U. A. ROZIKOV, N. H. MAMATOVA

MATEMATIKA VA TURMUSH

– faqat sevishganlar turmush qurishsin

– pulni qaysi bankka qo‘yay?

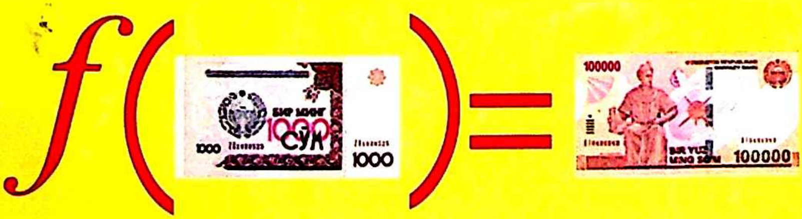
– lotereya o‘ynaymi?

– musiqa matematikasi

– matematik o‘ziga kasal yuqtirmaydi

– milliarder matematiklar

– million dollarlik muammolar



U. A. Rozikov, N. H. Mamatova

MATEMATIKA VA TURMUSH

O'zbekiston Respublikasi
Fanlar akademiyasi
«Fan» nashriyoti

Toshkent – 2020

UO'K: 51-7
KBK 22.1
R 69

Mas'ul muharrir:

Hakimov O. N. – fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), O'zbekiston Respublikasi FA V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti katta ilmiy xodimi.

Taqrizchilar:

Hayotov A. R. – fizika-matematika fanlari doktori, professor O'zbekiston Respublikasi FA V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti laboratoriya mudiri.

Jamilov U. U. – fizika-matematika fanlari doktori O'zbekiston Respublikasi FA V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti laboratoriya mudiri.

Rozikov, U. A.
R 69 **Matematika va turmush** [Matn] / U. A. Rozikov, N. H. Mamatova. -Toshkent : O'zR FA «Fan» nashriyoti, 2020. - 128 b.

Mazkur ilmiy-ommabop kitobda biologiya, fizika, kimyo, kompyuter texnologiyasi, kriptografiya, musiqa, muhandislik, tibbiyot, adabiyot, iqtisodiyot va ijtimoiy sohalarda matematikaning qo'llanishiga doir misollar chet tillaridagi zamonaviy adabiyotlardan foydalanib jamlangan. Aniq va tabiiy fanlar o'qituvchilari kitobdan darsni qiziqarli o'tishda foydalanishi mumkin. Qo'llanma o'quvchi va talabalarning matematikaga qiziqishini oshiradi. Shuningdek, barcha yoshdagilarning ushbu kitob orqali qiziqarli («Faqat sevishganlar turmush qurishsin»; «Botinka ipini bog'lash usullari»; «Pulni qaysi bankka qo'yay?» va boshqa bo'limlardagi) ma'lumotlar olishi mumkin. Risola keng kitobxonlar ommasiga tavsiya etilmoqda.

ISBN 978-9943-19-532-5

MUNDARIJA

KIRISH

Maktab o'quvchilari orasida matematika fanini yoqtirmaydigan, matematika darsida zerikib o'tiradiganlar juda ko'pchilikni tashkil etishi barchamizga ma'lum. Buning asosiy sababi 5-sinfdan boshlab o'tilayotgan matematik mavzular hayotdan, turmushimizdan ancha uzoqlashgandek tuyulishida bo'lsa, ajabmas. O'quvchi va talabalarning aksariyati nima uchun turli xil matematik abstrakt tushunchalarga boy ta'lim olishlari zaruriyatini bilishni xohlashadi. Garchi o'qituvchilar o'z o'quvchilariga matematikaning foydali ekanligini ta'kidlab, imkoniyatlari darajasida ularni bunga ishontirishga harakat qilishsa-da, aksariyat o'quvchilar, baribir, bu fanni «yomon ko'rish»dan, uni tushunmaslikdan va keraksiz – murakkab fan deya atashdan to'xtamaydi. Nega shunday? Yoki matematika rostdan ham shu qadar zerikarli va juda ko'plab turmushimizda keraksiz bo'lgan tushunchalarga qurilganmi? Ushbu kitobni yozishdan ko'zlangan asosiy maqsadlardan biri ham ana shunday savollarga javob berish orqali bu fanning qudrati, go'zalligi va kundalik turmushimizda biz uchratadigan barcha narsalarda o'z aksini topganligini o'quvchilarga yoritib berishdan iboratdir.

Bugungi kunda kompyuter dasturchisi bo'lishga qiziqish kuchaymoqda. Buni barcha sohalar avtomatlashgan boshqaruvga o'tayotganligi hamda bu kasb egalari uchun daromadli ish topish osonligi bilan izohlash mumkin. Shuningdek, bu soha juda jadal rivojlanmoqdaki, u biznes rivoji uchun ham keng qo'llanilmoqda. Dasturlashning negizini esa matematika tashkil qilishini unutmaslik kerak. Dastur bu matematik algoritmdir! Shunday ekan matematik bilimlarni puxta egallamay turib dasturlash sohasida yetuk mutaxassis bo'lish aslo mumkin emas.

Maktab o'quvchilaridan kelajakda kim bo'lishi haqida so'ralganda aksariyat bolalar sportchi bo'lishni istashini aytishadi. Nega shunday? Aslida, inson bolasi kichikligidan o'ziga berilgan buyuk ne'matlardan biri – aql kuchini ishlatmasdan, mushaklar kuchiga tayanib muvaffaqiyat qozonishi osonroqdek tuyulgani uchun shunday fikrlaydi. Shu o'rinda ta'kidlash joizki, biz sportga alohida mehri va qiziqishi bo'lgan bolalar hamda bu kasb bilan professional shug'ullanayotganlarni kamsitmoqchi yoki nimadadir ayblamoqchi emasmiz. Shunchaki sportchi bo'lishga qiziqish uyg'onishidagi asosiy omil biz yuqorida aytgan fikrimiz va bugungi kunda boshqa soha vakillariga nisbatan sportchilarning muvaffaqiyati tezroq, ko'proq ko'zga tashlanib, o'ziga xos reklama vositasiga aylanayotganligida demoqchimiz, xolos. Endi asosiy savolga qaytaylik. Sportchiga ham matematika kerakmi? Bu savolga dunyoning birinchi raqamli sport turi futbol misolida javob qidirib ko'ramiz. Futbolchi to'pni imkon qadar uzoqqa tepish uchun yetarli darajada yuqoriga tepishi kerak. Shubhasiz, yerdan 90° burchak ostida tepishning imkoni yo'q. Lekin ko'pchilik bu haqda taxmin qilganda 60° ni eng uzoqqa tepish burchagi deb o'ylaydi, lekin, aslida, 45° bo'lishi kerakligi matematik isbotlangan faktdir! Bu fizikaning kinematika bo'limiga doir masala bo'lsa-da, kinematikaning deyarli barcha masalasi matematika yordamida yechilishini unutmaslik kerak. Matematika futbolchilarga bundan ham ko'proq yordam berishi mumkin. Masalan, futbol maydonidagi o'yinchi qaysi pozitsiya to'pni sherigiga uzatish uchun eng keng burchakni hosil qilishi mumkinligini aniq belgilay olsa [13], o'z maqsadiga erishadi. Shubhasizki, matematika fanlarning qirolidir [24], [38]!

Ba'zi kasblarda (masalan, aktyorlar, taksi haydovchilari, ma'murlar, tarixchilar, til o'qituvchilari va boshqalar) pulni sanash kabi oddiy arifmetikadan tashqari chuqur matematik bilimga ega bo'lish talab qilinmaydi. Shu o'rinda tabiiy savol tug'iladi: Kelajakda yuqorida aytilgan kasblardan birini tanlaydigan o'quvchi, o'z ishi davomida qanday qilib matematikadan tez-tez foydalanadi? Nima uchun bunday o'quvchilar ham matematikaning abstrakt (sin, cos, log, . . .) nazariyasini o'rganishi kerak? Bu o'quvchilarning vaqti va davlat resurslarini bekorga yo'qotish emasmi? Biz bu savolga qat'iy tarzda shunday javob beramiz:

Yo'q, bu hech qanday yo'qotish emas, chunki:

• O'quvchilar yoshligida bir kasbni tanlashda doim ikkilanadi. Har bir o'quvchi kamida bir marta tanlagan kasb orzusini o'zgartiradi. Agar o'quvchi oldin haydovchi (yoki aktyor) bo'lishni orzu qilib, keyin maktabni bitirishiga oz qolganida muhandis (yoki kompyuter dasturchisi) bo'lishni orzu qila boshlasa-chi? Unda bu o'quvchini matematikani chuqurroq o'rganishga vaqti qoladimi?

• Ba'zi o'quvchilar esa maktabni bitirgunicha qanday kasb egasi bo'lishini bilmaydi. Bunday o'quvchilarni yoshligidan biror kasbni tanlashga majburlash noo'rin. Kasbga qiziqish ancha kech paydo bo'lishi mumkin. Shu sababli o'quvchilarga maktabda har bir fanning asoslarini yaxshi o'rgatish shart.

• Maktab o'quvchilariga kelajakda kim bo'lishini oldin aniqlab, keyin qaysi darslarni o'qish kerakligini oldindan aytib bo'lmaydi. Boshqa tomondan esa kasb tanlashdan oldin o'quvchi hamma fanlar asosini bilgani ma'qul. Shunda o'quvchi o'z qiziqishi va qobiliyati qaysi kasbga mos ekanini tahlil qilish imkoniga ega bo'ladi. Masalan, geografiya fanini o'qimagan o'quvchi geograf bo'ladimi yoki yo'qmi qayerdan biladi?

• Qolaversa, maktabda matematikani yaxshi o'rganib, kelajakda uni qo'llamaydigan o'quvchilar ham xafa bo'lishmasin, chunki matematika kasbdan, ish joyidan tashqarida ham juda ko'p kerak bo'ladi. Masalan, siz tarix o'qituvchisisiz, uyingizni ta'mirlash uchun usta chaqirdingiz. Usta devorning har $1m^2$ joyini 4000 so'mga suvab bermoqchi. Ustaga to'lanishi kerak bo'lgan pulni aniqlash uchun devor yuzasi necha m^2 ekanligini hisoblay olishingiz va eng muhimi deraza hamda eshiklar o'rnini umumiy yuzadan chiqarib tashlash kerakligini yodda tutishingiz kerak. Ustaga ko'p pul berib yubormang!

Ushbu kitobda biz matematika fanining qo'llanishiga doir bir necha qiziqarli ma'lumotlar beramiz. Bu ma'lumotlarning ko'pchiligi siz aziz o'quvchilarga yangilik emas. Masalan, matematika turmushimizda quyidagilarga qo'llanishiga shubha yo'q:

– matematika har kungi xarajatlar va foydalarni hisoblashda (moliya boshqaruvi);

– bozor va do'konlarda mahsulot tarqatilishi va ularning miqdorini nazorat qilishda;

– muhandislarning har kungi ish faoliyati faqat matematik hisob-kitoblarga tayanadi;

– oshxonada ovqat pishirishda;

– havo haroratini o‘lchashda;

– transport harakatlarini boshqarishda. Masalan, poyezdlar tezligini nazorat qilish orqali, bir temiryo‘lda, bir vaqtda ikki poyezd qarama-qarshi harakatlanishining oldi olinadi;

– qurilish ishlarida trigonometriya va geometriyasiz hech qanday mustahkam va chiroyli qurilish qilib bo‘lmaydi.

– fazogirlarning oyga chiqishi uchun ham asosiy hisob-kitoblar matematika yordamida amalga oshirilgan;

– matematika fani barcha tabiiy fanlar uchun asos bo‘ladi: biologiya, fizika va kimyo fanlaridagi masalalarni yechish matematik usullarga tayanadi.

Demak, matematikani foyda va ziyonni hisoblashda, chegirmalarni, foiz stavkalari, valyuta sotib olish, pul almashtirish va soliqqa tortishda har kuni qo‘llashimizga shubha yo‘q. Lekin uning algebra, geometriya va trigonometriya kabi bo‘limlaridan kasbiy faoliyatimiz va kundalik yumushlarimizda foydalanish haqida nima deyish mumkin? Odatda, bu matematik bo‘limlarning har biri eng yuqori darajadagi matematik bilimni talab qiladi. Ushbu kitobda biz matematikaning ba’zi hayotiy misollarini ko‘rsatamiz. Bu kitob orqali matematika darsida zerikib o‘tiradigan o‘quvchilarga yordam bermoqchimiz. Agar ular bu kitobni qunt bilan o‘qishsa, matematika faniga bo‘lgan qiziqishlarining oshishiga turtki bo‘ladi degan umiddamiz. Shuningdek, ushbu kitobdan matematika fani o‘qituvchilari ham foydalanib, dars paytida mavzularning turmushimizga aloqasi haqida gapirib berishlarini tavsiya qilamiz.

Bugungi kungacha ko‘plab ilmiy-ommabop matematik materiallar chop etilgan (masalan, [4], [5] va [12] ga qarashingiz mumkin). Bu kitobda biz, asosan, zamonaviy adabiyotlar, internet hamda ingliz va rus tilidagi materiallardan foydalandik.

Bu bo‘limni mashhur faylasuf I. Kant (1724–1818)ning quyidagi fikri bilan yakunlashni ma’qul topdik: «Har bir ilmda qancha ko‘p matematika bo‘lsa, shuncha ko‘p haqiqat bor».

NIMA UCHUN MATEMATIKA KERAK?

Bu bo'limda, internet sayti[1]dan foydalanib, matematikani hamma bilishi zarurligining 9 ta sababini keltiramiz:

1. Matematika fikrlashni rivojlantiradi.

Matematik muammolarni hal qilish orqali o'quvchi quyidagilarni o'rganadi:

– fikrlarni umumlashtirish va ular ichidan muhimlarini ajratish;

– tahlil qilish va tizimlashtirish;

– qonuniyatlarni aniqlash va sabab munosabatlarini o'rnatish;

– xulosa va natijalar chiqarish;

– mantiqiy, strategik va abstrakt o'ylash.

Muntazam ravishda sport mashg'ulotlari bilan shug'ullanish tanani sog'lom, kuchli va mustahkam qilganidek, muntazam matematika bilan shug'ullanish miyaning ishlashini, aql-idrok va kognitiv qobiliyatni rivojlantiradi hamda dunyoqarashni kengaytiradi. Matematika bilan shug'ullangan odam boshqa har qanday narsani tez va samarali o'rganadi.

2. Matematika ta'limi xotirani charxlaydi.

Qo'shma Shtatlarning Stenford universiteti olimlari turli yosh toifasidagi insonlarning matematik muammolarni hal qilish jarayonini o'rganishdi. Ushbu tadqiqotga ko'ra, katta yoshlilar masalani yechishda xotirasida bor bo'lgan javoblarni «olish», fikrlash va avtomatizmni ishlatishar ekan. 7 yoshgacha bo'lgan bolalar qo'l va oyoq barmoqlari bilan bir qatorda turli xil zaxiralar (masalan tayoqchalar)dan foydalanishga harakat qilishar ekan. 7 yoshdan 9 yoshgacha bo'lgan maktab o'quvchilarida matematik shug'ullanish orqali tafakkur, ma'lumotni eslab qolish mahorati yaratilar ekan.

2014-yilda «Nature neuroscience» jurnalida qiziqarli tadqiqotlar chop etildi. Tadqiqot bolalarning kognitiv faoliyatini rivojlantirishda hippokamp (bosh miyaning his-tuyg'ularning

---

[1] https://logiclike.com/math-logic/interesno- polezno/zachem-nuzhna-matematika

shakllanish mexanizmida va operativ xotiradan doimiy xotiraga o'tishda ishtirok etuvchi qismi)ning rolini o'rganishga bag'ishlangan edi. Tadqiqot xulosasiga ko'ra, maktab o'quvchisining xotirasi matematika bilan bog'liq masalalarni yechish orqali rivojlanar ekan.

3. Matematika xarakterni chiniqtiradi.

Matematik va mantiqiy muammolarni to'g'ri hal qilishda qat'iyatlilik, mas'uliyat, aniqlik va tartib talab qilinadi.

O'quvchilar bu matematik masalalarni qanchalik muntazam yechsa, ularning xarakteri shuncha kuchliroq bo'lib boradi. Bu esa o'quvchiga faqat o'qish vazifalarini emas, balki hayot muammolarini ham hal qilishda yordam beradi.

4. Matematika musiqa uchun, musiqa matematika uchun.

Ba'zi tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, o'rta maktabda musiqa asboblarini chaladigan bolalar, matematik masalalarni ham yaxshi ishlaydi. Olimlar algebraik muammolarni hal qilishda va musiqa ma'lumotlarini qayta ishlash uchun miyaning aynan bir qismi mas'ul ekanini aniqlashdi. Teskarisi ham o'rinli: matematika bilan shug'ullanish musiqiy qobiliyatni oshiradi.

5. Matematika gumanitar fanlar bo'yicha muvaffaqiyatga erishishda yordam beradi.

O'quvchi maktabning dastlabki yillarida matematikani yaxshi o'zlashtirsa, tabiiyki, u boshqa fanlarni ham muvaffaqiyatli o'zlashtiradi.

Matematikaning geografiya, fizika, geologiya, kimyo bilan chambarchas bog'liqligi ravshan. Shu bilan birga, sotsiologiya va iqtisodiyot matematika bilan uzviy bog'liqdir. Tilshunoslik, jurnalistika kabi ilg'or gumanitar fanlarning ko'pchiligi matematik model, tushuncha va mantiqiy qonunlarga asoslangan.

6. Matematika kundalik muammolarni hal qilish uchun ko'nikmalarni rivojlantiradi.

Miya hujayralari tadqiqotchisi va «Matematiklardek o'ylab ko'ring» kitobi muallifi Barbara Oklini shunday degan edi:

«Matematika bizni «sehrli fikrlashdan» qutqaradi va biz narsalarning mohiyatini tushunishga harakat qilamiz».

Matematika tufayli yomon odatlardan qutulamiz:

– biz ikkilanmasdan, faqat aniq atamalar bilan ishlaymiz;

– axborot va qoidalarni mexanik ravishda eslab qolmasdan, uni baholash, tahlil qilish, fikrlash, tushunishni o'rganamiz.

7. Matematika – muvaffaqiyatli kasb, martaba asosi.

Agar 10–15 yil ilgari xorijiy tillarni bilganlar istiqbolli deb hisoblangan bo'lsa, bugungi kunda siz har qanday tilda ravon so'zlash bilan hech kimni ajablantira olmaysiz. Hozirgi kunda kasb talabi asosan texnologiyani tushunish, fikrlash qobiliyati, mavhumlik va nostandart muammolarni hal qilish qobiliyatiga bog'liq. AT (axborot texnologiyasi) sohasida ishlamoqchi bo'lganlar uchun matematikasiz juda qiyin bo'ladi.

Matematika bo'yicha samarali darslar o'quvchida o'ziga bo'lgan ishonchni oshiradi. Chunki, unda eng murakkab, ba'zan bir qarashda hal etilmaydigandek tuyuladigan muammolarni hal qilish istagida qat'iyatlilik talab qilinadi.

8. Matematik muammoni hal qilish psixologik barqarorlikni keltirib chiqaradi.

Matematik muammolarni hal qilish hissiy muhitni yaxshilashga yordam beradi: mashg'ulot his-tuyg'ularni nazorat qilish va stressning oldini oladi.

9. «α»dan zavqlanish.

Buyuk Britaniyaning bir nechta universitetlari tadqiqotchilarining so'zlariga ko'ra, matematika, matematik formulalar, tenglamalar hamda boshqa mantiqiy va matematik muammolar bilan jiddiy shug'ullanish kishiga go'zallik, uyg'unlik, san'at va yaxshi hazil kabi estetik zavq bag'ishlaydi.

Matematika sohasidagi quvonch va zavqni boshdan kechirishni o'rganish uchun taniqli amerikalik matematik, Garvard universiteti bitiruvchisi Stiven Strogatsni asosli fikr bildiradi. Amaliy matematika o'qituvchisi, matematika va o'qitish sohasidagi mukofot sohibasi «α dan zavqlanish» kitobining sahifalarida eng muhim matematik g'oyalarni sodda va aniq izohlaydi.

Biz 5–9 yoshli bolalarga matematikani o'rganish muhimligini tushuntirishimiz shart emas, balki ularga qiziqarli, interaktiv matematika dunyosiga kirishi uchun imkoniyat yaratishimiz ahamiyatlidir.

SONLAR USTIDA AMALLAR VA ULARNING TURMUSHIMIZDA QO'LLANISHI

Maktab o'quvchilari sonlar bilan tanishganidan keyingi matematikaning eng muhim mavzulari bu sonlar ustida bajariladigan to'rt amal: qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lishdan iboratdir. Bu amallarning turmushimizda qo'llanishiga hech bir o'quvchida shubha yo'q, albatta. Lekin boshlang'ich sinf o'quvchilari bo'lish amalidan boshqa barcha amallarni yaxshi tushunishadi va sinfdagi o'quvchilarning ko'pchiligi uch amal (qo'shish, ayirish va ko'paytirish)ni bajarishda qiynalishmaydi.

Matematikada o'quvchining tushunishi va bajarishi qiyin bo'lgan amal bu bo'lish amalidir. Chunki bo'lishda «yetmasa nol berish», «nol berib vergul ajratish» kabi gaplarni o'quvchiga tushuntirishga kam ahamiyat berilmoqda. Bu amalni o'quvchi o'rganadi, lekin «yetmasa nol berish», «nol berib vergul ajratish» degan joylarini hayot bilan bog'lash haqida na o'qituvchi, na o'quvchi qayg'uradi. Bo'lish mavzusidan boshlab sinfdagi ko'pchilik o'quvchilarda matematikaga qiziqish so'na boshlaydi. Chunki bu amalda ishlatiladigan usul hayotimizga aloqasi yo'qdek. Bunga quyidagi misolni keltiramiz. Kitobning mualliflaridan biri ko'plab sinflarda (va talabalar auditoriyasida) birinchi dars boshlaganida quyidagi savol bilan murojaat qildi: «7 ni 8 ga bo'ling». Buni doskada har bir o'quvchi quyidagicha bajaradi:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,70 & \underline{\,8\qquad} \\
\underline{64} & 0.875 \\
-\,60 & \\
\underline{56} & \\
-\,40 & \\
\underline{40} & \\
0 &
\end{array} \qquad (2.1)
$$

Ya'ni o'quvchilar bo'lish amalini tagma-tag bajarishni yaxshi o'zlashtirib olgan. Buning uchun, albatta, ancha mehnat va vaqt sarflangan. Muammo shundaki, o'quvchilar bu bo'lishni turmushda ishlata olmaydi. Ularga quyidagi savolni berdik: «7 ta olmani 8 kishiga bo'lib bering». Javoblar quyidagicha bo'ldi:

- Har bir olmani teng 8 ga bo'laman va 7 kishiga taqsimlayman;
- 7 ta odamga 1 tadan olma beraman, 8-odam rozi bo'lsin;
- 6 ta odamga 1 tadan olma beraman va 1 ta olmani qolgan 2 kishiga teng bo'laman;
- Bilmayman.

Achinarlisi shundaki, hech kim (2.1) da bajarilgan ishni qo'llashni o'ylab ham ko'rmadi. Bo'lishni o'rganishga sarflangan vaqt va mehnat zoya ketganmi? Nega «yetmasa nol berish», «nol berib vergul ajratish» degan gaplar hayotdagi masalada o'z ifodasini topmayapti? Bizningcha, shu misol o'quvchilarning matematikaga bo'lgan qiziqishining so'nishi sababini yorqin ifodalaydi. O'quvchi matematika fanida bajarilgan 7 : 8 amalini hayotda qo'llamasdan, boshqa yuqoridagi aytilgan javoblar bilan chegaralanmoqda. Demak, (2.1) ularga kerak bo'lmayapti!

O'quvchi (2.1) amalni hayotda qo'llay olishi uchun o'qituvchi «yetmasa nol berish», «nol berib vergul ajratish» degan gaplarni hayotiy misolda tushuntirishi shart! Nima degani «yetmasa nol berish»? Yuqoridagi olma haqidagi misolimizda 7 ta olma qanday 70 ta bo'lib qoldi? Qayerdan keldi 63 ta olma?

Bunga javob: hech qanday olma qo'shilgani yo'q, har bir olma teng 10 bo'lakka bo'lindi, xolos. O'qituvchi so'rashi mumkin: Nega teng 10 bo'lakka? «Nega teng 8 ga emas?» Chunki maktabda o'rganiladigan matematika, asosan, o'nlik sanoq sistemasi bilan ishlaydi. 7 va 8 sonlar ham o'nlik sanoq sistemasida yozilgan.

Nega «nol berib vergul ajratish» kerak? Chunki har bir olmani teng 10 bo'lakka bo'lgandan keyin birorta butun olma qolmadi. Hech kimga butun olma berilmaydi, shu sababli 0.875 ni «nol butun...» deb o'qiymiz.

Agar o'quvchiga bu misol (olma misoli) yoki shunga o'xshash misol bilan bo'lish usulidagi har bir gapning hayotiy ma'nosi tushuntirilsa, o'quvchi matematikadagi 4 amalning turmushdagi o'rnini yaxshi tasavvur qiladi va ularni o'rganishga harakat qiladi.

Biz kitobning boshqa qismlarida ham har bir matematik tushuncha (yuza, hajm, sin, cos, funksiya, funksiyaning aniqlanish hamda qiymatlar sohasi va hokazo)larning hayotiy ma'nosi va turmushimizda qo'llanishiga misollar keltiramiz.

BIZ MATEMATIKANI QANDAY TUSHUNAMIZ? YUMORLAR

Matematika va yumorlar orasida chuqur bog'liqlik borligi haqida ko'p matematiklar aytishgan. Bu borada o'quvchiga quyidagi adabiyotlarni tavsiya qilamiz: [22], [30], [33]. Matematikada isbot xuddi yumorga o'xshaydi. Ikkalasida ham mantiq, o'xshatish, qoida va strukturalar ishlatiladi. Isbot va yumorning ikkalasi ham aqlni, g'oya bilan ishlash va xulosa chiqarishni talab qiladi.

Demak, yumorni yaxshiroq tushunish uchun biz matematikani qo'llashimiz mumkin. Lekin [1] maqola muallifining fikricha, teskari tasdiq ham o'rinli: ya'ni yumorni matematikaga qo'llab, biz matematik mantiqni va mulohazani yaxshiroq tushunishimiz mumkin. Ushbu bo'limda biz qanday qilib yumorlar nazariyasidagi psixologik muvaffaqiyat (yoqimli va kulgili yumor) matematik mulohaza yuritishda qo'llanishi mumkinligini muhokama qilamiz.

Matematik yumor deganda uncha katta bo'lmagan, kulgili ma'no beradigan va matematik tushuncha hamda qoidalarga asoslangan matnga aytiladi.

Odatda, matematiklar orasida aytiladigan yumorlarni matematiklarning o'zi yaxshi tushunadi. Chunki bu yumorlarda ba'zi matematik atama va qoidalar ishlatilishi mumkin. Shuningdek, matematik yumorlar nafaqat kulgili, balki, ular matematiklar jamiyatida muhim ro'l o'ynashini ta'kidlash joizdir. Bu yumorlar ijtimoiy birlashishda, matematik jamiyat a'zolarini nomunosib harakatlar qilishdan qaytarishda, noto'g'ri matematik fikr yuritishdan saqlashda xizmat qiladi [1]. Demak, matematiklar orasida tarqalgan yumorlar matematik qanday bo'lishi kerakligi va ularni o'z vazifalariga to'g'ri yo'naltirishda ishlatiladi.

Ko‘p matematik yumorlar matematik atama va tushunchalarga asoslangan so‘z o‘yinlaridir. Ba’zilarida esa matematik atamalar bilan oziq-ovqat mahsulotlarini atash orqali kulgili gaplar beriladi. Shunday yumorlarning ba’zilarini [26] dan keltiramiz:

Savol: Nega Nyuton gruppalar nazariyasini yaratmagan?

Javob: Chunki u Abel emas edi.

Savol: Fil bilan banannni chatishtirib nima olish mumkin?

Javob: $|Fil| \cdot |Banan| \cdot \sin(\theta)$.

Savol: Kompakt shahar nima?

Javob: Bu shunday shaharki, uni cheklita zobit bilan qo‘riqlash mumkin.

Savol: Nimaga AQSh baliqlari Kanada tomonidagi suvlarga pasportsiz o‘tadi?

Javob: Bunga «suvning umumiy ishlatilish» qonuni bilan ruxsat berilgan.

Savol: Oq-qora fil suyaklari fazoni to‘ldiradi, bu nima?

Javob: Qiyshiq fortepiano.

Savol: Bitta lampochkani almashtirishga nechta matematik kerak?

Javob: 0.99999... ta.

Oxirgi yumor o‘quvchiga 0.99999...=1 ekanligini tushunishga yordam beradi.

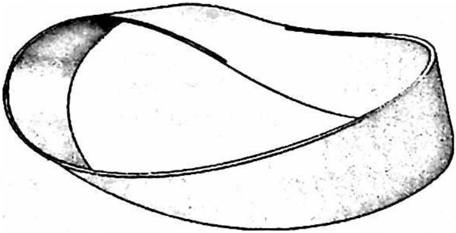
Savol: Nega tovuq yo‘lni kesib o‘tdi?

1-javob: Tovuq yo‘lni kesib o‘tganini isbotlab bo‘lmaydi.

2-javob: Tovuqlar qoidasida bunday qilishga ruxsat bor.

3-javob: Tovuq yo‘lning bu tomonida o‘zini noqulay his qildi.

Ba’zi gipoteza (isbotlanmagan tasdiq)larning xato ekanligini ko‘rsatish uchun, shu tasdiq bajarilmaydigan bir misol qurish talab qilinadi. Yo‘lning narigi tomoniga o‘tgan tovuq haqidagi yumor shuni ko‘rsatadiki, yo‘lning narigi tomoni, umuman olganda to‘g‘ri chiziq bo‘lishi shart emas. Masalan, matematikada Myobius (Möbius) sirti deb ataluvchi shunday sirt borki, uning faqat bir tomoni bor (1-rasmga qarang). Bu rasmga qarab quyidagi yumorga javoblar o‘zgaradi:



1-rasm. *Myobiusning bir tomonli sirti.*

Savol: Nimaga tovuq Myobius sirtini kesib otdi?

Javob: Boshqa tomoniga o'tish uchun-da.

Savol: Uyga vazifani nega bajarmading?

1-javob: Men tasodifan nolga bo'lib qo'ydim va mening daftarim yonib ketdi.

2-javob: Isaak Nyutonning tug'ilgan kuni edi.

3-javob: Men kitobimga yetarlicha yaqin keldim, lekin unga yeta olmadim.

4-javob: Menda isbot bor, lekin uni yozishga joy yo'q.

5-javob: Mening kalkulyatorim quyosh batareyali, lekin havo bulutli bo'ldi.

Savol: Mushukning dumi 5 taligini isbotlang.

Javob: Birorta mushukda 4 ta dum yo'q, lekin bitta dum borligi aniq. Demak, ularni qo'shganda 5 ta bo'ladi.

Savol: Barcha natural sonlar qiziqarli ekanini isbotlang.

Javob: Teskarisidan faraz qilamiz. U holda qiziqmaslar ichida eng kichigi bor. Ehh, to'xtang, eng kichigi? Qiziq-ku! Qarama-qarshilik.

Savol: A'lochi va ikkichi teng: 2=5 ni isbotlang.

Javob: Shunday a, b, c sonlar olamizki, $a + b = c$ bajarilsin. Bu tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$5a - 2a + 5b - 2b = 5c - 2c.$$

Bundan esa

$$5a + 5b - 5c = 2a + 2b - 2c.$$

Demak,

$$5(a+b-c) = 2(a+b-c).$$

Bu tenglikning ikki tomonini $a + b - c$ ga bo‘lamiz va 5=2 ni hosil qilamiz.

Yumorlarni shartli ravishda uch sinfga bo‘lish mumkin: birinchi shaxs hazili; uchinchi shaxs hazili va aniqlanmagan semantik hazillar [33].

Birinchi shaxs yumori: Bu dunyoda odamlarning 10 turi mavjud: binar tushunchadan foydalanadigan va foydalanmaydiganlar.

Bu hazil bizni ajablantiradi: nega 10 turi mavjud deb, ular faqat 2 turga ajratildi? Kengroq fikr yuritganda shuni aniqlaymizki, yumordagi 10 soni biz ishlatishga ko‘nikib qolganimiz o‘nlik sanoq sistemasidagi 10 soni emas, balki ikkilik sanoq sistemasidagi 10 (o‘nlik sanoq sistemasidagi 2 ni anglatadi). Shu sababli biz yana kulamiz.

Birinchi shaxs hazillari ba’zi matematik «isbot»lar orqali ham beriladi: yuqorida 2=5 ning isboti va quyidagi isbotga ahamiyat bering:

$$6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow (6+8)^2 = 10^2 \Rightarrow 14^2 = 10^2 \Rightarrow 196 = 100.$$

Uchinchi shaxs yumori: Matematikning xotini unga shunday dedi: «Do‘konga borib, bir qadoq sut oling. Agar tuxum bo‘lsa, ikki qadoq oling». Matematik, uyiga uch qadoq sut bilan keldi.

Uchinchi shaxs yumori biz noto‘g‘ri deb bilgan, kamchiliklarga asoslangan bir ishni uchinchi shaxsning qilishidir. Yuqoridagi hazilni matematik tabiiy tilda talqin qilib, g‘ayriodatiy yo‘lni tanlagani kulishimizga sabab bo‘ladi. Chunki aksariyat odamlar uning xotini o‘nta tuxumni so‘rayotganini darrov tushunadi.

Uchinchi shaxs yumoriga quyidagi matematik hisob-kitob ham misol bo‘ladi:

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{x} = \frac{d}{dx}\frac{\sin \cancel{x}}{\cancel{x}} = \frac{d}{dx}\sin = \cos.$$

Ba'zida bunday usul bilan to'g'ri natijaga ham erishish mumkin:

$$\frac{64}{16}=\frac{\cancel{6}4}{1\cancel{6}}=\frac{4}{1}=4.$$

$$\frac{d}{dx}x=\frac{\cancel{d}}{\cancel{d}x}x=\frac{x}{x}=1.$$

Bu hisob-kitoblarda kimdir bema'ni usullar bajarganini ko'ramiz. Biroq buning natijasi xato emas. Lekin bu usulda qat'iy matematik formulani buzishga olib keladigan xatolikka yo'l qo'yilgan! Bunga quyidagi misol yordamida ishonch hosil qilish mumkin:

$$5=\frac{75}{15}=\frac{7\cancel{5}}{1\cancel{5}}=\frac{7}{1}=7.$$

Yechilmagan noaniqlik yumori. Bu turni maqsadni ifodalash uchun har biri ma'noga ega bo'lgan kamida ikki usul foydalanilgan yumorlarda uchratish mumkin. Bunday yumor turini quyidagi so'z o'yinida ko'rish mumkin:

Karton kamar qog'ozning beli bo'ladi.

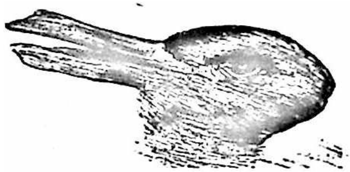
Yuqorida Nyuton va Abel haqida aytilgan yumor ham shu turga mansub yumordir.

Yana bir hazil:

Cheksizta matematik barga kirdi. Birinchi matematik: «Men bir banka pivo olaman», – dedi. Ikkinchi matematik: «Men bir banka pivoning yarmini olaman», – dedi. Uchinchi matematik: «Men bir banka pivoning to'rtdan birini olaman», – dedi va hokazo. Bufetchi ikki banka pivo keltirganda matematiklar e'tiroz bildirishdi: «Biz hammamiz atigi ikki banka pivoni qanday ichamiz?». Bufetchi javob berdi: «Bittadan kelaveringlar. Sizlarning chegarangizni yaxshi bilaman».

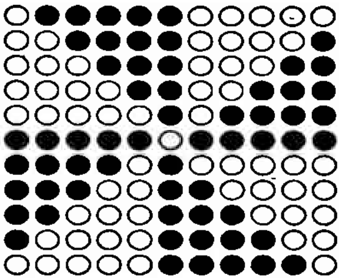
Hazillarning bu turida matematik obyekt va matematik nomlar bor, lekin ular tabiiy tilda boshqa nomatematik ma'nolarni ifodalaydi.

Bir rasmda ikki xil manzarani ko'rish, turli xil yo'llar bilan lazzatlanishning tabiiy manbayi hisoblanadi. Masalan, 2-rasmda nimani ko'ryapsiz?



2-rasm. *Bu g'ozmi yoki quyon?*

Lekin bunday yumorlar matematik isbotlarda ham qo'llanishi mumkin. Masalan, har qanday toq natural son n uchun $n^2 \equiv 1(\mathrm{m}od8)$ ning isbotini 3-rasmda ko'rish mumkin.



3-rasm. *Markaziy nuqta atrofidagi* 3×3, 5×5, 7×7, 9×9 *va* 11×11 *o'lchamli kvadratlarning nuqtalarini sanang va chiqqan sonni 8 ga bo'ling. Qoldiq doim 1 chiqadi.*

1000 SO'M QANI?

Quyidagi masala juda mashhur bo'lib, unga javob berishda ko'pchilik qiynaladi. Qiziq tomoni shundaki, bu masalani, odatda, matematik bo'lmagan odamlar matematika bo'yicha maxsus kurslarda o'qiydigan talabadan yoki o'quvchilardan so'rashadi.

Masala: To'rt kishi ovqatlanish uchun restoranga kirdi. Ulardan biri mehmon (ovqatiga to'lamaydi). Hammasi bo'lib 25 ming so'mga ovqatlanishdi. Bu pulni to'lash uchun uch kishi 10 ming so'mdan pul berdi. Kassir 5 ming qaytardi. Bu 5 mingdan uch kishi 1000 so'mdan o'zlariga olishdi, qolgan 2 mingni mehmonga berishdi. Demak, pul to'lagan 3 kishi 9 mingdan xarajat qildi: $9 \cdot 3 = 27$. Mehmonning qo'lidagi 2 mingni qo'shsak: $27 + 2 = 29$ ming. Lekin 3 kishi 10 ming so'mdan pul bergan edi, ya'ni umumiy pul 30 ming edi. Nega pullarni qo'shganda 29 ming so'm chiqdi? 1000 so'm qani?

Javob: (Bu javobni o'qishdan oldin o'zingiz javob berishga harakat qilib ko'ring) Bu masalada xarajat va daromadlarni qo'shishda matematik qoidalar buzilgan. Ya'ni umumiy xarajat (3 kishidan 9 mingdan) 27 ming so'm. Shu puldan 25 ming ovqatga, 2 ming mehmonga ketgan. Bu yerda quyidagi matematik tenglik o'rinli:

$$27 = 25 + 2.$$

Bu tenglikda ba'zi sonni tenglikning boshqa tomoniga o'tkazish mumkin, lekin bunda ishorani almashtirib o'tkazish qoidasi esdan chiqmasligi kerak, shunda tenglik saqlanadi. Masalan, 2 ni chap tomonga o'tkazganimizda

$$27 - 2 = 25.$$

Masala shartida 27 + 2 ning berilishi, yuqorida aytilgan matematik qoidaga mos emas, chunki 27 xarajat, 2 esa bu xarajat ichida, uni yana bir marta qo'shish mumkin emas. Demak, masalaning berilishida 29 ning hisoblanishi noto'g'ri.

Xuddi shu masaladek quyidagi masalaga javob bering.

Masala: Bir kishi cho'pondan 100 ming so'mga qo'y sotib oldi. Sal uzoqroqqa borib, qo'yni qaytarib olib keldi va cho'ponga aytdi: «Bu qo'y ham sizga, boyagi 100 ming ham sizga, bularning o'rniga menga bitta 150 ming so'mga arzigulik qo'y bering». Cho'pon shunday qildi. Bu savdoda kim foyda ko'rdi?

A4 FORMAT QOG'OZI O'LCHAMLARI QANDAY TANLANGAN?

Turmushimizda har xil ma'lumotlarni saqlash, hujjat tayyorlash uchun A4 formatdagi qog'ozlar (o'lchovlari 210mm × 297mm), ya'ni odatiy ishlatadigan qog'ozlarimiz juda ko'p kerak bo'ladi.

Bu qo'g'ozga printerdan ma'lumot chiqarishda, xohlasak, faylning 1 betini qo'g'ozning 1 betiga, istasak faylning 2 betini qog'ozning 1 betiga yoki faylning 4 betini qog'ozning 1 betiga chiqarishimiz mumkin. A4 formatdagi qog'ozda bunday istaklarni bemalol amalga oshira olishimiz uchun qog'oz tomonlari uzunliklari g'aroyib qonuniyat asosida tanlangan. Tabiiy savol tug'iladi: biz bilgan A4 formatdagi qog'ozgina shunday xususiyatga egami? Bu savolni quyidagicha matematik masala bilan almashtiramiz [3]:

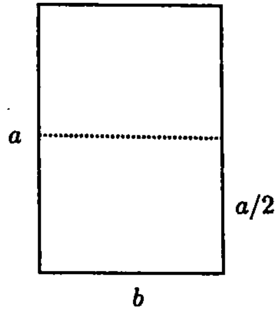
Masala: To'g'ri to'rtburchak shaklidagi qog'ozning tomonlari nisbati qanday bo'lganida uning yarmining tomonlari nisbati ham shunday bo'ladi?

Javob: To'rtburchak tomonlari a va b bo'lsa, savol shartidan quyidagi tenglama hosil bo'ladi (4-rasm):

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a/2} \Rightarrow \frac{a}{b}=\sqrt{2}=1.41421356...$$

Demak to'rtburchak tomonlari nisbati $\sqrt{2}$ bo'lganda, uning tomonlari nisbati, yarmining tomonlari nisbatiga teng bo'ladi. Lekin $\sqrt{2}$ irratsional son. Shu sababli hayotda unga yaqin bo'lgan ratsional son olib A4 format tuzilgan. Buning uchun quyidagi tomonlar olingan:

A4: $a=210mm$ va $b=297mm$, ya'ni $\frac{a}{b}=\frac{297}{210}=1.414285714285714$.



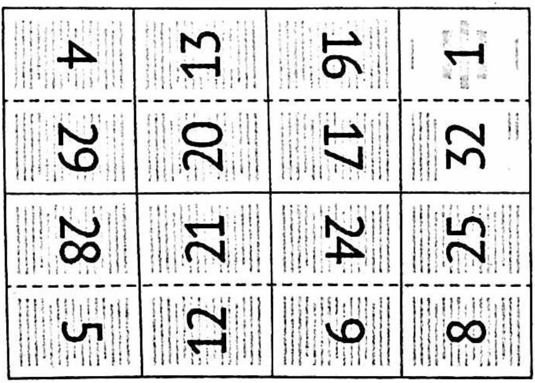
4-rasm. *A4 formatdagi qog'oz va uning yarmi.*

KITOBLAR FORMATI QANDAY TANLANADI?

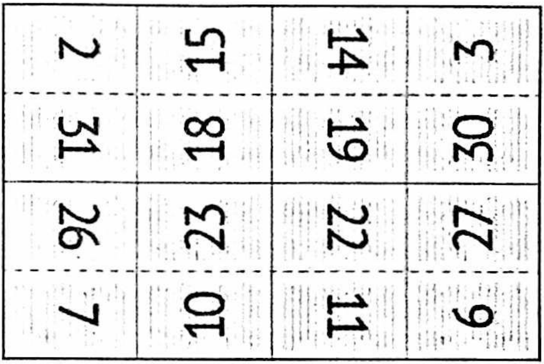
Kitob javoningizdagi kitoblar o‘lchamlari bir xil emasligi ularni joylashtirayotganingizda sizni o‘ylantirishi tabiiy. Odatda kitobning oxirgi (ba’zan esa boshlang‘ich) betida quyidagi belgilardan birini ko‘rishingiz mumkin:

$$70\times100\frac{1}{16},\ \ 70\times90\frac{1}{32},\ \ 84\times108\frac{1}{32},\ \ 60\times84\frac{1}{8},\ \ \ldots$$

Bu belgilar nimani anglatadi? Javobini 5-rasm orqali tushuntiramiz [3]. Masalan, agar kitobda $a\times b\frac{1}{16}$ yozilgan bo‘lsa, demak tomonlari a va b bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi qog‘oz olinadi. Uning har bir tomoni teng 4 bo‘lakka bo‘linadi; bo‘linish nuqtalari tutashtirilib, qog‘oz 16 bo‘lakka bo‘linadi. Kitob ma’lumotlari qo‘g‘ozning ikki tomoniga (6-rasmda ikkinchi tomon) chop etilgandan keyin rasmda ko‘rsatilgan qo‘g‘oz bir necha marta buklanib, 32 betlik kitobcha hosil bo‘ladi (betlar tartibi har bir bet ichida yozilgan).



5-rasm. *Tomonlari a va b bo‘lgan qog‘ozning* $a\times b\frac{1}{16}$ *formatli bo‘linishi. Birinchi tomon.*



6-rasm. *Tomonlari a va b bo'lgan qog'ozning* $a \times b \frac{1}{16}$ *formatli bo'linishi. Ikkinchi tomon.*

PULNI QAYSI BANKKA QO'YAY?

Bugungi kunda yurtimizda turli xildagi banklar faoliyat olib bormoqda. Bu banklarning xalqqa xizmat qilish qoidalari ham o'ziga xos. Bank haqida gap ketar ekan, ko'z oldingizga beixtiyor juda katta miqdordagi aniq hisob-kitoblarga asoslangan pul aylanmasi kelishi tabiiy. Shu bois bu soha faoliyatining biror soniyasini ham matematikasiz va uning qat'iy qonunlarisiz tasavvur etish mumkin emas. Banklar faoliyatida matematikaning o'rni beqiyosligini ular taklif etayotgan xizmatlarda ham ko'rish mumkin. Shubhasiz, banklar mijozlar va ularning sarmoyalari bilan «tirikdir». Shu o'rinda bankning asosiy tiriklik manbayi bo'lgan mijozlar ham o'z foydalari uchun qaysi bank bilan hamkorlik qilish kerakligini bilishi muhimligini ta'kidlash joizdir. Buning uchun mijozdan o'rta maktabda o'tiladigan proporsiya va uning tatbig'ini to'g'ri qo'llashni bilish talab qilinadi. Banklar odatda har yili mijozlarga turli foiz stavkali omonat turlarini taklif etadi. Omonat — mijozning ma'lum bir shartlar asosida bankka qo'ygan pul mablag'laridir. Omonatga pul mablag'larini kirim qilish miqdori, ularni saqlash muddati va maqsadi omonatning turi shartlaridan kelib chiqqan holda belgilanadi. Mablag' kimning nomidan topshirilgan bo'lsa, o'sha shaxs omonatchi hisoblanadi. Bu mablag'lar omonatchining birinchi talabiga ko'ra to'liq yoki qisman berilishi ta'minlanadi.

Omonat bo'yicha daromadlar foiz yoki yutuq ko'rinishida to'lanadi. Foiz stavkasining miqdori banklar tomonidan mustaqil ravishda belgilanadi.

Quyidagi masalalar orqali omonatlarning qaysi shartlari ko'proq daromadli ekanini aniqlashtiramiz.

Masala. Sizda *A* va *B* banklardan biriga omonat qo'yish imkoniyati bor. *A* banki qo'yilgan pulga har oy 1% qo'shadi, *B* banki esa bir marta, yil oxirida pulni 12,5% ga oshirib qo'yadi. Qaysi bankda omonatingizni saqlash sizga ko'proq daromad keltiradi?

Javob: Faraz qilaylik, bankka qo'yiladigan omonat puli miqdori $p > 0$ so'm bo'lsin. *A* bankda bu pul birinchi oy yakunida quyidagicha bo'ladi:

$$p+\frac{p}{100}=p(1+\frac{1}{100})=p\cdot\frac{101}{100}.$$

Ikkinchi oyning oxirida esa bu pul miqdori quyidagicha bo'ladi:

$$p\cdot\frac{101}{100}+p\cdot\frac{101}{100}\cdot\frac{1}{100}=p\cdot\left(\frac{101}{100}\right)^2.$$

Shu tariqa davom ettirib, yil oxirigacha *A* bankdagi pul miqdori quyidagicha bo'lishini topamiz:

$$p\cdot\left(\frac{101}{100}\right)^{12}.$$

B bankdagi pulning yil oxiridagi miqdorini hisoblaganda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$p+\frac{p}{100}\cdot 12.5=p(1+\frac{12.5}{100})=p\cdot\frac{112.5}{100}.$$

Demak, quyidagi ikki sonni taqqoslashimiz kerak

$$p\cdot\left(\frac{101}{100}\right)^{12} \quad \text{va} \quad p\cdot\frac{112.5}{100}.$$

Quyidagi tengsizlikni oson tekshirish mumkin ($p > 0$ soniga bo'lingan):

$$\left(\frac{101}{100}\right)^{12} > \frac{112.5}{100}.$$

Haqiqatan,

$$1.1268250301 = \left(\frac{101}{100}\right)^{12} > \frac{112.5}{100} = 1.125.$$

Demak, A bankka mablag'ini qo'ygan odam ko'proq daromad qiladi.

Masalan, qo'yilgan omonat miqdori $p = 100000000$ so'm bo'lsa, A va B banklardan ushbu omonat uchun olinadigan foydaning farqi quyidagicha bo'ladi:

$$(1.1268250301 - 1.125) \cdot 100000000 = 182503 \text{ so'm.}$$

Masala. A banki qo'yilgan pulga har oy 3% qo'shadi. Bankka 20 000 000 so'm omonat qo'ygan odamning puli necha oydan keyin bitta «Nexia» avtoulovini sotib olishga yetadi? (Bugungi kunda «Nexia» avtoulovining narxi taxminan 73720000 so'm).

Javob: Faraz qilaylik n yildan keyin omonatchining puli «Nexia» sotib olishga yetarli bo'lsin. U holda n quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi minimal natural son bo'ladi:

$$20000000 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{n} \geq 73720000.$$

Bu son $n = 45$ ekanligini oson topish mumkin. Demak, 45 oydan (ya'ni 3 yil 9 oydan) keyin omonatchining puli bitta «Nexia» narxidan oshadi.

LOTEREYA O'YNAYMI?

Tez va oson boyishga bo'lgan intilish insonlarni yutish imkoniyati past bo'lishiga qaramay turli yutuqli o'yinlar – lotereyalarga bee'tibor bo'lmaslikka undaydi. Aslida ham lotereya orqali oson boyish mumkinmi? Yoki bunday o'yinlar qalloblik asosiga qurilganmi? Qaysi lotereyadan yutish imkoniyati ko'proq? Bu kabi savollar ko'pchilikni qiziqtirishi tabiiy. Bunday savollarga javob berishda matematikaning o'ziga xos bo'limi bo'lgan ehtimollar nazariyasidan foydalaniladi.

Ma'lumki, biror hodisaning ro'y berish ehtimoli 0 dan 1 gacha qiymatlardan biriga teng bo'ladi, ya'ni ehtimol qiymati [0,1] kesmada o'zgaradi. Bu qiymat qancha 0 ga yaqin bo'lsa, shuncha kutilayotgan hodisaning ro'y berishi qiyin, bu son 1 ga qancha yaqin bo'lsa, kutilayotgan hodisaning ro'y berishi mumkinligi shuncha aniqroq bo'ladi.

Masalan, ikkita bir xil qutilarning birida pul bor, ikkinchisi esa bo'sh bo'lsin. Tasodifiy tanlash orqali puli bor qutini olish ehtimoli 1/2 ga teng. Lekin har bir o'quvchi bunday masalaning turli variantiga bir necha marta duch kelgan va biladiki, ehtimoli 1/2 bo'lsa ham bu hodisaning ro'y berishi ancha mushkul. Endi faraz qiling, 3 ta qutidan faqat bittasida pul bor. U holda pulli qutini topish ehtimoli 1/3. Bu esa endi uni topish yana ham qiyinroq demakdir.

Yurtimizda uzoq vaqtdan beri o'ynaladigan «Omadlotto» sonli-tirajli lotereyasi «36 dan 5» o'yinini qaraylik. Lotto turidagi sonli lotereyaning mazmuni ma'lum raqamlar qatori ichidan o'ynaladigan ma'lum raqamlarni topish hisoblanadi. O'ynaladigan raqamlarning soni 5 ta raqam bilan belgilanadi. O'yinda ishtirok etuvchi raqamlarning to'liq qatori 36 ta raqam bilan belgilanadi. Agar o'yinchi 1 ta bilet olib undagi 36 ta raqamdan 5 tasini belgilasa, uning yutish ehtimoli p nimaga teng? Bu savolning javobi quyidagicha:

$$p=\frac{1}{C_{36}^{5}}=\frac{5!(36-5)!}{36!}=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot532\cdot33\cdot34\cdot35\cdot36=1376992=0.0000026526.$$

Bu son 0 ga juda yaqinligi sababli bir dona bilet olgan o'yinchi uchun yutuq chiqish ehtimoli deyarli nol. Buni yuqoridagi quti misoli bilan quyidagicha tushuntirish mumkin: 376992 ta qutidan faqat 1 tasida pul bor. Shu qutilar ichidan yutuqlisini topish talab qilinganida bu ro'y berishi juda qiyin hodisa ekanini tassavur qilish qiyin emas. Demak, taxminan 377 mingta qutidan faqat bitta yutuqlisini tanlashiga ishongan odam lotereya o'ynashi mumkin.

O'LCHOV NIMA?

Har qanday narsa, to'plam yoki sistemani o'rganishga to'g'ri kelganda nima qilinadi? Albatta, o'sha narsa yoki to'plamning u yoki bu xossasini o'rganamiz. Lekin o'rgangan narsamizning natijasini qanday ifodalaymiz? Eng keng tarqalgan usul bu son bilan ifodalashdir. Masalan, bir sinfni o'rganish talab qilinsa, o'rganish natijasi quyidagicha bo'lishi mumkin: 15 ta qiz bola va 21 ta o'g'il bola; 7 ta a'lochi o'quvchi; 3 ta sportchi va hokazo. Ya'ni har bir xossa son bilan ifodalanmoqda.

Fanda, xususan, matematikada biror to'plamni o'rganish deganda uning xossalarini sonlar bilan ifodalab berish tushuniladi. Bunda o'lchov tushunchasi paydo bo'ladi: biror to'plamning o'lchovi deb uning biror (o'zimizga qiziq) xossasini son bilan ifodalab berishga aytiladi.

O'lchash to'plamning tabiatiga qarab, oson va ba'zan juda qiyin bo'lishi mumkin. Masalan, qaralayotgan to'plam elementlari orasida o'zaro ta'sir bo'lsa (bunday to'plam sistema deyiladi), ular vaqtga bog'liq ravishda xossasini o'zgartirsa (bunday sistema dinamik sistema deyiladi), u holda berilgan to'plamni o'rganish va o'lchash matematiklarga qiyin masalalarni keltirib chiqaradi.

Quyidagi misollar orqali o'lchov va sistema tushunchalariga yana ham oydinlik kiritamiz [28].

S orqali biror oiladagi a'zolar to'plamini belgilaylik, ya'ni S={*ota, ona, farzandlar*}. Ravshanki, bu to'plam sistema tashkil qiladi. Chunki bu to'plam a'zolari orasida o'zaro bog'liqlik (qarindoshlik ta'siri) bor.

Endi quyidagi to'plamni qaraymiz: T = {*bo'r, qoshiq, kalit, piyola*}. Bu to'plam sistema tashkil qilmaydi. Chunki uning elementlari orasida hech qanday bog'liqlik yo'q. Demak, T ni o'rganish S ni (matematik) o'rganishga nisbatan ancha oson.

Berilgan bir sistemaning holati deb uning bizga qiziqarli barcha xossalari yig'indisiga aytiladi.

Masalan, yuqorida qaralgan oila S uchun uning holati sifatida quyidagini aytish mumkin: S = o‘gil bolalar soni, o‘quvchilar soni (maktabga boruvchilar soni), otaning oylik maoshi miqdori va hokazo.

Sistemaning o‘lchovi, yuqorida aytganimizdek, sistema holatini sonlar bilan ifodalab berishdir. O‘lchov tushunchasi tabiiy fanlarda, texnologiyalarda, iqtisodiyot va ijtimoiy fanlardagi sanalarni hisoblashda juda muhim hisoblanadi.

Berilgan sistemaning o‘lchovlari har xil bo‘lishi mumkin. Bu bizni sistemaning qanday xossasi qiziqtirishiga bog‘liq.

Masalan, yuqoridagi S oiladagi o‘lchovlar quyidagilar bo‘lishi mumkin:

$M_{sport}(S)$ = berilgan S oiladagi sportchilar soni.

$M_{maktab}(S)$ = berilgan oiladagi o‘quvchilar soni.

Faraz qilaylik, bu oilaning uyiga bir o‘g‘ri kirdi. Bu o‘g‘ri uchun S ning qaysi xossasi qiziq? Albatta, undagi pul miqdori. Demak, o‘g‘rining o‘lchovi bo‘yicha:

$M_{o'g'ri}(S)$ = oiladagi pullarning jami miqdori.

S oila dinamik sistemadir. Chunki S dagi holatlar vaqt o‘tishi bilan o‘zgaradi. Masalan, undagi o‘quvchilar soni, otasining oyligi va boshqalar vaqtga bog‘liq. Shu sababli bu sistemani o‘lchash, matematik o‘rganish T ga nisbatan ancha qiyin va chuqur matematik tahlilni talab qiladi.

Agar qaralayotgan sistemamizda elementlar soni cheksiz ko‘p bo‘lsa, u holda bunday sistemani o‘rganish chekli sistemaga nisbatan ancha qiyin kechadi.

Tasavvur qiling, agar S oilada cheksiz ko‘p a’zo bo‘lsa (yoki chekli bo‘lib, juda ham ko‘p bo‘lsa) va $M_{o'g'ri}(S)$ juda katta son bo‘lsa, o‘g‘rining yuragi xuruj berib qolishi mumkin.

O‘rta maktabda o‘lchashlar hamma tabiiy va aniq fanlarda, xususan, geometrik shakllarda ishlatiladi: yuza, hajm, perimetr va hokazo. Lekin, o‘quvchilar bu geometrik tushunchalardan turmushda foydalanishi uchun ularning hayotiy ma’nosini, albatta, bilishi shart! Masalan, berilgan yer maydonining yuzi $19m^2$ degani nimani anglatadi? Bu savolni o‘quvchilarga bersangiz, ko‘pincha bir xil javobni (eni va bo‘yi ko‘paytmasi 19) aytishadi. Lekin bu javob faqat to‘g‘ri to‘rtburchakka mos keladi. Yer maydoni egri chiziqli chegaraga ega bo‘lsa-chi? Bu holda eni va bo‘yi tushunchasi ma’nosiz! Shuni o‘quvchilar aniq tasavvur qilishi kerakki, yerning (yoki boshqa sirtning) yuzasi deganda uning ichiga hamma tomoni 1 birlikka teng bo‘lgan kvadratchalardan nechtasi sig‘ishini bildiradi. Masalan, 7-rasmdagi Samarqand viloyati yer maydoni yuzasi 16800 km^2 ekani ma’lum. Buning ma’nosi nima? Ma’nosi: Samarqand viloyati yer maydonini tomoni 1 km dan bo‘lgan 16800 ta kvadrat bilan qoplash mumkin degani. Bunda kvadratlarni qog‘ozdan deb tasavvur qiling, viloyat chegarasining egri qismlarida, qog‘ozni xuddi shunday egriliklarda kesib joylashtirish kerak.

7-rasm. *O‘zbekiston xaritasi. Har bir viloyatning yer maydoni ma’lum. Bu sonlar qanday hisoblangan? Viloyatlar hududining ko‘rinishi geometriya darsida o‘tiladigan shakllardek emas-ku!*

Hajm deganda ham xuddi yuza kabi hayotiy ma’nosini tushunish kerak. Masalan, biror idishning hajmi $15m^3$ deyilganda, demak, bu idishni suv bilan to‘ldirish uchun qirrasi $1m$ dan bo‘lgan kub idish orqali 15 marta suv solish kerak. Bunda $15m^3$ hajmga ega idishning shakli juda «xunuk» bo‘lishi ham mumkin, ya’ni geometriya fanida o‘rganilgan biror jismga o‘xshamasligi ham mumkin. Hajm tushunchasini ishlatishga doir quyidagi hayotiy masalani qaraymiz:

Do'konga yuk mashinasida qadoqlanmagan tuz keldi. Yuk mashina haydovchisi tuzning miqdori 4 tonna ekanligini ta'kidladi. Do'konchining bunday hajmdagi tuzni bir martada o'lchab ko'rish uchun katta tarozisi yo'q. Shuningdek, buncha hajmdagi tuzni mavjud tarozida o'lchab ko'rish uchun juda ko'p vaqt kerakligini unutmaslik kerak. Xo'sh, do'konchi tuzni yuk mashinasidan tushirmasdan haydovchining aytganlari to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlashi mumkinmi?

Javob: tuz qadoqlanmagan bo'lgani sababli yuk mashinasida uning ustki sirti notekis bo'lishi mumkin. Agar tuzni tekislab qo'yilsa, tuzning og'irligini yana ham aniqroq o'lchash mumkin bo'ladi. Aksariyat hollarda yuk mashinalarining yukxonasi to'g'ri parallelepiped shaklida bo'ladi. Shu sababli tuzni yuk mashinaning yukxonasida to'g'ri paralellepiped shaklidagi joyni olgan deb qaraymiz. Tuz egallagan joyning hajmini (to'g'ri parallelepiped hajmini) hisoblaymiz. Uni V harfi bilan belgilaymiz. Keyin do'kondagi biror kichik bo'sh qutini olib, uning hajmini hisoblaymiz va natijani v harfi bilan belgilaymiz. Bu idishning ichiga tuz solib, og'irligini o'lchaymiz va natijani t harfi bilan belgilaymiz. U holda berilgan masalani quyidagicha ifodalash mumkin: v hajmli idishga t *kg* tuz sig'sa, V hajmli idishga qancha tuz sig'adi? Noma'lum tuz miqdorini T harfi bilan belgilasak, uni proporsiya formulasidan foydalanib topamiz: $T = Vtv$. Agar $T \geq 4$ tonna chiqsa, demak, haydovchining gapiga ishonish va tuzni qabul qilish mumkin. Agar $T < 4$ (ya'ni $4 - T$ musat son) bo'lsa, u holda, haydovchiga tuzni qabul qilmaslik, yoki kam miqdori uchun to'lamaslik aytiladi. Ikki tomon kelishgandan keyin tuzni do'kon omboriga tashish mumkin.

Ko'p o'lchovli nuqtalar to'plami haqida. Ma'lumki, barcha haqiqiy sonlar to'plamini bir to'g'ri chiziq sifatida tasvirlash mumkin. Bu sonlar o'qi deyiladi va sonlar o'qidagi har bir nuqta bitta sonni ifodalaydi. Demak, sonlar o'qidagi har bir nuqtani bir o'lchovli (nuqtaning «ismi») deyish va u ifodalaydigan sonni uning o'lchovi deb qarash mumkin.

Endi tekislikdagi nuqtalarni qaraylik. Ularning har biriga 1 ta son mos qo'yish mumkinmi? Bunday qilmoqchi bo'lsak, ko'p nuqtalarga bitta son mos qo'yishimizga to'g'ri keladi va bir xil sonli nuqtalarni bir-biridan ajratolmay qolamiz. Shu sababli tekislikdagi nuqtalarning har biriga 2 ta son mos qo'yilib, Dekart koordinatalar sistemasi hosil qilingan. Bu sistema orqali har bir nuqta 2 o'lchovli (nuqtaning «ismi va familiyasi») bo'ladi.

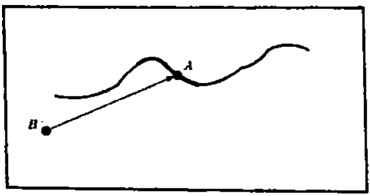
Agar bizni o'rab turgan fazodagi nuqtalarni qaraydigan bo'lsak, ularni nomlashda 2 ta son ham yetarli emas, ya'ni ularning «ism va familiyasi» bilan bir biridan butunlay ajratish qiyin. Shu sababli uchinchi o'lchov («otasining ismi»)ga ehtiyoj tug'iladi. Bu holda fazodagi har bir nuqta uch o'lchovli (koordinatali) nuqta deb qaraladi.

Matematikada 4 o'lchovli, 5 o'lchovli va hattoki cheksiz o'lchovli nuqtalar fazosi mavjud. Xo'sh, 4 o'lchovli fazo turmushimizda uchraydimi? Ularni o'rganish bizga kerakmi? Albatta, kerak! 4 o'lchovli nuqtalar to'plamiga bir misol keltiramiz.

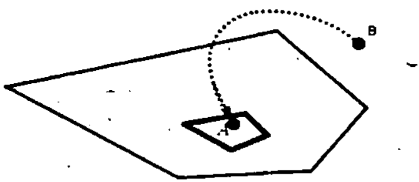
Ko'p o'lchovli nuqtalar to'plamiga hayotiy misol. Bir oilani qaraylik, unda Azamat degan bola bo'lsin. Ularning uyiga kirib «Azamat», – desangiz, kim haqida gap ketayotgani aniq. Ya'ni Azamat (nuqta) bitta ism bilan ifodalanayapti va oila ichida u «bir o'lchovli nuqta». Endi shu oila joylashgan mahallaga borib, Azamat deb chaqirsak-chi? Unda bir nechta Azamat «men» – deb chiqadi. Demak, ularni bir-biridan farqlash uchun har birining ikkinchi o'lchovini kiritamiz, ya'ni familiyasini ishlatamiz. Agar chiqqan Azamatlarning hammasining familiyasi har xil bo'lsa, biz ularni farqlash uchun 2 o'lchovli nuqta sifatida qaraganimiz yetarli bo'ladi. Lekin, shartli Abdullayev Azamat 2 ta chiqib qolsa-chi? Unda bularning uchinchi o'lchovi «otasining ismi» kerak bo'ladi. Agar shu FIO bilan hamma Azamatlarni farqlay olsak, yaxshi. Bu holda mahallada Azamatlar 3 o'lchovli nuqtalar bo'ladi. Lekin Abdullayev Azamat O'tkir o'g'li bittadan ko'p chiqsa-chi? Unda biz *to'rtinchi* o'lchov – tug'ilgan yilni kiritamiz. Shu 4 ta o'lchovi bilan mahalladagi barcha Azamatlarni bir-biridan farqlay olsak, maqsadga erishgan bo'lamiz, aks holda-chi? Aks holda, 5-o'lchov – tug'ilgan kunga qarab ularni bir-biridan farqlaymiz. Bu holda Azamatlar 5 o'lchovli. Ravshanki, mahallaning hamma Azamatlarini butunlay bir-biridan farqlay olgunimizcha hatto 6 («onasining ismi»), 7 (yashash uyi nomeri) va hokazo o'lchovlar ham kerak bo'lishi mumkin. Bunday ko'p o'lchovli mahallaga har kun ishimiz tushadi va shu misolda aytilgan prinsip bo'yicha o'zimizga kerakli odamni topib boramiz.

Lekin matematiklar bunday vaqtda butun mahallaning odamlarini 1 o'lchovli nuqtalarga aylantirib qo'yish imkoniga ham ega. Masalan, hamma odamlar ro'yxati tuzilsa, bu ro'yxatda har bir insonga tartiblangan faqat bitta son mos keladi. Endi Azamat emas, masalan 17 deb, ya'ni 1 o'lchovli tartib raqami bilan chaqiriladi.

Odatda biz bir o'lchovli har qanday shakl (kesma, egri chiziq, to'g'ri chiziq va hokazo)ning ixtiyoriy A nuqtasiga shu bir o'lchovli shaklning boshqa nuqtalarini bosmasdan ikki o'lchovli fazo orqali bora olamiz (8-rasmga qarang). Xuddi shunday, uch o'lchovli fazodan ikki o'lchovli fazoning ixtiyoriy nuqtasiga borish mumkin (9-rasmga qarang).



8-rasm. *Bir o'lchovli chiziqning qalin qismi «bemor». Ikki o'lchovli fazoda turgan doktor, B nuqtadan A nuqtaga borib u nuqtani davolamoqchi. Buning uchun egri chiziqning biror boshqa nuqtasini bosmasdan («kesmasdan») B dan A ga bora oladi.*



9-rasm. *Ikki o'lchovli beshburchakning ichidagi qalin to'rtburchak qismi «bemor». Uch o'lchovli fazoda turgan doktor B nuqtadan A nuqtaga borib u nuqtani davolamoqchi. Buning uchun doktor beshburchakning biror boshqa nuqtasini bosmasdan («kesmasdan») B dan A ga bora oladi.*

Odam tanasini kesmasdan yoki teshmasdan ichki a'zosini operatsiya qilish mumkinmi? Bu savolga quyidagicha javob berish mumkin: yuqorida (8- va 9-rasmlarga qarang) berilgan misollarga o'xshash fikr yuritadigan bo'lsak, agar doktor 4 o'lchovli fazodan kelsa, 3 o'lchovli odam tanasini kesmasdan ichiga kirishi mumkin! Lekin afsuski, hali insoniyat 4 o'lchovli fazoga chiqolgani yo'q. Nega?! Aniq javob yo'q! [20] maqolada bu masala bo'yicha ba'zi fikrlar berilgan.

MUSIQA MATEMATIKASI

Matematika va musiqa chambarchas bog'liqligi haqida ko'plab adabiyotlarda fikr yuritiladi (masalan [8], [10], [37]).

Qadimgi yunon faylasufi Pifagor musiqa va matematika o'rtasidagi aloqani birinchi bo'lib kashf etdi. U tovush doktrinasini yaratdi, ovozning falsafiy matematik jihatlarini o'rgandi, hatto astronomiya bilan musiqani bog'lashga harakat qildi. Maxsus asbob (monoxord)dan foydalanib, Pifagor tovushlar o'rtasidagi matematik munosabatlarni aniqladi. Pifagor musiqa orqali shifo topuvchi kasalliklar nazariyasini ishlab chiqdi.

Bu bo'limda matematika fani va nafis badiiy musiqa o'rtasidagi umumiy xususiyatlarni berishga harakat qilamiz.

Musiqada *nota* deganda musiqiy asarlarning zamonaviy ramziy belgilaridan biri bo'lgan grafik tasvir tushuniladi. Notaning tasviridagi farqlari, shuningdek, boshqa belgilar bilan birikmalari tovushning balandligi, davomiylik muddati va boshqa tovushlarga nisbatan ishlash tartibini beradi.

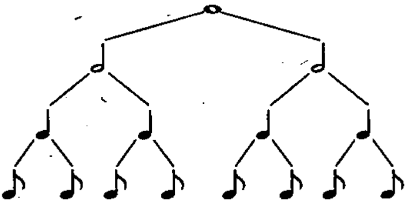
Musiqada quyidagi notalar to'plami mavjud: «do», «re», «mi», «fa», «sol», «lya», «si». Bular lotin alifbosidagi *C, D, E, F, G, A, H* harflari bilan ham ifodalanadi, ya'ni

$$C{=}do,\ D{=}re,\ E{,}mi,\ F{=}fa,\ G{=}sol,\ A{=}lya,\ H{=}si.$$

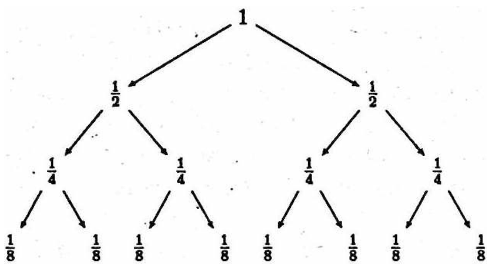
Bu belgilash asosan, Yevropa davlatlarida qo'llaniladi (ingliz tilida so'zlaydigan Yevropa davlatlarida *H* o'rnida *B* harfi ishlatiladi). Notalar ba'zan simvollar bilan ham yoziladi (10-ga qarang).

10-rasm. *Bu simvollar chapdan o'nga qarab «do» dan «si» gacha notalarni ifodalaydi. Har bir nota tagida matematik raqamli ifodasi berilgan.*

11-rasmda notalar tovush davomiyligi berilgan, yuqoridan pastga qarab yurganda davomiylik qisqaradi, shu sababli ularning raqamli ifodasi ham kamayib borish tartibidaligi bu rasmga mos ravishda 12-rasmda berilgan.



11-rasm. *Notalar tovush davomiyligi daraxti.*



12-rasm. *Notalar tovush davomiyligi kamayish tartibida joylashgan daraxti. 11-rasmga mos notalarni taqqoslang.*

13-rasmda uchta musiqiy «formula» va ularga mos matematik tengliklar berilgan.

 bu musiqiy formulaga 1=1/4+1/4+1/2 mos keladi.

2/4+1/8+1=4/8+1/8+8/8=13/8

1/8+1/4+3/16=2/16+4/16+3/16=9/16

13-rasm. *Notalar ustida amallar.*

Musiqaning asosiy tushunchasi bu *ritm* (yoki boshqacha aytganda *marom*)dir. Bizning atrofimizdagi muhit ritm bilan to'la. Bu so'z nimani anglatadi? Bir nechta misollar bizga ritmlarni ko'rish va eshitishimizga yordam beradi. Qadamlarimiz ritmik tarzda eshitiladi, bizning nafas olishimiz, poyezd g'ildiraklarining ritm bilan urishi va hokazo. Lekin biz ritm so'zini eshitganimizda, xayolimiz majburiy ravishda musiqaga ketadi. Bu tabiiy, chunki marom musiqaning eng muhim elementlaridan biri.

Ritmlarni raqamlar orasida ham topish mumkin (14-rasmga qarang). Ushbu rasmda dastlabki 100 ta natural sonlar o'sish tartibida joylashgan. Bu Pifagor kvadrati deb ataladi. Jadvalga qarab 3, 4 va 6 ga karrali sonlar ritmini ko'rishingiz mumkin.

1	2	3	[redacted]	5	[redacted]	7	[redacted]	9	10
11	12	13	14	15	[redacted]	17	[redacted]	19	20
21	22	23	24	25	26	27	[redacted]	29	[redacted]
31	[redacted]	33	34	35	36	37	38	39	[redacted]
41	[redacted]	43	[redacted]	45	46	47	48	49	50
51	[redacted]	53	[redacted]	55	[redacted]	57	58	59	60
61	62	63	[redacted]	65	[redacted]	67	[redacted]	69	70
71	72	73	74	75	[redacted]	77	[redacted]	79	[redacted]
81	82	83	84	85	86	87	[redacted]	89	[redacted]
91	[redacted]	93	94	95	96	97	98	99	[redacted]

14-rasm. *Har bir rangdagi sonlar ritmik takrorlanmoqda.*

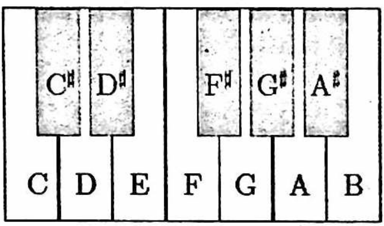
15-rasmda 100 gacha bo'lgan tub (faqat 1 ga va o'ziga bo'linadigan) sonlarning ritmi ko'rsatilgan.

1	■	■	4	■	6	■	8	9	10
■	12	■	14	15	16	■	18	■	20
21	22	■	24	25	26	27	28	■	30
■	32	33	34	35	36	■	38	39	40
■	42	■	44	45	46	■	48	49	50
51	52	■	54	55	56	57	58	■	60
■	62	63	64	65	66	■	68	69	70
■	72	■	74	75	76	77	78	■	80
81	82	■	84	85	86	87	88	■	90
91	92	93	94	95	96	■	98	99	100

15-rasm. *100 gacha bo'lgan tub sonlar ritmik takrorlanmoqda.*

Musiqada ham xuddi qisqa va uzun so'zlar kabi, qisqa va uzoq muddatlar bilan muomala qilamizki, ular har qanday maromning asosi hisoblanadi.

G'arb musiqasining asosini tashkil etuvchi shkala o'n ikki notadan iborat (16-rasmga qarang) [10].



16-rasm. *G'arb mamlakatlari notalari pianinoda.*

Bu o'n ikkita nota mumkin bo'lgan kuylarni tashkil qilishi odatda, aksiomatik qabul qilingan. Aslida esa bu 12 notani faqatgina bir tor (masalan rubob yoki gitara tori) bilan ba'zi matematik usulda hosil qilish mumkin.

Faraz qiling, qo'lingizda bir tor bor (dutorning bir torligi) va sizning musiqiy nazariyadan unuman xabaringiz yo'q. Torni bir chertsangiz, bir nota eshitiladi. Endi torni qisqaroq qilib bog'lang, shu holda uni cherting, oldingidan balandroq ovoz eshitasiz. Agar toringiz l metr bo'lsa va ikkinchi gal chertishdan oldin uning yarmini kesib tashlasangiz, $l/2$ ni chertgandagi ovoz, l ni chertgandagi ovozdan farq qiladi. Zamonaviy musiqiy atamalarda bu ikki ovozning bir-biridan farqi «oktava» deyiladi. Lekin ikki ton ham bir xil deb qaraladi va C harfi bilan belgilanadi.

Keyingi oddiy manipulyatsiyani qilish uchun l uzinlikdagi torning uchdan bir qismini kesib tashlab, keyin chertsak, endi chindan ham yangi nota hosil bo'ladi: sizning toringizning uchdan ikki qismi chiqargan ovoz musiqachilar tilida aytganda asl nusxasi chiqargan ovozning besh barobaridan yuqoridir. Bu taxminan C va G notalar orasidagi masofa (16-rasmga qarang) bilan barobardir. Shu sababli pianino klaviaturasida «beshinchi» degan nom ushbu intervalni qamrab olgan oq kalitlar sonini anglatadi.

Agar siz torning uzunligini $l = 1$ qilib olsangiz, keyin esa qayta-qayta uchdan birini kesib, yangi torlar hosil qilsangiz, u holda bu torlarni chertish orqali 3^b chastotali notalar hosil qilasiz, bunda $b = 0,1,2,\ldots$ .Takroriy ekvivalentlikni hisobga olgan holda oktavalari farqli bo'lgan notalarni alohida ajratamiz. Natijada paydo bo'lgan chastotalar 2 ning darajalari bilan beriladi, bunda $3b/2a \in [1, 2)$ shartni qanoatlantiruvchi a larni qaraymiz. Keling, shkalani chastotalar to'plami sifatida ortib borayotgan sonlar tartibida belgilaylik. Masalan, 3 ning dastlabki 5 ta darajasi bo'yicha ortib boruvchi ketma-ketlikni quyidagicha qurish mumkin:

$$\frac{3^0}{2^0}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{3^4}{2^6}, \frac{3^1}{2^1}, \frac{3^3}{2^4}. \qquad (10.1)$$

Qachon 3 ning darajalarini oshirib borishdan to'xtash kerakligini bilishimiz mumkinmi? Bu masala quyidagi tenglamani yechishga olib keladi:

$$2^a = 3^b \qquad (10.2)$$

Lekin bu tenglama (0,0) dan farqli butun sonlardan iborat (a,b) yechimga ega emas. Chunki bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{a}{b}=\frac{\lg 3}{\lg 2}. \qquad (10.3)$$

Ma'lumki, lg 3/lg 2 irratsional sondir. Bu irratsional sonni taqribiy ratsional son bilan almashtirib olishimiz zarur. Sizga ma'lumki, har qanday irratsional songa ratsional sonlar ketma-ketligi bilan yaqinlashish mumkin. Buning uchun ixtiyoriy $a \in \mathrm{R}$ irratsional son olinganda quyidagi ketma-ketlikni tuzamiz:

$$x_n=\frac{[an]}{n},$$

bunda $[\cdot]$ sonning butun qismi. Ravshanki, x_n ketma-ketlik a soniga intiladi. Lekin a soniga tez yaqinlashuvchi ketma-ketlik sifatida uzluksiz kasrlar yordamida yozilgan ifodadan foydalanish mumkin. Masalan, a sonining uzluksiz kasrga yoyilmasi deb uni quyidagi ko'rinishda tasvirlashga aytiladi:

$$a=k+\cfrac{1}{k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\dots}}},$$

bunda k butun son va barcha k_i, $i = 0, 1, 2,\dots$ lar natural sonlar. Bu formula qisqaroq shaklda quyidagicha yoziladi:

$$a = [k, k_0, k_1, k_2, \dots]$$

Agar a ratsional son bo'lsa, bu ketma-ketlik chekli bo'ladi, agar a irratsional son bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik cheksiz bo'ladi. Masalan,

$$\frac{9}{4}=[2,3,1],$$

$$\sqrt{2}=[1,2,2,2,2,\ldots].$$

Yuqorida berilgan son uchun:

$$\frac{\lg 3}{\lg 2}=[1,1,1,2,2,3,1,5,\ldots].$$

Bu irratsional songa yaqinlashadigan ratsional sonlar ketma-ketligini quyidagicha quramiz:

$$[1,1,1]=\frac{3}{2},$$

$$[1,1,1,2]=\frac{8}{5},$$

$$[1,1,1,2,2]=\frac{19}{12},$$

$$[1,1,1,2,2,3]=\frac{65}{41},$$

$$[1,1,1,2,2,3,1]=\frac{84}{53},$$

. . .

Agar lg 3/lg 2 ≈ 19/12 deb olsak, u holda 12 qadamdan keyin biz boshlang'ich notaga qaytamiz va hosil qilingan sonlarni o'sish tartibida (37) ga o'xshatib yozsak, quyidagicha 12 ta nota hosil bo'ladi:

$$\frac{3^0}{2^0},\ \frac{3^7}{2^{11}},\ \frac{3^2}{2^3},\ \frac{3^9}{2^{14}},\ \frac{3^4}{2^6},\ \frac{3^{11}}{2^{14}},\ \frac{3^6}{2^9},\ \frac{3^1}{2^1},\ \frac{3^8}{2^{12}},\ \frac{3^3}{2^4},\ \frac{3^{10}}{2^{15}},\ \frac{3^5}{2^7}.$$

Yoki bularni biz mos ravishda quyidagicha belgilashimiz mumkin:

$$C,\ C^{\#},\ D,\ D^{\#},\ E,\ F,\ F^{\#},\ G,\ G^{\#},\ A,\ A^{\#},\ B.$$

Demak, biz o'n ikki notaga tushadigan yo'lni topdik.

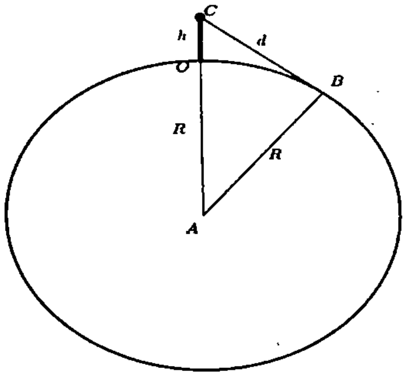
Agar biz lg 3/lg 2 ≈ 8/5 deb olganimizda, 5 ta notani hosil qilgan bo'lar edik. Bunday notalar Xitoy va Shotlandiyada jazz sifatida ishlatiladi.

Bugungi kunda 41 va 53 notali musiqalar ham bor. Bunday musiqalar haqidagi nazariyani [17], [34] adabiyotlarda ko'rish mumkin.

TEKIS YERDA TURGANDA QANCHA UZOQLIKDAGI MASOFA KO'RINADI?

Faraz qiling, siz cho'lda, tekis yerda turibsiz. Siz qarayotgan yo'nalishda hech qanday to'siq yo'q. Savol quyidagicha: bu sharoitda siz qancha uzoqlikdagi masofani ko'ra olasiz? Bu savolga javob berish uchun yer sharining radiusi R va odamning bo'yi h ni hisobga olib, odamning ko'rish masofasini d harfi bilan belgilaymiz (17-rasmga qarang). ABC uchburchak to'g'ri burchakli ($B = 90°$). Shu sababli Pifagor teoremasiga ko'ra d ni topish uchun quyidagi tenglikni yozamiz:

$$d^2 = (R+h)^2 - R^2 \Rightarrow d = \sqrt{2hR + h^2}.$$



17-rasm. *Odam O nuqtada turib qaraganda d masofani ko'radi.*

Yer shari radiusi $R \approx 6400$ km ekanligi ma'lum. Odamning bo'yi h km ning kvadrati $2hR$ km ga nisbatan juda kichikligi sababli yuqoridagi formuladan d ning taqribiy qiymatini topamiz:

$$d \approx \sqrt{2hR} \approx \sqrt{2 \cdot 6400 \cdot h} = 80\sqrt{2h} \approx 113\sqrt{h}\ km.$$

Demak, agar sizning bo'yingiz h km ga teng bo'lsa, u holda siz hech qanday to'siq bo'lmagan yo'nalish bo'yicha qaraganingizda taxminan $113\sqrt{h}$ km masofani ko'rasiz. Masalan, bo'yi

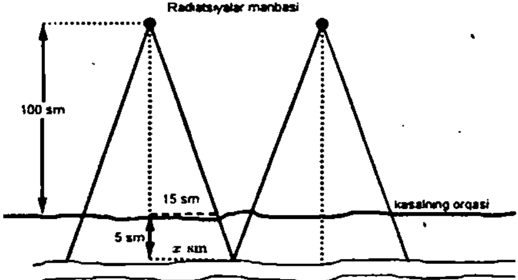
$h = 0.0016$ km bo'lgan odam taxminan $d = 4.528$ km masofani ko'radi.

O'XSHASH UCHBURCHAKLAR ONKOLOGIK KASALLIKLARDA

Ushbu bo'limda biz bir xavfli kasallikni davolashda o'xshash uchurchaklar qanday ishlatilishini ko'rsatamiz [38].

Radiatsion onkologiyada geometriya juda muhim rol o'ynaydi [35]. Xususan shishlarni davolashda, radiatsiyaning xavfsizlik darajasini aniqlashda, saraton kasalliklarida umurtqaga nurni yo'llashda shu usuldan foydalanish mumkin.

18-rasmda radiatsiyaning ikki manbasi qanchalik uzoqda turishi kerak ekanligi ko'rsatilgan. Bunda manbalardan chiqadigan nurlar umurtqaga ustma-ust tushmasligi hamda ikki manbadan chiqadigan nurlar orasida bo'sh joy qolmasligi talab qilinadi. Chunki ikki hissa radiatsiya dozasi (nurlar ustma ust tushganda) bemorni xavf ostiga qo'yadi.



18-rasm. *Bemorni radiatsiyali davolash.*

18-rasmdan ko'rish mumkinki, doktor bemor orqasiga tushayotgan nurning 15 sm ni ko'rayapti. Lekin nur bemor umurtqasiga borgunicha yana kengayib bormoqda. Demak, bemorning umurtqasiga tushgan nurning uzunligini aniq bilgandan keyingina ikkinchi radiatsiya manbasining joyini o'rnatish mumkin. Rasmda bu joy x bilan belgilangan. Noma'lum x ni topish uchun uchburchaklar o'xshashligidan foydalanib, quyidagi chiziqli tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{x}{15}=\frac{105}{100}.$$

Bu tenglamaning yechimi

$$x=\frac{15\cdot 105}{100}=15.75.$$

Shunday qilib, nurning umurtqaga yetib boradigan joyi bemorning orqasiga tushgan uzunligiga qaraganda 0.75 sm uzunroq ekan. Agar ikki radiatsiyalarning manbalari orasidagi masofa $2\cdot 15.75$=31.5 sm qo'yilmasdan, $2\cdot 15$=30 sm qo'yilsa, u holda bemorning umurtqasi ustiga borib, $2\cdot 0.75$=1.5 sm radiatsiya nurlari ustma-ust tushadi. Bu esa umurtqaning shu joyiga jiddiy ziyon yetishini bildiradi.

MATEMATIK O'ZIGA KASAL YUQTIRMAYDI

Bu bo'limda bir qiziq masalani beramiz.

Masala. Ikkita o'ng qo'l qo'lqop, ikki erkak va ikki ayol bor. Hammada har xil yuqumli kasallik bor. Ikki erkak har bir ayol bilan qo'l berib salomlashmoqchi. Kasalni bir-biriga yuqtirmasligi uchun ikkita o'ng qo'l qo'lqopni faqat erkaklar kiyib salomlashishi mumkinmi?

Javob: (Javobni o'qishdan oldin o'zingiz masalaning yechimini o'ylab ko'ring) Ha, buni quyidagicha amalga oshirish mumkin.

Birinchi erkak: ikkita o'ng qo'l qo'lqopni ustma-ust kiyadi va

- oldin birinchi ayol bilan salomlashadi. So'ng tashqi qo'lqopni yechib, birinchi ayolga qoldiradi (demak, bu qo'lqopning ichi toza). Keyin
- ikkinchi ayol bilan salomlashib, ikkinchi qo'lqopni yechib unga qoldiradi (demak bu qo'lqopning ham ichi ham tashqarisida kasallik virusi bor).

Ikkinchi erkak:

• birinchi ayoldagi (ichi toza) qo'lqopni kiyib, birinchi ayol bilan salomlashadi. Keyin shu qo'lqop ustidan ikkinchi ayolning qo'lidagi ikkinchi qo'lqopni kiyib, ikkinchi ayol bilan salomlashadi.

Bu masalaning yechimida $2+2=2\cdot 2$ tenglik asos bo'ldi. Bunday tenglik boshqa natural sonlarda bajarilmaydi. Ya'ni $n + n = n^2$ tenglama yagona natural $n = 2$ yechimga ega. Shu sababli yuqoridagi masalaning $n = 3$ da yechimi yo'q. Boshqacha aytganda uchta o'ng qo'l qo'lqop, uchta erkak va 3 ta ayol orasida kassallikni yuqtirmasdan so'rashish imkoni yo'q.

TURMUSHIMIZDA sin(*x*), cos(*x*) NEGA KERAK?

Matematika fani deganda ko'p o'quvchilarning ko'z oldiga sin(x), cos(x) keladi. Bu fanga qiziqmaydigan yoki tushunishda qiynaladiganlar, ayniqsa, trigonometrik formulalarga kelganda yana ham zerikishni boshlaydi. «Nega kerak?» degan savol esa hatto matematikaga qobiliyati bor o'quvchini ham qiynaydi. Shu sababli bu bo'limda shu savolga qisqa javob berib[2], matematika o'qituvchilariga trigonometriya mavzusini qiziqarliroq o'tishda bu bo'limdagi materiallardan foydalanishni tavsiya qilamiz.

Nega sinus va kosinusni maktab o'quvchilarining ba'zilari qabul qilishi qiyin? Bizning fikrimizcha, bu funksiyalarning ta'rifi yaxshi tushuntirilmay keyingi murakkabroq mavzularga o'tilishi o'quvchilarning darsni o'zlashtirolmasligiga asosiy sababdir. Kasrni tushungan o'quvchiga sinus va kosinusni tushunish qiyin emas. Chunki bu funksiyalar ham a/b shaklida aniqlangan bo'lib, bu kasrning surat va maxraji to'g'ri burchakli uchburchakning katetlaridan iborat va bu nisbat uchburchakning o'tkir burchagi qiymatiga bog'liq. Demak, o'tkir burchak α (19-rasmga qarang) o'zgarsa, uchburchakning tomonlari ham o'zgaradi. Shu tomonlar o'zgarishining nisbati α ning funksiyasi bo'ladi. Bu funksiya mos

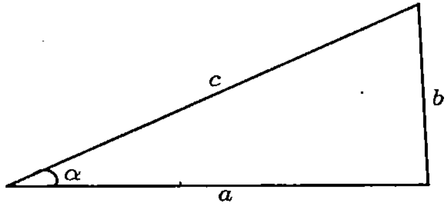
---

[2] *Bu bo'limni yozishda quyidagi saytdan foydalanildi: https://www.embibe.com/exams/real-life-applications-of-trigonometry*

ravishda sin, cos, tg shaklida belgilanadi, ya'ni (19-rasmga qarang):

$$\sin(\alpha)=\frac{b}{c},\ \cos(\alpha)=\frac{a}{c},\ tg(\alpha)=\frac{b}{a},\ ctg(\alpha)=\frac{a}{b}.$$

Bu funksiyalar trigonometrik funksiyalar deyiladi.



19-rasm. *To'g'ri burchakli uchburchak. α – o'tkir burchak. a va b katetlar, c – gipotenuza.*

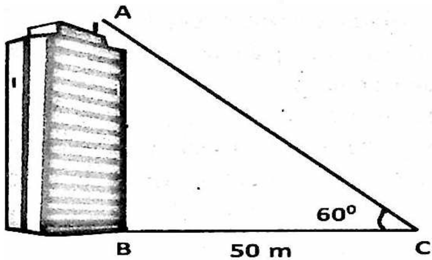
Trigonometriya arxitektor, astronom, fizik, muhandis va hattoki tergovchi kabi mutaxassislar tomonidan keng qo'llaniladi.

Trigonometriya birinchi bo'lib qaysi sohada ishlatilgan? Janob Morris Klaynning fikriga ko'ra, «Trigonometriya astronomiya bilan bog'liq bo'lib, navigatsiya va kalendarlarni yaratish uchun birinchi marta qo'llanilgan. Bu taxminan 2000 yil oldin edi. Geometriya ancha qadimiy fan bo'lib, trigonometriya geometriya ustiga yaratilgan». Biroq trigonometriyaning 4000 yil muqaddam kelib chiqqanligini qadimgi Misr, Messopotamiya va Hindistonning sivilizatsiyalaridan kuzatish mumkin.

Trigonometriya kundalik hayotda ishlatilishi mumkinmi?

Trigonometriyaning amaliy masalalarni hal qilishda bevosita qo'llanishini ko'rish qiyin, ammo u bizni juda ko'p zavqlantiradigan narsalarda qo'llaniladi (masalan, musiqada). Bilamizki, ovoz to'lqinlarda tarqaladi. Bu to'lqin sinus yoki kosinus funksiyasi kabi muntazam (davriy) ravishda harakat qilmasa ham, musiqani kompyuter yordamida rivojlantirishda foydali. Lekin kompyuter biz kabi musiqa tinglamaydi va tushuna olmaydi. Shuning uchun kompyuter uni matematik tarzda o'z tarkibidagi ovoz to'lqinlari bilan ifodalaydi. Demak, ovoz va musiqa yaratuvchilar hech bo'lmaganda trigonometriya asoslarini bilishi kerak. Yaratilgan yaxshi musiqa bizni xavotir, stressdan xolos qiladi.

Trigonometriyaning turli obyektlar (bino yoki tog'larning) balandligini o'lchashdagi o'rni.



20-rasm. *Bino balandligini o'lchashda trigonometriya.*

Agar siz biror bino balandligini o'lchamoqchi bo'lsangiz, buning uchun siz turgan joydan binogacha bo'lgan masofa va binoning eng baland nuqtasida qarashingiz uchun kerakli burchakni bilishingiz yetarli (20-rasmga qarang). Rasmdagi ABC uchburchak to'g'ri burchakli, demak, binoning balandligi AB quyidagicha topiladi:

$$tg(60^{\circ}) = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{50} \Rightarrow AB = 50 \cdot tg(60^{\circ}) = 50\sqrt{3}.$$

Shunga o'xshash, siz to'g'ri burchakli uchburchakning bir tomoni va bir o'tkir burchagini bilsangiz, qolgan burchak va tomonlarini topishingiz mumkin.

Video o'yinlardagi trigonometriya.

Kompyuter o'yinlari ichida Mario degan o'yin bor: Mario yo'l bloklari bo'ylab silliq sirpanib borishini kuzatib tursangiz, uni OY o'qi bo'ylab tekis harakat qilmayotganini ko'rasiz. Bu uning yo'lidagi to'siqlarni bartaraf etish uchun tanlaydigan yoysimon yoki parabolik harakat trayektoriyasidir. Trigonometriya Marioga bu to'siqlardan sakrashiga yordam beradi. Ma'lumki, o'yinlarni yaratuvchilar, AT va kompyuter dasturlarini ishlatishadi, shuning uchun trigonometriya bu yo'nalishlar uchun bir xil ahamiyatga ega.

Qurilishda trigonometriya.

Qurilishda quyidagilarni hisoblash uchun trigonometriya kerak:

– maydonlarning yuzini o'lchash;
– devorlarni o'zaro parallel va vertikal tarzda qurish;
– keramika plitalarni o'rnatish;
– bino tomini qurish;
– binoning balandligi va kengligini tanlash.

Arxitektorlar yer yuzasini va boshqa ko'plab qirralarni hisoblash, shuningdek, soyalar uzunliklari va yorug'lik burchagini topish uchun trigonometriyadan foydalanadi.

Parvoz muhandisligida trigonometriya. Parvoz muhandislari shamol tezligi va yo'nalishi bilan birga masofa va yo'nalishni hisobga olishlari kerak. Trigonometriya yordamida shamol tasvirida parvozni amalga oshirish tizimi o'rganiladi, bunda vektorlar bilan uchburchak hosil qilib, kerakli joyga qanday qilib yetib borish aniqlanadi. Trigonometriya samolyotni to'g'ri yo'nalishga olib keladigan uchburchakning uchinchi tomonini hal qilishga yordam beradi, samolyot aslida shamol kuchini o'z yo'nalishiga qo'shib o'tadi.

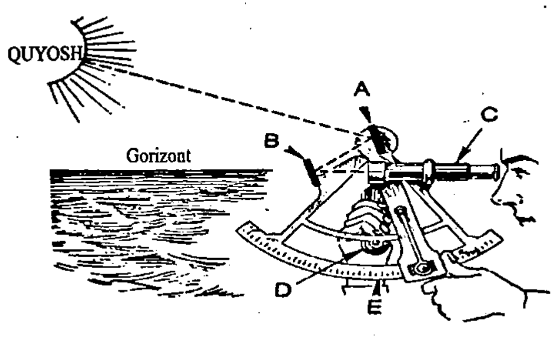
Fizikada trigonometriya. Fizikada trigonometriya vektorlarning koordinatalarini, ularning o'zaro skalyar va vektor ko'paytmasini topish, to'lqin mexanikasini (fizik va elektromagnit) aniqlash, shuningdek, magnit maydonlarning kuchini aniqlash uchun ishlatiladi. Hatto proyektiv harakatda trigonometriya juda keng qo'llaniladi.

Arxeologlar trigonometriyadan foydalanadimi? Trigonometriya qazish maydonchalarini to'g'ri bo'laklarga bo'lish uchun ishlatiladi. Arxeologlar turli xil asboblar yordamida o'lchashlarni amalga oshiradi, bu asboblarning ishlash prinsipi trigonometriyaga asoslangan. Ular yerosti suv tizimlarini masofadan turib o'lchashda ham trigonometriyadan foydalanishi mumkin.

Kriminologiyada trigonometriya. Kriminologiyada trigonometriya mudofaa in'ikosini hisoblash, avtohalokatda to'qnashuvga olib kelishi mumkin bo'lgan narsalarni baholash, biror joyga kelib tushgan obyektning qaysi burchak ostida kelgani, jinoiy ish sodir etilganda o'q qaysi burchak ostida otilganini va qancha masofadan kelganini aniqlash uchun yordam berishi mumkin.

Dengiz biologiyasidagi trigonometriya. Dengiz biologlari o'lchovlarni amalga oshirish uchun ko'pincha trigonometriyadan foydalanishadi. Misol uchun, trigonometriya turli xil chuqurlikdagi yorug'lik darajalari suvo'tlarning fotosintezlash qobiliyatiga qanday ta'sir qilishini aniqlash uchun ishlatiladi. Samoviy jismlar orasidagi masofani topish uchun ham trigonometriya kerak. Bundan tashqari, dengiz biologlari dengiz hayvonlari va ularning xulq-atvorini o'lchash, tushunish uchun matematik modellarni qo'llaydi. Dengiz biologlari yovvoyi hayvonlarning o'lchamlarini uzoq masofadan turib aniqlash uchun trigonometriyadan foydalanishadi. Dengiz kemalarini qurish va navigatsiyalash uchun trigonometriya ishlatiladi.

Navigatsiyada trigonometriya. Trigonometriya shimol, janub, sharq va g'arb yo'nalishlarini belgilash uchun ishlatiladi. U to'g'ri yo'nalishga ega bo'lish uchun kompas bilan qanday yo'nalishni olish kerakligini belgilaydi. Joyni aniqlash uchun navigatsiya paytida ishlatiladi. Bundan tashqari, qirg'oqdan dengizdagi nuqtagacha masofani aniqlash uchun ham ishlatiladi. Ufqni ko'rish uchun ham trigonometriya qo'llaniladi (21-rasmga qarang).



21-rasm. *Gorizontni ko'rish.*

Trigonometriyaning boshqa sohalarda qo'llanishi.

Okeanografiyada okeanlardagi to'lqinlar balandligini hisoblashda trigonometriyadan foydalaniladi. Sinus va kosinus funksiyalari davriy funksiyalar nazariyasi hamda tovush va yorug'lik to'lqinlarini tasvirlaydiganlar uchun muhim. Shuningdek, kortografiya va yo'ldosh tizimlarida ham trigonometriya qo'llaniladi.

OPTIMIZATSIYA MASALALARIDA MATEMATIKA

Optimallashtirish deganda matematika yoki kompyuter fanlari yordamida berilgan masalaning obyektiv ekstremum (minimum yoki maksimal) qiymatini topish tushuniladi.

Optimallashtirishga doir bir necha hayotiy masalalar keltiramiz:

Masala: Tekislikdagi A nuqtadan B nuqtaga eng optimal (minimal, qisqa) yo'l qanday?

Javob: A ni B bilan tutashtiruvchi kesma eng optimal yo'ldir.

Masala: 20 metr arqon bilan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi eng katta yuzali yer maydonini o'rab bering.

Javob: Hosil qilinadigan to'g'ri to'rtburchak tomonlarini x va y bilan belgilaymiz. Shunda arqon uzinligi quyidagicha taqsimlanadi: $2x + 2y = 20$ (to'g'ri to'rtburchak perimetri). Bizga $S = xy$ ni maksimal qiymat qiladigan x va y kerak. Bizda quyidagi tenglik bor: $x + y = 10$, demak, $y = 10 - x$. Bu tenglikdan foydalansak, $S = x(10 - x) = 10x - x^2$, ya'ni shoxlari pastga qaragan parabola tenglamasi hosil bo'ladi. Bu parabolaning uchi S uchun maksimal qiymatdir. Bu maksimal qiymatni quyidagicha ham topish mumkin:

$$S = 10x - x^2 = 25 - (x - 5)^2 \leq 25$$

Chunki ayirilayotgan sonning eng kichik qiymati 0 ga teng, ya'ni $(x - 5)^2 \geq 0$. Bundan $x = 5$ ni topamiz. Shunday qilib, eng katta yuza $25m^2$ bo'ladi. U holda masalada so'ralgan to'g'ri to'rtburchak tomonlari 5 m ga teng bo'lgan kvadrat ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi usul bilan osongina ko'rish mumkinki, bir xil perimetrli barcha to'g'ri to'rtburchaklar ichida kvadrat eng katta yuzaga ega.

Masala: Berilgan V hajmdagi olma sharbatini quyish uchun silindrsimon banka tayyorlash kerak. To'la sirt yuzasi S eng kichik bo'lgan (metall xarajatini kamaytirish uchun) qanday silindrsimon banka tayyorlash mumkin?

Javob: Bu masalani yechishda silindrning hajmi va to'la sirtini topish formulalari kerak bo'ladi:

$$V = \pi r^2 h, \quad S = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Bu formulalarda r silindr asosining radiusi, h esa silindrning balandligi. Demak, hajmi V bo'lgan silindrlar ichida to'la sirti eng kichik bo'lishi uchun uning balanligi va raduisi qanday munosabatni qanoatlantirishini topishimiz talab qilinmoqda. Yuqoridagi ikki formuladan quyidagi formulani keltirib chiqaramiz:

$$S = 2V/r + 2\pi r^2.$$

Shunday qilib, masalamiz S funksiyaning r bo'yicha minimumini topishga keltiriladi. Bu funksiyadan hosila olib, nolga tenglashtiramiz:

$$S' = 2(-V/r^2 + 2\pi r) = 0$$

Bundan esa $2\pi r^3 = V$ tenglamaga kelamiz. Buni yechishdan oldin, $\pi r^2 = V/h$ formuladan foydalanib, tenglama darajasini pasaytiramiz. Natijada $2r = h$ ni hosil qilamiz. Demak, yasalishi kerak bo'lgan silindrning balandligi asosining diametriga teng bo'lishi zarur ekan.

Bu masala yechimidagi bankani ko'z oldingizga keltiring. Bunday (balandligi bilan asos diametri teng) yasalishiga kam metall ketadigan bankalar hayotda kam uchraydi. Faqat do'konlarda shunday konserva bankasini ko'rish mumkin. Meva sharbati, koka-kola va boshqa ichimliklar bankasini tayyorlashda boshqa parametrlar ham hisobga olinadi. Masalan, uni qo'lda ushlash qulayligi, stollarni bezashda chiroyliroq ko'rinishi va boshqalar. Bankalarni hamma joyi bir xil qalinlikdagi metalldan bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, asoslaridagi material yupqaroq bo'lib, yon tomonidagisi qalinroq banka yasashda, optimal (kam xarajatli) bankaning ko'rinishi boshqacha bo'lishi tabiiy.

Turmushimizda kerak bo'ladigan ba'zi optimallashtirish masalalarini keltiramiz[3]:

Korporativ moliya:

Kapitalni boshqarish: Bankdan maksimal foyda olish uchun 1 oylik, 3 oylik, va 6 oylik investitsiyalar qanday bo'lishi kerak?

Kapital byudjetlashtirish: Foydani maksimallashtirish uchun kapital loyihalar birlashmasidan optimallashtirib tanlash.

Inventarizatsiyani boshqarish: Iqtisodiy buyurtma miqdorini model orqali ishlab chiqarish va saralash siyosatini boshqarish.

Optimal boshqarish: Pochta xizmatini optimallashtirish, bir necha manzilga minimal yo'l bilan borish.

Imkoniyatlarni rejalashtirish: Bir necha imkoniyatlar ichidan qaysi biri ochilgan yoki yopilgan bo'lishini aniqlash.

Investitsiyalar:

Portfolio optimallashtirish – Markovits modeli: Biror maqsad uchun mablag' ajratishda ba'zi parameterlarni bilgan holda, pulni qaytarib olishdagi yo'qotishlar xavfini kamaytirish.

Portfolioni optimallashtirish – Sharpe modeli: Ms Excelning regressiyon funksiyalarini ishlatib, bozor indeksi nisbiy aksiyalarini optimal boshqarish.

Bond Portfolio boshqarish: Obligatsiyalar uchun mablag' ajratish portfeli davomiyligi, muddatida investitsiyani teng ta'minlash hamda maksimal daromad qilish.

Ishlab chiqarish:

Mahsulot aralashmasi: Mavjud ehtiyot qismlar inventarizatsiyadan oshmaydigan qilib, foydani maksimallashtirish uchun ma'lum mahsulotlar har bir turidan qanchadan ishlab chiqarishni aniqlash.

---

[3] https://www.solver.com/examples-optimization-problems

Qorishtirish-kombinatsiyalash: Turli manbalardan olinadigan xom ashyolarning minimal qiymatini bilgan holda, Biz istagan xossalari bo'lgan bir moddani ishlab chiqarishdagi minimal xarajatli yo'lni topish.

Jarayonni tanlash: Bir mahsulotni kerakli miqdorda, kerakli vaqtda hamda kam xarajatli qilib tayyorlash uchun foydalanish kerak bo'lgan xizmatlar (turli xil tezlik, xarajatlar va sifat)ni optimal tanlash.

Xom ashyoni kesish: Xom-ashyoni har xil kerakli o'lchamdagi kichik bo'laklarga kesishda chiqindi miqdorini minimallashtirish.

Tarqatish:

Tashish modeli: Har bir mijoz uchun har bir fabrika yoki zavoddan yetkazib beriladigan, mijoz talabiga mos miqdordagi mahsulotni yuk tashish xarajatlarini minimal qilgan holda taqsimlash.

Yuklarni joylashtirish: Yuklash uchun mahsulot turlari har xil bo'lganda avtomobil ichiga, ularni isrof bo'ladigan joyni minimallashtirgan holda yuklash.

Sotib olish:

Shartnoma mukofotlari: Bir necha davlatlarga mahsulot yetkazish uchun, ma'lum narxlarni taklif qilgan yetkazib beruvchilarni har bir davlat uchun eng kam miqdori ko'rsatilgan tenderga imkon topish.

Inventarizatsiyani saralashni: Iqtisodiy buyurtma miqdori bilan inventarizatsiya siyosatini solishtirish.

Media rejalashtirish: Bir maqsad darajasiga erishish va jami xarajatlarni kamaytirish uchun turli ommaviy axborot vositalarida qancha reklama qilishni optimallashtirish.

Transport model: Belgilangan narxlarda turli yetkazib beruvchilardan, mahsulot sotib olish; yuk xarajatlari, shu jumladan, umumiy xarajatlarni kamaytirish.

Inson manbalari:

Jamoaviy rejalashtirish: Bir guruh odam sayohatga chiqmoqchi. Sayohat qaysi shahardan boshlansa, shu shahar bilan tugaydi. Jami xarajatlarni kamaytirish uchun turli aviakompaniyalar (va boshqa transport vositalari) xizmatidan optimal foydalanish.

Xodimlarni ofisga joylashtirish: Xodimlarga tashkilot ofislarini mavjud imtiyozlarni qanoatlantirishi maksimallashtirilgan holda belgilash.

Kadrlar boshqaruvi: Xodimlar sonini, bajarilishi kerak bo'lgan ish miqdoriga qarab minimallashtirish.

Ishchilar ko'chishi: Bir necha boshqa bazalardan ishchilar ko'chib o'tishidagi harakat vaqti va jami xarajatlarni kamaytirish xaritasini tuzish.

Havo yo'llari va yuk mashinalari:

Jamoaviy rejalashtirish: Uchish jadvali, topshiriqlar va bu davrlarda cheklashlarni hisobga olgan holda, parvozlar uchun eng samarali ekipaj ajratish.

Yo'naltirish: Har yo'nalish bo'yicha uchadigan samolyotning harakat yo'li, vaqti va xarajatlarini optimallashtirish.

Daromadlarni boshqarish: Chipta turi, ularni sotish narxlarini bilgan holda har bir turdagi chiptadan qanchadan sotishni aniqlash.

Neft va gaz:

Avtomobillarga yonilg'i tayyorlash: Maxsus hisoblangan reytinglarni, bosimni, xarajatlarini hisobga olib, uglevodorodlar va boshqa yonilg'i mahsulotlarning har biridan qanchadan aralashtirib, sifatli va arzon yonilg'i tayyorlash mumkin?

Gaz sotib olish shartnomasi: Gaz uchun qancha talab borligi noaniq bo'lganda, gaz sotib olish uchun shartnomalarni aniqlash, turli vaqtlar uchun qancha gaz saqlash miqdorini optimallashtirish.

Quvurdan maksimal foydalanish: turli narxlardagi takliflardan qaysi birini qabul qilishni optimallashtirish; quvurlar orqali sotish imkoniyatlaridan oshmagan holda, savdo daromadini eng yuqori darajaga chiqarish.

Yog'och, qog'oz va temir:

Kesish muammosi: Kelajakda ishlatishda kam chiqindiga chiqadigan optimal uzunlik o'lchovlarida yog'och, qog'oz yoki po'lat plitalarni kesish.

Qishloq xo'jaligi:

Rejalashtirish: Bozor talablaridan, hosil narxlari va o'sish sharoitlaridan kelib chiqib, har bir ekindan qanchadan ekishni aniqlash.

Ozuqa va mollar: Mavjud ozuqalarning bahosi, molning ozuqaviy talablarni hisobga olib, umumiy xarajatlarni kamaytirish uchun qaysi ozuqa va qaysi turdagi mollarni tanlashni aniqlash.

Elektr:

Generatorlarni boshqarish: Bir necha generatorlar ishlaydigan hududda, har bir generatorning qaysi vaqt oralig'ida ishlatish lozimligini topish orqali operatsion xarajatlarni minimallashtirish.

Elektr sotish: Davom etayotgan auksion muhitda elektr sotish qiymatini oshirish.

Moliyaviy xizmatlar:

Samarali fayllar: Zaxira prognozini va mutaxassislar aloqasi yoki daromadlarini bilgan holda investitsiyalar uchun optimal mablag ajratish.

Fond indeksini boshqarish: Kuzatish xatosini kamaytirish bilan portfolioni optimallashtirish va minglab qimmatli qog'ozlardan iborat bo'lgan fond indeksini aks ettirish.

KATTA TUB SON VA KRIPTOGRAFIYA

Kriptografiya axborotni kodlab, begonalardan sir saqlash uchun ishlatiladi. Masalan, bankning biror ma'lumotini e-mail bilan boshqa bankka yubormoqchi bo'lgan xodim xakkerlar bu ma'lumotni ochishining oldini olish uchun ma'lumotni kodlab yuboradi. Lekin zamonaviy kompyuterlar uncha mukammal o'ylanmagan kodlarni millionlab kombinatsiyalarni tez bajarib ochib berishi mumkin. Shu sababli zamonaviy kriptografiyaning asosiy masalalaridan biri hatto kompyuter ham qisqa vaqt (aytaylik, kamida 1 yil) ichida ochib bera olmaydigan kodlarni yaratishdir. Bu masala doim o'z dolzarbligini yo'qotmaydi.

Ikkinchi jahon urushi paytida K. Shennon tomonidan shunday kodlash taklif qilindiki, bu matematik yangilik yordamida ikkinchi jahon urushi kutilganidan oldinroq (kamida 2 yil) tugatildi va millionlab odamlarning hayotini va milliardlab dollarni saqlab qoldi.

Xo'sh, qanday kodni kompyuter ocholmaydi? U juda uzun bo'lishi kerakmi? Yo'q! Kodni kiritishda matematik nazariyalar va kompyuter dasturlashlari orasidagi bog'liqliklarni hisobga olish kerak.

Shunday mukammal kodlardan birini R. Rivest, A. Shamir va L. Adleman kiritgan ([27] ga qarang). Ularning kodlash sistemasi juda katta tub sonlar va sonlar nazariyasiga asoslangan. Bu kodlash usuli RSA-usuli deb ataladi. RSA-usuli quyidagicha: $n = p \cdot q$ son olinadi, bunda p va q lar juda katta tub sonlar. Bu kodlashda ma'lumot bitta M natural soni bilan almashtiriladi va M ni m natural darajaga ko'tarib, keyin n ga bo'lgandagi qoldig'i olinadi. Ya'ni M ma'lumotning kodi (uni C harf bilan belgilaymiz) quyidagicha bo'ladi:

$$C \equiv M^m \,(\mathrm{mod}\, n).$$

Demak kodlash kaliti ikkita natural son (m, n)ga bog'liq.

Kodni ochish uchun esa $d \cdot m \equiv 1(\mathrm{mod}(p-1)(q-1))$ taqqoslamani qanoatlantiruvchi biror d son olinadi va C ni d darajaga oshiriladi. So'ng natijani yana n ga bo'lgandagi qoldiq olinadi. Ya'ni, kodni ochish (uni $D(C)$ bilan belgilash):

$$\mathrm{D(C)} \equiv C^d(\mathrm{mod}\, n) \equiv (M^m \,\mathrm{mod}\, n)^d(\mathrm{mod}\, n).$$

Demak, kodni ochish kaliti ikkita natural son (d, n)ga bog'liq.

Kodlash sistemasining xavfsizlik darajasi n ni tub ko'paytichilarga ajratish qiyinchiligi bilan ifodalanadi. Chunki n ning bo'luvchilari p va q lar juda katta tub sonlardir. Bu sonlarni topish uchun kompyuterlar bir necha yil sarflashiga to'g'ri keladi.

Kodlashning RSA-usulida n soni sir saqlanmaydi, lekin p va q lar sir saqlanadi. Bundan esa d ning m dan qanday hosil qilinishi ham sirligicha qoladi.

Demak, RSA-usul uchun ikkita katta tub son kerak. Bunday sonlar qanday topiladi? Masalan, Mersennening tub sonlarini ishlatish mumkin. Mersenne katta tub sonlarni hosil qilish uchun $M_p = 2^p - 1$, formuladan foydalangan, bunda p tub son. Lekin M_p son ba'zi p lardagina tub bo'ladi, masalan M_2, M_3, M_5, M_7 va M_{13} lar tub sonlar. Ammo M_{11} tub emas. Ma'lumki, tub sonlar cheksiz ko'p. Shu sababli ularning ichida maksimali yo'q:

har qanday ma'lum tub sondan katta bo'lgan yana cheksizta boshqa tub sonlar mavjud. 2018 yilning dekabridagi ma'lumotga ko'ra bizga ma'lum eng katta tub son $M_{82589933} = 2^{82589933} - 1$, bo'lib, u 24862048 xonali sondir[4]. Bu sondan oldin 2017 yilda ma'lum bo'lgan eng katta son $M_{77232917}$ bo'lib, unda 23249425 raqam bor. Demak, p sifatida 2018 yilda topilgan eng katta tub son va q sifatida 2017 yilda topilgan eng katta tub son olinsa, RSA-usul ancha kuchli himoyalangan kod hosil bo'ladi.

Kodlashning boshqa sistemalari ham mavjud. Masalan, ba'zi sistemalarda kodlash uchun matritsalardan foydalaniladi. Kodni ochish uchun esa matritsaning teskarisi qo'llaniladi [32].

HOSILANING TURMUSHIMIZDA QO'LLANISHI

O'rta maktabda o'tiladigan hosila mavzusida uning ilm-fan, texnologiyada ishlatilishiga ko'plab misollar keltiriladi. Shunday bo'lsa-da, ehtimol siz izlagan misollar ular ichida yoqdir. Biz ana shunday misollardan ba'zilarini keltiramiz.

Iqtisodiyotda chakana sotuvchilarning mahsulot narxini oshirishi bu mahsulotga talabning kamayishiga sabab bo'lishi mumkinmi? Yoki talab biroz tushib, jami daromad oshishi mumkinmi? Iqtisodiyot tilida bu talabning narxga elastikligi deb ataladi va E harfi bilan belgilanadi. Elastiklik yordamida narxning o'zgarishi oqibatida tovarga talab miqdorining o'zgarishi darajasini baholash mumkin.

Faraz qilaylik, sotuvchi so'rov o'tkazadi va ma'lum bir mahsulotning kundalik talab koeffitsiyentini hisoblaydigan quyidagi formula hosil bo'ladi [38]:

$$Q = 20 - 0.5P,$$

bu formulada Q – mahsulot talab qilingan miqdor va P – mahsulotning narxi. Talabning narxga elastikligi E quyidagicha hisoblanadi:

---

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Largest_known_prime_numbe

$$E=\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}=-0.5\cdot\frac{P}{Q}.$$

Bu nimani anglatadi? Agar $|E|=1$ bo'lsa, talabning o'zgarish foizi narxdagi o'zgarish foiziga teng. Agar $|E|>1$ bo'lsa, talab miqdoridagi o'zgarish foizi narxning o'zgarish foizidan kattaroq, shuning uchun narx ko'tarilsa, miqdoriy talab daromadning tushishiga olib keladi va agar narx tushirilsa, miqdoriy talab shu darajada ortadiki, natijada umumiy daromadning ortishiga sabab bo'ladi. Agar $|E|<1$ bo'lsa, u holda talab miqdori o'zgarish foizi narx o'zgarish foizidan kichikroq bo'ladi va narx oshgan bo'lsa, talabning pasayishiga qaramasdan, jami daromadlar o'sib boradi va aksincha, agar mahsulot narxi tushirilsa, talab oshadi.

Misol uchun sotuvchi mahsulotni $P=30$ so'mga sotayotgan bo'lsin. U holda $Q=20-0.5\cdot30=5$ va $|E|=|-0.5\cdot30:5|=3>1$. Demak, bu holda sotuvchi narxni tushirishga majbur. Chunki agar sotuvchi narxni 2 so'mga oshirsa, ya'ni narx P = 30 + 2 = 32 bo'lsa, u holda $Q=4$ bo'lib, jami daromad esa quyidagicha bo'ladi:

$$P\cdot Q=32\cdot4=128.$$

Lekin 30 so'mlik narx uchun daromad

$$P\cdot Q=30\cdot5=150.$$

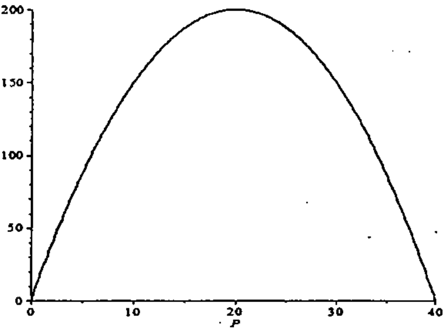
Ya'ni sotuvchi 150-128=22 so'm zarar qiladi. Agar sotuvchi narxni 2 so'mga arzon qilsa, ya'ni $P=30-2=28$ bo'lsa, bu holda $Q=6$ va daromad 168 bo'ladi. Shunda $168-150=18$ so'm qo'shimcha daromad qiladi. Endi qiziq savol tug'iladi: sotuvchi narxni qancha pasaytirsa, maksimal foyda qiladi? Bu masalani yechish uchun daromad formulasini narx P ning funksiyasi sifatida yozamiz:

$$f(P)=P\cdot Q=P(20-0.5P).$$

Demak, masala P ning qanday qiymatida $f(P)$ o'z maksimumiga erishadi? Buning uchun f dan hosila olib, nolga tenglashtirib P ning kritik qiymatini topamiz:

$$f'(P) = 20 - P = 0 \Rightarrow P = 20.$$

U holda (22-rasmga qarang) f ning maksimal qiymati $f(20) = 20(20 - 0.5 \cdot 20) = 200$ bo'ladi. Bu esa sotuvchi maksimal foyda qilishi uchun mahsulotni 20 so'mdan (30 so'm ham emas, 18 so'm ham emas) sotishi kerakligini bildiradi.



22-rasm. *f(P) funksiyaning grafigi. Uning maksimal qiymati f(20) = 200.*

Haqiqiy hayotda bu masala unchalik oddiy emas. Misol uchun, *f(P)* – ishonchli talablar funksiyasini qurish uchun qanday so'rov o'tkazasiz? Agar sotuvchi narxini 30 dan 20 so'mga tushirsa, u ko'proq mahsulot keltirishi kerak, buning uchun esa qo'shimcha yetkazib beruvchi kerak, qo'shimcha mablag'larni ayirboshlash kerak, chakana sotuvchiga kredit berish, ko'proq vaqt hamda kuch sarflashi kerak va hokazo.

ZILZILALARNI O'RGANISHDA LOGARIFM

Ma'lumki, zilzila tabiatda sodir bo'ladigan eng xavfli hodisalarning biridir[5]. Zilziladan yuzaga keladigan iqtisodiy zarar va insonlar halokati bo'yicha tabiiy ofatlar ichida birinchi o'rinni egallaydi.

---

[5] http://geografiya.uz/hayot-xavfsizligi/54-zilzila.html

Nega zilzila ro'y beradi? Yer po'sti anchagina yupqa bo'lib, u Yerni okean ostida 5-10 km, quruqlikda 75-85 kmgacha qoplaydi. Yer po'sti qattiq qatlam bo'lib, plitalar deb ataluvchi bir nechta bo'laklarga bo'lingan. Ma'lumki, yer po'sti ostida kuchlar harakatda bo'lib, u plitalarni bir yilda bir necha santimetrga siljitadi. Bo'linish plitalar harakati natijasida hosil bo'ladigan kuchlanishning oshib borishi natijasida yuz beradi. Bu harakatlar rivojlangan sari tog' jinslaridan energiya ajralib chiqadi. Energiyaning bir qismi atrofga seysmik to'lqinlar tarzida tarqaladi. Bu to'lqinlar yer yuzasiga yetib borgach, zilzila deb ataluvchi yer tebranishlarini keltirib chiqaradi.

Odamlar yuzlab yillar avval ham zilzila kattaligini uning keltirgan zarariga qarab aniqlashga harakat qilganlar. Ma'lum bir joyda keltirilgan zarar darajasi zilzila kuchi deb ataladi va u ballarda o'lchanadi. Zilzila kuchi aniq bir joyda zilzilaning keltirgan zarar darajasi bilan belgilanadi. Zilzila kuchi Merkallining 12 balli shkalasi yordamida o'lchanadi. Bu 12 balli shkala mutlaq shkala bo'lmasdan, keyingi izlanishlar davomida takomillashtirilib borilmoqda.

Zilzila kuchini baholashda yana boshqa – Rixter shkalasi ham mavjud. Bu seysmik energiyaning o'lchov birligiga asoslangan shkala bo'lib, zilzila gipotsentrida seysmik to'lqin sifatida nurlangan energiyani o'lchaydi. Uning o'lchov birligi qilib magnituda qabul qilingan. Yuqorida keltirilgan shkalaga ko'ra, zilzila kuchlanishi 12 balli bo'lib, shu energiya tufayli hosil bo'ladi va yer yuzasi bo'yicha har xil kuchlanishda (ballda) tarqaladi.

Zilzila kuchini Rixter shkalasida o'lchash uchun logarifm ishlatiladi. Misol uchun, Indoneziya zilzilasi (2004 yil 26 dekabrda) 9 ball bo'lgan. Bu zilzila gigant to'lqinlarini keltirib chiqardiki, natijada kamida 159000 kishini halok bo'ldi. 9 ball nimani anglatadi va u Italiyada (2009 yil 5 aprel) sodir bo'lgan 4.8 balli zilzila bilan qanday taqqoslanadi? Italiyada bo'lgan zilzilada kamida 300 kishi halok bo'ldi va 60 000 kishi uysiz qoldi. Bilamizki, 9 balli zilzila 8 balli zilziladan 10 barobar kuchliroqdir. Ballar farqlari kattaligi butun son bo'lmaganida, zilzilalarni taqqoslashda yana qiyinchilik paydo bo'ladi.

Rixter shkalasida zilzila bali quyidagi formula bilan topiladi:

$$R = \lg\left(\frac{x}{0.001}\right),$$

bu erda x zilzilaning seysmografda qayd etilgan kuchi.

Bu formuladan x ni topsak:

$$x = 0.001 \times 10^R.$$

Qiymatlari x_1 va x_2 bo'lgan ikki zilzilalarni solishtirish uchun quyidagi nisbatni qaraylik:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{0.001 \times 10^{R_2}}{0.001 \times 10^{R_1}} = 10^{R_2 - R_1}.$$

Shunday qilib, ikkita zilzila kuchlari farqi $d = R_2 - R_1$ bo'lsa, ularning kuchi 10^d martaga farq qiladi. Masalan, Indoneziya va Italiya zilzilalari orasadagi farq $d = 9.0 - 4.8 = 4.2$. Shuning uchun Indoneziyadagi zilzila Italiyadagidan $10^{4.2} \approx 15800$ marta kuchlidir. Demak, $d = 4.2$ farqi kichik ko'rinsa-da, zilzilalar farqi aslida juda katta ekan. Zilzila va logarifm haqidagi ko'proq ma'lumotni [32] dan o'qish mumkin.

INSON HISSIYOTINI O'LCHASHDA LOGARIFM

Bu bo'limda inson hissiyotlarining matematik o'lchovini beramiz. Oldin hissiyot haqida qisqacha ma'lumot[6] beramiz. Inson idrok qilayotgan (ko'rayotgan, eshitayotgan), bajarayotgan, o'ylayotgan, orzu qiladigan narsalarga befarq bo'lmaydi. Ba'zi predmet, shaxs, harakat, voqealar bizni quvontiradi, boshqalari xafa qiladi, yana boshqalari g'azab-nafratimizni uyg'otadi. Masalan, biz xavf ostida qolganimizda qo'rquvni his qilsak, biror muammo ustidan g'alaba qozonish yoki qiyinchilikni yengish esa zavq uyg'otadi. Odamlarning o'zi bajarayotgan narsaga munosabatini boshdan kechirishi his-tuyg'u (yoki emotsiya) deyiladi. His-tuyg'u manbayi biz idrok qiladigan, ish ko'radigan

[6] http://genderi.org/reja-hissiyot-haqida-tushuncha.html

predmet va hodisalarning xususiyatlari vujudga keltiradigan ehtiyoj, intilish va istaklardir. Bizning faoliyatimizni (mehnat, o'qish, o'yin), uning muvaffaqiyati va mag'lubiyatini ham his-tuyg'ular uyg'otadi.

Hissiyot voqelikning aks ettirilishidir. Odam ayni bir paytda tirik organizm va jamiyat a'zosi bo'lishi bilan birga, o'z miyasida alohida shaxs sifatida ayrim obyektlar bilan qiladigan obyektiv munosabatlarni aks ettiradi. Odam miyasida olamni aks ettirishning ana shunday o'ziga xosligi hissiyot sohasi yoki inson shaxsining emotsional tomoni hisoblanadi.

Hissiyot – odam miyasida uning real munosabatlarining, ya'ni ehtiyojlar subyektining uning uchun ahamiyatli bo'lgan obyektlar bilan bo'lgan munosabatlardagi aks ettirilishidir. «Hissiyot» tushunchasini faqat tirik mavjudotlar miyasida ularning ehtiyojlarini qondiradigan va qondirishga qarshilik qiladigan obyektlarga bo'lgan munosabatlarni aks ettirish haqida gap ketganda qo'llash mumkin. Belgilari yaqqol namoyon bo'ladigan hissiyotlarni boshdan kechirishdan iborat bo'lgan ruhiy jarayon sodir bo'lishining muayyan shakligina emotsiya deb ataladi. Masalan, vatanparvarlik, muhabbat, javobgarlik hissini emotsiya deb bo'lmaydi.

Hissiy jarayonlarning har xil shakllari normal odamda yakka holda mavjud bo'lmaydi. Minglab kechirilayotgan emotsiya, affekt, kayfiyatlarda aniq yashaydigan umumlashtirilgan hislar yuksak hislar deyiladi. Bu hislar o'z tarkibiga birmuncha soddaroq turli hislarni oladi. Hislarni o'lchashda quyidagi qonun mavjud:

Veber-Fexner qonuni. Psixofizikaning ushbu asosiy qonunini nemis fiziologi va anatomi E. G. Veber ochgan (1834) bo'lsa, uni fizik olim G. T. Fexner rivojlantirgan. Bu qonunga asosan, bir-biriga yaqin bo'lgan ikki taassurotni farq qilish, faqat taassurot kuchiga emas, balki retseptorlar (masalan, teridagi bosim sezuvchi hujayralar) ning zich va siyrakligiga, markaziy asab sistemasining funksional holatiga ham bog'liq. Taassurot kuchi geometrik progressiya bilan oshsa, sezgi kuchi arifmetik progressiya bilan oshadi.

Veber-Fexner qonunining boshqacha talqinida, biror narsani his qilish intensivligi tashqi bezovta qiluvchi intensivligining logarifmiga to'g'ri proporsionaldir:

$$P = k \lg \frac{S}{S_0},$$

bu yerda P – his qilish intensivligi (kuchi) va S – tashqi bezovta qiluvchi (sezgi) kuchning qiymati; S_0 tashqi bezovta qiluvchining intensivligining pastki chegarasi (ya'ni, agar $S < S_0$ bo'lsa, S sezilmaydi, bezovtalik bo'lmaydi); k hissiyot subyektiga bog'liq holda doimiy hisoblanadi.

Misol: Sakkizta lampochkalik chiroq bizga to'rt lampochkali chiroqdan qancha yorug'roq ko'rinsa, to'rtta lampochkali chiroq ikkita lampochkali chiroqdan shuncha yorug'dir. Ya'ni bizga yorqinlik oshish darajasi o'zgarmas ko'rinishi uchun, lampochkalar soni bir xil nisbatda ko'payishi kerak. Misol uchun, agar ikkita lampochkali chiroqqa bitta lampochka qo'shsangiz, u holda yorqinlikning aniq o'sishi sezilarli bo'ladi. Agar 12 ta lampochkali chiroqqa bitta lampochka qo'shsak, yorug'likning oshishi unchalik yaxshi sezilmaydi.

KO'RINADIGAN YULDUZ KATTALIGIDA LOGARIFM

Ko'rinma (ko'rinadigan) yulduz kattaligi fotometr yordamida o'lchangan yulduzning yorug'ligini belgilovchi ko'rsatkichdir. Ko'rinma yulduz kattaligi m yulduzdan kelayotgan nurlanish oqimi yoki yulduz nuri yoritilganlik bilan logarifmik bog'lanishga ega. Ko'rinish kattaligi, mos ravishda, m_1 va m_2 bo'lgan ikki obyekt – 1 va 2 ning ko'rinish kattaligi farqi quyidagicha topiladi

$$m_1 - m_2 = -2.5 \lg\left(\frac{L_1}{L_2}\right),$$

bunda, L_1 (mos ravishda L_2) 1-obyektning (2-obyektning) yorug'ligi.

To'lin Oyning ko'rinish kattaligi –12.7 ga teng, Quyoshning ko'rinish kattaligi esa –26.7 ga teng. Oy va Quyosh ko'rinish kattaliklari farqi:

$$m_1 - m_2 = -12.7 - (-26.7) = 14.$$

Demak, bu yulduzlarning yoritilish darajalari nisbati:

$$\frac{L_2}{L_1} = 2.512^{m_1 - m_2} = 2.512^{14} \approx 400000.$$

Shunday qilib, Quyosh Oyga nisbatan 400000 marta yorug'-roq ekan.

Ko'rinma yulduz kattaligi m ning bir necha tizimlari mavjud. Masalan, hozirgi paytda keng qo'llaniladigan elektrofotometr yordamida 3 xil rangda o'lchanadigan ko'rinma yulduz kattaliklari tizimi quyidagicha: II, K, V (U — ultrabinafsha, K — ko'k va V — vizual). Masalan, Qutb yulduzining vizual (V) nurlarda kattaligi 2.12 ga teng deb qabul qilingan.

AXBOROT MIQDORINI HISOBLASHDA LOGARIFM

Bu bo'limda [25] dan foydalanib, logarifm funksiyasining axborot nazariyasida qo'llanishiga doir misollar keltiramiz.

Har qanday jarayon yoki hodisa axborotlar manbayi bo'lib, biror-bir ma'noga ega bo'lishi va ma'lum bir harakat uchun signal vazifasini bajarishi kerak.

Axborot — insonning kuzatishi va boshqa odamlar bilan o'zaro muloqotida bizni o'rab olgan moddiy dunyo haqida olayotgan ma'lumotlar sistemasidir. Odamlar og'riq sezayotganda, ochiqqanda, sovqotayotganda, ko'rayotganda, eshitayotganda, boshqalar bilan gaplashayotganda, kitob o'qiganda va hokazolarda axborotlar qabul qiladilar.

XX asr o'rtalaridagi fan va texnika taraqqiyoti turli-tuman axborotlarni nihoyatda ko'paytirib yuborgan. Shu sababli axborotning ilmiy asosda o'rganilishga katta e'tibor berilmoqda. Axborotlar nazariyasi AT va kibernetika fani uchun muhim ahamiyatga ega.

Turmushimizda va ilmiy sohalarda, insonlar ma'lumotlarni uzatish uchun ularni kodlashdan foydalanishadi. Kodlashning qo'llanilishi katta hajmdagi axborotlarni katta bo'lmagan alifbo yordamida uzatishga imkon beradi. Istalgan axborotni ikki belgi 0 va 1 yordamida kodlash mumkin. Biroq buyuk yaratuvchi zot kodlashning tabiiy usullarini ham yaratgan. Bunday usullar fan uchun katta qiziqish uyg'otadi. Misol tariqasida ona qornidagi chaqaloq hujayrasida katta yoshdagi odam organizmi haqidagi irsiy axborotni o'rganish usulini keltirish mumkin.

Har qanday signalni uzatish uchun energiya sarflanadi, biroq uzatilayotgan axborotning miqdori va uning ma'nosi signalning energiyasiga bog'liq bo'lmaydi. Axborotning miqdorini hisoblash uchun xuddi arifmetik misollarni yechayotganda konkret buyumlarni o'ylanmaganidek, ma'lumotlarning ma'nosi esdan chiqariladi. Masalan, 2 va 3 sonlarini qo'shishda 5 soni hosil bo'ladi, bunda qanday narsalar olami, raketami yoki pulmi qo'shilayotganining ahamiyati yo'q.

Axborot miqdori qanday hisoblanadi? Agar axborot bizning bilmaslik darajamizni kamaytirsagina, ya'ni uni yig'ish jarayoni bizning obyektni bilish haqidagi ma'lumotimizni oshirgandagina ahamiyatga ega bo'ladi. Masalan, shifokor kasallik varaqasini o'qiganida, u bemorning kasalliklari haqida axborot oladi. Ma'lum bo'lgan hodisa haqidagi ma'lumot hech qanday axborotga ega bo'lmaydi. Masalan, ma'lumotli kishi uchun oyning 15-kunidan keyin 16-kuni kelishi haqidagi ma'lumot hech qanday axborot bermaydi.

Axborot miqdori o'lchovini ma'lum bir kutilayotgan hodisaning noaniqligining o'zgarishi sifatida topish mumkin. Faraz qilaylik, k ta hodisaning har biri bir xil ehtimol $p = 1/k$ bilan sodir bo'lsin. Bu holda birgina hodisaning noaniqlik darajasi k ga bog'liq bo'ladi: $k = 1$ bo'lganda, ehtimoliy hodisani oldindan aytish aniq bo'lib, noaniqlik nolga teng bo'ladi; agar k katta bo'lsa, hodisani oldindan aytish qiyin, bunda noaniqlik darajasi kattadir.

$f(k)$ funksiya axborot miqdori o'lchovi yoki noaniqlikning o'zgarishi darajasini ifodalasin. Ma'lumki, $k = 1$ bo'lganda, bu funksiyaning qiymati nolga teng bo'lib, k o'sganda, u ham o'sadi. Bundan tashqari f funksiya quyidagi shartni qanoatlantirishi kerak.

Faraz qilaylik, bir-biriga bog'liq bo'lmagan ikkita kuzatish olib borilayotgan bo'lsin, ularning biri k ta teng ehtimollik (ya'ni $1/k$) hodisa, ikkinchisi esa l ta teng ehtimollik (ya'ni $1/l$) hodisa bo'lsin. Albatta, birinchi va ikkinchi tajribalarda tasodifiy hodisalarning birgalikda sodir bo'lishidagi $f(kl)$ noaniqlik $f(k)$ va $f(l)$ dan katta hamda har bir tajribada chiqadigan noaniqliklar yig'indisiga teng:

$$f(kl) = f(k) + f(l).$$

Bu funksional tenglamaning bir yechimi sifatida $f(k) = \log_a(k)$ funksiyani olish mumkin. Chunki

$$\log_a(kl) = \log_a k + \log_a l.$$

Bundan tashqari, topilgan funksiya $f(1) = \log_a 1 = 0$ shartni qanoatlantiradi va k ortishi bilan o'sadi. Logarifmlarning bir asosidan boshqa asosga o'tganda $\log_a k$ funksiyani o'zgarmas ko'paytuvchiga ko'paytirishga keltirilgani uchun logarifmning asosi hal qiluvchi rol o'ynamaydi va u faqat axborotlar miqdori birliklarini tanlashga ta'sir qiladi. Shunday qilib, $\log_a k = \ln k$ funksiyani k ta teng ehtimolli hodisalarda noaniqlik o'lchovi (axborot miqdori) deb hisoblash mumkin.

Turli tasodifiy hodisalarning noaniqliklari qo'shilgani sababli har bir hodisaning noaniqligi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\log_a k = -\frac{1}{k}\log_a\frac{1}{k} = -p\log_a p.$$

SUV TA'MINOTI MASALASI

Quyidagi qizigarli masalani [38] ga asoslanib keltiramiz. Singapur atrof-muhitni muhofaza qilish vaziri vazifasini bajaruvchi S.S. Lim shunday degan edi: «Agar biz toza suvni 20 foizga orttirsak va shu bilan birga, ishlatilgan suvning 30 foizini qayta to'ldirsak, u holda suvning umumiy sig'imini 70 foizga oshirgan bo'lamiz». Limning gapi to'g'rimi? Buni tekshiramiz. Faraz qilaylik, bizda mavjud toza suvning hajmi V bo'lsin. Agar uni 20 foizga oshirsak $1.2V$ hosil bo'ladi. Uning hammasi qachondir ishlatiladi, shu sababli uning 30 foizi $0.3 \times 1.2V$ ga teng. Demak, umumiy suv miqdori $1.2V + 0.3 \times 1.2V = 1.56V$. Ya'ni 56 foizga oshadi. Ammo bu faqat birinchi meliorativ holatdan keyin sodir bo'ladi. Qaytarilgan suv bir muncha vaqt o'tgach ishlatiladi va keyinchalik uning 30 foizini yana qaytarishimiz mumkin. Shunday qilib, ikkinchi meliorativ holatdan keyin suvning umumiy hajmi quyidagicha bo'ladi:

$$1.2V + 0.3 \times 1.2V + 0.3^2 \times 1.2V$$

Melioratsiya jarayonini cheksiz davom ettirishda suvning umumiy miqdori quyidagicha bo'ladi:

$$1.2V + 0.3 \times 1.2V + 0.3^2 \times 1.2V + 0.3^2 \times 1.2V + \ldots = 1.2V(0.3 +$$

$$+ 0.3^2 + 0.3^3 + \ldots) = 1.2V \times \frac{1}{1-0.3} \approx 1.71V.$$

Ko'rinib turibdiki, Limning gapi o'rinli ekan, ya'ni bizning suv ta'minotimiz 70 foizdan ko'proqqa oshishiga erishdiki. O'quvchida savol tug'iladi: Biz suvni 70 foizga orttirish uchun geometrik progressiyadan foydalandik, uning cheksizta hadini qo'shdik. Demak, 70 foizni hosil qilish uchun juda uzoq vaqt, ko'p yillar kerakmi? Ma'lum vaqtdan keyin meliorativ holatni 70 foizga oshirishga erishishning iloji bormi? Yaxshiyamki, biz juda uzoq kutishimiz shart emas! Uchinchi meliorativdan so'ng suvning umumiy hajm miqdori $1.7004V$ bo'ladi. Chunki dastlabki suv hajmi V ga bog'liq bo'lmasdan 0.3^k son juda tez nolga yaqinlashadi, shu sababli 70 foizga juda tez erishamiz.

KIMYO FANIDA MATEMATIKA

Kimyo – moddalarning tarkibi, tuzilishi va xossalarini, ularning o'zgarishlarini hamda moddalarning o'zgarishida sodir bo'ladigan hodisalarni o'rganadigan fandir. Kimyo fani fizika, matematika, biologiya fanlari bilan chambarchas bog'liqdir. Har qanday hayotiy jarayonda organizmda moddalar kimyoviy jihatdan uzluksiz o'zgarib turadi.

Kimyo fanida matematikaning o'rni beqiyos. Matematikaning kimyo fanida o'z tatbigini topmagan nazariyasi yo'q: matematik tahlil va algebra kvant kimyosida keng qo'llaniladi. Ehtimollar nazariyasi kimyoviy statistikaning asosi, graflar nazariyasi esa organik kimyoda qo'llaniladi va hokazo. Zamonaviy jurnallarda kimyoga doir chop etilayotgan maqolalarning asosini matematik mulohozalar egallagan. Ushbu bo'limda [11] kitobga asoslanib ba'zi qiziqarli ma'lumotlarni keltiramiz.

Matematik tenglamalar va ishlatiladigan usullar kimyo fanida qo'llanishi uchun mavhum miqdor bilan emas, balki atom va molekulalarning o'ziga xos xususiyatlari va tabiiy cheklovlariga mos keluvchi miqdorlar bilan berilishi kerak. Ba'zan bu cheklovlar tenglamaning mumkin bo'lgan yechimlari sonining keskin qisqarishiga olib keladi. Boshqacha aytganda, matematikaning kimyoda ishlatiladigan tenglamalari va ularning yechimlari kimyoviy ma'noga ega bo'lishi kerak. To'liq tasavvur hosil qilish uchun ba'zi misollarni keltiramiz:

1. Molekulalarning atomlari soni musbat butun son bo'lishi kerak. Masalan, matematikada $12x + y = 16$ tenglama to'g'ri chiziqning tenglamasi bo'lib, uni qanoatlantiruvchi, haqiqiy sonlardan tashkil topgan (x, y) juftliklar cheksiz ko'p, xususan, bu juftliklar ichida butun sonlardan tashkil topganlari ham bor. Lekin kimyogar uchun $12x + y$ ifoda C_xH_y uglevodorodning molekulyar massasini tasvirlaydi (12 – atomik uglerod massasi, 1 – vodorod). Molekulyar massasi 16 bo'lgan yagona uglevodorod bor, bu metan – CH_4. Shuning uchun $12x + y = 16$ tenglamaning faqat bir yechimi $x = 1$, $y = 4$ ning kimyoviy ma'nosi bor. Masalan, $x = 2$, $y = -8$ va $x = 0$, $y = 16$ larning kimyoviy ma'nosi yo'q.

2. Valentlik deyarli doim musbat butun son. Kimyo fanida valentlik deganda ma'lum biror element atomining boshqa element atomi bilan kimyoviy bog'lanish hosil qilib birlashish yoki almashish xususiyati tushuniladi. Valentlikning o'lchov birligi sifatida vodorod (valentligi birga teng) yoki kislorod (valentligi ikkiga teng) olinadi. Bunda element atomining valentligi son jihatdan shu element atomi bilan birika oladigan vodorod atomlari soniga teng. Kvant kimyosining ayrim qo'llanishida kasr qiymatli valentlik uchraydi. Shu sababli, valentlikning qiymatini deyarli doim musbat butun son deb qarash mumkin. Misol uchun, uglerod chekli aralashmalarida har doim ham to'rt valentlidir. Bu kimyoviy formulaga cheklovlar qo'yadi. Masalan, barcha uglevodorodlardagi vodorod atomlarining soni juft bo'lishi kerak.

Masala: Tarkibida n ta uglerod atomlari mavjud bo'lgan uglevodorodda vodorod atomlarining maksimal sonini toping.

Yechim: Javob $2n + 2$. Buni isbotlash uchun matematik induksiya metodidan foydalanamiz. Agar $n = 1$ bo'lsa, u holda yagona uglevodorod – CH_4. Bunda vodorod atomlari soni $2 \cdot 1 + 2 = 4$. Demak, $n = 1$ da formula to'g'ri. Endi faraz qilaylik, formula n uchun to'g'ri bo'lsin, ya'ni uglevodorodda n ta uglerod atomi bo'lganda, undagi vodorod atomlari soni ko'pi bilan $2n + 2$ ta bo'lsin. Bu formulani n ni $n + 1$ bilan almashtirganda ham o'rinli ekanini isbotlaymiz. Ya'ni, uglerod atomini bittaga oshiramiz, bu yangi atom C_nH_{2n+2} molekulaga, vodorod atomi o'rniga qo'shiladi. Bunda, yangi atomning to'rtvalentlik ekanligidan, uning biri C-C bog'lam hosil qiladi va qolgan uchtasi C-H bog'lam hosil qiladi. Sunday qilib, yangi uglevodoroddagi vodorod atomlari soni quyidagiga teng:

$$2n + 2 - 1 + 3 = 2(n + 1) + 2.$$

Matematik induksiya metodi bilan formula isbotlandi.

Bu masalada topilgan vodorodning maksimal atomlari soni $2n + 2$ dan foydalanib, ba'zi kimyoviy moddalarning molekulyar massasini bilgan holda, uning formulasini yozish mumkin. Masalan, molekulyar massasi 78 bo'lgan uglevodorodning 6 ta formal formulasi mavjud: CH_{66}, C_2H_{54}, C_3H_{42}, C_4H_{30}, C_5H_{18}, C_6H_6. Bu formulalardan faqat oxirgisi kimyoviy ma'noga ega. Barcha qolganlarida vodorod atomlari soni $2n + 2$ dan oshadi. Masalan, birinchi formulada $n = 1$ va $66 > 2 \cdot 1 + 2 = 4$; ikkinchi formulada $n = 2$ va $54 > 2 \cdot 2 + 2 = 6$.

3. Fizik miqdorlarning kimyoviy moddalar va reaksiyalarda ishlatilganlari faqat musbat sonlar bo'lishi mumkin: massa, hajm, konsentratsiya, reaktsiya tezligi va boshqalar.

Kimyogarlar odatda, muvozanatli aralashmaning tarkibini hisoblash masalalarini hal qilishlari kerak bo'ladi. Bu masalada ko'phadlar ildizini topishga to'g'ri keladi. Algebraning asosiy teoremasiga ko'ra n-darajali ko'phadning n ta kompleks ildizlari bor. Biroq kimyoda paydo bo'lgan barcha tenglamalarning har doim bitta ildizi kimyoviy ma'noga ega. Buni tushunishga bir misol keltiramiz: azot va vodorodning 1 : 3 nisbatli aralashmasini muvozanatga yetgunicha qizdirish natijasida har bir moddaning qancha qismi ammiakka aylangani hisoblansa, aralashmaning chekli temperatura va 100 atom bosimidagi muvozanat o'zgarmasi $5 \cdot 10^{-6}$ ga teng bo'ladi. Haqiqatdan, reaksiya tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$N_2 + 3H_2 = 2NH_3.$$

Reaksiyadan oldin, reaksiya paytida va keyingi nisbatlar uchun jadval beramiz. Reaksiyadan hosil bo'ladigan azot miqdorini x bilan belgilaymiz.

Modda miqdori (mol)	N_2	H_2	NH_3	Jami
Boshlang'ich aralashma	1	3	0	
Reaksiya vaqtida	x	$3x$	$2x$	
Muvozanatdagi aralashma	$1-x$	$3-3x$	$2x$	$4-2x$

Noma'lum x ni muvozanat o'zgarmasi K ning bosim P orqali ifodalangan tenglamasidan topish mumkin:

$$K = \frac{P_{NH_3}^2}{P_{N_2} P_{H_2}^3} = \frac{\left(\frac{2x}{4-2x}P\right)^2}{\left(\frac{1-x}{4-2x}P\right)\left(\frac{3-3x}{4-2x}P\right)^3} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

Bu tenglama x ga nisbatan to'rtinchi darajali tenglamadir. Agar $P = 100$ atm bosimi olsak, tenglama quyidagi 4 ta haqiqiy yechimga ega bo'ladi:

$$x_1 = -0.187, \quad x_2 = 0.12, \quad x_3 = 1.88, \quad x_4 = 2.187.$$

Bu yechimlardan faqat bittasi, ya'ni x_2 konsentratsiyaning musbatlik shartini qanoatlantiradi. Demak, qolgan yechimlar kimyoviy ma'noga ega emas.

4. Kimyoda irratsional son yo'q. Matematikada m/n, (bunda $m \in Z$, $n \in N$) shaklda yozib bo'lmaydigan haqiqiy sonlar irratsional sonlar deyiladi. Ma'lumki, kimyo fani tajribalarga asoslanadi. Har bir tajriba uchun qilinadigan o'lchashlar natijasi yoki butun sonlarda yoki ratsional sonlarda beriladi. Misol uchun, biror moddaning o'zgarish qiymati 1.414 ga teng deb olinishi mumkin, lekin $\sqrt{2}$ ga teng deb olinmaydi. Shuning uchun π va e irratsional sonlar kimyoviy hisob-kitoblarda mos ravishda 3.14 va 2.72 ratsional sonlar bilan almashtiriladi.

5. Kimyoda «cheksiz» tushunchasi yo'q. Koinotning ko'zga ko'rinadigan qismida juda katta sondagi atomlar bor, ammo bu son cheklangan. Kimyogarlar tomonidan ishlatiladigan eng katta sonlar qaysi? Koinotdagi atomlarning soni 10^{80} ga teng, yerda 10^{50} ta atom, odam tanasida esa ularning taxminiy soni 10^{27}. Taqqoslash uchun, matematik Hardining [29] ta'kidlashicha, matematik maqsadlarda ishlatilgan sonlarning eng kattasi quyidagi sondir:

$$10^{10^{10^{34}}}.$$

PRAGA SOATI

Praga shahridagi qadimgi maydonda ajoyib soat bor. Bu maydon sayyohlar juda ko'p keladigan joydir [7]. Bu soat Kadan mexanigi Mikulas tomonidan 1410-yilda qurilgan deb hisoblanadi (23-rasmga qarang).

23-rasm. *Praga soati.*

Bu soat astronomik soat deb ataladi. Unda astronomik xususiyatlar ifodalangan: Oy va Quyoshning pozitsiyasi soatlab ko'rsatiladi. Bundan tashqari, soat vaqtni ajoyib tarzda bong urib aniqlaydi. Buni tushuntirish uchun quyidagi davriy ketma-ketlikni qaraylik:

$$123432123432123432\ldots$$

Bu ketma-ketlikning ba'zi hadlari orasiga (,) vergul va ba'zi hadlari orasiga (+) plus qo'yib, barcha natural sonlarni odatiy tartibda hosil qilamiz:

$$1,2,3,4,3+2,1+2+3,4+3,2+1+2+3,4+3+2,1+2+3+4,\ldots \quad (24.1)$$

Masalan, 3 + 2 shuni anglatadiki, soat 5 ni Praga soati quyidagicha bong urib aniqlaydi:

bong bong bong tinish bong bong

Bu soat yaqin atrofdagi aholiga qulay, chunki bir sutka 24 soatdan iborat. Masalan, 16 bilan 17 ni ajratish oson (X = bong):
16 uchun bonglar ketma-ketligi:

X XX XXX XXXX XXX XX X (1+2+3+4+3+2+1)

17 uchun esa butunlay boshqa bonglar ketma-ketligi:

XX XXX XXXX XXX XX X XX (2+3+4+3+2+1+2).

(24.1) ketma-ketlik davri 6 ga teng bo'lib, 1,2,3,4,3,2 larning takrorlanishidan iborat. Bu ketma-ketlikni Praga soati deb ataymiz. Agar ketma-ketlikni umumlashtirsak, quyidagi qiziqarli matematik masalani hosil qilamiz: *Praga soati deb natural sonlarning shunday davriy ketma-ketligiga aytamizki, undagi ba'zi hadlar orasida plus ishorasini qo'yib, barcha natural sonlarni o'sish tartibida (odatiy tartibda) hosil qilish mumkin bo'lsin. Agar P harfi bilan Praga soatini (davriy ketma-ketlikni) belgilasak, ya'ni*

$$P = a_1, a_2, \ldots, a_d, a_1, a_2, \ldots, a_d, a_1, \ldots$$

bunda $a_1 = 1$ (yuqoridagi (24.1) da $d = 6$). Praga soati p ning moduli deb $m = a_1 + a_2 + \ldots a_d$ ga aytiladi. Eski Praga soati (1 2 3 4 3 2) dan boshqa Praga soatlarini hosil qilish mumkin, masalan, (1 2 3 2 2 3 2). Chunki har qanday natural sonni ikki yoki undan ortiq sonlarga ajratish mumkin (bu erda 4 ni 2 2 ga). Qisqa ketma-ketlikdan olingan har qanday ketma-ketlik buzilgan soat deyiladi va eng qisqa ketma-ketlik aniq soat deb ataladi.

Masala. Hamma Praga soatlarini quring, ya'ni yuqorida keltirilgan xossali barcha davriy ketma-ketliklarni toping.

Shubhasiz, bu masalani yechish uchun dastlab barcha aniq Praga soatlarini topib, keyin ulardan buzilgan soatlarni hosil qilish mumkin. Demak, masalani yechish uchun quyidagi teorema yetarli:

Teorema. Har bir natural m son uchun shunday aniq Praga soati mavjudki, uning moduli m ga teng.

Isbot. Oldin quyidagi ta'rifni kiritamiz: t natural son uchun $t(t + 1)/2$ ga t-uchburchak son deyiladi. Ma'lumki,

$$\frac{1}{2}t(t+1) = 1+2+\ldots t.$$

Praga soatini ifodalovchi ketma-ketlik hadlari orasida vergullar qo'yilganda, k-verguldan oldingi raqamlar yig'indisi k-uchburchak raqami bo'lishi kerak, shuning uchun eski soatning ketma-ketligida

$$1, 2, 4, 3 + 2, 1 + 2 + 3, 4 + 3, \ldots$$

va quyidagiga egamiz:

$$1 = 1, 3 = 1 + 2, \quad 6 = 1 + 2 + 3, \quad 10 = 1 + 2 + 3 + 4,$$
$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2, \ldots$$

Agar Praga soati moduli m bo'lsa, u holda uchburchak sonlar (mod m) uning qism yig'indilarida ham hosil bo'lishi kerak. Bundan tashqari, bu yagona zaruriy shart bo'lib, bu shartdan moduli m bo'lgan yagona aniq Praga soati shunday ketma-ketlikki, uning vergullari faqat uchburchak sonlar (mod m) o'rinlarida bo'ladi degan xulosaga kelamiz. Uchburchak sonlar (mod m) ni quyidagicha tushunamiz: t-uchburchak son $t(t+1)/2$ da t ni $t+2m$ bilan almashtirsak, $t(t+1)/2$ son mod$m$ o'zgarmaydi, ya'ni

$$\frac{1}{2}(t+2m)(t+2m+1)=\frac{1}{2}t(t+1)+(2t+2m+1)\cdot m$$

sonni m ga bo'lgandagi qoldiq $t(t+1)/2$ ga teng. Shu sababli biz uchburchak sonlarning dastlabki $2m$ tasini qarasak yetarli. Demak, $t(t+1)/2$ sonlarni $t = 0,1,2,\ldots,2m-1$ lar uchun qarash yetarli. Biroq t-uchburchak sonlar $(-1-t)$- uchburchak sonlarga teng, ya'ni

$$\frac{1}{2}t(t+1)=\frac{1}{2}(-1-t)(-1-t+1).$$

Shuning uchun $t = 0,1,\ldots, m-1$ ni qarash yetarli.

Xulosa qilib aytganda, biz yagona m modulli aniq Praga soatini hosil qilish uchun boshlang'ich m ta uchburchak sonlar $0,1,3,\ldots, m(m-1)/2$ larni (mod m) bo'yicha olib (ya'ni m ga bo'lib qoldiqlarini qaraymiz) va m bilan birgalikda tartiblab, keyin har bir sondan o'zidan oldingi sonni ayirib hosil bo'lgan ketma-ketlikni davriy ketma-ketlik sifatida olishimiz mumkin. Masalan, $m = 15$ bo'lsin. U holda boshlang'ich 15 ta uchburchak sonlar:

$$0,1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,105$$

bu sonlarning har birini 15 ga bo'lib, qoldiqlarini olsak hamda 15 ning o'zini ham bu to'plamga kiritsak, quyidagi sonlar hosil bo'ladi:

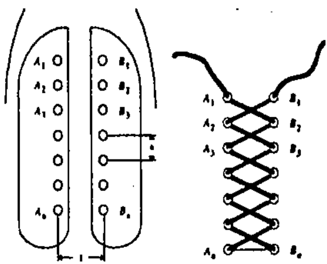
$$0,1,3,6,10,13,15$$

Endi bu ayirmalarni olsak, 1, 2, 3, 4, 3, 2 sonlar hosil bo'ladi. Bu yagona Praga soatidan barcha boshqa aniqmas (buzilgan) Praga soatlarini hosil qilish mumkinligini bildiradi. Bu esa Praga soatlarini qurish masalasini hal qiladi.

BOTINKA IPINI BOG‘LASH USULLARI

Ushbu bo‘limda [16] va [23] dan foydalanib, botinka ipini bog‘lashga bag‘ishlangan matematik usullarni beramiz.

Tasavvur qiling, ishga yoki o‘qishga borishga shoshayapsiz. Aksiga olib, botinkangiz ipini bog‘lash paytida ip uzilib qoldi va yangi ip sotib olishga vaqt yo‘q. Tabiiy savol tug‘iladi: uzilgan ipning uzunroq qismini botinkaga qanday qisqa yo‘l bilan o‘tkazish mumkin? Bu masala ham matematiklar e’tiboridan chetda qolmagan. 1992-yilda matematik Jon Halton yuqorida keltirilgan muammoga duch keldi. Keyin bu masalani matematik usul bilan yechishga kirishdi. U masalaning 24-rasmda ko‘rsatilgan «matematik botinka» modelini berdi.



24-rasm. *Botinka ipini bog‘lashning modeli (chapda) eng qisqa yo‘li (o‘ngda).*

Bunda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lar chap ustundagi teshiklar va $B_1, B_2, \ldots, B_n$ lar o‘ng ustundagi teshiklar, ular orasidagi masofa h. Quyidagi maqsad qaraladi: ipni o‘tkazishni A_1 dan boshlab har bir teshikdan bir marta o‘tkazish va har qadamda bir ustundan (chap yoki o‘ng) boshqasiga o‘tish orqali B_1 da tugatish.

Asosiy masala: yuqorida keltirilgan maqsadga eng kam ip (qisqa yo‘l) ishlatib erishishdan iborat.

Bu masalaning yagona yechimi 24-rasmning o‘ng qismida ko‘rsatilgan usul ekanligini J. Halton isbotladi va uni amerikancha usul deb atadi.

Hozirgi kunda esa botinka ipini bog‘lashning har xil matematik usullari topilgan va hatto bularga bag‘ishlab B. Polster tomonidan kitob ham yozilgan ([23] ga qarang). Endi biz B. Polsterning kitobidan ba’zi qiziqarli natijalarni keltiramiz.

B. Polsterning quyidagi soddaroq masalasini qaraymiz: ipni faqat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ teshiklardan bir martadan o'tkazish (ya'ni $B_1, B_2, \ldots, B_n$ larga o'tmasdan) usullarini aniqlash. Umumiylikka zarar yetkazmasdan $h = 1$ deb olingan. Ravshanki, agar $n = 2$ bo'lsa, bunday ip o'tkazishlar usuli yagona. Lekin $n>2$ da bunday usullar ko'p, ya'ni quyidagi natija isbotlangan.

1-teorema. Agar $n > 2$ bo'lsa, u holda ipni $A_1, A_2, \ldots, A_n$ teshiklardan (bir martadan) o'tkazishlar soni $\frac{1}{2}(n-1)!$ ga teng. Bu yerda $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

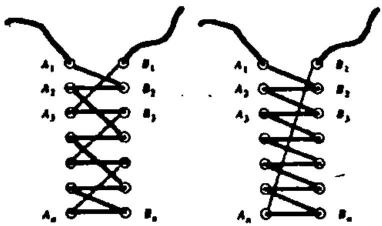
2-teorema. Agar $n>2$ bo'lsa, u holda ipni $A_1, A_2, \ldots, A_n$ teshiklardan (bir martadan) eng qisqa yo'l bilan o'tkazishlar soni 2^{n-3} va bu eng qisqa ip (yo'l) uzunligi $2(n-1)$ ga teng.

Lekin bu n ta teshikdan o'tkaziladigan eng uzun ipning uzunligini va o'tkazish usullari sonini topish ancha qiyin masala. Quyidagi teorema isbotlangan:

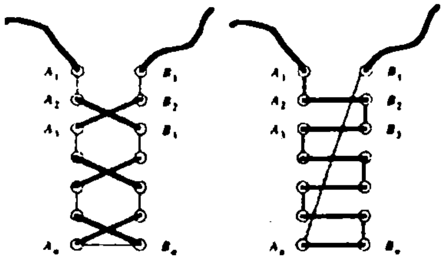
3-teorema.

- Agar $n>3$ juft son bo'lsa, u holda ipni $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lardan (bir martadan) eng uzun yo'l bilan o'tkazishlar soni $12\left(\frac{n-2}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!$ va har bir eng uzun ip (yo'l) uzunligi $n^2/2$ ga teng.
- Agar $n>2$ toq son bo'lsa, u holda ipni $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lardan (bir martadan) eng uzun yo'l bilan o'tkazishlar soni $\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-3}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!$ va har bir eng uzun ip uzunligi $(n^2-1)/2$ ga teng.

25- va 26-rasmlarda botinka ipini o'tkazishning har xil maxsus usullari ko'rsatilgan.

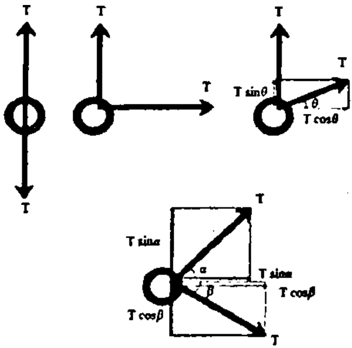


25-rasm. *Botinka ipini bog'lash usullari: yulduz (chap), zigzag (o'ng).*



26-rasm. *Botinka ipini bog'lashning usullari: galstuk (chap); zigzag (o'ng).*

Eng mustahkam o'tkazilgan ip. Quyidagi shartlar bajarilsin: ipni teshikdan o'tkazganda ipga zarar yetmaydi (yeyilmaydi); ipning hamma nuqtalaridagi taranglik kuchlari bir xil; botinkaning har bir tortilgan nugtasida hosil bo'ladigan kuchlar vektorlar bilan ifodalanadi (27-rasm).



27-rasm. *Botinka ipini bog'lashdagi kuch-vektorlar.*

27-rasmga qarab, kuchlarni $\sin\theta$ va $\cos\theta$ lar orqali ifodalash mumkin. Masalan, $\mathrm{tg}\alpha = 2h$, $\mathrm{tg}\beta = h$. Demak, taranglik kuchi T ga nisbatan botinkaga o'tkazilgan har bir ipning mustahkamlik darajasini aniqlash mumkin.

24-rasmda berilgan amerikancha usulning mustahkamlik kuchi (har bir teshikka qo'yilgan kuchlar yig'indisi)ni $A(n,h)$ bilan, zigzag usulining (26-rasm) mustahkamlik kuchini $Z(n,h)$ bilan belgilaylik. Polster quyidagilarni isbotladi:

4-teorema.

• shunday yagona son $h_n > 0$ mavjudki, $A(n,h_n) = Z(n,h_n)$ tenglik o'rinli;

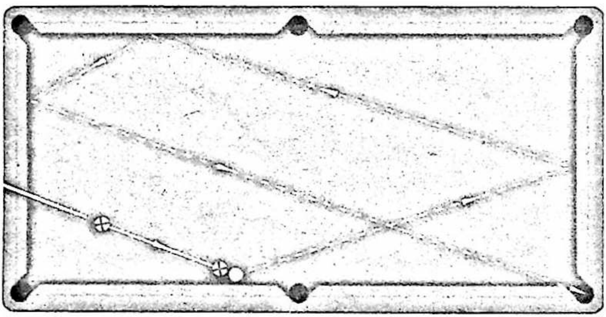
• agar $h > h_n$ bo'lsa, u holda amerikancha usulida o'tkazilgan ip eng mustahkam bo'ladi;

• agar $h < h_n$ bo'lsa, u holda zigzag usulida o'tkazilgan ip eng mustahkam bo'ladi;

• agar $h = h_n$ bo'lsa, u holda ikkala usul bir xil mustahkamlikka ega.

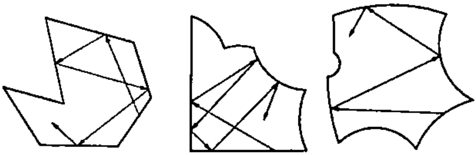
MATEMATIK BILLIARD VA UNING TURMUSHIMIZDA QO'LLANISHI

Billiard o'yini ancha ommalashgan o'yindir, bu o'yinda to'rtburchak shaklidagi stol ustida sharlar bo'ladi. Sharlarni biri orqali boshga birini urib, stol chetidagi teshiklarga tushirish talab qilinadi (28-rasmga qarang). Stol chegarasi sharni qaytaruvchi devorlar bilan to'silgan. Devorga urilgan shar qaysi burchak ostida kelgan bo'lsa, shu burchak ostida qaytadi deb faraz qilish mumkin.



28-rasm. *Billiard stoli va uning ustida harakatlanayotgan shar trayektoriyasi.*

Matematik billiard deganda ixtiyoriy (to'rtburchak, uchburchak, doira, ellips, yoki chegarasi silliq bo'lmagan har qanday soha) shakldagi, teshiklarsiz stol (29-rasmga qarang), uning ustidagi yagona sharcha va bu sharchaning stol ustidagi harakat trayektoriyasi tushuniladi. Sharcha stol chegarasidan qaytganida kelish va qaytish burchaklari teng deb faraz qilinadi.



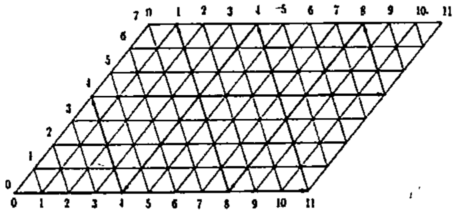
29-rasm. *Matematik billiard stolining turli shakllari va uning ustida harakatlanayotgan shar trayektoriyasi.*

Matematiklarning bunday umumiy shakldagi stollar ustida sharcha trayektoriyasini o'rganishi ko'plab amaliy masalalarni yechishda qo'llaniladi. Bu bo'limda shunday hayotiy misollardan ba'zilarini keltiramiz. Matematik billiardlar haqida [28] dan o'qishingiz mumkin.

Matematik billiardni qo'llab yechiladigan quyidagi masalaning yechimida hech qanday tenglama tuzilmaydi va hech qanday matematik formula ishlatilmaydi.

Masala. Hajmi 7 va 11 litrli ikkita bo'sh idish va bir katta idishda suv berilgan. Ushbu idishlar yordamida 1 litr suvni qanday ajratib olish mumkin?

Yechim. Bu masalani yechish uchun matematik billiardni tomonlari 7 va 11 bo'lgan parallelogramm shaklidagi stol ustida qaraymiz (30-rasmga qarang).



30-rasm. *1 litr suvni ajratuvchi billiard trayektoriyasi yo'naltirilgan siniq chiziq bilan berilgan.*

30-rasmga qarab, qizil rangda berilgan trayektoriya (siniq chiziq)ning har bir sinish nuqtasi, ya'ni sharchaning qaytish nuqtasidagi koordinatalarini (x, y) shaklida belgilaymiz. Bunda x

bilan 7 litrlik idishdagi suv miqdorini, y bilan esa 11 litrlik idishdagi suv miqdorini belgilaymiz. Trayektoriyaga qarab, quyidagi xulosalarni chiqaramiz:

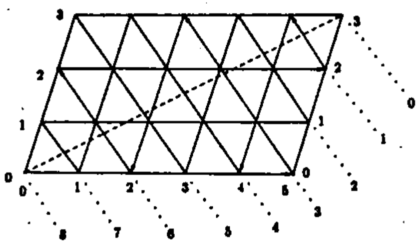
- Sharcha o'z trayektoriyasini (0,0) nuqtada boshlaydi. Bu (0,0) ning ma'nosi, ikki idishning ham bo'shligidir.
- Sharcha (0,0) dan (0,11) ga o'tadi, buning ma'nosi, 7 litrlik idishning bo'shligi va 11 litrli idishning to'la ekanini bildiradi.
- Keyin sharcha (7,4) nuqtaga o'tadi, buning ma'nosi shuki, 7 litrli idish, 11 litrlik idishdan to'ldirilgan va 11 litrlik idishda 4 litr suv qolgan.
- Keyingi holat esa $(0,4)$, ya'ni 7 litrlik idishdagi suv to'kilgan (eng katta idishga).

Shu tariqa davom ettirib, trayektoriya (7,1) ni ko'rsatishigacha boramiz. Hammasi bo'lib 8 ta qadam natijasida 11 litrli idishda 1 litr suv hosil bo'ladi va masalaning yechimi shu usulda amalga oshadi.

Agar dastlab sharchani (0,0) dan (7,0) ga qarab yo'naltirganda ham sharchaning trayektoriyasi 1 litrni ajratuvchi nuqtagacha boradi, lekin bu holda 25 qadam yuriladi. Matematik billiardning bu masalani yechish algoritmi juda «kuchli» metoddir. Chunki bu usulda 30-rasmdan foydalanib 1 litrdan 11 litrgacha ixtiyoriy litr suvni ajratib berish mumkin.

Masala. 8 litrli idishda to'la suv bor. Shu suvni ikkita bo'sh: 3 va 5 litrli idishlar bilan teng ikki qismga ajrating (ya'ni bu holda, 8 litrli va 5 litrli idishlarda teng miqdorda, 4 litrdan suv qoladi).

Yechim. Bu masalani yechish uchun 3×5 parallelogramm olamiz (31-rasmga qarang).



31-rasm. *8 litr suvni ikkita 4 litrga ajratish traektoriyasi.*

Parallelogrammning katta diagonalini o'tkazamiz, bu diagonal 8 ta qismga ajratilgan. 31-rasmdagi trayektoriyaning 4 litr suvni ajratishigacha bo'lgan qismini qaraymiz:

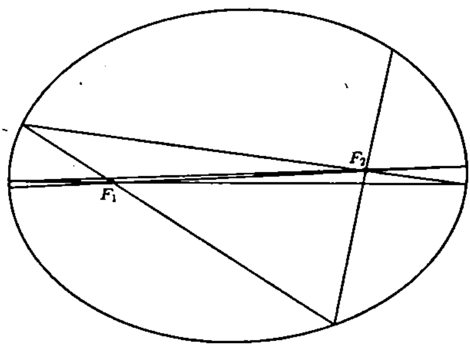
$$(0,0,8) \rightarrow (0,5,3) \rightarrow (3,2,3) \rightarrow (0,2,6) \rightarrow$$

$$(2,0,6) \rightarrow (2,5,1) \rightarrow (3,4,1) \rightarrow (0,4,4).$$

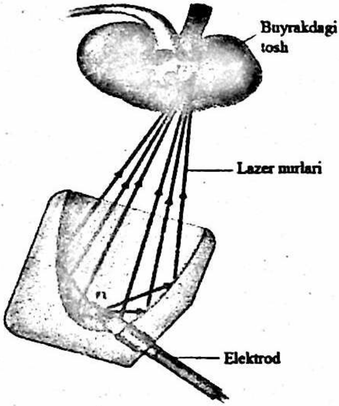
Bu ketma-ketlikdan quyidagi algoritm kelib chiqadi:

3 hamda 5 litrli bo'sh va 8 litrli to'la → 8 litrlidan 5 litrlini to'ldiramiz → 5 litrlidan 3 litrlini to'ldiramiz → 3 litrlining suvini 8 litrliga quyamiz va hokazo. Algoritm oxirida 3 litrli bo'sh, 5 litrli va 8 litrli idishlarda 4 litrdan suv qoladi.

Buyrak toshini lazer nuri bilan tushirishda billiard. Billiard stoli ellips shaklida bo'lsa va ellipsning bir fokusidan harakat boshlagan sharcha ellipsning chegarasidan qaytganida (kelish va qaytish burchaklar teng) ikkinchi fokusdan o'tadi (32-ga qarang). 33-rasmda ellips ustida berilgan matematik billiardning bu xossasidan foydalanib, odam buyragidagi toshni lazer nuri yordamida maydalab chiqarish asbobi yaratilgan. Bu tibbiy asbobning matematik nazariya orqali mukammalligi shundaki, lampochkadan tarqalayotgan nur faqat toshga yo'naltiriladi, ya'ni bemorning boshqa a'zolariga ta'sir qilmaydi.



32-rasm.



33-rasm.

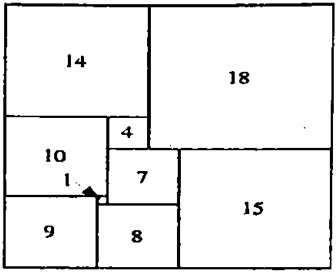
TO‘G‘RI TO‘RTBURCHAKNI TURLI KVADRATLARGA BO‘LISH

Berilgan to‘g‘ri to‘rtburchakni cheklita (kamida ikkita) turli (har xil tomonli), faqat tomonlari kesishadigan kvadratlarga ajratish mumkinmi? Bu savolning javobini bilgan duradgorlar qurilish materialini isrof qilmasdan ishlatishi mumkin. To‘rtburchaklarni yuqorida aytilgandek qismlarga ajratish masalasi elektr zanjirlarining xossalarini o‘rganishda paydo bo‘ladi [9]. Qo‘laversa, masala matematik jihatdan sodda ifodalanishi va juda qiziqarliligi bilan e’tiborga loyiq.

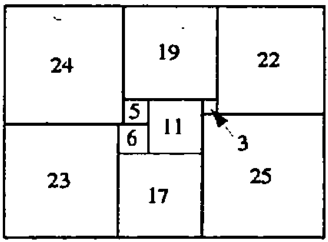
Ushbu bo‘limda shu savolga javob beriladi va ba’zi to‘g‘ri to‘rtburchaklarni to‘rtburchaklarga bo‘lish xossalari ham keltiriladi.

Yuqoridagi savolga javob berish oson emas. Chunki bir tomondan har qanday to‘rtburchakni turli kvadratlarga ajratish har doim mumkindek tuyulsa-da, aslida bunday qismlarga ajraladigan to‘g‘ri to‘rtburchakni topishning o‘zi murakkab.

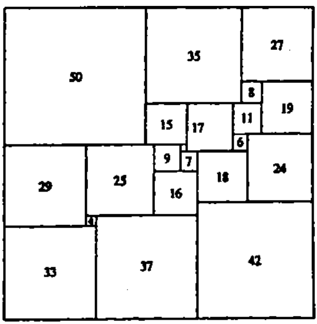
Bunday to‘g‘ri to‘rtburchakning mavjudligini 1925-yilda Moron ko‘rsatdi. U 33×32 o‘lchamli to‘g‘ri to‘rtburchakni 9 ta har xil kvadratlarga ajratdi (34-rasm). 35-rasmda esa 47×65 o'lchamli to'g'ri to'rtburchak 10 ta har xil kvadratlarga bo'lingan.



34-rasm. 33×32 *o'lchamli to'g'ri to'rtburchak 9 ta har xil kvadratlarga ajratilgan. Har bir kvadratning ichida uning tomoni uzunligi yozilgan.*



35-rasm. 47×65 *o'lchamli to'g'ri to'rtburchak 10 ta har xil kvadratlarga ajratilgan. Har bir kvadratning ichida uning tomoni uzunligi yozilgan.*



36-rasm. 112×112 *kvadrat 21 ta har xil kvadratlarga ajratilgan.*

To‘g‘ri to‘rtburchakni har xil kvadratlarga ajratilgandagi kvadratlar soni bo‘linish tartibi deb ataladi. Masalan, 34-rasmdagi to‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘linish tartibi 9 ga teng. Kompyuter yordamida turli kvadratlarga ajraladigan to‘g‘ri to‘rtburchaklarning ko‘pi topilgan. Lekin kompyuter ishlatmasdan bunday to‘rtburchaklarni 1939-yilda Sprague va 1940-yilda Bruks, Smit, Stoun, Tutte va Duijvestijnlar topishgan. Bu mualliflar topgan to‘rtburchaklar kamida 21 ta turli kvadratlarga ajratilgan (35-rasm). Ana shunday to‘rtburchaklardan biri 36-rasmda ko‘rsatilgan Duijvestijn to‘rtburchagidir. Shunisi qiziqki, 21 ta turli kvadratlarga ajraladigan (bo‘linish tartibi 21 bo‘lgan) yagona to‘rtburchak aynan Duijvestijn to‘rtburchagi ekan. Quyidagi teorema turli kvadratlarga ajraladigan to‘rtburchaklarning barchasini tasniflaydi.

Teorema. (Den va Sprague) To‘g‘ri to‘rtburchak turli kvadratlarga ajratilishi uchun uning (qo‘shni) tomonlari nisbati ratsional bo‘lishi zarur va yetarli.

Eslatma. Bu teorema qaysi to‘rtburchaklar turli kvadratlarga ajratilishi haqidadir. Lekin tomonlari nisbati ratsional bo‘lgan biror to‘g‘ri to‘rtburchak berilgan bo‘lsa, uni qanday qilib turli kvadratlarga ajratishning umumiy algoritmi yo‘q.

Endi umumiyroq masalani qaraylik: maqsadimiz yuqorida berilgan teoremani umumlashtirish. Faraz qilaylik, biz qandaydir to‘g‘ri to‘rtburchakni 1×8 va 8×1 o‘lchamli to‘g‘ri to‘rtburchaklarga ajratgan bo‘laylik. U holda, umumiy yuza 8 ga karrali bo‘lgani sababli, yoki bir tomon uzunligi 4 ga karrali va ikkinchi tomon uzunligi juft yoki bir tomon 8 ga karrali.

Ikki hol ham bo‘lishi mumkinmi? Shunday savolni katta o‘lchovli jismlar uchun ham qarash mumkin. Masalan, agar biror quti $1\times2\times4$ o‘lchamli ($1\times2\times4$, $4\times2\times1$, $2\times1\times4$ va hokazo hollar birga qaraladi) g‘ishtlar bilan to‘ldirilgan bo‘lsa, u holda qutining barcha tomonlari juft yoki bir tomoni 4 ga karrali, boshqa biri juft va uchinchi tomoni toq yoki bir tomoni 8 ga karrali va qolgan ikki tomonlari toq bo‘ladi. Shu o‘rinda barcha hollar bo‘lishi mumkinmi degan savol tug‘iladi. Bu savol 1959-yilda de Bruin tomonidan qo‘yilgan edi.

Teorema. [9] Biror T to‘g‘ri to‘rtburchak $T_1, \ldots, T_n$, to‘g‘ri to‘rtburchaklar bilan to‘ldirilgan bo‘lsin. Agar barcha $T_1, \ldots, T_n$

to‘g‘ri to‘rtburchaklar kamida bittadan butun tomonga (uzunligi butun son bo‘lgan tomonga) ega bo‘lsa, u holda T ning ham butun tomoni mavjud.

Isbot. T to‘rtburchakning tekislikdagi uchlari (0,0), (a,0), (0,b), (a,b) nuqtalarda bo‘lgan to‘rtburchak sifatida qarash mumkin, bunda $a,b > 0$ Shunda $T_1, \ldots, T_n$ to‘rtburchaklarning tomonlari ham koordinatalar o‘qlariga parallel bo‘ladi. To‘rtburchak T ni $1/2\times1/2$o‘lchamlari teng kvadratlarga ajratamiz va hosil bo‘lgan kvadratchalarni shaxmat taxtasidek tartibda oq va qora ranglarga bo‘yaymiz. U holda, T_i, $i = 1,\ldots, n$ to‘rtburchaklar bir xil sondagi oq va qora kvadratchalardan tuzilgan bo‘ladi, hamda T ning o‘zi ham teng miqdordagi oq va qora kvadratchalardan tashkil topgan. Shu sababli, ravshanki a va b lardan hech bo‘lmaganda bittasi butun son. Teorema isbotlandi.

Bu teoremani quyidagicha umumlashtirish mumkin:

Teorema. Biror B quti (paralellopiped) $B_1, B_2,\ldots, B_n$, quti-chalar bilan to‘ldirilgan bo‘lsin. Agar har bir B_i, $i = 1,\ldots, n$ ning butun tomoni mavjud bo‘lsa, u holda B ning ham butun tomoni mavjud.

FAQAT SEVISHGANLAR TURMUSH QURISHSIN!

Zamonaviy matematika shu darajada taraqqiy topganki, uning nazariyalari tatbig‘ini topmagan soha qolmadi. Masalan, musiqa, tilshunoslik, sotsiologiya va boshqa ko‘plab gumanitar fanlarga ham matematika qo‘llanilmoqda. Ushbu bo‘limda ham ko‘ri-nishidan matematika fanidan uzoq bo‘lgan juda ommabop bir muammoni matematik yo‘l bilan hal qilish haqida so‘z yuritamiz. Aniqroq aytganda, biz [9] va [31] lardan foydalanib, quyidagi savolga javob beramiz:

Qizlar guruhi va yigitlar guruhi berilgan bo‘lsa, qachon har bir yigit faqat o‘zi tanigan (yoqtirgan yoki sevgan) qiziga unashtirilishi mumkin?

Bu savolga angliyalik matematik Filip Hallning unashtirish teoremasi javob beradi.

Biz bu teorema va undan kelib chiqadigan ba’zi natijalar hamda maqsad (har bir unashtirilgan juftlik o‘zaro tanishlar (sevishganlar) orasida bo'lishi)ga mos unashtirish algoritmini beramiz.

Demak, quyidagi umumiy masalani qaraymiz: m ta qiz va n ta yigit bor, qanday shartlar asosida biz yigitlarni o'zi tanigan qizlarga unashtirish imkoniga ega bo'lamiz?

Ravshanki, agar k ta yigit ko'pi bilan $k-1$ ta qizni tanisa, u holda bu yigitlarni o'zimiz xohlagandek unashtirishimizga imkonimiz yo'q. Tabiiy ravishda qanday shartlar bajarilganda bunday imkoniyat bo'ladi degan savol siz o'quvchilarda ham tug'ilgan bo'lsa ajablanmaymiz. Albatta, biz izlayotgan shartlar ota-onaga, oilaviy sharoitga, milliy urfga va boshqa hayotiy sharoitlarga qo'yiladigan shart emas, balki faqat qizlar va yigitlar guruhlari orasidagi o'zaro munosobatlar (tanishlik, yoqtirish, sevgi)ga qo'yiladigan shartlardir.

Biror S to'plam (guruh) berilgan bo'lsa, $|S|$ bilan undagi elementlar (odamlar) sonini belgilaymiz.

Quyidagi teorema F. Hall tomonidan isbotlangan:

1-teorema. Berilgan Y yigitlar guruhi va Q qizlar guruhi orasida faqat tanishlar (yoki sevishganlar) unashtirilishi mumkin bo'lishi uchun yigitlar guruhidan tanlab olingan har qanday qism guruh S uchun qizlar guruhi Q da kamida $|S|$ ta S dagi yigitlar taniydigan qizlar bo'lishi zarur va yetarli.

1-teoremaning xulosasini unga teng kuchli bo'lgan quyidagi xulosalardan biri bilan almashtirish mumkin:

- yigitlar guruhi Y dan olingan har qanday k ta yigitlarning Q da kamida k ta tanish qizlari bo'lishi zarur va yetarli.

- qizlar guruhi Q dan olingan har qanday k ta qizlarning Y da kamida k ta tanish yigitlari bo'lishi zarur va yetarli.

Masala mohiyatini to'liq his qilish uchun xususiy holni, ya'ni 3 tadan qiz va yigitlar guruhlarini qaraylik: $Y = \{a, b, c\}$ va $Q = \{A, B, C\}$. Bu guruhlar orasidagi tanishlik munosabatini quyidagicha ifodalaymiz: agar a yigit A qizni tanisa, buni aA shaklida yozamiz.

1-hol: Faraz qilaylik, Y va Q orasida quyidagicha tanishlik munosabatlari bor:

$\{aA, aB, bC, cC\}$ ya'ni a ikki qiz A va B ni taniydi, b va c lar atigi bitta qiz C ni taniydi. Unda Y va Q 1-teoremaning shartini qanoatlantirmaydi, chunki $S = \{b, c\}$ qism guruh olsak, $|S| = 2$ bo'ladi, lekin S dagi yigitlar atigi bitta qiz C ni tanishadi, teoremada esa S dagi yigitlar sonidan ular taniydigan qizlar soni ko'p yoki teng bo'lishi talab qilingan. Demak, bu holda maqsadga mos unashtirish qilish imkoni yo'q.

2-hol: Endi Y va Q orasida quyidagicha tanishlik munosabatlari bo'lsin:

$\{aA, aB, bC, cC\}$, ya'ni a ikki qiz A va B ni taniydi, b faqat B ni va c faqat (Q ichidagi qizlardan) C ni taniydi. Unda Y va Q 1-teoremaning shartini qanoatlantiradi, buni osongina tekshirib ko'rishingiz mumkin.

Endi faraz qilaylik, Hall teoremasining sharti bajarilmadi. Unda biz maqsadga qanchalik yaqin bora olamiz? Ya'ni iloji boricha ko'proq tanish (sevishgan)larni unashtirish uchun nima qilish kerak? Qanday hollarda biz mavjud n ta yigitdan kamida n–d tasini ularning tanishlariga unashtirish imkoniga ega bo'lamiz? Ravshanki, agar yigitlarning ixtiyoriy k tasi kamida k–d ta qizni tanisa, u holda bu imkoniyat bizda bor. Ya'ni quyidagi teorema o'rinli.

2-teorema. Y yigitlar guruhi va Q qizlar guruhi orasida $|Y| = d$ ta yigitni tanishlariga unashtirilishi mumkin bo'lishi uchun yigitlar guruhidan olingan har qanday qism guruh S uchun qizlar guruhi Q da kamida $|S| = d$ ta S dagi yigitlar taniydigan qizlar bo'lishi zarur va yetarli.

Yana n ta yigitdan tashkil topgan guruh $Y = \{a, b, c, \ldots\}$ hamda m ta qizlardan tashkil topgan guruh $Q = \{A, B, C, \ldots\}$ni qaraymiz. Bunda $n = m$ bo'lishi, ya'ni qizlar soni yiqitlar soniga teng bo'lishi shart emas. Faraz qilaylik, har bir yigit o'zi yoqtirgan qizlari ro'yxatiga va har bir qiz o'zi tanigan (yoqtirgan) yigitlari ro'yxatiga ega bo'lsin. M to'plam bu ro'yxatlar asosida unashtirilgan juftliklarning biror qismi bo'lsin. Agar M dagi juftliklardan farqli bo'lgan har bir aA juftlik uchun yoki a yigitga M dagi juftliklar ichida A ga nisbatan ko'proq yoqadigan qiz yoki A qizga M dagi juftliklar ichida a ga nisbatan ko'proq yoqadigan yigit mavjud bo'lsa, u holda M juftliklar to'plamini mukammal (turg'un) deb ataymiz. Boshqacha qilib aytganda, agar M o'z ichiga bir-birini juda yo'qtiradigan juftliklarni olgan bo'lsa, u mukammal unashtirilgan juftliklar to'plamidir. M ga kirmagan juftliklarda esa yoqtirish (sevgi) kuchli emas (yoki bir tomonlama yoki birining kuchliroq yoqtiradigan boshqa odami bor, yoki bir-birini tanimaydi).

Agar kim bilandir turmush qurish majburiy bo'lsa, u holda M ga kirmagan (bir-biri bilan uncha tanish bo'lmagan) juftliklar ham turmush qurgani ma'qul.

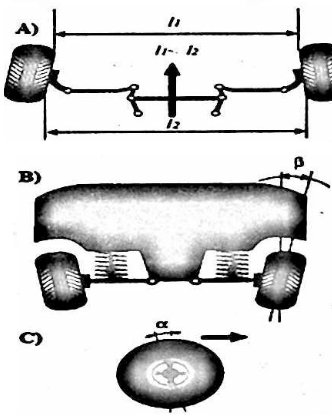
Shuni ta'kidlash kerakki, mukammal unashtirilgan (ya'ni M) juftliklar to'plami har doim mavjud va yagona. Lekin maqsad M ga kirmagan juftliklarni ham iloji boricha tanishlar orasida tuzishdir. Bu maqsadni M to'la qoplamasligi mumkinligiga quyidagi misol orqali ishonch hosil qilish mumkin. $Y = \{a, b\}$, $Q = \{A, B\}$ bo'lsin va ular orasidagi tanishlik (yoqtirish) darajasi quyidagicha bo'lsin: a yigit A va B ni taniydi, lekin B qizni A dan ko'ra ko'proq yoqtiradi; b yigit faqat B qizni taniydi; A qiz faqat a yigitni taniydi; B qiz ikki yigitni ham taniydi, lekin b dan ko'ra a ni ko'proq yoqtiradi. Bu holda, ravshanki, $M = \{aB\}$ mukammal bo'ladi. Ya'ni M yagona juftlikdan iborat, chunki a uchun eng yoqqan qiz B va B uchun eng yoqqan yigit a. Lekin, hamma turmush qurishi majburiy bo'lsa, u holda aA va bB shaklda unashtirish maqsadga muvofiqdir. Chunki bu juftliklar bir-birini taniydiganlardan tuzilgan. bA juftlik esa maqsadga to'g'ri kelmaydi. Sababi ular bir-birini tanimaydi.

3-teorema. Berilgan har qanday Y va Q guruhlar hamda ularning orasidagi munosabatlar (tanish, yoqtirishlik darajasi) uchun mukammal unashtiruvlar to'plami M mavjud.

Mukammal unashtiruvlar algoritmi: har bir yigit o'zining eng yoqtirgan qizidan boshlab turmush qurishni taklif etadi, har bir qiz esa o'ziga qilingan takliflar ichidan eng yoqtirgan yigitidan boshqa hamma yigitga rad javobini beradi. Bu algoritm bilan har bir yigit uni rad etmagan oxirgi qizga unashtiriladi va har bir qiz haligacha rad etmagan yigitiga turmushga chiqadi. Shuni ta'kidlash lozimki, bu algoritm orqali har bir qizga taklif tushganda, jarayon oxirida u o'zi eng yoqtirgan yigitga turmushga chiqadi, lekin har bir yigit, agar unga butun jarayon davomida hamma qizlar rad javob bermasa, u holda turmush quradi. Shunday qilib, bu algoritm davomida har bir qiz o'ziga ko'proq (uning fikricha) yoqqan yigitni tanlash imkonini beradi, lekin yigitlar algoritm davomida o'ziga kamroq (uning fikricha) yoqadigan qizga uylanishiga to'g'ri keladi.

MASHINANING OLDINGI G'ILDIRAGI QANDAY O'RNATILGAN?

O'rnatish burchagi. Mashinaning old g'ildiraklari o'rnatiladigan burchaklar (hizalama) qanday bo'lishi kerak? Haydovchilar buni «hizalama» deb atashadi[7]. Xo'sh, old g'ildirak hizalamasi nima? Bu nimani anglatishini tushunib olish uchun mashinadan uzoqroqqa borib, mashinaning oldi tomonidan g'ildiraklariga qarasangiz, siz ular bir-biriga biroz «qarab» turadigan tarzda o'rnatilganligini sezasiz. Bu holat old g'ildiraklarning burchaklari deb ataladi. 37-rasmda ushbu sxema haqida ma'lumot berilgan. A)-rasmda g'ildiraklarga tepadan qaraganda g'ildiraklarning old qismlari orasidagi masofa l_1, orqa qismlari orasidagi masofa l_2 va $l_1 < l_2$. b)-rasmda mashinaning oldidan qaralgandagi hizalama ko'rsatilgan.



37-rasm. *Mashina old g'ildiraklarining burchaklari. Hizalamaning A) tepadan ko'rinishi, B) old tomondan ko'rinishi, β – yerga perpendikulyar chiziq bilan g'ildirak orasidagi burchak, C) ruldagi aksining aylanish o'qi bo'yicha burchagi.*

---

[7] http://www.prava.uz/auto/razval.html

Burchaklar old g'ildiraklarni biriktiruvchi moslamaning belgilangan boltlari orqali o'matiladi. Moslashuv rul mexanizmidagi yon qismlarni qisqartirish yoki uzaytirish yo'li bilan amalga oshiriladi.

Bu burchaklarni sozlash to'g'ri harakatlanayotganda mashinaning to'g'ri harakatlanishini ta'minlash uchun zarur. Hizalamasi to'g'ri tanlangan mashinaning harakat yo'nalishini o'zgartirish haydovchi uchun juda qulay bo'ladi.

Shunday qilib, biz avtoulovni xavfsiz boshqarishda hizalama burchagini tanlashda zarur bo'lgan barcha fikrlarni keltiramiz:

– avtoulovning doimiy tekis harakatlanishi;

– burilish paytida rulda bog'langan moslamaga tushadigan kuchni kamaytirish;

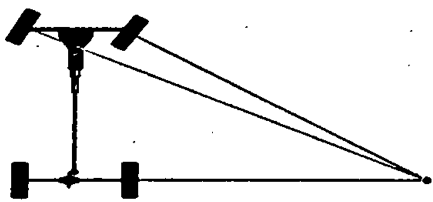
– oldingi g'ildiraklarni o'z navbatida oxirigacha to'g'ri holatiga qaytarish;

– yo'llarning nosoz joylarida g'ildiraklarni to'xtatish ta'sirini kamaytirish;

– eng muhim qismlardan va rulmanlardan ortiqcha yuklamani olib tashlash.

To'g'ri haydashni ta'minlash uchun, hizalama burchaklar avtoulov ishlab chiqaruvchining tavsiyalariga muvofiq saqlanishi kerak.

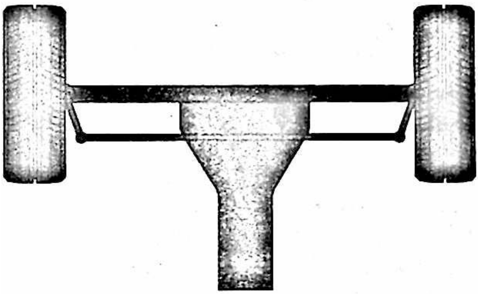
Burilishda me'yor. Avtoulov g'ildiragining burilishdagi sirpanishi harakatni nazorat qilishni yo'qotish xavfini hosil qilishi mumkin. Bunga yo'l qo'ymaslik uchun avtoulovni burishda har doim old g'ildiraklarning aylanish burchagi izchil bo'lishi kerak. Ularning o'qlari to'g'ri chiziqli davom ettirilganda orqa g'ildiraklar o'qining chizig'i bilan bir yo'nalishda kesishishi kerak (38-rasmga qarang). Bu ma'lumotlar [3] kitobdan olingan.



38-rasm. *Mashina oldingi g'ildiragining boshqaruvdan chiqib ketmaslik sharti.*

Avtoulovning barcha g'ildiraklarining eksenel chiziqlari kesishish nuqtasi uning aylanish markazidir, ya'ni bu markaziy nuqta atrofida to'rtta g'ildirak o'z aylanasi bo'ylab harakatlanadi va sirg'almaydi.

Avtoulovning oldingi g'ildiragi xavfsiz burilishi mexanizmini teng yonli trapetsiya sifatidagi qurilmasi (39-rasm) birinchi bo'lib fransuz avtoustasi Sharl Janto tomonidan ixtiro qilingan. Ammo uning ixtirosi unutilgan, chunki o'sha paytlarda bir necha ot kuchiga ega bo'lgan vagonlar tez harakat qilmas va g'ildirak moslashuvi juda muhim emas edi.



39-rasm. *Teng yonli trapetsiya shaklidagi qurilma.*

Oradan 70 yilcha o'tib, avtomobil sanoatining ikkita yetakchi mutaxassislari: Gottlieb Daimler va Karl Benz o'z mashinalarini yaratib, Janto trapetsiyasiga qaytadilar. 1889-yilda Daimler «Oldingi g'ildiraklarni turli burilish radiuslari bilan mustaqil nazorat qilish» loyihasi uchun patent oldi. 1893-yilda Benz «G'ildirak aylanishini boshqarish uchun trapetsiya boshqarish apparati» uchun patent oldi. O'sha kundan boshlab, trapetsion boshqaruvli mashinalar ishlab chiqarilmoqda.

Albatta, bu vaqt ichida texnika yanada murakkablashdi. Zamonaviy avtoulovlarning ko'pchiligi bir-biriga nisbatan balandroq joylashgan g'ildiraklarga ega, shuning uchun tekis taqsimlangan mexanizm (trapetsiya) ularni boshqarish uchun mos kelmaydi. Biroq bugungi kunda ham avtoulovlarning old g'ildiraklarini aylantiradigan mexanizm «trapetsiya» deb ataladi.

Zamonaviy mexaniklar avtoulovning orqa g'ildiraklarini aylantirishni o'rgandilar, bu xususiyat ba'zi modellarda amalga oshirildi. To'rt g'ildirakli avtoulovning hamma g'ildiraklari moslashgan holda aylanish funksiyasi mavjud bo'lsa, u holda mashina eng kam burilish radiusini sezilarli darajada kamaytiradi.

Avtoulov burilayotgan vaqtida to'rt g'ildiragi 4 ta turli radiusli aylanalar (markazlari bir nuqtada) bo'ylab har xil uzinlikdagi yoylarni bosib o'tadi.

TIL O'RGANISH VA MATEMATIKA

Insoniyat tilining uzoq evolyutsion yo'lida doimiy o'zgarishlar bo'lib turgan. Dunyoda turli tillar mavjud: o'zbek, tojik, rus, ingliz va hokazo. Ming yillar davomida tillarning bu tabaqalanishi qanday o'zgarmoqda? Axir tillar odamning fikrini boshqaga yetkazishda muloqot vositasiga aylantirilgan eng muhim axborot vositasi-ku! Til insoniyat rivojida hal qiluvchi ahamiyatga ega. Yozishning tug'ilishi – bu so'zlarni yozishning imkoniyati bo'lsa, so'zlarning ma'nosini belgilash – bu ajdodlarimizning ajoyib ijodidir. Ushbu bo'limda [39] ga asoslanib, qiziqarli ma'lumotlarni keltiramiz.

To'liq bo'lmagan tadqiqotlar xulosasiga ko'ra, dunyoda qariyb ikki ming xalq borligini ko'rsatilgan. Yevropada taxminan 50, Osiyoda taxminan 800, Shimoliy va Janubiy Amerikada esa 300 dan ortiq xalq mavjud. Ikki mingga yaqin millat ichida 6 mingga yaqin turli-tuman tillar mavjud. Tabiiyki, bu tillarda gapiruvchi odamlar taqsimoti juda farq qiladi. Ba'zi tillarda sayyoramizning millionlab aholisiga, boshqalarida esa faqatgina minglab kishilar so'zlashadi. Ammo barcha tillar orasida 13 ta «buyuk» til borki, ko'pchilik odamlar shu tillardan birida gapirishadi. Bular xitoy, ingliz, rus, hind, yapon, portugal, arab va boshqa tillardir. Xitoy eng qadimiy yozma til hisoblanib, u 6 ming yoshdan oshdi.

Til so'zlardan iborat. So'zlar tegishli tushunchalarni o'z ichiga oladi. Xitoy va yapon tilida nutqni ifodalashda iyerogliflardan foydalanishadi, ya'ni so'z ko'plab belgilar (harflar) yordamida ifodalanadi. Eng ko'p iyerogliflar yapon tilida bo'lib, undagi belgilar 1800 ta takrorlanmas naqshlardan iborat.

Boshqa tillarda so'zlar harflardan tashkil topadi. Alifbo (harflar to'plami) turli xil tillarda turli xil belgilarga ega. Kambodjadagi eng katta alifboda 72 belgi mavjud, bizning alifbomiz esa 29 ta belgidan (lotin harflari) iborat. Eng kam harfli alifbo Rotok qabilasidagi Butenvill tilida bo'lib, unda 11 ta harf bor. Umuman, dunyoda 65 xil alifbo mavjud.

So'zlar bitta harfdan bir necha o'nlab harfgacha bo'lishi mumkin. Ginnesning rekordlar kitobida eng uzun so'zli tillar keltirilgan bo'lib, unga ko'ra shved tilida 130 ta harfli so'z, golland tilida 94 ta harfli so'z, nemis tilida esa 80 ta harfli so'z bor ekan.

So'zlar qog'ozga bosilgani uchun yer yuzida chop etilgan eng katta va eng kichik kitoblarni eslatib o'tish kerak. Bunday kitoblardan biri Amerika Qo'shma Shtatlarida reklama maqsadida chop etilgan 2.74m $\times$ 3.07m o'lchamli super kitobdir. U 300 sahifadan iborat bo'lib, og'irligi 262.6 kg ga teng. 1985 yilda Shotlandiyada 85 nusxada chop etilgan «Eski qirol Koul» ertagi eng kichik kitobdir. Kitobning hajmi bor yo'g'i 1mm $\times$ 1 mm.

Tilning asosiy vazifasi bo'lgan ma'lumotni tashish qobiliyati (imkoniyati)ga murojaat qilaylik. Biz zamonaviy o'zbek alifbosi orqali qanday imkoniyatlarga egamiz? Matematik hisob-kitob qilaylik. Alifbomizda 26 ta asosiy harf bor. O'zbek alifbosi yordamida har xil harflardan olingan ikkita harfli so'zlar soni $26^2 = 676$ ta. Uch harfli so'zlar $26^3 = 17576$ ta va hokazo.

Agar alifbomizdan deyarli 50 000 ta turli so'zlar yasasak, bu so'zlarning qanchasining o'zbek tilida ma'nosi bor? Ishlatish uchun qancha imkoniyat mavjud? Eng ko'p ishlatiladigan so'zlarimiz o'rtacha besh harfdan iborat. Alifboning 26 ta harfidan siz besh harfli kombinatsiyaning ko'p sonli (ya'ni 26^5 ta) so'zlarini yaratishingiz mumkin, ammo haqiqiy ma'noli so'zlar ularning faqatgina 0.0002 foizini tashkil qiladi. Qolganlari so'z emas, balki ma'nosiz harflar kombinatsiyasidir. Xo'sh, biror tilda muloqot uchun (masalan o'zbek tilida) qancha so'z bor? Matematik usullar va elektron mashinalar yordamida tilning zamonaviy tadqiqotlari bizni ajoyib natijalarga olib keldi. Amerikalik olim A. Garb ingliz tilida «gaplashuv lug'ati»ni tahlil qilib, quyidagi xulosalarga kelgan: har qanday latifani bayon qilish uchun faqat 450 ta so'z talab qilinsa, har qanday bolalar ertagini bayon qilish uchun 750 ta so'z, sarguzasht romanida kamida 1400 ta so'z va har qanday fantastika janridagi asarda kamida 3000 ta so'z bo'lishi kerak.

Oddiy aloqa uchun turli davrlarda so'zlar soni qancha bo'lishi kerak? Elektron mashinalar bolalar uchun bu 3600 so'zga ega bo'lishi kerakligini aniqladi. 14 yoshli o'smir 9000 dan ziyod so'zni bilishi talab qilinadi. Inson zakovatining oshishi bilan 13500 dan ortiq so'z ishlatadi.

Savol tug'iladi: turli xil badiiy asarlarda barcha so'zlar ishlatilganmi? Homerning o'lmas asarlarida taxminan 9 000 ta turli xil so'z, Dantening «Ilohiy komediya»sida 5860 xil so'z ishlatilgan bo'lsa, qadimgi Rim shoiri Horak 6084 so'zdan foydalanganligi ma'lum. Ayrim olimlar o'z ijodida Pushkin 21000, Shekspir 23000, Navoiy esa 26000 dan ziyod turli so'z ishlatganligini ta'kidlaydi. Boshqa manbalarda bu raqamlar biroz o'zgarishini ko'rish mumkin. Asosiysi, ushbu sanab o'tilgan daholar qo'llagan so'zlar soni aniqlik natijasida 1000, 2000 va hatto 3-4 mingtaga kamayganda ham ular qo'llagan so'zlarning raqamlardagi ifodasi avlodlarning ularga bo'lgan ehtiromi bejiz emasligini isbotlaydi. Ba'zi ma'lumotlarga ko'ra, bugun elimiz orasida mashhur bo'lgan shoirlarimizning leksik boyligi taxminan 3000 tani tashkil etar ekan. Bu sonni 8 ga ko'paytirsak, Navoiy, Shekspir va Pushkinning asarlarida ishlatilgan so'zlar miqdori kelib chiqadi. Albatta, gap lug'at boyligida emas. Shoir tilining bebaho boyligi – zarur bo'lgan «she'riy ma'lumotni» yetkazishi uchun uning boy tilidan foydalanish qobiliyatidadir! Matematiklar har qanday shoirning yashirin imkoniyatlarini hisoblashdi. Faraz qilaylik, shoirning qo'lida 400 ta harf bor deylik, u sakkiz qatorli she'r yozishi kerak. Matematik jihatdan bu harflardan sakkiz qatorli matn tayyorlash uchun 10^{100} she'riy versiyani olish mumkin.

Akademik A.N. Kolmogorovning boshqa hisob-kitoblari ham qiziqarli: u she'rdagi so'zlar soniga qarab, mumkin bo'lgan qofiyalar sonini aniqlash masalasini qaragan edi. Lekin, atigi o'n so'z bilan ham bu masalaning yechimi qiyin. Yigirma so'z bilan juda ham murakkab.

Savol: chet tilini o'rganayotgan kishi nimani bilishi kerak? Muloqot qilish uchun zarur bo'lgan minimal so'z boyligi qancha bo'lishi kerak?

Bu savollarga javob berish uchun matematiklar juda qiziqarli hisob-kitoblarni o'tkazdilar. Ular kompyuterda eng ko'p ishlatiladigan so'zlarning turli tillarda qanchalik ko'p ishlatilishini bilish uchun juda ko'p sonli matnlarni ko'chirishdi. Masalan, ingliz tilida matnning 75 foizi 736 ta eng keng tarqalgan so'zni o'z ichiga olar ekan. Ushbu 736 ta qimmatli so'zlarni o'rganib, matnning to'rtdan uch qismini yozish mumkin ekan. So'zlarni 1000 tagacha oshirish orqali matnning 80.5 foizini tushunishingiz mumkin. Siz biladigan so'zlar ro'yxati 2000 tani tashkil etsa, matnning 86 foizini tarjima qilishingiz mumkin ekan. Shuningdek, matnni tushunishingiz 3 ming so'z bilan 90 foizni, 5000 so'z bilan esa 93.5 foizni tashkil etadi. Bu esa siz ingliz tilidagi matnni to'liq o'qib olishingiz mumkin degan ma'noni anglatadi. Tilni yanada chuqurroq o'rganish paradoksni keltirib chiqaradi. 10 000 ta so'zni o'zlashtirgach so'ng, siz o'rganmoqchi bo'lgan tilning 96.4 foizga qadar o'rgangan bo'lasiz. Savol: yuqorida keltirilgan 93.5 foizdan 96.4 foizga o'tishda, ya'ni atigi 2.9 foiz ko'proq ma'lumotga ega bo'lish uchun qancha mehnat sarflanadi? Juda ko'p!

Til – xalqning milliy boyligi. Boshqa tillardan olingan so'zlar til boyligini kamaytiradi, albatta. Matematiklarning aniqlashicha, alban tilining 5140 so'zidan faqat 430 tasi alban tiliga mansub so'zlardir. Arman tilidagi holat yana ham hayratlanarli: 1500 so'zdan 1140 tasi turli tillardan, jumladan Fors, Yunon, Parfiya, Suriya, Arab va boshqa sharq tillaridan olingan. Vaziyat ingliz tilida ham yaxshi emas: bu tildagi so'zlarning 56-70 foizi fransuz, lotin va boshqa roman tillardan kelib chiqqan.

Har bir til xalqning tarixiy rivojlanish shartlariga muvofiq rivojlangan. Biroq har bir millat o'z tilining pokligi va go'zalligi uchun qayg'urishi kerak. Masalan, Fransiyada rasmiy matnlarda xorijiy so'zlarni ishlatish taqiqlanadi. O'zbek tili ham go'zal tildir. Bu go'zallikka tajovuz qilish bizning avlodlarimiz tomonidan kechirilmaydigan jinoyatdir.

Odamlarning tili ming yillar davomida yaratilgan bo'lib, tilning evolyutsiyasi tabiiy ravishda davom etadi.

GPS QANDAY ISHLAYDI?

O'rta maktab va litseylarda o'qitiladigan geometriya fani Evklid geometriyasi deyiladi. Bu geometriyada uchburchakning ichki burchaklari yig'indisi 180° ga teng. Lekin o'tgan asrda N.I.Lobachevskiy kiritgan yangi geometriyada uchburchakning ichki burchaklari yig'indisi 180° dan farqli! Bo'lishi mumkin emas deyishga shoshilmang. Axir, bu geometriya kiritilgan paytda ham uning turmushimizda hech keragi yo'q deb o'ylashgan edi. Biroq keyinchalik uzoq masofaga nur va to'lqinlar yuborilganda ular to'g'ri chiziq bilan emas, balki egri chiziq bo'ylab yurishi aniqlandi va bunday harakat Lobachevskiy geometriyasi orqali aniq o'rganilishi mumkinligi isbotlandi.

Bugungi kunda GPS navigatorlar sistemasi sputnik orbitalari aniq vaqti bilan ishlaydi. Bu sistemaning asosida ham Lobachevskiy geometriyasi olingan. Agar GPS larni Evklid geometriyasi bilan ishlatsak, unda 1 sutka ichida 10 km atrofida xatolik paydo bo'ladi. Demak fazomiz noEvklid ekanligini sal unutsak, u holda GPS bizni belgilangan manzildan ancha olisga yetaklashi aniq!

MILLIARDER MATEMATIKLAR

Dunyoning eng boy insonlari ro'yxatini quyidagi saytdan ko'rishingiz mumkin.[8]

Bu ro'yxatda matematiklar ko'pchilikni tashkil qiladi. Shulardan ba'zilari haqida ma'lumot keltiramiz:

Google.com ning matematik asosi. Biror ma'lumot kerak bo'lganida hammamiz www.google.com saytga kirib qidiramiz. Bu tizim bizga qidirayotgan ma'lumotlarimizni

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_richest_people_in_the_world

juda qisqa vaqt davomida yuqori aniqlik bilan topib beradi. Xo'sh, bu murakkab vazifani Google qanday amalga oshiradi? Javob yana matematika. Bu tizim ehtimollar nazariyasidagi stoxastik matritsaga mos Markov zanjiriga asoslangan. Markov zanjirlari nazariyasi o'rta maktabda o'tilmasa-da, o'quvchiga matematikaning kuchini ko'rsatish uchun Google haqida ma'lumot berishni lozim topdik.

Dastlab, 1996 yilda Kaliforniyaning Stenford universitetida informatiklar L. Peyj va S. Brin tomonidan tadqiqot loyihasi sifatida boshlangan Google bugungi kunga kelib 1 daqiqada 37000 dollar foyda qilayotgan yirik kompaniyaga aylandi. Demak, Google yaratuvchilari insoniyatga bebaho qulayliklar taqdim etish bilan birgalikda, o'zlari ham juda katta daromad ko'rmoqda.

J. X. Saymon, amerikalik matematik, milliarder. U investor sifatida tanilgan va 1982-yilda Nyu Yorkda joylashgan Renaissance Technologies xususiy fondiga asos solgan. Garchi Saymon 2009-yilda ushbu fonddan nafaqaga chiqqan bo'lsa-da, fondning maslahatchisi bo'lib qolmoqda. Forbes xabariga ko'ra, uning 2019-yil fevral oyidagi sof boyligi 21.5 milliard dollarga baholanmoqda. To'liq ma'lumot uchun[9] saytga qarang.

E. O. Thorp, amerikalik matematik. U ishonchli moliyaviy foyda olish uchun juda kichik korrelyatsiyalarni o'z ichiga olgan ehtimollik nazariyasining zamonaviy qo'llanmalarini yaratdi. Shuningdek, u moliya bozorlarida to'siq fondining samarali usullarini ishlab chiqdi va qo'lladi. To'liq ma'lumot uchun[10] saytga qarang.

GAMILTON GRAFI VA GENOM REKONSTRUKSIYASI

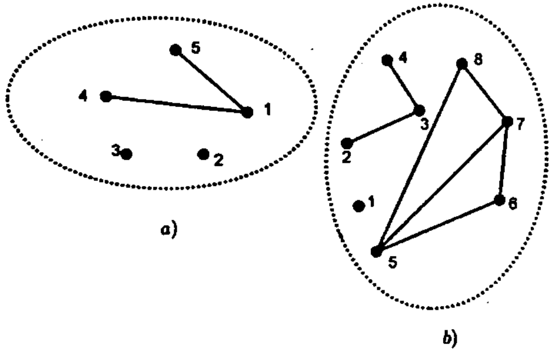
Graf deb ataluvchi matematik tushunchani berishdan oldin quyidagi misolni qaraymiz.

---

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Jim_Simons_(mathematician)

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Edward_O._Thorp

Misol. Besh kishidan iborat oilani qaraylik: ota, ona, katta o'g'il, kichik o'gil va qiz. Ularni mos ravishda 1,2,3,4,5 sonlar bilan belgilaymiz. Bularni 5 ta nuqta sifatida qarab, bir oyda tug'ilganlarni tutashtirib chiqamiz. Agar hamma har xil oyda tug'ilgan bo'lsa, demak nuqtalar tutashmaydi. Masalan, 3 kishi may oyida, 1 kishi mart oyida va 1 kishi iyun oyida tug'ilgan bo'lsa, 40-rasmdagi a)-shakl hosil bo'ladi.



40-rasm. *a) Besh kishidan iborat oilaning bir oyda tug'ilganlarini tutashtiruvchi graf. b) 8 ta nuqtali (uchli) va 7 ta qirrali graf.*

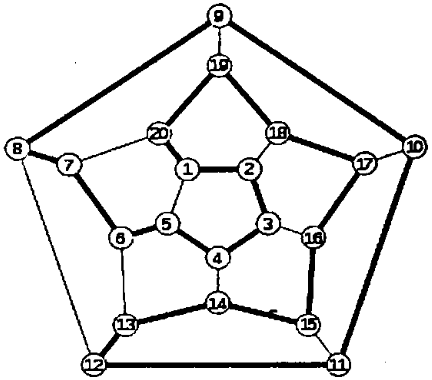
Graf deb cheklita nuqta va ularning ba'zi juftliklarini tutashtiruvchi kesma (odatda bu kesma qirra deyiladi)lardan iborat shaklga aytiladi (40-rasm da misollar keltirilgan).

Graflar nazariyasi hozirgi zamonda turli xil xususiyatlarga ega bo'lgan hisoblash qurilmalarini loyihalashda (yasashda) qo'llanilmoqda. Masalan, AT dasturlari, internet, kompyuter tomografiyasi, aloqa tizimi, transport oqimi va hokazolar graflar nazariyasiga asoslangan.

Grafning sikli deb uning bir nuqtasidan chiqib, qirralari ustidan yurib yana boshlang'ich nuqtasiga kelish mumkin bo'lgan qismgrafiga aytiladi.

Bir uchidan chiqib grafning barcha uchlarini bir martadan o'tib, qaytib boshlang'ich nuqtaga kelish mumkin bo'lgan sikl (agar bunday sikl mavjud bo'lsa) Gamilton sikli deb aytiladi (41-rasmga qarang.)

Gamilton grafi deb Gamilton sikli mavjud grafga aytiladi.



41-rasm. *20 ta uchli Gamilton grafida qalin chiziq bilan Gamilton sikli ko'rsatilgan.*

Endi biologiyadagi Morgan qoidasini ifodalaymiz: bitta xromosomada joylashgan genlar birikish guruhlarini hosil qiladi va nasldan naslga bog'langan holda o'tadi. Ularning birikish kuchi shu genlar orasidagi masofaga teskari proporsionaldir.

Agar xromosomani bir graf shaklida tasavvur qilsak, undagi birikish va genomlarni grafning qism graflari, xususan, sikllari deb qarash mumkin. 1990-yillarning o'rtalariga kelib, bakteriyalarning genomi strukturasi aniqlangandi. 2001-yilda odam genomi sturukturasi ochildi. Bu ishlarda graflar nazariyasi, Gamilton sikllarini hisoblash algoritmlari keng qo'llanilgan edi. Bugungi kun matematikasi biologlar uchun katta imkoniyatlar ochib bermoqdaki, uning yordamida har qanday sut emizuvchinig genomi strukturasini o'rganish mumkin.

MATEMATIKA BOSHQA FANLAR UCHUN SHOHMI YOKI XIZMATKOR?

Ushbu bo'limda matematika va boshqa fanlar o'rtasidagi aloqaning muayyan misollarini qisqacha keltirib o'tamiz. Bunda matematika va boshqa fanlar o'rtasidagi o'zaro munosabatlarning ikki tamoyili ilgari surildi. Birinchidan, matematika boshqa fanlarni hisoblash vositasidir. Ikkinchi tamoyil – asosiy mantiqiy munosabatlar, ya'ni matematika va boshqa fanlarning o'zaro aloqasi qat'iy mantiqiy dalil, mantiq va chegara asosida amalga oshiriladi.

Quyidagi mulohazalar internet sayti[11] asosida tayorlandi:

Matematikaning tabiiy va texnik fanlar bilan o'zaro aloqasi. Asrlar davomida matematika va tabiiy fanlar o'rtasidagi munosabatlar masalasi falsafashunoslar va fan tarixchilariga qiyinchilik tug'dirib kelgan.

O'zining «Matematika fanining tabiiy fanlar bo'yicha zabt etilmas samaradorligi» nomli maqolasida Vagner shunday degan edi: «Matematik til fizikaviy qonunlarni shakllantirish uchun juda mos keladi. Matematik tilning amal qilish sohasi (yaxshi yoki yomon) doimo kengayib, ilm-fanning yanada kengroq maydonlarini qamrab oladi va bizga nafaqat quvonch, balki yangi jumboqli muammolarni ham keltirib chiqaradi».

Fizika: Matematika va fizika fanlari o'rtasidagi aloqalar turli va doimiydir. Sof matematika obyekti – haqiqiy moddiy narsa: moddiy dunyoning mekansal shakllari va miqdoriy aloqalaridir. Ushbu materialning juda mavhum shaklga ega bo'lishi aslida tashqi dunyodan kelib chiqish sabablarini zaiflashtiradi. Lekin bu shakl va munosabatlarni sof holda o'rganish uchun ularni o'z tarkibiy qismlaridan ajratib qo'yish kerak, ba'zi qismlar oxirigacha befarq qoldiriladi. Matematikaning asosiy usuli – abstrakt usuldir. Fanning asosiy jihati – haqiqatni shakliga ko'ra aks ettirish. Uning mavzusi butun haqiqatdir! Boshqacha aytganda, matematika tomonidan o'rganilgan fikrlarning paydo bo'lishi mumkin bo'lmagan birorta moddiy maydon mavjud emas. Shunday qilib, matematika obyektlarning mavjud shakllari, «yig'ish» mumkin bo'lgan miqdoriy munosabatlar va mekansal shakllarni o'rganadi.

Fizika ilm-fan sifatida o'zining mavzusida moddaning asosiy xususiyatlarini ikki shaklda – modda va maydon shaklida egallaydi. Ular dastlabki tamoyillar, fundamental nazariyalar va tadqiqot usullari bilan birlashtirilgan mustaqil bilimlar majmuini ifodalaydi.

---

[11]https://pedtehno.ru/content/matematika-carica-ili-sluga-dlya-drugih- nauk

Dastlab fizika asosan atrofimizdagi jismlarning xususiyatlarini o'rganib chiqdi. Biroq bu bosqichda allaqachon umumiy muammolarni o'rganish mumkin edi: harakat, jismlarning o'zaro ta'siri, moddaning strukturasi, tabiati va mexanizmlari, masalan, issiqlik, tovush, optik mexanizmlar. Shunday qilib, aslida fizika asosan obyekt fanidir. Lekin XX asrda tabiatning asosiy hodisalari va ularni tasvirlaydigan qonuniyatlar fizikaning asosiy obyektiga aylandi.

Matematika oldinroq fan sifatida yaratilgan, ammo fizikaviy bilimlar rivojlanganligi sababli matematik usullar fizikaviy tadqiqotlarda foydalanishni kengaytirdi.

Matematika va fizika o'rtasidagi o'zaro bog'liqlik, avvalambor, turli nuqtai nazardan qaraydigan bo'lsak-da, o'rganadigan umumiy mavzu sohasi mavjudligi bilan belgilanadi. Matematika va fizikaning o'zaro aloqasi ular orasidagi g'oya va usullarining o'zaro ta'sirida namoyon bo'ladi. Ushbu munosabatlar uch turga bo'linishi mumkin:

- Fizika vazifalarni qo'yadi, ularni hal qilish uchun zarur bo'lgan matematik g'oya va usullarni yaratadi, keyinchalik matematik nazariyani rivojlantirish uchun asos bo'lib xizmat qiladi.
- O'zining g'oyalari va matematik apparati bilan ishlab chiqilgan matematik nazariya fizikaviy hodisalarni tahlil qilish uchun ishlatiladi, bu ko'pincha yangi fizikaviy nazariyaga olib keladi va o'z navbatida dunyoning fizikaviy tasviri rivojlanishiga hamda yangi fizikaviy muammolarning paydo bo'lishiga olib keladi.
- Fizika nazariyasini ishlab chiqish mavjud bo'lgan maxsus matematik apparatga asoslanadi, lekin u fizikada qo'llaniladigan darajada ishlab chiqiladi.

Astronomiya. A. I. Gersen: «Astronomiya (fan sifatida) matematika bilan birlashganidan beri mavjud bo'la boshladi», – degan edi.

XX asrda astronomiya ikki asosiy qismga bo'lingan: kuzatish va nazariy.

- Kuzatish astronomiyasi – samoviy jismlar haqida kuzatuv ma'lumotlarining olinishi, keyin tahlil qilinishidir.

• Nazariy astronomiya – matematik, analitik va kompyuter modellarini ta'riflashga, rivojlantirishga qaratilgan astronomik obyektlar va hodisalar.

Ushbu ikkita qism bir-birini to'ldiradi. Nazariy astronomiya kuzatuv natijalari uchun tushuntirishlarni izlaydi; kuzatish astronomiyasi esa nazariy xulosa va materiallarni, farazlar va ularning tekshirish imkoniyatini taqdim etadi.

Astronomiya doimiy ravishda matematika bilan, asosan, koordinatalar sistemasi bilan ish yuritadi. Osmon xaritasida yulduzlarning joylashishi, sun'iy yo'ldoshlar va kosmik qurilmalarni ishga tushirish, har qanday prognozlar turli xil koordinata sistemalaridan foydalanishga asoslangan. Koordinata sistemasidan foydalangan holda astronomlar yulduzlar orasidagi masofani va ularning yulduzlar jadvalidagi joylashishini aniqlaydi. Shuningdek, galaktikaning hajmi, aylanish tezligi, sayyoralarning trayektoriyalari va ularning kattaliklari ham aynan korrdinatalar sistemasi yordamida tushuntiriladi.

Shunday qilib, yulduz va sayyoralar harakati, yulduzlarning osmondagi joylashuvi – bularning barchasi matematik qoida va qonunlarga bo'ysunadi degan xulosaga kelish mumkin. Astronomiyaning asosi matematik apparatdir.

Biologiya. N. I. Lobachevskiy «Haqiqiy dunyoga qo'llanilishi mumkin bo'lmagan matematika bo'limi yo'q, uning hatto eng mavhum qismi ham qo'llaniladi», – degan edi.

Zamonaviy ilmiy tadqiqotlarning o'ziga xos xususiyati – turli sohalarda aniq matematik usullardan keng foydalanishdir. Yaqinda matematik usullar iqtisod, tilshunoslik, psixologiya va boshqa ko'plab sohalarga, xususan, biologik tadqiqotlar va tibbiy tashxislarga ham kirib bordi.

Matematik usullarni yovvoyi hayvonlar hayotini o'rganishda kiritishning ahamiyatini bir tomondan, biologik va tibbiy ma'lumotlarning tez va samarali ishlashi uchun zamonaviy hisoblash texnologiyalaridan foydalanishda, boshqa tomondan esa yashash tizimlarini va ularda yuzaga keladigan jarayonlarni tasvirlaydigan matematik modellarni yaratishda ko'rish mumkin. Matematika va biologiya o'rtasida yuzaga keladigan «teskari aloqa» muhim ahamiyatga ega: biologiya nafaqat matematik usullarni qo'llash uchun xizmat qiladi, balki yangi matematik muammolarning tobora muhim manbayi bo'lib qoladi. XX asr boshidan buyon nafaqat biologiya, balki bir nechta fan tomonidan o'rganilgan hayot – sayyoradagi eng go'zal va murakkab hodisalardan biridir. Keyinchalik fizik va matematik olimlar matematik tilda tasvirlab berilishi mumkin bo'lgan bir qator biologik hodisalarni kashf etdilar.

Nikolay Rashevskiy (1939-yilda matematik biologiyani tadqiq etishga bag'ishlangan birinchi ilmiy jurnalning asoschisi), Karl Lyudvig fon Bertlanfi (1938-yilda u baliq fermalarida ishlatiladigan mashhur o'sish tenglamasini yaratgan) hamda biologik muammolarni matematik modellashtirish uchun kompyuterdan foydalangan dastlabki olimlardan biri bo'lgan Alan Tyuring matematik modellashtirish va hayot ilmining samarali birlashuviga asos solishdi.

Kompyuterlar biologik hodisalarning miqdoriy tadqiqotini olib bormoqda. Shunday qilib, yangi soha matematik biologiya yoki biomatematika tug'ildi. U biologiyani rivojlantirishga hissa qo'shgan va hissa qo'shib kelayotgan dinamik tizimlar (miya, antill yoki ekotizim) va saraton, epidemiya, OITS yoki cho'chqa grippini o'rganishda hamda amaliy muammolarni hal qilishda qo'llanilmoqda.

O'qish mexanizmi: harflar, raqamlar va signallarni yodlash neyron tarmoq orqali modellashtirilishidir. Xotira modeli Hopfield tarmog'i sifatida tanilgan. Bugungi kunda u turli xil raqamli tizimlarda nafaqat fiziologik muammolarni hal qilishda, balki elektron va tasvirni qayta ishlashda ham qo'llaniladi. Shunday ekan, biologiyada matematika tayanch soha hisoblanadi deya xulosa chiqarishga asoslar yetarli.

Ekologiya va matematika. Tirik jonzotlar, o'simliklar, hayvonlar yoki mikroorganizmlar bir-birlari bilan va atrof-muhit bilan o'zaro munosabatda bo'ladi. Har xil turlarga mansub biologik organizmlar tabiiy muhiti ekotizimni tashkil qiladi. Shuningdek, ekotizimda ayrim fiziologik omillar, abiotik deb ataladigan ekotizimlarda (biologik xususiyatga ega emas) va ekotizimning tirik olamlariga tegishli bo'lgan biotik omillarga ega ekotizimlar farq qiladi.

Abiotik omillar geologiya va iqlim bilan bog'liq barcha omillar: yorug'lik, suv, harorat, atmosfera va tuproq tarkibiga bog'liq.

Biotik omillar, o'simliklar, o'txo'r va etxo'rlar, qo'ziqorin va hokazolarni o'z ichiga olgan ekotizimlar XIX asrda biologiyaning bir bo'lagi sifatida paydo bo'lgan ekologiyani o'rganadi.

Ekologiya paydo bo'lgan paytdan boshlab ekologik hodisalarni tavsiflash va bashorat qilish imkonini beradigan modellarni yaratish uchun matematik biologiya vositalari ishlatilgan. Bu yangi ilmning jadal rivojlanishiga va unda matematik asosga ega bo'lgan ko'plab tushuncha va nazariyalarning paydo bo'lishiga olib keldi.

Ekologiyada dastlabki matematik modellarni populyatsiyalar dinamikasini tasvirlashda foydalanishgan. Ushbu modellarning mualliflari atrof-muhit bilan o'zaro aloqalar natijasida aholi sonining o'zgarishi va uning yosh taqsimotini tavsiflashga harakat qilishdi. Ushbu tadqiqotlar XVIII asrda, Tomas Maltusning eksponensial o'suvchi populyatsiya modelini yaratganidan keyin boshlangan va keyinchalik, 1938-yilda Pyer Fransua Verxyulst aholi o'sishining logistik modelini taqdim etgan.

So'nggi o'n yilliklarda global isish mavzusi juda dolzarb muammolardan biri bo'lib qolmoqda. Meteorologiya markazlari murakkab matematik modellar yordamida ob-havo prognozlarini tuzsa-da, global iqlim o'zgarishini aniq kuzatib xulosa qilish juda qiyin.

Meteorologiyada ishlatiladigan matematik modellarga iqlim modellari deyiladi. Ular atmosfera jarayoni, atmosfera va okeanlarning o'zaro ta'sirini kompyuter modellashtirish qutblarda yer va muz qoplamalarini tasvirlashga asoslanadi. Ushbu modellar fizik qonunlariga asoslangan differensial tenglamalardir. Ular berilgan vaqtda Yer sirtlari tenglamalar bilan tasvirlangan kvadratlarga bo'linadi. Keyin shamol tezligini, nisbiy namlik, issiqlik uzatilishini, shuningdek, ulangan joylar o'rtasidagi o'zaro ta'sirlarni hisoblaydi. Meteorologlar oxirgi modellashtirish natijalarini talqin qilish asosida ularning prognozlarini amalga oshiradilar.

Ekologiyada matematika turli xil vaziyatlarni tasvirlaydi va modellashtiradi. Shuning uchun uning atrof-muhit bilan munosabati uzviy bog'liqlikda rivojlanadi.

Geografiya. Geografiyani matematikasiz tasavvur qilish mumkin emas. Asosiy geografik tushunchalardan biri bo'lgan masshtab har bir yo'nalishda chizilgan rasmning uning haqiqiy hajmidan qanchalik kichik yoki kattaroq ekanligini ko'rsatadi. Bundan tashqari, matematika geografiyada, asosan, statistika uchun keng qo'llaniladi.

Geografik koordinatalar Yer yuzasidagi nuqtaning holatini aniqlaydi.

Kenglik – mahalliy zenit yo'nalishi va ekvator tekisligi o'rtasidagi burchak, ekvatorning har ikki tomoniga 0° dan 90° oralig'ida hisoblanadi. Shunday qilib, geografiyada matematik modellarni kuzatish mumkin, ya'ni geografiyada matematikasiz ob-havoni aniqlash, hatto kenglik va uzunlikni hisoblash mumkin emas degan xulosaga kelish mumkin.

Demak, matematika shunchaki xizmatchi-vosita emas, balki u geografiyaning asosini tashkil qiladi.

Kimyo. Kimyo elementar zarralar fizikasidir. Fizikada esa avval ta'kidlaganimizdek, matematikasiz biror qonuniyatni bajarishingiz mumkin emas. Kimyoda matematik bilimlarsiz va boshlang'ich mantiqsiz, hech narsa yo'qligini aniq ko'rsatadigan juda ko'p misollar mavjud. Ana shunday misollarni quyidagi savollarga javob berishda duch kelasiz: oltingugurt tarkibidagi o'zgaruvchan valentlikni, yoki o'zgaruvchan valentlikka ega bo'lgan boshqa kimyoviy elementdagi valentlikni matematikasiz qanday to'g'ri aniqlash mumkin? Matematikaning elementar bilimlarisiz reaksiyadagi moddaning foizini qanday hisoblash mumkin?

Kristal panjaralar kimyoda stereometriyaning eng yorqin misoli bo'la oladi. Ma'lumki, har bir moddaning xossalari asosan kristal panjaraga bog'liq. Misol uchun, grafit va olmos uglerod atomlaridan tashkil topgan, faqat grafitdan farqli o'laroq, olmos, juda bardoshli. Bundan tashqari, kimyoda koinotdagi turli orbitalarni qurish uchun Dekart koordinatalaridan foydalaniladi.

O'zgarishlar zanjiri bu mantiqsiz amalga oshirilmaydigan eng keng tarqalgan kimyoviy vazifalardan biridir. Matematikani bilmasdan energiya darajasida elektronlarni taqsimlash mumkin emas. Bu esa kimyoda matematikaning ustun mavqega ega ekanligi haqida xulosa qilishimizga imkon beradi.

Chizmachilik. Yuqorida aytib o'tilganidek, o'lchov yoki masshtab xaritada chizilgan chiziqning qanchalik ko'p marta haqiqiy o'lchamidan kichikroq yoki kattaroq ekanligini ko'rsatadi. Barcha chizmalar qat'iy tizimga asoslangan. 45 gradusli burchakka burish, aylana, tekislik, proeksiyalar – bularning barchasi matematik tushunchalar bo'lib, bu bilimlarsiz birorta rasmni yaratish mumkin emas. Shunday ekan, matematika bu yerda ham hukmronlik pozitsiyasini egallaydi.

Informatika. Kompyuter fanida matematikaning eng muhim misollaridan ayrimlarini keltiramiz. Matematikani ishlatmasdan informatika fanida bir necha muhim bo'limlarga xizmat qila olish, biror dasturni tuza olish, hujjatlarni tahrirlash, yoki o'zgartirish mumkin emas. Ya'ni quyidagilarni matematikasiz tasavvur etish imkonsiz:

– axborot birliklari, raqamli tizimlar, axborotni kodlash;

– algoritmlash va dasturlash;

– mantiqni o'rganish;

Matematik nazariyada «axborot» tushunchasi juda mavhum obyektlar – tasodifiy kattaliklar bilan bog'liq. Zamonaviy axborot nazariyasida bu konsepsiya ancha kengroq – moddiy obyektlar mulki sifatida qaraladi.

Ammo matematik apparat bo'lmasa, zamonaviy kompyuterni tasavvur qilishning imkoni yo'q. Chunki, u ma'lumotlarni saqlash, qayta ishlash va uzatish jarayonlariga asoslanadi. Bu esa o'z navbatida matematik tamoyillarga asoslanadi.

Misol uchun, zamonaviy kompyuterlarning ko'pchiligida muammoni birinchi navbatda tushunadigan shaklda tasvirlash mumkin (odatda barcha ma'lumotlar ikki tomonlama shaklda – nollar va birlar ko'rinishida taqdim etiladi), undan keyin uni qayta ishlashga qaratilgan xatti-harakatlar oddiy mantiqiy algebra yordamida qisqartiriladi.

Matematik muammolar bilan bir qatorda matematik qisqartirilishi mumkin bo'lgan ko'plab axborotni qayta ishlash vazifalari tezkor elektron vositalar yordamida bajarilishi mumkin. Biroq kompyuter hech qanday matematik muammolarni hal qila olmasligi aniqlandi. Ilk marta kompyuter yordamida yechilishi mumkin bo'lmagan vazifalarni ingliz matematigi Alan Tyuring tasvirlab berdi. Shunday qilib, kompyuter fanining asosi matematika bo'lgan degan xulosaga kelish mumkin. Shuning uchun axborot texnologiyalarini ham matematikasiz tasavvur qilish qiyin. Demak, kompyuter matematik muammolarni hal qilish, axborotni qayta ishlash vazifasini bajara oladigan, muayyan, yaxlit yoki integral bo'lmagan raqamli tizimga asoslangan kalkulyator hisoblanadi.

Matematika va gumanitar fanlar. XX asrda ilm-fanning turli sohalardagi o'zaro aloqalar va interpretatsiya davomiyligi aniqlandi. Fanlarning chegarasi asta-sekin yo'qolishi bilan gumanitar, texnika va tabiiy fanlar bilimlarining «chorrahasida» bo'lgan ko'plab fan tarmoqlari taraqqiy eta boshladi.

Zamonaviylikning yana bir xususiyati – bu tuzilmalar va uning tarkibiy qismlarini o'rganish istagidir. Shuning uchun ham ilmiy nazariyada ham amaliyotda matematikaning o'ziga xos o'rni bor. Bir tomondan mantiq va falsafa, ikkinchi tomondan statistika bilan to'qnashib, matematika uzoq vaqt davomida faqat «insonparvarlik» deb hisoblangan hududlarga kirib bordi va ularning evristik salohiyatini kengaytirdi. Evristik algoritm muammoni hal qilish uchun algoritm bo'lib, uning to'g'riligi barcha mumkin bo'lgan holatlar uchun isbotlanmagan bo'lsa-da, ko'p hollarda bu juda yaxshi yechimga ega ekanligi ma'lumdir.

Gumanitar sohada matematika. Zamonaviy ta'lim dasturiga yangi ma'lumot va tadqiqot usullarini kiritishda talabalarni ortiqcha yuklamadan ozod qilish, talabalarni o'quv jarayoni va o'qitish usullarini tubdan qayta tashkil etish talab etiladi. Gumanitar fanlar bo'yicha matematik ta'lim esa texnik yoki tabiiy fanlar bo'yicha matematik ta'limdan tubdan farq qilishi kerak. Matematikani raqamlar, funksiyalar yoki raqamlarni tahlil qilish emas balki, birinchi navbatda, mavzu modellarini mazmunli tahlil qilish vositasi sifatida ko'rsatish maqsadga muvofiqdir.

Hozirda talabalarning ongini yangi axborot bilan to'ldirish odatiy holdir. Bunda eng yangi texnologiyalarning imkoniyati asosiy o'rinni egallaydi. Albatta, bilimlarni tanlash, uni tuzish muhim va dolzarb muammo hisoblanadi. Biroq aql ham muhim omildir. Mishel de Montaignening «yaxshi tashkil etilgan aql-idrok juda ko‘plab to‘ldirilganidan afzal emas» degan fikri aqlsiz kallaga hech qanday texnologiya yordam berolmaydi deya xulosa qilishga turtki bo‘ladi.

Har qanday texnologiya faqat tizim muammosining bir qismini hal qilish vositasidir. Fikrlash qurilmasini takomillashtirish (asosan gumanitar fanlarda) uchun matematik ta’lim bilan shug‘ullanish kerak. Hech narsa texnik yangiliklar kabi tezda eskirib qolmasligini unutmang! Lekin aqlning matematika, fizika yoki falsafa kabi fanlar bilan oziqlantirilishi insonda har qanday yangiliklarni tez va oson qabul qilishga moyillikni oshirishga xizmat qilishi sir emas.

Tarix. Matematika va tarix ikkita ajralmas bilim sohasi.

Tarix matematikani gumanitar va estetik mazmun bilan boyitadi, talabalarning majoziy ongini rivojlantiradi. Mantiqiy va tizimli fikrlashni rivojlantiradigan matematika tarixda munosib joy egallab, uni yaxshiroq tushunishga yordam beradi.

Tarix va matematika sohasida asosiy tadqiqot usullaridan biri bu kliometrika (Cliometrics) – o‘zaro tartibli yo‘nalish bo‘lib, u tarix, iqtisod va matematika kesishmasidagi tadqiqotlarda keng qo‘llaniladi.

Tarixiy materiallarni qayta ishlash uchun matematikadan foydalanish bo‘yicha birinchi tajribalar 1960-yillarga to‘g‘ri keladi.

Ko‘p yillar davomida aholi ma’lumotlari matematik usullar va tarixiy materiallar o‘rtasidagi aloqaning yagona nuqtasi bo‘ldi. Yana bir o‘zgarish faqatgina o‘tgan asrning 60-yillarida Yevropada hamda XIX asrning 70-yillarida Rossiyada sodir bo‘lgan. Matematik statistika uslublarini qo‘llashga muvaffaq bo‘lgan birinchi olimlar T. Bokl (Yevropa) va I. V. Luchitskiy (Rossiya)lardir. O‘shandan beri eng sodda statistik usullar (guruhlash, o‘zgarish ko‘rsatkichlarini hisoblash va boshqalar) tarixni yoritishda qo‘llanilmoqda.

Matematik usullardan foydalanish tarixning an’anaviy usullari bilan manbalarni o‘rganish bo‘yicha katta tajriba to‘plangan idrok sohalarida ko‘proq amalga oshirildi. Matematik usullardan foydalanish muammolarni yechishni yangi darajaga olib chiqishga imkon berdi. Hozirgi vaqtda ushbu turdagi umumlashtirishga asoslangan va zamonaviy texnikaning keng doirada qo'llashni ta'minlaydigan tarixiy tadqiqotlar yo'nalishlari ishlab chiqilmoqda.

Matematik tarixning yetarli darajada tasodifiy modellarni to'play olish, bizning farazlarimizni ma'lumotlar bilan tekshirib isbotlash uchun kerak. Demak, tarixda juda ko'p ma'lumotlar mavjud, bu bilan biz barcha nazariyani tekshira olamiz. Masalan, siyosiy beqarorlik. Bu yerda xazina tangalari bizga juda ko'p yordam beradi. Darhaqiqat, tangalar juda yaxshi tarixga ega bo'lib, ko'plab tangalarda chiqarilgan yillar zarb qilingan. Bu orqali xazina qachon yashirilganligini aniq bilib olishimiz mumkin. Ko'pgina hududlar uchun topilgan xazinalar ro'yxati bor. Misol uchun, Moskva viloyatida yuzlab xazinalar qayta yozilib, bu xazinalar yordamida yashirilgan vaqt oralig'i haqida bilib olamiz. Shunday qilib, siyosiy beqarorlik davrlari va xazina miqdori orasida munosabat mavjudligi aniqlandi. Ma'lum bir paytda yashirilgan, keyinchalik da'vo qilinmasdan yillar davomida yer ostida qolib ketgan xazinalarga quyidagicha izoh berish mumkin: insonlar ichki urush davrida ichki vaziyatning asoratlari sababli yoki xorijiy davlatni bosib olish vaqtida xazinasini yashirishga harakat qilgan, ammo vaziyat barqarorlashgan paytda xazina qazib olinishiga egalari vafot etganligi yoki boshqa joyga ko'chishga majbur etilganligi to'sqinlik qilgan. Yillar (asrlar) o'tib, bu qatlamlar siyosiy beqarorlikning jadal suratini tasvirlab berishga xizmat qiladi.

Tarixda matematikadan foydalanishning eng ajoyib namunasi – xronologiya, sana va voqealardir. Barcha hodisalar ma'lum qonunlarga muvofiq amalga oshiriladi. Ta'kidlash kerakki, davriylik g'oyasi XIX asrda va XX asr boshlarida insoniyat madaniyatining ilg'or progressiv rivojlanish g'oyasiga qarshi edi. Bu madaniy-tarixiy turlardagi harakatda namoyon bo'ladi.

Ko'pgina matematik tuzilmalar tarixga tatbiq etilgan, masalan, har bir qismning o'z nomi va ma'nosi bo'lgan ramzlarning tuzilishi kabi. Shu sababli «matematika tarixni o'rganishda juda muhim rol o'ynaydi» deb ishonch bilan aytishimiz mumkin.

Iqtisodiyot. Matematika iqtisodchilarga murakkab hodisalarning keng doirasi bo'yicha matematik apparatni jalb qilmasdan ancha murakkabroq bo'lgan farazlarni shakllantirish imkonini beradi. Matematik usul esa mazmunli va tasdiqlangan farazlarni shakllantirishga qo'llaniladi. Bundan tashqari, ba'zi bir iqtisodiy hodisalarning tortishuvli xususiyatini matematikadan foydalanmasdan o'rganishning imkoni yo'q.

Bugungi kunda matematik modellar nazariy-iqtisodiy munosabatlarning muhim qismida o'z aksini topgan. Iqtisodiyotda matematik konsepsiya keng tarqalgan. Masalan, ko'pincha statistika aholining iqtisodiy faolligi, bandlik va ishsizlik darajalarini hisoblash zarur bo'lganda qo'llaniladi.

Iqtisodiy hodisa va jarayonlarni tahlil qilishning eng muhim vositasi – iqtisodiy hayotdagi mavjud munosabatlarni xaritada ko'rsatishga, xo'jalik subyektlarining xatti-harakati, iqtisodiy dinamikasini tasavvur qilishga imkon beradigan nazariy modellarni yaratish usuli, ya'ni matematik usullardir.

Matematik modellashtirish dunyodagi barcha olimlar uchun tushunarli bo'lgan zamonaviy iqtisodiy nazariyaning tiliga aylandi. Shuning uchun bu holatda biz iqtisodiyotda matematikaning ustun mavqeyi va ahamiyatini tan olmay ilojimiz yo'q.

Ijtimoiy tadqiqotlar. Ijtimoiy fanlarda matematikaning o'zini qanday namoyon etayotganini tushunish uchun ijtimoiy fan nima ekanini tushunishimiz kerak. Ijtimoiy tadqiqotlarning asosiy predmeti siyosiy fanlar va falsafadir. Biroq ijtimoiy fanlar ham alohida fanlarni o'z ichiga oladi: huquq, iqtisod, tarix. Matematika iqtisod va hatto tarixga nisbatan hukmron pozitsiyani egallashini biz yuqorida ko'rib o'tdik. Shuningdek, falsafa, siyosatshunoslik va huquqda matematika «chuqurroq» ishlatilishi kerak.

Asrlar mobaynida qadimgi dunyodan boshlab, ayniqsa, yunonlar orasida matematika falsafa tushunchasi bilan bog'liq edi. Yunonlar nolni va cheksizlikni yoqtirmagan, qabul qilmagan bo'lsalar-da, ular ma'lum yangiliklarga erishishganini e'tirof etish joizdir. Ularning yutuqlari asosan, falsafa va tafakkurga asoslangan.

Aksiomalar aniq qoidalardan kelib chiqdi, o'z navbatida xuddi shu aksiomalar yordamida isbotlangan teoremalar qabul qilindi. Biz deduktiv tizim deb atagan bu porloq tizim zamonaviy geometriya asoslarini yaratdi. O'sha davrning taniqli faylasuflaridan biri Platon ayni paytda, kuchli matematik hisoblanganligini ham hisobga olish kerak. Falsafa yangi matematik kashfiyotlar, mukammal matematik mantiq va chegara uchun g'oyalar tug'dirdi, shuningdek, faylasuflarga, mutafakkirlarga yordam berdi. Keling, siyosiy fanlar va qonunlarga nazar solaylik.

Siyosatshunoslik – jamiyatning siyosiy tashkiloti, siyosati, tamoyillari, normalari, jamiyatning faoliyati, xalqlar o'rtasidagi munosabatlar, jamiyat o'rtasidagi munosabatlarni ta'minlashga qaratilgan, davlat tomonidan boshqarish munosabatlariga bog'liq bo'lgan, inson hayotining alohida sohasi haqidagi fandir.

Siyosatshunoslikda matematika quyidagi jabhalarda namoyon bo'ladi:

– ijtimoiy hayotning siyosiy sohasi qonunlarini aniq shakllantirish va tahlil qilish, uni rivojlantirish uchun bashorat qilish;

– kelgusidagi ish uchun «mustahkam zamin» bo'lganda, siyosiy hodisalarning xususiyatlarini o'lchash, obyektiv ma'lumotlar olish;

– katta miqdordagi axborotni tahlil qilish (siyosat bo'yicha bugungi kundagi ma'lumotlar juda ko'pligini hisobga olsak, matematik usullarsiz uni qayta ishlash mumkin emas. Zamonaviy siyosiy fanlardagi empirik ma'lumotlarning tahlili ilmiy gipotezalarni sinashning asosiy usuli hisoblanadi);

– siyosiy tizimlar va jarayonlarning modellarini yaratish, shuningdek bunday modellarni tajriba qilish (siyosatshunoslikda bu amaliyot ilmiy tajriba yaratishning yagona yo'lidir. Ko'p hollarda, topilmalar umumiy nuqtai-nazarda aniq emas va u biror «matematik bo'lmagan» usul bilan olinishi mumkin emas. Shuning uchun siyosiy fanlar asosi matematik usullar hisoblanadi).

Huquq – tarixiy jihatdan odamlar o'rtasida haqiqiy munosabat shakllarining kuzatuv va tavsiflari asosida shakllangan, xalqlar o'rtasidagi munosabatlar tuzilishi va tuzilish qonunlari konsepsiyasidir.

Huquqiy konsepsiya (obyekt)lar haqiqiy narsalar va munosabatlarning xususiyatlarini ideallashtiruvchi yoki haqiqiy dunyoda o‘xshash bo‘lmagan mavhum tushunchalarni yaratish hamda ushbu xususiyatlarni rasmiy tilda yozish orqali yaratiladi. Agar biz qonunga bunday ta’rifni beradigan bo‘lsak, unda bu ta’rif matematika fanining ta’riflariga juda o‘xshash bo‘ladi.

Matematika tarixiy asosda hisoblash, o‘lchash va haqiqiy narsalarning shakllarini tasvirlash operatsiyalariga asoslangan tuzilmalar, tartib va munosabatlarning ilmidir. Matematik obyektlar haqiqiy yoki boshqa matematik obyektlarning xususiyatlarini ideallashtirib, bu xususiyatlarni rasmiy tilda yozish orqali yaratiladi. Bundan kelib chiqadiki, qonunchilik gumanitar fanlar uchun matematika hisoblanadi. Endi esa, keling, barcha ma’lumot va mantiqiy xulosalarni yig‘ishga harakat qilaylik. Ijtimoiy fanlar – turli fanlar majmuasi, jumladan, tarix, siyosiy fanlar, huquq, falsafa va iqtisoddir. Tarix va iqtisodiyotda matematika ustun mavqega ega. Falsafa, siyosatshunoslik va qonunchilikdagi matematikaning o‘rni haqida biz aniq javob bera olmaymiz, ammo huquq fani matematika bilan juda o‘xshash, ya’ni sud va mantiqiy fikrlash tizimi sudlanuvchining aybdorligini isbotlashda matematik deduksiya usulidan foydalaniladi. Bundan kelib chiqadigan xulosa quyidagicha: matematika bu yerda alohida o‘rin tutadi va ijtimoiy fanda matematikaning ahamiyatini inobatga olmaslikning iloji yo‘q.

Adabiyot. Adabiyotda matematika bilan deyarli hamma joyda uchrashamiz: matematika ko‘plab adabiy asarlar qahramonlari tomonidan ishlatiladi, matematika yozuvchilarni yangi kitob va g‘oyalarga ilhomlantiradi.

Matematikada muntazamlik kabi narsa borki, u bizni hamma joyda o‘rab oladi: kecha kun bilan almashtiriladi, hayvonlar janubga ko‘chiriladi va hakoza. Ajablanarlisi shundaki, adabiyotda ham qonuniyat bor. Misol uchun, lirikada bo‘g‘inlar soniga qarab o‘lchash – vaznning o‘lchami (bu vazn o‘lchagichning maxsus tadbiri)ni olaylik. Ushbu o‘lchamning turli turlari mavjud: aruz, barmoq, erkin. Ta’kidlash kerakki, ikki bo‘g‘indan iborat bo‘lgan so‘zning birinchi bo‘g‘iniga urg‘u joylashtiriladi, shuning uchun bu birinchi bo‘g‘inli o‘lchovdir.

Adabiyotda matematikadan foydalanishning yana bir yorqin namunasi rus klassik adabiyoti namunalarining matematik muammolarni o'z ichiga olishida ko'rish mumkin. Qoida tariqasida mualliflar bu vazifalarni o'z ishiga kiritishgan va shu bilan syujetni bezatib, uni qiziqarli qilishgan.

Mashhur fantastik sarguzashtlar muallifi Jyul Vernning asarlaridagi ko'plab ma'lumotlar o'quvchidan chuqur matematik tahlil va bilimlarni talab qiladi. Masalan uning «Yerdan oyga to'g'ri vaqtda 97 soat va 20 daqiqada» asaridan quyidagi parchani keltiraylik: «Oy Yer atrofida aylana emas, balki fokuslaridan birida oy, markazida sayyoramiz joylashgan ellips bo'ylab harakatlanadi. Natijada, turli vaqtda yerdan oygacha eng katta masofa apogey, eng kichigi esa perigey hisoblanadi...» Ma'lumki, eng katta va eng kichik masofa o'rtasidagi farq juda katta, shuning uchun uni e'tiborsiz qoldirib bo'lmaydi. Haqiqatan ham, Oy yerdan 247552 milya apogeyda va 218657 milya perigeyda joylashgan. Ikki masofa o'rtasidagi farq 28.895 milga yetadi.

Biz matematika juda ko'plab badiiy adabiyotlarda namoyon bo'lishi haqida gapirishimiz mumkin, lekin mashhur yozuvchi Lyuis Kerroll haqida gapirmaslikning iloji yo'q. U juda zo'r matematik bo'lgan! Uning ajoyib kitoblar muallifi ekanligini ko'pchilik bilmasa kerak. «Evklid beshinchi kitobining algebraik tahlili», «Evklid va uning zamonaviy raqiblari» va mashhur «Alisa ajoyibotlar mamlakatida» asari shular jumlasidandir.

O'zbekistonning taniqli matematigi va Navoiyshunos, ensiklopedik olim, akademik Abdulla A'zamovning ijodida ham matematika va adabiyotning uyg'unligini ko'rish mumkin (ilmiy va ijodiy ishlar ro'yxati [6] da berilgan).

Tabiiyki, matematikaning bu sohada ustun mavqega ega bo'lishini ma'nosiz va noto'g'ri deb aytishimiz mumkin. Ammo biz matematikaning adabiyotga ta'sirini butunlay yo'q qila olmaymiz. Shu sababli matematika yozuvchi va jurnalistlar uchun ilhom manbai degan xulosa chiqarishga asoslar yetarli.

Matematika va tilshunoslik fanlari. Kantitativ tilshunoslik (miqdoriy tilshunoslik) umumiy tilshunoslikning bir qismi bo'lib matematik tilshunoslikni o'z ichiga oladi. Kantitativ tilshunoslik statistik usullar yordamida tilni o'rganadi. Uning pirovard maqsadi faoliyati o'zaro bog'liq qonunlar majmuyi sifatida tilning umumiy nazariyasini yaratish, oxir-oqibatda bu til vazifalari va muvofiq qonunlarini shakllantirishdir.

O'tgan asrning 50-yillaridan boshlab matematika tillarning strukturasini (tabiiy va sun'iy) tushuntirish uchun nazariy tavsiyalar yaratishda tilshunoslikda keng qo'llanilgan. Ammo shuni aytish kerakki, u bunday amaliy qo'llanmani darhol topa olmadi.

Dastlab tilshunoslikning asosiy tushunchalarini izohlash uchun matematik usullar ishlatilgan. Kompyuter texnologiyasini ishlab chiqishda shu kabi nazariy prinsip amaliyotda qo'llanila boshlangan. Matnni tarjima qilish, mashina ma'lumotlarini izlash, matnni avtomatik tahrirlash kabi vazifalarni hal qilish tilga yangicha yondoshishni talab qildi.

Tilshunoslar oldida savol tug'iladi: til uslublarini bevosita texnikaga topshirish mumkin bo'lgan shaklda ifodalash mumkinmi? Bizning davrimizda mashhur bo'lgan «matematik tilshunoslik» atamasi aniq metodlardan foydalanadigan har qanday lingvistik tadqiqotga ishora qiladi (fanning aniq uslublari konsepsiyasi har doim matematika bilan chambarchas bog'liq).

Tilshunoslikda matematik mantiqqa yaqinlashuvchi ikkita (algebraik) noodatiy usullardan foydalaniladi. Maktab o'quvchilariga til grammatikasini o'rgatishda matematikaning eng yorqin misollaridan foydalanish mumkin. Masalan, biz bog'lovchini birlashma ma'nosini anglatuvchi aylana yoki oval bilan belgilab olamiz. Haqiqatan ham, bog'lovchi jumlaning ikki qismini birlashtiradi. Ko'rib turganingizdek, bu yerda asosan geometrik tushunchalar qo'llaniladi.

Demak, tilshunoslikka aloqasiz deb hisoblangan matematika unda juda muhim rol o'ynaydi.

MATEMATIKA TUGAYDIMI?

Bu bo'limda matematik tadqiqotlar haqidagi bir qiziq hikoyani e'tiboringizga havola qilamiz. Bu hikoya [2] dan qisman o'zgartirib olingan.

Seshanba kuni edi. Men har doimgidek dars boshlanishidan 1 soat oldin kelib, o'tadigan ma'ruzalarimni bir takrorlab olish uchun o'z xonamga qarab yurganimda boshliq xonasining eshigi ochiq ekanligini ko'rdim.

– Salom, G'ulom aka, – dedim uning eshigi oldidan o'ta turib. Uning buncha vaqtli kelganini ko'rib hayron bo'ldim.

– Meni bezovta qilma, – dedi G'ulom aka. Uning ovozi g'alati, kayfiyati yo'q edi.

– Nima bo'ldi? Nega kayfiyatingiz yo'q? Nega ishga buncha erta keldingiz? – deya uning xonasiga kirdim.

– Meni bezovta qilma dedim-ku, – deb takror-takror qaytardi G'ulom aka.

Uning bu holatini ko'rib indamay keta olmadim. Sumkamni stol ustiga qo'yib, uning ustidagi teskari qilib qo'yilgan stullardan birini olib o'tirdim.

– Nima bo'ldi, axir? – dedim hayronligimni yashirolmay.

– Hammasi tugadi, – dedi G'ulom aka.

Bu gaplarni aytganida G'ulom aka yig'laganday bo'ldi. Keyin u boshini stoli tagiga kiritib, yig'lashni boshladi. Men uning biror yaqin odami bilan fojia yuz bergan deb o'ylardim.

– Aniqroq gapiring, nima bo'ldi? – dedim.

Shunda G'ulom aka sal o'zini tutib olib gapira boshladi:

– Nima tushunmadingmi? Matematika tugadi, nihoyasiga yetdi! Tamom! Kaput!

Agar uni bu ahvolda, qat'iy turib gapirganini ko'rmaganimda, xoxolab kulgan bo'lardim. Taajjublangan holda so'radim:

– Matematika qanday tugashi mumkin? Bu fan kengayib borayotgan bilimlar shari bo'lib, bu shar hech qachon kengayishdan to'xtamaydi!

– Men ham shunday deb o'ylagandim, ya'ni matematiklar yangi g'oya va natijalarni topib, bu fanni boyitib boradi, kamchiliklarini tuzatadi, bo'sh joylarini to'ldiradi, boshqa sohalar bilan bog'laydi, matematik bilimlar kengayib boraveradi va hech qachon tugamaydi deb o'zimni ishontirgandim, – dedi u titroq ovozda.

– To'g'ri, – dedim bosh irg'ab.

Lekin o'ylanib qoldim: «Oxirgi besh yil men ishlayotgan matematika daryosini qaraylik. Men faqat shu sohada ishladim. Hali ham shu yo'nalishda ilmiy maqolalar chop etmoqdaman. Kichik bir irmoq bo'lib uni to'ldirayotganimdan zavqlanaman. Qanday qilib bu daryo quriydi?! Axir, matematika ilmning ulkan shariku!» G'ulom akaning asabiy ovozi fikrlarimni chalg'itdi:

– Lekin bu to'g'ri emas.

– Qanday qilib to'g'ri bo'lmaydi? – dedim uning gapini tushunmay.

– Komilova buning to'g'ri emasligini isbotladi.

– Sara Komilovami? O'tgan yili ishga kelgan mantiqiy matematikachimi?

– Ha, o'sha, – dedi qandaydir yoqimsiz narsani og'zida tutib turgan odamdek. – U matematik masalalar chekli ekanligini isbotladi. Matematika chekli miqdordagi tushuncha va nazariyani o'z ichiga olgan ekan.

– Bu kulguli-ku! – dedim. – Matematika chekli emas. Siz har doim yangi narsalarni isbotlashingiz mumkin.

G'ulom aka xo'rsindi. Gaplarim uning tushkun kayfiyatiga ta'sir ko'rsatmaganligini sezib turibman. Uning bir nuqtaga ma'nosiz uzoq tikilib turishi esa mening ham kayfiyatimga o'z ta'sirini o'tkaza boshladi. Nihoyat u tilga kirdi:

– Bunday gaplar bir vaqtlar yer shari haqida ham aytilgandi. Qadim zamonlarda odamlar yer sharini chegarasiz deb o'ylashgan. Xo'sh, bugun biz bilamizki, yer shari chegaralangan, shundaymi?

– Siz matematika ham shunday demoqchimisiz? – savolga savol orqali javob berib qutulmoqchi bo'ldim. – Bu davom etmaydi, qachondir tugaydi demoqchimisiz?

– Sara shunday demoqda. Unda buning isboti bor ekan.

Qisqa ammo men uchun hamon mavhum bo'lgan bu suhbatimizda birinchi marta tanamda sovuq terni his qildim, umidim puch bo'lganday bo'shashib qoldim. Go'yo kimdir kelib, shuncha yashagan umrim tushda bo'lganu, men bilgan narsalar mutlaqo ahamiyatsiz, keraksiz ekanligini aytgandek his etardim o'zimni.

– Siz Saraning isbotini ko'rganmisiz? – deb so'radim.

– U kecha kechqurun menga maqolasini yubordi. Qarab chiqishimni so'radi.

– Xo'sh?

– Menimcha, to'g'riga o'xshaydi.

– Men bunga ishonmayman, – dedim. – U buni qanday isbotlagan ekan?

– U matematika bo'yicha ma'lum va noma'lum nazariyalar to'plamida masofa kiritib, bu masofaga nisbatan matematikaning kompakt ekanligini ko'rsatgan.

Shu paytgacha mavhumdek tuyulgan suhbatimizda hamma narsa oydinlashganligini sezdim. O'zimni qo'lga olib shunday dedim:

– Lekin, G'ulom aka, bu behuda gap! Mana, hozirning o'zida men cheksiz miqdordagi matematik masalalar tuzib berishim mumkin.

– Xo'sh! – umidsiz menga yuzlandi G'ulom aka.

– Biror x sonini olaylik. Agar u karraliligini hisobga olganda n ta tub sonning ko'paytmasi bo'lsa, uni n-ko'paytma deyman. Quyidagi savolni qaraylik: agar x son n-ko'paytma bo'lsa, u holda $x + 1$ qanday son bo'ladi? Qaysi n-lar uchun $x + 1$ yana n-ko'paytma bo'ladi? Mana, har bir natural n son uchun 1 ta masala tuzdim. Natural sonlar cheksiz ko'p bo'lgani sababli, bunday masalalar ham cheksiz ko'p bo'ladi, – dedim ishonch bilan.

– Sen sonlar nazariyasi bo'yicha mutaxassis emassan. Shuning uchun bu sohada masala tuzma!

G'ulom akaning avvalgi kayfiyatsiz holga qaytganini ko'rib undan so'radim:

– Lekin men tuzgan masalaning nimasi yoqmadi?

– Aytgan masalang yaxshi, lekin bu oldindan ma'lum masala, seniki emas. Bu yerda cheksiz ko'p masala yo'q. Ularning hammasi (har bir n da) bir xil ifodalanayapti. Saraning masofasiga nisbatan ular cheklita chiqadi.

O'zimdagi hayajonni bosish uchun qo'llarimni ko'ksimga qo'yib orqaga o'girildim. Bu suhbatda yengilmaganligimni, balki umrim ma'nosiz o'tmaganligini o'zim uchun isbotlamoqchi bo'lganimdan sekin gap boshladim:

– Yaxshi, – dedim men. – Lekin, menimcha, Saraning isbotida nuqsonlar ko‘p bo‘lishi kerak.

– Saraning fikricha, matematikaning 93 foiz masalalari hal bo‘lgan. Biz qolgan 7 foiz masalani hal qilishimiz kerak, xolos. Agar bu narsadan hukumatimiz xabar topsa, bizni mablag‘ bilan ta’minlashni tugatishi mumkin, – dedi G‘ulom aka astoydil kuyinib.

– Lekin hukumatimiz bunday qilolmaydi. Hatto Saraning gapi to‘g‘ri bo‘lsa ham. Hozirning o‘zida qanchadan qancha ochiq masalalar bor, ularni sanab ham tugatish qiyin, – dedim ishonchsiz ruhda.

– Aytilgan 7 foiz ichida ular. Shu sababli bizning ishimizga chek qo‘yilishiga oz qoldi, – dedi G‘ulom aka.

– Buni amalga oshirish mumkin emas. Hali matematikada qilishimiz kerak bo‘lgan ish ko‘p, – dedim go‘yo o‘zimni, o‘z sevgan ishimni qutqarmoqchidek.

– Menimcha, Sara bu yangiligini tarqatishga ulgurmasidan oldin biz undan qutilishimiz kerak. Biz uni yo‘q qilishdan boshqa hech narsa qila olmaymiz.

Men kuldim.

– Ha, bir matematikning natijasi yuzaga chiqmasligi uchun uni o‘ldirish?! Menimcha, uning natijasi allaqachon internetda paydo bo‘lgan bo‘lishi kerak.

– Aslida, bunday emas, – dedi G‘ulom aka.

– Tushunmadim?

– Eshikni yoping.

– Nima?

– Eshikni yoping.

Men eshikni berkitib qo‘ydim. G‘ulom aka past ovoz bilan gapirdi:

– Sara hali hech kimga aytmagan. U faqat menga e-mail orqali yubordi, boshqa hech kimga aytmaganini Saraning o‘zi xatida yozgan.

– Hech kim bilmaydimi?

– Ha. Kecha men unga ertaga ko‘rishaylik, deb aytdim. Ya’ni bugun Sara bilan o‘ninchi qavatdagi seminar xonasida, soat 9:00 da uchrashuv belgiladim. O‘ylaymanki, uning natijasi hammani xafa qiladi.

– Xayriyat! Aytmoqchimanki, u mashhur matematikka aylanadi. Agar uning natijasi to‘g‘ri bo‘lsa, u holda uni o‘ldirishdan foyda yo‘q. Chunki to‘g‘ri natijani boshqa payt, baribir, kimdir yana isbotlaydi. Shu sababli yana oxirgi holat bir xil bo‘ladi.

– Ehtimol, lekin buning uchun yana qancha yillar kerak bo‘ladi. Ungacha biz nafaqaga chiqib olamiz.

– Bu ahmoqona gap, ishimni davom ettirish maqsadida hech kimni o‘ldirolmayman.

– Buni o‘zingiz uchun qilmang. Qolganlar uchun shunday qiling, matematika jamoatchiligi, minglab tadqiqotchilar mablag‘larini yo‘qotishi yomon-ku, axir. Kimlarning hayotida ma’no yo‘qoladi. Ular uchun shunday qiling!

– Men uni o‘ldirolmayman, nima deyapsiz? – dedim asabiy ohangda.

– U holda sizdan bir iltimosim bor. Faqat soat 9:00 da o‘ninchi qavatning zinapoyasida kutib turing, – dedi G‘ulom aka.

Men soat 8:50 da o‘ninchi qavatga ko‘tarilishni boshladim. Yo‘lda Saraning xonasi yonidan o‘tayotganimda uning eshigi ochiq ekanligini ko‘rdim. Nimadir meni uning xonasiga kirishga undayotganini his qildim. Ichkariga kirdim. U yerda hech kim yo‘q edi. Lekin Saraning kompyuteri yonib turar, monitorda esa uning e-mail pochtasi ochilgan holda qolganini ko‘rdim. Sekin kompyuterga yaqinlashib, Saraning yuborgan xatlariga ko‘z tashladim. Shunda Rossiyalik professor Rubinoffga yuborilgan xat e’tiborimni tortdi. Qiziqishim ustunlik qilib, xatni ochib o‘qidim. Xat mazmuni Saraning o‘zi davo qilayotgan yangiligini faqat G‘ulom akagagina jo‘natmaganligini bildirar edi. Shu payt uning e-mailiga Rubinoffdan yangi xat keldi. Bugungi kunim, balki butun keyingi hayotim shu xatga bog‘liqligini sezib, xatni ochdim. Rubinoffning xatida quyidagi gaplar yozilgandi:

«Hurmatli Sara, Siz yuborgan maqolani ko‘rdim. Unda «matematika chekli, uning rivoji tez kunlarda tugaydi» degan tasdig‘ingizning isbotini qarab chiqdim. Siz ishlatgan masofa xato aniqlangan, isbotingiz ham mutlaqo noto‘g‘ri dalillar asosiga qurilgan. Siz hech narsani isbotlay olmagansiz.

Hurmat bilan professor Rubinoff.»

Men butun vujudimda noqulay zo'riqish his qildim. Demak, G'ulom akaning tushkunlikka tushishiga hech qanday asos yo'q ekan: Sara hech narsani isbotlamagan. Hammasi xato bo'lib chiqdi. Bu gaplar hayolimdan o'tib, soat 9:04 bo'lganini bilmay qolibman. Yugurib o'ninchi qavatga chiqdim. Seminar xonasida hech kim yo'q edi. Seminar xonasidan balkonga chiqadigan eshik ochiq edi. Qarasam Sara va G'ulom aka bir qo'llari bilan balkon panjarasini, ikkinchisi bilan bir-birini tutib turgan holda balkonda osilib turishibdi. Har ikkisining ko'zida qo'rquv bor edi. G'ulom aka Saradan qutilmoqchi, lekin Sara ham bo'sh kelmayapti. Ularning oldiga borib shunday dedim:

– Saraning isboti xato, Rossiyadan shunday javob keldi. Ahmoqlik qilmanglar! Qo'llaringizni beringlar, sizlarni qutqaraman.

Shunda Sara Rossiyaga xat yuborganini esladi, shekilli, G'ulom akani qo'yib yuborib, mening qo'limdan ushladi. Sarani qutqardim. G'ulom aka bir qo'li bilan osilganicha qoldi. Shunda Sara qo'lini uzatib, G'ulom akani ham tortib oldi. G'ulom aka qilgan ishi tufayli balkon burchagiga o'zini tashlab rosa yig'ladi. Aslida, uni ikki mudhish xato qiynardi: birinchisi, Saraning isbotini to'g'ri deb bilgani bo'lsa, ikkinchisi esa Sarani o'ldirishga jur'at etgani edi. Oradan ko'p o'tmay G'ulom aka bizning ishxonamizdan ketdi. Uning boshqa chorasi ham yo'q edi. Chunki Sara bilan har kuni ko'rishishi juda qiyin edi. Men G'ulom akaning taqdiri bilan yaqinda qiziqdim. U butunlay boshqa sohaga o'tgan ekan. Juda to'g'ri qaror edi bu! Chunki har bir inson o'z qobiliyati doirasida, o'zining qiziqishlarini e'tiborga olib kasb tanlashi, qo'lidan kelgan ish bilan shug'ullanishi lozim. Shunda inson hech qachon o'z sevimli ishi va obro'yidan ayrilmaydi.

Xulosa o'rnida shuni aytish mumkinki, matematika fani rivojlanishdan hech qachon to'xtamaydi. Turmushimizda bo'layotgan har kungi yangilik, kirib kelayotgan yangi axborot texnologiyalari, yangi iqtisod, yangi ijtimoiy sohalarning asosida albatta, matematik yangilik va yangi teoremalar yotadi. Bir yangi teorema orqasidan minglab yangi masalalar vujudga kelaveradi. Yuz yillab yechimini kutib turgan masalalar ham juda ko'p. Ushbu kitobning keyingi bo'limi ana shunday masalalarga bag'ishlanadi.

MILLION DOLLARLIK MUAMMOLAR

Matematika fanining shunday yechilmagan muammolari borki, ularni yechishga insoniyat 100 yillab vaqt sarflamoqda. Bu masalalar berilishining soddaligi, hatto maktab o'quvchilari tushunishi mumkin bo'lgan tushunchalar asosida kelib chiqqanligi bilan mashhurdir. Lekin bu masalalarni yechish uchun kirishishga shoshilmaslikni tavsiya qilamiz. Sababi shuki, agar bu masalalar o'rta maktabda o'tiladigan matematik nazariyalar asosida yechilishi mumkin bo'lganida, allagachon bu yechim topilgan bo'lar edi ([15] maqolani ham o'qishni tavsiya qilamiz)!

Bu bo'limda [36] va internet ma'lumotlaridan foydalanib, hamon o'z yechimini topmagan ba'zi muammolarni sanab chiqamiz.

1. **Goldbax gipotezasi.** 1742-yilda Ch. Goldbax quyidagi gipotezani e'lon qildi:

Har qanday 2 dan katta juft butun son ikkita tub sonning yig'indisidan iborat.

Bu gipoteza haligacha o'z isbotini topmagan. Lekin uning to'g'ri ekanligi $4 \cdot 10^{18}$ gacha bo'lgan juft sonlar uchun tekshirilgan.

Goldbaxning gipotezasiga yaqinroq natijani Chen-Jing Run isbotladi: yetarlicha katta juft butun sonni $p + qr$ shaklda yozish mumkin, bunda p, q, r lar tub sonlardir.

2000-yilda Goldbaxning gipotezasini 2002-yilgacha isbotlagan odamga 1000000 dollar mukofot va'da qilindi [36]. Lekin haligacha uning isboti topilgani yo'q!

Ammo matematiklar bu muammoni hal qilishga urinish yo'lida boshqa muammolarga yechim topishdi va hatto yangi nazariyalar yaratishdi[12].

Goldbaxning haligacha isbotlanmagan yana bir gipotezasi:

Har qanday 5 dan katta toq sonni 3 ta tub sonlarning yig'indishi shaklida yozish mumkin.

Bu gipotezaning to'g'ri ekanligi $10^{7000000}$ dan katta toq sonlar uchun isbotlangan.

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach27s _ conjecture

2. **Bil gipotezasi.** Bu gipoteza 1993-yilda e'lon qilingan bo'lib, u mashhur Ferma teoremasining umumlashmasidir:

A, B, C, x, y, va z musbat butun sonlar bo'lsin. Agar x, y, z lar 2 dan katta bo'lsa, u holda $A^x + B^y = C^z$ *dan A, B va C larning umumiy ko'paytuvchiga ega ekanligi kelib chiqadi.*

Bu gipotezadan $x = y = z$ holda Ferma teoremasi kelib chiqadi. Quyidagi misollardan ko'rinadiki, agar x, y yoki z dan biri 2 ga teng bo'lsa, Bil gipotezasi o'rinli emas

$$7^3 + 13^2 = 2^9, \quad 1^m + 2^3 = 3^2.$$

Bilning o'zi bank xodimi bo'lib, u o'zining gipotezasini isbotlagan yoki noto'g'riligini ko'rsatgan odamga 1000000 dollar va'da qilgandi [18]. Bil va'da qilgan pullar hanuz o'z egasini kutmoqda.

3. Kolakoski ketma-ketligi. Bu ketma-ketlik 1 va 2 raqamlarining quyidagicha takrorlanishidan tashkil topgan[13]:

122112122122112112212112122112112122122112122121121122122112... (36.1)

Bu ketma-ketlikni faqat birlardan va faqat ikkilardan hosil bo'lgan bloklarga ajaratamiz:

1)(22)(11)(2)(1)(22)(1)(22)(11)(2)(11)(22)(1)(2)(11)(2)(1)(22)
11)(2)(11)(2)(1)... (36.2)

Endi (36.2) ketma-ketlikdagi qavslar ichidagi raqamlar sonini ketma-ket yozib chiqamiz:

122112122122112112212112122112112122122112122121121122122112... (36.3)

Juda qiziq natija: (36.1) va (36.3) bir xil ketma-ketlik! Demak, Kolakoski ketma-ketligi o'z-o'zini qanday davom ettirishini o'zi ifodalaydi.

---

[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Kolakoski _ sequence

Quyidagi masalalarni qaraylik:

I) (36.1) ketma-ketlikning n-hadini topish formulasi bormi?

II) agar bu ketma-ketlikda biror chekli blok (masalan, 212211) hosil bo'lsa, bu blok yana paydo bo'ladimi?

III) agar biror chekli blok hosil bo'lsa, uning teskari tartibda yozilgani (masalan, 112212) ham hosil bo'ladimi?

IV) agar biror chekli blok hosil bo'lsa, undagi 1 va 2 larning o'rni almashtirilgan blok ham hosil bo'ladimi (masalan, 121122)?

V) birlarning hosil bo'lish chastotasi limiti mavjudmi? Agar limit mavjud bo'lsa, bu limit 1/2 ga tengmi?

Bu masalalarning har birini yechgan odamga Ch. Kimberling tomonidan 200 dollar pul va'da qilgan edi. Kimberling tomonidan yechimiga pul va'da qilingan masalalar va ularning ba'zilarining yechimlari haqidagi qiziqarli ma'lumotlarni internet saytida[14] topish mumkin.

Ma'lumki, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$ va $\{1,2,3\}$, lar uchun ham Kolakoskining ketma-ketligiga o'xshash ketma-ketlikni hosil qilish mumkin.

4. Kollatsning $3^n + 1$ gipotezasi. Kompyuter o'yinlariga $3^n + 1$ muammosi kiritilgan. Bu muammo quyidagicha: natural sonlar to'plamida quyidagi funksiyani aniqlaymiz

$$f(n)=\begin{cases} n/2, & \text{agar } n \text{ juft bo`lsa} \\ 3n+1, & \text{agar } n \text{ toq bo`lsa.} \end{cases}$$

Berilgan $n \in \mathrm{N}$ uchun $n_1 = f(n)$ ni hisoblab, keyin $n_2 = f(n_1)$ ni hisoblab, so'ng $n_3 = f(n_2)$ va hokazolarni hisoblab, $n_{k+1} = f(n_k)$, $k = 1,2,3,\ldots$ ketma-ketlikni hosil qilamiz:

$$n, n_1, n_2, n_3, \ldots \qquad (36.4)$$

Masalan, $n = 1$ bo'lsa,

$$n = 1,\ n_1 = 4,\ n_2 = 2,\ n_3 = 1, \ldots$$

[14] https://faculty.evansville.edu/ck6/integer/unsolved.html

ya'ni 3 qadamdan keyin yana 1 hosil bo'ldi va ketma-ketlik davriy bo'ladi.

Agar $n = 3$ olsak,

$n = 3, n_1 = 10, n_2 = 5, n_3 = 16, n_4 = 8, n_5 = 4, n_6 = 2, n_7 = 1,\ldots$

Bu ketma-ketlikda 7 qadamdan keyin 1 hosil bo'ldi, undan keyin esa birinchi misolimiz, ya'ni $n = 1$ holdagi davriy ketma-ketlik hosil bo'ladi. Kollatsning $3n + 1$ gipotezasi quyidagicha:

$n \in$ N ni qanday olishdan qat'iy nazar, shunday $k \in$ N mavjudki, $n_k = 1$ bo'ladi.

Demak, bu gipoteza to'g'ri bo'lsa, u holda (36.4) ketma-ketlikni qaysi natural son n dan boshlasak ham, chekli qadamdan keyin 1 ga boramiz va undan keyin birinchi misol $n = 1$ holdagi ketma-ketlik davom etadi.

Bu gipoteza hali isbotlanmagan. Kompyuter yordamida bu gipotezaning to'g'ri ekanligi $n \leq 548 \cdot 10^{16}$ gacha bo'lgan sonlar uchun tekshirilgan (2008-yilgi ma'lumot).

P. Erdosning fikricha, «Kollats muammosi juda qiyin, matematika buni yechishga hali tayyor emas» [14]. Erdosning o'zi bu muammoni yechgan odamga 500 dollar va'da qilgandi [15].

5. Toq mukammal son muammosi. Mukammal son deb o'zidan farqli, barcha musbat bo'luvchilari yig'indisiga teng bo'lgan natural songa aytiladi. Mukammal sonlar cheklitami yoki cheksiztami? Bu savolga javob yo'q. Quyidagi mukammal sonlar ma'lum:

6=1+2+3,

28=1+2+4+7+14,

496=1+2+4+8+16+31+62+124+248,

8128=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+
+2032+4064,

33550336,

8589869056,

137438691328,

2305843008139952128,

2658455991569831744654692615953842176,

191561942608236107294793378084303638130
997321548169216, ...

Bu sonlarning har biri juft ekanligini ko'rishimiz mumkin. Bu juft mukammal sonlarni topish algoritmini Evklid va Eyler quyidagicha isbotlashgan:

Har qanday juft mukammal son $2^{p-1}(2^p - 1)2^p$ ko'rinishda bo'ladi, bunda $2^p - 1$ tub son.

Muammo: *Toq mukammal son bormi? Bor bo'lsa, nechta?*

Bu muammo haligacha yechilmagan. Faqat 10^{1500} dan kichik toq mukammal son mavjud emasligi isbotlangan [21].

6. Egizak tub sonlar gipotezasi. p natural son berilgan bo'lsin. Agar $p + 1$ va $p - 1$ tub sonlar bo'lsa, u holda p egizak son deyiladi. Masalan, 4, 6, 12, 18, 30 larning har biri egizak sondir. Gipoteza:

Egizak sonlar cheksiz ko'p.

Bu gipoteza hali isbotlanmagan. Lekin 27412679 ta shunday son borligi ma'lum. Topilganlar ichida eng katta egizak son 18072 xonali bo'lib, uning ko'rinishi quyidagicha:

$$2409110779845 \cdot 2^{60000}.$$

7. **Palindromlik muammosi**. Palindrom so'zlar deganda o'ngdan chapga va chapdan o'ngga o'qilganda bir xil so'zlarga aytiladi. Masalan: aka, non, amma. Sonlardan ham palindrom sonlar hosil qilish mumkin: 121, 2332, 7007007. Har qanday natural son x dan palindrom son hosil qilish uchun quyidagi algoritm yordam beradi.

x^* bilan x ning raqamlari teskari tartibda yozilganini belgilaymiz. Masalan, $x = 65037$ uchun $x^* = 73056$.

Har bir natural x soni uchun $F(x) = x + x^*$ funksiya kiritamiz. Quyidagi jarayonni qaraylik:

$$x, F(x), F(F(x)) = F(x) + F(x)^*, F(F(F(x))), \ldots$$

Masalan, $x = 29$ dan $F(29) = 29 + 92 = 121$; $x = 176$ dan ketma-ket F ni qo'llab quyidagini hosil qilamiz

$$176, F(176)=176+671=847,\ F(847)=1595,\ 7546,\ 14003,\ 44044$$

Muammo: *Har qanday x natural son uchun yuqoridagi jarayon palindrom hosil qiladimi?*

Bu masala hali yechilmagan. Xususan, $x = 196$ uchun bu savolga javob yo'q.

Eslatma. Bu bo'limda biz maktab o'quvchisi tushunadigan ba'zi yechilmagan masalalarni keltirdik. Lekin matematikada o'z yechimini kutib turgan masalalar juda ko'p. Bunday masalalar ro'yxatini internet saytidan[15] ko'rish mumkin:

[15] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_unsolved_problems_in_mathematics

ADABIYOTLAR

1. Aberdein A. Mathematical wit and mathematical cognition. *Topics in Cognitive Science* 5, 2013, 231-250.

2. Adams C. The end of mathematics. *Math. Intelligencer.* 2014.

3. Андреев Н. Н., Коновалов С. П., Панюнин Н. М. Математическая составляюшчая. М.: Фонд «Математические этюдй», 2015.

4. Azamov A, Haydarov B. Q. Matematika sayyorasi. *Toshkent: O'qituvchi*, 1993, 312 b.

5. Азамов А. Букет от математик. *Ташкент. «Sharq»*, 2005, 125 b.

6. Azamov A. Ilmiy ishlar bibliografiyasi, *Toshkent: O'zRFA Matematika instituti.*, 2017, 54 b.

7. Bae C., Conway J., Kohlhase L., Park S. Prague clocks. *Math. Intelligencer.* 38(1), 2016, 37–39.

8. Benson D.. Music: A mathematical offering. Cambridge University Press, 2006.

9. Bollobas B. Modern graph theory. Springer. 1998

10. Clader E. Why twelve tones? The mathematics of musical tuning. *Math. Intelligencer.* 2018.

11. Еремин В. В. Математика в Химии. Библиотека «Математическое просвешчение» Впуск 37, М. 2016.

12. Fizika matematika va informatika jurnalining 2001-2019 sonlaridagi maqolalar.

13. Goos, M., Stillman, G., Vale, C. Teaching secondary school mathematics: Research and practice for the 21st century. NSW, Australia: Allen and Unwin. 2007.

14. Guy, R. K. Permutation Sequences. Unsolved problems in number theory (3rd ed.). Springer-Verlag. (2004).

15. Guy, R. K. Don't try to solve these problems. Amer. Math. Monthly. 90, 1983, 35–41.

16. Halton J. H. The shoelace book's review. *Mathematical Intelligencer.* 30(3), 2008, 70-72.

17. Harrop T. Just chromatic BP scales and beyond. *In Sarvenaz Safari and Manfred Stahnke, editors*, 1001 Mikrotöne, 181–202. Von Bockel Verlag, 2015.

18. Hickey W. «If you can solve this math problem, then a Texas banker will give you 1 million». Business Insider. Retrieved 8 July 2016.

19. Hurley M., Dennett D., Adams, R. Inside jokes: using humor to reverse engineer the mind. Cambridge, MA: MIT Press. 2011.

20. Martins R. Why are we not able to see beyond three dimensions? *Math. Intelligencer.* 2016.

21. Ochem, P., Rao, M. Odd perfect numbers are greater than 10^{1500}, Mathematics of Computation. 81(279), 2012, 1869-1877.

22. Paulos J. A. Mathematics and humor: a study of the logic of humor. Chicago, IL: University of Chicago Press. 1980.

23. Polster B. The shoelace book: A mathematical guide to the best (and worst) ways to lace your shoes. AMS. 2006.

24. Reimer, W., Reimer, L. Historical connections in mathematics: Resources for using mathematics in the classroom (Vol. 1). Fresno, CA: AIMS Educational Foundation. 1992.

25. Remizov A. N. Tibbiy va biologik fizika. – Toshkent. O'zbekiston milliy ensiklopediyasi Davlat ilmiy nashriyoti. 2005.

26. Renteln P., Dundes A. Foolproof: a sampling of mathematical folk humor. *Notices of the AMS*, 52, 2005. 24–34.

27. Rivest R., Shamir A., Adleman L. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM.* 21(2), 1978. 120-126.

28. Rozikov U.A. An introduction to mathematical billiards. *World Sci. Publ.* Singapore. 2019, 224 pp.

29. Сингх С. Великая теорема Ферма. – М.: MTSNMO, 2000.

30. Славуцкий И. И. в шутку и всерьез о математике. Санкт-Петербург, 1998.

31. Strang G. Introduction to applied mathematics. Wellesley-Cambridge Pre.MA, 1986.

32. Teh K. S., Loh C. Y., Yeo J. B. W., Chow, I. New Syllabus Mathematics Workbook 3: Alternative Assessment and CD Included (Rev. ed.). 2007, Singapore: Shinglee.

33. Weber K., Mathematical humor: Jokes that reveal how we think about mathematics and why we enjoy it. *Math. Intelligencer.* 2016.

34. Weijters M. Personal website. http://melleweijters.com/tag/41-et/.

35. WGBH Educational Foundation. Application of geometry in radiation oncology. 2002.

36. Williams S.W. Million-buck problems. *Math. Intelligencer* 24 (2002), no. 3, 17–20.

37. Wright D. Mathematics and Music. Mathematical World. AMS. 2009.

38. Yeo J.B.W. Why study mathematics? Applications of mathematics in our daily life. http://math.nie.edu.sg/bwjyeo/publications/AMEYearbook2010_RealLifeApplications.pdf

39. Захаренко В. Математика языков или сколько слов нужно изучит, чтобы говорить на иностранном языке? http://unbelievable.su/articles.php?id=594

U. A. Rozikov, N. H. Mamatova

MATEMATIKA VA TURMUSH

O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi
«Fan» nashriyoti
Toshkent–2019

Muharrir
Nizomjon Islomov

Badiiy muharrir
Umid Sapayev

Sahifalovchi
Oloviddin Sobir o'g'li

Nashriyot litsenziyasi AI № 266, 15.07.2015-y.
09.01.2020-yilda bosishga ruxsat etildi.
Qog'oz bichimi 84×108 $^1/_{32}$. «Cambria» garniturasi.
Shartli bosma tabog'i 6,5. Nashriyot hisob tabog'i 6,2.
Adadi 3000 nusxa. Buyurtma raqami 013. Bahosi shartnoma asosida.

O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi
«Fan» nashriyotida nashrga tayyorlandi.
100047, Toshkent sh., Yahyo G'ulomov ko'chasi, 70-uy.

«Print Line Group» XK bosmaxonasida chop etildi.
100097, Toshkent sh., Bunyodkor shohko'chasi, 44 uy.

Rozikov Utkir Abdulloyevich

O'zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti direktorining ilm-fan bo'yicha o'rinbosari;

Fizika-matematika fanlari doktori, professor.

Butunjahon fanlar akademiyasi akademigi.

1987-yilda Buxoro tuman 4-son o'rta maktabni va 1993-yilda Samarqand davlat universiteti Mexanika-matika fakultetini imtiyozli diplom bilan bitirgan.

Yaponiyaning Toshkentdagi elchixonasi mukofoti (1995); "O'zbekiston belgisi" ko'krak nishoni (2003); "O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi a'lochisi" (2003); O'zbekiston Respublikasi birinchi darajali Davlat mukofoti (2017); "Springer Nature Top Author" xalqaro mukofoti (2017) sovrindori.

Bugungi kunda U. Rozikovning chet elning nufuzli jurnallarida 135 ta ilmiy maqolasi chop etilgan; uning ilmiy kitoblari (1. Rozikov U. A., Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific, Singapore, 2013; 2. Rozikov U. A., An introduction to mathematical billiards. World Sci. Publ. Singapore. 2019) dunyoning 200 dan ortiq ilmiy markazlari kutubxonasidan munosib o'rin olgan. Rozikov rahbarligida 10 ta fan nomzodi va PhD hamda 3 ta fan doktori dissertatsiyalari himoya qilingan.

Mamatova Nilufar Husenovna

Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakulteti "Matematika" kafedrasi dotsenti. 1990–1993-yillarda hozirgi Buxoro davlat universiteti qoshidagi Qorako'l akademik litseyini a'lo baholar bilan tugatgan. 1993–1998-yillarda Buxoro davlat universiteti "Matematika" ixtisosligi bo'yicha o'qishni tugangan. 1998-yildan hozirgi kunga qadar Buxoro davlat universitetining "Matematika" kafedrasida turli lavozimlarda faoliyat olib borgan. Faoliyati davomida Matematik analiz, Differensial tenglamalar, Iqtisodiy matematika, Matematik modellashtirish kabi fanlardan talaba yoshlarga ta'lim berib kelmoqda.

Bugungi kunda N.H.Mamatovaning chet elning nufuzli jurnallarida 10 dan ortiq, Respublika ilmiy jurnallarida 40 dan ziyod ilmiy maqolasi chop etilgan.

FAN NASHRIYOTI O'zRFA

ISBN 978-9943-19-532-5

9789943195325