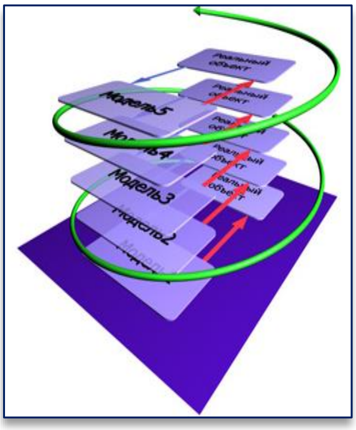
O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA`LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGII

A.N. Raximov

BIZNES MATEMATIKA



O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA`LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
oliy ta`lim muassasalari uchun darslik sifatida tavsiya etgan

TOSHKENT – 2024

U O`K: 519.862.6 (075)
KBK 65v6
B-57

A.N. Raximov. Biznes matematika. Oliy ta`lim muassasalari uchun darslik. –T.: «`Iqtisodiyot»`, 2024, 229 bet.

ISBN 978-9910-9696-2-1

.

Taqrizchilar:

Sh. Kiyosov - Toshkent moliya instituti, Soliq va soliqqa tortish kafedrasi professori, iqtisod fanlari doktori.

U. Ubaydullayev- Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti Samarqand filiali "Raqamli iqtisodiyot va axborot texnologiyalari" kafedrasi mudiri, matematika fanlari bo`yicha falsafa doktori, Phd.

“Biznes matematika” darsligi 60310100- iqtisodiyot (qishloq xo`jaligi iqtisodiyoti) va 60310100- Iqtisodiyot: Oziq-ovqat va resurslar iqtisodiyoti ta`lim yo`nalishlari fan dasturlariga asosida yozilgan. Darslikda biznes matematikaning asosiy tushunchalari keltirilgan. Darslikda matematikani iqtisodiy tizimlarda ilmiy va amaliy qo`llash va hisoblash usullari berilgan. Talabalarning mustaqil nazariy bilimlar olishlari bilan birga, matematikaning iqtisodda tadbiqlari, hamda har bir bo`lim bo`yicha masalalar yechish uchun namunalari keltirilgan.

Darslik 60310100- iqtisodiyot (qishloq xo`jaligi iqtisodiyoti) va 60310100- Iqtisodiyot: Oziq-ovqat va resurslar iqtisodiyoti ta`lim yo`nalishlari talabalari bilan bir qatorda bizns matematika kursini mustaqil o`rganuvchilar uchun ham mo`ljallangan.

Учебник `Бизнес - математика` написан на основе предметных программ учебных направлений 60310100-экономика (Экономика сельского хозяйства) и 60310100-экономика: экономика продовольствия и ресурсов. В учебнике представлены основные понятия деловой математики. В учебнике даны методы научного и практического применения математики в экономических системах и расчетах. Наряду с получением студентами самостоятельных теоретических знаний, представлены примеры применения математики в экономике, а также решения задач по каждому разделу.

Учебник предназначен для студентов образовательных направлений 60310100 - экономика (Экономика сельского хозяйства) и 60310100 - экономика: экономика продовольствия и ресурсов, а также для самостоятельных изучающих курс Бизнес-математики.

The textbook `Business Mathematics` is written on the basis of the subject programs of the educational directions 60310100-economics (Economics of agriculture) and 60310100-economics: economics of food and resources. The textbook presents the basic concepts of business mathematics. The textbook provides methods of scientific and practical application of mathematics in economic systems and calculations. Along with students gaining independent theoretical knowledge, examples of the application of mathematics in economics, as well as solving problems in each section are presented.

The textbook is intended for students of the educational directions 603100 - economics (Agricultural Economics) and 60310100 - economics: economics of food and resources, as well as for independent students of the Business Mathematics course.

KIRISH

Biznes matematika – predmeti iqtisodiy ob`ektlar va jarayonlarning matematik modellari va ularni tadqiq qilish metodlari bo`lgan nazariy va amaliy fan.

Biznes matematika fanining kelib chiqishi, shubhasiz, iqtisodiy ehtiyojlari, bank mablag`lari bilan bog`liq bo`lganligini yaxshi tushunamiz.

Iqtisodiyotda moliyaviy, bank va ishlab chiqrishning taraqqiyoti va murakkablashishi bilan iqtisodning matematik hisoblashlarga bo`lgan ehtiyoji murakkablashib ketdi. Hozirgi ishlab chiqarish – ko`plab korxonalarning qat`iy muvozanatga solingan faoliyatidan iboratki, u behisob matematik masalalarni yechish bilan ta`minlanadi.

Moliyaviy va iqtisodiy jmunosabatlarni tahlil qilish bilan iqtisodchilar, dasturchilar va ko`p sondagi buxgalterlar mashg`ul, minglab kompyuterlar esa hisob – kitoblar bilan band. Bunday masalalar qatoriga ishlab chiqarish rejasini tuzish ham, qurilish ob`ektlarining optimal joylashuvini aniqlash ham, moliyaviy operatsiyalarning samaradorligini baholash ham kiradi. Biznes matematika, shuningdek, avvaldan ma`lum iqtisodiy hodisalarning aniqlashtirilgan matematik tavsifi, iqtisodiy hisob – kitoblardan turli ta`limotlarning tahlili, ularni ifodalovchi matematik munosabatlar bilan ham shug`ullanadi.

Biznes matematikaning taraqqiyoti “matematik dasturlash” degan umumiy nom bilan birlashtiriluvchi bir necha matematika sohalari paydo bo`lishida muhim ahamiyat kasb etdi.

Biznes matematika kursi ikki qismga ajratilib o`rganiladi. Biznes matematikaning dastlabki qismda matematik dasturlashning asosiy elementlari, keyingi qismida esa moliyaviy matematikaning elementlari- klassik usullar ko`rib chiqiladi, moliyaviy hisob-kitoblarda qo`llaniladi: foizlar, o`sish va diskontlash, moliyaviy annuitetlar, shuningdek, ba`zi to`lov sxemalari kreditlar va investitsiya loyihalarining rentabelligini baholash hamda qimmatli qog'ozlar aktivlarining rentabelligi va riskni baholash usullari o`rganiladi.

1-BOB. IQTSODIY JARAYONLARNING MATEMATIK MODELI VA CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI

1.1. Iqtisodiy - matematik model

Model- lotincha “modulus” so`zidan olingan bo`lib, biror ob`ekt va ob`ektlar tizimining nusxasi yoki namunasidir. ***Model***- bu shunday moddiy yoki xayolan tasavvur qilinadigan obyektki, qaysiki tadqiqot jarayonida haqiqiy obyektning o`rnini shunday bosadiki, uni bevosita o`rganish haqiqiy obyekt haqida yangi bilimlar beradi. Modellarni qurishda tadqiq qilinayotgan hodisani belgilovchi muhim omillar aniqlanadi va qo`yilgan masalani yechish uchun muhim bo`lmagan qismlar chiqarib tashlanadi.

Ilmiy izlanishlarda modellashtirish qadimgi zamonlardanoq qo`llanila boshlandi va asta sekin ilmiy bilimlarning qurilish va arxitektura, astranomiya, fizika, kimyo, bilologiya va nihoyat, ijtimoiy fanlar kabi tabora yangi sohalarini qamrab ola boshladi. Birinchi matematik modellar F.Kene, A.Smit (klassik makroiqtisodiy model), D.Rikardo (xalqaro savdo modeli) tomonidan ishaltilgan. XX asr zamonaviy fanning amalda barcha sohalarida modellashtirish usuliga katta muvaffaqiyatlar va obro`-e`tibor keltirdi.

Turli iqtisodiy hodisalarni o`rganish uchun ularning iqtisodiy modellar deb ataluvchi soddalashtirilgan formal tasvirlaridan foydalaniladi iste`mol tanlovi modellari, firma modellari, iqtisodiy o`sish modellari, tovar va moliya bozorlaridagi muvozanat modellari va boshqa ko`p modellar iqtisodiy modellarga misol bo`ladi.

Moddiy modellar asosan o`rganilayotgan ob`ekt va jarayonni geometrik, fizik, dinamik yoki funksional tavsiflarini ifodalaydi. Masalan, ob`ektning kichiklashtirilgan maketi (masalan, litsey, kollej, universitet) va turli xil fizik, kimyo va boshqa xildagi maketlar bunga misol bo`la oladi. Bu modellar yordamida turli xil texnologik jarayonlarni optimal boshqarish, ularni joylashtirish va foydalanish yo`llari o`rganiladi. Umuman olganda, moddiy modellar tajribaviy xarakterga ega bo`lib, texnika fanlarida keng qo`llaniladi.

Iqtisodiy-matematik model - bu iqtisodiy ob`ektlar yoki jarayonlarni tahlil qilish yoki boshqarish maqsadida ularning matematik tasvirlanishi, ya`ni iqtisodiy masalaning matematik yozuvi. Iqtisodiy ob`ektning matematik modeli - bu uning funktsiyalar, tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy munosabatlar, grafiklar majmuasi ko`rinishidagi aks ettirilishi. Iqtisodiy-matematik usullar (IMU) iqtisodiyotni o`rganish uchun birlashtirilgan iqtisodiy va matematik fanlarning uyushmasidir. Bu tushuncha fanga XX asrning 60-yillarida akademik V.S.Nemchinov tomonidan kiritilgan. Elementlaridan biri iqtisodiy-matematik usullar bo`lgan qarorlarni qabul qilish tizimi ijodiy yondashuvni talab etuvchi xo`jalik muammolarining to`la korsatkichini qamrab olishi kerak. Iqtisodiy-matematik modellar turli asoslarga ko`ra tasniflanadi. Amaliy maqsadiga ko`ra iqtisodiy-matematik modellar iqtisodiy jarayonlarning umumiy xususiyatlari va qonuniyatlarini tadqiq qilishda ishlatiladigan nazariyanalitik modellarga va tayinli iqtisodiy masalalarni yechish da qo`llaniladigan amaliy modellar (iqtisodiy tahlil, bashoratlash, boshqarish modellari)ga bo`linadi. Iqtisodiy-matematik modellar iqtisodiyotning turli tomonlari (xususan, uning ishlab chiqarish-texnologik, ijtimoiy, hududiy tuzilmalari)ni va uning alohida qismlarini tadqiq qilish uchun mo`ljallanishi mumkin.

Iqtisodiy-statistik model iqtisodiy jarayonlarni matematik va statistik usullar asosida jarayonning holati, xususiyatlari va mohiyatini matematik formulalar, tenglamalar, tengsizliklar va belgilar bilan aniq ifodalanishidir.

Iqtisodiy-statistik modellashtirish usuli - bozor iqtisodiyoti sub`yektlarining iqtisodiy faoliyati tahlili va rejalashtirishni takomillashtirishga qaratilgan tadbirlardan biridir.

Iqtisodiy-statistik modellashtirish iqtisodiy ko`rsatkichlar va ishlab chiqarish omillari o`rtasidagi aloqalar o`z mohiyatiga ko`ra stoxastik bo`lgan asosga tayanadi. Iqtisodiy sub`yektlar faoliyatini statistik modellashtirish zamon va makonda ularning rivojlanish jarayonini o`rganishda asosiy o`rin egallaydi. Bu modellar ishlab chiqarish tendensiyalari va qonuniyatlarini aniqlash uchun moslashgandir. Hatto eng takomillashgan statistik model ham iqtisodiy hodisa va jarayonlarning butun aloqadorligini qamrab olishga qodir emas. Shunga ko`ra, iqtisodiy tahlil va iqtisodiy-statistik modellashtirishni qo`llashda har doim noaniqlik elementlari mavjud bo`ladi. Odatda, iqtisodiy-statistik modellashtirishni qo`llash samaradorligining asosiy shartlaridan biri uning real ko`rinish va jarayonga aynan mos kelishi hisoblanadi.

Iqtisodiy-statistik modelashtirishni noaniq bo`lishligining sabablari quyidagi hollarda sodir bo`lishi mumkin:

1. Axborotli - axborotning xatoligi, uning ko`rsatkichlari, omillar va obyektlar majmuining noaniqligi.

2. Tarkibiy - aniqlanmagan xilma-xilliklarning mavjudligi.

3. Modelli - ko`rsatkichlar va dalillar o`rtasida bog`lanish shakllaridan noto`g`ri foydalanish.

Iqtisodiy-statistik kuzatuvlar olib borilganda, texnik-iqtisodiy ko`rsatkichlar ko`rinishidagi, materiallar oqimidagi axborotlarga duch kelamiz. Shu nuqtai nazardan, ishlab chiqarishga - kirish axborotini, chiqish axborotiga o`zgartirgich sifatida qaraladi.

Ekonometrik modellarni tuzishda muhim bosqichlaridan biri modelda qatnashadigan omillar va ko`rsatkichlarni tanlashdir. Ko`p hollarda o`rganilayotgan ko`rsatkichlarga juda ko`p omillar ta`sir etmoqda. Shu jumladan, ularning hammasi modelda qatnashishi mumkin emas yoki iqtisodiy jihatdan maqsadga muvofiq emas.

Iqtisodiy–matematik usullar va zamonaviy kompyuterlar yordamida o’tkazilgan ilmiy izlanishlar bozor munosabatlari shakllarini takomillashtirish va ishlab chiqarishni iqtisodiy jihatdan rag'batlantirishga shuningdek xalq xo'jaligining barcha tarmoqlarini, jumladan qurilishda ishlab-chiqarish samaradorligini oshirishga, mavjud xom-ashyo va mehnat resurslaridan oqilona foydalanish natijasida eng yuqori ko'rsatkichlarga erishishga qaratilgandir.

Mana shunday optimal rejalashtirish va boshqarish masalalarini maqbuliy yechimlari faqat matematik programma- lashtirishning vujudga kelishi va uning taraqqiy etishi natijasidagina erishiladi. Optimal rejalashtirish va boshqarishda asosiy masala yechimning eng yaxshi variantini tanlab olishdan iboratdir. Matematik izlanishlar natijasida matematik programmalashtirishning optimal usullari vujudga keldi. Bu usullar yordamida xalq xo'jaligining barcha tarmoqlari, jumladan qurilishni boshqarishning optimal yechimi aniqlanadi va boshqariladi. Bunday masalalarning muqobil yechimlari chiziqli programmalashtirish usullari bilan aniqlanadi. Agar matematik modelda masalaning yechimiga ta'sir etuvchi barcha omillar to'liq hisobga olingan bo'lsa, u holda ushbu omillar iqtisodiy masalaning optimal yechimi bo'lib hamisha tenglamalar va tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradi. Shuning uchun ham iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda shartlarni to'g'ri tanlash muhim ahamiyatga ega va u masalani yechishda asosiy vosita bo'lib hisoblanadi.

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish (chiziqli programma-lashtirish usullariga o'tishda) tenglamalar va tengsizliklar sistemasini tuzishdan iborat. Unda rejalashtirilayotgan obyektda izlanayotgan miqdorlar o'zgaruvchi miqdorlar vazifasini bajaradi. Chiziqli tenglama va tengsizliklarda noma'lum miqdorni x_j o'zgaruvchi bilan belgilaymiz. Sistemaning o'zgarmas koeffisiyent larini, ya'ni ozod hadlarini b_i noma'lumlar oldidagi koeffisiyentlarni esa a_{ij} bilan belgilaymiz (bunda $i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}$).

Ushbu masalani yechish jarayonida quyidagi shartlarga amal qilish lozim.

Butun iqtisodiy, texnikaviy, ijtimoiy va boshqa shartlarni chiziqli tenglamalar va tengsizliklar ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsin.

Masalaning hamma shartlarini aks ettiruvchi chiziqli tenglamalar va tengsizliklar sistemasi alternativ (ko'p variantli) yechimga ega bo'lsin.

Hamma chiziqli tenglamalar va tengsizliklar sistemasi yagona maqsadli funksiyasiga ega bo'lsin.

Ushbu shartlar juda ko'plab iqtisodiy muammolarni hal qilish uchun qanoatlantiruvchi shartlardir. Iqtisodiy hodisalarini matematik modelini tuzish jarayonida chiziqli tenglamalar va tengsizliklar uch xil tur ko'rinishida uchraydi.

Birinchi tur: $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{im}x_n \le b_i \quad (i=\overline{1,n}):b_i-$ o'zgar-mas son. Bunda noma'lumlarning koeffisiyentlarga ko'payt-masining yig'indisi o'zgarmas sondan kichik yoki unga teng.

Ikkinchi tur: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{im}x_n \geq b_i \quad (i = \overline{1,n})$. Bunda noma'lumlarning koeffisiyentlarga ko'paytmasining yig'in-disi o'zgarmas songa teng yoki undan katta.

Uchinchi tur: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{im}x_n = b_i \quad (i = \overline{1,n})$. Bunda noma'lumlarning koeffisiyentlarga ko'paytmasining yig'in-disi o'zgarmas songa teng.

Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – larni qurilishda ishlatiladigan xom - ashyolar miqdori deb qaralsa, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ lar mos ravishda shu xom - ashyolarning bahosi bo'lsa, hosil qilingan yangi qurilish mahsulotining bahosi Z(X) bilan belgilansa, u holda maqsad funksiya, eng katta yoki eng kichik qiymatga ega bo'lish uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi:

$$Z(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \to \max(\min)$$

yoki $$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot x_j \to \max(\min).$$

Yuqoridagi belgilashlarga asosan chiziqli programmalash -tirishning umumiy masalasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.1)$$

(1.1) - tenglamalar sistemasining shunday musbat yechimlarini topish kerakki, natijada

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + n_n x_n \qquad (1.2)$$

chiziqli funksiya eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymatga ega bo'lsin. (1.2) - chiziqli funksiyani $Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ ko'rinishida ham yozish mumkin bo'lib, chiziqli funksiyaning maksimum yoki minimum qiymatlari quyidagi shartlar o'rinli bo'lganda topilsin.

1.2. Eng sodda iqtisodiy masalalarning matematik modeli

Faraz qilaylik, korxonada m xil mahsulot ishlab chiqarilsin; ulardan ixtiyoriy birini i bilan ikkinchisini j bilan byelgilaymiz. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun n xil ishlab chiqarish faktorlari zarur bo'lsin. Har bir xom-ashyoning umumiy miqdori va bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan normasi haqidagi ma'lumotlar quyidagi jadvalda byerilgan bo'lsin.

1.1-jadval

Xom-ashyo xillari	Xom-ashyo zahirasi	Mahsulot birligini tayyorlash uchun sarflangan xom-ashyo miqdori			
		B_1	B_2	…	B_n

A_1	a_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
Bir birlik mahsulotdan keladigan foyda		b_1	b_2	…	b_n

Jadvaldagi har bir: *j b – j* xom-ashyoning umumiy miqdori (zahirasi); *ij a – I* mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan *j* xom-ashyomiqdori; *j c* – korxonaning *j* mahsulotning bir birligini sotishdan oladigandaromadi.

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: korxonaning ishini shunday ryejalashtirish kyerakki:

a) hamma mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir xomashyoning miqdori ularning umumiy miqdoridan oshmasin;

b) mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan daromadi maksimal bo'lsin.

Ryejalashtirilgan davr ichida ishlab chiqariladigan *i* mahsulotning miqdorini *i x* bilan byelgilaymiz.

U holda masaladagi a) shart quyidagi tyengsizliklar sistyemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le a_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_3 \le a_m \end{cases}$$

Masaladagi b) shart uning maqsadini aniqlaydi. Dyemak, masalaning maqsadi mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan umumiy daromadini maksimallashtirishdan iborat bo'lib, $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n$ funksiya orqali ifodalash mumkin. Shunday qilib, ishlab chiqarishni ryejalashtirish masalasining matyematik modyeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Maqsad funktsiya $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n$,(1.3) funktsiya maksimal qiymatni, quyidagi shart bajarilgada

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le a_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_3 \le a_m \end{cases} ,(1.4)$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlari nomamfiy bolishinilarini aniqlanish masalasi deyiladi. Bu masala chiziqli programmalashtirish masalasi deyiladi.

1.1-masala. Xom - foydalanish masalasi. Biror korxona uch xil B_1, B_2, B_3 mahsulot ishlab chiqarish uchun besh xil, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 xom- ashyodan foydalanadigan bo'lsin. Xom - ashyo zaxiralari, mahsulot birligini tayyorlash uchun sarflangan xom - ashyo birligining miqdori va har qaysi mahsulot birligidan keladigan foydaning son qiymati quyidagi 1.2- jadvalda keltirilgan bo'lsin.

1.1-jadval

Xom-ashyo xillari	Xom-ashyo zahirasi	Mahsulot birligini tayyorlash uchun sarflangan xom-ashyo miqdori		
		B1	**B2**	**B3**
A_1	**50**	**1**	**3**	**6**
A_2	**70**	**4**	**5**	**8**
A_3	**90**	**7**	**9**	**13**
A_4	**30**	**10**	**7**	**15**
A_5	**100**	**8**	**4**	**5**
Bir birlik mahsulotdan keladigan foyda		**70**	**90**	**80**

Agar A mahsulot birligining miqdorini x_1, B mahsulot birligini x_2, C mahsulot birligini esa x_3 bilan belgilab, mahsulot birligini tayyorlash uchun sarf bo'lgan xom - ashyo birligini va xom - ashyo zaxiralarini nazarda tutsak, quyidagi cheklanish tengsizliklarini (yoki shartlarini) hosil qilamiz, ya'ni

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 50, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \le 70, \\ 7x_1 + 9x_2 + 13x_3 \le 90, \\ 10x_1 + 7x_2 + 15x_3 \le 30, \\ 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 100. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Bu tengsizliklar mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xom – ashyoning, berilgan xom - ashyo zaxiralaridan oshib ketmasligini ko'rsatadi. Agar A xildagi mahsulot ishlab chiqarilmasa $x_1 = 0$, aks holda $x_1 > 0$. B va C xildagi mahsulotlar uchun ham xuddi shunday munosabatlar o'rinlidir.

Demak, hamma vaqt $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$ bo'lar ekan. A xildagi bir – birlik mahsulot 70 birlik foyda bergani uchun shu xildagi jami mahsulotdan keladigan foyda $70 \cdot x_1$ ga teng bo'ladi. Xuddi shuningdek, ikkinchi va uchinchi xil mahsulotlardan $90 \cdot x_2$, $80 \cdot x_3$ foyda olinadi. Umumiy foyda esa

$$Z = Z(x_1, x_2, x_3) = 70 \cdot x_1 + 90 \cdot x_2 + 80 \cdot x_3 \qquad (1.6)$$

ko'rinishida bo'ladi va qo'yilgan masalaning maqsad funksiyasini ifodalaydi.

Cheklanish shartlari (1.5) va maqsad funksiya (1.6) chiziqli bo'lganligi uchun (1.5)–(1.6) ifoda chiziqli programmalashtirish masalasining, ya'ni xom-ashyodan oqilona foydalanishning matematik modelini tashkil qiladi.

Demak, masalani yechish uchun (1) - sistemaning shunday manfiy bo'lmagan $\left(x_1^1,\, x_2^1,\, x_3^1\right)$ yechimini topamizki, unda (2) - formula bilan aniqlanadigan Z – chiziqli funksiya eng katta qiymatga erishadi, ya'ni umumiy foyda eng katta bo'ladi.

Endi umumiy holda xom - ashyodan foydalanish masalasini quyidagicha bayon qilish mumkin. Aytaylik, korxona n xil B_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$ turdagi mahsulotni tayyorlash uchun, m xil A_i $\left(j = \overline{1, m}\right)$ xom - ashyodan foydalanadigan bo'lsin.

Xom - ashyo zaxiralarini b_i bilan ; j – xildagi bir-birlik mahsulotni tayyorlash uchun, i turdagi xom - ashyo birligidan qancha miqdorda sarf qilinganligini a_{ij} bilan; j –xildagi mahsulot birligini sotishdan olinadigan foydani c_j bilan va j – xildagi mahsulot birligining miqdorini x_j bilan belgilasak, qo'yilgan masalaning matematik modeli quyidagicha buladi:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \qquad (\max) \qquad (1.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i\,, \qquad (i = \overline{1, m}), \qquad (1.7)$$

$$x_j \ge 0 \;, \quad (j = \overline{1, n}) \qquad (1.8)$$

Qo'yilgan maqsaddan ko'rinib turibdiki, maqsad funksiya (1.6) ni maksimallashtiradigan $x_j \ge 0$ larni topish uchun chiziqli tengsizliklar sistemasi (1.7) ning manfiy bo'lmagan yechimlarini topishdan iboratdir. Tengsizliklar sistemasini yechish, tenglamalar sistemasini yechishga qaraganda murakkab bo'lganligi uchun, ko'pincha tengsizliklar sistemasini unga teng kuchli bo'lgan tenglamalar sistemasi bilan almashtiriladi. Buning uchun tengsizliklar sistemasi (1.4) ning chap tomoniga, noma'lum va musbat bo'lgan $x_{n+i} \ge 0$, $(i = \overline{1, m})$ o'zgaruvchilarni qo'shib yozish kifoyadir:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i\,, \qquad (i = \overline{1, m}) \qquad (1.9)$$

Hosil qilingan tenglamalar sistemasida noma'lumlar soni tenglamalar sistemasidagi tenglamalar sonidan ko'p. Noma'lumlar soni (n + m > n) bo'lgani uchun (1.5) sistema cheksiz ko'p yechimlarga egadir. Bu yechimlar to'plamidan shunday $x_j \ge 0$ larni tanlab olish kerakki, natijada maqsad funksiya (3) o'zining eng katta qiymatiga erishsin. Demak, umumiy holda

(1.3); (1.4); (1.4’) xom – ashyodan oqilona foydalanish masalasining matematik modelini ifodalaydi.

2. Transport masalasi. Ma’lum miqdordagi yuklarni, ishlab chiqarish korxonalaridan iste’mol qiluvchi korxonalarga tashib borish uchun chiziqli programmalashtirishning transport masalasi modelidan foydalaniladi. Bunda transport vositalari uchun sarflanadigan xarajat, eng kam sarf qilgan holda iste’molchilarning talabini to’la qondirishdan iboratdir. $A_i, (i=\overline{1,m})$ mahsulot ishlab chiqarish korxonalari deylik. $B_j, (j=\overline{1,n})$ shu mahsulotlarga bo’lgan iste’molchilar bo’lsin. Har bir $A_i, (i=\overline{1,m})$ korxonalarda ishlab chiqarilgan mahsulotlarning miqdori $a_i, (i=\overline{1,m})$. Xuddi shuningdek $B_j, (j=\overline{1,n})$ iste’molchi-

larning mahsulotlarga bo’lgan talabi $b_j - (j=\overline{1,n})$ – bo’lsin. A_i korxonalarda ishlab chiqarilgan mahsulotlarning umumiy miqdori, B_j iste’molchilarning mahsulotlarga bo’lgan talabining umumiy miqdoriga teng bo’lsin deb faraz qilaylik. U holda

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

tenglik o’rinli bo’ladi.

A_i ishlab chiqarish korxonasidan B_j iste’molchiga olib borilgan mahsulotning umumiy miqdorini x_{ij} bilan va A_i ishlab chiqarish korxonasidan B_j iste’molchiga bir - birlik mahsulotni tashib borish uchun sarf qilingan xarajatni c_{ij} bilan belgilaymiz. Soddalik uchun ushbu masalaning hamma berilgan ma’lumotlarini quyidagi jadvalda keltiramiz.

Endi masalaning matematik modelini tuzish uchun, har bir ishlab chiqarish korxonasini, iste’molchilarga shunday mos qilib qo’yish kerakki, birinchidan har bir ishlab chiqarish korxonasidagi mahsulotlar to’la taqsimlansin. Ushbu shartni tenglamalar sistemasi orqali quyidagicha yozish mumkin.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases} \qquad (1.6)$$

Ikkinchidan, har bir iste’molchining talabi to’lasincha qondirilsin. Bu shartlar quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases} \qquad (1.7)$$

Uchinchidan, mahsulotlarni tashish uchun sarf qilinadigan jami xarajat eng kam bo'lsin. Bu esa quyidagi chiziqli funksiya orqali ifodalanadi.

$$Z = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + \ldots + c_{1n} \cdot x_{1n} + c_{21} \cdot x_{21} + \\ + c_{22} \cdot x_{22} + \ldots + c_{2n} \cdot x_{2n} + \ldots + c_{m1} \cdot x_{m1} + c_{m2} \cdot x_{m2} + \\ + \ldots + c_{mn} \cdot x_{mn} \ . \tag{1.8}$$

To'rtinchidan, masalaning iqtisodiy qo'yilishidan yechimlarning manfiy bo'lmaslik shartini qanoatlantirishi lozim:

$$x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \right). \tag{1.9}$$

Yuqoridagi (1.6) – (1.9) munosabatlarni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \left(i = \overline{1,m} \right) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad \left(j = \overline{1,n} \right) \\ x_{ij} \geq 0, \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \right) \end{array}\right\} \tag{1.10}$$

va

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}, \qquad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}). \tag{1.11}$$

Shunday qilib (1.10)–(1.11) birgalikda transport masalasining matematik modeli deb ataladi. Demak, (1.10) shartni qanoatlantiruvchi shunday $x_{ij} \geq 0$ yechimlarni topishi kerakki, natijada (1.11) maqsad funksiya eng kichik qiymatga erishsin.

Agar ishlab chiqarilgan mahsulotlarning umumiy miqdori, ularga bo'lgan talabning umumiy miqdoriga teng bo'lsa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M > 0, \tag{1.12}$$

u holda bu masalani yopiq modelli, aks holda ochiq modelli transport masalasi deb ataymiz.

1.1-masala. A_1, A_2, A_3 va A_4 omborlarda mos ravishda 100t., 250t., 500t., va 150t., sement saqlanadi. Ushbu omborlardagi sementni B_1, B_2, B_3, B_4 ba B_5 qurilish inshootlariga ularning talabiga ko'ra mos ravishda 300t., 350t., 100t., 170t., va 80t., miqdorlarda yetkazib berish kerak bo'lsin. A_1 ombordan 1t sementni B_1, B_2, B_3, B_4 Ba B_5 qurilish inshootlariga yetkazib berish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari mos ravishda (1;4;6;2; va 3) so'mni, A_2 ombordan (4; 5; 3; 7; va 6) so'mni tashkil qilsa, va hokazo tashishda sarf qilingan umumiy transport xarajati eng kam bo’ladigan yechim topilsin. Ushbu transport masalasining matematik modelini tuzamiz.

Yechish. $A_i, (i=\overline{1,4})$ omborlardan $B_j, (j=\overline{1,5})$ qurilish inshoot-lariga yetkazib beriladigan sementning miqdorini x_{ij}; A_i omborlarda saqlanayotgan sement miqdorini

$a_i, (a_1 = 100_T, a_2 = 250_T, a_3 = 500_T, a_4 = 150_T)$, B_j – qurilish inshootlarining sementga bo’lgan talabini b_j, (bunda $b_1 = 300_T b_2 = 350_T, b_3 = 100_T, b_4 = 170_T, b_5 = 80_T$) bilan belgilasak, u holda omborlardagi sementning to’la taqsimlanish shartini

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 250, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 500, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 150. \end{cases} \quad (1.13)$$

ko’rinishda va qurilish inshootlarining sementga bo’lgan talabini to’la qondirish shartini

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 300, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 350, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 100, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 170, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 80. \end{cases} \quad (1.14)$$

ko’rinishda yozish mumkin.

$A_i, (i=\overline{1,4})$ ombordan $B_j, (j=\overline{1,5})$ qurilish inshootlariga 1 t sementni yetkazib berish uchun sarf qilingan transport xarajatini c_{ij} $(i=\overline{1,4};\ j=\overline{1,5})$ bilan belgilasak, sementni tashish uchun sarf qilinadigan jami xarajatning miqdorini aniqlaydigan chiziqli funksiya quyidagicha bo’ladi:

$$\begin{aligned} Z = {} & x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 4x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23} + 7x_{24} + 6x_{25} + x_{31} + \\ & + 3x_{32} + 2x_{33} + 6x_{34} + 4x_{35} + 2x_{41} + x_{42} + 4 \cdot x_{43} + 7x_{44} + 6x_{45}, \\ & \text{ва } x_{ij} \geq 0 \ (i=\overline{1,4};\ j=\overline{1,5}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Iqtisodiy nuqtai nazardan transport masalasining optimal yechimlari manfiy bo’lmasligi kerak. Demak: (1.13)-(1.15) munosabatlar birgalikda berilgan transport masalasining matematik modelini ifodalaydi.

1.3. Chiziqli programmalash masalasini grafik usulda yechish

Faraz qilaylik, ChPM berilgan bo’lsin:

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... c_nx_n$,(1.16) funktsiya maksimal qiymatni, quyidagi shart bajarilgada

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le a_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_3 \le a_m \end{cases} ,(1.17)$$

$$x_j \ge 0 \quad , \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (1.18)$$

Berilgan chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini bilan tanishamiz.

Ma'lumki, ***n*** ta tartiblashgan $x_1, x_2, ... , x_n$ sonlar ***n***-ligi (birlashmasi) ***n*** o'lchovli fazoning nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun (1.16)-(1.18) chiziqli dasturlash masalasining rejasini ***n*** o'lchovi fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga ma'lumki, bunday nuqtalar to'plami qavariq to'plamdan iborat bo'ladi.

Qavariq to'plam chegaralangan (qavariq ko'pburchak), chegaralanmagan (qavariq ko'p qirrali soha) bo'lishi, bitta nuqtadan iborat bo'lishi yoki bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin.

Koordinatalari $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_1$ tenglamani qanoatlantiruvchi $(x_1,x_2,..,x_n)$ nuqtalar to'plami ***gipertekislik*** deb ataladi.

Shu sababli $c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n = Y$ ko'rinishda yozilgan maqsad funksiyani **Y** funksiyaning turli **R** qiymatlariga mos keluvchi o'zaro parallel ***gepertekisliklar*** oilasi deb qarash mumkin. Har bir gipertekislikning ixtiyoriy nuqtasida **Y** funksiya bir xil qiymatni qabul kiladi (demak o'zgarmas sathda saqlanadi). Shuning uchun ular «sath tekisliklari» deyiladi. Geometrik nuqtai nazardan chiziqli dasturlash masalasini quyidagicha ta'riflash mumkin:

(1.16) va (1.18) shartlarni qanotlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_n^*)$ nuqtani topish keraki, bu nuqtada **Y** maqsad funksiyasiga maksimum (minimum) qiymat beruvchi (1.16) gipertekisliklar oilasiga tegishli bo'lgan gipertekislik o'tsin.

Jumladan ***n*** = 2 da (1.16) va (1.18) shartlarni masala quyidagicha talqin qilinadi: (1.17) va (1.18) shartlarni qanotlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ nuqtani topish keraki bu nuqtadan **Y** maqsad funksiyaga eng katta (eng kichik) yiymat beruvchi va (1.8) chiziqlar oilasiga tegishli bo'lgan chiziq o'tsin.

Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqiniga hamda oldingi mavzularda tanishgan chiziqli dasturlash masalasi yechimining xossalariga tayanib, ba'zi hollarda ularni grafik usulda yechish mumkin.

Ikki o'lchovli fazoda (tekislikda) berilgan quyidagi chiziqli dasturlash masalasini qaraymiz (***n*** =2) $Z = c_1x_1 + c_2x_2$,(1.19) funktsiya maksimal qiymatni, quyidagi shart bajarilgada

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le a_m \end{cases} ,(1.20)$$

$$x_j \ge 0 \quad , \quad (j = \overline{1,n}) ,(1.21)$$

Berilgan (1.20) tengsizliklar (1.21) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega bo'lsin deb qaraylik. Demak ulardan tashkil topgan to'plam chekli bo'ladi va (1.20), (1.21) tengsizliklarning har biri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = a_m \end{cases}$$

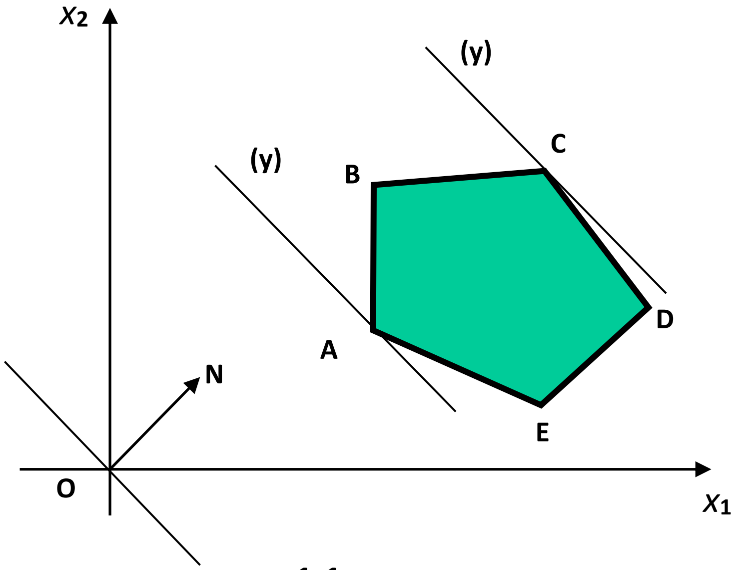
chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi.

Berilgan $Z_{\min(\max)} = c_1x_1 + c_2x_2$ chiziqli funksiya ham ma'lum bir o'zgarmas $\boldsymbol{C}_0$ = **const** qiymatda $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

$c_1x_1 + c_2x_2 = const$ to'g'ri chiziqning normali **(*x*1;*x*2)** koordinatalar tekisligida **(*c*1;*c*2)** nuqta bilan koordinatalar boshi (0;0) birlashtiruvchi $\vec{N}(c_1^*;c_2^*)$ vektor bo'lib, bu vektor ***normal vektor*** deb nomlanadi.

Faraz qilaylik to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan ko'pburchak ***ABCDE*** beshburchakdan iborat bo'lsin. Bu besh burchakning shunday nuqtasini topish kerakki, bunda $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ uning asosi bo'lishi kerak va **Z** minimal bo'lib, uning qiymati $\vec{N}(c_1^*;c_2^*)$ normal vektor bo'yicha o'sadi.

Shuning uchun $Z_{\min(\max)} = c_1x_1 + c_2x_2 = const$ to'g'ri chiziqni o'ziga parallel holda $\vec{N}(c_1^*;c_2^*)$ normal yo'nalishi bo'yicha ko'chiramiz.



1.1-шакл

$Z = c_1x_1 + c_2x_2$ chiziqli funksiyani ixtiyoriy o'zgarmas c_0 songa teng deb olinishi mumkin. Natijada $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Demak, bu to'g'ri chiziqni $\vec{N}(c_1^*; c_2^*)$ normal vektor yo'nalishida yoki unga teskari yo'nalishda o'ziga parallel surib borib, qavariq ko'pburchakning chiziqli funksiyaga eng kichik (katta) qiymat beruvchi chetki nuqtani aniqlaymiz.

Keltirilayotgan 1-shakldan ko'rinib turibdiki, $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ chiziqli funksiya o'zining minimal qiymatiga qavariq ko'pburchak (beshburchak)ning ***A*** nuqtasida erishadi. ***C*** nuqtada esa, u o'zining maksimal qiymatiga erishadi.

A$(x_{1a};x_{2a})$ nuqtaning koordinatalari masalaning $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ funksiyaga minimal qiymat beruvchi optimal yechim bo'ladi, ya'ni $Z = c_1x_{1a} + c_2x_{2a}$. Bu nuqtaning koordinatalari ***AB*** va ***AE*** to'g'ri chiziqlarni ifodalovchi tenglamalar sistemasini yechish orqali aniqlanadi.

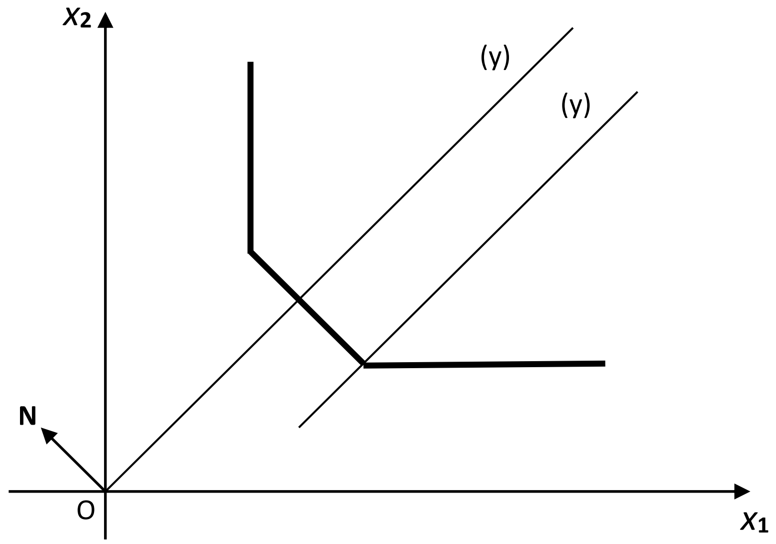
C$(x_{1s};x_{2s})$ nuqtaning koordinatalari masalaning $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ chiziqli funksiyaga maksimal qiymat beruvchi optimal yechim bo'ladi, ya'ni $Z_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2$.

Bu nuqtaning koordinatalari ***BC*** va ***CD*** to'g'ri chiziqlarni ifodalovchi tenglamalar sistemasini yechish orqali aniqlanadi.

Ma'lumki, ko'pburchaklar chegralangan (yopiq) va chegaralanmagan (ochiq) bo'lishi mumkin.

ChPMda, ikki noma'lumli tengsizliklar (tenglamalar) sistemasi yechimlaridan tashkil topgan qavariq ko'pburchak chegralanmagan bo'lsa ikki hol bo'lishi mumkin.

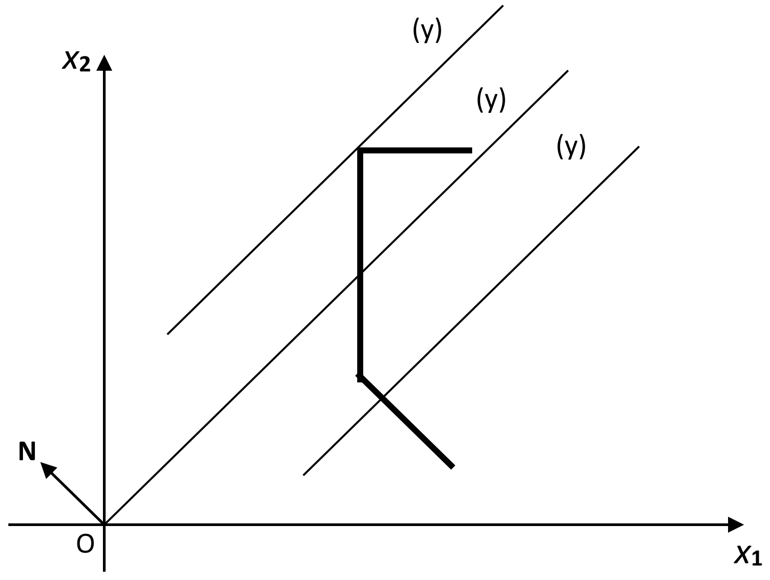
Birinchi hol. To'g'ri chiziq $\vec{N}(c_1^*;c_2^*)$ vektor bo'yicha yoki unga qarama-qarshi yunalishda siljib borib, har vaqt qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi. Ammo na maksimal va minimal qiymatga erishadi. Bu holda $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ chiziqli funksiya quyidan va yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi.



1.2-шакл

Ikkinchi hol. Berilgan $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ to'g'ri chiziq $\vec{N}(c_1^*;c_2^*)$ vektor bo'yicha siljib borib qavariq ko'pburchakning chetki nuqtasida minimum yoki maksimum qiymatiga erishadi.

Bunday holda chiziqli funksiya yuqoridan chegaralangan (1.3-shakl), quyidan esa chegaralanmagan bo'ladi.



1.3-шакл

1.3-masala. Grafik usuldan foydalanib $Z = 2x_1 + x_2$ funksiyaga eng katta qiymat beradigan hamda quyidagi tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi manfiy bo'lmagan yechimlar sohasini toping.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Masalaning yechilishi. Chegaraviy to'g'ri chiziqlarning tenglamalari yoziladi va koordinatalar tekisligida ularning grafiklari yasaladi.

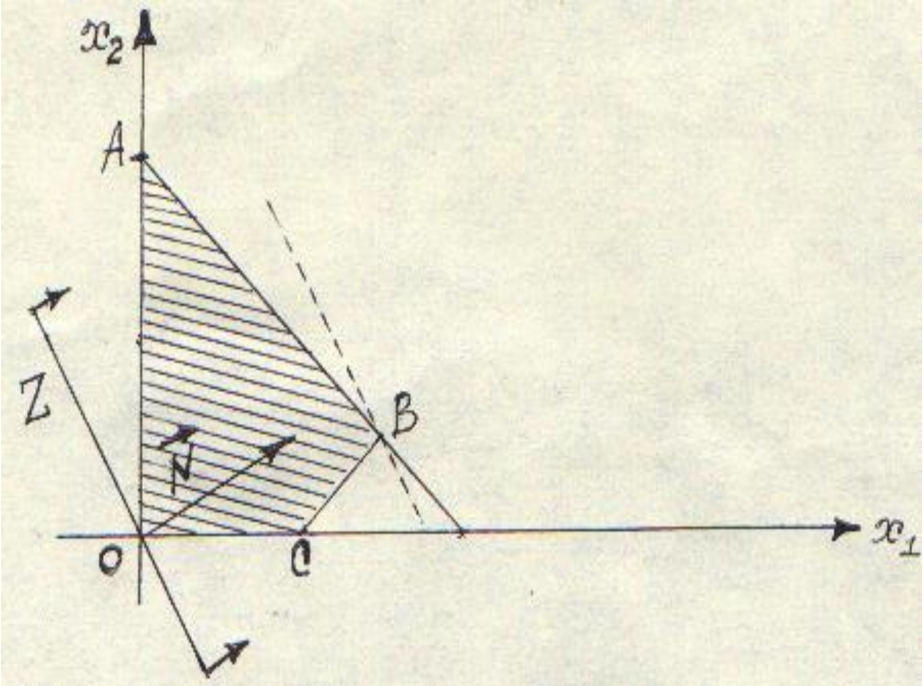
$$x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

Har bir tengsizlikning yechimlar sohasida yordamchi nuqta ajratib olinadi, bu nuqta sifatida O(0;0) nuqtani olish eng qulaydir. Yasalgan yarim tekisliklarning kesishmasi OADC ko'pburchak bo'ladi.



1.1– rasm

Maqsad funksiya ixtiyoriy songa tenglashtiriladi va hosil bo'lgan tenglamaga mos to'g'ri chiziq yasaladi;

$2x_1 + x_2 = 0$ to'g'ri chiziq koordinatalar boshi O(0;0) va yana bir nuqtadan o'tadi, bu nuqtaning koordinalarini aniqlash oson. To'g'ri chiziqni $\vec{N}$ (2;1) vektor yo'nalishida parallel ko'chirib borib, ekstremal nuqta $\mathrm{B}(x_1, x_2)$ topiladi. Bu nuqtaning koordinalari quyidagi tenglamalar sistemasini

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

birgalikda yechish orqali topiladi. Sistemaning birinchi tenglamasidan x_1– ni aniqlab, $x_1 = 4 - x_2$ ni sistemaning ikkinchi tenglamasidagi $x_1 -$ noma'lum o'zgaruvchining o'rniga qo'yib, x_2 –ni topamiz.

$$4 - x_2 - x_2 = 2$$
$$-2x_2 = -2$$
$$x_2 = 1$$

$x_2 -$ ning qiymatidan foydalanib, $x_1 -$ ni topamiz.

$$x_1 = 4 - 1$$
$$x_1 = 3$$

Demak: B (3; 1) ekan. Bundan max Z (3; 1) = 2·3+1 = 7 ekanligini aniqlaymiz.

1.4-masala. $z = 40x_1 + 20x_2$ maqsad fuksiyasining

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

shartlarni kanoatlantiruvchi maksimal optimal yechimi toping.

Masalaning yechilishi. Masalani yechish uchun

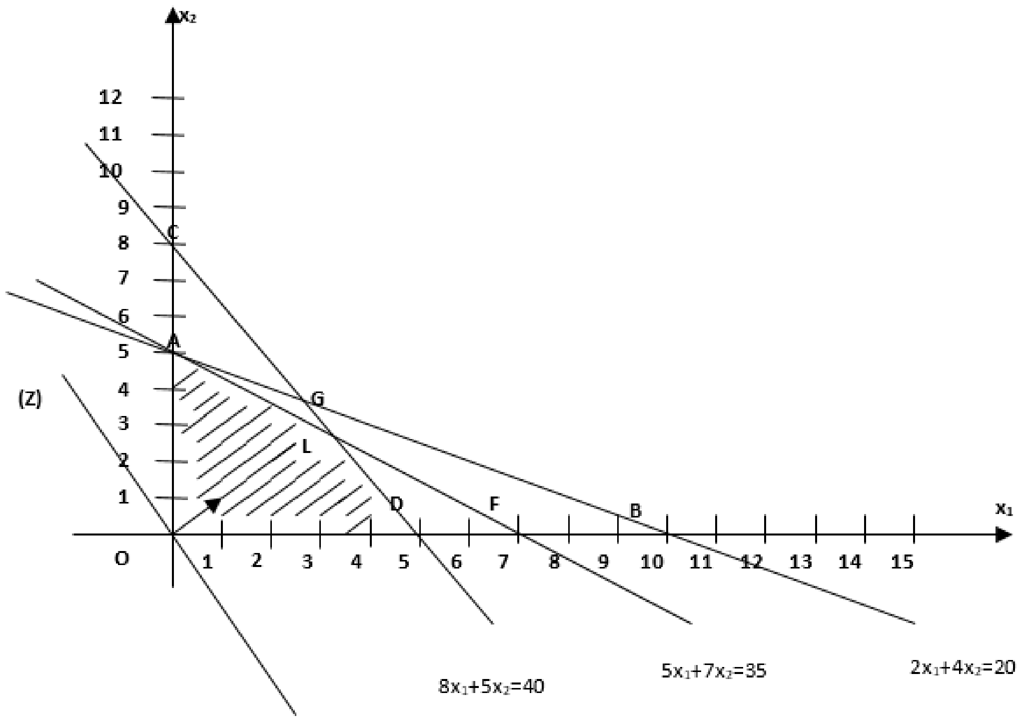
$$2x_1 + 4x_2 = 20(l_1)$$
$$8x_1 + 5x_2 = 40(l_2) \text{ t}$$
$$5x_1 + 7x_2 = 35(l_3)$$

to'g'ri chiiqlarni ikki o'lchovli dekart koordinatalar sistemasida yasaymiz. $2x_1 + 4x_2 = 20,(l_1)$ $\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{5} = 1,(l_2)$

XOY koordinatalar sistemasida yasaymiz (l_1) va (l_2) chiziqni chizamiz. l_1 to'g'ri chiziqni A(0;5) va V(10;0) nuqtalardan o'tkazib yasaymiz.

$$8x_1+5x_2=40,(l_2) \quad \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{8} = 1,(l_2)$$

S (0;8) va D (5;0) nuqtalardan o'tkazib (l_2) chiziqni yasaymiz.



1.2– rasm

$$5x_1 + 7x_2 = 35,(l_3)$$
$$\frac{x_1}{7} + \frac{x_2}{5} = 1,(l_3)$$

F (7;0) va A (0;5) nuqtalardan o’tkazib l_3 chiziqni yasaymiz.

Yechimlar sohasi ALDO to’rtburchakdan iborat.Endi $40x_1+20x_2=0$,(Z) to’g’ri chiziqni yasaymiz. Bundan $20x_2=-40x_1$, hosil qilamiz. $x_2=-2x_1$, (Z) to’g’ri chiziqni grafigini hosil qilish uchun O(0;0) va T (1;-2) nuqtalardan to’g’ri chiziq o’tkazamiz. Natijada (Z) chiziq hosil bo’ladi. N = (40;20) :11= (4;2) ni aniklaymiz.

(Z) chiziq N nuqtaga perpendikulyar bo’ladi. (Z) chiziqni N nuqta yo’nalishi buyicha siljitib optimal yechimni topish mumkin. Endi L nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz. Buning uchun l_2 va l_3 chiziqlarni kesishishidan hosil bo’lganligi uchun $\begin{cases} 8x_1+5x_2=40 \\ 5x_1+7x_2=35 \end{cases}$ sistemasini yechamiz.

$x_1+0,625x_2=5$,(*) tenglamani 5 ga ko’paytirib, sistemaning ikkinchi tenglamasidan ayiramiz. $3,875x_2=10$; $x_2=\frac{10}{3,875}=2,581$ ni hosil qildik. x_2 ni (*) ga qo’yib x_1=5-0,625*(2,581)=5-1,613=3,387. Demak, L(3.387;2,581) ni hosil qildik. N(4;2) buyicha siljitganimizda oxirgi eng keyin D nuqtaga uriladi. Shuning uchun D(5;0) nuqta optimal yechimi ekanligi kelib chiqadi: Z(D)=40*5+20*0=200 .

Demak optimal yechim $x_1=5$; $x_2=0$ dan iborat bo’lib, Z=200 dan iborat ekan.

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yeching.

1.1.

$$z=x_1+2x_2\to\max$$
$$\begin{cases} x_1+4x_2\le14 \\ 3x_1+4x_2\le16 \\ 5x_1+4x_2\le18 \\ -3x_1+2x_2\ge6 \\ x_1\ge0, x_2\ge0 \end{cases}$$

J.: Z_{max}=50/7.

x_1 =2/7, x_2 = 24/7.

1.2.

$$z=x_1+2x_2\to\min$$
$$\begin{cases} x_1+4x_2\le14 \\ 3x_1+4x_2\le16 \\ 5x_1+4x_2\le18 \\ -3x_1+2x_2\ge6 \\ x_1\ge0, x_2\ge0 \end{cases}$$

J.: Z_{min}=6. x_1 =0, x_2 = 3.

1.3.

$$z=x_1+2x_2\to\max$$
$$\begin{cases} x_1+4x_2\ge14 \\ 3x_1+4x_2\le16 \\ 5x_1+4x_2\le18 \\ -3x_1+2x_2\le6 \\ x_1\ge0, x_2\ge0 \end{cases}$$

J.: Z_{max}=70/9.

x_1 =4/9, x_2 = 11/3.

1.4.

$$z=x_1+2x_2\to\min$$
$$\begin{cases} x_1+4x_2\ge14 \\ 3x_1+4x_2\le16 \\ 5x_1+4x_2\le18 \\ -3x_1+2x_2\le6 \\ x_1\ge0, x_2\ge0 \end{cases}$$

1.5.

$$z=3x_1+4x_2\to\max$$
$$\begin{cases} x_1+3x_2\le12 \\ 2x_1+4x_2\le9 \\ 5x_1+4x_2\le18 \\ -3x_1+2x_2\le10 \\ x_1\ge0, x_2\ge0 \end{cases}$$

1.6.

$$z=3x_1+4x_2\to\max$$
$$\begin{cases} x_1+3x_2\le12 \\ 2x_1+4x_2\ge9 \\ 5x_1+4x_2\le18 \\ -3x_1+2x_2\le10 \\ x_1\ge0, x_2\ge0 \end{cases}$$

J.: Z_{min}=50/7

x_1 =2/7, x_2 = 24/7.

J.: Z_{max}= 12

x_1 = 3, x_2 = ¾.

J.: Z_{max}= 186/11

x_1 = 6/11, x_2 =42/11.

1.7.

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 9 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 18 \\ -3x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Z_{min}= 9.

.x_1 = 0, x_2 =9/4.

1.8.

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 9 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 18 \\ -3x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.:Z_{max}= 18.

x_1 = 0, x_2 =9/2.

1.9.

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 \le 12 \\ -3x_1 + 2x_2 = 32 \\ 5x_1 - 2x_2 \ge 24 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$Z_{min}=2x_1+3x_2$

J.: Z_{min}= 230.

x_1 = 28, x_2 = 58.

1.10.

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 18 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{max}= 18.

x_1 = 6, x_2 = 0.

1.11.

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 18 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{max}= 236/7.

x_1 = 22/7, x_2 = 34/7.

1.12.

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 18 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{min}= 24.

x_1 = 8, x_2 = 0.

1.13.

$$Z = 6x_1 - 3x \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 10 \\ 8x_1 - 4x_2 \le 32 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1=5/21 x_2=0,

Z_{max}=10/7

1.14.

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 15 \\ 2x_1 - 4x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 18 \\ x_1 \ge, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1=5, x_2=1/2,

Z_{max}=27

1.15.

$$Z = 10x_1 + 20x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1=0, x_2=4,

Z_{max}=80

1.16.

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 2x_1 - 9x_2 \le 18 \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 14 \\ x_1 - 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.17.

$$Z = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 3x_1 - 6x_2 \le 18 \\ -6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.18.

$$Z = 4x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 3x_1 - 6x_2 \le 18 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: x_1= 84 va x_2 = 18 da Z_{max} = 258. x_1= 0 va x_2 = 7/4. Z_{min} = 35/4.

Javob: x_1= 106/3 va x_2 = 44/3 da Z_{max} = 556/3. Z_{min} = 0, x_1=0 va x_2 =0.

Javob: x_1=0 va x_2 =1 da Z_{max} = 5.

1.19.

$$Z = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \ge 30 \\ 3x_1 - 6x_2 \ge 18 \\ -6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Javob: x_1= 36/11 va x_2 =85/11. Z_{max} = 99/11.

1.20.

$$Z = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \ge 30 \\ 3x_1 - 6x_2 \ge 18 \\ -6x_1 + 7x_2 \ge 42 \\ x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Javob: x_1= 35/13 x_2 =108/3. Z_{max}= 464/13.

1.21.

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 2x_1 - 9x_2 \le 18 \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 14 \\ x_1 - 4x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: x_1= 108 va x_1 = 22 da Z_{max} = 326. x_1= 36, x_2 = 6 da Z_{min} = 102.

1.22.

$$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 3x_1 - 8x_2 \le 24 \\ -5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ -x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Javob: x_1= 48/5 va x_2 = 3/5 da Z_{max} =108/5.

1.23.

$$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 3x_1 - 8x_2 \ge 24 \\ -5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ -x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J. x_1 = 12 va x_2 = 0 da Z_{max} = 24. x_1 =8,x_2 = 0. Z_{min} =16.

1.24.

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 2x_1 - 9x_2 \le 18 \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 14 \\ x_1 - 4x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: x_1= 108 va x_1 = 22 da Z_{max} = 326. x_1= 36, x_2 = 6 da Z_{min} = 102.

1.25.

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1=4, x_2=0, Z_{max}=12 .

1.26.

$$Z = -2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \le 20 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 = 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1=0, x_2=6, Z_{max}=18

1.27.

$$Z = -5x_1 + 4x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 - 6x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1=2, x_2=0, Z_{min}=-10.

1.27.

1.28.

1.29.

$Z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1=2/5$, $x_2=24/5$, $Z_{max}=154/5$

$Z = 4x_1 - 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1=2$, $x_2=0$, $Z_{max}=8$

$Z = 10x_1 - 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ 7x_1 - 8x_2 \le 56 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1=4$, $x_2=0$, $Z_{max}=40$

1.30.

Z= $-5x_1+6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1=0$, $x_2=4$,

$Z_{max}=24$

1.31.

Z=$10x_1 - 20x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \le 10 \\ 4x_1 - 5x_2 \le 20 \\ 7x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1=2$, $x_2=0$,

$Z_{max}=1$

1.32.

Z=$6x_1 - 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ 5x_1 - 4x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1=3$, $x_2=0$,

$Z_{max}=18$

MUHOKAMA UCHUN NAZORAT SAVOLLARI

1.Ikki o'lchovli ChPMni geometrik tasvirlashda, tengsiziklarning har biri qanday chiziqlar bilan chegaralangan bo'ladi?

2.Maqsad funksiyasini ifodalovchi to'g'ri chiziq va uning normali qanday tuziladi va u qanday mazmunga ega bo'ladi?

3.ChPMda (ikki o'lchovli uchun) ko'pburchaklar chegralangan (yopiq) va chegaralanmagan (ochiq) bo'lishi qanday mazmunga ega bo'ladi?

4.ChPMda (ikki o'lchovli uchun) ko'pburchaklar ko'pburchaklar qachon yuqoridan va quyidan chegralangan bo'lishi qanday mazmunga ega bo'ladi?

5.Chiziqli tengsizliklar nima va ularning geometrik ma'nosini ayting.

6.Ikki o'lchovli ChPMlarini geometrik talqinini ayting.

7.Ikki o'lchovli ChPMlarini geometrik talqinida maqsad funksiyasini: a) maksimal; b) minimal; c) cheksiz ko'p yechimga ega; d) yechimga ega emasligini ifodalovchi grafiklarini keltiring va izohlang.

2-BOB. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASINING SIMPLEKS ALGORITMI

2.1. Chiziqli programmalashtirish masalasida tenglamalar sistemasining nomanfiy yechimlarini topish

Chiziqli programmalashtirish masalalarining tayan yechimi Jardano-Gauss usuli yordamida topiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasining tayanch yechimlarini topish masalasini Jardano-Gauss usuli qaraymiz.

Quyidagi n ta noma'lumli m ta tenglamadan iborat chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi berilgan va $m \geq n$ bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 ... + ... + a_{1i}x_i + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 ... + ... + a_{2i}x_i + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 ... + ... + a_{3i}x_i + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ .... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 ... + ... + a_{ki}x_i + ... + a_{kn}x_n = b_k, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 ... + ... + a_{ni}x_i + ... + a_{nn}x_n = b_m \end{cases} \quad , (2.2.1)$$

(2.2.1) tenglamalar sistemasida

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \; ... a_{1i} \; ... a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \; ... a_{2i} \; ... a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \; ... a_{3i} \; ... a_{3n} \\ .... & .... & .... \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \; ... a_{ki} \; ... a_{kn} \\ .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \; ... a_{ni} \; ... a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_k \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_k \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (2.2.2)$$

belgilashlar kirisak, tenglamalar sistemasi quyidagicha bo`ladi:

$A \cdot X = B$,(2.2.3)

Quyida Jordan-Gauss jadvalini tuzamiz:

2.1.1-jadval

Qadam	**x1**	**x2**	**…**	**xn**	**b**	**yig'indi**
Berilgan	$\boxed{a_{11}}$	a_{12}	…	a_{1n}	b_1	$s_1 = a_{11} + a_{12} + ... + a_{n1} + b_1$
	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2	$s_2 = a_{21} + a_{22} + ... + a_{n2} + b_2$
	….	….		…	…	….
	a_{n1}	a_{n2}		a_{nn}	b_1	$s_n = a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{nn} + b_n$

2.1.1-jadvalda $a_{11} \neq 0$ bo`lsa, hisoblash to`g`ridan to`g`riboshlanadi. $a_{11} = 0$ bo`lsa, hal qiluvchi element, qolgan ustunlardan birining nol bo`lmagan sonlaridan biri bo`ladi. Hal qiluvchi element joylari almashgandan so`ng $a'_{11} = a_{21} \neq 0$ bo`ladi. Hal qiluvchi element satrning barcha elementlari bo`linadigan son.

Aytaylik, hal qiluvchi element $a_{11} \neq 0$ bo`lsin, u holda

1. 1-satr hal qiluvchi satr bo`lib, halqiluvchi element $a_{11} \neq 0$ dan iborat.
2. 1-satrning qogan elemenrlari quyidagicha bo`ladi:

1-elementi $\frac{a_{11}}{a_{11}} = 1$; 2-elementi $a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$; 3-elementi $a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$;…;n-elementi $a'_{1n} = \frac{a_{1n}}{a_{11}}$, (n+1)-elementi $b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$; yig`indi satr $s_1 = a_{11} + a_{12} + ... + a_{n1} + b_1$.

3. x_1 ustunning qogan elementlari; $a'_{21} = a'_{31} = ... = a'_{n1} = 0$.

Izoh. Hal qiluvchi elemendan foydalanib, boshqa satr elementlari quyidagigha topiladi;

	k	l
i	$\boldsymbol{a_{ik}}$	$\boldsymbol{a_{il}}$
j	$\boxed{\boldsymbol{a_{jk}}}$	$\boldsymbol{a_{jl}}$

a_{jl} elementning o`rniga qo`yiladigan element quyidagicha topiladi:

$$a'_{jl} = a_{jl} - \frac{a_{il} \cdot a_{jk}}{a_{ik}}, \quad (2.1.3)$$

4. x_2, …, x_n , b, s ustunning qolgan elementlarini quyidagicha topamiz:

x_2 ustunning qolgan elementlari

$$a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}}; \; \dots \; ; a'_{n2} = a_{n2} - \frac{a_{12} \cdot a_{n1}}{a_{11}}; \dots;$$

…

x_n ustunning qolgan elementlari

$$a'_{2n} = a_{2n} - \frac{a_{21} \cdot a_{1n}}{a_{11}}; \; \dots; a'_{nn} = a_{nn} - \frac{a_{n1} \cdot a_{1n}}{a_{11}}; \dots$$

…

b ustunning qolgan elementlari

$$b'_2 = b_2 - \frac{b_1 \cdot a_{21}}{a_{11}}; \dots; \; b'_n = b_n - \frac{b_1 \cdot a_{n1}}{a_{11}}; \dots$$

…

s ustunning qolgan elementlari

$$s'_2 = s'_2 - \frac{s_1 \cdot a_{21}}{a_{11}}, \dots; s'_2 = s'_2 - \frac{s_1 \cdot a_{11}}{a_{11}}.$$

Hisoblash natijalarini 2.1.2-jadvalga qo`yamiz.

2.1.2-jadval

Qadam	x_1	x_2	…	x_n	b	yig'indi
1-qada	$\frac{a_{11}}{a_{11}}$	$a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$	…	$a'_{1n} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$	$b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$	$1 + a'_{12} + ... + a'_{1n} + b'_1$

	0	$a'_{22}=a_{22}-\frac{a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}}$	...	$a'_{2n}=a_{2n}-\frac{a_{21}\cdot a_{1n}}{a_{11}}$	$b'_2=b_2-\frac{b_1\cdot a_{21}}{a_{11}}$	$s'_2=s'_2-\frac{s_1\cdot a_{21}}{a_{11}}$
	....	....		...	...	....
	0	$a'_{n2}=a_{n2}-\frac{a_{12}\cdot a_{n1}}{a_{11}}$	...	$a'_{nn}=a_{nn}-\frac{a_{n1}\cdot a_{1n}}{a_{11}}$	$b'_n=b_n-\frac{b_1\cdot a_{n1}}{a_{11}}$	$s'_2=s'_2-\frac{s_1\cdot a_{11}}{a_{11}}$

Hisoblashlar n-qadamgacha davom ettiriladi va masalaning yechimi topiladi. aniqlik uchun quyidagi masalani ko`rib chiqamiz.

2.1-masala.

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2 \\ 4x_1-3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \end{cases}$$

Yechish: Jadval tuzamiz.

2.1.3-jadval

Qadam	**x1**	**x2**	**x3**	**b**	**yig'indi**
Berilgan	$\boxed{1}$	1	-1	-2	-1
	4	-3	1	1	3
	2	1	-1	1	3
	x1	**x2**	**x3**	**b**	**yig'indi**
1-qadam hisoblash	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-1}{1}$
	0	$-3-\frac{4\cdot 1}{1}$	$1-\frac{-1\cdot 4}{1}$	$1-\frac{-2\cdot 4}{1}$	$3-\frac{-1\cdot 4}{1}$
	0	$1-\frac{1\cdot 2}{1}$	$-1-\frac{-1\cdot 2}{1}$	$1-\frac{-2\cdot 2}{1}$	$3-\frac{-1\cdot 2}{1}$
	x1	**x2**	**x3**	**b**	**yig'indi**
1-qadam natija	1	1	-1	-2	-1
	0	$\boxed{-\ 7}$	5	9	7
	0	-1	1	5	5
	x1	**x2**	**x3**	**b**	**yig'indi**
2-qadam hisoblash	1	0	$-1-\frac{5\cdot 1}{-7}$	$-2-\frac{9\cdot 1}{-7}$	$-1-\frac{7\cdot 1}{-7}$
	0	1	$\frac{-5}{7}$	$\frac{-9}{7}$	-1
	0	0	$1-\frac{5\cdot(-1)}{-7}$	$5-\frac{9\cdot(-1)}{-7}$	$5-\frac{7\cdot(-1)}{-7}$
2-qadam natija	1	0	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-5}{7}$	0
	0	1	$\frac{-5}{7}$	$\frac{-9}{7}$	-1

	0	0	$\boxed{2/7}$	$\frac{26}{7}$	4
	x1	**x2**	**x3**	**b**	**yig’indi**
3-qadam hisoblash	1	0	0	$-\frac{5}{7}-\frac{-\frac{2}{7}\cdot\frac{26}{7}}{\frac{2}{7}}$	$0-\frac{-\frac{2}{7}\cdot 4}{\frac{2}{7}}$
	0	1	0	$-\frac{9}{7}-\frac{-\frac{5}{7}\cdot\frac{26}{7}}{\frac{2}{7}}$	$-1-\frac{-4\cdot\frac{5}{7}}{\frac{2}{7}}$
	0	0	1	$\frac{\frac{26}{7}}{\frac{2}{7}}$	$\frac{4}{2/7}$
	x1	**x2**	**x3**	**b**	**yig’indi**
3-qadam natija	1	0	0	3	4
	0	1	0	8	9
	0	0	1	13	14

Tenglama yechimi:

$x_1=3$; $x_2=8$; $x_3=13$.

Tekshirish:

$x_1=3$; $x_2=8$; $x_3=13$.

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2 \\ 4x_1-3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} 3+8-13=-2 \\ 4\cdot 3-3\cdot 8+13=1 \\ 2\cdot 3+8-13=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 11-13=-2 \\ 12-24+13=1 \\ 6+8-13=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -2=-2 \\ 1=1 \\ 1=1 \end{cases}$

Ma’lumki chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimi, barcha yechimlardan tashkil topgan qavariq to’plamning chetki nuqtalari orasida bo’ladi. Biz buni ikki o’lchamli chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqinida ko’rganmiz.

Simpleks usuli bilan topilgan tayanch rejalarning optimalligi tekshirib boriladi.

Chiziqli programmalashtirish masalalarini yechishni simpleks usuli bir tayanch rejasidan boshqa tayanch rejasiga o’tishga asoslangan bo’lib, qaysikim bu yerda maqsad funksiyasini qiymati o`zgarib boradi. Simpleks usulining mohiyati shundan iboratki, dastavval ChPMdagi barcha shartlarnhibi qanoatlantiruvchi ***mumkin bo’lgan tayanch reja*** topiladi.

Boshlang’ich tayanch reja chekli sondagi etap (simpleks)dan keyin optimal rejani hosil qilish yo’lini ko’rsatadi va har bir navbatdagi simpleks oldingisiga nisbatan optimal rejaga yaqinroq rejani beradi. Masalani yechish jarayoni optimal yechim topilguncha yoki masalaning maqsad funksiyasi chekli maksimum (minimum)ga ega emasligi aniqlanguncha davom ettiriladi.

Demak, ChPM simpleks usuli bilan yechilganda, berilgan masalaning barcha shartlarini qanoatlantiruvchi boshlang'ich tayanch reja topiladi. Bu boshlang'ich tayanch rejaga asoslanib chekli sondagi simplekslar (bir simpleks jadvalidan, navbatdagi simpleks jadvaliga o'tish) bilan navbatdagi yangi tayanch rejlarni topish va ularning optimalligini tekshirib borish, masalaning optimal yechimga ega ekanligi aniqlanguncha davom ettiriladi.

Chiziqli programmalashtirishning umumiy masalasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad . \end{cases} \qquad (2.1.4)$$

(2.1) - tenglamalar sistemasining shunday musbat yechimlarini topish kerakki, natijada

$$\mathrm{Z} = \mathrm{c}_1\,\mathrm{x}_1 + \mathrm{c}_2\,\mathrm{x}_2 + \ldots + \mathrm{n}_\mathrm{n}\,\mathrm{x}_\mathrm{n} \qquad (2.1.5)$$

chiziqli funksiya eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymatga ega bo'lsin.(2.1.4) tengsizlilar sistemasini quyidagi tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad . \end{cases} ,(2.1.6)$$

(2.1.5) ni quyidagi shaklga keltiramiz:

$$Z - (c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+1} + 0x_{n+m)}) \ge 0,\ (2.1.7)$$

(2.1.6) tenglamalar sistemasidan $x_{n+1},\ x_{n+2}, \ldots,\ x_{n+m}$ lar topiladi:

$$\begin{cases} x_{n+1} = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) \\ x_{n+2} = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{n+m} = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad . \end{cases} ,(2.1.8)$$

Topilgan (2.1.8) sistemadan qoidaga ko'ra asosiy noma'lumlar nolga tenglashtirib olinadi, ya'ni:

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0\,.$$

Natijada quyidagi boshlang'ich tayanch rejaga ega bo'lamiz (bu yerda masalaning berilishidagi ozod hadlar musbat deb qaralmoqda):

$x_{n+1} = b_1$ **,** $x_{n+2} = b_2$ **,...,** $x_{n+m} = b_m$ **; Z_{max} =0.**

2.2. Standart ko'rinishdagi masalani simpleks usulda yechish

Chiziqli programmalashtirish masalalarini yechishning eng universal usullaridan biri simpleks usulidir. Bu universal usul 1949 yilda amerikalik olim **J. Dansig** tomonidan ishlab chiqilgan.

1. Chiziqli programmalashtirishning umumiy masalasini qiymatini hisoblash

Chiziqli programmalashtirishning umumiy masalasi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad . \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

(2.1) - tenglamalar sistemasining shunday musbat yechimlarini topish kerakki, natijada

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + n_n x_n \qquad , \quad (2.2.2)$$

maksimum qiymatga ega bo'lsin.

Simpleks usulda maxsimumga masala yechilishi uchun m+1 satrninig O ustuni bilan kesishgan elementidan tashqari barcha elementlari musbat sonlar yoki nollardan iborat bolishi lozim.

(2.1.7) va (2.1.8) formulalar asosida quyidagi simpleks jadvalni tuzamiz.

2.2.1-jadval

qadam	B	S	O							
				c_1	c_2	...	c_n	c_{n+1}	...	c_{n+m}
berilgan	X_{n+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	...	0
	X_{n+2}	0	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{nn}	0	...	0
	…	…	…	...	...	...	...	…	...	…
	X_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	...	1
m+1	Z_j - C_j		0	p_1	p_2	...	p_n	p_{n+1}	….	p_{n+m}…

Endi ChP masalasini maksimumga yechilishini ko`rib chqaylik.

Optimal rejani topish algoritmi

ChPM ning simpleks jadvalida **Z_j - C_j** indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffisiyentlari musbat bo'lsa masala optimal yechimga ega bo'ladi. Simpleks usuli bilan

ChPMni optimal yechimini topishda **Z_j - C_j** indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffisiyentlari musbat ishoraga keltirish maqsad qilib qo'yiladi.

Simpleks jadvalida **Z_j - C_j** indeks qatoridagi noma'lumlarining koeffisiyentlaridan bittasi yoki bir nechtasi manfiy bo'lganida hal qiluvchi elementni tanlashda quyidagi munosabatlar amalga oshishi mumkin.

Simpleks jadvalida hal qiluvchi ustunni (HQU) tanlash

Agar **Z_j - C_j** indeks qatoridagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumlarning $c_1, c_2, \dots, c_n$ koeffisiyentlardan birortasi ***manfiy*** ishorali son bo'lsa, shu ***manfiy*** ishorali son to'rgan ustun HQU bo'ladi.

Agar **Z_j - C_j** indeks qatorida bunday manfiy sonlar bir nechta bo'lsa, u vaqtda HQUni tanlash uchun shu ***manfiy*** sonlarning absolyut qiymatlari bo'yicha eng kattasi olinadi. Bu sonlar ichida, ulardan bir nechtasi bir - biriga teng bo'lsa, u holda ulardan hohlagan birini olib bosh ustun uchun tanlanadi.

Simpleks jadvalida hal qiluvchi satrni (HQS) tanlash

Simpleks jadvalida **HQS**ni tanlash uchun **B_i** ozod hadlar ustunidagi hamma sonlarni (agar ularning ishorasi bir xil bo'lsa) **HQU**dagi mos kelgan sonlarga bo'lib, ulardan eng kichigi tanlanadi. Bu qiymat simpleks jadvadagi $\frac{b_i}{a_{ij}}$ ustunga yoziladi. Bunda bir xil kichik sonlar bir nechta bo'lsa, ulardan xohlagan birini **HQS** qilib tanlash mumkin.

Simpleks jadvalini hal qiluvchi elementi (HQE)

Simpleks jadvalidagi **HQU** va **HQS** ning kesishgan kattagidagi son hal qiluvchi element **(HQE)** bo'ladi.

Yangi simpleks jadvaliga o'tish

Hal qiluvchi ustun, hal qiluvchi satr va hal qiluvchi element topilgach yangi simpleks jadvalidagi hamma sonlar Jordan chiqarish usuli yordamida topiladi, ya'ni:

Hal qiluvchi satrdagi hamma elementlar hal qiluvchi elementga bo'linadi va ishorasi o'zgartirilmasdan yoziladi;

Hal qiluvchi ustundagi qolgan hamma elementlar o'rniga nol yoziladi.

Simpleks usul bilan masalani yechishda dastlab tayanch yechim topiladi. Topilgan tanyanch yechim:

I. ChP masalasi maksimumga yechiladigan bo`lsa, simpleks jadvalning m+1 qatoridagi O ustundagi elementdan boshqa miqdorlari $Z_j$-$C_j \geq 0$ bo`lganda optimal yechim;

II. ChP masalasi minimumga yechiladigan bo`lsa, simpleks jadvalning m+1 qatoridagi B ustundagi elementdan boshqa miqdorlari $Z_j$-$C_j \leq 0$ bo`lganda optimal yechim bo`ladi.

Agar yechim optimal bo`lmasa, u holda ChP masalasini maksimumga yechishda quyidagi ishlar amalga oshiriladi:

1) Chiziqli programmalashtirishning umumiy masalasi quyidagi jadvala bo`lsin.

2.2.2-jadval

qadam	B	S	O							
				c_1	c_2	…	c_n	c_{n+1}	…	c_{n+m}
berilgan	X_{n+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1		0
	X_{n+2}	0	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{nn}	0		0
	…	…	…	…	…	…	…	…		…
	X_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0		1
m+1	Z_j - C_j		0	p_1	p_2	…	p_{n+1}			p_{n+m}

Bu erda m+1 satrdagi p_1 , p_2 va p_n elementlar manfiiy sonlar bo`lsin. Bu sonlarning absolyut qiymatlari taqqoslanadi. Bu yerda p2 ning absolyut qiymati p_1 va p_n elementlar manfiiy sonlarining absolyut qiymatlaridan katta. Shuning uchun p2 absolyut qiymati hal qiluvchi ustun sifatida olinadi.

2) Hal qiluvchi elementni toppish kerak va hal qilivchi element musbat son bo`lishi lozim. Buning uchun $p_2$ ustunda joylashgan manfiy elementlarni e`tiborga olmamiz. Musbat elementlar

a_{12} *va* a_{m2}lar bo`lsin. Hal qiluvchi elementni toppish quyidagicha amalga oshiriladi:

$\min\left(\frac{b_1}{a_{12}}, \frac{b_m}{a_{m2}}\right) = \frac{b_m}{a_{m2}}$ bo`lsa, hal qiluvchi element $a_{2n}$ bo`ladi. Hal qiluvchi element nolga va manfiy songa teng bo`lmasligi shart. Chunki nolga bulish mumkin emas. Hal qiluvchi elementni o`rniga keladigan element hal qiluvchi elementga bo`linib yoziladi, ya'ni 1 soni bo`ladi.

3) Hal qiluvchi element o'zi- o'ziga bo'linadi, hal qiluvchi element o'rniga 1 son yoziladi.

4) Hal qiluvchi ustunning qolgan elementlari nolga teng, demak, ularning o'rniga 0 soni yoziladi.

5) Hal qiluvchi strning qolgan elementlari hal qiluvchi elementga bo'linib, ularning elementlari o'rniga yoziladi.

6) Qolgan elementlar elementlar jadvalda quyidagicha joylashgan va ***a_{ik}- hal qiluvchi element bo'lsa, ya'ni***

	2	j
1	a_{21}	a_{2j}
m	$\boxed{a_{m2}}$	a_{mj}

Qolgan elementlar quyidagi formula bilan topiladi:

$$a'_{2j} = a_{2j} - \frac{a_{21} \cdot a_{mj}}{a_{m2}} \quad .$$

Umumiy holda halqiluvchi element quyidagicha bo`lsa,

	k	m
i	$\boxed{a_{ik}}$	a_{im}
j	a_{jk}	a_{jm}

Qolgan elementlar quyidagi formula bilan topiladi:

$$a'_{jm} = a_{jm} - \frac{a_{im} \cdot a_{jk}}{a_{ik}}$$

1)- 6) jarayon Z_j-$C_j \geq 0$ bo`lganda tugaydi va masala optimal yechimga ega bo`ladi.

2.1- masala. Chiziqli programmalashtirish masalasi simpleks usul bilan yechilsin.

Maqsad funksiyasi: $z = 10x_1 + 5x_1 + 15x_3$

Chegaraviy shartlari: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 110 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 150 \\ 6x_1 + 12x_2 + 18x_3 \leq 180 \end{cases}$

Cheklashlari: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Endi berilgan masalani simpleks usul bilan yechish uchun jadval tuzamiz. Buning uchun chegaraviy shartlar tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga aylantirish kerak. Tengsizliklar sistemasining har bir satriga bazis noma'lumlarni qo'shamiz va quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 = 110 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_5 = 150 \\ 6x_1 + 12x_2 + 18x_3 + x_6 = 180 \end{cases}$$

bunda x_4, x_5, x_6 – bazis noma'lumlar. Tenglamalar sistemasidagi tenglamalardan x_4, x_5, x_6 -- bazis noma'lumlarlarni aniklaymiz:

$$\begin{cases} x_4 = 110 - (2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4) \\ x_5 = 150 - (4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_5) \\ x_6 = 180 - (6x_1 + 12x_2 + 18x_3 + x_6) \end{cases}$$

Bu yerda $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ desak, $B_1 = \{0; 0; 0; 110; 150; 180\}$ bazis yechim hosil bo'ladi.

Endi quyida dastlabki jadvalni hosil qilamiz:

2.2.3-jadval

Kadam	B	C	O	10	5	15	0	0	0
				c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
Berilgan	X_4	0	110	2	5	10	1	0	0
	X_5	0	150	4	5	2	0	1	0
	X_6	0	180	6	12	$\boxed{18}$	0	0	1
m+1	Z_j - C_j		0	-10	-5	-15	0	0	0

Simplek usulda bazis yechim m+1 satr elementlari $Z_j - C_j \geq 0$ *, буерда* $j = 1,2,3,4,5,6$ bo'lganda optimal yechim bo'ladi. Aks holda masalaning yechimi simpleks usul bilan izlanadi. Bu yerda m+1 satr elementlari manfiy sonlar va nollardan iborat. Shuning uchun masalani yechishni davom ettiramiz. Bu yerda m+1 satr elementlari manfiy sonlarni yo'qotish uchun dastlab absolyut qiymati kattasi tanlanadi. Ya'ni, -15 demak, hal qiluchi ustun tanlandi. Bu ustundagi satr elementlarining musbatlari tanlanadi. Bu ustundagi 10; 2; 18 elementlarning barchasi musbat. Bular ichidan hal qiluvchi element tanlanadi. Hal qiluvchi elementni topish uchun $\min\left\{\frac{110}{10}; \frac{150}{2}; \frac{180}{18}\right\} = \min\{11; 75; 10\} = \min\{10\} = 10$ ekanligidan 18 elementi hal qiluvchi element. Hal qiluvchi ustun va hal qiluvchi element kesishadigan satr hal qiluvchi satr deb nomlanadi. Jadvalning elementlari quyidagicha topiladi:

1. Hal qiluvchi element o'zi- o'ziga bo'linadi, hal qiluvchi element o'rniga 1 son yoziladi.
2. Hal qiluvchi ustunning qolgan elementlari nolga teng, demak, ularning o'rniga 0 soni yoziladi.

3. Hal qiluvchi strning qolgan elementlari hal qiluvchi elementga bo'linib, ularning elementlari o'rniga yoziladi.

4. Qolgan elementlar elementlar jadvalda quyidagicha joylashgan va ***a_{ik}- hal qiluvchi element bo'lsa, ya'ni***

Dastlabki, simpleks jadval asosida 1-simpleks jadvalni yasaymiz, ya'ni birinchi qadam:

2.2.4-jadval

qadam	B	C	O	10	5	15	0	0	0
				c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
I	X_4	0	10	-4/3	-5/3	0	1	0	-5/9
	X_5	0	130	10/3	11/3	0	0	1	-1/9
	X_3	15	10	$\boxed{1/3}$	2/3	1	0	0	1/18
m+1	$Z_j - C_j$		150	-5	5	0	0	0	5/6

Bu yerda m+1 satr elementlari manfiy sonlarni yo'qotish uchun dastlab absolyut qiymati kattasi tanlanadi. Ya'ni, -5 demak, hal qiluchi ustun tanlandi. Bu ustundagi satr elementlarining musbatlari tanlanadi. 1-simpleks jadval asosida hal qiluvchi elementni topish uchun $\min\left\{\frac{130}{10/3};\frac{10}{1/3};\frac{180}{18}\right\}=\min\{39;30\}=30$ ekanligidan 1/3 elementi hal qiluvchi element. 2-simpleks jadvalni yasaymiz, ya'ni ikkinchi qadam:

2.2.5-jadval

qadam	B	C	O	10	5	15	0	0	0
				c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
II	X_4	0	50	0	1	4	1	0	-1/3
	X_5	0	30	0	-3	-10	0	1	-2/3
	X_1	10	30	1	2	3	0	0	1/6
m+1	$Z_j - C_j$		300	0	15	15	0	0	5/3

Hisoblashlardan keyin m+1 satr elementlari musbat sonlar va nollardan iborat bo'ldi. 2-jadvalda Z_j-$C_j \geq 0$ hosil bo'ldi. Demak, x_1=30, x_2=0 , x_3=0 yechim bo'lib maqsad funksiya Z=300 optimal yechimga ega.

Chiziqli programmalashtirishning umumiy masalasini maksimum qiymatini hisoblash

Chiziqli programmalashtirishning umumiy masalasi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad . \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

(2.2.3) - tenglamalar sistemasining shunday musbat yechimlarini topish kerakki, natijada

$$Z = c_1\, x_1 + c_2\, x_2\, + \ldots + n_n\, x_n\,, \qquad (2.2.4)$$

minimum qiymatga ega bo'lsin.

Optimal rejani topish algoritmi

ChPM ning simpleks jadvalida **Z_j - C_j** indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffisiyentlari musbat bo'lsa masala optimal yechimga ega bo'ladi. Simpleks usuli bilan ChPMni optimal yechimini topishda **Z_j - C_j** indeks qatoridagi hamma noma'lumlarning koeffisiyentlari musbat ishoraga keltirish maqsad qilib qo'yiladi.

Simpleks jadvalida **Z_j - C_j** indeks qatoridagi noma'lumlarining koeffisiyentlaridan bittasi yoki bir nechtasi manfiy bo'lganida hal qiluvchi elementni tanlashda quyidagi munosabatlar amalga oshishi mumkin.

Simpleks jadvalida hal qiluvchi ustunni (HQU) tanlash

Agar **Z_j - C_j** indeks qatoridagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lumlarning $c_1, c_2, \ldots, c_n$ koeffisiyentlardan birortasi ***musbay*** ishorali son bo'lsa, shu ***musbat*** ishorali son to'rgan ustun HQU bo'ladi.

Agar **Z_j - C_j** indeks qatorida bunday manfiy sonlar bir nechta bo'lsa, u vaqtda HQUni tanlash uchun shu ***manfiy*** sonlarning qiymatlari bo'yicha eng kattasi olinadi. Bu sonlar ichida, ulardan bir nechtasi bir - biriga teng bo'lsa, u holda ulardan hohlagan birini olib bosh ustun uchun tanlanadi.

Simpleks jadvalida hal qiluvchi satrni (HQS) tanlash

Simpleks jadvalida **HQS**ni tanlash uchun **B_i** ozod hadlar ustunidagi hamma sonlarni (agar ularning ishorasi bir xil bo'lsa) **HQU**dagi mos kelgan sonlarga bo'lib, ulardan eng kichigi tanlanadi. Bu qiymat simpleks jadvadagi $\dfrac{b_i}{a_{ij}}$ ustunga yoziladi. Bunda bir xil kichik sonlar bir nechta bo'lsa, ulardan xohlagan birini **HQS** qilib tanlash mumkin.

Simpleks jadvalini hal qiluvchi elementi (HQE)

Simpleks jadvalidagi **HQU** va **HQS** ning kesishgan kattagidagi son hal qiluvchi element **(HQE)** bo'ladi.

Simpleks usulda minimumga masala yechilishi uchun m+1 satrninig O ustuni bilan kesishgan elementidan tashqari barcha elementlari manfiy sonlar yoki nollardan iborat bolishi lozim.

Agar yechim optimal bo`lmasa, u holda ChP masalasini maksimumga yechishda quyidagi ishlar amalga oshiriladi:

1) Chiziqli programmalashtirishning umumiy masalasi quyidagi jadval bo`lsin.

2.2.6-jadval

qadam	B	S	O							
				c_1	c_2	…	c_n	c_{n+1}	…	c_{n+m}
berilgan	X_{n+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	…	0
	X_{n+2}	0	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{nn}	0	…	0
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	X_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	…	1
m+1	Z_j - C_j		0	p_1	p_2	…	p_n	p_{n+1}	…	p_{n+m}

Bu erda m+1 satrdagi p_1 , p_2 va p_n elementlar manfiiy sonlar bo`lsin. Bu sonlarning absolyut qiymatlari taqqoslanadi. Bu yerda p_2 ning musbat qiymati p_1 va p_n elementlar sonlaridan qiymatlaridan katta. Shuning uchun p_2 hal qiluvchi ustun sifatida olinadi.

2) Hal qiluvchi elementni topish kerak va hal qilivchi element musbat son bo`lishi lozim. Buning uchun $p_2$ ustunda joylashgan manfiy elementlarni e`tiborga olmamiz. Musbat elementlar

a_{12} *va* a_{m2}lar bo`lsin. Hal qiluvchi elementni toppish quyidagicha amalga oshiriladi:

$\min\left(\frac{b_1}{a_{12}}, \frac{b_m}{a_{m2}}\right) = \frac{b_m}{a_{m2}}$ bo`lsa, hal qiluvchi element $a_{m2}$ bo`ladi. Hal qiluvchi element nolga va manfiy songa teng bo`lmasligi shart. Chunki nolga bulish mumkin emas. Hal qiluvchi elementni o`rniga keladigan element hal qiluvchi elementga bo`linib yoziladi, ya'ni 1 soni bo`ladi.

3) Hal qiluvchi element o'zi- o'ziga bo'linadi, hal qiluvchi element o'rniga 1 son yoziladi.

4) Hal qiluvchi ustunning qolgan elementlari nolga teng, demak, ularning o'rniga 0 soni yoziladi.

5) Hal qiluvchi strning qolgan elementlari hal qiluvchi elementga bo'linib, ularning elementlari o'rniga yoziladi.

6) Qolgan elementlar elementlar jadvalda quyidagicha joylashgan va ***a_{ik}- hal qiluvchi element bo'lsa, ya'ni***

$$
\begin{array}{ccc}
 & 2 & j \\
1 & a_{21} & a_{2j} \\
m & \boxed{a_{m2}} & a_{mj}
\end{array}
$$

Qolgan elementlar quyidagi formula bilan topiladi:

$$a'_{2j} = a_{2j} - \frac{a_{21} \cdot a_{mj}}{a_{m2}} \quad .$$

Umumiy holda halqiluvchi element quyidagicha bo`lsa,

$$
\begin{array}{ccc}
 & k & m \\
i & \boxed{a_{ik}} & a_{im} \\
j & a_{jk} & a_{jm}
\end{array}
$$

Qolgan elementlar quyidagi formula bilan topiladi:

$$a'_{jm} = a_{jm} - \frac{a_{im} \cdot a_{jk}}{a_{ik}}$$

1)- 6) jarayon $Z_j - C_j \leq 0$ bo`lganda tugaydi va masala optimal yechimga ega bo`ladi.

2.3. Sun`iy bazis usuli

Yuqorida ko‘rgan edikki, chiziqli programmalashning asosiy masalasida P vektorlar ichida *m* ta birlik vektor mavjud bo'lsa, u holda tayanch yechimni topish mumkin. Lekin chiziqli programmalashning ko'p masalalari chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishida berilgan bo'lib, tayanch yechimi mavjud bo'lsada, P_i vektorlar ichida hamma vaqt *m* ta birlik vektorlar bo'lmaydi.

Chiziqli programmalashtirishning umumiy masalasi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n \le b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{4n}x_n \ge b_4 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad . \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

(2.3.1) tenglamalar sistemasining shunday musbat yechimlarini topish kerakki, natijada

$$\mathrm{Z} = \mathrm{c}_1\ \mathrm{x}_1 + \mathrm{c}_2\ \mathrm{x}_2\ + \ldots + \mathrm{n}_\mathrm{n}\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \qquad (2.3.2)$$

maksimum qiymatga ega bo'lsin.

Asosiy tushunchalar. Sun'iy noma'lumlar haqida

Biz oldingi mavzularda ChPM yechishni oddiy simpleks usulini o'rgangan edik, ya'ni

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\ , \qquad (2.3.3)$$

maqsad funksiyasining $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ qiymatlari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad . \end{cases} \quad , (2.3.4)$$

Maqsad funksiyasining $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ qiymatlari

$$Z - (c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+1} + 0x_{n+m)}) \ge 0\,, \qquad (2.3.5)$$

shartlarda

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad . \end{cases} \quad , (2.3.6)$$

Topiladi.

$$Z - (c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+1} + 0x_{n+m)}) \ge 0\,, \ (2.3.7)$$

(2.3.6) tenglamalar sistemasidan $x_{n+1},\ x_{n+2}, \ldots,\ x_{n+m}$ lar topiladi:

$$\begin{cases} x_{n+1} = b_1 - \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right) \\ x_{n+2} = b_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\right) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{n+m} = b_m - \left(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\right) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad . \end{cases} \quad ,(2.3.8)$$

Topilgan (2.5) sistemadan qoidaga ko'ra asosiy noma'lumlar nolga tenglashtirib olinadi, ya'ni:

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

Natijada quyidagi boshlang'ich tayanch rejaga ega bo'lamiz (bu yerda masalaning berilishidagi ozod hadlar musbat deb qaralmoqda):

$x_{n+1} = b_1$ **,** $x_{n+2} = b_2$ **,...,** $x_{n+m} = b_m$ **; Z_{max} =0.**

(2.4) va (2.5) formulalar asosida quyidagi simpleks jadvalni tuzamiz. Ma'lumki, ChPMni tashkil qilgan cheklashlar soni ***m*** ta tengsizliklar sistemasidan iborat bo'lib, undagi ozod hadlarning ***manfiy bo'lmaslik*** shartlarida, u birlik matrisaga ega bo'lib, simpleks usuli yordamida topilar edi. ChPMning chegaraviy shartlari **AX ≤ B** **(B≥ 0)** ko'rinishda berilgan bo'lsa, qo'shimcha noma'lumlar kiritish yo'li bilan birlik matrisani masala **shartiga kiritish mumkin edi.**

Agar ChPM quyidagi ko`rinishda bo`lsin:i

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \quad , \qquad (2.3.9)$$

maqsad funksiyasining $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ qiymatlari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \quad . \end{cases} \qquad (2.3.10)$$

Demak, (2) tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keltirish uchun, tengsizliklarning har biriga mos ravishda ***qo'shimcha noma'lumlar*** deb ataluvchi musbat yoki nolga teng bo'lgan ushbu

$\boldsymbol{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k} \geq 0}$ o'zgaruvchilar qo'shamiz, ya'ni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n - x_{n+3} = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{4n}x_n - x_{n+4} = b_4 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \quad . \end{cases} \quad ,(2.3.11)$$

Bunday hollarda (2.8) tenglamalar sistemasiga x_{n+m+1}**,** x_{n+m+2} **,...,** x_{n+2m-1} , x_{n+2m} ≥ 0 noma'lumlar musbat ishora bilan kiritiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} + x_{n+m+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} + x_{n+m+2} = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n - x_{n+3} + x_{n+m+3} = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{4n}x_n - x_{n+4} + x_{n+m+4} = b_4 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} + x_{n+2m} = b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, x_{n+m+1} \ge 0, \ldots,\ x_{n+2m} \ge 0 \quad . \end{cases} \qquad ,(2.3.12)$$

Bu noma'lumlar ***sun'iy noma'lumlar*** deb ataladi. Bu sun'iy noma'lumlar maqsad funksiyasiga musbat (masala maksimumga yechilsa manfiy ishora bilan) ishorali ***m*** koeffisiyent bilan qo'shiladi. Bu yerda ***m*** istalgancha katta musbat son.

Bu yerda $\boldsymbol{b_i \geq 0}$ (i=1,2, ...,m) va (3.3.12) tengsizliklar sistemasiga birlik matrisa qo'shib tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - 0 \cdot (x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}) - M(x_{n+m+1} + x_{n+m+2} . + \ldots + x_{n+2m} \to \max ,$$

(2.3.13)

Bunday hollarda (2.3.12) tenglamalar sistemasiga $\mathbf{x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, \ldots, x_{n+2m-1}, x_{n+2m}} \geq 0$ noma'lumlar musbat ishora bilan kiritiladi.

Bu noma'lumlar ***sun'iy noma'lumlar*** deb ataladi. Bu sun'iy noma'lumlar maqsad funksiyasiga musbat (masala maksimumga yechilsa manfiy ishora bilan) ishorali ***m*** koeffisiyent bilan qo'shiladi. Bu yerda ***m*** istalgancha katta musbat son.

Boshlang'ich tayanch rejasini topish uchun berilgan (2.3.12) tenglamalar sistemasini sun'iy noma'lumlarga nisbatan yechib olinadi.

$$\begin{cases} x_{n+m+1} = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1}) \\ x_{n+m+2} = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2}) \\ x_{n+m+3} = b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n - x_{n+3}) \\ x_{n+m+4} = b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{4n}x_n - x_{n+4}) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{n+2m} = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m}) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, x_{n+m+1} \ge 0, \ldots,\ x_{n+2m} \ge 0 \quad . \end{cases} \qquad ,(2.3.13)$$

tenglamalar sistemasida $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+m} = 0$ bo`lganda, tayanch yechim quyidagicha bo`ladi:

$$x_{n+m+1} = b_1;\ x_{n+m+2} = b_2;\ x_{n+m+3} = b_3; x_{n+m+4} = b_4;. \quad . \quad . \quad x_{n+2m} = b_m$$

ChPMni sun'iy bazis usuli bilan maksimumini topish

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad , \quad (2.3.14)$$

maqsad funksiyasining $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ qiymatlari

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad .
\end{cases}
\qquad (2.3.15)
$$

shartlarda topilsin.

Bu noma’lumlar ***sun’iy noma’lumlar*** deb ataladi. Bu sun’iy noma’lumlar maqsad funksiyasiga musbat (masala maksimumga yechilsa manfiy ishora bilan) ishorali ***m*** koeffisiyent bilan qo’shiladi. Bu yerda ***m*** istalgancha katta musbat son.

$$
\begin{cases}
x_{n+m+1} = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1}) \\
x_{n+m+2} = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2}) \\
x_{n+m+3} = b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n - x_{n+3}) \\
x_{n+m+4} = b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{4n}x_n - x_{n+4}) \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
x_{n+2m} = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m}) \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, x_{n+m+1} \ge 0, \ldots,\ x_{n+2m} \ge 0
\end{cases}
\ .,(2.3.16)
$$

tenglamalar sistemasida $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = ... = x_{n+m} = 0$ bo`lganda, tayanch yechim quyidagicha bo`ladi:

$$
x_{n+m+1} = b_1;\ x_{n+m+2} = b_2;\ x_{n+m+3} = b_3; x_{n+m+4} = b_4;. \quad . \quad . \quad x_{n+2m} = b_m .
$$

Bunday hollarda (3.3.16) tenglamalar sistemasiga $\mathbf{x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, \ldots, x_{n+2m-1}, x_{n+2m}} \ge 0$ noma’lumlar musbat ishora bilan kiritiladi.

Masala maksimumga yechilganda simpleks jadvalning umumiy ko’rinishi

2.3.1-jadval

Bazis	***C_j***	***B_i***	***x_1***	...	***x_n***	***x_{n+1}***	**…**	***x_{n+m}***	***x_{n+m+1}***	***x_{n+2m}***	***x_{n+2m}***
			c_1	**…**	***C_n***	**0**	**…**	**0**	***m***	**…**	***m***
x_{n+m+1}	***m***	***b_1***	***a_{11}***	..	***a_{1n}***	**-1**	**…**	**0**	**1**	**…**	**0**
x_{n+m+2}	***m***	***b_2***	***a_{21}***	**…**	***a_{2n}***	**0**	**…**	**0**	**0**	**…**	**0**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**		**…**	
x_{n+2m}	***m***	***b_m***	***a_{m1}***	**…**	***a_{mn}***	**0**	**…**	**-1**	**0**	**…**	**1**
		m $\sum_{j=1}^{m} b_j$	$\boldsymbol{m}\sum_{j=1}^{m} a_{j1}$ - ***c_1***	**…**	$\boldsymbol{m}\sum_{j=1}^{m} a_{jm}$ - ***c_n***	***-m***	**…**	***-m***	**0**	**…**	**0**
Yoki indeks qatori ikkita **m+1** va **m+2** qatorlarga ajratilib yoziladi											
m+1		**0**	**- *c_1***	**…**	**- *c_n***	**0**	**…**	**0**	**0**	**…**	**0**

m+2	$\boldsymbol{m}$ $\sum_{j=1}^{m} b_j$	$\boldsymbol{m}\sum_{j=1}^{m} a_{j1}$	**…**	$\boldsymbol{m}\sum_{j=1}^{m} a_{jm}$	***-m***	**…**	***-m***	**0**	**…**	**0**

ChPMni sun'iy bazis usuli bilan maksimumni topishda simpleks hisoblashlari

1. Sun'iy bazis usuli bilan ChPM maksimum yechilganda hal HQU tanlash **m**+2 indeks qator orqali amalga oshiriladi. HQU tanlashda **m**+2 qatordagi **m** koeffisiyentli manfiy ishorali sonlarning eng kattasi olinadi.
2. HQS va HQE larni tanlash oddiy simpleks usuli kabi amalga oshiriladi.
3. Yangi simpleks jadvaliga o'tish.HQU, HQS vaHQE topilgach yangi simpleks jadvalidagi hamma sonlar Jordan chiqarish usuli yordamida topiladi:

-Hal qiluvchi qatordagi hamma elementlar hal qiluvchi elementga bo'linadi va ishorasi o'zgartirilmasdan yoziladi;

-Hal qiluvchi ustundagi qolgan hamma elementlar o'rniga nol yoziladi.

-Qolgan hamma elementlar quyidagi to'g'ri to'rtburchak formulasi yordamida topiladi:

$$b_{rk} = a_{rk} - \frac{a_{rj} * a_{ik}}{a_{ij}} \text{ yoki } b_{rk} = \frac{a_{rk} * a_{ij} - a_{rj} * a_{ik}}{a_{ij}}, \quad (2.3.17)$$

(Bu yerda $i \neq r, j \neq k$)

4. ChPM yechish sun'iy noma'lumlar bazis yechimlardan to'liq chiqarilganga qadar davom ettiriladi. Natijada **m**+2 qatordagi **m** koeffisiyentli barcha sonlar 0 ga (sun'iy noma'lumlarning koeffisiyentlaridan tashqari) aylanguncha Jordan almashtirishlari amalga oshiriladi.
5. Agar sun'iy noma'lumlar bazisdan chiqarilib, **m**+1 qatordagi **asosiy va qushimcha noma'lumlar ustuni**da ***manfiy*** ishorali sonlar bo'lsa masalani yechish davom ettiriladi. Bunday hollarda hal qiluvchi ustun **m**+1 qatorning **asosiy va qushimcha noma'lumlar ustuni**dagi manfiy ishorali sonlarning absolyut qiymati bo'yicha eng kattasini topish orqali amalga oshiriladi.
6. **Simpleks jadvalida asosiy va qushimcha noma'lumlar ustunlari bo'yicha:** **m**+2 indeks qatordagi **m** koeffisiyentli barcha sonlar 0 ga teng bo'lsa va **m**+1 indeks qatordagi barcha sonlar 0 yoki musbat ishorali bo'lsa masala to'liq yechilgan deyiladi. Topilgan yechim optimal yechimni ifodalaydi.

Masala maksimumga yechilganda sun'iy noma'lumlar bazisdan chiqarilib, **m**+1 qatordagi **asosiy va qushimcha noma'lumlar ustuni**da manfiy ishorali sonlar bo'lsa masala yechimga ega bo'lmaydi.

ChPMni sun'iy bazis usuli bilan minimumini topish

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min \quad , \qquad (2.3.18)$$

maqsad funksiyasining $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \quad . \end{cases} \qquad (2.3.19)$$

shartlarda topilsin.

Bu noma'lumlar ***sun'iy noma'lumlar*** deb ataladi. Bu sun'iy noma'lumlar maqsad funksiyasiga musbat (masala maksimumga yechilsa manfiy ishora bilan) ishorali ***m*** koeffisiyent bilan qo'shiladi. Bu yerda ***m*** istalgancha katta musbat son.

Bu yerda $\boldsymbol{b_i \geq 0}$ (i=1,2, ...,m) va (3.3.19) tengsizliklar sistemasiga birlik matrisa qo'shib tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} x_{n+m+1} = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1}) \\ x_{n+m+2} = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2}) \\ x_{n+m+3} = b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n - x_{n+3}) \\ x_{n+m+4} = b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{4n}x_n - x_{n+4}) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{n+2m} = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m}) \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_{n+m+1} \geq 0, \ldots, \ x_{n+2m} \geq 0 \end{cases} \quad . ,(2.3.20)$$

(2.11) tenglamalar sistemasida $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = ... = x_{n+m} = 0$ bo`lganda, tayanch yechim quyidagicha bo`ladi $x_{n+m+1} = b_1;\ x_{n+m+2} = b_2;\ x_{n+m+3} = b_3; x_{n+m+4} = b_4;. \quad . \quad . \quad x_{n+2m} = b_m$

Maqsad funktsiya

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - 0 \cdot (x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+m}) + M(x_{n+m+1} + x_{n+m+2}. + ... + x_{n+2m} \to \min ,$$

(3.3.21) dan iborat.

Bunday hollarda (3.3.21) tenglamalar sistemasiga $x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, \ldots, x_{n+2m-1}, x_{n+2m} \geq 0$ noma'lumlar musbat ishora bilan kiritiladi.

Masala minimumga yechilganda simpleks jadvalning umumiy ko'rinishi

2.3.2-jadval

Bazis	***C_j***	***O_i***	***x_1***	**...**	***x_n***	***x_{n+1}***	**...**	***x_{n+m}***	***x_{n+m+1}***	***x_{n+2m}***	***x_{n+2m}***
			s_1	**...**	***s_n***	**0**	**...**	**0**	***m***	**...**	***m***
x_{n+m+1}	***m***	***b_1***	***a_{11}***	**..**	***a_{1n}***	**-1**	**...**	**0**	**1**	**...**	
x_{n+m+2}	***m***	***b_2***	***a_{21}***	**...**	***a_{2n}***	**0**	**...**	**0**		**...**	

…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	
x_{n+2m}	***m***	b_m	a_{m1}	…	a_{mn}	**0**	…	**-1**		…	**1**
Z_j-c_j		$m \sum_{j=1}^{m} b_j$	$m\sum_{j=1}^{m} a_{j1}$ - c_1	…	$m\sum_{j=1}^{m} a_{jm}$ - c_n	***-m***	…	***-m***	**0**	…	**0**
Yoki indeks qatori ikkita **m+1** va **m+2** qatorlarga ajratilib yoziladi											
m+1		**0**	- c_1	…	- c_n	**0**	…	**0**	**0**	…	**0**
m+2		$m \sum_{j=1}^{m} b_j$	$m\sum_{j=1}^{m} a_{j1}$	…	$m\sum_{j=1}^{m} a_{jm}$	***m***	…	***m***	**0**	**0**	**0**

ChPMni sun'iy bazis usuli bilan maksimumni topishda simpleks hisoblashlari

1. Sun'iy bazis usuli bilan ChPM maksimum yechilganda hal HQU tanlash **m**+2 indeks qator orqali amalga oshiriladi. HQU tanlashda **m**+2 qatordagi **m** koeffisiyentli manfiy ishorali sonlarning eng kattasi olinadi.
2. HQS va HQE larni tanlash oddiy simpleks usuli kabi amalga oshiriladi.
3. Yangi simpleks jadvaliga o'tish.HQU, HQS vaHQE topilgach yangi simpleks jadvalidagi hamma sonlar Jordan chiqarish usuli yordamida topiladi:

-Hal qiluvchi qatordagi hamma elementlar hal qiluvchi elementga bo'linadi va ishorasi o'zgartirilmasdan yoziladi;

-Hal qiluvchi ustundagi qolgan hamma elementlar o'rniga nol yoziladi.

-Qolgan hamma elementlar quyidagi to'g'ri to'rtburchak formulasi yordamida topiladi:

$$b_{rk} = a_{rk} - \frac{a_{rj} * a_{ik}}{a_{ij}} \text{ yoki } b_{rk} = \frac{a_{rk} * a_{ij} - a_{rj} * a_{ik}}{a_{ij}}. \text{ (Bu yerda } i \neq r, j \neq k)$$

4. ChPM yechish sun'iy noma'lumlar bazis yechimlardan to'liq chiqarilganga qadar davom ettiriladi. Natijada **m**+2 qatordagi **m** koeffisiyentli barcha sonlar 0 ga (sun'iy noma'lumlarning koeffisiyentlaridan tashqari) aylanguncha Jordan almashtirishlari amalga oshiriladi.
5. Agar sun'iy noma'lumlar bazisdan chiqarilib, **m**+1 qatordagi **asosiy va qushimcha noma'lumlar ustuni**da ***musbat*** ishorali sonlar bo'lsa masalani yechish davom ettiriladi. Bunday hollarda hal qiluvchi ustun **m**+1 qatorning **asosiy va qushimcha noma'lumlar ustuni**dagi manfiy ishorali sonlarning absolyut qiymati bo'yicha eng kattasini topish orqali amalga oshiriladi.

6. **Simpleks jadvalida asosiy va qushimcha noma'lumlar ustunlari bo'yicha:** **m**+2 indeks qatordagi **m** koeffisiyentli barcha sonlar 0 ga teng bo'lsa va **m**+1 indeks qatordagi barcha sonlar 0 yoki musbat ishorali bo'lsa masala to'liq yechilgan deyiladi. Topilgan yechim optimal yechimni ifodalaydi.

Masala maksimumga yechilganda sun'iy noma'lumlar bazisdan chiqarilib, **m**+1 qatordagi **asosiy va qushimcha noma'lumlar ustuni**da manfiy ishorali sonlar bo'lsa masala yechimga ega bo'lmaydi.

1-misol. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasi sun'iy bazis usulida yechilsin.

$z = -4x_1 + 5x_2$ maksimum qiymatlarga erishganda x_1, x_2 ning qiymatlari topilsin va quyidagi chegaraviy va cheklanish shartlari bajarilsin:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 40 \\ 5x_1 - 4x_2 \le 20 \\ -2x_1 + x_2 \ge 8 \end{cases} \quad \text{va} \quad X \ge 0.$$

Yechish. ChP masalasini yechish uchun bazis noma'lumlarlar x_3 va x_4 tenglamalar sistemasining birinchi va ikkinchi tenglamalariga qo'shamiz. Uchinchi tenglamasidan x_5-bazis noma'lumni ayirsak, quyidagi tenglamalar sitemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_4 = 20 \\ -2x_1 + x_2 - x_5 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

va $X \ge 0.$

Agar $x_1 = x_2 = 0$ desak, bazis yechim $x_3 = 40, x_4 = 20$ va $x_5 = -8$ hosil bo'ladi.

Shuning uchun oxirgi tenglamaga x_6 noma'lum qo'shamiz. Natijada

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_4 = 20 \\ -2x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

hosil boldi , x_3 va x_6 noma'lumlar sun'iy bazislar. Bunda $x_1 = 0, x_2 = 0$ desak, $x_3 = 40, x_4 = 2$ va $x_6 = 8$ ekanligini aniqlaymiz.

Maqsad funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ldi:

$$z_j - c_j = 0 - (-4x_1 + 5x_2 - Mx_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6)$$

$$x_3 = 40 - (x_1 + x_2)$$
$$x_4 = 20 - (5x_1 - 4x_2) \qquad \text{va} \qquad X \ge 0$$
$$x_6 = 8 - (-2x_1 + x_2 - x_5)$$

hocil buldi , x_3 va x_6 noma'lumlar sun'iy bazislar. Bunda $x_1 = 0, x_2 = 0$ desak, $x_3 = 5, x_4 = 3$ va $x_6 = 6$ ekanligini aniqlaymiz.

Maqsad funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ldi:

2.3.3-jadval

	B	C	O	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
			0	-4	5	-M	0	0	-M
Berilgan	X_3	-M	40	1	1	1	0	0	0
	X_4	0	20	5	-4	0	1	0	0
	X_6	-M	8	-2	$\boxed{1}$	0	0	-1	1
m+1	Z_j- C_j		0	4	-5	0	0	0	0
m+2			-48	1	-2	0	0	1	0

2.3.3-jadvalning m+2 qatori bilan A_2 ustuni kesishganda turgan son -2 teng. Shuning uchun hal qiluvchi ustun A_2 ustun ekanligi aniqlandi. B ustundagi sonlarni A_1 ustunning mos musbat elementlariga bo'lib, kichigining maxraji 1 sonini hal qiluvchi element qilib olamiz va hisoblashlarni yuqoridagi qoidalar asosida ketma-ket bajarib 2.3.4-jadvalni hosil qilamiz:

2.3.4-jadval

	B	C	O	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
			0	-4	5	-M	0	0	-M
I	X_3	-M	32	$\boxed{3}$	0	1	0	1	-1
	X_4	0	52	-3	0	0	1	-4	4
	X_2	5	8	-2	1	0	0	-1	1
m+1	Z_j- C_j		40	-6	0	0	0	-5	5
m+2			-32	-3	0	0	0	-1	2

2.3.4-jadvalning m+2 qatori bilan A_1 ustuni kesishganda turgan son -3 va shu qatorning A_5 ustuni bilan kesishgan joyda turgan son -1 ga teng. Bu sonlarni taqqoslasak, -3 soni absolyut mikdor jihatdan kattasi ekanligi ko'rinib turibdi. Shuning uchun hal qiluvchi ustun A_1 ustun ekanligi aniqlandi. B ustundagi sonlarni A_1 ustunning mos musbat elementlariga bo'lib, kichigining maxraji 3 sonini hal qiluvchi element qilib olamiz va hisoblashlarni yuqoridagi qoidalar asosida ketma-ket bajarib 2.3.5-jadvalni hosil qilamiz:

2.3.5-jadval

	B	S	O	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
			0	-4	5	-M	0	0	-M
I I	X_1	-4	32/3	1	0	1/3	0	1/3	-1/3
	X_4	0	84	0	0	1	0	-3	3
	X_2	5	88/3	0	1	2/3	1	-1/3	1/3
m+1	Z_j- C_j		104	0	0	2	0	-3	3
m+2			0	0	0	1	0	0	1

2.3.5-jadvalning m+2 qatorida turgan sonlari musbat va nollardan iborat bo'ldi. 3-jadvalning m+1 qatori bilan A_5 ustuni kesishganda turgan son -3 va shu son manfiyligi uchun -3 son turgan ustun hal qiluvchi ustun bo'ladi. B ustundagi sonlarni A_5 ustunning mos musbat elementlariga bo'lib, kichigining maxraji 1/3 sonini hal qiluvchi element qilib olamiz va hisoblashlarni yuqoridagi qoidalar asosida ketma-ket bajarib 4-jadvalni hosil qilamiz:

2.3.6-jadval

	B	C	O	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
			0	-4	5	-M	0	0	-M
I I I	X_5	0	32	3	0	1	0	1	-1
	X_4	0	180	9	0	4	0	0	0
	X_2	5	40	1	1	1	1	0	0
m+1	Z_j- C_j		200	9	0	5	0	0	0
m+2			0	0	0	1	0	0	1

2.3.6-jadvaldan ko'rinib turibdiki, masalaning optimal yechimi:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 40,\ \ z_{\max} = 200.$$

2-misol. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasi sun'iy bazis usulida yechilsin.

$z = 3x_1 - x_2$ minimum qiymatlarga erishganda x_1, x_2 ning qiymatlari topilsin va quyidagi chegaraviy va cheklanish shartlari bajarilsin:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases} \quad \text{va} \quad X \ge 0.$$

Yechish. ChP masalasini yechish uchun bazis noma'lumlarlar x_3 va x_4 tenglamalar sistemasining birinchi va ikkinchi tenglamalariga qo'shamiz. Uchinchi tenglamasidan x_5-bazis noma'lumni ayirsak, quyidagi tenglamalar sitemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - x_5 = 6 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Agar $x_1 = x_2 = 0$ desak, bazis yechim $x_3 = 5, x_4 = 3$ va $x_5 = -6$ hosil bo'ladi. Shuning uchun oxirgi tenglamaga x_6 noma'lum qo'shamiz. Natijada

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 6 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

hocil buldi , x_3 va x_6 noma'lumlar sun'iy bazislar. Bunda $x_1 = 0, x_2 = 0$ desak, $x_3 = 5, x_4 = 3$ va $x_6 = 6$ ekanligini aniqlaymiz.

Maqsad funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ldi:

$$z = 3x_1 - x_2 + Mx_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 \to \min$$

Quyidagi jadvalni tuzamiz va simpleks usul bilan yechamiz:

2.3.7-jadval

Qadam	B	S	O	3	-1	M	0	0	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Berilgan	X_3	M	5	1	1	1	0	0	0
	X_4	0	3	2	-1	0	1	0	0
	X_6	M	6	**5**	3	0	0	-1	1
m+1	$z_j - c_j$		0	-3	1	1	0	0	0
m+2			-11	6	4	0	0	-1	0

2.3.7-jadvalning m+2 qatori bilan A_1 ustuni kesishganda turgan son 6 va shu qatorning A_2 ustuni bilan kesishgan joyda turgan son 4 ga teng. Bu sonlarni taqqoslasak, 4 soni absolyut mikdor jihatdan kattasi ekanligi ko’rinib turibdi. Shuning uchun hal qiluvchi ustun A_1 ustun ekanligi aniqlandi. B ustundagi sonlarni A_1 ustunning mos musbat elementlariga bo’lib, kichigining maxraji 5 sonini hal qiluvchi element qilib olamiz va hisoblashlarni yuqoridagi qoidalar asosida ketma-ket bajarib 2.3.8-jadvalni hosil qilamiz.

2.3.8-jadval

Qadam	B	S	V	3	-1	M	0	0	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
I	A_3	M	19/5	0	2/5	1	0	1/5	-1/5
	A_4	0	3/5	0	-11/5	0	1	2/5	-2/5
	A_1	3	6/5	1	**3/5**	0	0	-1/5	1/5
M+1	$Z_j - C_j$		18/5	0	14/5	0	0	-3/5	3/5
M+2			19/5	0	2/5	0	0	1/5	-6/5

2.3.8-jadvalning m+2 qatori bilan A_2 ustuni kesishganda turgan son 2/5 va shu qatorning A_5 ustuni bilan kesishgan joyda turgan son 1/7 ga teng. Bu sonlarni taqqoslasak, 2/5 soni absolyut miqdor jihatdan kattasi ekanligi ko’rinib turibdi. Shuning uchun hal qiluvchi ustun A_2 ustun ekanligi aniqlandi. B ustundagi sonlarni A_2 ustunning mos musbat elementlariga bo’lib, kichigining maxraji 3/5 sonini hal qiluvchi element qilib olamiz va hisoblashlarni yuqoridagi qoidalar asosida ketma-ket bajarib 2.3.9-jadvalni hosil qilamiz.

2.3.9-jadval

Qadam	B	S	V	3	-1	M	0	0	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
II	A_3	M	3	-2/3	0	1	0	**1/3**	-1/3
	A_4	0	5	11/3	0	0	1	-1/3	1/3
	A_2	1	2	5/3	1	0	0	-1/3	1/3
m+1	Z, $-C_j$		-2	-14/3	0	0	0	1/3	-1/3
m+2			3	-2/3	0	0	0	1/3	-4/3

2.3.9-jadvalning m+2 qatori bilan A_5 ustuni kesishganda turgan son 1/3 ga teng. Shuning uchun hal qiluvchi ustun A_5 ustun ekanligi aniqlandi. B ustundagi sonlarni A_2 ustunning mos musbat elementlariga bo’lib, kichigining maxraji 1/3 sonini hal qiluvchi element qilib olamiz va hisoblashlarni yuqoridagi qoidalar asosida ketma-ket bajarib 2.3.10-jadvalni hosil qilamiz.

2.3.10-jadval

Qadam	B	C	O	3	-1	M	0	0	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6

III	X_5	0	9	-2	0	3	0	1	-1
	X_4	0	8	3	0	1	1	0	0
	X_2	-1	5	1	1	1	0	0	0
M+1	Z, $-C_j$		-5	-4	0	-1	0	0	0

2.3.10-jadvaldan ko'rinib turibdiki, masalaning optimal yechimi aniqlandi:

$$x_1 = 0; x_2 = 5$$

$$z_{\min} = -5$$ dan iborat.

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

1. Jordan-Gauss usuli bilan yeching

1.1)	$3x_1+2x_2+x_3=5$ $2x_1+3x_2+x_3=1$ $2x_1+x_2+3x_3=11$	***$x_1=2$*** ***$x_2=-2$*** ***$x_3=3$***	**1.2)**	$x_1-2x_2+3x_3=6$ $2x_1+3x_2-4x_3=20$ $3x_1-2x_2-5x_3=6$	***$x_1=8$*** ***$x_2=4$*** ***$x_3=2$***	**1.3)**	$4x_1-3x_2+2x_3=9$ $2x_1+5x_2-3x_3=4$ $5x_1+6x_2-2x_3=18$	***$x_1=2$*** ***$x_2=3$*** ***$x_3=5$***
1.4)	$x_1+x_2+2x_3=-1$ $2x_1-x_2+2x_3=-4$ $4x_1+x_2+4x_3=-2$	***$x_1=1$*** ***$x_2=2$*** ***$x_3=-2$***	**1.5)**	$2x_1-x_2-x_3=4$ $3x_1+4x_2-2x_3=11$ $3x_1-2x_2+4x_3=11$	***$x_1=3$*** ***$x_2=11$*** ***$x_3=11$***	**1.6)**	$x_1+x_2-x_3=5$ $8x_1+3x_2-6x_3=2$ $4x_1+x_2+3x_3=3$	***$x_1=-2$*** ***$x_2=8$*** ***$x_3=1$***
1.7)	$7x_1-5x_2=31$ $4x_1+11x_3=-43$ $2x_1+3x_2+4x_3=-20$	***$x_1=3$*** ***$x_2=-2$*** ***$x_3=-5$***	**1.8)**	$2x_1+x_2-3x_3=8$ $3x_1+4x_2+2x_3=4$ $2x_1+3x_2-2x_3=10$	***$x_1=0$*** ***$x_2=2$*** ***$x_3=-2$***	**1.9)**	$x_1+3x_2+x_3=-1$ $2x_1+3x_2+2x_3=1$ $-x_1+5x_2+5x_3=8$	***$x_1=-0.5$*** ***$x_2=-1$*** ***$x_3=2.5$***
1.10)	$x_1+x_2+x_3=2$ $2x_1+3x_2+2x_3=4$ $x_1+2x_2+3x_3=3$	***$x_1=1.5$*** ***$x_2=0$*** ***$x_3=0.5$***	**1.11)**	$x_1-x_2-x_3=0$ $3x_1-2x_2-x_3=4$ $-2x_1+3x_2+3x_3=5$	***$x_1=5$*** ***$x_2=6$*** ***$x_3=-1$***	**1.12)**	$x_1+3x_2-x_3=4$ $2x_1+x_2+x_3=-1$ $x_1+7x_2=1$	***$x_1=1$*** ***$x_2=0$*** ***$x_3=-3$***
1.13)	$2x_1+3x_2-4x_3=3$ $3x_1+4x_2-3x_3=7$ $x_1+2x_2+2x_3=$	***$x_1=9$*** ***$x_2=-5$*** ***$x_3=0$***	**1.14)**	$x_1+2x_2-x_3=-3$ $2x_1+3x_2+x_3=4$ $-x_1-x_2-x_3=-2$	***$x_1=-8$*** ***$x_2=5$*** ***$x_3=5$***	**1.15)**	$3x_1+x_2+x_3=2$ $x_1+3x_2+x_3=5$ $x_1+x_2-3x_3=-7$	***$x_1=-0.5$*** ***$x_2=1$*** ***$x_3=2.5$***

	-1							
1.16)	$x_1+3x_2-x_2=2$ $2x_1+x_2+x_3=1$ $-x_1+7x_2=1$	***$x_1=1$*** ***$x_2=0$*** ***$x_3=-1$***	**1.17)**	$x_1+x_2+x_3=2$ $-2x_1+x_2+x_3=2$ $x_1+x_2=7$	***$x_1=0$*** ***$x_2=7$*** ***$x_3=-5$***	**1.18)**	$2x_1+x_2-3x_3=7$ $x_1+2x_2+x_3=4$ $3x_1-x_2+2x_3=-1$	***$x_1=1$*** ***$x_2=2$*** ***$x_3=-1$***
1.19)	$2x_1+3x_2+5x_3+3x_4=2$ $x_1+2x_2+4x_3+3x_4=-1$ $2x_1+3x_2+6x_3+5x_4=-1$ $4x_1+x_2+x_3+2x_4=2$	***$x_1=-3$*** ***$x_2=17$*** ***$x_3=-11$*** ***$x_4=4$***	**1.20)**	$3x_1+4x_2-2x_3+5x_4=10$ $2x_1+3x_2+5x_3-4x_4=-2$ $4x_1+5x_2-4x_3-3x_4=-7$ 5x1+3x2-2x3-5x4=-5	***$x_1=2$*** ***$x_2=-1$*** ***$x_3=1$*** ***$x_4=2$***	**1.21)**	$3x_1-x_2+3x_3+2x_4=1$ $4x_1+2x_2-2x_3+4x_4=0$ $5x_1-x_2+4x_3+x_4=-1$ $2x_1-3x_2+6x_3+x_4=-2$	***$x_1=-13$*** ***$x_2=47$*** ***$x_3=27$*** ***$x_4=3$***
1.22)	$2x_1+x_2-x_3+x_4=-1$ $3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=0$ $5x_1+x_2-x_3+2x_4=1$ $2x_1-x_2+2x_3-4x_4=4$	***$x_1=0$*** ***$x_2=-10$*** ***$x_3=-7$*** ***$x_4=2$***	**1.23)**	$x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11$ $2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12$ $3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13$ $4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14$	***$x_1=2$*** ***$x_2=1$*** ***$x_3=1$*** ***$x_4=1$***	**1.24)**	$-5x_1+7x_2+11x_4=65$ $2x_1-6x_2+3x_3+12x_4=4$ $x_1-3x_2-5x_3+x_4=3$ $3x_1-5x_2-x_3-3x_4=-17$	***$x_1=14$*** ***$x_2=12$*** ***$x_3=-4$*** ***$x_4=5$***

2. ChPMni sun’iy bazis usuli bilan yeching

2.1-masala

$$Z = 7x_1 + 9x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ 2x_1 - x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4 \quad Z_{\max} = 36 \quad \Bigg| \quad x_1 = 4, x_1 = 1 \quad Z_{\min} = 30$$

2.2-masala

$$Z = 7x_1 - 9x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 3x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{12}{7}, x_2 = \frac{22}{7} \quad Z_{\max} = \frac{114}{7} \quad \Bigg| \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad Z_{\min} = -36$$

2.3-masala

$$Z = -5x_1 + 9x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 12 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4 \quad Z_{\max} = 36 \quad \Bigg| \quad x_1 = \frac{16}{11} \quad x_2 = \frac{20}{11} \quad Z_{\min} = \frac{100}{11}$$

2.4-masala

2.5-masala

2.6-masala

$Z = -5x_1 + 9x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 12 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \end{cases}$$

$x_1 = 0, x_2 = 4$
$Z_{\max} = 36$

$x_1 = \frac{16}{11}$
$x_2 = \frac{20}{11}$
$Z_{\min} = \frac{100}{11}$

$Z = 5x_1 - 3x \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 9 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 13 \\ 3x_1 - x_2 \le 17 \end{cases}$$

$x_1 = 0, x_2 = 3$
$Z_{\min} = -9$

$x_1 =$
$x_2 =$
$Z_{\min} = \frac{59}{6}$

$Z = 4x_1 - 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 15 \\ 4x_1 - 2x_2 \le 17 \end{cases}$$

$x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2}$
$Z_{\min} = -\frac{35}{2}$

$x_1 = \frac{10}{27}, x_2 = \frac{55}{27}$
$Z_{\max} = \frac{425}{27}$

2.7-masala

$Z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_1 + 6x_2 \ge 10 \\ 4x_1 - 2x_2 \le 11 \end{cases}$$

$x_1 = 0, x_2 = 8$
$Z_{\max} = 48$

$x_1 = \frac{27}{8}, x_2 = \frac{5}{4}$
$Z_{\min} = \frac{195}{8}$

2.8-masala

$Z = 4x_1 - 5x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 \ge 5 \\ 3x_1 - x_2 \le 12 \end{cases}$$

$x_1 = 0, x_2 = 7$
$Z_{\min} = -35$

$x_1 = \frac{2}{7}, x_2 = 0$
$Z_{\max} = 14$

2.9-masala

$Z = 2x_1 - 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 15 \\ 2x_1 - 4x_2 \le 30 \end{cases}$$

$x_1 = 10, x_2 = 0$
$Z_{\max} = 20$

$x_1 = 0, x_2 = 5$
$Z_{\min} = -15$

2.10-masala

$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 15 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 32 \\ x_1 \ge 0 x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.11-masala

$Z = 5x - 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 4 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0 x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.12-masala

$Z = 3x_1 - 5x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 10 \\ 4x_1 - 7x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0 x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.13-masala

$Z = -5x_1 + 6x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ 3x_1 + 6x_2 \ge 11 \\ 4x_1 - 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0 x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1 = \frac{17}{5}, x_2 = \frac{9}{5}$

$Z_{\min} = -\frac{31}{5}$

2.14-masala

$Z = -4x_1 - 5x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 12 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0 x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.15-masala

$Z = 12x_1 - 7x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 20 \\ 2x_1 + 9x_2 \ge 17 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0 x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1 = 0, x_2 = \frac{595820}{208537}$

$Z_{\min} = -\frac{595820}{29791}$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = \dfrac{7}{2} \\ Z_{\max} = 21 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{61}{31}, x_2 = \dfrac{45}{31} \\ Z_{\max} = \dfrac{417}{31} \end{array} \right.$$

2.16-masala

$Z = -14x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 19 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 16 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{2} \quad Z_{\min} = -\frac{35}{2} \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = \dfrac{19}{6} \\ Z_{\max} = -\dfrac{133}{6} \end{array} \right.$$

2.17-masala

$Z = 4x_1 - 7x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 15 \\ 4x_1 - 2x_2 \leq 25 \\ x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2} \quad Z_{\min} = -\frac{35}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{10}{27}, x_2 = \dfrac{55}{27} \\ Z_{\max} = -\dfrac{115}{9} \end{array} \right.$$

2.18-masala

$Z = -5x_1 + 9x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 12 \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{16}{11}, x_2 = \frac{20}{11} \quad Z_{\min} = \frac{100}{11}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = 4 \\ Z_{\max} = 36 \end{array} \right.$$

2.19-masala

$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 32 \\ x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{11}{2} \quad Z_{\min} = 11$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{54}{5}, x_2 = \dfrac{1}{10} \\ Z_{\max} = \dfrac{163}{5} \end{array} \right.$$

2.20-masala

$Z = 3x_1 - 5x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 7x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{8}{3} \quad Z_{\max} = -\frac{31}{3} \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = 5 \\ Z_{\min} = -20 \end{array} \right.$$

2.21-masala

$Z = 5x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 6x_1 - 7x_2 \geq 15 \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

MUHOKAMA UCHUN NAZORAT SAVOLLARI

1.Chiziqli programmalashtirish masalasining qo`yilisini tushuntiring.

2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi nima?

3.Chiziqli tenglamalar algebraik sistemasini yechish usullarini aytib bering.

4. Jordan-Gauss usulining mohiyatini tushuntiring.

5. Chiziqli programmalashtirish masalasida maqsad fuksiya maksimum bo`ganda hal qiluvchi ustun qanday topiladi?

6. Chiziqli programmalashtirish masalasida maqsad fuksiya maksimum bo`ganda hal qiluvchi element qanday topiladi?

7. Chiziqli programmalashtirish masalasida maqsad fuksiya minimum bo`ganda hal qiluvchi ustun qanday topiladi?

8. Chiziqli programmalashtirish masalasida maqsad fuksiya minimum bo`ganda hal qiluvchi element qanday topiladi?

9. Chiziqli programmalashtirish masalasida maqsad fuksiya minimum bo`ganda masala yecimi qanday topiladi?

10. Chiziqli programmalashtirish masalasida maqsad fuksiya maksimum bo`ganda hal qiluvchi element qanday topiladi?

11. Chiziqli programmalashtirish masalasining sun`iy basis usulini tushuntiring.

3-BOB. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISHLAR IKKILANMA NAZARIYASI

3.1. Ikkilanma nazariyasining asosiy tyeoryemalari va iqtisodiy talqini

Har qanday chiziqli programmalashtirish masalasiga, unga o'zaro ikki yoqlama bo'lgan chiziqli programmalashtirish masalasi to'g'ri keladi, ya'ni birining yechimidan ikkinchisining yechimi kelib chiqadi.

Berilgan dastlabki masala va unga nisbatan o'zaro ikki yoqlama bo'lgan masala ham biror – bir iqtisodiy jarayonni ifoda etadi.

Quyidagi chiziqli

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \ , \qquad (3.1)$$

funksiyaga maksimum qiymat beradigan, cheklanish tengsizliklari sistemasining manfiy bo'lmagan yechimi topilsin:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n} \end{cases} , \qquad (3.2)$$

(3.1)–(3.2) masalaga nisbatan ikkilanma bo'lgan masalaning matematik modelini tuzamiz. Buning uchun $y_i \left(i = \overline{1,m} \right)$ bilan $i-$xildagi resurs birligining narxini belgilaymiz, u holda har bir j-birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf bo'lgan resursning narxi

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

ga teng bo'ladi. Sarf qilingan umumiy resursning narxi ishlab chiqarilgan mahsulot narxidan oshib ketmasligi uchun

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \qquad (j = \overline{1,n}) \ , \qquad (3.3)$$

shart o'rinli bo'lishi lozim. Korxona $b_i \ (i = \overline{1,m})$ birlik resursga ega bo'lganligi uchun sarf etilgan umumiy resursning narxi

$$F = \sum_{i-1}^{m} b_i y_i \qquad (3.4)$$

ga teng bo'ladi. (3.3) – (3.4) masala dastlabki (3.1) – (3.2) masalaga nisbatan ikki yoqlama masalaning matematik modelini ifodalaydi.

Bu masalani iqtisodiy nuqtai nazardan quyidagicha talqin qilish mumkin. Resurs miqdori b_i ga teng bo'lib, mahsulot birligining narxi c_j ga teng bo'lganda, resurs birligining narxini umumiy sarf eng kam bo'ladigan qilib tanlash kerak. Boshqacha qilib aytganda (3.4) funksiyaning cheklanish shartlari (3.3) ni qanoatlantiradigan eng kichik qiymati topishdan iboratdir.

Dastlabki (3.1) – (3.2) masalani matrisaviy ko’rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$Z_{\max} = CX$$
$$AX \le B, \quad X \ge 0$$

Unga ikki yoqlama (3.3)-(3.4) masalani esa quyidagicha yozamiz:

$$F_{\min} = B'Y$$
$$A'Y \ge C, \quad Y \ge 0.$$

Matrisa formada yozilgan dastlabki hamda ikki yoqlama masalalarning matrisalari va vektorlari bir-biriga nisbatan transponirlangandir. Ularning ko’rinishlari quyidagicha ifodalanadi:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ b_m \end{pmatrix}, \quad B' = (b_1, b_2, \ldots, b_m), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad c' = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ c_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Umuman olganda chiziqli programmalashtirishning o’zaro ikki yoqlama masalalari xalq xo’jaligining barcha tarmoqlarini jumladan qurilishni maqbuliy boshqarish masalalarini yechshda muhim vosita bo’lib xizmat qiladi.

Biz quyida aynan shu ko’rinishdagi masalalar bilan tanishib chiqamiz.

ikkilanma masalalarning matematik modellari ikki xil ko’rinishda bo’ladi.

1)Simmetrik bo’lmagan o’zaro ikki yoqlama masalalar

Simmetrik bo’lmagan o’zaro ikki yoqlama masalalarning dastlabki masalasida cheklanish shartlari tenglamalar sistemasidan iborat bo’lib, unga nisbatan ikki yoqlama bo’lgan masalada esa cheklanish shartlari tengsizliklar sistemasidan iborat bo’ladi va noma’lumlar manfiy qiymatlar ham qabul qilishi mumkin bo’ladi.

Masalan:

a) Dastlabki masala

$$Z_{\min} = CX$$
$$AX = B$$
$$X \geq 0$$

Ikki yoqlama masala

$$Z_{\max} = B'Y$$
$$A'Y \leq C';$$
$$Y \geq 0 \text{ ёки } У \leq 0.$$

2) Simmetrik bo'lgan o'zaro ikki yoqlama masalalar

Simmetrik bo'lgan ikki yoqlama masalalarning dastlabki va unga nisbatan ikki yoqlama bo'lgan masalalarida cheklanish shartlari tengsizliklar sistemasidan iborat bo'lib, izlanayotgan noma'lum o'zgaruvchilar albatta musbat bo'lishi kerak.

Masalan,

a) Dastlabki masala

$$Z_{\max} = CX$$
$$AX \leq B$$
$$X \geq 0$$

Ikki yoqlama masala

$$Z_{\min} = B'Y$$
$$A'Y \geq C';$$
$$Y \geq 0$$

a) Dastlabki masala

$$Z_{\min} = CX$$
$$AX \leq B$$
$$X \geq 0$$

Ikki yoqlama masala

$$Z_{\max} = B'Y$$
$$A'Y \leq C';$$
$$Y \geq 0$$

3.1-masala. Dastlabki masala: ushbu maqsad

$$Z = 4x_2 - 3x_4 - 7x_5$$

funksiyaning cheklanish tenglamalari sistemasini

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_4 + x_5 = 10 \\ 84x_1 + x_3 + 12x_4 - 6x_5 = 23 \\ 13x_2 + 5x_5 + 7x_6 = 15 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

qanoatlantiradigan minimumini topish masalasiga ikki yoqlama masala tuzilsin.

Yechish. Dastlabki masala uchun

$$C = (0;\ 4;\ 0;\ -3;\ -7;\ 0),\quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 15 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 84 & 0 & 1 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$Z_{\min} = CX;$ $\quad AX = B;$ $\quad X \geq 0$ bo'ladi.

Dastlabki masala simmetrik bo'lmagan masalaga to'g'ri keladi.

Shuning uchun a) bosqichga asosan ikki yoqlama masala quyidagicha bo'ladi.

$$F_{\max} = B'Y; \quad A'Y \leq C'$$

bu yerda

$$C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; \; A' = \begin{pmatrix} 2 & 84 & 0 \\ 2 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};$$

B = (10; 23; 15).

yoki umumiy ko'rinishda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} 2y_1 + 84y_2 \le 0 \\ 2y_1 + 13y_3 \le 4 \\ y_2 \le 0 \\ -4y_1 + 12y_2 \le -3 \\ y_1 - 6y_2 + 5y_3 \le -7 \\ 7y_3 \le 0 \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 10y_1 + 23y_2 + 15y_3$$

3) To'g'ri va unga ikkilama masalani yechish usuli

Bizga quyidagi dastlabki masala berilgan

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad , \qquad (3.5)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \; i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \; j = \overline{1,n} \end{cases} , \; (3.6)$$

va unga nisbatan ikki yoqlama bo'lgan masala

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{m} b_j y_j \quad , \; (3.7)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \le c_j, \; j = \overline{1,n} \\ y_i \ge 0, \; i = \overline{1,m} \end{cases} , \; (3.8)$$

berilgan bo'lsin.

Ikkilanish nazariyasida dastlabki masalaning ixtiyoriy X tayanch rejasi hamda ikkilangan masalaning ixtiyoriy Y tayanch rejasi uchun

Y(X) < U(Y), (3.9)

tengsizlik, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j < \sum_{i=1}^{m} b_i y_i , \quad (3.10)$$

Tengsizli ko'rinli bo'ladi. Bunday tengsizlik ikkilanish nazariyasining ***asosiy tengsizligi*** deb ataladi. Bu tengsizlik ixtiriy mumkin bo'lgan ishlab chiqarish rejasi hamda xom-ashyolarning ixtiyoriy mumkin bo'lgan baholari uchun ishlab chiqarilgan mahsulot bahosi sarf qilingan xom-ashyolar bahosidan oshmasligini ko'rsatadi.

3.1-teorema. Agar qo'shma masaalardan birortasi optimal echimga ega bo'lsa, u holda ikkinchisi ham yechimga ega bo'ladi hamda bu masalalardagi chiziqli funksiyalarning ekstremal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni

$$Z_{\min} = F_{\max} \quad , (3.11)$$

Agar bu masalalardan birining chiziqli funksiyasi chegaralanmagan bo'lsa, u holda ikkinchi masala hech qanday yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot. Teoremani simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar uchun isbotlaymiz. Berilgan m asala optimal yechimga ega va uni simpleks usul bilan topish mumkin deb faraz qilamiz. Umumiylikni buzmasdan optimal yechimdagi bazis vektorlar birinchi m ta P_1, P_2, … , P_m vektorlar dan iborat deb qabul qilamiz. Shu vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan matrisani ***B*** bilan belgilaymiz.Oxirgi simpleks jadval dastlabki simpleks jadvaldagi P_1, P_2, … , P_m , P_{m+1}, P_{m+2}, … , P_n vektorlarning bazis vektorlar buyicha yoyilmasini uz ichiga oladi, ya'ni dastlabki simpleks jadvaldagi har bir vektor P_j uchun oxirgi simpleks jadvalda quyidagi munosabatlarni qanoatlantiruvchi X vektor mos keladi:

$$P_j = B \cdot X_j \text{ yoki } B^{-1} \cdot P_j = X_j \text{ ,(3.12)}$$

$\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)$ bilan oxirgi simpleks jadvalning elementlaridan tashkil topgan matrisani belgilaymiz. Simpleks jadvalning dastlabki m ta vektori bazis vektorlardan iborat bo'lganligi sababli $\overline{X}$ matrisa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ...0 & x_{1m+1} & x_{1m+2} & x_{1n} \\ 0 & 1 & ...0 & x_{1m+1} & x_{1m+2} & x_{1m+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & ...1 & x_{1m+1} & x_{1m+2} & x_{1m+n} \end{pmatrix}.$$

Optimal yechim $X^0 = B^{-1} \cdot b$ vektordan iborat bo'lib, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$A = B \cdot X \quad , \quad B^{-1} \cdot A = X \text{ ,(3.13)}$$

$$b = B \cdot X^0 \quad , \quad B^{-1} \cdot b = X^0 \text{ ,(3.14)}$$

$$Z_{\min} = C^0 X^0 \text{, } \Delta = C^0 \overline{X} - C \le 0 \text{ .(3.15)}$$

bu yerda $C = (c_1, c_2, ..., c_m)$ - optimal yechimga mos keluvchi *S* vektorning koordinatalaridan tuziladigan vektor - qator. Endi W0=C°B-J ***(3.18)*** formula orqali aniqlanuvchi *W*° ni ikkilangan masalaning rejasi ekanligini ko'rsatamiz. (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) munosabatlarga asosan $W^0A - C = C^0B^{-1}A - C = C^0\overline{X} - C \le 0$,(3.16)

Demak,

$W^0A - C \le 0$ yoki $W^0A \le C$,(3.17)

Shunday qilib, (3.17) shartni qanoatlantiruvchi W^0 vektor ikkilangan masalaning rejasi bo'ladi. Bu rejadagi ikkilangan masala chiziqli funksiyasining qiymati $F(W^0) = W^0b$ (3.18) ga teng.

(3.15) v a (3.18) ga asosan

$F(W) = W^0b = C^0B^{-1}b = C^0X^0 = Z(X^0) = Z_{\min}$, (3.19)

Bundan ko'rinadiki, ikkilangan masala chiziqli funksiyasining W^0 rejadagi qiymati berilgan masalaning chiziqli funksiyasining optimal qiymatiga teng ekan. Endi W^0 reja ikkilangan masalaning optimal rejasi ekanligini ko'rsatamiz. (3.13) va (3.14) shartlarni kanoatlantiruvchi ixtiyoriy n o'lchovli W vektorlar uchun kuyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$WAX = Wb = F(W)$, (3.20)

$WAX \le CX = Z(X)$, (3.21)

(3.20) va (3.21) dan

$F(W) \le Z(X)$, (3.22)

tengsizliklar hosil bo'ladi. Bu tengsizlik ixtiyoriy *W* va *X* lar uchun bajariladi. Demak, (3.19) va (3.22) chiziqli funksiyalarning optimal qiymatlari uchun ham

$$\max F(W) < \min Z(X), \textit{(3.24)}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tom ondan $\boldsymbol{W^0}$ reja uchun (3.19) tenglik o'rinlidir.

Demak, $\boldsymbol{W^0}$ da ikkilangan masalaning chiziqli funksiyasi uzining maksimal qiymatiga erishadi.

3.2. Iqtisodiy masalalar yechimining talqini

Agar o'zaro ikki yoqlama masalaning birortasida maqsad funksiya chegaralanmagan bo'lsa, ikkinchi masala yechimga ega bo'lmaydi. Dastlabki masalaning yechimi, unga nisbatan ikki yoqlama masalaning yoki ikki yoqlama masalaning yechimidan dastlabki masalaning yechimini keltirib chiqarishga imkon beradigan simpleks usul, o'zaro ikki yoqlama simpleks usul deyiladi. Bu usul o'zaro ikki yoqlama masalaning asosiy teoremasiga asoslangandir.

Ma’lumki, chiziqli dasturlash usullari va, jumladan ,simpleks usul iqtisodiy masalalarning eng optimal yechimini topishga yordam beradi. Lekin buning o’zi kifo yaemas. Optimal yechim topilgandan so’ng iqtisodiy obyektlar (zavod, fabrika, firma) boshliqlari oldida quyidagiga o’xshash muammolarni yechishga to’g’ri keladi:

- xom ash yolarning ba’zilarini oshirib, ba’zilarini qisqartirib sarf qilinsa optimal yechim qanday o’zgaradi ?
- optimal yechimni o’zgartirmasdan xom ashyolar sarfini qanday darajaga o’zgartirish (kamaytirish) mumkin?

Mahsulotga bo’lgan talab bir birlikka kamayganda (oshganda) optimal yechim qanday o’zgaradi ? Shunga o’xshash muammolarni hal qilishda ikkilanish nazariyasidan foydalaniladi . Bunga ikkilanish nazariyasining yuqoridagi teoremalariga asoslaniladi. Iqtisodiy masalaning optimal yechimini tahlil qilish jarayonini quyidagi misolda ko’rsatamiz.

3.2-masala. Faraz qilaylik, korxonada bir xil mahsulot 4 ta texnologiya asosida ish lab chiqarilsin. Har bir texnologiya bo’yicha bir birlik vaqt ichida sarf qilinadigan resurslarning miqdori, ularning zahirasi , har bir texnologiyaning unumdorligi quyidagi jadvalda kelitirilgan.

3.1-jadval

Resurslar	Texnologiyalar				Resurslar zahirasi
	T1	T2	T3	T4	
Ishchi kuchi (kishi/soat)	4	2	2	3	36
Xom-ashyo (ming kg)	1	1	2	1	30
Elektr quvvati (ming kvt/soat)	3	1	2	1	40
Texnologiyalar unumdorligi	14	10	14	11	

Yuqoridagi talablarga ko’ra olingan yechimlarni tahlil qilamiz.

Dastlabki masala

Maqsad funksiya

$$Z_{max} = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4$$

chegaraviy shartlar

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 36 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40. \\ x_{1,2,3,4} \ge 0. \end{cases}$$

Bazis o`zgaruvchilarni tengsizliklar sistemasiga qo`shamiz:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 36 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_4 = 40. \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Maqsad tunksiyalariga basis o`zgaruvchlarni qo`shamiz:

$$Z_{max} = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

Bazis o`zgaruvchilarni tenglamalar sistemasiga nisbatan yechamiz:

$$\begin{cases} x_5 = 36 - (4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4) \\ x_6 = 30 - (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) \\ x_7 = 40 - (3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ desak, Tayanch yechim $x_5 = 36$, $x_6 = 30$, $x_7 = 40$.

Masalaning tayanch yechimi B=(0,0,0,0,36,30,40) ga teng va Z_{max}=0.

Maqsad funksiyasini quyidagi ko`rinishga keltiramiz:

$$Z_j - C_j = Z_j - (14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6).$$

Masala maksimumga yechilishi uchun

$$Z_j - C_j = Z_j - (14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6) \geq 0.$$

Simpleks jadval tuzamiz va masalani yechamiz:

3.2-jadval

qadam	B	C	O	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
				14	10	14	11	0	0	0
berilgan	x_5	0	36	$\boxed{4}$	2	2	3	1	0	0
	x_6	0	30	1	1	2	1	0	1	0
	x_7	0	40	3	1	2	1	0	0	1
m+`1	Z_j-C_j		0	-14	-10	-14	-11	0	0	0
I	x_1	14	9	1	1/2	1/2	3/4	1/4	0	0
	x_6	0	21	0	1/2	$\boxed{3/2}$	1/4	-1/4	1	0
	x_7	0	13	0	-1/2	1/2	-5/4	-3/4	0	1
m+1	Z_j-C_j		126	0	-3	-7	-1/2	-7/2	0	0
II	x_1	14	2	1	$\boxed{1/3}$	0	2/3	1/3	-1/3	0
	x_3	14	14	0	1/3	1	1/6	-1/6	2/3	0
	x_7	0	6	0	-2/3	0	-4/3	-2/3	-1/3	1

m+1	Z_j-C_j		224	0	-2/3	0	2/3	7/3	14/3	0
III	x_2	10	6	3	1	0	2	1	-1	0
	x_3	14	12	-1	0	1	-1/2	-1/2	1	0
	x_7	0	10	2	0	0	0	0	-1	1
m+1	Z_j-C_j		228	2	0	0	2	3	4	0
				y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3
				$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

Simpleks usulning III bosqichida berilgan masalaning optimal yechimi topildi:

$$x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 12 \ , \ x_4 = 0; \ Z_{max} = 228.$$

Ikkilangan masalaning yechimi:

$$y_1 = 3, y_2 = 6, y_3 = 0 \ ; \ F_{min} = 228.$$

Ikkilangan masala:

Maqsad funksiya

$$F_{min} = 36y_1 + 30y_2 + 40y_3$$

chegaraviy shartlar

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 3y_3 \ \geq 14, \\ \quad 2y_1 + y_2 + y_3 \ \geq 10, \\ \quad 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ \geq 14, \\ y_{1,2,3} \ \geq \ 0. \end{cases}$$

Ikkilangan masalaning yechimi:

$$y_1 = 3, y_2 = 6, y_3 = 0 \ ; \ F_{min} = 228.$$

3.2-advaldan ko’rinadiki, T -1 texnologiyani 60 soat, T -3 ni 12 soat qo’llash kerak. T -2 texnologiyani esa, umuman qo’llamaslik kerak.

Simpleks usulning III bosqichida berilgan masalaning optimal yechimi topildi:

$$x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 12 \ , \ x_4 = 0; \ Z_{max} = 228.$$

Simpleks usulning III bosqichida berilgan masalaning optimal yechimi topildi:

$$x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 12 \ , \ x_4 = 0; \ Z_{max} = 228.$$

Jadvaldan ko’rinadiki, T -2 texnologiyani 6 soat, T -3 ni 12 soat qo’llash kerak. T -1 va T-3 texnologiyani esa, umuman qo’llamaslik kerak.

Ikkilangan masalaning yechimi:

$$y_1 = 3, y_2 = 6, y_3 = 0 \ ; \ F_{min} = 228.$$

Demak, birinchi va ikkinchi resurslar (ish kuchi va birlamchi xom-ashyo)ning ikkilangan baholari uchun

$y_1 = 3 \geq 0,\ y_2 = 6 \geq 0,\ y_3 = 0$

Bundan ish kuchi va birlamchi xom ashyo ishlab chiqarishda to'la ishlatilganligi ko'rinadi. Demak, bu resurslar kamyob resurslardir. Uchinchi resurs (elektroenergiya)ning ikkilamchi bahosi $y_3 = 0$ bo'lgani uchun bu resurs kamyob emas, ya'ni ortiqcha.

Masalani yechish natijasida topilgan optimal $x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 12$, $x_4 = 0$ va yechimlarni berilgan tengsizliklar sistemasiga qo'yamiz:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4\cdot 0 + 2\cdot 6 + 2\cdot 12 + 3\cdot 0 = 36 = 36 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1\cdot 0 + 1\cdot 6 + 2\cdot 12 + 1\cdot 0 = 30 \leq 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3\cdot 0 + 1\cdot 6 + 2\cdot 12 + 1\cdot 0 = 30 \leq 40. \\ x_{1,2,3,4} \geq 0. \end{cases}$$

maqsad funksiya

$$Z_{max} = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 = 14\cdot 0 + 10\cdot 6 + 14\cdot 12 + 11\cdot 0 = 228.$$

Ikkilangan masalani yechish natijasida topilgan $\boldsymbol{y_1} = 3$, $\boldsymbol{y_2} = 4$ va $\boldsymbol{y_3} = 0$ optimal yechimlarni berilgan tengsizliklar sistemasiga qo'yamiz:

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 3y_3 = 4\cdot 3 + 4 + 3\cdot 0 = 16 \geq 14, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 = 2\cdot 3 + 4 + 0 = 12 \geq 10, \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 0 = 14 = 14, \\ y_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

$$F_{min} = 36\cdot y_1 + 30\cdot y_2 + 40\cdot y_3 = 36\cdot 3 + 30\cdot 4 + 30\cdot 0 = 228$$

hamda undagi birinchi va ikkinchi shartlarning qat'iy tengsizlikka, uchinchi shart esa ayniyatga aylanganini ko'ramiz. Demak, haqiqatdan ham , ish kuchi va birlamchi xom ortiqcha kamyob, elektroenyergiya ashyo esa ekan. Elektroenergiyani ikkilamchi bahosi $\boldsymbol{y_3}$ =0 bo'lgani uchun uni ishlab chiqarishga oshirib sarf qilish , korxonada mahsulot ishlabchi qarish hajmini o'zgarishiga ta'sir qilmaydi.

Ish kuchining ikkilamchi bahosi y_1=3>0 bo'lgani uchun uni bir birlikka oshirib sarf qilinsa, korxonadagi ishlab chiqarish rejasi o'zgaradi. Bu rejani qanday o'zgarishini aniqlash uchun oxirgi simpleks jadvaldagi $\boldsymbol{P_5}$ ustuniga qaraymiz va xulosa qilamiz. Yangi rejaga asosan T -2 texnologiya 1 soat ko`rroq, T-3 texnologiya esa 0.5 soat kamroq ishlatiladi. Natijada korxona 4 birlik qo'shimcha mahsulot ishlab chiqaradi. Bu holda korxonaning ishlab chiqargan mahsulotining hajmi

224+4=228

birlik bo'ladi.

3.3. Ikkilanma simplyeks usul

Agar o'zaro ikki yoqlama masalaning birortasida maqsad funksiya chegaralanmagan bo'lsa, ikkinchi masala yechimga ega bo'lmaydi. Dastlabki masalaning yechimi, unga nisbatan ikki yoqlama masalaning yoki ikki yoqlama masalaning yechimidan dastlabki masalaning yechimini keltirib chiqarishga imkon beradigan simpleks usul, o'zaro ikki yoqlama simpleks usul deyiladi. Bu usul o'zaro ikki yoqlama masalaning asosiy teoremasiga asoslangandir. Aytaylik o'zaro ikki yoqlama simpleks usulning asosiy dastlabki (3.25) va (3.26) masalalari berilgan bo'lsin:

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad ,(3.25)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \; i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \; j = \overline{1,n} \end{cases} \quad , \; (3.26)$$

va unga nisbatan ikki yoqlama bo'lgan (3.25) – (3.26) masalaga simpleks usulni qo'llash uchun cheklanish shartlari bazis noma'lumlarga nisbatan yechilgan bo'lishi lozim.

$$x_{n+i} = -b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad b_i \le 0; \; i = \overline{1,m} \qquad (3.27)$$

$$y_{m+j} = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + c_j, \quad c_j \ge 0; \; j = \overline{1,n} \quad , \; (3.28).$$

Bu yerda (3.25), (3.26) tenglamalar sistemasi (3.27) va (3.28) tengsizliklar sistemasidan qo'shimcha $x_{n+i} \ge 0, \; i = \overline{1,m}$; $y_{m+j} \ge 0, \; j = \overline{1,n}$ noma'lumlarni kiritish natijasida kelib chiqadi. (3.27) va (3.28) da $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ noma'lumlar berilgan masala uchun bazisdir. $x_1, x_2, ..., x_n$ ozod noma'lumlardir $y_{m+1}, y_{m+2}, ..., y_{m+n}$ noma'lumlar esa ikki yoqlama masala uchun bazis, $y_{m+1}, y_{m+2}, ..., y_{m+n}$ lar ozod noma'lumlar bo'ladi.

Ikkilanma masalaning asosiy teoremasiga ko'ra $\min Z = \max F$. Demak yuqoridagi masalalarning birini optimal yechimini topsak, ikkinchisining ham optimal yechimini topgan bo'lamiz.

Buning uchun berilgan masaladagi bazis noma'lumlar, ikki yoqlama masaladagi ozod noma'lumlar, ikki yoqlama masaladagi bazis noma'lumlar bilan dastlabki masaladagi ozod noma'lumlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish kifoyadir.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+m} & & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m & & y_{m+1} & y_{m+2} & \cdots & y_{m+n} \end{array}$$

Berilgan masalaning maqbuliy (optimal) yechimi $\{0;0;\ldots;0;x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m}\}$bo'lsa, unga ikki yoqlama masalaning optimal yechimi $\{y_1,y_2,\ldots,y_m\,0,0,\ldots,0\}$ bo'lib, y_1 ga x_{n+1} ning oldidagi koeffisiyent $y_1=P_{n+1}$ ga; y_2 esa x_{n+2} ning oldidagi koeffisiyent $y_2=P_{n+2}$ ga; va hokazo munosabatlar o'rinlidir.

1.2-masala. Quyidagi masalaga ikki yoqlama masala tuzilsin va ularning yechimi o'zaro ikki yoqlama simpleks usuli bilan yechilsin.

$$Z_{\min}=2x_1+4x_2+12x_4$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4\geq 10\\ 2x_1+x_2-2x_3+3x_4\geq 4\\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5-x_1-2x_2-x_3-4x_4=-10\\ x_6-2x_1-x_2+2x_3-3x_4=-4\end{cases}$$

Yechish. Dastlabki masalaga ikki yoqlama masala quyidagicha yoziladi:

$$F_{\max}=10y_1+4y_2$$

$$\begin{cases} y_1+2y_2\leq 2\\ 2y_1+y_2\leq 4\\ y_1-2y_2\leq 0\\ 4y_1+3y_2\leq 12\\ y_j\geq 0,\ j=\overline{1,2}\end{cases}$$

$$F_{\max}=10y_1+4y_2$$

$$\begin{cases} y_i+2y_2+y_3=2\\ 2y_1+y_2+y_4=4\\ y_1-2y_2+y_5=0\\ 4y_1+3y_2+y_6=12\\ y_j\geq 0,\ j=\overline{1,2}\end{cases}$$

Dastlabki masaladagi x_4,x_5 bazis noma'lumlar bilan ikki yoqlama masaladagi y_1,y_2 ozod noma'lumlar va berilgan masaladagi x_1,x_2,x_3,x_4 ozod noma'lumlar bilan ikki yoqlama masaladagi y_3,y_4,y_5,y_6 bazis noma'lumlar o'rtasida

$$\begin{array}{cc} x_5 & x_6\\ \updownarrow & \updownarrow\\ y_1 & y_2\end{array}\quad \text{va}\quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\ y_3 & y_4 & y_5 & y_6\end{array}$$

o'zaro bir qiymati moslikni o'rnatib, bevosita birinchi masalaning yechimidan ikkinchi masalaning yechimi kelib chiqishini aniqlaymiz. Ikki yoqlama masalalar uchun simpleks usulni qo'llash osondir, chunki ozod hadlar musbatdir. Ushbu ma'lumotlardan foydalanib, 3.3- jadvalni hosil qilamiz.

3.3-jadval

Qadam	B	C	O	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
			0	10	4	0	0	0	0
berilgan	**y_3**	0	2	1	2	1	0	0	0
	y_4	0	4	2	1	0	1	0	0

	y_4	0	0	1	-2	0	0	1	0
	y_5	0	12	4	3	0	0	0	1
m+1	F_i-C_i		0	-10	-4	0	0	0	0

1-jadvalning m+1– qatoridagi manfiy sonlar (– 10, - 4) dan iborat bo'lib,, ularning absolyut qiymati bo'yicha eng kattasi 10 bo'lganligi uchun, (- 10 < 0) ga mos keluvchi ustun hal qiluvchi ustun bo'ladi, y_3 – bazis noma'lum, y_1 – bazis bilan almashinadi. Bu holdagi tayanch (optimal bo'lmagan) yechim {0; 0; 2; 4; 0; 12} dan iborat bo'lib, maqsad funksiyaning qiymati F = 0 ga teng bo'ladi.

Hal qiluvchi element, hal qiluvchi ustunda yotadi. U element quyidagicha aniqlanadi.

$$\min\left\{\frac{2}{1};\ \frac{4}{2};\ \frac{0}{1};\ \frac{12}{4}\right\}$$

va ularning eng kichigining maxraji hal qiluvchi element bo'ladi. Demak, hal qiluvchi element 1 ga teng bo'lganligi uchun u_5 – ga mos keluvchi qator elementlari o'zgarishsiz qoladi. Ozod hadlar ustunidagi elementlar quyidagicha topiladi.

$$b_1' = b_1 - \frac{b_3 \cdot a_{11}}{a_{13}} = 2 - \frac{0 \cdot 1}{1} = 2 - 0 = 2,$$

$$b_2' = b_2 - \frac{b_3 \cdot a_{21}}{a_{13}} = 4 - \frac{0 \cdot 2}{1} = 4 - 0 = 4, \qquad b_3' = 0,$$

$$b_4' = b_4 - \frac{b_3 \cdot a_{41}}{a_{31}} = 12 - \frac{0 \cdot 4}{1} = 12 - 0 = 12,$$

$$b_5' = b_5 - \frac{b_3 \cdot a_{51}}{a_{31}} = 0 - \frac{0 \cdot (-10)}{1} = 0 - 0 = 0.$$

P_1 - ga mos keluvchi ustundagi elementlar hal qiluvchi element 1 – dan tashqarisi 0 –lardan iborat bo'ladi, ya'ni

$$a_{11}' = 0;\ a_{21}' = 0;\ a_{31}' = 1;\ a_{41}' = 1;\ a_{51}' = 0,$$

P_2 – ga mos keluvchi ustundagi elementlar quyidagicha aniqlanadi:

$$a_{12}' = a_{12} - \frac{a_{32} \cdot a_{11}}{a_{31}} = 2 - \frac{-2 \cdot 1}{1} = 2 + 2 = 4,$$

$$a_{22}' = a_{22} - \frac{a_{32} \cdot a_{21}}{a_{31}} = 1 - \frac{-2 \cdot 2}{1} = 1 + 4 = 5, \qquad a_{32}' = 0;$$

$$a_{42}' = a_{42} - \frac{a_{32} \cdot a_{41}}{a_{31}} = 3 - \frac{-2 \cdot 4}{1} = 3 + 8 = 11,$$

$$a_{52}' = a_{52} - \frac{a_{32} \cdot a_{51}}{a_{31}} = -4 - \frac{-2 \cdot (-10)}{1} = -4 - 20 = 24.$$

P_3, u_4, u_5 ustunlarga mos keluvchi elementlar ham yuqoridagidek topiladi:

$$a'_{13} = 1 - \frac{0 \cdot 1}{1} = 1;\ a'_{23} = 0;\ a'_{33} = 0;\ a'_{43} = 0;\ a'_{53} = 0;$$
$$a'_{14} = 0;\ a'_{24} = 1;\ a'_{34} = 0;\ a'_{44} = 0;\ a'_{54} = 0;$$
$$a'_{15} = 0 - \frac{1 \cdot 1}{1} = -1;\ a'_{25} = 0 - \frac{1 \cdot 1}{1} = -1;\ a'_{35} = 1;$$
$$a'_{45} = 0 - \frac{1 \cdot 4}{1} = -4;\ a'_{55} = 0 - \frac{1 \cdot (-10)}{1} = 10;$$
$$a'_{16} = 0;\ a'_{26} = 0;\ a'_{36} = 0;\ a'_{46} = 1;\ a'_{56} = 0.$$

Demak, topilgan natijalardan foydalanib, 3.4-jadval elementlarini hosil qilamiz.

3.4-jadval

Qadam	B	C	O	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
			0	10	4	0	0	0	0	
berilgan	**y_3**	0	2	0	$\boxed{4}$	1	0	-1	0	X3
	y_4	0	4	0	-5	0	1	-1	0	X4
	y_1	10	0	1	-2	0	0	1	0	X1
	y_5	0	12	1	11	0	0	-4	1	X5
	F_i-C_i		0	0	-24	0	0	10	0	

3.4-jadval ma'lumotlariga ko'ra masalaning tayanch yechimi {0, 0, 2, 4; 0, 12} dan iborat bo'lib, maqsad funksiyaning qiymati F= 0 bo'ladi. Ushbu topilgan tayanch yechim maqbuliy yechim emasdir, chunki jadvalning F- qatorida – 24 < 0 element mavjud . Yuqoridagi bajarilganlarga asosan 3.5-jadvalni hosil qilamiz.

3.5-jadval

Qadam	b	C	O	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
			0	10	4	0	0	0	0
berilgan	**y_2**	4	1/2	0	1	1/4	0	-1/4	0
	y_4	0	3/2	0	0	0	1	-3/4	0
	y_1	10	1	1	0	0	0	1/2	0
	y_5	0	13/2	1	0	1/2	0	-5/4	1
	F_i-C_i		12	0	0	6	0	4	0
				y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
				$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
				x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	x_4

3-jadval ma'lumotlaridan ko'rinib turibdiki, topilgan yechim $\left\{1;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{3}{2};\ 0;\ \frac{13}{2}\right\}$ optimal yechimdir, chunki Z – qator elementlari uchun $Z \ge 0$ optimallik sharti o'rinlidir. Ushbu topilgan optimal yechimda maqsad funksiyaning qiymati $Z_{\max} = 12$ ga tengligi jadvaldan aniqlanadi.

$$x_1 = y_5 = 4, \quad x_2 = y_6 = 0, \quad x_3 = y_1 = 0, \quad x_4 = y_2 = 0, x_5 = y_3 = 6, x_6 = y_4 = 0$$

bo'lib, ushbu qiymatlar dastlabki masalaning yechimi:

$Z_{\min} = 2\cdot 6 + 4\cdot 0 + 12\cdot 0 = 12$ bo'ladi.

Demak, bundan asosiy teoremaning o'rinli ekanligini tasdiqlash mumkin.

$$\min Z = \max F = 12.$$

Bu esa masalaning to'g'ri yechilganligini bildiradi. Dastlabki masalaning maksimumi ikkilanma masalaning minimimumgateng: $Z_{\max} = F_{\min}$.

VARIANTLAR

Berilgan masalani yeching va ikkilanma masalaning yechimini jadvalga qarab toping.

3.1-masala	3.2-masala
$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=4$, $x_2=0$, $Z_{\max}=12$	$Z = -2x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \le 20 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 = 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=0$, $x_2=6$, $Z_{\max}=18$
3.3-masala	3.4-masala
$Z = -5x_1 + 4x_2 \to \min$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 - 6x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=2$, $x_2=0$, $Z_{\min}=-10$	$Z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$ $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=2/5$, $x_2=24/5$, $Z_{\max}=154/5$
3.5-masala	3.6-masala
$Z = -5x_1 + 4x_2 \to \min$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 - 6x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=2$, $x_2=0$, $Z_{\min}=-10$	. Z= $-5x_1+6x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=0$, $x_2=4$, $Z_{\max}=24$
3.7-masala	3.8-masala

$Z = 4x_1 - 7x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=2$, $x_2=0$, $Z_{max}=8$	$Z = 6x_1 - 7x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=0$, $x_2=6$, $Z_{min}=-42$
3.9-masala	3.10-masala
$Z = 10x_1 - 5x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ 7x_1 - 8x_2 \le 56 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=4$, $x_2=0$, $Z_{max}=40$	. $Z = 4x - 5x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 12 \\ -3x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=0$, $x_2=3$, $Z_{min}=-15$
3.11-masala	3.12-masala
. $Z = 3x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ 3x_1 - 6x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=0$, $x_2=2$, $Z_{min}=-10$	. $Z = 4x_1 - 20x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 0 \end{cases}$ $x_1=5$, $x_2=0$, $Z_{max}=20$
3.13-masala	3.14-masala
$Z = 10x_1 - 20x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ 4x_1 - 5x_2 \le 20 \\ 7x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=2$, $x_2=0$, $Z_{max}=20$	13. $Z = 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ 5x_1 - 4x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $x_1=3$, $x_2=0$, $Z_{max}=18$

Muhokama uchun savollar

1.Chiziqli programmalashtirish masalasida ikkilanganlik ma'nosi nima?
2. Cimmetrik bo'lmagan o'zaro ikki yoqlama masalani izohlab bering?
3. Dastlabki masala bilan ikki yoqlama masalalar o'rtasida qanday farq mavjud?
4. Simmetrik bo'lgan o'zaro ikki qlama masalalarni izohlab bering?
5. O'zaro ikki yoqlama masalaning asosiy teoremasini izohlab bering?

4-BOB. BUTUN SONLI PROGRAMMALASHTIRISH

4.1. Butun sonli chiziqli programmalashtirish muammosi

Quyidagi chiziqli programmalashtiris masalasi berilgan bo`lsin:

Maqsad funksiyasi:

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max\ (\min)$, (4.1)

Chegaraviy shartlari:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad , \ (4.2)$$

Cheklashlar:

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$,(4.3)

(4.1) - (4.3) programmalashtirish masalasini umumiy holda quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max(\min), (4.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,,\quad (i = 1,2,...m), (4.5)$$

$$x_j \geq 0, butun, (j = 1,2,...,n), (4.6),$$

yoki vektor formada

$$\begin{aligned} &Z = CX \\ &AX = B, \qquad , (4.7) \\ &X \geq 0 \quad va\, butun. \end{aligned}$$

Butun sonli programmalashtirish masalalaridagi noma'lumlarning hammasi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilsa, bunday masalalar to'la butun sonli programmalashtirish masalalari deb ataladi. Noma'lumlarning ma'lum bir qismi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilgan masalalar qisman butun sonli programmalashtirish masalalari deb ataladi.

Agar butun sonli programmalashtirish masalasidagi noma'lumlar faqat 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lsa, u holda bu masala Bul programmalashtirish masalasi deb ataladi.

Butun sonli programmalashtirish masalalarni yechish uchun uning xususiyatlarini e'tiborga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ulardan amerika olimi R.Gomori yaratgan usul optimal yechimni beruvchi eng aniq usul hisoblanadi. R.Gomori to'liq butun sonli va qisman butun sonli programmalashtirish masalalarni yechish usulini yaratgan.

Quyida uning faqat to'liq butun sonli programmalashtirish masalalarni yechish uchun mo'ljallangan 1-algoritmi bilan tanishamiz.

Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat. Berilgan butun sonli programmalashtirish masalasida noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan, ularning oddiy chiziqli programmalashtirish masalasi sifatida simpleks usulidan foydalanib yechamiz. Agar yechim butun sonlardan iborat bo'lsa, u butun sonli programmalashtirish masalasining ham yechimi bo'ladi. Aks holda noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini e'tiborga oluvchi va «kesuvchi tenglama» deb ataluvchi qo'shimcha tenglama tuziladi. Bu tenglama asosiy tenglamalar sistemasiga qo'shib yoziladi va bazis yechim almashtiriladi. Buninguchun noma'lumni kesuvchi tenglamadan ajratiladi va uning qiymatini boshqa tenglamalarga qo'yib chiqiladi. Bunday ishlar masalaning butun sonli yechimi topilguncha yoki uning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Har bir bosqichda tuzilgan qo'shimcha tenglama kesuvchi tenglama deb atalishiga sabab bu tenglama yordamida berilgan (1)-(3) masalaning rejalaridan tashkil topgan qavariq to'plamining kasr sonli rejalarini o'z ichiga olgan qismini kesib beradi. Kesish jarayoni K to'plamining faqat butun sonli rejalarini o'z ichiga olgan qismi K topilguncha yoki bunday qism mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Kesuvchi tenglamalar quyidagicha tuziladi:

1.Faraz qilaylik, ((4.4)-(4.6) masaladagi noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan masala yechilgan va uning optimal yechimi $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bo'lsin. Oxirgi simpleks jadvaldagi bazis vektorlar $P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots, P_m$ lardan iborat deylik. Bu holda bu simpleks jadvalining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\overline{X} = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0\ldots\ldots0\ldots\ldots0 & x_{1,m+1}\ldots\ldots x_{1j}\ldots\ldots x_{1n} \\ x_2 & 0 & 1\ldots\ldots0\ldots\ldots0 & x_{2,m+1}\ldots\ldots x_{2j}\ldots\ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ x_i & 0 & 0\ldots\ldots1\ldots\ldots0 & x_{i,m+1}\ldots\ldots x_{ij}\ldots\ldots x_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ x_m & 0 & 0\ldots\ldots0\ldots\ldots1 & x_{m,m+1}\ldots\ldots x_{mj}\ldots\ldots x_{mn} \end{vmatrix}.$$

4.1-rasm. Optimal yechim

4.2. Gomori usuli

Faraz qilaylik, ba'zi x_i lar kasr sonlardan iborat bo'lsin hamda ba'zi x_{ij} lar ham kasr sonlar bo'lsin (aks holda masala butun sonli yechimga ega bo'lmaydi). x_i va x_{ij} larning butun qismlarini mos ravishda $[x_i]$ va $[x_{ij}]$ bilan belgilaymiz. U holda bu sonlarning kasr qismlari q_i , q_{ij} lar quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{cases} q_i = x_i - [x_i] \\ q_{ij} = x_{ij} - [x_{ij}] \end{cases}$$

Faraz qilaylik, ba'zi $q_i \neq 0$ bo'lsin. U xolda X matrisaning $\max\limits_{q_i \neq 0} q_i = q_k$ tenglikni qanoatlantiruvchi k qatori uchun kesuvchi tenglama tuziladi. Buning uchun avval

$$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + ... + q_{kn}x_n \geq q_k$$

tengsizlik tuziladi, so'ngra uni (-1) ga ko'paytirib x_{n+1} qo'shimcha o'zgaruvchi kiritish natijasida quyidagi tenglama hosil qilinadi:

$$-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - .... - q_{kn}x_n + x_{n+1} \leq -q_k$$

Bunday tuzilgan tenglama kesuvchi tenglama deyiladi.

3. Kesuvchi tenglamani simpleks jadvalining m+2 qatoriga joylashtiramiz. Bu tenglama dagi x_{n+1} o'zgaruvchiga mos keluvchi P_{n+1} vektor bazis vektor bo'ladi.

Bazisdan P_{n+1} vektor chiqarilib, uning o'rniga $\min\limits_{q_{kl}<0}\left(\dfrac{\Delta_j}{q_{kj}}\right) = \dfrac{\Delta_l}{q_{kl}}$ shartni qanoatlantiruvchi P_j vektor kiritiladi va oddiy simpleks usuldagi formulalar yordamida simpleks jadval almashtiriladi.

Agar hosil bo'lgan simpleks jadvaldagi barcha x_i lar butun sonli **(**ya'ni hamma $q_i = 0$) bo'lsa, topilgan yechim berilgan butun sonli programmalashtirish masalasining yechimi bo'ladi. Aks xolda yuqoridagi 2-3 punktlarda qilingan ishlarni yana takrorlaymiz, umuman bu ishlar berilgan masalalarning butun sonli yechimi topilguncha yoki masalalarning butun sonli yechimi mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Agar *max* $q_i = q_k$ shartni qanoatlantiruvchi *k*-qatordagi barcha x_{ij} lar *butun* sonli (demak barcha $q_{kj}=0$) bo'lsa, u holda berilgan masala butun sonli yechimga ega bo'lmaydi.

4.1-masala. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini butun sonli yechimini toping.

$z = 8x_1 + 6x_2$, maqsad funksiyaga maksimum qiymat beruvchi

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ 4x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases},$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$ cheklashlar bilan berilgan chiziqli programmalashtirish masalasini $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ butun yechimlari aniqlansin.

Masalaning yechilishi.

Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasi R. Gomari usulida yechilsin.

$z = 8x_1 + 6x_2$ maksimum qiymatlarga yerishganda x_1, x_2 ning qiymatlari topilsin va quyidagi chegaraviy va cheklanish shartlari bajarilsin:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 11 \\ 4x_1 + x_2 \le 8 \end{cases},$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8 \end{cases}$$

va $X \ge 0$.x

$$z_j - c_j = 0 - (8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} x_3 = 11 - (3x_1 + 5x_2) \\ x_4 = 8 - (4x_1 + x_2) \end{cases} \text{va} \quad X \ge 0$$

Simpleks usulni qo`llab quyidagi jadvalarni tuzamiz.

4.1-jadval

qadam	BAZIS	C	B	P_1	P_2	P_3	P_4
			0	8	6	0	0
Berilgan	x_3	0	11	3	5	1	0
	x_4	0	8	$\boxed{4}$	1	0	1
m+1	z_j-c_j		0	-8	-6	0	0

Masala maksimumga yechilishi uchun m+1-satr elemenlari musbat va nol sonlar bo`lishi kerak. 4.1-jadvalda m+1-satr elemenlari P_1 ustun bilan keshishgan joyda -8 soni, P_2 ustun kesishgan joyda -6 soni turibdi. Masala yechilmagan.

Simpleks usulni qo`llaymiz.

1) m+1 satrning manfiy elementlarini ichidan absolyut qiymati eng kattasini topamiz. Bu son -8 soni;

2) -8 soni bilan kesishgan ustun P_1 hal qiluvchi ustun;

3) hal qiluvchi ustun P_1dagi musbat sonlarni aniqlaymiz. Bu sonlar P_1 ustun bilan x_4 satr kesishgan 4 soni, P_1 ustun bilan x_3 satr kesishgan 3 sonidir;

4) hal qiluvchi elementni topish uchun x_3 satrdagi $b_3=11$ ni P_1 ustun bilan x_3 satr kesishgan 3 soniga bolamiz: $\frac{11}{3}$;

5) hal qiluvchi elementni topish uchun x_4 satrdagi $b_4=8$ ni P_1 ustun bilan x_4 satr kesishgan 4 soniga bolamiz: $\frac{8}{4}$;

6) 4 va 5-punktda sonlarni taqqoslaymiz va minimumini topamiz: $\min\left(\frac{11}{3};\frac{8}{4}\right)=2$;

7) $\frac{8}{4}$ kasr minimum bo`lganligi uchun x_4 satrdagi $b_4=8$ ni P_1 ustun bilan x_4 satr kesishgan 4 soni hal qiluvchi element.

8) C ustun bilan x_4 satr kesishgan joyga maqsad funksiyaning x_1 noma`lum oldidagi koeffisiyenti $c_1=8$ ni qo`yamiz;

9) x_4 satr P_1 ustun bilan kesishganligi uchun x_4 satr o`rniga x_1 satr yoziladi va uning qogan elemenlari quyidagicha topiladi:

` 10) Hal qiluvchi satr elementlari o`rniga qo`yiladigan elementlar quyidagicha topiladi: ozod hadi elemenlaridan boshlab barchasi alohida-alohida hal qiluvchi elementga bo`linadi:

$$b'_2=\frac{8}{4}=2;\ a'_{21}=\frac{4}{4}=1;\ a'_{22}=\frac{1}{4};\ a'_{23}=\frac{0}{4}=0;\ \ a'_{24}=\frac{1}{4};$$

11) hal qiluvchi element joylashgan ustundagi qolgan elementlari o`rniga nol soni yoziladi;

12) jadvalning qolgan elementlarini topamiz.

Bustunning qolgan elementlari: $b'_3=11-\frac{8\cdot 3}{4}=\frac{20}{4}=5;\ b'_{m+1}=0-\frac{8\cdot(-8)}{4}=16;$

P_2 ustunning elementlari: $a'_{32}=5-\frac{3\cdot 1}{4}=\frac{17}{4}\ \ ;\ \ a'_{m+1,2}=-6-\frac{1\cdot(-8)}{4}=-4;$

P_3 ustunning elementlari: $a'_{33}=1-\frac{3\cdot 0}{4}=1\ \ ;\ \ a'_{m+1,3}=-6-\frac{1\cdot(-8)}{4}=-4;$

P_4 ustunning elementlari: $a'_{34}=0-\frac{3\cdot 1}{4}=-\frac{3}{4}\ \ ;\ \ a'_{m+1,4}=0-\frac{1\cdot(-8)}{4}=2.$

4.2-jadval

qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4
			0	8	6	0	0
I	x_3	0	5	0	$\boxed{17/4}$	1	-3/4
	x_1	8	2	1	1/4	0	1/4
m+1	z_j-c_j		16	0	-4	0	2

Yuqoridagidek, 4.2-jadval ma`lumotlariga simpleks usulni qo`llaymiz.

4.3-jadval

qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4
			0	8	6	0	0
	x_2	6	20/17	0	1	4/17	-3/17
II	x_1	8	29/17	1	0	-1/17	5/17
m+1	z_j-c_j		352/17	0	0	16/17	22/17

Masalaning optimal yechimi quyidagiga teng**:**

Javob: $x_1 = \frac{29}{17},\ x_2 = \frac{20}{17},\quad z_{\max} = \frac{352}{17}$.

O ozod had ustunidagi $\max\left(\frac{20}{17}, \frac{29}{17}\right) = \frac{29}{17}$ ekanligidan $x_1 = \frac{29}{17}$ element ekanligidan

$$q_1 = \frac{29}{17} - \left[\frac{29}{17}\right] = \frac{29}{17} - 1 = \frac{29-17}{17} = \frac{12}{17};\ q_{13} = -\frac{1}{17};\ q_{14} = \frac{5}{17}.$$

Kecuvchi tenglama tuzamiz:

$$-\frac{1}{17}x_3 + \frac{5}{17}x_4 \geq \frac{12}{17};$$

Kesuvchi tenglamani (-1) ga ko`paytiramiz:

$$\frac{1}{17}x_3 - \frac{5}{17}x_4 \leq -\frac{12}{17};$$

$$\frac{1}{17}x_3 - \frac{5}{17}x_4 + x_5 = -\frac{12}{17}.$$

x_5 satrdan $\min\limits_{q_{kl}<0}\left(\frac{\Delta_j}{q_{kj}}\right) = \frac{\Delta_l}{q_{kl}}$ formulaga ko`ra $\min\left(\frac{8}{-\frac{5}{7}}\right) = --\frac{5}{7}$ ekanligidan hal qiluvchi element $q_{14} = -\frac{5}{17}$ dan iborat. Yangi satrga x_5 ni va yangi usunga P_5 ni yozamiz.

4.4-jadval

qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
			0	8	6	0	0	0
	x_2	6	20/17	0	1	4/17	-3/17	0
II	x_1	8	29/17	1	0	-1/17	5/17	0
m+1	z_j-c_j		352/17	0	0	16/17	22/17	0
	x_5	0	-12/17	0	0	1/17	$\boxed{-5/17}$	1

Hisoblashlarni bajaramiz.

4.5-jadval

qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_6
			0	8	6	0	0	0
III	x_2	6	136/85	0	1	1/5	0	0
	x_1	8	1	1	0	0	0	0
	X_4	0	12/5	0	0	1/5	1	0
m+1	z_j-c_j		1496/85	0	0	102/85	0	0
	x_6	0	-3/5	0	0	$\boxed{-1/5}$	0	1

Kecuvchi tenglama tuzamiz:

$$\frac{1}{5}x_3 \geq \frac{3}{5};$$

Kesuvchi tenglamani (-1) ga ko`paytiramiz:

$$-\frac{1}{5}x_3 \leq -\frac{3}{5};$$

$$-\frac{1}{5}x_3 + x_6 = -\frac{3}{5}.$$

4.5-jadval

qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4
			0	8	6	0	0
IV	A_2	6	1	0	1	0	0
	A_1	8	1	1	0	0	0
	A_4	0	3	0	0	0	1
	A_3	0	1	0	0	1	0
m+1	z_j-c_j		14	0	0	0	0

Javob: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\quad z_{max} = 14$.

4.3. Chegaraviy usulni tushunish

4.3.1. Sayyoh haqidagi masala. Faraz qilaylik, P_0 shaharda yashovchi sayyoh n ta $P_1, P_2, ..., P_n$ shaharlarda bir martadan bo'lib, minimal vaqt ichida P_0 shaharga qaytib kelishi kerak bo'lsin. Bu masalaning matematik modelini tu zish uchun savdogarning P_i shahardan P_j shaharga borishi uchun sarf qilgan vaqtini $t_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ bilan hamda uning har bir P_i

shahardan P_j shaharga borish variantining xarakteristika x_{ij} bilan belgilaymiz. Agar savdogar P_i shahardan P_j ga borsa, $x_{ij}=1$, bormasa $x_{ij}=0$ bo'ladi (Soddalik uchun P_i va P_j shaharlar faqat bir marshrut yordami bilan bog'langan deb faraz qilamiz). Bu holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, (i=\overline{1,n}) ,(4.8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, (j=\overline{1,n}) ,(4.9)$$

$$x_{ij}=1 \text{ yoki } x_{ij}=0, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n} ,(4.10)$$

$$y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1} t_{ij}x_{ij} \to \min ,(4.11).$$

4.3.2.Optimal joylashtirish masalasi. Faraz qilaylik, *t* ta $A_1, A_2, ..., A_m$ punktlarda bir xil mahsulotlar ishlab chiqaruvchi korxonalarni jo ylashti rnsh kerak bo'lsin. Har bir korxonaning ishlab chiqarish quvvatini bildiruvchi $x_i, i=\overline{1,m}$ butun sonli qiymatlarni qabul qiladi. Har bir A_i punktda mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xarajat ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoriga bog'liq bo'lib, u $f_i(x_i)$ funksiya orqali ifodalanadi. Soddalik uchun bu funksiyani chiziqli deb qabul qilamiz, ya'ni

$$f_i(x_i)=c_i x_i$$

Bundan tashqari n ta punktda bu mahsulot iste'mol qilinadi. har bir iste'mol qiluvchi punktning mahsulotga bo'lgan talabi ma'lum va ular $b_1, b_2, ..., b_n$ birliklarni tashkil qiladi deb faraz qilamiz. Har bir A_i ishlab chiqaruvchi punkt har bir B_j iste'mol qiluvchi punkt bilan bog'langan bo'lib yo'l xarajatlari matrisasi $C=(c_{ij})$ dan iborat bo'lsin. A_i punktdan B_j punktga yuboriladigan mahsulot miqdorini x_{ij}

bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i, (i=\overline{1,m}) ,(4.12)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, (j=\overline{1,n}) ,(4.13)$$

$x_{ij} \geq 0$ yoki x_i -butun son , $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ (4.14)

$$y = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1} c_{ij} x_{ij} \to \min ,(4.15).$$

4.3.3. Taqsimot masalasi. Berilgan p ta ishni bajarish uchun *t* ta uskunlardan foydalanish mumkin. i -uskunaning $(i = 1,2,3,...,m)$ j -ishni $(j = 1,2,3,...,n)$ bajarishdagi mehnat unumdorligini C_{ij} bilan belgilaymiz. Har bir uskunada faqat bitta ishni bajarish mumkinligini hamda har bir ish faqat bitta uskunada bajarilishini nazarga olgan holda maksimal mehnat unumdorligini ta'minlovchi uskunalarni ishlarga taqsimlash rejasini aniqlaymiz.

Masaladagi noma'lumlarni bilan belgilaymiz. Bu yerda x_{ij} - j -ishni i -uskunada bajarishni baholovchi son bo'lib, agar j -ish i -uskunada bajarilsa $x_{ij} = 1$, agar j -ish i -uskunada bajarilmasa $x_{ij} = 0$ bo'ladi.

Har bir uskunani faqat bitta ishni bajarishda qo'llanishi

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, (i = \overline{1,m})$$

tenglik orqali ifodalanadi.

Har bir ishni faqat bitta uskunada bajarilishi

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, (j = \overline{1,n})$$

tenglik orqali ifodalanadi. Bu yerda

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & agar \quad j - ish \quad i - uskunada\ bajarilsa, \\ 0, & agar \quad j - ish\ i - uskunada \quad bajarilmasa. \end{cases}$$

4.2-masala. Quyidagi chiziqli chiziqli programmalashtirish masalasini butun sonli yechimini toping.

$z = 8x_1 + 6x_2$,maqsad funksiyaga maksimum qiymat beruvchi

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 4x_2 \leq 10 \end{cases} , (2^1)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$ cheklashlar bilan berilgan chiziqli programmalashtirish masalasini $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ butun yechimlari aniqlansin.

Masalaning yechilishi.

Quyidagi chiziqli chiziqli programmalashtirish masalasi R. Gomari usulida yechilsin.

$z = 8x_1 + 6x_2$ maksimum qiymatlarga yerishganda x_1, x_2 ning qiymatlari topilsin va quyidagi chegaraviy va cheklanish shartlari bajarilsin:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 4x_2 \le 10 \end{cases}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$$

va $X \ge 0$.

$$z_j - c_j = 0 - (8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} x_3 = 8 - (3x_1 + 2x_2) \\ x_4 = 10 - (x_1 + 4x_2) \end{cases}$$ va $X \ge 0$. B=(0,0,8,10).

qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4
			0	8	6	0	0
Berilgan	A_3	0	8	$\boxed{3}$	2	1	0
	A_4	0	6	1	4	0	1
m+1	z_j-c_j		0	-8	-6	0	0

qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4
			0	8	6	0	0
I	A_1	8	8/3	1	2/3	1/3	0
	A_4	0	22/3	0	$\boxed{10/3}$	-1/3	1
m+1	z_j-c_j		64/3	0	-2/3	8/3	0

qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4
			0	8	6	0	0
II	A_1	6	6/5	1	0	2/5	-1/5
	A_2	8	11/5	0	1	-1/10	3/10
m+1	z_j-c_j		114/5	0	0	13/5	1/5

Javob: $x_1 = \frac{6}{5},\ x_2 = \frac{11}{5},\quad z_{max} = \frac{114}{5}$.

x_1=6/5; q_1=6/5-1=1/5; q_{13}= 2/5; q_{24}=-1/5.

$$\frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \geq \frac{1}{5};$$

qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
			0	8	6	0	0	0
II	A_1	8	6/5	1	0	2/5	-1/5	0
	A_2	6	11/5	0	1	-1/10	3/10	0
m+1	z_j-c_j		114/5	0	0	13/5	1/5	0
	A_5	0	-1/5	0	0	$\boxed{-2/5}$	1/5	1

$q_1 = \frac{1}{4}$; $q_{14} = \frac{1}{4}$, $-\frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 + x_5 \leq -\frac{1}{5}$.

qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_6
			0	8	6	0	0	0
III	A_1	8	1	1	0	0	0	0
	A_2	6	9/4	0	1	0	1/4	0
	A_3	0	1/2	0	0	1	-1/2	0
m+1	z_j-c_j		43/2	0	0	0	3/2	0
	A_6	0	-1/4	0	0	0	-1/4	1

$$-\frac{1}{4}x_4 + x_5 \leq -\frac{1}{4}$$

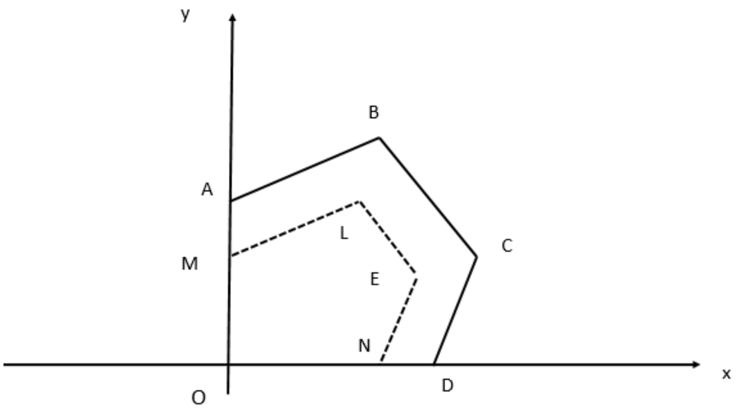
qadam	BAZIS	C	B	A_1	A_2	A_3	A_4
			0	8	6	0	0
	A_1	8	1	1	0	0	0
	A_2	6	2	0	1	0	0
	A_3	0	1	0	0	1	0
IV	A_4	0	1	0	0	0	1
m+1	z_j-c_j		20	0	0	0	0

Javob: $x_1 = 1, x_2 = 2, \quad z_{max} = 20$.

Butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasi chiziqli chiziqli programmalashtirish masalasidan qo'shicha (4.4)-(4.6) ko'rinishdagi shartlar bilan farq qiladi. Bu shartlarning qatnashishi butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasini yechish jarayonini qiyinlash tiradi. Natijada chiziqli chiziqli programmalashtirish masalasini yechish uchun qo'llaniladigan usullarni butun sonli chiziqli programmalashtirish masalalariga qo'llash mumkin bo'lmay qoladi. Butun sonli chiziqli programmalashtirish masalalarni yechish uchun uning xususiyatlarini e'tiborga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ulardan amerika olimi

R.Gomori yaratgan usul optimal yechimni beruvchi eng aniq usul hisoblanadi. R.Gomori to'liq butun sonli va qisman butun sonli chiziqli programmalashtirish masalalarni yechish usulini yaratgan.

Quyida uning faqat to'liq butun sonli programmalashtirish masalalarni yechish uchun mo'ljallangan 1-algoritmi bilan tanishamiz. Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat. Berilgan butun sonli programmalashtirish masalasida noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan, ularning oddiy chiziqli programmalashtirish masalasi sifatida simpleks usulidan foydalanib yechamiz. Agar yechim butun sonlardan iborat bo'lsa, u butun sonli programmalashtirish masalasining ham yechimi bo'ladi. Aks holda noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini e'tiborga oluvchi va «kesuvchi tenglama» deb ataluvchi qo'shimcha tenglama tuziladi. Bu tenglama asosiy tenglamalar sistemasiga qo'shib yoziladi va bazis yechim almash tiriladi. Buning uchun noma'lumni kesuvchi tenglam adan ajratiladi va uning qiymatini boshqa tenglamalarga qo'yib chiqiladi. Bunday ishlar masalaning butun sonli yechimi topilguncha yoki uning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Har bir bosqichda tuzilgan qo'shi m cha tenglama kesuvchi tenglama deb atalishiga sabab bu tenglama yordamida berilgan (6.18)—(6.20) masalaning rejalaridan tashkil topgan qavariq to'plamining kasr sonli rejalarini o'z ichiga olgan qismini kesib beradi. Kesish jarayoni K to'plamining f aqat butun sonli rejalarini o'z ichiga olgan qismi K ' topilguncha yoki bunday qism mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.Buning geometrik tasvirini quyidagi shaklda (4.1-shakl) ifodalash mumkin.



4.1-shakl. Butun sonlarni aniqlash

Bu shaklda K qavariq to'plam OABD ko'pburchak orqali ifodalangan. Bu ko'pburchakning burchak nuqtalari kesuvchi tenglamalar yordami bilan kesib borish natijasida OMLEN qavariq ko'p bur ch ak hosil bo'ladiki, uning chetki nuqtalarining koordinatalari butun sonlarlar iborat bo'ladi.

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

1.1.

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 16 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{max}=50/7.

x_1 =2/7, x_2 = 24/7.

1.2.

$$z = x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 16 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{min}=6. x_1 =0, x_2 = 3.

1.3.

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 14 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 16 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{max}=70/9.

x_1 =4/9, x_2 = 11/3.

1.4.

$$z = x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 14 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 16 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{min}=50/7

x_1 =2/7, x_2 = 24/7.

1.5.

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 9 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{max}= 12

x_1 = 3, x_2 = ¾.

1.6.

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 9 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{max}= 186/11

x_1 = 6/11, x_2 =42/11.

1.7.

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 9 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 18 \\ -3x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Z_{min}= 9.

.x_1 = 0, x_2 =9/4.

1.8.

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 9 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 18 \\ -3x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.:Z_{max}= 18.

x_1 = 0, x_2 =9/2.

1.9.

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 \le 12 \\ -3x_1 + 2x_2 = 32 \\ 5x_1 - 2x_2 \ge 24 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Z_{min}=2x_1+ 3x_2

J.: Z_{min}= 230.

x_1 = 28, x_2 = 58.

1.10.

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 18 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{max}= 18.

1.11.

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 18 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{max}= 236/7.

1.12.

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 18 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: Z_{min}= 24.

x_1 = 6, x_2 = 0. **x_1 = 22/7, x_2 = 34/7.** **x_1 = 8, x_2 = 0.**

1.13.

Z= $6x_1 - 3x \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 10 \\ 8x_1 - 4x_2 \le 32 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1=5/21 x_2=0,

Z_{max}=10/7

1.14.

Z= $5x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 15 \\ 2x_1 - 4x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 18 \\ x_1 \ge, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1=5, x_2=1/2,

Z_{max}=27

1.15.

Z= $10x_1 + 20x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1=0, x_2=4,

Z_{max}=80

1.16.

$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 2x_1 - 9x_2 \le 18 \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 14 \\ x_1 - 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: $\boldsymbol{x_1}$= 84 va $\boldsymbol{x_2}$ = 18 da $\mathbf{Z_{max}}$ = 258. $\boldsymbol{x_1}$= 0 va $\boldsymbol{x_2}$ = 7/4. $\mathbf{Z_{min}}$ = 35/4.

1.17.

$Z = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 3x_1 - 6x_2 \le 18 \\ -6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Javob:

$\boldsymbol{x_1}$= 106/3 va $\boldsymbol{x_2}$ = 44/3 da $\mathbf{Z_{max}}$ = 556/3.

$\mathbf{Z_{min}}$ = 0, $\boldsymbol{x_1}$=0 va $\boldsymbol{x_2}$ =0.

1.18.

$Z = 4x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 3x_1 - 6x_2 \le 18 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Javob:$\boldsymbol{x_1}$=0 va $\boldsymbol{x_2}$ =1 da $\mathbf{Z_{max}}$ = 5.

1.19.

$Z = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \ge 30 \\ 3x_1 - 6x_2 \ge 18 \\ -6x_1 + 7x_2 \le 42 \\ x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Javob: $\boldsymbol{x_1}$= 36/11 va $\boldsymbol{x_2}$ =85/11. $\mathbf{Z_{max}}$ = 99/11.

1.20.

$Z = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \ge 30 \\ 3x_1 - 6x_2 \ge 18 \\ -6x_1 + 7x_2 \ge 42 \\ x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Javob: $\boldsymbol{x_1}$= 35/13 $\boldsymbol{x_2}$ =108/3. $\mathbf{Z_{max}}$= 464/13.

1.21.

$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 2x_1 - 9x_2 \le 18 \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 14 \\ x_1 - 4x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

J.: $\boldsymbol{x_1}$= 108 va $\boldsymbol{x_1}$ = 22 da $\mathbf{Z_{max}}$ = 326. $\boldsymbol{x_1}$= 36, $\boldsymbol{x_2}$ = 6 da $\mathbf{Z_{min}}$ = 102.

1.22.

$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$

1.23.

$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$

1.24.

$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1+4x_2\le 12 \\ 3x_1-8x_2\le 24 \\ -5x_1+6x_2\le 30 \\ -x_1+x_2\le 10 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

Javob: $\boldsymbol{x_1}$= 48/5 va $\boldsymbol{x_2}$ = 3/5 da Z_{max} =108/5.

$$\begin{cases} x_1+4x_2\le 12 \\ 3x_1-8x_2\ge 24 \\ -5x_1+6x_2\le 30 \\ -x_1+x_2\le 10 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

J. $\boldsymbol{x_1}$ = 12 va $\boldsymbol{x_2}$ = 0 da $\boldsymbol{Z_{max}}$ = 24. $\boldsymbol{x_1}$ =8,$\boldsymbol{x_2}$ = 0. $\boldsymbol{Z_{min}}$ =16.

$$\begin{cases} -x_1+6x_2\le 24 \\ 2x_1-9x_2\le 18 \\ 3x_1+8x_2\ge 14 \\ x_1-4x_2\ge 12 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

J.: $\boldsymbol{x_1}$= 108 va $\boldsymbol{x_1}$ = 22 da $\boldsymbol{Z_{max}}$ = 326. $\boldsymbol{x_1}$= 36, $\boldsymbol{x_2}$ = 6 da $\boldsymbol{Z_{min}}$ = 102.

1.25.

$$Z=3x_1+2x_2\to\max$$

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2\le 20 \\ 2x_1-3x_2\le 24 \\ x_1+x_2\le 10 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

x_1=4, x_2=0, Z_{max}=12 .

1.26.

$$Z=-2x_1+3x_2\to\max$$

$$\begin{cases} 5x_1-4x_2\le 20 \\ 6x_1+5x_2\le 30 \\ x_1+x_2=15 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

x_1=0, x_2=6, Z_{max}=18

1.27.

$$Z=-5x_1+4x_2\to\min$$

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2\le 10 \\ 3x_1-6x_2\le 12 \\ x_1+x_2\le 8 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

x_1=2, x_2=0, Z_{min}=-10.

1.27.

$$Z=5x_1+6x_2\to\max$$

$$\begin{cases} 6x_1+2x_2\le 12 \\ x_1+2x_2\le 10 \\ x_1+x_2\le 6 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

x_1=2/5, x_2=24/5, Z_{max}=154/5

1.28.

$$Z=4x_1-7x_2\to\max$$

$$\begin{cases} 4x_1-2x_2\le 8 \\ x_1+x_2\le 10 \\ 4x_1+5x_2\le 20 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

x_1=2, x_2=0, Z_{max}=8

1.29.

$$Z=10x_1-5x_2\to\max$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 12 \\ x_1+x_2\le 10 \\ 7x_1-8x_2\le 56 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

x_1=4, x_2=0, Z_{max}=40

1.30.

Z= $-5x_1+6x_2\to\max$

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2\le 10 \\ 4x_1+5x_2\le 20 \\ 6x_1+5x_2\le 30 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

x_1=0, x_2=4,

Z_{max}=24

1.31.

Z=$10x_1-20x_2\to\max$

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 10 \\ 4x_1-5x_2\le 20 \\ 7x_1+2x_2\le 14 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

x_1=2, x_2=0,

Z_{max}=1

1.32.

Z=$6x_1-4x_2\to\max$

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2\le 12 \\ x_1+x_2\le 20 \\ 5x_1-4x_2\le 16 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

x_1=3, x_2=0,

Z_{max}=18

MUHOKAMA UCHUN NAZORAT SAVOLLARI

1.Butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasining umumiy ko`rinishini yozing.

2. Butun sonli chiziqli programmalashtirish masalalarining qanday turlari mavjud?

3. Butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik ifodasi qanday?

4. R.Gomori usulini tushuntirib bering.

5. Kesuvchi tenglama nima va u qanday tuziladi?

6.Qanday iqtisodiy masalalarning matematik modellari butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasiga misol bo’la oladi?

7. Masalaning butun sonli yechimga ega bo’lmaslik sharti qanday?

8. Butun sonli yechimning optimallik sharti qanday?

5-BOB. O’YINLAR NAZARIYASI

5.1. O’yinlar nazariyasi modeli haqida tushuncha

Chiziqli, chiziqsiz va dinamik dasturlash masalalarida yechimlar qabul qilish ma’lumotlarning to’laligini nazarda tutgan holda amalga oshiriladi. Boshqacha aytganda, masaladagi noma’lum parametrlarni topish uchun zarur bo’lgan dastlabki ma’lumotlar aniq bo’ladi. Bu masalalarda yechimlar qabul qilish aniqlik sharoitida amalga oshiriladi.

Iqtisodiy amaliyotdagi ko’p masalalarda noaniqlikda yechim qabul qilish zaruriyati tug’iladi. Noaniqlikda yechim qabul qilish ikki xil holatda amalga oshirilishi mumkin:

1. Yechim qabul qiluvchi shaxs (YeQQSh) ob-havoga, inflyasiya darajasiga , bozordagi narx-navoga, davlatdagi siyosiy holatga va boshqa «tabiat» holatlariga qarab yechim qabul qiladi. Bu yerda «tabiat» deganda yechim qabul qilish uchun zarur bo’lgan tashqi holatlar majmuasini tushunamiz. YeQQShning «tabiat»ni turli holatiga qarab yechim qabul qilish jarayonini o’yin deb qarash mumkin. Bunday o’yin, ya’ni raqobat mavjud bo’lmagandagi yechimlar qabul qilish nazariyasi «tabiatga qarshi o’yin» deb ataladi. Bu o’yinda «tabiat» yechim qabul qiluvchi shaxs uchun raqib rolini bajarsa ham, u ongli raqib bo’la olmaydi, u o’z yutug’iga befarq bo’ladi va o’z raqibi xatolaridan foydalan ish niyati ham bo’lmaydi.

2. Yechimlar qabul qilish raqobat mavjud bo’lgan vaziyatda amalga oshiriladi. Bu holda ikki yoki undan ko’proq qatnashuvchilar o’zaro raqobatda bo’lib, ularning har biri raqibidan iloji boricha ko’proq yutuq olishga harakat qiladi. Ulardan har birining erishgan natijalari qolgan tomonlarning o’z maqsadiga erishish yo’lidagi harakatiga bog’liq bo’ladi. Bunday iqtisodiy jarayonlar «raqobatli» deb ataladi. Shaxmat, shashka, domino va boshqa o’yinlar raqobatli jarayonlarni ifodalovchi o’yinlar hisoblanadi. Bunday o’yindagi har bir yurishda bir o’yinchining yutug’i ikkinchisining yurishiga bog’liq bo’ladi. O’yinning maqsadi o’yinchilarning bittasini yutishidan iborat.

Iqtisodiyotdagi raqobatli holatlarga ta’minotchi va iste’molchilar, sotuvchilar va xaridorlar, banklar va mijozlar oralaridagi munosabatlar misol bo’la oladi. Bu munosabatlardagi raqobatli holatlar tomonlarning intilishlari zidligidan kelib
chiqadi. Raqobotli holatlarda yechim qabul qiluvchi shaxs faqat o’z maqsadini ko’zlashdan tashqari raqibining maqsadini nazarga olishi hamda uning qabul qilishi mumkin bo’lgan yechimini oldindan ko’ra bilishi kerak. Shunday qilib, raqobatli holatlardagi masalalarni yechish uchun ilmiy asoslangan usullar talab qilinadi. Raqobatli holatlarning matematik nazariyasi «O’yinlar nazariyasi » deb ataladi.

Matematikaning raqobatli holatlarini, ya’ni qatnashuvchilarning manfaatlari qarama - qarshi yoki bir-biriga mos kelmaydigan holatlarni o’rganuvchi bo’limi - **«o’yinlar nazariyasi»** deb ataladi . O’yinlar nazariyasi - raqobatli holatda qatnashayotgan har bir o’yinchiga eng katta yutuqqa (yoki eng kichik yutqazishga) erishish uchun qilinadigan harakatlarning eng yaxshisini (optimalini) aniqlash uchun yo’llanma berishga imkon beruvchi matematik nazariyadir.

Ko’pgina iqtisodiy jarayonlarga ham o’yinlar nazariyasi nuqtai -nazaridan qarash mumkin. Masalan, o’yin ishtirokchilari - bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar, ta’minotchilar va iste’molchi ar bo’lib, o’yining yutug’i – ishlab chiqarish fondlarining samaradorligi, daromad mablag’lari, mahsulotning bahosi yoki tannarxi bo’lishi mumkin.

O’yinlar nazariyasi nisbatan yosh fanlar qatoriga kiradi. Uning paydo bo’lishi Neyman va Morgenshternlarning 1944 yil nashr etilgan «Iqtisodiy jarayonlar va o’yinlar nazariyasi» monografiyasi bilan bog’liq. Keyinchalik o’yinlar nazariyasi amaliy tatbiqlarga ega bo’lgan mustaqil yo’nalish sifatida rivojlandi.

Shuni ta’kidlash lozimki, o’yinlar nazariyasining usullari va xulosalari ko’p marta takrorlanadigan raqobatli holatlarga nisbatan ishlatiladi. Amalda, raqobatli holatlarni matematik usullar yordamida tadqiq etishda, muhim bo’lmagan faktlarni tashlab yuborib, holatlarning sodda modeli tuziladi.

O’yin- raqobatli holatlarni ifodalovchi modeldan iborat bo’lib, uning haqiqiy raqobatdan farqi shundan iboratki, u ma’lum bir qoida asosida amalga oshiriladi. Har bir o’yinchining ma’lum maqsadga erishish niyatida bajarishi mumkin bo’lgan harakatlari **o’yinning qoidalari** deb ataladi. O’yinning natijalarini miqdoriy baholash **to’lov** deb ataladi. O’yinning mohiyati shundan iboratki, unda har bir o’yinchi o’ziga eng yaxshi natija beruvchi yechimni tanlashga harakat qiladi. O’yinda ikkita yoki undan ko’p ishtirokchilarning manfaatlari to’qnashi mumkin. Shunga muofiq, u **ikki o’yinchili** va **ko’p o’yinchili** bo’lishi mumkin. Agar o’yinda faqat ikkita o’yinchi qatnashsa, bunday o’yin **«juftli o’yin»** deb ataladi .

Agar juft i o’yinda bir o’yinchining yutug’i ikkinchi o’yinchining yutqazuviga teng bo’lsa, bunday o’yin **«0- summali o’yin»** deb ataladi . 0- summali o’yinda o’yinchilarning umumiy kapitali o’zgarmaydi, faqat o’yin davomida qayta taqsimlanadi va shu sababli yutuqlar yig’indisi nolga teng bo’ladi, ya’ni

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = 0, \quad (5.1)$$

by epda v_j - j -o’yinchining yutug’i.

Nol summali bo’lmagan o’yinda o’yinchilar yutuqlari yig’indisi noldan farqli bo’ladi. Masalan, lotoreya o’yinida, o’yinchilar qo’ygan badalning bir qismi lotoreya tashkilotchilariga beriladi. Shuning uchun

$$v_1 + v_2 + ... + v_n < 0, \quad (5.2)$$

tengsizlik o’rinli bo’ladi.

Biz bu yerda amaliy ahamiyati katta bo'lgan o'yinlar - juft o'yinlarni qarash bilan cheklanamiz. O'yin ishtirokchilarini A va B orqali belgilaymiz. O'yin jarayonida ro'y berishi mumkin har qanday holatga muvofiq ravishda o'yinchining qo'llashi mumkin bo'lgan qoidalar birlashmasi **«strategiya»** deb ataladi. Strategiyaning soniga qarab, o'yinlar **chekli** yoki **cheksiz** o'yinlarga bo'linadi. **Optimal strategiya** deb, tayin bir o'yinchiga, o'yin bir necha marta takrorlanganda eng katta mumkin bo'lgan o'rtacha yutuqni ta'minlovchi strategiyaga aytiladi.

Har qanday 0- summali juftli o'yinni yutuqlar matrisasi deb ataluvchi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} .....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} .....a_{2n} \\ .... & \\ a_{m1} & a_{m2} .....a_{mn} \end{pmatrix}, \text{(5.3)}$$

matrisa orqali aniqlash mumkin. Bu matrisaning har bir a_{ij} - A o'yinchi matrisaning i - qatoriga mos keluvchi yurishni B o'yinchi j - ustunga mos keluvchi V_j yurishni tanlagandagi A o'yinchining yutug'ini bildiradi.

Komponentalari

$$x_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \text{(5.4)}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $X=(x_1, x_2, ..., x_m)$ vektor-qator A o'yinchining **«aralash strategiyasi»** deyiladi.

Xuddi shuningdek, komponentalari

$$y_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \text{(5.5)}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $Y=(y_1, y_2, ..., y_n)$ vektor-qator B o'yinchining **«aralash strategiyasi»** deyiladi. Bunda x_i va u_j lar mos ravishda A o'yinchi o'zining $\boldsymbol{A_i}$ yurishini va B o'yinchi $\boldsymbol{B_j}$ yurishini tanlash ehtimollarini bildiradi.

O'yinlarda ikki yoki undan ko'p tomonlar ishtirok etishi mumkin. Ular o'z maqsadlariga erishish uchun turli xil yo'llarni qo'llashga urinadilar. Amaliyotda uchraydigan o'yinlarda ko'pincha ikki tomon ishtirok etib, ularni A va B orqali belgilaymiz. O'yinda o'yinchilarning tutadigan yo'llari strategiyalar deb ataladi.

O'yinlar nazariyasi masalalarida optimal strategiya deb o'yinchilarning o'yinda tutgan yo'llaridan maqsadga erishish uchun yagona yo'lni tanlash tushuniladi. Soddalik uchun A va V o'yinchilarning o'yinlarini kuzataylik.

A – o'yinchi, mumkin bo'lgan $A_i, \left(i = \overline{1,m}\right)$ yo'llaridan birini, xuddi shuningdek V - o'yinchi ham o'zining $B_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ mumkin bo'lgan yo'llaridan birini tanlaydi. Undan tashqari ularning o'yinda tutadigan yo'llari bir-birlariga ma'lum emas.

Natijada o'yindagi yutuqlar $Y_1(A_i, B_j)$ va $Y_2(A_i, B_j)$ funksiyalardan iborat bo'lib,

$$Y_1(A_i, B_j) + Y_2(A_i, B_j) = 0 \quad , \quad (5.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agarda

$$Y_1(A_i, B_j) + Y_2(A_i, B_j) = 0$$

munosabatni o'rinli desak, u holda

$$Y_1(A_i, B_j) = - Y_1(A_i, B_j) \quad , \quad (5.7)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Agar $X = (x_1` x_2,...,x_m)$ aralash strategiyada i- komponenta 1 ga teng bo'lib, qolgan lari 0 ga teng bo'lsa, u holda bunday aralash strategiya A o'yinchining «i- sof strategiyasi» deb ataladi.

Masalan, (1,0,0), (0,1.0), (0,0,1) strategiyalar sof strategiyalardir. Xuddi shuningdek, j - komponentasi 1 ga teng bo'lib, qolgan komponentalari 0 ga teng bo'lgan Y aralash strategiya V o'yinchining «j- sof strategiyasi» deb ataladi.

Demak, A o'yinchining yutuqlar matrisasining i- qatoriga mos keluvchi A_i yurishi uning i- sof strategiyasidan iborat bo'ladi. Xuddi shuningdek, B o'yinchining yutuq l ar matrisasining j- ustuniga mos keluvchi B_j yurishi uning j- sof strategiyasidan iborat bo'ladi.

Yutuqlar matrisasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} .....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} .....a_{2n} \\ .... & \\ a_{m1} & a_{m2} .....a_{mn} \end{pmatrix}, (5.8)$$

ko'rinishda bo'lgan matrisali o'yinni ko'raylik. Agar A o'yinchi i-sof strategiyani tanlasa, u kamida

$$\min_j a_{ij}, (5.9)$$

yutuqqa ega bo'ladi. A o'yinchi o'zining yutug'ini maksimal qilishga harakat qiladi.

Demak, u shunday i- sof strategiyani tanlashi kerakki, natijada uning yutug'i maksimal bo'lsin, ya'ni A o'yinchi

$$\max \min_j (a_{ij}), \ (5.10)$$

natijani beruvchi sof strategiyani tanlaydi. Ushbu kattalikni α bilan belgilaymiz.

$$\alpha = \max_i \min_j (a_{ij}) ,(5.11)$$

bu yerda α A o'yinchining ishonchli yutug'idan iborat bo'lib, u **«o'yinning quyi** bahosi» deb ataladi .

B o'yinchi, o'z navbatida, o'zining eng katta mumkin bo'lgan yutqazuvini minimallashtirishga harakat qiladi. Shuning uchun

$$\beta = \min_j \max_i (a_{ij}) ,(5.12)$$

yutqazuvni beruvchi j- sof strategiyani tanlaydi. Bu yerda β- B o'yinchining ishonchli minimal yutqazuvidan iborat bo'lib, u «o'yinning yuqori bahosi» deb ataladi. yutqazuvga erishishga imkon beruvchi B_0 yurish (j - sof strategiya) «minimaks»deb ataladi.

1-teorema. Har qanday matrisali o'iinda o'yinning α quyi bahosi uning β yuqori bahosidan oshmaydi, ya'ni $\alpha \le \beta$.

Isboti. Ta'rifga asosan

$$\alpha_i = \min_i (a_{ij}) \le a_{ij} , (5.13)$$

hamda

$$\beta_j = \max_j (a_{ij}) \ge a_{ij} , (5.14)$$

Bu munosabatlarni birlashtirsak

$$\alpha_i = \min_i (a_{ij}) \le a_{ij} \le \max_j (a_{ij}) = \beta_j ,(5.15)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bundan

$$\alpha_i \le \beta_j ,(5.16)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tenglik *i* va *j* indekslarning ixtiyoriy kombinasiyalari uchun shu jumladan

$$\alpha = \max_i \alpha_i , (5.17)$$

va

$$\beta = \min_j \beta_j , (5.18)$$

shartlarni kanoatlantiruvchi *i* va *j* lar uchun ham o'rinlidir.

Demak,

$$\alpha \le \beta, (5.19)$$

tengsizlikka ega bo’lamiz. Shu bilan teorema isbot qilindi.

Agar matrisali o’yishshng quyi va yuqori baholari o’zaro teng bo’lsa, ya’ni

$$\alpha = \beta, (5.20)$$

shart bajarilsa, u holda ushbu o’yin egar nuqta ga hamda

$$V = \alpha = \max_i \min_j (a_{ij}) = \min_j \max_i (a_{ij}) = \beta, (5.21)$$

shartni qanoatlantiruvchi bahoga ega deyiladi.

Bu holda A matrisaning

$$V = \alpha = \beta \ , (5.22)$$

shartni qanoatlantiruvchi (A_{i_0}, B_{j_0}) juftlikka mos keluvchi $a_{i_0 j_0}$ elementi egar nuqta deb ataladi. Bu element j_0 ustunda maksimal va i_0 katorda minimal bo’ladi, ya’ni:

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}, (5.23).$$

Agar B o’yinchi o’zining minimaks strategiyasidan voz kechsa, uning yutqazuvi oshadi. Xuddi shuningdek, agar A o’yinchi o’zining maksimin strategiyasidan voz kechsa, uning yutug’i kamayadi. Demak, egar nuqtalarga o’yinning A_{i_0}, B_{j_0} optimal strategiyalari mos keladi hamda $\{A_{i_0}, B_{j_0}, V\}$ to’plam o’yinning yechimi deyiladi.

5.2. Aralash strategiyadagi o’yinning yechimi

Biz qarab o’tgan o’yin ikkita qarama - qarshi tomon ishtirok etgan holatdagi o’yinni qaragan edik. Ko’pgina masalalarda o’yindagi qo’yilgan shartlarda noaniq ma’lumotlarni yo’qotishga harakat qilish taklifi kiritiladi. Bu shartlar boshqa o’yinchining dunyoqarashiga bog’liq bo’lmay, obyektning ta’siriga bog’liq bo’ladi. Bunday hollardagi o’yin tabiat bilan o’yin deb ataladi.

Masalan A o’yinchi tabiat bilan o’yinda yutuq bo’lishligiga harakat qilsin. Ikkinchi o’yinchi B (tabiat) tasodifan harakat qiladi. Mumkin bo’lgan strategiyalari uning holati orqali aniqlanadi (masalan shu tumandagi ob-havo sharoiti, mahsulotlarga bo’lgan talab, yuk tashish hajmi va boshqalar). Bunday ko’rinishdagi masalalarda tabiatning holati ehtimollik xarakterga ega bo’lishligi nazarda tutiladi.

Matrisaviy o’yin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \; \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; \ldots \; a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \; \ldots \; a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda berilgan bo'lib, uning a_{ij} elementi A-uyinchining A_i strategiyani qo'llagandagi yutug'i, tabiatning holati P_j ehtimollikka teng bo'lsin.

Matrisani elementlari r_{ij} , A-uyinchi tabiatning holati P_j ni bilgan holda A_i strategiyani qo'llab, yutuq

$r_{ij} = \beta_j - a_{uj}$ bo'lib, bunda $\beta_j = \max(a_{ij})$ dan iborat bo'ladi.

Tabiat bilan o'yin uchun bir nechta mezonlarni qaraylik.

1. Maksimal Valda mezoni. Bu kriteriya (mezon) quyidagi munosabatga asoslangan, ya'ni $a = \max \min a_{ij}$ orqali baholanadi.

2. **Minimal risk Sevidja mezoni**. Bu mezon quyidagi munosabat orqali $b = \min \max r_{ij} -$ baholanadi.

3. **Gurvis mezoni**: bu mezon quyidagi munosabatga asoslangan:

$$\max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_i a_{ij} \right\}$$

bunda λ, $0 \le \lambda \le 1$. oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi.

5.1- masala. Quyidagi to'lov matrisalari bilan berilgan o'yinlar uchun o'yinning quyi va yuqori baholarini toping:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Yechish. A_1 matrisa qatorlari uchun a_{ij} elementlarning eng kichiklari mos ravishda 2;3;1 ga teng. Ularning ichidagi maksimali esa 3 ga teng. Demak, A_1 matrisaning quyi bahosi

$\alpha_1 = \max \min_i a_{ij} = \max(2,3,1) = 3$.

O'yinning yuqori bahosini topish uchun A_1 -matrisa ustunlari bo'yicha maksimal elementlarni topamiz. Bular mos ravishda: 4;5;6;5. Endi bular ichidan minimalini, ya'ni $\beta_1 = \min \max_j a_{uj} = 4$ ni topamiz.

Demak, A_1 -matrisa uchun $\alpha_1 = 3;\ \beta_1 = 4$. A_2 -matrisa uchun esa

$$\alpha_2 = \max_i \min a_{ij} = \max(1,2-1) = 2 \quad ; \quad \beta_2 = \min_j \max a_{uj} = \min(3,2,4,5) = 2 .$$

Shunday qilib, bu holda $V = \alpha_2 = \beta_2 = 2$ - o'yinning bahosidir. Demak, bu o'ynovda A_1 o'ynovchining yutug'i 2 dan kam emas va A_2 o'ynovchining yutqazishi 2 dan oshmaydi.

5.2- masala.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisali o'yinda $X = (x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3)$ va $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ mos ravishda A va B o'ynovchilarning aralash strategiyalari. Bu o'yin uchun yutuqlar funksiyasini topamiz.

$$f(x, y) = M(x, y) = (x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_3) \cdot y_1 + (x_3 - x_1) \cdot y_2 + (x_1 - x_3) \cdot y_3 .$$

Agar $X = (0{,}1 ; \ 0{,}4 \ ; \ 0{,}5)$ va $Y = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $M(x, y) = -0{,}03$ bo'lad

5.3- masala.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisali o'yinning yechimini aralash strategiyalarda toping.

Yechish. A o'ynovchining aralash strategiyasi $X = (x_1 \ , \ x_2)$ vektor qatordan va V o'ynovchining aralash strategiyasi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektor ustundan iborat bo'lsin.

Shartning bajarilishini tekshiramiz:

$$(x_1 \ , \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \geq v$$

bundan

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq v \\ -x_1 + x_2 \geq v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bundan X = (1 /2 ; 1 /2), V = 0 ekanligini aniqlaymiz.

Endi quyidagi tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \geq v$$

hamda

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \leq v \\ -y_1 + y_2 \leq v \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bundan quyidagini topamiz:

$$X = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \; Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, V = 0.$$

Demak, bu o'yinda $X = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ va $Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ vektorlar optimal strategiyalar bo'lib, o'yinning bahosi $V = 0$ bo'ladi.

5.3. Matritsali o'yinni chiziqli programmalashtirishga keltirish

Faraz qilaylik A-o'yinchi o'yinda Y(A_i, B_j) funksiyaning qiymatini kattalashtirishga (maksimallashtirish) maqsad qilib qo'ysin. Xuddi shuningdek B-o'yinchi ham shu funksiyani kichiklashtirishga (minimallashtirishga) harakat qiladi. Quyidagi matrisani tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrisaning satr elementlari A o'yinchining o'yinda tutadigan A_i strategiyalari, ustun elementlari esa B o'yinchining o'yinda tutadigan V_j yo'llari (strategiyalari) bo'lsin. A – matrisaga esa matrisaviy o'yin deyiladi.

A-o'yinchi eng kam yutuqga erishish uchun u $\min a_{ij}$ - ga teng bo'ladigan yo'lni qo'llaydi va uni maksimallashtirishga harakat qiladi, ya'ni

$$a = \max_i \min_j (a_{ij}) \qquad (3)$$

ga ega bo'lamiz. α-miqdorga A-o'yinchining garantiyalangan yutug'i deyilib, o'yinning quyi bahosi deyiladi. Xuddi shuningdek V o'yinchi $Bj \left(j = \overline{1,n}\right)$ yo'llarini qo'llaganda quyidagi munosabat o'rinlidir

$$\beta = \min_j \max_i (a_{ij}) \qquad ,(5.24)$$

β-miqdorga o'yinning yuqori bahosi deyiladi.

Agarda

$$\max_i \min_j (a_{ij}) = \min_j \max_i (a_{ij}) = v \qquad , (5.25)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, o'yinning bahosi V-ga teng bo'lib, matrisaviy o'yin egar nuqtaga ega deyiladi.

Faraz qilaylik matrisaviy o'yin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Agar α = β bo'lsa, u holda bu masala aralash yo'lli masala bo'lib, A-o'yinchining yo'li $X = (x_1, x_2)$ ko'rinishda bo'ladi. A-o'yinchining o'yinda qo'llaydigan optimal yo'lini topish uchun quyidagi tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 &= v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 &= v \end{aligned}\right\} \qquad (5.26)$$

bunda $x_1 + x_2 = 1$ tenglik o'rinlidir. (6) - tenglamalar sistemasining yechimi quyidagi formulalar bo'yicha topiladi.

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

O'yinning bahosi: $V = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$ orqali topiladi. Xuddi shuningdek V-o'yinchining optimal strategiyasi

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

formulalar orqali topiladi.

Agar (mxn) o'lchovli matrisaviy o'yin berilgan bo'lsa,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

hamda egar nuqtaga ega bo'lmasa, o'yinning optimal yechimi aralash strategiyalar $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ va $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ko'rinishida bo'ladi. Bunday hollarda masala chiziqli programmalashtirish masalasiga keltiriladi hamda optimal yechim (strategiya) topiladi. A-o'yinchi uchun o'yinda tutgan strategiyasi uchun ushbu munosabat o'rinli. Komponentalari

$$x_i \ge 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ vektor-qator A o'yinchining **«aralash strategiyasi»** deyiladi.

Xuddi shuningdek, komponentalari

$$y_j \ge 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektor-qator B o'yinchining **«aralash strategiyasi»** deyiladi. Bunda x_i va u_j lar mos ravishda A o'yinchi o'zining $\boldsymbol{A_i}$ yurishini va B o'yinchi $\boldsymbol{B_j}$ yurishini tanlash ehtimollarini bildiradi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots a_{m1}x_m \ge V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{m2}x_m \ge V \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots a_{mn}x_m \ge V \end{cases}$$

Sistemaning har bir tengsizligini chap va o'ng tomonlarini V-ga bo'lib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots a_{m1}t_m \ge 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots a_{m2}t_m \ge 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots a_{mn}t_m \ge 1 \end{cases}$$

bunda $t_i = \frac{x_i}{v}$, $\left(i = \overline{1, m}\right)$ orqali ifodalangan. Bunda $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$ o'rinli ekanligidan, $t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{v}$, munosabat bajarilib, maqsad funksiya quyidagi ko'rinishda

$$Z = \sum_{i=1}^{m} t_i \to \min \qquad (5.27)$$

bo'ladi. $t = \frac{1}{v}$ tenglikdan $X_i = v \cdot t_i$ larning qiymatlari aniqlanadi. Natijada $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ optimal yechimga ega bo'linadi.

Xuddi shu kabi V o'yinchining optimal strategiyalarini aniqlash uchun quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots a_{m}y_n \le V \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots a_{2n}y_n \le V \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots a_{mn}y_n \le V \end{cases} \qquad (5.28)$$

(9) ning har bir tengsizligining ikkala tomonini V-ga bo'lsak

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots a_{1n}u_n \le 1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots a_{2n}u_n \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots a_{mn}u_n \le 1 \end{cases} \qquad (5.29)$$

ega bo'lamiz.

Bunda $u_i = \frac{y_j}{V}$ $(i = \overline{1, n})$ va $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$ o'rinli bo'lganda, $W = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{v}$ bo'lib, maqsad funksiyaning

$$W = \sum_{i=1}^{n} u_i \to \max \qquad (5.30)$$

ko'rinishdagi hol uchun qarab, $y_i = v \cdot u_i$-ning qiymatlari aniqlanadi hamda V - o'yinchining $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ optimal yechimi (strategiyasi) topiladi.

5.3-masala. Matrisa bilan berilgan quyidagi o'yinning yechimini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Yechish.

1) A o'ynovchining optimal strategiyasini topish uchun quyidagi chiziqli dasturlash masalasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \geq 1 \\ x_1 + 4x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, t_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Yuqoridagi masalani yechish uchun $t_i = \frac{x_i}{v}, \quad \left(i = \overline{1,4}\right)$ belgilash kiritiladi. Bunda $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ o'rinli ekanligidan, $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{1}{v}$, munosabat bajarilib, maqsad funksiya quyidagi ko'rinishda

$Z = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{1}{v} \to \min$ va chegaraviy shartlar

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + 3t_3 + 3t \geq 1 \\ 3t_1 + t_2 + 4t_3 + 4t_3 \geq 1 \\ 2t_1 + 3t_2 + 5t_4 \geq 1 \\ t_1 + 4t_3 \geq 1 \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \end{cases}.$$

bo'ladi. Masala yechillgandan keyin optimal yechim quyidagicha bo`ladi:

$$Z_{\min} = 0{,}45;\ t_1 = 0;\ t_2 = 0\ ;\ t_3 = \frac{1}{4};\ t_4 = \frac{1}{5}$$

$t_i = \frac{x_i}{v}, \quad \left(i = \overline{1,4}\right)$ tenglikdan $x_i = v \cdot t_i$ larning qiymatlari quyidagicha aniqlanadi:

$$Z_{\min} = 0{,}45 = \frac{1}{v};\ v = \frac{1}{\frac{45}{100}} = \frac{100}{45} = \frac{20}{9};$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0\ ;\ x_3 = \frac{20}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{9};\ x_4 = \frac{24}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{9}.$$

Natijada masalaning optimal yechim quyidagicha bo`ldi:

$Z_{\min} = 0{,}45;$

$x_1 = 0;\ x_2 = 0\ ;\ x_3 = \frac{5}{9};\ x_4 == \frac{4}{9}.$

2) B o'ynovchining optimal strategiyasini topishning ikkilangan masalasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} u_1 + 3u_2 + 2u_3 + u_4 \le 1 \\ u_1 + u_2 + 3u_3 \le 1 \\ 3u_1 + 4u_2 + 4u_4 \le 1 \\ 3u_1 + 4u_1 + 5u_3 \le 1 \\ u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0, u_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \to \max$$

Bu ikkilangan masalarning yechimi $U = \left(0;\ 0;\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right)$, $U_{\max} = \frac{1}{V} = \frac{9}{20}$ bo'ladi. Demak, $V = \frac{20}{9}$ hamda $y_j = V \cdot u_j$ y tenglikdan B o'ynovchining optimal strategiyasi $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}$ topiladi.

Bu yerda $x_i = V \cdot t_i$

A o'ynovchi uchun masalaning yechimi $T = \left(0;0;\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$, $Z_{\min} = \frac{1}{V} = \frac{9}{20}$ $V = \frac{20}{9}$ bo'ladi. Bu holda A o'ynovchining optimal strategiyasi $T = \left(0;0;\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$ bo'lib, uning yutug'i $V = \frac{20}{9}$ bo'ladi.

5.4-masala. Qurilish tashkiloti o'z avtosaroyini turli xil rusumli avtomobillar bilan to'ldirish uchun B =500 mln. so'm ajratgan bo'lsin.

Bunda qaralayotgan davr uchun mahsulot tashish turlari ma'lum bo'lib, lekin tashish holati noma'lum. Avtosaroyga uch xil rusumli avtomashina sotib olish taklif etilgan bo'lsin. Avtosaroyning mehnat unumdorligini oshirish uchun ajratilgan mablag'dan qanchasini qaysi rusumdagi avtomashinalarni sotib olish kerakligi topilsin. Shuning bilan birga mehnat unumdorlik darajasini qanchaga oshirish ishonchliligi qanday bo'lishligi aniqlansin.

Yechish: Birinchi o'yinchi qurilish tashkiloti rahbari uch xil rusumdagi avtomashinalar sotib olishi mumkin.

Ikkinchi B o'yinchi «tabiat» esa uchta strategiya (uch xil tashish turi)ni qo'llash mumkin.

Masalada qo'yilgan shartlar asosida barcha tashish turlarini hisobga olib, qo'yilgan masala uchun berilgan ma'lumotlarni quyidagi 5.1- jadvalda keltiramiz.

5.1- jadval

Avtomobil turlari	Avtomashinaning yillik unumdorligi		
1	2	3	4

A_1 A_2 A_3	2000 7000 5000	3000 6000 2000	4000 2000 3000

Hisoblash ishlarini soddalashtirish maqsadida 1–jadvaldagi barcha elementlarni 1000 bo'lib, quyidagi 1' - jadval elementlarini hosil qilamiz:

5.2- jadval

1	2	3	4
A1 A2 A3	2 7 5	3 6 2	4 2 3

Ikki tomon o'rtasidagi o'yinning quyi va yuqori baholarini aniqlaymiz:

$$\alpha = \max_i (2,2,2) = 2, \quad \beta = \min_j (7,6,4) = 4$$

Ko'rinib turibdiki α ≠ β shartning bajarilganligidan, qaralayotgan o'yin aralash strategiyali masaladir. Agarda $\alpha = \beta$ shart o'rinli bo'lsa, o'yinning bahosi α = β=V ga teng bo'ladi.

α ≠ β bo'lganligi uchun, qaralayotgan masala chiziqli programmalashtirish masalasiga keltiriladi.

Yuqorida ko'rsatilganidek, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_6 = 1 \end{cases}$$

Bu yerda x_4, x_5, x_6, qo'shimcha kiritilgan o'zgaruvchilardir.

Minimum sharti (amaliyotda maksimum deb yuritishga to'g'ri keladi) quyidagicha bo'ladi

$$f = \frac{1}{m} = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$

Zamonaviy kompyuterlarning amaliy dasturlaridan foydalanib, quyilgan masalani simpleks usuli yordamida quyidagi yechimlarga ega bo'lamiz:

$$x_1 = 0{,}0724$$
$$x_2 = 0{,}0144$$
$$x_3 = 0{,}2029$$

hamda

$$m = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{1}{0{,}0724 + 0{,}0144 + 0{,}2029} = \frac{1}{0{,}2897} = 3{,}4518$$

ni aniqlaymiz.

A_1 strategiyani qo'llash natijasida

$$P_1 = x_1\ m = 0{,}0724 \cdot 3{,}4518 = 0{,}25$$

ega bo'lamiz. Xuddi shuningdek A_2, A_3 strategiyalar bo'yicha

A_2 strategiya uchun:

$$P_2 = x_2\ m = 0{,}0144 \cdot 3{,}4518 = 0{,}0497$$

A_3 – strategiya uchun:

$$P_3 = x_3 \cdot m = 0{,}2029 \cdot 3{,}4518 = 0{,}7000,$$

larga ega bo'lamz. Bularga ko'ra aralash strategiyalar uchun maqsadli yechimlarni quydagi jadvalda keltiramiz.

5.3- jadval

A_1	A_2	A_3
0,25	0,05	0,7

Demak ajratilgan mablag'ning 0,25 qismi 500x0,25=125 mln. so'm A_1 rusumli avtomashina uchun, 0,05 qismi 5600x0,05=25 mln. so'm A_2 rusumli avtomashina uchun, 0,7 qismi 500 · 0,7 = =350 mln. so'm A_3 rusumli avtomashinani sotib olish uchun ishlatish maqsadga muvofiq ekanligi aniqlanadi.

m =3,4518 bo'lganligidan hamda hisoblash jarayonini soddalashtirish uchun 1000 ga bo'linganligini e'tiborga olsak, tashkilot rahbari yangi sotib oladigan har bir rusumli avtomashina uchun eng kami bilan 3,4518 · 1000 = 3451,8 tonna mehnat unumdorlikka erishishni taxmin qilish mumkin.

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi to'lov matrisalari bilan berilgan o'yinlar uchun o'yinning quyi va yuqori baholarini toping:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

2. Quyidagi to'lov matrisalari bilan berilgan o'yinlar uchun o'yinning quyi va yuqori baholarini toping:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. Matrisa bilan berilgan quyidagi o'yinning yechimini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4.Yutuq matrisalari

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

bo'lgan o'yinlar uchun to'lov funksiyasini yozing, o'ynovchilarning optimal strategiyalarini va o'yin bahosini toping.

5. Qurilish tashkiloti o'z avtosaroyini turli xil rusumli avtomobillar bilan to'ldirish uchun B=1 mlrd. so'm ajratgan bo'lsin. Bunda qaralayotgan davr uchun mahsulot tashish turlari ma'lum bo'lib, lekin tashish holati noma'lum. Avtosaroyga uch xil rusumli avtomashina sotib olish taklif etilgan bo'lsin. Avtosaroyning mehnat unumdorligini oshirish uchun ajratilgan mablag'dan qanchasini qaysi rusumdagi avtomashinalarni sotib olish kerakligi topilsin. Shuning bilan birga mehnat unumdorlik darajasini qanchaga oshirish ishonchliligi qanday bo'lishligi aniqlansin. Masalada qo'yilgan shartlar asosida barcha tashish turlarini hisobga olib, qo'yilgan masala uchun berilgan ma'lumotlarni quyidagi 5.4- jadvalda keltiramiz.

5.4- jadval

Avtomobil turlari	Avtomashinaning yillik unumdorligi		
1	2	3	4
A_1	5000	3000	4000
A_2	4000	5000	3000
A_3	3000	2000	6000

MUHOKAMA UCHUN NAZORAT SAVOLLARI

1. O'yinlar nazariyasining predmeti nimadan iborat?
2. O'yining qanday turlari mavjud?
3. Juftli o'yin nima?
4. Matrisali o'yin nima?
5. Nol- summali o'yin qanday bo'ladi?
6. Yutuqlar matrisasi qanday ma'noga ega?
7. O'yinning quyi va yuqori bahosi nima?
8. Minimaks va maksimin strategiyalarni ta'ri lang.
9. Aralash strategiya nima?
10. Sof strategiyani ta'riflang.
11. Aralash strategiyalardagi yechimda o'yinning yutug'i nimaga teng bo'ladi?
12. Matrisali o'yin bilan chiziqli dasturlash orasida qanday bog'lanish bor?

13. Tabiat bilan o'yin deganda qanday o'yinni tushunasiz?

14. Tabiat bilan o'yin raqobatli o'yindan qanday farq qiladi?

6- BOB. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI

6.1. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining qo'yilishi va turlari

Chiziqsiz programmalashtirish masalasining umumiy holda qo'yilishi va uning iqtisodiy – matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

Ushbu cheklanish shartlarini

$$\begin{cases} g_i\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \le b_i, & \left(i = \overline{1,k}\right) \\ g_i\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = b_i, & \left(i = \overline{k+1,m}\right) \end{cases} \qquad (6.1)$$

qanoatlantiruvchi shunday $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ nuqtani topish talab qilinsinki, natijada maqsad funksiya

$$F = f\,(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad , \qquad (6.2)$$

masalaning iqtisodiy tomondan qo'yilishiga qarab, o'zining eng kichik (eng katta) qiymatiga erishsin. Bunda f (x_1, x_2, ..., x_n) va g_i (x_1, x_2, ..., x_n) qandaydir funksiyalar, $b_i\ \left(i = \overline{1,m}\right)$ berilgan sonlardir.

(6.1), (6.2) masalaning yechish jarayonida topiladigan $X^*= (x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$ nuqta uchun maqsad funksiya (6.1) ning eng kichik qiymatini topish talab etilsa, $f\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n,\right) \le f\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*,\right)$ aks holda esa $f\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*,\right) \ge f\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right)$ shartlarning bajarilishi lozimdir.

Agar (6.1)-6.(2) masalada f va g_i funksiyalar chiziqli funksiyalardan iborat bo'lsa, chiziqsiz programmalashtirish masalasidan iborat bo'ladi.

Agar (6.1)-6.(2) masalada f va g_i funksiyalar chiziqsis funksiyalardan iborat bo'lsa, chiziqli programmalashtirish masalasidan iborat bo'ladi.

6.2. Shartli ekstryemum

Chiziqsiz programmalashtirish masalasining umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$z = F\left(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\right) \to \min(\max)$,(6.3) maqsad funksiyani optimal yechimga ega qiluvchi va chegaraviy shartlar

$g_j\left(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\right)\{\ge, =, \le\} b_j, \quad j = 1,2,\ldots,m$,(6.4) , bunda $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ hamda ushbu

$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$
.... ,(6.5)
....
.....
$x_n \geq 0$

cheklashlarni qanoatlantiruvchi $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ nuqta topilsin. Bu yerda $z = F(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$ funksiya yoki $g_j(x_1, x_2, x_3, ...x_n)\{\geq, =, \leq\} b_j, \quad j = 1,2,..., m$ shartlardan biri chiziqsiz bo'ladi. Bunday (6.3)-(6.5) masala shartli chiziqsiz programmalashtirish masalasi deyiladi.

(6.3)-(6.5) masalada (6.4) va (6.5) shartlar qatnashmasa, u holda bu masala shartsiz chiziqsiz programmalashtirish masalasi deyiladi.

(6.3)-(6.5)masalada maqsad funksiya va uning shartlari chiziqli bo'lsa, u holda bu masala chiziqli programmalashtirish masalasi deyiladi.

Masalaning qo'yilishi va sinflanishi

6.1-masala. V^* hajmli va yon yoqlarining yuzlarining yig'indisi S^* teng bo'lgan quti yasang.

Foydalanilgan parametrlar:

1)Quti tamonining uzunliklari: x_1, x_2, x_3 .

2)Maqsad funksiya: $F = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - V^*) \to \min$.

3)Chegaraviy shartlar: $2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = S^*$

Masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$F = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - V^*) \to \min,$$

$$2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = S^*,$$

$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$, (3)
$x_3 \geq 0$

Chiziqsiz programmalashtirish masalasining standart ko'rinishi quyidagicha:

$z = F(x_1, x_2, x_3, ...x_n) \to \min$,(6.6)

$g_j(x_1, x_2, x_3, ...x_n) \geq b_j, \quad j = 1,2,..., m$,(6.7))

$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$
.... ,(6,8)
....
.....
$x_n \geq 0$

6.1-masalani yechamiz. Buning uchun masalaning ko'rinishini quyidagicha yozamiz:

$F = \left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - V^*\right)^2 \rightarrow \min$,

$2\left(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3\right) = S^*$,

$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$,
$x_3 \geq 0$

6.3. Lagranj ko'paytuvchilari usuli

Kun-Takker teoremasi (optimallik mavjudligining zaruriy sharti).

Teorema (Kun-Takker teoremasi). Agar $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ chiziqsiz (6.6)-(6.8) standart masalasining minimumga erishishi uchun quyidagi munosabatlarni qanoatlantirishi lozim:

λ ning qiymatlari uchun:

1) $\lambda_i^* \geq 0$,(6.9)

$g_i(X^*) \geq 0$,(5), λ_i -Lagranj ko'paytuvchilari.

(4)-(5) masala yechimining mavjudlik sharti.

2) $\dfrac{\partial L\left(X^*, \Lambda^*\right)}{\partial x_j} = 0$, j=1,2,3,…,n,(6.10), optimallik sharti.

3) $\lambda_i^* \cdot g_i\left(X^*\right) = 0$,i=1,2,3,…,m.(6.11) transversallik sharti.

Ta'rif. Lagranj funksiyasi deb $L\left(X, \Lambda\right) = f\left(X\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot g_i\left(X\right)$,(6.12) bunda $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ ifodaga aytiladi.

6.2-masala. $F(x) = x^2 \rightarrow \min$,(6.13)

$\begin{matrix} x \geq 3, \\ x \geq 0. \end{matrix}$ (6.14)

Yechish. $L\left(X, \Lambda\right) = x^2 + \lambda(x - 3)$, (6.14). Lagranj funksiyasidan xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda \cdot (x - 3)$$

Kun-Takker shartlarini tekshiramiz.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda \quad = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda \cdot (x - 3) = 0$$

$$\lambda \neq 0, x = 3$$

$$\lambda = -6$$

Masala minimumga yechilganda λ ning qiymati manfiy, aks holda musbat bo'lishi shart.

Demak, masalaning yechimi $F_{\min} = 9$ dan iborat.

6.3-masala. $F(x) = x^2 \to \min$,

$x \leq 3,$

$x \geq 0.$

Yechish. $L(X, \Lambda) = x^2 + \lambda(3 - x)$. Lagranj funksiyasidan xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda \cdot (3 - x)$$

Kun-Takker shartlarini tekshiramiz.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda \quad = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda \cdot (3 - x) = 0$$

$$\lambda \neq 0, x = 3$$

$$\lambda = -6$$

$$x = 0, \lambda = 0$$

Masala minimumga yechilganda λ ning qiymati manfiy, aks holda musbat bo'lishi shart. Demak, masalaning yechimi $F_{\min} = 0$ dan iborat.

Chiziqsiz programmalashtirish masalasining standart ko'rinishi quyidagicha:

$z = F(x_1, x_2, x_3, ... x_n) \to \max$ maqsad funksiyani optimal yechimga ega qiluvchi va chegaraviy shartlar

$g_j(x_1, x_2, x_3, ... x_n) \geq b_j, \quad j = 1,2,..., m, (15)$, bunda $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ hamda ushbu

$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$
.... .
....
.....
$x_n \geq 0$

cheklashlarni qanoatlantiruvchi $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ nuqta topilsin.

Endi Kun-Takker teoremasi bo'yicha quyidagi masalani ko'rib chiqamiz.

6.4-masala. $f(x) = 67x_1^2 + 35x_1x_2 + 51x_2^2 - 45x_1 + 60x_1 + 10 \to \max$ maqsad funksiya quyidagi shartlarda

$x_1 + x_2 \geq 4$
$2x_1 - x_2 \leq 5$
$-x_1 + 2x_2 \leq 5$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

Kun-Takker teoremasi shartlari tekshirilsin.

Masalaning yechimi. Masalaning yechimi $X^* = (5;5)$ ekanligini Kun-Takker teoremasi bo'yicha shartlarni tekshiramiz.

$f(x) = 67x_1^2 + 35x_1x_2 + 51x_2^2 - 45x_1 - 60x_1 + 10 \to \max$ maqsad funksiya quyidagi shartlarda

$x_1 + x_2 \geq 4$
$-2x_1 + x_2 + 5 \geq 0$
$x_1 - 2x_2 + 5 \geq 0$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

Lagranj funksiyasi quyidagicha tuziladi:

$$L(X, \Lambda) = 67x_1^2 + 35x_1x_2 + 51x_2^2 - 45x_1 - 60x_2 + 10 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) + \lambda_2(-2x_1 + x_2 + 5) +$$
$$+ \lambda_3(x_1 - 2x_2 + 5) + \lambda_4 x_1 + \lambda_5 x_2$$

Endi x_1 va x_2 o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalar olinadi:

$$\frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial x_1} = 154x_1 + 35x_2 - 45 + \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4;$$

$$\frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial x_2} = 35x_1 + 102x_2 - 60 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_5.$$

Masalaning yechimi $X^* = (5;5)$ qiymatni Kun-Takker teoremasining shartlarni tekshiramiz:

λ ning qiymatlari uchun:

1) $\lambda_i^* \geq 0$,

$g_i(X^*) \geq 0$,, λ_i-Lagranj ko'paytuvchilari.

$g_1(5,5) = 5+5-4 \geq 0$

$g_2(5,5) = -10+5+5 = 0$

$g_3(5,5) = 5-10+5 = 0$

$g_4(5,5) = 5 \geq 0$

$g_5(5,5) = 5 \geq 0$

2) $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0$, j=1,2,3,…,n, optimallik sharti

$$\left.\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_1}\right|_{(5,5))} = 134\cdot 5 + 35\cdot 5 - 45 + \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4;$$

$$\left.\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_2}\right|_{(5,5)} = 35\cdot 5 + 102\cdot 5 - 60 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_5.$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$\left.\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_1}\right|_{(5,5))} = 800 + \lambda_1^* - 2\lambda_2^* + \lambda_3^* + \lambda_4^0 = 0;$$

$$\left.\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_2}\right|_{(5,5)} = 625 + \lambda_1^* + \lambda_2^* - 2\lambda_3^* + \lambda_5^* = 0.$$

3) $\lambda_i^* \cdot g_i(X^*) = 0$,i=1,2,3,…,m.transversallik sharti:

$\lambda_1^* \cdot 6 = 0$

$\lambda_2^* \cdot 0 = 0$

$\lambda_3^* \cdot 0 = 0$

$\lambda_4^* \cdot 5 = 0$

$\lambda_5^* \cdot 5 = 0$

Bundan $\lambda_1^* = \lambda_4^* = \lambda_5^* = 0$ ekanligidan qiymatlarni 2-optimallik shartiga qo'yamiz:

$$\begin{cases} 800 - 2\lambda_2^* + \lambda_3^* = 0 \\ 625 + \lambda_2^* - 2\lambda_3^* = 0 \end{cases}, \quad (17)$$

(17) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi quyidagiga teng:

$\lambda_2^* = \frac{2225}{3};$

$\lambda_3^* = \frac{2050}{3}.$

Lagranj ko'paytuvchilari quyidagilardan iborat:

$\Lambda = (0; \frac{2225}{3}; \frac{2050}{3}; 0; 0)$

Kun-Takker teoremasi bo'yicha shartlarni $X^* = (5;5)$ nuqta qanoatlantirdi.

Minimallashtirishda Kun-Takker teoremasida quyidagi tenglamalar uchun

$z = F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \to \min$,(18) maqsad funksiyani optimal yechimga ega qiluvchi va chegaraviy shartlar

$g_j(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \geq b_j, \quad j = 1,2,\ldots,m$,(19) , bunda $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ hamda ushbu

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$

.... ,(20)

....

.....

$x_n \geq 0$

Masalani yechishda λ ning qiymatlari uchun: $\lambda_i^* \leq 0, i = 1,2,\ldots,m.$ bo'ladi.

Chiziqsiz programmalashtirish masalalarining mumkin bo'lgan yechimlar sohasi hamma vaqt ham qavariq sohadan iborat bo'lmaydi. Undan shunday nuqta topiladiki, ushbu nuqtadan f $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = h$ gipersirt o'tib, (6.1) – maqsad funksiya o'zining eng katta yoki eng kichik qiymatlariga erishishi mumkin.

Ushbu nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasining chegarasida yoki sohaning ichida joylashgan bo'lishi mumkin.

Chiziqsiz programmalashtirishning (6.1), (6.2) ko'rinishdagi masalalarining maqbuliy (optimal) yechimlarini topishning bir qancha usullari mavjud bo'lib, ulardan grafik hamda Lagranj ko'paytuvchilar usullari bilan tanishib chiqamiz. Quyidagi masalani qaraylik.

6.5-masala. Reja bo'yicha qurilish korxonasida 150 dona plita ishlab chiqarilishi lozim. Plita ishlab chiqarish jarayoni ikki xil texnologik usul bilan amalga oshiriladi. Birinchi texnologik usul yordamida x_1 dona plita ishlab chiqarish uchun $4x_1 + x_1^2$ qonuniyat, ikkinchi texnologik usulni qo'llashda x_2 dona plita ishlab chiqarish uchun $8x_2 + x_2^2$ qonuniyat bo'yicha harajat qilinadi.

Har bir usulni qo'llashda jami mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan umumiy harajat eng kam (minimal) bo'lishligi aniqlansin.

Yechish: Masalaning iqtisodiy - matematik modelini tuzamiz.

Ishlab chiqarish korxonasi x_1 va x_2 miqdorlardagi plita ishlab chiqarish uchun sarflanadigan harajatlar eng kam (minimal) bo'lishligi ushbu funksiya

$$F(x_1, x_2) = 4\ x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min$$

orqali aniqlangan bo'lsin, hamda quyidagi shartlarni qanoatlantirsin. Ishlab chiqariladigan plitalarning umumiy miqdori

$$x_1 + x_2 = 150 \quad , \qquad (6.4)$$

ga teng bo'lib, noma'lumlarning manfiy bo'lmasligi

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \quad , \qquad (6.5)$$

nazarda tugilsin.

Ushbu masalani ikki usul yordamida maqbuliy yechimini topamiz.

1.Grafik usul.

2.Lagranj ko'paytuvchilar usuli.

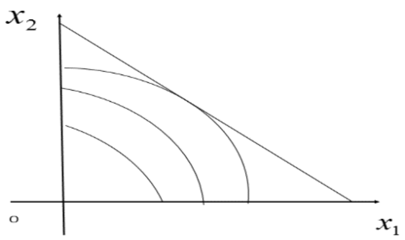
Masalaning maqbuliy yechimini aniqlashda quyidagi bosqich ishlarini bajaramiz.

Yechish:1. Maqsad funksiya chiziqsiz funksiya ko'rinishida bo'lganligi uchun masala chiziqsiz programmalashtirish masalasidan iboratdir.

Masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasini munosabatlarga asoslangan holda hosil qilamiz. Buning uchun

$$x_1 + x_2 = 150 \qquad (L_1)$$
$$x_1 = 0 \qquad (L_2)$$
$$x_2 = 0 \qquad (L_3)$$

to'g'ri chiziqlarni $x_1 0 x_2$ tekislikda tasvirlaymiz.



1-rasm.

2. Gipersirt $F(x_1, x_2) = 4\ x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$ maqsad funksiya or-qali hosil qilinadi.

$$F(x_1, x_2) = 4\ x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = h$$
$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4)^2 - 4 - 16 = h$$

$$(x_1+2)^2+(x_2+4)^2=h+20c=c$$
$$(x_1+2)^2+(x_2+4)^2=\left(\sqrt{c}\right)^2$$

tenglama markazi E(-2; -4) nuqtada bo'lgan va radiusi $\sqrt{c}$ ga teng bo'lgan aylana tenglamasidan iboratdir. S ning turli xil qiymatlari uchun gipersirt aylanalar oilasidan iborat bo'ladi (1 – rasm).

Qo'yilgan masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasi AB kesma hamda markazi E(-2; -4) va radiusi $R=\sqrt{c}$ ga teng bo'lgan aylanalarni tashkil etuvchi egri chiziqlarning umumiy nuqtasidan iboratdir. 1–rasmdan markazi E(-2; -4) nuqtadan o'tuvchi, R radiusning turli qiymatlar uchun aylanalar oilasini hosil qilamiz.

Maqsad funksiya o'zining eng kichik qiymatiga D(x_1, x_2) nuqtada erishadi. Ushbu nuqtaning koordinatalarini aniqlashda $x_1+x_2=150$ to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyenti k=–1 tengligi hamda $4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2=c$ aylana bilan D (x_1, x_2) nuqtada ustma–ust tushishligidan foydalanamiz. Aylana tenglamasidagi x_2 ni x_1 ga nisbatan aniqmas funksiya sifatida qarab, uni differensiallasak quyidagiga ega bo'lamiz

$$4+2x_1+8x_2^1+2x_2\ x_2^1=0.$$

Hosil bo'lgan tenglamani x_2 ga nisbatan yechib,

$$x_2^1=\frac{2+x_1}{4+x_2}$$

ni hosil qilamiz.

Hosil bo'lgan tenglamani – 1 ga tenglashtirib D(x_1, x_2) nuqtaning koordinatalarini topish jarayonida bitta tenglamaga ega bo'lamiz.

$$x_1-x_2=2$$

$x_1 - x_2 = 2$ tenglamani hamda D(x_1, x_2) nuqtaning $x_1 + x_2 = 150$ to'g'ri chiziqda yotganligini e'tiborga olsak, quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} x_1-x_2=2 \\ x_1+x_2=150. \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini yechib, x_1=76 hamda x_2=74 larni aniqlaymiz va maqsad funksiyaning qiymatini topamiz.

$$F=4\cdot 76+76^2+8\cdot 74+74^2=304+5776\cdot 5476=12148.$$

Bundan esa qurilish korxonasi I–texnologik usul bilan 76, II–texnologik usul bilan 74 dona plita ishlab chiqarib, eng kam sarflanadigan harajat 12 mln.148 ming so'mni tashkil qilishligini aniqlaymiz.

Lagranj kupaytuvchilar usuli

Aytaylik matematik programmalashtirish masalasi kuyi-dagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

ushbu $Z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$

funksiyaning

$$g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0, \left(i = \overline{1, m}\right)$$

cheklanish shartlari bajarilganda maksimallashtirilsin.

Masalada cheklanishlar sistemasi tenglamalar bilan berilganligi uchun uning yechimini bir necha o'zgaruvchili funksiya sifatida qarab, shartli ekstremumini topishning klassik usulidan foydalanish mumkin. Bunda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (i = \overline{1, m})$ o'zining birinchi tartibli xususiy hosilalari bilan uzluksiz deb faraz qilamiz.

Masalani yechish uchun ushbu funksiyani tuzamiz:

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right) = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda g_1\left(x_1, x_2, ..., x_n, \right)$$

va undan $x_j \left(j = \overline{1, n}\right)$, $\lambda_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ lar bo'yicha xususiy xosilalarni olib, nolga tenglashtiramiz.

Natijada quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_1 \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \left(j = \overline{1, n}\right) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \ \left(i = \overline{1, m}\right) \end{cases}$$

Maqsad funksiyaga Lagranj funksiyasi, $\lambda_i\left(i = 1\overline{m}\right)$ sonlar esa Lagranj ko'paytuvchilari deyiladi.

Agar $Z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ funksiya $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, nuqtada ekstremumga (eng katta yoki eng kichik) ega bo'lsa, u holda shunday $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, ..., \lambda_m^{(0)}\right)$ vektor mavjud bo'lib, ushbu $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, $\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, ..., \lambda_m^{(0)}\right)$ nuqtalar (4) tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi. Ravshanki (4) sistemani yechish orqali F funksiyaning ekstremal qiymatlar qabul qiladigan nuqtalar to'plamiga ega bo'lamiz. Bundan esa global maksimum (minimum) ni aniqlash uchun funksiyaning mos nuqtalardagi qiymatlarini topish yetarlidir.

Yuqoridagi masalani endi Lagranj ko'paytuvchilar usuli yordamida yechamiz.

Ushbu keltirilgan masalani yechish uchun quyidagi bosqich ishlarini bajaramiz.

Yechish: 1 .Lagranj ko'paytuvchilar usulidan foydalanib munosabatni qanoatlantiruvchi hamda noma'lumlarning manfiy bo'lmaslik shartlarini e'tiborga olmagan holda maqsad funksiyaning eng kichik (minimal) qiymatini topamiz.

Buning uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(150 - x_1 - x_2)$

2. Hosil bo'lgan (Lagranj funksiyasidan x_1, x_2, λ lar bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtiramiz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = 150 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} 4 + 2x_1 = \lambda \\ 8 + 2x_2 = \lambda \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasining birinchi va ikkinchi tenglamasidan

$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2$ yoki $x_1 - x_2 = 2$ ga ega bo'lamiz, hamda quyidagi

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

3. Hosil qilingan tenglamalar sistemasini biror usul masalan algebraik qo'shish usulini qullab,

$$+\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases}$$
$$2x_1 = 152$$

$x_1 = 152/2 = 76$ yoki $x_1 = 76$

ga ega bo'lamiz, bunga ko'ra sistemasining birinchi tenglamasidan.

$$76 - x_2 = 2 \text{ yoki } x_2 = 74$$

ni hosil qilamiz.

Topilgan x_1 va x_2 noma'lum o'zgaruvchilarning qiymatlari manfiy bo'lmaslik shartni qanoatlantiradi hamda $D(x_1, x_2)$ nuqtaning koordinatalaridan iborat bo'ladi.

4. Ushbu nuqta maqsad funksiyaga ekstremum qiymat beradigan shubhali nuqta bo'lishi mumkin. Shartsiz ekstremum masalasiga ko'ra, ikkinchi tartibli xususiy hosiladan foydalansak, D nuqtada F maqsad funksiya shartli minimumga ega bo'ladi.

Maqsad funksiyaning shartli minimum qiymatini topishning boshqacha usuli bilan ham hal qilish mumkin. Buning uchun (tenglamadan $x_2 = 150 - x_1$ ga ega bo'lib, uni (6.4) ga qo'ysak, bir o'zgaruvchi x_1 ga nisbatan ushbu

$$F_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8(150 - x_1) + (150 - x_1)^2 \qquad ,(*)$$

ko'rinishdagi funksiyaga ega bo'lamiz.

Maqsad funksiyaning stasionar nuqtasini topamiz. Buning uchun (*) dan x_1 bo'yicha hosila olib, uni nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{dF_1}{dx_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2\left(150 - x_1\right) = 0$$

$4 + 2x_1 - 8 - 300 + 2x_1 = 0$ yoki $4x_1 = 304$

bundan esa $x_1 = 76$ hamda $x_2 = 74$ ga ega bo'lamiz. Xuddi yuqoridagidek D nuqtada maqsad funksiya o'zining eng kichik $\mathrm{F} = 12148$ qiymatiga erishadi.

Olingan natijani xuddi yukoridagidek izohlash mumkin; qurilish korxonasi I – texnologik usul bilan 76, II – texnologik usul bilan 74 dona plita ishlab chiqarib, eng kam sarflanadigan harajat 12 mln. 148 ming so'mni tashkil etadi.

6.6-masala. $f = 3x_1^2 + 5x_2^2$ funksiyaning $x_1 + x_2 = 5$ shart o'rinli bo'lganda ekstremum nuqtalarini toping.

Yechish:

1. Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$F\left(x_1, x_2 \lambda\right) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda\left(5 - x_1 - x_2\right)$$

2.Lagranj funksiyasidan x_1, x_2 va λ lar bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx_1} = 6x_1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{dF}{d\lambda_1} = 10x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{dF}{d\lambda_1} = 5 - x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} 6x_1 - \lambda = 0 \\ 10x_2 - \lambda = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 = 5 \end{cases}$$

3. Tenglamalar sistemasidan x_1, x_2, λ larning qiymat-larini biror usulni qo'llash orqali topamiz. Buning uchun sistemaning birinchi tenglamasidan, ikkinchi tenglamasini hadma-had ayiramiz, natijada

$$\begin{cases} 6x_1 - 10x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \qquad (**)$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz va undan x_1, x_2 larning qiymatlarini aniqlaymiz. (**) ning ikkinchi tenglamasini $-6 \neq 0$ ga kupaytirib, uning birinchi tenglamasiga hadma-had qo'shamiz, natijada $-16x_2 = -30$ tenglamani hosil qilamiz. Bundan esa $x_2 = 15/8$ ga teng ekanligini aniqlaymiz. (**) sistemasining ikkinchi tenglamasidan $x_1 + 15/8 = 5$ yoki $x_1 = 5 - 15/8 = 25/8$; $x_1 = 25/8$; $6 \cdot 25/8 - \lambda = 0$; $\lambda = 75/4$ topiladi. Shunday kilib, A(25/8;

15/8) nuqta shubhali nuqta bo'lib, ushbu nuqtada berilgan funksiya shartli ravishda ekstremumga ega bo'lishi mumkin.

4. Ushbu shubha qilingan nuqta uchun qo'shimcha tekshirishni davom ettirib, ikkinchi tartibli xususiy hosilalar olamiz.

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 6;\ B = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 10;\ C = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

Bundan $\Delta = AC - B^2$ diskriminantni tuzib, uni hisoblaymiz. Quyidagi hollarni keltirib o'tamiz:

a) agar $A < 0$ (yoki $C < 0$) bo'lib, $\Delta > 0$ shart o'rinli bo'lsa, berilgan funksiya $M(x_0, y_0)$ nuqtada aynan maksimumga; $A > 0$ (yoki $C < 0$) bo'lganda minimuga egalir.

b) agar $\Delta < 0$ shart bajarilsa, dastlabki berilgan funksiya $M(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga ega emasdir.

c) $\Delta = 0$ bo'lsa, ekstremumga tekshirish yana davom ettiriladi. Bunday holda funksiya ekstremumga ega yoki ega bo'lmasligi mumkin.

Yuqorida keltirilgan masala uchun ushbu hollarning bajarilishini tekshiramiz:

$\Delta = 6 \cdot 0 - 10^2 = -100 < 0$ bo'lganligi uchun berilgan masalaning ekstremumga erishtira oladigan nuqta mavjud emasdir.

6.7-masala. Quyidagi masalaning shartli ekstremumini toping.

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Yechish: 1. Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$f = (x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 + \lambda_1 (4 - x_1 - x_2 - x_3) + \lambda_2 (12 - 2x_1 + 3x_2)$$

2. Lagranj funksiyasidan $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$ lar bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 1 - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 4 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Natijada besh noma'lumli beshta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 1 - \lambda_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasidagi noma'lumlarning qiymatlarini zamonaviy kompyuterlarning dasturiy ta'mi-notiga murojaat qilish orqali ham topish mumkin.

Ushbu tenglamalar sistemasini biror usul yordamida yechib, ekstremumga ega bo'lishi mumkin bo'lgan nuqtalarni topamiz. Sistemaning uchinchi tenglamasidan $\lambda_1 = 1$ ga teng ekanligini aniqlab, quyidagi sistemagi ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_2 = 1 \\ 2x_2 + 3\lambda_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Sistemaning birinchi tenglamasini $1{,}5 \neq 0$ ga kupaytirib, uning ikkinchi tenglamasiga hadma-had qo'shamiz. Natijada $3x_1 + 2x_2 = 2{,}5$, sistemaning to'rtinchi tenglamasini (-1,5)ga ko'paytirib $-3x_1 + 4{,}5x_2 = -18$ tenglamalarga ega bo'lamiz va quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2{,}5 \\ -3x_1 + 4{,}5x_2 = -18 \end{cases}$$

Algebraik qo'shish usulini qo'llab,

$0 \cdot x_1 + 6{,}5x_2 = -15{,}5$ yoki $65x_2 = -155 \Rightarrow x_2 = -155/65 = -31/13$ topiladi.

Bundan esa $3x_1 - 2\cdot\frac{31}{13} = 2{,}5 \Rightarrow 3x_1 - \frac{5}{2} + \frac{62}{13};\ 3x_1 = \frac{189}{26};\ x_1 = \frac{63}{26}$

ga tengligi aniqlanadi. Sistemaning uchinchi tenglamasidan $\frac{63}{26} - \frac{31}{13} + x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 4 - \frac{1}{26} = \frac{103}{26}$. Topilgan x_1, x_2, x_3 larningqiymatlariga asoslanib, $2:\frac{63}{26} - 2\lambda_2 = 1 \Rightarrow\ \Rightarrow 2\lambda_2 = \frac{63}{13} - 1 = \frac{50}{13} \Rightarrow 2\lambda_2 = \frac{50}{13};\ \lambda_2 = \frac{50}{13} : 2 = \frac{50}{26}$. ekanligini aniqlaymiz.

Maqsad funksiyaning ekstremumga erishtira oladigan

$$M\left(\frac{63}{26}; \frac{-31}{13}; \frac{103}{26}\right)$$

shubhali nuqtaga ega bo'lamiz.

Ushbu nuqtada maqsad funksiyaning ekstremumga ega bo'lishligini aniqlaymiz. Buning uchun ekstremumning yetarlilik shartlarini tekshiramiz. Funksiyadan ikkinchi tartibli xususiy hosilalar olamiz.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\, \partial x_2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\, \partial x_3} = 0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \cdot \partial x_3} = 0.$$

Quyidagi diskriminantini tuzamiz

$\Delta = AC - B^2$ yoki $\Delta_1 = 2\cdot 2 - 0^2 = 4$ hamda $\Delta_2 = 0; \Delta_3 = 0$

$\Delta_1 > 0$ hamda $A > 0$ (yoki $c > 0$) shartlarining o'rinli ekanligini, $M\left(\frac{63}{26},\ -\frac{31}{13},\ \frac{103}{26}\right)$ stasionar (kritik) nuqtada maqsad funksiya minimum (eng kichik) qiymatiga erishadi va ushbu nuqtada uning qiymati quyidagi teng bo'ladi

$$f\left(\frac{63}{26}, -\frac{31}{13}, \frac{103}{26}\right) = \left(\frac{63}{26}\right)^2 + \left(-\frac{31}{13}\right)^2 + \frac{103}{26} = \frac{3969}{676} + \frac{961}{169} + \frac{103}{26} =$$
$$= \frac{3969 + 3844 + 2678}{676} = 15\frac{351}{676};$$

bundan esa $f_{\min} = 15\frac{351}{676}$ ga teng ekanligini aniqlaymiz.

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

6.8-masala. $F(x) = x^2 + 2x + 3 \to \min$,

$x \geq 3$,

$x \geq 0$.

masalasini yeching.

6.10-masala. $F(x)=x^2 \to \min$,

$x \le 3,$
$x \ge 0.$

masalasini yeching.

6.11-masala. $f(x)=45x_1^2-35x_1x_2+51x_2^2+45x_1-60x_1+10 \to \max$ maqsad funksiya quyidagi shartlarda

$$\begin{aligned}&x_1+x_2 \ge 4\\&2x_1-x_2 \le 5\\&-x_1+2x_2 \le 5\\&x_1 \ge 0\\&x_2 \ge 0\end{aligned}$$

masalasini yeching.

6.12-masala. Reja bo'yicha qurilish korxonasida 250 dona plita ishlab chiqarilishi lozim. Plita ishlab chiqarish jarayoni ikki xil texnologik usul bilan amalga oshiriladi. Birinchi texnologik usul yordamida x_1 dona plita ishlab chiqarish uchun $16x_1+x_1^2$ qonuniyat, ikkinchi texnologik usulni qo'llashda x_2 dona plita ishlab chiqarish uchun $64x_2+x_2^2$ qonuniyat bo'yicha harajat qilinadi.

Har bir usulni qo'llashda jami mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan umumiy harajat eng kam (minimal) bo'lishligi aniqlansin.

6.13-masala. $f=4x_1^2+5x_2^2$ funksiyaning $x_1+x_2=10$ shart o'rinli bo'lganda ekstremum nuqtalarini toping.

6.14-masala. Quyidagi masalaning shartli ekstremumini toping.

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3$$
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=16\\2x_1-3x_2=25\end{cases}$$

MUHOKAMA UCHUN NAZORAT SAVOLLARI

1. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining matematik modelini ifodalang.
3. Chiziqsiz programmalashtirish masalalarini geometrik talqinini izohlab bering.
4. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining grafik usuli.
5. Lagranj ko'paytuvchilar usuli va uning mazmunini ifodalang.
6. Lagranj funksiyasi qanday tuziladi ?
7. Shartli ekstremum masalalarini yechish qanday amalga oshiriladi?

7-BOB. QAVARIQ PROGRAMMALASHTIRISH

7.1. Yo'nalish bo'yicha hosila va gradiyent

Yo`nalish bo`yicha hosila tushunchasi ikki va uchta o'zgaruvchining funktsiyalari uchun ko`rib chiqiladi. Hosilaning ma`nosini yo`nalish bo`yicha tushunish uchun hosilani oddiy ta`rifi bilan taqqoslash kerak:

1) bitta o`zgaruvchining funktsiyai;

2) uchta o`zgaruvchining funktsiyasi.

Bir o'zgaruvchili funktsiyasini ko'rib chiqib, biz Oy o`qida x argumentining orttirmasiga ga mos keladigan f(x) funktsiyasining orttirmasi ko'rsatilishini aniqladik, agar biz uchta o`zgaruvchining funktsiyasi bilan shug`ullanayotgan bo`lsak, unda x, y, z argumentlarining orttirmasi ox, oy, oz o`qlarida ko`rsatiladi. Savol o`z-ozidan paydo bo'ladi: endi argumentlarning orttirmasiini emas, balki uchta o'zgaruvchining funktsiyalarini qaerda ko'rsatish mumkin?

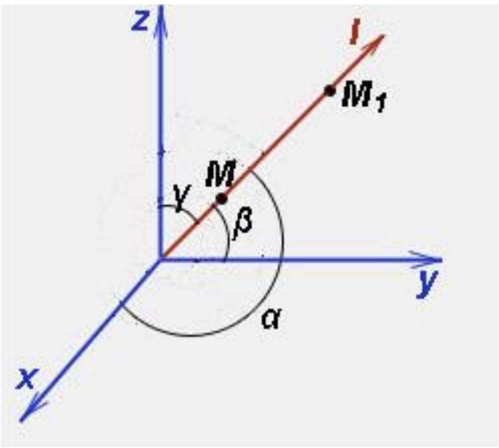
Va bu savolga javob: uchta o`zgaruvchining funktsiyasining o`rttirmasi ma`lum bir chiziqda ko`rsatiladi, uning yo`nalishi vektor bilan belgilanadi.

Agar ikki yoki uchta o'zgaruvchili funktsiyasi ko'rib chiqilsa, unda ikki yoki uchta o`lchov argumentlarni o`rnatadi va funktsiyaning orttirmasi ko'rsatilgan chiziq yana bir o`lchovdir va uni ta`kidlash uchun biz ushbu o`lchovni uchinchi yoki to`rtinchi emas, balki nol deb ataymiz, dasturlash an`analariga rioya qilgan holda (dasturlashda hisoblash ko`pincha birdan emas, balki noldan).

Yo`nalish bo'yicha hosilaning qat`iy matematik ta`rifiga o`tish uchun siz quyidagilarni ko`rib chiqishingiz kerak:

1) $u = f(M)$ funktsiya *M(x,y,z)* nuqta atrofidaaniqlangan bo`lsin;

2) l vektorni yo`naltiruvchi kosinuslari: cosα , cosβ , cosγ.



7.3-chizma.

M nuqtasi orqali biz ikkita mumkin bo`lgan yo`nalishlardan biri l vektor yo`nalishiga to`g`ri keladigan chiziq chizamiz. Olingan chiziqda biz $M_1$ nuqtasini belgilaymiz, uning koordinatalari M nuqtaning koordinatalari yig`indisini va uchta o'zgaruvchining funktsiyasidagi tegishli argumentlarning o`rttirmasini hosil qiladi:

$x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$.

MM_1 kesmani l bilan belgilaymiz.

$u = f(M)$ funktsiya orttirmasi:

$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta y) - f(x,y,z)$.

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta y) - f(x,y,z)}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial l}$$

Funktsiyaning yo`nalish bo`yicha hosilasi

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\cos\alpha_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\cdot\cos\alpha_3 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\cos\alpha_n .$$

formula bilan topiladi. Bunda $u = f(X) = f(x_1, x_2,..., x_n)$; $X \in R^n$ uzluksiz funktsiya.

Uch o`zgaruvchili funktsiyaning yo`nalish bo`yicha hosilasi

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma .$$

formula bilan topiladi. Bunda $u = f(M) = f(x,y,z)$; $M \in R^3$ uzluksiz funktsiya.

M_0 nuqtadagi bir nechta o`zgaruvchili funktsiyasining gradiyent i $M_0$ nuqtada ushbu funktsiyaning maksimal o`sish yo'nalishini va ushbu maksimal o`sishning kattaligini tavsiflaydi.

Funktsiyaning gradiyenti

$$grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\bar{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\bar{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\cdot\bar{e}_3 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\bar{e}_n .$$

formula bilan topiladi. Bunda $u = f(X) = f(x_1, x_2,..., x_n)$; $X \in R^n$ uzluksiz funktsiya.

Uch o`zgaruvchili funktsiyaning gradiyenti

$$grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\bar{k} .$$

formula bilan topiladi. Bunda $u = f(M) = f(x,y,z)$; $M \in R^3$ uzluksiz funktsiya.

7.1-masala. $u = xy^2 + z^2 - xyz$ funktsiyaning $M_0(1;2;3)$ nuqtada $\bar{a}(1;-2;2)$ yo`nalish bo`yicha hosilani toping.

Yechish.

Funktsiyaning xususiy hosilalarini $M_0(1;2;3)$ nuqtada topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1;2;3) = y^2 - yz = 2^2 - 2\cdot 3 = -2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1;2;3) = 2xy - xz = 2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 3 = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(1;2;3)=2z-xy=2\cdot 3-1\cdot 2=4.$$

Vektorlarni skalyar ko`paytmasi ta`rifidan foydalanib, yo`naltirilgan kosinuslarni aniqlaymiz:

$$\bar{a}_x=|\bar{a}|\cdot\cos\alpha; \quad \bar{a}_y=|\bar{a}|\cdot\cos\beta \quad ; \quad \bar{a}_z=|\bar{a}|\cdot\cos\alpha.$$

Bundan

$\cos\alpha=\frac{\bar{a}_x}{|\bar{a}|}$; $\cos\beta=\frac{\bar{a}_y}{|\bar{a}|}$; $\cos\gamma=\frac{\bar{a}_z}{|\bar{a}|}$ kelib chiqdi.

$\bar{a}$ vektorning moduli $\bar{a}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$ ga teng ekanligidan

$\cos\alpha=\frac{\bar{a}_x}{|\bar{a}|}=\frac{1}{3}$; $\cos\beta=\frac{\bar{a}_y}{|\bar{a}|}=-\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=\frac{4}{3}$ ga teng.

$u=xy^2+z^2-xyz$ funktsiyaning $M_0(1;2;3)$ nuqtada $\bar{a}(1;-2;2)$ yo`nalish bo`yicha hosilani topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=-2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+4\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

7.2-masala. $z=x^2+y^2x$ funktsiyaning $M_0(1;2)$ nuqtada $\overline{M_0M_1}$ vektor yo`nalishi bo`yicha hosilani toping. Bu yerda $M_1(3;0)$.

Yechish.

Funktsiyaning xususiy hosilalarini $M_0(1;2)$ nuqtada topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1;2)=2x+y^2=2\cdot 1+2^2=6;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1;2)=2yx=2\cdot 2\cdot 1=4.$$

$$\overline{M_0M_1}=(3-1;\ 0-2)=2\bar{i}-2\bar{j};$$

l vektorni topamiz:

$$\bar{l}=\frac{\overline{M_0M_1}}{|\overline{M_0M_1}|}=\frac{2\bar{i}-2\bar{j}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}.$$

Yo`naltirilgan kosinuslarni aniqlaymiz:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad .$$

$z=x^2+y^2x$ funktsiyaning $M_0(1;2)$ nuqtada $\overline{M_0M_1}$ vektor yo`nalishi bo`yicha hosilani topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ .$$

7.3-masala. $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ funktsiyaning $M_0(2;4)$ nuqtada gradiyentini toping.

Yechish.

Ikki o`zgaruvchili funktsiyaning gradiyent i

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j}$$

formula bilan topiladi:

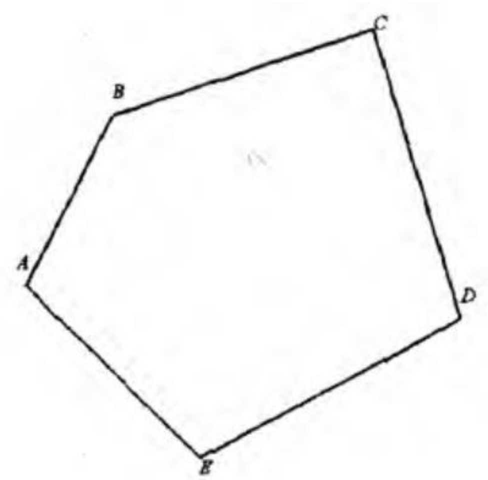
$$\frac{\partial u}{\partial x}(2;4) = x = 2 \ \ ; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(2;4) = \frac{2}{3}y = \frac{8}{3} \, .$$

$u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{2}$ funktsiyaning $M_0(2;4)$ nuqtada gradiyent ini topamiz:

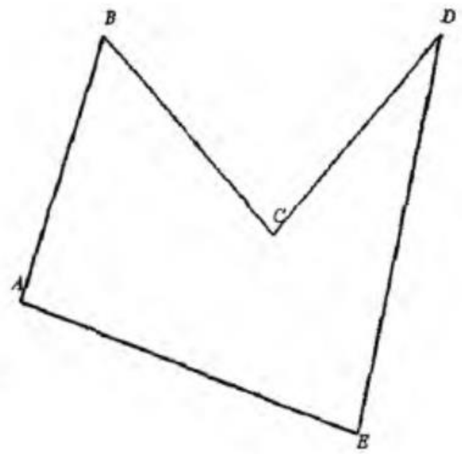
$$grad u = 2 \cdot \bar{i} + \frac{8}{3} \cdot \bar{j} \, .$$

7.2. Qavariq progrmmalshtirish masalasi

Ushbu mavzuda qavariq to‘plam tushunchasi keltirilib, uning xossalari bilan tanishamiz. Bo‘sh bo‘lmagan $X \in R^n$ to‘plam berilgan. Agar to‘plam o‘zining ixtiyoriy x_l va x_2 nuqtalari bilan birgalikda ulami tutashtiruvchiKesmani ham o‘z ichiga olsa, bunday to‘plam qavariq to‘plam deyiladi. Boshqacha aytganda, qavariq to`plamda barcha $x_l, x_1 \epsilon X$ va $\lambda \in [0;1]$ lar uchun $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ o‘rinli bo‘ladi.



7.1- chizma



7.2-chizma

Ta'rif 1. Qavariq X to'plamda aniqlangan *f (x)* funksiya agar bu to'plamga qarashli ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ nuqtalar uchun $0 \le \lambda \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi hamma λ larda quyidagi

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \le \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2) \quad , \qquad (7.1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda *f (x)* funksiya qavariq funksiya deyiladi.

Ta'rif 2. **A**gar x_1, x_2 va λ larning shu qiymatlarida quyidagi

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \ge \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2) \quad , \qquad (7.2)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda *f (x)* funksiya botiq deyiladi.

Agar *f (x)* funksiya qavariq bo'lsa, - *f (x)* botiq va aksincha *f (x)=cx* chiziqli funksiya bir vaqtda qavariq va botiqdir, bunda ixtiyoriy x_1, x_2 va λ lar uchun quyidagi tenglama o'rinlidir.

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) = \lambda c x_1 + (1-\lambda) c x_2 = \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2).$$

Ta'rif 3. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining

Maqsad funksiyasi $\qquad f(X) \to \max \qquad (7.3)$

Chegaraviy sartlari:

$$g_i(X) \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad (7.4)$$

Cheklashlari: $X \ge 0$, $\qquad$ (7.5)

agarda mumkin bo'lgan yechimlar to'plamining aqalli birorta nuqtasi x_i uchun

$g_i(x_i) < b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$ shart o'rinli bo'lsa, mumkin bo'lgan yechimlar to'plami regulyarlik shartini qanoatlantiradi deyiladi,.

Ta'rif 4. Agar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya botiq (kavariq) bo'lib, $g(x_i)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ funksiya qavariq bo'lsa, (7.3)–(7.5) masala qavariq programmalashtirish masalasi deyiladi,

Teorema 1. Qavariq programmalashtirish masalasining har qanday lokal maksimum (minimum) qiymatlari uning global maksimum (minimum) qiymatlaridan iboratdir.

Ta'rif 5. (7.3)–(7.5) qavariq programmalashtirish masalasining

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ , \ (7.6)$$

funksiyasiga Lagranj funksiyasi deyiladi.

Bunda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ Lagranj ko'paytuvchilari deyiladi.

Ta'rif 6. Agard

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0) \le F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0) \le \\ &\le F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \end{aligned} \quad ,(7.7)$$

barcha $x_j \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$ va $x_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$ lar uchun o'rinli bo'lsa

$(x_0; \lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ nuqta Lagranj funksiyaning egar nuqtasi deyiladi.

7.3. Qavariqlikka tekshirishning Kun-Takker teoremasi

Teorema: (Kun – Takker teoremasi). Agar $X_0 = \left(x_1^0,\, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ nuqta qavariq programmalashtirish masalasi (7.3)–(7.5) ning yechimi bo'lsa, shunday $\lambda_0 = \left(\lambda_1^0,\, \gamma_2^0, \ldots, \lambda_n^0\right) \geq 0$ vektor mavjud bo'ladiki, unda $\left(X_0,\, \lambda_0\right)$ nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasini tashkil etadi. Boshqacha qilib aytganda barcha $\lambda \geq 0$ va $X \in Rn$ lar uchun (7.7) tengsizlik o'rinlidir.

Isbot. $X_0 = \left(x_1^0,\, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ Agar $X_0 = \left(x_1^0,\, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ nuqta qavariq programmalashtirish masalasi (1) – (3) ning yechimi bo'lsin. U holda shu nuqtada Lagranj funksiyasining minimumi mavjudligini birinchi tartibli zaruriy sharti bajarilish kerak, ya'ni

$$\frac{\partial F\left(X_0, \lambda_0\right)}{\partial X} = 0, \quad \lambda_0 g\left(X_0\right) = 0$$

shart o'rinlidir.

f (x) va $g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),\ \left(i = \overline{1, m}\right)$ funksiyalar qavariq funksiyalar bo'lganligi uchun ixtiyoriy $\lambda_i \geq 0$ uchun

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ \ \lambda_{\lambda 1}, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \quad (7.8)$$

funksiyaning ham qavariqligi kelib chiqadi.

Shu sababli ixtiyoriy $X \in R_n$ lar uchun

$$\begin{aligned} F\left(X_0,\, \lambda_0\right) &= f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i\left(\mathrm{x}_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \leq \\ &\leq f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0\left(\mathrm{x}_1, x_2, \ldots, x_n\right) = F\left(X, \lambda_0\right) \end{aligned}, \quad (7.9)$$

bo'ladi.

$X_0 = \left(x_1^0,\, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ nuqtani, teorema shartiga ko'ra, qavariq programmalashtirish masalasi (7.3) – (7.5) ning yechimi deb faraz qilganimiz uchun

$$g_i\left(X_0\right) = g_i\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0,\right) \leq 0, \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \quad (7.10)$$

tengsizlik o'rinlidir. (7.10) ga ko'ra, barcha $\lambda \geq 0$ uchun

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0,\right) \leq 0, \quad (7.11)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan (7.8) dan (7.11) ni nazarda tutsak.

$$\begin{aligned} F\left(x_0, \lambda\right) &= f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ g_i\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \leq \\ &\leq f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) = F\left(X_0, \lambda_0\right) \end{aligned}, \quad (7.12)$$

ekanligi kelib chiqadi. (7.9) va (7.12) tengsizliklardan (7.7) ning to'g'riligi kelib chiqadi. Demak, isbot qilingan teoremaga ko'ra, Lagranj funksiyasining egar nuqtasi mavjud bo'lsa, qavariq programmalashtirish masalasining yechimi mavjud degan xulosaga kelamiz.

Chiziqsiz programmalashtirish masalasining

gradiyent usuli

Gradiyent usuli yordamida, har qanday chiziqsiz programmalashtirish masalasini yechish mumkin.

Gradiyent usuli bilan berilgan masalaning yechimini topish jarayoni, iterasion (ketma–ket) jarayon bo'lib, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaning gradiyenti $X^{(k+1)}$ qadamda nol bo'lmaguncha yoki yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ uchun

$$\left| f\left(X^{(k+1)}\right) - f\left(X^{(k)}\right) \right| \le \varepsilon \quad , \qquad (7.13)$$

shart o'rinli bo'lguncha davom ettiriladi. (7.13) ga topilishi kerak bo'ladigan yechimning aniqligini bildiradi.

Gradiyent usuli ikki guruhga bo'linib, ulardan birinchi guruhga kiruvchi Frank-Vulf usuli bilan tanishamiz.

Frank-Vulf usuli va uning tadbiqlari

Maqsad funksiyasi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max$, (7.14)

bo`lgan botiq funksiyaning eng katta qiymatini topish talab etilsin va quyidagi chegaraviy shartlar bajarilsin

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad \left(j = \overline{1, m}\right), \qquad (7.15)$$

cheklashlar

$$x_j \ge 0 \qquad \left(i = \overline{1, n}\right) \quad , \qquad (7.16)$$

Masalaning yechish jarayoni (7.14)-(7.16) masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasida yotuvchi nuqtani aniqlaymiz. Bu nuqta $X^{(k)}$ bo'lsin.

U holda bu nuqtada (7.14) funksiyaning gradiyentini topamiz, ya'ni

$$\nabla f\left(X^{(k)}\right) = \left(\frac{(\partial f)\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1}; \frac{(\partial f)\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2}; \frac{(\partial f)\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n} \right)$$

va chiziqli funksiyani uzamiz

$$F = \left(\frac{(\partial f)\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1} x_1 + \frac{(\partial f)\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2} x_1 + \ldots + \frac{(\partial f)\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n} \right), \qquad (7.17)$$

tuzilgan funksiyaning (7.15) – (7.16) shartlarni qanoatlantiruvchi eng katta qiymatini topamiz. Bu masalaning yechimi $Z^{(k)}$ nuqta aniqlangan bo'lsin.

U holda keyingi (yangi) berilgan masalaning yechimi uchun $X^{(k+1)}$ ni qabul qilamiz, ya'ni

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k \left(Z^{(k)} - X^{(k)}\right) \quad , \qquad (7.18)$$

bunda $\lambda_k, \left(0 \le \lambda_k \le 1\right)$ oraliqdagi qandaydir son bo'lib, hisoblash qadamini bildiradi. λ_k soni oraliqdan ixtiyoriy olinadi yoki $\frac{df}{d\lambda_k} = 0$ tenglamani yechish orqali topiladi.

Agar yechimda $\lambda_k > 1$ bo'lsa, $\lambda_k = 1$ deb qabul qilinadi. λ_k ning qiymati topilgandan so'ng $X^{(k+1)}$ nuqtaning koordinatalari topiladi, maqsad funksiyaning qiymati topiladi va yangi (keyingi) $X^{(k+2)}$ nuqtaga o'tish yoki o'tmaslikning zaruriyati aniqlanadi. Agar yangi $X^{(k+2)}$ nuqtaga o'tish zaruriyati tug'ilsa, $X^{(k+1)}$ nuqtada maqsad funksiyaning gradiyenti hisoblanib, unga mos chiziqli programmalashtirish masalasiga o'tib yechim topiladi.

$X^{(k+2)}$ nuqtaning koordinatalari topilgandan so'ng, keyingi hisoblash jarayoni amalga oshiriladi. Oxirgi qadamda zarur bo'lgan aniqlikdagi berilgan masalaning yechimiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib (7.14) – (7.16) masalaning Frank – Vulf usuli bilan yechish jarayoni quyidagi bosqich ishlarini bajarish orqali amalga oshiriladi.

1. Masalaning mumkin bo'lgan dastlabki yechimi topiladi.
2. (7.14) funksiyaning gradiyenti topilib, bu nuqtada mumkin bo'lgan yechim aniqlanadi.
3. (7.15) – (7.6) shartni qanoatlantiruvchi (7.17) funksiya tuzilib, uning qiymati topiladi.
4. Hisoblash qadami aniqlanadi.
5. (7.7) formula bo'yicha yangi (keyingi qadamdagi) mumkin bo'lgan yechimning komponentalari topiladi.
6. Keyingi qadamdagi yechimga o'tish yoki o'tmaslik zaruriyati tekshiriladi. Agar zaruriyat bo'lsa, keyingi bosqichga o'tiladi, aks holda topilgan yechim optimal yechim bo'ladi.

7.4-masala. Frank – Vulf usuli bilan

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

funksiyaning eng katta qiymatini toping va bunda ushbu shartlar bajarilsin

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

Yechish : Funksiyaning gradiyentini topamiz.

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1};\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_2}\right)=\left(2-2x_1;\,4-4x_2\right)$$

Mumkin bo'lgan yechim sifatida $X^{(0)}=(0;0)$ nuqtani olamiz. Baholash kriteriyasi sifatida, optimal yechim uchun $\left|\, f\left(x^{(k+1)}\right)-f\left(x^{(k)}\right)<\varepsilon \right|$, bunda $\varepsilon=0{,}01$ tengsizlikni qabul qilamiz.

1-qadam. $X^{(0)}$ nuqtada gradiyent $\nabla f\left(x^{(0)}\right)=(2;4)$ ga teng.

$F_1=2x_1+4x_2$

funksiyaning maksimumini topamiz va bunda quyidagi shartlar bajarilsin.

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 8 \\ 2x_1-x_2\le 12 \end{cases}$$

$$x_1,\,x_2\ge 0$$

(masalaning optimal yechimi $Z^{(0)}=(0,0)$ ga teng. Berilgan masalaning yangi: mumkin bo'lgan yechimini quyidagi formula orqali topamiz.

$X^{(1)}=X^{(0)}+\lambda_1\left(Z^{(0)}-X^{(0)}\right)$ bunda $0\le\lambda_1\le 1$. (7.19)

$X^{(0)}$ va $Z^{(0)}$ larni (7.19) ga qo'ysak

$$\begin{cases} x_{10}^{(1)}=0+0\cdot\lambda_{10}. \\ x_{20}^{(1)}=0+4\cdot\lambda_{20} \end{cases} \qquad (7.20)$$

ni hosil qilamiz. λ_1 - ni qiymatini topamiz.

(7.20) dagi x_1 va x_2 lar o'rniga ($f=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2$ munosabatning mos qiymatlarini quyib

$$f\left(\lambda_1\right)=16\lambda_1-32\lambda_1^2$$

ni hosil qilamiz. Bundan λ_1 bo'yicha hosila olib, uni nolga tenglashtirib,

$$f^{1\prime}\left(\lambda_1\right)=16-64\lambda=0$$

bundan $\lambda_1=\frac{1}{4}=0{,}25$ ni aniqlaymiz. λ_1 ning qiymati $0\le\lambda\le 1$ oraliqda bo'lganligi uchun keyingi qadamga o'tish miqdorini bildiradi.

Shunday qilib,

$$X^{(1)}=(0;1),\quad f\left(x^{(1)}\right)=2\,;\quad \left|\,f\left(x^{(1)}\right)-f\left(x^{(0)}\right)\right|=2>\varepsilon=0{,}01$$

2 – qadam.

$x^{(1)}$ nuqtadagi funksiyaning gradiyenti

$$\nabla f\left(x^{(1)}\right)=(2\,;0)$$

Funksiyaning maksimumini topamiz, ya'ni

$F_2 = 2X_1$

va ushbu shart

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$$

o'rinli bo'lsin.

Yechim $Z^{(1)} = (6{,}4;\ 0{,}8)$ iborat bo'ladi. Endi $x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_2\left(Z^{(1)} - x^{(1)}\right)$ aniqlaymiz va

$$\begin{cases} x_1^2 = 6{,}4\,\lambda_2, \\ x_2^2 = 1 - 0{,}2\,\lambda_2 \end{cases} \qquad (7.21)$$

ni hosil qilamiz.

$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$ dagi x_1 va x_2 lar o'rniga (7.21) ning mos qiymatlarini qo'ysak,

$f(\lambda_2) = 2 + 12{,}8\,\lambda_2 - 41{,}76\lambda_2^2$

ega bo'lamiz. Bundan $f'(\lambda_2) = 12{,}8 - 83{,}52\lambda_2$ bo'lib, uni nolga tenglashtirsak $f'(\lambda_2) = 0$, bundan $\lambda_2 \approx 0{,}15$, shunday qilib,

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0{,}96 \\ x_2^{(2)} = 0{,}97 \end{cases}$$

$$X^{(2)} = (0{,}96;\ 0{,}97),\ f\,x^{(2)} = 2{,}9966,\ \left|f\left(x^{(2)}\right) - f\left(x^{(1)}\right)\right| =$$

$$= |2{,}9966 - 2| = 0{,}9966 > \varepsilon = 0{,}01$$

3-qadam.

f funksiyaning gradiyentini $X^{(2)}$ nuqtada $\nabla f\left(x^{(2)}\right) = (0{,}08;\ 0{,}12)$. $F_3 = 0{,}08x_1 + 0{,}12x_2$ funksiyaning maksimumini topamiz va bunda (10), (11) shartlar bajarilsin.

$X^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_3\left(Z^{(2)} - x^{(2)}\right)$ ni topamiz va quyidagilarga ega bo'lamiz

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0{,}96 + \lambda_3(6 - 0{,}96) = 0{,}96 + 5{,}04\lambda_3, \\ x_2^{(3)} = 0{,}97 + \lambda_3(0 - 0{,}97) = 0{,}97 - 0{,}97\lambda_3 \end{cases}$$

$$f(3) = 2{,}9384 + 0{,}4032\lambda_3 - 27{,}3416\lambda_3^2$$

$$f'(3) = 0{,}4032 - 54{,}6832\lambda_3$$

$f'(\lambda_3) = 0$ tenglamani yechib, $\lambda_3 \approx 0{,}007$ ni topamiz.

Bulardan $x^{(3)} = (0{,}99528;\ 0{,}96321)$, $f\left(x^{(3)}\right) = 2{,}99957$,

$X^{(3)} = (0{,}99528;\ 0{,}96321)$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $X^{(3)} = (0{,}99528; 96321)$ berilgan masalaning izlangan yechimini bildiradi.

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

7.1-masala._Frank – Vulf usuli bilan

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

funksiyaning eng katta qiymatini toping va bunda ushbu shartlar bajarilsin

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

7.2-masala._Frank – Vulf usuli bilan

$$f = 5x_1 - 4x_2 - 2x_1^2 + x_2^2$$

funksiyaning eng katta qiymatini toping va bunda ushbu shartlar bajarilsin

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

7.3-masala._Frank – Vulf usuli bilan

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

funksiyaning eng katta qiymatini toping va bunda ushbu shartlar bajarilsin

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 24 \\ x_1 - x_2 \le 36 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

7.4-masala._Frank – Vulf usuli bilan

$$f = 4x_1 - 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

funksiyaning eng katta qiymatini toping va bunda ushbu shartlar bajarilsin

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 \le 15 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR

1. Qanday funksiyaga qavariq funksiya deyiladi?
2. Qanday funksiyaga botiq funksiya deyiladi?
3. Qanday masalaga qavariq pragrammalashtirish masalasi deyiladi?
4. Qanday funksiyaga Lagranj funksiyasi deyiladi?

5. Lagranj ko'paytuvchilari deganda nimani tushunasiz?
6. Qanday nuqtaga egar nuqta deyiladi?
7. Kun –Takker teoremasini izohlab bering?
8. Gradiyent usuli yordamida qanday masalalar yechiladi?
9. Frank-Vulf usuli yordamida qanday masalalar yechiladi?

8-BOB. FOIZLAR

8.1. Oddiiy, murakkab va uzluksiz foizlarda jamg`arish

Omonat – bu pul mablag`larini bankka ma`lum bir muddatga foizlarga yoki foizsiz joylashtirish.

O`zbekistonda omonatlarning eng keng tarqalgan turlari quyidagilardir:

- **talab qilib olinguncha omonatlar**. Ularda pul mablag`lari uchun qat`iy bir cheklangan muddat mavjud emas va omonatchi istalgan vaqtda o`z mablag`larini olishi mumkin. Amaliyotda, talab qilib olinguncha omonatlarning foiz stavkalari boshqa omonat turlarining foiz stavkalariga qaraganda pastroq yoki bo`lmasa foizsiz bo`ladi;
- **muddatli omonat** (ma`lum bir muddat uchun omonatlar - 3, 6, 9 oylik, yillik yoki undan ko`p). Bunday holda, omonat summasi bank va Siz o`rtangizda tuzilgan shartnomada ko`rsatilgan muddat tugagandan so`ng qaytariladi. Hisoblangan foizlar omonat muddati davrida (har oyda, har chorakda va h.k.) yoki muddat tugagandan so`ng ham to`lanishi mumkin;
- **jamg`arma omonatlar** – ushbu omonat turining o`ziga xos tomoni pul mablag`larini ma`lum maqsad uchun (o`qish, mashina, kvartira sotib olish va h.k.) to`plash va sarflashdir. Omonat ma`lum bir muddatga (odatda uzoq muddatga) qo`yiladi va uni to`ldirish imkoniyati mavjud bo`ladi, bu esa hamma omonat turlarida ham mavjud emas.

Moliyaviy aktiv sifatida omonatning afzalligi nimada?

**Muddatli va jamg`arma omonatlar** – nafaqat tejash, balki jamg`armalarni ko`paytirishning ishonchli usulidir. Siz bankka ma`lum miqdordagi pulni topshirasiz, bank esa sizga mablag`lar saqlangan muddati uchun foizlar to`laydi. Masalan, agar yillik 14% inflyatsiya darajasi holatida mablag`laringizni yillik 18% stavkasida bank omonatiga qo`ysangiz, Siz o`z pul mablag`laringizni nafaqat inflyatsiyadan himoyalaysiz, balki 4% daromad olasiz. Yana bir muhim omil - bu omonatlarning davlat kafolati ostida himoyalanishi.

Foiz hisoblashning qaysi usuli foydaliroq?

Foiz stavkalarning quyidagi turlari mavjud:

Oddiy foizlar – bu omonat miqdoriga asoslangan foizlar.

Faraz qilaylik, I pul mablag`i i foiz stavkasi bilan T muddatga investitsiya qilingan bo`lsin. Demak, investor berilgan muddat oxirida o`zining P miqdoridagi mablag`ini va asosiy mablag`ning i foiz stavkasi bo`yicha olingan foizlaridan keladigan foydani oladi. Oddiy foizlar ushbu formula yordamida hisoblanadi:

$$I = P \cdot i \cdot T \text{ ,(8.1)}$$

bunda I-oddiy foizlar, P-asosiy investitsiya mablag`i, i-berilgan muddatdagi i-foiz stavkasi, T-foiz stavkasiga mos muddat.

8.1- miasala. 60 mln. so`m olti oyga kreditga ushbu stavkada berilgan: a) oyiga 12%; b) yiliga 24%. Shu pulga nisbatan muddat oxirida oddiy foizlar topilsin.

Yechish. a) $I = 60 \cdot 0{,}12 = 7{,}2$ mln. so`m; b) $I = 60 \cdot 0{,}24 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}2$ mln. so`m.

Agar (8.1) formulada yillik i foiz stavkasini ifodalasa, T davr yillarda ko`rsatilishi kerak.

Agar P- asosiy mablag` (bank omonati, kredit va boshqalar), I-muddat oxirida bu mablag`ga investitsiya qilingan foizlar bo`lsa, u holda,

$S = P + I$, (8.2)

dastlabki P mablag`ning jamg`arilgan qiymati deb yuritiladi.

$S = P \cdot (1 + i \cdot T)$, (8.3)

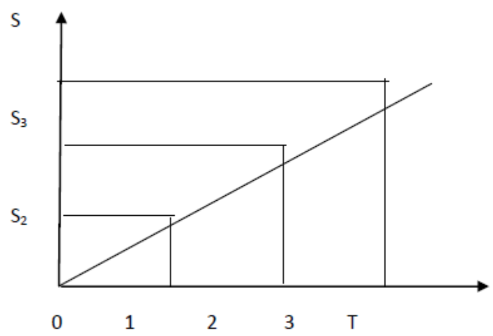
formula esa oddiy foiz formulasi deyiladi.

$\alpha(T) = 1 + i \cdot T$,(8.4)

kattalik esa o`sish koeffitsiyenti yoki ko`paytuvchi deb nomlanadi. (1.1.3) va (8.4) dan

$S = P \cdot \alpha(T)$, (8.5)

(8.3) yoki (8.5) formuladan ko`rinib turibdiki, jamg`arilgan mablag` S ning qiymati T davrga bog`liq, ya`ni vaqtning funksiyasidir. Bu funksiya chiziqli funksiya bo`lib, uning grafigi 8.1-chizmada tasvirlangan.



8.1-chizma.

8.1) - (8.3) formulalar oddiy foizlarning asosiy tenglamalari deb yuritiladi. Ular beshta P,S,I,I,T kattaliklar bilan bog`langan. Birinchi uchta kattalikdan boshqa barcha uchta kattalikning berilishi boshqa kattaliklarni bir qiymatli aniqlaydi. Ularning har biri (8.1) – (8.3) tenglamalarni yechish bilan amalga oshiriladi.

8.2-masala. Ssuda uchun uch oyga berilgan 100 mln. so`mning foizi 12 mln. so`mni tashkil etsa, yillik foiz stavkasi qanday?

Yechish: I=12 mln so`m, P=200 mln. so`m, $T = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, (8.1) tenglamadan

$$i = \frac{I}{P \cdot T} = \frac{12}{200 \cdot \frac{1}{4}} = 0{,}14 \quad .$$

8.3-masala. Har bir yarim yilda bank yiliga 5% li omonat bo`yicha 1 mln. so`m to`laydi. Bankka qo`yilgan pul miqdori qancha?

Yechish. I=1 mln. so`m, i=0,05, T=1/2 , (8.1) tenglamadan

$P = \frac{I}{i \cdot T} = \frac{1}{0{,}05 \cdot \frac{1}{2}} = 40$ mln.so`m. Demak, P=40 mln. so`m.

8.4-masala. Bankka qo`yilgan 250 million so`m pul uchun 20% dan to`lansa, uning miqdori 600 million uchun necha yil kerak bo`ladi?

Yechish: $S = P \cdot (1 + i \cdot T)$ formuladan)

$$T = \frac{S - P}{P \cdot i} = \frac{600 - 250}{250 \cdot 0{,}2} = 7 \text{ yil.}$$

Aniq va oddiy foizlar

Biz yuqorida ko`rgan barcha misollarda investirlash muddati yillarda, oylarda va h.k. ifodalandi. Bu muddatlar birinchi va oxirgi kunlarning kalendardagi sanalari orqali berilishi mumkin. Bunday holda (8.1) oddiy foiz formulasidan foydalanish uchun muddat sifatida ssudalar kunining sonini yildagi kunlar soniga nisbatini olish lozim, ya`ni

$T = \frac{D}{Y}$, *T-muddat yildagi; D-soni kunining ssudalar; Y-soni kunlar yildagi.*

Bunga asoslangan holda hisoblashlarning turli variantlari mavjud. Yildagi kunlar soni *Y =360* deb olinsa, bunday holda oddiy foizlar, agar 365 deb olinsa, u holda aniq foizlar deb yuritiladi, ya`ni

$T_{oddiy} = \frac{D}{360}$, $T_{aniq} = \frac{D}{365}$, $\frac{D}{36} > \frac{D}{365}$. Ya`ni, $T_{oddiy} > T_{aniq}$.

Bundan tashqari investirlash muddati uchun kunlar sonini aniqlashning yana ikkita usuli mavjud. Ko`rsatilgan muddatda aniq kunlar sonini hisoblash keng tarqalgan bo`lib, yildagi har bir kunning tartib nomerini berilgan (Ilova 1) jadval yordamida hisoblash mumkin. Kabisa yili uchun har bir kun nomeriga 29 fevraldan so`ng 1 qo`shiladi. d_1 va d_2 sanalarga mos yildagi kunlar nomerini $N(d_1)$ va $N(d_2)$ hamda ikkita sanalar orasidagi kunlar soni

$D = N(d_2) - N(d_1)$ (oddiy yil uchun)

$D = N(d_2) - N(d_1) + 1$ (kabisa yili uchun, agar 29 fevral sanalar orasiga tushsa) formulalar yordamida hisoblanadi.

8.5-masala. 15 fevral va 9 aprel orasidagi aniq kunlar soni topilsin (oddiy yil uchun).

Yechish: (Ilova.1) jadvaldan 13 fevralga 46-kun, 9 aprelga 99-mos keladi. U holda, bu sanalar orasidagi kunlar soni

99 – 46 = 53 kun.

Bundan tashqari sanalar orasidagi kunlar sonining taqribiy qiymatini aniqlash usuli ham mavjud. Bunda har bir oy 30 kun deb hisoblanadi.

Demak, aniq va oddiy foizlarni hamda investirlash muddati uchun aniq va taqribiy kunlar sonini hisobga olib, oddiy foizlarni hisoblashning quyidagi to`rtta usulini hosil qilamiz:

1. Aniq kunlar sonidagi oddiy foizlar.
2. Aniq kunlar sonidagi aniq foizlar.
3. Taqribiy kunlar sonidagi oddiy foizlar.
4. Taqribiy kunlar sonidagi aniq foizlar.

Birinchi usul bank faoliyatida eng ko`p qo`llaniladi, ikkinchi va uchinchi usullar undan kamroq qo`llaniladi, to`rtinchi usuldan deyarli foydalanilmaydi.

Joriy qiymat

Investitsiya qiymati va foiz stavkasi ni bilgan holda vaqtning ixtiyoriy momentida jamg`arilgan summaning qiymatini oddiy foiz bo`yicha

$$S = P \cdot (1 + i \cdot T)$$

formula yordamida hisoblash mumkin. Ayrim hollarda bunga teskari bo`lgan masalani hal qilishga to`g`ri keladi. *T* muddatdan so`ng *S* jamg`armaning qiymatiga ko`ra, *i* foiz stavkasi bo`yicha ni ushbu formuladan topamiz:

$$P = \frac{S}{1 + i \cdot T} \text{ yoki } S = \frac{P}{1 + i \cdot T}.$$

P ning qiymati *S* summaning joriy qiymati deb yuritiladi. Joriy qiymatni hisoblash jarayoni berilgan foiz stavkasi bo`yicha diskontirlash deyiladi:

$$v = \frac{1}{1 + i \cdot T}.$$

bu tenglik *T* muddat uchun oddiy foiz stavkasi *i* bo„yicha diskont ko„paytuvchisi deyiladi. (8.2) va (8.4) dan

$$P = S \cdot v$$

formulani yozishimiz mumkin.

8.6-masala. Investor 600 mln. so`mni jamg`arish uchun 15% li yillik oddiy foiz stavkasi bo`yicha qanday miqdordagi pulni a) bir yilga; b) ikki yilga; v) to`rt yilga qo`yish kerak.

Yechish: *S=600mln. so`m, T=1 yil, i=15 %.*

a) $P = \frac{6}{1 + 1 \cdot 0{,}15} = 5{,}2174$ *mln. so`m,*

b) $P = \frac{6}{1 + 2 \cdot 0{,}15} = 4{,}6154$ *mln. so`m,*

v) $P = \frac{6}{1 + 4 \cdot 0{,}15} = 3{,}75$ *mln.so`m,.*

Joriy qiymat vaqtning boshlang`ich momentida hisoblanganligi uchun, go`yo u vaqtga bog`liq emasdek tuyuladi.

$$P = \frac{S}{1 + i \cdot T}$$

formuladan *P* ning *T* ga bog`liq ekanligi ko`rinib turibdi. Darhaqiqat, joriy qiymat vaqtga bog`liq bo`lgan *S* jamg`arma, ya`ni $S \equiv S(T)$ uchun hisoblanadi. Yuqoridagi formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$P(T) = \frac{S(T)}{1 + i \cdot T}$$

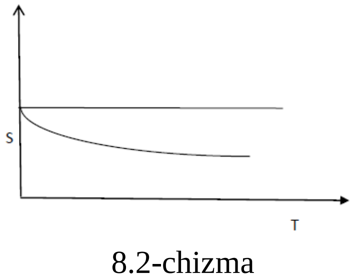
Agar *S*(*T*)= 1, ya`ni vaqtning ixtiyoriy qiymatida birlik jamg`armadan iborat bo`lsa, u holda joriy qiymat diskont ko`paytuvchi bilan bir xil bo`ladi.

$$v(T) = \frac{1}{1 + i \cdot T} = P(T)$$

Vaqtning ixtiyoriy momentidagi joriy qiymat va jamg`arma orasidagi bog`lanishni quyidagicha yozish mumkin:

$$P(T) = S(T) \cdot v(T)$$

S jamg`armaning fiksirlangan qiymatida joriy qiymat *T* ning o`sishi bilan kamayadi. Haqiqatan, investitsiya muddati ortsa, zarur bo`lgan jamg`armani yig`ish uchun mablag` (kapital) kamayadi. *P* = *P*(*T*) ning grafigi chizmada ko`rsatilgan.



8.2-chizma

Joriy qiymat (joriy narx) moliyaviy muammolarni tahlil qilishda muhim o`rin egallaydi. Bunday muammolar, masalan, naqd pul bilan to`lash kerakmi yoki kredit olish kerakmi? – degan muqobillar orasida vujudga keladi

8.7-masala. Investor 500 mln. pul birligidagi naqd pulga yoki bir yildan so`ng 500 mln. 400 ming p.b.ga kvartira sotib olishi mumkin. Agar investor hisobida bankda 5 mln. p.b.dan kam bo`lmagan pul bo`lsa va bank yiliga 7% to`lasa, u holda qaysi muqobil afzal bo`ladi?

Yechish. 5 mln. so`m va 500 mln. 400 ming so`mlar vaqtning turli momentlariga bog`liq bo`lganligi uchun ularni biz taqqoslay olmaymiz. Ammo yil oxirida 5 mln. 400 ming p.b. so`mni olish uchun yil boshida bankka

$$P = \frac{500400000}{1{,}07} = 467663551$$

p.b. qo`yish kerak.

Shunday qilib, joriy qiymat naqd to`lanadigan qiymatdan kichik, ya`ni 467663551<500000000. Bu holatni amalga oshirsa yaxshi bo`ladi.

Agar berilgan muddat ichida operatsiyalar oddiy foiz bo`yicha bir necha marta o`zgaruvchi stavkalar bilan amalga oshirilsa, u holda jamg`arilgan umumiy mablag`

$$S = P \cdot (1 + T_1 \cdot i_1) \cdot (1 + T_2 \cdot i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + T_i \cdot i_i)$$

formula bo`yicha hisoblanadi, bu yerda i_i -“stavkalar”, T_i -ssuda muddatlari ($T_i = \frac{D_i}{Y}$, D_i - ssuda kunlarining soni, Y=360 yoki Y=365).

Agar ustama foizning muddatlari va vaqt bo`yicha foiz stavkalar o`zgarmasa, u holda $S = P \cdot (1 + T \cdot i)^m$ bu yerda m- pul tushimining takrorlanishlar soni.

Diskont va hisob stavkasi

Turli moliyaviy operaysiyalarda qimmatbaho qog`oz kursini tovar narxidan chiqarib tashlashdan hosil bo`lgan pul miqdori diskont deyiladi.

Aytaylik, 100 ming so`mlik vekselni 5 oy muddatga olgan shaxs, pul zarurligidan vekselni sotib olgandan 2 oy o`tgach bankka qaytarib sotdi. Endi bank bu shaxsga 100 ming so`m emas, to`lov muddatini hisobga olgan holda, masalan, 94 ming so`m to`laydi. Bunday holda diskont qiymati 100-94=6 ming so`m yoki veksel narxining 6%ini tashkil etadi. Ya`ni bankning hisob stavkasi 3 oy uchun 6%ni tashkil etadi deb aytamiz.

Umumiy holda berilgan muddat uchun hisob stavkasi deb, vekselni to`liq narxi va uni sotib olish narxi ayirmasining, ya`ni diskontni uning *S* to`la narxiga nisbatiga aytiladi.

$$d = \frac{D}{S} = \frac{S - P}{S}, \quad (8.5)$$

Bunda *S*- to`lov uchun berilgan qarz miqdori; *P*-sotib olish narxi; *d*- diskont kattaligi.

Ma`lumki, diskont va hisob stavkasi hamda sotib olish narxining qiymatlari berilgan qarz muddatining uzunligiga bog`liq bo`lganligi uchun (8.5) formulani qat`iy holda

$$d_1 = \frac{D_1}{S} = \frac{S - P_1}{S}, (8.6)$$

ko`rinishda yozish mumkin. Bu formuladan

$$D_1 = S \cdot D_1, (8.7)$$

$$P_1 = S \cdot (1 - d_1), \quad (8.8)$$

formulalarni hosil qilamiz.

Banklar odatda, ya`ni ma`lum fiksirlangan muddatda, hisob stavkasini qoidaga ko`ra bir yilga ko`rsatishadi. Bunday hisob stavkasi yillik hisob stavkasi deyiladi.

Ma`lum muddat uchun hisob stavkasi va yillik stavka orasidagi bog`lanish ushbu formuladan topiladi.

$$d_t = d \cdot t, (8.9)$$

bunda *d*-yillik hisob stavkasi; *t*- to`lovgacha qolgan yillardagi muddat. Shunday qilib, yuqoridagi formulalar quyidagi ko`rinishni oladi:

$$D_t = S \cdot d \cdot t \quad (8.10)$$

$$P_t = S \cdot (1 - d \cdot t) \quad (8.11))$$

(8.9-8.11) formulalar yordamida aniqlanadigan hisob stavkasi oddiy va bank diskonti deb yuritiladi. $v_t = (1 - d \cdot t)$ kattalik *t*- muddat uchun hisob stavkasi bo`yicha d-diskont ko`paytuvchisi deyiladi.

8.9-masala. Agar bankning hisob stavkasi to`lovgacha qolgan 4 oy muddat uchun veksel narxining 15% ini tashkil etsa, yillik hisob stavkasi va to`lovgacha bo`lgan oy uchun vekselning narxini toping. Vekselning belgilangan muddat uchun narxi 1 million so`m.

Yechish: (8.9) formuladan

$d = \frac{d_1}{3} = \frac{15}{\frac{1}{3}} = 45\%$ bu yerda *t=4 oy* yoki t=1/3.

Vekselning narxi $P = S \cdot (1 - d \cdot t) = 1000000 \cdot \left(1 - \frac{45}{100} \cdot \frac{1}{3}\right) = 850$ ming so`m.

8.10-masala. Veksel 2023 yil 10 yanvarda chiqarilgan bo`lib, to`lov muddati 2023 yil 10 oktyabrgacha. Veksel bo`yicha yillik kirim 12%. Agar veksel 2023 yil 10 mayda 10% hisob stavkasi bo`yicha hisobga olingan bo`lsa, u holda vekselni sotib olish narxi qancha? To`lovgacha bo`lgan muddat uchun vekselning hisob narxi 100 ming so`m.

Yechish: 2023 yil 10 yanvardan 10 oktyabrgacha aniq kunlar soni (Ilova 1) jadval bo`yicha kun. To`lov muddatining yillardagi uzunligi yil $T = \frac{273}{360} = 0{,}75$. U holda vekselning umumiy narxi 283-10=273 ming so`m.

Agar veksel 10 maydan hisobga olinsa, u holda to`lovgacha bo`lgan muddat yoki 283-130=153 kun bo`ladi yoki $t = \frac{153}{360} = 0{,}42$.

Bunday holda *d=10%* hisob stavkasi bo`yicha vekselning yillik hisob narxi $P = S \cdot (1 - d \cdot T) = 109 \cdot (1 - 0{,}1 \cdot 0{,}42) = 104{,}422$ ming so`m.

Misol uchun, Siz 2 yillik muddatga ***yillik 18%*** *stavkasida oddiy foizlarda hisoblash sharti bilan 1 mln. so`m miqdorda omonat ochdingiz:*

- *Bir yildan so`ng Sizda 1 180 000 so`m pul bo`ladi*
- *Omonat muddati tugaganda jami mablag` 1 360 000 so`mni tashkil etadi, ya`ni foizlar faqat 1 mln. so`m uchun hisoblanadi.*

Omonat bo`yicha foizlar (daromad) quyidagi formula asosida hisoblanadi:

(omonat summasi / 100%) * foiz stavkasi * omonat muddati (oylar soni) /12.

Hisoblashni amalga oshiramiz:

$(1000000 so`m / 100) \cdot 18 \cdot (24/12) = 360000$ so`m

Murakkab foiz stavkasi (kapitalizatsiya)

Foizlarni **kapitalizatsiya** qilish belgilangan davrlarda (oylik, choraklik, yillik) `hisoblangan foizlarni omonatning asosiy summasiga qo`shish demakdir.

Misol uchun, Siz 2 yillik muddatga yillik 18% stavkasida murakkab foizlarda (yillik kapitalizatsiya) hisoblash sharti bilan 1 mln. so`m miqdorda omonat ochdingiz:

- Bir yildan so`ng Sizda 1 180 000 so`m pul bo`ladi

- Ikkinchi yil tugashi bilan Siz 1 392 400 so`mni olasiz, chunki ikkinchi yilda 18% boshlang`ich 1 mln. so`m uchun emas, balki 1 180 000 so`mga nisbatan qo`llaniladi

Omonat bo`yicha foizlar (daromad) quyidagi formula asosida hisoblanadi:

Omonat summasi * (1+ omonat bo`yicha foiz stavkasi/100%) Omonat muddati (oylar soni)/12 - omonat miqdori**.**

Hisoblash: $1000000 so`m \cdot \left(1+\frac{18\%}{100\%}\right)\cdot\frac{24}{12}-1000000=392400 so`m$.

Har bir inson maishiy texnika yoki mebel sotib olish uchun pul etishmasligi muammosiga duch keldi. Ko`pchilik ish kunigacha qarz olishga majbur. Ba`zilar moliyaviy muammolari bilan do`stlari yoki qarindoshlariga bormaslikni afzal ko`radilar, lekin darhol bankka murojaat qilishadi. Bundan tashqari, qimmatbaho tovarlarni sotib olish masalasini hal qilishga imkon beruvchi juda ko`p miqdordagi kredit dasturlari taklif etiladi qulay sharoitlar.

Bu tizim iqtisodiy munosabatlar, bu qimmatbaho narsalarni bir mulkdordan boshqasiga vaqtincha foydalanish uchun maxsus shartlarda berishni nazarda tutadi. Banklarga kelsak, bu qiymat puldir. Insonga ma`lum miqdor kerak, iqtisodchi mijozning to`lov qobiliyatini baholaydi va qaror qabul qiladi. Agar hamma narsa yaxshi bo`lsa, taqdim etiladi zarur mablag`lar ustida ma`lum davr. Buning uchun mijoz bankka foiz to`laydi.

Tovar sotib olish uchun naqd pul kerakmi? Kredit olishga arziydi. Past foiz har doim mijozlarni jalb qiladi. Shuning uchun, mashhur moliya institutlari ta`minlaydi kredit kartalari va imtiyozli shartlarda naqd pul kreditlari. Va kredit formulasi) sizga bank xizmat uchun qancha to`lashi kerakligini aniqlashga yordam beradi.

Ortiqcha to`lov

Bank kreditida pul tovar hisoblanadi. Xizmatlarni ko`rsatish uchun mijoz moliya muassasasiga to`lov to`lashi kerak. Ortiqcha to`lov miqdori qanday hisoblanganligini tushunish uchun quyidagi tushunchalarni tushunishga arziydi:

- kreditning asosiy qismi;
- komissiya;
- yillik stavka foizi.

Komissiya

Mijozning bankka bundan ortiq bergan foizi komissiya hisoblanadi. Turli xil moliyaviy institutlar turli xil kredit shartlarini taklif qilishi mumkin. Komissiya qarzning asosiy qismidan ham, mijozning dastlab qarzga olgan summasidan ham undirilishi mumkin. Yaqin vaqtlar Ko`pgina banklar komissiyadan butunlay voz kechadilar va faqat yillik foiz stavkasini belgilaydilar.

0,5% belgilangan to`lov bilan misolni ko`rib chiqing. Mijoz 10 000 so`m miqdorida kredit oldi. Bunday holda, oylik komissiya bo`ladi Formula (kredit bo`yicha foizlarni hisoblash) quyidagicha ko`rinadi: 10 000: 100 X 0,5.

Agar komissiya belgilanmagan bo`lsa, u qarzning balansiga (qarz organi) undiriladi. Ushbu variant mijoz uchun foydaliroqdir, chunki foizlar miqdori doimiy ravishda kamayib boradi. Qoida tariqasida, komissiya oyning oxirgi ish kunidagi qarz qoldig`i bo`yicha undiriladi. Ya`ni, agar mijoz to`liq summani 28-kuni to`lagan bo`lsa va oxirgi ish kuni 30-kunga to`g`ri kelsa, siz komissiya to`lamaysiz.

Yillik foiz stavkasi

Agar kredit shartnomasi bo`yicha komissiya bo`lmasa, yillik stavka ortiqcha to`lovni hisoblash uchun asos bo`ladi. Foizlar har doim qarzning qoldig`i bo`yicha hisoblanadi. Mijoz kreditni qanchalik tez to`lasa, shunchalik kam ortiqcha to`lash kerak bo`ladi.

Kredit qancha foiz beradi? Turli banklar o`z shartlarini taklif qilishadi. 12% dan 25% gacha bo`lgan stavkada pul qarz olish mumkin. Keyinchalik, kredit bo`yicha foizlarni hisoblash (formula) qanday amalga oshirilganligi tasvirlanadi. Misol: mijoz 10 000 so`m miqdorida kredit oldi. Shartnoma bo`yicha yillik stavka 15% ni tashkil qiladi. Kun davomida mijoz 0,041% (15: 365) ortiqcha to`laydi. Shunday qilib, birinchi oyda siz 123 so`m miqdorida foizlar miqdorini to`lashingiz kerak bo`ladi.

10 000: 100 x 0,041 = 4 so`m 10 kopek - kuniga ortiqcha to`lov miqdori.

4,1 x 30 = 123 so`m / oy (bir oyda 30 kun bor deb hisoblasak).

Keling, batafsil ko`rib chiqaylik. Mijoz 500 so`m miqdorida birinchi to`lovni amalga oshirdi. Shartnoma uchun to`lov yo`q. 123 so`m foizga tushadi, 377 so`m - tanani to`lash. Qarzning qoldig`i 9623 so`mni tashkil qiladi (10 000 - 377). Bu kelajakda foizlar undiriladigan kreditning asosiy qismidir.

Kredit bo`yicha ortiqcha to`lovni qanday tezda hisoblash mumkin?

Uzoqda bo`lgan odamga moliyaviy soha har qanday hisob-kitoblarni amalga oshirish qiyin. Ko`pgina banklar mijozlar uchun kredit kalkulyatorini taklif qilishadi, bu esa shartnoma bo`yicha ortiqcha to`lovni tezda hisoblash imkonini beradi. Buning uchun muassasa veb-saytiga qarz miqdori, taxminiy to`lov muddati va yillik foiz stavkasini kiritish kifoya. Bir necha soniya ichida siz ortiqcha to`lov miqdorini bilib olishingiz mumkin bo`ladi.

Kredit kalkulyatori - bu kutilayotgan ortiqcha to`lov miqdorini taxminiy hisoblash imkonini beruvchi yordamchi vositadir. Ma`lumotlar aniq emas. Ortiqcha to`lov miqdori mijoz qo`yadigan mablag`lar miqdoriga, shuningdek, kreditni to`lash muddatiga bog`liq.

Kreditni qaytarish tizimlari qanday?

Kreditni to`lashning ikkita varianti mavjud. Klassik kredit tanasining ma`lum bir qismini va foiz stavkasini to`lashni nazarda tutadi. Misol: mijoz bir yilga 5000 so`m miqdorida kredit olishga qaror qildi. Shartlarga ko`ra, yillik stavka 15% ni tashkil qiladi. Oyiga siz 417 so`m (5000: 12) miqdorida kreditni to`lashingiz kerak bo`ladi. Formula (qarz bo`yicha foizlarni hisoblash) quyidagicha ko`rinadi:

5000: 100 x 0,041 = 2 so`m 05 tiyin - kuniga ortiqcha to`lov miqdori.

2,05 x 30= 61 so`m 50 tiyin (bir oyda 30 kun bo`lishi sharti bilan) - oyiga ortiqcha to`lov miqdori.

417 + 61,5 = 478 so`m 50 tiyin - majburiy minimal to`lov miqdori.

Klassik to`lov tizimi bilan to`lovlar miqdori har oy kamayadi, chunki qarz qoldig`iga foizlar hisoblanadi.

Annuitet tizimi kredit to`lovlarini teng qismlarda ko`zda tutadi. Dastlab, minimal to`lovning belgilangan miqdori belgilanadi. Qarz to`langanligi sababli, pulning katta qismi kreditning tanasini to`lash uchun ketadi, chunki foizlarni ortiqcha to`lash kamayadi.

Bir misolni ko`rib chiqing. Mijoz 100 000 so`m miqdorida 10 yil muddatga kredit olishga qaror qildi. Yillik stavka 12% ni tashkil qiladi. Kuniga ortiqcha to`lov 0,033% (12:365). Formula (qarz bo`yicha foizlarni hisoblash) quyidagicha ko`rinadi:

100 000: 100 x 0,033 = 33 so`m - kuniga ortiqcha to`lov miqdori.

33 x 30 = 990 so`m - oyiga ortiqcha to`lov miqdori.

Minimal to`lov 2000 so`m miqdorida belgilanishi mumkin. Shu bilan birga, birinchi oyda 1100 so`m qarzning tanasini to`lash uchun ketadi, keyin bu miqdor kamayadi.

Penaltilar

Agar bank mijozi o`z majburiyatlarini bajarmasa obligatsiyalar, moliya muassasasi jarima undirish huquqiga ega. Shartlar shartnomada ko`rsatilishi kerak. Penalti sifatida ifodalanishi mumkin belgilangan miqdor shuningdek, foiz stavkasi shaklida. Agar shartnomaga ko`ra, masalan, 100 so`m miqdorida jarimalar nazarda tutilgan bo`lsa, keyingi minimal to`lov miqdorini hisoblash qiyin bo`lmaydi. Siz shunchaki 100 so`m qo`shishingiz kerak.

Agar foiz stavkasi ko`rinishida jarimalar undirilsa, ishlar yanada murakkablashadi. Qoida tariqasida, hisob-kitob ma`lum bir davr uchun qarz miqdoriga asoslanadi. Misol uchun, mijoz 5-maygacha 500 so`m miqdorida minimal to`lovni amalga oshirishi kerak edi, lekin buni qilmadi.

Shartnomaga ko`ra, jarima qarz miqdorining 5 foizini tashkil qiladi. Keyingi to`lov quyidagicha hisoblanadi:

500: 100 x 5 = 25 so`m - jarima miqdori.

5 iyunga qadar mijoz 1025 so`m (ikki minimal to`lov 500 so`m va 25 so`m jarima).

Omonat yoki pulli depozit - bu pul mablag`ini muayyan muddatga (muddatli) bankka qo`yish. Amalda, bank sizning pullaringizni tijoriy faoliyat uchun «ijaraga oladi» va sizga oldindan belgilangan foizlar ko`rinishida «ijara haqi» to`laydi.

Depozit muddati oxirida foizlar hisoblangan bo`lsa, omonatchi oladigan miqdorni qanday hisoblash mumkin

Yillik depozitlar

Bir kishi 2 yil davomida yillik 9% bilan 5000 so`m uchun omonat ochdi:

yiliga: 5000 so`m - 100% x so`m - 9% x=5000*9/100=450 so`m ikki yil davomida: 1 yil uchun 450 so`m x 2 yil uchun so`m x=450*2/1=900 so`m 5900 so`m omonatchi muddat oxirida oladi * 100 nima? "Foiz sonning yuzdan bir qismidir.

Oylik depozitlar

Bir kishi 3 oy davomida yillik 9% bilan 5000 so`m uchun omonat ochdi:

yiliga: 5000*9/100=450 so`m 90 kun davomida: 450 so`m 365 kun x so`m 90 kun x=450*90/365=110 so`m 96 tiyin 5110 so`m 96 tiyin muddat oxirida omonatchi oladi * 365

8.11-masala. Omonatchi shaxsiy jamg`armalarini 5 yil davomida bankka joylashtirdi. Omonat miqdori 2800 $. Agar bank ushbu omonat bo`yicha oddiy foizlarni hisoblab chiqsa, omonatchi 5 yildan keyin qancha pul olishini aniqlang-oddiy foiz stavkasi yiliga 17%.

Yechish.

Omonatchining 5 yil davomida shaxsiy jamg`armasi $P_i = P \cdot (1 + n \cdot r)$ formula bilan topiladi, bunda $P_i$-kelajakda jamg`aralidan omonat, *P*-omonatci joriy paytda qo`yilgan pul. *n*-oddiy foiz hisoblanadigan yil. *r*- oddiy foiz stavkasi, n-jamg`arma qo`yilgan vaqt.

Hisoblashni amalga oshiramiz:

$$P_5 = 2800 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}17) = 2800 \cdot 1{,}85 = 5180.$$

Javob: 5 yildan so`ng omonatchi jami 5180 $ miqdorida omonat oladi.

8.12-masala. Omonatchi bankka 4 oy davomida 2500$ miqdorida shaxsiy jamg`armalarni joylashtirdi. Agar bank ushbu omonat bo`yicha oddiy foizlarni hisoblab chiqsa, omonatchi 4 oydan keyin qancha pul olishini aniqlang-oddiy foiz stavkasi yiliga 12%.

Yechish.

Omonatchining 5 yil davomida shaxsiy jamg`armasi $P_i = P \cdot (1 + n \cdot \frac{a}{12})$ formula bilan topiladi, bunda $P_i$-kelajakda jamg`aralidan omonat, *P*-omonatci joriy paytda qo`yilgan pul, a-oddiy foiz hisoblangan oy.

Hisoblashni amalga oshiramiz: $P_4 = 2500 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot \frac{4}{12}) = 2500 \cdot 1{,}04 = 2600.$

Javob: 4 oydan keyin omonatchi jami 2600 $ miqdorida omonat oladi.

8.13-masala. Omonatchi shaxsiy jamg`armasini 200 kun davomida bankka 1200 $ miqdorida joylashtirdi. Agar bank ushbu omonat bo`yicha oddiy foizlarni hisoblab chiqsa, oddiy foiz stavkasi yiliga 19% ni tashkil qiladi. Omonatchi 200 kundan keyin qancha pul olishini aniqlang,

Yechish.

Kunlar bo`yicha oddiy hisoblash formulasi: $P_i = P \cdot (1 + r \cdot \frac{t}{12})$, bunda

P_i-i oydan keyin oladiga jamg`arma puli; r- oddiy foiz stavkasi; *P*-omonatci joriy paytda qo`yilgan omonat, t-oy bo`yicha oddiy foiz stavkasi.

Hisoblashni amalga oshiramiz:

$$P_i = 1200 \cdot (1 + 0{,}19 \cdot \frac{200}{12}) = 1326{,}677.$$

Javob: 4 oydan keyin omonatchi jami $1326{,}67$ $ omonat miqdorini oladi.

8.2. Hisob stavkasi va foiz stavkasining ekvivalentligi

Murakkab foizlar

Odatda foyda foizlari asosiy foydagaga qo`shilganda va kelajakda o`zlari yangi foyda yaratishda ishtirok etgsa, murakkab foizlar deb ataladi.

Murakkab foizlarni oddiy hisoblash:

Murakkab foizlarni hisoblashni yaxshiroq o`zlashtirish uchun keling, misolni ko`rib chiqaylik.

Murakkab foizlarni hisoblashni yaxshiroq o`zlashtirish uchun keling, misolni ko`rib chiqaylik.

Tasavvur qiling, siz 10 000 $l qo`ydingiz.yiliga 10 foiz bankda.

Bir yil o`tgach, sizning bank hisob raqamingizda sum miqdori bo`ladi = 10000 + 10000*10% = 11 000 $.

Sizning foydangiz 1000 $l ni tashkil qiladi.

Siz 11000 $l qoldirishga qaror qildingiz. Ikkinchi yil uchun bankda bir xil 10 foiz.

2 yildan keyin bankda to`planadi 11000 + 11000*10% = 12 100 $l.

Birinchi yil uchun foyda (1000 $l) asosiy summaga (10000 $l) qo`shildi va ikkinchi yilda o`zi yangi foyda keltirdi. Keyin 3-yilda 2-yil uchun foyda asosiy qarzga qo`shiladi va o`zi yangi foyda keltiradi. Va hokazo.

Bu ta`sir murakkab foiz deb ataladi.

Barcha foyda asosiy qarzga qo`shilsa va kelajakda o`zi yangi foyda keltirsa.

Murakkab foiz stavkasi bo'yicha summalarni hisoblash shundan iboratki har bir davr uchun foiz pullari to'plangan barcha pullardan olinadi:

Variant 1. Kredit muddati n butun son bo'lsin. Keyin oxirida kredit muddati qarz beruvchi ushbu summani oladi:

$$S = P \cdot (1+i)^n.$$

Variant 2. Kredit muddati t yilning qismi butun son bo'lsin. Keyin oxirida kredit muddati qarz beruvchi ushbu summani oladi:

$$S = P \cdot (1+i)^t.$$

Variant 3. Yillik foiz stavkasi j ga teng bo`lsin va foizni hisoblash yil davomida m marta bo`lsin. Keyin n yil uchun foizlar m * n marta j / m foiz stavkasi bo'yicha hisoblanadi va quyidagi shaklga ega bo'ladi:

$$S = P \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}.$$

Variant 4. Uzluksiz foiz stavkasini hisoblash. $S = P \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}$ formulada m→∞da daraja cheksizlikka intiladi. Uzluksiz foiz stavkasinini hisoblash quyidagi formula bilan topiladi:

$$S = P \cdot e^{in}.$$

Uzluksiz foiz stavkasini diskret foiz stavkasidan farqlash uchun uni o`sish ko`chi deyiladi va δ deb belgilanadi.

$SUM = X \cdot (1+\%)^n$, SUM-oxirgi summa, X-boshlang`ich summa, %- oddiy foiz stavka, yillik foiz stavka/100, davr muddati yil,(oy, kvartal).

$$SUM = 10000 \cdot (1+0{,}10)^2 = 22000.$$

Bank depozitlari uchun murakkab foiz formulasi: % = p * d / y. Aslida, bank depozitlariga nisbatan murakkab foiz formulasi yuqorida tavsiflanganidan biroz murakkabroq. Omonat uchun foiz stavkasi (%) quyidagicha hisoblanadi:

bunda p-depozit bo`yicha foiz stavkasi ( yillik foiz stavkasi/ 100 foiz), masalan, agar stavka 10,5% bo`lsa, u holda p = 10,5 / 100 = 0,105; d-kapitallashuv sodir bo`lgan davr (kunlar soni) (foizlar hisoblab chiqiladi), masalan, agar kapitallashuv oylik bo`lsa, unda d=30 kun agar kapitallashuv har 3 oyda bir marta bo`lsa, u holda d= 90 kun; y-kalendar yilidagi kunlar soni (365 yoki 366).

Ya`ni, siz turli xil hissa davrlari uchun foiz stavkasini hisoblashingiz mumkin.

Bank depozitlari uchun murakkab foiz formulasi quyidagicha:

$$SUM = X * \left(1+\frac{p \cdot d}{y}\right)^n.$$

Murakkab foizlarni hisoblashda vaqt o`tishi bilan pul to`planishi ko`chkiga aylanishini hisobga olish kerak. Bu murakkab foizlarning jozibadorligi. Bundan tashqari, murakkab foiz bilan. Dastlab, murakkab foizlar tomonidan ishlab chiqarilgan o`sish deyarli sezilmaydi. Ammo bir muncha vaqt o`tgach, u o`zini butun shon-shuhratida namoyish etadi.

8.14-masala.

Siz 50 000 $ qo`ydingiz. Yillik Stavka 10%. 5 yildan keyin qancha pul olasiz? Murakkab foiz formulasi bo`yicha hisoblang:

$$\mathrm{SUM} = 50000 * \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 80525{,}5\,\$.$$

Bankda muddatli depozitni ochganingizda murakkab foizlardan foydalanish mumkin. Bank shartnomasi shartlariga ko`ra, foizlar, masalan, har chorakda yoki har oyda hisoblanishi mumkin.

8.15-masala.

Agar siz 10000 $ qo`ygan bo`lsangiz, yakuniy miqdor qancha bo`lishini hisoblaymiz. Oylik foizlar bilan 10% yillik 12 oy davomida.

$$SUM = 1000 \cdot \left(1 + \frac{\frac{10}{100}}{12}\right)^{12} = 11047{,}13$$

Foyda:

Foyda = 11047,13 - 10000 = 1047,13 $.

Daromad (yillik foizlarda):

% = 1047,13 / 10000 = 10,47 %.

Ya`ni, oylik foizlarni hisoblash bilan rentabellik butun davr uchun bir mart foizlarni hisoblashdan ko`proq bo`ladi.

8.16-masala. Ikki yil davomida 20 000 dollarlik kredit taqdim etildi. Yillik 12%. Qarz miqdorini toping:

1) yillik murakkab foizlar bilan;

2) har chorakda murakkab foizlar bilan;

3) kunlik birikma bilan.

Yechish.

1)Yillik murakkab foizlar bilan qarz miqorini hisoblash. Muammoning birinchi qismini hal qilish uchu $S = P \cdot (1+i)^n$ formuladan foydalanamiz:

$$S = 20000 \cdot (1 + 0{,}12)^2 = 20000 \cdot 1{,}12^2 = 25088\$.$$

2) Har chorakda murakkab foizlar bilan qarz miqorini hisoblash.

Muammoning ikkinchi qismini hal qilish uchun $S = P \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$ formulasidan foydalanib kvartal uchun m=4. Hatijada har bir kvartal uchun foiz stavkasi 12% / 4 =3%, hisoblash davrlari soni n·m=2·4=8.

Keyin qarz beruvchiga qaytarilgan summa teng bo'ladi:

$$S = 20000(1 + 0{,}03)^8 = 20000 \cdot 1{,}26677 = 25535{,}4\ \$.$$

3) Kunlik birikma bilan qarz miqorini hisoblash.

Muammoning uchinchi qismini hal qilish uchun avval $S = P \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$ formuladan foydalanamiz. m =365 qiymati bilan foizlar har kuni hisoblanadi. Shuning uchun davr uchun foiz stavkasi (bir kun) kuniga 12% / 365 = 0,000329% va foizlarni hisoblash davrlari soni n·m =2 · 365 = 730.Keyin qarz beruvchiga qaytariladigan summa teng bo'ladi:

$$S = 20000 \cdot (1 + 0{,}00329)^{730} = 25423{,}98\ \$.$$

Endi biz $S = P \cdot e^{in}$ formuladan foydalanib, qarz miqdorini topamiz: n= 2, i= 0,12 da foizlarni hisoblaymiz:

$$S = 20000 \cdot e^{2 \cdot 0{,}12} = 25424{,}98\ \$.$$

Tijorat hisob-kitoblarining kundalik amaliyotida doimiy foizlarni hisoblash ishlatilmaydi (bu talonchilikning bir turi qarz oluvchining, hisob-kitoblarda ikkala tomon ham o'zlarini juda yaxshi bilishadi).

8.3. O`zgaruvchi foizlarda jamg`arish

Kreditlar uchun butun muddat davomida oddiy va murakkab foizlar yig'ilgan miqdor formulalari doimiy foiz stavkasini aniqlaymiz.

Foiz stavkasi k marta o'zgarsin va amal qilgan vaqt oralig'i $t_1, t_2, \ldots, t_k$ belgilanadi (yil ulushlarida), doimiy stavkalar $i_1, i_2, \ldots, i_k$ iborat bo`lsin. Keyin oddiy foizlar sxemasi bo'yicha jamg`arilg`arilgan miqdor quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$S = P \cdot (1 + t_1 \cdot i_1 + t_2 \cdot i_2 + t_3 \cdot i_3 + \ldots + t_k \cdot i_k)\ .$$

Murakkab foiz formulalari ham xuddi shunday aniqlanadi:

$$S = P \cdot (1 + i_1)^{t_1} \cdot (1 + i_2)^{t_2} \cdot (1 + i_3)^{t_3} \cdot \ldots \cdot (1 + i_k)^{t_k}\ .$$

8.17-masala. Omonatchi bankka yillik stavkasi 10% li 4 yilga 20000$ qo'ydi. Shartnomaga ko'ra, bank 3 yildan keyin yillik stavkasini 9% ga o'zgartiradi. Omonatchi oddiy va murakkab foiz hisoblashlariga ko`ra qancha daramad qiladi?

Yechish.

Shartlardan kelib chiqadi: P = 20000 \$, i_1= 10%, t_1= 3 yil, i_2 = 9 %, t_2 = 1 yil.

$$S = P \cdot (1 + t_1 \cdot i_1 + t_2 \cdot i_2 + t_3 \cdot i_3 + ... + t_k \cdot i_k)$$

formulaga binoan biz 4 yildan keyin oddiy foizlar sxemasi uchun

omonat miqdorini olamiz:

$$S = 20\,000 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}09) = 20\,000 \cdot 1{,}2 = 24\,000\,\$.$$

$S = P \cdot (1+i_1)^{t_1} \cdot (1+i_2)^{t_2} \cdot (1+i_3)^{t_3} \cdot ... \cdot (1+i_k)^{t_k}$ formulaga binoan biz sxema uchun 4

yildan keyin omonat miqdorini murakkab foizlarni aniqlaymiz:

$$S = 20000 \cdot (1+0{,}1)^3 \cdot (1+0.09)^1 = 20000 \cdot 1{,}331 \cdot 1{,}09 = 29015{,}8\,\$.$$

Diskontlash usullari

Moliyaviy hisob-kitoblarda hamma vaqt va har qanday sharoitda ham boshlang‘ich va oshgan qiymat chegirma va ustama summalari ma’lum bo‘lmaydi. Bu muammo diskontlash usullarini qo‘llash bilan hal etiladi. Diskont - boshlang‘ich summani hisoblash, aniqlash uchun oshgan qiymatdan ayriladigan chegirma summasidir. Chegirmalar katta summadan kichik summani aniqlash uchun hisoblansa, ustamalar yozishda, aksincha, kichik summadan katta summani aniqlash uchun hisoblanadi. Shuni esda tutish kerakki, boshlang‘ich qiymat aniq moliyaviy sharoitda oshgan qiymatning teskari ifodasidir.

Uning asosida butun son va qismlari farqi hisoblanuvchi hamma ko‘rsatkichlar teskari sonlar bo‘ladi. Masalan, oshgan qiymat 1,0 va diskont (chegirma) stavkasi 0,2 ga teng deb qabul qilinsa, foizlar ko‘paytmasining teskari soni 0,8 (1,0-0,2) emas, 0,833 (1,0 : 1,2) ga teng bo‘ladi. Bu tasdiq sodda va murakkab foizlar bilan hisoblangan diskont summasi va stavkalariga nisbatdan emas, balki diskontlashda qo‘llaniladigan barcha metodlar uchun adolatlidir.

Matematik diskontlashning quyidagicha ifodalash mumkin: bankka yillik i foiz stavkasida P miqdorda mablag` qo'yib, n yildan keyin S miqdorda mablag`ga teng pul olish kerakligini aniqlansin,

Diskontlash moliyaviy operatsiyalarda vaqt omilini hisobga olish imkonini beradi. Matematik diskontlash va tijorat (yoki bank) hisobi bir-biridan farq qiladi.

P summasi zamonaviy yoki joriy qiymat deb ataladi. $S = P \cdot (1 + n \cdot i)$ formulasidan oddiy foiz stavkasi bo'yicha oshirilgan summa. P zamonaviy yoki joriy qiymat quyidagicha bo`ladi:

$$P = \frac{S}{1 + i \cdot n}.$$

Bu yerdan diskont summasi:

$$D = S - P$$

Agar kreditining muddati yil t ulushida ifodalangan bo'lsa, berilgan oddiy foiz stavkasi bo'yicha zamonaviy qiymat:

$$P = \frac{S}{1 + i \cdot t}.$$

Murakkab foiz stavkasi bo'yicha diskont

Murakkab foiz stavkasi bo'yicha summalarni hisoblash fomulasi $S = P \cdot (1 + i)^n$.

Bundan $P = \dfrac{S}{(1 + i)^n}$.

$\dfrac{1}{(1 + i)^n}$ -koeffitsiyent diskont omili yoki diskont multiplikatori deb ataladi.

Agar kreditining muddati yil t ulushida ifodalangan bo'lsa, berilgan murakka foiz stavkasi bo'yicha zamonaviy qiymat:

$$P = \frac{S}{(1 + i)^t}.$$

8.18-masala. 1000000$ miqdorini to'plash uchun 4 yil davomida yillik 10% ostida bankka qancha pul qo'yish kerak? Hisob-kitoblarni oddiy va murakkab foiz sxemalari amalga oshiring.

Yechish. Masala shartidan kelib chiqadi: n = 4, i =10%, S= 1000000. Oddiy foizlar formulalar bo'yicha biz zamonaviy qiymatlarni hisoblaymiz:

$$P = S / (1 + i \cdot t) = 1000000 / (1 + 0,1 \cdot 4) = 714286\$.$$

Murakkab foizlar) formulalar bo'yicha biz zamonaviy qiymatlarni hisoblaymiz:

$$P = S / (1 + i)^n = 1000000 / (1 + 0,4)^4 = 683013\$.$$

Ko'rinib turibdiki, murakkab foizlarni hisoblashda zamonaviy xarajat har doim oddiy foiz hisoblash holatiga qaraganda kamroq bo'ladi.

Uzluksiz diskontlash

Yillik foiz stavkasi j ga teng bo`lsin va foizni hisoblash yil davomida m marta bo`lsin. Keyin n yil uchun foizlar m * n marta j / m foiz stavkasi bo'yicha hisoblanadi va quyidagi shaklga ega bo'ladi:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}.$$

Uzluksiz foiz stavkasini hisoblash. $S = P \cdot \left(1 + \dfrac{i}{m}\right)^{nm}$ formulada m→∞da daraja cheksizlikka intiladi. Uzluksiz foiz stavkasinini hisoblash quyidagi formula bilan topiladi:

$$S = P \cdot e^{in}.$$

Uzluksiz diskontlashni zamonaviy qiymatini quyidagi formula bilan topamiz:

$$P = \frac{S}{e^{i \cdot n}}.$$

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

8.1. Oddiiy, murakkab va uzluksiz foizlarda jamg`arish

8.1.1-masala. Omonatchi shaxsiy jamg`armalarini 7 yil davomida bankka joylashtirdi. Omonat miqdori 1800 $. Agar bank ushbu omonat bo`yicha oddiy foizlarni hisoblab chiqsa, omonatchi 7 yildan keyin qancha pul olishini aniqlang-oddiy foiz stavkasi yiliga 13%.

8.1.2-masala. Omonatchi bankka 5 oy davomida 1500$ miqdorida shaxsiy jamg`armalarni joylashtirdi. Agar bank ushbu omonat bo`yicha oddiy foizlarni hisoblab chiqsa, omonatchi 5 oydan keyin qancha pul olishini aniqlang-oddiy foiz stavkasi yiliga 14%.

8.1.3-masala. Omonatchi shaxsiy jamg`armasini 100 kun davomida bankka 1500 $ miqdorida joylashtirdi. Agar bank ushbu omonat bo`yicha oddiy foizlarni hisoblab chiqsa, oddiy foiz stavkasi yiliga 18% ni tashkil qiladi. Omonatchi 100 kundan keyin qancha pul olishini aniqlang,

8.1.4-masala. Har bir yarim yilda bank yiliga 5% li omonat bo`yicha 50 ming so`m to`laydi. Bankka qo`yilgan pul miqdori qancha?

8.1.5-masala. Bankka qo`yilgan 200 million so`m pul uchun 20% dan to`lansa, uning miqdori ikki marta ortishi uchun necha yil kerak bo`ladi?

8.1.6-masala. Investor 115 ming so`mni jamg`arish uchun 15% li yillik oddiy foiz stavkasi bo`yicha qanday miqdordagi pulni a) bir yilga; b) ikki yilga; v) to`rt yilga qo`yish kerak.

8.1.7-masala. Har bir yarim yilda bank yiliga 5% li omonat bo`yicha 50 ming so`m to`laydi. Bankka qo`yilgan pul miqdori qancha?

8.2. Hisob stavkasi va foiz stavkasining ekvivalentligi

8.2.1-masala. Siz 50 000 $ qo`ydingiz. Yillik Stavka 10%. 5 yildan keyin qancha pul olasiz? Murakkab foiz formulasi bo`yicha hisoblang.

8.2.2-masala. Agar siz 10000 $ qo`ygan bo`lsangiz, yakuniy miqdor qancha bo`lishini hisoblaymiz. Oylik foizlar bilan 10% yillik 12 oy davomida.

8.3. O`zgaruvchi foizlarda jamg`arish

8.3.1-masala. Omonatchi bankka yillik stavkasi 10% li 5 yilga 15000$ qo'ydi. Shartnomaga ko'ra, bank 3 yildan keyin yillik stavkasini 9% ga o'zgartiradi. Omonatchi oddiy va murakkab foiz hisoblashlariga ko`ra qancha daramad qiladi?

MUHOKAMA UCHUN NAZORAT SAVOLLARI

1. Omonat nima?
2. Kredit nima?
3. O`zbekistonda omonatlarning eng keng tarqalgan turlari aytib bering.
4. Foiz hisoblashning qaysi usuli foydaliroq?
5. Murakkab foiz stavkasi (kapitalizatsiya) nima?
6. Oddiiy, murakkab va uzluksiz foizlarda jamg`arish qanday amalga oshiriladi?
7. Hisob stakasi va foiz stavkasi nimami bildiradi?
8. Bank depoziti nima?
9. Bank krediti nima?
10. Bank depozitlari uchun murakkab foiz vazifalari hisoblash qanday amalga oshiriladi?

9-BOB. TO`LOVLAR OQIMI. RENTALAR

9.1. Rentalar va ularni jamg`arish

Renta so`zi nemischa “rente”, “lot”, “reddita” so`zlaridan olingan bo`lib “qaytarib berilgan” degan ma`nolarni anglatadi. Keng ma`noda – mulk egalarining tadbirkorlik faoliyati bilan shug`ullanmasdan yer, mol-mulk, kapitaldan muntazam oladigan daromadi hisoblanadi. Ssudaga berilgan kapitaldan foiz, yer egalarining ijaraga berilgan yer uchastkasidan, uy-joy egalarining ijaraga berilgan binolardan muntazam oladigan daromadi. Tor ma`noda – qat`iy daromadli qog`ozlar egalari foiz shaklida oladigan daromad. Aksariyat hollarda renta tushunchasi yerni ijaraga berish natijasida olinadigan daromadga nistbatan qo`llaniladi.

Agrosanoat kombinatlari qishloq xo`jalik mahsulotlarini yetishtirish, qayta ishlash va iste`molchilarga yetkazib berishgacha barcha texnologik jarayonga xizmat qiluvchi xo`jalik va korxonalarning ma`lum bir hududida birlashuvidir. Qishloq xo`jaligidagi davlat korxonalari, jamoa xo`jaliklari va shirkatlari, turli xil mulkchilik asosida tashkil qilingan qo`shma korxonalar ham agrobiznes turlari sifatida faoliyat ko`rsatadi. Agrobiznes turiga ko`ngilli va paychilik mablag`lari asosida tashkil qilingan turli xil uyushma va ittifoqlarni ham kiritish mumkin.

Asosiy tayanch tushunchalar:

Agrar munosabatlar – yerga egalik qilish, o`zlashtirish, tasarruf etish, undan foydalanish va ishlab chiqarish natijalarini o`zlashtirish bilan bog`liqlikda vujudga keldaigan munosabatlar;

Renta munosabatlari – yerdan foydalanish natijasida vujudga kelaigan qo`shimcha sof daromadni taqimlash va o`zlashtirish bilan bog`liqlikda vujudga keladigan munosabatlar ;

Differentsial renta – yer uchastkalarining unumdorligidagi va joylashgan joyidagi farqlar natijasida vujudga keladigan qo`shimcha sof daromad;

Differentsial renta I – yerlarning tabiiy unumdorligidagi farqlar natijasida vujudga keladigan qo`shimcha sof daromad;

Differentsial renta II – yerlarning iqtisodiy unumdorligini oshirish natijasida vujudga keladigan qo`shimcha sof daromad;

Absolyut renta – qishloq xo`jaligida yerga bo`lgan xususiy mulkchilik monopoliyasi natijasida vujudga kelib, hamma turdari yaxshi, o`rtacha va yomon yerlardan olinadigan renta;

Monopol renta – alohida tabiiy sharoitga ega bo`lib, noyob qishloq xo`jalik mahsulotlari yetishtiriladigan yerlardan olinadigan renta;

Undirma sanoatda renta – foydali qazilma konlarining joylashishi (er yuzasiga nisbatan) va ularning boyligi jihatdan farqlar natijasida vujudga keladi;

Agrosanoat majmuasi – qishloq xo`jalik mahsulotlarini yetishtirish, uni saqlash, qayta ishlash va iste`molchilarga yetkazib berish bilan bog`liq xo`jalik tarmoqlarining birligi.

Moliyaviy rentalar va ularning turlari. Moliya-bank operatsiyalaridagi to`lovlar bir marta amalga oshiriladigan yagona to`lov bilan emas, balki ma`lum bir vaqt oralig`ida takrorlanadigan to`lovlar ketma-ketligidan iborat bo`ladi. Moliyaviy operatsiyalar *2* xil pul oqimi bilan bog`liq bo`ladi. Ulardan biri tushumlar (daromadlar), ikkinchisi to`lovlar (harajatlar) dan iborat bo`ladi.

**To`lovlar oqimi**-ma`lum bir vaqtda amalga oshiriladigan to`lovlar ketma-ketligi. To`lovlar oqimi quyidagi formula bilan belgilanadi: $R=\{R_k,t_k\}$, bunda R_k - t_k paytda amalga oshirilgan to`lov. + belgisi bilan to`lov daromadni, - belgisi bilan to`lov esa xarajatlar yoki investitsiyalar anglatadi.

Ma`lum bir o`zgarmas vaqt oralig`iqlardaamalga oshrilgan to`lovlar to`lovlar oqimi **moliyaviy renta yoki annutet** deb ataladi.

Bir vaqt oralig`idagi tushumlar va to`lovlardan tashkil topgan to`plam to`lovlar oqimi yoki pul oqimi deyiladi. To`lovlar oqimining alohida olingan bir elementi uning hadi deyiladi. Moliyaviy tahlilda tushumlar va to`lovlar oqimi yagona pul oqimi sifatida ifodalanib, uning musbat hadlari tushumlarni, manfiy hadlari esa to`lovlarni ifodalaydi. Annuitet (annuity) so`zi har yilgi to`lovlar degan ma`noni bildirsada, ushbu atama yillik bo`lmagan boshqa moliyaviy rentalar uchun ham qo`llaniladi.

Moliyaviy renta parametrlari:

Rentaning hadi – to`lovlar oqimidagi alohida olingan to`lov miqdorini bildiradi;

Renta davri – ikkita ketma-ket amalga oshirilgan to`lovlar orasidagi vaqt oralig`ini bildiradi. Renta davri yillar, oylar, chorak, dekada va hatto kunlar bilan o`lchanishi mumkin;

Renta muddati – birinchi to`lovning boshidan so`nggi to`lov oxirigacha bo`lgan vaqt oralig`ini ifodalaydi;

Rentaning foiz stavkasi – renta hadlarining o`sishini yoki joriy bahosini topishga xizmat qiluvchi stavka.

Yil davomida foiz to`lovlarni hisoblashlar soniga ko`ra moliyaviy rentalar bir yilda bir marta hisoblanadigan, *m* marta hisoblanadigan yoki uzluksiz hisoblanadigan rentalardan iborat bo`ladi. Yiliga m marta hisoblanadigan rentalarni hisoblashda foiz stavkasini hisoblash davri to`lovlar amalga oshiriladigan davriga teng deb qaraladi. O`zgarmas rentaning barcha hadlari o`zgarmas son *a* ga teng bo`ladi. O`zgaruvchan rentalarda esa har bir *t* davrdagi to`lovlar (renta hadi) vaqtga bog`liq ravishda o`zgaruvchan bo`ladi.

To`lovlar muddati nuqtai nazaridan rentalar shartsiz va shartli bo`ladi. Shartsiz rentada birinchi va oxirgi to`lovlar sanasi kelishib olingan bo`ladi. Shartli rentada birinchi va oxirgi to`lovlar sanasi qandaydir hodisaning ro`y berishiga bog`liq bo`ladi. Bunga nafaqa misol bo`ladi. Unga ko`ra to`lovlar inson ma`lum bir yoshga etgandan keyin amalga oshiriladi va umrining oxirigacha to`lanadi. Agar to`lovlar renta davrining oxirida amalga oshirilsa, u holda bunday renta postnumerando deyiladi.

To`lovlar oqimining umumlashtiruvchi parametrlardan biri to`lovlar oqimining yig`ma miqdoridan iborat. To`lovlar oqimining yig`ma miqdori (amount of cash flows) to`lovlar oqimining barcha hadlari va ulardan to`lov muddati so`ngida hisoblangan foiz to`lovlar yig`indisiga teng bo`ladi va u quyidagi formula yordamida topiladi: (1) bu erda *at* - to`lovlar oqimining *t* - hadi; -foiz stavkasi, *nk* - *nt* – hadning to`lov muddati.

To`lovlar oqimining ikkinchi umumlashtiruvchi parametri to`lovlar oqimining joriy bahosi (present value of cash flows) dir. Ushbu parametr to`lov muddatining boshiga keltirilgan (diskontlangan) barcha hadlarning yig`indisidan iborat bo`ladi.

To`lovlar oqimining joriy bahosi quyidagi formula yordamida topiladi: , (2) bu erda , (3) diskontlash (keltirish) koeffitsienti.

To`lovlar oqimining yig`ma miqdori to`lov muddati so`ngida yig`ilgan *qarzlar* yoki *daromadlar*ni, investitsiyalarning umumiy hajmi, yig`ilgan *jamg`arma miqdori* va boshqalarni ifodalaydi. To`lovlar oqimining *joriy bahosi* esa investitsiya-ga sarflangan kapital mablag`larning to`lov muddatining boshiga keltirilgan bahosini aniqlaydi. Quyida o`zgarmas va o`zgaruvchan moliyaviy rentalar uchun umumlashtiruvchi parametrlar aniqlanadi.

Moliyaviy-iqtisodiy hisob-kitob usullari qo`llaniladigan foizlar turiga qarab farqlanadi. Berilgan pul mablag`laridan foydalanganlik uchun daromadni to`lash yoki hisoblash vaqtiga kelsak, foizlar oddiy (dekursiv) va avans (antisipativ) ga bo`linadi. Keyingi ikkitasi orasidagi vaqt oralig`i foizlarni hisoblash protseduralari yoki moliyaviy operatsiya muddati, agar foizlar bir marta hisoblansa, foizlarni hisoblash davri deb ataladi. Oddiy (dekursiv) foizlar mablag`larning asl hajmiga nisbatan davr oxirida hisoblanadi. Belgilangan daromad oddiy foizlar bilan, moliyaviy operatsiya davri oxirida to`lanadi. Oddiy foizlar ko`pgina depozit va kredit operatsiyalarida, shuningdek sug`urtada qo`llaniladi. Avans (antisipativ) foizlar mablag`larning yakuniy miqdoriga nisbatan davr boshida hisoblanadi. Avans foizi bilan belgilanadigan daromad kredit berilgan paytda to`lanadi. Hisob-kitoblarning ushbu shakli avans (yoki hisobga olish). Bunday holda, foizlarni hisoblash uchun asos puldir foizlar bilan miqdor (qarzni to`lash miqdori). Shu tarzda ular oldindan hisoblangan foizlar oldindan olinadi. Shunday qilib, kreditlashning ayrim turlari bo`yicha diskontlangan qimmatli qog`ozlar bilan operatsiyalar, xalqaro hisob-kitoblar foizlar hisoblanadi,.

Ko`rib chiqilgan ikki turdagi foizlar amalda ma`lum foiz stavkalariga mos keladi. Bu, birinchi navbatda, hisoblangan i(rote of interest) foiz stavkasi ma`lum bir vaqt ichida olingan daromadning kreditga berilgan kapital miqdoriga nisbati sifatida. Ikkinchidan, buxgalteriya hisobi (antisipativ) stavkasi D (chegirma rote), bu ma`lum bir daromad uchun olingan daromadning nisbati sifatida hisoblanadi qarzni to`lashning kutilayotgan miqdoriga qadar vaqt davri.

Moliyaviy annuitet quyidagi parametrlarga ega:

R_j-alohida to`lov miqdori;

τ - ikki to`lov o`rtasidagi vaqt oralig`i (ijara muddati);

n-birinchi va oxirgi to`lovlar orasidagi vaqt (ijara muddati);

i-o`sish yoki diskontlashni hisoblash uchun foiz stavkasi to`lovlar (depozit stavkasi);

p-yiliga to`lovlar soni;

m-yiliga foizlar soni;

S-annuitetning oshirilgan miqdori (annuitetning kelajakdagi qiymati);

P-annuitetning zamonaviy yoki joriy qiymati.

Yil uchun to`lovlar soniga ko`ra, annuitetlar yillik va p-muddatli bo`linadi.

Foizlarni hisoblash momentlari to`lovlar momentlarga to`g`ri kelmasligi mumkin.

Agar ijara shartlari R1= R2 =... = Rn = R bo`lsa, unda doimiy renta deyiladi. To`lov renta davrining oxirida amalga oshiriladigan to`lov postnumerando (oddiy) renta, rents davrining boshida amalga oshiriladigan to`lov prenumerando renta deyiladi.

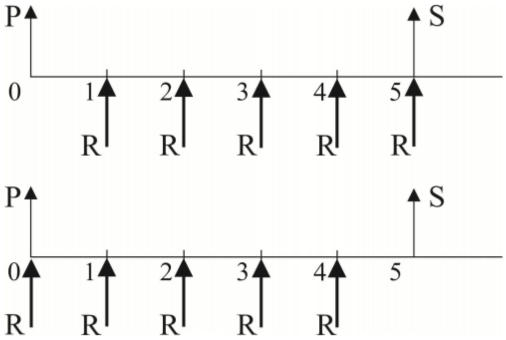
Agar to`lovlar oqimining barcha hadlari bir xil bo`lib, ular o`zgarmas, aks holda o`zgaruvchan deyiladi.Yil davomida foiz to`lovlarni hisoblashlar soniga ko`ra moliyaviy rentalar bir yilda birmarta hisoblanadigan, m marta hisoblanadigan yoki uzluksiz hisoblanadigan rentalardan iborat. Yiliga m marta hisoblanadigan rentalarni hisoblashda foiz stavkasini hisoblash davri to`lovlar amalga oshiriladigan davriga teng deb qaraladi. O`zgarmas rentaning barcha hadlari o`zgarmas son a ga teng bo`ladi. O`zgaruvchan rentalarda esa har bir t davrdagi to`lovlar (renta hadi) vaqtga bog`liq ravishda o`zgaruvchan bo`ladi.

To`lovlar muddati nuqtai nazaridan rentalar shartli va shartsiz ga bo`linadi.

Aniq shartni amalga oshiradigan renta shartli renta deyiladi, masalan, kredit to`lovi. Shartsiz rentaning to`lanishi tasodifiy hodisalarga bog`lik ravishda amalga oshiriladi. Masalan sug`urta rentasi.

Renta muddatining boshlanishi yoki umuman renta ishining boshlanishiga qarab tezkor va kechiktirilgan yoki muddati o`tgan turlarga bo`linadi. Masalan, kreditni qoplash bo`yicha imtiyozli muddat tugagandan keyingi to`lovlar (ular yangi foizlar bilan to`lanadi) muddati o`tgan rentalar deyiladi.

Rentaning oshgan summasi va hozirgi (keltirilgan)1 miqdori moliyaviy rentalarning umumlashtiruvchi ko`rsatkichlari hisoblanadi. Rentaning oshgan summasi deganda biz renta a`zolarining (foizlar qo`shilgan holda) renta muddati oxiridagi yig`indisini tushunamiz. Bu ko`rsatkich yillik doimiy rentalar uchun quyidagi formula bilan aniqlanadi:



1-chizma.Tushumlar va to`lovlar oqimi (postnumerando va prenumerando renta)

Boshidanoq, munosabatlarning qaysi sub`ekti to`g`risida kelishib olish kerak. Agar to`lov o`qlari o`qga yo`naltirilgan bo`lsa, ular qarama-qarshi tomonning sub`ekt foydasiga tushumlari deb ataladi. Agar to`lov o`qlari o`qdan qarama-qarshi tomon yo`naltirilgan bo`lsa, ular to`lovlar deb ataladi.

9.2.Postnumerando yillik renta jamg`rish summasi

Yillik to`lovlar oqimi holatida R murakkab foiz stavkasi bilan yil oxirida foizlar (postnumerando) hisoblash.

S1 ning birinchi to`lov summasi foizlarga butun muddat davomida uzaytirilgan holda quyidgiga teng:

$$S_1 = R \cdot (1+i)^{n-1}.$$

S2 ning ikkinchi to`lov summasi foizlarga butun muddat davomida uzaytirilgan holda teng:

$$S_2 = R \cdot (1+i)^{n-2}.$$

Sn ning n-to`lov summasi foizlarga butun muddat davomida uzaytirilgan holda teng:

$$S_n = R \cdot (1+i)^0 = R.$$

Yillik to`lovlar oqimi holatida R murakkab foiz stavkasi bilan yil oxirida foizlar jamg`arilgan renta (postnumerando) hisoblash:

$$S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + ... + R(1+i) + R$$

S geometrik progressiya q = (1 + i) > 1. Keyin postnumerando ning jamg`afma summasi uchun biz formula bilan hisoblaymiz:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Bu yerda $s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ miqdor rentaning jamg`arish koeffisiyenti deyiladi.

Prenumerando yillik renta jamg`rish summasi

Yil boshida R murakkab foiz stavkasi bilan hisoblash prenumerando yillik renta jamg`rish summasining S1 to`lovi qyuidagicha topiladi:

$$S_1 = R \cdot (1+i)^n$$

S2 ning ikkinchi to`lov summasi foizlarga butun muddat davomida quyidagiga teng:

$$S_2 = R \cdot (1+i)^{n-1}$$

S2 ning ikkinchi to`lov summasi foizlarga butun muddat davomida quyidagiga teng:

Ma`lumki oxirga jamgaril`gan summada foiz hisoblanmaydi:

$$S_n = R \cdot (1+i)$$

Yillik to`lovlar oqimi holatida R murakkab foiz stavkasi bilan jamg`arilgan renta (perenumerando)ni hisoblash:

$$S^{np} = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + ... + R(1+i).$$

E`tibor bering, prenumerando miqdorini postnumerando summasini (1 + i) ga ko`paytirib, olish mumkin: $S^{np} = S(1+i)^n$.

9.3. Dastlabki badal bilan yillik rentaning jamg`arilgan miqdori

Aytaylik, ijara muddati boshida uning daslabki badal qiymati P_0 ga teng. Dastlabki badal bilan yillik rentaning oshirilgan miqdori quyidagi formula bilan topiladi:

$$S = P_0(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + ... + R(1+i) + R$$

yoki

$$S = P_0(1+i)^n + R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

9.1-masala. Aytaylik, loyiha har yili 3 yil davomida 100 000 $ daromad oladi. Daromad uchun yillik 10% dan hisob raqamiga joylashtiriladi.

1) murakkab foizlarni hisoblashda postnumerando va prenumerando hisobdagi summani toping;

2) agar boshida hisob raqamiga ijara muddati bir vaqtning o`zida 10 000 $ qo`yilsa, **prenumerando** foizlari hisobvarag`idagi summani toping.

Yechish.

1)murakkab foizlarni hisoblashda postnumerando va prenumerando hisobdagi summani toppish.

Ijara muddati oxirida jamg`arilgan postnumerando miqdori quyidagiga teng bo`ladi:

$S = 100\,000(1+0{,}1)^2 + 100\,000(1+0{,}1)^1 + 100\,000(1+0{,}1)^0 = 331000$ \$ yoki

$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ formulaga ko`ra $S = 100000 \cdot \frac{(1+0{,}1)^3 - 1}{0{,}1} = 331000\$$.

2) agar boshida hisob raqamiga ijara muddati bir vaqtning o`zida 10 000 \$ qo`yilsa, prenumerando foizlari hisobvarag`idagi summani topish.

Yillik to`lovlar oqimi holatida R murakkab foiz stavkasi bilan yil oxirida foizlar (postnumerando) hisoblash:

$$S^{np} = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + ... + R(1+i).$$

$$S^{np} = 100\,000(1+0{,}1)^3 + 100\,000(1+0{,}1)^2 + 100\,000(1+0{,}1)^1 = 364100 \text{ yoki}$$

Prenumerando miqdorini postnumerando summasini (1 + i) ga ko`paytirib, olish mumkin: $S^{np} = S(1+i)^n$. $\quad \mathrm{S}^{\mathrm{np}} = (1+\mathrm{i}) \cdot \mathrm{S} = (1+0{,}1) \cdot 331000 = 364100\$$.

Dactlabki 10 000 \$ badal to'lovning uch yillik jamgarmasini topaylik:

$$10\,000(1+0{,}1)^3 = 13310\$.$$

Dastlabki to'lov bilan badal haqini jamg`rish uchun, dastlabki to'lovsiz oshirilgan summaga bada jamg`armasini qo'shish kerak: $\mathrm{S} = 13310 + 331000 = 344310\$$.

O`zgarmas p-muddatli renta jamg`armasini hisoblash formulasi

Foizni hisoblash vaqti n va to`lov vaqti m o`zaro teng bo`lsin.

O`zgarmas p-muddatli renta jamg`armasini hisoblash uchun nominal j bir davr uchun foiz stavkasi bo'yicha j / m stavkaga almashtirish kerak va davrlar sonini yangi davrlar soni uchun N m ga yillik to'lov r to'lov bilan almashtirilishi kerak. Keyin r / m davri uchun biz jamg`armani formulani bilan hisoblaymiz:

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1 - \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\frac{j}{m}}$$

yoki

$$S = R \cdot \frac{\left(1 - \frac{j}{m}\right)^{mn}}{j}.$$

9.2-masala. Omonatchi har oyning oxirida bankka 1000\$ joylashtiradi. Foizlar har oyda murakkab yillik stavka bo'yicha hisoblanadi va foiz 12% ga teng. 2 yildan keyin omonatchi hisobdagi jamg`arilgan pul miqdorni aniqlang.

Yechish. Shartlardan kelib chiqadiki, ijara muddati n = 2 yil, raqam foizlarni hisoblash yil uchun to'lovlar soniga teng m= 12 marta, ya'ni nm=2 $n \cdot m = 2 \cdot 12 = 24$.

Foiz stavkasi va bir davr (oy) uchun to'lov quyidagicha topiladi:

$$\frac{j}{m} = \frac{12\%}{12} = 1\% \quad , \quad \frac{R}{m} = 1000 \ .$$

Endi j / m davri uchun biz jamg`armani formulani bilan hisoblaymiz:

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\frac{j}{m}} \cdot S = 1000 \cdot \frac{(1 + 0{,}01)^{24} - 1}{0{,}01} = 26973.$$

Foizlarni hisoblash va to'lov tushumlari vaqti turli bo`lganda jamgarilgan p-muddatli renta

p-muddatli rentada foizlarni hisoblash va to'lov tushumlari vaqti turli xil bo`lganda jamgarilgan pul miqdorni topish formulasi quyidagicha bo`ladi:

$$S = \frac{R \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{p \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}$$

9.3-masala. Uch yil davomida (n = 3) har oyning oxirida to'lovlar 480 000 $ (p=12) dan ma`lu bir miqdorida teng ulushlarda keladi. Yiliga, har chorakda hisoblangan (m = 4) murakkab foizlar 12 % yillik. Jamg`arilgan renta miqdorini toping.

Yechish.

p-muddatli rentada foizlarni hisoblash va to'lov tushumlari vaqti turli xil bo`lganda jamgarilgan pul miqdorni toppish:

$$S = \frac{48000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{12} - 1}{12 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{4/12} - 1} = 40\,000 \cdot \frac{1{,}4258 - 1}{1{,}0099 - 1} = 1719962{,}12$$

Postnumerando rentasining zamonaviy qiymati

Kelajakdagi daromadlarni tahlil qilishda ularni vaqt bo`yicha turli xil baholarini hisobga olish kerak.

Aytaylik,

R-yillik to'lov miqdori;

i-yillik foiz stavkasi;

n-renta muddati;

P- Postnumerando rentasining zamonaviy qiymati. Yuqoridagi to'lovlar miqdori yig`indisi postnumerando rentasining zamonaviy qiymati deb nomlanadi va quyidagi formula bilan topiladi:

Birinchi to'lovning keltirilgan qiymati quyidagicha bo'ladi: $R \cdot \frac{1}{1+i}$.

Ikkinchi to'lovning keltirilgan qiymati quyidagicha bo'ladi: $R \cdot \frac{1}{(1+i)^2}$.

Keltirilgan to'lovlar geometrik progressiyani hosil qiladi:

$$R \cdot \frac{1}{1+i} \ , \quad R \cdot \frac{1}{(1+i)^2} \quad , \quad \ldots \quad , \quad R \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \, .$$

Postnumerando rentasining zamonaviy qiymati P mablag`lar yig`indisiga teng:

$$P = R \cdot \frac{1}{1+i} + R \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + R \cdot \frac{1}{(1+i)^2} \, .$$

yoki geometrik progressiya muvofiq P mablag`lar yig'indisi formulasiga ko`ra

$$P = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

$a(i,n) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ miqdor keltirilgan rentaning koeffisiyenti deyiladi.

S-rentaning oxirgi qiymatiga ko`ra rentaninig zamonaviy qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}.$$

Prenumerando rentasining zamonaviy qiymati

Birinchi to`lovni qabul qilish R =0 yillik chegirma muddatiga ega, ikkinchisi qabul qilish diskontlash muddati R =1 yil va u keltirilgan renta quyidagiga teng bo'ladi:

$$R \cdot \frac{1}{1+i}$$

Prenumerando rentasining zamonaviy qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$P^{(nm)} = R \cdot \frac{1}{(1+i)^0} + R \cdot \frac{1}{(1+i)^1} + ... + R \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$$

E'tibor bering, postnumerando va prenumerando daromadlarining zamonaviy qiymati quyidagiga tenglik bilan bog'liq:

$$P^{(nm)} = P \cdot (1+i)^n$$

9.4-masala. Loyiha har yili 3 yil davomida har yili 100 000 \$ daromad keltiradi. Yillk stavkasi 10% bo'lsa, kelajakning zamonaviy rentasining daromad qiymatini toping.

Yechish.

1-variant. Aytaylik, har yilning oxirida (postnumerando)100 000 \$ daromad keltiradi. Kelajakning zamonaviy rentasining $P^{(nm)} = R \cdot \frac{1}{(1+i)^0} + R \cdot \frac{1}{(1+i)^1} + ... + R \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$ formulaga ko`radaromad qiymatini hisoblaymiz:

$$\text{P} = 100000/(1+0,1) + 100000/(1+0,1)^2 + 100000/(1+0,1)^3 = 248685,2 \ \$.$$

Ushbu summaning har bir bo`lagi yil oxirida olingan daromadning zamonaviy qiymatini anglatadi.

2-variant. Aytaylik, daromadlar har biri yil (prenumerando) boshida keladi. Keyin postnumerando rentaning zamonaviy qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$\text{P} = 100000/(1+0,1)^0 + 100000/(1+0,1)^1 + 100000/(1+0,1)^2 = 273533,7 \ \$.$$

$P^{(nm)} = P \cdot (1+i)^n$ formula va bizning tengligimizga ishonch hosil qilishingiz mumkin:

$$273533 / 248685 = 1,1 = 1 + 10\%$$

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

9.5-masala. Aytaylik, loyiha har yili 3 yil davomida 500 000 \$ daromad oladi. Daromad uchun yillik 10% dan hisob raqamiga joylashtiriladi.

1) murakkab foizlarni hisoblashda postnumerando va prenumerando hisobdagi summani toping;

2) agar boshida hisob raqamiga ijara muddati bir vaqtning o`zida 10 000 \$ qo`yilsa, **prenumerando** foizlari hisobvarag`idagi summani toping.

9.6-masala. Omonatchi har oyning oxirida bankka 2000$ joylashtiradi. Foizlar har oyda murakkab yillik stavka bo'yicha hisoblanadi va foiz 12% ga teng. 2 yildan keyin omonatchi hisobdagi jamg`arilgan pul miqdorni aniqlang.

9.7-masala. Uch yil davomida (n = 3) har oyning oxirida to'lovlar 500 000 $ (p=12) dan ma`lu bir miqdorida teng ulushlarda keladi. Yiliga, har chorakda hisoblangan (m = 4) murakkab foizlar 12 % yillik. Jamg`arilgan renta miqdorini toping.

9.8-masala. . Loyiha har yili 3 yil davomida har yili 500 000 $ daromad keltiradi. Yillk stavkasi 10% bo'lsa, kelajakning zamonaviy rentasining daromad qiymatini toping.

MUHOKAMA UCHUN NAZORAT SAVOLLARI

1. Moliyaviy ijara nima deyiladi?
2. Postnumerando va prenumerando ijaralari qanday farq qiladi?
3. Postnumerandoning yillik annuitetining miqdori qancha?
4. Annuitetni oshirish koeffitsienti nima deyiladi?
5. Rent postnumerando va prenumerando?
6. Yillik annuitet miqdorining boshlang'ich bilan formulasini yozing hissa.
7. Yillik annuitetning zamonaviy qiymati formulasini yozing postnumerando. - qaniydi?
8. Annuitet koeffitsienti nima deyiladi?
9. Rent postnumerando va prenumerando rentasining zamonaviy narxlar qanday farq qiladi?
10. Yillik annuitetning yakuniy badal zamonaviy qiymati formulasini yozing

.

10-BOB. KREDIT HISOBI

10.1. Qarzni yopishning umumiy usuli, yuqori foizlarda fond tashkil etish orqali qarzlarni yopish

Kredit deganda pul yoki tovarlarni qarz va foizlarni qaytarish sharti bilan qarzga berish tushuniladi. Kreditning o`zi asosiy qarz, foizlar esa foizli pul deb ataladi. Foizlar hisoblanadi va barcha asosiy qarz unga qo`shiladi. Olingan qiymat kredit bo`yicha qarz miqdori.

Belgilanishlar:

P-asosiy qarz;

I-foizli pul;

Z-kredit qarzi;

i-kredit bo`yicha foiz stavkasi.

P kreditining qiymati i foiz ostida n yillik kredit olinsin. Yillik va kreditning tanasi butun kredit muddati davomida to`lanadi.

Foizla i bilan qarz murakkab foizlar hisoblangan taqdirda qarz miqdori (miqdori)) quyidagiga teng bo`ladi: $Z = P \cdot (1+i)^{n}$

Qarzni yillik teng to`lovlar asosida yillik to`lov. Aytaylik, endi kreditni to`lash oxirida har bir to`lov davri teng ulushlarda amalga oshiriladi.Bu hozir bo`lgani kabi bank kreditlashning zamonaviy amaliyoti. To`lov jarayoni kredit postnumerandoning muntazam rentasi hisoblanadi. Aniqlik uchun yillik to`lovlarni ko`rib chiqamiz.

Qarz beruvchiga yil oxirida K to`lovini to`lash k (yil oxirida) vaqtda to`laydi va qarz oluvchi ushbu hisoblangan miqdor va foizlar, ya`ni qarz bilan qiymatga teng bo`lgan summani to`laydi. Demak,kredit muddat oxirida qoplanadi va formula bilan topiladi:

$$Y_k = P(1+i)^{(n-k)}, (10.1)$$

Barcha Y_k qarzlarining yig`indisi Z umumiy miqdor qarziga teng bo`ladi:

$$P(1+i)^n = R(1+i)^{n-1} + ... + R, (10.2)$$

Bundan quyidagi tenglik kelib chiqdi:

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + ... + + \frac{R}{(1+i)^2} = R \cdot \frac{1-(1-i)^{-n}}{i}, (10.3)$$

Biz yakuniy to`lovi bo`lmagan ketirilgan yillik zamonaviy rentaga ega bo`ldik.

Shunday qilib, asosiy P qarz zamonaviy qiymati to`lanadi. Qarzdoring kreditorga barcha to`lovlarning yig`indisi quyidagiga teng:

$$R = \frac{P \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}, (10.4)$$

Aytaylik, P miqdordagi qarz *n* yilga *i* murakkab foiz stavkada berilgan bo`lsin. qaralayotgan bu usulda har yil oxirida bir xil *R* to`lovni amalga oshirish kerak. Bu to`lov yillik rentani tashkil etadi. Bu rentaning hozirgi qiymatini (joriy qiymati).

Qarz miqdoriga tenglashtiramiz.

$$R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = P \ ;$$

$$R = \frac{P \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \ .$$

10.1-masala. Aytaylik qarz miqdori $P = 30$*mln so`m, n=5 yil, i=10%* bo`lsin. qarzni yillik teng to`lovlar asosida yopish shartida amalga oshiriladigan bo`lsa, yillik to`lov qanday bo`ladi?

Yechish.

$$R = \frac{P \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{30 \cdot 0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-5}} = 7{,}913924.$$

10.2-masala. Bank mijozga P=100000$ kreditni n=5 yilga i=10 % li qilib har yilning oxirida to`lash sharti bilan berdi.Yillik to`lov miqdorini aniqlang.

Yechish. Yillik to`lov miqdorini quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$R = \frac{P}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{100000 \cdot 0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-5}} = \frac{10000}{3{,}790787} = 26379{,}75$$

**Qarzni muddat oxirida bitta to`lov orqali yopish.** Aytaylik, *P* miqdordagi qarz *i* foiz stavka bo`yicha murakkab foizda *n* yilga berilgan bo`lsin. Qarzni jamg`arilgan miqdori *n* - nchi yil oxirida $P \cdot (1+i)^n$ ga teng bo`ladi. Agar qarz bitta to`lov orqali amalga oshiriladigan bo`lsa, to`lov miqdori $R = P \cdot (1+i)^n$ ni tashkil etadi.

10.3-masala. 100 mln. so`m qarz 10 yilga 10% ga berilgan. Agar qarz bitta to`lov orqali yopish shartida berilgan bo`lsa, qarz miqdori qancha bo`ladi.

Yechish. $R = P \cdot (1+i)^n = 100 \cdot (1+0{,}1)^{10} = 259{,}37$ mln. so`m.

**Asosiy qarzni muddat oxirida bitta to`lov orqali yopish.** Boshlang`ich qarz miqdorning o`zi - asosiy qarz deb, foiz puli deb esa, foiz qo`shilmasini tushunamiz. Aytaylik, *P* miqdordagi qarz *n* yilga murkaab *i* foiz stavkada berilgan bo`lsin. bunday shartda birinchi yili foiz puli $R_i = i \cdot P$ ni tashkil etadi.

Buni to`lagandan so`ng, yana qarz miqdori *P* bo`lib qoladi. Har yil oxirida foiz puli $i \cdot P$ ga teng bo`ladi. *n*-nchi yili to`lov miqdori $R = i \cdot P + P$ , ya`ni foiz puli va asosiy qarz miqdori yig`indisidan iborat bo`ladi.

Asosiy qarzni yillik teng to`lovlar orqali yopish.

Aytaylik, P miqdordagi qarz n yilga murakkab i foizda berilgan bo`lsin. qaralayotgan bu usulda to`lovlar asosiy qarzli n qismini tashkil etadi, ya`ni $\frac{P}{n}$. Bundan tashqari 1-nchi yil oxirida, bunga $P$ ning foiz puli qo`shiladi. Natijada, birinchi yil oxirida $R_1 = \frac{P}{n} + i \cdot P$ to`lov bo`ladi.

Ikkinchi yil oxiridagi to`lov esa $R_2 = \frac{P}{n} + i \cdot \left(P - \frac{P}{n} \right)$ va h.k.

k - nchi yildagi to`lov $R_k = \frac{P}{n} + i \cdot \left(P - \frac{(k-1) \cdot P}{n} \right)$.

Ko`rinib turibdiki, $k_1, k_2$ to`lovlar ketma – ketligi berilgan hadi $R_1 = \frac{P}{n} + i \cdot P$ va ayirmasi $\frac{i \cdot P}{n}$ bo`lgan kamayuvchi arifmetik progressiyani tashkil etadi.

10.4-masala. Faraz qilaylik $P = 30$ mln, $n = 5$, i=10 %. Har yilgi to`lovlar miqdorini yuqoridagi usulda hisoblang.

Yechish.

$$R_1 = \frac{P}{n} + i \cdot P = 6 + 0{,}1 \cdot 30 = 6 + 3 = 9;$$

$$R_2 = \frac{P}{n} + i \cdot \left(P - \frac{P}{n} \right) = 6 + 0{,}1 \cdot (30 - 6) = 6 + 2{,}4 = 8{,}4;$$

$$R_3 = \frac{P}{n} + i \cdot \left(P - \frac{2P}{n} \right) = 6 + 0{,}1 \cdot (30 - 12) = 6 + 1{,}8 = 7{,}8;$$

$$R_4 = \frac{P}{n} + i \cdot \left(P - \frac{3P}{n} \right) = 6 + 0{,}1 \cdot (30 - 18) = 6 + 1{,}2 = 7{,}2;$$

$$R_5 = \frac{P}{n} + i \cdot \left(P - \frac{4P}{n} \right) = 6 + 0{,}1 \cdot (30 - 24) = 6 + 0{,}6 = 6{,}6.$$

Qarzni yillik teng to‘lovlar orqali bir yilda bir necha marta to‘lov asosida yopish

Aytaylik, yillik R miqdordagi to`lov bir yilda $m$ marta amalga oshirilsin, u holda to`lovlar $m \cdot n$ marta bo`ladi. Bu to`lovlarga stavkada marta foiz qo`shiladi. Bu to`lovlar rentani tashkil etib, uning jamg`arma qiymati ushbuga teng.

$$S = \frac{R \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m} \right) - 1 \right]}{\frac{i}{m}};$$

Qarzni jamg`arilgan qiymati esa $P \cdot \left( 1 + \frac{i}{m} \right)^{mn}$ bo`ladi, ularni tenglashtiramiz:

$$P\cdot\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}=\frac{R\cdot\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)-1\right]}{\frac{i}{m}};$$

$$R=\frac{P\cdot i\cdot\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}}{m\cdot\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)-1\right]}.$$

Yuqori foizlar fond tashkil etish orqali qarzni yopish

Olingan qarz turli usullarda yopilishi mumkin. masalan, qarzdor o`zining pulini olingan qarz foizidan yuqori foizda fond tashkil etish orqali qarzni yopishi mumkin. aytaylik, $P$ miqdordagi qarz $n$ yilga murakkab foizdan $i$ stavkada olingan bo`lsin. U holda n – nchi yil oxirida qarz miqdori $P\cdot(1+i)^n$ ga o`sadi. Fondga to`lanadigan R miqdordagi to`lov rentani tashkil etadi, agar fond stavkasi g>I bo`lsa, u holda fonddagi pul miqdori $S=\frac{R\cdot\left[(1+g)^n-1\right]}{g}=P\cdot(1+i)^n$ tenglikdan topiladi. Fondga to`lanadigan $R$ miqdordagi to`lov rentani aniqlaymiz:

$$R=\frac{P\cdot g\cdot(1+i)^n}{(1+g)^n-1}$$

10.5-masala. Aytaylik, $P=5000$, $n=10$, i=4% , g=8 %. bo`lsin. Fondga to`lanadigan yillik to`lov miqdorini toping?

Yechish. $R=\frac{5000\cdot 0{,}08\cdot(1+0{,}04)^{10}}{(1+0{,}08)^{10}-1}=510{,}91$**.**

10.2. To`lovlarni qismlarga bo`lib qoplash

Qarzni to`lash sxemasini ko`rib chiqamiz, unda R to`lovni to`lash ikki qismga bo`linadi: bir qismi asosiy qarzni to`laydi, ikkinchisi - foiz pullarini to`laydi. P pul miqdori n yilga i foiz ostida kreditga olingan. To`lov to`lovini R ni qismlarga ajratish qoidasi quyidagilardan iborat:birinchi qqism asosiy qismni, keyin foiz pullarini to`laydigan to`lovni amalga oshirish.

Belgilanishlarni kiritamiz:

R-yillik to`lov;

$D_j - j - yil\,uchun\,foizli\,to`lov;$

$B_j - j - yildagi asosiy to`lov;$

$Z_j - j - yil\ln ing\, oxiridagi asosiy to`lov qoldig`$; $(Z_0 = P)$.

Har bir yil oxirida to`lov j foizlar bo`yicha to`lov miqdori va asosiy qarzni to`lash quyidagigha topiladi:

$R = D_j + B_j$,(10,5)

R to`lovni qismlarga ajratib quyidagicha to`lanadi:

$D_j = i \cdot Z_j$,(10.6)

, $B_j = R - D_j$ (10.7)

$Z_j = Z_{(j-1)} - B_j$,(10.8) $(Z_0 = P)$.

Birinchi tenglik asosiy qarz qoldig`i foizlar bo`yicha to`lov i % ekanligini anglatadi;, ikkinchisi - asosiy qarz uchun to`lov har bir yil oxirida to va foizlar bo`yicha to`lovlar o`rtasidagi farq, uchinchisi - j yilidagi qarz qoldig`i o`tgan yilgi qarz qoldig`ining farqiga teng va yilda asosiy qarzni to`lash j.

1.6-masala. Bank mijozga P=100000$ kreditni n=5 yilga i=10 % li qilib har yilning oxirida to`lash sharti bilan berdi.Yillik asosiy to`lov va foizlardagi to`lov miqdorini aniqlang.

Yechish.

Mijoz har yili $R == 26379{,}75$ $ to`lovni amalga oshiradi.

Birinchi yil oxirida foizlar bo`yicha to`lov quyidagiga teng: $D_1 = i \cdot P = 0{,}1 \cdot 100000 = 10000\$$.

Asosiy qarzni to`lash:

$B_1 = R - D_1 = 26379{,}75 - 10000 = 16379{,}75\$$.

Birinchi yilning oxirida qolgan qoldiq:

$Z_1 = P - B_1 = 100000 - 26379{,}75 = 83625{,}75\$$.

Ikkinchi yilining oxirida foizlarni to`lash quyidagicha bo`ladi:

$D_2 = i \cdot Z_1 = 0{,}1 \cdot 83625{,}75 = 8362{,}57\$$.

Ikkinchi yilning oxirida asosiy qarzni to`lash:

$B_2 = R - D_2 = 26379{,}75 - 8362{,}57 = 18017{,}18\$$.

Ikkinchi yilning oxirida qolgan qoldiq:

$Z_2 = Z_1 - B_2 = 83625{,}75 - 18017{,}18 = 65608{,}57\$$.

Hisoblashlarni yuqoridagi tartibda davom ettiramiz.

R= 26379,75

yil	B asosiy to`lov	D foizlar to`lovi	Z qarz qoldig`i
0			100000
1	16379,75	10000,00	83620,25

2	18017,73	8362,03	65602,53
3	19819,50	6560,25	45783,03
4	21801,45	4578,30	23981,58
5	23981,59	2398,16	0,00
jami	100000	31899	

Xulosa qilib aytganda, bankka mijoz tomonidan asosiy qarz 100000 $ va asosiy qarzning foizi 31899$ iborat bo`lib, 5 yilda 131899$ miqdorda pul to`lanadi.

10.3. Istemol krediti. Imtiyozli kreditlar. Absolyut va musbat grant-element

Ba`zi paytlarda kreditlar imtiyozli beriladi. Eng keng tarqalgan kreditlardan biri berilgan momentda taklif etilayotgan kreditning kichik foiz stavkasida berilishidir. Natijada bunday imtiyozda qarzdor yaxshi mablag` imkoniyatiga ega bo`ladi. Kreditor esa bunday operatsiyada ma`lum miqdorda mablag`ni qo`ldan chiqaradi. Berilgan momentning mablag`lar bozorida past stavkada kredit berilishini grant-element (grant-element) deb yuritiladi. Grant-element ikki ko`rinishda aniqlanadi: absolyut va nisbiy.

Absolyut grant-element miqdori quyidagicha topiladi:

$$W=P-Q, \quad (10.9)$$

bu yerda W- absolyut grant-element, P- qarz summasi, Q- kredit bozorining real stavkasi bo`yicha qarzni qoplash uchun tushadigan hozirgi to`lovlar miqdori.

Nisbiy grant-element absolyut grant-elementning qarz summasiga bo`lgan nisbati bilan aniqlanadi:

$$S=\frac{W}{P}=\frac{P-Q}{P}=1-\frac{Q}{P}, \quad (10.10)$$

S - nisbiy grant-element.

Endi W va S ni hisoblashning ishchi formulalarini qarz va foizlar o`zgarmas zudlik to`lovlari sharoiti uchun keltirib chiqaramiz.

Aytaylik, qarz *n* yilga berilgan bo`lib, uni to`lash imtiyozli *g* stavka bo`yicha amalga oshirilsin. Pul bozorida shunga o`xshash muddat bo`yicha va qarz miqdori *i* stavka bo`yicha beriladi. Bunday holda imtiyozli davr bo`lmaganda zudlik to`lovi

$$Y=\frac{P}{a_{n/g}}, \quad (10.11)$$

qarzdorning barcha to`lovlarining hozirgi qiymati esa $Y_{n/i}$ ga teng. Natijada

$$W=P-Y_{n/i}=P\left(1-\frac{a_{n/i}}{a_{n/g}}\right), \quad (10.12)$$

$$\delta = 1 - \frac{a_{n/i}}{a_{n/g}},(10.13)$$

bunda $a_{n/i}$ va $a_{n/g}$ -i va g foiz stavkalari uchun aniqlangan o`zgarmas yillik postnumerando rentaning keltirilgan koeffitsiyentlari.

1.7-masala. Imtiyozli kredit 10 yilga 3,8% ga berildi. Qarzni teng zudlik to`lovlar asosida to`lash ko`zda tutilmoqda. Bunday muddat uchun bozor stavkasi 8%. Kreditning dastlabki miqdori 10 mln. so`m bo`lsa, nisbiy grant-element va absolyut grant-elementlarni toping.

Masalaninig yechilishi.

$$\delta = 1 - \frac{a_{10/8}}{a_{10/3,8}} = 1 - 6{,}71008 \cdot \frac{0{,}038}{1 - 1{,}038^{-10}} = 0{,}1809.$$

$$W = 10 \cdot 0{,}1809 = 1{,}1809.$$

Demak, kreditorning yutqazgan pul miqdori yoki qarzdorning yutug`i 1,809 mln. so`mni tashkil etadi.

Agar imtiyozli davrda qarzdor foiz to`lasa, u holda qarz bo`yicha tushayotgan pul miqdori imtiyozli davrda foiz to`lovlarining hozirgi qiymati va qolgan davrdagi zudlik to`lovlarining yig`indisiga teng bo`ladi. Shunday qilib,

$$G = P_\varepsilon \cdot a_{l/i} + Y \cdot a_{n-L/i} \cdot v^l,(10.14)$$

bunda n - L qarzni to`lash davrining davomiyligi; L - imtiyozli davrning davomiyligi. (10.13) formuladan

$$\delta = 1 - \frac{G}{P} = 1 - \left(\frac{a_{n-L/i}}{a_{n-l/\varepsilon}} + g \cdot a_{L/i} \right),(10.15)$$

hosil qilamiz. Bu formulani hosil qilish uchun (10.14) dan va $Y = D / a_{n-L/i}$ formuladan foydalanamiz:

$$\frac{G}{P} = g \cdot a_{L/i} + \frac{1}{a_{n-l/\varepsilon}} \cdot v^L,$$

Natijada

$$\delta = 1 - \frac{a_{n-L/i}}{a_{n-L/\varepsilon}} - g \cdot a_{L/i}$$

hosil bo`ldi.

10.4. Ipoteka ssudasi. Qarzlarni birlashtirish va almashtirish

Bozor iqtisodiyoti rivojlangan mamlakatlarda garovga berilgan ko`chmas mulk yoki ipoteka keng tarqalgan. Bunday operatsiyada ko`chmas mulk (yer, uy va h.k) egasi (mortgagor) shu mulk uchun garovga qarz oladi. Qarz belgilangan muddatda qaytarilmasa, garovga olingan mulk qarz beruvchining (mortgage) shaxsiy mulkiga aylanadi.

Odatda ssuda garovga olingan mulk narxidan kichik bo`ladi. Ipoteka ssudasining afzalligi uni to`lash muddatining kattaligidadir. Ipoteka ssudalari tijorat va maxsus ipoteka banklari tomonidan beriladi. Ipoteka ssudasi O`zbekistonda ham joriy qilinmoqda. Respublikamizda bir nechta ipoteka banklari faoliyat ko`rsata boshladi. Ipoteka ssudalarining bir nechta turlari mavjud.

To`lovlarning o`sib borishidagi ssudalar (graduated mortgage, GPM). Bunday turdagi ssudalarda birinchi yillarda qarz xizmatlari bo`yicha xarajatlarning bir xil o`sishi qaraladi. Qolgan vaqtlarda to`lov o`zgarmas badallar bo`yicha amalga oshiriladi. Ipoteka ssudasining bunday variantida to`lovlar kelishilgan grafik asosida har 3-5 yilda badallar summasi ortib boradi.

Imtiyozli davr ssudasi. Ipoteka sharoitida imtiyoz davrida qarz bo`yicha faqat foizlar to`lanadi. Yuqorida ta‟kidlanganidek, ipoteka ssudasi uzoq muddatga beriladi. Shu sababli hatto iqtisod bir maromda bo`lgan davrda ham risk bo`ladi, xususan, kredit bozorida foiz stavkasining o`zgarishi riskni yuzaga keltiradi.

Bunday ipotekaga quyidagilar kiradi.

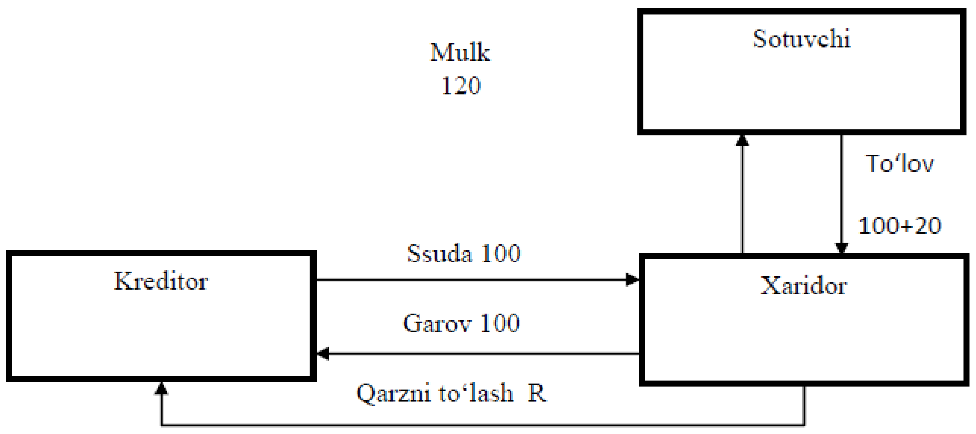
**Foiz stavkasi davriy o`zgarishidagi ssudalar (rollover mortgage, RM).** Bunday ssudada tomonlar har 3-5 yilda foiz stavkasining o`zgarish darajasini qarab chiqadilar. Natijada bozor sharoitiga ma‟lum miqdorda moslashuv imkoniyati yaratiladi.

**O`zgaruvchi foiz stavkali ipoteka (variable-rate mortgage, VRM).** Bu yerda stavka darajasi qandaydir keng tarqalgan moliyaviy ko`rsatkichga yoki indeksga bog`lanadi. Odatda stavkani qarab chiqish har yarim yilda amalga oshiriladi. Stavka o`zgarishi tez-tez yuz bermasligi uchun stavkaning yuqori va quyi chegarasi qarab chiqiladi (masalan, 2% dan ko`p emas).

Ipoteka tahlilining asosiy masalasi qarzni to`lash rejasini ishlab chiqishdan iborat. Qarzni to`lash jarayonining istalgan paytida qolgan qarzlar summasini aniqlash juda muhim.

Quyida uchta ipoteka sxemalari uchun bu muammoni yechish usullari muhokama qilinadi.

Garov uchun (qurilish) obyektni sotib olishda ipotekani amalga oshirish uchun uchta agent qatnashadigan bo`lsin: sotuvchi, xaridor(qarzdor) va kreditor. Ular orasidagi o`zaro bog`lanish ushbu sxemada ko`rsatilgan.



Sotuvchi xaridordan to`la narxi (120) bo`lgan qandaydir mulkni oladi. Buning uchun xaridor bu mulkdan garovga ssuda (100) oladi va o`zining shaxsiy mablag`iga (20) qo`shadi. Natijada oylik qarz to`lovi R ning miqdorini aniqlash va qarzni to`la qoplashgacha bo`lgan davrda qolgan qarzni to`lash masalasi yuzaga keladi.

Darhaqiqat, qarz to`lovlari (badallar) o`zgarmas rentani tashkil etadi, qo`yilgan masalani hal qilishda uzoq muddatli qarzlarni to`lash rejasini ishlab chiqish usulini tatbiq etamiz. Buning uchun ssudaning miqdori bilan zudlik to`lov miqdorini tenglashtiramiz. Oylik postnumerando badallar uchun $P = R \cdot a_{n/i}$ formulani yozamiz, bundan ssuda miqdori; P - umumiy to`lovlar soni, N-yillardagi to`lash muddati); i-oylik foiz stavkasi; R-oylik badallar miqdori; $a_{n/i}$-o`zgarmas rentaning keltirilgan koeffitsiyenti.

Izlangan badal qiymati

$$R = \frac{P}{a_{n/i}} \text{,(10.16)}$$

Prenumerando renta uchun

$$R = \frac{P}{a_{n/i}}(1+i), \text{ (10.17)}$$

(10.16) yoki (10.17) formulalardan topilgan zudlik to`lovining qiymati qarz to`lash rejasini ishlab chiqish negizi hisoblanadi.

Qabul qilingan qoidaga binoan bu summadan foizlar to`lanadi, qolgan pullar qarzni to`lashga sarflanadi.

1.8-masala. Ko`chmas mulk uchun garovga 100 mln. so`m pul 5 yil muddatga qarzga berildi. To`lov oylik postnumerando, qarz uchun 12% nominal yillik stavka bo`yicha ustama foiz to`lanadi. Qarzni to`lash rejasi tuzilsin.

$$N = 12 \cdot n = 12 \cdot 5 = 120; \quad i = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01; \quad a_{120/1} = 69{,}70052.$$

Masalaning yechilishi

Bu shartlar uchun qarzdorning oylik xarajatlari

$$R=\frac{100m\ln}{69{,}70052m\ln}=1{,}434.$$

Birinchi oy uchun foizlar =100000000$\cdot$0,01=1000000 so`m.

Qarzni to`lash uchun 1,434-1=0,434 mln. so`m. Qarzni to`lash rejasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

oy	oy boshida qolgan qarz miqdori	badal	foizlar	qarzni to`lash
1	100,000	1,434	1,000	0,434
2	99,566	1,434	0,996	0,438
3	99,128	1,434	0,991	0,443
…	….	…	….	…
37	81,305	1,434	0,813	0,621
38	80,684	1,434	0,807	0,627
39	80,057	1,434	0,801	0,633
…	….	…	….	…
37	81,305	1,434	0,813	0,621
…	….	…	….	…
118	4,219	1,434	0,042	1,392
119	2,827	1,434	0,028	1,406
120	1,441	1,434	0,042	1,441

Endi boshqa masalaga o`tamiz. Ssudani garovga berishda ikkala tomon uchun to`langan qarz summasini va ixtiyoriy oraliq momentida (masalan, shartnomani bajarilmasligi yoki uni ko`rib chiqish to`xtatilganda) qarzning qancha qismi qolganini bilish muhim ahamiyatga ega.

Ipoteka shartiga asoslangan holda quyidagi munosabatni yozamiz:

$$d_t=d_{t-1}\cdot(1+i)=d_1\cdot(1+i)^{t-1}$$

bunda d_t -to`lanadigan qarz miqdori, t - oyning tartib nomeri, i -oylik foiz stavkasi.

Oy boshidagi qoldiq qarz:

$$D_{t+1}=D_t-d_t,\quad \text{bunda } t=1,2,3,\ ...,12\cdot n.$$

Qarzni ketma-ket to`lash summalari birinchi hadi $d_1$ va maxraji $(1+i)$ ga teng bo`lgan geometrik progressiyani tashkil etadi. Ma`lumki,

$$d_1=R-D\cdot i \quad ,(10.18)$$

To`lash boshidan *t* gacha (*t* - *b*u davr oralig`iga kiradi) bo`lgan davr orasida bu geometrik progressiyaning yig`indisi:

$$W_t = d_1 \cdot S_{t/i} \;, (10.19)$$

bunda $S_{t/i}$ -o`zgarmas postnumerando rentaning jamg`arma koeffitsiyenti oy boshidagi qolgan qarzni quyidagi formuladan topamiz:

$$D_{t-1} = D_1 - W_t \,, (10.20)$$

Qarzni to`la to`lamagan holdagi va muddat oxirida qoldiq qarzni to`lashdagi standart ipoteka (ballon mortgage). Bunday ipotekaning sharti davriy badallar miqdorini kamaytirishga yoki ssuda muddatini qisqartirishga imkon yaratadi. Zudlik to`lovi shunday hisoblanadiki, bunda ular hamma qarzni to`la qoplamaydi. Muddat oxirida to`lanadigan qoldiq (ballon) qarzni *B* bilan belgilaymiz.

Ipotekaning balans tenglamasi quyidagi ko`rinishga ega:

$$D = Ra_{N/i} + B \cdot \nu^n$$

Quyidagi hollardan birida balansga erishiladi:

a)zudlik to`lovining miqdori beriladi, *B* ning qiymati aniqlanadi:

$$B = (1+i)^N \left(D - R \cdot a_{n/i}\right)$$

b) *B* beriladi, zudlik to`lovining miqdori topiladi:

$$R = \frac{D_1 - B \cdot \nu^n}{a_{n/i}}$$

**Badallarning davriy ravishda o`sishidagi ssuda.** Bu variantda ipoteka badallar ketma-ketligi yordamida beriladi. Aytaylik, badallarning o`sishi *m* vaqtning teng intervallari orqali amalga oshsin.

Har bir intervalda badal o`zgarmas. Ravshanki, to`la balanslashtiruvchi sxema uchun oxirga badal miqdori berilmaydi, u qarzning qoldiqlari yig`indisi bo`yicha aniqlanadi.

Faraz qilaylik, badallar miqdori $R_1, R_2, \ldots, R_k$ bo`lsin. Oxirgi badal qiymatini aniqlaymiz. Buning uchun birdan *k-1* gacha oraliqda operasiya boshida badalning hozirgi narxini topamiz. Uni *Q* bilan belgilaymiz:

$$Q = \sum_{1}^{k-1} R_t \cdot a_{n/i} \cdot \nu^{(t-1)m}$$

Badallar bilan qoplanmagan qarzning hozirgi narxi oxirgi davr boshida

$$W = D - Q\,.$$

Bundan ipotekaning oxirgi davrida badal miqdori quyidagi formula yordamida topiladi:

$$R_k = \frac{W}{a_{m/i} \cdot v^{(k-1)m}}.$$

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

1. Postnumerando to`lovlari vaqt bo`yicha bir xil oqimni tashkil etib, uning birinchi hadi 15 mln. so`m. Har bir keyingi to`lovlar har doim 5 mln. so`mga ortadi. Yillik foiz stavkasi 20%. To`lovlar muddati 5 yil. Shu ma‟lumotlar bo`yicha joriy va jamg`arilgan pul miqdorlari topilsin.

2. Qazilma boylik chiqaradigan joyni ekspluatasiya qilishdan keladigan daromad yiliga 4 mlrd. so`m, ekspluatasiya davri 5 yil, qazib olingan mahsulotni ortish va ularni sotish uzluksiz bo`lsin deb hisoblab, daromadni jamg`arilgan narxi 10% stavka bo`yicha diskontirlangandagi joriy qiymat topilsin.

3. Daromadning o`sishi yiliga 10%. Agar $R = 200$, $i = 10$ % , $n = 2$ yil bo`lsa, u holda joriy va jamg`arma qiymat topilsin.

4. Abadiy postnumerando renta $R_t = 4$ mln. so`m va 5 yil muddat sharti bilan 2 yilga renta muddati o`zgarmagan holda qoldirildi. Foiz stavkasi yiliga 20% bo`lsa, almashuvchi rentaning hadi topilsin.

5. $R = 5$ mln. so`m, $n = 4$ yil, $i = 10$ % shart bilan renta to`lovlar o`zgarishsiz qolgan holda 3 yilga qoldirilgan bo`lsa, yangi muddatni toping?

6. 400 mln. so`m pul 5 yilga 20%ga qarzga berilgan. Bu qarzni to`lash uchun to`lov fondi tashkil etiladi. Investirlanayotgan narsaga 22% stavka bo`yicha foiz to`lanadi. Agar fond 5 yilga tashkil etilgan bo`lib, badallar har yil oxirida bir xil pul miqdorida amalga oshiriladigan bo`lsa, zudlik to`lov miqdori topilsin.

7. To`lov fondiga yillik postnumerando renta bo`yicha 5 yil davomida pul tushadi. To`lov miqdori har gal 400 ming so`mga ortib boradi. Qarzni qoplash momentidagi qarz miqdori 5 mln. so`m bo`lib, badallar 10% yillik stavka bo`yicha ko`payadigan bo`lsa, to`lov fondini tashkil etish uchun birinchi badal miqdori va yil oxiridagi jamg`arma topilsin.

8. Uchta postnumerando rentalar – abadiy, yillik rentalar bitta qoldirilgan postnumerando renta bilan uch yilga almashadi. Shartnoma bo`yicha almashadigan renta qoldirilganligini hisobga olgan holda 10 yil muddatga ega. Almashuvchi rentalarning xarakteristikalari $R_q = 100; 120; 200$ ming so`m, ularning muddatlari 5; 10; 8 yil. Agar hisobda murakkab foiz stavkasi 20% deb qabul qilinsa, u holda bu rentaning boshlang`ich (joriy) qiymati hamda almashuvchi rentalar hadlarining qiymatlari topilsin.

MUHOKAMA UCHUN NAZORAT SAVOLLARI

1.Qarzni yopishning umumiy usuli qaday bo`ladi?

2. Yuqori foizlarda fond tashkil etish orqali qarzlar qanday yopiladi?

3. Qarz to`lovlari qismlarga ajratib qanday qoplanadi?

4. Ipoteka ssudasinima?
5. Qarzlarni qaday qilib birlashtirish mumkin?
6. Qarzlarni qaday qilib almashtirish mumkin?

11-BOB. SARMOYA JARAYONLARI TAHLILI

11.1. Boshlang'ich sarmoяli va o'zgar-mas daromad chekli loyihalar xarakteristikalarini hisoblash

Iqtisodiyotda ichki moliyaviy sohada mablag`ni aylantirish bilan katta daromad olish mumkin emas. Sarmoya kiritish yo`li orqali mablag`ni ko`paytirish mumkin. Buning uchun sarmoya jarayonlarini tahlil qilishni bilish kerak. Bunday jarayonlar – to`lovlar oqimidir, bunda sarmoya manfiy, daromadlar musbat deb qabul qilinadi.

Ba`zi umumiy tushunchalarni qaraymiz. Aytaylik, - $(R_k, t_k)$ sarmoya jarayoni bo`lsin, bunda R_k to`lov, $t_k$ momentdagi to`lovlar oqimi. Agar R_k musbat bo`lsa – bu daromad, manfiy bo`lsa xarajat yoki sarmoya. Jarayon chekli deyiladi, agar oxirgi to`lov mavjud bo`lsa, aks holda cheksiz deyiladi.

Keltirilgan sof daromad *NPV(Net Present Value)* deb *i* foiz stavkadagi 0 ga qadar diskontirlangan barcha to`lovlar oqimining algebraik yig`indisiga aytiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$NPV = \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}} \text{ ,(11.1)}$$

jarayon chekli bo`lgan hol uchun jamg`arilgan sof daromad *NFV(Net Future Value)* ni aniqlash mumkin. Uning qiymati *i* foiz stavka bo`yicha oxirgi $t_n$ to`lovgacha diskontirlashgan to`lovlar oqimining algebraik yig`indisidan iborat:

$$NFV = \frac{R_k}{(1+i)^{t_k - t_n}} \text{ ,(11.2)}$$

Ravshanki, $NFV = NPV \cdot (1+i)^{t_n}$,(11.3)

Agar *NPV=0* bo`lsa, jarayon qoplanadi deyiladi.

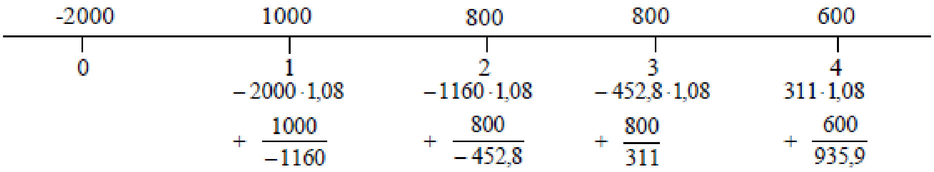
Biz faqat 0 momentdagi sarmoya jarayonlarini qaraymiz, boshqa to`lovlar musbat, ya`ni bular daromadlar bo`lgan holni qaraymiz. Bunday jarayonlar xarakteristikalaridan biri jarayonning ichki samaradorligi *q* , ya`ni eng kichik musbat son, *q* stavka bo`yicha 0 momentga diskontirlangan to`lovlarning algebraik yig`indisi 0 ga teng, ya`ni

$$\frac{R_k}{(1+i)^{t_k}} = 0 \text{ ,(11.4)}$$

Ravshanki, $i<q$ bo`lsa jarayon qoplanadi.

11.1-masala. Yil boshida ushbu miqdorda sarmoya kiritilgan *INV= 600* so`ngra 4 yil mobaynida R_1 =2000, R_2 =800, R_3=800, R_4= 1000 daromadlar olingan. Foiz stavkasi yillik 8%.

Ayniqsa xarakteristikalarini hisoblaymiz.



oxirgi hosil qilingan son *NFV =9 ,935*.

$$NPV = \frac{NFV}{(1+i)^n} = \frac{935{,}9}{1{,}08^4} = 688{,}2\,.$$

Loyiha samaradorligi: $d = \dfrac{NPV}{(-INV)} = \dfrac{688{,}2}{2000} = 0{,}344$ yoki 34,4%.

11.2. Qarzni yopish muddatini aniqlash

Agar t - qarzni yopish muddati bo`lsa, u holda $t$ minimal bo`lib, barcha n sonlar uchun

$InV + R\cdot a_{T>i} \geq 0$ yoki $a_{T>i} \geq -\dfrac{InV}{R}$ ammo $a_{T>i} = \dfrac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$ bo`lganligi uchun

$$T \geq -\frac{\ln\left(1+\dfrac{InV}{R}\cdot i\right)}{\ln(1+i)}\;; \qquad T = -\left[\frac{\ln\left(1+\dfrac{InV}{R}\cdot i\right)}{\ln(1+i)}\right] + 1\,.$$

Loyihaning ichki samaradorligi $InV + R\cdot a_{n>q} = 0$ shartni hisoblantiradi. Agar bu tenglama bir necha yechimga ega bo`lsa, ular ichida eng kichigi olinadi. Agar $-InV \geq n\cdot R$ bo`lsa, u holda yuqoridagi tenglama yechimga ega emas:

$$R\cdot a_{n-q} > \frac{R}{1+q} + \frac{R}{(1+q)^2} + \frac{R}{(1+q)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+q)^n} < n\cdot R < -InV\,.$$

Shuning uchun $-InV < n\cdot R$. Bunday holda izlanayotgan q mavjud va uni iteratsiya usulida hisoblash mumkin, jarayon

$$-InV < \frac{R}{1+q} + \frac{R}{(1+q)^2} + \frac{R}{(1+q)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+q)^n}$$

tengsizlik o`rinli bo`lmaguncha qadar davom etadi.

11.2-masala. *InV=-10000, R=2000, n=10, i=10%* bo`lsa loyiha xarakteristikalarini toping.

Yechish. 1) Qarzni yopish muddatini topamiz:

$$T = -\left[\frac{\ln\left(1-\dfrac{10000}{2000}\cdot 0{,}1\right)}{\ln(1+0{,}1)}\right] + 1 = 8$$

2) NPV ni topamiz:

$$NPV = InV + \frac{R \cdot \left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} = -10000 + \frac{2000 \cdot \left(1-1{,}1^{-10}\right)}{0{,}1} = 2289.$$

Loyiha samaradorligi $d = \frac{NPV}{(1-InV)} = \frac{2289}{1-(-10000)} = 0{,}2289$ yoki 22,89 %.

11.3. Sarmoya miqdorini aniqlash. Jarayonlar xarakteristikalarining foiz stavkasiga bog'liqligi

Aksionerlar kompaniyasi sarmoya loyihasini ishlab chiqadi. Aksionerlar loyiha muddati n, sarmoya miqdori InV ga rozi bo`ladilar, faqat ular odatdagi $i$ foiz stavkadan katta bo`lgan j samaradorlik bilan ta`minlashini talab qiladilar. Bunda yillik minimal daromad $R$ qancha bo`lishi shart.

Ravshanki, yillik daromad ushbu tenglamani $-InV = R \cdot a_{n>i}$;

$-InV = \frac{R \cdot \left[1-(1+j)^{-n}\right]}{j}$ qanoatlantirish kerak. Bunda $R = \frac{j \cdot InV}{1+(1+j)^{-n}}$.

Jarayonlar xarakteristikasini foiz stavkasiga bog'liqligi

Jarayonni ushbu berilganlar bo`yicha qaraymiz: $InV, R, n, i$ . Ma`lumki, daromadlar oqimining joriy qiymati $A = R \cdot a_{n>i}$ bunda $a_{n>i} > \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+k)^n}$.

Ko`rinib turibdiki, $i$ ning o`sishi bilan bu yig`indi $a_{n>i}$ kamayadi. Ya`ni kamayadi. Shuning uchun xulosa chiqarish lozim: foiz stavkasi ortganda keltirilgan sof daromad $NPV = InV + R \cdot a_{n-1}$ kamayadi, bundan kelib chiqadiki, qarzni yopish muddati ortadi. Ichki samaradorlik foiz stavkasiga bog`liq emas, u daromadlar oqimi va sarmoya miqdoriga bog`liq bo`ladi. Shunday qilib, sarmoya loyihasi bitta foiz stavkasi bilan yopiladi va katta foiz stavkada yopilmaydi.

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

11.3-masala. Yil boshida ushbu miqdorda sarmoya kiritilgan *INV= 800* so`ngra 4 yil mobaynida R_1 =2000, R_2 =800, R_3=800, R_4= 1000 daromadlar olingan. Foiz stavkasi yillik 8%. loyiha xarakteristikalarini toping.

11.4-masala. *InV=-40000, R=2000, n=10, i=10%* bo`lsa loyiha xarakteristikalarini toping.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR

1.Boshlang'ich sarmoяli va o'zgarmas daromad chekli loyihalar xarakteristikalarini qanday aniqlanadi?

2. Qarzni yopish muddatini aniqlashni tushuntirib bering.

3. *NPV(Net Present Value)* nima va uni qanday aniqlash mumkin?

4. *NFV(Net Future Value)* nima va uni qanday aniqlash mumkin?

5. Jarayonlar xarakteristikasini foiz stavkasiga bog‘liqligini tushuntirib bering.

12-BOB. QIMMATLI QOG`OZLAR BOZORI

12.1. Obligasiyalar va uning kursi

Qimmatli qog`ozlar bozori savdo kapitalining rivojlanish bo`sag`asida paydo bo`lgan va ko`pchilik g`arb mamlakatlarida u xo`jalik mexanizmining eng barqaror va yo`lga qo`yilgan qismlaridan biri hisoblanadi. O`zbekistonda qimmatli qog`ozlar bozorining paydo bo`lishi davlat korxonalarini xususiylashtirish va aksiyadorlik korxonalariga aylantirish jarayonlari bilan bog`liq. Bu bozor boshqa barcha bozorlardan eng avvalo unda aylanadigan tovar - qimmatli qog`ozlar bilan ajralib turadi. O`z navbatida, ularning aylanishi bu bozor ishtirokchilarining alohida tarkibi, uning qoidalari va hokazoni belgilaydi.

Qimmatli qog`ozlarning eng keng tarqalgan turi obligatsiyalar hisoblanadi. Obligatsiya - uning egasi pul mablag`lari to`langanligini bildiradigan va unga qat`iy foiz to`lagan holda belgilangan muddatda o`z nominal qiymatini qoplash majburiyatini tasdiqlaydigan qimmatli qog`oz. Obligatsiyani chiqargan tashkilot (emitent) pul qarz oluvchi va obligatsiya xarid qilgan tomon (investor) kreditor sifatida namoyon bo`ladi.

Obligatsiyaning aksiyadan asosiy farqlari quyidagicha:

- unda ko`rsatilgan muddat mobaynidagina daromad keltiradi;
- odatda egasiga oldindan ko`rsatilgan foiz bo`yicha daromad keltiradi;
- aksiyadorlik jamiyatining obligasiyasi uning egasiga ushbu jamiyat aksiyalari sifatida harakat qilish huquqini bermaydi.

Obligatsiyalarni sotib olish aksiyalarni sotib olishga nisbatan xavfsizroq hisoblanadi. Kompaniya singan holda obligasiya egasi faqat oddiy aksiya egasigagina emas, balki imtiyozli aksiya egasiga nisbatan ham oldinroq qarzini undirish huquqiga ega.

Obligatsiyalar quyidagi turlarda chiqariladi:

1. Davlat va mahalliy ichki zayom obligatsiyalari;
2. Korxonalarning obligatsiyalari.

Ular oddiy va yutuqli, foizli va foizsiz (maqsadli) erkin muomalada bo`ladigan va muomala doirasi cheklangan qilib chiqarilishi mumkin.

Obligatsiyalarning nominal narxi, qaytarib olish narxi va bozor narxi bo`ladi. Nominal narx obligatsiyaning o`ziga yozib qo`yiladi hamda keyingi qayta hisoblashlar va foizlarni chiqarish uchun asos bo`ladi.

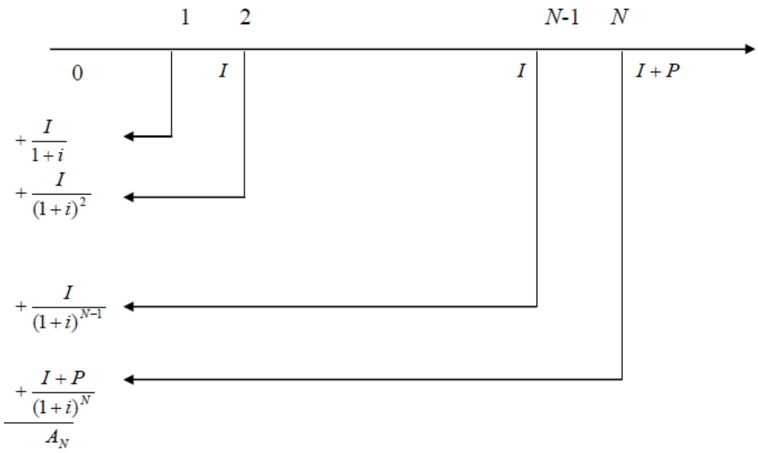
Qaytarib olish narxi-zayom muddati tugagandan so`ng emitent obligatsiyani qaytarib oladigan narx nominal narxdan farq qilishi mumkin. Obligatsiyaning nominaliga nisbatan foizlarda ifodalangan bozor narxi obligatsiya kursi deb ataladi.

Har qanday qimmatbaho qog`ozning narxi, bu qog`ozlar bilan bog`liq holda to`lovlar oqimining joriy qiymati kabi aniqlanadi.

Obligatsiya holatida to`lovlar oqimi kuponli foizlar to`lovidan iborat bo`lgan oddiy rentani tashkil etadi. Obligatsiyaning joriy qiymati bunday rentaning joriy qiymatiga teng bo`ladi.

Aytaylik, joriy foiz stavkasi, obligatsiyaning nominal narxi, *k*- kuponli foiz stavkasi, $I = P \cdot k$ kuponli to`lov miqdori, $A_N$ obligatsiyaning bozordagi joriy narxi, *N*- obligatsiya to`lovigacha bo`lgan muddat.

Bu holat uchun quyidagicha to`lovlar diagrammasini keltiramiz:



Bunday holda

$$A_N = \frac{I}{1+i} + \frac{I}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{I}{(1+i)^{N-1}} + \frac{I+P}{(1+i)^N} \quad (12.1)$$

yoki

$$A_N = I \cdot \frac{1-(1+i)^{-N}}{i} + P \cdot (1+i)^{-N}, (12.2)$$

Bu narx nominal narxga teng bo`lishi uchun ushbu tenglik o`rinli bo`lishi kerak.

$$P = I \cdot \frac{1-(1+i)^{N}}{i} + P \cdot (1+i)^{-N} \quad \text{yoki} \quad P(1-(1+i)^{-N}) = I \cdot \frac{1-(1+i)^{N}}{i} \quad \text{bundan} \quad I = P \cdot i$$

ya`ni $k=i$ kelib chiqadi.

Demak, agar kuponli foiz stavkasi foiz stavkasiga teng bo`lsa, obligatsiya narxi nominal narxga teng bo`lar ekan.

1-misol. Qandaydir *X* kompaniya har birining narxi 1000 so`mdan bo`lgan 50 mingta obligatsiya sotib, 50 mln. so`m pul miqdorida kredit olgan bo`lsin. Bu kompaniya obligatsiya egalari uchun tayinlangan muddat ichida foiz to`lash majburiyatini oldi, agar *X* kompaniyaning obligasiyasi 2000-yil 2-yanvarda chiqarilgan bo`lib, 2015-yil 1-yanvarda to`lash mo`ljallangan bo`lsa, u holda obligatsiyaning to`lov muddati 15 yil bo`ladi. Agar *X* kompaniya har bir obligatsiya uchun yiliga 150 so`m to`lasa, u holda kuponli foiz stavka $\frac{150}{1000}=0{,}15$ yoki 15%ni tashkil etadi. Bunday holda emissiya paytidagi *X* kompaniya obligatsiyasining joriy qiymati bozordagi foiz stavka 15% bo`lganda nominal qiymatiga teng bo`ladi.

Haqiqatan, $A_{15}=\sum_{t=1}^{15}\frac{150}{1{,}15^t}+\frac{1000}{1{,}15^{15}}=150\cdot\frac{1-1{,}15^{-15}}{0{,}15}+1000\cdot 1{,}15^{-15}=1000$ so`m.

Aytaylik, *X* kompaniyaning obligatsiyasi chiqarilgan kundan boshlab bir yil davomida foiz stavkasi 10% gacha kamaygan va kuponli foiz stavkalari o`zgarmasdan qolgan bo`lsin, u holda obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab 1 yil o`tgandan so`ng obligatsiyaning bozor narxi ushbuga teng bo`ladi:

$A_{14}=\frac{150}{1{,}1}+\frac{150}{1{,}1^2}+...+\frac{150}{1{,}1^{14}}+\frac{100}{1{,}1^{14}}=150\cdot\frac{1-1{,}1^{-14}}{0{,}1}+1000\cdot 1{,}1^{-14}=1368{,}33$ so`m, ya`ni nominaldan yuqori 1368,331000 obligatsiya narxining o`sishi shu bilan belgilandiki, bunda foiz stavkasining pasayishi yangi chiqariladigan obligatsiya kuponli stavkasining kamayishiga olib keladi, ya`ni yangi chiqarilgan 1000 so`mlik obligatsiya yiliga 150 so`m emas, balki 100 so`m daromad keltiradi.

Demak, eski chiqarilgan, ya`ni 15% kupon stavkali obligatsiyaga talab ortadi. 10% kuponli obligatsiya qancha daromad keltirsa, 1368,33 so`mlik obligatsiya ham shunday daromad keltiradi. Agar bozor foiz stavkasi qolgan 14 yil mobaynida o`zgarmas 10% bo`lib qolsa, u holda *X* kompaniya obligatsiyasining narxi sekin-asta 1368,33 so`mdan 1000 so`mga qadar tushib ketadi. 10% li obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab ikki yil o`tgandan so`ng uning narxi

$A_{13}=\frac{150}{1{,}1}+\frac{150}{1{,}1^2}+...+\frac{150}{1{,}1^{13}}+\frac{100}{1{,}1^{13}}=150\cdot\frac{1-1{,}1^{-13}}{0{,}1}+1000\cdot 1{,}1^{-13}=1355{,}17$ so`mni tashkil etadi.

Demak, 1368,33 so`mga olingan obligatsiyani sotishdan ko`riladigan zarar 1368,33-1355,17=13,16 so`m. Sotishdan keladigan umumiy daromad 150 – 13,16=136,84 so`m.

Qimmatbaho qog`ozlarning narxidan boshqa ularning asosiy xarakteristikalaridan biri daromadlilik yoki foyda normasi hisoblanadi. $P_v=\frac{C_r}{B_r}$, (12.3). $P_v$ *-narx o`zgarishi hisobi uchun joriy daromadlilik* (current profitability for price change accounting); C_r *-kuponni stavka* *miqdori (coupon rate amount), B_r –davr boshidagi obligasiya narxi (bond price at the beginning of the period).* (12.3) formulaga ko`ra $P_v = \frac{C_r}{B_r} = \frac{150}{1368{,}33} = 0{,}1096$ yoki 10,96%.

Narx o`zgarishi hisobi uchun daromadlilik (*davr uchun*) $P_f = \frac{C_b - C_e}{B_r}$ (12.4) formula bilan topiladi.

P_f *-Narx o`zgarishi hisobi uchun daromadlilik* (*davr uchun*) (Profitability for the price change account (for the period)), C_b *- davr boshidagi narx (price at the beginning of the period), C_e-davr oxiridagi narx(price at the end of the period), B_r- davr boshidagi obligasiya narxi (bond price at the beginning of the period).* (12.4) formulaga ko`ra

$$P_f = \frac{C_b - C_e}{B_r} = \frac{1355{,}33 - 1368{,}17}{1368{,}33} = -\frac{13{,}16}{1368{,}33} = -0{,}00096 \text{ yoki } -0{,}96\%.$$

Foyda normasi (*davr uchun*) quyidagi formula bilan aniqlanadi: $P_n = \frac{P_d}{B_r}$,(12.5)

P_n *-foyda normasi* (*davr uchun*) (Profit norm (for the period));

C_r *-kuponni stavka miqdori (coupon rate amount) yoki kuponni to`lov miqdori;*

C_e-davr oxiridagi narx(price at the end of the period),

C_b *- davr boshidagi narx (price at the beginning of the period)*

B_r- davr boshidagi obligasiya narxi (bond price at the beginning of the period).

P_d - obligasiya narxining farqi (difference in bond price): $P_d = C_b - C_e$.

Foyda normasi (*davr uchun*) quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$P_n = \frac{\text{kuponni to`lovmiqdori} + \text{obligasiya narxining farqi}}{\text{davr boshidagi obligasiya narxi}} \;;$$

$$P_n = \frac{150 - 13{,}6}{1368{,}33} = 0{,}1001 \text{ yoki } 10\%.$$

Endi bozor foiz stavkasi emissiya davridan birinchi yil mobaynida 15% dan 20% ga ortgan holni qaraylik. Bunday holda obligatsiya narxi tushadi. Obligatsiya narxi birinchi yil oxirida

$$A_{14} = \frac{150}{1{,}2} + \frac{150}{1{,}2^2} + ... + \frac{150}{1{,}2^{14}} + \frac{100}{1{,}2^{14}} = 150 \cdot \frac{1 - 1{,}2^{-14}}{0{,}2} + 1000 \cdot 1{,}2^{-14} = 769{,}47.$$

Bunday holda birinchi yil oxirida obligatsiya 230,53 diskont bilan sotilishi mumkin.

$Diskont = bozor narxi - no\min al\, narx$ (12.5) formula bilan topiladi:

$Diskont = 769{,}47 - 1000 = -230{,}53.$

Obligatsiyaning daromadliligini hisoblash uchun emissiya davridan ikkinchi yil oxiriga qadar uning bozor narxini topamiz:

$$Joriy daromadlilik = \frac{150}{769{,}47} = 0{,}1949 \text{ yoki } 19{,}49\ \%.$$

$$Narx\ o`zgarishi\ hisobi\ uchun\ daromadlilik = \frac{773{,}37 - 769{,}47}{769{,}47} = \frac{4{,}9}{769{,}47} = 0{,}0051 \text{ yoki}$$

0,51 %.

Demak,

$$daromadlilik = \frac{150 + 773{,}37 - 769{,}47}{769{,}47} = 0{,}20 \text{ yoki } 20\ \%.$$

12.2. Davriy ravishda kupon foizi to`lanadigan obltgasiya kursi va samaradorligi
Muddat oxirida sotib olingan obligasiya narxi

Obligatsiyalar qarz vositasi sifatida nominal qiymatiga ega va uning egasiga kuponlar bo`yicha foizlar bir oz muntazam daromad beradi va obligatsiyalar sotib olish narxi amal qilish muddati oxirida amalga oshiriladi.

Obligatsiyaning asosiy parametrlari:

1) N-nominal narx yoki -bu obligatsiya chiqarilgan paytda e`lon qilingan nominal qiymati;

2) obligatsiya muddati-bu kreditni emitentdan oxirgi egasiga qaytarish vaqti (nominal narx);

3) sotib olish narxi -obligatsiyani qaytarish, ya`ni to`lov tugagandan so`ng amalgga oshiriladi,. Bu nominaldan farq qilishi mumkin (garchi amalda, bozor sharoitlarining o`zgarishi - bu juda kamdan-kam hollarda, faqat muhim narsalar bilan bog`liq holda sodir bo`ladi);

4) obligatsiyani foizlar bo`yicha to`lash sanalari;

5) kupon foiz stavkasi q obligatsiya egasiga n nominalning q ulushiga teng bo`lgan bir martalik kupon daromadini beradi, ya`ni q*N. Masalan, agar kupon yiliga q=10% bo`lsa, nominal qiymati N=1000 bo`lsa, u holda bitta kupon yiliga 100, olti oy ichida esa 50 ga teng.

Obligatsiyalar chiqarilgan paytdan boshlab va muddati tugagunga qadar sotiladi va bozor narxlarida sotib olinadi. Bitta obligatsiya narxi P bo`ladi

N nominal obligatsiya n yilga mo`ljallab chiqarilgan. Kupon stavkasi bo`yicha foizi q. Obligatsiya bo`yicha foizlar to`lovlari har yil oxirida to`lanadi.

Fond bozorida investitsiyalarning daromadi risk darajasiga bog`liq bo`lib biz uni mavjud obligatsiyaning to`lov muddati tugagunga qadar daromad deb ataymiz. Agar bozor daromadi yillik to`lov muddati tugagunga qadar i % bo`lsa, obligatsiya narxini topamiz.

12.2-masala. Obligatsiyaning nominal qiymati 1000 $ni tashkil qiladi. Kupon yiliga 20% to`lash muddati tugagunga qadar yiliga bir marta to`lanadi va to`lov muddati tugagunga qadar 2 yil qoldi. Bozorda pisk darajasi bo`lgan investitsiyalar bo`yicha daromadlarga ko`ra ushbu obligatsiyaga yillik 15% ga baholanadi. Obligatsiya narxi P ni aniqlang.

Yechisn.

Har yil oxirida investor Kupon daromadini 20% miqdorida oladi: N*q = 1000 * 20 % = 200 $. Ikkinchi yil oxirida kupondan tashqari, investor nominal qiymati 1000 rublni oladi.

Shunday qilib, obligatsiya-bu oqimlarni o`z ichiga olgan ijara loyihasiga tegishli 12.1-jadvalda keltililgan.

12.1-jadval

yil	1	2
To`lov miqdori	200	1200

200 $ daromadining joriy narxi birinchi yilda

$$\frac{200}{(1+0{,}15)^1} = 173{,}91$$

1200 $ daromadining joriy narxi ikkinchi yilda

$$\frac{1200}{(1+0{,}15)^2} = 907{,}37$$

Demak, obligatsiya narxi $173{,}91 + 907{,}37 = 1081{,}28$.

q>i ekanligidan obligatsiya narxi oshib boradi.

12.3. Obligasiya narxining (kursining) foiz stavkasiga bog`liqligi

Aytaylik, T nominal obligatsiyasi n yil muddatga sotib olingan. Obligatsiya bo`yicha foizlar oxirida har yili Kupon stavkasi bo`yicha q miqdorda to`lanadi. Bozor samaradorligi yillik i % ga teng va sotib olish narxi Q ga teng, Q esa N ga teng emas. Bu yerda asosiys oldingi misol shartlaridan farq qiladi.

Obligatsiyadan tushgan daromad postnumerandoning doimiy ijarasini tashkil etib, davriy to`lovlar $C = q \cdot N$ va bir martalik to`lov muddatning oxirida quyidagiga teng:

$$qN,\ qN,\ \dots,\ qN + Q$$

Obligatsiya rentasining joriy bahosi annuitetning quyidagicha aniqlanadi:

$$P = \frac{qN}{(1+i)} + \frac{qN}{(1+i)^2} + \dots + \frac{qN}{(1+i)^n} + \frac{Q}{(1+i)^n}, \quad (12.6)$$

$$P = \frac{qN}{i}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) + \frac{Q}{(1+i)^n}, \quad (12.7)$$

Bu formuladan P-obligatsiya narxi nomi

nalning sotish narxi N ga teng, ya`ni N=P. Kupon stavkasi bozor daromadiga teng: q=i.

12.3-masala. Obligatsiya nominal qiymati 1000, Kupon narxi yiliga 20% ni tashkil qiladi va yiliga bir marta to`lanadi. Muddati tugashiga 2 yil qolgan. Bozorda investitsiyalarning risk darajasiga mos keladigan obligatsiya yillik narxi 15% deb baholangan. Agar obligatsiyani sotib olish narxi 1100 ga teng bo`lsa, obligatsiya narxini aniqlang.

Yechilishi

(12.7) fomulaga N = 1000, q = 20 %, n = 2,i = 15 %, Q = 1100 qo`yamiz:

$$P = \frac{0{,}2 \cdot 1000}{0{,}15}\left(1 - \frac{1}{(1+0{,}15)^2}\right) + \frac{1100}{(1+0{,}15)^2} = 1179{,}91.$$

Ba`zan obligatsiyalar kuponlarsiz chiqariladi va nominal qiymatiga sezilarli chegirma bilan dastlabki joylashtirishda sotiladi. Kuponsiz obligatsiya narxining (12.6) formulasini kuponga ishonish orqali yillik q = 0% bilan olish mumkin;

$$P = \frac{Q}{(1+i)^n}. \quad (12.8)$$

12.4-masala. 1000 nominal qiymati oldin sotib olingan kuponsiz 3 yillik bo`yicha obligatsiya narxini aniqlang. Bozor foiz stavkasi yiliga 15% ni tashkil qiladi.

Yechilishi

$$P = \frac{1000}{(1+0{,}15)^3} = 675{,}57.$$

Kupon bo`lmagan obligatsiya narxi

Shunday qilib har xil nominal obligatsiyalar va ularning baholati har xil bo`ladi, u holda ular taqqoslanib, obligatsiya kursi aniqlanadi. K obligatsiyasi kursi bitta P obligatsiyasining narxini anglatadi va u 100 birlik pullik o`lchovlarda hisoblanadi:

$$K = \frac{P}{\frac{N}{100}} = \frac{P}{N} \cdot 100, \quad (12.9)$$

Agar nominal obligatsiya narxi N = 1000 va obligatsiya P=1114,16 narxda sotib olingan bo`lsa, y holda uning kurs qiymati:

$$K == \frac{1114{,}16}{1000} \cdot 100 = 111{,}416.$$

Obligatsiya kursi 111,416 % ni tashkil qiladi.

Demak, $\frac{P}{N} = \frac{K}{100}$,(12.10)

(*) formulani ikkala tamonini N nomimal narxiiga bo`linib, obligatsiya kursini aniqlash formulasi hosil bo`ladi:

$$K=\frac{L}{(1+i)^n}+\frac{q\cdot 100}{(1+i)}+\frac{q\cdot 100}{(1+i)^2}+...+\frac{q\cdot 100}{(1+i)^n} \quad , \quad (12.11)$$

Bu erda L obligatsiyani sotib olish narxi Q ning kurs qiymatini bildiradi:

$$L=\frac{Q}{N}\cdot 100 ,(12.12)$$

12.5-masala. Obligatsiya muddati nominal qiymati 1000 va kupon stavkasi 20% miqdorida 2 yilga sotib olingan. Yillik bozor daromadi 15% ni tashkil qiladi. Obligatsiyani sotib olish narxi unga teng nominal qiymatiga teng. Agar kuponlar har yil oxirida to`lanadigan bo`lsa, obligatsiya kursini aniqlang.

Yechilishi

Obligatsiyani sotib olish narxi Q = N = 1000 bo`lganda kurs qiymatini topamiz:

$$L=\frac{1000}{1000}\cdot 100=100$$

Boshqacha qilib aytganda. kurs qiymati nominalning 100% ni tashkil qiladi. Endi obligatsiya kursini aniqlaymiz:

$$K=\frac{100}{(1+0,15)^2}+\frac{0,2\cdot 100}{(1+0,15)}+\frac{0,2\cdot 100}{(1+0,15)^2}+...+\frac{0,2\cdot 100}{(1+i)^2}=108,13 .$$

Obligatsiya kursi nomina narxning 108,13 % ini tashkil etadi.

Aytaylik, obligatsiya Q ≠ P qiymatda sotib olinadi. Kupon har yil oxirida q stavkasi bo`yicha to`lanadi. Obligatsiya daromadi renta tashkil qiladi va obligatsiya qaytarilganda sotib olish narxidan hamda kuponlar bo`yicha davriy tushumlardan iborat bo`ladi.

Obligatsiya P narxida sotib olingan bo`lsa, u renta qiymati va narx hosil bo`ladi. P narx investitsiya sifatida muhim o`rin tutadi.

Obligatsiyaning to`liq ichki daromadi investitsion loyihaning ichki daromadiga teng, boshqacha qilib aytganda i ning to`liq daromadi quyidagi tenglamadan topiladi:

$$\frac{qN}{(1+i)}+\frac{qN}{(1+i)^2}+...+\frac{qN}{(1+i)^n}+\frac{Q}{(1+i)^n}-P=0$$

Bundan obligatsiyaning to`liq daromadi- bozor stavkasida obligatsiya narxi barcha joriy qiymatiga teng bo`lgan daromad ekanligi kelib chiqadi.

Agar bozor stavkasi obligatsiyaning to`liq daromadidan kam bo`lsa, unda obligatsiya narxi kelajakdagi daromad bilan sotib olinmaydi.

Obligatsiyaning kurs qiymati K ma`lum bo`lsa, i ning to`liq daromadi quyidagi tenglamadan topiladi:

$$K=\frac{L}{(1+i)^n}+\frac{q\cdot 100}{(1+i)}+\frac{q\cdot 100}{(1+i)^2}+...+\frac{q\cdot 100}{(1+i)^n} ,(12.13)$$

$$K=\frac{q\cdot 100}{(1+i)}+\frac{q\cdot 100}{(1+i)^2}+...+\frac{q\cdot 100+L}{(1+i)^n}$$, bunda $L=\frac{Q}{N}\cdot 100$,(12.14)

12.6-masala. Obligatsiya nominal qiymati 1000. Kupon stakasi yiliga 20% ni tashkil qiladi va yiliga bir marta kupon to`lanadi. Agar obligatsiya 2 yilga to`lovgacha1100 narxda sotib olingan bo`lsa va 1200 dan to`lansa, obligatsiyaning to`liq darovmadi i ni aniqlang.

Yechilishi

To`liq daromad tenglamasi qyuidagicha bo`ladi:

$$\frac{2000}{(1+i)}+\frac{1400}{(1+i)^2}-1100=0$$

Bundan kelib chiqadiki, obligatsiyaning yillikto`liq daromadi 22.27% ga teng. i daromadning q kupon stavkasidan oshib ketishi obligatsiyaning sotib olish narxi uning nominalidan 20% ko`proq ekanligi bilan bog`liq.

Nol kuponli obligatsiya daromadi. Bunda obligatsiya joriy narxi n nominal narxiga teng:

$$P=\frac{N}{(1+i)^n}$$,(12.15)

Agar obligatsiyaning P narxi yoki uning K kursi ma`lum bo`lsa, u holda to`liq i daromad teng bo`ladi:

$$i=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{N}{P}}}$$,(12.16); $$i=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}}$$,(12.17

12.7-masala. Nol kuponli obligatsiyalar 5 yilda to`lanadi.To`lov vaqtida amalga oshirish kursi 45 ga teng. Obligatsiya to`liq daromadini toping.

Yechilishi

. Obligatsiya to`liq daromadini quyidagi formula bilan topamiz:

$$i=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{45}{100}}}=0{,}17346.$$ Yillik daromad17,3%ni tashkil etadi.

Bajarish uchun topshiriqlar

1. Qandaydir kompaniya har birining narxi 1000 so`mdan bo`lgan obligatsiyani 4 yil muddatga chiqardi. Agar kompaniya har bir obligatsiya uchun yiliga 200 so`m to`lasa, kuponli foiz stavka qanday bo`lgan? Kompaniyaning obligatsiyasi chiqarilgan kundan boshlab bir yil davomida foiz stavkasi 15%gacha kamaygan va kuponli foiz stavkalari o`zgarmasdan qolgan bo`lsa, u holda obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab bir yil o`tgach obligatsiyaning bozor narxi qanday bo`ladi?

2. Yuqoridagi masalada agar bozor foiz stavkasi o`zgarmas 15% bo`lib qolsa, shu obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab ikki yil o`tgandan so`ng uning narxi qancha bo`ladi?

3. 1-masala shartida bozor foiz stavkasi emissiya davridan bir yil mobaynida 20% dan 25%ga ortgan bo`lsa, u holda birinchi yil oxirida obligatsiya narxi qanday bo`lgan?

4. Qandaydir kompaniya aylanuvchi imtiyozli aksiyalarga ega bo`lib, bu aksiyalar bo`yicha yiliga 1200 so`m miqdorida dividend to`lanadigan bo`lsa va bu aksiya bo`yicha talab qilingan daromad hajmi 12%ni tashkil etgan holda aksiya narxi va dividendlar miqdori bo`yicha daromadlilikni toping?

5. 2012 yil 1 yanvarda aksiya kursi 10 ming so`m va 2012 yil oxiridagi dividend 600 p.b.ni tashkil etsa va 8% o`sish kutilayotgan bo`lsa, 2013 yil boshida aksiya kursi qanday bo`ladi? Daromadlilik darajasini 12% deb hisoblang.

6. Kompaniyaning aksiyasi bo`yicha oxirgi to`langan dividend miqdori 600 p.b.ni tashkil etsa va 200% o`sish kutilayotgan bo`lsa, bir yil uchun dividend qancha bo`ladi?

7. Aksiyaning bir yil davomidagi dividendii 580 p.b, o`sishi 10% va daromadlilik darajasi 15,5% bo`lsa, aksiyaning ichki narxini toping?

8. Aksiyaning dividendlari o`zgarmas tezlikda ikki yil mobaynida 4 marta ortgan bo`lsa, dividendlarning kutilgan o`sish tezligi qanday bo`lgan?

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR

1. Obligatsiyaning asosiy parametrlarini sanab o`ting.
2. Voyaga etgunga qadar daromad deb nima deyiladi?
3. Muddati tugashi bilan obligatsiya narxi qancha?
4. Obligatsiya kursi nimaga teng?
5. Obligatsiya rentabelligini aniqlash uchun tenglama yozing
muddat oxirida sotib olish.
6. Makoleyning davomiyligi nimani ko`rsatadi?
7. O`zgartirilgan muddat nimani ko`rsatadi?

13-BOB. NOANIQLIK SHAROITIDA MOLIYAVIY OPERATSIYA NARXINING KLASSIK SXEMASI

13.1.Risk tushunchasi

Iqtisodiy faoliyatda riskni aniqlahash bilan bog`liq masalalar qadimgi adabiyotlarda etarli darajada o`rganilmaganligining guvohi bo`lamiz. Ishlab chiqarish investitsiyasining moliyaviy tahlilida biz xarajat va to`lov ko`rsatkichlarining bir qiymatli emasligiga duch kelamiz. Shunga bog`liq ravishda riskni o`lchash va uning investitsiya natijasiga ta`sir etish muammosi kelib chiqadi.

Risk to`g`risida iqtisodchi olimlarning fikrlari xilma-xil bo`lib, ular bu tushunchaning mohiyatini turlicha talqin qilayotirlar. Buning sababi shundaki, risk keng ma`noli, faoliyatning, jarayonlarning turli bosqichlarida uchrab turuvchi ko`p qirrali tushunchadir. Risk kutilmagan hodisalar yuzaga kelganda yo`qotish xavfi yoki imkoniyatidir deb ta`rif beradi G.Panova.

Taniqli iqtisodchi olim O.I.Lavrushin fikricha risk ehtimoliy hodisaning qiymat o`lchovi bo`lib, u yo`qotishlarga olib keladi.

Kredit riski deb qarz oluvchi tomondan kredit shartnomasi shartlarining bajarilmasligi, ya`ni kredit summasining (qisman yoki to`liq) va u bo`yicha foizlarning shartnomada ko`rsatilgan muddatlarda to`lanmasligi tushuniladi.

Keng tarqalgan risk atamasi bir qiymatli emas, uning mazmuni aniq masalalar orqali yoritiladi. Bunga misol qilib quyidagi tushunchalarni, masalan, qarz berishdagi, valyuta ayirboshlashdagi, investitsiya qilishdagi siyosiy va texnologik risklar va hokazolarni olish mumkin.

Iqtisodiy amaliyotda, ayniqsa, moliyaviy faoliyatda risk va noaniqlik orasida tafovut yo`q deb hisoblanadi.

Investitsion qarorlarni qabul qilishda riskni kamaytirish yo`llaridan biri diversifikatsiya (umumiy investitsiya summasini bir qancha obyektlarga taqsimlash) hisoblanadi. Diversifikatsiya har qanday ko`rinishdagi riskni kamaytirish quroli sifatida qabul qilingan.

Investitsion tahlilda va sug`urtaviy ishda risk dispersiya va o`rtacha kvadratik chetlanish kabi statistik sonli xarakteristikalar yordamida o`lchanadi. Bu ikkala kattaliklar daromad tebranishini o`lchaydi. Ular qancha katta bo`lsa, daromadning shu o`rtacha atrofida yoyilishi shuncha katta bo`lib, risk darajasi yuqori bo`ladi.

Ravshanki, dispersiya D o`rtacha kvadratik chetlanish $\sigma = \sqrt{D}$ orasida bog`liqlik mavjud. O`z navbatida dispersiya va o`rtacha tanlanma orqali $D = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ formula yordamida topiladi. Bu yerda n-kuzatishlar soni, $\bar{x}$ – tasodifiy o`zgaruvchi ning o`rta qiymati.

13.2. Investorning riskka bo'lgan munosabati

Ma`lumki, kishilar riskka turlicha munosabatda bo`ladilar, ayrimlari tavakkal qilishni yoqtirmaydi, ayrimlari esa o`zlarini "omadli" hisoblaydilar. Investorning riskni qabul qilmasligini baholash mumkin. Buni lotereyalar misolida ko`ramiz.

Faraz qilaylik, 1,2,…,n yutuqlarga ega bo`lgan *n* ta lotereya berilgan bo`lsin. Bu yutuqlar investorning qarashi bo`yicha teng qiymatli emas.

Oddiy lotereya deb, yutuqlar to`plamidagi $L = (p_1, p_2,..., p_n)$ ehtimollar taqsimotiga aytiladi. Oddiy lotereyalardan murakkabroq lotereyalarni qurish mumkin. *k* ta $L_1, L_2,..., L_k)$ oddiy lotereyalarni olamiz. Har biriga $p_i,\ i = 1,2,..., k$ ehtimolni yozib murakkab lotereya $(L_1, p_1; L_2, p_2;,..., L_k, p_k)$ ni hosil qilamiz.

Bu lotereya quyidagicha yoritiladi: avval mos keluvchi tasodifiy mexanizm yordamida ehtimollar taqsimoti $\left(p_1, p_2,..., p_k\right)$ o`ynaladi va nomerlar to`plamidan qandaydir *i* nomerni olamiz. So`ngra oddiy lotereyalar o`ynaladi. Bunday lotereyani birinchi tartibli murakkab lotereya deb yuritiladi. Lotereyalardan 2-tartibli murakkab lotereyalarni qurish mumkin va h.k.

Bu lotereya quyidagicha yoritiladi: avval mos keluvchi tasodifiy mexanizm yordamida $p_1, p_2,..., p_n$ ehtimollar taqsimoti o`ynaladi va *1,2,..k* nomerlar to`plamidan qandaydir *i* nomerni olamiz. So`ngra oddiy $L_i$ lotereyalar o`ynaladi. Bunday lotereyani birinchi tartibli murakkab lotereya deb yuritiladi. Lotereyalardan 2-tartibli murakkab lotereyalarni qurish mumkin va h.k.

Investor uchun turli lotereyalar turlicha qadrga ega, shuning uchun lotereyalar to`plamida afzallik munosabati $L < L'$ kelib chiqadi: yozuv investor uchun ning L' afzal ekanligini bildiradi. Afzallik munosabati quyidagi xossalarga ega:

1) refleksivlik; 2) tranzitivlik; 3) etuklilik. Refleksivlik har qanday lotereya uchun $L' < L$ bo`lishini; tranzitivlik, agar $L_1 \le L_2$ va $L_2 \le L_3$ bo`lsa, u holda $L_1 \le L_3$ ekanligini; etuklilik esa ikkita loteriya uchun yo $L' \le L$ yoki $L \le L'$ to`g`riligini bildiradi.

Lotereyaning har bir *i*=1,2,...,*n* yutuqlariga shunday U_i son yozilsaki, bunda ikkita $L_1 = (p_1, p_2,..., p_n)$; $L_i^1 = (p_1^1, p_2^1,..., p_n^1)$ lotereyalar uchun $\sum_i p_i \cdot U_i \le \sum_i p_i^1 \cdot U_i$ tengsizlik bajarilsa, u holda $L \le L^1$ munosabat o`rinli bo`ladi. *i*- yutuqlarga yozilgan U_i sonlar lotereyaning foydaliligi deyiladi.

$U(L) = \sum_i p_i \cdot U_i$ son esa lotereyaning o`rtacha foydaliligi deyiladi. Ehtimollar nazariyasi nuqtai nazari bo`yicha bu matematik kutilmadir. Demak, lotereyaning foydaliligi matematik kutilma formulasi yordamida hisoblanadi.

$\left(L_1, p_1;..., L_2, p_2\right)$ birinchi tartibli murakkab lotereya oddiy lotereyaga ekvivalent bo`lishi uchun uning $j$ - yutug`ining ehtimoli $\sum p_i \cdot p_{ij}$ ga teng bo`lishi lozim. Bunda $p_{ij}$ - $i$-lotereya $L_i$ ning $j$ yutug`ining ehtimoli.

1.1-masala. Ikkita oddiy $L_1 = (0{,}1;0{,}9)$ va $L_2 = (0{,}4;0{,}6)$ lotereyalarni olamiz. $\left(L_1, 0{,}3; L_2, 0{,}7\right)$murakkab lotereya qanday oddiy lotereyaga ekvivalent bo`ladi?

Yuqoridagi qabul qilingan ta`rifga ko`ra

$$\left(0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7; 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}7\right) = \left(0{,}03 + 0{,}28; 0{,}27 + 0{,}42\right) = \left(0{,}31; 0{,}69\right)$$

Bu misolni quyidagicha davom ettiramiz. Ikkita lotereyadan bittasi 0 yutuqqa, ikkinchisi 1 yutuqqa ega bo`lsin. 0 yutuqlisi 0 foydalilikka, 1 yutuqlisi esa 100 foydalilikka ega bo`lsa, $L_1 = (0{,}1;0{,}9)$, $L_2 = (0{,}4;0{,}6)$ va $\left(L_1, 0{,}3; L_2, 0{,}7\right)$ lotereyalarning o`rtacha foydaliligini topamiz:

$U_0 = 0\,; U_1 = 100\,;\ L_3 = \left(L_1, 0{,}3; L_2, 0{,}7\right) = \left(0{,}31; 0{,}69\right).$

Hisoblashlarni davom ettiramiz:

$U(L_1) = 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}9 \cdot 100 = 90$

$U(L_2) = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 100 = 60$

$U(L_3) = 0{,}31 \cdot 0 + 0{,}69 \cdot 100 = 69$

1.2-masala. Investorning boshlang`ich mablag`i 4 mln. so`m bo`lib, pulning foydaliligi $U(x) = \sqrt{x}$ bo`lsin. Unga quyidagicha loteriya taklif etiladi: 0,5 ehtimol bilan 12 mln, 0,5 ehtimol bilan 0 mln. so`m. Investor o`yinda ishtirok etishi kerakmi?

Masalaning yechilishi: $U(4) = \sqrt{4} = 2$. Investorning 12 mln. so`mni yutgandan keyingi mablag`i 0 mln. so`mni yutgandan keyingi mablag`i $U(4 + 12) = \sqrt{16} = 4$. O`rtacha kutiladigan foydalilik boshlang`ich qiymatdan katta. Demak, investor o`yinda qatnashishi kerak.

13.3. Riskning miqdoriy bahosi va uni kamaytirish usullari

Agar moliyaviy operatsiyada har bir natijaning ehtimoli mavjud bo`lsa, bunday operatsiya ehtimoliy moliyaviy operatsiya deyiladi. Bunday operatsiyalarning daromadi, ya`ni oxirgi va boshlang`ich pul miqdorlari ayirmasining bahosi tasodifiy miqdor bo`ladi.

1.3-masala. Ushbu ikkita ehtimoliy operatsiyani qaraymiz.

O1:	-5	25
	0,01	0,99

O2:	15	25

	0,5	0,5

O_1 birinchi operatsiyada investor -5 ga teng bo`lgan pul birligini (daromad) 0,01 ehtimol bilan, 25 ga teng bo`lgan pul birligini esa 0,99 ehtimol bilan oladi. O_2 ikkinchi operatsiyada esa 15 va 25 ga teng bo`lgan pul birliklarini 0,5 ehtimol bilan oladi. Investor qaysi operatsiyani tanlaydi? Albatta qaysi operatsiyada risk kichik bo`lsa, o`shani tanlaydi. Operatsiyada risk kichik bo`lsa, o`shani tanlaydi.

Endi riskni miqdoriy baholashga o`tamiz. Operatsiyaning har bir natijasining ehtimolini yozib, investorning daromadini baholaymiz. Demak, investorning daromadi tasodifiy miqdor bo`lib, uni biz tasodifiy daromad deb ataymiz. Hozircha diskret bo`lgan hol bilan chegaralanamiz.

O:	q_j	q_1	q_2	…	q_n
	p_j	p_1	p_2	…	p_n

Bunda q_j - daromad, p_j - shu daromadning ehtimoli. Endi ehtimollar nazariyasini qo`llash mumkin. Kutiladigan o`rtacha daromad - Q daromadning matematik kutilishi, ya`ni

$$M(Q) = q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2 + ... + q_n \cdot p_n, \quad (13.1)$$

ba`zan m_Q bilan belgilanib operasiyaning samaradorligi deb ham yuritiladi.

D(Q) operatsiyaning dispersiyasi D_Q bilan ham belgilanadi:

$$D(Q) = M\left[(Q - M(Q))^2\right] = M\left(Q^2\right) - [M(Q)]^2, \quad (13.2)$$

$\sigma(Q)$ - o`rtacha kvadratik chetlanish $\sigma(Q) = \sqrt{D(Q)}$ bilan topiladi va σ_Q bilan belgilanadi.

Operatsiyaning samaradorligi va o`rtacha kvadratik chetlanishi bir xil birlikda daromad qanday birlikda o`lchansa, xuddi shunday birlikda o`lchanadi. Operatsiyaning risklik darajasini baholash daromad tasodifiy miqdorining o`rtacha kvadratik chetlanishi orqali amalga oshirish maqsadga muvofiqdir. Shunday qilib, operatsiyaning riski deb Q tasodifiy daromadning o`rtacha kvadratik chetlanishi σ_Q soniga aytiladi va uni r_Q biz bilan belgilashni kelishib olamiz. Endi 1.3-masaladagi operatsiyalarning risklarini topamiz.

Dastlab matematik kutilishlarni, so`ngra dispersiyalarni hisoblaymiz.

$$m_1 = -5 \cdot 0{,}01 + 25 \cdot 0{,}99 = 24{,}7$$

$$D_1 = M(Q_1^2) - m_1^2 = 25 \cdot 0{,}01 + 625 \cdot 0{,}99 - 24{,}7^2 = 8{,}91$$

$$r_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{8{,}91} = 2{,}98$$

$$m_2 = -15 \cdot 0{,}5 + 25 \cdot 0{,}5 = 20$$

$$D_2 = M(Q_2^2) - m_2^2 = 225 \cdot 0{,}5 + 625 \cdot 0{,}5 - 20^2 = 25$$

$$r_2 = \sqrt{D_2} = \sqrt{25} = 5$$

Demak, birinchi operatsiyaning riski kamroq: $2{,}98 < 5$.

1.4-masala. Investor quyidagi ikkita o`yinni qaramoqda. Bu o`yinlarning birida tanga tashlanmoqda. Agar tanga gerb tomoni bilan tushsa, investor 10 pul birligini oladi, agar raqam tomoni bilan tushsa, 10 pul birligini to`laydi. Bu o`yinda to`lovlar quyidagicha taqsimlangan:

	raqam	gerb
to`lovlar	-10	10
	0,5	0,5

Ikkinchi o`yinda o`yin soqqasi tashlanmoqda va bunda investorning to`lovlari quyidagicha taqsimlangan:

	1	2	3	4	5	6
to`lovlar	-20	-10	0	0	10	20
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Ikkala holda ham kutiladigan yutuq 0 ga teng. Dispersiyalarni va risklarni hisoblaymiz.

$$D_1 = 100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 100; \; r_1 = \sqrt{100} = 10;$$

$$D_2 = 2 \cdot (400 + 100) \cdot \frac{1}{6} = \frac{500}{3} = 166{,}67; \; r_2 = \sqrt{166{,}67} = 12{,}91 \approx 13;$$

Operatsiyaning kutiladigan o`rtacha daromadi, ya`ni m_Q samaradorlik va uning riski Chebishev tengsizligi bilan quyidagicha bog`langan:

$$P(|Q - m_Q| > \varepsilon) \le \frac{r_Q^2}{\varepsilon^2} \quad \text{yoki} \quad P(|Q - m_Q| \le \varepsilon) > 1 - \frac{r_Q^2}{\varepsilon^2}.$$

Ma`lumki, bu tengsizlikning xatoligi katta bo`lib u amalda ko`p qo`llanilmaydi.

Agar operatsiyaning daromadi tasodifiy bo`lib, normal taqsimot qonuni bo`yicha taqsimlangan bo`lsa, u holda risk samaradorlik bilan bog`liq bo`lgan qandaydir ehtimolni aniqroq ko`rsatadi:

$$P(|Q - m_Q| \le 3r_Q) \approx 0{,}997; \quad P(|Q - m_Q| \le 2r_Q) \approx 0{,}95.$$

Risk haqida quyidagi tasdiqlar o`rinli:

1. Operasiya miqyosi *k* marta ortsa, ya‟ni tasodifiy daromadning barcha qiymatlari *k* marta ortsa, operasiyaning samaradorligi *k* marta, riski esa $|k|$ marta ortadi.

2. Barcha daromadlar bir xil o`zgarmas son qiymatiga ortsa, operasiyaning samaradorligi shu o`zgarmas songa o`zgaradi, risk esa o`zgarmaydi.

3. 0_1 va 0_2 operatsiyalar yig`indisining dispersiyalar yig`indisiga teng bo`ladi, shuning uchun yig`indi operatsiyaning riski $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ ga teng bo`ladi.

4. Umumiy holda, ya‟ni ikkita ixtiyoriy 01 va 02 operatsiyalar uchun operatsiyalar yig`indisining riski $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 \cdot r_2 \cdot k_{12}}$ ga teng, bunda k_{12} -operatsiyalarning tasodifiy daromadlarining korrelyatsiya koeffitsiyenti.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1.5-masala. Ikkita oddiy $L_1 = (0{,}2;0{,}8)$ va $L_2 = (0{,}3;0{,}7)$ lotereyalarni olamiz. $(L_1, 0{,}4; L_2, 0{,}6)$ murakkab lotereya qanday oddiy lotereyaga ekvivalent bo`ladi?

1.6-masala. Investorning boshlang`ich mablag`i 3 mln. so`m bo`lib, pulning foydaliligi $U(x) = \sqrt{x+1}$ bo`lsin. Unga quyidagicha loteriya taklif etiladi: 0,5 ehtimol bilan 12 mln, 0,5 ehtimol bilan 0 mln. so`m. Investor o`yinda ishtirok etishi kerakmi?

1.7-masala. Ushbu ikkita ehtimoliy operatsiyani qaraymiz.

O_1:	-5	50
	0,01	0,99

O_2:	25	50
	0,5	0,5

O_1 birinchi operatsiyada investor -5 ga teng bo`lgan pul birligini (daromad) 0,01 ehtimol bilan, 50 ga teng bo`lgan pul birligini esa 0,99 ehtimol bilan oladi. O_2 ikkinchi operatsiyada esa 15 va 50 ga teng bo`lgan pul birliklarini 0,5 ehtimol bilan oladi. Investor qaysi operatsiyani tanlaydi? Albatta qaysi operatsiyada risk kichik bo`lsa, o`shani tanlaydi. Operatsiyada risk kichik bo`lsa, o`shani tanlaydi.

1.8-masala. Investor quyidagi ikkita o`yinni qaramoqda. Bu o`yinlarning birida tanga tashlanmoqda. Agar tanga gerb tomoni bilan tushsa, investor 100 pul birligini oladi, agar raqam tomoni bilan tushsa, 100 pul birligini to`laydi. Bu o`yinda to`lovlar quyidagicha taqsimlangan:

	raqam	gerb
to`lovlar	-100	100

	0,5	0,5

Ikkinchi o`yinda o`yin soqqasi tashlanmoqda va bunda investorning to`lovlari quyidagicha taqsimlangan:

	1	2	3	4	5	6
to`lovlar	-200	-100	0	0	100	200
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Albatta qaysi operatsiyada risk kichik bo`lsa, o`shani tanlaydi. Operatsiyada risk kichik bo`lsa, o`shani tanlaydi.

MUHOKAMA UCHUN NAZORAT SAVOLLARI

1. Risk tushunchasini tushuntirib bering.
2. Investorning riskka bo'lgan munosabati qanday aniqlanadi?
3. Riskning miqdoriy bahosi qanday aniqlanadi?
4. Riskning miqdoriy bahosini kamaytirish usullari qanday bo`ladi?
5. *Q* daromadning matematik kutilishi nima?
6. *D(Q)* operatsiyaning dispersiyasi nima?

14-BOB. DAROMAD DISPERSIYASI

14.1. Investorning diversifikasiyasi va daromad dispersiyasi

Riskni kamaytirish uchun diversifikatsiya nima berishini va bu maqsadga qanday sharoitda erishishni aniqlaymiz. Buning uchun tahlil obyekti sifatida qimmatbaho qog`ozlar savatini qabul qilamiz. Biz oldingi mavzuda uzoq muddatli moliyaviy operatsiyalarda tavakkalchilikning o`lchovi sifatida keng tarqalgan o`lchov – vaqt bo`yicha daromad dispersiyasi ekanligini ta`kidlagan edik. Savatni diversifikatsiyalash har qanday sharoitda to`g`ri tatbiq etilsa, daromad dispersiyasi albatta kamayadi. Agar savatning har bir komponenti (qaralayotgan masalada qimmatbaho qog`oz turi) qandaydir daromad dispersiyasi orqali xarakterlanadigan bo`lsa, u holda savatdan keladigan daromad uning tarkibini aniqlovchi dispersiyaga ega bo`ladi. Shunday qilib, savat tarkibini o`zgartirib, daromadning jamg`arma dispersiyasini o`zgartirish, ba`zi hollarda esa uni minimum holatga keltirish mumkin.

Faraz qilaylik, *n* *x*il qimmatbaho qog`ozlardan iborat bo`lgan savat mavjud bo`lsin. *i* turdagi bitta qog`ozdan keladigan daromad d_i ni tashkil etsin. Bunday holda jamg`arilgan *A* daromad ushbuga teng: $A = \sum_i a_i \cdot d_i$,(14.1)

Bunda a_i - *i* turdagi qog`ozlar miqdori. Agar *i* turdagi qog`ozdan keladigan daromad d_i - o`rtacha daromadni ifoda etsa, u holda *A* savatdagi qog`ozlardan keladigan o`rtacha daromadni ifoda etadi. Aytaylik, turli qog`ozlardan keladigan daromadlar ko`rsatkichi statistik erkli (boshqacha aytganda, bir-birini korrelyasiyalamaydigan) kattaliklardan iborat bo`lsin. Savatning daromaddispersiyasini *D* bilan belgilaymiz, u holda

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot D_i \text{ ,(14.2)}$$

bunda D_i - turdagi qog`ozlardan keladigan daromad dispersiyasi, *n* qimmatbaho qog`ozlar turlarining soni.

Faraz qilaylik, a_i savatdagi *i* turdagi qog`ozning ulushini xarakterlasin, ya‟ni

$$0 \le a_i \le 1 \quad ; \quad \sum_i a_i = 1 \text{,(14.3)}$$

Alohida qog`ozlarning statistik nuqtai nazardan bog`liq daromad ko`rsatkichlari uchun jamg`arilgan daromad dispersiyasini quyidagi formuladan topamiz:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot D_i + \sum_{i=j}^{n} a_{ij} \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \text{ ,(14.4)}$$

Bu yerda D_i –*i* turdagi qog`ozlardan keladigan daromad dispersiyasi, $r_{ij}$ - *i* va *j* turdagi qog`ozlardan keladigan daromadlar korrelyasiyasining koeffitsiyenti, σ_i va σ_j - *i* va *j* turdagi qog`ozlardan keladigan daromadlarning o`rtacha kvadratik chetlanishlari. Ikkita, *x* va *y* tasodifiy o`zgaruvchilarning korrelyasiya koeffitsiyenti ushbu formuladan topilishi bizga ma‟lum:

$$r_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})}{n\sigma_x \cdot \sigma_y}, (14.5) \text{ bunda } \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}; \ \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n}}.$$

bu yerda $\bar{x}$, $\bar{y}$ - o`rta qiymatlar (bizning misolimizda ikki xil qog`ozlardan keladigan o`rtacha daromadlar). Ko`p hollarda qulay hisob uchun quyidagi ishchi formuladan foydalaniladi:

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{\left|n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right|} \cdot \sqrt{\left|n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right|}}, (14.6)$$

Ma‟lumki, korrelyatsiya koeffitsiyenti musbat va manfiy kattaliklar bo`lishi mumkin, demak (14.4) formuladan musbat korrelyatsiyada jamg`arilgan daromad dispersiyasi ortadi, manfiy korrelyatsiyada esa u kamayadi. Aslini olganda sezilarli darajada manfiy korrelyasiyada bir qog`ozning o`rta daromadidan musbat chetlanishi boshqasining manfiy chetlanishini qoplaydi va aksincha, musbat korrelyasiyada chetlanish jamg`ariladi, natijada umumiy dispersiya va risk ortadi. Endi diversifikatsiyaning miqyosi risk o`lchoviga qanday ta‟sir qilishini kuzataylik.

Diversifikatsiyalash miqyosi deganda biz investisiya uchun tanlangan (qimmatbaho qog`ozlar turlarining soni) obyektlar miqdorini tushunamiz. Aytaylik, savat turli qog`ozlardan tashkil topgan bo`lib, bir xil $\sigma_0^2$ daromad dispersiyasiga ega bo`lsin. Savatdagi qog`ozlarni har birining solishtirma og`irligi ham bir xil, umumiy yig`ilgan jamg`arma miqdori esa 1 ga teng. Alohida qog`ozlarning daromadlilik ko`rsatkichlari statistik erkli, ya‟ni (14.2) formula tatbiq etilsin deb hisoblaymiz. Bunday sharoitda savat daromadi o`rtacha kvadratik chetlanishining bahosi uchun ushbu formulani hosil qilamiz:

$$D = \frac{1}{n}\sigma_0^2, (14.7)$$

bunda *n*- qimmatbaho qog`ozlar turlarining soni. Keltirilgan formuladan hamda ikki va uch turdagi qog`ozlardan tashkil topgan savat uchun daromad dispersiyasini aniqlaymiz. Ikki tur qog`oz uchun $D = \frac{1}{2}\sigma_0^2$ va $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}\sigma_0^2} = 0{,}71 \cdot \sigma_0$, hosil qilamiz.

Shunga o`xshash uch tur qog`oz uchun savatning o`rtacha kvadratik chetlanishi $0{,}58\sigma_0$ ni tashkil etadi. Shunday qilib, savatning tashkil etuvchilari soni ortishi bilan hatto tashkil etuvchi elementlarning dispersiyasi bir xil bo`lgan holda ham, risk kamayishini ko`ramiz.

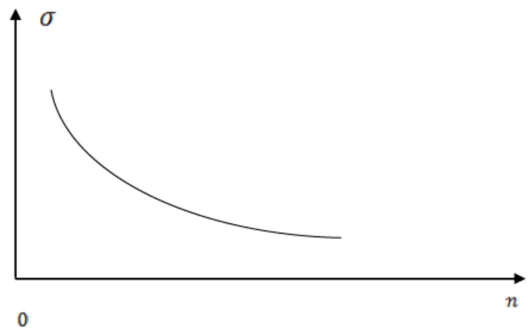
Yuqorida qaralgan misolda bir turdagi qog`ozdan to`rt tur qog`ozga o`tganda o`rtacha kvadratik chetlanish

$$\frac{\sigma_0 - \sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sigma_0}{\sigma_0}\cdot 100\% = 50\% \text{ ga,}$$

Bir tur qog`ozdan sakkiz tur qog`ozga o`tganda esa

$$\frac{\sigma_0 - \sqrt{\frac{1}{8}}\cdot\sigma_0}{\sigma_0}\cdot 100\% = 65\% \text{ ga kamayadi.}$$

O`rtacha kvadratik chetlanish va qog`oz turlarining soni orasidagi bog`lanish quyidagi rasmda ko`rsatilgan.



14.1-chizma.

Olingan bu natijalar, ya‟ni o`rtacha kvadratik chetlanishni savatning tashkil etuvchilariga bog`liq holda o`zgarishi faqat dispersiya o`zgarmas bo`lgan holda emas, balki umumiyroq bo`lgan hollarda ham o`rinli bo`lishi ravshandir.

Endi savat tarkibi o`zgarganda daromad va risk qanday o`zgarishini ko`ramiz. Buning uchun (14.2) va (14.4) formulalarga qaytamiz va ularni faqat ikki tur qog`ozlar uchun (*X* va *Y*) yozamiz. Bunday tahlil qilish amaliy ahamiyatga ega.

Erkli daromadlar uchun

$D = a_x^2 \cdot D_x + a_y^2 \cdot D_y$,(14.8)

bog`liq daromadlar uchun esa

$D = a_x^2 \cdot \sigma_x^2 + a_y^2 \cdot \sigma_y^2 + 2a_x \cdot a_y \cdot r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$,(14.9)

formulalarni hosil qilamiz. Bunda $a_y = 1 - a_x$ Bunday holda jamg`arilgan daromadning o`rta qiymati quyidagicha aniqlanadi: $A = a_x \cdot a_y + (1 - a_x)\cdot dy$,(14.10)

Aytaylik, $d_y > d_x$ va $\sigma_y > \sigma_x$ bo`lsin. Ravshanki, bunday holda ikkinchi tur qog`oz ulushining o`sishi savat daromadliligini orttiradi. (14.10) formuladan quyidagini $A = d_y + (d_y - d_x)\cdot a_y$,(14.11) hosil qilamiz.

Savatning daromad dispersiyasi (14.9) formuladan topiladi, bunda uning qiymati korrelyasiyaning ishorasi va darajasiga bog`liq bo`ladi. Shunga bog`liq holda uch holatni qaraymiz:

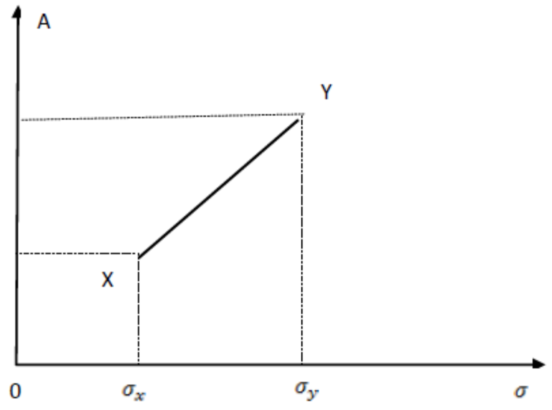
a) to`la musbat daromadlar korrelyatsiyasi ($r_{xy} = 1$),

b) to`la manfiy daromadlar korrelyatsiyasi ($r_{xy} = -1$),

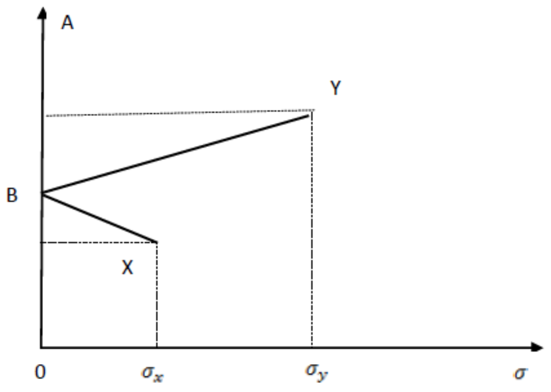
c) daromadlar erkliligi yoki 0 korrelyatsiya) ($r_{xy} = 0$).

Birinchi holda ikkala qog`ozni o`z ichiga olgan savat uchun o`rtacha kvadratik chetlanish $\sigma_x < \sigma < \sigma_y$ chegarada topiladi (14.1-chizma), *X* nuqta faqat *X* qog`ozlardan iborat bo`lgan savatni, *Y* esa *Y* qog`ozlardan iborat bo`lgan savatni ifoda etadi.

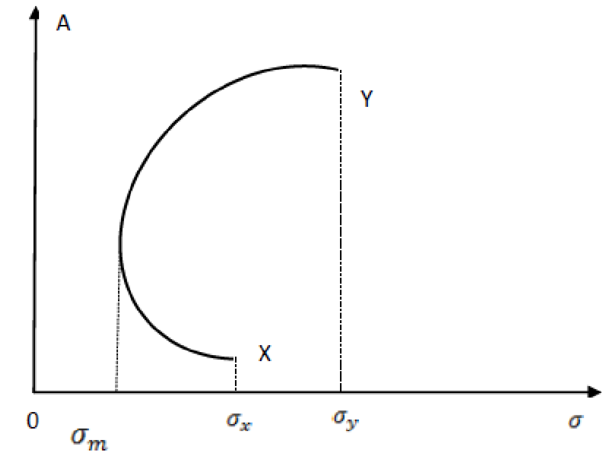
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ bo` xususiy hol uchun $D = \sigma^2$ni (14.9) formuladan olamiz. boshqacha aytganda, to`la musbat korrelyatsiyada investitsiyaning "ko`chishi" dispersiya qiymatiga hech qanday ta"sir etmaydi.



14.2-chizma.



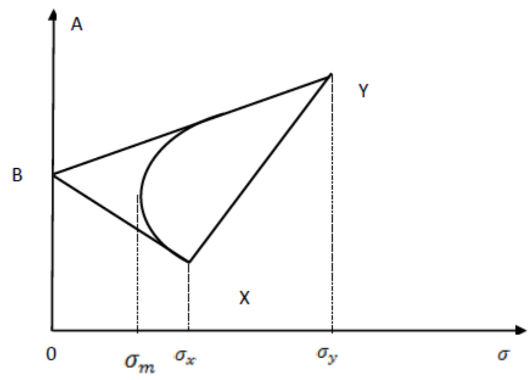
14.3-chizma.



14.4-chizma.

To`la manfiy daromadlar korrelyatsiyasi holida savat daromadlarining o`rtacha kvadratik chetlanish dinamikasi ancha murakkabdir. *X* nuqtadan *Y* nuqtaga o`tishda bu qiymat dastlab qisqaradi va *B* nuqtada nolga yetadi, so`ngra o`sadi (14.3-chizma). E"tibor bersak, *X* nuqtadan *B* nuqtaga o`tishda risk kamayadi (o`rtacha kvadratik chetlanish).

Oxirgi holatda *Y* qog`oz ulushining ortishida kvadratik chetlanish $\sigma_m$ ga teng bo`lgan minimum qiymatga ega bo`ladi, u $\sigma_x$ ga qadar o`sishi mumkin (14.4-rasm).



14.5-chizma.

Endi uchala grafikni bitta koordinata tekisligiga joylashtiramiz (14.5- chizma). Demak, "daromad – o`rtacha kvadratik chetlanish" XBY uchburchakda topiladi.

Yuqoridagi tahlildan diversifikatsiyaning samaradorligi (riskka nisbatan) faqat manfiy yoki nolli korrelyatsiyada kuzatiladi.

14.1-masala. Savat ikki xil qog`ozlardan tashkil topgan bo`lib uning parametrlari quyidagicha bo`lsin: $d_x = 2; \sigma_x = 0{,}8;$ $d_y = 3; \sigma_y = 1{,}1$ . Savatdan keladigan daromad: $A = 2a_x + 3a_y$ .` $D = 0{,}651 + 0{,}37 r_{xy}$. Ulushlardan keladigan daromad: $2 \le A \le 3$ bo`ladi. Jamg`arma daromad dispersiyasi $D = a_x^2 \cdot 0{,}8 + a_y^2 \cdot 1{,}1^2 + a_x a_y r_{xy} \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1$ qog`ozlardan keladigan daromad ulushlari 0,3 va 0,7 bo`lsin. U holda , $A = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}7;$ Shunday qilib, to`la musbat daromadlar korrelyatsiyasi uchun *D=0,281*.

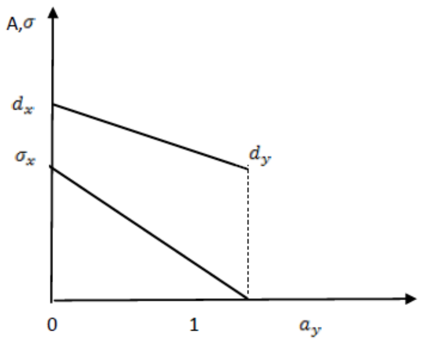
95% ehtimol bilan birinchi hol uchun jamg`arma daromad $2,7 \pm 2\sqrt{1,021} = 2,7 \pm 2,02$ chegarada, ikkinchi hol uchun esa $2,7 \pm 2\sqrt{0,781} = 2,7 \pm 1,06$ nolli korrelyatsiya uchun daromadlar chegarasi $2,7 \pm 2\sqrt{0,651} = 2,7 \pm 1,64$ ni tashkil etadi.

Endi ikki tur qog`oz bo`yicha tahlilni davom ettirib, savatga risksiz (risk free) investitsiyani kiritish daromadga qanday ta‟sir etishini o`rganamiz. (Risksiz investitsiya deganda iqtisodi turg`un bo`lgan davlatlarda davlat tomonidan chiqarilgan qimmatbaho qog`ozlar tushuniladi). Buning uchun savatdagi Y qog`ozni $d_y ; \sigma_y$ parametrlarga xuddi shunday daromadlilik, lekin nolli dispersiya bilan almashtiramiz. Bunday almashtirishdagi savatning daromadliligi o`zgarmaydi. Dispersiyaga kelsak, u quyidagiga teng bo`ladi: $D = a_x^2 \sigma_x^2$,

Savat daromadining dispersiyasi risksiz qog`ozlarni tashkil etuvchilarining solishtirma og`irligiga bog`liq bo`ladi: $\sigma = a_x \cdot \sigma_x = (1 - a_y) \cdot \sigma_x$,(14.12)

Shunday qilib, savatga risksiz qog`ozlarning qo`shilishi savat riskini kamaytiradi, savat daromadining o`rtacha kvadratik chetlanishi esa risksiz qog`ozlar ulushining chiziqli funksiyasi sifatida aniqlanadi. Agar (aks holda savatni tanlash muammosi yo`qoladi - u faqat risksiz qog`ozlarlardan tashkil topishi kerak) bo`lsa, u holda savatning daromadi risksiz qog`ozlar ulushining ortishida d_x dan d_y gacha, o`rtacha kvadratik chetlanish esa dan 0 gacha kamayadi (14.5-chizma). Ikki xil qog`ozdan tashkil topgan savat uchun oxirgi tasdiqni (14.10) formulani almashtirish natijasidan kelib chiqqan (14.13) formula izohlaydi:

$A = d_y + (d_x - d_y) \cdot a_x$,(14.13)



14.6-chizma.

O`z navbatida (14.12) formuladan $a_x = \dfrac{\sigma}{\sigma_x}$ ni topamiz.

Natijada quyidagi munosabatni yozamiz: $A = d_y + \dfrac{d_x - d_y}{\sigma_x} \cdot \sigma$, (14.14)

Bu ifodadagi kasr riskning bozor narxi deb yuritiladi. Agar bu kattalik 0,5% ga teng bo`lsa, u holda kvadratik chetlanishning 1% o`sishida daromad 5% ga o`sdi deb tushunamiz.

14.2. Daromad dispersiyasini minimallashtirish

Dispersiyaning minimumini topish uchun uni aniqlovchi formulaga qaytamiz. Agar alohida investisiya turlaridan keladigan daromadlar orasida statistik bog`liqlik yo`q deb hisoblansa, u holda savatning optimal tuzilishini aniqlash qiyin emas. Aytaylik, savat ikki xil *X* va *Y* qog`ozlardan tashkil topgan bo`lib, ularning savatdagi ulushlari a_x va $1-a_x$, dispersiyalari esa D_x va D_y bo`lsin. Umumiy dispersiya (8.2.5) formuladan topiladi. Bu funksiya uzluksiz bo`lganligi uchun ekstremumni topishning standart usulini tatbiq etamiz. Yig`indi dispersiya minimal qiymatga ega bo`lishi uchun

$$a_x = \frac{D_y}{D_x + D_y}$$

Haqiqatan,

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y;$$

$$D^*_{a_x} = 2a_x D_x - (1 - a_x) D_y = 0;$$

$$a_x = \frac{D_y}{D_x + D_y}$$

Bu qiymatga *D* minimal qiymatga ega bo`lishini ko`rsatish qiyin emas. (8.3.1) formulani dispersiyalar nisbati kabi ham ifodalashadi.

$$D_{x/y} = \frac{D_x}{D_y};$$

(8.3.1) formuladan surat va maxrajini D_y ga bo`lib

$$a_x = \frac{1}{D_{x/y} + 1}$$

formulani hosil qilamiz. Daromadlar orasida korrelyatsiya mavjud bo`lgan holda (8.2.6) formulaga murojaat qilamiz. Bu funksiya minimal qiymatga

$$a_x = \frac{D_y - r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}{D_x + D_y - 2 \cdot r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

tenglik bajarilganda erishadi. Dispersiyalar nisbati orqali ifodalasak, bu formula quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi

$$a_x = \frac{1 - r_{xy} \cdot \sqrt{D_{x/y}}}{D_{x/y} + 1 - 2 \cdot r_{xy} \cdot \sqrt{D_{x/y}}}$$

Bu keltirilgan formulalardan qog`ozlardan birini ulushining hisob qiymati ba‟zi sharoitlarda manfiy bo`ladi. Bundan kelib chiqadiki, bu qog`oz turini savatga kiritish kerak emas.

Endi savat uch xil X,Y,Z qog`oz turlaridan iborat bo`lsin deb faraz qilaylik. Ularning ulushlari a_x, a_y va $a_z = 1-(a_x + a_y)$. Ayrim qog`oz turlaridan keladigan daromadlar o`zaro bog`liq bo`lmagan holda savat daromadining dispersiyasi

$$D = a_x^2 \cdot D_x + a_y^2 \cdot D_y + \left[1-(a_x + a_y)\right] \cdot D_z$$

Dispersiya minimum qiymatga ega bo`lishi uchun quyidagi munosabatlar o`rinli bo`ladi:

$$a_x = \frac{D_{y/z}}{D_{x/z} \cdot D_{y/z} + D_{x/z} + D_{y/z}};$$

$$a_x = \frac{D_{x/z}}{D_{x/z} \cdot D_{y/z} + D_{x/z} + D_{y/z}}.$$

Uch xil qog`oz daromadlarining statistik bog`liq bo`lgan holiga to`xtalmaymiz. Masalaning umumiy qo`yilishiga o`tamiz va savat tuzilishini *n* ta tashkil etuvchilar bilan aniqlaymiz. Daromadlar erkli, ya‟ni daromadlar orasida korrelyatsiya yo`q deb hisoblaymiz. Bunday holda dispersiya (14.2.2) formula bo`yicha hisoblanadi. *n t*a ulush uchun bu formula quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi.

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot D_i + \left(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 \cdot D_n$$

O`z navbatida

$$\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 = 1-2\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right]^2$$

bunda

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_i \sum_{i=2}^{n-1} a_i$$

nihoyat quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 = 1-2\sum_{i=1}^{n-1} a_i + 2a_1\sum_{i=2}^{n-1} a_i + 2a_2\sum_{i=2}^{n-1} a_i + \ldots + 2a_{n-2} \cdot a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$$

(8.3.7) ni (8.3.6) ga qo`yamiz va n-1 - tartibli xususiy hosilani aniqlaymiz:

$$f'(a_1) = a_1 D_1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i - 1\right) \cdot D_n;$$

$$f'(a_2) = a_2 D_2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i - 1 \right) \cdot D_n ;$$

………………………………..

$$f'(a_{n-1}) = a_{n-1} D_{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i - 1 \right) \cdot D_n .$$

(8.3.8) sistemaning har bir tenglamasini D_n ga bo`lamiz va nolga tenglashtiramiz. Ma‟lum almashtirishlardan so`ng ushbuga ega bo`lamiz:

$$a_1 \left(\frac{D_1}{D_n} + 1 \right) + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} = 1;$$

$$a_1 + a_2 \left(\frac{D_2}{D_n} + 1 \right) + a_3 + ... + a_{n-1} = 1;$$

…………………………………

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} \cdot \left(\frac{D_{n-1}}{D_n} + 1 \right) = 1.$$

(8.3.9) tenglamalar sistemasini matrisa ko`rinishida yozamiz: $\overline{A} \cdot D = e$

Bundan izlangan natijani olamiz:

$$\overline{A} = D^{-1} \cdot e$$

bunda e-savat tuzilishini xarakterlovchi birlik vektor, $\overline{A}$ - savat tuzilishining *n-1* ta elementini xarakterlovchi vektor.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{D_n} + 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & \frac{D_2}{D_n} + 1 & .... & 1 \\ .... & & & \\ 1 & 1............ & & \frac{D_{n-1}}{D_n} + 1 \end{bmatrix}$$

14.2-masala. Ekspertlar to`rt xil qog`ozdan iborat bo`lgan savat uchun dispersiyani quyidagicha baholashdi: $D_{1/4} = 1{,}5$; $D_{2/4} = 2$; $D_{3/4} = 1$.

(8.3.10) formuladan

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2{,}5 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot e=\begin{pmatrix}5/9{,}5 & -1/9{,}5 & -2/9{,}5\\ -1/9{,}5 & 4/9{,}5 & -1{,}5/9{,}5\\ -2/9{,}5 & -1{,}5/9{,}5 & 6{,}5/9{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}210\\ 0{,}158\\ 0{,}316\end{pmatrix}.$$

Bundan $a_4=1-\sum_{i=1}^{3}a_i=1-0{,}684=0{,}316$ kelib chiqdi.

14.3. Daromadlar matrisasi va uning riski

Biz qarab o'tgan `matritsa ikkita qarama - qarshi tomon ishtirok etgan holatdagi `matritsani qaragan edik. Ko'pgina masalalarda `matritsadagi qo'yilgan shartlarda noaniq ma'lumotlarni yo'qotishga harakat qilish taklifi kiritiladi. Bu shartlar boshqa `matritsachining dunyoqarashiga bog'liq bo'lmay, obyektning ta'siriga bog'liq bo'ladi. Bunday hollardagi `matritsa tabiat bilan `matritsa deb ataladi.

Masalan A `matritsachi tabiat bilan `matritsada yutuq bo'lishligiga harakat qilsin. Ikkinchi `matritsachi B (tabiat) tasodifan harakat qiladi. Mumkin bo'lgan strategiyalari uning holati orqali aniqlanadi (masalan shu tumandagi ob-havo sharoiti, mahsulotlarga bo'lgan talab, yuk tashish hajmi va boshqalar). Bunday ko'rinishdagi masalalarda tabiatning holati ehtimollik xarakterga ega bo'lishligi nazarda tutiladi.

Matrisaviy `matritsa

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ \ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ \ldots\ a_{2n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1} & a_{m2}\ \ldots\ a_{mn}\end{pmatrix}$$

ko'rinishda berilgan bo'lib, uning a_{ij} elementi A-uyinchining A_i strategiyani qo'llagandagi yutug'i, tabiatning holati P_j ehtimollikka teng bo'lsin.

Matrisani elementlari r_{ij} , A-uyinchi tabiatning holati P_j ni bilgan holda A_i strategiyani qo'llab, yutuq

$r_{ij}=\beta_j-a_{ij}$ bo'lib, bunda $\beta_j=\max(a_{ij})$ dan iborat bo'ladi. Tabiat bilan `matritsa uchun bir nechta mezonlarni qaraylik.

Barcha moliyaviy operatsiyalar noaniqlik sharoitida qabul qilinadi va shuning uchun uning natijasini to`la ishonch bilan aytib bo`lmaydi, ya‟ni har qanday moliyaviy operatsiya riskka ega. operatsiyani qabul qiluvchilar qaror qabul qiluvchi shaxslar (QQSh) deb yuritiladi.

Aytaylik, QQSh turli mumkin bo`lgan $i=1,2,3,\ldots,m$ qarorlarni qarab chiqayotgan bo`lsin. Holat noaniq, faqat variantlar ma‟lum. Agar j – nchi holat uchun i – nchi qaror qabul m qilinsa, u holda QQSh tomonidan boshqarilayotgan firma q_{ij} daromad oladi. $Q=(q_{ij})$ daromadlar matritsasi deb yuritiladi. QQSh qanday qarorni qabul qilishi kerak, ya‟ni uning riskka munosabati qanda degan savol tug`iladi. Aytaylik, bizga *i* – nchi qaror olib keluvchi riskni baholash talab qilinayotgan bo`lsin. Bizga real holat noma"lum. Agar biz uni bilsak, u holda biz eng katta daromad olib keluvchi qarorni qabul qilgan bo`lardik. agar *j* – nchi holat eng katta $q_j$ daromad olib keladigan bo`lsa, u holda qaror qabul qilingan bo`lardi. Biz *i* – nchi qarorni qabul qilib q_j daromadni olishga risk qilamiz

$R = (r_{ij})$ -rask mattitsasi deyiladi.

$r_{ij} = q_j - q_{ij}$.

14.3-masala. Daromad matritsasi

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

berilgan. Risklar matritsasini tuzamiz.

$q_1 = \max q_{i1} = 8, \quad q_2 = 5, \quad q_3 = 8, \quad q_4 = 12$.

Bundan risklar matritsani ushbuga tengligi ko`rinadi.

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

1. **Maksimal Vald mezoni.** Bu kriteriya (mezon) quyidagi munosabatga asoslangan, ya'ni $a = \max \min a_{ij}$ orqali baholanadi.

2. **Minimal risk Sevidja mezoni**. Bu mezon quyidagi munosabat orqali $b = \min \max r_{ij}$ – baholanadi.

3. **Gurvis mezoni**: bu mezon quyidagi munosabatga asoslangan:

$$\max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_i a_{ij} \right\}$$

bunda $\lambda, 0 \le \lambda \le 1.$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi

1 **4.4-masala.** Quyidagi matrisa ko'rinishida berilgan tabiatga qarshi `matritsani yeching.

T ***A***	***T_1***	***T_2***	***T_3***	***T_4***	$a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \ldots + a_{in}P_n$
A_1	7	11	14	24	14
A_2	20	16	14	23	18
A_3	9	8	10	23	12,5
A_4	18	26	18	14	19
R_j	1/4	1/4	1/4	1/4	max=19

Yechish . YeQQSh ning har bir strategiyasiga mos keluvchi $a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \ldots + a_{in}P_n$ summaning qiymati jadvalning oxirgi ustunida keltirilgan Laplas mezoniga ko'ra YeQQSh sof strategiyani tanlasa, uning yutug'i eng ko'p (19 ga teng) bo'ladi.

14.5-masala. Quyida daromadlar matrisasi berilgan: Bayes mezoniga asosan maksimal daromadni ta'minlovchi optimal strategiyani toping.

T ***A***	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}P_1+a_{i2}P_2+\ldots+a_{in}P_n$
A_1	2	3	4	7	4.2
A_2	3	6	5	4	4,8
A_3	5	8	7	3	6,2
R_j	1/4	1/4	1/4	1/4	max=6,2

Yechish . YeQQSh I-strategiyani tanlasa, uning yutug'i, 2 0,1+3-0,2+4 -0 ,5+7-0,2=4 ,2 ga teng bo'ladi. II-strategiyadagi yutug' 3 0,1+6-0,2+5*0,5+4-0,2 = 4,8. Xuddi shuningdek III - strategiyadagi yutug' 6,2 bo'ladi. Bu misolda optimal strategiya A_3. Bu yo'lni tanlaganda YeQ QSh 6.2 yutuqqa ega bo'ladi.

14.6-masala. ***(Vald mezoni).***Korxona mijozlarning talabini qondirishi kerak, lekin talablarning aniq qiymati ma'lum emas, ular to'rtta qiymatdan birortasini qabul qilishi mumkin. Bu talablarni qondirish uchun korxona rahbariyati 4 xil taklif darajasini namoyon qilishi mumkin. Bu taklif darajalaridan chetlanish korxonaga ma'lum miqdorda zarar keltiradi. Bu zararlar talabdagidan ko'ra ko'proq mahsulot ishlab chiqargani yoki talab to'la qondirilmagani uchun paydo bo'lishi mumkin. Quyidagi jadval yutqazuvlar (zararlar) matrisasi bo'lib undagi har bir a_{ij} taklif darajasi va B_j talab darajasiga mos keluvchi zarar (yutqazuv)ni mln. so'm birligidagi qiymatini bildiradi.

T ***A***	T_1	T_2	T_3	T_4	$\max\limits_j a_{ij}$
A_1	7	11	14	24	24
A_2	20	18	14	22	22
A_3	9	8	10	23	23
A_4	18	26	18	14	26
					$\min\max\limits_j a_{ij} = 22$

Jadvaldan ko'rinadiki, A_1 strategiya uchun max(7,11,14,24)=24, A_2 strategiya uchun max(20,16,14,22)=22 va A_3 strategiya uchun max(9,8,10,23)=23 hamda $\min\max\limits_j a_{ij} = 22$ bo'ladi. Demak, optimal strategiya A_2 va unga mos keluvchi yutqazuvchi 22 bo'ladi.

Sevidj mezoni. Sevidj mezoni ham minimaks prinsipiga asoslangan. Faqat bunda a_{ij}-tulovlar yoki yutug'lar matrisasi o'rniga tavakkalchilik matrisasi deb ataluvchi r_{ij} matrisa ishlatiladi. Bu matrisa elementlari formulalar yordamida topiladi.

14.7-masala.. Quyidagi tabiatga qarshi `matritsani Sevidj mezoni bilan yeching.

T ***A***	T_1	T_2	$\max\limits_j a_{ij}$
A_1	110000	900	110000
A_2	100000	100000	100000
			$\min\max\limits_j a_{ij} = 100000$

Bu `matritsada YeQQSh A_2 yo'lni tanlasa, uning minimal yutqazuvi 100000 bo'ladi. Lekin bu natija tabiatning T_1 holatida ham, T_2 holatida ham ro'y bo'lishi mumkin. Tabiatning aniq bir holati haqida tasavvurga ega bo'lish uchun tavakkalchilik matrisasini tuzamiz:

T ***A***	T_1	T_2	$\max\limits_j r_{ij}$

A₁	100000	0	100000
A₂	0	99100	99100
			$\min_j \max r_{ij} = 100000$

$r_{ij} = a_{ij} - \min_j a_{ij}$. Jadvaldan qo'rinadiki, $\max r_{1j} = 100000$, $\max r_{2j} = 991000$ hamda $\min_j \max_i (rij) = 100000$. Demak optimal strategiya *A1* bo'lib, bu strategiya bo'yicha tavakkalchilikdan ko'riladigan zarar 10000 pul birlikka teng bo'ladi.
Sevidj mezoni bo'yicha optimal strategiya deb yomon sharoitda tavakkalchilikdan ko'riladigan zararni minimallashtiruvchi A_i strategiyaga aytiladi. Boshqacha aytganda Sevidj mezoni yechim qabul qilishda tavakkalchilikdan ko'riladigan zararni oldini olishga qaratilgan.

Gurvis mezoni. Bu mezon yasama mezondan iborat bo'lib, unga asosan a_{ij} *m*iqdor daromadni bildirganda YeQQSh

$$\gamma = \max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_i a_{ij} \right\}$$

(bunda $\lambda, 0 \le \lambda \le 1$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi) natijani beruvchi strategiyani tanlaydi. Agar a_{ij} *m*iqdor yutqazuvni bildirsa YeQQSh

$$\gamma = \max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_i a_{ij} \right\}$$

(bunda $\lambda, 0 \le \lambda \le 1$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi) natijani ta'minlovchi) *A,* strategiyani tanlaydi. Bu yerda $\lambda-$ yechim qabul qilish vaziyatini subyektiv baholash orqali aniqlanadigan parametr hisoblanadi. Masalan, $\lambda = 1$bo'lsa, vaziyat og'ir va uni to'g'rilash uchun choralar ko'rish talab qilinadi. $\lambda = 0$ da esa vaziyat yaxshi (optimal) hyech qanday chora ko'rmasa ham bo'ladi deb hisoblanadi. λ ni (0,1) oraliqdagi qiymati optimistik yoki pessimistik nazarga qarab tanlanadi. a ni tanlash YeQQSh ning temperamentiga va vaziyatni qanday baholashiga bog'liq. Vaziyat og'ir bo'lgan sari YeQQSh qarshi choralar ko'radi va λ ning qiymati 1 ga yaqinlashadi.

14.8-masala. Ushbu`matritsa quyidagi to'lovlar matrisasi bilan berilgan bo'lsin.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Bu `matritsaga Gurvis mezonini qo'llab optimal strategiyani $\lambda = 0,4$ uchun topamiz. Buning uchun quyidagi ko'rinishdagi jadval chizamiz va optimal strategiyani yuqoridagi shart bo'yicha tekshiramiz:

$$\gamma = \max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_i a_{ij} \right\}$$

bunda $\lambda, 0 \le \lambda \le 1$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	$\min_i(a_{ij})$	$\max_j(a_{ij})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	51,8
A_2	24	75	23	23	75	54,2
A_3	70	16	20	16	70	48,4

A4	16	27	13	13	27	21,4

$$\gamma = \max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_i a_{ij} \right\} = 21{,}4$$

dan iborat.

Demak, a_{ij} - yutqazuvchi bo'lganda optimal strategiya A_4 dan iborat ekan.

BAJARISH UCHUN TOPSHIRIQLAR

14.9- masala. Matrisa bilan berilgan quyidagi risk matritsasini toping.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 14 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

14.10-masala.. Matrisa bilan berilgan quyidagi risk matritsasini toping.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Laplas mezoni

14.11-masala. Quyidagi matrisa ko'rinishida berilgan tabiatga qarshi `matritsani yeching.

T ***A***	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}P_1+a_{i2}P_2+\ldots+a_{in}P_n$
A_1	17	21	24	14	
A_2	20	16	14	23	
A_3	9	8	10	23	
A_4	18	26	18	14	
R_j	1/4	1/4	1/4	1/4	

14.12-masala. Quyida daromadlar matrisasi berilgan: Bayes mezoniga asosan maksimal daromadni ta'minlovchi optimal strategiyani toping.

T ***A***	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}P_1+a_{i2}P_2+\ldots+a_{in}P_n$
A_1	4	3	5	7	
A_2	3	6	5	4	
A_3	5	8	7	3	
R_j	1/4	1/4	1/4	1/4	

14.13-masala. ***(Vald mezoni).***Korxona mijozlarning talabini qondirishi kerak, lekin talablarning aniq qiymati ma'lum emas, ular to'rtta qiymatdan birortasini qabul qilishi mumkin. Bu talablarni qondirish uchun korxona rahbariyati 4 xil taklif darajasini namoyon qilishi mumkin. Bu taklif darajalaridan chetlanish korxonaga ma'lum miqdorda zarar keltiradi. Bu zararlar talabdagidan ko'ra ko'proq mahsulot ishlab chiqargani yoki talab to'la qondirilmagani uchun paydo bo'lishi mumkin. Quyidagi jadval yutqazuvlar (zararlar) matrisasi bo'lib undagi har bir a_{ij} taklif darajasi va B_j talab darajasiga mos keluvchi zarar (yutqazuv)ni mln. so'm birligidagi qiymatini bildiradi.

T ***A***	T_1	T_2	T_3	T_4	$\max_j a_{ij}$
A_1	27	11	14	24	

A_2	20	18	14	22	
A_3	9	8	10	23	
A_4	18	26	18	14	

14.14-masala. Quyidagi `matritsani Sevidj mezoni bilan yeching.

T ***A***	***T_1***	***T_2***	$\max\limits_j a_{ij}$
A_1	120000	1900	110000
A_2	200000	100000	100000
			$\min\max\limits_j a_{ij} = 100000$

14.15-masala. Ushbu`matritsa quyidagi to'lovlar matrisasi bilan berilgan bo'lsin.

T_j A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	71	84	23
A_2	24	75	23
A_3	70	96	20
A_4	16	97	13

Bu `matritsaga Gurvis mezonini bo'yicha aniqlang.

MUHOKAMA UCHUN NAZORAT SAVOLLARI

1.Investorning diversifikasiyasi qanday aniqlanadi?

2. Investorning daromad dispersiyasi qanday aniqlanadi?

3.Daromad dispersiyasini minimallashtirish qanday amalga oshiriladi?

4. Investorning daromadlar matrisasi va uning riski qanday aniqlanadi?

5. Gurvis mezonini tushuntirib bering.

15-BOB. SUG'URTAVIY RENTALAR

15.1. Sug'urtada moliyaviy ekvivalentlik

Sug`urta va qandaydir investitsion loyihani tahlil qilishda shartli rentalardan foydalanish zarurati tug`iladi. Shu yo`sindagi rentalardan biri sug`urta hisoblanadi. Sug`urtada rentaning to`lovlar hadi sug`urta hodisasining yuz berishiga bog`liq bo`ladi. Bunday rentalarni sug`urtaviy annuitetlar deb ataymiz. Sug`urtaviy annuitetlarda to`lovlar soni, ba`zan ularning muddati o`zgarmay qoladi.

Sug`urta shartnomasi bo`yicha sug`urtalanuvchi oldindan sug`urtalovchiga qandaydir summani to`laydi. Bu summani mukofot (premium) deb ataymiz. O`z navbatida sug`urtalanuvchi sug`urta hodisasi yuz berganda sug`urta summasi $S$ ni oladi. Agar bu hodisaning yuz berish ehtimoli $q$ oldindan ma`lum bo`lsa, u holda nazariy jihatdan har qanday faktorni hisobga olmagan holda mukofot qiymati quyidagiga teng bo`ladi:

$$p = S \cdot q$$

Keltirilgan bu tenglik faqat sug`urtalovchi va sug`urtalanuvchi majburiyatining moliyaviy ekvivalentlik prinsipini ifodalaydi. Bu prinsip sug`urta narxi sifatida tushuniladigan – sug`urtaviy "netto-mukofot"ni hisoblashda qanday amalga oshirilishini umumiy holda ko`rsatamiz. Amalda sug`urtaviy tashkilotga tushadigan mukofot, odatda netto-mukofot qiymatini oshiradi, ya`ni netto-mukofotga qo`shimcha mablag` tushadi Bu mablag` ish yuritish bo`yicha barcha xarajatlarni qoplaydi va sug`urtaviy tashkilotga qandaydir foyda keltiradi. Bu qo`shimcha mablag`ni brutto-mukofot deb yuritiladi. Brutto-mukofotni aniqlash oddiy arifmetik masala bo`lganligi uchun gap faqat netto-mukofot haqida boradi.

Faraz qilaylik, mukofot qiymati p, sug`urtaviy hodisaning ehtimoli $q_n$ (masalan, sug`urtalanuvchining sug`urta qilingandan $n$ yil o`tgandan keyingi o`limi) bo`lsin.

Agar sug`urtaviy hodisa sug`urtaning birinchi yili yuz bersa, u holda sug`urtalanuvchi $p$ miqdordagi summani oladi (mukofot yil boshida beriladi deb faraz qilinadi), agar hodisa ikkinchi yili yuz beradigan bo`lsa, u holda mukofot qiymati $2p$ va hokazo.

Bunday mukofot qatorining matematik kutilmasi quyidagini tashkil etadi:

$$pq_1 + 2pq_2 + 3pq_3 + ... + npq_n$$

hosil qilingan bu kattalik sug`urtalanuvchining barcha badallarini ularning to`lovlar ehtimolini hisobga olgan holda umumlashtiradigan bo`lsada, mos kattaliklarning yig`indisini hisoblashda mukofot vaqtning turli momentlarida to`lanishi hisobga olinmaydi. Bu faktorni hisobga olgan holda (diskontirlash yordamida to`lovlar yig`indisini) badallarni hozirgi qiymatining matematik kutilmasini topamiz:

$$E(A) = p\left[q_1 + (1+\nu)\cdot q_2 + \left(1+\nu+\nu^2\right)\cdot q_3 + ... + \left(1+\nu+\nu^2+...+\nu^{n-1}\right)\cdot q_n\right]$$

bu yerda ν -i stavka bo`yicha diskont ko`paytuvchisi. Endi sug`urtaviy summa to`lovlariga e`tibor beramiz. Aytaylik, u yil oxirida to`lanadigan bo`lsin. U holda to`lovlarning matematik kutilmasi birinchi yili Sq_1 ikkinchi yili Sq_2 va hokazo vaqt faktorini hisobga olgan holdagi to`lovlarning matematik kutilmasi (aktuar narx) quyidagicha aniqlanadi:

$$E(S) = S\cdot\left(\nu\cdot q_1 + \nu^2\cdot q_2 + ... + \nu^n\cdot q_n\right)$$

Sug`urtalovchi va sug`urtalanuvchilar majburiyatining ekvivalentlik prinsipidan kelib chiqqan holda, quyidagi tenglikni yozishimiz mumkin:

$$E(A) = E(S)$$

bu netto-mukofot qiymati p ni aniqlash imkonini beradi. Umumiy holda shaxs sug`urtasida netto-mukofotni hisoblash metodiga shu tarzda yondoshiladi.

Aytaylik, endi gap mulk sug`urtasi haqida borayotgan bo`lsin. Agar sug`urtaviy hodisaning yuz berish ehtimoli o`zgarmas deb faraz qilinsa, u holda n yil uchun mukofotning aktuar narxi quyidagini tashkil etadi.

$$E(A) = p\cdot\left[q + (1+\nu)\cdot q + \left(1+\nu+\nu^2\right)\cdot q + ... + \left(1+\nu+\nu^2+...+\nu^{n-1}\right)\cdot q\right] = p\cdot q\cdot K,$$

bunda $K = n + \sum_{t=1}^{n-1}(n-t)\cdot\nu^t$.

O`z navbatida sug`urtaviy summa to`lovlarining aktuar narxi

$$E(S) = S\cdot q\cdot\sum_{t=1}^{n}\nu^t$$

Badallar va to`lovlar aktuar narxlarining tengligidan izlangan netto-mukofot qiymatini topamiz.

Sug`artaviy annuitetlarni shakllantirish masalasiga qadar, insonlarning hayoti bilan va ularni mukofotni hisoblashda qo`llash bilan bog`liq bo`lgan zaruriy ehtimollarni hisoblash metodiga tayanish lozim bo`ladi. Bu metod yordamida qo`yilgan masala oson hal qilinadi.

Ayrim insonlar hayotining davomiyligi tasodifiy hodisa bo`ladi va etarli darajada keng chegara bo`ylab tebranib turadi. Demografik statistika bo`yicha inson o`limining uning yoshiga bog`liqligi aniqlangan. Bu bog`liqlik o`limlik jadvali deb yuritiladi.

15.2. O'limlik jadvali va sug'urtaviy ehtimollar

Aktuar hisoblarni yoritish uchun, jumladan, sug`urtaviy annuitetlar narxini hisoblashda, sug`urtalanuvchining jinsi va yoshi, shuningdek demografik ko`rsatkichlarining normativ sistemalarini xarakterlovchi dastlabki ma`lumotlar zarur bo`ladi.

O`limlik jadvali (mortality tables) insonlarni yoshlari bo`yicha qandaydir insonlar majmuasining o`lish jarayonining sonli modelini bildiradi. Bunday jadval inson yoshining ketma-ket ortishi bilan bu majmua chegaraviy yoshga etganidan so`ng nolga yaqinlashishini ko`rsatadi. Bu qandaydir davr oralig`ida berilgan demografik statistikani umumlashtiradi.

O`zbekistonda o`limlik jadvali butun Respublika bo`yicha statistik tashkilotlar tomonidan katta tuman va viloyatlar hamda shahar va qishloq aholilari uchun alohida ishlab chiqiladi.

Biz quyida Amerika aholisining o`limlik jadvalidan namuna keltiramiz:

x	l_x	d_x	p_x	q_x
18	96 514	108	-99888	-00112
19	96 406	113	-99883	-00117
20	96 293	115	-99881	-00119
21	96 178	113	-99882	-00118
22	96 065	110	-99886	-00114
23	95 955	104	-99892	-00108
24	95 851	98	-99898	-00102
25	95 753	95	-99901	-0099
26	95 658	94	-99902	-0098
27	95 564	96	-99900	-00100
28	95 468	99	-99896	-00104
29	95 369	104	-99891	-00109
30	95 265	110	-99885	-00115
31	95 155	115	-99879	-00121
32	95 040	122	-99872	-00128
33	94 918	129	-99864	-00136
34	94 789	137	-99855	-00145
35	94 652	147	-99845	-00155
36	94 505	158	-99833	-00167
37	94 347	171	-99819	-00181
38	94 176	185	-99804	-00196
39	93 991	201	-99786	-00214
40	93 790	220	-99765	-00235

Odamlar boshlang`ich majmuasi $l_0$ dan tirik qolganlarining naqd $x$ yoshdagilarining soni $l_x$ o`limlik jadvalining asosiy ko`rsatkichi hisoblanadi.

l_x ning qiymati (l_0 dan boshqa) o`lish ehtimoli $q_x$ yoki o`lganlar soni d_x ni berilishi asosida aniqlanadi.

Hozirgi o`limlik jadvalining izlangan ko`rsatkichi odatda o`lish ehtimoli, ya`ni x yoshgacha yashaydiganlar orasidan x yoshdan x +1 yoshgacha o`lganlarining qismi xizmat qiladi.

O`limlik jadvalining ko`rsatkichlari quyidagi munosabatlar bilan bog`langan.

$$l_{x+1} = l_x - d_x\,;$$

$$d_x = l_x \cdot q_x\,;$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}\,.$$

O`limlik jadvalining berilishiga asosan yashash ehtimollari sistemasini hosil qilishimiz mumkin. Bu ehtimollar sistemasi sug`urtaviy ko`rsatkichlarni hisoblash uchun zarur bo`ladi.

Shunday ehtimollardan eng zarurini qarab chiqamiz. x yoshdan $x+n$ yoshgacha yashash ehtimoli:

$$nP_x = \frac{l_{n+x}}{l_x}\,,$$

x yoshdan so`ng yana bir yil yashash ehtimoli

$$P_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}\,,$$

15.1-masala. 30 yoshli erkak kishining yana 10 yil yashash ehtimoli

$_{10}P_{30} = \dfrac{93790}{95265} = 0{,}9845$ ni tashkil etadi.

Berilgan o`limlik jadvali bo`yicha ma`lum yoshdagilarning o`lish ehtimolini ham topishimiz mumkin. Masalan, x yoshdan $x+n$ yoshgacha bo`lganlarning o`lish ehtimoli

$$nq_x = 1 - nP_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=x}^{x+n-1} d_j$$

15.2-masala. 30 yoshli erkak kishining 10 yil davomida o`lish ehtimoli

$$_{10}q_{30} = 1 - {_{10}P_{30}} = 1 - 0{,}9845 = 0{,}0155$$

x yoshdagi shaxsning m yildan so`ng o`lish ehtimoli

$$_{m|}\,q_x = mP_x \cdot q_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+m}}{l_{x+m}} = \frac{d_{x+m}}{l_x}$$

O`z navbatida, $x$ yoshdagi shaxsning $x+m$ yoshdan $x+m+n$ yoshgacha bo`lgan intervalda o`lish ehtimoli quyidagicha topiladi:

$$_{m|n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+n+m}}{l_x} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m} + l_{x+m+n}}{l_{x+m}}$$

Oxirgi tenglikdan

$$_{m|n}q_x = {}_mP_x \cdot {}_{n|}\ q_{x+m}$$

Boshqacha aytganda izlangan ehtimollik yoshgacha yashash ehtimoli va keyingi *n* yil ichida o`lish ehtimollarining ko`paytmasiga teng.

Ba`zi bir aktuar hisoblarda (masalan, pensiya sug`urtalarda) er-xotinlarning yashash ehtimollari zarur bo`ladi. Bu ehtimollar ham o`limlik jadvali o`rdamida hisoblanadi.

Faraz qilaylik, *x* va *y* yoshdagi er-xotinlarni har birining yana *n* yil yashash ehtimollarini baholash zarur bo`lsin. Bu ehtimollarni nP_x va nP_y kabi belgilaymiz. Ularni quyidagicha topamiz:

$$nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}; \quad nP_y = \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

l_x, l_y - bu yerda *x* va *y* yoshgacha yashaydigan shaxslar soni (bu sonlar erkak va ayollar uchun tuzilgan o`limlik jadvalidan olinadi). ,

Quyidagi ikkita ishchi gipotezani kiritib yana ikkita ehtimolni hisoblaymiz:

- er-xotinlarning ikkalasi ham *x* va *y* yoshga bir kunda to`ladi;

- ulardan bittasining o`limi – boshqasining o`limiga bog`liq bo`lmagan sug`urtaviy hodisa.

Er-xotinlarning birga yana *n* yil yashash ehtimoli (er-xotin juftligini "saqlanish" ehtimoli) ikkita erkli hodisa ehtimollarining ko`paytmasi kabi hisoblanadi:

$$_nP_{xy} = {}_nP_x \cdot {}_nP_y = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \cdot l_{y+n}}$$

Ushbu formuladagi ko`paytmalarni quyidagicha belgilashadi:

$$l_x \cdot l_y = l_{xy}; \quad l_{x+n} \cdot l_{y+n} = l_{xy+n}$$

Bularni e`tiborga olib, (15.2.5) formulani

$$_nP_{xy} = \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}}$$

ko`rinishda yozishimiz mumkin.

Endi er (er *x* yoshda bo`lganda sug`urta qilingan, bu paytda xotini *y* yoshda bo`lgan) *x+n* yoshgacha yashamaydigan, xotin esa *y+n* yoshgacha yashaydigan holdagi ehtimolni hisoblaymiz.

Izlangan ehtimol (uni $_nP_{x|y}$ deb belgilaymiz) ushbu ehtimollar ko`paytmasiga teng:

$${}_nP_{x|y} = {}_nq_x \cdot {}_nP_y = \left(1 - {}_nP_x\right) \cdot {}_nP_y = {}_nP_y - {}_nP_x \cdot {}_nP_y = \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}};$$

15.3-masala. Er va xotin yoshlari mos ravishda 50 va 45 bo`lsin. O`limlik jadvalidan (SSSR aholisining o`limlik jadvali olindi) erkaklar uchun ayollar uchun Er va xotinni yana 5 yil birga yashash ehtimoli

$${}_5P_{50;45} = {}_5P_{50} \cdot {}_5P_{45} = \frac{77007}{83640} \cdot \frac{94348}{96261} = 0{,}92070 \cdot 0{,}98013 = 0{,}9024.$$

Erni 5 yil yashamaslik, xotinini esa yana 5 yil yashash ehtimoli (15.2.7) formuladan $P_{50|45} = (1 - {}_5P_{50}) \cdot {}_5P_{45} = (1 - 0{,}92070) \cdot 0{,}98013 = 0{,}007772$ ekanligi kelib chiqadi.

15.3. Kommutasion funksiya. Sug'urtaviy rentaning narxi

Sug`urtaviy annuitetlarni qisqa yozish va hisoblashlarni soddalashtirishda kommutatsion funksiyalar yoki kommutatsion sonlar qo`llaniladi. Kommutatsion sonlar yoki funksiyalarni yordamchi miqdor sifatida tushunamiz.

Standart kommutatsion funksiyalar ikki guruhga bo`linadi. Birinchisiga ma‟lum yoshgacha yashaydiganlar soni, ikkinchisiga o`lganlar soni kiradi.

Birinchi guruhning asosiy funksiyalari D_x va N_x

$$D_x = l_x \cdot v^x,$$

$$N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j$$

bu yerda murakkab stavka bo`yicha $D_x$ diskont ko`paytuvchisi, N_x o`limlik jadvalida hisobga olingan chegaraviy yosh. Ta‟rifga ko`ra

$$\sum_{t=1}^{k} D_{x+t} = N_{x+`} - N_{x+k+1}$$

Amaliyotda N_x ning yana ikkita varianti qo`llaniladi, unga to`lovlar yiliga m marta to`langanda murojaat qilinadi. Postnumerando to`lovlar uchun quyidagi ifodani qo`llaymiz:

$$N_x^{(m)} = N_x + \frac{m-1}{2m} \cdot D_x.$$

Prenumerando to`lovi uchun

$$\ddot{N}_x = N_x - \frac{m-1}{2m} \cdot D_x.$$

Ikkinchi guruh kommutatsion funksiyalar C_x va M_x hisoblanadi:

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1};$$

$$M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j \ .$$

Ikkala guruh kommutatsion sonlari orasida o`zaro bog`lanish mavjud:

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1} = (l_x - l_{x+1})v^{x+1} = l_x v^x v - l_{x+1} v^{x+1} = D_x v - D_{x+1} ;$$

Shunga o`xshash

$$M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j = \sum_{j=x}^{\omega} d_j v^{j+1} = \sum_{j=x}^{\omega} (l_j - l_{j+1}) v^{j+1} = \sum_{j=x}^{\omega} D_j v - \sum_{j=x}^{\omega} D_{j+1} = N_x v - N_{x+1} .$$

ekanligini isbotlashimiz mumkin.

Sug`urtaviy tashkilotlar kommutatsion funksiyalar jadvalining daromad normasini hisobga olgan holda ishlab chiqadilar.

Kommutatsion funksiyalar jadvalidan namuna (bu jadval i=9% da SSSR aholisining o`limlik jadvali asosida hisoblangan).

x	l_x	D_x	N_x	$N_x^{(12)}$	C_x	M_x
18	100000	21199	244593	254309	28,98	1003,6
19	99851	19420	223393	232294	30,82	974,7
20	99678	17786	203973	212125	31,98	943,8
30	96991	7310	80677	84027	25,55	648,9
35	94951	4651	49910	52042	20,78	530,3
40	92327	2940	30376	31723	19,09	431,4
50	83640	1125	10465	10981	14,54	260,7
60	68505	389	3082	3261	10,25	134,7
70	45654	110	684	734	5,72	53,1
80	19760	20	85	95	2,14	13

Er-xotin juftligini sug`urta qilishda ushbu kommutatsion funksiyaning zarurligi kelib chiqadi:

$$D_{xy} = l_{xy} \cdot v^{(x+y)/2}$$

l_{xy} ning qiymati (15.2.6) ${}_nP_{xy} = \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}}$ formula bo`yicha ni hisoblash orqali topilgan.

(15.3.7) funksiyani D_x , D_y kommutatsion funksiyalar asosida quyidagicha topiladi:

$$D_{xy} = D_x \cdot D_y \cdot v^{-(x+y)/2} = D_x \cdot D_y \cdot (1+i)^{\frac{x+y}{2}} \ .$$

O`z navbatida

$$D_{xy+n} = l_{xy+n} \cdot v^{n+\frac{x+y}{2}} ,$$

$$D_{xy+n} = D_{x+n} \cdot D_{y+n} \cdot (1+i)^{n+\frac{x+y}{2}} \ .$$

Kommutatsion sonlar ko`paytmasi katta o`lchovga ega bo`lganligi uchun ularni $10^{-3}$ ga ko`paytiriladi.

15.3-masala. Er-xotin juftligi uchun $D_{50;45}$ va $D_{55;50}$ kommutatsion sonlarni aniqlang.

Avval, $\frac{x+y}{2} = \frac{50+45}{2} = 47{,}5$ ni aniqlaymiz.

Foiz stavkasi *i=9%* bo`lgan holdagi kommutatsion sonlar quyidagi qiymatlarga ega (birinchi qator – erkaklar uchun, ikkinchi qator – ayollar uchun)

erkaklar uchun $D_{50} = 1124{,}8; D_{55} = 673{,}1$; ayollar uchun $D_{45} = 1991{,}8;\ D_{50} = 1268{,}8$.

Bulardan

$$D_{50;45} = 10^{-3} \cdot 1124{,}8 \cdot 1991{,}9 \cdot 1{,}09^{47{,}5} = 134308 \ ;$$

$$D_{55;50} = 10^{-3} \cdot 673{,}1 \cdot 1268{,}8 \cdot 1{,}09^{5+47{,}5} = 78770 \ .$$

N_x funksiyani topish qoidasiga asosan N_{xy} ni topamiz:

$$N_{xy} = \sum_{t=0}^{\omega-y} D_{x+t,y+t} \ .$$

Sug'urtaviy annuitet narxi

Yillik postnumerando annuitetlarning narxi uchun formulalarni yozish maqsadida ushbu belgilashlarni kiritamiz:

a_x - umrbod zudlik annuitet uchun,

$a_{xt|}$ - chegaralangan zudlik annuitet uchun,

$_{n|}a_x$ - qoldirilgan umrbod annuitet uchun,

$_{n|}a_{xt|}$ - chegaralangan qoldirilgan annuitet uchun.

Shunga o`xshash belgilashlar prenumerando annuitetlar uchun kiritiladi, faqat bunda $a$ yozuv o`rniga $\ddot{a}$ yoziladi.

Faraz qilaylik, qandaydir shaxsga *x* yoshdan boshlab umrining oxirigacha har yil oxirida 1 pul birligi to`lab boriladigan bo`lsin (umrbod annuitet, postnumerando, zudlik).

U holda

$$a_x = P_x \cdot v + {}_2P_x \cdot v^2 + \dots {}_{\omega-x}P_x \cdot v^{\omega-x} = \frac{l_{x+1} \cdot v}{l_x} + \frac{l_{x+2} \cdot v^2}{l_x} + \dots + \frac{l_\omega \cdot v^{\omega-x}}{l_x},$$

Har bir qo`shiluvchining surat va maxrajiga $v^x$ ni ko`paytirib, so`ngra zudlik, umrbod postnumerando annuitetlar uchun yillik to`lovlarni hisoblash maqsadida kommutatsion funksiyalarni tatbiq etish mumkin:

$$a_x = \frac{\sum_{j=1}^{\omega-x} l_{x+y} \cdot v^{x+j}}{l_x \cdot v^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Boshqa turdagi annuitetlar narxini shu tarzda aniqlashimiz mumkin. Umrbod zudlik annuitet prenumerando uchun yillik to`lov 1 pul birligi bo`lgan holda quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\ddot{a}_x = 1 + P_x \cdot v + {}_2P_x \cdot v^2 + ... + {}_{\omega-x}P_x \cdot v^{\omega-x} = \frac{\sum_{j=0}^{w-x} l_{x+j} \cdot v^{x+j}}{l_x \cdot v_x} = \frac{N_x}{D_x},$$

$\ddot{a}_x = a_x + 1$ yoki $a_x = q_{x+1} \cdot v$ tengliklar o`rinli bo`lishiga ishonch hosil qilamiz.

Turli xil yillik annuitetlarni hisoblash formulalarini quyidagi jadvalda keltiramiz:

Annuitet turlari	Postnumerando	Prenumerando
Umrbod zudlik	$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$	$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$
n yilga qoldirilgan umrbod	${}_{n\|}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$	${}_{n\|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$
Chegaralangan, zudlik (to`lovlar t yil mobaynida)	$a_{xt\|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x}$	$\ddot{a}_{xt\|} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}$
n yilga qoldirilgan chegaralangan (to`lovlar t yil mobaynida)	${}_{n\|}a_{xt\|} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1}}{D_x}$	${}_{n\|}\ddot{a}_{xt\|} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}$

15.4-masala. 20 yilga qoldirilgan, 5 yil bilan chegaralangan prenumerando annuitet narxini 30 yoshli erkaklar uchun aniqlaymiz:

$${}_{20|}\ddot{a}_{305|} = \frac{N_{50} - N_{55}}{D_{30}} = \frac{10465{,}3 - 5826{,}7}{7310{,}3} = 0{,}63453.$$

Oylik postnumerando to`lovlar uchun ushbu munosabatlarni topamiz.

Umrbod zudlik annuitet:

$$\ddot{a}_x = \frac{\ddot{N}_x^{(12)}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{11}{24},$$

Chegaralangan umrbod annuitet:

$$\ddot{a}_{xt}^{(12)} = \frac{\ddot{N}_x^{(12)} - \ddot{N}_{x+t}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+t} - \frac{11}{24}\left(D_x - D_{x+t}\right)}{D_x},$$

n yilga qoldirilgan umrbod annuitet:

$$ {}_{n|}a_x^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} + \frac{11}{24} D_{x+n+1}}{D_x} . $$

Qoldirilgan (to`lovlar *t* yil mobaynida) chegaralangan annuitet:

$$ {}_{n|}a_{xt}^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)} - N_{n+m+t+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1} + \frac{11}{24}\left(D_{x+n+1} - D_{x+n+m+1}\right)}{D_x} . $$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. 45 yoshli erkak kishining yana 10 yil yashash ehtimolini toping?
2. 45 yoshli erkak kishining 10 yil ichida o`lish ehtimolini toping?
3. Er va xotin yoshlari mos ravishda 45 va 40 bo`lsin. O`limlik jadvalidan foydalanib er va xotinni yana 5 yil birga yashash ehtimolini toping?
4. “Ilova”dan foydalanib 20 yilga qoldirilgan, 5 yil bilan chegaralangan prenumerando annuitet narxini 40 yoshli erkaklar uchun aniqlang?
5. Yuqoridagi masala uchun oylik prenumerando to`lovlar bo`yicha qoldirilgan chegaralangan annuitet va qoldirilgan umrbod annuitetlarni toping?
6. “Ilova”dan foydalanib 15 yilga qoldirilgan, 5 yil bilan chegaralangan prenumerando annuitet narxini 35 yoshli ayollar uchun aniqlang?
7. 6-masala uchun oylik prenumerando to`lovlar bo`yicha umrbod zudlik va chegaralangan umrbod annuitetlarni hisoblang?
8. 6-masala uchun oylik postnumerando to`lovlar bo`yicha umrbod zudlik va chegaralangan zudlik annuitetlarni hisoblang?

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. Башарин Г.Р. Начала финансовой математики. – М.: ИНФРА-М,1997.
2. Басовский Л. Е. Финансовый менеджмент: учебник для вузов. / Л.Е. Басовский. – М.: ИНФА-М, 2002 – 240 с.
3. Блау, С.Л. Финансовая математика: Практикум: Учеб. пос. для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Л. Блау. – М.: ИЦ Академия, 2011. - 208 с.
4. Блау С.Л. Финансовая математика: Учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования / С.Л. Блау, С.Г. Григорьев. – М.: ИЦ Академия, 2013. - 192 с.
5. Брусов, П.Н. Финансовая математика: Учебное пособие / П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова. – М.: КноРус, 2013. - 224 с.
6. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.
7. Вишняков Я.Д. Общая теория рисков: учеб. пособие для вузов / Я.Д. Вишняков, Н.Н. Радаев. – М.: Академия, 2007. – 363 с.
8. Еригов Ю.С. Финансовая математика в вопросах и ответах: учебное пособие. – Новосибирск: Сибирское соглашение, 1999. – 160 с.

9. Коптева Е. П. Финансовый менеджмент: учебно-метод. комплекс / Е. П. Коптева. – Ульяновск: УлГУ, 2006. – 82 с.

10. Красс М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник для вузов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – 5-е изд., исп. и доп. – М.: Дело, 2006. – 720 с.

11. Кундышева Е.С. Математическое моделирование в экономике: учеб. пособие для вузов. / Под ред. Б.А. Суслакова. – изд. 3-е, перераб. и испр. – М.: Дашков и К, 2007. – 352 с.

12. Касимов Ю.Ф. Финансовая математика: Учебник для бакалавров. – М.: Юрайт, 2012. - 335 с.

13. Малыхин В. И. Финансовая математика: учебное пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 247 с.

14. Мелкулов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика: учебно-справочное пособие. – М.: ИНФА-М,2007 – 407 с.

15. Самаров, К.Л. Финансовая математика: сборник задач с решениями: Учебное пособие. – М.: Альфа-М, ИНФРА-М, 2011. - 80 с.

16. Чернов В.П. Математические методы финансового анализа: Учебное пособие. – СПб.: СПбГУЭФ, 2005.

17. Чернов В.П., Ущев Ф.А. Методические указания по выполнению лабораторной работы на тему «Математическое моделирование финансовых решений». – СПб.: СПбГУЭФ, 2007.

18. Четыркин Е. М. Финансовая математика: учебник для вузов. – 6-е изд., исп. – М.: Дело, 2006.

19. Четыркин, Е.М. Финансовая математика: Учебник. – М.: ИД «Дело» РАНХиГС, 2011. - 392 с.

20. Чуйко, А.С. Финансовая математика: Учебное пособие / А.С. Чуйко, В.Г. Шершнев. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 160 с.

21. Saipnazarov Sh.A., Ortiqova M.T. Moliyaviy matematika. Darslik. – T.: “Fan va texnologiya”, 2017, 244 b.

Internet saytlari

1. https://studfile.net/preview/4339198/page:26/
2. https://www.elib.buxdu.uz/index.php/pages/referatlar-mustaqil-ish-kurs-ishi/item/14536-elektron-jadvalning-imkoniyatlari-va-vazifalari
3. www.iet.ru/mipt/2/text/curs_econometrics.htm
4. Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. Учебник по дисциплине “Эконометрика” / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. – М.: Изд-во Рос. экон. акад.,2002. 640 с.. 2002
5. https://economics.studio/ekonometrika/prilojenie-tablitsa-kriteriya-darbina-uotsona-81074.html
6. http://www.genderi.org/ozbekiston-respublikasi-oliy-va-orta-maxsus-talim-vazirligi-to-v5.html?page=40
7. https://fayllar.org/model-tushunchasi-model-turlari-model-va-modellashtirish.html

Ilovalar

1-ilova.

Yildagi kunlar soni

Yildagi kunlar soni

kunlar	yanvar	fevral	mart	aprel	may	iyun	Iyul	avgust	sentabr	oktabr	noyabr	dekabr
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

2-ilova

O`lim darajasi jadvali (AQSh aholisi uchun)

x	l_x	d_x	p_x	q_x
0	100000	2449	-97551	-02449
1	97551	153	-99843	-00157
2	97398	96	-99901	-00099
3	97302	67	-99931	-00069
4	97235	60	-99938	-00062
5	97175	55	-99943	-00057
6	97120	51	-99948	-00052
7	97069	47	-99952	-00048
8	97022	43	-99956	-00044
9	96979	40	-99959	-00041
10	96939	38	-99961	-00039
11	96901	37	-99962	-00038
12	96864	37	-99962	-00038
13	96827	40	-99959	-00041
14	96787	45	-99953	-00047
15	96742	57	-99941	-00059
16	96685	75	-99922	-00078
17	96610	96	-99901	-00099
18	96514	108	-99888	-00112
19	96406	113	-99883	-00117
20	96293	115	-99881	-00119
21	96178	113	-99882	-00118
22	96065	110	-99886	-00114
23	95955	104	-99892	-00108
24	95851	98	-99898	-00102
25	95753	95	-99901	-00099
26	95658	94	-99902	-00098
27	95564	96	-99900	-00100
28	95468	99	-99896	-00104
29	95369	104	-99891	-00109
30	95265	110	-99885	-00115
31	95155	115	-99879	-00121
32	95040	122	-99872	-00128
33	94918	129	-99864	-00136
34	94789	137	-99855	-00145
35	94652	147	-99845	-00155
36	94505	158	-99833	-00167
37	94347	171	-99819	-00181
38	94176	185	-99804	-00196
39	93991	201	-99786	-00214
40	93790	220	-99765	-00235
41	93570	242	-99741	-00259
42	93328	268	-99713	-00287
43	93060	297	-99681	-00319
44	92763	330	-99644	-00356
45	92433	369	-99601	-00399

46	92064	412	-99552	-00448
47	91652	463	-99495	-00505
48	91189	520	-99430	-00570
49	90669	584	-99356	-00644
50	90085	656	-99272	-00728
51	89429	736	-99177	-00823
52	88693	825	-99070	-00930
53	87868	923	-98949	-01051
54	86945	1029	-98816	-01184
55	85916	1144	-98669	-01331
56	84772	1265	-98508	-01492
57	83507	1393	-98332	-01668
58	82114	1526	-98141	-01859
59	80588	1664	-97935	-02065
60	78924	1805	-97713	-02287
61	77119	1947	-97475	-02525
62	75172	2088	-97222	-02778
63	73084	2228	-96951	-03049
64	70856	2366	-96661	-03243
65	68490	2499	-96352	-03648
66	65991	2625	-96022	-03978
67	63366	2745	-95668	-04332
68	60621	2856	-95288	-04712
69	57765	2959	-94878	-05122
70	54806	3051	-94434	-05566
71	51755	3130	-93953	-06047
72	48625	3195	-93430	-06570
73	45430	3243	-92861	-07139
74	42187	3273	-92241	-07759
75	38914	3282	-91566	-08434
76	35632	3266	-90833	-09167
77	32366	3225	-90037	-09963
78	29141	3154	-89176	-10824
79	25987	3054	-88248	-11752
80	22933	2923	-87253	-12747
81	20010	2763	-86192	-13808
82	17247	2576	-85066	-14934
83	14671	2365	-83878	-16122
84	12306	2137	-82634	-17366

3-ilova

O`lim darajasi jadvali (Rossiya aholisi uchun)

Yosh	Erkaklar			Ayollar		
x	l_x	d_x	q_x	l_x	d_x	q_x
0	100000	2047	0,02047	100000	1512	0,01512
1	97953	200	0,002042	98488	161	0,001635
2	97753	113	0,001156	98327	98	0,000997
3	97640	85	0,000871	98229	69	0,000702
4	97555	78	0,0008	98160	57	0,000581
5	97477	74	0,000759	98103	45	0,000459
6	97403	69	0,000708	98058	41	0,000418
7	97334	62	0,000637	98017	39	0,000398
8	97272	57	0,000586	97978	39	0,000398
9	97215	57	0,000586	97939	37	0,000378
10	97158	54	0,000556	97902	31	0,000317
11	97104	54	0,000556	97871	31	0,000317
12	97050	56	0,000577	97840	31	0,000317
13	96994	63	0,00065	97809	35	0,000358
14	96931	70	0,000722	97774	38	0,000389
15	96861	105	0,001084	97736	47	0,000481
16	96756	151	0,001561	97689	68	0,000696
17	96605	208	0,002153	97621	92	0,000942
18	96397	261	0,002708	97529	92	0,000943
19	96136	299	0,00311	97437	93	0,000954
20	95837	351	0,003662	97344	93	0,000955
21	95486	379	0,003969	97251	94	0,000967
22	95107	388	0,00408	97157	95	0,000978
23	94719	375	0,003959	97062	98	0,00101
24	94344	392	0,004155	96964	98	0,001011
25	93952	441	0,004694	96866	99	0,001022
26	93511	473	0,005058	96767	107	0,001106
27	93038	529	0,005686	96660	132	0,001366
28	92509	543	0,00587	96528	137	0,001419
29	91966	547	0,005948	96391	138	0,001432
30	91419	597	0,00653	96253	149	0,001548
31	90822	639	0,007036	96104	164	0,001706
32	90183	695	0,007707	95940	172	0,001793
33	89488	757	0,008459	95768	180	0,00188
34	88731	797	0,008982	95588	197	0,002061
35	87934	832	0,009462	95391	218	0,002285
36	87102	905	0,01039	95173	234	0,002459
37	86197	907	0,010522	94939	250	0,002633
38	85290	940	0,011021	94689	267	0,00282
39	84350	1006	0,011926	94422	279	0,002955
40	83344	1145	0,013738	94143	310	0,003293
41	82199	1198	0,014574	93833	344	0,003666
42	81001	1194	0,014741	93489	382	0,004086
43	79807	1208	0,015137	93107	417	0,004479
44	78599	1212	0,01542	92690	458	0,004941
45	77387	1292	0,016695	92232	449	0,004868

46	76095	1394	0,018319	91783	481	0,005241
47	74701	1379	0,01846	91302	512	0,005608
48	73322	1432	0,01953	90790	547	0,006025
49	71890	1536	0,021366	90243	571	0,006327
50	70354	2001	0,028442	89672	680	0,007583
51	68353	2107	0,030825	88992	847	0,009518
52	66246	2156	0,032545	88145	884	0,010029
53	64090	2143	0,033437	87261	966	0,01107
54	61947	2088	0,033706	86295	959	0,011113
55	59859	2028	0,03388	85336	949	0,011121
56	57831	1974	0,034134	84387	952	0,011281
57	55857	1917	0,03432	83435	954	0,011434
58	53940	1870	0,034668	82481	1009	0,012233
59	52070	1824	0,03503	81472	1012	0,012421
60	50246	2127	0,042332	80460	1121	0,013932
61	48119	2458	0,051082	79339	1334	0,016814
62	45661	2395	0,052452	78005	1499	0,019217
63	43266	2309	0,053368	76506	1621	0,021188
64	40957	2234	0,054545	74885	1745	0,023302
65	38723	2167	0,055962	73140	1785	0,024405
66	36556	2055	0,056215	71355	1812	0,025394
67	34501	2009	0,05823	69543	1834	0,026372
68	32492	1955	0,060169	67709	1844	0,027234
69	30537	1933	0,0633	65865	1914	0,029059
70	28604	1933	0,067578	63951	2075	0,032447
71	26671	1902	0,071313	61876	2198	0,035523
72	24769	1820	0,073479	59678	2375	0,039797
73	22949	1803	0,078566	57303	2515	0,043889
74	21146	1735	0,082049	54788	2712	0,0495
75	19411	1782	0,091804	52076	2987	0,057358
76	17629	1831	0,103863	49089	3173	0,064638
77	15798	1762	0,111533	45916	3337	0,072676
78	14036	1734	0,123539	42579	3538	0,083093
79	12302	1687	0,0137132	39041	3399	0,087062
80	10615	1461	0,137635	35642	3301	0,092615
81	9154	1283	0,140157	32341	3287	0,101636
82	7871	1153	0,146487	29054	3224	0,110966
83	6718	1078	0,160464	25830	3156	0,122184
84	5640	960	0,170213	22674	3151	0,13897
85	4680	861	0,183974	19523	3001	0,153716

4-ilova

O`lim darajasi jadvali (O`zbekiston aholisi uchun)

Yoshi x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x
0	100 000	2126	100 000	1 061 502	1 933	3 500	25 732
1	97 874	662	88 976	961 502	547	1 567	22 232
2	97 212	222	80 340	872 526	167	1 020	20 665
3	96 990	119	72 870	792 185	81	853	19 645
4	96 871	79	66 164	719 315	49	772	18 792
5	96 792	63	60 100	653 151	36	723	18 020
6	96 729	60	54 601	593 051	31	687	17 297
7	96 669	52	49 606	538 450	24	657	16 610
8	96 617	49	45 073	488 843	21	632	15 953
9	96 568	48	40 954	443 771	19	611	15 321
10	96 520	48	37 213	402 816	17	593	14 709
11	96 472	50	33 813	365 604	16	576	14 116
12	96 422	49	30 723	331 791	14	560	13 540
13	96 373	52	27 916	301 068	14	546	12 980
14	96 321	60	25 364	273 152	14	532	12 434
15	96 261	67	23 044	247 788	15	518	11 902
16	96 194	81	20 935	224 744	16	503	11 384
17	96 113	90	19 015	203 809	16	487	10 880
18	96 023	101	17 271	184 794	17	471	10 393
19	95 922	113	15 684	167 523	17	455	9 922
20	95 809	124	14 241	151 839	17	438	9 467
21	95 685	132	12 930	137 598	16	421	9 029
22	95 553	149	11 738	124 668	17	405	8 608
23	95 404	148	10 655	112 929	15	388	8 203
24	95 256	170	9 671	102 275	16	373	7 815
25	95 086	169	8 776	92 604	14	358	7 442
26	94 917	185	7 964	83 828	14	343	7 084
27	94 732	196	7 226	75 864	14	329	6 741
28	94 536	204	6 555	68 638	13	316	6 412
29	94 332	215	5 947	62 082	12	303	6 096
30	94 117	229	5 394	56 136	12	290	5 794
31	93 888	237	4 891	50 742	11	279	5 503
32	93 651	248	4 436	45 851	11	267	5 225
33	93 403	252	4 022	41 415	10	257	4 957
34	93 151	274	3 646	37 393	10	247	4 701
35	92 877	281	3 305	33 747	9	237	4 454
36	92 596	295	2 995	30 442	9	228	4 217
37	92 301	293	2 714	27 447	8	219	3 989

38	92 008	313	2 460	24 733	8	211	3 770
39	91 695	340	2 229	22 273	8	204	3 558
40	91 355	373	2 018	20 044	7	196	3 354
41	90 982	387	1 827	18 026	7	189	3 158
42	90 595	410	1 654	16 198	7	182	2 969
43	90 185	452	1 497	14 544	7	175	2 788
44	89 733	466	1 354	13 047	6	168	2 613
45	89 267	545	1 225	11 693	7	162	2 445
46	88 722	596	1 107	10 468	7	155	2 283
47	88 126	633	999	9 361	7	148	2 128
48	87 493	715	902	8 362	7	142	1 980
49	86 778	763	813	7 460	6	135	1 838
50	86 015	867	733	6 647	7	128	1 703
51	85 148	926	659	5 914	7	122	1 575
52	84 222	1035	593	5 255	7	115	1 453
53	83 187	1060	532	4 662	6	109	1 338
54	82 127	1126	478	4 130	6	102	1 229
55	81 001	1230	428	3 652	6	96	1 127
56	79 771	1217	384	3 223	5	91	1 030
57	78 554	1286	343	2 840	5	85	940
58	77 268	1388	307	2 496	5	80	855
59	75 880	1511	274	2 189	5	75	775
60	74 369	1721	244	1 915	5	70	699
61	72 648	1811	217	1 671	5	65	629
62	70 837	1893	192	1 454	5	60	564
63	68 944	2037	170	1 262	5	55	504
64	66 907	2093	150	1 092	4	51	449
65	64 814	2224	132	942	4	47	398
66	62 590	2353	116	809	4	42	351
67	60 237	2461	102	693	4	38	309
68	57 776	2571	89	592	4	35	271
69	55 205	2617	77	503	3	31	236
70	52 588	2706	67	427	3	28	205
71	49 882	2715	57	360	3	25	177
72	47 167	2700	49	303	3	22	152
73	44 467	2667	42	253	2	19	130
74	41 800	2718	36	211	2	17	111
75	39 082	2619	31	175	2	15	94
76	36 463	2609	26	144	2	13	79
77	33 854	2548	22	118	2	11	66
78	31 306	2574	18	96	1	10	55
79	28 732	2563	15	77	1	8	45
80	26 169	2487	13	62	1	7	37

Оглавление

A.N. Raximov. Biznes matematika. Oliy ta`lim muassasalari uchun darslik. –T.: «`Iqtisodiyot»`, 2024, 229 bet.

ISBN 978-9910-9696-2-1