Высшее профессиональное образование

БАКАЛАВРИАТ

Л. П. СТОЙЛОВА

МАТЕМАТИКА

Учебник

Рекомендовано
Федеральным государственным бюджетным образовательным учреждением высшего профессионального образования «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена» в качестве учебника для использования в образовательных учреждениях, реализующих образовательные программы высшего профессионального образования по дисциплине «Математика» по направлению 050100 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Начальное образование»

Регистрационный номер рецензии 211 от 10 мая 2012 г.

3-е издание, стереотипное

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2013

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С811

Рецензенты:
кафедра естественных дисциплин и методики их преподавания
в начальной школе Московского педагогического университета
(зав. кафедрой — канд. физ.-мат. наук, проф. *А. С. Добротворский*);
главный редактор журнала «Начальная школа»
канд. пед. наук *С. В. Степанова*

Стойлова Л. П.
С811 Математика : учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / Л. П. Стойлова. — 3-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2013. — 464 с. — (Сер. Бакалавриат).
ISBN 978-5-7695-9911-8

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным общеобразовательным стандартом по направлению подготовки «Педагогическое образование» профиль «Начальное образование» (квалификация «бакалавр»).

В книге изложены научные основы курса математики в начальной школе. Кроме традиционного содержания в нем рассматриваются элементы теории вероятностей, усилено внимание к вопросам моделирования в процессе решения текстовых задач. Теоретический материал дополнен упражнениями, способствующими его усвоению. Профессионально-педагогическая направленность учебника обеспечивается за счет тщательного отбора материала, подходов к его изложению, а также включения в систему упражнений заданий, нацеленных на установление связей изучаемой теории с содержанием начального курса математики.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования. Может быть использован учителями, повышающими свою квалификацию, а также студентами педагогических колледжей, получающими среднее профессиональное образование по специальности «Преподавание в начальных классах».

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7695-9911-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Переход начальной школы на новый Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования, возможность выбора и конструирования собственной методики обучения, задачи всестороннего развития младших школьников средствами предмета требуют от учителя хорошей математической подготовки и прежде всего знания научных основ начального курса математики: различных подходов к определению натурального числа и действий над натуральными числами, понятия величины и ее измерения, элементов алгебры, геометрии, теории вероятностей. Эти основы и представлены в данном учебнике. Главная его особенность — профессиональная направленность – учебник предназначен будущим и практикующим учителям начальных классов. Эта направленность заложена в отборе материала и уровне его изложения. Автор пытался сделать его доступным. В связи с этим многие темы даны сжато, доказательство некоторых теорем опущено. С помощью системы упражнений устанавливаются связи изучаемого материала с содержанием начального курса математики.

В учебнике представлен материал по основным разделам курса математики, изучаемого в условиях бакалавриата.

В разделе I «Логические основы математики» раскрыты особенности математических понятий, предложений и доказательств, знание которых поможет в усвоении данного курса и позволит учителю видеть (и реализовать на практике) единство подходов к методике изучения разных по содержанию, но имеющих одинаковую логическую структуру понятий и предложений; описан теоретико-множественный язык, используемый в дальнейшем в учебнике.

В разделе II «Соответствия, отношения, операции» рассматриваются общие понятия современной алгебры – соответствия, функции, отображения, отношения, алгебраические операции. Алгебраический материал содержит также понятия алгебраической структуры и видов структур, что необходимо как для изучения вопросов, связанных с преобразованиями плоскости, так и для понимания того, что и как изучает математика. Кроме того, в раздел включены главы «Выражения, уравнения, неравенства» и «Текстовая задача и процесс ее решения», непосредственно связанные с содержанием начального курса математики. Это материал, глубокое знание которого необходимо учителю при работе по любой программе и учебнику. Здесь же, в разделе II, содержатся главы «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» и «Алгоритмы и их свойства», материал которых поможет учителю понять, как математика изучает окружающий нас мир, используя понятия вероятности случайного события и алгоритма.

В разделе III «Натуральные числа» представлена аксиоматическая теория натурального числа, раскрыт теоретико-множественный смысл числа, описаны натуральное число как мера величины, способы записи числа, дана краткая справка об истории возникновения и развития понятия числа.

Материал раздела IV «Геометрические фигуры и величины» важен для учителя как средство развития образного и логического мышления младших школьников. С этой целью рассмотрены основные геометрические формы, свойства геометрических фигур на плоскости и в пространстве, виды движений плоскости, симметрия геометрических фигур.

При написании книги был использован материал различных учебников по математике для начальных классов, а также результаты научных исследований Т. В. Смолеусовой, Г. В. Хамер, Л. П. Ануфриевой, В. А. Лебединцевой, И. В. Шадриной, выполненные под руководством автора. Кроме того, были использованы учебники по математике для 5-6 классов, изданные под редакцией Г. В. Дорофеева, книги по логике И. Л. Никольской, работы А. Г. Мордковича, И. М. Смирновой, И. Ф. Шарыгина, Л. М. Фридмана, а также учебные пособия по математике для студентов педагогических вузов и колледжей, написанные в соавторстве с Н. Я. Виленкиным, А. М. Пышкало, Н. Н. Лавровой.

Автор благодарит доцента Московского городского педагогического университета В. В. Рыбакова за помощь в подготовке учебника к изданию.

Учебник составляет учебно-методический комплект с учебным пособием: Стойлова Л. П. Математика. Сборник задач / Л. П. Стойлова, Е. А. Конобеева, Т. А. Конобеева, И. В. Шадрина. — М.: Издательский центр «Академия», 2012.

ВВЕДЕНИЕ

Что изучает математика. Слово «математика» в переводе с греческого означает «познание», «наука».

Материальный мир состоит из объектов, обладающих определенными свойствами и находящихся в определенных отношениях друг с другом. В процессе развития объекты взаимодействуют, видоизменяются. Изучение объектов этого постоянно меняющегося мира — одна из важнейших задач человеческого познания.

Математика, как и другие науки, изучает окружающий нас материальный мир, объекты этого мира и отношения между ними. Но в отличие от наук о природе (физики, химии, биологии и др.) и формах передачи информации (информатики, кибернетики), ***математика изучает формы и отношения материального мира, взятые в отвлечении от их содержания.***

Другими словами, специфика математической науки состоит в том, что она выделяет пространственные формы и количественные отношения, присущие предметам и явлениям материального мира, абстрагирует эти формы и отношения и делает их предметом своего изучения. Например, чтобы в математике появился такой объект, как прямоугольник, пришлось отвлечься (абстрагироваться) от различных свойств предметов (массы, цвета, размеров) и вычленить только форму.

Такое понимание предмета математики сложилось к концу XIX в. В XX в. предмет математики уточнили: в математике изучают не только количественные отношения и пространственные формы материального мира, но и любые отношения и формы, взятые в отвлечении от их содержания.

Характерные черты математики. Математика — наука ***дедуктивная*** (от лат. *deductio* — выведение), поскольку основным методом обоснования утверждений в математике является выведение одних утверждений из других. Причем это выведение осуществляется по логическим правилам, обеспечивающим достоверность выводов при условии, что исходные утверждения были истинными. Справедливыми в математике признаются только те утверждения, которые обоснованы с помощью дедуктивных рассуждений — математических доказательств. Это отличает математику от других наук, в которых широко используются такие методы, как опыт, наблюдение, индуктивные рассуждения.

Проиллюстрируем эту особенность математики на примере такой задачи: верно ли, что сумма нечетных натуральных чисел есть число четное? Рассмотрев конкретные суммы ($1 + 3 = 4$; $3 + 5 = 8$; $7 + 9 = 16$), можно заключить, что утверждение, по всей видимости, верное. Но утверждать, что таким свойством обладают суммы любых нечетных чисел, нельзя — высказанное предположение надо доказать. Действительно, если $2n + 1$ и $2k + 1$ — любые нечетные натуральные числа (в их записи n и k — целые неотрицательные числа), то, выполнив тождественные преобразования выражения $(2n + 1) + (2k + 1)$, получим выражение $2(n + k + 1)$, которое является записью четного числа. Проведенное доказательство позволяет утверждать, что сумма *любых* нечетных натуральных чисел всегда является четным числом.

В связи с тем, что математика — дедуктивная наука, важнейшую роль в ней играет ***аксиоматический метод*** — метод научного построения теории, при котором из конечного числа аксиом логически выводят остальные положения этой теории. Возник он в Древней Греции (IV—III вв. до н. э.). В процессе развития математического знания его понимание менялось и в настоящее время это основной метод построения математических теорий.

Математика — наука, изучающая ***абстрагированные свойства, отношения и формы предметов***. Поясним эту особенность с помощью примера. Много веков человек наблюдал разные совокупности предметов: три дерева, три гриба, три яблока. Но чтобы появилось число «три», надо *отождествить* эти множества и выделить общее свойство — *количество предметов*. Другими словами, чтобы появилось число «три», надо абстрагироваться от всех свойств предметов, выделив только одно — количество элементов в совокупности.

Оперируют в математике и абстракциями другого вида. Запишем несколько первых чисел натурального ряда в привычной последовательности: 1, 2, 3, 4, ... Можно ли этот ряд продолжить? Как далеко?

В данной ситуации можно представить сколь угодно длинный ряд чисел как практически осуществимый, если бы наша жизнь длилась достаточно долго и мы имели бы для записи достаточно места и материала. Но это невозможно. Следовательно, понятие натурального ряда чисел — это абстракция, и все операции с натуральными числами базируются на этой абстракции. Добавим, что и такие математические понятия, как «прямая», «плоскость», образуются с помощью такой же абстракции.

Приведем еще один пример. Известно, что в геометрии отрезок рассматривают как бесконечное множество точек, причем любую точку можно выделить, обозначив буквой (или числом). Ясно, что при этом мы абстрагируемся от невозможности задать множество точек на отрезке путем перечисления всех его элементов.

Надо сказать, что изучаемые в других науках понятия тоже являются абстракциями, но в математике процесс абстрагирования более глубокий и прежде всего потому, что начинается он сразу с абстрактных понятий. Возьмем, например, понятие «числовое выражение». Как могло возникнуть это абстрактное понятие? Очевидно, что ему предшествовали понятия суммы, разности, произведения, частного чисел, которые являются абстракциями. Их обобщение привело к понятию «числовое выражение», но для этого пришлось понятия суммы, разности, произведения и частного чисел отождествить, т.е. понятие «числовое выражение» возникло как абстракция от абстракции. Если вслед за понятием числового выражения вводятся понятия «числовое равенство» и «числовое неравенство», то происходит переход к новым абстракциям более высокого уровня. Так возникают характерные для математики многоступенчатые абстракции, которые уже не имеют непосредственной связи с действительностью.

Для получения абстракций в математике используются различные приемы. Основными являются ***идеализация*** и ***символизация***.

Суть идеализации заключается в том, что реальный объект заменяется в нашем сознании *абстрактной моделью с идеализированными свойствами* (т.е. свойствами, которых нет у реальных объектов). Так, например, в математике появились геометрические понятия: треугольники, не имеющие массы; прямая, не имеющая толщины, которую можно неограниченно продолжать.

Важность идеализации как приема абстрагирования заключается в том, что идеальные понятия позволяют сформулировать на математическом языке законы природы, найденные опытным путем, и что в свою очередь позволяет создавать научные теории для изучения сложных явлений действительности.

Полученное в результате абстрагирования понятие или свойство обычно обозначают каким-либо знаком: словом, символом, графиком и т.д. В результате это понятие (свойство) превращается в самостоятельный предмет изучения. Так возникли первоначальные математические понятия: число, геометрическая фигура, арифметическая операция и др. А со временем в математику пришли их символические обозначения. Это, например, обозначения действий над числами (+ , –, ·, : и др.), обозначения отношений (>, =, ∥, ⊥ и др.), обозначения переменных буквами латинского (греческого и др.) алфавита и т.п.

«У математиков существует свой язык — это формулы», — утверждала С.В.Ковалевская. И «действительно, разработка искусственного языка символов и формул была величайшим достижением, в значительной мере определившим дальнейшее развитие математики, и сейчас очевидно, что математика — это не только совокупность фактов и методов, но и *язык* описания фактов и методов самых разных областей науки и практической деятельности»[1].

[1] *Епишева О.Б.* Общая методика преподавания математики в средней школе: Курс лекций. — Тобольск: Изд-во ТГПИ им. Д.И.Менделеева, 1997. — С. 152.

Ведущий метод познания действительности средствами математики — ***построение математических моделей*** изучаемых явлений. Основой построения моделей служит абстрагирование.

Математическая модель — это приближенное описание какого-либо класса явлений окружающего мира, выполненное на языке математики.

Например, функция $y = kx$ — математическая модель таких явлений, как равномерное прямолинейное движение, работа в течение некоторого времени с определенной производительностью, покупка некоторого количества товара по определенной цене и др. Представлена модель на символическом языке.

Почему математическую модель считают приближенным описанием? Дело в том, что при построении математических моделей приходится пренебрегать некоторыми сторонами действительности, вычленяя количественные отношения и пространственные формы. Поэтому математическая модель — лишь приближенная копия изучаемого класса явлений. При более углубленном его изучении уточняется и соответствующая математическая модель.

Математическими моделями являются понятия числа, фигуры, уравнения, функции и др. Геометрические понятия — отрезок, прямая, шар и т. п. — это тоже математические модели.

Процесс математического моделирования включает три этапа:

1) построение математической модели изучаемого объекта (явления, процесса);

2) исследование полученной модели, т. е. решение полученной на первом этапе математической задачи средствами математики;

3) интерпретация полученного решения с точки зрения исходной ситуации.

Построенная математическая модель объекта позволяет глубже понять суть вещей. Но процесс создания математических моделей сложный и длительный. Возникнув, математические модели становятся в математике самостоятельными объектами. Обобщая изложенное, можно сделать вывод о том, что ***математика строит модели и изучает их***. Этими моделями могут воспользоваться специалисты из других областей знания, решая свои задачи. Процесс решения прикладных задач включает те же три этапа математического моделирования, которые были названы выше. Важно заметить, что эти три этапа присутствуют и при решении текстовых задач, содержащихся в начальном курсе математики.

При использовании математического моделирования для решения прикладных задач математика выполняет функцию языка, т. е. дает удобные способы описания самых разнообразных явлений реального мира. Этим обеспечивается использование математики в самых различных областях знаний.

Математика многое дала человечеству: с ее помощью были объяснены многие законы природы. Математика оказалась языком, на котором, согласно Г. Галилею, написана великая книга Природы. К этому можно добавить, что «все крупные технические достижения — от строительства зданий и мостов до раскрепощения атомной энергии, сверхзвуковой авиации и космических полетов — были бы невозможны без математики. Потребность решать эти грандиозные задачи привела к созданию компьютеров, и на наших глазах происходит новая техническая и информационная революция. Наше время — период невиданного расцвета математики»[1].

[1] Энциклопедия для детей: В 15 т. Т. 11. Математика / под ред. М. Д. Аксенова. — М.: Изд-во Аванта +, 1998. — С. 7—8.

РАЗДЕЛ I
ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

Изучение математики (в колледже, вузе) связано с с усвоением определенной системы понятий, предложений и доказательств. Чтобы овладеть этой системой и затем успешно применять приобретенные знания и умения, обучая младших школьников и решая задачу их развития средствами математики, необходимо сначала понять, каковы особенности математических понятий, как устроены их определения, предложения, выражающие свойства понятий, и доказательства. Эти знания нужны учителю начальных классов еще и потому, что он первым вводит детей в мир математических знаний, и от того, как грамотно и успешно он это делает, зависит и отношение ребенка к математике в дальнейшем. Такая подготовка может быть получена в процессе освоения материала раздела «Логические основы математики».

Слово «логика» происходит от греческого *logos*, что означает «слово», «разум», «мысль», «закономерность». Этим словом названа особая наука, которая изучает процесс мышления человека с точки зрения структуры мыслей, правильности и неправильности рассуждений, отвлекаясь от конкретного содержания мыслей. Предметом логики являются такие формы мышления, как понятия, суждения, умозаключения, операции с ними и законы мышления.

Изучение элементов логики требует знания теоретико-множественного языка, который будет использоваться не только при рассмотрении логической структуры математических понятий, предложений и доказательств, но и при построении всего курса.

Глава 1
МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

В конце XIX в. в математической науке возникла необходимость уточнить смысл таких ведущих понятий, как функция, непрерывность и т. д. Для этого нужно было строго определить, что такое натуральное число. Поиски ответа на эти сложные вопросы способствовали развитию новых математических идей, поэтому в конце XIX — начале XX вв. происходил пересмотр старых представлений буквально во всех областях математических знаний. В результате в конце XIX в. возникла новая область математики — теория множеств, одним из создателей которой был немецкий математик Георг

Кантор. За небольшой срок теория множеств стала фундаментом всей математики.

В предлагаемом курсе мы познакомимся с некоторыми основными понятиями теории множеств. Знания в этой области нужны учителю начальных классов, во-первых, для понимания содержания начального курса математики, независимо от того, явно или неявно в нем используются теоретико-множественные понятия; во-вторых, для освоения таких важных с профессиональной точки зрения понятий, как взаимно-однозначное соответствие, отношение, число, геометрическая фигура.

1.1. Понятие множества и элемента множества

В математике часто рассматриваются те или иные группы объектов как единое целое: натуральные числа, треугольники, квадраты и т. д. Все эти различные совокупности называют ***множествами***.

Понятие множества является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие. Его можно пояснить на примерах. Так, можно говорить о множестве гласных букв русского алфавита, о множестве натуральных чисел, о множестве треугольников.

Математический смысл слова «множество» отличается от того, как оно используется в обыденной речи, где его связывают с большим числом предметов. В математике этого не требуется. Здесь можно рассматривать множество, состоящее из одного объекта, и множество, не содержащее ни одного объекта.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., Z.

Множество, не содержащее ни одного объекта, называют ***пустым*** и обозначают символом $\varnothing$.

Объекты, из которых образовано множество, называют ***элементами***.

Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, ..., z.

В математике нередко приходится выяснять, принадлежит какой-либо объект рассматриваемому множеству или не принадлежит. Например, мы говорим, что 5 — число натуральное, а 0,75 не является натуральным числом. Другими словами, мы утверждаем, что число 5 принадлежит множеству натуральных чисел, а число 0,75 ему не принадлежит.

Предложение «Объект a принадлежит множеству A» можно записать, используя символы: $a \in A$. Предложение «Объект a не принадлежит множеству A» можно записать так: $a \notin A$.

Например, если A — множество однозначных чисел, то утверждение «Число 3 — однозначное» можно записать в таком виде: $3 \in A$.

Запись $12 \notin A$ означает, что «Число 12 не является однозначным», или «Число 12 не принадлежит множеству A», или «Множество A не содержит числа 12».

Заметим, что в геометрии, которая возникла значительно раньше теории множеств, принято следующее: если точка является элементом какого-либо множества, то ее обозначают прописной буквой. Например, если X — множество точек отрезка AB, то предложение «Точка P лежит на отрезке AB» можно записать: $P \in X$ или $P \in AB$.

Множества бывают ***конечные*** и ***бесконечные***. Так, конечными являются множество дней недели, множество месяцев в году, а бесконечными — множество точек на прямой, множество натуральных чисел.

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

N — множество натуральных чисел;
Z — множество целых чисел;
Q — множество рациональных чисел;
R — множество действительных чисел.

Упражнения

1. Назовите три элемента множества:
а) учебных предметов, изучаемых в начальной школе;
б) четных натуральных чисел;
в) четырехугольников.

2. Запишите, используя символы:
а) число 14 — натуральное;
б) число –7 не является натуральным;
в) число 0 — рациональное;
г) $\sqrt{7}$ — число действительное.

3. Прочитайте следующие высказывания и укажите среди них верные:
а) $100 \in \mathbf{N}$; б) $-8 \in \mathbf{Z}$; в) $-12 \notin \mathbf{N}$; г) $5{,}36 \in \mathbf{Q}$; д) $102 \notin \mathbf{R}$;
е) $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$; ж) $-7{,}3 \in \mathbf{R}$; з) $\dfrac{3}{4} \in \mathbf{N}$; и) $0 \in \mathbf{N}$.

4. Пусть P — множество натуральных чисел, больших 7 и меньших 14. Выясните, какие из чисел 13, 10, 5, 7, 14 ему принадлежат, а какие не принадлежат. Ответ запишите, используя символы $\in$ и $\notin$.

5. Даны числа: 0; 7; –3,8; –17; 325; $\sqrt{5}$. Установите, какие из них:
а) натуральные;
б) целые;
в) рациональные;
г) действительные.

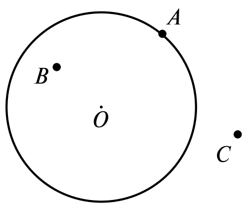

Рис. 1.1

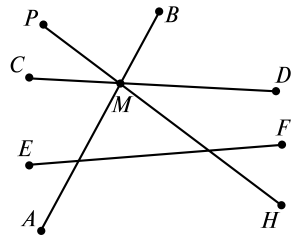

Рис. 1.2

6. Пусть M — множество точек окружности, изображенной на рис. 1.1. Прочитайте следующие предложения и укажите среди них верные:

а) $A \in M$; б) $O \in M$; в) $B \in M$; г) $C \notin M$.

7. Как изменить условие задачи 6, чтобы все утверждения а)—г) были верными?

8. Запишите с помощью символов $\in$ и $\notin$, какие из отрезков AB, CD, EF и PH проходят через точку M, а какие через нее не проходят (рис. 1.2).

9. Пусть A — множество решений уравнения $x^2+1=0$. Верно ли, что A — пустое множество? Приведите пример уравнения, множество решений которого состоит из:

а) одного элемента; б) двух элементов; в) трех элементов.

1.2. Способы задания множеств

Понятие множества мы используем без определения. Но как узнать, является та или иная совокупность множеством или не является?

Считают, что множество определяется своими элементами, т. е. ***множество задано**, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.*

Множество можно задать, ***перечислив все его элементы***. Например, если мы скажем, что множество A состоит из чисел 3, 4, 5 и 6, то мы зададим это множество, поскольку все его элементы окажутся перечисленными. При этом возможна запись, в которой перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки: $A = \{3, 4, 5, 6\}$.

Однако если множество бесконечно, то все его элементы перечислить нельзя. Трудно задать таким способом и конечное множество с большим числом элементов. В этих случаях применяют другой способ задания множества — указывают его характеристическое свойство.

***Характеристическое свойство** множества — это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий* *множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.*

Рассмотрим, например, множество A двузначных чисел: свойство, которым обладает каждый элемент данного множества, — «быть двузначным числом». Это характеристическое свойство дает возможность решать вопрос о том, принадлежит какой-либо объект множеству A или не принадлежит. Так, число 45 содержится в множестве A, поскольку оно двузначное, а число 145 множеству A не принадлежит, так как оно не является двузначным.

Случается, что одно и то же множество можно задать, указав различные характеристические свойства. Например, множество квадратов можно задать как множество прямоугольников с равными смежными сторонами и как множество ромбов с прямым углом.

В тех случаях, когда характеристическое свойство множества можно представить в символической форме, возможна соответствующая запись множества. Например, множество A натуральных чисел, меньших 7, можно задать так: $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ и $x < 7\}$.

При такой записи буквой x обозначается элемент множества A. Для этих целей можно использовать и другие буквы латинского алфавита.

Итак, для того чтобы задать некоторое множество, достаточно либо перечислить все его элементы, либо указать его характеристическое свойство. Второй способ более общий: он позволяет задавать и конечные, и бесконечные множества.

Очень важно умение переходить от одного способа задания множества к другому. Этому обучаются уже младшие школьники, выполняя, например, такие упражнения.

Задача 1. Запишите натуральные числа, которые больше, чем 65 и меньше, чем 75.

Решение. Множество чисел задано с помощью характеристического свойства «быть больше 65 и меньше 75». Требуется перечислить элементы этого множества: 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74.

Задача 2. Каким свойством обладают все числа ряда: 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92?

Решение. Перечислены все элементы некоторого множества, обладающего характеристическим свойством: «состоять из двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 2».

Упражнения

1. Запишите с помощью знака равенства и фигурных скобок предложения:

а) X — множество чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5;

б) Y — множество букв a, b, c.

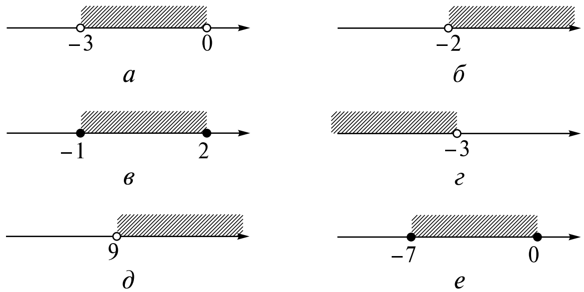

Рис. 1.3

2. Запишите, используя символы, множество P, если оно состоит из натуральных чисел:
а) больших 100, но меньших 200; б) меньших 150.

3. Перечислите элементы следующих множеств:
A — множество нечетных однозначных чисел;
B — множество натуральных чисел, меньших или равных 20;
C — множество двузначных чисел, делящихся на 10.

4. Укажите характеристическое свойство множества:
а) {а, е, ё, и, о, у, э, ю, я, ы}; б) {78, 76, 74, 72, 70};
в) {111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999}.

5. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства, если x — действительное число:
а) $x > 5$; б) $x \le -3{,}8$; в) $-4{,}5 \le x \le 4$; г) $2{,}7 \le x \le 9$.

6. Задайте с помощью характеристического свойства множества, выделенные штриховкой на координатной прямой (рис. 1.3).

7. D — множество двузначных чисел, запись которых оканчивается цифрой 1. Принадлежат ли этому множеству числа 31; 321; 61; 12? Ответ запишите, используя символы $\in$ и $\notin$.

8. Множество C состоит из квадрата, круга и треугольника. Принадлежат ли этому множеству диагональ квадрата и центр круга?

9. Покажите, что, выполняя задание: «Увеличь каждое нечетное однозначное число в 2 раза», учащиеся встречаются с двумя способами задания множества.

10. Покажите, что, выполняя задание: «Какое число лишнее в ряду: 470, 720, 330, 400, 510, 640?», учащиеся, по существу, пользуются понятиями характеристического свойства множества и принадлежности элемента множеству.

11. Ученику надо найти правило, по которому составлен ряд чисел 456, 466, 476, 486, ..., и записать в нем еще три числа. О каких теоретико-множественных понятиях идет речь в этом задании?

12. Приведите примеры трех заданий из учебников математики для начальных классов, при выполнении которых осуществляется переход от одного способа задания множества к другому.

1.3. Отношения между множествами

В математике изучают не только те или иные множества, но и отношения, взаимосвязи между ними. Например, нам известно, что все натуральные числа являются целыми. Понятие множества позволяет обобщить конкретные случаи взаимосвязи между различными совокупностями и посмотреть на них с единой точки зрения.

Если множества A и B имеют общие элементы, т. е. элементы, принадлежащие одновременно A и B, то говорят, что эти множества ***пересекаются***.

Например, если $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{b, d, k, m\}$; $C = \{x, y, z\}$, то можно утверждать, что множества A и B пересекаются, так как имеют общие элементы b и d, а множества A и C, B и C не пересекаются, поскольку не имеют общих элементов.

Рассмотрим теперь множества $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{c, d, e\}$. Они пересекаются, и, кроме того, каждый элемент множества B является элементом множества A. В этом случае говорят, что множество B включено в множество A или что множество B является подмножеством множества A и пишут $B \subset A$.

Множество B называют ***подмножеством*** множества A, если каждый элемент множества B является также элементом множества A. Пустое множество считают подмножеством любого множества. Любое множество является подмножеством самого себя.

Из определения следует, что если $B \subset A$, то множество B может быть пустым, и тогда $\varnothing \subset A$, и, кроме того, множество B может совпадать с A, и тогда $A \subset A$. Поэтому среди всех подмножеств заданного множества A должно быть обязательно пустое множество и само множество A.

Образуем, например, все подмножества множества $A = \{2, 3, 4\}$. Среди них будут одноэлементные подмножества: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, двухэлементные: $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, а также само множество A и пустое множество $\varnothing$. Таким образом, данное трехэлементное множество A имеет 8 подмножеств.

Вообще, если множество A содержит n элементов, то у него 2^n различных подмножеств. Доказательство этого утверждения здесь не приводим.

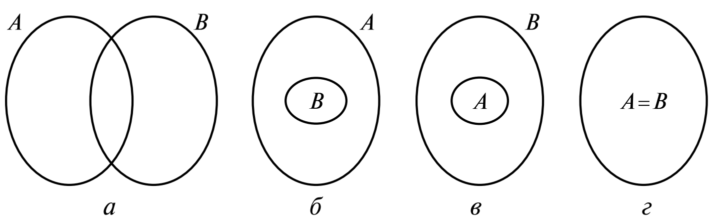

Рис. 1.4

Рассмотрим множества $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{c, a, d, b, e\}$. Они пересекаются, и каждый элемент множества A является элементом множества B, т. е. $A \subset B$, и наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A, т. е. $B \subset A$. В этом случае говорят, что множества A и B равны и пишут $A = B$.

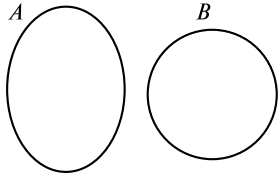

Рис. 1.5

Множества A и B называют ***равными***, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Из определения следует, что *равные множества состоят из одних и тех же элементов и что порядок записи элементов множества не существен.*

Отношения между множествами наглядно представляют с помощью особых чертежей, называемых кругами Эйлера[1]. Для этого множества представляют в виде кругов (овалов). В том случае, если множества A и B имеют общие элементы, но ни одно из них не является подмножеством другого, их изображают так, как показано на рис. 1.4, *а*. Если множество B является подмножеством A, то круг, изображающий множество B, целиком находится в круге, изображающем множество A (рис. 1.4, *б*). Если $A \subset B$, то множества A и B изображают так, как на рис. 1.4, *в*. Равные множества представляют в виде одного круга (рис. 1.4, *г*).

Если множества A и B не пересекаются, то их изображают в виде двух фигур, не имеющих общих точек (рис. 1.5).

С понятием подмножества младшие школьники встречаются, выполняя, например, задания: «Назови среди данных чисел четные», «Среди данных четырехугольников найди прямоугольники».

Упражнения

1. Даны два множества: $X = \{2, 4, 6\}$ и $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Верно ли что:
   а) множества X и Y пересекаются;
   б) множество X является подмножеством множества Y;
   в) множество $P = \{4, 0, 6, 8, 2\}$ равно множеству Y?

2. Известно, что элемент a содержится в множестве A и в множестве B. Следует ли из этого, что:
   а) $A \subset B$; б) $B \subset A$; в) $A = B$?

3. Из множества $K = \{216, 546, 153, 171, 234\}$ выпишите числа, которые:

---

[1] *Леонард Эйлер* (1707—1783) — член Петербургской академии наук. Л. Эйлер родился в Швейцарии. В 1727 г. по приглашению Петербургской академии наук приехал в Россию, где стал крупнейшим математиком. Огромно научное наследие Эйлера, в списке его трудов более 800 названий.

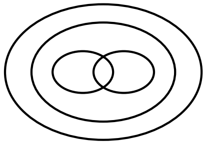

Рис. 1.6

а) делятся на 3; б) делятся на 9;
в) не делятся на 4; г) не делятся на 5.
Есть ли среди полученных подмножеств такое, которое равно множеству K?

4. Изобразите с помощью кругов Эйлера отношения между множествами C и D, если:
а) C — множество двузначных чисел, $D = \{3, 43, 34, 56, 103\}$;
б) C — множество двузначных чисел, D — множество четных натуральных чисел;
в) C — множество двузначных чисел, D — множество трехзначных чисел;
г) C — множество двузначных чисел, D — множество натуральных чисел, не меньших 10.

5. Отношения между множествами выпуклых четырехугольников, параллелограммов, прямоугольников, ромбов и квадратов изображены на рис. 1.6. Покажите каждое из множеств.

6. Дано множество $P = \{3, 5, 7, 9\}$. Образуйте всевозможные его подмножества. Сколько их должно быть?

7. Какое из данных множеств является подмножеством другого:
а) A — множество натуральных чисел, кратных 2, B — множество натуральных чисел, кратных 6, C — множество натуральных чисел, кратных 3;
б) A — множество треугольников, B — множество прямоугольных треугольников, C — множество остроугольных треугольников.

8. О каких теоретико-множественных понятиях идет речь в следующих заданиях, выполняемых учащимися начальных классов:
а) запиши по порядку числа от 10 до 19. Подчеркни и прочитай четные числа;
б) из ряда чисел от 1 до 20 выпиши по порядку числа, которые делятся на 5;
в) запиши три числа, которые при делении на 7 дают в остатке 4.

1.4. Пересечение множеств

Из элементов двух и более множеств можно образовывать новые множества. Пусть даны два множества: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Образуем множество C, в которое включим общие элементы множеств A и B, т.е. $C = \{6, 8\}$. Полученное множество C называют пересечением множеств A и B.

Пересечением множеств A и B называют множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству A и множеству B.

Пересечение множеств A и B обозначают $A \cap B$. Таким образом, по определению, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Если изобразить множества A и B с помощью кругов Эйлера, то пересечением данных множеств является заштрихованная область (рис. 1.7). В том случае, когда множества A и B не имеют общих элементов, говорят, что их пересечение пусто, и пишут: $A \cap B = \varnothing$.

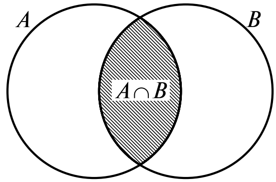

Рис. 1.7

Выясним, как находить пересечение множеств в конкретных случаях.

Если элементы множеств A и B перечислены, то, чтобы найти $A \cap B$, достаточно перечислить элементы, которые одновременно принадлежат множеству A и множеству B, т.е. их общие элементы.

А как быть, если множества заданы характеристическими свойствами?

Из определения пересечения следует, что характеристическое свойство множества $A \cap B$ составляется из характеристических свойств пересекаемых множеств с помощью союза «и».

Найдем, например, пересечение множества A — четных натуральных чисел и множества B — двузначных чисел. Характеристическое свойство множества A — «состоять из четных натуральных чисел», а характеристическое свойство множества B — «состоять из двузначных чисел». Тогда, согласно определению, пересечение данных множеств должно обладать свойством «состоять из четных натуральных и двузначных чисел». Таким образом, множество $A \cap B$ состоит из четных двузначных чисел (союз «и» в данном случае можно опустить). Полученное множество не пусто. Например, $24 \in A \cap B$, поскольку число 24 четное и двузначное.

Рассмотрим теперь случай, когда находят пересечение множества A и его подмножества B. Нетрудно видеть, что тогда $A \cap B = B$ и, следовательно, характеристическое свойство множества $A \cap B$ будет таким, как и свойство множества B.

Упражнения

1. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие утверждения:

а) $5 \in A \cap B$; б) $7 \notin A \cap B$.

2. Известно, что $x \in A$. Следует ли из этого, что $x \in A \cap B$?

3. Известно, что $x \in A \cap B$. Следует ли из этого, что $x \in A$?

4. Найдите пересечение множеств A и B, если:

а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, e, f, k\}$;

б) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58\}$;

в) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58, 5, 39, 81\}$.