O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

H.Mahmudov A.Asimov
Sh.Jo`rayev

Matematikadan mashqlar to`plami

1-qism

Farg‘ona - 2009

H.Mahmudov, A.Asimov, Sh.Jo`rayev. Matematikadan mashqlar to`plami, 1-qism (Uslubiy qo‘llanma).
Farg‘ona-2006. 35 b.

Taqrizchilar: 1. O`rozov N. - Fiz.-mat.fanlari doktori, professor.
2. Qodirov K.- dotsent.

Ushbu uslubiy qo‘rsatma 5141600 boshlang‘ich ta’lim va sport tarbiyaviy ish yo‘nalishi talabalari uchun hamda 3 yillik maxsus sirtqi bo‘lim, pedagogika instituti va pedagogika kollejlari talabalariga mo‘jjalangan

Ushbu uslubiy ko‘rsatma Farg‘ona davlat universiteti Ilmiy Kengashning 2009 yil __-martdagi __ -sonili qarori bilan nashrga tavsiya qilingan

SO‘Z BOSHI

Ìàøqëàð òîúïëàìè òóçèëèøè qóéèäàãè÷à: áàð÷à ìèñîë âà ìàøqëàð áåøòà áîáãà áîúëèíãàí áîúëèá, hàð áèð áîáãà äîèð ìèñîë âà ìàøqëàðäàí íàìóíàëàð êåëòèðèëãàí âà ìóñòàqèë áàæàðèø ó÷óí ìàøqëàð êåëòèðèëãàí. Áó ìàøqëàð hàì íàçàðèÿ íè ÷óqóðîq îúðãàíèø ó÷óí, hàì áîúëãúóñè îúqèòóâ÷èäà qàòîð êàñáèé ìàëàêàëàðíè øàêëëàíòèðèø ó÷óí ìîúëæàëàíãàí. Ìóñòàqèë å÷èøãà ìîúëæàëàíãàí ìèñîë âà ìàñàëàëàðíè òàíëàøäà èìêîí áîðè÷à óìóìòàúëèì ìàêòàáëàðèäàãè ìàòåðèàëëàðãà ÿqèíëàøòèðèøãà hàðàêàò qèëèíäè.

Óøáó óñëóáèé êîúðñàòìàäàí óíèâåðñèòåò òàëàáàëàðèäàí òàøqàðè ó÷ éèëëèê ìàõñóñ ñèðòqè áîúëèì, ïåäàãîãèêà èíñòèòóòè hàìäà ïåäàãîãèêà êîëëåæè òàëàáàëàðè hàì ôîéäàëàíèøëàðè ìóìêèí.

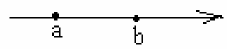
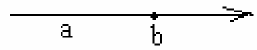
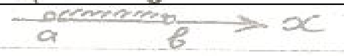
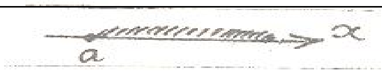
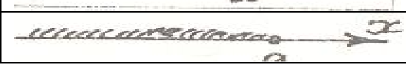
MUALLIFLAR.

I bob. TO‘PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

1.1-§ TO‘PLAM TO‘PLAM ELEMENTLARI BO‘SH TO‘PLAM

Berilgan to‘plamni tashkil etuvchi ob’ektlar (narsalar) uning **elementlari** deyiladi. Agar to‘plam birorta ham elementga ega bo‘lmasa **bo‘sh** to‘plam deyiladi va uni $\varnothing$ (ba’zan esa $\wedge$ yoki 0) bilan belgilanadi.

1-misol.

To‘plamni xarakte-ristik xossasi bilan berilishi	To‘plamni belgilanishi	To‘plamni sonlar o‘qida tasvirlanishi
*{x: x Î **R** a £ x £ b}*	[*a*,*b*]	
*{x: x Î **R** a < x £ b}*	*(a,b]*	
*{x: x Î **R** a £ x < b}*	*[a,b)*	
*{x: x Î **R** a < x < b}*	(*a*,*b*)	
*{x: x Î **R** x >a}*	*(a,¥)*	
*{x: x Î **R** x ³ a}*	*[a,¥)*	
*{x: x Î **R** x<a}*	(-¥,*a*)	
*{x: x Î **R** x£ a }*	(-¥,*a]*	

2-misol. Agar A barcha juft natural to‘plami bo‘lsa, u holda uni qo‘yidagicha belgilaymiz *A={x: x=2k, k Î N}*.

Agar to‘plam chekli sondagi elementlardan iborat bo‘lsa, uni barcha elementlarini ko‘rsatish bilan belgilanadi.

Masalan, A to‘plam 1,2,3,4,5 elementlardan iborat bo‘lsa, uni A={1,2,3.4.5} kabi yoziladi.

3-misol. A to‘plam 24 sonining barcha natural bo‘luvchilari to‘plami bo‘lsa, uni $A=\{x: 24\text{M}x,\ x\in N\}$ yoki A={1,2,3,4,6,8,12,24} ko‘rinishda yoziladi.

4-misol. |x+*1*|≤ 3 tengsizlikni yechimlari to‘plamini sonlar o‘qida tasvirlang

Berilgan |x+1| ≤ 3 tengsizlikni yechamiz -3 ≤ x+1 ≤ 3, -4 ≤ x ≤ 2. Demak, tengsizlikni yechimlari to‘plami A={x: x∈ **R,** -4 ≤ x ≤ 2} bu to‘plamni koordinatalar to‘g‘ri chizig‘idagi ifodasi qiyidagicha:

5-misol. Quyidagi to‘plamlarning 5 tadan elementlarini yozing,

a) A={k: k=4n+3, n∈ **N**}; b) $B=\left\{x: x=(-1)^n\ \frac{3p}{5}+np,\quad n\in N\right\}$;

v) S={*x: x=2a*^{2}*-3a+1 , a Î **Z***}; g) D= {*x: x=log*$_2$ *a a Î* ***N***}.

6-misol. Quyidagi to‘plamlarning qaysi biri bo‘sh to‘plam?

a) A= {x: x$\in$R, $x^2+2x+10=0$}; b) B={x : x$\in$ R $x^2-2\pi x+5=0$};

v) S={x: $30 \le x \le 40$, x-tub son}; g) $D=\{x: x\in R \sin x = \frac{1}{2}, x>0\}$.

7-misol. O‘zbekiston Respublikasi tarkibiga kiruvchi viloyatlar to‘plami elementlarini sanang.

8-misol. Quyidagi to‘plamlarni xarakteristik xossasiga ko‘ra yozing.

A= {3,6,9,12,15,18,21} , V={2,4,8,16,32,...}, C={1,3,5,7,...}, D={2,4,6,8,10,....}.

9-misol. 17, $\sqrt{16}$, $\sqrt{7}$, 0, -27, 9.4; $\log_2 4$, $\frac{3}{7}$, p, l, $\log_7 7$, sonlar qaysi asosiy sonlar to‘plamiga tegishli bo‘ladi?

10-misol. A={2,-5, 6, 7, 3, -1, 15} bo‘lsa, bu to‘plam elementlariga qarama-qarshi sonlardan tuzilgan to‘plamni yozing. Ikkala to‘plamdan natural sonlar to‘plamini, juft sonlar to‘plamini ajrating.

11-misol. Quyidagi to‘plam elementlarini ko‘rsating

a) A={x : x$\in$ **N** , $x \le 12$}; b) B={x : x$\in$ **N** ,$5 \le x \le 14$};

v) S={ x: x $\in$ **N** , $-3 \le x \le 7$}; g) D={x: x$\in$ **N**, x <9,5};

d) E={x : x$\in$ Z , $x^2=9$}; e) K={x: x $\in$ **N**, $x^2 \le 36$}.

12-misol. Quyidagi to‘plamlarni son o‘qida tasvirlang

a) X={x: x $\in$ **R**, $-2 \le x < 7$}; b) X= {x: x$\in$**R** , $x \ge -7$ };

v) X={x: x $\in$ **R** , x < 8}; g) X= {x: x $\in$ **R** , $-14 \le x \le 4$}.

13-misol. Quyidagi to‘plamlarni xarakterlovchi xossalar yordamida yozing.

a) (3;8) b) (-∞;7] v) (-∞;-3) g) [-2,5;0] d) [-8;+∞)

e) (2,7; +∞) j) [0;7,8) z) (-4;8].

14-misol. Quyidagi rasmda tasvirlangan to‘plamlarni ikki xil usulda yozing

a) b)

v) g)

d) e)

Ko‘rsatma: b) (2,5; 9] yoki {x: x$\in$ **R** , 2,5 <x $\le$ 9}

15-misol. Quyidagi mulohazalardan qaysi biri to‘g‘ri?

a) 3 $\in$ (3;12] b) -0,2 $\in$ [-0,3;0] v) 0$\in$ (-∞;0] g) 5$\in$ [6; ∞)

d) 75 $\in$ **Q** e) 6,4 $\in$ **Z** j) -7 $\in$ **N** z) -0,3 $\in$ **Z**

16-misol. Rasmda ko‘rsatilgan to‘plamlarni xarakteristik xossasiga ko‘ra yozing.

a) b)

17-misol. Quyidagi tengsizliklarni echimlarini sonlar o‘qida tasvirlang

a) $|x| \leq 5$ b) $|x| > 3$ v) $|x-3| \leq 1$ g) $|a+1| \geq 2$

1.2-§ TO‘PLAMLAR ORASIDA MUNOSABATLAR. TO‘PLAMLARNING KESISHMASI VA BIRLASHMASI

1-ta’rif. Agar A to‘plamning har bir elementi V to‘plamning ham elementi bo‘lsa, A to‘plam V to‘plamning **qismi** yoki **qism to‘plami** deyiladi va bu munosabatni $A \subset V$ yoki $V \supset A$ shaklda yoziladi.

1-misol. A = {1,3,5}, B = {1,2,3,4,5,6} bo‘lsa, u holda A to‘plam V to‘plamning xos qismi bo‘ladi, ya’ni $A \subset V$.

2-misol. A = {1,3,5,6} va B= {1,3,4,7,8} to‘plamlarning hech biri ikkinchisining qismi emas.

3-misol. Barcha juft sonlar to‘plami barcha ratsional sonlar to‘plamining xos qismidir.

4-misol. A={1,3,5} va B={2,3,4} bo‘lsa $A\cup V=\{1,2,3,4,5\}$ bo‘ladi.

Qo‘shiluvchi to‘plamlar soni ixtiyoriy bo‘lganda ham birlashma (yig‘indi) yuqoridagi kabi aniqlanadi va quyidagicha belgilanadi: $\bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad \bigcup_{a} A_a$.

5-misol. $A=(-\infty;7]$ va $V=[1;+\infty)$ to‘plamlarning kesishmasini toping. $A\cap V = [1;7]$.

6-misol. A - 3 ga karrali bo‘lgan natural sonlar to‘plami V-4 ga karrali bo‘lgan natural sonlar to‘plami bo‘lsa, $A\cap V$ ni toping. $A\cap V$ - 12 karrali bo‘lgan sonlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

To‘plamlar ustidagi asosiy amallar quyidagi xossalarga ega bo‘ladi:

1. $A\cup V = V\cup A$, $A\cap V=V\cap A$ - kommutativlik xossasi
2. $A\cup(V\cup S)=(A\cup V)\cup S$, $A\cap(V\cap S)=(A\cap V)\cap S$ - assotsiativlik xossasi
3. $(A\cup V)\cap S=(A\cap S)\cup(V\cap S)$,$(A\cap V)\cup S=(A\cup S)\cap(V\cup S)$ - distributiv-lik xossasi
4. $A\cup A=A$ $A\cap A=A$, $V\subset A$ bo‘lsa, $A\cup V=A$, $A\cap V$.

Echish: Bu tengliklarni isbotlari bir biriga o‘xshash bo‘lgani sababli, ularning bittasini masalan $(A\cup V)\cap S=(A\cap S)\cup(V\cap S)$ tenglikni isbotlaylik, buning uchun bu tenglikni chap tomonidagi ixtiyoriy elementi o‘ng tomonida borligini va aksincha o‘ng tomonidagi ixtiyoriy elementni chap tomonida borligini isbotlash kifoya *a Î (AÈV)Ç S* bo‘lsin,u holda *a Î AÈV va a Î S* munosabat kelib chiqadi *a Î AÈV* munosabatdan *a Î A* yoki *a Î V* munosabatlarni kamida berining o‘rinligi kelib chiqadi. Agar *a Î A* va *a Î S* bo‘lsa, $a\in A\cap S$ bo‘ladi, agar $a\in V$ va $a\in S$ bo‘lsa, $a\in V\cap S$ bo‘ladi. Har ikki holda ham *a Î (A*$\cup$S) $\cup(V\cap S)$ ekanligi kelib chiqadi. Bularda $(A\cup V)\cap S \subset (A\cap S)\cup(V\cap S)$ (1) munosabatni o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi $a\in(A\cap S)\cup(V\cap S)$ birlashmaning ta'rifidan $a\in(A\cap S)$ yoki $a\in V\cap S$ munosabatlarning kamida biri o'rinli. Agar $a\in A\cap S$ bo'lsa, $a\in A$ va $a\in S$, agar $a\in V\cap S$ bo'lsa, $a\in V$ va $a\in S$ bo'ladi ,bulardan $a\in A$ yoki $a\in V$ va $a\in S$ ekanligi kelib chiqda ya'ni $a\in(A\cup V)\cap S$ bo'ladi.

Yuqoridagilardan $(A\cap S)\cup(V\cap S)\subset(A\cup V)\cap S$ (2) munosabat o'rinli bo'ladi. Demak (1) va (2) munosabatlarda $A\cup V\cap S = (A\cap S)\cup(V\cap S)$ tenglik o'rini bo'lishi kelib chiqadi.

7-misol. A={1,2,3,4} va V to'plamlar orasidagi munosabatlarni aniqlang; bundan a) V={5,6,7}, b) V={1,2,3,7,8}, v) B={1,2,3}, g) B={1,2,3,4}, d) B={1,2,3,4,5,6}.

8-misol. Qaysi hollarda A va V to'plamlarda umumiy elementlarga ega:

a) A - 4 - sinf o'quvchilar to'plami, V- a'lochilar to'plami;
b) A - juft sonlar to'plami, V- toq sonlar to'plami;
v) A- 5 ga karrali sonlar to'plami, V- 7 ga karrali sonlar to'plami.
g) A- to'g'ri burchakli uchburchaklar to'plami, V- uchburchaklar to'plami.
e) A- teng tomonli to'rtburchaklar to'plami, V- kvadratlar to'plami.

9-misol. A- barcha juft sonlar to'plami. V- 6 ga karrali bo'lgan natural sonlar to'plami, S-5 ga karrali bo'lgan barcha natural sonlar to'plami, D- 21 ning natural bo'luvchilari to'plami; E- toq sonlar to'plami. Bu to'plamlar A to'plam bilan qanday munosabatda bo'ladi?

10-misol. A={a,b,c,d} to'plamning barcha qism to'plamlarini tuzing ular nechta?

11-misol. Quyidagi to'plamlarning kesishmasi va birlashmasini toping:

a) A={$a,b,c,$} va B={b,c,k,e} b) A={1,2,5,6} va B={2,3,4,5},
v) A={x,y,z} va B={α,β,γ}

12-misol. «Geometriya» so'zidagi harflari to'plami bilan «geologiya» so'zidagi harflar to'plamini birlashmasi va kesishmasini toping.

13-misol. $A=\{x: x\in \mathbf{N}\ x<10\}$, $B= \{x: x\in \mathbf{Z},\ x>-4\}$ $C=\{x: x\in \mathbf{N},\ 0<x<20\}$ to'plamlar berilgan $A\cap S$, $A\cap V$, $V\cap S$, $A\cap V\cap S$ to'plamlarni toping, ularni sonlar o'qida tasvirlang, tengsizliklar yordamida yozing.

14-misol. Quyidagi to'plamlarning kesishmasi, birlashmasini toping va sonlar o'qida tasvirlang. a) [8;25] va [-1;16] b) [-2;1], [0;9] va [-5;1].

15-misol. A={a,b,c,d,e}, B={c,d,f,k},C={b,c,d,f,m} to'plamlar berilgan. $K=(A\cup B)\cap C$ $R=(A\cup B)\cap C$ to'plamlarning elementlarini toping. $m\in K$, $f\in R$ yozuvlari to'g'rimi?

1.3-§ TO'PLAMLAR AYIRMASI TO'LDIRUVCHI TO'PLAM

Aytaylik, B to'plam A to'plamning qism to'plami bo'lsin. B to'plamga tegishli bo'lmagan A to'plamning barcha elementlaridan tuzilgan S to'plam B ni A ga qadar **to'ldiruvchi** to'plam deyiladi va uni S_AV (V_A) ko'rinishda belgilanadi, ya'ni $S_AV=A\backslash V$.

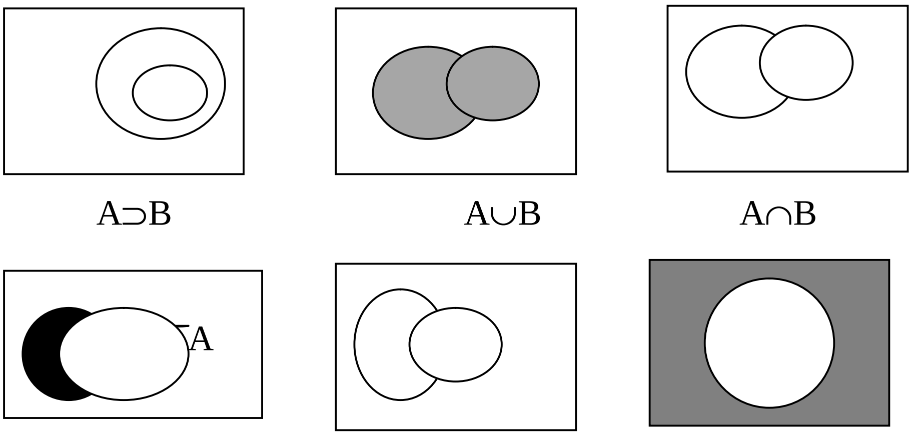
A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlarida tuzilgan S to‘plamni A to‘plamdan B to‘plamning **ayirmasi** deyiladi va S=A\B (yoki S=A-B) ko‘rinishda belgilanadi.

1-misol. A={x:x∈**R**; -1≤ x ≤ 2} , B={x: x∈**R**, 0≤ x ≤ 4}, C={x: x∈**R**, -2 ≤ x ≤0} to‘plamlar berilgan sonlar o‘qi yordamida quyidagi to‘plamlarning xarakteristik xossalaridan foydalanib yozing: a) A∪V; b) A∪S; v) V∪S; g) V∩S; d) A∩V; e) A∩S; j) (A∪V)∩S; z) A∪V∪S; i) A∩V∩S.

2-misol. Agar A={1,2,3,4,5}, B={0,2,4,6,8} bo‘lsa, u holda A\V={1,3,5} , B\A = {0,6,8} bo‘ladi.

3-misol. Agar A= {1,2,3,5,7,10}, B={2,4,6,8,10} bo‘lsa, u holda AΔV={1,3,4,5,6,7,8} bo‘ladi.

To‘plamlar ustida amallarning Eyler-Venn diagrammalaridagi tasvirlari 1.1 - chizmada berilgan.



A\B AΔB C_xA

1.1-chizma

4-Misol. Ko‘paytirish amalining ayirish amaliga nisbatan distributivlik qonuni o‘rinli, ya’ni

(A\V)ÇS=(AÇS)\(VÇS) (1)

Echish x Î (A\B)ÇC ixtiyoriy element bo‘lsin, bundan **x Î (A\B)** va **x Î S**. **x Î A\V** bo‘lgani uchun ayirish amalining ta’rifiga ko‘ra **x Î A** va **x Ï V**. Shunday qilib **x Î A, x Î S** demak, **x Î AÇS**, ammo **x Ï VÇS**. Oxirgi munosabatlardan **x Î (AÇS)\(VÇS)**, demak

(A\V)ÇS Ì (AÇS)\(VÇS). (2)

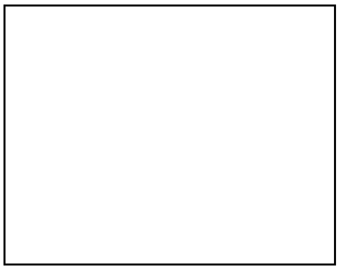
Endi

(A\V)ÇSÉ(AÇS)\(VÇS) (3)

ekanligini ko‘rsatamiz. **y Î (AÇS)\(VÇS)** ixtiyoriy element bo‘lsin, u holda **y Î AÇS** va **y Ï VÇS** bundan **y Î A, y Î S** va **y Ï V**, demak, **y Î (A\V)ÇS** shu bilan (3) munosabatni o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. (2) va (3) munosabatlardan (1) tenglikni to‘g‘ri ekanligi kelib chiqadi.

5-misol. AÇ(V\S)=(AÇV)\S munosabatni

Eyler-Vien diagrammalari yordamida isbotlang. Berilgan munosabatni chap va o‘ng tomonida turgan to‘plamlarni Eyler-Venn diagrammalardagi tasviri 1.2 -chizmada berilgan.



1.2- chizma

5-misol. A={*a*,*b*,c,d,e} va V to‘plamlar uchun A\V ni toping, bunda:
a) V={c,d,e}, b) B={c,a,d}, v) B={k,l,m}, g) B={b,c,e,d,a},
d) B={*a*,*b*,c,d,e,f,k,m} e) B=∅.

6-misol. «Geometriya» so‘zidagi harflar to‘plamida «Geologiya» so‘zidan harflar to‘plamining ayirmasini toping.

7-misol. A={x: x∈**R**,x∈[1;15] },B={x: x∈**R**, x∈[3;18] } bo‘lsa, A\V, V\A to‘plam-larni toping va ularni sonlar o‘qida tasvirlang.

8-misol. X={1,2,3,4,5,6,7,8,9} to‘plamning 4 ta qism to‘plamini tuzing va ularning har birini X to‘plamdagi to‘ldiruvchisini toping

9-misol. Quyidagi to‘plamlarning to‘ldiruvchilarini toping:
a) juft natural sonlar to‘plamini **N** to‘plamgacha;
b) manfiy sonlar to‘plamining **Z** to‘plamgacha;
v) butun sonlar to‘plamining **Q** to‘plamgacha;

10-misol. R\S va S\R to‘plamlarni toping va ularni sonlar o‘qida tasvirlang.
a) R={x: x∈**Z**, $-4 \le x \le 6$}, S={x: x∈**N**, $3\le x \le 10$};
b) R={x: x∈**R**, $-7 \le x \le 0$}, S={x:x∈**R** , $-3{,}5 \le x \le 3$};

1.4-§ TO‘PLAMLARNING SINFLARGA AJRATISH TUSHUNCHASI

Aytaylik A_1, A_2,.., A_n to‘plamlar berilgan A to‘plamni qism to‘plamlari bo‘lib:
a) $A_i \cap A_j = \varnothing$ $i \neq j$, i,j=1,2,...,n
b) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ =A bo‘lsa, u holda A to‘plamni o‘zaro kesishmaydigan A_1, A_2, ..., A_n **qism to‘plamlarga** (sinflarga) ajralgan deyiladi.

1-misol. X universal to‘plamning qism to‘plamlari bo‘lgan A,V,S to‘plamlar uchun $A\cap V\cap S \neq \varnothing$ munosabat o‘rinli. Berilgan to‘plamlar uchun Eyler-Venn diagrammasini chizing va a) $A\cap V\cap S$; b) $S_x(A\cup V)\cap S$;v) $(S_xA\cup S_xV)\cap S$;
g) $S_xA\cup V\cup S$ to‘plamlarni tasvirlovchi sohalarni shtrixlar bilan ko‘rsating, har bir holat uchun alohida chizma chizing.

2-misol. X-uchburchaklar to‘plami, A,V, va S lar uning qism to‘plamlari. Agar A,V va S lar quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, X ning o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plamlaridan iborat bo‘ladimi?

a) A-o‘tkir burchakli uchburchaklar to‘plami, V-o‘tmas burchakli uchburchaklar to‘plami, S-to‘g‘ri burchakli uchburchaklar to‘plami;

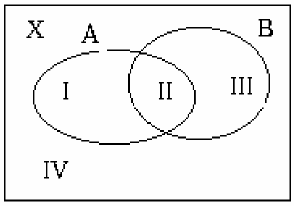
b) A teng yonli uchburchaklar to‘plami, V-teng tomonli uchburchaklar to‘plami, S - turli tomonli uchburchaklar to‘plami.

Echish. a) X to‘plamni yuqoridagi ikki shartni qanoatlantirishini ko‘rsataylik. A,V va S to‘plamlar jufti-jufti bilan kesishmaydi: bir vaqtda to‘g‘ri, o‘tkir va o‘tmas burchakli bo‘lgan uchburchak mavjud emas, shu bilan birga o‘tkir, o‘tmas va to‘g‘ri burchaklar uchburchaklar to‘plamlarini birlashmasi barcha uchburchaklar to‘plamiga teng bo‘ladi. Shunday qilib X to‘plam o‘tkir burchakli uchburchaklar, to‘g‘ri burchakli va o‘tmas burchakli o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlarga ajratildi.

b) teng yonli, teng tomonli va har xil tomonli uchburchaklar to‘plami o‘zaro kesishmasligini tekshiraylik. Ma’lumki, teng tomonli uchburchaklar sinfi teng yonli uchburchaklar sinfini qismidan iborat bo‘lgani uchun, bu erda birinchi shart bajarilmadi. Shuning uchun X-uchburchaklar to‘plamini teng yonli, teng tomonli va har xil tomonli uchburchaklar sinfini ajratish mumkin emas.

3-misol. X - uchburchaklar to‘plamida A-teng yonli uchburchaklar to‘plami va V-o‘tmas burchakli uchburchaklar to‘plamini ajratilgan, bu to‘plamlar uchun Eyler-Venn diagrammasini tuzamiz. X to‘plam nechta o‘zaro kesish maydigan qism to‘plamlar (sinflarga) ajralishini ko‘rsataylik.

Echish. A va V lar uchun A⊂ X va V ⊂ X Munosabat o‘ringa ega bo‘lganligi uchun A va V to‘plamlarni ifodalovchi figuralar X ni ifodalovchi to‘g‘ri to‘rtburchak ichiga chiziladi va A,V to‘plamlar kesishadi. Rasmdan ko‘rinadiki, X to‘plam to‘rtta o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlarga ajraldi.



Bular I-o‘tmas burchakli bo‘lmagan teng yonli uchburchaklar to‘plami, II-o‘tmas burchakli teng uchburchaklar to‘plami, III-teng yonli bo`lmagan o‘tmas burchakli uchburchaklar to‘plami, IV-teng yonli ham, o‘tmas burchakli ham bo‘lmagan uchburchaklar to‘plami. Shunday qilib, X to‘plam o‘zaro kesishmaydigan I,II,III,IV qism to‘plamlarga (sinflarga) ajraldi. Bu o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plam (sinf) lar to‘plamlari ikkita xossasiga ko‘ra: «Teng yonli bo‘lish» , «o‘tmas burchakli bo‘lish» xossalariga ko‘ra ajratildi.

To‘plamlarni o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plam (sinf)larga ajratish to‘plamlarni bir, ikki, uch va hokazo xossalariga ko‘ra ham ajratish mumkin. Bunda Eyler-Venn diagrammasidan foydalanish kulaydir.

4-misol. X={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} to‘plam A, V va S qism to‘plamlarga ajratilgan. Qaysi hollardi X to‘plam sinflarga ajratilganligini aniqlang.

a) A={1,3,5}, B={2,4,6,8,10}, C= {7,9};
b) A={5,10}, B={3,4,8,9}, C={1,6};
v) A={2,3,5,7}, B={4,6,8,10}, C={1,9}

g) A={1,3},   B={4,6,8},   C={5,6,9}
d) A={3,6,9}, B={1,4,7,10}, C={2,5,8}

5-misol. Natural sonlar to‘plamini qanday sinflarga ajratish mumkin?

6-misol. Butun sonlar to‘plamini 5 ga qoldiqli bo‘lish xossasiga ko‘ra sinflarga ajratish mumkinmi? Mumkin bo‘lsa, qanday ajratish mumkin?

7-misol. Er yuzidagi xalqlarni qanday belgilarga ko‘ra siflarga ajratish mumkin.

8-misol. To‘rt burchaklarni: a) bitta xossasidan foydalanib; b) ikkita xossasidan foydalanib sinflarga ajrating.

1.5-§ TO‘PLAMLARNING DEKART KO‘PAYTMASI

Aytaylik, A va B bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Birinchi elementi A to‘plamga va ikkinchi elementi B to‘plamga qarashli bo‘lgan barcha (a,b) juftlardan iborat to‘plam A va B to‘plamlarning **Dekart** (to‘g‘ri) ko‘paytmasi deyiladi va A x B kabi belgilanadi.

1-misol. Quyidagi hollarning qaysi birida siflarga ajratish to‘g‘ri amalga oshirilgan: a) uchburchaklar to‘g‘ri burchakli, o‘tmas burchakli va teng yonli uchburchaklarga; b) burchaklar o‘tkir, to‘g‘ri va yoyiq burchaklar; v) butun sonlar natural sonlar, o va manfiy natural sonlar; g) o‘zbek tili fellari hozirgi zamon, o‘tgan zamon va kelasi zamon fellariga; d) gap bo‘laklari bosh va ikkinchi darajali bo‘laklarga; e) natural sonlar tub sonlar, o va murakkab sonlarga.

2-misol. **A= {1,2,3}, B={ *a,b*}** berilgan bo‘lsa, **A´B, B´A, A´A, B´B** larni toping:

***A*´B=(*(1:a),(2;a);(3;a),(1;b), (2;b), (3;b)}*;**

***B*´A=*{(a;1), (b;1),(a;2), (b;2), (a;3), (b;3) }*;**

A´A={(1;1), (1;2),(1;3),(2;1),} (2;2), (2;3), (3;1), (3;2), (3;3)}

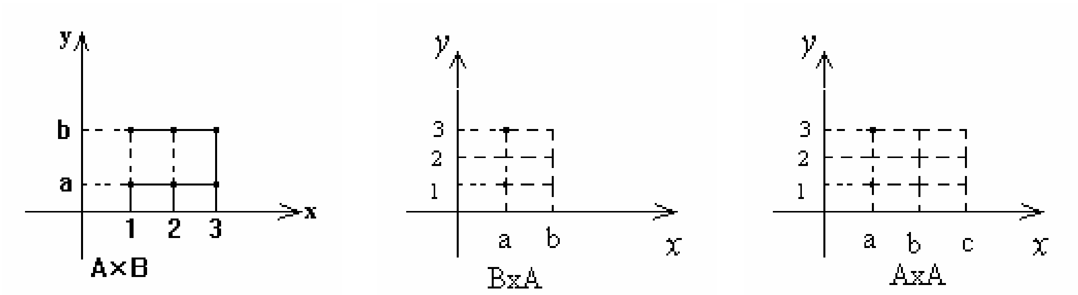
B´B={(a;a), (a;b), (b;a), (b;b)}

54-misol. A=[1;3], B=[2;4] lar berilgan bo‘lsa, **A´V, V´A** larni toping:

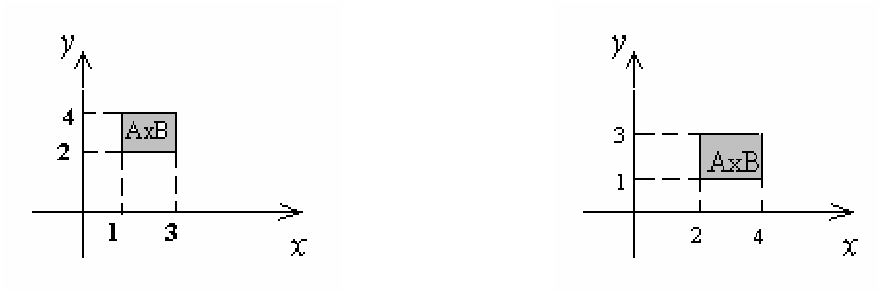
A´B=[1;3] ´[2;4]=*{(a;b):1£ a£ 3, 2£ b £ 4}*

B*´ A=[2;4] ´ [1;3] = {*(a;b): 2 £ a £ 4, 1£ b £ 3}

Echish.**A´V** to‘plam elementlarini birinchi koordinatalarini (**A** ning elementlarini) **0x** o‘qida, ikkinchi koordinatalarini (**V** ning elementlarini) **0u** o‘qida tasvirlaymiz. Bu nuqtalardan, mos ravishda, **0x**, **0u** o‘qlarga perpendikulyar chiqaramiz. Bu perpendikulyarning kesishish nuqtalarini koordinatalari **A´V** to‘plamning elementlaridan iborat. Koordinatalari **A´V** ning elementlari (sonlar jufti) ga teng bo‘lgan barcha nuqtalar to‘plami.**A´V** to‘plam- ning geometrik tasviri deyiladi.1-misolda keltirilgan **A´V, V´A, A´A** to‘plamlarning geometrik tasviri 1.4.-chizmada, 2-misolda keltirilgan **A´V, V´A** to‘plamlarning geometrik tasviri 1.5-chizmada tasvirlangan.



1-4 chizma



1-5 chizma

3-**Misol.** Ixtiyoriy **A,V va S** to‘plamlar uchun ushbu

A´ (VÈS) = (A´V) È (A´S)

munosabatning to‘g‘ri ekanligini isbotlang.

Echish.a) ixtiyoriy **(x,y)** Î **A´(B È C)** bo‘lsin, bundan **x** Î **A, y** Î **B** È **C** bo‘lganligi uchun, birlashmani ta’rifidan **x** Î **A y** Î **B yoki y** Î **C**. Shunday qilib, **x** Î **A** va **u** Î **V** yoki **x** Î **A** va **u** Î **S**, bulardan va to‘g‘ri ko‘paytmaning ta’rifidan **(x;y)** Î **A ´ B** yoki **(x;y)** Î **A ´ C**

Demak, **(x;y)** Î **(A ´ B)** È **(A´C)**, ya’ni

A ´ (VÈS) Ì **(A´V)**È**(A´S)** (2)

b) ixtiyoriy **(x;y)** Î **(A ´ B)** È **(A´C)** bo‘lsin. Bundan **(x;y)** Î **(A ´ B)** yoki **(x;y)** Î **(A´C)**. To‘g‘ri ko‘paytmaning ta’rifidan **x** Î **A** va **u** Î **V** yoki **x** Î **A** va **u** Î **V** bulardan **x** Î **A va u** Î **V**È**S** . Demak, **(x;y)** Î **A ´ (V**È **C)** yoki

(A´V)È**(A´S)** Ì **A´(VÈS)** (3)

(2) va (3) munosabatlardan (1) tenglikni o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

4-misol. O‘nli raqamlari A={2,5,7} to‘plamga, birlik raqamlari V={4,6} to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha ikki xonali sonlarni yozing.

5-misol. Surati A={1,2} to‘plamdan, mahraji B={3,4,5,6,7} to‘plamdan olingan barcha to‘g‘ri kasrlarni yozing.

6-misol. Surat A={1,3,5,7,9,11} to‘plamdan, maxraji B={2,4,6,8,11,12} to‘plamdan olingan barcha kasr sonlarni yozing.

7-misol. AxV to‘plam elementlarini yozing, bunda:

a) A={*a,b,c,d,*}, B={*f,e*}, b) A={*a,b,c,d*}, B={x}, v) A={*a,b,c,d*}, B={5},

g) A={*a,b,c,d*}, B={1,2}

8-misol. AxV= {(1,2),(2,4),(4,16), (3,9), (5,25), (6,36)} to‘plam berilgan, A va V to‘plamlari elementlarini ko‘rsating.

9-misol. A={5,9,4}, B={7,8,6} to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini tuzing. Hosil bo‘lgan to‘plamdan quyidagi xossalarga asosan qism to‘plamlar ajrating

a) juftliklarni birinchisi ikkinchisidan katta;

b) birinchisi 5 ga teng; v) ikkinchisi 7 ga teng;

g) ikkinchisi 2 ga bo‘linadi.

10-misol. Agar 1) $\boldsymbol{A = \{a, b, c\}}$, $\boldsymbol{B = \{3;5;9\}}$;

2) $\boldsymbol{A = \{x; y\}, B = \{x, y, z\}}$; **3)** $\boldsymbol{A = \{3;5\}}$, $\boldsymbol{B = \{1;5\}}$;

bo‘lsa , **A×V,, V×A** to‘plamlarni toping.

11-misol. Quyidagi to‘plamlarni Dekart koordinatalar sistemasida geometrik tasvirini toping:

1) $[0;1]\times[0;1]$; **2)** $[-1;1]\times[2;3]$;

3) $[1;3]\times(-\infty;3]$; **4)** $[0;3]\times[1;+\infty)$;

5) $[1;4]\times(-\infty;+\infty)$; **6)** $[-1;5]\times\{2,3,4\}$;

7) $[0;+\infty)\times\{1;3\}$; **8)** $(-\infty;+\infty)\times\{1,2,3\}$

12-misol. Ixtiyoriy **A,V** va **S** to‘plamlar uchun quyidagi tenglikni isbotlang:

1) $(A\cup V)\times S=(A\times S)\cup(V\times S)$; **2)** $(A\cap V)\times S=(A\times S)\cap(V\times S)$

3) $(A\setminus V)\times S=(A\times S)\setminus(V\times S)$; **4)** $A\times(V\setminus S)=(A\times V)\setminus(A\times S)$

5) $A\times(V\cup S)=(A\times V)\cup(A\times S)$;

6) $A\cup V\subset S \Rightarrow A\times V=(A\times S)\cap(S\times V)$;

7) $(A\cap V)\times(S\cap D)= (A\times C)\cap(B\times D)$.

II-BOB. MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

2.1-§. MATEMATIK TUSHUNCHA. TUSHUNCHA HAJMI VA MAZMUNI TUSHUNCHANI TA’RIFLASH USULLARI

Matematika atrofimizni o‘rab turgan tabiat va jamiyat hodisalarni alohida tomonlarini o‘rganadi. Masalan, geometriyada predmetlarni shakli va o‘lchamlari o‘rganiladi, uning boshqa xossalari qaralmaydi.

Ta’rif. Ob’ektni o‘zaro bog‘langan muhim xossalari to‘plami bu ob’ekt haqidagi tushunchaldar **mazmuni** deyiladi.

Matematik ob’ektlar bitta termin (so‘z, nom) bilan ifodalanadi.

A	**V**	**AÙV**
1	1	1

Tushunchani **hajmi** deganda bitta termin bilan ifodalanadigan ob’ektlar to‘plamiga aytiladi.

1-misol. Ixtiyoriy **A,V,S** va **D** to‘plamlar uchun quyidagi tengliklar to‘g‘rimi?
1) (A´V)È(S´D)=(AÈS) ´(V´D); 2) (A´V) ´S= A´(V´S);
3) A´(VÇS)= (A´V)Ç(A´S).

2-**Misol**. **A** - "Toshkent O‘zbekistonning poytaxti", u holda ù**A** - "Toshkent O‘zbekistonning poytaxti emas" degan fikrdan iborat bo‘ladi.

Ba’zan fikrning inkorini "emas" mantiq bog‘lovchi bilan bir xil ma’noga ega bo‘lgan terminlar orqali ham ifodalanadi.
Masalan, **A** - "Sardorbek bugun maktabga bordi" fikrning inkori ù**A** - "Sardorbek bugun maktabga bormadi", ù**A** - "Sardorbek bugun maktabga borgani yo‘q" kabi ifodalash mumkin.

A	ù**A**
1	0
0	1

1-jadval

2.2-§.FIKR TUShUNCHASI. FIKRNI INKORI

Mantiq fikrlash usullarining tahlilidan iboratdir. Matematik mantiq esa, mantiq ob’ektlarini matematik usulda tekshiradigan fandir.

Matematik mantiqda fikr (mulohaza) boshlang‘ich tushuncha bo‘lib, u ta’riflanmaydi. Uni rost yoki yolg‘onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gap deb tushunamiz.

1-**Misol**. **A** - "Kecha havo ochiq bo‘ldi", **V** - "Kecha yomg‘ir yog‘madi" fikrlarni kon’yunktsiyasi **AÙV** - "kecha havo ochiq bo‘ldi va yomg‘ir yog‘madi" degan fikrdan iborat bo‘ladi.

2-**Misol.** **A** - "Ertaga havo ochiq bo‘ladi", **V** - "ertaga havo bulutli bo‘ladi" degan fikrlarning diz’yunktsiyasi **AÚV** - "ertaga havo ochiq yoki bulutli bo‘ladi" degan fikrdan iborat bo‘ladi.

3-**Misol**. **A** - "Xushnudbek uyda qoladi", **V** - " Xushnudbek kinoga boradi" degan fikrlarning implikatsiyasi **A Þ V** - "Agar Xushnudbek uyda qolsa, u holda Xushnudbek kinoga boradi" degan fikrdan iborat.

A	V	A⇒V
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

2-jadval

Eslatma. Matematik mantiqda qaraladigan fikrlar implikatsiyasi jonli tilda ishlatiladigan implikatsiyadan farqlidir. Jonli tilda implikatsiyani tashkil etuvchi fikrlar orasida qandaydir ma’noviy bog‘lanish mavjuddir, lekin matematik mantiqda fikrlar orasidagi ma’noviy bog‘lanishning bo‘lishi talab etilmaydi. Matematik mantiqda fikrlarni mazmuni emas, balki ularning rostlik qiymatlarini e’tiborga olinadi. Masalan, **A** - "Bir sutkada 30 soat bo‘ladi", **V** - "7 tub sondir", **S** - "Uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 200^0 ga teng", bu holda **A Þ V** - "Agar bir sutka 30 soat bo‘lsa, u holda 7 tub son bo‘ladi" fikrdan, **A Þ S** - "Agar bir sutka 30 soat bo‘lsa, u holda uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 200^0 ga teng bo‘ladi" fikrdan iborat bo‘lib, jonli tilda implikatsiyalardan iborat bo‘lgan bu fikrlar mazmunga ega emas. Shunday bo‘lishga qaramasdan matematik mantiq nuqtai - nazardan implikatsiyadan iborat bo‘lgan har ikkala fikrlar ham rostdir. Umuman aytganda, matematik mantiqda yolg‘on fikrdan rost fikrni kelib chiqishi ham, yolg‘on fikrdan yolg‘on fikrni kelib chiqishi ham rostdir.

A	**V**	**AÚV**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3-jadval

4-**Misol**. **A** - "Hushnudbek kitob ustida ishlaydi" **V** - " Hushnudbek a’lochi" fikrlar bo‘lsin. U holda **A Û V** - " Hushnudbek kitob ustida ishlagan holda va faqat shu holda a’lochi bo‘ladi" fikrdan iboratdir.

A	**V**	**A Û V**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

4-jadval

Ekvivalentsiya tushunchasi matematikada muhim rol o‘ynaydi. Ikkita fikrlardan birining rostligidan ikkinchisining rostligi kelib chiqadigan bo‘lgan hollarda unga murojaat qilinadi. Bu ekvivalentsiya ikki fikrlardan birini ikkinchisi uchun zaruriy va etarli shart ham deyiladi.

Masalan, **A** - "**3*n*** juft sondir", **V** - "***n*** juft sondir" fikrlar bo‘lsin. **A Û V** - "***n*** juft son bo‘lgan holda va faqat shu holda **3*n*** juft son bo‘ladi" fikrdan iborat bo‘ladi. **A Û V** ekvivalentsiyani (misoldagi) matematikada **A Û V** - "***3n*** juft son bo‘lishi uchun, ***n*** ning juft son bo‘lishi zarur va etarlidir" ko‘rinishda ifodalanadi.

5-**misol.** Quyidagi berilgan gaplarning qaysi birlari mulohaza bo‘ladi. Agar mulohaza bo‘lsa, uning mantiqiy qiymatini (rostliq qiymatini) toping.

a) Sirdaryo 0rol dengiziga quyiladi;

b) Kislorod - gaz;

v) Universitetning matematika fakulteti studenti;

g) A_1 B_1 C_1 uchburchak A_2 B_2 C_2 uchburchakka o‘xshash;

d) 25 - toq son;

e) Matematika - qiziqarli fan;

j) Palov - juda mazzali taom;

z) 27- tub son;

i) $2+\sqrt{3}-\sqrt[3]{5}$;

k) Agar uchburchakning hamma tomonlari o‘zaro teng bo‘lsa, u teng tomonli uchburchak deyiladi;

l) Oy marsning yo‘ldoshi;

m) Farg‘ona Sirdaryo qirg‘og‘ida joylashgan;

n) Oybekning “Alisher Navoi” asarida rosa 154 242 ta harf ishlatilgan;

o) Yashasin O‘zbekiston yoshlari !;

p) Bugun havo bulutli.

<u>YYechimi</u>. v) bu gap mulohaza bo‘la olmaydi, chunki bu yerda student haqida hech narsa tasdiqlanmayapti.

g) mulohaza emas, chunki bu yerda qaysi uchburchaklar to‘g‘risida ma’lumot yo‘q, shuning uchun bu gapning rostligini ham, yolg‘onligini ham aniqlab bo‘lmaydi.

j) mulohaza emas, chunki bu erda “juda mazzali” degan tushuncha unchalik aniqlik emas.

n) bu mulohaza, lekin uning rost yoki yolg‘onligini aniqlash uchun juda ham ko‘p vaqt sarf bo‘ladi.

6-misol. Quyidagi fikrlarning inkorini yozing va rostlik qiymatlarini toping.

a) Amudaryo Orol dengiziga quyiladi;

b) 15 soni 7 ga qoldiqsiz bo‘linadi;

v) $3 < 7$;

g) $3 \geq 7$;

d) 33-tub son;

e) 15-murakkab son;

j) Xamma tub sonlar toq;

z) 5 ning kvadrati 35 ga teng.

7-misol. Quyidagi ikki mulohazalardan qaysilari biri ikkinchisining inkori bo‘ladi?

a) $3 \geq 15$ va $3 < 15$.

b) $27 > 9$ va $27 < 9$.

v) “ABC o‘tkir burchakli uchburchak” va “ ABC o‘tmas burchakli uchburchak”.

g) “ f- toq funktsiya” va “f - juft funktsiya”

d) “Hamma tub sonlar toq” va “ xamma tub sonlar juft”

e) “Hamma tub sonlar toq” va “ juft tub son mavjud”

j) “n natural son juft” va “ n natural son toq”.

<u>YYechimi</u>. b) "27 < 9" mulohaza “ 27 > 9” mulohazaning inkori bo‘la olmaydi, chunki 9 dan katta bo‘lmaslik talabi ikkita imkoniyatni yaratadi, ya’ni “9 ga tenglik” va “9 dan kichik” bo‘lish imkoniyatlari.

Demak "27 > 9" mulohazaning inkori “27 ≤ 9” bo‘ladi.

8-misol. Quyidagi mulohazalarni inkor amalisiz yozing:

a) $\rceil(a < b)$; b) $\rceil$(*a* £ *b*); v) $\rceil$(*a* ³ *b*)·

g) $\rceil(a > b)$; d) $\rceil$(*a* ¹ *b*) ; e) $\rceil(2 \cdot 2=4)$;

j) $\rceil(a : b)$; z) $\rceil(a= 2b)$; i) $\rceil(a=b)$.

9-misol. Quyidagi mulohazalarning rostlik qiymatlarini toping.

a) 11 - tub son va 15- tub son;

b) 2 juft son yoki bu son tub;

v) Sirdaryo Orol dengiziga quyiladi va 2+3=5;

g) 2 · 2=4 yoki oq ayiqlar Afrikada yashaydi;

d) 2 · 2=4 va 2 · 2 ≤ 5 hamda 2 · 2 ≥ 4.

Yechimi. v) Kon’yunktsiya amali qo‘llanilayotgan ikkala sodda mulohaza ham rost, shuning uchun kon’yunktsiya amalining ta’rifiga ko‘ra bu mulohazalarning kon’yuktsiyasi ham rost bo‘ladi.

10-misol. Agar

a) A $\wedge$ (2 ·2 =4), b) S $\vee$ (2 · 2=5); mulohazalar rost;

v) B $\wedge$ (2 ·2 =4), g) D $\vee$ (2 · 2 =5) , d) E $\wedge$ (2 · 2=5) mulohazalar yolg‘on bo‘lsa, u holda A,V, S, D, E mulohazalarning rostlik qiymatlarini toping.

Yechimi. b) Mulohazalarning diz’yunktsiyasi shu holda rost bo‘ladiki, agar ulardan xech bo‘lmaganda bittasi rost bo‘lsa. Bizning holda “2 · 2 =5” yolg‘on mulohaza va ikki mulohazaning diz’yunktsiyasi esa rost bo‘lyapti, shuning uchun S mulohaza albatta rost mulohaza bo‘lishi kelib chiqadi.

11-misol. Quyidagi ifodalarning rostlik shartlarini aniqlang va ularni kon’yunktsiya yoki diz’yunktsiya shaklida ifodalang.

а) $a \cdot b \neq 0$ г) $\frac{a}{b} = 0$ ж) $|a| > 3$

б) $a \cdot b = 0$ д) $|a| = 3$ з) $a^2 + b^2 \neq 0$

в) $a^2 + b^2 = 0$ е) $|a| < 3$ и) $\frac{a}{b} \neq 0.$

Yechimi. g) Kasr faqat shu holda nolga teng bo‘ladiki, qachonki kasr surati nolga teng bo‘lib, maxraji koldan farqli bo‘lsa, ya’ni (a=0) $\wedge$ (b≠0)

12**-misol.** Agar A - “9 soni 3 ga qoldiqsiz bo‘linadi”, V - “8 soni 3 ga qoldiqsiz bo‘linadi” bo‘lsa, quyidagi mulohazalarning rostlik qiymatini toping. Þ

a) A Þ B; b) B Þ A; v) ⌉A Þ V; g) ⌉V Þ A;

d) ⌉A Þ ⌉B; e) ⌉V Þ A; j) A Þ ⌉V; z) V Þ ⌉A;

i) A Û B; k) ⌉A Û ⌉V; l) ⌉A Û V m) A Û ⌉V.

Yechimi. e) λ (A) =1, λ (V) =0 ga ega bo‘lamiz. Shuning uchun

λ(⌉V Þ ⌉A) = ⌉λ (V) Þ ⌉λ (A)=⌉0 Þ ⌉1= 1 Þ 0=0

13-misol. Agar A Þ B mulohaza rost bo‘lsa, (⌉A $\wedge$V) Þ (⌉A $\vee$ V) mulohaza haqida nima deyish mumkin?

14-misol. Agar A Û B mulohaza rost bo‘lsa,

a) A Û ⌉B; b) ⌉A Û V; v) ⌉A Þ B; g) V Þ A

mulohazalar rostlik qiymatlari haqida nima deyish mumkin?

15-misol. Agar A Þ B mulohaza rost, A Û B mulohaza esa yolg‘on bo‘lsa, u holda V Þ A mulohazaning rostlik qiymati haqida nima deyish mumkin?

2.4-§. PREDIKAT TUShUNCHASI VA ULAR USTIDA AMALLAR. KVANTOR TUShUNCHASI

Aytaylik, **N** natural sonlar to‘plami bo‘lib, **n** uning ixtiyoriy elementini bildirsin, **R(n)** orqali quyidagi gapni belgilaylik:

n - tub son. **R(n)** gap fikr bo‘la olmaydi, chunki uning chin yoki yolg‘onligi haqida umuman hech narsa deb bo‘lmaydi. Agar **R(n)** da **n** ning o‘rniga tayin bir sonni qo‘ysak, u holda ko‘rilayotgan gap fikr bo‘ladi. Masalan, **n=1** bo‘lganda **R(n)** - "1- tub son" degan fikrni bildiradi. Bu fikr yolg‘ondir. **R (5)** esa (ya’ni "5- tub son") chin fikrdir. Shunday qilib, **R(n)** simvol **n** xaqidagi shunday gapni bildiradiki, u har bir tayin **n** da biror fikrga aylanadi. Avval kiritgan ta’rifimizga ko‘ra **R(n)** simvol **n** o‘zgaruvchining fikriy formasidir. Bunday gaplar matematik logikada **predikatlar** deyiladi.

"Predikat" so‘zi lotin, nemis, ingliz tillarida ishlatiladigan so‘z bo‘lib, "kesim" degan ma’noni bildiradi. Masalan **R(n)** da **n** harfi ega o‘rnida kelib, gapning qolgan "tub son" degan qismi kesimdir.

1-misol. Quyidagi ifodalardan qaysilari predikat ekanligini aniqlang:

a) " x 5 ga bo‘linadi" ($x\in$ N);

b) " x daryosi 0rol dengiziga quyiladi" (x barcha daryo nomlari to‘plamida qiymat qabul kiladi)

v) "x^2+2x+4" ($x\in$ **R**);

g) "$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$" ($x,y\in$ **R**);

d) "x y ning akasi" (x, y lar barcha odamlar to‘plamida qiymat qabul qiladi)

e) "x va y" (x, y lar berilgan guruhdagi barcha talabalar to‘plamida qiymat qabul qiladi);

j) "x va y lar z ning turli tomonlarida yotadilar" (x, y - tekislikdagi barcha nuqtalar to‘plamida, z - shu tekislikda yotgan barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plamida qiymat qabul qiladilar);

z) "ctg 45^0 =1";

i) "x y ga perpendikulyar" (x, y - bir tekislikdagi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plamida qiymat qabul qiladilar).

2-misol. Shunday (bir o‘rinli yoki ko‘p o‘rinli) predikatni aniqlangki, undagi predmet o‘zgaruvchilar o‘rniga mos kelgan to‘plamdan o‘rinli qiymatlarni qo‘yganimizda qo‘yida berilgan mulohaza hosil bo‘lsin:

a) "3+4=7";

b) "Halima va Salimalar opa-singillardir";

v) "Bugun - seshanba";

g) "Termez shahri Amudaryo bo‘yida joylashgan";

d) "sin $30^0=\frac{1}{2}$";

e) "Alisher Navoiy - o‘zbek xalqining buyuk shoiri";

j) "$3^2+4^2=5^2$";

z) "Sirdaryo Orol dengiziga quyiladi";

i) "tg $\frac{\pi}{4}$=1";

Shunday predikatni aniqlaganingizdan so‘ng, bu predikatning rostlik sohasini ko‘rsating yoki biror chizma orqali ifodalang.

Yechimi. i) Berilgan mulohazaga aylanuvchi uchta shunday predikatni ko‘rsatish mumkin. Birinchisi bir o‘rinli predikat:

"tg x=1" bulib bu erda $x \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n : n \in N \right\}$. Bu predikatning rostlik sohasi $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n : n \in N \right\}$ to‘plamdan iboratdir. Ikkinchisi ham bir o‘rinli predikatdir: "$tg\frac{\pi}{4} = y$" bo‘lib bu erda y∈R. Bu predikatning rostlik sohasi {1} bir elementli to‘plamdan iboratdir.

Uchinchisi esa ikki o‘rinli predikatdir: "tgx=y" bo‘lib, bu erda $x \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n : n \in N \right\}$ va y∈**R**. Bu predikatning rostlik sohasi koordinatalar tekisligidagi tangensoida deb nomlanuvchi egri chiziqlar oilasidan iboratdir. Keltirilgan bu uchala predikatda $x = \frac{\pi}{4}$ va u=1 qiymatlarni bersak natijada berilgan mulohaza hosil bo‘ladi.

3-misol. Quyidagi berilgan mulohazalarni o‘qing va ularda qatnashgan o‘zgaruvchilar haqiqiy sonlar to‘plamida qiymat qabul qilishini hisobga olib, qaysilari rost, qaysilari yolg‘on ekanligini aniqlang:

a) (∀x)(∃u) (x+y=7); b) (∃y)(∀x) (x+y=7); v) (∃x)(∃y) (x+y=7)
g) (∀x)(∀y) (x+y=7); d) ((∀x)(∀y)(x+y=3)) ⇒ (3=4)
e) (∀x)((x^2>x) ⇔((x>1)∨(x<0))); j) (∀a) (((∃x)(ax=6)) ⇔(a≠0))
z) (∀b)(∃a)(∀x)(x^2+ax+b>0); i) (∀x)(((x>1)∨(x<2)) ⇔(x=x))
k) (∃b)(∀a)(∃x)(x^2+ax+b=0); l) (∃a)(∀b)(x)(x^2+ax+b=0)

Yechimi. b) "(∃y)(∀x) (x+y=7)" mulohazani quyidagicha o‘qish mumkin: "Shunday haqiqiy son mavjudki, uni ixtiyoriy haqiqiy songa qo‘shganimizda 7 hosil bo‘ladi". Bu mulohaza yolg‘on ekanligini ko‘rish qiyin emas. Haqiqatan ham bir o‘rinli (∀x) (x+y=7) predikatni qarasak bu erda *x* bog‘langan o‘zgaruvchi, *y* esa erkin o‘zgaruvchidir va bu predikatda *y* ni mavjudlik kvantori bilan bog‘lasak berilgan mulohaza hosil bo‘ladi. Bu erda *y* o‘zgaruvchi o‘rniga qanday qiymat qo‘ymaylik natijada yolg‘on mulohaza hosil bo‘laveradi. Masalan u=4 desak (∀x) (x+4=7) hosil bo‘lib bu erda "x+4=7" predikatdagi x ning o‘rniga x=5 desak yolg‘on mulohaza hosil bo‘ladi. Shuning uchun "(∃u) (∀x) (x+y=7)" mulohaza "(∀x) (x+y=7)" bir o‘rinli predikatga u bo‘yicha mavjudlik kvantorini bog‘lash orqali hosil qilinib yolg‘on mulohaza bo‘ladi.

4-misol. Quyidagi predikatlardan kvantorlar yordamida mumkin bo‘lgan mulohazalarni hosil qiling va ulardan qaysi biri rost, qaysi biri yolg‘on ekanligini aniqlang, (bu erda $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$):

a) $x^2+2x+1=(x+1)^2$; b) $(x-3)(x+3)<x^2$; v) $e^{|x|}<\ln|x|$ $(x\neq 0)$;
g) $(x^2+1=0) \Rightarrow ((x=1)\vee(x=2))$; d) $(x<0)\vee(x=0)\vee(x>0)$; e) $x^2=25$;
j) $x^2+y^2=16$; z) $x^2=y^2 \Rightarrow x=y$; i) $(x+y)^2=x^2+2y+y^2$
k) $|x-y|\leq 3$; l) $|x-y|\geq ||x|-|y||$; m) $\sin x=\sin y$

<u>**Yechimi.**</u> e) Bu bir o‘rinli predikatdan kvantorlar yordamida ikkita mulohaza hosil qilish mumkin: "$(\forall x)(x^2=25)$" va "$(\exists x)(x^2=25)$". Bulardan birinchisi "Har qanday haqiqiy sonning kvadrati 25 ta teng" deb o‘qiladi va bu yolg‘on mulohaza ekanligi o‘z-o‘zidan ma’lum. Ikkinchi mulohaza esa "Shunday haqiqiy son mavjudki, uning kvadrati 25 ga teng bo‘ladi". Bu mulohaza rost, chunki "$x^2=25$" predikat aynan yolg‘on predikat emas.

j) Berilgan ikki o‘rinli "$x^2+y^2=16$" predikatdan kvantorlar yordamida to‘rtta mulohaza hosil qilish mumkin:

$(\forall x)(\forall y)\ (x^2+y^2=16)$
$(\exists x)(\forall y)\ (x^2+y^2=16)$
$(\forall x)(\exists y)\ (x^2+y^2=16)$
$(\exists x)(\exists y)\ (x^2+y^2=16)$

Bu mulohazalarning o‘qilishini o‘quvchilarning o‘zlariga havola qilamiz. Bu mulohazalarning rostlik qiymatlarini aniqlaymiz. Dastlabki ikkita mulohazani qaraylik. Bu mulohazalar bir o‘rinli $(\forall y)$ $(x^2+y^2=16)$ predikatdan kvantorlar yordamida hosil qilingan. Bu predikat aynan yolg‘on predikat bo‘lgani uchun unga x o‘zgaruvchi bo‘yicha umumiylik kvantorini va mavjudlik kvantorini bog‘lasak yolg‘on mulohaza hosil qilaveramiz. Demak dastlabli ikkita mulohaza yolg‘on.

Keyingi ikkita mulohaza esa "$(\exists x)$ $(x^2+y^2=16)$" bir o‘rinli predikatdan kvantorlar yordamida hosil qilingan. Bu predikat aynan rost predikat emas (chunki y=5 desak $(\exists x)$ $(x^2+y^2=16)$ kabi yolg‘on mulohaza hosil qilamiz), shuning uchun unga y bo‘yicha umumiylik kvantori bilan bog‘lansak yolg‘on mulohaza hosil qilamiz. Demak uchinchi mulohaza ham yolg‘on. Bu "$(\exists x)$ $(x^2+y^2=16)$" predikat aynan yolg‘on predikat ham emas (chunki y=0 desak $(\exists x)$ $(x^2+y^2=16)$ kabi rost mulohaza hosil qilamiz), shuning uchun unga y bo‘yicha mavjudlik kvantori bilan bog‘lansak rost mulohaza hosil qilamiz. Demak oxirgi mulohaza rost ekan.

5-misol. Ko‘rsatilgan to‘plamlarda berilgan quyidagi predikatlarning rostlik sohasini aniqlang:

a)"x 3ga karrali",M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}; b) "x 3 ga karrali", M={3,6,9,12}
v) "x 3 ga karrali", M={2,4,8}; g) "$x^2+4>0$ ", M=**R**;
d) "$\sin x>1$", M=R; e) "$x^2+x-6=0$ ", M=**R**;
j) " $\boldsymbol{x_1^2+x_2^2=0}$ ", $M_1=M_2=\mathbf{R}$; z)"$x_1<x_2$",$M_1=\{1,2,3,4,5\}$,$M_2=\{3,5,7\}$
i) "x_1, x_2 ning bo‘luvchisi", $M_1=M_2=\{2,3,4,6\}$;

k) "$x_1+x_2<0$", $M_1=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, $M_2=\{-3,1,2\}$;

Yechimi. k) Bu predikatning rostlik sohasi M_1 va M_2 to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi, ya’ni $M_1\times M_2=\{(-3;3), (-3;1), (-3;2), (-2;-3), (-2;1), (-2;2),$ $(-1;-3), (-1;-1), (-1;2), (0;-3), (0;1), (0;2), (1;-3), (1;1), (1;2), (2;-3), (2;1), (2;2), (3;-3),$ $(3,1), (3;2)\}$ to‘plamning qism ostisidan iboratdir, aniqrog‘i (x_1, x_2) juftliklar $(x_1\in M_1, x_2\in M_2)$ ichida $x_1+x_2<0$ shartni qanoatlantiruvchilari to‘plami bo‘ladi:

$R^+=\{(-3;-3), (-3;1), (-3;2), (-2;-3), (-2;1), (-1;-3), (0;-3), (1;-3), (2;-3)\}$

6-misol. R da berilgan quyidagi bir o‘rinli predikatlar rostlik sohalarini koordinata to‘g‘ri chizig‘ida ifodalang:

a) $x<3$	e) $\lvert x+3\rvert <2$
b) $\lvert x\rvert =4$	j) $x^2+6x-16\leq 0$
v) $\lvert x\rvert <2$	z) $x^2\geq 0$
g) $\lvert x\rvert >2$	i) $\lvert x+2\rvert <5$
d) $\lvert x-4\rvert \geq 1$	k) $\lvert x-1\rvert \leq\lvert 2x+4\rvert$

Yechimi. i) Predikatning rostlik sohasi $\lvert x+2\rvert <5$ tengsizlikning echimlari to‘plamidan iboratdir. Shuning uchun bu tengsizlikni echamiz: $\lvert x+2\rvert <5$ tengsizlikdan $-5<x+2<5$ qo‘sh tengsizlik hosil qilamiz. Bu qo‘sh tengsizlik echimlari to‘plami (-7,3) intervaldan iboratdir. Demak

$R^+=(-7,3)$. Buni to‘g‘ri chiziqda ko‘rsatish o‘quvchining e’tiboriga havola etiladi.

7-misol. R da berilgan quyidagi ikki o‘rinli predikatlar rostlik sohalarini koordinatalar tekisligida ifodalang:

a) $x=y$; b) $\lvert x\rvert =\lvert y\rvert$; v) $x^2+y^2=9$; g) $x^2+y^2-4x+6y+14=0$;

d) $x^2\leq y$; e) $y=\dfrac{1}{x}$; j) $2x+6y<3$; z) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$;

i) $xy=0$; k) $x^2=y^2$.

Yechimi. k) Bu predikatni R(x,y) orqali belgilaymiz va uning rostlik sohasini axtaramiz:

$R^+=\{(x,y):\ x^2=y^2\}=\{(x,y):\ x^2-y^2=0\}=\{(x,y):\ (x-y)(x+y)=0\}=\{(x,y):\ x-y=0$ yoki $x+y=0\}=\{(x,y):x-y=0\}\cup\{(x,y):x+y=0\}=\{(x,y): y=x\}\cup\{(x,y): y=-x\}=P_1^+\cup P_2^+$

Hosil bo‘lgan birlashmadagi birinchi P_1^+ to‘plam birinchi va uchinchi chorak bissektrisalarini bildiruvchi to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar to‘plamini, ikkinchisi P_2^+ esa ikkinchi va to‘rtinchi chorak bissektrisalarini bildiruvchi to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar to‘plamini bildiradi.

2.6-§ TEOREMALARNING TUZILIShI VA ULARNI TURLARI

Biror bir fanni aksiomatik qurish uchun ba’zi bir tushunchalar, mosliklar va munosabatlar ta’rifsiz qabul qilinadi. Bu ta’rifsiz qabul qilingan tushunchalar, mosliklar va munosabatlarning hammasini boshlang‘ich tushunchalar deymiz.

1-misol.1-teorema. Agar berilgan son raqamlari yig‘indisi 3 (9) ga bo‘linsa, bu son 3 (9) ga bo‘linadi. Bu teorema natural sonlar to‘plamida ikkita predikatni implikatsiyasidan iborat ekanligini ko‘rish mumkin. Agar x - ixtiyoriy natural son bo‘lsa, A(x) - «x sonning raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘linadi», V(x) - «x son 3 ga bo‘linadi». Bu holda yuqoridagi 1-teoremani A(x) Þ V(x) ko‘rinishda yozish mumkin, bu impilinatsiya ixtiyoriy x natural son uchun rost bo‘ladi. Shunday qilib berilgan 1-teoremani quyidagicha yozish mumkin.

$$\forall(x\in N)(A(x)\Rightarrow B(x)) \quad (1)$$

2-misol. 2-teorema. Agar to‘rtburchak qarama-qarshi tomonlari teng bo‘lsa, u holda bu to‘rtburchak parallelogram bo‘ladi.

Bu teorema to‘rtburchaklar to‘plamida ikkita predikatlarning implikatsiyasidan iborat bo‘ladi.

Barcha to‘rtburchaklar to‘plamini X orqali ifodalaylik, A(x) - «x to‘rtburchakda qarama-qarshi tomonlari teng», V(x) - «x to‘rtburchak parallelogram». Bu holda berilgan 2-teoremani quyidagicha yozish mumkin.

$$\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x)) \qquad (2)$$

Yuqoridagilardan ko‘rinadiki, har qanday teoremani ikkita predikatlarning implikatsiyasi ko‘rinishda yozish mumkin ekan, ya’ni

$$\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$$

Bu teorema quyidagicha tuzilishga ega bo‘ladi.

1. A(x) - teoremaning sharti
2. V(x) - teoremaning xulosasi
3. $\forall(x\in X)$- teoremaning tushuntirish qismi, bu erda X, A(x) va B (x) predikatlarni rostlik sohasi (aniqlash sohasi).

Ba’zi teoremalar «Agar...bo‘lsa, ... bo‘ladi» ko‘rinishida bo‘lmasligi mumkin.

3-misol: 3-teorema. Rombning dioganallari o‘zaro perpendikulyar. Bu teoremani quyidagicha ifodalash mumkin.

3-teorema. Agar to‘rtburchak romb bo‘lsa, uning diognallari perependikulyar bo‘ladi.

Bu teoremani predikatlar yordamida quyidagicha yozish mumkin.

A(x) - "x - to‘rtburchak romb"

V(x) - "x - to‘rtburchakning dioganallari o‘zaro perependikulyar".

X - barcha to‘rtburchaklar to‘plami. Bu teoremani ifodasi $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$\forall(x\in X)(B(x)\Rightarrow A(x))$ teorema $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ teoremaga **teskari** teorema deyiladi. Bulardan ko‘rinadiki, berilgan teoremada shartini xulosasi bilan almashtirilsa, unga teskari teorema hosil bo‘ladi.

4-misol. 4-teorema. Agar natural son 3(9) ga bo‘linsa, uning raqamlari yig‘indisi 3(9)ga bo‘linadi.

Bu teorema 1-teoremaga teskari teoremadir.

$\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ teoremada V (x) shart A(x) uchun **zaruriy** shart. A (x) esa V(x) uchun **etarli** shartdir.

Agar $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ va $\forall(x\in X)(B(x)\Rightarrow A(x))$ teoremalar rost bo‘lsa, uni $\forall(x\in X)(A(x)\Leftrightarrow B(x))$ ko‘rinishda yozamiz. Bunda A(x) va V (x) shartlar biri ikkinchisiga **zarur va etarlidir**.

$\forall(x\in X)(\overline{A(x)}\Rightarrow \overline{B(x)})$ teorema $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ teoremaga **qarama-qarshi** teorema deyiladi.

$\forall(x\in X)(\overline{B(x)}\Rightarrow \overline{A(x)})$ va $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ teoremalar bir-biriga **qarama-qarshisiga teskari** teoremalar deyiladi. $\forall(x\in X)(A(x)\Rightarrow B(x))$ teoremani rostligini isbotlash uchun, $\forall(x\in X)(\overline{B(x)}\Rightarrow \overline{A(x)})$ teoremaning rostligini isbotlansa. Teoremani isbotlashning bu usulini teskaridan faraz qilib isbotlash usuli deyiladi.

5-misol. Quyidagi teoremalarga teskari bo‘lgan tasdiqlarni ifodalang. Hosil bo‘lgan teskari tasdiqlardan qaysi biri rost, ya’ni teorema bo‘la oladi?

a) Agar ratsional sonlar ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda u fundamentaldir;

b) Agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda u chegaralangandir;

v) Agar uchburchak teng yonli bo‘lsa, u holda uning asosiga yopishgan burchaklari tengdir;

g) Agar to‘rtbo‘rchak romb bo‘lsa, u holda uning diagonallari o‘zaro perpendikulyardir;

d) Parallelogramm diagonollari kesishish nuqtasi uning simmetriya markazidir;

e) Agar qo‘shiluvchilarning har biri juft son bo‘lsa, u holda yig‘indi ham juft sondir;

j) Agar to‘rtbo‘rchakka aylana ichki chizish mumkin bo‘lsa, u holda bu to‘rtburchak rombdir;

z) Agar parallelogramm romb bo‘lsa, u holda uning diagonallari o‘zaro perpendikulyardir;

i) Agar $ax^2+bc+c=0$ ($a\neq0$) kvadrat tenglamaning ozod hadi s nolga teng bo‘lsa, u holda bu tenglamaning ildizlaridan biri nolga tengdir;

k) Agar ketma-ketlik monoton va chegaralangan bo‘lsa, u holda bu ketma- ketlik limitga ega.

<u>**Yechimi:**</u> a) "Agar A bo‘lsa, u holda V” ko‘rinishdagi (buni "A$\rightarrow$V" kurinishda belgilaymiz) tasdiqlar uchun "Agar V bo‘lsa, u holda A” ko‘rinishdagi tasdiq (buni "V$\rightarrow$A” ko‘rinishda belgilaymiz) teskari hisoblanadi. X$\rightarrow$Y va Y$\rightarrow$X formulalar teng kuchli bo‘lmagani sababli A$\rightarrow$B va B$\rightarrow$A mulohazalar bir paytning o‘zida rost bo‘lishi shart emas. Boshqacha qilib aytganda A$\rightarrow$V teorema bo‘lsa, ya’ni rost mulohaza bo‘lsa, u holda V$\rightarrow$A teorema bo‘lmasligi ham mumkin. Berilgan misolda xuddi shunday hol yuz beradi. Berilgan tasdiqqa teskari tasdiq “Agar ratsional sonlar ketma-ketligi fundamental bo‘lsa, u holda u yaqinlashuvchidir” ko‘rinishda ifodalanadi va bu teorema bo‘lolmaydi. Masalan *e* soniga yaqinlashuvchi $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ formula bilan aniqlanuvchi

ratsional ketma-ketlik fundamental, lekin ratsional sonlar to‘plamida yaqinlashuvchi emas.

6-misol. 2.19-mashqda keltirilgan tasdiqlar uchun qarama-qarshi bo‘lgan tasdiqlarni ifodalang. Ulardan qaysi birlari to‘g‘ri, ya’ni teorema bo‘la oladi? Bu savolga berilgan javoblarni 2.19-mashqda berilgan ikkinchi savolga berilgan javoblar bilan solishtiring. Ular mos tushadimi? (Agar qandaydir ikkita javob ustma-ust tushmasa, ulardan biri noto‘g‘ridir).

Yechimi: a) $A \rightarrow V$ ko‘rinishdagi tasdiqqa qarama-qarshi bo‘lgan tasdiq ko‘rinishi $\rceil A \rightarrow \rceil V$ bo‘ladi. $X \rightarrow Y$ va $\rceil X \rightarrow \rceil Y$ formulalar teng kuchli emas. Shuning uchun $A \rightarrow V$ teorema bo‘lsa, u holda $\rceil A \rightarrow \rceil V$ teorema bo‘lmasligi mumkin. Biroq kontrapozitsiya qonuniga asosan $Y \rightarrow X \cong \rceil X \rightarrow \rceil Y$ bo‘lgani uchun berilgan tasdiqqa teskari bo‘lgan $V \rightarrow A$ tasdiq va berilgan tasdiqqa qarama-qarshi bo‘lgan $\rceil A \rightarrow \rceil V$ tasdiqlar bir paytning o‘zida teorema bo‘lishi yoki bir paytning o‘zida teorema bo‘lmasligi mumkin. Shuning uchun 2.19-dagi tasdiqlar uchun teskari bo‘lgan va qarama-qarshi bo‘lgan tasdiqlar ustma-ust tushishi kerak. Berilgan misoldagi tasdiqqa qarama-qarshi bo‘lgan tasdiq “ Agar ratsional sonlar ketma-ketligi yaqinlashmasa, u holda u fundamental ketma-ketlik emasdir” ko‘rinishda ifodalanadi.

7-misol. Quyida berilgan har bir teorema uchun barcha teoremalarni toping, ya’ni berilgan tasdiq uchun rost bo‘lgan teskari va qarama-qarshi bo‘lgan tasdiqlarni (agar ular mavjud bo‘lsa), qarama-qarshisiga teskari bo‘lgan tasdiqlarni toping.

a) Agar $a=0$ va $b=0$ bo‘lsa, u holda $a^2+b^2=0$ (a va b lar haqiqiy sonlar).

b) Agar a butun son b butun songa bo‘linsa, hamda b butun son s butun songa bo‘linsa, u holda a butun son s butun songa bo‘linadi.

v) Agar ab ko‘paytma s ga bo‘linsa va a son s ga bo‘linmasa, u holda b son s ga bo‘linadi.

g) Agar a son s ga bo‘linsa va b son s ga bo‘linsa, u xolda $a+b$ ham s ga bo‘linadi.

d) Agar aylanaga ikkita burchak ichki chizilgan bo‘lsa va ular bitta yoyga tiralgan bo‘lsalar, u holda bu burchaklar o‘zaro tengdir.

e) Agar to‘rtburchakda ikkita qarama-qarshi tomonlar teng bo‘lib, parallel bo‘lsa, u holda bu to‘rtburchak parallelogrammdir.

j) Agar ikkita vatarlar o‘zaro teng bo‘lgan doiralarga tegishli bo‘lib, o‘zaro teng bo‘lsalar, u holda bu vatarlar doira markazlaridan bir xilda uzoqlashgandirlar.

z) Agar α tekislik o‘zaro parallel bo‘lgan ikki to‘g‘ri chiziqning bittasiga perpendikulyar bo‘lsa, u holda bu tekislik ikkinchi to‘g‘ri chiziqqa ham perpendikulyardir.

i) Agar α tekislik β tekislikka perpendikulyar bo‘lgan a to‘g‘ri chiziq orqali o‘tsa, u holda α va β tekisliklar o‘zaro perpendikulyardirlar.

8-misol. Quyida berilgan har bir teorema uchun barcha teskari va qarama-qarshi teoremalarni toping, hamda teoremaga teskari bo‘lgan teoremaning qarama-qarshisini toping.

a) Agar butun son 12 ga bo‘linsa, u holda bu son 3 ga ham, 4 ga ham bo‘linadi;

b) Agar to‘g‘ri to‘rtburchak kvadrat bo‘lsa, u holda uning diagonallari o‘zaro perpendikulyar va burchaklarni teng ikkiga bo‘ladi;

v) Agar parallelogramm kvadrat bo‘lsa, u holda uning diagonallari teng, o‘zaro perpendikulyar hamda kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi;

g) Agar piramida asos tekisligiga parallel bo‘lgan tekislik bilan kesilgan bo‘lsa, u holda uning yon qirralari va balandligi bu kesim orqali proportsional qismlarga ajraydi, bu holda kesimda xosil bo‘lgan ko‘pburchak piramida asosidagi ko‘pburchakka o‘xshash bo‘ladi, hamda kesim yuzi va piramida asosining yuzi nisbati ularning piramida uchigacha bo‘lgan masofalari nisbatining kvadratiga teng bo‘ladi.

<u>Yechimi:</u> a) Bu teoremaning mantiqiy strukturasi $A\to(B_1\wedge B_2)$ formula orqali ifodalanadi. $A\to(V_1\wedge V_2)\cong(A\to V_1)\wedge(A\to V_2)$ teng kuchlilik o‘rinli bo‘lgani uchun berilgan teorema ikkita teoremaga ajraydi: $A\to V_1$ va $A\to V_2$. Shunga ko‘ra teskari teoremalar quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladilar: 1) $(V_1\wedge V_2)\to A$; 2) $V_1\to A$; 3) $V_2\to A$, bu erda 1) forma 2) formaning, ham 3) formaning xulosasi bo‘ladi. Agar 2) va 3) formalar bir paytda rost bo‘lsalar, u holda ularni bitta forma ko‘rinishda ifodalash mumkin: $(V_1\vee V_2)\to A$.

Bizning holda yagona teskari teorema $(V_1\wedge V_2)\to A$ ga ega bo‘lamiz: “Agar butun son 3 ga ham, 4 ga ham bo‘linsa, u holda bu son 12 ga bo‘linadi”. Qarama-qarshi teoremalarning ko‘rinishlari quyidagichadir: $\rceil A\to\rceil(V_1\wedge V_2)$, $\rceil A\to\rceil V_1, \rceil A\to\rceil V_2$. Bizning holda qarama-qarshi tasdiqlardan faqatgina $\rceil A\to(\rceil V_1\vee V_2)$ ko‘rinishdagisi bo‘ladi: “Agar butun son 12 ga bo‘linmasa, u holda bu son yo 3 ga bo‘linmaydi, yoki 4 ga bo‘linmaydi”.

Nihoyat, teskarisiga qarama-qarshi bo‘lgan teorema $\rceil(V_1\wedge V_2)\to\rceil A$ yoki $(\rceil V_1\vee\rceil V_2)\to\rceil A$ ko‘rinishga ega. Bizning holda: «Agar butun son yo 3 ga bo‘linmasa, yoki 4 ga bo‘linmasa, u holda bu son 12 ga bo‘linmaydi”.

9-**misol.** Quyidagi teoremalarning mantiqiy strukturasini aniqlang va ularga teskari va qarama-qarshi bo‘lgan barcha teoremalarni toping.

a) Agar to‘rtburchakda qarama-qarshi tomonlar o‘zaro parallel bo‘lsa, u holda ular o‘zaro tengdir;

b) Agar to‘g‘ri chiziq ikkita tekislik kesishish chizig‘iga parallel bo‘lsa, u holda bu to‘g‘ri chiziq tekisliklarning har biriga ham paralleldir;

v) α tekislik va undan tashqarida o‘tgan a to‘g‘ri chiziq parallel bo‘ladi, agarda α tekislikda yotuvchi va a to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lsa;

g) Agar ikkita kesishuvchi tekisliklardan birida yotuvchi va ikkinchi tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lsa, u holda bu tekisliklar paralleldir;

d) a to‘g‘ri chizik α tekislikka perpendikulyar bo‘ladi, agarda a to‘g‘ri chiziq α tekislikni kesib o‘tsa, hamda α tekislikda a to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan va o‘zaro parallel bo‘lmagan ikkita to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lsa.

10-**misol.** Quyidagi teoremalar berilgan: «Bitta doirada yoki tengdosh bo‘lgan doiralarda: 1) katta vatar markazga yaqinroqdir; 2) teng vatarlar markazdan teng uzoqlashgandirlar; 3) kichik vatar markazdan uzoqroqda joylashgandir”. Bu teoremalarga teskari bo‘lgan tasdiqlarning o‘rinli ekanligini to‘la diz’yunktsiya printsipidan foydalanib isbotlang va teskari teoremalarni ifodalang.

11-misol. Quyidagi uchta teoremalarga teskari bo‘lgan teoremalarni ifodalang: «Musbat son *a* uchun: 1) agar *b*<c bo‘lsa, u holda *ab*<*a*c; 2) agar *b*=c bo‘lsa, u holda *ab*=*a*c; 3) agar *b*>c bo‘lsa, u holda *ab*>*a*c”. Teskari teoremalar uchun isbot zaruriyati bormi? Javobingizni asoslang.

III BOB. MOSLIK VA MUNOSABATLAR

3.1-§. AKSLANTIRIShLAR VA ULARNING TURLARI. TENG QUVVATLI TO‘PLAMLAR

Aytaylik, **A** va **B** lar ixtiyoriy tabiatli elementlarning bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlari bo‘lsin. Agar **A** to‘plamning har bir elementiga biror **f** qonun yoki qoida bo‘yicha B to‘plamning bitta va faqat bitta elementi mos (to‘g‘ri) keltirilgan bo‘lsa, **A** to‘plamni B to‘plamga **f akslantirish** aniqlangan deyiladi, uni **f:A→B** yoki $A \xrightarrow{f} B$ ko‘rinishda belgilanadi. Agar **f:A→B** akslantirish **a** $\in$ **A** ni **b** $\in$ **B** ga mos qo‘ysa, **b** ni **f** akslantirishda **a** ning **aksi** (obrazi), **a** ni **f** akslantirishda **b** ning **asli** (proobrazi) deyiladi va **b=f(a)** ko‘rinishda belgilanadi, **A** to‘plam **f** akslantirishning **aniqlash** sohasi **f(A)={b: b=f(a), a** $\in$ **A, }** $\subset$ **B** esa **f** ning **o‘zgarish** sohasi deyiladi, $\{(a, f(a)) : a \in A\}$ to‘plamni f akslantirishning **grafigi** deyiladi.

1-misol. Quyidagi funktsiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1) $f(x) = 5x - 2;$ 2) $f(x) = \frac{7}{x};$

3) $f(x) = \frac{5x}{x-3};$ 3) $f(x) = \frac{3x^2}{(x+1)(x-2)};$

5) $f(x) = \sqrt{x-2} + (x^3 + 2x + 1);$

6) $f(x) = \log_3 \frac{x+1}{x-2} + (x+1);$ 7) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x-1};$

8) $f(x) = \log_3(x-5) + \sqrt{x-2};$ 9) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[3]{x^2-1};$

10) $f(x) = \frac{1}{\log_2 x} + \sqrt{1+\sin^2 x}.$

2-misol. 1) funktsiya f(x)=3x+5 tenglama bilan berilgan. Uning aniqlanish sohasi {-1,-2,0,1,2} bo‘lsa, uni o‘zgarish (qiymatlar) sohasini toping.

2) $f(x)=x^2+4$ funktsiya qiymatlar sohasini toping bunda o‘zgarish sohasi X:

a) X=**R**, b) X=(-∞;0] v) X=[-4;4] g) X=[-1;3]

3-misol. 1) f(x)=- 2x+7 funktsiyaning grafigini yasamasdan, bu funktsiyaning grafigi M nuqtadan o‘tish yoki o‘tmasligini aniqlang:

a) M(2;3); b) M(-1,7; 10,4); v) M(0,4;6); e) M(5;3)

2) a) f(x)=2x- 1, b) $f(x)=x^2- 9$ v) $f(x)=\frac{3}{x}$ funktsiyaning grafigini yasang.

3) f(x)=kx+1 funktsiya grafigi M(4;9) nuqtadan o‘tishi ma’lum bo‘lsa, k koeffitsientning qiymatini toping.

4-misol. 1) f(x)=2x+5 funktsiyaga teskari funktsiyani toping.

2) $f(x)=\log_2 x$ funktsiyaga teskari funktsiyani toping.

5-misol. A va V to‘plamlar teng quvvatli ekanligini isbotlang:

a) A-uchburchak tomonlari to‘plami, V-uchburchak burchaklari to‘plami;

b) A-«Muzaffar» so‘zidagi harflar to‘plami, V- «53467768» sondagi raqamlar to‘plami;

v) A-barcha butun sonlar to‘plami, V- barcha ratsional sonlar to‘plami;

6-**misol.**Barcha butun sonlar to‘plamini sanoqli ekanligini isbotlang.

3.2-§. BINAR MUNOSABATLAR

Matematikada ko‘pincha biror to‘plamlarning elementlari orasidagi qandaydir munosabatlarni tekshirishga to‘g‘ri qeladi. Masalan: a ning v ga tengligi, teng emasligi, katta, kichikligi, bo‘linish, bo‘linmasligi, ikki to‘g‘ri chiziqlarning paralelligi, perpendikulyarligi munosabatlari. Ularni mos ravishda:

a=b, a¹b, a<b, a>b, a||b, a^b, ... ko‘rinishda belgilanadi.

1-Ta’rif. $A_1,A_2,...,A_n$ ixtiyoriy tabiatli elementlarning bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlari bo‘lsa, $A_1 ´ A_2 ´ ... ´ A_n$ to‘g‘ri ko‘paytmaning har qanday **S** qism to‘plamini $A_1,A_2,...,A_n$ to‘plamlarning elementlari orasida aniqlangan **n-ar** (**n** o‘rinli) munosabat deyiladi.

1-Misol. 1. **A** - tekislikdagi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami bo‘lsin. Ixtiyoriy ***a,b*** to‘g‘ri chiziqlar uchun

a) ***(aSb)=(aïïb)*** bo‘lsa, ***S,A*** dagi parallelik munosabati:

Yechimi. 1) ***"(aÎA) aïïb*** (refleksiv)

2) ***("a,bÎA) aêêb Þ aêêb*** (simmetrik)

3) ***("a,b,cÎA (aêêbÙbêêc) Þ aêêc*** (tranzitiv).

b) ***aSb=a^b*** bo‘lsa, **S** perpendikulyarlik munosabati:

Yechimi. 1) ***"(aÎA) ù (a ^a)*** (antirefleksiv);

2) ***"(a,bÎA) a^b Þ b^a*** (simmetrik) bo‘ladi:

2. ***A=N, "(a,bÎN) a tb =(a=b)*** tenglik munosabati:

Yechimi. 1) ***"(aÎN) a=a*** (refleksiv);

2) ***"(a,bÎN, a=b Þ b=a*** (simmetrik);

3) ***"(a,bÎN) (a=b Ù b=a) Þ a=b*** (antisimmetrik)

4) ***"(a,b,cÎ N)(a=b Ù b=c) Þ a=c*** (tranzitiv) bo‘ldi.

3. ***A=R " (a,b Î R) atb= (a>b)*** tartib munosabati.

Yechimi. 1) ***"(aÎR)ù(a>a)*** (antirefleksiv);

2) *"(a,b Î R) a>b Þ ù(b>a)* (asimmetrik);

3) *"(a,b Î R) a¹b Þ ((a>b)Ú(b>a))* (bog‘langan);

4) *"(a,b,c Î R) ((a>b)Ù(b>c)) Þ (a>c)* tranzitiv bo‘ladi.

2-**misol.** *A=N, "(a,b Î N) a>b=($(n Î N), a=b+n)* u holda > munosabati:

1. $\forall(N \ni a)a \neq a+n$, $\rceil(a > a)$ (antirefleksiv)

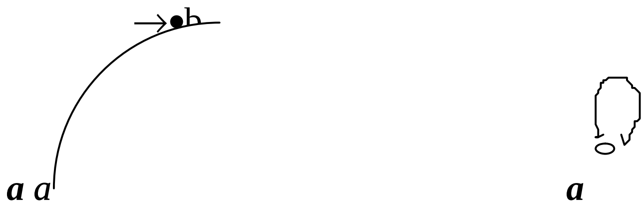
2. *"(a,b,c Î N) a>bÙ b>c Þ $(n,k Î N)*
*(a=b+nÙ b=c+k) Þ a=b+n = ((c+k)+n) = c+(n+k) Þ a>c (tra*nzitiv) bo‘ladi. Demak <**N**,>> kat’iy tartiblangan to‘plam.

∀(*a,b*∈ **N**) ***a¹b***, *$ (**n** Î N)* yoki ∃**(k Î N)(b=a+k)** bo‘lganligi uchun, ***a¹b Þ (a>bÚ b>a***) bo‘ladi. Demak, (**N**,>) - chiziqli tartiblangan to‘plam.

Tekislikda chekli sondagi nuqtalar va ularni tutashtiruvchi chiziqlardan tuzilgan figuralar graflar deyiladi. Grafni tashkil qilgan nuqtalar uchlari, uchlarini tutashtiruvchi chiziqlarni esa qirralari deyiladi. Uchlarini tutashtiruvchi chiziqlar to‘g‘ri yoki egri bo‘lishi mumkin, ikki qirrasini kesishgan nuqtasi grafning uchi bo‘lmasligi ham mumkin.

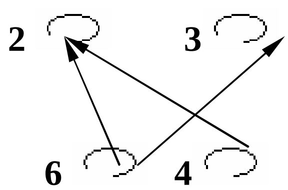
Agar grafning ikki uchini tutashtiruvchi qirrasi ma’lum yo‘nalishga ega bo‘lsa, uni orientirlangan graf deyiladi.

Chekli to‘plamda aniqlangan binar munosabatlarni orientirlangan graflar yordamida quyidagicha ifodalash mumkin: chekli **A** to‘plamning elementlarini tekislikdagi nuqtalar yordamida ifodalaymiz, **S** Ì $\mathbf{A^2}$ ga qarashli bo‘lgan (***a,b)*** juftliklarga, agar ***a ¹ b*** bo‘lsa, uchlari ***a*** va ***b*** nuqtalar bo‘lgan ***a*** dan ***b*** ga yo‘nalgan qirrani, (***a; a*** **)** juftlikka ma’lum yo‘nalishga ega bo‘lgan sirtmoqni (tugunni) mos ko‘yamiz. (1.6-chizma)



1.6 - chizma

3-misol. A={2,3,4,6} . To‘plamda aniqlangan
S={(2;2), (3;3), (4;4), (6;6),(6;2),(6,3), (4;2)}
binar munosabatni graf yordamida ifodalang (1.7.-chizma)



1.7.- chizma

4-misol. **N** to‘plamda aniqlangan quyidagi binar munosabatlar qanday xossaga ega ekanligini aniqlang, ularni aniqlanish va o‘zgarish sohalarini toping:

1. $S=\{(1;1),(2;2)\} \subset N^2$ 2. $S=\{(1;5)\} \subset N^2$
3. $S=\{(1;2), (2;1),(1;1),(2;2),(3;5),(5;3),(3;3),(5;5)\}$
4. $S=\{(1;3), (3;1), (4;5), (5;4)\} \subset N^2$ 5. $\forall(a,b\in N),\ aSb \Leftrightarrow b< 2a$;
6. $\forall(a,b\in N),\ aSb \Leftrightarrow a=b^2$; 7. $\forall(a,b\in N),\ aSb \Leftrightarrow a<b$;
8. $\forall(a,b\in N),\ aSb \Leftrightarrow a \le b$; 9. $\forall(a,b\in N),\ aSb \Leftrightarrow a-b=12$;
10. $\forall(a,b\in N),\ aSb \Leftrightarrow |a-b|=12$; 11. $\forall(a,b\in N),\ aSb \Leftrightarrow (a-b):10$;
12. $\forall(a,b\in N),\ aSb \Leftrightarrow a=b$.

5-misol. N_{10} to‘plamda bir vaqtda refleksiv va antirefleksif bo‘lmagan binar munosabatlar mavjudmi?

6-misol. N_1, N_2 , N_3 va N_n to‘plamlarning har birida nechtadan binar munosabatni aniqlash mumkin?

7-misol. N_{10} to‘plamda $\forall(a,b\in N_{10})$
1) $aSb \Leftrightarrow a-b=8$; 2) $aSb \Leftrightarrow b=a^2$
3) $aSb \Leftrightarrow a\cdot b=12$; 4) $aSb \Leftrightarrow b>a^2$
aniqlangan binar munosabatlarni aniqlanish va o‘zgarish sohalarini toping. Ularning har biri qanday xossalarga ega ekanligini toping va grafini yasang.

8-misol. N_3 to‘plamda aniqlangan
1) $S=\{(1,1) ,(2;1),(2;3), (3;3)\}$; 2) $T=\{(1;1), (2;1), (1;2), (2;2)\}$;
3) $R = \{(1;2), (1;3), (2;3)\}$.
munosabatlarga teskari S^{-1}, T^{-1}, R^{-1} munosabatlarni toping va grafini yasang:

9-misol. N_3 to‘plamda aniqlangan $S = \{(1;1), (2;3), (1;2)\}$ va
$T = \{(1;1), (1;3), (3;30\}$ binar munosabatlarni ko‘paytmasini toping va grafini yasang

10-misol. N_4 to‘plamda aniqlangan $S = \{(1;1),(2;3)\}, T=\{(1;2),(2;3),(3;4)\}$ munosabatlar uchun **ST, TS**, S^2, T^2 larni toping.

11-misol. N_5 to‘plamda 1) $\nabla=\{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4),(5;5)\}$
2) $S=\nabla\cup\{(1;2),(2;1),(3;5),(5;3)\}$, 3) $R=\nabla\cup\{(1;3),(3;1),(4;5),(5;4)\}$
4) $T = \nabla \cup \{(1;4), (4;1), (2;4), (4;2),(1;2), (2;1)\}$
binar munosabatlar berilgan:

a) har birini ekvivalentlik munosabati ekanligini isbotlang;

b) N_5 to‘plamni bu ekvivalentlik munosabatlariga ko‘ra ekvivalentlik sinflarga ajrating (faktor-to‘plamini toping);

v) har bir munosabatini grafini yasang.

12-misol. N_2 , N_3 , N_4 to‘plamlarning har birida nechtadan ekvivalentlik munosabati aniqlash mumkin?

13-misol. a) agar N_5 to‘plam $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3\}$, $A_3=\{4,5\}$ ekvivalentlik sinflarga ajratilgan bo‘lsa, N_5 to‘plamni bu ekvivalentlik sinflarga ajratuvchi evivalentlik munosabatini toping va uni grafini yasang:

b) yuqoridagi misolni N_6 , $A_1=\{1,3\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3=\{4,5,6\}$ bo‘lganda eching.

14-misol. N_5 to‘plamda aniqlangan $S=\{(1;1),(2;1),(3,2),(1;5),(4;4)\}$

S munosabatni noqat’iy tartib munosabatiga to‘ldiring.

15-misol. N_3 to‘plamda berilgan

1) **S={(1;2),(1;3),(1,4),(2;3),(4;2)},**
2) **T={(1;5),(2;3),(2,4),(2;6),(4;7)}**
3) **R={(1;2),(1;3),(1,4),(2;3),(2;4)}**

munosabatlardan qaysi biri tartib munosabati bo‘ladi?

16-misol. **A** to‘plamda aniqlangan ixtiyoriy **S** binar munosabat uchun **SÇS**$^{-1}$ va **SÈS**$^{-1}$ larni simmetrik munosabatlar ekanligini isbotlang.

17-misol. Agar **A** to‘pldamda aniqlangan **S** binar munosabati refleksiv, tranzitiv bo‘lsa, **SÇS**$^{-1}$ ni ekvivalentlik munosabati ekanligini isbotlang.

IV-bob. ALGEBRAIK AMALLAR
4.1-§ALGEBRAIK AMALLAR VA ULARNING TURLARI

1-ta’rif. A≠∅ ixtiyoriy tabiatli elementning to‘plami, n manfiy bo‘lmagan butun son bo‘lsin. U holda ixtiyoriy f:A^n→A akslantirish A to‘plamda aniqlangan **n o‘rinli** yoki **n-ar algebraik amal**. n sonni esa f algebraik amalning **rangi** deyiladi.

A to‘plamda aniqlangan hol o‘rinli amal deb, A to‘plamning qandaydir elementini tayinlashni (ajratishni) aytiladi.

2-ta’rif. Agar f:A^n→A akslantirishning aniqlanish sohasi A^n ning to‘g‘ri qismidan iborat bo‘lsa, u holda f ni A to‘plamda aniqlangan **qisman** algebraik amal deyiladi.

Rangi 0,1 va 2 bo‘lgan algebraik amallarni mos ravishda **nolar, unar** va **binar** algebraik amallar deyiladi. Unar amalni operator ham deb ataladi.

1-misol. Quyidagi to‘plamlarda +, -, · ,: amallarning qaysi biri algebraik amal bo‘ladi. Agar algebraik amal bo‘lsa, ular kommutativ, assotsiativ bo‘ladimi?

1) N; 2) 2N={2n:nÎN}; 3) T={2n-1: nÎN};
4) Z; 5) 2Z={2n:nÎZ}; 6) Q; 7) R;
8) R\{0}; 9) R$^+$={x:xÎR, x>0}; 10) R\Q; 11){0};
12) {1}; 13) {0,1}. **14) nZ=**$\{na : a \in Z\}$

2-misol. Agar **A_1={0,1}, A_2={0,1,2}, A_3={0,1,2,3}** to‘plamlarda ∗ amal mos ravishda quyidagi Kelli jadvali yordamida berilgan bo‘lsa, uni kommutativ va assotsiativ ekanligini isbotlang.

1)

∗	0	1
0	0	1
1	1	0

2)

∗	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

3)

∗	0	1	3
0	0	1	3
1	1	2	0
2	2	3	1
3	3	0	2

3-misol. $\mathbf{R^+=\{x:x \in R,\ x>0\}}$ to‘plamda aniqlangan quyidagilarning qaysi biri amal bo‘ladi? Agar amal bo‘lsa, ular kommutativ va assotsiativ bo‘ladimi?

1) $a*b=\dfrac{a+b}{2}$; 2) $a*b=a+b-1$; 3) $a*b=a\cdot b^2$;

4) $a*b=a^b$; 5) $a*b=\sqrt{a\cdot b}$; 6) $a*b=\log_a b$

7) $a*b=\max\{a,b\}$; 8) $a*b=\min\{a,b\}$;

9) $a*b=|a-b|$; 10) $a*b=a$

4-misol. $A=\{a+b\sqrt{2}:a,b\in Z\}$ to‘plam qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan yopiq bo‘ladimi, bu to‘plamda ko‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan neytral elementlar mavjudmi?

5-misol. Ikkitadan kam bo‘lmagan elementga ega bo‘lgan **E** to‘plamda $\circ$ amal $\boldsymbol{a\circ b=b}$ tenglik bilan aniqlangan bo‘lsa, **E** to‘plmda $\circ$ amalga nisbatan neytral element mavjud emasligini isbotlang.

6-misol. **N** to‘plamda $\boldsymbol{a\circ b=a^b}$ amalga nisbatan chap va o‘ng neytral elementlar mavjudmi?

7-misol. **Q** to‘plamda aniqlangan $\boldsymbol{a\circ b}=\dfrac{ab}{2}$ amal kommutativ va assotsiativ ekanligini isbotlang. Bu amalga nisbatan **Q** to‘plamda neytral element mavjudmi? $\boldsymbol{a}=8$ elementga teskari elementni toping.

8-misol. Quyidagi algebralarning qaysilari yarimgruppa, qaysilari monoid, qaysilari gruppa bo‘ladi.

1) (Z; +); 2) (Z; ⋅); 3) (Q; +); 4) (Q;⋅); 5) (R;+); 6) (R;+);

7) (Z \{0}; ⋅); 8) (Q\{0}; ⋅); 9) (R \{0};⋅); 10) (n Z,+)

bu erda **n ∈ N; 11) ({-1;1}; ⋅); 12 ({a^x; x ∈ R};⋅),** bu erda $\boldsymbol{a\in R,\ a>0}$;

4.2-§ YARIMGRUPPA, MONOID VA GRUPPALAR

Aytaylik A≠∅ to‘plam, ∗ - A to‘plamda aniqlangan binar amal bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar A to‘plamda aniqlangan ∗ binar amal assotsiativ bo‘lsa, ya’ni ∀(a,b∈A), (a∗b)∗c=a∗(b∗c) bo‘lsa, u holda A **yarimgruppa** deyiladi. Agar ∗ amal + (qo‘shish) amali bo‘lsa, additiv yarimgruppa, · (ko‘paytirish) bo‘lsa, A - **multiplikativ yarimgruppa** deyiladi.

Agar ∗ amal kommutativ bo‘lsa, ya’ni ∀(a,b∈A), a∗b=b∗a bo‘lsa, A ni **kommutativ**, agar A chekli bo‘lsa, A ni **chekli yarimgruppa** deyiladi.

$$\forall(a,x,u\in A),\ (a*x=a*u \Rightarrow x=u) \text{ va } (x*a=u*a \Rightarrow x=u)$$

bo‘lsa, u holda A ni qisqartirishga ega bo‘lgan yarimgruppa deyiladi.

1-**misollar**. 1. M≠∅, A={φ: φ: M→M}, ∗ - akslantirishlarning ko‘paytirish (kompozitsiyasi) amalidan iborat bo‘lsin. U holda A yarimgruppa bo‘ladi. CHunki akslantirishlarni ko‘paytirish amali assotsiativlik xossasiga ega.

1. A={e,a} ikki elementli to‘plam bo‘lib, unda aniqlangan ∗ amal Keli jadvali bilan berilgan bo‘lsin, u holda A yarimgruppa bo‘ladi. Lekin u qisqartirishga ega

bo‘lmaydi, chunki $(a*e=a*a)\wedge(e*a=a*a)$ munosabatlardan $a=e$ bo‘lishi kelib chiqmaydi.
2.

*	e	a
e	e	a
a	a	a

2-misol. 1) $(Z[\sqrt{2}];\ +;0)$, $Z[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2}:\ a,b\in Z\}$; $(Q[\sqrt{2}];+0)$, $Q[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}:\ a,b\in Q\}$ algebralarni gruppa ekanligini isbotlang.

4) agar $K=\left\{\begin{pmatrix} a, b \\ 2b, a\end{pmatrix}: a,b\in Q, a^2+b^2\neq 0\right\}$ bo‘lsa, **(K; $\cdot$,1)** algebraik sistemani gruppa ekanligini isbotlang.

5) agar $K=\left\{\begin{pmatrix} a, b \\ -b, a\end{pmatrix}: a,b\in Q, a^2+b^2\neq 0\right\}$ bo‘lsa **(K; $\cdot$,1)**algebraik sistemani gruppa ekanligini isbotlang.

6) agar $\mathbf{Q_0 = Q}\backslash\{0\}$ to‘plamda $\circ$ binar amal quyidagicha, ya’ni

$\forall(a,b\in Q_0)\ a\circ b=\frac{a\circ b}{2}$, kabi aniqlangan bo‘lsa, $(\mathbf{Q_0};\circ,2)$ algebraik siste-mani gruppa ekanligini isbotlang.

3-misol. 1) Agar $G=(G;\ \circ,1)$ gruppaning ixtiyoriy a elementi uchun $a^2=1$ shart bajarilsa, **G** ni kommutativ gruppa ekanligini isbotlang.

2) agar **G=(G; $\circ$,1)** gruppa bo‘lsa, u holda $\forall(a,b\in G)\ (a\cdot b)^{-1}b^{-1}\cdot a^{-1}$ ekanligini isbotlang.

4-misol. Agar $G=\{e,a,b\}$ va $F=\{e,x,y,z\}$ to‘plamlar amallar mos ravishda quyidagi Keli jadvallari bilan berilgan bo‘lsa, bu to‘plamlarni shu amallarga nisbatan Abel gruppasi bo‘lishini isbotlang:

·	**e**	***A***	**b**
E	**e**	***A***	**b**
a	***a***	**B**	**e**
B	**b**	**E**	***a***

·	**e**	**x**	**y**	**z**
e	**e**	**x**	**y**	**z**
x	**x**	**y**	**z**	**e**
y	**y**	**z**	**e**	**x**
z	**z**	**e**	**x**	**v**

5-misol. Aytaylik $F=\left\{f_1(x)=x,\ f_2(x)=-x,\ f_3(x)=\frac{1}{2},\ f_4(x)=-\frac{1}{x}\right\}$

R$\backslash\{0\}$ to‘plamda aniqlangan funktsiyalar to‘plamida amal

$(f_i\cdot f_j)(x)=f_i(f_j(x))$ **i,j=1,2,3,4** berilgan bo‘lsin. U holda **(F; $\cdot$; f_1)** algebraik sistemani gruppa ekanligini isbotlang. Bu amal uchun Keli jadvalini tuzing.

6-misol. Aytaylik $E=\left\{f_0=x,\ f_1=\frac{1}{x},\ f_2=1-x;\ f_3=\frac{x}{x-1},\ f_4=\frac{x-1}{x}\right\}$ **R\{0,1}** to‘plamda aniqlangan funktsiyalar to‘plamida amal **$(f_i\cdot f_j)(x)=f_i(f_j(x))$ i,j=0, 1,2,3,4,5** ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. U holda **$(E;\cdot;f_0)$** algebraik sistemani gruppa ekanligini isbotlang. Bu amal uchun Keli jadvalini tuzing.

7-misol. 1) **(2 Z;+;0)** gruppa **(Z; +, 0)** gruppaning qism gruppasi ekanligini isbotlang.

2) **$(\{2^x : x\in Z\};\cdot;1)$** gruppa **$(Q\backslash\{0\};\cdot;1)$** gruppaning qism gruppasi ekanligini isbotlang.

3) **(Z; + ; 0)** gruppa $(Z[\sqrt{2}];+,0)$ gruppaning qism gruppasi ekanligini isbotlang.

4.3-§. HALQA VA MAYDONLAR

Aytaylik Ye bo‘sh bo‘lmagan to‘plam. +, · undagi qo‘shish va ko‘paytirish amallari bo‘lsin.

1-TA’RIF. Agar Ye to‘plamda aniqlangan qo‘shish va ko‘paytirish amallari quyidagi aksiomalarni qanoatlantirsa Ye ni **halqa** deyiladi,

Ya’ni:

1. $\forall(a,b,c\in E)\ a+(b+c)=(a+b)+c,$ **2)** $\forall(a,b\in E)\ a+b=b+a$

3. $\forall(0\in E)\ \forall(a\in E)\ a+0=a,$ **4)** $\forall(a\in E)\exists(-a)\in E\ a+(-a)=0$

5) $\forall(a,b,c\in E)\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)c,$

6) $\forall(a,b,c\in E)\ a(b+c)=ab+ac,\ (b+c)ba+ca$

Agar Ye halqada 7. $\forall(a,b,c\in E)\ a\cdot b=b\cdot a$ aksioma o‘ringa ega bo‘lsa Ye **kommutativ halqa** deyiladi.

1-misol. Sonlarni odatdagidek qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan quyidagi to‘plamlarning qaysi biri halqa tashkil etadi?

1) 2**Z**; 2)m**Z**; 3) **Q**; 4) **Z**[$\sqrt{2}$]; 5) 2**Z**[$\sqrt{2}$]; 6) **Q**[$\sqrt{2}$];

7) $E=\{a+b\sqrt{3}+c\sqrt{5} : a,b,c\in Z\}$.

2-misol. Matritsalarni odatdagidek qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan quyidagi to‘plamlarning qaysi biri halqa tashkil qiladi?

1) $\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in Z\right\}$ 2) $\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in 2Z\right\}$

3) $\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in Q\right\}$ 4) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in Z\right\}$

5) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in 3Z\right\}$ 6) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in Q\right\}$

7) $\left\{\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in Z\right\}$ 8) $\left\{\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in Q\right\}$

Bu halqalarning qaysi biri birlik elementga ega, biri ikkinchisiga qism halqa bo‘lgan ikkita halqani ko‘rsating.

3-misol. Agar **Z**×Z to‘plamda qo‘shish va ko‘paytirish amallarini quyidagicha kiritilgan bo‘lsa, uni birlik elementga ega bo‘lgan kommutativ halqa ekanligini ko‘rsating

$$\forall((a_1,b_1),(a_2,b_2) \in Z\times Z),\ (a_1,b_1)=(a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1=a_2 \wedge b_1=b_2$$

1) $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2;\ b_1+b_2),\ (a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1\cdot a_2;\ b_1\cdot b_2);$

2) $(a_1,b_1)+ (a_2,b_2)=(a_1+a_2;\ b_1+b_2),\quad (a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=$
$=(a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2;\ a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1);$

3) $(a_1,b_1)+ (a_2,b_2)=(a_1+a_2;\ b_1+b_2),\quad (a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=$
$=(a_1\cdot a_2+2b_1\cdot b_2;\ a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1);$

4) $((a_1,b_1)+ (a_2,b_2)=(a_1+a_2;\ b_1+b_2),\quad (a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=$
$=(a_1\cdot a_2 - 2b_1\cdot b_2;\ a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1).$

Bu halqalarning qaysi biri nolning bo‘luvchilariga ega bo‘ladi.

4-misol. Aytaylik (E;+,0) - Abel gruppasi bo‘lsin. Agar E da ko‘paytirish amalini $\forall(a,b \in E)\ a\cdot b=0$ kabi aniqlasak, (E;+, · ,0) ni halqa ekanligini isbotlang.

5-misol. Agar (K;+, · ,0) halqa bo‘lsa, $\forall(a,b \in K)$ lar uchun quyidagilarni to‘g‘ri ekanligini isbotlang.

1) $a+b=a \Rightarrow b=0;$ 2) $a+b=0 \Rightarrow b=-a;$

3) $-(-a)=a;$ 4) $a\cdot 0=0\cdot a=0;$

5) $a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(ab);$ 6) $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$

6-misol. Agar (E;+, · ,0) halqaning $\forall(a \in E)$ elementi uchun $a^2=a$ bo‘lsa, bu halqani kommutativ ekanligini isbotlang.

7-misol.. Yuqoridagi 4.15, 4.16, 4.17 - misollarda keltirilgan halqalarning qaysi biri maydon bo‘ladi?

8-misol. Agar $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} : a,b,c\in \mathbf{Q}\}$ bo‘lsa, $(\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}];+,\cdot,0,1)$ ni maydon bo‘lishini isbotlang.

9-misol. Maydon nolning bo‘luvchilariga ega emasligini isbotlang.

10-misol. Agar (R;+, · ,0,1) maydon bo‘lsa, u holda quyidagilarni isbotlang:

1) $\forall(a,b \in R)\ a\cdot b=1 \Rightarrow a\neq 0 \wedge b=a^{-1};$ 2) $\forall(a,b \in R)\ a\cdot b= a\cdot c \Rightarrow b=c;$

3) $\forall(a,b\in R)\ a\cdot b=0 \Rightarrow (a=0 \vee b=0)$; 4) $\forall(a,b\in R)\ a\cdot b\neq 0 \Rightarrow (a\neq 0 \wedge b\neq 0)$;

5) $\forall(a,b,c,d\in R)\ b\neq 0,\ d\neq 0\ \ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$;

6) $\forall(a,b,c,d\in R)\ b\neq 0,\ d\neq 0\ \ \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm cb}{bd}$;

7) $\forall(a,b,c,d\in R)\ b\neq 0,\ \ \frac{a}{b}+\frac{(-a)}{b}=0 \Rightarrow -\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{(-a)}{b}$;

8) $\forall(a,b,c,d\in R)\ b\neq 0,\ d\neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$;

9) $\forall(a,b,c,d\in R)\ a\neq 0,\ b\neq 0\ \ \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$

10) $\forall(a,b,c,d\in R)\ b\neq 0,\ c\neq 0 \Rightarrow \frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}$.

V bob. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

5.I-§. BIRLASHMALAR

Ta'rif. Har qanday narsalardan tuzilgan va bir-birlaridan yo shu narsalarning tartibi bilan, yoki shu narsalarning o'zlari bilan farq qiluvchi turli gruppalar umuman **birlashmalar** deb aytiladi.

Agar 10 xil raqam; 0, 1, 2, ..., 9 dan har birida bir necha raqamdan qilib gruppalar tuzsak, masalan: 123, 312, 8056, 5630, 42 va shunga o'shash, turli birlashmalar hosil qilamiz. Ulardan ba'zilari, masalan, 123 va 312 faqat narsalarning tartibi bilan farq qiladi, boshqalari esa, masalan, 8056 va 312 o'zlaridagi narsalar bilan (hatto narsalarning soni bilan ham) farq qiladi.

Birlashmalarni tuzgan narsalar **elementlar** deb ataladi. Elementlarni a, b, c, ... xarflar bilan belgilaymiz.

Birlashmalar uch xil bo'lishi mumkin; o'rinlashtirish, o'rin almashtirish va gruppalash. Ularning har birini ayrim ko'rib chiqamiz.

1-misol.. $X=\{a,b,c,d\}$ to'plam elementlaridan uzunligi 2 ga teng barcha kortejlarni tuzing. Bu kortejlar kombinatorikada nima deb ataladi. Kortejlar soni qancha bo'ladi?

2-misol.. $A_n^{n-1}=A_n^n=n!$ ekanini ko'rsating.

3-misol. 4 ta turli lavozimga nomzodlari ko'rsatilgan 9 kishidan 4 kiishini necha xil usul bilan saylash mumkin.

4-misol. 9-sinfda 35 o'quvchi bor. Ular bir-birlari bilan suratlarini almashishdi. Hammasi bo'lib nechta surat almashingan?

5-misol. Sinfdagi 40 ta o'quvchidan necha xil usul bilan sinf faollarini: sinfkomni, tozalik rahbarini va devoriy gazet muharririni saylash mumkin?

6-misol. 10 ta manzilgohga 10 ta xatni ikkita xat tashuvchi olib borishi kerak. Ular ishni necha xil usulda bo‘lib olishlari mumkin?
7-misol. Talaba 4 ta imtixonni 6 kunda topshirishi kerak. Bunda necha xil usulda amalga oshirish mumkin?
8-misol. 12 musabaqadosh o‘rtasida birinchi, ikkinchi va uchinchi mukofotlar necha xil usulda taqsimlanishi mumkin?
9-misol. Har birida ikkitadan element bo‘lgan 210 ta o‘rinlashtirishni nechta har xil narsadan tuzish mumkin?
10-misol. Agar $A_n^5 = 18 \cdot A_{n-2}^4$ bo‘lsa n ni toping.
11-misol. Etti xonali 10^7 ta telefon nomerlarining qanday qismi ettita har xil raqamdan iborat bo‘ladi?
1. **O‘rinlashtirishlar.** Turli birlashmalar tuzadigan narsalarimizning soni uchta (masalan, 3 karta) bo‘lsin; bu narsalarni a, b va s bilan belgilaymiz. Ulardan quyidagi birlashmalarni tuzish mumkin; bittadan:

a, b, c;

ikkitadan:

ab, ac, bc, ba, ca, cb

va uchtadan:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

12-misol. Agar:

a) $A = \{1\}$; b) $A = \{7;8\}$; v) $A = \{a;b;c\}$;
g) $A = \{m;n;p;q\}$

bo‘lsa, A to‘plam elementlaridan mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlarni tuzing.
13-misol. Ifodaning qiymatini toping:

a) $\frac{14!}{12!}$; b) $\frac{16!}{18!}$; v) $\frac{19!}{17!}$; g) $\frac{9!}{5!4!}$; d) $\frac{10!}{6!4!}$; e) $8! + 9!$;

j) $\frac{7!+6!+5!}{8!-7!}$; z) $10!-11!$; i) $\frac{17!-16\cdot16!-15\cdot15!}{17!}$.

14-misol. Formulalarni isbotlang:

a) $\frac{(m+3)!}{m!} = (m+1)(m+2)(m+3)$;
b) $\frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)...(n-m+2)\cdot(n-m+1)$. bunda $n > m$.

15-misol. Musobaqada 6 ta talaba qatnashmoqda. O‘rinlarni ular o‘rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin.

16-misol. Kasrni qisqartiring:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$; b) $\frac{(n-2)!}{n!}$; v) $\frac{(n-1)!}{n!}$; g) $\frac{2k(2k-1)}{2k!}, (k \in N)$.

17-misol. 0, 1, 2, 3, 4 raqamlardan foydalanib, nechta besh xonali son hosil qilish mumkin? Bunda raqamlar besh xonali sonda bir marta ishlatilishi kerak.

18-misol. Amallarni bajaring:

a) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; v) $\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{(p-2)!}$;

b) $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$; g) $\frac{m(m-1)(m-2)...(m-(k-1))}{m!}$, (m>k).

19-misol. 9 ta o‘quvchi ro‘yxatini necha xil usul bilan tuzish mumkin?

20-misol. 0, 1, 2, 3 raqamlardan, har bir sonda bir xil raqamlar bo‘lmaydigan qilib, mumkin bo‘lgan barcha to‘rt xonali sonlar tuzilgan. Nechta son hosil bo‘lgan?

GRUPPALASH

Agar **m** ta elementdan **n** tadan tuzish mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlarni bir-birlaridan, eng kamida bir element bilan farq qiladiganlarini tanlab olsak, u holda gruppalar deb aytilgan birlashmalarni hosil qilamiz.

Masalan, to‘rt element **a,b,c** va **d** dan 3 tadan olib tuzilgan gruppalar bunday bo‘ladi:

abc, abd, acd, bcd

Agar bu gruppalarning har birida mumkin bo‘lgan barcha o‘rin almashtirishlarni qilsak, to‘rt elementdan 3 talab mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz:

Bunday o‘rinlashtirishlarning soni **$6 \times 4=24$** bo‘ladi.

1-misol. a) $M=\{1\}$; b) $M=\{1;2\}$; v) $M=\{a,b,c,d\}$ bo‘lsin, M to‘lamning barcha to‘lamlarini tuzing va ular sonini toing.
2-misol. 6 ta elementdan iborat to‘plamning nechta qism to‘plami bor?
3-misol. Quyidagilarni hisoblang:

a) C_8^2; b) C_{17}^1; v) C_6^1; g) C_8^6; d) C_7^4; e) C_9^7; j) $C_5^4+C_5^0$; z) $C_{100}^{100}+C_{100}^1$.

4-misol. O‘quvchi 6 ta kitobdan 4 tasini nechta usul bilan ajratishi mumkin?
5-misol. Ma’lum bo‘limda ishlash uchun 20 ishchidan 6 ishchini ajratish kerak. Buni nechta usul bilan amalga oshirish mumkin?
6-misol. 9-sinfda 35 ta o‘quvchi bor. Ulardan 4 tasini anjumanga delegat qilib saylash kerak. Bu saylovda necha xil imkoniyat bor?
7-misol. 2310 sonnning tub bo‘luvchilardan ikkitadan tub bo‘luvchiga ega bo‘lgan nechta murakkab son tuzish mumkin?
8-misol. Tenglik to‘g‘riligini isbotlang:

a) $C_7^4+C_7^3=C_8^4$; b) $C_{10}^5+C_{10}^6=C_{11}^6$.

9-misol.. Ifodani soddalashtirng:

a) $\dfrac{2}{n+1}C_{n+1}^{n+1}$; b) $\dfrac{3}{2(2n-1)}C_n^{2n-3}$.

10-misol. Tenglamani eching:

a) $C_x^2=1$; b) $12C_{x+1}^{x-1}=55A_{x+1}^2$; v) $C_{x-3}^2=21$; g) $C_x^4=0$

11-misol. Tenglamalar sistemasini eching:

a) $\begin{cases} C_x^y=C_x^{y+2}, \\ C_x^2=153; \end{cases}$ b) $\begin{cases} C_x^{y+1}=2.5x \\ C_{x-1}^y=0. \end{cases}$

12-misol. $C_{m+1}^{n+1}:C_{m+1}^n:C_{m+1}^{n-1}=5:5:3$ munosabat berilgan. n va m ni toping.

13-misol. $C_n^m=C_n^{n-m}$ formuladan foydalanib quyidagilarni hisoblang:

a) C_{20}^{18}; b) C_{94}^{94}; v) C_{37}^{34}; g) C_{1000}^{999}; d) C_{100}^{98}; e) C_{20}^{110};

14-**misol.** Quyidagi tengliklar to‘g‘riligini tekshiring:

a) $C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$; b) $C_{m+1}^7 = C_{m+1}^{m-6}$.

15-misol.. Sinfda 40 o‘quvchi bor. Ulardan 32 tasi matematika to‘garagida, 21 tasi «YOsh rassomlar» to‘garagida shug‘ullanadi. 15 ta o‘quvchi ikkalasida ham shug‘ullanadi. Qancha o‘quvchi ikkalasida ham shug‘ullanmaydi?

16-misol. Ingliz va nemis tillarini o‘rganayotgan 100 o‘quvchidan ingliz tilini 85 ta, nemis tilini 45 ta o‘quvchi o‘rganadi. Qancha o‘quvchi ikkala tilni ham o‘rganadi?

17-misol.. 200 ta talabadan ingliz tilini 28 ta, nemis tilini 30 ta, frantsuz tilini 42 ta ingliz va nemis tilini 8 ta, ingliz va frantsuz tilini 10 ta, nemis va frantsuz tilini 5 ta talaba o‘rganadi. 3 ta talaba uchala tilni ham o‘rganadi. Qancha talaba faqat bittadan tilni o‘rganadi, qancha talaba birorta ham tilni o‘rganmaydi?

18-misol. 80 ta maktab o‘quvchisidan 40 tasi futbol, 50 tasi voleybol o‘ynaydi. Ikkala o‘yinni o‘ynovchi o‘quvchilar qancha bo‘lishi mumkin? Hech bo‘lmaganda bitta o‘yinni o‘ynovchilarchi?

19-misol. 25 ta o‘quvchidan 15 tasi matematikaga, 12 tasi ona tiliga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziquvchi o‘quvchilar soni qancha bo‘lishi mumkin. Hech bo‘lmaganda bittasiga qiziquvchilar-chi?

20-misol. 25 ta o‘quvchidan 12 tasi matematikaga, 8 tasi o‘zbek tiliga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziquvchi o‘quvchilar qancha bo‘lishi mumkin. Hech bo‘lmaganda bitta fanga qiziquvchilarchi?

21-misol. $A = \{a, b, c, d\}$ va $B = \{m, f\}$ to‘plamlar berilgan. Berilgan to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qancha elementni o‘z ichiga olishi mumkin?

5.3-§. NYUTON BINOMI

1. **Faqat ikkinchi hadlari bilan farq qiladigan binomlarning ko‘paytmasi.** Odatdagicha ko‘paytirish amali bilan quyidagilarni topamiz:

$$\mathbf{(x+a)(x+b)=x^2+ax+ab=x^2+(a+b)x+ab;}$$
$$\mathbf{(x+a)(x+b)(x+c)=[x^2+(a+b)x+ab](x+c)=}$$
$$\mathbf{=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(ac+bc)x+abc=}$$
$$\mathbf{x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.}$$

Shunga o‘xshash yana quyidagini topa olamiz:

$$\mathbf{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+}$$
$$\mathbf{+ac+ad+bc+bd++cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.}$$

Ko‘paytmalarga diqqat bilan qarasak, ularning hammasi bir xil qonunga asoslanib tuzilganligini ko‘ramiz,

1-misol. Nyuton binomidan foydalanib quyidagi ikkihadlarni darajaga ko‘taring:

1) $(1+x)^6$; 2) $(x+5)^5$; 3) $(x-1)^7$;

4) $(2-a)^8$; 5) $(3x+4u)^6$;6)$(1+x)^m$;

7) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$; **8)** $(x^2+2y^2)^4$**;** **9)** $(a^2+b^2)^6$.

2-misol.. $(5x-6a^2)^{10}$ yoyilmasining 6-hadini toping.

189-**misol.** $(3a-2)^{12}$ yoyilmasining 8-hadini toping.

190-**misol.** Quyidagi hisoblang:

1) $2.1^6=\left(2+\frac{1}{10}\right)^6=\dots$; 2) $1.03^5=\left(1+\frac{3}{100}\right)^5=\dots$;

3) $0.97^4=\left(1-\frac{3}{100}\right)^4=\dots$; 4) $29^5=(30-1)^5=\dots$;

5) $99^3=(100-1)^3=\dots$; 6) $(4+\sqrt{6})^6$;

7) $(6-5\sqrt{2})^6$; 8) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^5$;

9) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3$; 10) $(1+\sqrt{3})^8$;

11) $(2\sqrt{2}+\sqrt{6})^6$.

3-**misol.** Quyidagi yig‘indilar hisoblansin

1) $1+c_n^4+c_n^8+\dots$; **2)** $1+c_n^3+c_n^6+c_n^9+\dots$; **3)** $c_n^1+c_n^5+c_n^9+\dots$;

4) $c_n^3+c_n^7+c_n^{11}+\dots$; **5)** $c_n^2+c_n^5+c_n^8+\dots$; **6)** $1-c_n^2+c_n^4-c_n^6+\dots$;

7) $c_n^1-c_n^3+c_n^5-c_n^7$.

4-misol. $\left(x^2-\frac{3}{x^3}\right)^{15}$ yoyilmasining x bo‘lmagan hadini hisoblab chiqaring.

5-misol. $\left(2x^2-\frac{a}{2x^3}\right)^{10}$ yoyilmasining x bo‘lmagan hadini hisoblab chiqaring.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI.

1. A.P.Stoylova, A.M.Pqshkova. Boshlang‘ich matematika kurs asoslari. T.: O‘qituvchi.1991. -334b.
2. R.Ibroximova. Matematikadan masalalar to‘plami. -T.: O‘qituvchi. 1995. - 116b.
3. H.Mahmudov. Algebra va sonlar nazariyasidan amaliy mashg‘ulotlar. - Farg‘ona 2002. -119 b.
4. E.Yu.Azizov, H.Mahmudov. Diskret matematika va matematik mantiqdan amaliy mashg‘ulotlar. -Farg‘ona. 2002. -63b.
5. A.Xudoyberganov. Matematika. -T.: O‘qituvchi. 1980. -312b.
6. I.I.Ejov, A.V.Skoroxod, M.I.Yadrenko. Elementq kombinatoriki. M.: Nauka, 1977. –80s.
7. Metodika obucheniya matematiki nachalg‘nqx klassax. Uchebnoe posobie dlya studentov srednqx i vqsshix ped.ucheb.zavedeniy
5-e izd.
8. L.F.Tixomirov. Matematika v nachalg‘noy shkole. M.-2003. 96 s.

MUNDARIJA