O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYA VAZIRLIGI
NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

Matematik analiz kafedrasi

“FUNKSIONAL ANALIZ”

fanidan

O’QUV–USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi:	100 000 - Gumanitar soha
Ta’lim sohasi:	130 000 - Matematika
Ta’lim yo’nalishi:	5130100 - Matematika

Namangan 2023

O’quv uslubiy majmua 2023-yil № BD 5130100-1-raqami bilan 2023-yil 25-avgustdagi 1- sonli buyrug’i bilan tasdiqlangan fan dasturi asosida ishlab chiqilgan.

Tuzuvchi: PhD. katta o’qituvchi A. To’xtabayev

Taqrizchilar: M. Raxmatullayev, fizika-matematika fanlari doktori, DSc. Prof.

N.Xatamov, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

O’quv uslubiy majmua Namangan davlat universiteti Kengashininig 2023 yil

“28” avgustdagi “1” - son yig’ilishida ko’rib chiqilgan va foydalanishga tavsiya etilgan.

MUNDARIJA

SO’Z BOSHI

Funksional analiz fani matematikada asosiy o’rinni egallaydi. Hayotning ko’pgina masalalarini yechishda avvalo unga mos bo’lgan matematik modellar tuziladi. Tuzilgan matematik modellar asosan algebraik usul bilan tekshiriladi va yechiladi. Buni biror jarayonning differensial tenglamasi yoki differensial tenglamalar sistemasi misolida ko’rish mumkin. Har bir masalaning yechimini biror to’plamda (fazoda) qaraladi. Bu esa algebraik tushunchalarni, tasdiqlarni umumiy nuqtai nazardan qarashga olib keladi. Shu sabali bu o’quv-uslubiy majmuada avvalgi kursning davomi bo’lgan chiziqli operatorlar, teskari operatorlar, qo’shma operatorlar, kompakt operatorlar tushunchalari va unga doir masalalar ko’riladi.

Funksional analiz fan va texnikaning juda ko’p tarmoqlarida tatbiq etiladi. Axborotlarni uzatish va qabul qilishda (televideniya, radio, uyali telefon)da operatorlar nazariyasidan keng foydalaniladi. Iqtisodiy masalalarni modellashtirish va ularning optimal yechimlarini aniqlashda chiziqli operator tushunchalar muhim ahamiyatga ega.

Funksional analiz fani bakalavriatning 3-4- kurslarida o’qitilib, mutaxassislik fanlarining asosiylaridan hisoblanadi. Bu kursda metrik fazolar, normallangan fazolar, Fure almashtirishlari, chiziqli operatorlar, kompakt operatorlar, chiziqli funsionallar va chiziqli integral tenglamalar tushunchalari va ularga oid masalalar ko’riladi. 4-kursda asosan operatorlar nazariyasi o’rganiladi.

KREDIT-MODUL TIZMNING O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

I. Klaster metodi. Klaster (inglizcha *Cluster* – bog’lam) deb – muayyan xossalarga ega bir nechta birjisli elementlarni umumiy xususiyatlariga ko’ra bitta mustaqil ob’ektga birlashtirishga aytiladi. SHu bois, uni o’zbek tilida “**Tushunchalar bog’lami**” deb ham atash mumkin.

Klaster (Tushunchalar bog’lami) metodi o’quv materialini ko’rgazmali, sxematik tarzda tasvirlashdan iborat bo’lib, u o’rganilayotgan u yoki bu tushunchalar haqida tasavvurga ega bo’lishga, ularni tushunishga va ularning tarkibiy qismlari va o’zaro bog’lanishlarini yaqqol tasvirlashga yordam beradi. Bu bilan mazkur metod xotirani rivojlantirishga va o’quvchining o’z bilimlarini o’zi baholashiga ham yordam beradi.

Klaster (Tushunchalar bog’lami) metodining 4ta bosqichi bo’lib, u quyidagi algortm asosida darsda qo’llaniladi:

1-bochqich – Doskaga yoki oq varaqqa dars mavzuning o’zak so’zi (tushunchasi) yoki g’oyasi yoziladi.

2-bosqich – O’quvchilar mazkur so’z (tushuncha) haqida bilgan va yodlariga kelgan barcha narsalarni yozib chiqishadi. Natijada markazdan har tomnga qarab ketgan, shu mavzu bilan bog’liq bo’lgan turli tushuncha, g’oya va , faktlarni tasvirlovchi so’z yoki so’z birikmlari hosil bo’ladi. O’quvchilar aytgan barcha narsalar tashlab yuborilmasdan doskaga (qog’ozga) yoziladi.

3-bosqich – Doskaga (qog’ozga) yozilganlar bir tizimga keltiriladi. O’qituvchi tomonidan tushuntirilgan o’quv materiali asosida yozilganlar tahlil qilinadi va bir tizimga keltirishga harakat qilinadi. Tarqoq jumlalar birlashtiriladi, xato yozilganlari esa o’chirib tashlanadi.

4-bosqich – Yozilgan tushunchalar o’zaro bog’lliqligiga qarab o’zak so’z (tushuncha) bilan tutashtiriladi. Ular birinchi darajali bog’liq yozuvlar bo’ladi. O’z navbatida bu yozuvlar bilan bog’liq ikkinchi darajali yozuvlar ham bo’lishi mumkin. Ular o’zak so’z bilan emas, yozilgan qaysi tushuncha bilan o’zaro aloqadorlikda bo’lsa, o’sha bilan tutashtiriladi va hokazo.

Natijada mavzuga oid tushuncha va faktlarning o’zaro bog’liqligini aniqlovchi irarxiyali sxema paydo bo’ladi. Bu sxema mavzu mazmunini sxematik tasvirlab, uni yaxshiroq tushunishga yordam beradi.

II. Baqs-munozara va musobaqa usullari metodi.

Bahs-munozarani o'tkazish yo'l-yo'riqlari

1. O'qituvchi munozara mavzusini tanlaydi va o'quvchilarni munozaraga taklif etadi.

2. O'qituvchi o'quvchilarga muammo bo'yicha «aqliy hujum» o'tkazishga chorlaydi va uni o'tkazish tartibini belgilaydi.

3. O'qituvchi «Aqliy hujum» vaqtida bildirilgan turli g'oya va fikrlarni yozib boradi yoki bu ishni bajarish uchun o'quvchilardan birini kotib etib tayinlaydi. Bu bosqichda O'qituvchi o'quvchilarga o'z fikrlarini bildirishlariga sharoit yaratib beradi.

4. O'qituvchi o'quvchilar bilan birgalikda, ikkinchi bosqichda «aqliy hujum» davomida bildirilgan fikr va g'oyalarni guruhlarga ajratadi, umumlashtiradi va ularni tahlil qiladi. Tahlil natijasida qo'yilgan muammoning eng maqbul yechimi tanlanadi.

III. Ma’ruza metodi.

Bu uslub butunlay «so’zlash» orqali amalaga oshiriladigan o’qitishning eng rasmiy uslubi hisoblanadi. U 40 daqiqa yoki undan uzoqroq davom etadi va odatda o’quvchining ishtiroki uchun hech qanday imkoniyat qoldirmaydi.

Ma’ruza metodining qulayliklari:

- Ma’lumotlar, tushuntirishlar (izohlar) va faktlar ratsional ravishda taqdim etiladi
- Mazmun va vaqt jihatidan oson rejalashtiriladi
- Emotsional jihatdan kuchli imkoniyatlar ishlatilishi mumkin

Ma’ruza metodining kamchiliklari:

- O’quvchining faolligi nihoyatda cheklangan
- O’quvchi materialni o’zlashtirganligini deyarli aniqlab bo’lmaydi

Ma’ruzani tushunarliligini oshiruvchi jihatlar:

- Fikrni sodda tilda bayon etish
- Ma’ruza tuzilmasining (strukturasining) mantiqan to’g’ri tuzilganligi
- Fikrlarni qisqa va lo’nda ifodalash
- Rag’batlantirish (stimullar)
- Notiqlik, ravon tilda gapirish va talaffus

Fikrni sodda tilda bayon etish: O’z fikrini sodda ifodalash – yaxshi o’qituvchining eng muhim fazilatlaridan biridir. O’z fikrini murakkab tilda ifodalash - ziyolilik va professionalizm belgisi hisoblanmaydi. O’z fikrini sodda tilda ifodalash – tinglovchibop gapirish demakdir.

Soda tilda gapirishga quyidagilar vositasida erishiladi:

- Aytilgan fikrni ko’rgazmali qilib yetkazish
- Fikrni qisqa gaplar vositasida ifodalash
- Oddiy so’zlarni ishlatish

- Atamalar ma’nosini tushuntirib ketish
- CHet tili kirib kelgan so’zlarni iloji boricha ishlatilmaslik, ishlatilgan taqdirda tushuntirish berish
- Sodda tuzilishsha ega bo’lgan gaplarni ishlatish
- Aktiv fe’llarni ishlatish

Ma’ruza tuzilmasining (strukturasining) mantiqan to’g’ri tuzilganligi

Ma’ruzaning ushbu belgisi ma’ruzaning tashqi tuzilishi va ichki tartibini to’g’ri tuzilganligini bildiradi. Ma’ruzaning tashqi tuzilishi - uni o’qishda qilinadigan quyidagi hatti-harakatlarini bildiradi:

- Ma’ruza mavzusi bilan tanishtirish
- Mavzuni asoslash
- Mantiqiy tuzilma asosida ma’ruzani olib borish
- Ma’ruzani yakunlash

Ma’ruzaning ichki tartibi uni o’qishda rioya qilinadigan mantiqiy ketma-ketlikni bildiradi:

- Ma’lumotlar mantiqiy to’g’ri ketma-ketlikda berilishi
- Ma’ruzaning alohida qismlari o’rtasida o’zaro aloqalarni o’rnatish
- Mantiqiy ketma-ketlikka rioya qilish
- Bir fikrdan boshqa fikrga sakrab o’tishiga yo’l qo’ymaslik
- Muhim va uncha muhim bo’lmagan narsalarni farqlash
- «Fikrlar kalavasi» aniq bilinib turishi

Fikrlarni qisqa va lo’nda ifodalash. Fikrlarni qisqa va lo’nda ifodalash deganda, ma’ruza mazmunining ortiqcha vaqt ketmasdan, lo’nda, aniq va to’g’ri ifodalanishi tushuniladi:

- butunlay o’quv maqsadga qaratilgan
- asosiy mazmunga qaratilgan
- to’g’ri (bexato) ifodalardan iborat
- muhim va kerakli izohlar bilan cheklangan

Rag’batlantirish (stimullar). Rag’batlantirish (stimullar**)** deb ma’ruza tarkibidagi shunday qo’shimchalar tushuniladiki, ular ma’ruza mazmunini tinglovchilarga jonliroq qilib beradi va shu orqali ularning e’tibori va qiziqishini ta’minlaydi. Stimulyatsiyaga quyidagilar yordamida erishiladi:

- Ma’ruza mazmunlarini turli qiziqarli faktlar, masalan urf-odat, hikoya yoki misollar yordamida aniqlashtirish
- Taassurotli gapirish

- Aytilayotgan fikrlarni ko’rgamali tarzda yetkazish (vizuallashtirish)
- qiyoslarda raqamlar va faktlarni ishlatish
- Tinglovchilarbop qiziqarli ifodalarni tanlash
- SHaxsiy fikrni bildirish
- Tinglovchilarning fikr-mulohazalaridan foydalanish

Ma’ruzaning tuzilishi (strukturasi). Ma’ruza odatda uch qismdan: **k**irish, asosiy va yakuniy qismdan iborat bo’ladi.

Kirish qismi:

- qutlash
- Mavzu
- Maqsad
- Tashkiliy savollar
- Motivatsiya, qiziqishni o’yg’otish

Asosiy qism:

- Asosiy fikr 1
- Asosiy fikr 2
- Asosiy fikr 3 va hokazo.

Yakuniy qism

- Natija va xulosa
- Umumlashtirish
- Umumiylashtirish
- Keyingi mavzuga nazar tashlash

Ma’ruzachiga qo’yilgan talablar

Gavdani tutish: Tik, tinglovchilarga qaratilgan, erkin, ikki oyoqqa mahkam tayangan, boshi ko’tarilgan, ammo burun ko’tarilmagan holatda.

qo’llar: Bo’sh holatda, ikki yonda osilib turgan yoki kamardan yuqorida ikki qul bir biriga ulangan; kamardan yuqoridagi harakatlar, tasavvurli (ifodali) hatti-harakatlar– gapirish tezligida emas balki, sokin, asta-sekin va xotirjam.

Yuz: Tinglovchilarga qaratilgan, xotirjam.

Ko’z qarashlari: Hadeb bir kishiga tikilmasdan, auditoriyadagi har bir kishiga 3-5 sekund davomida qarash, samimiy

Harakatlar: Maqsadga muvofiq tarzda bir joydan boshqa joyga o’tish, «o’tirib-turishlar» emas, xotirjamlik bilan yordamchi vositalarni qo’lga olish va ishlatish, xotirjam harakatlar, onda-sonda tinglovchilar tomoniga o’tish.

Ovoz: Tanaffuslar bilan (ayniqsa harakatlar paytida), sekin tezlikda va baland ovozda gapirish.

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

"TASDIQLAYMAN"
O’quv ishlari bo’yicha prorektori
_______________ D.Xolmatov
"___" _____________ 2023 yil

FUNKSIONAL ANALIZ
FANINING

ISHCHI O‘QUV DASTURI

4-kurs, kunduzgi ta’lim shakli uchun

Bilim sohasi:	100000 – Tabiiy fanlar, matematika va statistika
Ta’lim sohasi:	130000 – Gumanitar fanlar
Ta’lim yo‘nalishi:	5130100 – Matematika

Namangan-2023

<table>
<tr><td colspan="2">Fan/modul kodi
FANB3709</td><td>O‘quv yili
2023/2024</td><td colspan="2">Semestr
6-7</td><td>ECTS-Kreditlar
5+4=9</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fan/modul turi
Majburiy</td><td colspan="3">Ta’lim tili
O‘zbek</td><td>Haftadagi dars soatlari
6-semestr - 4 soat
7-semestr - 2 soat</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Fanning nomi</td><td colspan="2">Auditoriya mashg‘ulotlari (soat)</td><td>Mustaqil ta’lim (soat)</td><td>Jami yuklama (soat)</td></tr>
<tr><td>Funksional analiz</td><td colspan="2">90</td><td>180</td><td>270</td></tr>
</table>

I.FANNING MAZMUNI

Fanni o‘qitishdan maqsad - Fanning asosiy maqsadi talabalarga nazariy bilim berish, tegishli tushunchalar, tasdiqlar, funksional analizga xos bo‘lgan isbotlash usullarini o‘rgatish, olgan nazariy bilimlarini masalalar yechishga tatbiq eta bilish, ularda mantiqiy mushoxada qilish, fazoviy tasavvur hamda abstrakt tafakkur kabi, inson faoliyatining barcha sohalari uchun zarur bo‘lgan qobiliyatni shakllantirishdan iboratdir.

Fanning vazifasi - Fanni o‘qitishning vazifasi talabalarga Funksional analizga oid bilimlar berish, olgan nazariy bilimlarini amaliyotga qo‘llay bilishga o‘rgatishdan va oqibat natijada ularni abstrakt fikrlash madaniyatini yuksak pog‘onalarga ko‘tarishdan iboratdir

II. ASOSIY NAZARIY QISM (MA’RUZA MASHG‘ULOTLARI)

II.1. Fan tarkibiga quyidagi mavzular kiradi:

1-mavzu. Metrik fazolar.

Metrik fazolar va ularga misollar. Yaqinlashishlar. Uzluksiz akslantirishlar. Metrik fazodagi ochiq va yopiq to’plamlar. To’la va separable metrik fazolar

Ichma-ich joylashgan sharlar haqidagi teorema. Ber teoremasi. To'ldiruvchi fazo haqidagi teorema.

2-mavzu. Topologik fazolar.

Qisqartirib akslantirish prinsipi va uning tatbiqlari. Topologik fazo ta'rifi va misollar. Atroflar. Yopiq to'plamlar. Topologik fazolarni uzluksiz akslantirish. Kompaktlik.

3-mavzu. Chizqli fazolar.

Chiziqli fazolar. Qism fazo, faktor fazolar. Chiziqli funksionallar va ularning geometric ma'nosi.

4-mavzu. Normallangan fazolar.

Normalangan fazolar va ularning xossalari. Normalangan fazodagi birlik sharning kompakt bo'lishlik belgisi. Normalangan fazoda qatorlar. Normalangan fazoda sust yaqinlashish. Normalangan va Banax fazolarining faktor fazolari. $L_1(X,\Sigma,\mu)$ fazo

5-mavzu. Chiziqli fazolar. Normalangan fazolar. Yevklid va Gilbert fazolari.

. Yevklid fazosi. Ortogonallashtirish. Bessel tengsizligi. Riss-Fisher teoremasi. Gilbert fazosi, uning xossalari. Gilbert fazosini qism fazolar yig'indisiga yoyish. Gilbert fazodagi Fur'ye qatorlari. $L_2(X,\Sigma,\mu)$ fazo. Chiziqli topologik fazolar. Qavariq to'plamlar va qavariq funksionallar. Xan-Banax teoremasi.

6-mavzu. Operatorlar nazariyasi

Operatorning normasi. Chiziqli operatorlar fazosi. Operatorlarning tekis va kuchli yaqinlashishi. Tekis chegaralanganlik prinsipi. Teskari operatorlar haqidagi teoremalar. Qo'shma operatorlar. O'z-oziga qo'shma operatorlar. Chiziqli operatorlar xos qiymatlari va xos funksiyalari. Chiziqli operatorlar spektri va rezolventa to'plami. Chiziqli operatorlarning spektral radiusi. Kompakt operatorlar.

II.2. MA'RUZA MAVZULARINI TAQSIMLANISHI

№	Mavzular	Soati
1	Metrik fazolar va ularga misollar. Yaqinlashishlar.	2
2	Metrik fazodagi ochiq va yopiq to'plamlar. To'la va separabel metrik fazolar. Ichma-ich joylashgan sharlar haqidagi teorema.	4

	To'ldiruvchi fazo haqidagi teorema.	
3	Metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar. Qisqartirib akslantirish prinsipi va uning tatbiqlari.	2
4	Topologik fazo ta'rifi va misollar. Atroflar. Yopiq to'plamlar. Topologik fazolarni uzluksiz akslantirish. Kompaktlik.	4
5	Ultrametrik fazolar.	2
	Chiziqli fazolar	
6	Chiziqli fazolar. Qism fazo, faktor fazolar. Yevklid fazosi	2
7	Chiziqli funksionallar. Qavariq to'plam va qavariq funksionallar	2
8	Norma va skalyar ko'paytma. Normalangan fazolar va ularning xossalari. Banax va Gilbert fazolari. Umumlashgan Pifagor teoremasi.	4
9	Chiziqli erkli, orthogonal va ortonormal sistemalar. Ortogonallashtirish va ortonormallashtirish (Shmid) jarayoni	4
10	Gramm determinant. Lejandrning normallashtirilgan ko'phadi. Vazn bilan ortogonal ko'phadlar sistemasi.	2
11	Ortonormal sistema yordamida funksiyani furye qatoriga yoyish	2
		30
	7-**semestr**	
	Operatorlar nazariyasi	
	Operatorning normasi. Chiziqli operatorlar fazosi. Operatorlarning tekis va kuchli yaqinlashishi. Tekis chegaralanganlik prinsipi. Teskari operatorlar haqidagi teoremalar.	6
	Qo'shma operatorlar. O'z-oziga qo'shma operatorlar. Chiziqli operatorlar xos qiymatlari va xos funksiyalari.	4
	Chiziqli operatorlar spektri va rezolventa to'plami. Chiziqli operatorlarning spektral radiusi. Kompakt operatorlar	4
		14

1-mavzu. Metrik fazolar.

Metrik fazolar va ularga misollar. Yaqinlashishlar. Uzluksiz akslantirishlar. Metrik fazodagi ochiq va yopiq to'plamlar. To'la va separable metrik fazolar Ichma-ich joylashgan sharlar haqidagi teorema. Ber teoremasi. To'ldiruvchi fazo haqidagi teorema.

2-mavzu. Topologik fazolar.

Qisqartirib akslantirish prinsipi va uning tatbiqlari. Topologik fazo ta'rifi va misollar. Atroflar. Yopiq to'plamlar. Topologik fazolarni uzluksiz akslantirish. Kompaktlik.

3-mavzu. Chizqli fazolar.

Chiziqli fazolar. Qism fazo, faktor fazolar. Chiziqli funksionallar va ularning geometric ma'nosi.

4-mavzu. Normallangan fazolar.

Normalangan fazolar va ularning xossalari. Normalangan fazodagi birlik sharning kompakt bo'lishlik belgisi. Normalangan fazoda qatorlar. Normalangan fazoda sust yaqinlashish. Normalangan va Banax fazolarining faktor fazolari. $L_1(\mathrm{X},\Sigma,\mu)$ fazo

5-mavzu. Chiziqli fazolar. Normalangan fazolar. Yevklid va Gilbert fazolari.

. Yevklid fazosi. Ortogonallashtirish. Bessel tengsizligi. Riss-Fisher teoremasi. Gilbert fazosi, uning xossalari. Gilbert fazosini qism fazolar yig'indisiga yoyish. Gilbert fazodagi Fur'ye qatorlari. $L_2(\mathrm{X},\Sigma,\mu)$ fazo. Chiziqli topologik fazolar. Qavariq to'plamlar va qavariq funksionallar. Xan-Banax teoremasi.

6-mavzu. Operatorlar nazariyasi

Operatorning normasi. Chiziqli operatorlar fazosi. Operatorlarning tekis va kuchli yaqinlashishi. Tekis chegaralanganlik prinsipi. Teskari operatorlar haqidagi teoremalar. Qo'shma operatorlar. O'z-oziga qo'shma operatorlar. Chiziqli operatorlar xos qiymatlari va xos funksiyalari. Chiziqli operatorlar spektri va rezolventa to'plami. Chiziqli operatorlarning spektral radiusi. Kompakt operatorlar.

III.2. AMALIY MASHG‘ULOT MAVZULARINI TAQSIMLANISHI		
№	**Amaliy mashg‘ulot mavzulari**	**Soati**
1	Metrik fazolar va ularga misollar. Yaqinlashishlar.	2
2	Metrik fazodagi ochiq va yopiq to’plamlar. To’la va separabel metrik fazolar. Ichma-ich joylashgan sharlar haqidagi teorema. To’ldiruvchi fazo haqidagi teorema.	4
3	Metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar. Qisqartirib akslantirish prinsipi va uning tatbiqlari.	2
4	Topologik fazo ta’rifi va misollar. Atroflar. Yopiq to’plamlar. Topologik fazolarni uzluksiz akslantirish. Kompaktlik.	4
5	Ultrametrik fazolar.	2
	Chiziqli fazolar	
6	Chiziqli fazolar. Qism fazo, faktor fazolar. Yevklid fazosi	2
7	Chiziqli funksionallar. Qavariq to’plam va qavariq funksionallar	2
8	Norma va skalyar ko’paytma. Normalangan fazolar va ularning xossalari. Banax va Gilbert fazolari. Umumlashgan Pifagor teoremasi.	4
9	Chiziqli erkli, orthogonal va ortonormal sistemalar. Ortogonallashtirish va ortonormallashtirish (Shmid) jarayoni	4
10	Gramm determinant. Lejandrning normallashtirilgan ko’phadi. Vazn bilan ortogonal ko’phadlar sistemasi.	2
11	Ortonormal sistema yordamida funksiyani furye qatoriga yoyish	2
		30
	7**-semestr**	
	Operatorlar nazariyasi	
	Operatorning normasi. Chiziqli operatorlar fazosi. Operatorlarning tekis va kuchli yaqinlashishi. Tekis chegaralanganlik prinsipi. Teskari	6

	operatorlar haqidagi teoremalar.	
	Qo'shma operatorlar. O'z-oziga qo'shma operatorlar. Chiziqli operatorlar xos qiymatlari va xos funksiyalari.	6
	Chiziqli operatorlar spektri va rezolventa to'plami. Chiziqli operatorlarning spektral radiusi. Kompakt operatorlar	4
		16

V.1. MUSTAQIL TA'LIM VA MUSTAQIL ISHLAR		
1	Sorn lemmasi.	6
2	Metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar. Izometriya	10
3	Topologik fazolar gomeomorfizmi	10
4	Baza. Sanoqlilik aksiomalari	10
5	Ajratuvchilik aksiomalari	6
6	Ayrim metrik fazolarda kompaktlilik aksiomalari	8
7	Metrik fazolarda uzluksiz egri chiziqlar	8
8	Ayrim metrik fazolarning qo'shmasi	8
9	Deyarli, tekis va o'lchov bo'yicha yaqinlashishlar.	8
10	Sodda funksiya Lebeg integrali	8
11	Chegaralangan funksiya Lebeg integrali	8
12	Chegaralanmagan funksiya Lebeg integrali	8
13	Lebeg integrali ostida limitga o'tish, hadma- had differensiallash va integrallash haqidagi teoremalar.	10
14	Metrik fazolar.	10
15	To'la metrik fazolar	6
16	Separabel metrik fazolar	6

1	Normalangan va Banax fazolari.	6
2	Yevklid va Gilbert fazolari.	4
3	Chiziqli operatorlar,xossalari.	4
4	Normalangan fazolarda operator normasi.	6
5	Yevklid fazolarida operatorlar.	4
6	Kompakt operatorlar	6
7	Operatorlar spektri, turlari, xossalari.	4
8	Normalangan va Banax fazolarining faktor fazolari. $L_1(X,\Sigma,\mu)$ fazo.	6
9	Yevklid fazosi. Ortogonallashtirish jarayoni.	4
10	Gilbert fazosi, xossalari. $L_2(X,\Sigma,\mu)$ fazo	4
11	Chegaralangan va uzluksiz chiziqli operatorlar.	4
12	Operatorlarning tekis va kuchli yaqinlashishi. Tekis chegaralanganlik prinsipi.	4
13	Integral operatorlar, ularning xos sonlari va xos funksiyalari.	4

VI. FAN O‘QITILISHINING NATIJALARI (SHAKLLANADIGAN KOMPETENTSIYALAR)

Fanni o‘zlashtirishi natijasida talaba:

- ✓ Funksional analiz fanini fanlar tizimida tutgan o‘rni, obyekti va predmeti, shakllanishi, rivojlanishi, zamonaviy tuzilishi haqida ***tasavvur va bilimga ega bo‘lishi***;
- ✓ Funksional analizni, qonunlar, asosiy tushunchalar, jarayonlarning xususiyatlarini bilish va ulardan foydalanish ***ko‘nikmalariga ega bo‘lishi***;
- ✓ Talaba Pedagogika nazariyasi va tarixini tahlil qilish usullarini qo‘llash, ta’lim va tarbiya o‘rtasidagi o‘zaro bog‘liqlik va aloqadorlikni aniqlay olish, muammolar bo‘yicha yechimlar qabul qilish malakasiga ***ega bo‘lishi kerak.***

VII. TA’LIM TEXNOLOGIYALARI VA METODLARI

- ✓ ma’ruzalar;
- ✓ interfaol keys-stadilar;

- ✓ seminarlar (mantiqiy fikrlash, tezkor savol-javoblar);
- ✓ guruhlarda ishlash;
- ✓ individual loyihalar
- ✓ jamoa bo‘lib ishlash va himoya qilish uchun loyihalar

VIII. KREDITLARNI OLISH UCHUN TALABLAR

Fanga ajratilgan kreditlar talabalarga har bir semestr bo’yicha nazorat turlaridan ijobiy natijalarga erishilgan taqdirda taqdim etiladi.

Fan bo’yicha talabalar bilimini baholashda oraliq (ON) va yakuniy (YaN) nazorat turlari qo’llaniladi. Nazorat turlari bo’yicha baholash: 5 – “a’lo”, 4 – “yaxshi”, 3 – “qoniqarli”, 2 – “qoniqarsiz” baho mezonlarida amalga oshiriladi.

Oraliq nazorat har semestrda bir marta yozma ish shaklida o’tkaziladi.

Talabalar semestrlar davomida fanga ajratilgan amaliy (seminar) mashg’ulotlarda muntazam, har bir mavzu bo’yicha baholanib boriladi va o’rtachalanadi. Bunda talabaning amaliy (seminar) mashg’ulot hamda mustaqil ta’lim topshiriqlarini o’z vaqtida, to’laqonli bajarganligi, mashg’ulotlardagi faolligi inobatga olinadi.

SHuningdek, amaliy (seminar) mashg’ulot va mustaqil ta’lim topshiriqlari bo’yicha olgan baholari oraliq nazorat turi bo’yicha baholashda inobatga olinadi. Bunda har bir oraliq nazorat turi davrida olingan baholar o’rtachasi oraliq nazorat turidan olingan baho bilan **qayta o’rtachalanadi**.

O’tkazilgan oraliq nazoratlardan olingan baho **oraliq nazorat natijasi** sifatida qaydnomaga rasmiylashtiriladi.

Yakuniy nazorat turi semestrlar yakunida tasdiqlangan grafik bo’yicha **yozma ish** shaklida o’tkaziladi.

Oraliq (ON) va yakuniy (YaN) nazorat turlarida:

Talaba mustaqil xulosa va qaror qabul qiladi, ijodiy fikrlay oladi, mustaqil mushohada yuritadi, olgan bilimini amalda qo’llay oladi, fanning (mavzuning) mohiyatini tushunadi, biladi, ifodalay oladi, aytib beradi hamda fan (mavzu) bo’yicha tasavvurga ega deb topilganda – **5 (a’lo) baho**;

Talaba mustaqil mushohada yuritadi, olgan bilimini amalda qo’llay oladi, fanning (mavzuning) mohiyatini tushunadi, biladi, ifodalay oladi, aytib beradi hamda fan (mavzu) bo’yicha tasavvurga ega deb topilganda – **4 (yaxshi) baho**;

Talaba olgan bilimini amalda qo’llay oladi, fanning (mavzuning) mohiyatini tushunadi, biladi, ifodalay oladi, aytib beradi hamda fan (mavzu) bo’yicha tasavvurga ega deb topilganda – **3 (qoniqarli) baho**;

Talaba fan dasturini o’zlashtirmagan, fanning (mavzuning) mohiyatini tushunmaydi hamda fan (mavzu) bo’yicha tasavvurga ega emas, deb topilganda – **2 (qoniqarsiz) baho** bilan baholanadi.

ASOSIY ADABIYOTLAR:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа. М. «Наука». 1989
2. Sarimsoqov T.A., Haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, T. 1993
3. Sarimsoqov T.A., Funksional analiz kursi. O‘qituvchi, T., 1986
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Краткий курс функционального анализа, Изд-во «Наука» М. 1982
5. Треногин В.А., Функциональный анализ. М «Наука». 1980
6. Abdullayev J.I. va boshqalar., Funksional analiz, Toshkent-Samarqand, 2009.
7. Очан Ю.С., Сборник задач по математическому анализу. М. Просвешение.1981.

QO‘SHIMCHA ADABIYOTLAR:

8. Asqarova O‘.M., Maxsudova M.A. Umumiy pedagogika va psixologiya. Darslik. Namangan: “Usmon Nosir” nashriyoti. 2022.
9. Asqarova O‘.M. Pedagogikadan amaliy mashqlar va masalalar (Bakalavriatning barcha pedagogik yo‘nalishlari uchun o‘quv-uslubiy qo‘llanma). NamDU. – T.: Istiqlol, 2005. -112 b.
10. Xasanboev P.J., Turakulov X., Xaydarov M.. Xasanboeva O. Pedagogika fanidan izohli lug‘at. – T., 2008.

AXBOROT MANBAALARI

1. http://www.ziyonet.uz/
2. http://www.allmath.ru/
3. http://www.mcce.ru/
4. http://lib.mexmat.ru/
5. http://www.webmath.ru/
6. http://www.exponenta.ru/

Namangan davlat universiteti tomonidan ishlab chiqilgan va tasdiqlangan:

- “Matematik analiz” kafedrasining 2023-yil, “___”-iyundagi № ____-sonli majlisida muhokama qilingan va tasdiqqa tavsiya etilgan.

- Matematika fakulteti kengashining 2023-yil, “___”-iyuldagi № ____-sonli majlisida ma’qullangan va tasdiqqa tavsiya etilgan.

- NamDU o’quv-uslubiy kengashining 2023-yil, “___”-iyuldagi № ____- sonli majlisida muhokama qilingan va tasdiqlangan.

Fan/modul uchun mas’ullar:

M.M.Karimov - Namangan davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasi katta o‘qituvchisi

R.A.Mamadjonov- Namangan davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasi katta o‘qituvchisi

Taqrizchi:
O‘X.mamadaliyev – NamDU “Matematik analiz” kafedrasi dotsenti, (PhD)

NamDU o’quv-uslubiy boshqarma boshlig’i X. Mirzaaxmedov

Matematika fakulteti dekani X. Mavlyanov

Matematik analiz kafedrasi mudiri A. Mashrabboyev

Tuzuvchilar M. Karimov

A.To’xtabayev

MA’RUZA MATERIALLARI

1-mavzu: Chiziqli operatorlar. Misollar

Biz asosan chiziqli operatorlarni qaraymiz. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plami chiziqli normalangan fazolarning qism fazolari bo‘ladi. Shunday qilib bizga X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo‘lsin.

11.1-ta’rif. *X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo‘yuvchi*

$$Ax = y \qquad (x \in X, \ \ y \in Y)$$

akslantirish operator deyiladi.

Umuman A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo‘lishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo‘lgan barcha $x \in X$ lar to‘plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya’ni:

$$D(A) = \{\exists x \in X : Ax \ \ \text{mavjud} \ \ \text{va} \ \ Ax \in Y \}.$$

Agar chiziqli A operator qaralayotgan bo‘lsa, $D(A)$ ning chiziqli ko‘pxillilik bo‘lishi talab qilinadi, ya’ni agar $x, y \in D(A)$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ lar uchun $\alpha x + \beta y \in D(A)$.

11.2-ta’rif. *Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ sonlar uchun*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, A ga chiziqli operator deyiladi.

11.3-ta’rif. *Bizga $A: X \to Y$ operator va $x_0 \in D(A)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Agar $y_0 = Ax_0 \in Y$ ning ixtiyoriy V atrofi uchun, x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in U \cap D(A)$ lar uchun $Ax \in V$ bo‘lsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.*

11.3-ta’rifga teng kuchli quyidagi ta’riflarni keltiramiz.

11.4-ta’rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo‘lib, $\| x - x_0 \| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(A)$ lar uchun*

$$\| Ax - Ax_0 \| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A *operator* $x = x_0$ *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

11.5-ta'rif. *Agar* x_0 *nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy* x_n *ketma-ketlik uchun* $\| Ax_n - Ax_0 \| \to 0$ *bo'lsa, u holda* A *operator* x_0 *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Agar A operator ixtiyoriy $x \in D(A)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, A uzluksiz operator deyiladi.

11.6-ta'rif. $Ax = \theta$ *tenglikni qanoatlantiruvchi barcha* $x \in X$ *lar to'plami* A *operatorning yadrosi deb ataladi va u* $KerA$ *bilan belgilanadi.*

11.7-ta'rif. *Biror* $x \in D(A)$ *uchun* $y = Ax$ *bajariladigan* $y \in Y$ *lar to'plami* A *operatorning qiymatlar sohasi yoki tasviri deb ataladi va u* $\mathrm{Im}A$ *yoki* $R(A)$ *bilan belgilanadi.*

Matematik formulalar yordamida operator yadrosi va qiymatlar sohasini quyidagicha yozish mumkin:

$$KerA = \{\exists x \in D(A) :\ Ax = \theta\},$$

$$R(A) := \mathrm{Im}A = \{\exists y \in Y : \text{biror } \ x \in D(A) \text{ uchun } \quad y = Ax\}.$$

Chiziqli operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi chiziqli ko'pxillik bo'ladi. Agar $D(A) = X$ bo'lib, A uzluksiz operator bo'lsa, u holda $KerA$ yopiq qism fazo bo'ladi, ya'ni $KerA = [KerA]$. A operator uzluksiz bo'lgan holda ham $\mathrm{Im}A \subset Y$ yopiq qism fazo bo'lmasligi mumkin.

Chiziqli operatorlarga misollar.

11.1. X - ixtiyoriy chiziqli normalangan fazo bo'lsin.

$$Ix = x, \quad x \in X$$

akslantirish birlik operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu operatorning chiziqliligi va uzluksizligi quyidagi tengliklardan bevosita kelib chiqadi:

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha I x + \beta I y,$$

$$\| I(x - x_0) \| = \| x - x_0 \|.$$

Qo‘shimcha qilib aytishimiz mumkinki, uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o‘rinli:

$$D(I)=X,\ R(I)=X,\quad KerI=\{0\}.$$

11.2. Bizga X va Y ixtiyoriy chiziqli normalangan fazolar berilgan bo‘lsin.

$$\Theta: X \to Y,\quad \Theta x=\theta$$

operator nol operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Nol operatorning chiziqliligi va uzluksizligi bevosita ta’rifdan kelib chiqadi. Uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o‘rinli:

$$D(\Theta)=X,\qquad R(\Theta)=\{\theta\},\qquad Ker(\Theta)=X\ .$$

11.3. Aniqlanish sohasi $D(A)=C^{(1)}[a,b]\subset C[a;b]$ bo‘lgan va $C[a;b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi

$$A:C[a;b]\to C[a;b],\quad (Af)(x)=f\,'(x)$$

operatorni qaraymiz. Bu operator differensial operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Uning chiziqli ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $f,g\in D(A)$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasi bo‘lgan $\alpha f+\beta g$ elementga A operatorning ta’sirini qaraymiz:

$$(A(\alpha f+\beta g))(x)=(\alpha f(x)+\beta g(x))'=\alpha f\,'(x)+\beta g'(x)=\alpha(Af)(x)+\beta(Ag)(x).$$

Biz bu yerda yig‘indining hosilasi hosilalar yig‘indisiga tengligidan, hamda o‘zgarmas sonni hosila belgisi ostidan chiqarish munkinligidan foydalandik. Demak, A operator chiziqli ekan. Uni nol nuqtada uzluksizlikka tekshiramiz. Ma’lumki, $A\theta=\theta$, bu yerda θ - $C[a;b]$ fazoning nol elementi, ya’ni $\theta(x)\equiv 0$. Endi nolga yaqinlashuvchi $f_n\in D(A)$ ketma-ketlikni tanlaymiz. Umumiylikni buzmagan holda $a=0,\ b=1$deymiz.

$$f_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1},\ \lim_{n\to\infty}\|f_n\|=\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$(Af_n)(x)=x^n,\quad \lim_{n\to\infty}\| Af_n - A\theta \| = \lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|x^n\right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \ne 0.$$

Demak, A operator nol nuqtada uzluksiz emas ekan. 11.2-teoremaga ko‘ra differensial operator aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida uzilishga ega.

Uning qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o‘rinli:

$$R(A)=C[a,b],\qquad KerA=\{const\}.$$

11.4. Endi $C[a;b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi B operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Bf)(x)=\int_a^b K(x,t)f(t)dt \tag{11.1}$$

Bu operator integral operator deyiladi. Bu yerda $K(x,y)$ funksiya $[a,b]\times[a,b]$ -kvadratda aniqlangan, uzluksiz. $K(x,y)$ integral operatorning o‘zagi (yadrosi) deyiladi. B operatorni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Ma’lumki, ixtiyoriy $f\in C[a,b]$ uchun $K(x,t)f(t)$ funksiya x va t larning uzluksiz funksiyasidir. Matematik analiz kursidan ma’lumki,

$$\int_a^b K(x,t)f(t)dt$$

integral parametr $x\in[a,b]$ ning uzluksiz funksiyasi bo‘ladi. Bulardan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B)$ uchun $D(B)=C[a;b]$ tenglik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Integral operatorning chiziqli ekanligi integrallash amalining asosiy xossalaridan kelib chiqadi, ya’ni ixtiyoriy $f,g\in C[a;b]$ va $\alpha,\beta\in C$ lar uchun

$$(B(\alpha f+\beta g))(x)=\int_a^b K(x,t)(\alpha f(t)+\beta g(t))dt=$$

$$=\alpha\int_a^b K(x,t)f(t)dt+\beta\int_a^b K(x,t)g(t)dt=\alpha(Bf)(x)+\beta(Bg)(x)$$

tengliklar o‘rinli. Endi integral operator B ning uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz. $f_0\in C[a;b]$ ixtiyoriy tayinlangan element va $f_n\in C[a;b]$ unga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo‘lsin. U holda

$$\|Bf_n - Bf_0\| = \max_{a\le x\le b}\left|\int_a^b K(x,t)\big(f_n(t) - f_0(t)\big)dt\right| \le$$
$$\le \max_{a\le x\le b}|f_n(t) - f_0(t)| \max_{a\le x\le b}\left|\int_a^b K(x,t)dt\right| = C\cdot\|f_n - f_0\|. \qquad (11.2)$$

Bu yerda

$$C = \max_{a\le x\le b}\int_a^b |K(x,t)|dt\,.$$

C ning chekli ekanligi $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiyaning chegaralangan ekanligidan kelib chiqadi. Agar (11.2) tengsizlikda $n\to\infty$ da limitga o‘tsak,

$$\lim_{n\to\infty}\|Bf_n - Bf_0\| \le C\cdot\lim_{n\to\infty}\|f_n - f_0\| = 0$$

ekanligini olamiz. Agar $\|Bf_n - Bf_0\| \ge 0$ tengsizlikni hisobga olsak,

$$\lim_{n\to\infty}\|B\,f_n - B\,f_0\| = 0\,.$$

Shunday qilib, B integral operator ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekan.

B integral operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi integral operatorning o‘zagi - $K(x,y)$ funksiyaning berilishiga bog‘liq. Masalan $K(x,t)\equiv 1$ bo‘lsa B operatorning qiymatlar sohasi $\mathrm{Im}B$ o‘zgarmas funksiyalardan iborat, ya’ni $\mathrm{Im}\,B = \{f \in C[a,b] : f(t) = const\}$, uning yadrosi $KerB$, o‘zgarmasga ortogonal funksiyalardan iborat, ya’ni

$$KerB = \{\exists\, f \in C[a;b] : \int_a^b f(t)dt = 0\}.$$

11.8-ta’rif. *Bizga X normalangan fazoning M to‘plami berilgan bo‘lsin. Agar shunday $C>0$ son mavjud bo‘lib, barcha $x\in M$ uchun $\|x\|\le C$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, M to‘plam chegaralangan deyiladi*.

11.9-ta’rif. *X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo‘lsin. Agar A ning aniqlanish sohasi $D(A)=X$ bo‘lib, har qanday chegaralangan to‘plamni yana chegaralangan to‘plamga akslantirsa, A ga chegaralangan operator deyiladi.*

Chiziqli operatorning chegaralanganligini tekshirish uchun quyidagi ta’rif qulaydir.

11.10-ta'rif. *$A: X \to Y$ chiziqli operator bo'lsin. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun*

$$\| Ax \| \leq C \cdot \| x \| \tag{11.3}$$

tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi.

2-mavzu: CHiziqli operatorning normasi. Uzluksizlik

11.11-ta'rif. *(11.3) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to'plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi, va u $\| A \|$ bilan belgilanadi, ya'ni*

$$\| A \| = \inf C.$$

Bu ta'rifdan ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\| Ax \| \leq \| A \| \cdot \| x \|$$

tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

11.1-teorema. *X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan A operatorning normasi $\| A \|$ uchun*

$$\| A \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Ax \| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} \tag{11.4}$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

A chiziqli operator bo'lgani uchun

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \sup_{x \neq \theta} \left\| A \frac{x}{\| x \|} \right\| = \sup_{\| x \| = 1} \| Ax \|.$$

Ixtiyoriy $x \neq 0$ uchun

$$\frac{\| Ax \|}{\| x \|} \leq \alpha.$$

Demak, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\| Ax \| \leq \alpha \| x \|$. Bundan esa

$$\| A \| \leq \alpha . \tag{11.5}$$

Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $x_\varepsilon \neq \theta$ element mavjudki,

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\| Ax_\varepsilon \|}{\| x_\varepsilon \|} \leq \| A \|$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lgani uchun,

$$\alpha \leq \| A \| . \tag{11.6}$$

(11.5) va (11.6) lardan $\| A \| = \alpha$ tenglik kelib chiqadi. Δ

11.1-tasdiq. *Chiziqli chegaralangan* A *operator uchun*

$$\sup_{\| x \| = 1} \| Ax \| = \sup_{\| x \| \leq 1} \| Ax \|$$

tenglik o'rinli.

11.1-tasdiqni mustaqil isbotlang.

X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini $L(X,Y)$ bilan belgilaymiz. Xususan $X = Y$ bo'lsa $L(X,X) = L(X)$.

11.1-natija. *Ixtiyoriy* $A \in L(X,Y)$ *va* $x \in D(A)$, $\| x \| = 1$ *uchun*

$$\| Ax \| \leq \| A \| \tag{11.7}$$

tengsizlik o'rinli.

(11.7) tengsizlikning isboti (11.4) tengsizlikdan bevosita kelib chiqadi.

11.12-ta'rif. $A : X \to Y$ *va* $B : X \to Y$ *chiziqli operatorlarning yig'indisi deb,* $x \in D(A) \cap D(B)$ *elementga* $y = Ax + Bx \in Y$ *elementni mos qo'yuvchi* $C = A + B$ *operatorga aytiladi.*

Ravshanki, C chiziqli operator bo'ladi. Agar $A, B \in L(X,Y)$ bo'lsa, u holda C ham chegaralangan operator bo'ladi va

$$\|C\| = \|A+B\| \le \|A\| + \|B\| \tag{11.8}$$

tengsizlik o‘rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| \le (\|A\| + \|B\|)\|x\|.$$

Bu yerdan (11.8) tengsizlik kelib chiqadi.

11.13-ta’rif. *A chiziqli operatorning α songa ko‘paytmasi x elementga αAx elementni mos qo‘yuvchi operator sifatida aniqlanadi, ya’ni*

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax$$

11.14-ta’rif. *$A : X \to Y$ va $B : Y \to Z$ chiziqli operatorlar berilgan bo‘lib $R(A) \subset D(B)$ bo‘lsin. B va A operatorlarning ko‘paytmasi deganda, har bir $x \in D(A)$ ga Z fazoning $z = B(Ax)$ elementini mos qo‘yuvchi $C = BA: X \to Z$ operator tushuniladi.*

Agar A va B lar chiziqli chegaralangan operatorlar bo‘lsa, u holda C ham chiziqli chegaralangan operator bo‘ladi va

$$\|C\| \le \|B\| \cdot \|A\| \tag{11.9}$$

tengsizlik o‘rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\|_Z = \|B(Ax)\|_Z \le \|B\| \cdot \|Ax\|_Y \le \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X .$$

Bu yerdan (11.9) tengsizlik kelib chiqadi.

Operatorlarni qo‘shish va ko‘paytirish assotsiativdir. Qo‘shish amali kommutativ, lekin ko‘paytirish amali kommutativ emas.

Agar X va Y lar chiziqli normalangan fazolar bo‘lsa, $L(X,Y)$ ham chiziqli normalangan fazo bo‘ladi, ya’ni $p : L(X,Y) \to R$,

$$p(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

funksional normaning 1-3 shartlarini qanoatlantiradi.

11.2-teorema. *X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi $A: X \to Y$ chiziqli operator berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:*

1) *A operator biror x_0 nuqtada uzluksiz;*

2) A *operator uzluksiz;*

3) A *operator chegaralangan*.

Isbot. 1) $\to$ 2). Chiziqli A operatorning biror x_0 nuqtada uzluksiz ekanligidan uning ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekanligini keltirib chiqaramiz.

A operator x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lganligi uchun, x_0 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n^0\}$ ketma-ketlik uchun $Ax_n^0 \to Ax_0$. Ixtiyoriy $x' \in D(A)$ nuqta uchun, $x_n' \to x'$ ekanligidan $Ax_n' \to Ax'$ kelib chiqishini ko‘rsatamiz. $y'_n = x'_n - x' + x_0 \to x_0$ deymiz. U holda

$$\lim_{n\to\infty} Ay'_n = \lim_{n\to\infty} A(x'_n - x' + x_0) = \lim_{n\to\infty}(Ax'_n - Ax' + Ax_0) = Ax_0.$$

Bu esa

$$\lim_{n\to\infty} Ax'_n = Ax'$$

ekanligini bildiradi. Demak, A operator ixtiyoriy x' nuqtada uzluksiz.

2)$\to$3). A operatorning uzluksiz ekanligidan uning chegaralanganligi kelib chiqishini ko‘rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, A chiziqli operator uzluksiz bo‘lsin, lekin chegaralangan bo‘lmasin, ya’ni ixtiyoriy $C > 0$ son uchun shunday $x_c \in D(A)$ element mavjud bo‘lib ,

$$\| Ax_c \| \geq C \| x_c \|$$

bo‘lsin. Agar $C = n \in N$ desak, ixtiyoriy $n \in N$ uchun shunday $x_n \in D(A)$ mavjudki,

$$\| Ax_n \| \geq n \| x_n \|$$

tengsizlik bajariladi. Quyidagi

$$\xi_n = \frac{x_n}{n \| x_n \|}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Ko‘rinib turibdiki, $\xi_n \to \theta$, ya’ni

$$\| \xi_n - \theta \| = \left\| \frac{x_n}{n \| x_n \|} \right\| = \frac{1}{n \| x_n \|} \| x_n \| = \frac{1}{n} \to 0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$\| A\xi_n - A\theta \| = \left\| A\left(\frac{x_n}{n\| x_n\|}\right)\right\| = \left\| \frac{1}{n\| x_n\|} Ax_n \right\| = \frac{1}{n\| x_n\|}\| A x_n\| > 1$$

Bu qarama-qarshilik A operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatadi.

$3) \to 1)$. A chiziqli chegaralangan operatorning biror nuqtada uzluksizligini ko‘rsatamiz.

Ta’rifga ko‘ra shunday $C > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\| A x \|_Y \leq C \| x \|_X$$

tengsizlik bajariladi. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ - x ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo‘lsin, u holda $Ax_n \to Ax$ ekanligini ko‘rsatamiz:

$$\| Ax_n - Ax \| = \| A(x_n - x) \| \leq C \| x_n - x \| \to 0,$$

ya’ni $Ax_n \to Ax$. Δ

11.2-natija. *A chiziqli operator chegaralangan bo‘lishi uchun uning uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli.*

Misollar. 11.5. Birlik va nol operatorlarning (11.1 va 11.2 misollarga qarang) chegaralangan ekanligini ko‘rsatib, ularning normasini hisoblang.

Yechish. Birlik operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatib, normasini hisoblaymiz. Ixtiyoriy $x \in E$ uchun $\| I x \| = \| x \|$ tenglik o‘rinli. Ta’rifga ko‘ra u chegaralangan va uning normasi 1 ga teng. Endi nol operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatib, uning normasini topamiz. Istalgan $x \in E$ uchun $\| \Theta x \| = \| \theta \| = 0$ tenglik o‘rinli. Bundan $\| \Theta \| = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Nol operator $L(X, Y)$ chiziqli normalangan fazoning nol elementi bo‘ladi.

11.6. 11.3-misolda keltirilgan $A : C[a,b] \to C[a,b]$ differensial operatorning chegaralanmagan ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Buning uchun A akslantirishda $D(A) = C^{(1)}[0;1]$ fazodagi birlik shar $B[\theta,1]$ ning tasviri chegaralanmagan to‘plam ekanligini ko‘rsatish yetarli. Birlik shar $B[\theta,1]$ da yotuvchi $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha tanlaymiz:

$$f_n(x) = x^n, \quad \| f_n \| = \max_{0 \leq x \leq 1} | x^n | = 1.$$

U holda

$$(Af_n)(x) = n \cdot x^{n-1}, \quad \| Af_n \| = \max_{0 \le x \le 1} |n \cdot x^n| = n.$$

Bundan

$$\lim_{n \to \infty} \| Af_n \| = \infty$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, differensial operator chegaralanmagan ekan.

11.7. 11.4-misolda keltirilgan $B : C[a;b] \to C[a,b]$ integral operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsating.

Yechish. 11.4-misolda B operatorning uzluksiz ekanligi ko‘rsatilgan edi. 11.2-natijaga ko‘ra u chegaralangan bo‘ladi.

11.8. $C[-1,1]$ fazoda x ga ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$B : C[-1,1] \to C[-1,1], \quad (Bf)(x) = x\,f(x) \tag{11.10}$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko‘rsatib, normasini toping.

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Uzluksiz funksiyalarning ko‘paytmasi uzluksiz ekanligidan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B) = C[-1,1]$ ekanligi kelib chiqadi. Endi B operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\| Bf \| = \max_{-1 \le x \le 1} |x\,f(x)| \le \max_{-1 \le x \le 1} |x| \cdot \max_{-1 \le x \le 1} |f(x)| = 1 \cdot \| f \|.$$

Bu tengsizlikdan B operatorning chegaralangan ekanligi va $\| B \| \le 1$ kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, agar $f_0(x) = 1$ desak, u holda

$$(Bf_0)(x) = x, \quad \| Bf_0 \| = 1, \quad \| B \| \ge \frac{\| Bf_0 \|}{\| f_0 \|} = 1$$

ni olamiz. Yuqoridagilardan $\| B \| = 1$ kelib chiqadi.

Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, $L_2[-1;1]$ Hilbert fazosida ham (11.10) tenglik bilan aniqlangan B operator chiziqli chegaralangan bo‘lib, normasi 1 ga teng bo‘ladi.

11.9. Endi ℓ_2 fazoda ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$A : \ell_2 \to \ell_2, \quad (Ax)_n = a_n x_n, \ \sup_{n \ge 1} |a_n| = a < \infty \tag{11.11}$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko‘rsatib, normasini toping.

Yechish. Ixtiyoriy $x \in \ell_2$ uchun $A\,x \in \ell_2$ ekanligini ko‘rsatamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(Ax)_n\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\,a_n x_n|^2 \leq \sup_{n \geq 1} |\,a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\,x_n|^2 \leq a^2 \|\,x\,\|^2 . \qquad (11.12)$$

Bu munosabatlardan $D(A) = \ell_2$ ekanligini olamiz. Endi uning chiziqli ekanligini ko‘rsatamiz. A operatorning aniqlanishiga ko‘ra

$$\left(A(\alpha\,x + \beta\,y)\right)_n = a_n\left(\alpha\,x_n + \beta\,y_n\right) = \alpha\,a_n\,x_n + \beta\,a_n y_n = \alpha\left(A\,x\right)_n + \beta\left(A\,y\right)_n .$$

Demak, A chiziqli operator ekan. Uning chegaralangan ekanligi (11.12) tengsizlikdan kelib chiqadi. Bundan tashqari (11.12) tengsizlikdan $\|A\| \leq a$ ekanligi ham kelib chiqadi. A operatorning normasi $\|A\| = a$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun ℓ_2 fazoda normasi 1 ga teng bo‘lgan $\left\{ e_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikni olamiz. A operatorning aniqlanishiga ko‘ra ixtiyoriy $n \in N$ uchun $Ae_n = a_n e_n$ tenglik o‘rinli. Bundan va (11.7) dan

$$\|\,A\| \geq \|\,Ae_n\| = \|a_n e_n\| = |\,a_n| \cdot \|\,e_n\| = |a_n|$$

munosabat kelib chiqadi. Bu tengsizlik ixtiyoriy $n \in N$ da o‘rinli bo‘lgani uchun

$$\|\,A\| \geq \sup_{n \geq 1} |\,a_n| = a \qquad (11.13)$$

ni olamiz. Demak, $\|\,A\,\| = a$ tenglik isbotlandi. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $L_2[-1;1]$ *Hilbert fazosida (11.10) tenglik bilan aniqlangan* B *ko‘paytirish operatorining chiziqli chegaralangan ekanligini ko‘rsatib, uning normasini toping.*

2. $L_2[a;b]$ *Hilbert fazosida (11.1) tenglik bilan aniqlangan* B *integral operatorning chiziqli chegaralangan ekanligini ko‘rsating.*

3. $L_2[-\pi, \pi]$ *Hilbert fazosida (11.1) tenglik bilan aniqlangan* B *integral operatorning o‘zagi* $K(x,t) = \cos(x - t)$ *bo‘lgan holda, uning yadrosi* $\operatorname{Ker} B$ *va qiymatlar sohasi* $R(B)$ *ni tavsiflang.*

4. *11.3 va 11.8 misollarda keltirilgan operatorlar yig‘indisini toping.*

5. *Integral operator*

$$A: C[-1,1] \to C[-1,1], \ (Af)(x) = \int_{-1}^{1}(1+xy)f(y)dy$$

va 11.8 misolda keltirilgan x *ga ko‘paytirish operatori* B *larning ko‘paytmasini toping.* $AB = BA$ *tenglik to‘g‘rimi?*

6. *Agar* $A, B \in L(X,Y)$ *bo‘lsa, u holda* $\big| \|A\| - \|B\| \big| \le \|A - B\|$ *tengsizlikni isbotlang.*

7. *Aytaylik,* X *chiziqli normalangan fazo bo‘lsin.* $p: X \to R$, $p(x) = \|x\|$ *akslantirishning uzluksizligini isbotlang.*

Normalangan fazolarda chiziqli funksionallar

12. Normalangan fazolarda chiziqli funksionallar

Ma’lumki, chiziqli funksional va uning nollari 6-§ da o‘rganilgan edi. 7-§ da esa L_0 qism fazoda aniqlangan f_0 chiziqli funksionalni p qavariq funksionalga "bo‘ysungan" holda butun L fazogacha chiziqli davom ettirish mumkinligi haqidagi Xan-Banax teoremasi isbotlangan edi. Biz bu paragrafda chiziqli funksionalning normasini saqlagan holda uni butun L fazogacha davom ettirish mumkinligi haqidagi Xan-Banax teoremasini isbotlaymiz, hamda funksional fazolarda chiziqli uzluksiz funksionallarning umumiy ko‘rinishidan foydalanib, asosiy funksional fazolarga qo‘shma fazolarni izomorfizm aniqligida topamiz.

12.1. Chiziqli funksionallar

Agar operatorning qiymatlari sonlardan iborat bo‘lsa, bunday operator funksional deyiladi (6.1-ta’rifga qarang). Agar X chiziqli fazoda aniqlangan f funksional uchun quyidagi shartlar bajarilsa

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X$; additivlik

2) $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in C$ (yoki R), bir jinslilik

f ga chiziqli funksional (6.2, 6.3-ta’riflarga qarang) deyiladi.

12.1-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *mavjud bo‘lib,* $\|x - x_0\| < \delta$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha* $x \in D(f)$ *lar uchun*

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa,* f *funksional* $x = x_0$ *nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar* f *funksional ixtiyoriy* $x \in D(f)$ *nuqtada uzluksiz bo'lsa,* f *uzluksiz funksional deyiladi.*

12.1-ta'rifga teng kuchli bo'lgan quyidagi ta'rifni keltirishimiz.

12.2-ta'rif. *Agar* x_0 *nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy* x_n *ketma-ketlik uchun* $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$ *bo'lsa, u holda* f *funksional* x_0 *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

C - kompleks sonlar to'plami (R - haqiqiy sonlar to'plami) Banax fazosi bo'lganligi uchun 11-§ da chiziqli operatorlar uchun o'rnatilgan teorema va tasdiqlar chiziqli funksionallar uchun ham o'rinli bo'ladi.

12.1-teorema. X *chiziqli normalangan fazoda aniqlangan chiziqli funksional biror* $x_0 \in X$ *nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda bu chiziqli funksional butun* X *fazoda uzluksiz.*

12.2-teorema. X *chiziqli normalangan fazoda aniqlangan chiziqli* f *funksional uzluksiz bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

Xuddi chiziqli operatorlardagidek $|f(x)| \leq M\|x\|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi M sonlarning aniq quyi chegarasi f funksionalning normasi deyiladi va $\|f\|$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|.$$

Bundan tashqari, chiziqli chegaralangan funksionalning normasi $\|f\|$ uchun

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{12.1}$$

tenglik o'rinli.

12.3-teorema. *(Xan-Banax).* E *kompleks chiziqli normalangan fazo,* F_0 - E *ning qism fazosi va* f_0 - E_0 *da aniqlangan chiziqli uzluksiz funksional bo'lsin. U holda* f_0 *ni normasini saqlagan holda* E *da aniqlangan* f *chiziqli funksionalgacha davom ettirish mumkin, ya'ni*

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in E_0 \quad va \quad \|f\|_E = \|f_0\|_{E_0}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $f : E \to C$ *chiziqli funksional mavjud.*

Isbot. Aytaylik, $\| f_0 \|_{E_0} = K$ bo‘lsin. Norma aksiomalaridan bevosita kelib chiqadiki, barcha $x \in E$ larda $p(x) = K\| x \|$ tenglik bilan aniqlanuvchi akslantirish qavariq funksional bo‘ladi. Bundan tashqari ixtiyoriy $x \in E_0$ uchun

$$| f_0(x) | \leq \| f_0 \|_{E_0} \cdot \| x \| = K \| x \| = p(x)$$

tengsizlik o‘rinli. Shunday ekan, f_0 7.3-teorema shartlarini qanoatlantiradi. U holda E da aniqlangan shunday f chiziqli funksional mavjudki, quyidagilar bajariladi:

1) $f(x) = f_0(x)$, $\forall x \in E_0$,

2) $| f(x) | \leq p(x) = \| f_0 \| \cdot \| x \|, \quad \forall x \in E$.

Bu yerdan f ning chegaralanganligi va $\| f \|_E \leq \| f_0 \|$ tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan,

$$\| f \|_E = \sup_{x \in E, x \neq \theta} \frac{| f(x) |}{\| x \|} \geq \sup_{x \in E_0, x \neq \theta} \frac{| f(x) |}{\| x \|} = \| f_0 \|_{E_0}.$$

Demak, $\| f \|_E = \| f_0 \|_{E_0}$. Δ

12.1-natija. *X chiziqli normalangan fazo va $x_0 \neq \theta$ undagi ixtiyoriy belgilangan element bo‘lsin. U holda butun X da aniqlangan shunday f chiziqli funksional mavjudki,*

$$\| f \| = 1, \quad f(x_0) = \| x_0 \| \tag{12.2}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. f funksionalni bir o‘lchamli $X_0 = \{\alpha x_0\}$ qism fazoda quyida-gicha aniqlaymiz:

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \| x_0 \|.$$

Ko‘rinib turibdiki,

$$f_0(x_0) = \| x_0 \|, \qquad | f_0(x) | = | \alpha | \, \| x_0 \| = \| x \|, \quad x = \alpha x_0.$$

Bu yerdan $\| f_0 \|_{E_0} = 1$. f_0 funksionalni butun X gacha chiziqli davom ettiramiz. Hosil bo‘lgan funksional (12.2) shartlarni qanoatlantiruvchi funksional bo‘ladi. Δ

Endi chiziqli funksionalning davomiga doir misol qaraymiz.

12.1. $L = C[-1,1]$ uzluksiz funksiyalar fazosi va uning $L_0 = \{x \in C[-1,1]: x(t) \equiv 0,\ t \in [-1,0]\}$ qism fazosini qaraymiz. L_0 qism fazoda f_0 chiziqli funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_0(x) = \int_{-1}^{1} x(t)dt, \quad x \in L_0 .$$

f_0 funksionalni normasini saqlagan holda davom ettiring.

Yechish. f_0 funksionalning normasini hisoblaymiz. Agar $x \in L_0$ bo‘lsa, u holda

$$\int_{-1}^{0} x(t)dt = 0$$

bo‘ladi. Shuning uchun

$$|f_0(x)| = \left|\int_{-1}^{1} x(t)dt\right| = \left|\int_{0}^{1} x(t)dt\right| \le \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| \int_{0}^{1} dt = \|x\|_{L_0} .$$

Demak,

$$\|f_0\| \le 1.$$

Endi $\|f_0\| \ge 1$ tengsizlikni ko‘rsatamiz. Buning uchun $C[-1,1]$ fazoda uzluksiz funksiyalarning

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1,\ 0], \\ nt, & t \in (0,\ 1/n), \\ 1, & t \in [1/n,\ 1] \end{cases}$$

ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlik uchun quyidagilar o‘rinli:

$$\|x_n\| = 1, \quad x_n \in L_0, \ \forall n \in N .$$

$$|f_0(x_n)| = \left|\int_{0}^{1} x_n(t)dt\right| \ge \int_{\frac{1}{n}}^{1} dt = 1 - \frac{1}{n} . \qquad (12.3)$$

(12.3) tengsizlikda n lar bo‘yicha aniq yuqori chegara olsak,

$$\|f_0\| \ge \sup_{n \ge 1} |f_0(x_n)| = \sup_{n \ge 1}\left\{1 - \frac{1}{n}\right\} = 1$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bu ikkala tengsizlikdan $\| f_0 \| = 1$ tenglikni olamiz. 7.6-misoldagi kabi $C[-1,1]$ chiziqli fazoda g_y , $y \in V_0[-1,0]$ funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$g_y(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\, y(t)\, dt + \int_{0}^{1} x(t)\, dt, \qquad x \in L. \qquad (12.4)$$

Ma’lumki, istalgan $y \in V_0[-1,0]$ uchun g_y funksional f_0 funksionalning $C[-1,1]$ fazogacha davomi bo‘ladi. g_y funksional uchun Xan-Banax teoremasining tasdig‘i o‘rinlimi? Boshqacha aytganda $\| f_0 \| = \| g_y \|$ tenglik qanday $y \in V_0[-1,0]$ lar uchun o‘rinli? $C[a,b]$ fazodagi chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko’rinishi haqidagi F. Riss - 12.4-teorema, hamda (12.9) tenglikdan foydalansak, (12.4) ko‘rinishdagi davomlar ichida yagona g_0 funksional f_0 funksionalning normasini saqlagan holda $L = C[-1,1]$ fazogacha davomi bo‘ladi. 7.6-misolda f_0 funksionalni (7.1) shartni saqlagan holda cheksiz ko‘p (kontinuum) usul bilan L fazogacha davom ettirish mumkin edi.

Qo‘shma fazolar

Chiziqli funksionallarning umumiy ko‘rinishidan foydalanib, qo‘shma fazoni ayrim hollarda izomorfizm aniqligida topish mumkin.

12.1-ta’rif. *X normalangan fazoda aniqlangan, chiziqli uzluksiz funksionallar fazosi X ga qo‘shma fazo deyiladi va X^* bilan belgilanadi, ya’ni* $X^* = L(X,C)$

Bundan keyingi 13-§ da ya’ni chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi mavzusida biz Y to‘la fazo bo‘lgan holda $L(X,Y)$ fazoning Banax fazosi bo‘lishini isbotlaymiz. Shunga ko‘ra (13.1-natijaga qarang) X chiziqli normalangan fazoga qo‘shma bo‘lgan $X^* = L(X,C)$ fazo Banax fazosi boladi. Chunki, kompleks sonlar to‘plami $C = Y$ to‘la normalangan fazo. Qo‘shma fazolarni o‘rganishni eng sodda holdan, yani X fazo n - o‘lchamli (haqiqiy yoki compleks) chiziqli fazo bo‘lgan holdan boshlaymiz.

12.2. X n - o‘lchamli (haqiqiy yoki compleks) chiziqli fazo bo‘lsin. Bu fazoda qandaydir $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisni tanlaymiz. U holda har bir $x \in X$ vektor yagona ravishda

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad (12.5)$$

ko‘rinishda tasvirlanadi. Agar f - X da aniqlangan chiziqli funksional bo‘lsa, u holda ravshanki,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \qquad (12.6)$$

bo‘ladi. Shunday ekan, chiziqli funksional o‘zining $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis vektorlardagi qiymatlari bilan bir qiymatli aniqlanadi. Bundan tashqari bu qiymatlarni ixtiyoriy berish mumkin. Ushbu $g_1, g_2, \ldots, g_n$ funksionallarni

$$g_j(e_i)=\begin{cases} 0, & \text{agar } i \neq j, \\ 1, & \text{agar } i = j \end{cases}$$

deb aniqlaymiz. Ko‘rsatish mumkinki, bu funksionallar chiziqli bog‘lanmagan. Agar $x \in X$ element (12.5) ko‘rinishda bo‘lsa, u holda $g_j(x)=x_j$ tenglik bajariladi. Shuning uchun (12.6) formulani

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x) f(e_i)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Shunday qilib $g_1, g_2, \ldots, g_n$ funksionallar X^* fazoda bazis tashkil qilar ekan, ya’ni X^* ham n- o‘lchamli fazodir. X^* dagi $g_1, g_2, \ldots, g_n$ bazis X dagi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisga ikkilamchi bazis deb ataladi.

X fazoda aniqlangan har xil normalar X^* fazoda har xil normalarni keltirib chiqaradi. Hozir biz X va X^* fazolarda bir-biriga mos keluvchi normalarga misol keltiramiz.

a) Yuqoridagi n - o‘lchamli X va X^* fazolarni qaraymiz. Har bir $x \in X$ uchun (12.5) o‘rinli bo‘lib, x ning normasi

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

formula bilan aniqlangan bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $f \in X^*$ uchun

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f(e_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i \cdot x_i| \leq$$
$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2} \cdot \| x \|$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz, bu yerda $f_i = f(e_i),\ i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Agar

$$x_f = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} \cdot e_i$$

desak,

$$|f(x_f)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} \cdot f_i(e_i) \right| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2} \cdot \| x_f \|.$$

Bundan

$$\| f \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2}$$

formulani olamiz. Shunday ekan, X va X^* fazolarda

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2} \qquad \text{va} \qquad \| f \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2}$$

normalar bir-biriga mos kelar ekan.

b) Endi *X* fazodagi har bir $x \in X$ element uchun uning normasi

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 < p < \infty$$

formula bilan aniqlangan bo‘lsin. Bu normaga mos X^* fazodagi normani aniqlash uchun Gyolder tengsizligidan ((1.15) formulaga qarang) foydalanamiz. U holda har bir $f \in X^*$ chiziqli funksional va ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \quad \text{va} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \cdot g(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i$$

desak, Gyolder tengsizligiga asosan

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \| x \|_p$$

tengsizlik barcha $x \in X$ lar uchun o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda

$$1 < p < \infty, \quad 1 < q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{12.7}$$

Agar $x_f \in X$ elementning koordinatalarini

$$x_i = \overline{f_i} \cdot |f_i|^{q-2}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

ko‘rinishda tanlasak, (agar $f_i = 0$ bo‘lsa, $x_i = 0$ deb olinadi)

$$x_i \cdot f_i = \overline{f_i} \cdot |f_i|^{q-2} \cdot f_i = |f_i|^q \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

va

$$x_i \cdot f_i = |f_i|^q = |f_i|^{\frac{p}{p-1}} = \left(|f_i|^{\frac{1}{p-1}} \right)^p = |x_i|^p$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Chunki

$$|x_i| = |f_i|^{q-1} = |f_i|^{\frac{1}{p-1}}, \quad q - 1 = \frac{1}{p-1}.$$

U holda

$$|f(x_f)| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i \right| = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|x\|_p .$$

Demak,

$$\|f\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Shunday qilib, X va X^* fazolarda mos normalar juftligi

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{12.8}$$

ko‘rinishda bo‘lar ekan. Bu yerda p va q sonlar (12.7) munosabatni qanoatlantiradi.

c) X fazodagi har bir $x \in X$ uchun (12.5) tasvir o‘rinli bo‘lib, x ning normasi

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

formula bilan aniqlangan bo‘lsin. Ixtiyoriy $f \in X^*$ chiziqli funksional va barcha $x \in X$ larda

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i, \qquad f_i = f(e_i), \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{n} |f_i \cdot x_i| \le \max_{1 \le i \le n} |f_i| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right) = \max_{1 \le i \le n} |f_i| \cdot \| x \|_1,$$

ya’ni

$$\| f \| \le \max_{1 \le i \le n} |f_i| .$$

Faraz qilaylik, biror $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ uchun

$$| f_{i_0} | = \max_{1 \le i \le n} | f_i |$$

bo‘lsin. Agar

$$x_0 = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{i_0}, 0, \ldots, 0 \right)$$

desak, $\| x_0 \|_1 = 1$ va

$$| f(x_0) | = | f_{i_0} | = \max_{1 \le i \le n} | f_i | = \max_{1 \le i \le n} | f_i | \cdot \| x_0 \|_1$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bundan

$$\| f \| = \max_{1 \le i \le n} | f_i |$$

tenglikka ega bo‘lamiz. So‘nggi normani biz $\| \cdot \|_\infty$ bilan belgilaymiz. Matematik analizdan ma’lumki, ((1.19) ga qarang)

$$\lim_{p \to \infty} \| x \|_p = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1 \le i \le n} | x_i | = \| x \|_\infty .$$

Shunday qilib, X va X^* chekli n - o‘lchamli fazolarda

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |, \quad \| f \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} | f_i | \tag{12.9}$$

lar bir-biriga mos keluvchi normalar juftligini hosil qiladi. Agar biz (12.7) munosabatni saqlagan holda $q \to \infty$ da limitga o'tsak, $p = 1$ va $q = \infty$ ni olamiz. Demak, (12.9) normalar juftligi (12.8) normalar juftligining limitik holati ekan.

d) Endi n - o'lchamli X fazoda norma

$$\| x \|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} | x_i |$$

formula vositasida aniqlangan bo'lsin. Ixtiyoriy $f \in X^*$ chiziqli funksional uchun $f_i = f(e_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ($e_1, e_2, \ldots, e_n$ lar X fazoning bazisi) desak, barcha $x \in X$ lar uchun

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

tenglik va

$$| f(x) | = \sum_{i=1}^{n} | f_i \cdot x_i | \le \max_{1 \le i \le n} |x_i| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i | \right) = \max_{1 \le i \le n} | f_i | \cdot \| x \|_{\infty},$$

tengsizlik o'rinli. Ikkinchi tomondan

$$x_f = \left(\frac{\overline{f_1}}{| f_1 |}, \frac{\overline{f_2}}{| f_2 |}, \ldots, \frac{\overline{f_n}}{| f_n |} \right), \qquad \| x_f \|_{\infty} = 1$$

element uchun

$$| f(x_f) | = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{f_i} \; f_i}{| f_i |} = \sum_{i=1}^{n} | f_i | = \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i | \right) \cdot \| x_f \|_{\infty}.$$

U holda

$$\| f \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | f_i |$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, X va X^* fazolarda

$$\| x \|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} | x_i | \,, \quad \| f \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | f_i | \qquad (12.10)$$

normalar bir-biriga mos keluvchi normalar juftligi bo'ladi. (12.10) tenglik (12.8) tenglikning $p \to \infty$ dagi limitik holatiga mos keladi.

12.3. Endi ℓ_p fazoni qaraymiz. Ma’lumki, bu fazo

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = \{x_n\}$ ketma-ketliklardan iborat va unda x elementning normasi

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar biz $q > 1$ sonni (12.7) munosabatdan aniqlasak, u holda ℓ_p^* fazo ℓ_q fazoga izomorf bo‘ladi. Buni isbotlash uchun ℓ_q fazoning ixtiyoriy $f = \{f_n\}$ elementi yordamida ℓ_p fazoda

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot x_n \qquad (12.11)$$

chiziqli funksionalni aniqlaymiz. Dastlab (12.11) tenglikning o‘ng tomonidagi qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Ma’lumki, ixtiyoriy n natural son uchun

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i \cdot x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|x\|_p \qquad (12.12)$$

o‘rinli. Birinchi tengsizlikni yozishda biz Gyolder tengsizligidan ((1.15) formulaga qarang) foydalandik. Bu yerdan (12.11) tenglikning o‘ng tomonidagi qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi hamda $\tilde{f}$ funksional uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\left| \tilde{f}(x) \right| = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i \cdot x_i| \le \|f\|_q \cdot \|x\|_p, \quad \|\tilde{f}\| \le \|f\|_q.$$

Demak, (12.11) tenglik bilan aniqlangan $\tilde{f}$ funksional chiziqli va uzluksiz. Agar $x_f \in \ell_p$ elementning hadlarini

$$x_i = \overline{f_i} \cdot |f_i|^{q-2}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$$

(agar $f_i = 0$ bo‘lsa, $x_i = 0$ deb olinadi) ko‘rinishda tanlasak, 12.1-misolning b) bandidagidek quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$x_i \cdot f_i = |f_i|^q \geq 0, \quad x_i \cdot f_i = |x_i|^p \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, \infty\}.$$

Biz $x_f \in \ell_p$ va $f = \{f_i\} \in \ell_q$ ekanligini hisobga olsak,

$$|\tilde{f}(x_f)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i\right| = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \| f \|_q \cdot \| x \|_p .$$

Demak,

$$\| \tilde{f} \|_q = \| f \|_q .$$

Ko‘rsatish mumkinki, ℓ_p fazodagi ixtiyoriy $\tilde{f}$ chiziqli uzluksiz funksional (12.11) korinishda tasvirlanadi.

Shunday qilib ℓ_p^* va ℓ_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ fazolarning izomorfligi isbotlandi. Xususan, $p = 2$ da $\ell_2^* = \ell_2$ kelib chiqadi. Shuning uchun ℓ_2 fazo o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo deyiladi. Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, ixtiyoriy Hilbert fazosining qo‘shmasi ham o‘ziga izomorf bo‘ladi.

12.4. Endi ℓ_1 fazoning qo‘shmasini topamiz. 12.2-misolning c) bandidagiga o‘xshash mulohazalar qilib ko‘rsatish mumkinki, ℓ_1 fazoning qo‘shmasi $\ell_\infty = m$ - chegaralangan ketma-ketliklar fazosiga izomorfdir, ya’ni $\ell_1^* = m$. Quyidagi tasdiqlarni o‘quvchiga mustaqil isbotlash uchun qoldiramiz:

$$c^* = \ell_1, \quad c_0^* = \ell_1.$$

Bu tengliklarni izomorfism aniqligida tushunish kerak.

12.5. Endi $X = C[a,b]$ fazoga qo‘shma fazoni izomorfizm aniqligida topamiz. Ma’lumki, $[a,b]$ kesmada aniqlangan va $t = a$ nuqtada nolga aylanuvchi o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V_0[a;b]$ orqali belgilanadi (8.15-misolga qarang). Ko‘rsatish mumkinki, bu to‘plam funksiyalarni qo‘shish va ularni songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda x elementning normasi $\| x \| = V_a^b[x]$ tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda $V_a^b[x]$ o‘zgarishi chegaralangan x funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi to‘la o‘zgarishi. Ko‘rsatamizki, $(C[a,b])^* = V_0[a;b]$.

Biz $M[a,b]$ - bilan $[a,b]$ kesmada aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalar to‘plamini belgilaymiz. Bu to‘plam odatdagi funksiyalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi (8-§ ning 3-topshirig‘iga qarang) Bu fazoda x elementning normasi

$$\| x \| = \sup_{a \le t \le b} | x(t) |$$

tenglik bilan aniqlanadi. Har bir $x \in C[a,b]$ funksiya chegaralangan va

$$\sup_{a \le t \le b} | x(t) | = \max_{a \le t \le b} | x(t) |$$

tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun $C[a,b]$ fazoni $M[a,b]$ fazoning qism fazosi sifatida qarash mumkin. Endi $f \in C^*[a,b]$ ixtiyoriy chiziqli uzluksiz funksional bo‘lsin. Normalangan fazolarda Xan-Banax teoremasiga (12.3-teoremaga qarang) ko‘ra $f \in C^*[a,b]$ funksionalni normasini saqlagan holda butun $M[a,b]$ fazoga davom ettirish mumkin. F deb f funksionalning $C[a,b]$ dan $M[a,b]$ ga davomini belgilaymiz.

Endi

$$\varphi_t(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad a \le \xi \le t, \\ 0, & \text{agar} \quad t \le \xi \le b \end{cases}$$

$t \in [a,b]$ funksiyalar oilasini qaraymiz. Ravshanki, ixtiyoriy $t \in [a,b]$ uchun $\varphi_t \in M[a,b]$. F funksionalning $\varphi_t \in M[a,b]$ elementdagi qiymatini $u(t)$ deb belgilaymiz, ya’ni

$$u(t) = F(\varphi_t), \quad t \in [a,b].$$

Natijada $[a,b]$ kesmada u funksiya aniqlandi. Bu funksiyaning o‘zgarishi chegaralangan ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmani ixtiyoriy chekli sondagi

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b \qquad (12.13)$$

nuqtalar bilan bo‘lakchalarga ajratamiz. (12.13) bo‘linishga mos

$$\sum_{k=1}^{n} | u(t_k) - u(t_{k-1}) |$$

yig‘indini qaraymiz. Agar

$$\alpha_k = sign[u(t_k) - u(t_{k-1})], \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

belgilashlarni kiritsak, u holda

$$\sum_{k=1}^{n} | u(t_k) - u(t_{k-1}) | = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [u(t_k) - u(t_{k-1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left[F(\varphi_{t_k}) - F(\varphi_{t_{k-1}}) \right] = F \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}) \right].$$

F chiziqli funksionalning chegaralanganligi va $\| F \| = \| f \|$ dan

$$\sum_{k=1}^{n} | u(t_k) - u(t_{k-1}) | = \|F\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}) \right\| = \| f \|$$

tenglik kelib chiqadi. So‘nggi tenglik

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}) \right\| = \sup_{\xi \in [a,b]} \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_{t_k}(\xi) - \varphi_{t_{k-1}}(\xi)) \right| = 1$$

tenglikka asoslangan. Shunday qilib, (12.13) ko‘rinishdagi ixtiyoriy bo‘linishda

$$\sum_{k=1}^{n} | u(t_k) - u(t_{k-1}) | \leq \| f \|$$

tengsizlik o‘rinli. Bundan kelib chiqadiki, $u \in V[a,b]$ va

$$V_a^b[u] \leq \| f \|. \tag{12.14}$$

$x \in C[a,b]$– ixtiyoriy element bo‘lsin. Har bir *n* natural son uchun $[a,b]$ kesmani

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b, \quad t_k = a + \frac{b-a}{n} k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{12.15}$$

nuqtalar yordamida n ta teng bo‘lakka ajratamiz va

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k) \left[\varphi_{t_k}(t) - \varphi_{t_{k-1}}(t) \right] \tag{12.16}$$

pog‘onasimon funksiyani quramiz. U holda $F(y_n)$ quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$F(y_n) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k) [u(t_k) - u(t_{k-1})].$$

Bu y_n funksiyalarning aniqlanishidan ko‘rinib turibdiki, $y_n(a)=x(a)$ va agar $t_{k-1}<t<t_k$ bo‘lsa $y_n(t)=x(t_k)$, $k=1,2,\dots,n$. Kantor teoremasiga ko‘ra x funksiya $[a,b]$ kesmada tekis uzluksiz funksiya bo‘ladi. Shuning uchun $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ mavjud bo‘lib, $|x-x'|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $t,t'\in[a,b]$ lar uchun $|x(t)-x'(t)|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Shunday ekan, n yetarlicha katta bo‘lganda

$$\frac{b-a}{n}<\delta$$

bo‘lgani uchun

$$\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y_n(t)|=\max_{t\in[t_{k-1},t_k]}|x(t)-x(t_k)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan $\{y_n\}$ ketma-ketlikning x funksiyaga $[a;b]$ kesmada tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. F uzluksiz funksional bo‘lganligi uchun

$$\lim_{n\to\infty}F(y_n)=F(x).$$

Ikkinchi tomondan $[a,b]$ da uzluksiz x va $[a,b]$ da o‘zgarishi chegaralangan u funksiyalar uchun

$$\int_a^b x(t)du(t)$$

Riman-Stiltes integrali mavjudligi va (12.16) yig‘indi uning (12.15) bo‘linish bo‘yicha integral yig‘indisi bo‘lganligi sababli

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}F(y_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x(t_k)[u(t_k)-u(t_{k-1})]=\int_a^b x(t)du(t).$$

Ammo $x\in C[a,b]$ bo‘lgani uchun $F(x)=f(x)$, ya’ni

$$f(x)=\int_a^b x(t)du(t). \qquad (12.17)$$

tenglik o‘rinli. Shunday qilib ixtiyoriy $x\in C[a,b]$ uchun $f(x)$ (12.17) formula bo‘yicha aniqlanadi.

Riman-Stiltes integrallari uchun o‘rta qiymat haqidagi teoremaga ko‘ra ixtiyoriy $x\in C[a,b]$ uchun

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)\,du(t) \right| \le \max_{t\in[a,b]} |x(t)|\, V_a^b[u]$$

yoki

$$|f(x)| \le \max_{t\in[a,b]} V_a^b[u]\ \|x\|$$

tengsizlikni olamiz. Bundan

$$\|f\| \le V_a^b[u] \tag{12.18}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Endi (12.14) va (12.18) tengsizliklarni taqqoslab,

$$\|f\| = V_a^b[u] \tag{12.19}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Olingan natijalardan tashqari yana shuni ta’kidlash lozimki, $\varphi_a(t) \equiv 0$ va $F(0)=0$ bo‘lgani uchun $u(a)=F(\varphi_a)=0$ shart o‘rinli.

Endi *f* funksional uchun olingan natijalarni jamlab, quyidagi F.Riss teoremasini keltiramiz.

12.4-teorema. $C[a,b]$ *fazoda berilgan ixtiyoriy* f *chiziqli uzluksiz funksional uchun shu* f *funksional bo‘yicha aniqlanuvchi shunday* $u \in V_0[a,b]$ *o‘zgarishi chegaralangan funksiya mavjudki, barcha* $x \in C[a,b]$ *larda (12.17) va (12.19) tengliklar o‘rinli.*

Ko‘rsatish mumkinki, $[1]$ har bir o‘zgarishi chegaralangan $u \in V_0[a,b]$ funksiya (12.17) tenglik yordamida yagona $f \in C^*[a,b]$ funksionalni aniqlaydi. Shuning uchun, $C^*[a,b]$ dagi chiziqli funksionallar bilan $V_0[a,b]$ o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosining elementlari o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. Bundan tashqari $\|f\| = \|u\|$ bo‘lgani uchun, bu moslik izomorfdir, ya’ni $C^*[a,b]=V_0[a,b]$.

12.6. Berilgan $[a,b]$ kesmada $p\,(p>1)$ - darajasi bilan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi funksiyalar sinfini $L_p[a;b]$ bilan belgilaymiz (8.15-misolga qarang). Ma’lumki, $L_p[a;b]$ to‘la normalangan fazo, ya’ni Banax fazosidir.

Endi $p>1$ uchun (12.7) munosabatni qanoatlantiruvchi q sonni olamiz. Isbotlamasdan quyidagi tasdiqni keltiramiz. Har bir $f \in L_p^*[a,b]$ funksional uchun yagona $y \in L_p[a,b]$ element mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in L_p[a;b]$ larda

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt \tag{12.20}$$

tenglik bajariladi va aksincha, $y\in L_p[a,b]$ uchun (12.20) formula $L_p^*[a;b]$ ga tegishli biror funksionalni aniqlaydi. Bundan tashqari (12.20) formula $L_p^*[a;b]$ va $L_q[a;b]$ fazolar o‘rtasida izometrik moslik o‘rnatadi. Shuning uchun $L_p^*[a;b]$ va $L_q[a;b]$ fazolar o‘zaro izomorfdir, ya’ni $L_p^*[a;b]=L_q[a;b]$. Xususan, $p=2$ da $L_2^*[a;b]=L_2[a;b]$. Shuning uchun $L_2[a;b]$ o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo deyiladi.

12.7. Hilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiy ko‘rinishi quyidagicha $f(x)=(x,y)$, ya’ni ixtiyoriy f chiziqli uzluksiz funksionalga shu fazoning yagona y elementi mos keladi, shuning uchun Hilbert fazosi o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo hisoblanadi. Xuddi shu sababli, n - o‘lchamli Evklid fazosi ham o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo bo‘ladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $f_0 : c_0 \to C$, $f_0(x)=x_1$ *chiziqli funksionalni normasini saqlagan holda* c *fazoga chiziqli davom ettiring.*
2. *Chiziqli funksional davomi yagonami? Javobni asoslang.*
3. $f : C_2[0;1]\to C_2[0;1]$, $f(x)=x(0)$ *funksionalni chiziqli chegaralanganlikka tekshiring.*
4. *Evklid fazolarida chiziqli funksionalning umumiy ko‘rinishi qanday bo‘ladi?*
5. *Uzluksiz funksiyalar fazosi* $C[-1,1]$ *dagi barcha toq funksiyalar to‘plami* $C^-[-1,1]=L_0$ *(8.14-misolga qarang) qism fazo tashkil qiladi.* L_0 *qism fazoda* f_0 *chiziqli funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:*

$$f_0(x)=\int_{-1}^{1} t\,x(t)dt, \qquad x\in L_0 .$$

f_0 *funksionalni normasini saqlagan holda* $C[-1,1]$ *gacha davom ettiring.*

6. ℓ_1, ℓ_2 *va* ℓ_p, $p\geq 1$ *fazolarga qo‘shma fazolarni toping.*
7. c_0, c *va* m *fazolarga qo‘shma fazolarni toping.*
8. $C[a,b]$ *fazoga qo‘shma fazoni toping.*
9. $L_2[a;b]$ *fazoga qo‘shma fazoni toping.*
10. H *Hilbert fazosiga qo‘shma fazoni toping.*

3-mavzu: Chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi

Bu paragrafda biz chiziqli uzluksiz (chegaralangan) operatorlar fazosi $L(X,Y)$ ning to‘laligi haqidagi teoremani isbotlaymiz. Operatorlar ketma-ketligining kuchsiz, kuchli (nuqtali) va tekis (norma bo‘yicha) yaqinlashish ta’riflarini beramiz. Ularni misollarda tahlil qilamiz.

13.1-ta’rif. *Agar* $\{A_n\}\in L(X,Y)$ *operatorlar ketma-ketligi uchun shunday* $A\in L(X,Y)$ *operator mavjud bo‘lib,* $\|A_n - A\|\to 0,\ n\to\infty$ *bo‘lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga norma bo‘yicha yoki tekis yaqinlashadi deyiladi va* $A_n \xrightarrow{u} A$ *shaklda belgilanadi.*

13.2-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $x\in X$ *uchun* $\|A_n x - Ax\|\to 0$ *bo‘lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchli yoki nuqtali yaqinlashadi deyiladi va* $A_n \xrightarrow{s} A$ *shaklda belgilanadi.*

13.3-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $f\in Y^*$ *va ixtiyoriy* $x\in X$ *uchun* $f(A_n x)\to f(Ax)$ *bo‘lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchsiz yoki kuchsiz ma’noda* ($A_n \xrightarrow{w} A$) *yaqinlashuvchi deyiladi*.

13.3-ta’rif Hilbert fazosida quyidagicha bo‘ladi.

13.4-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $x,y\in H$ *uchun* $(A_n x, y)\to(Ax,y)$ *bo‘lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchsiz yaqinlashuvchi deyiladi.*

Misollar. 13.1. $A_n:\ell_2\to\ell_2$,

$$A_n x=\Big(\underbrace{0,0,\dots,0,}_{n}x_1,x_2,x_3,\dots\Big)$$

operatorlar ketma-ketligining kuchli va kuchsiz ma’noda nol operatorga yaqinlashishini teksiring.

Yechish. ℓ_2 Hilbert fazosi bo‘lganligi uchun $A_n:\ell_2\to\ell_2$ operatorlar ketma-ketligining kuchsiz ma’noda nol operatorga yaqinlashishini 13.4-ta’rifdan foydalanib teksiramiz. Ixtiyoriy $y=(y_1,y_2,\dots)\in\ell_2$ uchun

$$|(A_n x,y)-(\Theta x,y)|^2=\left|\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_{n+k}\right|^2\le\|x\|^2\sum_{k=n+1}^{\infty}|y_k|^2 \quad (13.1)$$

munosabat o‘rinli. $y\in\ell_2$ bo‘lganligi uchun

$$\| y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | y_k |^2 < \infty .$$

Shunday ekan yaqinlashuvchi qatorning qoldig‘i

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} | y_k |^2$$

$n \to \infty$ da nolga intiladi. Bundan (13.1) ga ko‘ra ixtiyoriy $x, y \in \ell_2$ larda $|(A_n x, y) - (\Theta x, y)|$ ning $n \to \infty$ da nolga intilishi kelib chiqadi. Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operator Θ ga kuchsiz ma’noda yaqinlashar ekan. $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchli ma’noda yaqinlashmaydi, chunki

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n x - \Theta x \| = \lim_{n\to\infty} \| x \| = \| x \| \neq 0 .$$

13.2. Quyida berilgan $P_n, Q_n \in L(\ell_2)$ operatorlar ketma-ketligining kuchli va tekis ma’noda birlik va nol operatorlarga yaqinlashishini teksiring.

$$P_n : \ell_2 \to \ell_2, \qquad P_n x = (x_1, x_2, \ x_n, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

$$Q_n = I - P_n, \quad Q_n x = (0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ x_{n+3} \ldots)$$

Yechish. Ixtiyoriy $x \in \ell_2$ uchun

$$\| Q_n x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | x_{n+k} |^2 \to 0, \ n \to \infty .$$

Chunki $x \in \ell_2$, ya’ni

$$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^2 < \infty .$$

Shunday ekan, oxirgi qatorning qoldig‘i

$$\sum_{k=1}^{\infty} | x_{n+k} |^2$$

$n \to \infty$ da nolga intiladi. Demak $\{Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchli ma’noda yaqinlashar ekan. Bundan $\{P_n = I - Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligining birlik operator I ga kuchli ma’noda yaqinlashishi kelib chiqadi. Endi $\{Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis ma’noda yaqinlashadimi yoki yo‘qmi, shuni tekshiramiz.

$$\| Q_n x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | x_{n+k} |^2 \leq \| x \|^2 .$$

Bundan

$$\|Q_n\| \leq 1 \tag{13.2}$$

ekanligini olamiz. Ikkinchi tomondan, $Q_n e_{n+1} = e_{n+1}$. Bundan

$$\| Q_n \| \geq \| Q_n e_{n+1} \| = 1. \tag{13.3}$$

(13.2) va (13.3) dan ixtiyoriy $n \in N$ uchun $\| Q_n \| = 1$ ga kelamiz. Demak, Q_n operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis (norma bo‘yicha) yaqinlashmaydi. Bu yerdan $\{P_n\}$ operatorlar ketma-ketligi birlik operator I ga tekis yaqinlashmasligi kelib chiqadi.

13.3. $L_2[-1/2, 1/2]$ Hilbert fazosini o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi va

$$(A_n f) = x^n f(x)$$

formula bilan aniqlanuvchi A_n operatorlar ketma-ketligining nol operatorga tekis yaqinlashishini teksiring.

Yechish. Ixtiyoriy $f \in L_2[-1/2, 1/2]$ uchun

$$\| A_n f \| = \int_{-1/2}^{1/2} | x^n f(x) |^2 dt \leq \max_{-1/2 \leq x \leq 1/2} | x^{2n} | \int_{-1/2}^{1/2} | f(x) |^2 dt \leq \frac{1}{2^{2n}} \cdot \| f \|^2 . \tag{13.4}$$

Bundan $\|A_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ tengsizlikni olamiz. Agar biz $0 \leq \|A_n\|$ ekanligini hisobga olib, $n \to \infty$ da limitga o‘tsak,

$$\lim_{n \to \infty} \| A_n - \Theta \| = 0 .$$

Shunday ekan, A_n operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis yaqinlashadi.

Yuqorida kuchsiz yaqinlasuvchi operatorlar ketma-ketligi kuchli ma’noda yaqinlashmasligiga (13.1-misol) va kuchli ma’noda yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligi norma bo‘yicha yaqinlashmasligiga (13.2-misol) misol keltirildi.

Quyida biz tekis yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligining kuchli ma’noda ham yaqinlashuvchi bo‘lishini va kuchli ma’noda yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligining kuchsiz ma’noda ham yaqinlashuvchi bo‘lishini isbotlaymiz.

13.1-lemma. *Agar* $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ *operatorlar ketma-ketligi biror* $A \in L(X,Y)$ *operatorga tekis yaqinlashsa, u holda* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchli ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Isbot. Lemma shartiga ko'ra $\| A_n - A \| \to 0,\ n \to \infty$. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\| A_n x - A x \| \le \| A_n - A \| \cdot \| x \| .$$

sonli tengsizlikka ega bo'lamiz. Matematik analizdan ma'lumki, tengsizliklarda limitga o'tish mumkin. Bunga ko'ra

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \| A_n x - A x \| \le \lim_{n\to\infty} \| A_n - A \| \cdot \| x \| = 0 .$$

Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli ma'noda ham yaqinlashar ekan.

Shunga o'xshash quyidagi tasdiqni, bevosita ta'rifdan foydalanib isbotlash mumkin.

13.2-lemma. *Agar* $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ *operatorlar ketma-ketligi biror* $A \in L(X,Y)$ *operatorga kuchli ma'noda yaqinlashsa, u holda* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchsiz ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'ladi*.

Isbot. Lemma shartiga ko'ra ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\| A_n x - A x \| \to 0, \quad n \to \infty .$$

U holda ixtiyoriy $x \in X$ va $f \in Y^*$ uchun

$$0 \le | f(A_n x) - f(Ax) | = | f(A_n x - Ax) | \le \| A_n x - Ax \| \cdot \| f \|$$

sonli tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga o'tib,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} | f(A_n x) - f(Ax) | \le \lim_{n\to\infty} \| A_n x - Ax \| \cdot \| f \| = 0$$

munosabatni olamiz. Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi kuchsiz ma'noda ham A operatorga yaqinlashar ekan.

13.1-teorema. *Agar* Y *to'la fazo bo'lsa, u holda* $L(X,Y)$ *fazo ham to'la, ya'ni Banax fazosi bo'ladi.*

Isbot. $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo‘lsin, ya’ni $n,m \to \infty$ da $\| A_n - A_m \| \to 0$. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\| A_n x - A_m x \| \leq \| A_n - A_m \| \cdot \| x \| \to 0, \quad n,m \to \infty.$$

Shuning uchun ixtiyoriy $x \in X$ da $\{A_n x\} \subset Y$ ketma-ketlik fundamentaldir. Y to‘la fazo bo‘lgani uchun $\{A_n x\}$ ketma-ketlik biror $y \in Y$ elementga yaqinlashadi. Demak, har bir $x \in X$ ga $\{A_n x\}$ ketma-ketlikning limiti bo‘lgan yagona $y \in Y$ element mos qo‘yilyapti. Bu moslikni $A: X \to Y$ orqali belgilaymiz:

$$Ax = \lim_{n \to \infty} A_n x = y.$$

Endi $A \in L(X,Y)$ ekanligini ko‘rsatamiz. Chiziqliligi:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n \to \infty} A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n \to \infty}(\alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2) =$$
$$= \alpha_1 \lim_{n \to \infty} A_n x_1 + \alpha_2 \lim_{n \to \infty} A_n x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2.$$

Endi A ning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz. Shartga ko‘ra

$$\| A_n - A_m \| \to 0, \quad n,m \to \infty.$$

Demak, (11-§ ning 6-topshirig‘iga qarang)

$$\big| \| A_n \| - \| A_m \| \big| \leq \| A_n - A_m \| \to 0, \quad n,m \to \infty.$$

Bundan $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlikning fundamentalligi kelib chiqadi. Haqiqiy sonlar fazosi R to‘la bo‘lganligi uchun, $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir, yaqinlashuvchi ketma-ketlik esa chegaralangan bo‘ladi. Ya’ni shunday $K > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$\|A_n\| \leq K$$

tengsizlik bajariladi. Norma ta’rifidan

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \| x \| \leq K \cdot \| x \|.$$

Bundan esa

$$\| Ax \| = \left\| \lim_{n \to \infty} A_n x \right\| = \lim_{n \to \infty} \| A_n x \| \leq K \cdot \| x \|.$$

Bu yerda biz normaning uzluksizligidan foydalandik. Endi $\{A_n\}$ ketma-ketlikni chiziqli operatorlar fazosi $L(X,Y)$ da A ga yaqinlashishini ko‘rsatamiz.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 son mavjudki, barcha $n > n_0$, $p \in N$ va $\| x \| \le 1$ lar uchun

$$\| A_{n+p}x - A_n x \| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Agar so‘nggi tengsizlikda $p \to \infty$ da limitga o‘tsak va normaning uzluksizligidan foydalansak, ixtiyoriy $n > n_0$ va $\| x \| \le 1$ lar uchun

$$\| Ax - A_n x \| \le \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Shuning uchun ixtiyoriy $n > n_0$ da

$$\| A - A_n \| = \sup_{\|x\| \le 1} \| Ax - A_n x \| \le \varepsilon$$

Demak, $L(X,Y)$ fazodagi norma ma’nosida

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Shunday qilib, $L(X,Y)$ fazo to‘la fazo ekan.

13.1-natija. *X chiziqli normalangan fazoga qo‘shma bo‘lgan $X^* = L(X,C)$ fazo Banax fazosidir.*

Isbot. Kompleks sonlar to‘plami C to‘la fazo, shuning uchun 13.1-teoremaga ko‘ra $L(X,C)$ Banax fazosi bo‘ladi. Δ

Misollar. 13.4. $L(C_2[a,b], C[a,b])$ fazoni to‘lalikka tekshiring.

Yechish. $Y = C[a,b]$ to‘la fazo bo‘lganligi uchun 13.1-teoremaga ko‘ra $L(C_2[a,b], C[a,b])$ to‘la fazo, ya’ni Banax fazosi bo‘ladi. Δ

13.5. $L(C[a,b],\ C_2[a,b])$ fazo uchun 13.1-teorema sharti bajariladimi? U to‘lami?

Yechish. $Y = C_2[a,b]$ fazo to‘la bo‘lmagan (3.8 va 8.12-misollarga qarang) normalangan fazo bo‘lganligi uchun 13.1-teorema sharti bajarilmaydi. Shuning uchun biz $L(C[a,b],\ C_2[a,b])$ fazoni to‘la fazo deya olmaymiz. Aniqlik uchun $a = -1,\ b = 1$ deymiz va $L(C[-1,1],\ C_2[-1,1])$ fazoning to‘la emasligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $C_2[-1,1]$ fazoning to‘la emasligini ko‘rsatishda qo‘llanilgan (3.8-misolga qarang), uzluksiz funksiyalarning

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1,-1/n],\\ nx, & x\in(-1/n,1/n)\\ 1, & x\in[1/n,1]\end{cases} \qquad (13.5)$$

ketma-ketligidan foydalanib, $A_n \in L(C[-1;1], C_2[-1;1])$, $n\in N$ operatorlar ketma-ketligini quyidagicha quramiz:

$$(A_n f)(x)= f_n(x)f(x). \qquad (13.6)$$

A_n operatorning chiziqli va uzluksizligi oson tekshiriladi. $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining $L(C[-1;1], C_2[-1;1])$ fazoda fundamental ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $\|A_n - A_m\|$ normani hisoblaymiz:

$$\|A_n - A_m\| = \sup_{\|f\|\le 1}\|A_n f - A_m f\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}|f_n(x)- f_m(x)|^2\,|f(x)|^2dx}\,. \quad (13.7)$$

(13.7) va

$$\|f\| = \max_{-1\le x\le 1}|f(x)|\le 1$$

ekanligidan foydalansak,

$$\|A_n - A_m\|\le\sqrt{\int_{-1}^{1}|f_n(x)- f_m(x)|^2\,dx}=\|f_n - f_m\|_{C_2[-1;1]} \qquad (13.8)$$

tengsizlikni olamiz. $\{f_n\}$ ketma-ketlikning $C_2[-1,1]$ fazoda fundamentalligi 3.8-misolda isbotlangan. (13.8) dan hamda $\{f_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligidan $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligininining fundamentalligi kelib chiqadi. Lekin $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi $L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ fazoda yaqinlashuvchi emas. Teskaridan faraz qilaylik, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi biror $A\in L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ operatorga yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $f\in C[a,b]$ uchun $\lim_{n\to\infty}\|A_n f - Af\|=0$ tenglik o‘rinli. Ikkinchidan $f_0(x)\equiv 1$ uchun

$$(A_n f_0)(x)= f_n(x),\ \ n\in N$$

tenglik o‘rinli va $(Af_0)(x)= g_0(x)$ deylik. 3.8-misolda $\{f_n\}$ ketma-ketlikning birorta ham uzluksiz funksiyaga $C_2[-1,1]$ fazo normasida yaqinlasha olmasligi ko‘rsatilgan edi, jumladan $\{A_n f_0 = f_n\}$ ketma-ketlik $g_0 = Af_0$ funksiyaga ham yaqinlasha olmaydi. Bu qarama qarshilik $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining yaqinlashuvchi emasligini bildiradi. Demak, $L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ to‘la bo‘lmagan normalangan fazo ekan. Δ

Banax-Shteynxaus teoremasi yordamida ko‘rsatish mumkinki, agar X va Y lar Banax fazolari bo‘lsa, u holda $L(X,Y)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan ham to‘la bo‘ladi.

13.2-teorema. (Banax-Shteynxaus yoki tekis chegaralanganlik prinsipi). *Agar chiziqli uzluksiz operatorlarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi X Banax fazosining har bir nuqtasida chegaralangan (ya’ni har bir $x \in X$ uchun shunday $M_x > 0$ mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $n \in N$ uchun*

$$\| A_n x \| \le M_x \tag{13.9}$$

tengsizlik o‘rinli) bo‘lsa, u holda bu operatorlarning normalaridan tuzilgan $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlik ham chegaralangan bo‘ladi.

Isbot. Avvalo (13.9) shart bajarilganda shunday

$$B[a_0, r_0] = \{x \in X : \| x - a_0 \| \le r_0\}$$

yopiq shar mavjud bo‘lib, bu sharda $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lishini (ya’ni shunday $M_0 > 0$ son mavjud bo‘lib, ixtiyotiy $x \in B[a_0, r_0]$ va barcha $n \in N$ larda $\| A_n x \| \le M_0$ tengsizlik bajarilishini) ko‘rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, ya’ni $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik birorta ham yopiq sharda chegaralangan bo‘lmasin. Ixtiyoriy $B[x_0, \varepsilon_0]$ shar olamiz. $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik $B[x_0, \varepsilon_0/2]$ sharda chegaralanmagan bo‘lgani uchun shunday $x_1 \in B[x_0, \varepsilon_0/2]$ element va n_1 nomer mavjudki, $\| A_{n_1} x_1 \| > 1$ bo‘ladi. A_{n_1} operatorning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_1, \varepsilon_1] \subset B[x_0, \varepsilon_0/2]$ sharda ham bajariladi. $B[x_1, \varepsilon_1/2]$ sharda $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralanmagan bo‘lgani uchun shunday $x_2 \in B[x_1, \varepsilon_1/2]$ element va n_2 nomer mavjudki, $\| A_{n_2} x_2 \| > 2$ shart bajariladi. A_{n_2} ning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_2, \varepsilon_2] \subset B[x_1, \varepsilon_1/2]$ sharda ham bajariladi va hokazo k-chi qadamda $B[x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}]$ sharning x_k nuqtasida $\| A_{n_k} x_k \| > k$ shart bajariladi. A_{n_k} ning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_k,\varepsilon_k]\subset B[x_{k-1},\varepsilon_{k-1}/2]$ sharda ham bajariladi. Demak, ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi

$$B[x_0,\varepsilon_0]\supset B[x_1,\varepsilon_1]\supset\ldots\supset B[x_k,\varepsilon_k]\supset\ldots$$

yopiq sharlar ketma-ketligining barchasiga qarashli bo‘lgan $\bar{x}\in B[x_k,\varepsilon_k]$ element mavjud va barcha $k\in N$ larda $\|A_{n_k}x_k\|>k$ tengsizlik bajariladi. Bu esa (13.9) zid. Shunday qilib, $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladigan $B[a_0,r_0]$ yopiq shar mavjud. Ixtiyoriy $x\in B[\theta,1]$ uchun $x'=r_0x+a_0$ nuqta $B[a_0,r_0]$ sharda yotadi. Shuning uchun, ixtiyoriy n da $\|A_nx'\|\le M_0$. Endi $x=r_0^{-1}(x'-a_0)$ tenglikdan foydalansak,

$$\|A_nx\|=\left\|A_n\left(\frac{1}{r_0}(x'-a_0)\right)\right\|=\frac{1}{r_0}\|A_nx'-A_na_0\|\le$$

$$\le\frac{1}{r_0}\left(\|A_nx'\|+\|A_na_0\|\right)\le\frac{1}{r_0}\left(M_0+\|A_na_0\|\right)\le\frac{1}{r_0}\left(M_0+M_{a_0}\right)=M.$$

U holda

$$\|A_n\|=\sup_{\|x\|\le1}\|A_nx\|\le M.\ \Delta$$

13.3-teorema. *Agar X va Y lar Banax fazolari bo‘lsa, u holda $L(X,Y)$ operatorlar fazosi kuchli yaqinlashishga nisbatan to‘ladir.*

Isbot. Istalgan $x\in X$ da $\{A_nx\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun, har bir $x\in X$ da $\lim\limits_{n\to\infty}A_nx$ mavjud va biz $Ax=\lim\limits_{n\to\infty}A_nx=y$ tenglik bilan aniqlanuvchi A operatorga ega bo‘lamiz. Bu operatorning chiziqliligi 13.1-teoremada isbotlangan edi. Endi uning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz. Har bir $x\in X$ da $\{A_nx\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun, u chegaralangandir. Banax-Shteynxaus teoremasiga ko‘ra, ixtiyoriy $n\in N$ da $\|A_n\|\le M$ o‘rinli. Bundan

$$\|Ax\|=\left\|\lim_{n\to\infty}A_nx\right\|=\lim_{n\to\infty}\|A_nx\|\le M\cdot\|x\|.$$

Demak, $\|A\|\le M$. Δ

Misollar. 13.6. 13.2-misolda keltirilgan

$$P_n:\ell_2\to\ell_2,\qquad P_nx=(x_1,x_2,\ x_n,0,\ldots,0,\ldots)$$

operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. $P_n : \ell_2 \to \ell_2$ operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatan ham, $X = \ell_2$ va $Y = \ell_2$ lar Banax fazolari. P_n ning chegaralangan ekanligi oson tekshiriladi. Har bir $x \in \ell_2$ nuqtada chegaralangan ekanligi

$$\| P_n x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} = \| x \| = M_x$$

dan kelib chiqadi. Δ

13.7. $L(\ell_2)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to‘la fazo bo‘ladimi?

Yechish., $X = Y = \ell_2$ lar to‘la fazolar bo‘lganligi uchun 13.3-teoremaga ko‘ra $L(\ell_2)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to‘la fazo bo‘ladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Operatorlar ketma-ketligining kuchsiz, kuchli va tekis yaqinlashishlarini ta’riflang.*
2. *Kuchli yaqinlashuvchi, lekin tekis yaqinlashmaydigan operatorlar ketma-ketligiga misol keltiring. (13.2-misolga qarang).*
3. *Kuchsiz yaqinlashuvchi, lekin kuchli yaqinlashmaydigan operatorlar ketma-ketligiga misol keltiring. (13.1-misolga qarang).*
4. $L(\ell_1)$ *fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to‘la fazo bo‘ladimi? 13.3-teoremadan foydalaning.*
5. *13.2-misolda keltirilgan* $Q_n : \ell_2 \to \ell_2$

$$Q_n x = (0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ x_{n+3} \ldots),$$

operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

6. $A_n : L_2[-\pi; \pi] \to L_2[-\pi; \pi]$,

$$(A_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos ny f(y) dy$$

operatorlar ketma-ketligini nol operatorga kuchli va kuchsiz ma’noda yaqinlashishga tekshiring.

7. $\{A_n\} \subset L(C[-1;1], L_2[-1;1])$ *operatorlar ketma-ketligini quyidagicha aniqlaymiz:*

$$(A_n f)(x) = f_n(x) f(x).$$

Bu yerda f_n *lar (13.5) tenglik bilan aniqlanadi.* A_n *operatorlar ketma-ketligining limitini toping. Limitik operatorga* A_n *operatorlar ketma-ketligi qaysi ma'noda (tekis, kuchli, kuchsiz) yaqinlashadi?*

8. $L(C_1[a;b])$ *fazo 13.1-teorema shartini qanoatlantiradimi?*

4-mavzu Teskari operatorlar

Bizga X ni Y ga akslantiruvchi A operator berilgan bo'lsin. $D(A)$ - uning aniqlanish sohasi, $\mathrm{Im}A$ esa uning qiymatlar sohasi bo'lsin.

14.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $y \in \mathrm{Im}A$ *uchun* $Ax = y$ *tenglama yagona yechimga ega bo'lsa, u holda* A *operator teskarilanuvchan operator deyiladi*.

Agar A teskarilanuvchan operator bo'lsa, u holda ixtiyoriy $y \in \mathrm{Im}A$ ga $Ax = y$ tenglamaning yechimi bo'lgan yagona $x \in D(A)$ element mos keladi. Bu moslikni o'rnatuvchi operator A operatorga teskari operator deyiladi va A^{-1} bilan belgilanadi, hamda

$$A^{-1} : Y \to X, \quad D(A^{-1}) = \mathrm{Im}A, \quad \mathrm{Im}A^{-1} = D(A).$$

Bundan tashqari teskari operatorning aniqlanishidan

$$A^{-1}Ax = x, \ \ x \in D(A), \qquad AA^{-1}y = y, \ \ y \in D(A^{-1}) \tag{14.1}$$

tengliklar kelib chiqadi.

Endi A akslantirish X ni o'zini-o'ziga akslantiruvchi chiziqli operator bo'lsin. Agar $B \in L(X, X) = L(X)$ operator uchun $BA = I$ bo'lsa, u holda B operator A operatorga chap teskari operator deyiladi. Xuddi shunday, $AC = I$ tenglik bajarilsa, C operator A ga o'ng teskari operator deyiladi.

14.1-tasdiq. *Agar* A *operator uchun ham chap teskari, ham o'ng teskari operatorlar mavjud bo'lsa, u holda ular o'zaro teng.*

Isbot. A uchun B chap teskari, C o'ng teskari operatorlar bo'lsin, u holda

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. \ \Delta$$

(14.2)

Misollar. 14.1. $A:\ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$ operatorga chap teskari operatorni toping. A o‘ngga siljitish operatori deyiladi.

Yechish. $B:\ell_2 \to \ell_2$ bilan chapga siljitish operatorini belgilaymiz:

$$Bx = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

Endi BA operatorning $x \in \ell_2$ elementga ta’sirini qaraymiz.

$$BAx = B(Ax) = B(0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = I\,x.$$

Demak, B operator A uchun chap teskari operator ekan.

14.2. 14.1 misolda keltirilgan $A:\ell_2 \to \ell_2$ operatorga o‘ng teskari operator mavjudmi?

Yechish. Faraz qilaylik, A ga o‘ng teskari operator mavjud bo‘lsin. Uni $C:\ell_2 \to \ell_2$ orqali belgilaymiz. 14.1-tasdiqqa ko‘ ra (14.1-misolga qarang) $B = C$ bo‘ladi, ya’ni

$$C\,x = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

Endi AC operatorning $x \in \ell_2$ elementga ta’sirini qaraymiz.

$$AC\,x = A(C\,x) = A(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots) = (0, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) \neq I\,x.$$

Demak, C operator A uchun o‘ng teskari operator emas ekan. Bundan A uchun o‘ng teskari operatorning mavjud emasligi kelib chiqadi.

14.2-tasdiq. *Agar A uchun bir vaqtda ham o‘ng teskari, ham chap teskari operatorlar mavjud bo‘lsa, u holda A teskarilanuvchan operator bo‘ladi va $A^{-1} = B = C$ tenglik o‘rinli.*

14.2 tasdiqning isboti 14.1-tasdiq va (14.1) tenglikdan kelib chiqadi.

14.1-teorema. *A chiziqli operatorga teskari bo‘lgan A^{-1} operator ham chiziqlidir.*

Isbot. Shuni aytib o‘tish kerakki, $\operatorname{Im} A = D(A^{-1})$ chiziqli ko‘pxillikdir. Shunday ekan ixtiyoriy α_1, α_2 sonlar va ixtiyoriy $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$ elementlar uchun

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 \tag{14.3}$$

tenglikning to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatish yetarli. $Ax_1 = y_1$ va $Ax_2 = y_2$ deymiz. A chiziqli bo‘lgani uchun

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \ . \tag{14.4}$$

Teskari operator ta’rifiga ko‘ra,

$$x_1 = A^{-1} y_1, \qquad\qquad x_2 = A^{-1} y_2 .$$

Bu tengliklarni mos ravishda α_1 va α_2 sonlarga ko‘paytirib qo‘shsak,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 \ .$$

Ikkinchi tomondan, (14.4) dan va teskari operatorning ta’rifidan

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

tenglik kelib chiqadi. Oxirgi ikki tenglikdan (14.3) tenglikni olamiz. Δ

14.2-teorema. *(Teskari operator haqida Banax teoremasi). A operator X Banax fazosini Y Banax fazosiga biyektiv akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operator bo‘lsin. U holda A^{-1} operator mavjud va chegaralangan.*

Teoremani isbotlashdan oldin quyidagi lemmani isbotlaymiz.

14.1-lemma. *M to‘plam X Banax fazosining hamma yerida zich bo‘lsin. U holda ixtiyoriy nolmas $y \in X$ elementni*

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots$$

qatorga yoyish mumkin. Bu yerda $y_k \in M$, $\|y_k\| \le 3 \cdot 2^{-k} \cdot \|y\|$, $k \in N$.

Isbot. $y_1, y_2, \ldots$ elementlarni ketma-ket quramiz. M to‘plam X Banax fazosining hamma yerida zich bo‘lgani uchun, shunday $y_1 \in M$ mavjudki,

$$\|y - y_1\| \le \frac{\|y\|}{2}$$

bo‘ladi. $y_2 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\| y - y_1 - y_2 \| \le \frac{\|y\|}{4}$$

bo‘lsin. Endi $y_3 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\| y - y_1 - y_2 - y_3 \| \le \frac{\|y\|}{8}$$

bajarilsin. Umuman $y_n \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\| y - y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_n \| \le \frac{\|y\|}{2^n}$$

bo‘lsin. Bunday tanlash mumkin, chunki M to‘plam X ning hamma yerida zich. $y_n \in M$ elementlarning tanlanishiga ko‘ra

$$\lim_{n \to \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| = 0,$$

ya’ni

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

qator yaqinlashadi va uning yig‘indisi y ga teng. Endi $y_n \in M$ elementlarning normalarini baholaymiz:

$$\| y_1 \| = \| y_1 - y + y \| \le \| y_1 - y \| + \| y \| \le \frac{\|y\|}{2} + \| y \| \le \frac{3\|y\|}{2},$$

$$\| y_2 \| = \| y_2 + y_1 - y + y - y_1 \| \le \| y_2 + y_1 - y \| + \| y - y_1 \| \le \frac{\|y\|}{4} + \frac{\|y\|}{2} \le \frac{3\|y\|}{2^2}$$

va nihoyat

$$\| y_n \| = \| y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1 - y + y - y_1 - \ldots - y_{n-1} \| \le$$

$$\le \| y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1 - y \| + \| y - y_1 - \ldots - y_{n-1} \| \le \frac{\|y\|}{2^n} + \frac{\|y\|}{2^{n-1}} \le \frac{3\|y\|}{2^n}. \quad \Delta$$

14.2-teoremaning isboti. A biyektiv akslantirish bo‘lganligi uchun A^{-1} operator mavjud va $D(A^{-1}) = Y$. Endi Y fazoda

$$M_k = \{y \in Y : \| A^{-1}y \| \le k \| y \|\}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

to‘plamlarni qaraymiz. Y fazoning ixtiyoriy elementi M_k to‘plamlarning birortasida yotadi. Shuning uchun

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k .$$

Ber teoremasiga ko‘ra M_k to‘plamlarning birortasi qandaydir $B \subset Y$ sharda zich bo‘ladi. Faraz qilaylik, M_n to‘plam B sharda zich bo‘lsin. B shar ichida sharsimon P qatlam olamiz, ya’ni

$$P = \{z \in B : \beta < \|z - y_0\| < \alpha, \;\; 0 < \beta < \alpha, \;\; y_0 \in M_n\}.$$

P qatlamni markazi nolda bo‘ladigan qilib parallel ko‘chiramiz va

$$P_0 = \{z \in Y : \beta < \| z \| < \alpha\}.$$

sharsimon qatlamga ega bo‘lamiz. Birorta $n_0 \in N$ uchun M_{n_0} to‘plam P_0 da zich bo‘lishini ko‘rsatamiz. Agar $z \in P \bigcap M_n$ bo‘lsa, u holda $z - y_0 \in P_0$ bo‘ladi. Bundan tashqari

$$\left\|A^{-1}(z - y_0)\right\| \le \left\|A^{-1}z\right\| + \left\|(-1)A^{-1}y_0\right\| = \| A^{-1}z \| + \| A^{-1}y_0 \| \le n\| z \| + n\| y_0 \| =$$

$$= n\left(\|z - y_0 + y_0\| + \|y_0\|\right) \le n\left(\| z - y_0\| + 2\| y_0\|\right) = n\| z - y_0\| \left(1 + \frac{2\| y_0\|}{\| z - y_0\|}\right) \le$$

$$\le n\| z - y_0\| \left(1 + \frac{2\| y_0\|}{\beta}\right). \tag{14.5}$$

Ma’lumki, $n\left(1 + \frac{2\| y_0\|}{\beta}\right)$ miqdor z ga bog‘liq emas va biz

$$n_0 = 1 + \left[n\left(1 + \frac{2\| y_0\|}{\beta}\right)\right]$$

deb olamiz. U holda (14.5) ga ko‘ra $z - y_0 \in M_{n_0}$ bo‘ladi. M_n to‘plamning P qatlamda zich ekanligidan M_{n_0} to‘plamning P_0 qatlamda zich ekanligi kelib chiqadi. Endi Y dan ixtiyoriy nolmas y element olamiz. Shunday λ son mavjudki, $\beta < \| \lambda y \| < \alpha$ tengsizlik o‘rinli, ya’ni $\lambda y \in P_0$ bo‘ladi. M_{n_0} to‘plam

P_0 qatlamda zich bo‘lgani uchun $\lambda\, y$ ga yaqinlashuvchi $y_k \in M_{n_0}$ ketma-ketlik qurish mumkin. U holda $y_k/\lambda \to y$. Ravshanki, $y_k \in M_{n_0}$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\lambda \neq 0$ uchun $\dfrac{y_k}{\lambda} \in M_{n_0}$ bo‘ladi. Shunday qilib, M_{n_0} to‘plam $Y\setminus\{0\}$ da zich va demak, Y ning o‘zida ham zich.

Endi ixtiyoriy nolmas $y \in Y$ elementni olamiz va 14.1-lemmaga ko‘ra M_{n_0} to‘plamning elementlari orqali qatorga yoyamiz:

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots, \quad \| y_k \| \le 3 \cdot 2^{-k} \| y \|, \; k \in N.$$

X fazoda $x_k = A^{-1} y_k$ elementlardan tuzilgan qatorni qaraymiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-1} y_k \,. \tag{14.6}$$

Bu qator qandaydir $x \in X$ elementga yaqinlashadi, chunki

$$\|x_k\| = \|A^{-1} y_k\| \le n_0 \| y_k \| \le 3 n_0 \frac{\| y \|}{2^k}$$

va

$$\| x \| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| \le 3 n_0 \| y \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3 n_0 \| y \|.$$

(14.6) qatorning yaqinlashuvchiligidan va A ning uzluksizligidan

$$A x = A\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} A x_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y\,.$$

Bu yerdan $x = A^{-1} y$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari

$$\| A^{-1} y \| = \| x \| \le 3 n_0 \| y \|.$$

Bu yerdan

$$\| A^{-1} \| \le 3 \cdot n_0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shunday qilib, A^{-1} operatorning chegaralanganligi isbotlandi. Δ

Berilgan operatorga teskari operatorning mavjudligini ko‘rsatish birmuncha osonroq, lekin teskari operatorni topish masalasi murakkab masaladir. Shuning uchun teskari operatorni topishni soddaroq holdan, ya’ni qaralayotgan fazo o‘lchami chekli bo‘lgan holdan boshlaymiz.

14.3. $A: R^3 \to R^3, \quad Ax = (x_1, x_2 + x_1, x_3)$ operatorga teskari operator mavjudmi? Agar mavjud bo‘lsa, uni toping.

Yechish. Berilgan A operatorga teskari operator mavjud bo‘lishi uchun, ixtiyoriy $y \in \mathrm{Im} A = R^3$ da $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo‘lishi kerak. Endi $Ax = y$ tenglikdan x ni topamiz:

$$Ax = y \Leftrightarrow (x_1, x_2 + x_1, x_3) = (y_1, y_2, y_3).$$

Bundan

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

ya’ni

$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2 - y_1, y_3) = A^{-1} y.$$

Shunday qilib, A operatorga teskari operator mavjud bo‘lib u

$$A^{-1} : R^3 \to R^3, \quad A^{-1} x = (x_1, x_2 - x_1, x_3)$$

ko‘rinishga ega. 14.1-teoremaga ko‘ra u chiziqli operator bo‘ladi. Δ

14.4. 14.3 misolda qaralgan $A: R^3 \to R^3$ operator teskari operatorlar haqida Banax teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. $X = R^3$ va $Y = R^3$ lar Banax fazolari bo‘lganligi uchun A akslantirishning biyeksiya ekanligini ko‘rsatish yetarli. R^3 fazodan ixtiyoriy ikkita turli $x = (x_1, x_2, x_3)$ va $y = (y_1, y_2, y_3)$ elementlarni olamiz va $Ax \neq Ay$ ekanligini ko‘rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik $Ax - Ay = 0$ bo‘lsin. So‘nggi tenglikdan $x = y$ ekanligiga kelamiz. Bu qarama-qarshilik A akslantirishning inyektiv ekanligini ko‘rsatadi. 14.3-misolda ixtiyoriy $y \in R^3$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega ekanligi ko‘rsatilgan edi. Bu esa A akslantirishning surektiv ekanligini ko‘rsatadi. Demak, A biyektiv akslantirish ekan. Δ

Teskari operatorlar haqida ba'zi teoremalar

Biz bu bandda operator teskarilanuvchan bo'lishligining zaruriy va yetarli shartini keltiramiz. Shuningdek teskari operator mavjud va chegaralangan bo'lishining yetarli, zarur va yetarli shartlarini keltiramiz.

14.3-teorema. $A: X \to Y$ *chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun* $Ax = \theta$ *tenglama faqat* $x = \theta$ *yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* A teskarilanuvchan bo'lsin. U holda $Ax = \theta$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi. A chiziqli bo'lgani uchun bu yechim $x = \theta$ bo'ladi.

Yetarliligi. $Ax = \theta$ tenglama faqat nol yechimga ega bo'lsin, u holda ixtiyoriy $y \in \operatorname{Im} A$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi. Teskarisini faraz qilaylik, biror $y \in \operatorname{Im} A$ uchun yechim ikkita bo'lsin. U holda $A(x_1 - x_2) = \theta$ bo'ladi. Shartga ko'ra $x_1 - x_2 = \theta$. Bundan $x_1 = x_2$. Δ

14.4-teorema. X *chiziqli normalangan fazoni* Y *chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli* A *operator berilgan bo'lsin.* $\operatorname{Im} A$ *da chegaralangan* A^{-1} *operator mavjud bo'lishi uchun, shunday* $m > 0$ *son mavjud bo'lib, ixtiyoriy* $x \in D(A)$ *lar uchun*

$$\| Ax \| \geq m \| x \| \tag{14.9}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* A^{-1} mavjud va chegaralangan bo'lsin, ya'ni

$$\left\| A^{-1} y \right\| \leq \frac{1}{m} \| y \|, \quad \forall y \in D\left(A^{-1}\right).$$

U holda

$$\| Ax \| = \| y \| \geq m \left\| A^{-1} y \right\| = m \| x \|.$$

Demak, (14.9) shart o'rinli.

Yetarliligi. (14.9) shartdan A operatorning o'zaro bir qiymatli ekanligi kelib chiqadi. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni A o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lmasin. U holda shunday $x_1, x_2 \in D(A)$, $x_1 \neq x_2$ elementlar mavjudki,

$$Ax_1 = y, \qquad Ax_2 = y.$$

Bundan $A(x_1 - x_2) = \theta$ ekanligi kelib chiqadi. (14.9) tengsizlikka ko‘ra,

$$0 \le m\| x_1 - x_2 \| \le \| A(x_1 - x_2)\| = 0.$$

Bu yerdan $x_1 = x_2$ qarama-qarshilikka kelamiz. Demak, A - o‘zaro bir qiymatli akslantirish ekan. Shuning uchun, teskari A^{-1} operator mavjud. Endi A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz. (14.9) tengsizlikka ko‘ra,

$$\| x \| \le \frac{1}{m}\| Ax \|.$$

Ixtiyoriy $y = Ax \in \mathrm{Im}A$ uchun

$$\| A^{-1} y \| \le \frac{1}{m}\| y \|.$$

Bu yerdan A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligi hamda

$$\| A^{-1} \| \le \frac{1}{m}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Δ

Endi 14.3 va 14.4-teorema shartlarining bajarilishiga doir misollar qaraymiz.

Misollar 14.5. $C[0,1]$ fazoda x ga ko‘paytirish operatorini (11.8-misolga qarang), ya’ni

$$B : C[0;\,1] \to C[0;\,1], \quad (Bf)(x) = x\,f(x)$$

operatorni qaraymiz. Bu operator 14.3-teorema shartlarini qanoatlantiradimi? B teskarilanuvchan operator bo‘ladimi?

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Endi $Bf = 0$ tenglamani, ya’ni $xf(x) = 0$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglama $C[0,1]$ fazoda faqat $f(x) \equiv 0$ yechimga ega. B operator 14.3-teorema shartlarini qanoatlantiradi. Demak, B - teskarilanuvchan operator, ya’ni B ga teskari operator mavjud.

14.6. 14.5-misolda qaralgan x ga ko‘paytirish operatori $B : C[0,1] \to C[0,1]$, 14.4-teorema shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Ma'lumki, B chiziqli operator. B operator uchun 14.4-teoremaning (14.9) sharti bajarilmasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $C[0,1]$ fazoda har bir elementining normasi 1 bo'lgan

$$g_n(x)=\begin{cases}1-n\,x, & \text{agar} \quad x\in[0;\,1/\,n]\\ 0, & \text{agar} \quad x\in(1/\,n;\,1]\end{cases}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Endi $\|B\,g_n\|$ normani hisoblaymiz:

$$\|B\,g_n\|=\max_{0\le x\le 1}|(B\,g_n)(x)|=\max_{0\le x\le 1}|x\,g_n(x)|=\max_{0\le x\le 1}|x-nx^2|=\frac{1}{2n}\|g_n\|.$$

14.1-chizma.

Istalgan $m>0$ son uchun shunday n_0 natural son mavjudki, $\dfrac{1}{2n_0}<m$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan kelib chiqadiki,

$$\|B\,g_n\|=\frac{1}{2n}\|g_n\|<m\|g_n\|.$$

Demak, B operator uchun (14.9) tengsizlikni qanoatlantiruvchi $m>0$ son mavjud emas. 14.5-misolda ko'rsatildiki, B ga teskari operator mavjud, lekin 14.4-teoremaning sharti bajarilmaganligi uchun, B ga teskari operator chegaralanmagan bo'ladi. Δ

14.7. Endi $L_2[-1;\,1]$ Hilbert fazosini o'zini-o'ziga akslantiruvchi

$$A:L_2[-1;\,1]\to L_2[-1;\,1],\quad (Af)(x)=(x^2+1)f(x)$$

operatorni qaraymiz. A operator 14.4-teorema shartlarini qanoatlantiradimi? A ga chegaralangan teskari operator mavjudmi?

Yechish. A operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Endi A operator uchun 14.4-teoremaning (14.9) sharti bajarilishini ko'rsatamiz. Buning uchun $\|Af\|$ normani quyidan baholaymiz.

$$\|Af\|^2=\int_{-1}^{1}\left|(x^2+1)f(x)\right|^2dx\ge\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx=\|f\|^2.$$

Biz bu yerda $|x^2+1|\ge 1$ tengsizlikdan hamda integralning monotonlik xossalaridan foydalandik. So'nggi tengsizlikdan $\|Af\|\ge\|f\|$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu yerda

$m > 0$ son sifatida $(0,1]$ dagi ixtiyoriy sonni olish mumkin. 14.4-teorema tasdig‘idan foydalansak, A ga chegaralangan teskari operator mavjudligi hamda $\|A^{-1}\| \le 1$ tengsizlik kelib chiqadi. Aslida $\|A^{-1}\| = 1$ tenglik o‘rinli. Δ

14.5-teorema. *X - Banax fazosi va $A \in L(X)$. Agar $\|A\| \le q < 1$ bo‘lsa, u holda $I - A$ operator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.*

Isbot. $L(X)$ fazoda quyidagi formal qatorni qaraymiz:

$$I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots \tag{14.10}$$

Ma’lumki, $\| A^2\| \le \| A\|^2$. Xuddi shuningdek, $\|A^n\| \le \|A\|^n$. U holda (14.10) qatorning

$$S_n = I + \sum_{k=1}^{n} A^k$$

qismiy yig‘indilar ketma-ketligi Koshi shartini qanoatlantiradi, ya’ni

$$\| S_{n+p} - S_n\| = \| A^{n+1} + A^{n+2} + \ldots + A^{n+p}\| \le q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots + q^{n+p} \to 0,\ n \to \infty .$$

(14.10) qatorning qismiy yig‘indilar ketma-ketligi S_n - fundamental ekan, $L(X) := L(X, X)$ to‘la bo‘lgani (13.1-teoremaga qarang) uchun

$$S_n \to S \in L(X).$$

Shunday qilib,

$$I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k = S .$$

Bundan tashqari

$$S(I - A) = \lim_{n\to\infty} S_n(I - A) = \lim_{n\to\infty}\left(I + A + A^2 + \ldots + A^n - A - A^2 - \ldots - A^{n+1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(I - A^{n+1}\right) = I .$$

Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, $(I - A)S = I$. Demak, S operator $I - A$ operator uchun teskari operator ekan. S operatorning normasi

$$\| S \| \le \sum_{n=0}^{\infty}\| A^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Demak, $S=(I-A)^{-1}$ operator chegaralangan va uning normasi

$$\| S \| = \left\| (I-A)^{-1} \right\| \le \frac{1}{1-q}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Δ

14.1-natija. *X - Banax fazosi va $A \in L(X)$ bo‘lib, $\|A\| \le q < 1$ bo‘lsa, u holda $I+A$ operator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.*

14.1-lemma. *Agar $A, B \in L(X)$ bo‘lib, $A^{-1}, B^{-1} \in L(X)$ bo‘lsa, u holda AB operatorga chegaralangan teskari operator mavjud va $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ tenglik o‘rinli.*

14.6-teorema. *$A \in L(X)$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud bo‘lsin. Agar $A' : X \to X$ operatorning normasi*

$$\| A' \| < \frac{1}{\left\| A^{-1} \right\|}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $B = A - A'$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud.

Isbot. B operatorni quyidagicha yozib olamiz: $A - A' = A(I - A^{-1}A')$. Endi $A^{-1}A'$ operatorning normasini baholaymiz:

$$\left\| A^{-1}A' \right\| \le \left\| A^{-1} \right\| \cdot \| A' \| < 1.$$

14.5-teoremaga ko‘ra $I - A^{-1}A$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud. U holda 14.1-lemmaga ko‘ra, $A(I - A^{-1}A')$ operator ham teskarilanuvchan bo‘ladi, hamda

$$B^{-1} = \left(I - A^{-1}A'\right)^{-1}A^{-1}, \quad \left\| B^{-1} \right\| \le \left\| \left(I - A^{-1}A'\right)^{-1} \right\| \cdot \left\| A^{-1} \right\|$$

munosabatlar o‘rinli. Δ

Misollar. 14.8. Parametr $\lambda \in R$ ning qanday qiymatlarida

$$(I - \lambda A) f(x) = f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y \, f(y) dy, \quad f \in L_2[-\pi; \pi]$$

operatorga 14.5-teoremani va uning 14.1-natijasini qo‘llash mumkin?

Yechish. $A\in L(L_2[-\pi;\pi])$ ekanligini tekshiramiz. Shu maqsadda ixtiyoriy $f,g\in L_2[-\pi;\pi]$ elementlarni va ixtiyoriy $\alpha,\beta\in C$ sonlarni olamiz va A operatorning $\alpha f+\beta g$ elementga ta'sirini qaraymiz:

$$(A(\alpha f+\beta g))(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin y(\alpha f+\beta g)(y)dy=\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin y\, f(y)(y)dy+$$
$$+\beta\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin y\, g(y)(y)dy=\alpha(Af)(x)+\beta(Ag)(x).$$

Biz bu yerda integralning additivlik va bir jinslilik xossalaridan foydalandik. Endi A operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $\|Af\|$ norma kvadratini baholaymiz:

$$\|Af\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin y\, f(y)dy\right|^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx\cdot\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sin y\, f(y)dy\right|^2. \quad (14.11)$$

Endi Koshi-Bunyakovskiy - $|(f,g)|\le\|f\|\cdot\|g\|$ tengsizligidan hamda

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

ayniyatlardan va $\cos 2x$ ning 1 ga ortogonalligidan foydalansak (14.11) dan

$$\|Af\|^2\le\pi^2\|f\|^2 \quad (14.12)$$

tengsizlik kelib chiqadi. (14.12) dan

$$\|Af\|\le\pi\|f\|\Rightarrow\|A\|\le\pi \quad (14.13)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Ikkinchi tomondan $f_0(x)=\sin x$ desak, u holda

$$(Af_0)(x)=\pi\cos x \quad \text{va} \quad \|f_0\|=\sqrt{\pi},\quad \|Af_0\|=\pi\|f_0\|$$

bo‘ladi. Ma'lumki,

$$\|A\|\ge\frac{\|Af_0\|}{\|f_0\|}=\pi$$

va (14.13) dan foydalansak, $\|A\|=\pi$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerdan barcha $\lambda\in\left(-\frac{1}{\pi};\frac{1}{\pi}\right)$ lar uchun $\|\lambda A\|<1$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, 14.5-teorema va uning natijasiga ko‘ra barcha $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$ larda $I-\lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan. 14.5-teorema shartlarining bajarilishi $I-\lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan bo‘lishini taminlaydi. Lekin $\lambda \notin \left(-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$ ekanligidan $I-\lambda A$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud emas degan xulosa kelib chiqmaydi. Δ

Navbatdagi misolimiz bu fikrimizni tasdiqlaydi.

14.9. Parametr λ ning $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$ qiymatlarida

$$(I-\lambda A)f(x) = f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y\, f(y)dy, \quad f \in L_2[-\pi;\pi]$$

operatorga 14.5-teoremani qo‘llab, unga teskari operatorni toping.

Yechish. 14.8-misolda $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$ qiymatlar uchun $I-\lambda A$ operatorga teskari operator mavjudligi ko‘rsatilgan edi. Bu misolga 14.5-teoremani qo‘llashimiz uchun A operatorning darajalarini hisoblashimiz kerak. Dastlab A operator kvadratini hisoblaymiz:

$$\left(A^2 f\right)(x) = A(A f)(x) = A\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y\, f(y)dy\right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin t \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin y\, f(y)dy\right)dt. \qquad (14.14)$$

(14.14) tenglikda t bo‘yicha integralni hisoblash mumkin. Agar biz

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t\, dt = 0$$

tenglikni hisobga olsak, $A^2 = 0$ ga ega bo‘lamiz. Bu tenglikdan barcha $n \geq 2$ larda $A^n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada biz, $S = I + \lambda A = (I-\lambda A)^{-1}$ ga ega bo‘lamiz. Haqiqatan ham,

$$(I-\lambda A)(I+\lambda A) = I + \lambda A - \lambda A - \lambda^2 A^2 = I$$

va

$$(I+\lambda A)(I-\lambda A)=I-\lambda A+\lambda A-\lambda^2 A^2 = I$$

tengliklar o‘rinli. Isbot jarayonidan ma’lum bo‘ldiki, barcha $\lambda \in R$ larda $I-\lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan bo‘lar ekan.

14.10. Parametr $\lambda \in R$ ning qanday qiymatlarida

$$(Bf)(x)=(1+x^2)f(x)-\lambda\int_{-1}^{1} x\,y\ f(y)dy, \quad f\in L_2[-1;\,1] \qquad (14.15)$$

operatorga 14.6-teoremani qo‘llash mumkin?

Yechish. $A\in L_2[-1;\,1]$ operator sifatida (14.7-misolga qarang)

$$(Af)(x)=(x^2+1)f(x), \quad f\in L_2[-1;\,1]$$

ni, $A'\in L_2[-1;1]$ operator sifatida esa

$$(A'\,f)(x)=\int_{-1}^{1} x\,y\ f(y)dy, \quad f\in L_2[-1;\,1]$$

ni olamiz. 14.7-misolda A operatorning teskarisi mavjud va $\|A^{-1}\|=1$ ekanligi ko‘rsatilgan edi. 14.6-teoremani (14.15) tenglik bilan aniqlangan $B = A-\lambda\,A'$ operatorga qo‘llashimiz uchun

$$\|\lambda\,A'\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}=1 \qquad (14.16)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan λ ning barcha qiymatlarini topishimiz kerak. Shu maqsadda A' operatorning normasini topamiz. Buning uchun $\|A'\,f\|$ norma kvadratini baholaymiz:

$$\|A'\,f\|^2=\int_{-1}^{1}\left|\int_{-1}^{1} x\,y\ f(y)dy\right|^2 dx=\int_{-1}^{1} x^2\,dx\cdot\left|\int_{-1}^{1} y\ f(y)dy\right|^2\le\left(\frac{2}{3}\right)^2\|f\|^2. \quad (14.17)$$

Biz bu yerda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan hamda

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx=\frac{2}{3}$$

tenglikdan foydalandik. (14.17) dan

$$\| A' \| \leq \frac{2}{3} \tag{14.18}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan $f_0(x) = x$ desak, u holda

$$(A' f_0)(x) = \frac{2}{3} \cdot x = \frac{2}{3} \cdot f_0(x) \quad \text{va} \quad \|A' f_0\| = \frac{2}{3} \cdot \|f_0\|, \quad \| f_0\| = \frac{2}{3}$$

bo‘ladi. Ma’lumki,

$$\| A' \| \geq \frac{\| A' f_0 \|}{\| f_0 \|} = \frac{2}{3}. \tag{14.19}$$

(14.18) va (14.19) lardan $\| A' \| = \dfrac{2}{3}$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerdan barcha $\lambda \in \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2} \right)$ lar uchun (14.16) ning, ya’ni $\| \lambda A' \| < 1$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. 14.6-teoremaga ko‘ra barcha $\lambda \in \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2} \right)$ larda B operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan. 14.8-misoldagidek $\lambda \notin \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2} \right)$ ekanligidan B operatorga chegaralangan teskari operator mavjud emas degan xulosa kelib chiqmaydi. Δ

14.11. Quyidagi operatorning teskarilanuvchan emasligini ko‘rsating

$$A : C[0; 1] \to C[0; 1], \quad (Af)(x) = f(0)x + f(1)x^2. \tag{14.20}$$

Yechish. Ma’lumki, chiziqli operator teskarilanuvchan bo‘lishi uchun $Af = 0$ tenglama faqat $f(x) \equiv 0$ yechimga ega bo‘lishi zarur va yetarli. (14.20) formula bilan berilgan A operator uchun $f_0(x) = x(1 - x)$ funksiyani olsak, $f_0(0) = f_0(1) = 0$ bo‘lgani uchun

$$(Af_0)(x) = f(0)x + f(1)x^2 \equiv 0.$$

Demak, $Af = 0$ tenglama nolmas f_0 yechimga ega, 14.3-teoremaga ko‘ra A operator teskarilanuvchan emas. Δ

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Teskarilanuvchan operator ta'rifini keltiring.*
2. *Chiziqli operatorga teskari operator har doim chiziqli bo'ladimi?*
3. *Chiziqli chegaralangan operatorga teskari operator mavjud bo'lsa, u chiziqli chegaralangan bo'ladimi? Misollarda tushuntiring. 14.5, 14.6-misollarga qarang.*
4. A *- chiziqli operatorning yadrosi* $KerA$ *nolmas elementni saqlasa, u holda* A *ga teskari operator mavjud bo'lishi mumkinmi?*
5. *14.10-misoldagi* B *operatorga teskari operatorni toping.*
6. *14.5-misolda keltirilgan* B *operatorga teskari operatorni toping.* B^{-1} *operatorning aniqlanish sohasini toping.* $D(B^{-1}) = C[0,1]$ *tenglik to'g'rimi? Agar bu tenglik to'g'ri bo'lmasa,* $D(B^{-1})$ *to'plam* $C[0,1]$ *fazoning hamma yerida zichmi?*
7. *Ko'paytirish operatori* $A:\ell_2 \to \ell_2$, $(Ax)_n = a_n x_n$ *ning teskarilanuvchan bo'lishligining zarur va yetarli shartini toping.*
8. *Ko'paytirish operatori* $A:\ell_2 \to \ell_2$, $(Ax)_n = a_n x_n$ *ga chegaralangan teskari operator mavjud bo'lishligining zarur va yetarli shartini toping.*
9. *Ko'paytirish operatori* $A:\ell_2 \to \ell_2$, $(Ax)_n = n^{-1} x_n$ *ga teskari operatorni toping. U chegaralangan operator bo'ladimi?*
10. *Ko'paytirish operatori* $A: L_2[-1;1] \to L_2[-1;1]$, $(Af)(x) = [x]f(x)$ *ga teskari operator mavjudmi? Bu operorning yadrosini toping.* $\dim KerA = \infty$ *tenglik to'g'rimi? Bu yerda* $[x]$ *deb* x *sonining butun qismi belgilangan.*

5-mavzu: Banax fazosida qo'shma operatorlar

X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga

akslantiruvchi chiziqli uzluksiz A operator berilgan bo'lsin, ya'ni

$$A: X \to Y, \quad y = Ax \in Y, \quad D(A) = X.$$

Bizga ixtiyoriy $g: Y \to C$ chiziqli chegaralangan funksional berilgan bo'lsin. Bu funksionalning $y = Ax$ elementga ta'sirini qaraymiz $g(y) = g(Ax)$. Osongina ko'rsatish mumkinki, $g(Ax)$ funksional X da aniqlangan biror chiziqli f funksionalni aniqlaydi. Shunday qilib,

$$g(Ax) = f(x). \tag{15.1}$$

Endi (15.1) tenglik bilan aniqlangan f funksionalning chiziqli ekanligini ko‘rsatamiz:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = g(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = g(\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2) =$$

$$= \alpha_1 g(Ax_1) + \alpha_2 g(Ax_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \qquad (15.2)$$

(15.2) tenglik barcha $x_1, x_2 \in X$ va ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ lar uchun o‘rinli. Demak, f chiziqli funksional ekan. Endi uning chegaralangan ekanligini (uzluksizligini) ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$|f(x)| = |g(Ax)| \le \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$$

tengsizlik o‘rinli. Bu yerdan f funksionalning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Agar f funksionalning x nuqtadagi qiymatini (f, x) deb belgilasak, u holda

$$(f, x) = (g, Ax). \qquad (15.3)$$

15.1-ta’rif. *Bizga $X, Y-$ chiziqli normalangan fazolar va $A: X \to Y$ chiziqli chegaralangan operator berilgan bo‘lsin. Agar biror $A^*: Y^* \to X^*$ operator va ixtiyoriy $x \in X$, $g \in Y^*$ lar uchun*

$$(g, Ax) = (A^* g, x)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, A^* operator A ga qo‘shma operator deyiladi.

Demak, har bir $g \in Y^*$ funksionalga (15.3) tenglik bilan aniqlanuvchi $f \in X^*$ funksionalni mos qo‘yuvchi $A^*: Y^* \to X^*$ operator A operatorga qo‘shma operator deb ataladi.

Qo‘shma operatorlar quyidagi xossalarga ega:

1. A^* operator chiziqli.

2. $(A+B)^* = A^* + B^*$.

3. Ixtiyoriy k son uchun $(kA)^* = kA^*$.

4. Agar A uzluksiz bo‘lsa, u holda A^* ham uzluksiz bo‘ladi.

Aniqrog‘i, quyidagi tasdiq o‘rinli.

15.1-teorema. *Agar* $A \in L(X,Y)$ *bo'lsa, u holda* $A^* \in L(Y^*, X^*)$ *va*

$$\|A^*\| = \|A\|$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Operator normasining xossasiga ko'ra,

$$|(A^* g, x)| = |(g, Ax)| \leq \|g\| \, \|Ax\| \leq \|A\| \, \|g\| \|x\|.$$

Bu yerdan

$$\|A^* g\| \leq \|A\| \, \|g\|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak,

$$\|A^*\| \leq \|A\| \tag{15.4}$$

Endi $x \in X$, $Ax \neq \theta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy element bo'lsin, $y_0 = \dfrac{Ax}{\|Ax\|} \in Y$ deymiz. Ko'rinib turibdiki, $\|y_0\| = 1$. Xan-Banax teoremasining 12.1-natijasiga ko'ra, shunday $g: Y \to C$ funksional mavjudki, $\|g\| = 1$ va $g(y_0) = \|y_0\| = 1$, ya'ni

$$g(y_0) = g\left(\frac{Ax}{\|Ax\|}\right) = \frac{1}{\|Ax\|} g(Ax) = 1.$$

Bu yerdan,

$$g(Ax) = \|Ax\|$$

tenglikka ega bo'lamiz. U holda

$$\|Ax\| = g(Ax) = \left|(A^* g)(x)\right| \leq \|A^* g\| \, \|x\| \leq \|A^*\| \, \|g\| \|x\| = \|A^*\| \, \|x\|$$

munosabatdan

$$\|A\| \leq \|A^*\| \tag{15.5}$$

tengsizlikni olamiz. (15.4) va (15.5) munosabatlardan

$$\|A\| = \|A^*\|$$

tenglik kelib chiqadi. Δ

15.2. Hilbert fazosida qo‘shma operatorlar

Ma’lumki, Hilbert fazosiga qo‘shma fazo uning o‘ziga izomorf, ya’ni $H = H^*$ (tenglik izomorfizm ma’nosida). Shuning uchun Hilbert fazolarida qo‘shma operatorlar xossalarini o‘rganish ancha qulay.

15.2-ta’rif. *H Hilbert fazosi va $A \in L(H)$ operator berilgan bo‘lsin. Agar biror $A^* : H \to H$ operator va ixtiyoriy $x, y \in H$ lar uchun*

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, A^* operator A ga qo‘shma operator deyiladi.

Bu ta’rif Banax fazosidagi qo‘shma operatorning ta’rifidan biroz farq qiladi, ya’ni bu yerda $(kA)^* = \bar{k}A^*$ (3-xossaga qarang) tenglik o‘rinli.

Hilbert fazosi holida A va A^* operatorlar aynan bitta fazoda aniqlangani uchun, ba’zan $A = A^*$ tenglik ham o‘rinli bo‘lishi mumkin.

15.3-ta’rif. *Agar $A = A^*$ bo‘lsa, ya’ni ixtiyoriy $x, y \in H$ uchun*

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, A operator o‘z-o‘ziga qo‘shma operator deyiladi.

15.4-ta’rif. *Bizga $A: H \to H$ chiziqli operator va $H_0 \subset H$ qism fazo berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x \in H_0$ uchun $Ax \in H_0$ bo‘lsa, u holda H_0 qism fazo A operatorga nisbatan invariant qism fazo deyiladi.*

15.1-lemma. *Bizga $A: H \to H$ chiziqli operator va $H_0 \subset H$ qism fazo berilgan bo‘lsin. Agar H_0 qism fazo A operatorga nisbatan invariant bo‘lsa, u holda uning ortogonal to‘ldiruvchisi bo‘lgan $H_0^{\perp} \subset H$ qism fazo A^* operatorga nisbatan invariant bo‘ladi.*

Isbot. Haqiqatan ham, agar $y \in H_0^{\perp}$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $x \in H_0$ uchun

$$(A^* y, x) = (y, Ax) = 0,$$

chunki $Ax \in H_0$. Demak, $A^* y \in H_0^{\perp}$. Δ

Xususiy holda, agar $A = A^*$ bo‘lsa, u holda $A(H_0) \subset H_0$ ekanligidan $A(H_0^{\perp}) \subset H_0^{\perp}$ ekanligi kelib chiqadi.

Hilbert fazosida qo‘shma operatorlar quyidagi xossalarga ega:

15.2-lemma. *Agar* $A, B \in L(H)$ *bo‘lsa, u holda*

1) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$,

2) $(AB)^* = B^* A^*$,

3) $(A^*)^* = A$ *tengliklar o‘rinli.*

Isbot. Birinchisini isbotlaymiz.

$$((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) =$$

$$= \alpha(x, A^* y) + \beta(x, B^* y) = (x, \overline{\alpha} A^* y) + (x, \overline{\beta} B^* y) = (x, (\overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*) y).$$

Bundan $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$ tenglik kelib chiqadi.

2) ni isbotlaymiz:

$$((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y).$$

Bundan $(AB)^* = B^* A^*$ tenglik kelib chiqadi.

3) ning isboti bevosita qo‘shma operator ta’rifidan kelib chiqadi. Δ

Endi operatorlarning Banax va Hilbert qo‘shmalarini topishga doir misollar qaraymiz.

Misollar. 15.1. $X = Y = \ell_1$ va T o‘ngga siljitish operatori bo‘lsin (14.1-misolga qarang), ya’ni

$$Tx = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, \ldots), \quad x \in \ell_1$$

bo‘lsin. T ga qo‘shma T^* operatorni toping.

Yechish. $X = \ell_1$ va $Y = \ell_1$ lar Banax fazolari bo‘lganligi uchun T operatorning Banax qo‘shmasini topamiz. Ma’lumki, $T \in L(\ell_1)$ operatorning Banax qo‘shmasi barcha $x \in \ell_1$ va $f \in (\ell_1)^*$ lar uchun

$$(T^* f)(x) = f(Tx) \qquad (15.6)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi va $(\ell_1)^*$ fazoni $(\ell_1)^*$ fazoga akslantiruvchi operatordan iborat. Bizga ma'lumki, $(\ell_1)^* = m$, boshqacha aytganda har qanday $f \in (\ell_1)^*$ uchun shunday yagona $y \in m$ mavjudki,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots) \in m \qquad (15.7)$$

tenglik barcha $x \in \ell_1$ lar uchun o'rinli bo'ladi. Xuddi shuningdek, shunday $\zeta \in m$ mavjudki,

$$(T^* f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \zeta_k, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n, \ldots) \in m \qquad (15.8)$$

tenglik barcha $x \in \ell_1$ lar uchun bajariladi. (15.7) va (15.8) tengliklarni hisobga olsak, berilgan T operator uchun (15.6) shart quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \zeta_k = \sum_{k=2}^{\infty} x_{k-1} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1}. \qquad (15.9)$$

Bu tenglik barcha $x \in \ell_1$ lar uchun bajariladi. Xususiy holda, $e_k = (\underbrace{0,0,\ldots,1}_{k},0,\ldots,)$, $k \in N$ elementlar uchun (15.9) tenglik

$$\zeta_k = y_{k+1}, \quad k = 1,2,\ldots,n,\ldots$$

tengliklarga aylanadi. Shunday qilib, $T^* : m \to m$ operator

$$T^* y = T^*(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}, \ldots)$$

formula bilan aniqlanar ekan.

15.1-teoremaga ko'ra, $T \in L(X, Y)$ ekanligidan $T^* \in L(Y^*, X^*)$ ekanligi kelib chiqadi va $\|T^*\| = \|T\|$ tenglik bajariladi. Qaralayotgan misolda 15.1-teoremaning o'rinli ekanligini tekshirib ko'ramiz. T^* operatorning chiziqli ekanligi uning aniqlanishidan ko'rinib turibdi. $\|T\| = \|T^*\|$ tenglik bajarilishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = 1, \quad \|T^*\| = \sup_{\|y\|=1} \|T^* x\| = \sup_{2 \le k < \infty} |y_k| = 1.$$

15.2. ℓ_2 fazoda ko‘paytirish operatorini, ya’ni (11.9-misolga qarang)

$$A:\ell_2 \to \ell_2, \quad (Ax)_n = a_n x_n, \quad \sup_{n\geq 1}|a_n| = a < \infty \tag{15.10}$$

operatorni qaraymiz. Unga qo‘shma operatorni toping.

Yechish. $X = Y = \ell_2$ Hilbert fazolari bo‘lganligi uchun A ga Hilbert ma’nosidagi qo‘shma operatorni topamiz. A operatorning chiziqli va chegaralanganligi 11.9-misolda ko‘rsatilgan. A ga qo‘shma operatorni topish uchun (Ax, y) skalyar ko‘paytmani qaraymiz. ℓ_2 fazodagi skalyar ko‘paytmadan foydalansak,

$$(Ax, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(Ax)_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\overline{a_n} y_n} = (x, A^* y).$$

Bundan

$$A^*:\ell_2 \to \ell_2, \quad (A^* x)_n = \overline{a_n} x_n,$$

ni olamiz. Bu yerdan A ning qo‘shmasi o‘ziga teng bo‘lishi uchun $a_n, n \in N$ sonlarning haqiqiy bo‘lishi zarur va yetarlidir degan xulosaga kelamiz. Δ

15.3. $L_2[a;b]$ kompleks Hilbert fazosida, $u(x)$ funksiyaga ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$(Af)(x) = u(x) f(x), \quad f \in L_2[a;b]$$

operatorni qaraymiz. Bu yerda $u-$ chegaralangan va o‘lchovli funksiya. A ga qo‘shma operatorni toping.

Yechish. $X = Y = L_2[a;b]$ Hilbert fazolari bo‘lganligi uchun A ga Hilbert ma’nosidagi qo‘shma operatorni topamiz. u ning chegaralangan va o‘lchovli ekanligidan A operatorning aniqlanish sohasi $D(A) = L_2[a;b]$ ekanligi va A ning chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Ta’rifga ko‘ra $A \in L(L_2[a;b])$ operatorning qo‘shmasi hamma $f, g \in L_2[a;b]$ lar uchun

$$(Af, g) = (f, A^* g) \tag{15.11}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $A^* \in L(L_2[a;b])$ operatordan iborat. Agar biz $L_2[a;b]$ fazodagi skalyar ko‘paytmadan foydalansak, (15.11) tenglikni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$(Af,g)=\int_a^b (Af)(x)\overline{g(x)}\,dx=\int_a^b u(x)f(x)\overline{g(x)}\,dx=\int_a^b f(x)\overline{\overline{u(x)}\,g(x)}\,dx=(f,A^*g).$$

Bu tenglikdan

$$(A^*g)(x)=\overline{u(x)}g(x),\quad g\in L_2[a;b]$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan $A=A^*$ bo‘lishi uchun, deyarli barcha $x\in[a;b]$ larda $u(x)\in R$ bo‘lishi zarur va yetarlidir degan xulosaga kelamiz. Δ

15.4. Endi $L_2[a;b]$ Hilbert fazosida $K(x,y)$ yadro bilan aniqlanuvchi integral operatorni, ya’ni

$$(Af)(x)=\int_a^b K(x,y)f(y)dy,\quad f\in L_2[a;b] \tag{15.12}$$

operatorni qaraymiz. Bu yerda K - $[a;b]\times[a;b]$ kvadratda aniqlangan chegaralangan va o‘lchovli funksiya. A operatorga qo‘shma operatorni toping.

Yechish. K funksiyaning chegaralangan va o‘lchovli ekanligidan, uning $L_2([a;b]\times[a;b])$ fazoga qarashli ekanligi kelib chiqadi. Fubini teoremasidan (19.1-teorema) foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$(Af,g)=\int_a^b\left\{\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right\}\overline{g(x)}\,dx=\int_a^b\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy\,\overline{g(x)}\,dx=$$

$$=\int_a^b\left\{\int_a^b K(x,y)\,\overline{g(x)}\,dx\right\}f(y)\,dy=\int_a^b f(x)\left\{\overline{\int_a^b \overline{K(y,x)}\,g(y)\,dy}\right\}dx=(f,T^*g).$$

Bu yerdan

$$(T^*g)(x)=\int_a^b \overline{K(y,x)}\,g(y)\,dy \tag{15.13}$$

tenglik kelib chiqadi. Xususan, (15.12) ko‘rinishdagi A operator $L_2[a,b]$ fazoda o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lishi uchun, deyarli barcha $x,y\in[a;b]$ lar uchun

$$K(x,y)=\overline{K(y,x)} \tag{15.14}$$

tenglikning bajarilishi yetarli va zarurdir.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Banax fazosida operatorning qo'shmasi qanday ta'riflanadi?*
2. *Hilbert fazosida operatorning qo'shmasi qanday ta'riflanadi?*
3. *Yuqoridagi ta'riflarda qanday farq bor? Javobni xossalarda tushuntiring.*
4. *O'z-o'ziga qo'shma va o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan operatorlarga misollar keltiring.*
5. *Hilbert fazosida birlik operatorga qo'shma operatorni toping. U o'z-o'ziga qo'shma bo'ladimi?*
6. *Chiziqli chegaralangan operatorga qo'shma operator har doim chiziqli chegaralangan bo'ladimi?*
7. $A:\ell_2 \to \ell_2, \quad Ax=(a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, \ldots)$ *operatorga qo'shma operatorni toping. Bu yerda* $a_n \in C, \quad n \in N$.
8. $B: L_2[0;1] \to L_2[0;1], \quad (Bf)(x) = u(x) f(x)$ *operatorga qo'shma operatorni toping. Bu yerda* $u : [a;b] \to C$ *uzluksiz funksiya.*
9. *O'z-o'ziga qo'shma* $A,B: L_2[0;1] \to L_2[0;1]$ *operatorlar berilgan:*

$$(Af)(x) = xf(x), \qquad (Bf)(x) = \int_0^1 xy\, f(y)dy.$$

AB va BA operatorlarni toping. Ular o'z-o'ziga qo'shma bo'ladimi?

10. $A: L_2[-1;1] \to L_2[-1;1]$ *operator berilgan:*

$$(Af)(x) = \int_{-1}^{1} (x^2 + iy^2) f(y)dy.$$

Uning invariant qism fazolarini toping. Juft funksiyalardan iborat $L_2^+[-1;1] = \{f \in L_2[-1;1] : f(-x) = f(x)\}$ *qism fazo* A *operator uchun invariant qism fazo bo'ladimi?*

6-mavzu: Chiziqli operatorning spektri va rezolventasi

16. Chiziqli operatorning spektri va rezolventasi

Operatorlar nazariyasida spektr tushunchasi eng muhim tushunchalardan biridir. Chiziqli operator spektrini o'rganish matematik fizika uchun muhimdir. Masalan, kvant mexanikasida sistema Hamiltoniani - bu Hilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operatordir, uning spektrini o'rganish sistema fizik xususiyatlarini o‘rganish uchun muhimdir. Spektr tushunchasini dastlab chekli o‘lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun eslatamiz.

Faraz qilaylik, $A: C^n \to C^n$ chiziqli operator berilgan bo‘lsin. Agar biror λ son uchun

$$Ax = \lambda x$$

tenglama nolmas $x \in C^n$ yechimga ega bo‘lsa, u holda λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos keluvchi nolmas x yechim esa xos vektor deyiladi. Ma’lumki, har bir $A: C^n \to C^n$ chiziqli operatorga $\{a_{ij}\} - n \times n$ matritsa mos keladi va aksincha. Chiziqli algebra kursidan ma’lumki, agar λ son A operatorning xos qiymati bo‘lsa, $det(A - \lambda I) = 0$ bo‘ladi va aksincha. $n \times n$ matritsa determinanti $det(A - \lambda I)$, parametr λ ning $n-$ darajali ko‘phadi bo‘ladi va $det(A - \lambda I) = 0$ tenglama ko‘pi bilan n ta ildizga ega, ya’ni $A: C^n \to C^n$ chiziqli operator ko‘pi bilan n ta xos qiymatga ega. Agar λ son A operatorning xos qiymati bo‘lsa $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas va aksincha. Agar λ son A operator uchun xos qiymat bo‘lmasa, ya’ni $det(A - \lambda I) \neq 0$ bo‘lsa, u holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud va u C^n fazoning hamma yerida aniqlangan bo‘ladi.

16.1-teorema. $A: C^n \to C^n$ *chiziqli operator chegaralangandir.*

Isbot. C^n fazoda $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormal bazisni tanlaymiz. U holda har bir $x \in C^n$ vektor yagona usulda

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$$

ko‘rinishda tasvirlanadi. Agar A operator C^n da aniqlangan chiziqli operator bo‘lsa, u holda

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A(e_i)$$

bo‘ladi. Shunday ekan, chiziqli operator o‘zining $e_1, e_2, \dots, e_n$, bazis vektorlardagi qiymatlari bilan bir qiymatli aniqlanadi. Endi Ax ning normasini baholaymiz:

$$\|Ax\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|A(e_i)\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|A(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M \cdot \|x\|.$$

Bu yerda

$$M = \left(\sum_{i=1}^{n} \|A(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demak, chekli o‘lchamli fazoda aniqlangan har qanday chiziqli operator chegaralangan bo‘lar ekan. Δ

Yuqorida aytilganlarning natijasi sifatida shuni ta’kidlash lozimki, chekli o‘lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun quyidagi ikki holat sodir bo‘lishi mumkin:

1) λ son uchun $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas yechimga ega, ya’ni λ son A operator uchun xos qiymat, bu holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas;

2) λ son uchun C^n fazoning hamma yerida aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud va demak, chegaralangan.

Chekli o‘lchamli fazolarda chiziqli operatorning xos qiymatlari to‘plami uning spektri deb ataladi. Agar $\lambda \in C$ son A operator uchun xos qiymat bo‘lmasa, u A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi. Umuman aytganda, chekli o‘lchamli fazolarda spektr termini kam ishlatiladi.

Agar A operator cheksiz o‘lchamli X fazoda berilgan bo‘lsa, u holda yuqorida keltirilgan 1 va 2 holatlardan farqli bo‘lgan uchinchi holat ham bo‘ladi, ya’ni:

3) $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud, ya’ni $Ax = \lambda x$ tenglama faqat nol yechimga ega, lekin $(A - \lambda I)^{-1}$ operator X ning hamma yerida aniqlanmagan yoki $\overline{Im(A - \lambda I)} \ne X$.

16.1-ta’rif. *Agar $\lambda \in C$ son uchun $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud bo‘lib u X ning hamma yerida aniqlangan bo‘lsa, λ soni A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi,*

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

operator esa A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to‘plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

16.2-ta'rif. *A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalari to'plami A operatorning spektri deyiladi va $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.*

16.3-ta'rif. *Agar biror $\lambda \in C$ son uchun $(A-\lambda I)x = 0$ tenglama nolmas $(x \neq 0)$ yechimga ega bo'lsa, λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, nolmas yechim x esa xos vektor deyiladi.*

Ko'rinib turibdiki, barcha xos qiymatlar to'plami spektrda yotadi, chunki λ xos qiymat bo'lsa, $A-\lambda I$ operatorning teskarisi mavjud emas.

Spektr quyidagi qismlarga ajratiladi.

16.4-ta'rif. *a) Barcha xos qiymatlar to'plami A operatorning nuqtali spektri deyiladi va $\sigma_{pp}(A)$ bilan belgilanadi.*

b) Agar λ xos qiymat bo'lmasa va $\overline{Im(A-\lambda I)} \neq X$, ya'ni $A-\lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi X ning hamma yerida zich emas. Bunday λ lar to'plami A operatorning qoldiq spektri deyiladi va $\sigma_{qol}(A)$ bilan belgilanadi.

Endi o'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun muhim spektr ta'rifini keltiramiz.

16.5-ta'rif. *Agar biror $\lambda \in \sigma(A)$ son uchun nolga kuchsiz yaqinlashuvchi $f_n \in H$ birlik vektorlar ketma-ketligi mavjud bo'lib*

$$\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda I) f_n\| = 0$$

bo'lsa, u holda λ son $A = A^*$ operatorning muhim spektriga qarashli deyiladi. A operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(A)$ bilan belgilanadi.

Operatorning nuqtali va qoldiq spektrlari o'zaro kesishmaydi. Nuqtali va muhim spektrlar o'zaro kesishishi mumkin.

16.2-teorema. *Agar $A \in L(X)$ va $|\lambda| > \|A\|$ bo'lsa, u holda λ regulyar nuqta bo'ladi.*

Isbot. $A-\lambda I$ operatorni quyidagicha yozib olamiz:

$$A-\lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A). \tag{16.1}$$

Teorema shartidan $\frac{1}{\lambda}A$ operatorning normasi 1 dan kichik ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun 14.5-teoremaga ko‘ra $I-\frac{1}{\lambda}A$ operatorning chegaralangan teskarisi mavjud. Bundan va (16.1) tenglikdan $A-\lambda I$ operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Δ

Shunday qilib, chegaralangan $A:X\to X$ operatorning spektri markazi koordinatalar boshida va radiusi $\|A\|$ ga teng yopiq doirada saqlanar ekan.

16.3-teorema. *Agar $A\in L(X)$ bo‘lsa, u holda $\sigma(A)$ yopiq to‘plamdir.*

Isbot. Operatorning spektri $\sigma(A)$ regulyar nuqtalar to‘plamining to‘ldiruvchi to‘plami bo‘lgani uchun, $\rho(A)$ ning ochiq to‘plam ekanligini ko‘rsatish yetarli. Endi $\lambda\in\rho(A)$ ixtiyoriy nuqta bo‘lsin, ya’ni $A-\lambda I$ operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan bo‘lsin. U holda 14.6-teoremaga ko‘ra, barcha $\delta,\ \ \delta<\left(\|(A-\lambda I)^{-1}\|\right)^{-1}$ lar uchun $A-\lambda I-\delta I$ operatorning ham chegaralangan teskarisi mavjud. Demak, $\lambda\in\rho(A)$ nuqta o‘zining $\varepsilon=\left(\|(A-\lambda I)^{-1}\|\right)^{-1}>0$ atrofi bilan $\rho(A)$ ga qarashli ekan. Bu esa λ nuqtaning $\rho(A)$ to‘plam uchun ichki nuqta ekanligini bildiradi. λ ning ixtiyoriyligidan $\rho(A)$ ning ochiq to‘plam ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\sigma(A)=C\setminus\rho(A)$ yopiq to‘plam. Δ

Quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiaz.

16.4-teorema. $A\in L(H)$ *o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lsin: U holda:*

(*a*) $\sigma_{qol}(A)$ *bo‘sh to‘plam.*

(b) $\sigma(A)$ to‘plam R ning qismi, ya’ni $\sigma(A)\subset R$.

(c) A operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o‘zaro ortogonaldir.

Misollar. 16.1. $L_2[a,b]$ Hilbert fazosida erkin o‘zgaruvchi x ga ko‘paytirish operatori (15.3-misolga qarang), ya’ni

$$A:L_2[a,b]\to L_2[a,b],\quad (Af)(x)=xf(x)$$

operatorni qaraymiz. Uning nuqtali, qoldiq va muhim spektrini toping.

Yechish. 15.3-misol natijasiga va $u(x)=x=\overline{x}=\overline{u(x)}$ tenglikka ko‘ra $A=A^*$. 16.4-teoremaning (a) tasdig‘iga ko‘ra $\sigma_{qol}(A)=\varnothing$. Ma’lumki,

$$(Af)(x)=\lambda f(x) \quad \text{ya'ni} \quad (x-\lambda)f(x)=0 \qquad (16.2)$$

tenglama ixtiyoriy $\lambda \in C$ uchun yagona nol yechimga ega. Demak, A operator xos qiymatlarga ega emas, ya’ni $\sigma_{pp}(A)=\varnothing$. (16.2) tenglama faqat nol yechimga ega ekanligidan 14.3-teoremaga ko‘ra $(A-\lambda I)f(x)=g(x)$ tenglamaning ixtiyoriy $g\in \operatorname{Im} A$ da yagona yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Ko‘rsatish mumkinki $A-\lambda I$ operatorga teskari operator

$$(A-\lambda I)^{-1}g(x)=(x-\lambda)^{-1}g(x) \qquad (16.3)$$

formula bilan aniqlanadi. Agar $\lambda\notin[a,b]$ bo‘lsa, u holda $x-\lambda\neq 0,$ natijada $(A-\lambda I)^{-1}$ operator $L_2[a,b]$ fazoning hamma yerida aniqlangan va Banax teoremasiga ko‘ra u chegaralangan bo‘ladi. Demak, $\lambda\notin[a,b]$ regulyar nuqta, ya’ni $\sigma(A)\subset[a;b]$. Lekin (16.3) formula bilan aniqlangan teskari operator $\lambda\in[a,b]$ bo‘lganda $L_2[a,b]$ fazoning hamma yerida aniqlanmagan. Demak, $[a,b]\subset\sigma(A)$. Bulardan, $\sigma(A)=[a,b]$. Endi A operatorning spektridagi ixtiyoriy nuqta uning muhim spektriga qarashli ekanligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $\lambda\in[a,b)$ uchun

$$f_n(x)=\begin{cases}\sqrt{n(n+1)}, & \text{agar} \quad x\in A_n:=[\lambda+\frac{1}{n+1};\lambda+\frac{1}{n}),\\ 0, & \text{agar} \quad x\in[a;b]\setminus A_n\end{cases}$$

deymiz. Ma’lum nomerdan boshlab $\lambda+\frac{1}{n}<b$ bo‘ladi va bunday nomerlar uchun $\|f_n\|=1$ tenglik o‘rinli. Bundan tashqari har xil n va m lar uchun $A_n\cap A_m=\varnothing$ bo‘lgani uchun $(f_n,f_m)=0$ tenglik o‘rinli, ya’ni $\{f_n\}$ ortonormal sistema ekan. Ma’lumki, ixtiyoriy ortonormal sistema nolga kuchsiz ma’noda yaqinlashadi, shuning uchun $\{f_n\}$ ketma-ketlik ham nolga kuchsiz ma’noda yaqinlashadi. Endi $\|(A-\lambda I)f_n\|$ normani baholaymiz:

$$\|(A-\lambda I)f_n\|=n(n+1)\int_{\lambda+\frac{1}{n+1}}^{\lambda+\frac{1}{n}}(t-\lambda)^2\,dt=\frac{n(n+1)(3n^2+3n+1)}{n^3(n-1)^3}\to 0, n\to\infty.$$

Demak, ta’rifga ko‘ra $\lambda \in [a,b)$ son A operatorning muhim spektriga qarashli ekan. $\lambda = b$ nuqtani A operatorning muhim spektriga qarashli bo‘lishligini o‘quvchiga mustaqil isbotlash uchun qoldiramiz. Shunday qilib, A operatorning spektri faqat muhim spektrdan iborat bo‘lib, u $[a;b]$ kesma bilan ustma-ust tushadi. Xulosa

$$\sigma_{qol}(A) = \sigma_{pp}(A) = \varnothing, \quad \sigma_{ess}(A) = \sigma(A) = [a,b]. \quad \Delta$$

16.2. 16.1-misolda qaralgan A operatorni $C[a,b]$ Banax fazosida, ya’ni

$$A : C[a,b] \to C[a,b], \quad Af(x) = xf(x)$$

operatorni qaraymiz. Uning nuqtali va qoldiq spektrini toping.

Yechish. Ma’lumki, ((16.2) ga qarang)

$$(Af)(x) = \lambda f(x) \quad \text{ya'ni} \quad (x-\lambda) f(x) = 0, \quad f \in C[a,b] \tag{16.4}$$

tenglama ixtiyoriy $\lambda \in C$ uchun yagona nol yechimga ega. Demak, A operator xos qiymatlarga ega emas, ya’ni $\sigma_{pp}(A) = \varnothing$. (16.4) tenglama faqat nol yechimga ega ekanligidan 14.3-teoremaga ko‘ra $(A-\lambda I) f(x) = g(x)$ tenglamaning ixtiyoriy $g \in ImA$ da yagona yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Demak, $A-\lambda I$ operatorga teskari operator mavjud va u (16.3) formula bilan aniqlanadi. Xuddi 16.1-misoldagi kabi ko‘rsatishimiz mumkinki $\sigma(A) = [a,b]$ tenglik o‘rinli. Haqiqatan ham, agar $\lambda \notin [a,b]$ bo‘lsa, u holda (16.3) ning o‘ng tomoni ixtiyoriy $f \in C[a,b]$ da uzluksiz funksiya bo‘ladai, ya’ni $D((A-\lambda I)^{-1}) = C[a,b]$ va teskari operatorlar haqidagi Banax teoremasiga ko‘ra $(A-\lambda I)^{-1}$ operator chegaralangan bo‘ladi, demak λ regulyar nuqta, ya’ni $\sigma(A) \subset [a;b]$. Agar $\lambda \in [a,b]$ bo‘lsa, u holda (16.3) formula bilan aniqlangan $(A-\lambda I)^{-1}$ operator $C[a,b]$ fazoning hamma yerida aniqlanmagan, bundan $[a,b] \subset \sigma(A)$. Bulardan, $\sigma(A) = [a,b]$ ekanligi kelib chiqadi. Endi $\sigma(A) = \sigma_{qol}(A)$ ekanligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $\lambda \in [a,b]$ uchun $A-\lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi

$$Im(A-\lambda I) = \{g \in C[a,b] : g(x) = (x-\lambda) f(x)\}$$

$C[a,b]$ fazoda zich emas. Haqiqatan ham, $Im(A-\lambda I)$ chiziqli ko‘pxillilikdagi ixtiyoriy g uchun $g(\lambda) = 0$ shart bajariladi. Agar biz $f_0(x) \equiv 1$ desak, u holda ixtiyoriy $g \in Im(A-\lambda I)$ uchun

$$\|g - f_0\| = \max_{x\in[a;b]} |g(x) - f_0(x)| \geq |g(\lambda) - f_0(\lambda)| = 1$$

tengsizlik o‘rinli. Demak, $Im(A - \lambda I)$ chiziqli ko‘pxillilikdan $f_0(x) \equiv 1$ elementga yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Qoldiq spektr ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $\lambda \in [a,b]$ uchun $\lambda \in \sigma_{qol}(A)$ munosabat o‘rinli. Bundan $\sigma(A) \subset \sigma_{qol}(A)$ kelib chiqadi. Teskari munosabat $\sigma(A) \supset \sigma_{qol}(A)$ doim o‘rinli. Demak, $\sigma(A) = \sigma_{qol}(A) = [a,b]$. Δ

16.1 va 16.2-misollarda bir xil qonuniyat bo‘yicha ta’sir qiluvchi A operator har xil $L_2[a;b]$ va $C[a;b]$ fazolarda qaralgan. Har ikki holda ham A operatorning spektri $[a;b]$ kesma bilan ustma-ust tushgan, lekin spektrning qismlarida (strukturasida) o‘zgarish bo‘ldi. Birinchi holda (16.1-misolda) $\sigma_{qol}(A) = \emptyset$ edi, ikkinchi holda $\sigma_{qol}(A) = [a;b]$.

16.3. Endi ℓ_2 Hilbert fazosida ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$A : \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots, a_nx_n, \ldots) \tag{16.5}$$

operatorni qaraymiz (11.9, 15.2-misollarga qarang). Uning xos qiymatlarini va spektrini toping.

Yechish. $\sup_{n\geq 1} |a_n| = a < \infty$ bo‘lgan holda, A ning chegaralangan ekanligi 11.9-misolda ko‘rsatilgan. Bundan tashqari $\|A\| = \sup_{n\geq 1} |a_n| = a$ tenglik isbotlangan edi. $Ax = \lambda x$ tenglama $\lambda = a_n$ bo‘lganda $e_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,)$ nolmas yechimga ega. Demak, $a_n, n \in N$ sonlar A operatorning xos qiymatlari bo‘lar ekan. Agar birorta ham $n \in N$ da $\lambda \neq a_n$ bo‘lsa, u holda $(A - \lambda I)$ operator teskarilanuvchan bo‘ladi va

$$(A - \lambda I)^{-1} x = -\left(\frac{x_1}{\lambda - a_1}, \frac{x_2}{\lambda - a_2}, \cdots, \frac{x_n}{\lambda - a_n}, \cdots\right). \tag{16.6}$$

Bulardan $\{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\} = \sigma_{pp}(A)$ tenglik kelib chiqadi. Ma’lumki, xos qiymatlar operatorning spektriga qarashli bo‘ladi, shuning uchun $\{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\} \subset \sigma(A)$. Ikkinchi tomondan chegaralangan operatorning spektri yopiq to‘plamdir, demak $\sigma_{pp}(A)$ to‘plamning yopig‘i $[\sigma_{pp}(A)]$ uchun

$$\overline{\{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}} = [\sigma_{pp}(A)] \subset \sigma(A) \tag{16.7}$$

munosabat o‘rinli. Agar $\lambda \notin [\sigma_{pp}(A)]$ bo‘lsa, u holda (16.6) tenglik bilan aniqlangan $(A-\lambda I)^{-1}$ operator ℓ_2 fazoning hamma yerida aniqlangan va chegaralangan bo‘ladi. Bundan $C \setminus [\sigma_{pp}(A)] \subset \rho(A)$ ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan

$$\sigma(A) \subset [\sigma_{pp}(A)]. \qquad (16.8)$$

(16.7) va (16.8) munosabatlardan

$$\sigma(A) = [\sigma_{pp}(A)]$$

ga kelamiz. Ko‘rsatamizki $\{a_n\}$ ketma-ketlikning barcha limitik nuqtalari A operatorning muhim spektriga qarashli bo‘ladi. Buning uchun limitik nuqta λ ga yaqinlashuvchi $\{a_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlikni qaraymiz. U holda

$$\left\|(A-\lambda I)e_{n_k}\right\| = \left\|(a_{n_k}-\lambda)e_{n_k}\right\| = |a_{n_k}-\lambda| \to 0, \quad k \to \infty.$$

$\{e_{n_k}\}$ ketma-ketlik ortonormal sistema bo‘lganligi uchun nolga kuchsiz ma’noda yaqinlashadi. Demak, λ son A operatorning muhim spektriga qarashli ekan. Δ

16.4. Quyidagicha savol qo‘yamiz. ℓ_2 Hilbert fazosida shunday $A: \ell_2 \to \ell_2$ chiziqli operatorga misol keltiringki, uning spektri oldindan berilgan $M \subset C$ yopiq to‘plam bilan ustma-ust tushsin.

Yechish. Kompleks sonlar to‘plami C separabel metrik fazo bo‘lgani uchun, uning hamma yerida zich sanoqli D to‘plam mavjud. U holda $M \bigcap D$ to‘plam sanoqli va M ning hamma yerida zich bo‘ladi. Endi $M \bigcap D$ to‘plam elementlarini $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ nomerlab chiqamiz va 16.3-misolda qaralgan, (16.5) tenglik bilan aniqlanuvchi A operatorni qaraymiz. 16.3-misolda ko‘rsatilganidek

$$\sigma(A) = [\sigma_{pp}(A)] = \overline{M \bigcap D} = M. \quad \Delta$$

Bu yerda, biz $M = C$ deb olishimiz ham mumkin. Demak, spektri butun kompleks sonlar to‘plami C bilan ustma-ust tushuvchi chiziqli operator mavjud ekan. Bu holda ta’rifga ko‘ra $\rho(A) = \varnothing$ bo‘ladi. Shuni ta’kidlaymizki, agar $M \subset C$ yopiq to‘plam chegaralangan bo‘lsa, u holda spektri M bilan ustma-ust tushuvchi A operator ham chegaralangan bo‘ladi va aksincha.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Chekli o‘lchamli fazolarda operatorning spektri faqat chekli sondagi xos qiymatlardan iborat ekanligini ko‘rsating.*
2. $A: L_2[0;1] \to L_2[0;1], \quad (Af)(x) = u(x) f(x)$ *operatorning spektrini toping. Bu yerda* $u:[a;b] \to C -$ *uzluksiz funksiya.*
3. $L_2[-\pi;\pi]$ *fazoda integral operatorning xos qiymatlarini toping:*

$$(Af)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin ny\, f(y) dy.$$

4. *Birlik operatorning spektrini toping.*
5. $A: L_2[-1;1] \to L_2[-1;1],\ (Af)(x) = f(x) - \int_{-1}^{1} (1 + xy) f(y) dy$

   operatorning xos qiymatlarini toping.

6. *Yuqorida keltirilgan* $A: L_2[-1;1] \to L_2[-1;1]$ *operatorning* λ *nuqtadagi rezolventasini toping.*
7. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *lar* A *chiziqli operatorning* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari bo‘lsin.* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *larning chiziqli erkli (chiziqli bog‘lanmagan) ekanligini isbotlang.*
8. *Spektri birlik doiradan iborat bo‘lgan chiziqli operatorga misol keltiring.*
9. *Spektri* $\varnothing$ *to‘plamdan iborat bo‘lgan chiziqli operator mavjudmi? Mavjud bo‘lsa misol keltiring.*
10. *16.1-misolda* $\lambda = b$ *nuqtaning* A *operatorning muhim spektriga qarashli ekanligini isbotlang.*
    $R_\lambda(A) f(x) = | x - \lambda |^{-1} f(x)$

7- mavzu Kompakt operatorlar

Dastlab normalangan fazodagi kompakt, nisbiy kompakt to‘plamlarga ta’rif beramiz. Chunki kompakt operatorlar shu tushunchalar asosida ta’riflanadi. Biz normalangan fazolarda kompaktlik kriteriylarini ham keltiramiz. Keyin esa asosiy tushuncha kompakt operatorga ta’rif beramiz va unga misollar keltiramiz.

Bizga $X -$ Banax fazosi va $M \subset X$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar M to‘plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlikdan M da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo‘lsa, M ga kompakt to‘plam deyiladi (3.6-ta’rifga qarang). Agar N to‘plamning yopig‘i $[N]$ kompakt to‘plam bo‘lsa, u holda N nisbiy kompakt to‘plam deyiladi (3.7-ta’rifga qarang). To‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun uning to‘la chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarli (3.5-teoremaga qarang). Chekli o‘lchamli fazolarda to‘plam kompakt bo‘lishi uchun (3.4-teoremaga qarang) uning chegaralangan va yopiq bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Asosiy funksional fazolardan biri $C[a,b]$ fazodir. Bu fazodagi to‘plamning kompaktlik kriteriysi Arsela teoremasi (3.6-teoremaga qarang) yordamida bayon qilingan. $\ell_p, p \geq 1$ fazoda to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishligining zarur va yetarli shartlari 3.8-teoremada keltirilgan.

Banax fazosida kompakt operatorlar. Chekli o‘lchamli fazolarda aniqlangan chiziqli operatorlardan farqli o‘laroq, cheksiz o‘lchamli fazolardagi ixtiyoriy chiziqli operatorning spektrini to‘la o‘rganish ancha qiyin masaladir. Lekin kompakt operatorlarning spektrini to‘laroq o‘rganish mumkin. Kompakt operatorlar xossalariga ko‘ra chekli o‘lchamli operatorlarga o‘xshab ketadi va ularning spektri yetarlicha aniq tavsiflanadi. Bundan tashqari, kompakt operatorlar ko‘plab tatbiqlarga ega, masalan integral tenglamalar nazariyasida. Bu nazariyani biz keyingi 19 va 20 paragraflarda keltiramiz.

17.1-ta’rif. *Agar* $A \in L(X,Y)$ *va* $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ *bo‘lsa, u holda* A *ga chekli o‘lchamli operator deyiladi. Agar* $\dim \operatorname{Im} A = n$ *bo‘lsa, u holda* A *ga* n *o‘lchamli operator deyiladi.*

17.2-ta’rif. *Bizga* $A: X \to Y$ *operator berilgan bo‘lsin. Agar* A *operator* X *dagi har qanday chegaralangan to‘plamni* Y *dagi nisbiy kompakt to‘plamga akslantirsa, u holda* A *kompakt operator yoki to‘la uzluksiz operator deyiladi.*

Chekli o‘lchamli fazolarda to‘plam kompakt bo‘lishi uchun (3.4-teoremaga qarang) uning chegaralangan va yopiq bo‘lishi yetarli va zarurdir. Demak, chekli o‘lchamli fazodagi har qanday chegaralangan to‘plam nisbiy kompaktdir va aksincha (3.1-natijaga qarang).

Shunday qilib, chekli o‘lchamli fazolarda aniqlangan har qanday chegaralangan operator kompaktdir. Ya’ni operator chegaralangan bo‘lgani uchun u chegaralangan to‘plamni yana chegaralangan to‘plamga o‘tkazadi (11.8-ta’rifga qarang). Har qanday chegaralangan to‘plam esa chekli o‘lchamli fazoda nisbiy kompaktdir (3.1-natijaga qarang). Shunday qilib, quyidagi teorema o‘rinli.

17.1-teorema. $A: C^n \to C^n$ *chiziqli operator kompaktdir.*

Isbot. C^n fazoda aniqlangan chiziqli A operatorning chegaralanganligi 16.1-teoremada isbotlangan edi. A chegaralangan operator bo‘lgani uchun har qanday chegaralangan to‘plamni yana chegaralangan to‘plamga o‘tkazadi. Har qanday chegaralangan to‘plam esa chekli o‘lchamli fazoda nisbiy kompaktdir. Demak, $A: C^n \to C^n$ chiziqli operator kompaktdir. Δ

17.2-Teorema. $A \in L(X,Y)$, $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ *bo'lsin. U holda A kompakt operator bo'ladi.*

Isbot. A chegaralangan operator bo'lgani uchun ixtiyoriy chegaralangan M to'plamni yana chegaralangan $A(M)$ to'plamga akslantiradi. Ma'lumki, $A(M) \subset \operatorname{Im} A$ va $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ bo'lgani uchun $A(M)$ nisbiy kompaktdir. Demak, $A-$ kompakt operator. Δ

Misollar. 17.1. C^n Evklid fazosidagi $Ix = x$ birlik operatorni kompaktlikka tekshiring.

Yechish. Birlik operatorning chiziqliligi va uzluksizligi 11.1-misolda ko'rsatilgan. 17.1-teoremaga ko'ra birlik operator kompakt bo'ladi. Δ

Cheksiz o'lchamli fazolarda kompaktlik talabi uzluksizlik talabidan ancha kuchliroq hisoblanadi. Hozir biz uzluksiz, lekin kompakt bo'lmagan operatorga misol keltiramiz.

17.2. H Hilbert fazosidagi $Ix = x$ birlik operatorning kompakt emasligini ko'rsating.

Yechish. Birlik operatorning uzluksizligi uning chegaralangan ekanligidan kelib chiqadi (11.1-misolga qarang). Endi uning kompakt emasligini ko'rsatamiz. H dagi $B[\theta;1] := \{\phi \in H : \|\phi\| \leq 1\}$ birlik yopiq sharni qaraymiz. Bu to'plam chegaralangan to'plam bo'ladi, uning I akslantirishdagi tasviri (aksi) o'ziga teng. Lekin birlik shar kompakt emas. Buni isbotlash uchun H da ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemani olamiz. Ma'lumki, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $\phi_n \in B[\theta;1]$. Agar $n \neq m$ bo'lsa, u holda

$$\|\phi_n - \phi_m\|^2 = (\phi_n - \phi_m, \phi_n - \phi_m) = (\phi_n, \phi_n) + (\phi_m, \phi_m) = 2.$$

Bu yerdan ko'rinadiki $\{\phi_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Demak, birlik shar $B[\theta;1]$ nisbiy kompakt to'plam emas ekan. Bu o'z navbatida birlik operatorning kompakt emasligini bildiradi. Δ

Cheksiz o'lchamli Banax fazolarida birlik sharning nisbiy kompakt to'plam emasligi quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

17.1-lemma. *$X -$ chiziqli normalangan fazo va $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ lar X dagi chiziqli erkli sistema bo'lsin. X_n bilan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlarning chiziqli* *qobig'idan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz. U holda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi* $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ *vektorlar mavjud:*

$$1)\ \|y_n\| = 1; \quad 2)\ y_n \in X_n; \quad 3)\ \rho(y_n, X_{n-1}) = \inf_{x \in X_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2}.$$

Isbot. Lemma shartiga ko'ra $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ elementlar sistemasi chiziqli erkli. Shuning uchun, $x_n \notin X_{n-1}$ va X_{n-1} ning yopiq ekanligidan $\rho(x_n, X_{n-1}) = \alpha > 0$ bo'ladi. Shunday $x^* \in X_{n-1}$ element mavjudki $\|x^* - x_n\| < 2\alpha$ bo'ladi. U holda

$$\alpha \le \rho(x_n - x^*, X_{n-1}).$$

Natijada

$$y_n = \frac{x^* - x_n}{\|x^* - x_n\|}$$

vektor 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi vekror bo'ladi. y_1 vektor sifatida $x_1/\|x_1\|$ vektorni olish yetarli. Δ

Bu lemmadan foydalanib, cheksiz o'lchamli Banax fazosidagi yopiq birlik sharda yotuvchi shunday $\{y_n\}$ ketma-ketlik qurish mumkinki, $\|y_n - y_m\| > 1/2, n \ne m$ shart bajariladi. Bunday ketma-ketlik o'zida birorta ham yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni saqlamaydi. Demak, cheksiz o'lchamli Banax fazosidagi birlik shar nisbiy kompakt to'plam emas. Bu yerdan quyidagi natija kelib chiqadi.

17.1-natija. *Agar* $X -$ *cheksiz o'lchamli Banax fazosi bo'lsa, u holda* $I : X \to X, \quad Ix = x$ *operator kompakt emas.*

17.3-ta'rif. *Bizga* $X, Y -$ *Banax fazolari berilgan bo'lsin. Agar* $A : X \to Y$ *chiziqli operator* X *fazodagi birlik sharni* Y *fazodagi nisbiy kompakt to'plamga akslantirsa, u holda* A *kompakt operator deyiladi.*

17.3-ta'rifga teng kuchli bo'lgan quyidagi ta'rifni keltiramiz.

17.4-ta'rif. *Bizga* $A \in L(X, Y)$ *(*$X, Y -$ *Banax fazolari) operator va ixtiyoriy* $\{x_n\}, x_n \in X$ *chegaralangan ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar* $\{Ax_n\}$ *ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, u holda* A *ga kompakt operator deyiladi.*

Misollar. 17.3. Berilgan har bir $n \in N$ uchun

$$A_n : \ell_2 \to \ell_2, A_n x = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n, 0, 0, \ldots)$$

operatorning kompaktligini ko‘rsating.

Yechish. A_n operatorning kompakt ekanligini ko‘rsatishda 17.2-teoremadan foydalanamiz. Chunki A_n chegaralangan operator va $\dim \operatorname{Im} A_n = n < \infty$. Haqiqatan ham,

$$\|A_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k \cdot x_k|^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|^2 \cdot \|x\|^2.$$

Demak, A_n chegaralangan va uning normasi uchun

$$\|A_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$$

tengsizlik o‘rinli. A_n operatorning qiymatlar sohasi $\operatorname{Im} A_n$ esa $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vektorlar sistemasidan hosil bo‘lgan qism fazo bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun $\dim \operatorname{Im} A_n = n$. 17.2-teoremaga ko‘ra A_n kompakt operator bo‘ladi.

17.4. $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda quyidagi integral operatorning kompaktligini ko‘rsating.

$$(Af)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} cos(x - y) f(y) dy.$$

Yechish. Agar biz $cos(x - y) = cosxcosy + sinxsiny$ ayniyatdan foydalansak,

$$(Af)(x) = cosx \int_{-\pi}^{\pi} cosyf(y) dy + sinx \int_{-\pi}^{\pi} sinyf(y) dy = \alpha cosx + \beta sinx$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerda

$$\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} cosyf(y) dy, \quad \beta = \int_{-\pi}^{\pi} sinyf(y) dy.$$

Demak, ixtiyoriy $g = Af$ element $cosx$ va $sinx$ larning chiziqli kombinatsiyasi shaklida tasvirlanadi. Bundan $\dim \operatorname{Im} A = 2$ ekanligi kelib chiqadi. Endi A operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\|Af\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}cos(x-y)f(y)dy\right|^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|cos(x-y)|^2dy\right\}dx\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|^2dy.$$

Bu yerda biz Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalandik. Agar $|cos(x-y)|\le 1$ tengsizlikni e'tiborga olsak,

$$\|Af\|^2\le\left(2\pi\cdot\|f\|\right)^2\Rightarrow\|Af\|\le 2\pi\cdot\|f\|$$

ga ega bo‘lamiz. Bundan $\|A\|\le 2\pi$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, 17.2-teoremaga ko‘ra A operator kompakt bo‘ladi.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. C^n va ℓ_2 fazolarda birlik shar nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladimi?

2. ℓ_2 fazoda $Ax=(x_1,2x_2,4x_3,0,\ldots)$ operatorning o‘lchamini toping.

3. ℓ_2 fazodagi birlik sharning $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax=(x_1,2^{-1}x_2,3^{-1}x_3,0,\ldots)$ akslantirishdagi tasvirining nisbiy kompakt to‘plam bo‘lishini ko‘rsating.

4. Chekli o‘lchamli operatorga misol keltiring.

18. Kompakt operatorlarning asosiy xossalari

Bu paragrafda biz kompakt operatorlar to‘plamining chiziqli normalangan fazo tashkil qilishini ko‘rsatamiz. Agar X Banax fazosini Y Banax fazosiga akslantiruvchi kompakt operatorlar to‘plamini $K(X,Y)$ orqali belgilasak, u holda $K(X,Y)$ ning Banax fazosi bo‘lishini isbotlaymiz.

18.1-lemma. *$K(X,Y)$ to‘plam $L(X,Y)$ $(X,Y-Banax$ fazolari) chiziqli normalangan fazoning qism fazosi bo‘ladi.*

Isbot. Lemmani isbotlash uchun kompakt operatorlarning yig‘indisi va songa ko‘paytmasi yana kompakt operator bo‘lishini ko‘rsatish yetarli. Faraz qilaylik $A,B\in K(X,Y)$ va $\{x_n\}\subset X$ ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlik bo‘lsin. Ko‘rsatamizki, $\{(A+B)x_n\}\subset Y$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. A kompakt operator bo‘lgani uchun $\{Ax_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{Ax_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. B kompakt operator bo‘lgani uchun $\{Bx_{n_k}\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{Bx_{n_{k_l}}\}$

qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Demak, $\{(A+B)x_{n_{k_l}}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bundan $A+B$ operatorning kompakt ekanligi kelib chiqadi (17.4-ta’rifga qarang). Kompakt operatorning songa ko‘paytmasi yana kompakt operator bo‘lishligi shunga o‘xshash ko‘rsatiladi. Δ

Endi $K(X,Y)$ qism fazoning yopiqligini isbotlaymiz.

18.1-teorema. *Agar Y Banax fazosi bo‘lsa, u holda $K(X,Y)$ ham Banax fazosi bo‘ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\{A_n\}\subset K(X,Y)$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo‘lsin. $A_n\in K(X,Y)$ ekanligidan $A_n\in L(X,Y)$ ekanligi kelib chiqadi. $L(X,Y)$ fazoning to‘laligidan (13.1-teoremaga qarang) $\{A_n\}$ fundamental ketma-ketlikning biror $A\in L(X,Y)$ operatorga yaqinlashishi kelib chiqadi. Endi limitik operator A ning kompaktligini isbotlaymiz. Buning uchun chegaralangan $\{x_n\}\subset X$ ketma-ketlik qanday bo‘lmasin, $\{Ax_n\}\subset Y$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinligini ko‘rsatish yetarli.

A_1 kompakt operator bo‘lganligi uchun $\{A_1x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

$$x_1^{(1)},x_2^{(1)},\dots,x_n^{(1)},\dots \tag{18.1}$$

qismiy ketma-ketlik shunday bo‘lsinki, $\{A_1x_n^{(1)}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsin. Endi $\{A_2x_n^{(1)}\}$ ketma-ketlikni qaraymiz. A_2 kompakt operator bo‘lganligi uchun shunday $\{x_n^{(2)}\}\subset\{x_n^{(1)}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinki, $\{A_2x_n^{(2)}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bu holda $\{A_1x_n^{(2)}\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Yuqoridagidek mulohaza yurgizib, $\{x_n^{(2)}\}$ ketma-ketlikdan $\{x_n^{(3)}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinki, $\{A_3x_n^{(3)}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va hokazo. Bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz va

$$x_1^{(1)},x_2^{(2)},\dots,x_n^{(n)},\dots \tag{18.2}$$

diagonal ketma-ketlikni olamiz. Bu ketma-ketlikni $A_1,A_2,\dots,A_n,\dots$ operatorlar yaqinlashuvchi ketma-ketliklarga o‘tkazadi. (18.2) ketma-ketlikni A operator ham yaqinlashuvchi ketma-ketlikka o‘tkazishini ko‘rsatamiz. Y Banax fazosi bo‘lganligi uchun $\{Ax_n^{(n)}\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko‘rsatish kifoya.

$$\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| = \left\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)} + A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)} + A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\| \le$$

$$\le \left\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\right\| + \left\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\right\| + \left\|A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\|. \qquad (18.3)$$

$\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lganligi uchun, shunday $C > 0$ mavjudki, ixtiyoriy $n \in N$ da $\|x_n\| \le C$ bo‘ladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $k \in N$ sonni shunday tanlaymizki,

$$\|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3C}$$

tengsizlik bajarilsin. Shunday n_0 soni mavjudki, barcha $n, m > n_0$ lar uchun

$$\left\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Bu shartlar bajarilganda (18.3) dan quyidagiga ega bo‘lamiz

$$\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3C}C + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3C}C = \varepsilon.$$

Demak, $n, m \to \infty$ da $\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| \to 0.$ Bu esa $\{Ax_n^{(n)}\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko‘rsatadi. Y to‘la fazo bo‘lganligi uchun u yaqinlashuvchi. Demak, $A-$ kompakt operator. Δ

18.1-natija. *Agar $\{A_n\} \subset K(X,Y)$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga norma bo‘yicha yaqinlashsa, u holda A ham kompakt operator bo‘ladi.*

Natijaning isboti 18.1-teoremaning isbotidan bevosita kelib chiqdi.

18.2-teorema. *Agar $A \in K(X)$ va $B \in L(X)$ bo‘lsa, u holda AB va BA operatorlar ham kompakt operatorlar bo‘ladi.*

Isbot. Agar $M \subset X$ to‘plam chegaralangan bo‘lsa, u holda $B(M)$ ham chegaralangan to‘plam bo‘ladi. A kompakt operator bo‘lgani uchun $A(B(M))$ to‘plam – nisbiy kompakt to‘plamdir. Bu esa AB operatorning kompakt ekanligini isbotlaydi.

Endi BA operatorning kompaktligini ko‘rsatamiz. Buning uchun chegaralangan $\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik qanday bo‘lmasin, $\{BAx_n\} \subset X$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinligini ko‘rsatish yetarli. A kompakt operator bo‘lgani uchun $\{Ax_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{Ax_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. B operator uzluksiz bo‘lgani uchun $\{BAx_{n_k}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi. Demak, BA kompakt operator ekan. Δ

18.2-natija. $X -$ *cheksiz o‘lchamli Banax fazosi bo‘lsin. U holda* $A \in K(X)$ *operatorning chegaralangan teskarisi mavjud emas.*

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik, ya’ni A^{-1} mavjud va chegaralangan bo‘lsin. U holda $I = A^{-1}A$ birlik operator cheksiz o‘lchamli X Banax fazosida kompakt bo‘lar edi (17.1-natijaga qarang), bu qarama-qarshilik natijani isbotlaydi. Δ

18.3-teorema. *Kompakt operatorga qo‘shma operator kompaktdir.*

Isbot. Bizga X Banax fazosini o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi A kompakt operator berilgan bo‘lsin. Ko‘rsatamizki, A ga qo‘shma bo‘lgan A^* operator X^* dagi har qanday chegaralangan to‘plamni nisbiy kompakt to‘plamga o‘tkazadi. Normalangan fazodagi har qanday chegaralangan to‘plam qandaydir sharda saqlanadi, shuning uchun A^* operator X^* dagi birlik shar S^* ni (17.3-ta’rifga qarang) nisbiy kompakt to‘plamga o‘tkazishini ko‘rsatish yetarli.

X^* dagi uzluksiz funksionallarni X fazoda emas, faqat kompakt $\overline{A(S)}-$ to‘plamda aniqlangan funksional sifatida qaraymiz. Bu yerda S to‘plam X dagi birlik shar. Bu holda S^* dagi funksionallarga mos keluvchi funksiyalar to‘plami Φ tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar $\|\varphi\| \le 1$ bo‘lsa, u holda

$$\sup_{x \in \overline{A(S)}} |\varphi(x)| = \sup_{x \in A(S)} |\varphi(x)| \le \|\varphi\| \cdot \sup_{x \in S} \|Ax\| \le \|A\|,$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \|\varphi\| \cdot \|x - y\| \le \|x - y\|.$$

Arsela teoremasiga ko‘ra Φ to‘plam $C[\overline{A(S)}]$ fazoda nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[\overline{A(S)}]$ dagi Φ to‘plam X^* fazodagi $A^*(S^*)$ to‘plamga izometrik bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar $g_1, g_2 \in S^*$ bo‘lsa, u holda

$$\|A^*g_1 - A^*g_2\| = \sup_{x \in S} |(A^*g_1 - A^*g_2, x)| = \sup_{x \in S} |(g_1 - g_2, Ax)| =$$

$$= \sup_{z \in A(S)} |(g_1 - g_2, z)| = \rho(g_1, g_2).$$

Φ nisbiy kompakt to‘plam bo‘lganligi uchun u to‘la chegaralangan bo‘ladi. O‘z navbatida, unga izometrik bo‘lgan $A^*(S^*)$ to‘plam ham to‘la chegaralangan bo‘ladi. Demak, $A^*(S^*)$ nisbiy kompakt to‘plam. Δ

18.4-teorema. *X Banax fazosida A kompakt operator va ixtiyoriy $\rho > 0$ son berilgan bo‘lsin. A operatorning absolyut qiymati bo‘yicha ρ dan katta bo‘lgan xos qiymatlariga mos keluvchi chiziqli erkli xos vektorlarining soni cheklidir.*

Isbot. Avvalo shuni ta’kidlaymizki, A operatorning nolmas λ xos qiymatiga mos keluvchi xos vektorlaridan tashkil topgan X_λ invariant qism fazo chekli o‘lchamli bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar $X_\lambda = Ker(A - \lambda I)$ qism fazoning o‘lchami cheksiz bo‘lganda edi, u holda A operator X_λ qism fazoda va demak, butun X da kompakt bo‘lmas edi. Shu sababli, teoremaning isbotini yakunlash uchun, agar $\{\lambda_n\}-$ kompakt A operatorning nolmas, har xil xos qiymatlarining ixtiyoriy ketma-ketligi bo‘lsa, u holda $\lambda_n \to 0$ ekanligini ko‘rsatish yetarli. O‘z navbatida λ_n^{-1} ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladigan har xil λ_n xos qiymatlarning cheksiz ketma-ketligi mavjud emasligini ko‘rsatish yetarli.

Faraz qilaylik, bunday ketma-ketlik mavjud bo‘lsin va x_n vektor λ_n xos qiymatga mos keluvchi xos vektor bo‘lsin. Ma’lumki, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ vektorlar chiziqli erkli bo‘ladi. X_n bilan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlarning chiziqli qobig‘ini belgilaymiz, ya’ni X_n to‘plam

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

ko‘rinishdagi elementlardan tashkil topgan. Har bir $y \in X_n$ uchun quyidagiga egamiz

$$y - \frac{1}{\lambda_n} Ay = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}) x_k .$$

Bu yerdan ko‘rinadiki,

$$y - \frac{1}{\lambda_n} Ay \in X_{n-1}.$$

Endi $\{y_n\}$ ketma-ketlikni shunday tanlaymizki,

$$1)\, y_n \in X_n; \quad 2)\|y_n\| = 1; \quad 3)\, \rho(y_n, X_{n-1}) = \inf_{x\in X_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2}$$

shartlar bajarilsin (bunday ketma-ketlikning mavjudligi 17.1-lemmada isbotlangan). Agar $\{\lambda_n^{-1}\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lsa, u holda $\{\lambda_n^{-1} y_n\}$ ketma-ketlik X da chegaralangan bo‘ladi. Lekin shu bilan birga, $\{A(\lambda_n^{-1} y_n)\}$ ketma-ketlik o‘zida birorta ham yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni saqlamaydi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $n > m$ da

$$\left\| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\| = \left\| y_n - \left(y_n - \frac{1}{\lambda_n} A y_n + A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right)\right\| \geq \frac{1}{2}.$$

Chunki

$$y_n - \frac{1}{\lambda_n} A y_n + A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \in X_{n-1}.$$

Hosil qilingan qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi. Δ

18.1. ℓ_1 Banax fazosida

$$A : \ell_1 \to \ell_1, \;\; Ax = \left(x_1, \frac{1}{2} x_2, \ldots, \frac{1}{n} x_n, \ldots \right)$$

operatorni qaraymiz. Uning kompaktligini ko‘rsating.

Yechish. Agar biz A operatorga tekis yaqinlashuvchi kompakt operatorlar ketma-ketligi mavjud ekanligini ko‘rsatsak, u holda 18.1-natijaga ko‘ra A kompakt operator bo‘ladi. A_n operatorlarni quyidagicha quramiz:

$$A_n : \ell_1 \to \ell_1, \quad A_n x = \left(x_1, \frac{1}{2} x_2, \ldots, \frac{1}{n} x_n, 0, 0, \ldots \right).$$

A_n operatorlarning chiziqliligi oson tekshiriladi. Uning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\|A_n x\| = \sum_{1\le k<n} \left| \frac{1}{k} x_k \right| \leq \sum_{1\le k<\infty} |x_k| \leq \|x\|.$$

Bu yerdan $\|A_n\| \leq 1$ tengsizlik kelib chiqadi. 17.3-misolda ko‘rsatilganidek $\dim \operatorname{Im} A_n = n$ tenglik o‘rinli. Demak, A_n chegaralangan va $n-$ o‘lchamli operator.

17.2-teoremaga ko‘ra A_n lar kompakt operator. Bundan tashqari A_n operatorlar ketma-ketligi A operatorga tekis yaqinlashadi. Haqiqatan ham,

$$\|(A-A_n)x\| = \sum_{n+1\le k<\infty}\left|\frac{1}{k}x_k\right| \le \frac{1}{n+1}\sum_{n+1\le k<\infty}|x_k| \le \frac{1}{n+1}\|x\|.$$

Bu yerdan

$$\|A-A_n\| \le \frac{1}{n+1} \to 0, \quad n\to\infty$$

ekanligini olamiz. 18.1-natijaga ko‘ra A kompakt operator bo‘ladi. Δ

Hilbert fazolarida kompakt operatorlar. Yuqorida biz Banax fazosida aniqlangan kompakt operatorlar haqida so‘z yuritdik va ularning ba’zi xossalarini isbotladik. Hozir biz bu ma’lumotlarni Hilbert fazosidagi kompakt operatorlarga taalluqli bo‘lgan ayrim faktlar bilan to‘ldiramiz.

Bizga H Hilbert fazosi, uning x nuqtasi hamda $\{x_n\}\subset H$ ketma-ketligi berilgan bo‘lsin.

18.1-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $y\in H$ *uchun* $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)$ *bo‘lsa,* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik* x *ga kuchsiz yoki kuchsiz ma’noda yaqinlashuvchi deyiladi va* $x_n \xrightarrow{w} x$ *shaklda belgilanadi.*

18.2-ta’rif. *Agar* $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ *bo‘lsa,* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik* x *ga kuchli ma’noda yaqinlashuvchi deyiladi va* $x_n \xrightarrow{s} x$ *shaklda belgilanadi.*

Endi H Hilbert fazosida kuchsiz ma’nodagi nisbiy kompakt to‘plam ta’rifini beramiz.

18.3-ta’rif. *Agar* $M\subset H$ *to‘plamning ixtiyoriy* $\{x_n\}$ *ketma-ketligidan kuchsiz ma’noda yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo‘lsa* M *ga kuchsiz ma’nodagi kompakt to‘plam deyiladi.*

Quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

18.5-teorema. $M\subset H$ *to‘plam kuchsiz ma’noda kompakt bo‘lishi uchun uning chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Biz har qanday chegaralangan to‘plamni nisbiy kompakt to‘plamga akslantiruvchi A operatorni kompakt operator deb atadik. $H = H^*$ bo‘lgani uchun, undagi hamma chegaralangan to‘plamlar (va faqat ular) kuchsiz kompakt. Demak, Hilbert fazosidagi kompakt operatorlarni har qanday kuchsiz kompakt to‘plamni nisbiy kompakt to‘plamga o‘tkazuvchi operator sifatida aniqlash mumkin. Va nihoyat, ayrim hollarda Hilbert fazosidagi operatorlarning kompaktligini tekshirishda quyidagi ta’rif qulay.

18.4-ta’rif. *Agar H Hilbert fazosida aniqlangan A operator har qanday kuchsiz yaqinlashuvchi ketma-ketlikni kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikka o‘tkazsa, u holda A kompakt operator deyiladi.*

Haqiqatan ham, bu shart bajarilgan bo‘lsin va $M \subset H$ chegaralangan to‘plam bo‘lsin. M to‘plamning har qanday cheksiz qism to‘plami o‘zida kuchsiz yaqinlashuvchi ketma-ketlikni saqlaydi. Agar bu ketma-ketlik A operator ta’sirida kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikka o‘tkazilsa, u holda $AM-$ nisbiy kompakt.

Aksincha, $A-$ kompakt operator va $\{x_n\}$ ketma-ketlik x elementga kuchsiz ma’noda yaqinlashsin. U holda $\{Ax_n\}$ ketma-ketlik o‘zida kuchli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni saqlaydi. Shu bilan birga $\{Ax_n\}$ ketma-ketlik A ning uzluksizligiga ko‘ra Ax ga kuchsiz yaqinlashadi. Bu yerdan kelib chiqadiki, $\{Ax_n\}$ ketma-ketlik bittadan ortiq limitik nuqtaga ega emas. Demak, $\{Ax_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik.

Endi biz o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan kompakt operatorlarni batafsilroq o‘rganamiz. Xususan, bunday operatorlar uchun chiziqli algebra kursidan ma’lum bo‘lgan matritsalarni diagonal ko‘rinishga keltirish haqidagi teoremaga o‘xshash Hilbert-Shmidt teoremasini isbotlaymiz. Avval quyidagi ikkita tasdiqni isbotlaymiz.

18.2-lemma. *H kompleks Hilbert fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan chegaralangan A operatorning barcha xos qiymatlari haqiqiydir.*

Isbot. Haqiqatan ham, $Ax = \lambda x, x \neq \theta$ bo‘lsin. U holda

$$\lambda(x,x) = (Ax,x) = (x,Ax) = (x,\lambda x) = \overline{\lambda}(x,x),$$

bu yerdan $\lambda = \overline{\lambda}$. Δ

18.3-lemma. *O‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o‘zaro ortogonaldir.*

Isbot. Haqiqatan ham, agar $Ax = \lambda x,\ Ay = \mu y$, hamda $\lambda - \mu \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y),$$

bu yerdan $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$, ya'ni $x \perp y$. Δ

Endi quyidagi fundamental teoremani isbotlaymiz.

18.6-teorema. *(Hilbert-Shmidt). H Hilbert fazosida kompakt, o'z-o'ziga qo'shma, chiziqli A operator berilgan bo'lib, $\{\lambda_n\}$ - uning barcha nolmas xos qiymatlari ketma-ketligi bo'lsin. U holda H fazoda shu xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlardan iborat shunday $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema mavjudki, har bir $\xi \in H$ element yagona usulda*

$$\xi = \sum_k c_k \phi_k + \xi'$$

ko'rinishda tasvirlanadi, bu yerda ξ' vektor $A\xi' = 0$ shartni qanoatlantiradi. Bu holda

$$A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \phi_k .$$

Agar nolmas xos qiymatlar soni cheksiz bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Bu asosiy teoremani isbotlash uchun bizga quyidagi yordamchi tasdiqlar kerak bo'ladi.

18.4-lemma. *A kompakt operator va $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik ξ elementga kuchsiz yaqinlashsin, u holda*

$$Q(\xi_n) = (A\xi_n, \xi_n) \to (A\xi, \xi) = Q(\xi).$$

Isbot. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi)| = |(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n) + (A\xi, \xi_n) - (A\xi, \xi)| \le$$

$$\le |(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n)| + |(A\xi, \xi_n) - (A\xi, \xi)|.$$

Ikkinchi tomondan,

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n)| \le \|\xi_n\| \cdot \|A(\xi_n - \xi)\|$$

va

$$|(A\xi,\xi_n)-(A\xi,\xi)|=|(A\xi,\xi_n-\xi)|=|(\xi,A^*(\xi_n-\xi))|\le\|\xi\|\,\|A^*(\xi_n-\xi)\|.$$

Ma'lumki, $\|\xi_n\|$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan va $n\to\infty$ da

$$\|A(\xi_n-\xi)\|+\|A^*(\xi_n-\xi)\|\to 0,$$

bo'lgani uchun, $n\to\infty$ da

$$|(A\xi_n,\xi_n)-(A\xi,\xi)|\to 0. \quad \Delta$$

18.5-lemma. *A– o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator va $|(A\xi,\xi)|=|Q(\xi)|$ bo'lsin. Agar $|Q(\xi)|$ funksional birlik sharning ξ_0 nuqtasida maksimumga erishsa, u holda $(\xi_0,\zeta)=0$ ekanligidan*

$$(A\xi_0,\zeta)=(\xi_0,A\zeta)=0$$

tengliklar kelib chiqadi.

Isbot. Ravshanki, ixtiyoriy $\xi\in H$ uchun $Q(\xi)=(A\xi,\xi)\in R.$ Agar $|Q(\xi)|$ funksional birlik sharning ξ_0 nuqtasida maksimumga erishsa, u holda $\|\xi_0\|=1.$ Haqiqatan ham, agar $\|\xi_0\|<1$ bo'lsa, u holda

$$\left|Q\left(\frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\right)\right|=\left|\left(A\left(\frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\right),\frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\right)\right|=\frac{1}{\|\xi_0\|^2}|(A\xi_0,\xi_0)|>|(A\xi_0,\xi_0)|=|Q(\xi_0)|.$$

Bu munosabat $|Q(\xi_0)|$ ning maksimal qiymat ekanligiga zid. Endi $\zeta\in H$ vektor ξ_0 ga ortogonal bo'lgan ixtiyoriy element bo'lsin. Bu elementlar yordamida ξ elementni quyidagicha quramiz

$$\xi=\frac{\xi_0+a\zeta}{\sqrt{1+|a|^2\cdot\|\zeta\|^2}}.$$

Bu yerda a ixtiyoriy compleks son. $\|\xi_0\|=1$ ekanligidan $\|\xi\|=1$ kelib chiqadi.

$$Q(\xi)=\frac{1}{1+|a|^2\cdot\|\zeta\|^2}[Q(\xi_0)+2Re\bar{a}(A\xi_0,\zeta)+|a|^2\,Q(\zeta)]$$

bo'lgani uchun, yetarlicha kichik a larda

$$Q(\xi)=Q(\xi_0)+2Re\bar{a}(A\xi_0,\zeta)+O(a^2).$$

Oxirgi tenglikdan ko‘rinib turibdiki, agar $(A\xi_0,\zeta)\neq 0$ bo‘lsa, u holda a ni shunday tanlash mumkinki, $|Q(\xi)|>|Q(\xi_0)|$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $|Q(\xi_0)|$ maksimal qiymat ekanligiga zid. Δ

18.6-lemma. *Agar A– o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan operator bo‘lib, $|(A\xi,\xi)|=|Q(\xi)|$ funksional birlik sharning ξ_0 nuqtasida maksimumga erishsa, u holda biror λ son uchun $A\xi_0=\lambda\xi_0$ tenglik o‘rinli.*

Isbot. 18.5-lemmaga ko‘ra ξ_0 vektorga ortogonal bo‘lgan $M_0^{\perp}:=\{\xi\in H:(\xi_0,\xi)=0\}$ qism fazo A operatorga nisbatan invariant bo‘ladi. A– o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lganligi uchun $M_0^{\perp}$ qism fazoga ortogonal bo‘lgan, bir o‘lchamli $M_0=\{\xi\in H:\xi=\alpha\xi_0\}$ qism fazo ham A ga nisbatan (15.1-lemmaga qarang) invariant bo‘ladi. Bir o‘lchamli fazoda har qanday chiziqli operator songa ko‘paytirish operatoridir. Demak, $A\xi_0=\lambda\xi_0$ tenglik o‘rinli. Δ

18.6-teoremaning isboti. Biz ϕ_k elementlarni ularga mos keluvchi xos qiymatlarning absolyut qiymatlari kamayib borishi tartibida induksiya bo‘yicha quramiz:

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|\geq\cdots.$$

ϕ_1 elementni qurish uchun $|Q(\xi)|=|(A\xi,\xi)|$ funksionalni qaraymiz va uni birlik sharda maksimumga erishishini isbotlaymiz.

$$S_1=\sup_{\|\xi\|\leq 1}|(A\xi,\xi)|$$

va $\xi_1,\xi_2,\ldots$– ketma-ketlik uchun, $\|\xi_n\|\leq 1$ va

$$|(A\xi_n,\xi_n)|\to S_1 \quad \text{agar} \quad n\to\infty$$

bo‘lsin. Birlik shar H da kuchsiz kompakt bo‘lganligi uchun $\{\xi_n\}$ dan biror ζ elementga kuchsiz yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu holda $\|\zeta\|\leq 1$ va 18.4-lemmaga ko‘ra

$$|(A\zeta,\zeta)|=S_1.$$

Biz ζ elementni ϕ_1 deb qabul qilamiz. 18.5-lemmaga ko‘ra $\|\zeta\|=\|\phi\|_1=1.$ Bu holda 18.6-lemmaga ko‘ra $A\phi_1=\lambda_1\phi_1,$ bu yerdan $|\lambda_1|=|(A\phi_1,\phi_1)|=S_1.$ Endi

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ xos qiymatlarga mos keluvchi $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ xos vektorlar qurilgan bo‘lsin. $|Q(\xi)| = |(A\xi, \xi)|$ funksionalni

$$M_n^{\perp} = H \text{ - } M(\{\phi_k\}_{k=1}^{n})$$

qism fazoda qaraymiz. $M_n^{\perp}$ qism fazo A operatorga nisbatan invariant (chunki $M(\{\phi_k\}_{k=1}^{n})$ invariant va A o‘z-o‘ziga qo‘shma operator). $|(A\xi, \xi)|$ funksional $\phi_{n+1} \in M_n^{\perp}$ da maksimumga erishsin. 18.6-lemmaga ko‘ra u A operatorning xos vektori bo‘ladi, ya’ni $A\phi_{n+1} = \lambda_{n+1}\phi_{n+1}$.

Bu yerda quyidagi ikki hol bo‘lishi mumkin.

i). Chekli qadamdan so‘ng, biz shunday $M_n^{\perp}$ qism fazoga ega bo‘lamizki, bu fazoda $(A\xi, \xi) = 0$.

ii). Ixtiyoriy $n \in N$ uchun $M_n^{\perp}$ qism fazoda $(A\xi, \xi) \not\equiv 0$.

Birinchi holda 18.6-lemmadan kelib chiqadiki, A operator $M_n^{\perp}$ qism fazoni nolga o‘tkazadi, ya’ni $M_n^{\perp}$ qism fazo $\lambda = 0$ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlardan iborat. Bu holda qurilgan $\{\phi_n\}$ vektorlar sistemasi chekli sondagi elementdan iborat.

Ikkinchi holda xos vektorlarning $\{\phi_n\}$ ketma-ketligi hosil bo‘lib, ularning har biri uchun $\lambda_n \neq 0$. Bu holda $\lambda_n \to 0$ ekanligini ko‘rsatamiz. $\{\phi_n\}$ ketma-ketlik (har qanday ortonormal sistema kabi) nolga kuchsiz yaqinlashadi, chunki ixtiyoriy $f \in H$ uchun uning Fur'e koeffitsiyentlari $C_n = (f, \phi_n)$ uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \leq \|f\|^2$$

munosabat o‘rinli. Sonli qator yaqinlashishining zaruriy shartidan $C_n = (f, \phi_n) \to 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$ ketma-ketlik nolga kuchli ma’noda (norma bo‘yicha) yaqinlashadi. Bundan

$$\lim_{n\to\infty} \|A\phi_n\| = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0.$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$M^{\perp} = H \text{ - } M(\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}) = \bigcap_n M_n^{\perp}.$$

Faraz qilaylik, $M^{\perp}$ bo‘sh bo‘lmasin. Agar $\xi \in M^{\perp}$ va $\xi \neq 0$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$|(A\xi, \xi)| \leq |\lambda_n| \cdot \|\xi\|^2.$$

Bu yerdan limitga o‘tsak,

$$(A\xi, \xi) = 0.$$

18.6-lemmani $(\max|(A\xi, \xi)| = 0)$ $M^{\perp}$ qism fazo uchun qo‘llab, $A\xi = 0$ ga ega bo‘lamiz, ya’ni A operator $M^{\perp}$ qism fazoni nolga o‘tkazar ekan. $\{\phi_n\}$ sistemaning qurilishidan ko‘rinib turibdiki, ixtiyoriy $\xi \in H = M \oplus M^{\perp}$ vektor

$$\xi = \sum_k c_k \phi_k + \xi', \quad A\xi' = 0,$$

ko‘rinishda tasvirlanadi. Bu yerdan

$$A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \phi_k . \Delta$$

Endi kompakt operatorlarga misollar keltiramiz.

18.2. ℓ_2 Hilbert fazosida $\{a_n\}$ ga ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$A : \ell_2 \to \ell_2, Ax = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, \ldots)$$

operatorni qaraymiz. $A \in K(\ell_2)$ bo‘lishi uchun

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{18.4}$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

Isbot. *Yetarliligi.* (18.4) shart bajarilsin. Agar biz A operatorga tekis yaqinlashuvchi kompakt operatorlar ketma-ketligi mavjud ekanligini ko‘rsatsak, u holda 18.1-natijaga ko‘ra A kompakt operator bo‘ladi. A_n operatorlarni quyidagicha quramiz:

$$A_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad A_nx = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, 0, 0, \ldots).$$

17.2-misolga ko‘ra har bir $n \in N$ da A_n operatorlar kompakt. Bundan tashqari A_n operatorlar ketma-ketligi A operatorga tekis yaqinlashadi. Haqiqatan ham, $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lganligi uchun u chegaralangan bo‘ladi. 11.9 - misoldan ma’lumki,

$$\|A_n\| = \sup_{1\le k<n} |a_k| \le C,$$

17.2-misolga ko‘ra $\dim \mathrm{Im} A_n = n.$ Endi $\|A - A_n\| \to 0, \quad n \to \infty$ ekanligini ko‘rsatamiz. 11.9-misoldan ma’lumki,

$$\|A - A_n\| = \sup_{n\le k<\infty} |a_k| .$$

Agar biz $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikning nolga yaqinlashuvchi ekanligidan foydalansak,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{n\le k<\infty} |a_k| = 0$$

ekanligini olamiz. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = \lim_{n\to\infty} \sup_{n\le k<\infty} |a_k| = 0.$$

18.1-natijaga ko‘ra A kompakt operator bo‘ladi.

Zaruriyligi. Faraz qilaylik, A kompakt operator bo‘lsin. U holda nolga kuchsiz yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{e_n\} \subset \ell_2$ ketma-ketlik uchun Ae_n ketma-ketlik nolga intiluvchi bo‘ladi. Nolga kuchsiz yaqinlashuvchi ketma-ketlik sifatida ℓ_2 fazodagi ortonormal bazis $\{e_n = (\underbrace{0,0,\ldots,1}_{n},0,\ldots)\}_{n=1}^{\infty}$ ni olamiz. 16.3-misolga ko‘ra $Ae_n = a_n e_n$ tenglik o‘rinli. Ae_n ketma-ketlikning nolga intilishidan

$$\lim_{n\to\infty} \|Ae_n\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n e_n\| = \lim_{n\to\infty} |a_n| \, \|e_n\| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

ni olamiz. Demak, (18.4) shart bajariladi. Δ

18.3. 17.4-misolda qaralgan integral operatorni, ya’ni

$$(Af)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} cos(x-y) f(y) dy, \quad f \in L_2[-\pi, \pi].$$

operatorni qaraymiz. A operator Hilbert-Shmidt teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. A operatorning kompaktligi 17.4-misolda ko‘rsatilgan edi. 15.4-misolda $L_2[a;b]$ fazoda $K(x,y)$ yadroli integral operatorning qo‘shmasi topilib, integral operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lishligining zarur va yetarli sharti (15.14) ko‘rinishda bo‘lishligi keltirilgan edi. Qaralayotgan A operator uchun

(15.14) shartning bajarilishini tekshiramiz. Bizning holimizda $K(x,y) = cos(x-y)$ bo‘lgani uchun

$$K(x,y) = \cos(x-y) = \cos(y-x) = \overline{\cos(y-x)} = \overline{K(y,x)}$$

tenglik o‘rinli. Demak, $A = A^*$. Shunday qilib A operator uchun Hilbert-Shmidt teoremasi shartlari bajariladi. Δ

18.4. 18.3-misolda qaralgan A operator Hilbert-Shmidt teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Uning xos qiymatlari va xos funksiyalarini toping.

Yechish. Xos qiymatga nisbatan tenglama $Af = \lambda f$, ya’ni

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mathrm{x}-\mathrm{y}) f(y)dy = \lambda f(x)$$

tenglamani qaraymiz. Bu tenglamani quyidagicha ham yozish mumkin.

$$\lambda f(x) = \cos\mathrm{x}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mathrm{y} f(y)dy + \sin\mathrm{x}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\mathrm{y}\, f(y)dy = \alpha\cos\mathrm{x} + \beta\sin\mathrm{x}. \quad (18.5)$$

Bu yerda

$$\alpha = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\mathrm{y} f(y)dy, \quad \beta = \int_{-\pi}^{\pi}\sin\mathrm{y} f(y)dy. \quad (18.6)$$

Ikki holni alohida qaraymiz: i) $\lambda = 0$, ii) $\lambda \neq 0$.

i). Bu holda $\alpha\cos\mathrm{x} + \beta\sin\mathrm{x} = 0$ ga ega bo‘lamiz. $u_1(x) = cosx$ va $v_1(x) = sinx$ elementlar chiziqli bog‘lanmagan, shuning uchun $\alpha = \beta = 0$. (18.6) ko‘ra

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\mathrm{y} f(y)dy = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin\mathrm{y} f(y)dy = 0 \quad (18.7)$$

bo‘ladi. (18.7) shartni qanoatlantiruvchi elementlar to‘plami A operatorning yadrosini tashkil qiladi va $\dim KerA = \infty$. Boshqacha aytganda, (18.7) shartni qanoatlantiruvchi elementlar to‘plami $u_1(x) = cosx$ va $v_1(x) = sinx$ elementlarga ortogonal qism fazo. Bu qism fazoda

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\mathrm{nx}\right\}_{n=2}^{\infty}, \left\{v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\mathrm{nx}\right\}_{n=2}^{\infty}$$

sistema ortonormal bazis bo‘ladi. Demak, $\lambda = 0$ son A operator uchun cheksiz karrali xos qiymat bo‘ladi.

Endi $\lambda \neq 0$ bo‘lsin, ya’ni ii) holni qaraymiz. (18.5) dan foydalansak, $Af = \lambda f$ tenglamaning yechimi f uchun quyidagi ko‘rinishni olamiz:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\cos x + \frac{\beta}{\lambda}\sin x. \tag{18.8}$$

Bu yerda α va β koeffitsiyentlar noma’lumlar, chunki ular izlanayotgan f funksiyaning integrali orqali ifodalangan. Agar biz f ning (18.8) ifodasini (18.6) ga qo‘ysak, α va β noma’lumlarga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} \alpha = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos y \left[\frac{\alpha}{\lambda}\cos y + \frac{\beta}{\lambda}\sin y \right] dy = \frac{\pi\alpha}{\lambda}, \\ \beta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin y \left[\frac{\alpha}{\lambda}\cos y + \frac{\beta}{\lambda}\sin y \right] dy = \frac{\pi\beta}{\lambda}. \end{cases}$$

Bu tenglama faqatgina $\lambda = \pi$ da nolmas yechimga ega. Bu holda α va β lar sifatida ixtiyoriy sonni olish munkin. (18.8) ga ko‘ra

$$f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x \tag{18.9}$$

$\lambda = \pi$ xos qiymatga mos keluvchi xos funksiya bo‘ladi. Demak, $A - \pi I$ operatorning yadrosi ikki o‘lchamli ekan. Bundan $\lambda = \pi$ xos qiymatning karrasi 2 ekanligi kelib chiqadi. Δ

Agar biz 18.3-misolda qaralgan A operatorga Hilbert-Shmidt teoremasini qo‘llasak, $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi,$ va $\lambda_n = 0, n \geq 3$ ekanligini hosil qilamiz.

18.5. Kompakt operatorlarning muhim sinfi sifatida $L_2[a,b]$ fazodagi integral operatorlarni qarash mumkin. Masalan, har bir $x \in L_2[a,b]$ elementga

$$(Ax)(s) = \int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt.$$

formula bo‘yicha ta’sir qiluvchi operatorni qaraymiz. Bu yerda integral operator yadrosi $K(s,t)$–$[a,b]\times[a,b]$ da uzluksiz funksiya.

Ko‘rsatma. A operator uchun 19–§ dagi 19.1-teorema shartlari bajarilishini ko‘rsating.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. $L_2[0,1]-$ *fazoda chekli o'lchamli operatorga misol keltiring.*
2. $A: H \to H$ *o'z-oziga qo'shma, chegaralangan operator.* m *va* M *sonlar* (Ax, x) *funksionalning birlik shardagi aniq quyi va aniq yuqori chegaralari bo'lsin.* $\sigma(A) \subset [m, M]$ *munosabatni isbotlang.*
3. *O'z-oziga qo'shma, chegaralangan* A *operator uchun* $\sigma(A) \supset \{m, M\}$ *munosabatni isbotlang.*
4. *Shunday o'z-oziga qo'shma, chegaralangan* A *operatorga misol keltiringki* $\sigma(A) \cap (m, M) = \varnothing$ *bo'lsin.*
5. *O'z-oziga qo'shma, chegaralangan* $A: H \to H$ *operator uchun*

$$\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = S_1 = \|A\|$$

tenglikni isbotlang.

6. $[0;1]$ *kesmada uzluksiz* u *funksiya berilgan.* $L_2[0,1]$ *fazoda*

$$(Af)(x) = u(x)\, f(x)$$

tenglik bilan aniqlangan A *operatorga qo'shma operatorni toping.*
Natijani $u(x) = \cos x + i \sin x$ *bo'lgan holda tekshirib ko'ring.*

7. $L_2[-\pi, \pi]$ *Hilbert fazoda aniqlangan*

$$(Af)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x \cos y)\, f(y)\, dy$$

operatorning o'z-oziga qo'shma va kompakt ekanligini ko'rsating. $|(Ax, x)| = Q(x)$ *funksionalning birlik shardagi aniq yuqori chegarasini toping.* A *operatorning noldan farqli xos qiymatlari sonini toping.*

8. $L_2[-\pi, \pi]$ *Hilbert fazoda berilgan*

$$(Af)(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos ny\, f(y)\, dy$$

operatorning o'z-oziga qo'shma ekanligini ko'rsating. Kompaktlikka tekshiring. Noldan farqli xos qiymatlarini toping. Ularga mos xos funksiyalarning $\{\phi_n\}$ *sistemasini quring. Bu operatorga Hilbert-Shmidt teoremasini qo'llang va* $M^{\perp}$ *qism fazoning tavsifini bering.*

AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1-mavzu. Chiziqli operatorlar

Bu mavzuda normalangan fazolarda chegaralangan chiziqli operatorlar, ularning normasini topish, chiziqli operatorlarning teskarisi mavjud yoki mavjud emasligini tekshirish, agar teskari operator mavjud bo‘lsa, uni aniqlash, chiziqli operatorlarga qo‘shma operatorlarni aniqlash (Banax fazolarida Banax bo‘yicha qo‘shma operatorni, Hilbert fazolarda Hilbert qo‘shmasini), chiziqli operatorlarning xos qiymatlari, xos vektorlari, spektri va rezolventasini aniqlashga doir mashqlarni bajarishga mo‘ljallangan.

Mavzuning birinchi bandi operatorlarning chiziqli chegaralanganligini tekshirib, ularning normasini topishga va chiziqli operatorning aniqlanish sohasini ko‘rsatib, uning chegaralan-maganligini yoki uzluksiz emasligini ko‘rsatishga hamda chiziqli operatorlar ketma-ketligining yaqinlashishlarini tekshirishga doir mashqlarni bajarishga oid. Ikkinchi bandida berilgan chiziqli operatorga teskari operator mavjud ekanligini ko‘rsatib, uning teskarisini topishga doir mashqlar keltirilgan. Bundan tashqari bu bandda teskari operatorning mavjud emasligini ko‘rsatishga doir mashqlar ham keltirilgan. Uchinchi bandda esa, berilgan chiziqli operatorga mos Banax yoki Hilbert qo‘shmasini topishga doir mashqlar keltirilgan. So‘nggi to‘rtinchi bandda esa chiziqli operatorning xos qiymatlari, xos vektorlari, spektri va rezolventasini aniqlashga doir mashqlar jamlangan.

Quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: X va Y orqali normalangan fazolar; X^* va Y^* orqali esa, mos ravishda X va Y larga qo‘shma fazolar; $L(X,Y)$ bilan X ni Y ga akslantiruvchi barcha chegaralangan chiziqli operatorlar fazosi; H sifatida Hilbert fazosi belgilangan. Bundan tashqari, agar $A \in L(X,Y)$ bo‘lsa, $A' \in L(Y^*, X^*)$ orqali A operatorning Banax qo‘shmasi, agar $A \in L(H) \equiv L(H,H)$ bo‘lsa, $A^* \in L(H)$ orqali esa, A operatorning Hilbert qo‘shmasi belgilanadi. Bir-biriga izomorf fazolar $X \cong Y$ shaklda belgilanadi.

Chiziqli operator ta’rifi, chiziqli operatorning uzluksizligi, chegaralanganligi tushunchalarini, chegaralangan (uzluksiz) chiziqli operatorlarning xossalarini o‘quv-qo‘llanmaning III bobidan foydalanib o‘rganish mumkin.

Chiziqli uzluksiz operatorlar

3.1. Quyidagi operatorning chiziqli chegaralanganligini ko‘rsatib, normasini toping:

$$A: C^{(2)}[0,1] \to [0,1], \qquad (Ax)(t) = x''(t)\,.$$

Yechish. a) Operatorning aniqlanish sohasi $D(A) = C^{(2)}[0,1]$. Operator chiziqli, chunki ixtiyoriy $x, y \in C^{(2)}[0,1]$ va α, β sonlar uchun

$$[A(\alpha x + \beta y)](t) = (\alpha x + \beta y)''(t) = \alpha x''(t) + \beta y''(t) =$$
$$= \alpha(Ax)(t) + \beta(Ay)(t) = (\alpha Ax + \beta Ay)(t).$$

b) Operatorning chegaralanganligini tekshiramiz:

$$\|Ax\| = \max_{0\le t\le 1} |(Ax)(t)| = \max_{0\le t\le 1} |x''(t)| \le \|x\|,$$

ya’ni ixtiyoriy $x \in C^{(2)}[0,1]$ uchun

$$\| Ax \| \le \| x \| \,. \tag{23.1}$$

A operator normasini

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{23.2}$$

formula yordamida topamiz. Olingan (23.1) tengsizlikdan $\|A\| \le 1$ ni olamiz. Quyidagi funksiyalar ketma-ketligini qaraymiz:

$$x_n(t) = e^{-nt} \in C^{(2)}[0,1].$$

U holda

$$\|x_n\| = \max_{0\le t\le 1} |e^{-nt}| + \max_{0\le t\le 1} |-ne^{-nt}| + \max_{0\le t\le 1} |n^2 e^{-nt}| = 1 + n + n^2,$$

$$\|Ax_n\| = \max_{0\le t\le 1} |n^2 e^{-nt}| = n^2.$$

(23.2) ga ko‘ra

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \sup_{n} \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \sup_{n} \frac{n^2}{1+n+n^2} = 1.$$

Olingan $\|A\| \le 1$ va $\|A\| \ge 1$ tengsizliklardan $\|A\| = 1$ ekanligi kelib chiqadi.

3.2. Quyidagi operatorni chiziqli chegaralanganligini ko‘rsatib, normasini toping:

$$A: L_5[-1,1] \to L_3[-1,1], \ (Ax)(t) = t^4 x(t^3).$$

Yechish. Dastlab ixtiyoriy $x \in L_5[-1,1]$ uchun $Ax \in L_3[-1,1]$ ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $t^3 = r$ almashtirishdan foydalanamiz:

$$\|Ax\|_3 = \left(\int_{-1}^{1} \left| t^4 x(t^3) \right|^3 dt \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3} \int_{-1}^{1} r^{\frac{10}{3}} |x(r)|^3 dt \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Oxirgi integralni baholashda quyidagi umumlashgan Gyolder tengsizligidan foydalanamiz:

$$\| x \cdot y \|_s \le \| x \|_k \cdot \| y \|_r,$$

bu yerda $x \in L_k[a,b], \ y \in L_r[a,b], \ \frac{1}{k} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s}.$

Biz qarayotgan holda $k = \frac{15}{2}, \ r = 5, \ s = 3.$ Shuning uchun

$$\| Ax \|_3 = \left(\int_{-1}^{1} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{3}} r^{\frac{10}{9}} x(r) \right|^3 dr \right)^{\frac{1}{3}} \le \left(\int_{-1}^{1} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{3}} r^{\frac{10}{9}} \right|^{\frac{15}{2}} dr \right)^{\frac{2}{15}} \left(\int_{-1}^{1} |x(r)|^5 dr \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{3}{14} \right)^{\frac{2}{15}} \cdot \| x \|_5 .$$

Demak, ixtiyoriy $x \in L_5[-1,1]$ uchun

$$\| Ax \|_3 \le \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{3}{14} \right)^{\frac{2}{15}} \cdot \| x \|_5 \tag{23.3}$$

tengsizlik o‘rinli. Shunday qilib, har bir $x \in L_5[-1,1]$ uchun $Ax \in L_3[-1,1]$. Demak, $D(A) = L_5[-1,1]$. Endi A operatorning chiziqli ekanligini ko‘rsatamiz:

$$\begin{aligned} &[A(\alpha x + \beta y)](t) = t^4 (\alpha x + \beta y)(t^3) = \alpha t^4 x(t^3) + \beta t^4 y(t^3) = \\ &= \alpha (Ax)(t) + \beta (Ay)(t) = [\alpha Ax + \beta Ay](t), \ \ \forall t \in [-1,1], \end{aligned}$$

ya’ni $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ax, \ \ \forall x, y \in L_5[-1,1]$ va $\forall \alpha, \beta \in C.$ Operatorning chegaralanganligi (23.3) dan kelib chiqadi. Uning normasini topish uchun $x_0(t) = t^{\frac{5}{3}} \in L_5[-1,1]$ elementni qaraymiz:

$$\|x_0\|_5 = \left(\int_{-1}^{1} |t|^{\frac{25}{3}} dt\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad (Ax_0)(t) = t^9,$$

$$\|Ax_0\| = \left(\int_{-1}^{1} |t|^{27} dt\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{14}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\|Ax_0\|_3}{\|x_0\|_5} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{2}{15}}. \qquad (23.4)$$

(23.3) va (23.4) dan $\|A\| = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{2}{15}}$ tenglikni hosil qilamiz.

3.3. $A: C[0;1] \to C[0;1], \quad (Ax)(t) = \frac{x(t)}{t}$ operatorning chegaralanmagan ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Bu operatorning aniqlanish sohasi

$$D(A) = \left\{x \in C[0,1] : \frac{x(t)}{t} \in C[0,1]\right\}$$

to‘plamdan iborat. $D(A) \neq C[0,1]$, masalan $x(t) \equiv 1 \notin D(A)$. Quyidagi ketma-ketlikni qaraymiz: $x_n(t) = \sin nt \in D(A)$. U holda

$$\|x_n\| = \max_{0\le t\le 1} |\sin nt| = 1, \quad \|Ax_n\| = \max_{0\le t\le 1}\left|\frac{\sin nt}{t}\right| = n \max_{0\le t\le 1}\left|\frac{\sin nt}{nt}\right| = n$$

Bulardan $\|Ax_n\| \geq n\|x_n\|$ tengsizlikka kelamiz. Bu esa A operatorning chegaralanmagan ekanligini ko‘rsatadi.

3.4. Shunday $A, B \in L(X)$ operatorlarga misol keltiringki, $AB \neq BA$ bo‘lsin.

3.5. $A, B \in L(X,Y)$ noldan farqli operatorlar bo‘lib, $R(A) \cap R(B) = 0$ bo‘lsa, A va B larning chiziqli erkli ekanligini isbotlang.

3.6. $A, B \in L(X,Y)$ va $R(A) = R(B)$, $Ker\, A = Ker\, B$ bo‘lishidan $A = B$ ekanligi kelib chiqadimi?

3.7. X,Y lar normalangan fazolar, $U\subset X$ ochiq to‘plam, $V\subset X$ yopiq to‘plam hamda $A\in L(X,Y)$ bo‘lsa, $A(U)$ ochiq, $A(V)$ esa yopiq to‘plam bo‘ladimi?

3.8. $p: L(X,Y)\to R,\quad p(A)=\|A\|$ funksional norma shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.

3.9. $p: L(X,Y)\to R,\quad p(A)=\|A\|$ akslantirish uzluksiz ekanligini isbotlang.

3.10. X chiziqli normalangan fazo, X' uning qism fazosi bo‘lsin. $M=\{A\in L(X): Ker\ A=X'\}$ to‘plam $L(X)$ ning qism fazosi bo‘ladimi?

3.11. X chiziqli normalangan fazo, X' uning qism fazosi bo‘lsin. $M=\{A\in L(X): Ker\ A\supset X'\}$ to‘plam $L(X)$ ning qism fazosi bo‘ladimi?

3.12. X chiziqli normalangan fazo, $A\in L(X)$ ixtiyoriy element, $N_k=Ker\ A^k$, $k=0,1,2,\ldots$ bo‘lsin.

a) $N_0\subset N_1\subset\cdots\subset N_k\subset N_{k+1}\subset\cdots$ munosablar o‘rinli. Isbotlang.

b) faraz qilaylik m soni $N_m=N_{m+1}$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan eng kichik natural son bo‘lsin. U holda barcha p natural sonlar uchun $N_{m+p}=N_m$ tenglikning bajarilishini isbotlang.

3.13. X chiziqli normalangan fazo, $A\in L(X)$ tayinlangan element bo‘lsin. $AB=0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $B\in L(X)$ lar to‘plami $L(X)$ ning qism fazosi bo‘ladimi?

3.14. X chiziqli normalangan fazo, $A\in L(X)$ tayinlangan element bo‘lsin. $AB=BA$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $B\in L(X)$ lar to‘plami $L(X)$ ning qism fazosi bo‘ladimi?

3.15. H Hilbert fazosi, $A_n\in L(H), n\in N$ va har bir $x,y\in H$ uchun $\sup\limits_{n\in N}|(A_n x,y)|<\infty$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. U holda $\sup\limits_{n\in N}\|A_n\|<\infty$ tengsizlik ham o‘rinli. Isbotlang.

3.16. X,Y lar Banax fazolari, $A_n\in L(X,Y)$ $(n\in N)$ va har bir $x\in X$ da $A_n x$ ketma-ketlik fundamental bo‘lsin. U holda shunday $A\in L(X,Y)$ operator mavjud bo‘lib $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli ma’noda yaqinlashadi. Isbotlang.

3.17. $C[-\pi;\pi]$ Banax fazosining $M=\{x\in C[-\pi;\pi]:\ x(-\pi)=x(\pi)\}$ qism fazosini qaraymiz va har bir $x\in M$ uchun

$$(A_n x)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)ds+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos k(t-s)x(s)ds.$$

a) $(A_n x)(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[(2n+1)(s-t)]}{\sin[(s-t)/2]}x(s)ds$ tenglikni isbotlang.

b) $A_n\in L(M)$ va

$$\| A_n \| = \frac{1}{2\pi} \max_{t \in [-\pi;\pi]} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin[(2n+1)(s-t)]}{\sin[(s-t)/2]} \right| ds$$

tenglikni isbotlang.

c) $L \subset C[-\pi;\pi]$ - trigonometrik ko'phadlardan iborat qism fazo bo'lsin. L da A_n operatorlar ketma-ketligi birlik operatorga kuchli ma'noda yaqinlashadi. Isbotlang.

3.18. $C[0;1]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A, A_n, B_n operatorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Ax)(t) = \int_0^1 e^{st} x(s)ds, \quad (A_n x)(t) = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(st)^k}{k!} \right] x(s)ds, \quad (B_n x)(t) = \int_{1/n}^{1-1/n} e^{st} x(s)ds, \; n \in N$$

A_n, B_n operatorlar A operatorga yaqinlashadimi? Yaqinlashish xarakterini (tekis, kuchli, kuchsiz) aniqlang.

3.19. $C[0;1]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A_n $(n \in N)$ operatorlarni

$$(A_n x)(t) = x(t^{1+1/n})$$

tenglik yordamida aniqlaymiz:

a) $A_n \in L(C[0;1])$ ekanligini isbotlang;

b) A_n operatorlar ketma-ketligi birlik operatorga kuchli ma'noda yaqinlashadi. Isbotlang.

c) A_n operatorlar ketma-ketligi birlik operatorga tekis yaqinlashadimi?

3.20. X, Y lar Banax fazolari, $x_n, x \in X$, $x_n \to x$, $A_n, A \in L(X,Y)$, $A_n \to A$ bo'lsin. U holda $A_n x_n \to Ax$ munosabatni isbotlang.

3.21. X, Y, Z lar Banax fazolari, $A_n, A \in L(X,Y)$, $B_n, B \in L(Y,Z)$ bo'lib A_n operatorlar ketma-ketligi A ga B_n operatorlar ketma-ketligi B ga kuchli ma'noda yaqinlashsin. U holda $B_n \cdot A_n$ operatorlar ketma-ketligi $B \cdot A$ operatorga kuchli ma'noda yaqinlashadi. Isbotlang.

3.22. X, Y, Z lar Banax fazolari, $A_n, A \in L(X,Y)$, $B_n, B \in L(Y,Z)$ bo'lib A_n operatorlar ketma-ketligi A ga B_n operatorlar ketma-ketligi B ga tekis (norma bo'yicha) yaqinlashsin. U holda $B_n \cdot A_n$ operatorlar ketma-ketligi $L(X,Z)$ fazoda $B \cdot A$ operatorga yaqinlashadi. Isbotlang.

3.23. Shunday X normalangan fazoga va $A, B \in L(X)$ operatorlarga misol keltiringki, $\| A \cdot B \| < \| A \| \cdot \| B \|$ bo'lsin.

3.24. X normalangan fazo va $A \in L(X)$, $B: X \to X$ chegaralanmagan operator bo‘lsin, uning aniqlanish sohasi $D(B)$ X ning hamma yerida zich bo‘lsin. $A \cdot B$ va $B \cdot A$ larning chegaralangan, chegaralanmagan hollariga misollar keltiring.
3.25. H Hilbert fazosi, $L \subset H$ uning qism fazosi bo‘lsin. $P: H \to H$, $Px = u$, $x = u + v,\ u \in L,\ v \in L^{\perp}$ operator L ga ortogonal proyeksiyalash operatori deyiladi. P ning chiziqli chegaralangan ekanligini ko‘psatib, normasini toping.
3.26. $L_2[-1;1]$ Hilbert fazosida A, B operatorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Ax)(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)], \qquad (Bx)(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)].$$

a) $R(A)$, $R(B)$ to‘plamlarni tavsiflang. Ular $L_2[-1;1]$ ning qism fazolari bo‘ladimi?

b) A, B operatorlarning chiziqli chegaralangan ekanligini ko‘psatib, normalarini toping.

c) A^2, B^2 operatorlarni toping. A, B operatorlar ortogonal proyeksiyalash operatorlari bo‘ladimi?

d) $A \cdot B$ va $B \cdot A$ operatorlarni toping.

3.27. H Hilbert fazosi, $L_1, L_2 \subset H$ uning qism fazolari bo‘lsin. P_1, P_2 lar mos ravishda L_1, L_2 larga ortogonal proyeksiyalash operatorlari bo‘lsa, $\| P_1 - P_2 \| \le 1$ ekanligini isbotlang.
3.28. Agar $A \cdot B = 0$ bo‘lsa, A va B operatorlar ortogonal deyiladi. H Hilbert fazosi, $L_1, L_2 \subset H$ uning qism fazolari, P_1, P_2 lar mos ravishda L_1, L_2 larga ortogonal proyeksiyalash operatorlari bo‘lsin. $P_1 \cdot P_2 = 0$ bo‘lishi uchun L_1 va L_2 qism fazolar o‘zaro ortogonal bo‘lishi zarur va yetarli. Isbotlang.
3.29. H Hilbert fazosi, $L_1, L_2 \subset H$ uning qism fazolari, P_1, P_2 lar mos ravishda L_1, L_2 larga ortogonal proyeksiyalash operatorlari bo‘lsin. $P_1 + P_2$ proyeksiyalash operatori bo‘lishi uchun L_1 va L_2 qism fazolar o‘zaro ortogonal bo‘lishi zarur va yetarli. Isbotlang.
3.30. H Hilbert fazosi, $L_1, L_2 \subset H$ uning qism fazolari, P_1, P_2 lar mos ravishda L_1, L_2 larga ortogonal proyeksiyalash operatorlari bo‘lsin. $P_1 \cdot P_2$ proyeksiyalash operatori bo‘lishi uchun $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1$ shartning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.
3.31. X chiziqli normalangan fazo, $A: X \to X$ chiziqli operator. A chegaralanmagan bo‘lishi uchun $D(A)$ da $\| x_n \| = 1$ va $\| Ax_n \| \to \infty$ shartlarni qanoatlantiruvchi ketma-ketlikning mavjud bo‘lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

Quyidagi operatorlar-ning chiziqli, chegaralangan ekanligini ko‘rsating, ularning normalarini toping.

3.32. $A:C[-2;2]\to C[-2;2]$, $(Ax)(t)=te^{t}x(t)$.

3.33. $A:L_2[-1,1]\to L_2[-1,1]$, $(Ax)(t)=(t^2-t)x(t)$.

3.34. $A:L_3[-1,1]\to L_3[-1,1]$, $(Ax)(t)=\sqrt[5]{1-t}\,x(t)$.

3.35. $A:L_5[0,2]\to L_5[0,2]$, $(Ax)(t)=(t^3-2t+1)\,x(t)$.

3.36. $A:L_5[0,2]\to L_5[0,2]$, $(Ax)(t)=(t^{\,3}+t^2)x(t)$.

3.37. $A:\ell_3\to \ell_3$, $Ax=((1+1)x_1,(1+1/2)x_2,\ldots,(1+1/n)\,x_n,\ldots)$.

3.38. $A:\ell_{5/2}\to\ell_{5/2}$, $Ax=(\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{\sqrt{2}}x_2,\ldots,\frac{1}{\sqrt[n]{2}}x_n,\ldots)$.

3.39. $A:\ell_5\to \ell_5$, $Ax=(\frac{1}{5}x_1,\frac{1}{5^2}x_2,\ldots,\frac{1}{5^n}x_n,\ldots)$.

3.40. $A:\ell_4\to \ell_4$, $Ax=(Sin1\cdot x_1,Sin2\cdot x_2,\ldots.,Sin\,n\cdot x_n,\ldots.)$.

3.41. $A:\ell_{5/4}\to\ell_{5/4}$, $Ax=(0,x_1,\frac{1}{2}x_2,\frac{2}{3}x_3,\ldots,(1-\frac{1}{n})x_n,\ldots)$.

3.42. $A:\ell_2\to \ell_2$, $Ax=(x_1,2x_2,\frac{3}{2}x_3,\ldots,\frac{n+1}{n}x_n,\ldots)$.

3.43. $A:\ell_1\to \ell_1$, $Ax=(2x_1,(1+\frac{1}{2})^2x_2,\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_n,\ldots.)$.

3.44. $A:\ell_2\to \ell_2$, $Ax=(x_1,\frac{1}{2}x_2,\frac{1}{3}x_3,\ldots,\frac{1}{n}x_n,\ldots)$.

3.45. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $(Ax)(t)=t^3x(t^{1/3})$.

3.46. $A:L_3[-1,1]\to L_3[-1,1]$, $(Ax)(t)=t\,x\left(\sqrt[3]{t}\right)$.

3.47. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $(Ax)(t)=t^2x\left(t^3\right)$.

3.48. $A:C[-1,1]\to C[-1,1]$, $(Ax)(t)=\int_{-1}^{1}(ts+t^2s^2)x(s)ds.$

3.49. $A:L_2[-1,1]\to L_2[-1,1]$, $(Ax)(t)=\int_{-1}^{1}(t+s)^2x(s)ds$.

3.50. $A:C^{(1)}[0,1\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x'\,(t)+t\,x(t)$.

3.51. $C[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=t^2x(t)+t^3x(t)$.

$X,Y-$ normalangan fazolar va $A:X\to Y$. Quyidagi savollarga javob yozing: 1) A operatorning aniqlanish sohasi $D(A)=\{x\in X:Ax\in Y\}$ butun X fazoga tengmi? 2) Berilgan operator chiziqli uzluksizmi (chegaralanganmi)?

3.52. $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x'(t)$.

3.53. $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=\dfrac{x(t)}{t^2}$.

3.54. $A:L_2[0,\infty)\to L_2[0,\infty)$, $(Ax)(t)=t^2x(t)$.

3.55. $A: L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$, $(Ax)(t) = \frac{x(t)}{t-2}$.

3.56. $A: L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, $(Ax)(t) = \frac{x(t)}{t}$.

3.57. $A: \ell_3 \to \ell_3$, $Ax = (x_1, \sqrt{2}\,x_2, ..., \sqrt{n}\,x_n, ...)$.

3.58. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (x_1, \ell n 2 \cdot x_2, ..., \ell n n \cdot x_n, ...)$

3.59. $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$, $(Ax)(t) = x''(t)$.

3.60. $A: \ell_2 \to \ell_1$, $Ax = (x_1, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, ..., \frac{x_n}{\sqrt{n}}, ...)$.

3.61. $A: c_0 \to c_0$, $Ax = (x_1, 2x_2, \ldots, n\,x_n, \ldots)$.

3.62. $A: L_2(-\infty;\infty) \to L_2(-\infty;\infty)$, $(Ax)(t) = (t^2 + t)x(t)$.

3.63. $A: L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$, $(Ax)(t) = \int_0^\infty (ts+1)x(s)ds$.

3.64. $A: \ell_3 \to \ell_1$, $Ax = (x_1, 2x_2, x_3, 2x_4, \ldots, x_{2n-1}, 2x_{2n}, \ldots)$.

3.65. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Ax)(t) = x'(t) + 2x(t)$.

3.66. $A: \ell_1 \to m$, $Ax = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ldots)$.

3.67. $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = \left(ctg1 \cdot x_1, ctg\frac{1}{2} \cdot x_2, \ldots, ctg\frac{1}{n} \cdot x_n, \ldots \right)$.

3.68. $A: \ell_2 \to \ell_1$, $Ax = (x_1, 2x_2, \frac{3}{2}x_3, \ldots, \frac{n}{n-1}x_n, ...)$.

3.69. $A: L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)$, $(Ax)(t) = |t|\,x(t)$.

3.70. $A: L_2[0,1] \to L_1[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t^3)$.

3.71. $A: L_1[0,\infty) \to L_1[0,\infty)$, $(Ax)(t) = t\,x(\sqrt{t})$.

2-mavzu: Teskari operatorlar

3.72. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(s) = \int_0^1 e^{s+t}x(t)dt + x(s)$ operator berilgan.

Operator teskarilanuvchanmi? Agar teskarilanuvchan bo‘lsa, teskari operator A^{-1} ni toping.

Yechish. Dastlab berilgan operatorning teskarilanuvchanligini tekshiramiz. Ma’lumki, A operator teskarilanuvchan bo‘lishi uchun $Ax = 0$ tenglama faqat nol yechimga ega bo‘lishi zarur va yetarli. $Ax = 0$ tenglamani yechamiz, ya’ni

$$\int_0^1 e^{s+t}x(t)dt + x(s) = 0, \quad \text{yoki} \quad x(s) = -c(x)e^s, \qquad (23.5)$$

bu yerda

$$c(x) = \int_0^1 e^t x(t)dt. \tag{23.6}$$

Endi (23.5) ni (23.6) ga qo‘ysak,

$$c(x) = -c(x)\int_0^1 e^{2t}dt = -\frac{1}{2}c(x)\left(e^2-1\right) \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{2}\left(e^2+1\right)c(x) = 0$$

tenglikga ega bo‘lamiz. Bundan $c(x)=0$. (23.5) dan esa $x(s)\equiv 0$ ekanligiga ega bo‘lamiz. Demak, $Ax=0$ tenglama faqat $x=0$ yechimga ega, shuning uchun A teskarilanuvchi operator. A^{-1} ni topish uchun ixtiyoriy $y \in C[0,1]$ element uchun $Ax = y$ tenglamani yechamiz, ya’ni

$$\int_0^1 e^{s+t}x(t)dt + x(s) = y(s) \quad \text{yoki} \quad x(s) = y(s) - c(x)e^s, \tag{23.7}$$

bu yerda $c(x)$ (23.6) ko‘rinishga ega. $x(s)$ uchun olingan (23.7) ifodani (23.6) ga qo‘ysak,

$$c(x) = \int_0^1 e^t y(t)dt - c(x)\int_0^1 e^{2t}dt = \int_0^1 e^t y(t)dt - \frac{1}{2}c(x)\left(e^2-1\right).$$

Bundan

$$c(x) = \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^t x(t)dt \tag{23.8}$$

ni olamiz. $c(x)$ uchun olingan (23.8) ifodani (23.7) ga qo‘ysak, $Ax = y$ tenglama yechimi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$x(s) = y(s) - \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{s+t}y(t)dt. \tag{23.9}$$

Demak, har bir $y \in C[0,1]$ elementga $Ax = y$ tenglama yechimini mos qo‘yuvchi A^{-1} operator quyidagi formula yordamida aniqlanar ekan:

$$A^{-1} : C[0,1] \to C[0,1], \ \left(A^{-1}x\right)(s) = x(s) - \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{s+t}x(t)dt.$$

3.73. Quyidagi operatorni teskarilanuvchan emasligini ko‘rsating:

$$A : C[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = x(0)\,t + x(1)\,t^2. \tag{23.10}$$

Yechish: Ma'lumki, A chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun $Ax=0$ tenglama faqat $x=0$ yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli. (23.10) formula bilan berilgan operator uchun $x_0(t)=t(t-1)\neq 0$ funksiyani olsak, $x_0(0)=x_0(1)=0$ bo'lgani uchun

$$(Ax_0)(t)=x_0(0)t+x_0(1)t^2=0,\ \forall t\in[0,1],$$

ya'ni $Ax_0=0$. Demak, $Ax=0$ tenglama nolmas yechimga ega bo'lgani uchun A operator teskarilanuvchan emas.

3.74. Quyidagi operatorning teskarilanuvchanligini ko'rsatib, unga teskari operatorni toping

$$A:R^3\to R^3,\quad Ax=(2x_1+x_3,x_2+2x_3,x_1+x_3),\quad x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3.$$

Yechish. Bu operator uchun $Ax=0$ tenglama

$$\begin{cases}2x_1+x_3=0\\ x_2+2x_3=0\\ x_1+x_3=0\end{cases}\tag{23.11}$$

chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat. Bundan $x_1=x_2=x_3=0$ ga ega bo'lamiz. (23.11) sistemaning yechimi yagona bo'ladi, ya'ni $Ax=0$ tenglama faqat $x=0$ yechimga ega. Demak, A teskarilanuvchan operator. Endi $\forall y\in R^3$ uchun $Ax=y$ tenglama yoki

$$\begin{cases}2x_1+x_3=y_1\\ x_2+2x_3=y_2\\ x_1+x_3=y_3\end{cases}\tag{23.12}$$

tenglamalar sistemasini yechamiz. (23.12) sistemadan quyidagi sistemaga o'tamiz:

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_3\\ x_2+2x_3=y_2\\ x_3=-y_1+2y_3\end{cases}\quad \text{yoki}\quad \begin{cases}x_1=y_1-y_3\\ x_2=2y_1+y_2-4y_3\\ x_3=-y_1+2y_3,\end{cases}$$

bu yerda (x_1,x_2,x_3) va (y_1,y_2,y_3) lar o'rinlarini almashtirsak, $(y_1,y_2,y_3)=(x_1-x_3,2x_1+x_2-4x_3,-x_1+2x_3)$. Bundan A^{-1} operator quyidagi formula bilan aniqlanishi kelib chiqadi:

$$A^{-1}x=A^{-1}(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3,2x_1+x_2-4x_3,-x_1+2x_3).$$

3.75. X,Y chiziqli normalangan fazolar, $A: X \to Y$ teskarilanuvchan chiziqli operator bo‘lsin. U holda $x_1, x_2, \dots, x_n \in D(A)$ va $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$ elementlar sistemasi bir vaqtda yo chiziqli bog‘langan, yo chiziqli bog‘lanmagan bo‘ladi. Isbotlang.

3.76. X chiziqli normalangan fazo, $A: X \to X$ chiziqli operator bo‘lsin. Agar biror $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in R^n$ uchun $I + \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot A^2 + \dots + \lambda_n \cdot A^n = 0$ shart bajarilsa A ga teskari operator mavjudligini isbotlang.

3.77. X chiziqli normalangan fazo, $A, B: X \to X$ chiziqli operatorlar bo‘lib, $D(A) = D(B) = X$, hamda $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$ operatorlar mavjud bo‘lsin. A va B larga teskari operatorlar mavjudmi?

3.78. X chiziqli normalangan fazo, $A: X \to X$ chiziqli operator va $D(A)$ da $\|x_n\| = 1$ va $\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = 0$ shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketlik mavjud bo‘lsin. U holda A ga chegaralangan teskari operator mavjud emasligini isbotlang.

3.79. $C^{(1)}[0;1]$ Banax fazosi, $L = \{x \in C^{(1)}[0;1]: x(0) = 0\}$ uning qism fazosi va $A: L \to C[0;1]$ chiziqli operatorni

$$(Ax)(t) = dx/dt + u(t)x(t), \quad u \in C[0;1]$$

tenglik bilan aniqlaymiz. A ga chegaralangan teskari operator mavjudligini isbotlang.

3.80. $A: C^{(1)}[0;1] \to C[0;1]$, $(Ax)(t) = dx/dt$ chiziqli operatorga o‘ng teskari operator mavjud, chap teskari operator mavjud emasligini isbotlang.

3.81. $A: C[0;1] \to C[0;1]$ operatorni

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$$

tenglik bilan aniqlaymiz. Uning qiymatlar sohasi $R(A)$ qanday shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalardan iborat. $R(A)$ da A ga teskari operator mavjudmi? Agar mavjud bo‘lsa, chegaralanganmi?

3.82. $A: C[0;1] \to C[0;1]$, $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds + x(t)$ operatorni qaraymiz:

a) $Ker\, A = 0$ tenglikni isbotlang.

b) A ga chegaralangan teskari operator mavjudligini isbotlang. A^{-1} ni toping.

3.83. $A: C[0;1] \to C[0;1]$, $(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)ds$

operatorga teskari operator mavjudligini ko‘rsating va uni toping.

3.84. $A: C[0;1] \to C[0;1]$ operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Ax)(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t),\ D(A) = \{x \in C^{(2)}[0;1]: x(0) = x'(0) = 0\}.$$

a) A chegaralanmagan operator. Isbotlang.

b) A ga chegaralangan teskari operator mavjudligini isbotlang va uni toping.

3.85. H Hilbert fazo, $A \in L(H)$, $R(A) = H$ va A ga chegaralangan o‘ng teskari A_r^{-1} operator mavjud bo‘lsin. U holda A ga chegaralangan teskari operator mavjud. Isbotlang.

Berilgan operatorning teskarilanuvchan ekanligini ko‘rsating va teskari operatorni toping**.**

3.86. $A: R^3 \to R^3$, $Ax = (x_1 + x_3, x_1 + x_2, x_2 + x_3)$.

3.87. $A: R^3 \to R^3$, $Ax = (x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$.

3.88. $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (x_1, x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_4, x_5, \ldots)$.

3.89. $A: \ell_2 \to \ell_1$, $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots\ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots\ldots)$.

3.90. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (x_1, x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_3 + x_4 + x_5, x_6, x_7, \ldots)$.

3.91. $A: R^3 \to R^3$, $Ax = (x_1 + 2x_3, 2x_2, 2x_1 - x_3)$.

3.92. $A: R^3 \to R^3$, $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - 2x_2, x_3)$.

3.93. $A: C_0^{(1)}[0,1] \to C^{(1)}[0,1]$, $(Ax)(t) = x'(t)$.

3.94. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = \int_0^t sx(s)ds$.

3.95. $A: C[0,1] \to C^{(1)}[0,1]$, $(Ax)(t) = (t+2)x(t) + \int_0^1 sx(s)ds$.

3.96. $A: m \to \ell_2$, $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots)$.

3.97. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = (1+t)x(t) + \int_0^1 tsx(s)ds.$

3.98. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi]$, $(Ax)(t) = (\sin t + 1)x(t)$.

3.99. $A: C[0,2] \to C[0,2]$, $(Ax)(t) = (t+1)x(t) + x(1)t + x(0)$.

3.100. $A: R^3 \to R^3$, $Ax = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

3.101. $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{2}{3}x_3, \ldots, \frac{n-1}{n}x_n, \ldots\ldots)$.

3.102. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2x(t) + x(1)$.

3.103. $A: C[o,\pi] \to C[o,\pi]$, $(Ax)(t) = x(t) + \int_0^\pi \sin t \cdot \sin s\, x(s)ds.$

3.104. $A:\ell_1 \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin 2\pi k t$.

3.105. $A: m \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^2} \cos 2\pi k t$.

Quyidagi operatorlarning teskarilanuvchan emasligini isbotlang.

3.106. $A:\ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, x_7, x_8, x_9, \dots)$.

3.107. $A: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = x'(t)$.

3.108. $A: C^{(2)}[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = x''(t)$.

3.109. $A: C[-1,1] \to C[-1,1], \quad (Ax)(t) = \int_{-1}^{1} ts\, x(s) ds$.

3.110. $A:\ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (0, x_2, 0, x_1, 0, x_6, x_4, x_8, x_9, \dots)$.

3.111. $A: L_2[-1;1] \to L_2[-1;1], \quad (Ax)(t) = \int_{-1}^{1} t^2 (s^2+1) x(s) ds$.

3.112. $A: R^4 \to R^4, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_1 + x_4)$.

3.113. $A: m \to m, \quad Ax = (x_1, x_2, 0, 0, 0, x_6, x_7, x_8, \dots)$.

3.114. $A: C[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = x(0) \cdot (t^2+1) + x(1)(t^2 + 3t + 2)$.

3.115. $A: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = x(0) + x'(t)$.

3.116. $A: L_2[-1;1] \to L_2[-1;1], \quad (Ax)(t) = \cos t \int_{-1}^{1} \sin s\, x(s) ds$.

3.117. $A:\ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_1 + x_4, x_5, x_6, \dots)$.

3.118. $A: C[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = (t^2 + t + 1)\int_{0}^{1} s\, x(s) ds$.

3.119. $A: C[0,2] \to C[0,2], \quad (Ax)(t) = x(0) + x(1)t + x(2)t^2$.

3.120. $A: C^{(1)}[0,1] \to C^{(1)}[0,1], \quad (Ax)(t) = \int_{0}^{t} x'(t) dt + [x(0) - x(1)]t$.

3.121. $A:\ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (x_1 + x_2, 0, x_2 - x_3, x_4, x_5, \dots)$.

3.122. $A:\ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (x_1, 2x_2, 3x_3, x_4 + x_5, 0, x_6, x_7, x_8, \dots)$.

3.123. $A: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = x'(t) - 2x(t)$.

3.124. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi], \quad (Ax)(t) = (\sin t + \cos t) x(t) - \cos 2t$.

3.125. $A: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = x'(t) - \frac{1}{t^2+1}$.

3-mavzu. Qo‘shma operatorlar

3.126. $X = \ell_1$ va $T \in L(\ell_1)$ o‘ngga siljitish operatori bo‘lsin, ya’ni

$$Tx = T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad x \in \ell_1$$

bo‘lsin. T ga qo‘shma T' operatorni toping.

Yechish. Ma’lumki, $T \in L(X,Y)$ operatorning Banax qo‘shmasi hamma $x \in X$ va $f \in Y^*$ lar uchun

$$(T'f)(x) = f(Tx) \tag{23.13}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi va Y^* fazoni X^* fazoga akslantiruvchi T' operatordan iborat. Bizga ma’lumki, $\ell_1^* \cong m$, boshqacha aytganda har qanday $f \in \ell_1^*$ uchun shunday yagona $y \in m$ topiladiki,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in m \tag{23.14}$$

tenglik $\forall x \in \ell_1$ lar uchun o‘rinli bo‘ladi. Xuddi shuningdek, $\exists \zeta \in \mathrm{m}$ mavjudki,

$$(T' f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \xi_k, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in m \tag{23.15}$$

tenglik $\forall x \in \ell_1$ lar uchun bajariladi. (23.14) va (23.15) tengliklarni hisobga olsak, berilgan T operator uchun (23.13) shart quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \xi_k = \sum_{k=2}^{\infty} x_{k-1} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1} \tag{23.16}$$

Bu tenglik $\forall x \in \ell_1$ lar uchun bajariladi. Xususiy holda, $e_k \in \ell_1, \quad k = 1,2,3,\ldots.$ elementlar uchun (23.16) tenglik $\xi_k = y_{k+1}, \quad k = 1,2,3,\ldots,$tengliklarga aylanadi. Shunday qilib, $T' : m \to m$ operator

$$T' y = T'(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}, \ldots)$$

formula bilan aniqlanar ekan.

Biz bilamizki (15.1-teorema), agar $T \in L(X,Y)$ bo‘lsa, $T' \in L(Y^*, X^*)$ bo‘ladi va

$$\|T'\| = \|T\| \tag{23.17}$$

tenglik bajariladi. Qaralayotgan misolda bu teoremaning o‘rinli ekanligini tekshirib ko‘ramiz. T' operatorning chiziqli ekanligi uning aniqlanishidan ko‘rinib turibdi.

(23.17) tenglik ham bajariladi. Haqiqatan ham,

$$\| T \| = \sup_{\| x \| \le 1} \| Tx \| = \sup_{\| x \| \le 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} | x_k | \right) = 1, \quad \| T' \| = \sup_{\| y \| \le 1} \| T' y \| = \sup_{\substack{2 \le k < \infty \\ \| y \| \le 1}} | y_k | = 1.$$

3.127. $L_2[a,b]$ kompleks Hilbert fazosi, T - uzluksiz $u(t)$ funksiyaga ko'paytirish operatori, ya'ni

$$(Tx)(t) = u(t)x(t), \qquad x \in L_2[a,b].$$

T^* - Hilbert ma'nosidagi qo'shma operatorni toping.

Yechish. Ta'rifga ko'ra $T \in L(H)$ operatorning Hilbert qo'shmasi hamma $x, y \in H$ lar uchun

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \tag{23.18}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $T^* \in L(H)$ operatordan iborat, $L_2[a,b]$ fazo quyidagi

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt \tag{23.19}$$

skalyar ko'paytmaga nisbatan Hilbert fazosi bo'ladi. Shuning uchun misolda berilgan T operator uchun (23.18) tenglik

$$\int_a^b u(t)x(t)\overline{y(t)}dt = \int_a^b x(t)\overline{(T^* y)(t)}dt$$

tenglikdan iborat. Bu tenglikni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\int_a^b x(t)\,\overline{\overline{u(t)}\,y(t)}\,dt = \int_a^b x(t)\overline{(T^* y)(t)}dt. \tag{23.20}$$

Agar $z(t) = \overline{u(t)}y(t)$ belgilashni kiritsak, (23.19) ga ko'ra (23.20) tenglik $(x, z) = (x, T^* y)$ ko'rinishga keladi yoki $(x, T^* y) - (x, z) = (x, T^* y - z) = 0$. Oxirgi tenglik barcha $x \in L_2[a,b]$ lar uchun o'rinli bo'ladi. Xususiy holda, $x = T^* y - z$ elementni olsak, $(T^* y - z, T^* y - z) = 0$ tenglik hosil bo'ladi. Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga asosan oxirgi tenglik o'rinli bo'lishi uchun $T^* y - z = 0$, ya'ni $T^* y = z$ bo'lishi kerak. Shunday qilib, qo'shma $T^* : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ operator

$$\left(T^* y\right)(t)=\overline{u(t)}y(t), \quad y\in L_2[a,b],$$

formula yordamida aniqlanar ekan. Agar $T\in L(H)$ va $T^*=T$ bo‘lsa, T operator o‘z-o‘ziga qo‘shma operator deyiladi. Shuning uchun 23.127-misoldagi T operator u funksiya faqat haqiqiy qiymatlar qabul qilgandagina (ya’ni, $\overline{u(t)}\equiv u(t)$ bo‘lgandagina) o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.

3.128. $\ell_2=\left\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots):\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty\right\}$ kompleks Hilbert fazosida $(Tx)_n=x_{n+1}$, ya’ni $Tx=T(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)=(x_2,x_3,\dots,x_{n+1},\dots)$

operator berilgan bo‘lsin. T^* operatorni toping.

Yechish. ℓ_2 fazo quyidagi $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k}$ skalyar ko‘paytmaga nisbatan Hilbert fazosi bo‘ladi. Hilbert ma’nosidagi qo‘shma operator ta’rifiga ko‘ra

$$(Tx,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(Tx)_k\overline{y_k}=\sum_{k=1}^{\infty}x_{k+1}\overline{y_k}=\sum_{k=2}^{\infty}x_k\overline{y_{k-1}}=\left(x,T^*y\right)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{\left(T^*y\right)_k}.$$

Oxirgi tenglik hamma $x\in\ell_2$ lar uchun o‘rinli. Bundan esa T^* operatorning

$$\left(T^*y\right)_k=y_{k-1},\quad k=2,3,\dots,\quad (T^*y)_1=0,$$

yoki

$$T^*y=T^*(y_1,y_2,\dots,y_n,\dots)=(0,y_2,y_2,\dots,y_n,\dots)$$

formula bilan aniqlanishini ko‘ramiz.

$$(Tx)_n=x_{n+1}=x_{n-1}=\left(T^*x\right)_n,\ n=1,2,3,\dots..$$

tenglik ℓ_2 fazoning faqat nol vektori uchun bajariladi. Shu sababli T operator o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘la olmaydi.

Quyidagi misollarda (129-148) berilgan $T\in L(X,Y)$ yoki $T\in L(H)$ operatorga qo‘shma T' yoki T^* operatorni toping.

3.129. $T:\ell_1\to\ell_1,\quad Tx=(\lambda_1x_1,\dots,\lambda_nx_n,\dots),\quad |\lambda_n|\le 1, n=1,2,3,\dots,.$

3.130. $T:c_0\to c_0,\quad Tx=(x_2,x_3,\dots,x_n,\dots)$.

3.131. $T:\ell_1\to c_0,\quad Tx=(0,x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$.

3.132. $T: c_0 \to \ell_1$, $Tx = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$.

3.133. $T: C_2[0,\pi] \to C_2[0,\pi]$, $(Tx)(t) = \left(t^2 + i\cos t\right)x(t)$.

3.134. $T: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Tx)(t) = \int_0^1 [t\,s + i\cos(t+s)]\,x(s)\,ds$.

3.135. $T: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Tx)(t) = \int_0^1 \left(t^2 + t + 1\right)x(s)\,ds$.

3.136. $T: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Tx)(t) = \int_0^t s\,x(s)\,ds$.

3.137. $T: \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, \dots.)$, $\lambda_n \in C$ *ва* $|\lambda_n| \le 1$ $(n \in N)$.

3.138. $T: \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, \dots.)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots) \in \ell_2$.

3.139. $T: \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = (x_1 + x_3, x_2 + x_4, \dots, x_n + x_{n+2}, \dots.)$.

3.140. $T: \ell_2 \to \ell_2$, $Tx = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + 2x_3 + x_4, \dots, x_n + 2x_{n+1} + x_{n+2}, \dots)$
.

3.141. $T: \ell_2(Z) \to \ell_2(Z)$, $(Tx)_n = x_{n-1} + x_{n+1}$, $n \in Z$.

3.142. $T: \ell_2(Z) \to \ell_2(Z)$, $(Tx)_n = x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}$, $n \in Z$.

3.143. $T: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $(Tx)(t) = (\cos t + i\sin t)x(t) + \int_{-1}^1 (ts - its)x(s)ds$.

3.144. $T: \ell_1 \to c_0$, $Tx = \left(e^i x_1, e^{2i} x_2, \dots, e^{in} x_n, \dots\right)$.

3.145. $T: \ell_1 \to \ell_2$, $Tx = \left(0, \frac{1}{2}x_2, \frac{2}{3}x_3, \dots, \frac{n-1}{n}x_n, \dots\right)$.

3.146. $T: m \to m$, $Tx = \left(x_1, 2x_2, \dots, 50x_{50}, 0, 0, \dots\right)$.

3.147. $T: \ell_3 \to \ell_3$, $Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$, $|\lambda_n| \le 2, n = 1, 2, \dots.$.

3.148. $T: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Tx)(t) = \left(t + it^2\right)x(t) + \int_0^1 (t + is)x(s)ds$.

Eslatma. 141-142-chi misollarda keltirilgan $\ell_2(Z)$ fazo

$$\ell_2(Z) = \left\{ x = (\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots): \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

to‘plamdan iborat bo‘lib, $(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ skalyar ko‘paytmaga nisbatan Hilbert fazosi bo‘ladi.

4-mavzu: Chiziqli operator spektri

X - normalangan fazo va unda $\boldsymbol{A \in L(X)}$ operator berilgan bo‘lsin. Chiziqli operator spektriga oid bir necha misollarni yechimlari bilan keltiramiz.

3.149. $C[a,b]$ orqali $[a,b]$ da aniqlangan uzluksiz (kompleks qiymatli) funksiyalardan iborat chiziqli fazo belgilangan. Bu fazoda

$$(Ax)(t) = u(t)\int_a^b u(s)x(s)ds, \quad x \in C[a,b]$$

formula vositasida aniqlangan A operatorning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

Yechish. Ta'rifga ko'ra, nol bo'lmagan $x \in C[a;b]$ vektor va biror $\lambda \in C$ soni uchun

$$Ax = \lambda x \tag{23.21}$$

tenglik bajarilsa, x vektor A operatorning xos vektori va λ soni unga mos keluvchi xos qiymat deyiladi. Qaralayotgan operator uchun (23.21) tenglik quyidagi ko'rinishda ega bo'ladi:

$$u(t)\int_a^b u(s)x(s)ds = \lambda x(t), \tag{23.22}$$

bu yerda $x \neq 0$. Faraz qilaylik $\lambda \neq 0$ bolsin. U holda $x \neq 0$ bo'lgani uchun

$$\alpha_x = \int_a^b u(s)x(s)ds \neq 0 \tag{23.23}$$

tengsizlik bajarildi. (23.22) tenglikda (23.23)ni e'tiborga olsak,

$$x(t) = \lambda^{-1}\alpha_x\, u(t)$$

tenglikni olamiz. (23.23) tenglikka x funksiyaning bu ifodasini qo'yib

$$\alpha_x = \alpha_x\, \lambda^{-1}\int_a^b u^2(t)dt \quad \text{yoki} \quad \alpha_x\left(\lambda - \int_a^b u^2(t)\,dt\right) = 0$$

tenglikka kelamiz. Bunda $\alpha_x \neq 0$ bo'lgani uchun $\lambda = \int_a^b u^2(t)dt$ son A operatorning xos qiymati va $x(t) = u(t)$ unga mos xos vektor ekanligi kelib chiqadi. Yana shuni ta'kidlash kerakki, agar

$$\int_a^b u(t)x(t)dt = 0 \tag{23.24}$$

shartini qanoatlantiruvchi nolmas x funksiya mavzjud bo'lsa, u holda $\lambda = 0$ soni uchun ham (23.21) tenglik bajariladi. Albatta (23.24) shartni qanoatlantiruvchi nolmas x funksiya mavjud. Demak, A operator ikkita $\lambda=0$ va $\mu=\int_a^b u^2(t)dt$ xos qiymatlarga ega. (23.24) shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar $\lambda=0$ xos qiymatga mos keluvchi xos funksiyalar bo‘ladi.

3.150. $C[a,b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga aks ettiruvchi va

$$(Ax)(t)=tx(t) \tag{23.25}$$

formula bilan aniqlangan A operatorni qaraymiz. Dastlab $A-\lambda I$ operatorni va unga teskari operator bo‘lgan $R_\lambda(A)$ rezolventani topamiz. Ixtiyoriy $x\in C[a,b]$ uchun

$$(A-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)x(t)$$

bo‘lgani uchun $Ax=\lambda x$ tenglik

$$(t-\lambda)x(t)=0 \tag{23.26}$$

tenglikka teng kuchli. Istalgan $\lambda\in C$ uchun (23.26) tenglama faqat aynan nolga teng uzluksiz yechimga ega. Shunday ekan, A operatorning xos qiymati yo‘q. U holda 14.3-teoremaga ko‘ra ixtiyoriy $\lambda\in C$ uchun $A-\lambda I$ operator teskarilanuvchan. Ammo, $\lambda\in(a,b)$ bo‘lganda

$$(A-\lambda I)^{-1}x(t)=\frac{1}{t-\lambda}x(t)$$

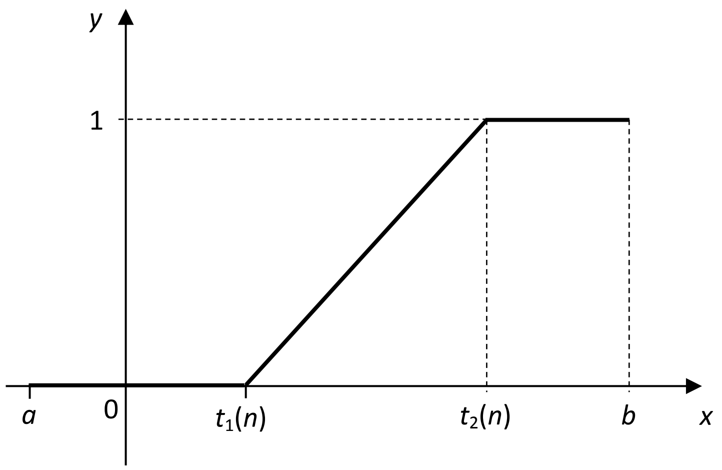
formula bilan berilgan $(A-\lambda I)^{-1}$ operator aniqlangan elementlar to‘plami $C[a,b]$ fazoning qismi bo‘lib, unga teng emas. mo

Masalan, $x_0(t)=C, C\neq 0$ desak, $x_0\in C[a,b]$, am $(A-\lambda I)^{-1}x_0\notin C[a,b]$. Bundan tashqari, $\lambda\in(a,b)$ uchun $(A-\lambda I)^{-1}$ chegaralanmagan operator. Buni ko‘rsatamiz.

Agar n yetarlicha katta bo‘lsa, u holda $\lambda+2/n<b$ bo‘ladi va

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & a\le t<t_1(n)\\ n(t-\lambda)-1, & t_1(n)\le t\le t_2(n)\\ 1, & t_2(n)<t<b\end{cases}$$

funksiyalar ketma-ketligi $C[a,b]$ ga qarashli bo‘ladi. Bu yerda $t_1=t_1(n)=\lambda+1/n$, $t_2=t_2(n)=\lambda+2/n$. Qurilishiga ko‘ra $\|x_n\|=1$. Endi quyidagi $\|(A-\lambda I)^{-1}x_n\|$ normani hisoblaymiz.



$$\|(A-\lambda I)^{-1}x_n\| = \max_{a\le t\le b}\left|\frac{1}{t-\lambda}x_n(t)\right| = \frac{n}{2}\cdot\left[n(\lambda+\frac{2}{n}-\lambda)-1\right] = \frac{n}{2}$$

Shunday qilib, $\lambda\in(a,b)$ bo‘lganda $(A-\lambda I)^{-1}$ chegaralanmagan operator ekan. Endi $\lambda\notin[a,b]$ holni qarasak, bu holda ixtiyoriy $x\in C[a,b]$ uchun $(t-\lambda)^{-1}x(t)$ uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun $(A-\lambda I)^{-1}$ operator fazoning barcha elementlarida aniqlangan va

$$\|(A-\lambda I)^{-1}x\| \le \frac{1}{\min\{|a-\lambda|,|b-\lambda|\}}\|x\|$$

tengsizlik o‘rinli. Shunday qilib, ixtiyoriy $\lambda\notin[a,b]$ son A operator uchun regulyar nuqta bo‘ladi. Spektr yopiq to‘plam bo‘lgani uchun berilgan A operatorning spektri $\sigma(A)=[a,b]$ kesmadan iborat. $C\setminus[a,b]$ to‘plam esa A operatorning rezolvent to‘plami bo‘ladi. A operatorning $\lambda\in C\setminus[a;b]$ nuqtadagi rezolventasi

$$R_\lambda(A)x(t) = (A-\lambda I)^{-1}x(t) = \frac{1}{t-\lambda}x(t), \quad \lambda\in\rho(A)=C\setminus[a,b]$$

formula vositasida aniqlanadi.

3.151. $L_2[0,1]$ kompleks Hilbert fazosida quyidagi tenglik bilan aniqlangan

$$Ax(t) = tx(t) + \int_0^1 tsx(s)ds, \quad x \in L_2[0,1]$$

operatorning spektri va rezolventasini toping.

Yechish. a) A operatorning xos qiymatlarini topish uchun quyidagi tasdiqdan foydalanamiz.

2.1-tasdiq. $\lambda \in C \setminus [0,1]$ soni A operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun

$$\Delta(\lambda) := 1 + \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda} dx = 0$$

tenglikning bajarilishini zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* Aytaylik $\lambda \in C \setminus [0,1]$ soni A operatorlarning xos qiymati bo‘lsin, ya’ni biror nolmas $x \in L_2[0,1]$ element uchun

$$Ax(t) = tx(t) + \int_0^1 tsx(s)ds = \lambda x(t)$$

tenglik bajarilsin. U holda

$$(t-\lambda)x(t) + t \cdot \alpha_x = 0, \tag{23.28}$$

bunda

$$\alpha_x = \int_0^1 sx(s)ds. \tag{23.29}$$

Agar $\alpha_x = 0$ bo‘lsa, (23.28) tenglik $(t-\lambda)x(t) = 0$ tenglikka aylanadi. Bundan $x(t)$ ning aynan nolga tengligiga ega bo‘lamiz. Tanlanishga ko‘ra $x \neq 0$. Shunday ekan, $\alpha_x \neq 0$. Yuqoridagi (23.28) tenglikdan

$$x(t) = -\frac{\alpha_x \cdot t}{t-\lambda}$$

ni topamiz va buni (23.29) ga qo‘yib

$$\alpha_x = -\alpha_x \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda} ds$$

tenglikka ega bo‘lamiz. $\alpha_x \neq 0$ bo‘lganligi uchun

$$\Delta(\lambda)=1+\int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda}ds=0$$

tenglikni hosil qilamiz.

Yetarliligi. Aytaylik $\lambda\in C\setminus[0,1]$ son uchun $\Delta(\lambda)=0$ tenglik bajarilsin. U holda $x(t)=-t(t-\lambda)^{-1}$ fynksiyani olsak,

$$(A-\lambda I)x(t)=-(t-\lambda)\frac{t}{t-\lambda}-t\int_0^1 s\cdot\frac{s}{s-\lambda}ds=-t(1+\int_0^1\frac{s^2}{s-\lambda})=-t\Delta(\lambda)=0$$

tenglik bajariladi. Bundan λ son A operator uchun xos qiymat bo‘lishi va $x(t)=-\frac{t}{t-\lambda}$ unga mos xos funksiya bo‘lishi kelib chiqadi. A operatorning $[0,1]$ segmentdan tashqaridagi xos qiymatlarni topamiz. Hamma manfiy λ lar uchun

$$\Delta(\lambda)=1+\int_0^1\frac{s^2}{s-\lambda}ds\geq 1$$

tengsizlik o‘rinli. Bundan tashqari $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ bo‘lsa, $\Delta(x)\neq 0$ bo‘lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas. 23.1-tasdiqqa ko‘ra A operator $\lambda>1$ xos qiymatlarga ega bo‘lish mumkin. Aytaylik, $\lambda>1$ bo‘lsin. U holda

$$\Delta'(\lambda)=\int_0^1\frac{s^2}{(s-\lambda)^2}d\lambda>0;\qquad \lim_{\lambda\to 1}\Delta(\lambda)=-\infty;\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\Delta(\lambda)=1$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan $(1,\infty)$ intervalda $\Delta(\lambda)$ ning o‘sishi va yagona $\lambda_0\in(1,\infty)$ nuqtada $\Delta(\lambda_0)=0$ tenglik bajarilishini kelib chiqadi. Shunday qilib, $[0,1]$ segmentdan tashqarida A operatorning yagona xos qiymati mavjud ekanligiga ega bo‘lamiz. Aytaylik, $\lambda\in C\setminus[0,1]$ son A operatorning xos qiymati bo‘lmasin. $A-\lambda I$ operatorga teskari operatorlarni topamiz (chunki, 14.3-teoremaga ko‘ra $(A-\lambda I)^{-1}$ operator mavjud):

$$(A-\lambda I)x(t)=(t-x)x(t)+t\int_0^1 sx(s)ds=y(t),\quad x,y\in L_2[0,1]$$

tenglikdan (23.29) ni e’tiborga olgan holda $x(t)$ ni topamiz:

$$(t-\lambda)x(t)+t\cdot\alpha_x=y(t),$$

bundan

$$x(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}-\alpha_x\frac{t}{t-\lambda}. \qquad (23.30)$$

$x(t)$ uchun olingan (23.30) ifodani (23.29) ga qo‘ysak, α_x uchun

$$\alpha_x=\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds-\alpha_x\int_0^1\frac{s^2}{s-\lambda}ds$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu yerdan, shartga ko‘ra $\Delta(\lambda)\neq 0$ bo‘lganligi uchun

$$\alpha_x=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds$$

ni hosil qilamiz. Demak,

$$x(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}-\frac{t}{t-\lambda}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds.$$

Shunday qilib, A operatorning rezolventasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$R_\lambda(A)y(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}-\frac{t}{t-\lambda}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds, \qquad y\in L_2[0,1].$$

Olingan natijalardan ko‘rinib turibdiki, agar $\lambda\in C\setminus\{[0,1]\cup\{\lambda_0\}\}$ bo‘lsa, u holda $D(R_\lambda(A))=L_2[0,1]$ va $R_\lambda(A)$ chegaralangan, bu yerda $\lambda_0\in(1;\infty)$ va $\Delta(\lambda_0)=0$.

b) $\lambda\in[0,1]$ bo‘lsin. U holda $\operatorname{Im}(A-\lambda I)\neq L_2[0,1]$, chunki $y_0(t)\equiv 1$ funksiyani olsak, $y_0\notin\operatorname{Im}(A-\lambda I)$. Demak, $D(R_\lambda(A))\neq L_2[0,1]$ va, shuning uchun, $\lambda\in\sigma(A)$.

Shunday qilib, A operatorning spektri $\sigma(A)=[0,1]\cup\{\lambda_0\}$ to‘plamdan iborat, bunda $\lambda_0\in(1,\infty)$ va $\Delta(\lambda_0)=0$.

3.152. ℓ_1 fazoda berilgan

$$A:\ell_1\to\ell_1,\ Ax=(x_1+x_2,x_2+2x_3,3x_3,4x_4,x_5,x_6,\ldots)$$

operatorning spektri va rezolventasini toping.

Yechish. a) A operatorning xos qiymatlarini topish uchun $\lambda\in C$ songa mos $Ax=\lambda x$ yoki

$$(x_1+x_2,x_1+2x_2 3x_3,4x_4,x_5,x_6,..)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\ldots) \qquad (23.31)$$

tenglamani yechamiz. (23.31) tenglama quyidagi tenglamalar sistemaga teng kuchli:

$$x_1 + x_2 = \lambda x_1,\ \ x_1 + 2x_2 = \lambda x_2,\ \ 3x_3 = \lambda x_3,\ \ 4x_4 = \lambda x_4,\ \ x_n = \lambda x_n,\ \ n \geq 5. \quad (23.32)$$

Agar $\lambda \notin \{1,3,4\}$ bo‘lsa, (23.31) tenglik bajarilishi uchun $x_3 = x_4 = x_5 = \ldots = 0$ bo‘lishi kerak. U holda (23.32) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga keladi. Bu tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo‘lishi uchun $(1-\lambda)(2-\lambda)-1=0$ yoki

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad (23.33)$$

tenglik bajarilishi kerak. (23.33) tenglama $\lambda_1 = 2^{-1}(3-\sqrt{5})$, $\lambda_2 = 2^{-1}(3+\sqrt{5})$ ildizlarga ega. Bu yerdan kelib chiqadiki, (23.31) tenglama $\lambda_1 = 2^{-1}(3-\sqrt{5})$ songa mos nolmas

$$x^{(1)} = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, 0, \ldots) \quad (23.34)$$

yechimga va $\lambda_2 = 2^{-1}(3+\sqrt{5})$ soniga mos nolmas

$$x^{(2)} = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, 0, \ldots) \quad (23.35)$$

yechimga ega. Shunday qilib, $\lambda_1 = 2^{-1}(3-\sqrt{5})$, $\lambda_2 = 2^{-1}(3+\sqrt{5})$ sonlari A operatorning xos qiymatlari bo‘ladi va (23.34) va (23.35) ko‘rinishdagi $x^{(1)}$ va $x^{(2)}$ elementlar A operatorning λ_1 va λ_2 ga mos xos vektorlar bo‘ladi. Agar $\lambda_3 = 1$ bo‘lsa $x^{(3)} = e_n$, $n \geq 5$ nolmas element $Ax^{(3)} = 1 \cdot x^{(3)}$ tenglikni qiyinlashtiradi, ya’ni 1 soni A operatorning cheksiz karrali xos qiymati va $x^{(3)} = e_n,\ n \geq 5$ ko‘rinishdagi elementlar unga mos xos vektorlar bo‘ladi. Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, $\lambda_4 = 3, \lambda_5 = 4$ sonlar ham A operatorning xos qiymatlari bo‘ladi va $x^{(4)} = e_3$, $x^{(5)} = e_4$ lar esa mos xos vektorlar bo‘ladi. Shunday qilib, A operator $2^{-1}(3-\sqrt{5}),\ 2^{-1}(3+\sqrt{5}),\ 1,\ 3,\ 4$ xos qiymatlarga ega va boshqa xos qiymatlari yo‘q. $2^{-1}(3-\sqrt{5}),\ 2^{-1}(3+\sqrt{5}),\ 3,\ 4$ xos qiymatlar operatorning oddiy xos qiymatlari bo‘ladi.

b) Endi $\lambda \notin \left\{2^{-1}(3-\sqrt{5}),\ 2^{-1}(3+\sqrt{5}),1,\ 3,\ 4\right\}$ holni qaraymiz. Ta’rifga ko‘ra, A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi $A-\lambda I$ operatorining teskarisi sifatida aniqlanadi. $(A-\lambda I)x=y$, ya’ni

$$((1-\lambda)x_1+x_2, x_1+(2-\lambda)x_2, (3-\lambda)x_3, (4-\lambda)x_4, (1-\lambda)x_5, \ldots)=(y_1, y_2, \ldots), \quad (23.36)$$

tenglikdan x ni topamiz. Buning uchun

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1+x_2=y_1, \\ x_1+(2-\lambda)x_2=y_2, \\ (3-\lambda)x_3=y_3, \\ (4-\lambda)x_4=y_4, \\ (1-\lambda)x_n=y_n, \ \ n\geq 5, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{-y_1+(1-\lambda)y_2}{\lambda^2-3\lambda+1}, \\ x_2=-\dfrac{(2-\lambda)y_1-y_2}{\lambda^2-3\lambda+1}, \\ x_3=y_3(3-\lambda)^{-1}, \\ x_4=y_4(4-\lambda)^{-1}, \\ x_n=y_n(1-\lambda)^{-1}, \ \ n\geq 5 \end{cases}$$

munosabatlarni olamiz, ya’ni (23.36) tenglama

$$x=\left(\frac{-y_1+(1-\lambda)y_2}{\lambda^2-3\lambda+1}, \frac{(2-\lambda)y_1-y_2}{\lambda^2-3\lambda+1}, \frac{y_3}{3-\lambda}, \frac{y_4}{4-\lambda}, \frac{y_5}{1-\lambda}, \frac{y_6}{1-\lambda}, \ldots\right)$$

yagona yechimga ega. Shunday qilib, A operatorning rezolventasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$R_\lambda(A)x=\left(\frac{-x_1+(1-\lambda)x_2}{\lambda^2-3\lambda+1}, \frac{(2-\lambda)x_1-x_2}{\lambda^2-3\lambda+1}, \frac{x_3}{3-\lambda}, \frac{x_4}{4-\lambda}, \frac{x_5}{1-\lambda}, \frac{x_6}{1-\lambda}, \ldots\right) \quad (23.37)$$

Ko‘rinib turibdiki, agar $\lambda \notin \left\{2^{-1}(3-\sqrt{5}),\ 2^{-1}(3+\sqrt{5}),1,\ 3,\ 4\right\}$ bo‘lsa, $D(R_\lambda(A))=\ell_1$. Banax teoremasiga ko‘ra (14.2-teoremaga qarang) $R_\lambda(A)$ chegaralangan operator bo‘ladi. Shunday qilib, barcha $\lambda \notin \left\{2^{-1}(3-\sqrt{5}),\ 2^{-1}(3+\sqrt{5}),1,\ 3,\ 4\right\}$ lar, A operator uchun regulyar qiymat bo‘ladi. Bundan $\sigma(A)=\left\{2^{-1}(3-\sqrt{5}),\ 2^{-1}(3+\sqrt{5}),1,\ 3,\ 4\right\}$ tenglik kelib chiqadi.

Quyidagi keltirilgan mashqlar normalangan fazolardagi chiziqli chegaralangan operatorlarning xos qiymatlari, xos vektorlari, rezolventasi va spektrini o‘rganishga mo‘ljallangan.

Quyidagi operatorlar-ning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping**.**

3.153. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi], \quad (Ax)(t) = \int_0^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds$.

3.154. $A: \ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (\frac{1}{2}x_1, \frac{2}{3}x_2, \ldots, \frac{n}{n+1}x_n, \ldots)$.

3.155. $A: C[0,2] \to C[0,2], \quad (Ax)(t)x = x(0)t^2 + x(t)t + x(2)$.

3.156. $A: \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (3x_1, 4x_2, -2x_3, 5x_4, x_5, x_6, \ldots)$.

3.157. $A: R^4 \to R^4, \quad Ax = (x_1, x_2 + x_3, x_2 - x_3, x_4)$.

3.158. $A: C[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = \int_0^1 (t^2 s + ts^2)x(s)ds$.

3.159. $A: \ell_3 \to \ell_3, \quad Ax = (x_1, 2x_2, x_3, 3x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots)$.

3.160. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad (Ax)(t) = x(0)t + \int_0^1 x(s)ds$.

3.161. $A: R^3 \to R^3, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$.

3.162. $A: m \to m, \quad Ax = (6x_1, 5x_2, 4x_3, 3x_4, 2x_5, x_6, x_7, x_8, \ldots)$.

3.163. $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1], \quad (Ax)(t) = \int_{-1}^1 (t + s + ts)x(s)ds$.

3.164. $A: C[0,2\pi] \to C[0,2\pi], \quad (Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \cos(t+s)x(s)ds$.

3.165. $A: \ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, 3x_3, \frac{1}{4}x_4, \ldots, (2n-1)x_{2n-1}, \frac{1}{2n}x_{2n}, \ldots)$.

3.166. $A: \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$.

3.167. $A: \ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_4, 0, 0, \ldots)$.

3.168. $A: m \to m, \quad Ax = (x_1, 2x_2 + x_3, x_2 + 3x_3, x_4, 0, 0 \ldots)$.

3.169. $A: C[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = \int_0^1 (1 + ts)x(s)ds$.

3.170. $A: C[-1,1] \to C[-1,1], \quad (Ax)(t) = 2x(-1)t + 3x(1)t^2$.

3.171. $A: m \to m, \quad Ax = (4x_1, 5x_2, 3x_3, 2x_4, x_5, 0, 0 ..,)$.

3.172. $A: L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty), \quad (Ax)(t) = \frac{4x(t)}{t+4} + 2x(0) + x(1)t$.

Quyida berilgan operatorlarning spektri va rezolventasini toping.

3.173. $A: C[1,3] \to C[1,3], \quad (Ax)(t) = x(2)t + x(3)t^2$.

3.174. $A: m \to m$, $Ax = (2x_1, \frac{3}{2}x_2, \frac{4}{3}x_3, \ldots, \frac{n+1}{n}x_n, \ldots)$.

3.175. $A: C[-2,2] \to C[-2,2]$, $(Ax)(t) = |t| x(t)$.

3.176. $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{3}{2}x_3, \frac{1}{4}x_4, \ldots, \frac{1}{2n}x_{2n}, \frac{2n+1}{2n}x_{2n+1}, \ldots)$.

3.177. $A: C[0,2] \to C[0,2]$, $(Ax)(t) = x(1) + x(2)t + t\,x(t)$.

3.178. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2 x(t) + t\int_0^1 sx(s)ds$.

3.179. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots)$.

3.180. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2 x(t) + x(0)$.

3.181. $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = \left(\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{4}x_2, \ldots, \frac{1}{n+2}x_n, \ldots\right)$.

3.182. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Ax)(t) = (t+2)x(t)$.

3.183. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

3.184. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (2x_1, 4x_2, 5x_3, 3x_4, x_5, x_6, \ldots)$.

3.185. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = tx(t) + x(0)t^2 + x(1)t^3$.

3.186. $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (0, x_2, \frac{x_3}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n-1}, \ldots)$.

3.187. $A: L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$, $(Ax)(s) = e^{-t}x(t) + \int_0^\infty 2^{-t+s}x(s)ds$.

3.188. $A: L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)$, $(Ax)(t) = arctgt \cdot x(t)$.

3.189. $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $(Ax)(t) = t\,x(t) + \int_{-1}^1 t\,s\,x(s)\,ds$.

3.190. $A: \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$.

3.191. $A: m \to m$, $Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_4, x_5, \ldots)$.

3.192. $A: \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (-x_1, x_2, -x_3, \ldots, -x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots)$.

3.193. Faraz qilaylik $A: X \to X$ chiziqli operator va A^{-1} mavjud bo‘lsin. A va A^{-1} operatorlar bir xil xos vektorlarga ega. Isbotlang.

3.194. Faraz qilaylik $A \in L(X)$ va A^2 ning xos vektori mavjud bo‘lsin, u holda A ham xos vektorga ega. Isbotlang.

3.195. A va $R_\lambda(A)$ lar o‘rin almashinuvchi operatorlardir. Isbotlang.

3.196. Faraz qilaylik $\lambda, \mu \in \rho(A)$ bo‘lsin, u holda Hilbert ayniyati $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\mu(A)R_\lambda(A)$ ni isbotlang.

3.197. Faraz qilaylik $A, B \in L(X)$, $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ bo‘lsin. $R_\lambda(A) - R_\lambda(B) = R_\lambda(A)(B - A)R_\lambda(B)$ tenglikni isbotlang.

3.198. Faraz qilaylik $A \in L(X)$ bo‘lsin. Biror $\lambda \in \rho(A)$ uchun $R_\lambda(A)$ to‘la uzluksiz (kompakt) bo‘lishi mumkinmi?

3.199. $C[0;2\pi]$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi $(Ax)(t) = e^{it}\, x(t)$ operatorni qaraymiz. $\sigma(A) = \{\lambda \in C : |\lambda| = 1\}$ tenglikni isbotlang.

3.200. $C[0;1]$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi $(Ax)(t) = x(0) + t\,x(1)$ operatorni qaraymiz. $\sigma(A)$ va $R_\lambda(A)$ larni toping.

3.201. L to‘plam H Hilbert fazosining qism fazosi, P esa L ga ortogonal proyeksiyalash operatori bo‘lsin. P operatorning spektrini toping, $R_\lambda(P)$ ni P orqali ifodalang.

3.202. H Hilbert fazosi, e_n $(n \in N)$ undagi ixtiyoriy ortonormal bazis bo‘lsin. $A: H \to H$ operatorni quyidagicha aniqlaymiz: $Ae_1 = 0$, $Ae_{k+1} = e_k \; (k \in N)$.

a) $A \in L(H)$ munosabatni isbotlang;

b) A^* operatorni toping;

c) $\sigma(A) = \{\lambda \in C : |\lambda| \leq 1\}$ tenglikni isbotlang;

d) $\sigma(A) = \{\lambda \in C : |\lambda| < 1\}$ to‘plamning ixtiyoriy nuqtasi A operatorning xos qiymati ekanligini isbotlang;

e) $\sigma(A^*) = \{\lambda \in C : |\lambda| \leq 1\}$ tenglikni isbotlang;

f) A^* operatorning xos qiymatlari yo‘q ekanligini isbotlang.

3.203. $C[0;1]$ fazoda differensiallash $(Ax)(t) = dx/dt$ operatorini qaraymiz. Quyidagilarni isbotlang.

a) agar $D(A) = \{x \in C[0;1] : \; x' \in C[0;1],\, x(0) = 0\}$ bo‘lsa, $\sigma(A)$ bo‘sh to‘plam.

b) agar $D(A) = \{x \in C[0;1] : \; x' \in C[0;1]\}$ bo‘lsa, u holda $\sigma(A) = C$ tenglik o‘rinli hamda istalgan kompleks son A operatorning xos qiymati bo‘ladi.

c) agar $D(A) = \{x \in C[0;1] : \; x' \in C[0;1],\, x(0) = x(1)\}$ bo‘lsa, u holda $\sigma(A)$ faqat $2\pi i n$ $(n \in Z)$ ko‘rinishdagi xos qiymatlardan iborat.

3.204. Faraz qilaylik $A, B \in L(X)$ bo‘lsin. $\sigma(A \cdot B)$ va $\sigma(B \cdot A)$ to‘plam-larning noldan farqli elementlari bir xil ekanligini isbotlang.

3.205. Faraz qilaylik $A \in L(X)$ bo‘lsin. $\lambda \in C$ soni A operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun shunday $x_n \in D(A)$ $(n \in N), \|x_n\| = 1$ ketma-ketlik mavjud bo‘lib, $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$ munosabatning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

3.206. Faraz qilaylik $A \in L(X)$, $\lambda \in \sigma(A)$ bo‘lsin. Istalgan $n \in N$ uchun $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ ekanligini isbotlang.

Faraz qilaylik $A \in L(X)$ uchun uzluksiz teskari operator mavjud bo‘lsin. $\lambda \in \sigma(A^{-1})$ bo‘lishi uchun $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$ bo‘lishi zarur va yetarli. Isbotang.

Kurs ishlarini tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatma va tavsiyalar

Kurs ishlaridan maqsad ma'ruza, amaliy va seminar mashg‘ulotlarida olingan bilimlardan foydalangan holda muayyan mavzular bo‘yicha talabalar mustaqil ravishda hisoblash eksperimenti o‘tkazish, olingan natijalarni real jarayonlar bilan solishtirish va ularni tahlil qilish hamda mustaqil ravishda ilmiy izlanishlar olib borish ko‘nikmalarini hosil qilish va ularni kengaytirishdan iborat.

Kurs ishlarining taxminiy tavsiya etiladigan mavzulari:

1. **Metrik fazolar**
2. **Topologik fazolar**
3. **Ultrametrik fazolar**
4. **Chiziqli fazolar. Yevklid fazosi**
5. **Chiziqli funksionallar. Qavariq to’plam va qavariq funksionallar**
6. **Normalangan fazolar. Banax va Gilbert fazolari**
7. **Ortogonal va ortonormal sistemalar**
8. **Fur’e qatorlari. Ortonormal sistema yordamida funksiyani Fur’e qatoriga yoyish**
9. **Chiziqli operatorlar**
10. **Qo’shma operatorlar.**
11. **Spektral teoremalar**
12. **Kompakt operatorlar**