilardagi vergullarni tashlaymiz.
2) Hosil bo‘lgan natural sonlarni ko‘paytiramiz.
3) Ko‘paytmada ko‘paytuvchilarda hammasi nechta raqam bo‘lsa, shuncha raqam sanab vergul qo‘yamiz.

4. $M, m_{n-1}...m_0, ва, , P, p_{q-1}...p_0$ o‘nli kasrlarni berilgan. $\frac{m}{10^n} : \frac{p}{10^q} = \frac{m \cdot 10^q}{10^n \cdot p}$

bunda $m \cdot 10^q, , ва, , 10^n \cdot p$ sonlari natural. Demak, o‘nli kasrlarni bo‘lishni natural sonlarni bo‘lish bilan almashtirishga keltirib
olinadi.

5. O‘nli kasrlar ustidagi amallar maktab kursida ham to‘la o‘tilganligini hisobga olib, talabalarga mustaqil ishlashga misollar topshiramiz.

Protsent (foiz) va promillar o‘nli kasrlarning xususiy holi bo‘lgani uchun ular haqidagi ma’lumotlar mustaqil o‘rganish uchun topshiriladi.

Savollar

1.O‘nli kasr ta’rifini ayting.
2. O‘nli kasrlarni taqqoslash qoidasini ayting va asoslang.
3. O‘nli kasrlar ustida arifmetik amallar bajarish algoritmini ayting va asoslang.
4. Protsent tushunchasini ta’riflang. Sonning protsentini va protsentiga ko‘ra sonni topish algoritmini ayting. Misollar keltiring.

Misollar

1 – misol. 23,158 va 2,28 o‘nli kasrlardan qaysi biri kattaligini aniqlang:

23>2 ,   23,158 > 2,280;

demak, birinchi kasr ikkinchisidan katta.

2 – misol. 0,6273+3,004+12,17 ni toping.

O‘nli kasrlarni qo‘shish xuddi butun sonlarni qo‘shishdek bajariladi. Ikki yoki bir necha kasrni qo‘shishda bularni birini ikkinchisining tagiga shunday yozish kerakki, xarakteristikalarining oxirgi raqamlari bir ustunchada bo‘lishi zarur. So‘ngra yozilgan sonlarni xuddi natural sonlardek qo‘shib, vergul qo‘sxiluvchilarning qayerida bo‘lsa, yig‘indida ham vergulni shu joyga qo‘yish kerak. Hosil bo‘lgan o‘nli kasr berilgan kasrlarning yig‘indisi bo‘ladi.

Yechish. 0,6273
3,004
12,17
15,8013

3 – misol. a) 1,204 - 0,6308 ni toping.

Ikkita o‘nli kasrning ayirmasini topish uchun, ayriluvchini kamayuvchi tagiga shunday yozish kerakki, bunda xarakteristikalarining oxirgi raqamlari bir ustunda bo‘lsin, shundan keyin xuddi natural sonlarni ayirgandek ayirish bajarilaveradi, hosil bo‘lgan ayirmada xarakteristikaning oxirgi raqami ayirma komponentlari turgan ustunda bo‘lishi kerak.

1,204
0,6308
0,5732

Agar ayirmaning komponentlaridan biri natural son bo‘lsa, bu holda natural sonni o‘nli kasr ko‘rinishida yozish paytida uning o‘ngdan oxirgi raqamidan iborat bo‘ladi.

b) 12 - 9,604 ni toping.

$$\begin{array}{r} 12,000 \\ -\ \underline{9,604} \\ 2,396 \end{array}$$

4 – misol. 0,643 ·1,12 ko‘paytmani toping.

Qaralayotgan misolda verguldan keyin ko‘payuvchida 3ta, ko‘paytuvchida 2ta kasr xona bor, shuning uchun ko‘paytmada o‘ngdan 5ta xonadan keyin vergul qo‘yish kerak.

0,643

$$
\begin{array}{r}
\times\ 1{,}12 \\
\hline
1286 \\
+\ 643 \\
643 \\
\hline
0{,}72016
\end{array}
$$

6 – masala. Sutdan 16% qaymoq olinadi. 1250 kg sutdan qancha qaymoq olish mumkin?

Yechish: $\frac{1250}{100}\cdot 16 = 200$ kg qaymoq olish mumkin.

7 – masala. Sutdan oʻrta hisobda 16% qaymoq olinadi. 200 kg qaymoq olish uchun qancha sut kerak?

Yechish: $\frac{200}{16}\cdot 100 = 1250$ kg sut olish mumkin.

8 – masala. 1250 kg sutdan 200 kg qaymoq olindi. Sutda necha % qaymoq borligini toping?

Yechish: $\frac{200}{1250}\cdot 100 = 16\%$ qaymoq bor.

5 – misol. Oʻnli kasrni butun songa boʻlish butun sonlarni boʻlishda qilingan ishlarga asoslanib bajariladi.

Qandaydir sonni oʻnli kasrga boʻlish uchun, boʻluvchidagi vergulni tashlab, vergulni tashlash natijasida boʻluvchi necha martta ortgan boʻlsa, boʻlinuvchini ham shuncha marta orttirib, amalni butun sonlarni boʻlish qoidasi boʻyicha bajarish kerak.

23,71: 0,08 = 2371: 8

$$
\begin{array}{l|l}
2371 & 8 \\
\cline{2-2}
16 & 296375 \\
\hline
77 & \\
72 & \\
\hline
51 & \\
48 & \\
\hline
30 & \\
24 & \\
\hline
60 & \\
56 & \\
\hline
40 & \\
40 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Yigʻindini toping.

a) 203,731 + 5,98 d) 1,48 + 97,7634 f) 0,5374 + 1,09789

b) 1001,34 + 15,8 e) 1951,2801 + 89,643 g) 14,41 + 0,4038

2. Ayirmani toping.

a) 8,62 – 3,25 e) 82,51 – 0,432 h) 0,651 – 0,0117
b) 54,302 – 0,456 f) 311,249 – 5,247 i) 8,2176 – 0,043
d) 214 – 0,456 g) 672,03 – 0,398 j) 64,0095 – 5,095

3. Koʻpaytmani hisoblang.

a) 103,9 · 2,6 e) 0,802 · 0,508 h) 5,34 · 0,64 · 6
b) 44,2 · 21,3 f) 30,01 · 3,09 i) 0,169 · 0,8 · 0,71
d) 0,018 · 0,004 g) 1001,01 · 4,04 j) 22,42 · 2,3 · 0,71

4. Boʻlishni bajaring.

a) 12,4 : 0,031 f) 3 : 0,015 j) 3,6 : 0,09
b) 11,5 : 2,5 g) 9 : 0,0004 k) 18,6 : 0,004
d) 2,7856 : 0,32 h) 21,875 : 3,125 l) 7 : 5,6
e) 0,012 : 0,02 i) 49,44 : 4,8 m) 9 : 0,0004

5. Amallarni bajaring.

$a)\ (6{,}17 - 598{,}24)\cdot 7 + 850\cdot 8{,}4;$

$b)\ 62{,}7\cdot 0{,}725 - 2{,}4\cdot(2{,}05 + 0{,}404);$

$d)\ 64{,}85 + (5{,}36 - 2\cdot 1{,}86 + 0{,}051);$

$e)\ (0{,}8 - 0{,}007\cdot 0{,}52)\cdot 4{,}05 - 1{,}8\cdot 1{,}854;$

$f)\ 0{,}1\cdot 0{,}01\cdot 0{,}001\cdot 1000;$

$g)\ 0{,}7\cdot 0{,}11\cdot 0{,}13\cdot 1001;$

6. Masalalarni yeching.

a) Nashriyot 2 kunda olingan qogʻozning 60% ishlatdi. 2 – kuni 1 – kunga nisbatan $1\frac{1}{5}$ marta ortiq qogʻoz ishlatildi. Agarda $6\frac{3}{5}$ t qogʻoz olingan boʻlsa, nashriyot 1 – kuni qancha qogʻoz ishlatdi?

b) Yangi uzilgan nokdan 16% qoqi tushadi. 48 kg nok qoqisini olish uchun necha kg yangi uzilgan nok olish kerak?

d) Paxtadan 30% tola olinsa, 60 tonna tola olish uchun qancha paxta kerak?

e) Brigada ekin maydonining 180 gektariga paxta, 60 gektariga sholi ekdi. Sholi maydoni paxta maydonining necha foizini tashkil etadi.

f) Qutiga 25 kg massali yuk joylandi. Agar qutining massasi yuk massasining 12% ini tashkil etsa, qutining massasini toping?

g) 30 ta talabadan 25 tasi qishki sinovlarning hammasini topshirdi. Baʼzi sinovlarni topshira olmagan talabalar barcha sinovlarni topshirgan talabalarning necha foizini tashkil etadi?

h) Goʻsht qaynatilganda oʻz vaznining 40% ini yoʻqotadi. 6 kg goʻsht qaynatilganda vazni necha kg kamayadi?

i) Doʻkonga 96 tonna karam keltirildi. Agar karamning 80% i sotilgan boʻlsa, doʻkonda qancha karam qolgan?

j) Ishchining maoshi dastlab 25% ga, soʻngra yana 25% ga oshirilgan boʻlsa, uning maoshi necha foizga oshgan?

k) $2\frac{3}{5}$ va $\frac{1}{2}$ sonlar ayirmasining 10% ini toping?

7. Amallarni bajaring :

$a)\ 4,735:0,5+14,95:1,3-2,121:0,7;$ $h)589,72:16-18,305:+0,0567:0,7$

$b)3,006-0,3417:34-0,875:125;$ $i)22,5:3,75+208,45-2,5:0,004.$

$d)\ (0,1955+0,187):0,085;$ $j)\ 15,76267:(100,6+42697);$

$e)\ (86,9+667,6):(37,1+13,2)$ $k)\ (9,09-900252)\cdot(25,007-12,507).$

$f\ \ (0,008+0,992)\cdot(5\cdot 0,6-1,4);$ $l)\ (0,93-0,07)\cdot(0,93-0,805);$

$g\ \ (50000-1397,3):(20,4+33,603);$ $m)\ (2779,6+8024):(1,98+2,02).$

$$n)\ \frac{4,06\cdot 0,0058+3,3044895-(0,7584:2,37+0,0003:8)}{0,03625\cdot 80-2,43};$$

$$o)\ \frac{2,045\cdot 0,003+10,518395-0,464774:0,0562}{0,003092:0,0001-5,188};$$

$$p)\ \frac{57,24\cdot 3,55+430,728}{2,7\cdot 1,88-1,336}+\frac{127,18\cdot 4,35+14,067}{18+2,1492:3,582};$$

$$q)\ 52:\left(\frac{6:(0,4-0,2)}{2,5\cdot(0,8+1,2)}+\frac{(34,04-33,81)\cdot 4}{6,48:(28,57-25,15)}\right)-8.$$

1.4. Ratsional son cheksiz davriy o‘nli kasr sifatida

1. Teorema. Agar $\frac{b}{a}=\frac{b}{2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}}$ bo‘lsa, u holda $\frac{b}{a}$ kasr biror o‘nli kasrga teng kuchli bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik:

$$\frac{b}{a}=\frac{b}{2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}}.$$

$$1).\alpha=\beta\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{2^{\alpha}\cdot 5^{\alpha}}=\frac{b}{10^{\alpha}},$$

$$2).\alpha\lhd\beta,\frac{b}{a}=\frac{b\cdot\alpha^{\beta-\alpha}}{2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot\alpha^{\beta-\alpha}}=\frac{B_2}{10^{\beta}};$$

$$3).\alpha=\beta,\frac{b}{a}=\frac{b\cdot 5^{\alpha-\beta}}{2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot 5^{\alpha-\beta}}=\frac{B_2}{10^{\alpha}}$$

Demak, $\frac{b}{a}-$ o‘nli kasrga aylanadi.

Endi $\frac{b}{a}$ qisqarmaydigan kasr $\frac{b}{a}=\frac{c}{10^{m}}$ bo‘lsin. $10^{m}\cdot b=a\cdot c$ Agar s ning tub yoyilmasiga 2 va 5 dan farqli biror r tub son tegishli bo‘lsin, u holda $10^{m}b:p$.

Lekin 10^n ning tub yoyilmasida faqat 2 va 5 lar mavjud.

Shuning uchun $\overline{10^m \vdots p}$. Bu holda $b \vdots r$ bo‘lib, $\frac{b}{a}$ kasrning a qisqaruvchanligini bildiradi. Bu esa, shartga ziddir.

Oddiy kasrni o‘nli kasrga aylantirish uchun, kasrning suratini mahrajiga bo‘lamiz.

2. $\frac{1}{3}$ kasrni o‘nli kasrga aylantiraylik. $\frac{1}{3} = 0{,}333..;\frac{1}{6}$ ni o‘nli kasrga aylantirsak $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$

Demak, kasr mahrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasiga 2 va 5 dan boshqa tub bo‘luvchilar aralashsa, u holda kasr cheksiz davriy o‘nli kasrga aylanadi.

Aniqrog‘i: 1) Agar kasr mahrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasiga 2 va 5 tub bo‘luvchilari qatnashmasa, davr birdaniga verguldan keyin boshlanadi.

Masalan, $\frac{1}{3} = 0{,}333....0,(3)$

Bunday kasrlar sof davriy kasrlar deyiladi.

2) Agar 2 yoki 5 bilan bir qatorda boshqa tub bo‘luvchilar qatnashsa, davr verguldan bir yoki bir nechta raqam keyin boshlanadi.

Masalan, $\frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3} = 0{,}1666... = 0{,}1(6)$ Bunday kasrlar aralash davriy

6 2–3 kasrlar deyiladi.

Kasrning davrida bir va undan ortiq sondagi raqamlar qatnashishi mumkin.

3. Sof davriy kasrni oddiy kasrga aylantirish uchun kasrning mahrajiga davrda nechta raqam bo‘lsa, shuncha 9, suratiga esa davrni yozamiz.

Masalan, $1)0,(35) = \frac{35}{99};. \quad 2)0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};. \quad 3)0,(54) = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$

Aralash davriy kasrni oddiy kasrga aylantirish uchun kasrning mahrajiga davrda nechta raqam bo‘lsa, shuncha 9 va nechta raqam davrda qatnashsa, shuncha nol, suratiga verguldan 2- davrgacha bo‘lgan sondan 1 - davrgacha bo‘lgan son ayirmasi yoziladi.

Masalan: $1)0{,}1(6) = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}; \quad 2)0{,}7(61) = \frac{761-7}{990} = \frac{754}{990} = \frac{377}{495}$

4. Istalgan nomanfiy ratsional son davriy kasr ko‘rinishda yozilishi mumkinligini e’tiborga olib, ratsional sonni cheksiz davriy o‘nli kasr deb ta’riflaymiz.

Savollar

1. Oddiy kasr qanday qilib o‘nli kasrga aylantiriladi?
2. O‘nli kasrlarning qanday turlarini bilasiz? Ta’riflarini ayting.
3. O‘nli kasrni oddiy kasrga aylantirish yo‘llarini tushuntiring va asoslang.
4. Ratsional songa o‘nli kasr orqali ta’rif bering.

Misollar

1 – misol. $\frac{2}{3}$ oddiy kasrni o‘nli kasrga aylantiring.

Buning uchun kasrning suratini mahrajga bo‘lamiz.

$$
\begin{array}{r|l}
20 & 3 \\ \cline{2-2}
18 & 0{,}666\ldots = 0{,}(6) \text{ sof davriy o‘nli kasr} \\ \cline{1-1}
20 & \\
18 & \\ \cline{1-1}
20 & \\
18 & \\ \cline{1-1}
20 &
\end{array}
$$

2 – misol. $\frac{2}{5}$ kasrni o‘nli kasrga aylantiring.

Yechish. $\frac{2\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{4}{10}=0{,}4$ kasrni surat va mahrajini 2 ga ko‘paytirdik.

3– misol. $\frac{3}{20}$ kasrni o‘nli kasrga aylantiring. $\frac{3}{20}=\frac{3}{4\cdot 5}=\frac{3\cdot 5}{2^2\cdot 5\cdot 5}=\frac{15}{(2\cdot 5)^2}=\frac{15}{100}=0{,}15.$

4 – misol. $\frac{40}{11}$ kasr berilgan. O‘nli kasrga aylantiring.

$\frac{40}{11}=3+\frac{7}{11}$ $\frac{7}{11}$ ni o‘nli kasrga aylantiramiz.

$$
\begin{array}{r|l}
70 & 11 \\ \cline{2-2}
66 & 0{,}6363.\,.=0{,}(63) \\ \cline{1-1}
40 & \\
33 & \\ \cline{1-1}
70 & \\
66 & \\ \cline{1-1}
40 & \\
33 & \\ \cline{1-1}
70 &
\end{array}
$$

Demak, $\frac{40}{11}=3+0,(63)=3,(63)$

5 – misol. $\frac{4}{25}=\frac{4\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{16}{100}=0{,}16.$

$$
\begin{array}{r|l}
40 & 25 \\ \cline{2-2}
25 & 0{,}16 \\ \cline{1-2}
150 & \\
150 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

6 – misol. $\frac{3}{14}$ kasrni cheksiz davriy o‘nli kasrga aylantiring.

$$\begin{array}{l|l}
30 & 14 \\ \cline{2-2}
28 & 0{,}21(428571)4\ldots \\ \cline{1-1}
20 & \\
14 & \\ \cline{1-1}
60 & \\
56 & \\ \cline{1-1}
40 & \\
28 & \\ \cline{1-1}
120 & \\
112 & \\ \cline{1-1}
80 & \\
70 & \\ \cline{1-1}
100 & \\
98 & \\ \cline{1-1}
20 & \\
14 & \\ \cline{1-1}
60 & \\
56 & \\ \cline{1-1}
40 &
\end{array}$$

7 – misol. 5,(8) cheksiz davriy o‘nli kasrni oddiy kasrga aylantiring.

Yechish. Cheksiz o‘nli kasrni oddiy kasrga aylantirish uchun, agar uning takrorlanmaydigan raqami bo‘lmasa, suratiga davrini mahrajiga esa davrida nechta raqam bo‘lsa, shuncha 9 yozamiz:

$$5,(8) = 5\frac{8}{9}$$

8 – misol. 3,4(3) davriy kasrni oddiy kasrga aylantiring.

Yechish. Takrorlanmaydigan raqami 4 bo‘lgan cheksiz o‘nli kasrni oddiy kasrga aylantirish uchun suratiga ikkinchi davrgacha bo‘lgan son 43 dan davrgacha bo‘lgan son (takrorlanmaydigan raqam) 4 qiymatining ayirmasini yozamiz, mahrajida esa davrda nechta raqam bo‘lsa, shuncha (bitta) 9 va nechta takrorlanmaydigan raqam bo‘lsa, shuncha 0 yozamaz:

$$3{,}4(3) = 3 + \frac{43-4}{90} = 3 + \frac{39}{90} = 3 + \frac{13}{30} = 3\frac{13}{30}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Oddiy karsni o‘nli kasrga aylantiring

$$\frac{3}{11}, \frac{19}{3}, \frac{24}{5}, \frac{7}{4}, \frac{12}{5}, \frac{17}{6}, \frac{3}{8}, \frac{17}{125}, \frac{5}{7}, \frac{3}{13}, \frac{14}{625}, \frac{3}{64}, \frac{11}{375}, \frac{32}{75}, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{4}{15}, \frac{5}{22}, \frac{10}{99}$$

2. Davriy o‘nli kasrni oddiy kasrga aylantiring

$$0,(18),\quad 0{,}1(7),\quad 0,(7),\quad 8,(5),\quad 3{,}7(3),\quad 0,(8),\quad 0,(7),\quad 0,(07),$$

$$2{,}32(6),\quad 7{,}145(2),\quad 0{,}42(6),\quad 0,(37),\quad 0{,}14(134)$$

3. O‘nli kasrni oddiy kasrga aylantiring

0,27; 2,4; 1,85; 3,3125; 5,375; 2,15; 1,35; 12,052; 8,032; 17,1375;

4. Quyidagi amallarni bajaring

$a)\ \dfrac{0,8(3)+0,4(6)}{0,(3)}$ $\qquad$ $f)\ 0,(8)+0,(7)$

$b)\ 8,(8)+3,7(3)$ $\qquad$ $g)\ 0,5(3)+0,48(1)$

$d)\ 1,3(5)-0,6(5)$ $\qquad$ $h)\ 5,7(2)-2,2(6)$

$e)\ 6,5(2)-2,5(3)$ $\qquad$ $i)\ 8,(8)-6,(7)$

5. Ifodalarning qiymatini toping:

$a)\ \dfrac{0,8333\ldots-0,4(6)}{1\frac{5}{6}}\cdot\dfrac{1,125+1,75-0,41(6)}{0,59};$ $\qquad$ $d)\ \dfrac{\left(\frac{5}{8}+2,708333\ldots\right):2,5}{\left(1,3+0,7(6)+0,(36)\right)\cdot\frac{110}{401}}\cdot\dfrac{1}{2};$

$b)\ \dfrac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot 0,(26)}{\left(18,5-13,777\ldots\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0,5;$ $\qquad$ $e)\ \dfrac{\frac{3}{4}+0,8(5)\cdot\frac{1}{2}}{9:\left(0,9(23)-0,7(9)\right)}+\dfrac{41}{43}.$

6. Davriy o`nli kasrni oddiy kasrga aylantiring

$a) 0,(3)$ $\qquad$ $f) 13,0(48);$ $\qquad$ $j) 2,(123);$

$b) 0,3(2);$ $\qquad$ $g) 0,(4);$ $\qquad$ $k) 2,333(45);$

$d) 0,71(23);$ $\qquad$ $h) 0,(45);$ $\qquad$ $l) 41,8519(504);$

$e) 11,(75);$ $\qquad$ $i) 3,1(44);$ $\qquad$ $m) 35,73(4845);$

IV BOB. Haqiqiy sonlar va ular ustida amallar

1§. Haqiqiy sonlar

1.1. Haqiqiy son tushunchasi

Yuqorida ko‘rganimizdek, miqdorlarni o‘lchash butun sonlar to‘plamini kengaytirish ehtiyojini vujudga keltirdi. Lekin Q – ratsional sonlar to‘plami ham ko‘pgina amaliy va nazariy maslalarni yechishda torlik qiladi. Har bir rarsional songa son o‘qida bitta nuqta mos keladi. Lekin shunday nuqtalar borki, uni ratsional son bilan ifodalash mumkin emas. Shunday nuqtalar bor ekanini ko‘rsatamiz. Quyidagi teoremani ko‘rib chiqaylik:

Teorema. Kvadrati ikkiga teng ratsional son mavjud emas.

Isbot: Faraz qilaylik, mavjud bo‘lsin, ya’ni $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2=2$ va *D(p;q) =1.*

$\frac{p^2}{q^2}=2 \Rightarrow p^2=2q^2 \Rightarrow p=2k$.

$4k^2=2q^2 \Rightarrow 2k^2=q^2 \Rightarrow q=21$, ya'ni $p \vdots 2 \wedge q \vdots 2$. Bu shartga zid. Demak, faraz noto'g'ri. Teorema isbotlandi. Ya`ni $x^2-2=0$ tenglamani qanoatlantiradigan ratsional ildiz mavjud emas. Shuningdek $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$ sonlarini ham $\frac{p}{q}$ ko'rinishida yozib bo'lmaydi. Ya'ni bu sonlar ratsional sonlar emas.

1-ta'rif. Ratsional bo'lmagan sonlar irratsional sonlar deyiladi va ularning to'plami *I* - kabi belgilanadi.

2-ta`rif. $Q \cup I = R$ - haqiqiy sonlar to'plami deyiladi, Irratsional sonlar cheksiz *davriy bo'lmagan* o'nli kasrlar, ratsional sonlar esa cheksiz *davriy* o'nli kasrlar kabi yoziladi.

Demak, haqiqiy sonni bir so'z bilan cheksiz o'nli kasr deb atash mumkin, ya'ni $x=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots}$

haqiqiy sonning $x_n=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots}$ qiymati kami bilan olingan taqribiy qiymati $x'_n=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots}+\frac{1}{10^n}$ ortig'i bilan olingan taqribiy qiymati deyiladi.

R-to'plamning xossalari:

1°. R -cheksiz -sanoqsiz.

2°. R-tartiblangan.

3°. R-uzluksizdir.

3. $(\forall x \in R)$ soniga sonlar o'qida bitta nuqta mos kelishini va aksincha son o'qining har bir nuqtasiga yagona haqiqiy son mos kelishini tushuntiramiz. $(\forall x \in Q)$ soniga sonlar o'qida bitta nuqta mos kelishi ma'lum. $(\forall x \in I)$-irratsional bo'lsa, unga ham bitta nuqta topilishini ko'rsatamiz.

Masalan: $x=\sqrt{2}$

$|OA|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

A nuqtaga sonlar o'qida A^1 nuqta mos keldi. Uning koordinatasi $\sqrt{2}$, ya'ni *A'(*$\sqrt{2}$*).* Xuddi shunday istalgan irratsional songa bittadan nuqtani mos keltirish mumkin va aksincha.

Shunday qilib, R -to'plami–bilan to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin ekan.

1. [0;1] kesmadagi nuqtalar to'plami sanoqsizdir.

Ta'rif**.** [0;1] kesmadagi nuqtalar to'plami bilan teng quvvatli to'plam kontinium quvvatli to'plam deyiladi. Bunday to'plamlar haqida bir nechta teoremalarni isbotsiz qabul qilamiz.

Teorema 1. Har qanday [a,b] dagi nuqtalar kontinium quvvatga ega.

Teorema 2. A_1 A_2,...,A_n larning har biri kontinium quvvatiga ega bo'lsa, u holda $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$ to'plam ham kontinium quvvatga ega va aksincha.

Natija. R to'plam kontinium quvvatga ega.

Savollar

1. Irratsional son tushunchasini kiritilishi zaruratini tushuntiring,
2. Irratsional son ta'rifini ayting.
3. Haqiqiy son deb nimaga aytiladi?
4. Haqiqiy sonlar to'plami qanday tuzilgan?
5. Haqiqiy sonlar to'plami bilan son o'qi nuqtalari orasida qanday bog'lanish bor?
6. Haqiqiy sonlar to'plamining quvvati haqida nima deyish mumkin?
7. Haqiqiy sonning kami va ortig'i bilan olingan o'nli yaqinlashishlari deb nimaga aytiladi? Ular qanday topiladi?

Misollar

1 – misol. Agarda ***r*** **–** ratsional son, α - irratsional son bo'lsa, $r+\alpha=x$ irratsional son ekanligini isbotlang.

Isboti: Teskarisidan isbotlaylik. Agarda x – ratsional son bo'lsa, u holda $\alpha=x-r$ ham ratsional son bo'ladi. Ammo α - irratsional son, demak x – irratsional son.

2 – misol. $(\forall x\in R)$ - irratsional son bo'lsin. Unga sonlar o'qida bitta nuqta mos kelishini ko'rsating.

Yechish. $x=\sqrt{17}$ $\qquad |OA|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

A nuqtaga sonlar o'qida A' nuqta mos keldi. Uning koordinatasi $\sqrt{17}$, ya'ni $A'(\sqrt{17})$. Demak, R to'plam bilan to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatdik.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. α va β - irratsional sonlar, *r* – ratsional son. Quyidagi sonlardan qaysi biri ratsional son bo'ladi?

$a)\ \alpha+\beta;\quad b)\ \alpha+r;\quad v)\ \sqrt{a};\quad g)\ \sqrt{r};\quad d)\ \alpha\cdot\beta;\quad e)\ \sqrt{\alpha+r};\quad j)\ \sqrt{\alpha+\sqrt{r}}$?

2. Agar $(\forall x\in R)$ - irratsional son bo'lsa, unga sonlar o'qida bitta nuqta mos kelishini ko'rsating?

$a)\ x=\sqrt{10};\quad b)\ x=\sqrt{5};\quad v)\ x=\sqrt{13};\quad g)\ x=\sqrt{29}$

$d)\ x=\sqrt{50};\quad e)\ x=\sqrt{41};\quad j)\ x=\sqrt{73}$

3. Quyidagilar qanday sonlar?

$\sqrt{3};\ \sqrt{7};\ \sqrt{16};\quad \sqrt{136};\quad \sqrt{144};\quad \sqrt{17};\quad 5{,}18;\quad 3{,}1(14);\quad 18\frac{3}{5};\quad \sqrt{39}.$

1.2. Haqiqiy sonlar ustida amallar

*1-ta'rif***.** x va u haqiqiy sonlarning yig'indisi deb, $x_s+u_n<Z<x',+y'_a$ shartni qanoatlantiradigan Z haqiqiy soniga aytiladi. Misol. 3,657642... va 0,874622... sonlarining yig'indisi 0,001gacha aniqlikda topilsin.

$$1)\ n=0 \begin{array}{l} x_0=3, \quad y_0=0. \\ x_0^1=4, \quad y_0'^{'}=1. \end{array} \Bigg| 3+0<Z<4+1;\ 3<Z<5$$

$$x_1=3,6; \quad y_0'=0,9$$

$$2)\ n=1\, y'=0,8\ x_1'=3,7$$

$$4,4<Z<4,6$$

$$x_2=3,65;\ x_2'=3,66$$

$$3)\ n=2\ y_1=0,87\ y_2'=0,88$$

$$4,52<Z<4,54$$

$$x_3=3,657;\ y_3'=3,658$$

$$4)\, n=3\, y_3=0,874;\ y_3'=0,875$$

$$4,531 \prec Z \prec 4,533$$

$$n=4\ x_4=3,6576\ x_4'=3,6577$$

$5)\ y_4=0,8746\ y_4'=0,8747$ demak, $Z \approx 4,532$

4,532 <Z<4,532

2-ta'rif. *x* va y haqiqiy sonlarning ko'paytmasi deb, shunday Z haqiqiy soniga aytiladiki, u ixtiyoriy manfiy bo'lmagan x, y uchun $x_n \cdot y_n < z \prec x_n' \cdot y_n'$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Misol. x=1,34205... va y=1,63244... bo'lsa, ko'paytmaning to'rtta o'nli ishorasi topilsin.

p = 4 $x_n \cdot u_n$ = 1,3420 • 1,6324 = 2,19068080;

$$1)\, x_n' \cdot y_n' = 1,3420 \cdot 1,6325 = 2,19097825;$$

$$2,19068080 < z < 2,19097825;$$

$$n=5\ \ x_5 \cdot y_5 = 1,34205 \cdot 1,63244 = 2,1908161020$$

$$2)\, x_5' \cdot y_5' = 1,34206 \cdot 1,63245 = 2,1908458470$$

$$2,1908 < Z < 2,1908$$

Demak, Z=2,1908.

3-ta'rif. *x* va y haqiqiy sonlarning *x* - y ayirmasi deb, shunday Z haqiqiy soniga aytiladiki, y $x_a - y'_a < Z < x'_n - u_n$ shartni qanoatlantiradi.

Misol. *x*=3,423421... va y=3,234519... bo'lsa, ayirmaning birinchi uchta o'nli ishorasi topilsin.

n = 3 x, – y_3 = 3,423 – 3,235 = 0,188;

$x'_3 - y'_3 = 3{,}424 - 3{,}234 = 0{,}190$

$0{,}1 < Z < 0{,}1$

$n = 4\ x_4 - y_4 = 3{,}4234 - 3{,}2346 = 0{,}1888;$

$x'_4 - y'_4 = 3{,}4235 - 3{,}2345 = 0{,}1890;$

$0{,}18 < Z < 0{,}18$

$n = 5\ x_5 - y_5 = 3{,}42342 - 3{,}23452 = 0{,}18890;$

$x'_5 - y'_5 = 3{,}4243 - 3{,}23451 = 0{,}18892;$

$0{,}188 < Z < 0{,}188$

Demak, Z = 0,188.

Ta’rif. x va y haqiqiy sonlarning x:y bo‘linmasi deb, shunday Z haqiqiy soniga aytiladiki, u $x_n{:}y'_n < Z < x'_n{:}\ y_n$ shartli qanoatlantiradi.

Misol: x=1,53247. . . ; y = 2,03725 . . . bo‘linmaning qiymatini 0,001 gacha aniq likda toping.

Yechish:

n = 2 $x_2 : y'_2$ = 1,53:2,04 = 0,750

$x_2',{:}y_2$= 1,54:2,03 = 0,758620 . . .

0,75 < Z < 0,758620 . . .

n = 3 $x_3{:}y'_3$ = 1,532:2,038 = 0,7517173 . . .

$x'_3 : y_3 = 1{,}533 : 2{,}037 = 0{,}757138\ldots$

0,7517173. . . < Z < 0,757138 . . .

n = 4 $x_4{:}y'_4$ = 1,5324:2,0373 = 0,75222 . . .

$x'_4 : y_4 = 1{,}5325 : 2{,}0372 = 0{,}752258\ldots$

0,75222. . . < Z < 0,752258 . . .

Demak, Z ≈ 0,752.

Savollar

1. Haqiqiy sonlarning yig‘indisi qanday topiladi? Yig‘indisining Qanday xossalari bor?
2. Haqiqiy sonlar ko‘paytmasi ta’rifini ayting. Ko‘paytma xossalarini ayting va asoslang.
3. Haqiqiy sonlar ayirmasi qanday topiladi?
4. Haqiqiy sonlar bo‘linmasini topish qoidasini ayting.

Misollar

1 – misol. 3,678624. . . va 0,786422 . . . sonlarning yig‘indisini 0,001 gacha aniq likda toping.

Yechish.

$n=0 \qquad x_0=3 \qquad y_0=0 \qquad 3+0<z<4+1; \qquad 3<z<5$

$x_0'=4 \qquad y_0'=1$

$x_1=3{,}6 \qquad y_1'=0{,}8 \qquad\qquad ta'rifga\ ko`ra\ x_n+y_n<z<x_n'+y_n'$

2) $n=1 \quad y'=0{,}7 \qquad x_1'=3{,}7$

$3{,}6+0{,}7<z<0{,}8+3{,}7$

$4{,}3<z<4{,}5$

$x_2=3{,}67 \qquad x_2'=3{,}68$

3) $n=2 \quad y_2=0{,}78 \qquad y_2'=0{,}79$

$3{,}67+0{,}78<z<3{,}68+0{,}79$

$4{,}45<z<4{,}47$

$x_3=3{,}678; \qquad x_3'=3{,}679$

4) $n=3 \quad y_3=0{,}786 \qquad y_3'=0{,}787$

$3{,}678+0{,}786<z<3{,}679+0{,}787$

$4{,}464<z<4{,}466$

2 – misol. x=1,42303. . . va u=1,63424 . . . bo‘lsa, ko‘paytmaning to‘rtta o‘nli ishorasi topilsin.

Yechish. Ta’rifga ko‘ra

$x_n\cdot y_n<z<x_n'\cdot y_n'$

$n=4 \qquad x_n\cdot y_n=1{,}4230\cdot 1{,}6342=2{,}3254666$

1) $x_n'\cdot y_n'=1{,}4231\cdot 1{,}6343=2{,}3257723$

$2{,}325<z<2{,}325$

$n=5 \qquad x_5\cdot y_5=1{,}42305\cdot 1{,}63424=2{,}3256052$

2) $x_5'\cdot y_5'=1{,}42306\cdot 1{,}63425=2{,}3256358$

$2{,}3256<z<2{,}3256$

$Demak \quad z=2{,}3256$

3 – misol. x=4,432412. . . va u=3,324539 . . . bo‘lsa, ayirmaning birinchi uchta o‘nli ishorasini toping.

Yechish. Ta’rifga ko‘ra

$$x_n - y'_n < z < x'_n - y_n$$

$n = 3 \qquad x_1 - y'_1 = 4{,}432 - 3{,}325 = 1{,}107$

$x'_1 - y_1 = 4{,}433 - 3{,}324 = 1{,}109$

$$1{,}107 < z < 1{,}109$$

$$1{,}1 < z < 1{,}1$$

$n = 4 \qquad x_4 - y'_4 = 4{,}4324 - 3{,}3246 = 1{,}1078$

$x'_4 - y'_4 = 4{,}4325 - 3{,}3245 = 1{,}1080$

$$1{,}10 < z < 1{,}10$$

$n = 5 \qquad x_5 - y'_5 = 4{,}43241 - 3{,}32454 = 1{,}10787$

$x'_5 - y_5 = 4{,}43242 - 3{,}32453 = 1{,}10789$

$1{,}107 < z < 1{,}107 \qquad\qquad Demak \; z = 1{,}107.$

4 – misol. *x*=4,532. . . va *u*=2,147 . . . bo‘lsa, bo‘linmani 3 ta o‘nli ishorasi topilsin.

Yechish. Ta’rifga ko‘ra

$$x_n : y_n < z < x'_n : y'_n$$

$n = 2 \qquad x_2 : y'_2 = 4{,}53 : 2{,}14 = 2{,}1069767 \qquad 2{,}1168224$

$x'_2 : y_2 = 4{,}54 : 2{,}15 = 2{,}1214953 \qquad 2{,}1116279$

$$2{,}11 < z < 2{,}11$$

$n = 3 \qquad x_3 : y_3 = 4{,}532 : 2{,}147 = 2{,}1108523$

$x'_3 : y'_3 = 4{,}533 : 2{,}148 = 2{,}1103351$

$2{,}110 < z < 2{,}110 \qquad\qquad$ Demak $z = 2{,}110.$

Mustaqil yechish uchun misollar.

I. Berilgan sonlarning yig‘indisi va ayirmasini 0,001 gacha aniqlikda toping?

1) $x = 4{,}234561....$ *va* $y = 2{,}132137. ....$
2) $x = 2{,}174135....$ *va* $y = 1{,}235447.......$
3) $x = 12{,}325147...$ *va* $y = 2{,}428945....$
4) $x = 5{,}254132...$ *va* $y = 2{,}432465....$
5) $x = 2{,}345603....$ *va* $y = 0{,}784047....$
6) $x = 3{,}354324....$ *va* $y = 1{,}213548....$
7) $x = 3{,}685427...$ *va* $y = 2{,}475134....$
8) $x = 7{,}546587....$ *va* $y = 5{,}324165....$
9) $x = 5{,}244563....$ *va* $y = 3{,}342548....$
10) $x = 4{,}182115...$ *va* $y = 1{,}257139.....$

II. Berilgan sonlarning ko‘paytmasini va bo‘linmasini 0,001 gacha aniq likda toping.

1) $x = 1{,}34324....$ va $y = 1{,}36424....$
2) $x = 2{,}46542....$ va $y = 0{,}25643......$
3) $x = 3{,}12431...$ va $y = 1{,}42114....$
4) $x = 2{,}84351...$ va $y = 1{,}12328....$
5) $x = 4{,}17823....$ va $y = 4{,}03241....$
6) $x = 2{,}84359....$ va $y = 1{,}12524....$
7) $x = 5{,}13425...$ va $y = 2{,}34267....$
8) $x = 3{,}25467....$ va $y = 0{,}83544....$
9) $x = 2{,}15374....$ va $y = 1{,}03435....$
10) $x = 6{,}15234...$ va $y = 2{,}37568.....$

1.3. Sonlarni yaxlitlash va taqribiy sonlar ustida amallar.

1. Taqribiy sonlar:
a) texnik o‘lchash natijasida;
b) jadvallardan (kvadratlar, logarifmlar,...) foydalanishda;
v) ildizlar chiqarishda;
g) sonlarni yaxlitlashda;
va hokazo kabi hollarda hosil bo‘ladi.
2. Agar sonimizda raqamlar keragidan ortiq bo‘lsa, u holda son yaxlitlanadi.
Masalan. 475427≈475000 (kami bilan) 475827≈476000 (ortig‘i bilan)
Ba’zi hollarda kami bilan ham, ortig‘i bilan ham yaxlitlash mumkin.
3,l<π<3,2
3,14<π<3,15
3,141<π<3,142
3. Agar x soni a_1 va a_2 qiymatlari orasidagi qiymat bo‘lsa, ya’ni $a_1<x<a_2$, y holda
a_1 - *quyi chegara - q.ch.*
a_2 - *yuqori chegara - yu.ch.*
a_1=q.ch. x, a_2=yu.ch. x
q.ch.x<x<yu.ch.x
Bulardan:
q.ch.($x+y$)= q.ch.x+ q.ch.y q.ch.(x-y)= q.ch.x- yu.ch.y
yu.ch.($x+y$)= yu.ch.x+ yu.ch.y yu.ch.(x-y)= yu.ch.x+ q.ch.y
q.ch.($x\cdot y$)= q.ch.$x\cdot$ q.ch.y
yu.ch.($x\cdot y$)= yu.ch.$x\cdot$ yu.ch.y

$$\text{q.ch.}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{q.ch.x}{yu.ch.y}$$

$$\text{yu.ch.}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{yu.ch.x}{q.ch.y}$$

Chegaralar usuli bilan hisoblash $x \approx \frac{q.ch.x + yu.ch.x}{2}$ formulasi bilan amalga oshiriladi.

4. 1) Agar *a* soni x -ning taqribiy qiymati bo‘lsa, u holda $|x - a| = \Delta a$ absolyut xato lik deyiladi.

$x - a = \pm\Delta a \Rightarrow x = a \pm \Delta a$.

2) $\frac{\Delta a}{|a|}$ – nisbiy xatolik deyiladi va *8(a)* = - kabi belgilanadi,

$$\delta(a) = \left(\frac{\Delta a}{|a|} * 100\right)\%, \ \Delta a = |x - a|$$

5. Agar absolyut xatolik oxirgi razryad birligini yarmidan ortiq bo‘lmasa, u holda taqribiy sonning hamma raqamlari ishonchli.

Masalan, 1)
$$\begin{array}{ll} a_1 = 2{,}5; & \Delta a_1 = 0{,}5 \\ a_2 = 138; & \Delta a_2 = 0{,}5 \\ a_3 = 13{,}4; & \Delta a_3 = 0{,}05 \\ a_4 = 0{,}078; & \Delta a_4 = 0{,}005 \end{array}$$

2) a=2,537; $\Delta a = 0{,}005$ bunda birinchi 2 ta raqam ishonchli, qolganlari shubhali.

6. Sonning oxiri va boshidagi noldan tashqari barcha raqamlari qiymatli raqam deyiladi. Nol son yozuvi oxirida qiymatli hisoblanadi, agar u ishonchli bo‘lsa.

250 - hammasi qiymatli.

500$\approx$536, bunda nollar qiymatli emas.

7. a) <u>Yig‘indining xatosi.</u>

$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b.$ $\quad \delta(a+b) \le \delta(a),$ $\quad$ agar $\delta(a) \ge \delta(b),$ bo‘lsa.

b) $\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$

$$\delta(a-b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{a-b}$$

v) $\Delta(a*b) = a\Delta b + b\Delta a$

$$\delta(a*b) = \delta(b) + \delta(a)$$

g) $\Delta(\frac{a}{b}) = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2}$

$$\delta(\frac{a}{b}) = \delta(a) + \delta(b)$$

Savollar

1. Taqribiy son haqida tushuncha bering.
2. Sonlarni yaxlitlash qoidalarini ayting.
3. Taqribiy sonning quyi va yuqori chegarasi haqida ma’lumot bering.
4. Absolyut va nisbiy xato ta’riflarini ayting, ularni hisoblash yo‘lini tushuntiring.
5. Absolyut va nisbiy xatoning taqribiy hisobdagi ahamiyati qanday?
6. Taqribiy son yozuvidagi ishonchli va qiymatli raqamlar qanday aniqlanadi?

Misollar

1 – misol. 8,35327 sonni 0,0001; 0,001 va 0,01 gacha aniqlikda yaxlitlang.
Yechish. 8,3532; 8,353; 8,35; hosil bo‘ladi.
2 – misol. x=3,44159... sonni 0,001 gacha aniqlikda kami va ortig‘i bilan yaxlitlang.
Yechish. 3,44159 ≈ 3,441 (kami bilan)
3,44159 ≈ 3,442 (ortig‘i bilan)
demak, 3,441<x<3,442
3 – misol. x=7,172354... sonni 0,0001 gacha aniqlikda quyi va yuqori chegaralarini toping.
Yechish. q. ch. $x \approx 7{,}1723$
yu. ch. $x \approx 7{,}1724$
7,1723<x<7,1724
4 – misol. x=5,7324... u=3,1125... q. ch. *(x – u)* ni 0,001 gacha aniqlikda toping.
Yechish. Ta’rifga ko‘ra ***q.ch.(x – u)=q.ch.x – q.ch.u***
q.ch. $x \approx 5{,}732$
yu.ch. $u \approx 3{,}113$
q.ch. *(x – u)*= 2,619

Yechish: Ta’rifga ko‘ra ayirmaning nisbiy xatosi $\delta(x-y) = \dfrac{\Delta(x+y)}{x-y}$ ga teng.

$$\Delta(a+b) = 0{,}002 + 0{,}003 = 0{,}005$$

$$a - в = 17{,}23 - 11{,}38 = 5.85$$

$$\delta(a - в) = \frac{0{,}005}{5{,}85} = 0{,}00085$$

8 – misol. $\begin{matrix} x \approx 55{,}32 \pm 0{,}02 \\ y \approx 27{,}41 \pm 0{,}001 \end{matrix}$ Ko‘paytmaning nisbiy xatosini toping.

Yechish:

$$\Delta(xy) = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y = 27{,}41 \cdot 0{,}02 + 55{,}32 \cdot 0{,}01 = 0{,}5482 + 0{,}5532 = 1{,}1014$$

$$x \cdot y = 55{,}32 \cdot 27{,}41 = 1516{,}3212$$

yoki yaxlitlaganda $xy = 1516$ Demak, $xy \approx 1516 \pm 1{,}5$ $\quad (1{,}5 > 1{,}1014 - 0{,}3212)$

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = \frac{0{,}02}{55{,}32} + \frac{0{,}01}{27{,}41} = 0{,}0003615 + 0{,}0003648 = 0{,}0007296 \approx 0{,}001$$

Mustaqil yechish uchun misollar va masalalar

1. Quyidagi sonlarni 0,0001; 0,001; 0,01 gacha aniqlikda yaxlitlang.

a) 3,174564 ... v) 21,174536... d) 0,34768…
b) 17,343417… g) 13,456879… e) 5,238718…

2. x=12,3247… va y=7,4348 q.ch *(x-u)* va yu. ch. *(x-u)* ni 0,001 gacha aniqlikda toping.
3. x=7,1723 va y=5,7324 q.ch *(x+u)* va yu. ch. *(x+u)* ni 0,001 gacha aniqlikda toping.
4. Yig‘indining xatosini toping.

$a)\ x \approx 3{,}532 \pm 0{,}001$ $\quad$ $d)\ x \approx 12{,}637 \pm 0{,}002$

$\quad y \approx 7{,}221 \pm 0{,}002$ $\quad$ $y \approx 15{,}285 \pm 0{,}001$

$b)\ x \approx 0{,}758 \pm 0{,}001$ $\quad$ $e)\ x \approx 24{,}148 \pm 0{,}001$

$\quad y \approx 1{,}384 \pm 0{,}003$ $\quad$ $y \approx 54{,}367 \pm 0{,}002$

5. Ayirmaning xatosini toping.

$a)\ x \approx 27{,}23 \pm 0{,}002 \quad ва \quad y \approx 21{,}38 \pm 0{,}003$

$б)\ x \approx 42{,}35 \pm 0{,}002 \quad ва \quad y \approx 15{,}83 \pm 0{,}003$

$в)\ x \approx 25{,}63 \pm 0{,}001 \quad ва \quad y \approx 17{,}25 \pm 0{,}002$

$г)\ x \approx 17{,}35 \pm 0{,}001 \quad ва \quad y \approx 11{,}83 \pm 0{,}002$

6. Ko‘paytmaning xatosini toping.

$a)\ x \approx 45{,}23 \pm 0{,}02$ $\quad$ $d)\ x \approx 3{,}873 \pm 0{,}005$

$\quad y \approx 17{,}14 \pm 0{,}01$ $\quad$ $y \approx 3{,}871 \pm 0{,}005$

$b)\ x \approx 3{,}34 \pm 0{,}01$ $\quad$ $e)\ x \approx 2{,}178 \pm 0{,}02$

$\quad y \approx 27{,}25 \pm 0{,}02$ $\quad$ $y \approx 3{,}718 \pm 0{,}01$

7. Bo‘linmaning xatosini toping.

$a)\ x \approx 5{,}14 \pm 0{,}005$ $\quad$ $d)\ x \approx 2{,}25 \pm 0{,}005$

$\quad y \approx 2{,}31 \pm 0{,}01$ $\quad$ $y \approx 0{,}15 \pm 0{,}005$

$b)\ x \approx 2{,}43 \pm 0{,}01$ $\quad$ $e)\ x \approx 14{,}75 \pm 0{,}005$

$\quad y \approx 4{,}54 \pm 0{,}004$ $\quad$ $y \approx 7{,}45 \pm 0{,}01$

8. Darajaning xatosini toping.

$a)\ x \approx 103{,}5 \quad \Delta x = 0{,}005$ $\quad$ $f)\ x \approx 8{,}35 \quad \Delta x = 2{,}005$

$b)\ x \approx 85{,}3 \quad \Delta x = 0{,}003$ $\quad$ $g)\ x \approx 105{,}3 \quad \Delta x = 0{,}008$

$d)\ x \approx 75{,}3 \quad \Delta x = 0{,}002$ $\quad$ $h)\ x \approx 96{,}8 \quad \Delta x = 0{,}002$

$e)\ x \approx 85{,}9 \quad \Delta x = 0{,}001$ $\quad$ $i)\ x \approx 35{,}7 \quad \Delta x = 0{,}002$

9. Ildizning nisbiy va absolyut xatosini toping.

$a)\ a = \sqrt[3]{2{,}718} \quad \Delta a = 0{,}0005$ $\quad$ $f)\ a = \sqrt[3]{8{,}85} \quad \Delta a = 0{,}0003$

$b)\ a = \sqrt{1{,}187} \quad \Delta a = 0{,}0005$ $\quad$ $g)\ a = \sqrt{3{,}83} \quad \Delta a = 0{,}0004$

$d)\ a = \sqrt{3{,}35} \quad \Delta a = 0{,}0004$ $\quad$ $h)\ a = \sqrt{9{,}35} \quad \Delta a = 0{,}0005$

$e)\ a = \sqrt[3]{27{,}42} \quad \Delta a = 0{,}0005$ $\quad$ $i)\ a = \sqrt{4{,}45} \quad \Delta a = 0{,}0004$

V BOB. Algebra elementlari

1§. Ifodalar

1.1.Sonli va o‘zgaruvchili ifodalar

Quyidagi 4-sinf o‘quvchilari uchun berilgan masalani ko‘raylik: Kitob javonining 4 ta tokchasida 26 tadan, 3 ta tokchasida esa 30 tadan kitob taxlangan. Kitob javonida hammasi bo‘lib nechta kitob taxlangan?” Bu masalani yechish uchun avvalo tokchalar sonini kitoblar soniga ko‘paytiramiz: 4·26 va 3·30. Keyin esa ularni qo‘shamiz: (4·26)+(3·30). Masalani yechish uchun biz sonlar va amallar yordamida *sonli ifoda* tuzib oldik. Bu ifodani bajarish natijasida biz masalani yechimini topamiz.

1-tarif. Har qanday sonlar va amallar (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish,bo‘lish, darajaga ko‘tarish, ildiz chiqarish)dan tuzilgan ifoda sonli ifoda deyiladi.

Sonli ifodani lotin alifbosining katta harflari bilan belgilash mumkin, masalan, A=(4·26)+(3·30).

Sonli ifodani yechish uning son qiymatini topish demakdir. Topilgan qiymat ham yana sonli ifoda bo‘ladi. Demak har qanday sonni ham sonli ifoda deyish mumkin.

Sonli ifodani yechishda avvalo qavs ichidagi ifodalar bajariladi. Bunda avval ko‘paytirish va bo‘lish chapdan o‘ngga qarab bajariladi, keyin qo‘shish va ayirish amali bajariladi. So‘ngra shu tartibda qavsdan tashqaridagi amallar bajariladi.

Sonli ifodalar tenglik yoki tengsizlik ham bo‘lishi mumkin. Tartib munosabatli ifodalar sonli tengsizliklar deyiladi.

Ba`zan masala shartida son o‘rniga harflar berilgan bo‘lishi mumkin. Masalan, trapetsiyaning asoslari *a* va *b* ga teng. Uning o‘rta chizig‘ini toping. Bu masalani yechish uchun quyidagicha ifoda tuzamiz: $\frac{a+b}{2}$. Biz o‘zgaruvchi qatnashgan ifoda hosil qildik. Bun yerda *a* va *b* o‘zgaruvchilardir.

2-ta`rif. O‘zgaruvchi qatnashgan ifoda o‘zgaruvchili ifoda deyiladi. O‘zgaruvchili ifodani A(x), B(x) kabi belgilash mumkin, masalan A(x)=B(x). O‘zgaruvchili ifodalarga formulalar, tenglamalar misol bo‘la oladi. O‘zgaruvchili ifodalar ustida amallar bajarish tartibi ham sonli ifodalardagi kabi bo‘ladi.

Sonli va o‘zgaruvchili ifodalar algebraik ifodalar ham deyiladi.

Algebraik ifodada harfiy ko‘paytivchilar oldida turgan son koeffisient deyiladi. Masalan: $5x^2+6x+c$ ifodada 5 va 6 sonlari tenglamaning koeffisientlari deyiladi. Umuman olganda koeffisientlar ham harflardan iborat bo‘lishi mumkin.

Tenglikning va tengsizlikning o‘ng va chap tomoniga bir vaqtda ixtiyoriy musbat ifodani qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish bilan munosabat o‘zgarmaydi.

Tengsizlikning ikkala qismini manfiy songa ko‘paytirilsa, tengsizlik teskari tomonga o‘zgaradi, ya`ni, agar $a>b$ bo‘lsa, uni -1 ga ko‘paytirganimizda $–a<-b$ bo‘ladi. Haqiqatdan, $a>b=>a-b>0$ va b-a<0 => -a-b<0 bo‘ladi.

2§. Tenglamalar va tengsizliklar

2.1. Bir o‘zgaruvchili tenglamalar

Noma`lum qatnashgan tenglik tenglama deyiladi. Masalan quyidagi

$6+x=17$ $\qquad$ $13x+7=18x-8$ $\qquad$ $3ax-5a^2=a^2+2x$

ifodalar tenglamalardir.

Tenglamani yechish noma`lumni o‘rniga tenglikni qanoatlantiruvchi son qiymatlarini topish yoki bunday sonlar mavjud emasligini aniqlash demakdir. No‘malumning tenglikni qanoatlantiruvchi qiymatlari tenglamani yechimi yoki ildizlari, deyiladi. Yuqoridagi tenglamalar bir o‘zgaruvchili tenglamalar deyiladi. Ya`ni tenglamada faqat bitta *x* noma`lum bor. Bir o‘zgaruvcili tenglamalar bitta, bir nechta, cheksiz ko‘p ildizlar to‘plamiga yoki umuman ildizga ega bo‘lmasligi mumkin. Masalan

1) $6+x=17$. Bu tenglama faqat $x=11$ yechimga ega.
2) $x^2+5x=-4$ tenglama 2 ta (-4;-1) yechimga ega.
3) $5x-x^2=6x+1-(x+1)^2$ tenglama esa cheksiz ko‘p yechimga ega.
4) $x^2+36x-7=(x+6)^2+24x$ tenglama yechimga ega emas.

Yuqoridagi mulohazalarni umumlashtirsak quyidagi ta`rifga ega bo‘lamiz.

*1-ta`rif.* Bir noma`lumli tenglamalar deb $A(x)=B(x)$ ko‘rinishidagi tenglamalarga aytiladi.

Deylik bizga $3x^2-8x+4=0$ tenglama berilgan bo‘lib, bunda $x \in N$ bo‘lsin. U holda tenglamaning ildizi $x=2$ bo‘ladi. Lekin, $x=\frac{2}{3}$ ham tenglamani qanoatlantirsada, uning yechimi bo‘la olmaydi. Chunki, shartga ko‘ra $x \in N$, esa natural son emas. Shuningdek, quyidagi $\frac{x^2}{4x^2+3}=\frac{2x+1}{4x^2+3}$ (1) tenglamada $x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ soni ildizlar to‘plamiga tegishli bo‘la olmaydi. Demak, tenglama yechganda ildizlarini berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi to‘plamdan izlash zarur ekan. Bu to‘plam tenglama ildizlarini izlash joiz bo‘lgan to‘plam ekan. Bu to‘plamni *tenglamaning aniqlanish sohasi* deyiladi.tenglamaning aniqlanish sohasini to‘plam deb olib, lotin alfavitining bosh harflari bilan belgilanadi, masalan, X, Y, Z … kabi. Tenglamani ildizlari shu sohaga tegishli bo‘lganligidan, tenglamaning ildizlar to‘plami uning aniqlanish sohasiga qism to‘plam bo‘ladi. Yuqoridagi (1) tenglamaning aniqlanish sohasi $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{3}{4}}\right[\cup\left]-\sqrt{\frac{3}{4}};\sqrt{\frac{3}{4}}\right[\cup\left]\sqrt{\frac{3}{4}};+\infty\right[$ bo‘ladi.

Bir tenglamaning ildizlar to‘plami ikkinchi tenglama uchun ham ildizlar to‘plami bo‘lsa, yoki, aksincha, ikkinchi tenglamani ildizlar to‘plami birinchi tenglamani ham qanoatlantirsa, bu tenglamalar *teng kuchli (ekvivalent) tenglamalar* deyiladi. Masalan $x^2+5x=-4$ va $(x-+1)(x+4)=0$ tenglamalar teng kuchlidir. Barcha yechimga ega bo‘lmagan tenglamalar ham teng kuchli tenglamalar deyiladi. Lekin , $x^2+5x=-4$ va $x+4=0$. Bu ikki tenglama teng kuchli emas, chunki, ikkinchi tenglamaning ildizlar to‘plamida -1 elementi yo‘q. Shuningdek, $(x+6)(x-1)=0$ va $\frac{x^2+5x-6}{x+6}$ tenglamalar ham teng kuchli emas.(asoslang).

Tenglamalarni yechishni bir qancha usullari mavjud. Tenglamani yechishda avvalo kasr bo‘lsa uni umumiy mahrajga keltiriladi, qavslar bo‘lsa ochiladi, o‘xshash hadlar qisqartiriladi, ma`lumlar bir tomonga, noma`lumlar ikkinchi tomonga o‘tkaziladi. Shu kabi shakl almashtirishlar asosida soddalashtirilgan tenglama dastlabki tenglamaga teng kuchli bo‘ladi.

Tenglamalarning xossalari.

1°. Tenglamaning har ikki tomoniga bir xil ifodani qo‘shishdan hosil bo‘lgan ifoda dastlabki tenglamaga teng kuchli bo‘ladi.

2°. Tenglamaning har ikki tomonini bir xil musbat ifodaga ko‘paytirish va bo‘lishdan hosil bo‘lgan tenglama dastlab berilgan tenglamaga teng kuchli bo‘ladi. Bu erda bo‘linayotgan ifoda tenglamaning aniqlanish sohasida har doim qiymatga ega bo‘lishi kerak.

3°. Tenglamani istalgan hadini bir tomondan tenglikning ikkinchi tomoniga teskari ishora bilan o‘tkazish mumkin.

Birinchi darajali bir noma`lumli tenglamalar chiziqli tenglamalar deyiladi. Bunga sabab, ularning grafigi koordinatalar sistemasida chiziqni ifodalaydi. Chiziqli tenglamalarning umumiy ko‘rinishi ax+b=0 ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda *a* va *b* koeffisient, *x* o‘zgaruvchidir.

Noma`lumning kvadrati qatnashgan tenglamalar kvadrat tenglamalar deyiladi va umumiy ko‘rinishda $ax^2+bx+c=0$ ko‘rinishida yoziladi. Bu erda *a* va *b* koeffisient, *x* o‘zgaruvchidir.

2.2. Bir o‘zgaruvchili tengsizliklar

*1-tarif. Ushbu $A(x)>B(x)$, $A(x)\geq B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\leq B(x)$ ko‘rinishidagi ifodalar bir noma`lumli (o‘zgaruvchili) tengsizliklar deyiladi.* Bu erda A(x) va B(x) - bir noma`lumli ifodalar, x noma`lum. Bu ikki ifodning biri son bo‘lishi ham mumkin. Masalan, $3x^2+7x+5\geq 9$, $3x\leq 6x-13$, $\sqrt{x^2-1}<5x$ algebraik tengsizliklardir. *x* noma`lumning tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlari *tengsizlikni yechimi* deyiladi. Masalan, $3x\leq 6x-13$ tengsizlikni yechimi $x\in\left(-\frac{13}{3};+\infty\right)$ sohadagi barcha qiymatlar bo‘ladi.

Bir o‘zgaruvchili tengsizliklarning xossalari.

1°. Bir o‘zgaruvchili tengsizlikning har ikki tomoniga aniqlanish sohasi shu tengsizlikniki kabi bo‘lgan va qiymatga ega bo‘lgan musbat ifoda qo‘shilsa berilgan tengsizlikka teng kuchli tengsizlik hosil bo‘ladi. Ya’ni aniqlanish sohasi X bo‘lgan $A(x)>B(x)$ (1) tengsizlik berilgan bo‘lib, m(x) son yoki X aniqlanish sohasiga tegishli ifoda bo‘lsin. U holda $A(x)+m(x)>B(x)+m(x)$ (2) tengsizlik (1) tengsizlikka teng kuchli bo‘ladi.

2°. Agar tengsizlikning har ikkala tomoni musbat songa, yoki noma`lumning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarida musbat qiymat qabul qiluvchi ifodaga ko‘paytirilsa, berilgan tengsizlikka teng kuchli tengsizlik hosil bo‘ladi. Ya`ni,

$A(x)>B(x)$ (1) berilgan va, $x\in X$ larda m(x)>0 bo‘sa

$A(x)\cdot m(x)>B(x)\cdot m(x)$ (3) tenglama (1) ga teng kuchli bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik $x=a$ (1) ning yechimi bo‘lsin. U holda A(a)>B(a) sonli tengsizlik va $m(a)>0$ songa ega bo‘lamiz. Sonli tengsizlik xossasiga ko‘ra $A(a)\cdot m(a)>B(a)\cdot m(a)$ bo‘ladi. Bu esa $x=a$ (3) tenglamani yechimi bo‘lishini ko‘rsatadi. Endi faraz qilaylik, $x=b$ soni (3) tengsizlikni yechimi bo‘lsin. U holda $A(b)\cdot m(b)>B(b)\cdot m(b)$ sonli tengsizlikka ega bo‘lamiz. $m(b)>0$ bo‘lganligidan, oxirgi tengsizlikning har ikki tomonini $m(b)$ ga bo‘lib, $A(b)>B(b)$ ni hosil qilamiz.bu esa $x=b$ (1) tenglamani ham yechimi bo‘lishini ko‘rsatadi. Demak (1) va (3) tenglamalar teng kuchli bo‘ladi.

3°. Agar (1) tengsizlikni har ikkala qismini manfiy songa yoki barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarida manfiy qiymatlar qabul qiluvchi ifodaga ko‘paytirilsa berilgan tengsizlikka qarama-qarshi ma`nodagi tengsizlik hosil bo‘ladi. Ya`ni $A(x)>B(x)$ (1) va $x\in X$ larda m(x)<0 bo‘lsin. U holda $A(x)\cdot m(x)<B(x)\cdot m(x)$ *bo‘ladi.* Isboti yuqoridagi kabi.

4°. a) $\frac{A(x)}{B(x)}>0$ tengsizlik $B(x)\neq 0$ *bo‘lganda* $A(x)B(x)>0$ tengsizlikka teng kuchli bo‘ladi.

b) $\frac{A(x)}{B(x)}<0$ tengsizlik $B(x)\neq 0$ *bo‘lganda* $A(x)B(x)<0$ tengsizlikka teng kuchli bo‘ladi.

Isbot. Xossani a) qismini isbotlash yetarli. Shartdagi ni chap har ikki tomonini B(x) ifodaga ko‘paytiramiz. Bizda $\frac{A(x)B(x)}{[B(x)]^2}$ >0 (4) hosil bo‘ladi. $B(x)\neq 0$ (4) ni $[B(x)]^2$ga bo‘lamiz. U holda bizda $A(x)B(x)>0$ hosil bo‘ldi. Bu esa $\frac{A(x)}{B(x)}>0$ tengsizlik $B(x)\neq 0$ *bo‘lganda* $A(x)B(x)>0$ ga teng kuchli ekanini isbotlaydi.

Savollar

1. Bir o‘zgaruvchili tenglamaga ta`rif bering. Nima uchun bir o‘zgaruvchili deyiladi?
2. Tenglamani aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi? Ildizlar to‘plami debchi?
3. Teng kuchli tenglama deb nimaga aytiladi? tenglamalar qachon teng kuchli (ekvivalent)
   bo‘ladi?
4. Bir o‘zgaruvchili tengsizlik nima?
5. Bir o‘zgaruvchili tengsizlik va tenglama xossalaridagi farqni aniqlang.

Misollar

1-misol. Agar $x\in N_0$ bo‘lsa, $\frac{x}{x+2}+\sqrt{6+x}=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-1}$ tenglamaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: tenglamani chap A(x)= $\frac{x}{x+2}+\sqrt{6+x}$ qismini aniqlanish sohasini topamiz.

$x>0$, $x+2>0 \Rightarrow x>-2$, $6+x\geq 0 \Rightarrow x\geq -6$, demak, A(x) ning aniqlanish sohasi F=]-2,+∞[bo‘ladi.

$B(x)=\frac{x}{x+2}+\sqrt{6+x}=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-1}$ ning aniqlanish sohasini topamiz.

$x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$, $x-1>0$, $\Rightarrow x>1$, bundan B(x) ning aniqlanish sohasi G=(2;+∞[bo‘ladi.

Berilgan tengsizlikning aniqlanish sohasi $F\cap G$ bo‘ladi, ya’ni]-2,+∞[$\cap$ (2;+∞[bo‘ladi.

2- misol. $10x^2+57x+47=0$ va $5x+6$ tenglamalar teng kuchli, chunki ularning ildizlar to‘plami ustma - ust tushadi: $x_1=-1$, $x_2=-4{,}7$

3-misol. $P(x) = (3x+1)(3x-1)(2x+5) = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: teoremaga ko‘ra $3x + 1 = 0$, $3x - 1 = 0$, $2x + 5 = 0$ tenglamalarni yechamiz.

$x_1=-\frac{1}{3}, x_2=\frac{1}{3}, x_3=-\frac{5}{2}$ 1- teoremaga ko‘ra $\left\{-\frac{5}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$ to‘plam P(x) ning yechimi bo‘ladi.

4-misol. $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ tenglamani yeching. Bu tenglama bikvadrat tenglamaning xususiy holi bo‘lib, $x^2 = y$ almashtirish bajarib yechiladi:

$y^2 -9y + 20 = 0$

bu tenglamani yechib topamiz: $\{-2; 2; -\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

5-misol. $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 =0$

Tenglikni chap tomonida 4- darajali ko‘phad turibdi. Uni kvadrat kvadrat uchhadlar shakliga keltirishga harakat qilamiz:

$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + px + q)(x^2 + bx + c)$

mos koeffisientlarni tenglashtiramiz:

$$\begin{cases} p+b=-4 \\ c+q+qb=-10 \\ pc+qb=37 \\ qc=-14 \end{cases}$$

Sistemani biror butun qiymatli yechimini topamiz. qc= -14 dan q va c lar 14 ning bo‘luvchilari ekanini ko‘ramiz. Demak, ular uchun ±1, $\pm 2, \pm 7, \pm 14$ larni sinab ko‘ramiz. Agar q = 1 da c = -14 bo‘lganda $\begin{cases} pb=3 \\ -14p+b=37 \end{cases}$ bo‘ladi. Bu sistema butun yechimga ega emas.

Q = 2 va c = -7 da b = 1, p = -5 bo‘ladi. Shunday qilib,

$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 -5x +2)(x^2 + x -7)$

$x^2 -5x +2 =0$ va $x^2 + x -7 = 0$ tenglamalarni yechib, berilgan tenglamani ildizini topamiz.

6-misol. $\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}$

x = 0 tenglama yechimi emas. Quyidagi tenglama bu tenglamaga teng kuchli bo‘ladi:

$$\frac{4}{x+\frac{3}{x}+1}+\frac{5}{x+\frac{3}{x}-5}=-\frac{3}{2}$$; y = x+$\frac{3}{x}$ almashtirib olsak, $\frac{4}{y+1}+\frac{5}{y-5}=-\frac{3}{2}$

hosil bo‘ladi. Buni yechimi y_1 = -5 va y_2 = 3 hosil bo‘ladi. Bundan $x+\frac{3}{x}=-5,, x+\frac{3}{x}=3$ tenglamalarni echib, berilgan tenglamani ildizini topamiz.

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}.$$

7-misol. 4x-8 ≤ 0 tengsizlik x ≤ 2 qiymatlarda bajariladi. Tengsizlikning yechimi: (-∞; 2]

8-misol. $x^{2\alpha}\geq 0$ (α Є Z) tengsizlik x ning barcha qiymatlarida bajariladi. Yechim butun sonlar o‘qidan iborat.

9-misol. $x^{2\alpha}<0$ (α Є Z) x ning hech bir qiymatida bajarilmaydi. Yechim X = Θ.

10-misol. 5x + 0,7 < 3x – 15,3 tengsizlikni yeching.

Ayniy almashtirishlar tengsizlikni 2x > -16 ko‘rinishga keltiradi. Bundan x > 8 va javob (-8; +∞).

11-misol. 2(x+4)) < 6x - 4(x-1) tengsizlikni yeching

Ayniy almashtirishlardan so‘ng (0 * x) < -4 hosil bo‘ladi. Bu tengsizlik yechimga ega emas.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Chiziqli tenglamalarni yeching.

a) 3x + 1 = a;
b) 5 + x = ax ;
d) $ax^2 - a^2 = 4 - 2x$;
e) ax – b = 1 + x;
f) $ax - b^2 = 7$;
g) $3 - a^2x = x - b$;

2.
a) $x = a^2x$;
b) $a + x = a^2x - 1$;
d) $x = b - a^2x$;
e) $a^2x = b - a\,x$

3 Tenglamani yeching.

a) 3x(x - 1) - 17 = x(1+3x) + 1;
b) $2x - (x+2)(x-2) = 5 - (x-1)^2$;
d) $\frac{3x+1}{2}=\frac{2x-3}{5}$;

e) $\frac{x-3}{6}+x=\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}$;

9.3. Tenglamani yechimlar to‘plamini tuzing.

a) $\frac{3-2x}{15}=\frac{x-2}{3}+\frac{x}{5}$;

b) $\frac{1-3x}{12}=\frac{5x-1}{3}-\frac{7x}{4}$;

d) $\frac{6x-5}{3}-\frac{11}{5}=\frac{4x+3}{5}-0{,}6$;

e) $\frac{8x+1}{2}-\frac{9x}{5}=\frac{6x-1}{5}+0{,}1$

4.

a) $\frac{5x-2}{3}=\frac{2x+3}{2}-\frac{x+2}{3}$;

b) 3(x + 8) = 4(7 - x);

d) (x + 3)(x - 6) = (x+2)(x+1) + 4;

e) (x - 3)(x - 4) =(x - 5)(x - 6) -7,5.

5. Kvadrat uchhadni to‘la uchhadga aylantiring.

a) $2x^2 + 4x - 3$; d) $x^2 - 6x + 8$;

b) $-5x^2 + 20x - 13$; e) x2 + (a+b)x + ab.

6. m nig qanday qiymatlarida berilgan tenglamalar R da teng kuchli bo‘ladi?

a) 2x + 3 = 12 va 2x + 3 = 12(3m-$\frac{1}{2}$) + 15;

b) 3x + 5 = 12 va (3x + 5)(3m - $\frac{1}{2}$) = 12;

d) 4 – 3x = 5 va -3x + 4 = 3m - 8 ;

e) 10x – mx = 1 va (10 - m)x = 0.

7. Tenglamani yechimlar to‘plamini tuzing.

a) $\frac{5x-2}{3}=\frac{2x+3}{2}-\frac{x+2}{3}$;

b) 3(x + 8) = 4(7 - x);

d) (x + 3)(x - 6) = (x+2)(x+1) + 4;

e) (x - 3)(x - 4) =(x - 5)(x - 6) -7,5.

8. Tengsizliklarni yeching.

a) 7x – 3(2x + 3)) > 2(x - 4);

b) $\frac{6-5x}{5}+\frac{3x-1}{2}>5-x;$

d) $\frac{x+1}{4}<2\frac{1}{2}-\frac{1-2x}{3};$

e) $\frac{7x}{4}<0{,}3(x+7)+2\frac{1}{5};$

f) $-x(x-1)-6\ )>5x-x^2;$i)

g) $\frac{2}{3-x}<0;$

h) $2-\frac{x-4}{3}\le 2x-\frac{7x-4}{3};$

i) $\frac{5x+3}{2}-1\ge 3x-\frac{x-7}{2}.$

9. Parametr qatnashgan chiziqli tengsizlikni yeching.
a) $(a^2+1)y\ >3;$
b) $(a-5)x\ )>2;$
d) $(2m+1)x\ )>2n-7;$
e) $(a-1)x\ )>5a+1;$

10. y ning qanday qiymatlarida:

a) $\frac{7-2y}{6}$ kasrning qiymati $\frac{3x-7}{12}$ kasrning mos qiymatlaridan katta bo‘ladi?
b) $\frac{4{,}5-2y}{5}$ kasrning qiymati $\frac{2-3y}{10}$ kasrning mos qiymatlaridan kichik bo‘ladi?
d) 5y-1 ikkihadning qiymati $\frac{3y-1}{4}$ kasrning mos qiymatlaridan katta bo‘ladi?
e) $\frac{5-2y}{12}$ kasrning qiymati 1-6y ikkihadning mos qiymatidan kichik bo‘ladi?

2.3.Ikki o‘zgaruvchili tenglama va tengsizliklar

Biz yoqorida ko‘rib o‘tgan tenglama va tengsizliklar bir o‘zgaruvchili tenglamalar edi. Quyidagi masalani qaraylik. “Ikki usta 24 ta stul yasadi. Buning uchun birinchi usta 2 kun, ikkinchi usta 3 kun ishladi. Ustalar har biri bir kunda qanchadan mahsulot yasagan?” Bu masalani yechish uchun quyidagicha ifoda tuzish mumkin: 2x+3y=24. Bu yerda noma`lumlar soni ikkita. Ya`ni, ikkala usta bir kunda teng mahsulot yasaganligi noma`lum. Agar masalada ustalar mahsulotlari soni bir kunda teng bo‘lganda, bir o‘zgaruvchili tenglama tuzib, yechish mumkin bo‘lar edi. Bu tenglama *ikki o‘zgaruvchili tenglama* deyiladi. Bu tenglamalar A(*x,y*) yoki *f(x,y)* ko‘rinishida belgilanadi.Ya`ni tenglamada noma`lumlar soni ikkita. Tenglamaning yechimi ham *(a,b)* sonlari sonlar juftliklari bo‘ladi. Masalan, masalaning yechimlaridan biri (3,6) juftligi bo‘ladi. (9,2), (6,4) va hokazo juftliklar ham

tenglama yechimi bo‘ladi. Stullar soni natural son bo‘lganligidan biz natural son bo‘lmagan yechimlarni qabul qila olmaymiz. Demak, berilgan tenglamaning aniqlanish sohasi natural sonlar to‘plami bo‘lar ekan. Bundan kelib chiqadiki, tenglama yechimlari juftliklarining to‘plami ham shu sohaga tegishli bo‘ladi. Tenglamalar yechimi juftliklarini cheksiz ko‘p topishimiz mumkin. Demak ikki o‘zgaruvchili tenglamalar yechimlar to‘plami ham cheksiz ko‘p bo‘lar ekan. Bunda juftliklarning birinchisi *x* o‘zgaruvchining tenglama yechimidagi son qiymati, ikkinchisi esa *y* ning tenglama yechimidagi son qiymati bo‘ladi. Aksincha bo‘la olmaydi. (o‘rniga qo‘yib ishonch hosil qiling). *(a,b)* yechimlar to‘plamini koordinatalari *a* va *b* bo‘lgan tekislikdagi nuqta deb qarasak, barcha yechimlar to‘plami tekislikda biror qism to‘plamni aniqlaydi. Bu qism to‘plam *tenglamani grafigi* deyiladi. Masalan, yuqoridagi ifodani tekislikda tasvirlaylik (1-rasm)
Bir xil grafikka ega bo‘lgan ikki o‘zgaruvchili tenglamalar teng kuchli deyiladi. (Slaydlar).
Ikki o‘zgaruvchili tenglamalarning xossalari:
Ikki o‘zgaruvchili A(x,y) va B(x,y) tenglamalarning aniqlanish sohasi mos ravishda X va Y bo‘lsin.
1° . Agar x va y ning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarida aniqlangan

$$A(x,y)=B(x,y) \quad (1)$$

tenglama berilgan bo‘lib, barcha $\forall x \in X, y \in Y$ larda *f(x,y)* aniqlangan bo‘lsa, quyidagi $A(x,y)+f(x,y)=B(x,y)+f(x,y)$ (2) tenglama (1) tenglamaga teng kuchli bo‘ladi.
2° . Agar $\forall x \in X, y \in Y$ larda *f(x,y)* aniqlangan va $f(x,y)\neq 0$ bo‘lsa (1) va $A(x,y)\cdot f(x,y)=B(x,y)\cdot f(x,y)$ tenglama (1) tenglamaga teng kuchli bo‘ladi.
Ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar. $A(x,y)>0$, $A(x,y)\geq 0$, $A(x,y)<0$, $A(x,y)\leq 0$ ko‘rinishidagi tengsizliklar ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar deyiladi. Tengsizliklarni yechish uchun $A(x,y)=0$ tenglama grafigidan foydalanamiz. $A(x,y)=0$ tenglama grafigi aniqlaydigan *l* chiziq tekislikni bir necha sohalarga ajratadi. Bu sohalardan sinov nuqtalarini belgilab, bu nuqtalarda $A(x,y)$ ning ishoralarini aniqlaymiz. Tanlangan sohadagi sinov nuqtalarida $A(x,y)>0$, $A(x,y)\geq 0$, $A(x,y)<0$, $A(x,y)\leq 0$ tengsizliklar bajarilishiga qarab, bu nuqtalar berilgan tengsizlikning yechimi bo‘ladi. Masalan, $A(x,y)>0$ tengsizlik $A(x,y)=0$ tenglama grafigining qaysi sohalarida bajarilsa, shu sohadagi nuqtalar to‘plami bu tengsizlikning yechimi bo‘ladi va hokazo. Masalan, 2x+ y=24 ni y ga nisbatan yechib, $y=24-2x$ yoki $A(x,y) =24-2x$ deb yozib olsak, $A(x,y)\geq 0$ tengsizlikning yechimi $x\leq 12$ bo‘lgan soha $24-2x\geq 0$ tengsizlikni yechimi bo‘ladi.

2.4. Ikki o‘zgaruvchili tenglamalar va tengsizliklar sistemalari

Quyidagi masalani qaraylik: “Ikki usta buyurtma bo‘yicha 24 ta stul yasadi. Buning uchun birinchi usta 2 kun, ikkinchi usta 3 kun ishladi. Xuddi shunday 21 talik buyurtma uchun birinchi usta 5 kun, ikkinchi usta bir kun ishladi. Ustalar har biri bir kunda qanchadan mahsulot yasagan?” Bu masalani yechish uchun ikkita tenglama tuzib olish mumkin: 1-buyurtma uchun - 2x+3y=24 va ikkinchi buyurtma ucnun 5x+y=21. Masalani yechish uchun har ikki tenglamaga ham yechim bo‘la oladigan yechimlar juftligini topish kerak bo‘ladi, ya`ni 2x+3y=24 $\cup$ $5x + y = 21$ bo‘lgan predikatni yechish kerak bo‘ladi.

1-ta`rif.

$\begin{cases} A(x,y) = 0 \\ B(x,y) = 0 \end{cases}$ (1) ko‘rinishidagi tenglamalar tenglamalar sistemasi deyiladi.

Bu yerda A(*x*,*y*) va B(*x*,*y*) tenglamalarning aniqlanish sohasi X va Y toplam bo‘ladi. Umuman olganda tenglamalar sistemasi bu berilgan tenglamalarning konyunksiyasidir. Ya`ni A(*x*,*y*) va B(*x*,*y*) tenglamalarning yechimlar to‘plamining kesishmasi berilgan tenglamalar sistemasining yechimlari to‘plami bo‘ladi. Demak, (a,b) yechimlar juftligi bir vaqtda ham A(*x*,*y*)=0 va B(*x*,*y*)=0 tenglamalarga yechim bo‘ladi. Tenglamalar sistemasini A(*x*,*y*)=0 $\cup$ $B(x,y) = 0$ ko‘rinishida ham yozish mumkin. Masalan,

$\begin{cases} 2x + 3y = 24 \\ 5x + y = 21 \end{cases}$ tenglamaning yechimlar to‘plami (3,6) bo‘ladi. Chunki, bu ikki tenglamani cheksiz yechimlari to‘plamining kesishmasida faqat shu juftlik bor xolos.

Tengsizliklar sistemasi ham xuddi shu kabi ta`riflanadi.

$\begin{cases} A(x,y) \geq 0 \\ B(x,y) \geq 0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} A(x,y) \leq 0 \\ B(x,y) \leq 0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} A(x,y) \leq 0 \\ B(x,y) \geq 0 \end{cases}$ yoki

$\begin{cases} A(x,y) > 0 \\ B(x,y) > 0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} A(x,y) < 0 \\ B(x,y) < 0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} A(x,y) > 0 \\ B(x,y) < 0 \end{cases}$ kabi ko‘rinishdagi tengsizliklar tengsizliklar sistemasi deyiladi. Bu tengsizliklar sistemasi tekislikda berilgan tenglamalarning yechimlari bilan chegaralangan sohani aniqlaydi.

Tengsizlik va tenglamalardan iborat sistemalar ham mavjud.

2.5.Tenglamalar sistemasini yechishning ayrim usullari

Tenglamalar sistemasini yechishni ayrim usullarini ko‘rib chiqamiz.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ xy = 20 \end{cases}$$

Sistema yechimlaridan biri (5,4). O‘zgaruvchilarning simmetrikligiga ko‘ra (4,5) ham sistemani qanoatlantiradi. O‘zgaruvchilarning ishoralari almashtirilsa, tenglamalar o‘zgarmaydi. Demak,
(-5, -4) va (-4,-5) ham yechim bo‘ladi. javob: {(4,5);(5,4);(-4,-5);(-5,-4)}

1.Algebraik qo‘shish usuli.

1-Teorema. (a,b) sonlar juftligida aniqlangan $\psi(x,y), \varphi(x,y), f(x,y)$ funksiyalarning

$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$ (1) sistemasi $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) + \psi(x,y) f(x,y) = 0 \end{cases}$ (2)

Sistemasiga teng kuchlidir.

Misol:

$$\begin{cases} x^2+3y^2+2x-y=7, \\ 2x^2+6y\ \ -2x+4y=2 \end{cases} \qquad (3) \quad \text{tenglamalar sistemasini yeching.}$$

2-tenglamani -2 ga bo‘lib,1- tenglamaga hadlab qo‘shamiz:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3y^2+2x-y=7, \\ -x^2-3y^2+x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3y^2+2x-y=7, \\ 3x-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3y^2+2x-y=7, \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-11x+7=0, \\ y=x-2 \end{cases}$$

Bundan (1;-1), $\left(1\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)$ yechimlarni olamiz.

2. Noma’lumlarni chiqarish usuli.
Misol:

1. $\begin{cases} xy=8, \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

Yechish: 1-tenglamadan $y=\dfrac{8}{x}$ ni topib, 2-tenglamaga qo‘ysak: $x^2+\dfrac{64}{x^2}=20$ yoki soddaroq
$X^4-20x^2+64=0$ bikvadrat tenglama olinadi. Bu tenglamani yechish uchun $x^2=t$ belgilash kiritamiz. Bu kvadrat tenglamani yechishga keladi.Uning ildizlari $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=2$, $x_4=-4$ va $y_1=4$, $y_2=2$, $y_3=-4$, $y_4=-2$.

3. O‘zgaruvchilarni alvashtirish usuli.
Misol: sistemani yeching.

$\begin{cases} x^3y+xy^3=10, \\ xy+x^2+y^2=7 \end{cases}$ (1) 1-tenglamadan xy ni qavsdan chiqarsak, $xy(x^2+y^2)=10$ hosil bo‘ladi.

$xy=u$, $x^2+y^2=v$ almashtirish kiritamiz. $\Leftrightarrow \begin{cases} uv=10 \\ u+v=7 \end{cases}$ bu sistemaning yechimi (u=2; v=5), (u = 5; v = 2). (1) sistema $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ (2) , $\begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ (3) tenglamalar sistemalari majmuasiga keladi. (2) tenglamalar sistemasini yechsak ,javob: {(2;1),(-1;-2),(1;2),(-2;-1)}.

3§.Matrisalar va determinantlar

3.1.Matrisa tushunchasi

1-ta`rif. Sonlarning m ta satr va n ta qatordan iborat to‘g‘ri to‘rtburchakli jadvali $m \times n$ o‘lchamli matrisa deyiladi. Masalan, 3×3 o‘lchamli matrisa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Bu yerda a_{mn} – koeffisientlar matrisaning elementlari deyiladi, m va n mos ravishda koeffisientning satr va ustundagi turgan o‘rnini bildiradi. Masalan, a_{23} – 2-satr, 3-ustunda turgan koeffisientni bildiradi. Agar *m=1* bo‘lsa, satr matrisa, *n=1* bo‘lsa ustun matrisa, *m=n* bo‘lsa kvadrat matrisa deyiladi. Bizning yuqoridagi misolimizda 3×3 o‘lchamli kvadrat matrisa keltirilgan bo‘lib, biz faqat shu o‘lchamdagi matrisalar bilan tanishamiz. Matrisaning $a_{11},$ $a_{22},$ a_{33} o‘rinda turgan elementlari bosh diagonal deyiladi. Bosh diagonalida turgan elementlar birga, qolgan elementlari nolga teng bo‘lgan kvadrat tenglama birlik matrisa deyiladi.

2-ta`rif. Br xil $m\times n$ o‘lchamli A va B matrisalarning *yig‘indisi* deb yana shu o‘lchamli shunday C=A+B matrisaga aytiladiki, uning har bir elementi A va B matrisalarning mos elementlari yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Masalan 2×2 o‘lchamli quyidagi matrisalarni qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \quad B= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad A+B = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+5 \\ 11+1 & 7+8 \end{pmatrix}$$

3-ta`rif. A matrisaning biror *k* songa *ko‘paytmasi* deb, o‘sha o‘lchamdagi B = *k*·A matrisaga aytiladiki, bu matrisaning elementlari A matrisaning elementlarini *k* ga ko‘paytirishdan hosil bo‘ladi.

4-ta`rif. $M\times p$ o‘lchamli A matrisaning $p\times n$ o‘lchamli B matrisaga ko‘paytmasi deb shunday C=A·B matrisaga aytiladiki, uning c_{ij} elementi A matrisaning i-satrielementlarini B matrisaning j-ustunidagi mos elementlari ko‘paytmalari yig‘indisiga teng.

Matrisalarni qo‘shish.

Misollar.

1. A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ va B=$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ matrisalar yig‘indisini toping.

Yechish: A + B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) \\ -5+5 & 4+(-4) \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. A = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

A-B = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3-2 & 5-2 \\ 1-2 & 2-4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

A+B = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3+2 & 5+2 \\ 1+2 & 2+4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Misollar:
m x *k* o‘lchamli matrisani r x *n* o‘lchamli matrisaga ko‘paytirish uchun *k* = *r* bo‘lishi kerak.

1. A = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, B = (3 4) A* B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ * (3 4) = $\begin{pmatrix} 1*3 & 1*4 \\ 2*3 & 2*4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

B * A = (3 4) * $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ = 3*1 + 4*2 = 11.

2. $\begin{pmatrix} 1\ldots2 & 3 \\ 1\ldots3 & 2 \\ 0\ldots1 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot5+3\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot7+3\cdot1 \\ 1\cdot1+3\cdot5+2\cdot0 & 1\cdot3+3\cdot7+2\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot5+2\cdot0 & 0\cdot2+1\cdot7+2\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 16 & 26 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

Matrisalarni ko‘paytirish amali o‘rin almashtirish xossasiga ega emas, lekin guruhlash va taqsimot xossalariga ega:

1. A(BC) = (AB)C;
2. (A+B)C= AC +BC
3. ABC=(AB)C

A = $\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{12} & a_{13} \\ a_{21}\ldots a_{22} & a_{23} \\ a_{31}\ldots a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, X= $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ matrisalarni qaraymiz. U holda

A= $\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{12} & a_{13} \\ a_{21}\ldots a_{22} & a_{23} \\ a_{31}\ldots a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$ tenglik o‘rinli. Bu yerdan 3

noma`lumli 3 ta $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{pmatrix}$ (1)

Chiziqli tenglamalar sistemasini yuqoridagi A , X , C matrisalar yordamida

AX = C (2)

Ko‘rinishida yozish mumkin.

Savollar

1. Matrisa nima?
2. Matrisaning o‘lchami tushunchasini ayting?
3. Matrisalar ustida qo‘shish amali qanday bajariladi?
4. Matrisalarni qachon ko‘paytirish mumkin? Matrisalarni ko‘paytirish algoritmini ayting.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1 Agar A = $\begin{pmatrix} 1\ldots0 & -2 \\ 3\ldots4 & 5 \end{pmatrix}$ va B = $\begin{pmatrix} -3\ldots2 & 1 \\ -1\ldots1 & 4 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, hisoblang.

a) A + B b) B – A d) 2A + 4B e) 3A – 2B

2. Agar

a) A = $\begin{pmatrix} 0\ldots1 & 2 \\ 3\ldots0 & 2 \\ 2\ldots1 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1\ldots2 & 3 \\ -1\ldots0 & 0 \\ 0\ldots0 & 4 \end{pmatrix}$, va A +3C =5B;

b) A = $\begin{pmatrix} -1\ldots1 & 2 \\ 0\ldots0 & 3 \\ 1\ldots0 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1\ldots-1 & 1 \\ 0\ldots0 & 2 \\ 1\ldots3 & 4 \end{pmatrix}$, va 2A+5C =4B;

d) A = $\begin{pmatrix} 1\ldots2 & 3 \\ 0\ldots0 & 0 \\ 3\ldots1 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2\ldots-2 & 0 \\ 3\ldots0 & 0 \\ 0\ldots1 & 2 \end{pmatrix}$, va 2A + 4C = 5B bo‘lsa,

C matrisani toping.

3. Agar A = (1 3 5) va B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bo‘lsa ,

a) AB b) BA matrisalasni toping.

4. Agar $A = \begin{pmatrix} 1\dots0 & -1 \\ 2\dots1 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ bo‘lsa

a) AB b) BA matrisalasni toping.

5. Ko‘paytirishni bajaring.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1\dots2 & 3 \\ 4\dots5 & 1 \\ 1\dots2 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1\dots-2 & -3 \\ -1\dots-3 & -4 \\ 1\dots2 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 3\dots1 & 1 \\ 2\dots1 & 2 \\ 1\dots2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1\dots0 & 0 \\ 0\dots1 & 1 \\ 0\dots0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2\dots1 & 1 \\ 3\dots0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 3\dots2 & 1 \\ 0\dots1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.2.Determinant tushunchasi

Ikkinchi tartibli determinant. Birinchi darajali ikki noma`lumli ikki tenglamali sistema berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} A(x,y)=0 \\ B(x,y)=0 \end{cases} \quad \text{yoki,} \quad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

Bu yerda a_1, a_2, b_1,b_2,c_1,c_2 lar koeffisientlar (o‘zgarmaslar) , x va y lar noma`lumlar. Bu sistemani yechish uchun birinchi tenglamaning ikkala tomonini $b_2$ga va ikkimchisini ikkala tomonini $b_1$ga ko‘paytirib, so‘ngra birinchi natijadan ikkinchisini ayirib olamiz:

$$x(a_1b_2-a_2b_1)=b_2c_1-b_1c_2 \quad (2)$$

Shunga o‘xshash, birinchi tenglamani ikkala tomonini $a_2$ga va ikkinchi tenglamani ikkala tomonini a_1 ga ko‘paytirib, so‘ngra ikkinchisidan ayirib olamiz:

$$y(a_1b_2-a_2b_1)=a_1c_2-a_2c_1 \quad (3)$$

$a_1b_2-a_2b_1\neq0$ deb faraz qilib, (2) ni x ga (3) ni y ga nisbatan yechamiz:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}; \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (4)$$

Agar, mahrajlarning teng ekanligini va qolgan ko'paytuvchilar ham x va y ning koeffisientlari ekanini e`tiborga olsak, koeffisientlarni ma`lum tartibda yozib, amallarni bajarish mumkinligini ko'ramiz. A_1, a_2, b_1,b_2,c_1,c_2 koeffisientlarni tenglamada berilgan tartibi bilan yozib, keyin ular dioganal bo'yicha ko'paytirilsa, birining ko'paytmasi a_1b_2, ikkinchisi a_2b_1 bo'ladi. So'ngra birinchisidan ikkinchisi ayirib olinsa natija (4) tenglikning mahrajini beradi:

$$a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (5)$$

(5) ifoda (1) sistemaning determinanti deyiladi va shunday yoziladi:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (6)$$

Bu ikkinchi tartibli determinant sistemaning bosh determinanti deyiladi. Determinantni tashkil qiluvchi a_1, a_2, b_1,b_2 sonlar determinantning elementi deyiladi. A_1 va b_1, a_2 va b_2 elementlar determinantning satrlarini, a_1 va a_2, b_1 va b_2 elementlar determinantning ustunlarini tashkil qiladi; a_1 va b_2 elementlri determinantning bosh diagonalini tashkil qiladi.

Endi (4) tenglamalarning suratiga e`tibor qaratsak, unda ham koeffisientlarni tenglamada turgan o'rnilari bilan determinant tuzish mumkin ekanini ko'ramiz. *x* topishdagi surat uchun:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_2c_1 - b_1c_2; \quad (7)$$

y ni topishdagi surat uchun:

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 \qquad (8)$$

Endi (4) formulani quyidagicha o'zgartiramiz:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (9)$$

(1) sistemaning yechimi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ holdagina mavjuddir. Agar bu determinant nolga teng bo'lsa, sistema yechimga ega bo'lmaydi. Agar (9) ning surat va mahrajidagi determinantlar nolga teng bo'lsa, berilgan (1) sistema tenglamalari biri ikkinchisini natijasi ekani kelib chiqadi.

*Uchinchi tartibli determinant.B*izga birinchi darajali uch noma`lumli uchta tenglamali sistema berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \qquad (10)$$

Bu sistemani yechganimizda *x*, *y*, *z* quyidagicha qiymat qabul qiladi:

$$x=\frac{d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_2b_2c_1};$$

$$y=\frac{a_1d_2c_3-a_1d_3c_2+a_2d_3c_1-a_2d_1c_3+a_3d_1c_2-a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_2b_2c_1}; \qquad (11)$$

$$z=\frac{a_1b_2d_3-a_1b_3d_2+a_2b_3d_1-a_2b_1d_3+a_3b_1d_2-a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_2b_2c_1}$$

(11) tenglikda kasrlar mahraji hammasi teng ekanini ko‘ramiz. Bu mahraj (10) sistemaning determinanti deyiladi va u $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ko‘rinishda oziladi, ya`ni:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_2b_2c_1 \qquad (12)$$

Bu determinant uchinchi tartibli determinant deyiladi. Satr, ustun, elementlar ta`riflari ikkinchi tartibli determinantdagi kabi bo‘ladi. Bu yerda ham (11) formulalarni determinant shaklida yozsak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \quad (13)$$

Shuningdek, (10) sistemaning yechimi (12) noldan farqli bo‘lgan holda mavjuddir.

Uchinchi tartibli determinantlarni yechish usullari.

1-усул.Uchburchaklar usuli. Bu usul determinant elementlarini uchburchak shaklida ko‘paytuvchilarga ajratib olishdan iborat:

$$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 в_2 c_3 - a_1 в_3 c_2 + a_2 в_3 c_1 - a_2 в_1 c_3 + a_3 в_1 c_2 - a_3 в_2 c_1 \qquad \textbf{(1)}$$

bo‘lganligidan:

$$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) Bu(+) ishorali ko‘paytuvchilar uchburchaklaridir. Ya'ni

$$a_1 в_2 c_3, \quad a_2 в_3 c_1, \quad a_3 в_1 c_2.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3) Bu (-) ishorali ko‘paytuvchilar uchburchaklari bo‘ladi. Ya'ni

$$a_1 в_3 c_2, \quad a_2 в_1 c_3, \quad a_3 в_2 c_1.$$

Lekin bu usul har doim ham samarali deb bo‘lmaydi.

2-usul. Minorlar usuli. (1) ning o‘ng tomonini qaraymiz va guruhlab, umumiy ko‘paytuvchini qavsdan tashqariga chiqaramiz:

$a_1 в_2 c_3 - a_1 в_3 c_2 + a_2 в_3 c_1 - a_2 в_1 c_3 + a_3 в_1 c_2 - a_3 в_2 c_1 = a_1(в_2c_3 - в_3c_2) - в_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_2(a_2в_3 - a_3в_2)$.

Yoki**:**

$$(1) = a_1 \begin{vmatrix} в_2 & c_2 \\ в_3 & c_3 \end{vmatrix} - в_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_2 & в_2 \\ a_3 & в_3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

Ya'ni 3-tartibli determinantni 1- satr elementlari bo‘yicha 2- tartibli minorlari orqali ifodaladik. Bu usul 1-usulga nisbatan soddaroq va yodda saqlash osonroq. Lekin ortiqcha hisoblashlarni talab qiladi.

3-usul. Bu usul Sarrus qoidasi ham deyiladi. Uchunchi tartibli determinantni bu usulda hisoblash uchun eng avvalo uning birinchi va ikkinchi satrlarini determinant ostiga yoziladi, so‘ngra determinang bosh diagonalini tashkil qilgan a_1 va c_3 elementlari va bu diagonalga parallel bulgan diagonallarning har biridagi elementlar o‘zaro ko‘paytiriladi. Buning natijasida :

$$a_1 в_2 c_3, \quad a_2 в_3 c_1, \quad a_3 в_1 c_2.$$

ko‘paytmalar hosil bo‘ladi. Shunga o‘xshash o‘ngdan chapga qarab ketgan uchta parallel dioganaldagi elementlarni ko‘paytirsak, ularning ko‘paytmalari

$$в_3 c_2, \quad a_2 в_1 c_3, \quad a_3 в_2 c_1$$

bo‘ladi. hosil bo‘lgan ko‘paytmalardan avvalgi uchtasi (+) ishora bilan, keyingi uchtasi (-) ishora bilan olinganda, ularning algebraik yig‘indisi (1) da yoyib ko‘rsatilgan determinant qiymati bo‘ladi. Natijada:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \\ a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \end{array} \qquad \textbf{(5)}$$

Misol uchun quyidagi determinantni Sarrus qoidasi bilan hisoblaymiz

$$\textbf{Д} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

(6) ni Sarrus qoidasi bo‘yicha yoyib chiqsak:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \qquad (7)$$

Demak, Д = 1*1*1 + 2*2*3 + 3*1*4 – 3*1*3 – 4*2*1 – 1*1*2 = 6.

1. $\begin{cases} -x + 6y = 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: D= $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ = (-1) *(-1) - 6*2 = 1 – 12 = -11;

D_x = $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$ = -3 – 30 = -33; D_y = $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ = -5 -6 = -11

$x = \frac{-33}{-11}$; $y = \frac{-11}{-11} = 1$.

2. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

D = $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ = 1 * 3 – (-1)* 2 = 5; D_x = $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ = 15 - (-5) = 20

D_y = $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ = 5 – 10 = -5 x = $\frac{20}{5}$ = 4; y = $\frac{-5}{5} = -1$.

Determinantnig xossalari.

1. Agardeterminantning ustunlari satrlari (va aksincha) almashtirilsa, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.
2. Agar ikki satr (yoki ustun) bir xil yoki o‘zaro proporsional, yoki biri ikkinchisini chiziqli kombinasiyasidan iborat bo‘lsa bu determinant nolga teng bo‘ladi.
3. Biror satr (ustun) elementlarining umumiy ko‘paytuvchisini satrdan tashqariga chiqarish mumkin.

Savollar

1. Determinantni ta`riflang?
2. Determinantning tartibi nima?
3. Tenglamalar sistemasi determinantlar usuli bilan qanday yechiladi?
4. 2-tartibli determinant qanday hisoblanadi?
5. 3-tartibli determinantlarni hisoblash usullarini ayting?
6. Determinantning qanday xossalri bor?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

14.1. Determinantlarni hisoblang.

a) $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 13 & -6 \end{vmatrix}$;

14.2. a ning qanday qiymatlarida determinantning satrlari proporsional bo‘ladi.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ a & 3a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & a \end{vmatrix}$.

14.3. Tenglamani yeching.

a) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ a^2 & 3a \end{vmatrix}$=0; d) $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+2 & a \end{vmatrix}$=0 .

14.4. Sistemani determinantlardan foydalanib yeching.

a) $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x+8y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+11y=15 \\ 10x-11y=9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y=-3 \\ x+3y=21 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-3y=16 \\ x+2y=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 4x-8y=5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-0{,}5y=1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -x+3y=-2 \\ 2x-6y=-1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{5}{7}y=\frac{23}{168} \\ 2x+6y=\frac{31}{165} \end{cases}$

14.5. Hisoblang.

a) 2 * $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ - 2 * $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, bunda x=3,1(73);

b) 2,(7) * $\begin{vmatrix} x & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ + 3,(13) , bunda x=2,(71).

2. $\begin{cases} 3x-5y=-7, \\ 4x+7y=18 \end{cases}$ sistema berilgan.

a) sistemaning har bir tenglamasi nechta echimga ega?
b) sistema nechta echimga ega?

14.6. Sarrus qoidasi bilan hisoblang.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 8 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

14.7. Determinant yordamida yeching.

a) $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+2y-4z=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-y+3z=9 \\ 3x+6y-2z=10 \\ 4x-3y+7z=19 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x+3y-z=8 \\ 3x-2y+4z=24 \\ x+y+5z=23 \end{cases}$

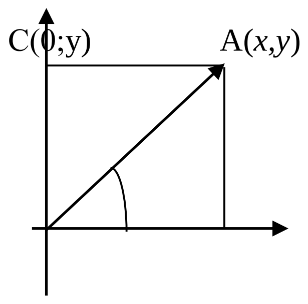
e) $\begin{cases} 3x - 2y + 10z = 37 \\ 6x + 7y - 8z = 34 \\ 2x - 5y + 7z = 11 \end{cases}$

4§. Kompleks sonlar

4.1.Kompleks son tushunchasi

Shu vaqtga qadar biz faqat haqiqiy sonlar bilan ish ko‘rdik. Istalgan o‘lchash natijalarini musbat haqiqiy sonlar yordamida ifodalash mumkin ekanligiga ishonch hosil qildik. Barcha arifmetik amallar (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish) haqiqiy sonlar to‘plamida bajarilganda natija yana haqiqiy son bo‘ladi. lekin shunday amal borki, bu amal bajarilganda haqiqiy sonlar to‘plami yetarli bo‘lmay qoladi. Bu kvadrat ildiz chiqarish amalidir. Bu esa sonlar to‘plamini yanada kengaytirish ehtiyojini vujudga keltirdi.

Kompleks son tushunchasiga odatda quyidagi tenglama orqali kelinadi $x^2+1=0$.
Ushbu tenglamani qanoatlantiruvchi haqiqiy son yo‘q. Bu tenglama ildizga ega bo‘lishi uchun yangi, mavhum sonlar deb ataluvchi sonlar kiritiladi. Mavhum va haqiqiy sonlar umumiy nom bilan **kompleks son** deb ataladi.
Kompleks son deb $z=x+iy$ ko‘rinishidagi ifodaga aytiladi. Bunda x va u sonlar haqiqiy sonlar bo‘lib, x ga z sonning haqiqiy qismi, y ga esa z sonning mavhum qismi, i ni mavhum birlik deyiladi. $i^2= -1$ deb qabul qilinadi. $x^2+1=0$ tenglamani yechimi esa $x = i$ deb qabul qilinadi.
Agar $x = 0$ bo‘lsa, $z = yi$ ga sof mavhum son deyiladi.
2. $z = x+yi$ kompleks sonni tekislikdagi dekart koordinatalari sistemasida A(x;u) nuqta bilan tasvirlash qabul qilingan. U holda $x = z + oi$ haqiqiy son absissa o‘qida yotuvchi V(x;u) nuqta bilan $yi = 0 + yi$ mavhum son ordinata o‘qida yotuvchi S(o;u) nuqta bilan tasvirlanadi. (1- chizma)



$o = o+oi$ songa mos keluvchi nuqta koordinata boshi bo‘ladi. Masalan, $z = –3 + 4i$, $\alpha = 5$, $\beta =-7i$ sonlar mos ravishda A_1(- 3;4), B_1(5;0) va C_1(0;7) nuqtalar bilan tasvirlanadi.
Bunday tasvirlashda absissa o‘qi - haqiqiy o‘q va ordinata o‘qi - mavhum o‘q deb yuritiladi.
$z=x+yi$ kompleks sonni boshi koordinata boshida va uchi A(x;y) nuqtada yotuvchi vektor bilan ham tasvirlash mumkin (1-chizma). Bu holda haqiqiy sonlar, haqiqiy

o‘qda yotuvchi vektorlar bilan va mavhum sonlar mavhum o‘qda yotuvchi vektorlar bilan tasvirlanishi ravshan. Umuman aytganda, kompleks sonlar to‘plami bilan tekislikdagi barcha nuqtalar to‘plami orasida biektiv akslantirish mavjud.
$z = x+yi$ kompleks sonining geometrik tasvirini ifodalovchi vektorning uzunligi bu kompleks sonning moduli deyiladi va u $r=|z|=|x+y|$ ko‘rinishida belgilanadi.

4.2. Kompleks sonning triganometrik shakli va kompleks sonlar ustida arifmetik amallar

$r=|z|$ ni Pifagor teoremasi bo‘yicha 1- chizmadagi to‘g‘ri burchakli AOV uchburchakda topamiz. Bunda $r=\sqrt{x^2+y^2}$ bo‘ladi.
Masalan $a = -3+4i$, $\beta=\sqrt{5}-i\sqrt{7}$ sonlarning modullari mos ravishda
$r_1=|a|=\sqrt{9+16}$ $\quad r_1=5$
$r_2=|\beta|=\sqrt{5+7}$ $\quad r_2=\sqrt{12}$ ga teng.
Noldan farqli har bir kompleks sonning moduli musbat haqiqiy sondir. Ox o‘qining musbat yo‘nalish bilan $\overrightarrow{OA}$ vektor orasidagi burchakni φ deb belgilaymiz. Unda ΔAOV dan $x=r\cos\varphi$ *va* $y = r\sin i\varphi$ larni topamiz. Bularni $z=x+yi$ ga qo‘yamiz:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\ (1)$$

z kompleks sonning (1) shakliga uning *trigonometrik shakli* deyiladi. Bunda $r\geq 0$, lekin istalgan (manfiy, nol , musbat) qiymatlarni qabul qila oladi. Bu φ burchak z kompleks sonining argumenti deb ataladi. $z = x+yi$ ifoda z kompleks sonning algebraik shakli deb yuritiladi.

(1) ni umumiy shaklda $z=r((\cos\varphi+2\pi k)+(i\sin\varphi+2\pi k))$ deb yozish mumkinligi ravshandir, bunda k - istalgan butun son.
Har bir kompleks sonni yuqorida aytilgan shakllarini biridan ikkinchisiga o‘tkazish mumkin. Masalan, algebraik shakldagi $z=1-\sqrt{3}i$ kompleks sonni trigonometrik shakliga keltiraylik. Buning uchun r bilan φ ni topib ularning qiymatlarini (1)ga qo‘yamiz. Bu yerda $r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ $r=2$. Endi $\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$ va $\sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ lardan uning to‘rtinchi chorakda ekanligi va 300° ga yoki $\frac{5\pi}{3}$ ga tengligini ko‘ramiz. Shunday qilib, $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ hosil bo‘ladi.
3. Ixtiyoriy shaklda berilgan kompleks sonlar ustida qo‘shish, ayrish, bo‘lish va ko‘paytirish amallari qo‘yidagicha bajariladi.
I. $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$
II. $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$
Bu erdan $i^2=(0+i)(0+i)=-(0+1)(0+0)=-1$
III. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot z_2}{|z_2|^2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}$ bu yerda $z_2\neq 0$

Biz endi quyidagi trigonometrik shakldagi kompleks sonlar ustida ko‘paytirish va bo‘lish amallarni ko‘rib o‘tamiz.

$x=r\cos\varphi$, $y = rsini\varphi$ formulalardan kompleks sonning trigonometrik shakli kelib chiqadi.

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad (1)$$

bundan $\cos\varphi=\frac{x}{r}$; $\sin\varphi=\frac{y}{r}$ bo‘ladi.

Kompleks sonning trigonometrik shaklidagi ko‘rinishidan foydalanib

$z_1=r(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$

$z_2=r(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

I. $$z_1\cdot z_2=r_1r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1)\right]= \\ =r_1r_2\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)-i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] \quad (2)$$

II. $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\left[\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2)\right]}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\left[\cos(\varphi_2)-i\sin(\varphi_2)\right]}= \\ =\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] \quad (3)$$

bu yerda $z_2\neq 0$

Demak, trigonometrik shakldagi ikkita kompleks sonning bo‘linmasi ham trigonometrik shaklga ega bo‘lib, bo‘linmaning moduli bo‘linuvchi va bo‘luvchi modullarining bo‘linmasiga, argumenti esa bo‘linuvchi va bo‘luvchi argumentlarning ayirmasiga teng.

Misol. $z_1=7(\cos20^0–i\sin20^0)$ va $z_2=4(\cos10^0+i\sin l0^0)$ sonlarning bo‘linmasini topaylik. Avvalo z_1 ni trigonometrik shaklga keltiramiz:

$z_1=7(\cos(-20^0)–i\sin(-20^0))$

Endi (3) formula bo‘yicha

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{7}{4}\left[\cos(-20^0-10^0)+i\sin(-20^0-10^0)\right]=\frac{7}{4}(\cos30^0-i\sin30^0)=\frac{7}{8}(\sqrt{3}-i)$$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{7}{8}(\sqrt{3}-i)$ ni topamiz.

(2) formula bo‘yicha

$z^n=r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (4)

n- natural son. Faraz qilaylik $\sqrt[n]{r}=p(\cos\psi=i\sin\psi)$ bunda

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ shunda (1) formulaga asosan

$z=\left[p(\cos\psi=i\sin\psi)\right]^n=p(\cos n\psi=i\sin n\psi)$

$p^n=r,\quad n\psi=\varphi+2\pi kn\,(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ demak $p=\sqrt[n]{r}$ $\sqrt[n]{r}$ bu deb $\psi=\frac{\varphi+2\pi k}{n}$

arifmetik ildiz deb tushuniladi.

r ga k =0,1,2,…,n-1 qiymatlarni olish yetarlidir, chunki k ning boshqa qiymatlarida topilgan ildiz qiymatlarining takrori bo‘ladi.

Shunday qilib:

$$\sqrt[n]{r}=\sqrt[n]{z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \quad (5)$$

k =0,1,2,…,n-1

Misol. $\omega=\sqrt{-1}$ ni toping. Haqiqatdan $-1\cos\pi+i\sin\pi$ (2) formula asosida $\sqrt{-1}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}$. $\quad k=0{,}1$

$\omega_0=$ $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, $\omega_1=$ $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

Savollar

1) Algebraik shakldagi kompleks sonni trigonometrik shaklga keltirishga misol keltiring?
2) Modul formulasini yozing?
3) Kompleks sonlar modullarining yig‘indisini xossalarini ko‘rsating?
4) Kompleks sonlarning geometrik joylanishiga oid misollar keltiring?
5) Kompleks sondan kvadrat ildiz chiqarishning qanday usullarini bilasiz?

Misollar

1 - misol. Kompleks sonni trigonometrik ko‘rinishga keltiring.

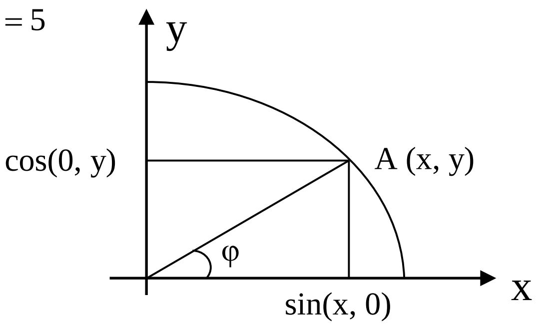
$z=3+4i \qquad a=3 \qquad в=4 \qquad r=\sqrt{a^2+в^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$a=r\cos\varphi \qquad в=r\sin\varphi \qquad \varphi=arctg\frac{в}{a}=arctg\frac{4}{3}$

$\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{3}{5} \qquad \sin\varphi=\frac{y}{z}=\frac{4}{5} \qquad \varphi=53^0 12'\approx 53^0$

$z=5(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$z=5(\cos 53^0+i\sin 53^0)$



2 – misol. Soddalashtiring. $a)\ \sqrt{-4}=i\sqrt{4}=2i$, $\quad chunki \quad i^2=-1.$

$b)\ \sqrt{-x^2-y^2+2xy}=\sqrt{-(x^2-2xy+y^2)}=i\sqrt{(x-y)^2}=(x-y)^i$ *, agarda* $x\geq y$ *bo`lsa.*

3 – misol. $\sqrt[3]{1}$ barcha qiymatlarini toping.

Yechish: 1 ni trigonometrik ko‘rinishga keltiramiz.

$$1=\cos 0+i\sin 0$$

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\cdot\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$ formuladan foydalanamiz.

$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3}$ *k=0, 1, 2* deb ildizning uchta qiymatini topamiz.

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5 – misol. $x^4=1$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamaning ildizini $x=\sqrt[n]{A}(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})$ tenglikdan topamiz.

$$x=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4})$$

k=0, 1, 2, 3 deb

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1+i0=1$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i\cdot 1=i$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i0=-1$$

$$x_4=\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=0-i\cdot 1=-i$$

Mustaqil yechish uchun misollar va masalalar

1. Kompleks sonlarni trigonometrik ko‘rinishga keltiring.

$a)\ z=-1-i;\quad b)\ z=1-i;\quad d)\ z=\sqrt{3}+i;\quad e)\ z=-1+\sqrt{3i};$

$f)\ z=-2;\quad g)\ z=i;\quad h)\ z=1;\quad i)\ z=-i;$

$j)\ z=1+i;\quad k)\ z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad l)\ z=\frac{\sqrt{33}}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2};$

$m)\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\quad n)\ z=2i;\quad o)\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}};$

$p)\ z=-i;\quad q)\ z=-\sqrt{6}-\sqrt{6i};$

2. Ifodani soddalashtiring.

1) $\sqrt{-в}$ 4) $\sqrt{-81}$ 7) $\sqrt{-a^2}$

2) $\sqrt{-a}$ 5) $\sqrt{-\frac{9}{4}}$ 8) $\sqrt{-\frac{a^2}{в^2}}$

3) $\sqrt{-(a-в)^2}$ 6) $\sqrt{-9x}$ 9) $\sqrt{-a^2-в^2}$

3. Amallarni bajaring.

9) $(5+2\sqrt{-7})\cdot(6-5\sqrt{-7})$

10) $(\sqrt{a}-\sqrt{-в})\cdot(\sqrt{a}+3\sqrt{-в})$

11) $(3\sqrt{-5}-2\sqrt{-7})\cdot(2\sqrt{-7}+3\sqrt{-5})$

12) $\frac{a^2+в^2}{a-вi}$ 13) $\frac{x-y}{x+yi}$ 14) $\frac{4}{1+\sqrt{-3}}$

15) $\frac{3-5i\sqrt{3}}{3+5i\sqrt{3}}$ 16) $\frac{36-\sqrt{-2}}{2+3i\sqrt{2}}$

17) $(a+вi)^2$ 18) $(\frac{1+\sqrt{-3}}{2})^2$ 19) $(3-\sqrt{5}+2\sqrt{-1})^2$

20) $(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})^3$ 21) $\sqrt{3+4\sqrt{-1}}$ 22) $\sqrt{-3-4i}$

23) $\sqrt{1+4\sqrt{-3}}$ 24) $\sqrt{2-3\sqrt{-5}}$ 25) $\sqrt[8]{-1}$ 26) $\sqrt[8]{1}$

4 . Hisoblang:

$a)\ (2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i);\quad b)\ (x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i),$
$x\in R;$

$d)\ \frac{(1+2i)^2}{1-3i};\quad e)\ (1-4i)-(i(3-4i)+3i);\quad f)\ (1+4i)^2-\left(3+i^9\right);$

$g)\ 3+8i+9i^2+10i^3\quad h)\ 8-4\left(i^{15}+1\right)+13i;\quad i\ \ 21i^4+23i^{19}+17i^{17}.$

5.Tegishli kompleks sonlarni trigonometrik shakldа yozib, hisoblashlarni bajaring:

$a)\ (1+i)^{16};\quad b)\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20};\quad d)\ \left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24};\quad e)\ \frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{20}}{(1-i)^{20}};$

$f)\ (1+i)^9(1-i)^{15};\quad g)\ (1+2i)^8(2+3i)^3;\quad h\ \ (2+i)^{26}(2+3i)^9;\quad i)\ \frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{15}}.$

6. z kompleks sonning modulini toping;

$a)\ z=3+4i;\quad b)\ z=-3-4i;\quad d)\ z=1+\sqrt{8i};\quad e)\ z=2\sqrt{2}+i;\quad e)\ z=-4;$

$f)\ z=3+3i;\quad g)\ z=1+2\sqrt{3i};\quad h)\ z=1+i;\quad i)\ z=\sqrt{2}+i;\quad j)\ z=bi,\ b\in R;$

$k)\ z=\cos a+i\sin a(a\in R);\quad l)\ z=1+i\cos^2 a\ (a\in R);\quad m)\ z=(2+3i)(3-4i);$

$n)\ z=4\sqrt{81}+3\sqrt{21};\quad o)\ z=i;\quad p)\ z=0.$

7. z Kompleks sonning argumentini toping:

$a)\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}};\quad b)\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2};\quad d)\ z=3i;\quad e)=3;$

$f)\ z=\frac{\sqrt{33}}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2};\quad g)\ z=-2\sqrt{3}\,i;\quad h)\ z=-\sqrt{6}-\sqrt{6i};\quad i)\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;$

$j)\ z=1;\quad k)\ z=i;\quad l)\ z=-1;\quad m)\ z=-i.$

8.. Ikki kompleks sonning bo`linmasini toping.

$a)\ \frac{1+i}{1-i};\quad b)\ \frac{3-4i}{2+i};\quad d)\ \frac{2+3i}{2-3i};\quad e)\ \frac{1+2i}{3-2i};$

$f)\ \frac{5-4i}{-3+2i};\quad g)\ \frac{-7+2i}{5-4i};\quad h)\ \frac{3-4i}{-3+2i};\quad i)\ \frac{14-3i}{3i+2};$

$j)\ \frac{51i}{4-i};\quad k)\ \frac{31i}{17+i};\quad l)\ \frac{31i}{17+i}\quad m)\ \frac{14+i}{31i};$

$n)\ \frac{0}{3i};\quad o)\ \frac{1+4i}{1-5i};\quad p)\ \frac{1}{1+5i};\quad q)\ \frac{1}{1-5i};$

9 Hisoblang:

$a)\ \frac{(2-3i)(3-2i)}{1+i};\quad b)\ \frac{(3-i)(1+3i)}{2-i};\quad d)\ \frac{3-4i}{(1+i)(2-i)};\quad e)\ \frac{2-3i}{(1-i)(3+i)};$

$f)\ \frac{11}{1-2i}-\frac{13}{2-i};\quad g)\ \frac{3-5}{3+i}+\frac{2+3i}{2-i};\quad h)\ \frac{13}{1-4i}+\frac{11}{1+4i};\quad i)\ \frac{1-i}{1+i}+\frac{3-i}{3+i};$

$j)\ \frac{i^{18}+i^{19}}{2-3i}+\frac{1}{3+4i};\quad k)\ \frac{2-3i}{2+3i}\cdot i^{18}+\frac{i}{1+i};\quad l)\ \frac{4i^8}{9}+i\left(1+i^9\right);$

$m)\ i^3\left(1-i^4\right)+i^{12}.$

1.15. Amallarni bajaring.

$a)\ (3-2i)^2;\quad b)\ (4+3i)^2;\quad d)\ \left(\frac{1-2i}{1+i}\right)^2;\quad e)\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2;$

$f)\ (3+2i)^2-(3-2i);\quad g)\ (-3+5i)+(-3-5i);\quad h)\ \left(\frac{i^6+1}{i^8-1}\right)^2;\quad i)\ \left(\frac{4+i^7}{3-i^4}\right)^2.$

VI BOB. Matematik analiz asoslari

1 §. Funksiya

1.1. Funksiya tushunchasi

Atrofimizni kuzatar ekanmiz, voqea- hodisalarda turlicha miqdorlar qatnashayotganiga amin bo‘lamiz. Masalan, harakatlanayotgan avtobusda o‘rindiqlar soni, avtobus uzunligi, yo‘lovchilar soni o‘zgarmaydi. Lekin shu vaqtning o‘zida avtobus tezligi, bosib o‘tgan yo‘li, yoqilg‘I miqdori va hokazolar o‘zgarib boradi. Shu misoldagi kabi barcha miqdorlarni o‘zgarmas va o‘zgaruvchilarga ajratildi. Masalan, avtobusning harakatlanishi davomida uning bosib o‘tgan yo‘li o‘zgaradi, shuning uchun u o‘zgaruvchi miqdor yoki *o‘zgaruvchi* deyiladi. O‘zgaruvchi miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘ladi. Masalan, avtobusning bosib o‘tgan yo‘li s uning tezligi v va vaqt t ga bo‘liq bo‘ladi: $s=vt$. Ya`ni yo‘lning miqdori vaqt va tezlikning o‘zgarishiga qarab o‘zgaradi. Shuning uchun s o‘zgaruv erksiz, v esa erkli o‘garuvchi deyiladi. O‘rindiqlar soni esa o‘zgarmaydi. Shuning uchun u *o‘zgarmas* deyiladi. O‘zgarmas miqdor konstanta ham deyiladi.

1-ta`rif. Agar x o‘zgaruvchining qabul qilish mumkin bo‘lgan har bir qiymatiga y o‘zgaruvchining aniq bitta qiymati mos kelsa, y o‘zgaruvchi x ning funksiyasi deyiladi.

O‘zgaruvchi y (funksiya) va erkli o‘zgaruvchi x (argument) orasidagi funksional bog‘lanish simvolik ravishda $y = f(x)$ tenglik orqali yoziladi, bu yerda f belgi y ni hosil qilish uchun x ustida bajariladigan amallar to‘plamini bildiradi.

Elementlari haqiqiy sonlardan iborat X va U to‘plamlar berilgan bo‘lib, X to‘plamdagi har bir x haqiqiy songa biror f qonun yoki qoidaga binoan U to‘plamdan aniq bitta u haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda X to‘plamda f funksiya berilgan deyiladi va $y=f(x)$ ko‘rinishda yoziladi. Shu ta’rifda kiritilgan funksiya tushunchasi sonli funksiya deb ham yuritiladi. X - to‘plam shu funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va uni D(f) kabi belgilash qabul qilingan. U- to‘plam funksiyaning o‘zgarish sohasi yoki qiymatlar to‘plami deyiladi va E(f) kabi belgilanadi.

Masalan. 1) y=3x ning aniqlanish sohasi D(f) =R. O‘zgarish sohasi esa E(f) =R.

2) y=$\frac{1}{x}$ ning aniqlanish sohasi D(f) =$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.O‘zgarish sohasi x esa E(f)=$(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

3) $y = n!$ funksiya barcha natural sonlar to‘plami N da aniqlangan. Uning qiymatlar to‘plami ham N bo‘ladi, Ya’ni bu funksiya $N \to N$ akslantirish bo‘lib, $y = n!$ esa uning moslik qonunidir.

1.2.Funksiyaning berilish usullari

Funksiyaning berilish usullari turlichadir.

1) Funksiyaning analitik usulda berilishi.

x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga ko‘ra unga mos keladigan y ning qiymati x ustida analitik amallarning bajarilishi natijasida, ya’ni formulalar yordamida berilishi mumkin:

M: $y = x^2 + 1, \quad y = \dfrac{x+1}{x^2+1}, \quad y = \log_2(x+1)$

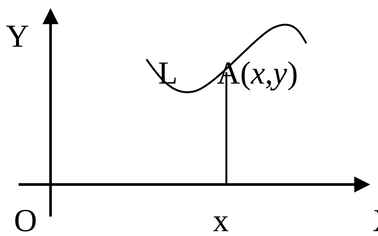
Funksiyaning bunday berilishi funksiyaning analitik usulda berilishi deyiladi.

2) Funksiyaning jadval usulida berilishi.

Ba’zan x va u o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish, ya’ni *x* o‘zgaruvchanning qiymatiga mos keladigan *y* o‘zgaruvchanning qiymatini ko‘rsatish (topish) jadval shaklida berilishi mumkin.

Funksiyaning jadval usulida berilishi qulaydir, chunki bir necha qiymatlar topilgan bo‘ladi. Lekin funksiyaning aniqlanish sohasi cheksiz to‘plam bo‘lganda, uning barcha qiymatlarini ko‘rsatib bo‘lmaydi.

3) Funksiyaning grafik usulda berilishi. Ba’zan *x* va *y* o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish tekislikdagi chiziq (egri chiziq) yordamida amalga oshishi mumkin. Aytaylik *uOx* tekislikda biror L chiziq berilgan bo‘lsin.



Ox o‘qida shunday *x* nuqtalarni qaraylikki, bu nuqtalardan *Oy* o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘gkazilganda, ular L chiziqni bitta nuqtada kessin, Ox o‘qidagi bunday nuqtalar to‘plamini X orqali belgilaymiz. Endi bu X to‘plamdan biror x nuqtani olib, bu nuqtadan Ox o‘qiga perpendikulyar chiqaramiz, Perpendikulyarning L chiziq bilan kesishgan A nuqtasi ordinatasini *y* bilan belgilab, olingan *x* ga shu *y* ni mos qo‘yamiz. Ravshanki, bunday moslik L chiziq orqali bajariladi. Natijada X to‘plamdan olingan har bir x ga ko‘rsatilgan qoidaga ko‘ra *y* mos qo‘yilib, funksiya hosil bo‘ladi. Funksiyaning bunday berilishi funksiyaning grafik usulda berilishi deyiladi.

3. 1) x argumentning $y = f(x)$ funksiyasi haqiqiy qiymatlarga ega bo‘ladigan barcha haqiqiy qiymatlar to‘plami (son o‘qining barcha nuqtalari) $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish (mavjudlik) sohasi deyiladi.

2) Funksiyaning o‘zgarish sohasi deb u qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha haqiqiy sonlar to‘plamiga aytiladi,

3) Funksiyaning eng ko‘p uchrab turadigan aniqlanishi sohalari - interval va kesma (yopiq interval) dir.

a<x<v tengsizliklarni qanoatlantiradigan barcha haqiqiy sonlar to‘plami interval deb ataladi, u qisqacha (a,v) simvol bilan belgilanadi, a va v nuqtalar intervalga kirmaydi.

a≤x≤v tengsizliklarni qanoatlantiradigan barcha haqiqiy sonlar to‘plami kesma (yopiq interval) deb ataladi, u qisqacha [a,v] simvol bilan belgilanadi, a va v nuqtalar kesmaga kiradi.

$a \le x < v$ va $a < x \le v$ tengsiz liklarni qanoatlantiruvchi barcha haqiqiy sonlar to‘plami yarim ochiq intervallar deyiladi va mos ravishda [a,v) va (a,v] simvollar bilan belgilanadi. $-\infty<x<a$, $-\infty<x<a$, $a>x<\infty$, $a<x<+\infty$, va $-\infty<x<+\infty$. tengsiz liklarning qanoatlantiradigan barcha haqiqiy sonlar to‘plamlari cheksiz intervallar deb ataladi va mos ravishda $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(a,+\infty)$, $(a.+\infty]$ va $(-\infty,+\infty)$ simvollar bilan belgilanadi.

Murakkab funksiya. $y = f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan bo‘lsin. Argument x ning X oraliqda olingan har bir qiymatida funksiyaning mos qiymatini topib, bu funksiyaning qiymatlaridan U to‘plamini tuzamiz. Endi shu U to‘plamda o‘z navbatda $u = F(y)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin. Natijada X to‘plamdan olingan har bir x songa U to‘plamda bitta u soni $(u=F(y))$ mos qo‘yiladi. Demak X to‘plamdan olingan har bir x songa bitta u soni mos qo‘yiladi. Bu esa u ni x o‘zgaruvchining funksiyasi bo‘lishini bildiradi va bunday belgilanadi:

$u = F(y)= F(f(x))$

Bunday funksiya murakkab funksiya deyiladi.

Masalan: 1) $u=\sqrt{x^2-1}$; 2)$i=\sin 2x$: 3)$u = \mathrm{sos}^2 x$; n = $\sqrt{x^2-1}$ funksiya $u=\sqrt{x}$, $u = x^2-1$ funksiyalar yordamida hosil bo‘lgan, $u = x^2-1$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda aniqlangan.

*Algebraik funksiyalar***.**

Ratsional va irratsional funksiyalarning birlashmasi algebraik funksiyalar sinfini tashkil qiladi.

Misol: $f(x)=\sqrt{\dfrac{5x^2+4x-7}{3x^2-8x+4}+\left(\sqrt[5]{x}+1\right)^2}$

Bu yerda ildiz ostida uning arifmetik qiymati ko‘zda tutiladi.

Transtsendent funksiyalar.

Algebraik bo‘lmagan funksiyalar transtsendent funksiyalar deyiladi.

Sodda transtsendent funksiyalar:

a) ko‘rsatkichli funksiyalar: $u=a^x$ (a - birga teng bo‘lmagan musbat son)

b) logarifmik funksiya: $y = \log_a x$ $(a>o,a<Y)$ v)trigonometrik funksiyalar.

$y = \arcsin x$, u = $\mathrm{arccsos}x$, $y = \mathrm{arctg}x$, $y = \mathrm{arcctg}x$.

Savollar

1. Funksiyaga misollar keltiring va uning ta’rifini ayting?
2. Funksiyaning berilish usullarini gapirib bering va unga xos misollar keltiring?
3. Qanday funksiya chiziqli funksiya deyiladi. Misol keltiring?
4. $u = x^2$ funksiyaning xossalarini ayting?
5. Sodda va murakkab funksiyalarning farqini aytib bering va ko‘rsatib bering?
6. Kamayuvchi, o‘suvchi, juft, toq funksiyalarni tushuntiring va ularga xos misollar keltiring?
7. Funksiyaning aniqlanish sohasini grafik va analitik usullarida ko‘rsating.
8. Algebraik va transtsendent funksiyalarga misollar keltiring.

Misollar

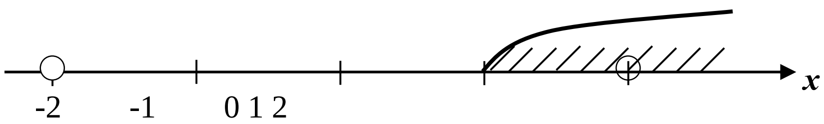
1 – misol. Funksiyani aniqlanish sohasini, juft toqligini, davriyligini toping.

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$$

Yechish: 1) Aniqlanish sohasi, ya'ni x qabul qila oladigan barcha sonlarni topish uchun ildiz ostidagi ifoda nomanfiyligidan, 0 ga bo'lish mumkin emasligidan $x-1 \geq 0, \quad x^2-4 \neq 0$ shartlar kelib chiqadi.

$x \geq 1$

$x \neq 2\,, \quad x \neq -2$ sonlar o'qida belgilab



aniqlanish sohasi

$1 \leq x < 2$ va $2 < x < \infty$ ligi kelib chiqadi.

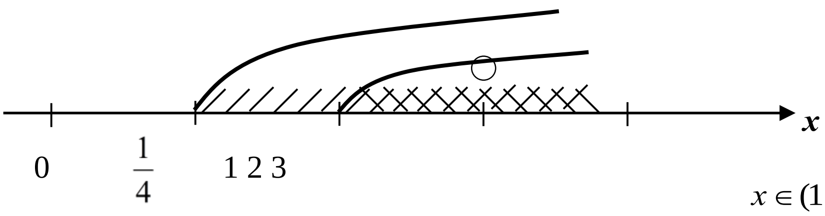
2) $f(-x) = \dfrac{\sqrt{-x-1}}{(-x)^2-4} = \dfrac{\sqrt{-x-1}}{x^2-4}$ funksiya juft ham emas, toq ham emas.

2 – misol. $y = \log_{x-1}(x - \frac{1}{4})$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Logarifm ta'rifiga ko'ra $\log_a в$ faqat $в > 0,\ a > 0$ va $a \neq 1$ da ma'noga ega.

$$\log_{x-1}(x - \frac{1}{4}) \Rightarrow x - \frac{1}{4} > 0 \qquad x > \frac{1}{4}$$

Demak,
$$x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1$$
$$x - 1 \neq 1 \qquad x \neq 2$$



$x \in (1,\ 2) \cup (2,\ \infty)$

3 – misol. $y = \sqrt{2\sin x - \sqrt{3}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Ildiz ostidagi ifoda nomanfiyligidan

$$2\sin x - \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n]$$

4 – misol. $y = \sin(3x+1)$ funksiyaning davrini toping.

Yechish. $y = \sin(ax + в)$ ning davri $aT = 2\pi$ teng likdan topamiz.

$$y = \sin(3x+1) \Rightarrow 3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

I. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini, juft toqligini toping.

1) $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}$

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}-\sqrt{1-x^2}$

3) $y=2^{x+5}$

4) $y=\sqrt{4x-x^2}$

5) $y=x^3-4x+7$

6) $y=\dfrac{2x-3}{x^2+1}$

7) $y=x^3+3x+5$

8) $y=\dfrac{16}{x^2}-1$

II. Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

1) $y=\log_3(2-x)$ 2) $y=\log_{x^2}(4-x)$

3) $y=\log_{x^3}(6-x)$ 4) $y=\log_x(3-x)$

5) $y=\log_x(6-x)$ 6) $y=\log_2\log_3\sqrt{4x-x^2-2}$

7) $y=\log_2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4x-x^2-2}$ 8) $y=\log_2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4x-4x^2}$

9) $y=\log_2\log_3\sqrt{4x-4x^2}$ 10) $y=\log_x x(x-4)$

III. Trigonometrik funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

1) $y=\sqrt{ctgx-1}$ 2) $y=\sqrt{2\sin x-1}$

3) $y=\sqrt{tgx+1}$ 4) $y=\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(x+1)}$

5) $y=\dfrac{\arccos x}{\ln(x+\frac{1}{2})}$

6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x ning butun qiymatlari nechta.

Quyidagi funksiyalarni aniqlanish sohasini toping:

1. $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ 2. $f(x)=\dfrac{3x}{x-3{,}4}$ 3. $f(x)=\dfrac{4x-1}{3x-2}$

4. $f(x)=\dfrac{4x+13}{7x+14}$ 5. $f(x)=\dfrac{4x}{(x-1)(x-2)}$

6. $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 7. $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{x^2-7x+12}$

8. $f(x)=\dfrac{4x+1}{x^2-8x+15}$

52. $y=x$ 53. $y=x^2$

1. $y = x^2 + 2$ 2. $y = 3 - 4x^2$ 3. $y = 3x - x^2$

4. $y = 3x^2 - 6x + 1$

1. $y = \dfrac{5}{x-2}$ 2. $y = \dfrac{x}{x+1}$ 3. $y = |x-4| - 2$

1.3.Sodda funksiyalar, ularning xossalari va grafigi

Sodda funksiyalar bizga maktabdan ma'lumdir. Bular: chiziqli va kvadratik funksiyalar, darajali funksiyalar, ko'rsatkichli funksiyalar, logarifmik funksiyalar, trigonometrik funksiyalar, teskari trigonometrik funksiyalar.

Funksiyaning grafik tasviri nafaqat funksional bog'lanishini xayoliy tasavvur qilishga, balki funksiyaning xossalarini o'rganishni osonlantirishga imkon beradi. Shuning uchun funksiya formula bilan berilgan bo'lsa ham, ko'pincha koordinata tekisligidagi funksiyaning grafigiga murojaat qilinadi.

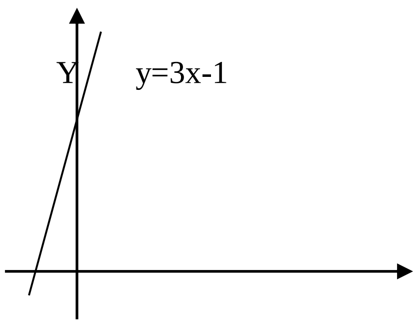
1-ta'rif. X to'plamda berilgan f funksiyaning grafigi deb X to'plamdan olingan barcha x lar uchun koordinata tekisligining x va f(x) koordinatalariga ega nuqtalari to'plamiga aytiladi. Chiziqli va kvadratik funksiyalar.

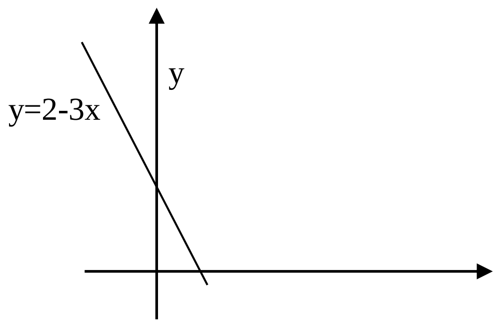
$u = ax + v$ u=ax^2+bx+s

ko'rinishidagi funksiyalar mos ravishda chiziqli va kvadratik funksiyalar deb ataladi, bunda *a,b,s* -o'zgarmas haqiqiy sonlar.

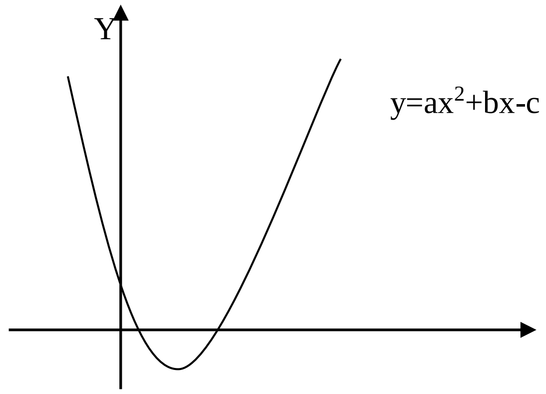
u = $ax + v$ chiziqli funksiya $(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan. Bu funksiya a>0 da o'suvchi, a<0 bo'lganda kamayuvchi funksiya bo'ladi. Uning grafigi tekislikda to'g'ri chiziqni tasvirlaydi. Shuning uchun ham u = *ax* + v funksiyani chiziqli funksiya deb ataladi.

Masalan, u = *Zx* + 1, u = 2 – Zx funksiyalar chiziqli funksiyalardir.



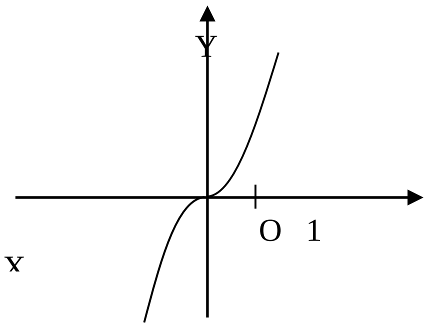


u=ax^2+bx+s kvadratik funksiya $(-\infty,+\infty)$, da aniqlangan. Bu funksiya *x*> $-\dfrac{b}{2a}$ $(a \neq 0)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamida o'suvchi, x< $-\dfrac{b}{2a}$ $(a \neq 0)$ tengsiz likni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamida kamayuvchi bo'ladi. Kvadratik funksiyaning (kvadratik uchhadning) grafigi tekislikda parabolani ifodalaydi. Parabolaning holati a koeffisent hamda diskriminant $d = b^2 - 4as$ ning ishorasiga bog'liq bo'ladi.



2. Darajali funksiyalar.
Ushbu u = x^n ($x > 0$) ko‘rinishidagi funksiya darajali funksiya deb ataladi.

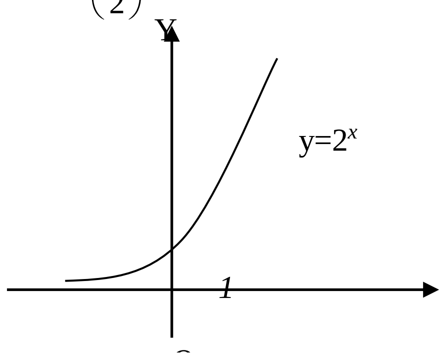
Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi n soniga bog‘liq bo‘ladi. Darajali funksiyaning grafigi n>0 bo‘lganda tekislikning (0:0) va (1:1) nuqtalaridan o‘tadi, Masalan $u = x^3$ funksiyaning grafigi

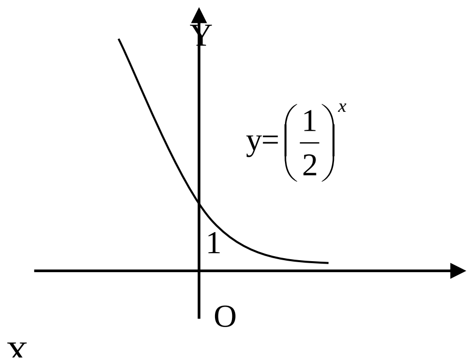


3. Ko‘rsatkichli funksiyalar. Ushbu $u=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$) ko‘rinishidagi funksiya ko‘rsatkichli funksiya deb ataladi.

Ko‘rsatkichli funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda aniqlangan. Bu funksiya 0<a<1 bo‘lganda kamayuvchi, a>0 bo‘lganda, esa o‘suvchi funksiya bo‘ladi. Ko‘rsatkichli funksiyaning grafigi tekisligining Ox o‘qidan yuqori tomonda joylashgan.

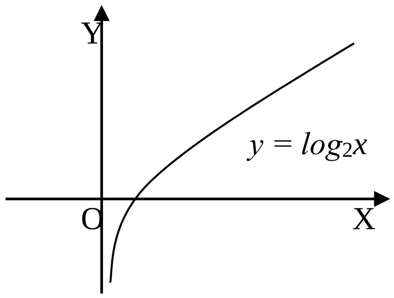
$y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ funksiyalarning grafiklarini tasvirlaymiz.

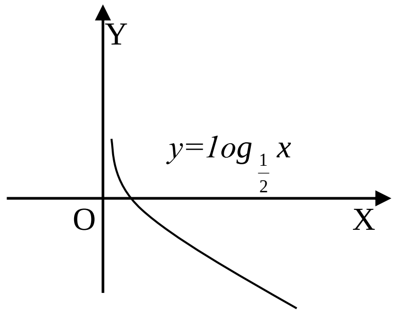




4. Logarifmik funksiya
Ushbu u = $Log_a x$ ($a>0, a\neq0$) ko‘rinishidagi funksiya logarifmik funksiya deb ataladi. Logarifmik funksiya $(0;\infty)$ oraliqda aniqlangan. Bu funksiya 0<a<1 bo‘lganda kamayuvchi, a>1 bo‘lganda esa o‘suvchi bo‘ladi. Logarifmik funksiyaning grafigi

tekislikda Ou o‘qiniyg o‘ng tomonida joylashgan. $u = log_2 x$ *va* $u = log_{\frac{1}{2}} x$ funksiyaning grafiklari quyidagicha tasvirlanadi.



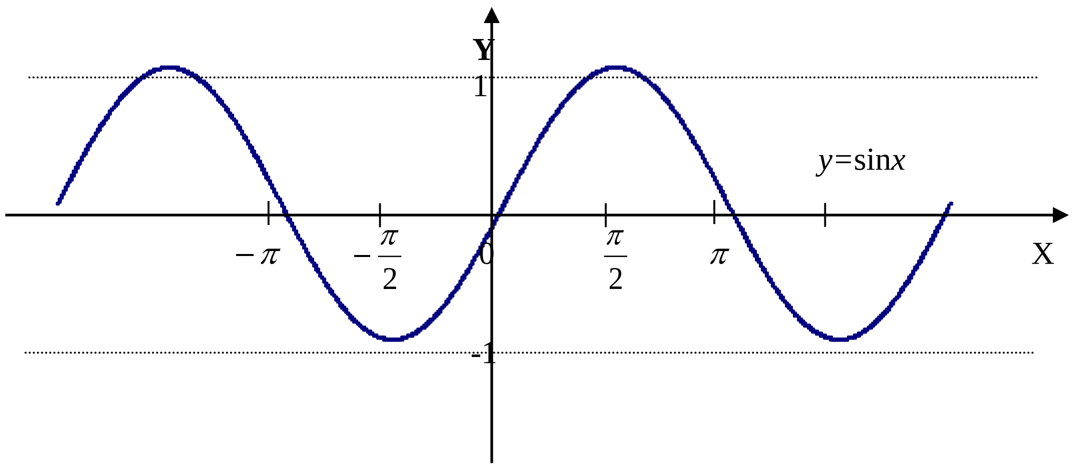


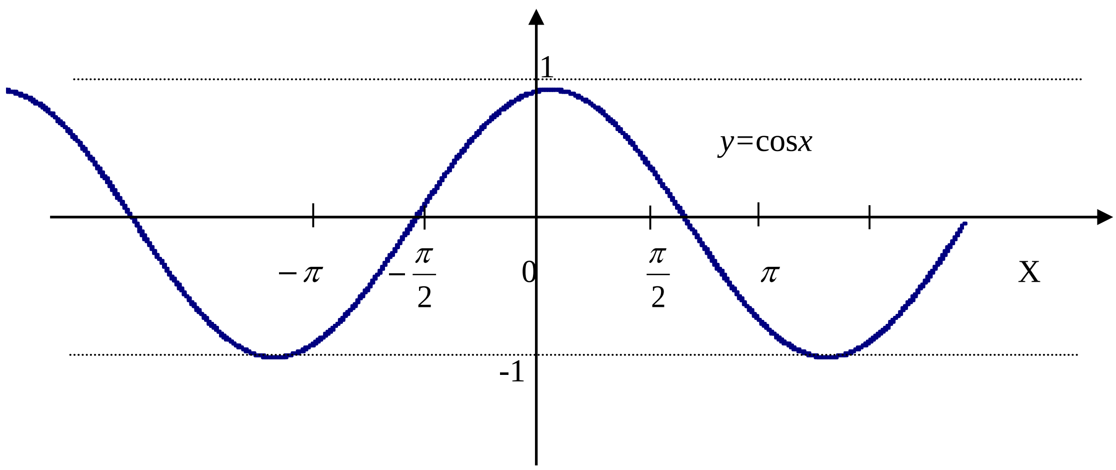
5. Trigonometrik funksiyalar.

Ushbu u=sin*x*, *u*=cos*x* , *u =tgx, u=ctgx* funksiyalar trigonometrik funksiyalar deb ataladi.

u = *sinx, u = cosx* funksiyalar (–∞;+∞) oraliqda aniqlangan.

u = sin *x* toq funksiya. Demak, uning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.





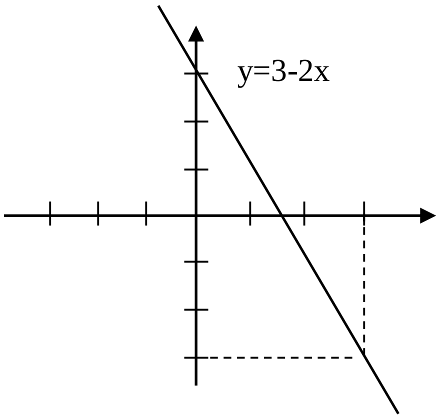
Savollar

1 . Qanday elementar funksiyalarni bilasiz?

2. Cniziqli funksiyalar nima?

3. Darajali, ko‘rsatkichli, logarifmik fuksiyalar grafiklari qanday bo‘ladi?

Misollar.



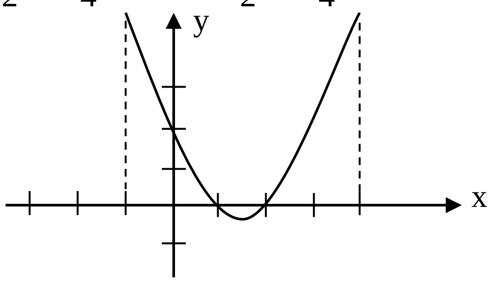
1 – misol. $y = 3 - 2x$ funksiya grafigini yasang.
Yechish: To‘g‘ri chiziq grafigini yasash uchun 2 ta nuqtani koordinatalarini bilish kifoya.

x=0 da u=3 A (0; 3)
x=3 da u=-2 A (3; -3)

2 – misol. $y = x^2 - 3x + 2$ funksiya grafigini yasang.

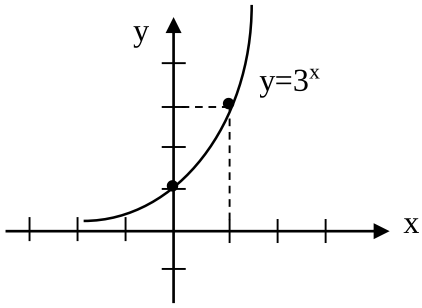
Yechish: $y = x^2 - 3x + 2 = [x^2 - 2x\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} & \text{x o`qdan siljiganlikni} \\ -\frac{1}{4} & y \ \text{o`qdan siljiganlikni bildiradi} \end{cases}$$



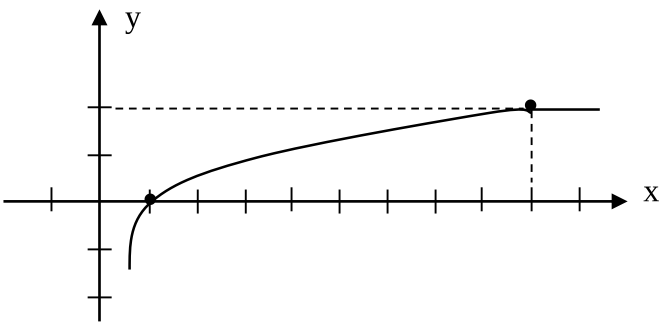
2 – misol. $y = 3^x$ funksiyaning grafigini yasang.

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$	-1	-2
y	1	3	9	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



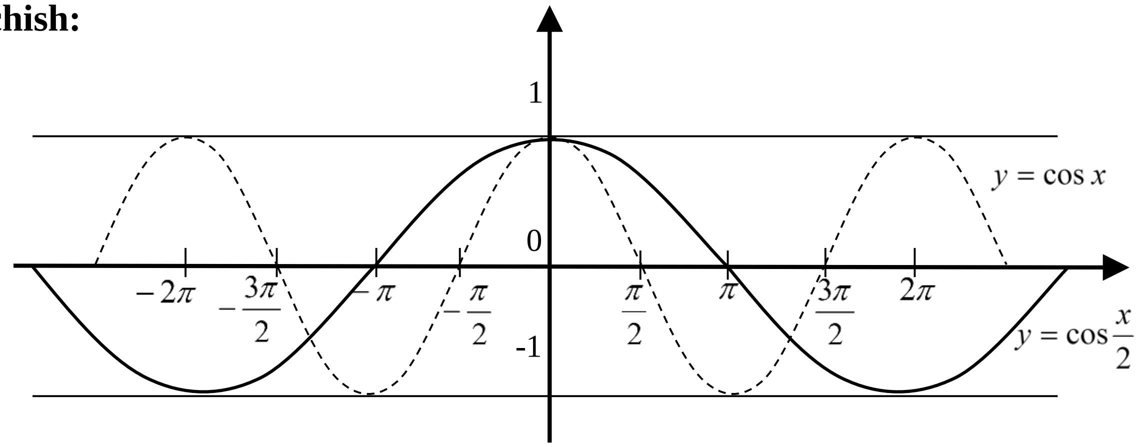
3 – misol. $y = \log_3 x$

x	1	9	27	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
y	0	2	3	-1	-2



4 – misol. $y = \cos\frac{x}{2}$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechish:



5-misol Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

$$a)\ y = \sqrt{25 - x^2}$$
$$25 - x^2 \geq 0$$
$$x^2 - 25 \leq 0$$
$$(x+5)(x-5) \leq 0$$

$$D(y) = [-5;5]$$
$$E(y) = [0;5]$$
$$javob:\ \ [0;5]$$

$$b)\ y = 2\cos x - 1$$
$$y = 2\cos x - 1$$
$$\cos x \to [-1;1]$$
$$-1 \ \text{da} \ -3$$
$$1\text{da} \ \ 1$$
$$\text{javob}:\ \ [-3;1]$$

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Berilgan funksiyalarning grafigini yasang:

1) y=3x – 5
2) y=2 – 3x
3) y=$\frac{3}{4}$ - 2x
4) y= 2x^2 – 6x +4
5) y= -x^2 + 3x – 1
6) y=x^2+5x+4

2. Quyidagi funksilarni aniqlash sohasini toping.

a) $y = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

b) $y=\sqrt{x^2-5x}+\dfrac{1}{x^2-4}$

d) $y=\sqrt{x^2-4}+\lg\dfrac{x+2}{x-4}$

e) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{3}$

f) $y=\sqrt{36-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

3. Sxematik chizmasini chizing.

$$1)\ y=\begin{cases} x+2, \text{agar} & x<-2 \quad \text{bo'lsa} \\ 4-x^2, \text{agar} & -2\le x\le 7 \quad \text{bo'lsa} \\ 3-2x, \text{agar} & x>7 \ \text{bo'lsa} \end{cases}$$

$$2)\ y=\begin{cases} 3x, \text{agar} & x<-1 \text{bo'lsa} \\ x^2-4, \text{agar} & -1\le x\le 2 \quad \text{bo'lsa} \\ 2x-5, \text{agar} & x>2 \ \text{bo'lsa} \end{cases}$$

$$3)\ y=\begin{cases} x+2, \text{agar} & x\le -1 \text{bo'lsa} \\ x^2+1, \text{agar} & -1<x\le 1 \quad \text{bo'lsa} \\ 3-x, \text{agar} & x>1 \ \text{bo'lsa} \end{cases}$$

$$4)\ y=\begin{cases} 2-x, \text{agar} & x<0 \ \text{bo'lsa} \\ \sin x, \text{agar} & 0\le x\le \pi \quad \text{bo'lsa} \\ x-\pi, \text{agar} & x>\pi \ \text{bo'lsa} \end{cases}$$

2§. Limit tushunchasi

2.1.Sonli ketma - ketliklar va ularning xossalari

a,b,c,d..... elementlardan tashkil topgan biror A(chekli yoki cheksiz) t\`oplam berilgan b\`lsin. Agar N-natural sonlar to‘plamining bir elementiga A to‘plam elementlarining bittasi mos qo‘yib to‘plam tuzsak, bu tuzilgan to‘plam elementlari *ketma-ketlik* bo‘ladi. Bu moslik funksiya bo‘lib, uning aniqlanish sohasi natural sonlar, o‘zgarish sohasi esa A to‘plam bo‘ladi. Bu ketma - ketlikni

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \dots\ a_n \quad (1)$$

ko‘rinishida yozishimiz mumkin. Bunda a_1, a_2… sonlar ketma - ketlikning hadlari, a_n son ketma - ketlikning umumiy hadi, n soni a_n hadning nomeri deyiladi. Masalan,
1. juft sonlar ketma-ketligi: 2,4,6,8,…
2. tub sonlar ketma-ketligi: 2.3,5,7,11,…
3. 5ga karrali snlar ketma-ketligi: 5,10,15,..
4. uchning darajalari bilan berilgan ketma-ketlik: 3,9,27,…

Ketma-ketliklar $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, yoki $\{a_n\}$, yoki a_n n=1,2,… ko‘rinishida yoziladi. Ketma-ketlik

$$a_n=f(n), \quad n \in N \quad (2)$$

ko‘rinishida ham berilishi mumkin, bunda *f* biror funksiya. Bu holda (2) formula $\{a_n\}$ ketma-ketlikning umumiy hadi formulasi deyiladi. Masalan, yuqoridagi ketma-ketliklarni (2) ko‘rinishida yozamiz. 1-ketma-ketlikning umumiy hadini $a_n= 2n,$ 3-ketma-ketlikni $a_n=5n,$ 4-ketma-ketlikni $a_n=3^n$ deb yozish mumkin. *n* ga 1,2,3,.. qiymat berish orqali ketma-ketlikning barcha hadlarini topishimiz mumkin. 3-ketma-ketlikning esa umumiy hadini topish mumkin emas, chunki tub sonlarning sonlar o‘qida joylashish tartibi ma`lum emas. Ketma-ketliklar *rekurrent* (lotincha “qaytish” so‘zidan) usulda ham berilishi mumkin. bunda ketma-ketlikning dastlabki bir yoki, bir necha hadi beriladi. Masalan:

a) $a_1 =1$, $a_n= a_{n-1} +3$

b) $b_1=7$, $b_n= b_{n-1}\cdot 3$

Rekkurent ketma-ketliklarga yana arifmetik va geometrik progressiyalar misol bo‘la oladi.

1-ta`rif. ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi oldingi hadiga bir xil *d* sonini qo‘shishdan hosil bo‘lgan $\{a_n\}$, $n \in N$ ketma-ketlik arifmetik progressiya deyiladi, ya’ni:

$$a_1,\ a_n= a_{n-1}+d,\ n \in N \quad (3)$$

d soni arifmetik progressiyaning ayirmasi, a_1 *son* arifmetik progressiyaning birinchi hadi, a_n esa arifmetik progressiyaning umumiy hadi deyiadi. Masalan, yuqoridagi a) misolimizda $a_1=1,$ d=3. Ketma-ketlikning hadlarini umumiy had formulasidan foydalanib topish mimkin:

$a_1 =1$, $a_2 =4$, $a_3 =7$, $a_4=10$ va hokazo. Bunda $a_2 = a_1+d$, $a_3= a_2+d$,… bundan:

$a_3= a_2+d= (a_1+d)+d= a_1+2d;$

$a_4= a_2+d= (a_1+2d)+d= a_1+3d;$ va hokazo. Bu tengliklardan quyidagi formula kelib chiqadi:

$$a_n= a_1+(n-1)d,\ \forall n \in N \quad (4)$$

(4) formula arifmetik progressiyaning *n-hadi formulasi* deyiladi.

Agar d>0 bo‘lsa ketma-ketlikning avvalgi hadi keyingi hadidan doim katta bo‘ladi. Ya`ni u monoton o‘suvchi ketma-ketlik bo‘ladi. Agar d<0 bo‘lsa ketma-ketlikning avvalgi hadi keyingi hadidan doim kichik bo‘ladi. Ya`ni u monoton kamayuvchi ketma-ketlik bo‘ladi.

Endi yuqoridagi b) $b_1=7$, $b_n= b_{n-1}\cdot 3$ rekurrent ketma-ketlikni qaraylik. Uning keyingi hadi avvalgi hadini 3 soniga ko‘paytirishdan hosil bo‘ladi.

2-ta`rif. Birinchi hadi noldan farqli, qolgan hadlari esa o‘zidan oldingi hadni $q\neq 0$ konstantaga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan ketma-ketlik *geometrik progressiya* deyiladi. *q* soni geometrik progressiyaning *maxraji* deyiladi. Demak, bizning b) misolimiz geometrik progressiyaga misol bo‘lar ekan. Geometrik progressiyaning umumiy hadi formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$b_1,\ b_n= b_{n-1}\cdot q,\ n \in N \quad (5)$$

Bizning misolimizda $b_1=7$, $q=3$ bo‘ladi. Qolgan hadlrini qarasak: $b_2=21$, $b_3=63$,

$$\frac{21}{7}=\frac{63}{21}=\frac{189}{63}=3$$

$b_4=189$,… Demak, $n\geq2$ uchun bo‘ladi, ya`ni:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{b_{n+1}}{b_n}=q \qquad (6)$$

Geometrik progressiyaning n-hadi formulasini topamiz:
$b_2= b_1\cdot q$, $b_3= b_2\cdot q$, $b_4= b_3\cdot q$,.. $b_n= b_{n-1}\cdot q$ bundan:
$b_3= b_2\cdot q= (b_1\cdot q)\cdot q= b_1\cdot q^2$; $b_4= b_3\cdot q= (b_1\cdot q^2)\cdot q= b_1\cdot q^3$…
bulardan

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1} \qquad (7)$$

kelib chiqadi.

2.2. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar.

Ketma-ketlikning limiti

Berilgan $\{a_n\}$ ($\forall$ ketma-ketlik uchun $n \in N$ deb tushinilsin) ketma-ketlik elementlarining soni chekli bo‘lsa, *chekli ketma-ketlik*, elementlarining soni cheksiz bo‘lsa, *cheksiz ketma-ketlik deyiladi*. Masalan, yuqorida ko‘rilgan juft sonlar ketma-ketligini qaraylik. Bu ketma-ketlik natural sonlardan iborat, natural sonlar to‘plamining cheksizligidan bu ketma-ketlik ham cheksiz ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek, bu to‘plamning keyingi hadi avvalgi hadidan doim 2ta katta, demak, monoton o‘suvchi ketma-ketlik bo‘ladi. Bu ketma-ketlik doim o‘sib boradi, ya’ni ixtiyoriy biror katta son berilsada, ketma-ketlikning shunday hadi topiladiki, shu hadni boshlab ketma-ketlik hadlari o‘sha berilgan sondanda katta bo‘ladi. Bunday xususiyatli ketma-ketliklar $+\infty$ ga intiluvchi ketma-ketlik deyiladi.

1-ta`rif. agar ixtiyoriy M soni uchun shunday n nomer topilsaki, bu nomerdan boshlab ketma-ketlikning hamma hadlari $a_n>M$ tengsizlikni qanoatlantirsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlik $+\infty$ga intiladi, deyiladi. Va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty \quad (8) \text{ deb yoziladi.}$$

Bu ketma-ketlik *cheksiz katta ketma-ketlik* deyiladi.

Agar yuqoridagi $\{a_n\}$ ketma-ketlikni ishorasini manfiyga o‘zgartirsak, $-\infty$ ga intiluvchi ketma-ketlik hosil bo‘ladi va

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \quad (9) \text{ deb yoziladi.}$$

Shunday ketma-ketliklar borki, ular o‘sadi, lekin monoton bo‘lmaydi. Masalan, mazkur $a_n=a_1\cdot(-1)^n q^{n-1}$ formula bilan berilgan ketma-ketlikning hadlari musbat va manfiy ishoraga ketma-ket almashinadi. Bu holda bu ketma-ketlik cheksizlikka intiladi, deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad (10) \text{ deb yoziladi.}$$

Bunday xususiyatli ketma-ketliklar *cheksiz katta ketma-ketlik* deyiladi.

Ushbu

$$b_n=b_1\cdot\ ,\ q>0\ (11)$$

ketma-ketlikni qaraylik. q^n ning qiymati o‘sib borishi bilan bu ketma-ketlik hadlari shuncha kichik bo‘lib boradi. Yani $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$ bo‘lsa, (11) ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi.

2-ta`rif. Ixtiyoriy kichik ε son uchun chunday n nomer topiladiki ketma-ketlikning shu nomerli hadidan boshlab tengsizlik bajarilsa, $\{b_n\}$ ketma- ketlik cheksiz kichik deyiladi.

Bundan kelib chiqadiki, agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo‘lsa, ketma-ketlik cheksiz kichik b`ladi, aksincha, $\{a_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, ketma-ketlik cheksiz katta bo‘ladi ($a_n\neq 0$).

3- ta`rif. shunday M soni mavjud bo‘lsaki, barcha $n\in N$ lar uchun $|a_n|\leq M$ tengsizlik bajarilsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan, deyiladi.

Cheksiz kichik ketma-ketliklarning yig‘indisi ham cheksiz kichik b`ladi.

Cheksiz kichik ketma-ketlik bilan chegaralangan ketma-ketlik ko‘paytmasi cheksiz kichik bo‘ladi.

Endi umumiy hadi $a_n=\frac{n+1}{n}$ bo‘lgan ketma-ketlikni qaraymiz. Uni $a_n=$ ko‘rinishida yozamiz. n nomerning yetarlicha katta qiymatlarida cheksiz kichik qo‘shiluvchining moduli juda kichik bo‘ladi. Demak, berilgan ketma-ketlikning hadlari birdan juda kam farq qiladi. Bu esa ketma-ketlik limiti birga tengligini bildiradi, ya`ni:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1 \text{ bo‘ladi.}$$

4-ta`rif. Agar ixtiyoriy $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday n nomer topilsaki, $|a_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa o‘zgarmas a soni $\{a_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \qquad (12)$$

deb yoziladi. Cheksiz kichik ketma-ketliklarning limiti nolga teng, ya`ni

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \quad (13)$$

bo‘ladi.

Misollar

1-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+2}$

yechish. Bu misolda kasrning surat va mahraji cheksizlikka intiladi, ya'ni $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka egamiz. Kasrning surat va mahrajini n ga bo‘lsak:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+4}{n}}{\frac{3n+2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{3+\frac{4}{\infty}}{3+\frac{2}{\infty}}=\frac{3+0}{3+0}=\frac{3}{3}=1$$

2-misol.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+4}{4n^2-2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2+3n+4}{n^2}}{\frac{4n^2-2n+1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\frac{2+\frac{3}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{4-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

3-misol.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!((n+2)+1)}{(n+1)!(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)}{(n+2)(n+3)}=$$

.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{\infty}=0$$

2.3. Funksiyaning limiti

1-ta’rif. Agar $u = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo‘lsin, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $u = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi ***limiti*** deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

Misol 1: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=2$ ni isbotlang.

$f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4x}$ funksiyani x = 4 nuqtaning biror atrofini qaraylik, masalan 3<4<5. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ni olamiz va $|f(x) - A|$ ni $x \neq 4$ deb,

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|=\left|\frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)}-2\right|=\left|\frac{x+4}{x}-2\right|=\frac{|x-4|}{x}$$

$x \in (3; 5)$ ya’ni $x > 3$ ni hisobga olsak,

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|<\frac{|x-4|}{3}$$

bundan ko‘rinib turibdiki, $\delta = 3\varepsilon$ deb olsak, u holda $|x - 4| < \delta$ uchun barcha $x \in (3; 5)$ uchun

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right| < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

bundan 2 soni $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4x}$ funksiyaning x = 4 nuqtadagi limiti bo‘lishi kelib chiqadi.

2-ta’rif. Agar *u = f(x)* funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo‘lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N > 0$ son mavjud bo‘lsin, $|x| < N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o‘zgarmas A son u = f(x) funksiyaning $x \to \infty$ dagi *limiti* deb ataladi.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

Misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x} = 1$ ekanini isbotlang.

Isbot $f(x) = \frac{x+2}{x}$ ni qaraylik

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ni olamiz va $|f(x) - A|$ ni o‘zgartiramiz

$$\left|\frac{x+2}{x}-1\right| = \left|1+\frac{2}{x}-1\right| = \frac{2}{|x|}$$

Agar $N = \frac{2}{\varepsilon}$ ni olsak, u holda $|x| > N$ uchun,

$$\left|\frac{x+2}{x}-1\right| < \frac{2}{N} = \varepsilon \quad \text{tengsizlik bajariladi.}$$

Bundan 1 soni $f(x) = \frac{x+2}{x}$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti kelib chiqadi.

2-ta’rif. (a, b) intervalda aniqlangan u = f(x) funksiya uchun shunday $M > 0$ son mavjud bo‘lsaki, barcha $x \in (a, b)$ lar uchun $|f(x)| \le M$ tengsizlik bajarilsa, u holda u = f(x) funksiya (a, b) intervalda chegaralangan deyiladi.

Teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ - chekli son bo‘lsa, u holda *u = f(x)* funksiya *a* nuqtaning biror atrofida chegaralangandir.

3-ta’rif. Agar = *f(x)* funksiya *x = a* nuqtadagi yoki $x\to\infty$ dagi limiti ta’rifida x o‘zgaruvchi a dan kichik bo‘lganicha qolsa, u holda funksiyaning A_1 limiti funksiyaning x = a nuqtadagi (yoki a - 0 dagi) *chap tomonlama limiti* deb ataladi.

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A_1$$

Xuddi shu kabi $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ - *o‘ng tomonlama limiti* deyiladi.

4-ta'rif. Agar u = *f(x)* funksiya *a* nuqtaning biror atrofida aniqlangan va istalgan *M*>0 son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo‘lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ lar uchun $|f(x)| > M$ tengsizlik bajarilsa, $x \to a$ da *f(x)* funksiya cheksizlikka intiladi deb aytiladi

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Agar $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ bo‘lsa, u holda f(x) funksiya $x \to a$ da yoki $x \to \infty$ da *cheksiz katta funksiya* deb ataladi.

Ta'rif. Agar $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ (yoki $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$) bo‘lsa, f(x) funksiya $x \to a$ da (yoki $x \to \infty$ da) *cheksiz kichik funksiya* deb ataladi.

Cheksiz kichik miqdorlarning xossalari:

1^0. Ikki cheksiz kichik miqdorlarning yig‘indisi yoki ayirmasi yana cheksiz kichik miqdordir.

2^0. Cheksiz kichik miqdorni chegaralangan miqdorga ko‘paytmasi yana cheksiz kichik miqdordir.

Xulosa: Cheksiz kichik miqdorni o‘zgarmas songa ko‘paytmasi yana cheksiz kichik miqdordir.

Misol: $\alpha = \frac{1}{n}$; $\beta = \frac{1}{n^2}$; $\gamma = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ (bu yerda n = 1, 2, 3, ...)

α, β, γ - cheksiz kichik miqdorlar.

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$ - cheksiz kichik miqdorlar.

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$$ - 1 ga intiladi.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n$$ - bu esa ∞ ga intiladi.

Misoldan ko‘rinadiki, cheksiz kichik miqdorlarni nisbati, cheksiz kichik miqdor bo‘la olmaydi.

3^0. Cheksiz katta miqdorga teskari kattalik, cheksiz kichik miqdordir va aksincha

$$\frac{1}{\infty} = 0; \quad \frac{1}{0} = \infty$$

4^0. Cheksiz katta miqdor bilan cheklangan miqdorning yig‘indisi cheksiz katta miqdordir.

5^0. Ikkita cheksiz katta miqdorni va cheklangan miqdorga ko‘paytmasi yana cheksiz katta miqdordir.

$\infty + \infty = \infty$; $\infty - \infty$ - aniqmaslik, ya’ni $\infty - \infty \neq 0$ xuddi shu kabi $\frac{\infty}{\infty}$ - aniqmaslik.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-3}{x^2+1}=\dfrac{4\cdot 2-3}{2^2+1}=\dfrac{8-3}{4+1}=\dfrac{5}{5}=1$

2-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ bu misolda kasrning surati ham, mahraji ham $x \to 2$ da nolga intiladi. 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi.

Kasrning surati va mahrajini ko‘paytuvchilarga ajratsak,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=\frac{2-3}{2+2}=-\frac{1}{4}$$

3-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=$

Bu misolda ham 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslikdagi limit, shuning uchun aniqmaslikdan qutilish uchun kasrninng surati va mahrajiga $\left(\sqrt{x+3}+2\right)$ ni ko‘paytiramiz.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ - *birinchi ajoyib limit*

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$ *ikkinchi ajoyib limit*.

Muhim limitlar.

$$\lim_{x\to 0}(1+k\alpha)^{1/\alpha}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

1-misol.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$$

2-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{8x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2x+1}{2}\cdot 8x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x}{2+\frac{1}{x}}}=e^{8}$$

3-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x}{x}=\ln 4$

4-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+2x)}{2x}=2\cdot 1=2$

Funksiyaning uzluksizligi.

1-tar`rif. Agar *y=f(x)* funksiya a nuqtada aniqlangan va shu nuqtada *x=a* limitga ega bo‘lib, bu limit funksiyaning *a* nuqtadagi qiymatiga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\quad (1)$$

bo‘lsa, u holda bu funksiya *a* nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar 1- ta`rifdagi (1) shart bajarilmasa, funksiya shu nuqtada uzilishga ega deyiladi. Ko‘p hollarda funksiyaning uzilishi shartda berilgan to‘plamda shu *a* nuqtada qiymati mavjud bo‘lmasa yoki mahraj shu *a* nuqtada nolga teng bo‘lib qolganda, yoki *a* nuqta uzilish qismlarini ajratuvchi nuqta bo‘lganda sodir bo‘ladi.

1-teorema. Agar *y=f(x)* va *y=g(x)* funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda y= *y=f(x)+g(x)* va *y=f(x)·g(x)* funksiyalar ham shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

2- teorema. Agar *y=f(x)* va *y=g(x)* funksiyalar a nuqtada uzluksiz va *g(x)≠0* b`lsa, u holda $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham bu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Demak, ikkinchi teoremadan ko‘rinadiki, $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ ko‘rinishidagi (masalan, ko‘p hadni ko‘p hadga nisbati) funksiyalarda mahraj *g(x)*=0 bo‘lsa , $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya uzilishga ega bo‘ladi. Uzilish nuqtalari *g(x)*=0 tenglamani yechimi bo‘ladi. Masalan, $y=\frac{6x}{x+6}$ funksiya va x argumentning ikkita $x_1=5$ va $x_2=6$ qiymatlari berilgan. *y=f(x)* Bu funksiyaning berilgan x_1 ва x_2 qiymatlarida uzluksizligini yoki uzilishga egaligini aniqlang, uzilish nuqtasida bir tomonli limitlarni hisoblang:

$x_1=5$ qiymatida uzilishga ega emas, chunki

$$y(5)=\frac{6\cdot 5}{5+6}=\frac{30}{11}\quad va\quad \lim_{x\to 5}\frac{6x}{x+6}=\frac{30}{11}=y$$

Bu funksiya x_2=-6 qiymatda aniqlanmagan, demak bu nuqtada funksiya uzilishga ega.
2. Endi funksiyaning x_2=-6 nuqtadagi chap va o‘ng limitini hisoblaymiz.

$$\lim_{x\to -6-0}\frac{6x}{x+6}=+\infty$$
$$\lim_{x\to -6+0}\frac{6x}{x+6}=-\infty$$

2-misol.

$$y=f(x)=\begin{cases}3x+1,\ agar\ \ x\le 0\ \ bo'lsa\\ x^2+1,\ agar\ \ 0<x\le 1\quad bo'lsa\\ 1\quad agar\ \ x>1\ \ bo'lsa\end{cases}$$

Funksiya berilgan, bu funksiyaning:
1) uzilish nuqtalari bor bo‘lsa, ularni toping;
2) uzilish nuqtalarida bir tomonli limitni toping va sakrashini aniqlang.

yechilishi: 1) funksiyani *x=0* ва *x=1* nuqtalarda tekshiring.

x=0 bo‘lsin, u holda
$f(x)=1;\qquad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(3x+1)=1;$
$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x^2+1)=1$

Demak, $f(0-0)=f(0+0)\ va\quad f(x)\ \ x=0$ nuqtada uzluksizdir
$x=1$ bo‘lganda $f(1)=1^2+1=2;\quad \lim f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+1)=2;\quad \lim\limits_{x\to 1+0} 1=1$

Demak, $f(1-0)=f(1)\ne f(1+0)\quad va\quad f(x)\quad x=1$

Nuqtada 1-tur uzilishga ega. Bu nuqtada u chapdan uzluksiz ekan.

2. *f(x)* uchun *f(1-0)=2 va f(1+0)=1; f(x) funksiyaning x=1* nuqtadagi sakrashi

$|f(1+0)-f(1-0)|=|1-2|=1$ bo‘ladi.

Savollar

1. u = f(x) funksiyaning x→a dagi limiti nima?
2. x→a da limitga ega bo‘lgan funksiyaga misol keltiring.
3. u = f(x) funksiyaning x→a dagi limiti ta’rifini aytib bering.
   Ta’rifini tengsizlik yordamida keltiring.
4. Bir tomonlama limitlar nima: Funksiyaning nuqtadagi limiti va

bir tomonlama limit tushunchalari qanday bog‘langan?
5. Qanday funksiya chegaralangan funksiya deb ataladi?
6. Qanday funksiyani cheksiz katta funksiya deyiladi?
7. Qanday funksiyani cheksiz kichik funksiya deyiladi?
8. Qanday funksiya uzluksiz deyiladi?
9. Funksiya qachon uzilishga ega deyiladi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.

1. Hisoblang:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-x-3}$

2.. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{x^2-9}$

1

4 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-7x+3}{x3-27}$

5 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-3x-35}{x^2-3x-10}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+x+2}{x^2+3x+2}$

7.. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{\sqrt{x+8}-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-15}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-3x-10}{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{4x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin x+\sin 7x}$

12... $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{5x-1}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+7}{3x-5}\right)^{4x+3}$

14.. $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{3x}{x+1}}$

15.. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x-2}{\ln x}$

17. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-5x+6}$

18. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{3x}{x-1}}$

19. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x-2}{\ln x}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}$

2. y=f(x) funksiya va *x* argumentning ikkita x_1,x_2 *qiymati berilgan*. Argumentning berilgan qiymatlarida funksiyaning
a) uzluksiz yoki uzilishga ega ekanligini aniqlang;
b) uzilish nuqtalarida bir tomonli limitlarni xisoblang

1. $y=\frac{3x}{x-1}$; $x_1=1$; $x_2=3$

2. $y=\frac{4x}{x-2}$; $x_1=2$; $x_2=5$

3. $y=\frac{x}{x-3}$; $x_1=-2$; $x_2=3$

4. $y=\frac{5x}{x-5}$; $x_1=-1$; $x_2=5$

5. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$; $x_1=1$; $x_2=5$

6. $f(x)=4^{\frac{1}{x+3}}$; $x=2$; $x_2=-3$

3. $y=f(x)$ funksiya x argumentning har xil o‘zgarish orali?ida turli analitik ifodalar yordamida berilgan funksiyalarning

a) uzilish nuqtalarini toping (agar mavjud bo‘lsa) .

b) uzilish nuqtalarida bir tomonli limitlarni hisoblang va sakrashini toping.

$$1)\ y=\begin{cases}-2x, agar & x<-1 bo'lsa\\ x^2+1, agar & -1\le x<2 \quad bo'lsa\\ x-1, agar & x\ge 2 \ bo'lsa\end{cases}$$

$$2)\ y=\begin{cases}-3-x, agar & x<-2 \quad bo'lsa\\ x^2-5, agar & x-2\le x<3 \ bo'lsa\\ 7-2x, agar & x\ge 3 \ bo'lsa\end{cases}$$

$$3)\ y=\begin{cases}2x+1, agar & x<-1 bo'lsa\\ x^2, agar & -1\le x\le 2 \quad bo'lsa\\ 6-x, agar & x>2 \ bo'lsa\end{cases}$$

$$4)\ y=\begin{cases}x+1, agar & x\le 0 \ bo'lsa\\ \cos x, agar & 0\le x<\frac{\pi}{2} \quad bo'lsa\\ 2, agar & x\ge\frac{\pi}{2} \ bo'lsa\end{cases}$$

Foydalanilgan adabiyotlat ro‘yxati.

1. N.I.Vilenkin Matematika M. 1977
2. M. Sobirov. Matematika. Qo‘llanma.
3. Azlarov T.A. va boshqalar. Matematikadan qo‘llanma. T. O‘qituvchi. 1979.
4. T .Yoqubov. Matematik logika. T.: 1985.
5. M.Grebencha va boshqalar. Arifmetika. M. 1987.
6. O.Hydoyberganov. Matematika T. 1980
7. B.Chekmarov. Arifmetika. T. 1976.
8. M.Orifxonova va boshqalar. Matematika.T. 1984.
9. Yu.M.Kolagin. Osnovniye ponatiya sovremennogo shkolnogo kursa matematiki.M. 1974.
10. N.Hamedova, Z.Ibragimova, T.Tasetov. T.:Turon-iqbol. 2007

Munarija

Содержание

CONTENT

1 CHAPTER. Set and its primary concept related to it

2 CHAPTER. Non- negative whole numbers