TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

SH.A. SAIPNAZAROV

BIZNES MATEMATIKA

(Kredit-modul bo'yicha)

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan.

TOSHKENT – 2022

UO‘K: 330.43 (07.58)
KBK 65.012.2ya7
S 56

Sh.A. Saipnazarov. Biznes matematika. (O‘quv qo‘llanma). – T.: «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi», 2022 – 244 b.

ISBN 978-9943-8748-2-4

Ushbu o‘quv qo‘llanmada biznes matematikaning asosiy tushunchalari haqida ma’lumot berilgan. Qo‘llanma va o‘quv dasturiga asoslanib yozilgan bo‘lid, unda matematikani iqtisodiy sistemalarda qo‘llashga mo‘ljallangan. Talabalarning mustaqil nazariy bilimlar olishlari bilan birga, matematikaning iqtisodda tatbiqlari, hamda har bir bo‘lim bo‘yicha misollar yechish namunalari keltirilgan.

O‘quv qo‘llanma iqtisod yo‘nalishdagi oliy o‘quv yurtlarining bakalavriat talabalari uchun mo‘ljallangan.

***

В данном учебном пособии приведена информация об основных понятиях бизнес математики. Пособие основано на учебной программе и посвящено применениям математики в экономических системах. Наряду с теоретическим материалом для самообразования студентов, приведены применения математики в экономике, а также образцы решения задач по каждому разделу.

Учебное пособие предназначено для студентов бакалавриата экономических вузов.

****

This tutorial gives information about basic concepts of business mathematics. The content of topics is described in accordance with the curriculum of the subject of “Business mathematics”, and intended to the applications of mathematics to the economical systems. There are theoretical information for self-study, economical applications of mathematics and solved samples of each chapter.

This tutorial is intended for students of higher educational institutions.

UO‘K: 330.43 (07.58)
KBK 65.012.2ya7

Taqrizchilar:

R.A.Abdukarimov – TAQI “QM va IZ” kafedrasi professori, f.-m.f.d.;
A.A. Saliyev – TDIU “Amaliy matematika” kafedrasi dotsenti.

ISBN 978-9943-8748-2-4

KIRISH

Biznes matematika – predmeti iqtisodiy obyektlar va jarayonlarning matematik modellari va ularni tadqiq qilish metodlari bo‘lgan nazariy va amaliy fan.

Matematik fanlarning kelib chiqishi, shubhasiz, iqtisodiy ehtiyojlari bilan bog‘liq bo‘lganligini yaxshi tushunamiz.

Ishlab chiqarishning taraqqiyoti va murakkablashishi bilan iqtisodning matematik hisoblashlarga bo‘lgan ehtiyoji ortib bordi. Hozirgi ishlab chiqarish – ko‘plab korxonalarning qat’iy muvozanatga solingan faoliyatidan iboratki, u behisob matematik masalalarni yechish bilan ta’minlanadi.

Bu ish bilan iqtisodchilar, dasturchilar va ko‘p sondagi buxgalterlar mashg‘ul, minglab elektron hisoblash mashinalari esa hisob-kitoblar bilan band. Bunday masalalar qatoriga ishlab chiqarish rejasini tuzish ham, qurilish obyektlarining optimal joylashuvini aniqlash ham, moliyaviy operatsiyalarning samaradorligini baholash ham kiradi. Biznes matematika, shuningdek, avvaldan ma’lum iqtisodiy hodisalarning aniqlashtirilgan matematik tavsifi, iqtisodiy hisob-kitoblardan turli gipotezalarning tahlili, ularni ifodalovchi matematik munosabatlar bilan ham shug‘ullanadi.

Biznes matematikaning taraqqiyoti “matematik dasturlash” degan umumiy nom bilan birlashtiriluvchi bir necha matematika sohalari paydo bo‘lishiga turtki bo‘ldi.

Biz biznes matematikani ikki qismga bo‘lib o‘rganamiz. Birinchi qismda “matematik dasturlashning” ba’zi elementlarini, ikkinchi qismda esa “moliya matematikasi” elementlarini o‘rganamiz.

I BOB. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASINING QO‘YILISHI

1.1. Iqtisodiy – matematik modeli

O‘rganilayotgan obyektning asosiy xossalari va xarakteristikalarini o‘zida ifodalovchi maxsus qurilgan obyektga model deyiladi.

Modellashtirish deb esa, tadqiq etilayotgan obyektning muhim xarakteristikalarini ifodalash, akslantirish jarayoniga aytiladi.

Tadqiq etilayotgan obyektning asosiy xarakteristikalarini matematik ifodalar va munosabatlar orqali ifodalovchi modelga matematik model deyiladi.

Iqtisodiy matematik model – iqtisodiy obyekt yoki jarayonlarni matematik munosabatlar orqali ifodalovchi modelga aytiladi. Odatda, modellar turlicha bo‘ladi: fizik modellar, abstrakt modellar, mantiqiy modellar, elektron modellar, matematik modellar va b.

Iqtisodda matematik modelni qo‘llanilishi iqtisodiy tahlilni miqdor jihatdan chuqurlashtiradi, iqtisodiy axborotlar sohasini kengaytiradi.

1.2. Eng sodda iqtisodiy masalalarning matematik modellari

1. Ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi.

1.1. Ikkita p_1 va p_2 turdagi mahsulotlarni tayyorlashda to‘rt xil S_1, S_2, S_3 va S_4 turdagi resurslardan foydalaniladi. Mahsultlar birliklarini tayyorlashda sarflanadigan resurslar zaxirasi, resurslarni birliklar soni 1.1- jadvalda keltirilgan (raqamlar shartli)

p_1 va p_2 mahsulotlarni birligidan olinadigan foyda mos ravishda 2 va 3 pul birligiga teng.

Ishlab chiqarish rejasini shunday tuzish kerakki, ularni sotishdan keladigan foyda maksimal bo‘lsin.

1.2.1- jadval

Resurs turi	Resurs zaxirasi	Mahsulotni bir birligini tayyorlashda sarflanadigan resurslarning birlik soni	
		p_1	p_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-

Yechish. Masalaning iqtisodiy – matematik modelini tuzamiz.

Ishlab chiqarishga rejalashtirilgan p_1 va p_2 turdagi mahsulotlar birligini mos ravishda x_1 va x_2 bilan belgilaymiz. Ularni tayyorlash uchun (1.2.1-jadval) S_1 resursdan $(1 \cdot x_1 + 3x_2)$ birlik, S_2 resursdan $(2x_1 + 1 \cdot x_2)$ birlik, S_3 resursdan $(1 \cdot x_2)$ birlik va S_4 dan $3x_1$ birlik zarur bo‘ladi.

Ma’lumki, S_1, S_2, S_3 va S_4 resurslar talabi mos ravishda ularning zaxiralaridan katta bo‘lmasligi kerak.

Bunday holda resurslar talabi va ularning zaxiralari orasidagi bog‘lanishi ushbu tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ \qquad\quad x_2 \le 5 \\ 3x_1 \qquad\quad \le 21 \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

Masalaning ma’nosida x_1 va x_2 o‘zgaruvchilar $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ (1.2.2) p_1 turdagi mahsulotni sotishdan keladigan foyda $2x_1$ pul birligi va p_2 turdagi mahsulotni sotishdan keladigan foyda $3x_2$ pul birligiga teng. ya’ni umumiy foyda

$$F = 2x_1 + 3x_2 \qquad (1.2.3)$$

Shunday qilib, masalaning iqtisodiy matematik modeli quyida-gicha:

(1.2.1) sistemani va (1.2.2) shartni qanoatlantiruvchi ishlab chiqarish $X = (x_1, x_2)$ ni topish kerakki, bunda (1.2.3) funksiya eng katta qiymatni qabul qilsin.

Endi n turdagi mahsulotni m turdagi resursdan foydalanib ishlab chiqarish masalasini umumlashtirish mumkin.

Ishlab chiqarishga mo'ljallangan P_j mahsulot birligini $x_j\left(j=1,2,\dots,n\right)$; S_i resurs zaxirasini $b_i\left(i=1,2,\dots,m\right)$, P_j mahsulot birligini tayyorlashda sarflanadigan resurs birligini $a_{ij};P_j$ mahsulot birligini sotishdan olinadigan foydani C_j bilan belgilaymiz.

U holda ishlab chiqarishning iqtisodiy-matematik modeli quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_1nx_4 \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned} \qquad (1.2.4)$$

va $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_4 \ge 0$ (1.2.5) shartni qanoatlantiruvchi $X=\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ rejani topish kerakki, bunda

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \qquad (1.2.6)$$

funksiya maksimal qiymatni qabul qilsin.

Qorishma tayyorlash masalasi. Agar qorishma $b_i,\left(i=\overline{1,m}\right)$ birlikdan kam bo'lmagan m xil oziq moddadan iborat bo'lsa, tarkibida yuqoridagi moddalar bo'lgan, qoramollar uchun n xildagi to'yimli ozuqa tayyorlash talab etilsin. Masalaning matematik modelini tuzish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $a_{ij}\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ - j - to'yimli ozuqaning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarflangan, $i-$ ozuqa modda miqdori; C_j- j - to'yimli ozuqaning bir birligining bahosi; x_j- kunlik ratsionga qo'shiladigan oziq modda miqdori.

Quyidagi chiziqli funksiyaning minimal qiymatini aniqlang

$$F\left(x\right) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Ushbu shartlarda

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
&x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,\, n}\right)
\end{aligned}
$$

Quyidagi chiziqli funksiyaning *min* qiymatini toping.

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Bundagi maqsad funksiya, kunlik ratsionga sarflangan ozuqa moddalarining bahosi. Chegaraviy shartlar esa, kunlik ratsion to‘yimli bo‘lishini ta’minlaydi.

Chiziqli programmalashtirish masalasi yozilishining vektor shakli. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0, \quad X \geq 0$$

chiziqli funksiyani minimallashtiring

$$L = CX\text{ ,}$$

bunda $C = (c_1,\, c_2, \ldots, c_n)$; $X = (x_1,\, x_2, \ldots, x_n)$; CX - skalyar ko‘paytma; ozod hadlar va noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlar vektorlardan iborat

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Chiziqli programmalashtirish masalasi yozilishining matritsa shakli. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$AX = A_0 \quad X \geq 0$$

chiziqli funksiyani minimallashtiring

$$L = CX\text{ ,}$$

bunda $C = (c_1,\, c_2, \ldots, c_n)$ - satrli matritsa; $A = (a_{ij})$ - sistema matritsasi;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}, \; A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$ - ustunli matritsa.

Chiziqli programmalashtirish masalasi yozilishining yig‘indi belgilari shaklidagi ko‘rinishi. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i, \; x_j \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

chiziqli funksiyani minimallashtiring

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \; .$$

Chiziqli programmalashtirish masalasining ba’zi teoremalari.

Teorema (*chiziqli tengsizlikni, chiziqli tenglamaga almashtirish*).

Tengsizlikning

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b \qquad (1.2.7)$$

har bir yechimiga, $x_{n+1} \geq 0$ bo‘lganda, ushbu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b \qquad (1.2.8)$$

tenglamaning $\bar{y} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ yagona yechimi mos keladi va aksincha.

Isbot. (1.2.7) tengsizlikning yechimi, $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bo‘lsin. U holda quyidagi sonli tengsizlik o‘rinli

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \leq b \; .$$

Belgilash kiraitamiz $\alpha_{n+1} = b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n)$.

U holda

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b$$

Bunda, $\alpha_{n+1} \geq 0$. Bu degani , $\bar{y} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ (1.2) tenglamaning ildizi bo‘lib, $x_{n+1} \geq 0$ni qanoatlantiradi.

Demak, agar chegaraviy shartlar sistemasida tengsizliklar bo‘lsa (bunday holda chiziqli programmalashtirish masalasi *standart* shaklda berilgan deyiladi), u holda har bir tengsizlikka, qo‘shimcha o‘zgaruvchi kiritib, tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin. Qo‘shimcha o‘zgaruvchilarni *muvozanat o‘zgaruvchilar* ham deyiladi.

Mana shundan, kanonik bo‘lmagan chiziqli programmalashtirish masalasidan, kanonik shaklga o‘tish qoidasi kelib chiqadi. Masala kanonik shaklga o‘tishi uchun, har bir tengsizlikka muvozanat o‘zgaruvchilar kiritiladi. Agar tengsizlikning belgisi $\leq$ bo‘lsa, muvozanat o‘zgaruvchi tengsizlikka musbat ishora bilan, tengsizlikning belgisi $\geq$ bo‘lsa, manfiy ishora bilan kiritiladi. Maqsad funksiyaga muvozanat o‘zgaruvchilar kiritilmaydi.

Teorema (*chegaralangan sohadagi, maqsad funksiya ekstremumi*). Agar chiziqli programmalashtirish masalasidagi, berilgan chegaraviy shartlar sistemasining, mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi, yopiq va chekli bo‘lsa, bu tayanch yechimlar orasidan hech bo‘lmaganda bittasi, berilgan masalaning optimal yechimi bo‘ladi.

Teorema (*chegaralanmagan sohadagi, maqsad funksiya ekstre-mumi*). Agar mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi chegaralanmagan bo‘lsa, optimal yechim mavjud bo‘lishining zarur va yetarli sharti, maksimum masalada maqsad funksiya yuqoridan chegaralangan, yoki minimum masalada esa quyidan chegaralangan bo‘ladi.

Agar teoremalar sharti bajarilmasa, maqsad funksiya, mumkin bo‘lgan yechimlar sohasida chegaralanmagan bo‘ladi.

Misol. Chiziqli programmalashtirish masalasini standart shaklga keltiring:

$$
\begin{aligned}
&F(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \to \min \\
&3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\
&x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\
&2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 10 \\
&x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)
\end{aligned}
$$

Yechish. Birinchi va ikkinchi chegaraviy shartlarni tengsizliklarga o‘tkazamiz. Birinchi chegaraviy shartdan x_4 ni topib, ikkinchi chegaraviy shartga qo‘yib, soddalashtirgandan so‘ng quyidagini hosil qilamiz.

$$x_4 = 2 - 3x_1 - x_2 + x_3$$
$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$$
$$2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 10$$
$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)$$

Ikkinchi chegaraviy shartdan x_3 ni topib, 1- va 3-shartlarga qo‘yamiz:

$$x_4 = -2 - 5x_1 + 2x_2$$
$$x_3 = -4 - 2x_1 + 3x_2$$
$$8x_1 - 10x_2 \le -2$$
$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)$$

Masala shartiga asosan x_3 va x_4 o‘zgaruvchilar, masala shartiga asosan manfiy emasligidan, ularga teng bo‘lgan ifodalar ham, manfiy emasdir. Bu ifodalarni maqsad funksiyasiga qo‘yamiz. Birinchi va ikkinchi chegaraviy shartlardan x_3 va x_4 larni tashlab yuborib, ba’zi almashtirishlardan so‘ng, matematik modelning standart shaklini hosil qilamiz:

$$F(x) = -11x_1 + 7x_2 - 2 \to \min$$
$$-5x_1 + 2x_2 \ge 2$$
$$-2x_1 + 3x_2 \ge 4$$
$$-8x_1 + 10x_2 \ge 2$$
$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,2}\right)$$

Misol. Chegaraviy shartlar sistemasini kanonik shaklga keltiring:

$$x_1 - 4x_2 - 2x_3 \ge 2$$
$$-2x_2 + 3x_3 - 2x_5 \le 6$$
$$2x_2 - 5x_4 \ge 11$$
$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right)$$

Yechish. Chegaraviy shartlar sistemasini kanonik shaklga keltirish uchun yangi manfiy bo‘lmagan x_6, x_7, x_8 noma’lumlarni kiritamiz. Birinchi tengsizlikka x_6 ni, ikkinchi tengsizlikka x_7 ni, uchinchi tengsizlikka x_8 ni kiritib, quyidagi kanonik shaklni hosil qilamiz:

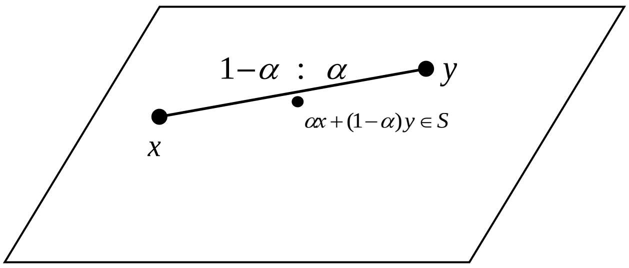
$$
\begin{aligned}
&x_1-4x_2-2x_3-x_6=2\\
&-2x_2+3x_3-2x_5+x_7=6\\
&2x_2-5x_4-x_8=11\\
&x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,8}\right)
\end{aligned}
$$

1.3. Chiziqli programmalash masalasini grafik usulda yechish

Ta'rif. $S\subseteq E^n$ to‘plam *qavariq* deyiladi, agar ixtiyoriy ikkita $x,y\in S$ nuqtalar uchun, ixtiyoriy $\alpha\in[0,1]$ son uchun quyidagi munosabat bajarilsa

$$\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\in S$$

Geometrik ma'nosi: to‘plamga x,y nuqtalar bilan birga, ularni tutashtiruvchi $[x,y]$ kesma ham shu to‘plamga tegishli bo‘lishi kerak (3.1.3-rasm). Qayd etib o‘tamizki $\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\in S$ kesma, $x,y\in S$ nuqtalarning kombinatsiyasidan iborat.



1.3.1- rasm.

Nuqtalar to‘plami *qavariq* deyiladi, agar uning ixtiyoriy ikki nuqtasi bilan birga ularning ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasini ham o‘zida saqlasa.

To‘plamning nuqtasi *chegaraviy* deyiladi, agar markazi shu nuqtada bo‘lgan ixtiyoriy shar, shu to‘plamga tegishli va tegishli bo‘lmagan nuqtalarni saqlasa. To‘plamning chegaraviy nuqtalari uning *chegarasini* tashkil etadi. To‘plam *yopiq* deyiladi, agar uning barcha chegaraviy nuqtalari, unga tegishli bo‘lsa. Ikki to‘plamning *kesishmasi* to‘plam bo‘lib, bu to‘plamlarning umumiy qismidan iborat.

Nuqtalar, qavariq to‘plamning *burchak nuqtalari* deyiladi, agar ularning ixtiyoriy ikkita nuqtalari qavariq chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lmasa. Masalan, uchburchakda uning uchlari burchak nuqtalari bo‘ladi, doiraning burchak nuqtalari esa, uni chegaralovchi aylana nuqtalaridan iborat.

Tekislikda, chekli sondagi burchak nuqtalari bo‘lgan, qavariq, yopiq chegaralangan to‘plam, *qavariq ko‘pburchak* deyiladi. Ko‘pburchakning burchak nuqtalari uning *uchlari*, ixtiyoriy ikkita uchini tutashtiruvchi kesma esa ko‘pburchakning *tomonlari* deyiladi. Agar to‘g‘ri chiziq, ko‘pburchakning bir tomonida yotib, hech bo‘lmaganda bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq *tayanch* to‘g‘ri chiziq deyiladi.

Uch o‘lchovli fazoda, chekli sondagi burchak nuqtalari bo‘lgan, qavariq, yopiq chegaralangan to‘plam, *qavariq ko‘pyoq* deyiladi. Ko‘pyoqning burchak nuqtalari uning *uchlari*, ixtiyoriy ikkita uchini tutashtiruvchi kesma esa ko‘pyoqning *tomonlari* deyiladi. Agar tekislik, ko‘pyoqning bir tomonida yotib, hech bo‘lmaganda bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, bu tekislik *tayanch* tekislik deyiladi.

Grafik usul

Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish, bu uning yechimlarini ikki o‘lchovli fazoda geometrik tasvirlashdan iborat.

Chegaraviy shartlari tengsizliklar ko‘rinishida berilgan, chiziqli programmalashtirish masalasini ko‘rib chiqamiz.

Chiziqli funksiyaning maximal qiymatini aniqlang

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (1.3.1)$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array} \qquad (1.3.2.)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \qquad (1.3.3)$$

(1.3.2) va (1.3.3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ tartiblangan sonlar to‘plami, *tayanch yechim* deyiladi. Agar (1.3.2) tengsizliklar sistemasi, (1.3.3) shartda, hech bo‘lmaganda bitta yechimga ega bo‘lsa, u birgalikda, aksincha esa birgalikda emas deb yuritiladi.

x_1Ox_2 tekislikda chiziqli programmalashtirish masalasi berilgan bo‘lsin, maqsad funksiya

$$F(x)=c_1x_1+c_2x_2\to\max$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\le b_m\\
&x_j\ge 0\quad \left(j=\overline{1,\,2}\right)
\end{aligned}$$

$$F(x)=c_1x_1+c_2x_2\to\max$$

Sistemadagi har bir tengsizlikning geometrik ma’nosi, tekislikdagi chegarasi to‘g‘ri chiziqdan $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i\ \left(i=\overline{1,\,m}\right)$ iborat bo‘lgan, yarim tekislikni aniqlaydi. Noma‘lumlarning manfiy bo‘lmaslik sharti, $x_j\ge 0,\ (j=1,2)$ chegaraviy shart bilan aniqlanadi. Sistema birgalikda, shuning uchun yarim tekisliklar kesishib, ularning umumiy kesishgan sohasi, nuqtalarining koordinatalari berilgan sistemaning yechimlaridan iborat, qavariq ko‘pburchak bo‘ladi. Bu nuqtalar (yechimlar) to‘plami, *yechimlar ko‘pburchagi* deyilib, u nuqta, nur, kesma, ko‘pburchak, chegaralanmagan ko‘pburchakli soha bo‘lishi mumkin.

Agar sistemadagi (1.3.2), (1.3.3) chegaraviy shartlarda $n=3$ bo‘lsa, u holda har bir tengsizlikning geometrik ma’nosi, uch o‘lchovli fazodagi yarim tekislikdan iborat bo‘lib, chegaraviy tekislik $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i\ \left(i=\overline{1,\,m}\right)$ formula, yarim fazoning manfiy bo‘lmaslik shartlari, mos ravishda chegaraviy tekisliklar $x_j\ge 0,\ \left(j=\overline{1,3}\right)$ orqali aniqlanadi. Agar sistema birgalikda bo‘lsa, u holda bu yarim fazolar kesishib, ularning umumiy kesishgan sohasi, *ko‘pyoqli yechim* deyiladi. Ko‘pyoqli yechim, nuqta, nur, kesma, ko‘pburchak, ko‘pyoq, ko‘pyoq chegaralanmagan ko‘pburchakli soha bo‘lishi mumkin.

Bulardan kelib chiqib, chiziqli programmalashtirish masalasini geometrik talqini shundan iboratki, bunda ko‘pyoqli yechimlardan shunday birini tanlash kerakki, uning koordinatalari, chiziqli funksiyaga minimal qiymat bersin. Bunda, masalaning mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi deganda, ko‘pyoqli yechimning barcha nuqtalari tushuniladi.

Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usul bilan yechishda, maqsad funksiyaning ekstremal qiymatini topish uchun, x_1Ox_2 tekislikdagi, $gradF$ vektordan foydalaniladi. U $\overline{N}$ deb belgilanadi.

Bu vektor maqsad funksiyaning mumkin o‘sish yo‘nalishini ko‘rsatib, u quyidagiga teng

$$gradF=\overline{N}=\frac{\partial F}{\partial x_1}\overline{e_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\overline{e_2}$$

Bunda $\overline{e_1}$ va $\overline{e_2}$ - mos ravishda Ox_1 va Ox_2 o‘qlardagi birlik vektorlar. Demak, $\overline{N}=\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}$. $\overline{N}$ vektorning koordinatalari, $F(x)$ maqsad funksiya noma’lumlari oldidagi koeffitsiyentlardan iborat ekan.

Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish algoritmi

1. Masalaning chegaraviy shartlaridan, uning mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi aniqlanadi.
2. $\overline{N}$ vektorni quramiz.
3. $\overline{N}$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan, F_0 sath chizig‘i o‘tkaziladi.
4. Maksimum masalada, sath chizig‘i $\overline{N}$ vektor yo‘nalishi bo‘yicha, minimum masalada esa $\overline{N}$ vektor yo‘nalishiga qarama-qarshi suriladi. Bu surish, sath chizig‘i bilan mumkin bo‘lgan yechimlar sohasining yagona umumiy nuqtasi hosil bo‘lguncha, davom ettiriladi. Bu nuqta, mumkin bo‘lgan yechimlar sohasida, maqsad funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘ladi, ya’ni chiziqli programmalashtirish masala-sining optimal yechimidir.
5. Maqsad funksiyaning qiymatini, ekstremum nuqtalarning koordinatalari orqali aniqlaymiz.

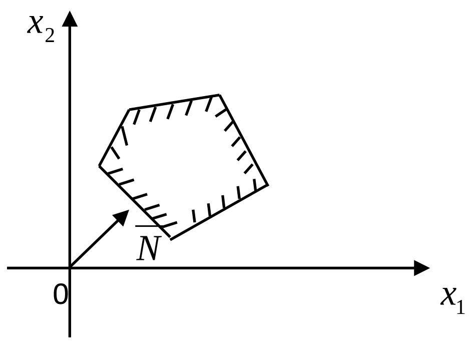
Agar sath chizig‘i, mumkin bo‘lgan yechimlar sohasining biror tomoniga parallel bo‘lsa, u holda chiziqli programmalashtirish masalasi cheksiz yechimlar sohasiga ega.

Agar mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi, cheksiz soha bo‘lsa, maqsad funksiya chegaralanmagan bo‘ladi.

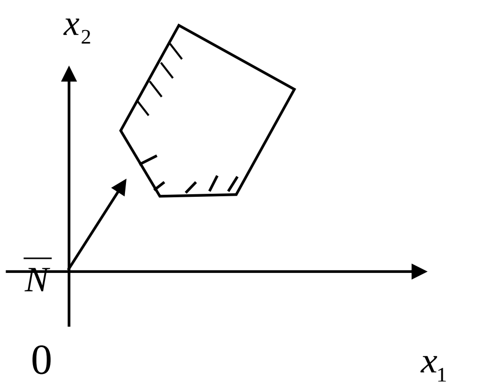
Mumkin bo‘lgan yechimlar sohasining chegaraviy shartlari qarama-qarshi bo‘lsa, chiziqli programmalashtirish masalasi yechimga ega emas.

Chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini aniqlashda quyidagi vaziyatlar bo‘lishi mumkin:

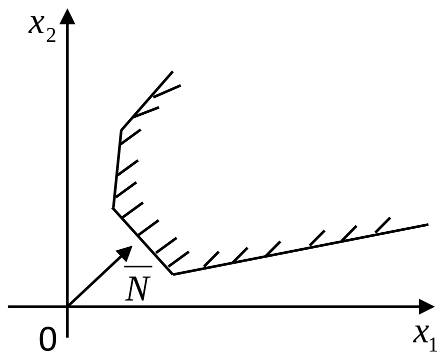
- masala yagona yechimga ega (1.3.2-rasm);
- masala cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamiga ega (1.3.3-rasm);
- F funksiya yuqoridan chegaralangan emas, ya’ni L ekstremal qiymatga ega emas (1.3.4-rasm);
- masalaning chegaraviy shartlari birgalikda emas, ya’ni mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi bo‘sh to‘plamdan iborat (1.3.5-rasm).



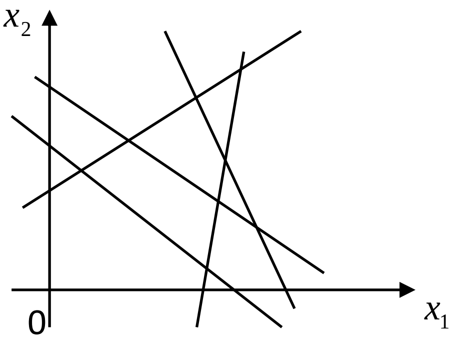
1.3.2 – rasm.



1.3.3 - rasm



1.3.4- rasm



1.3.5- rasm

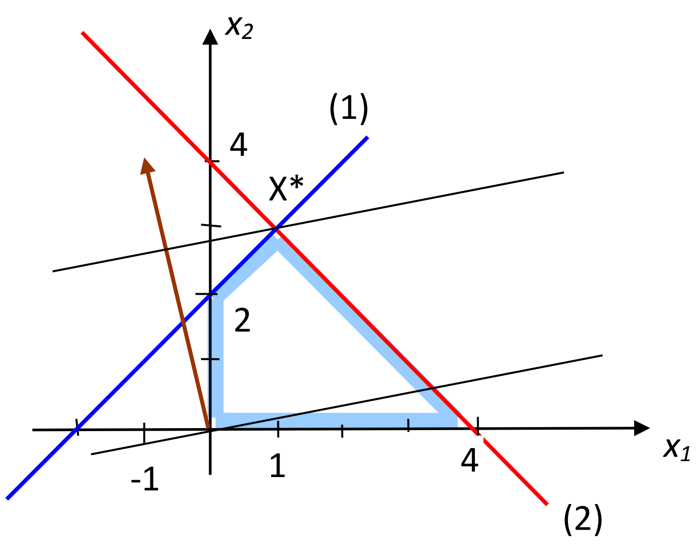
Misol. Chiziqli programmalashtirish masalasini yeching

$$F(x) = -6 - x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2, & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 4, & (2) \\ x_1 \geq 0, (3) \quad x_2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Yechish. Mumkin bo‘lgan yechimlar sohasini quramiz (1.3.6-rasm). Masalaning chegaraviy shartlarini nomerlaymiz. Dekart koordinatalar sistemasida (1) chegaraviy shartga asosan $x_1 - x_2 = -2$ to‘g‘ri chiziqni quramiz. Bu to‘g‘ri chiziq tekislikni, ikkita yarim tekislikka bo‘ladi. Bulardan qaysi biri qidirilayotgan yarim tekislik ekanligini aniqlaymiz. Bu to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tmaganligi uchun, $O(0,0)$ nuqtaning koordinatalarini (1) chegaraviy shartga qo‘yib $0 - 0 \geq -2$, to‘g‘ri tengsizlik 0<2 ni hosil qilamiz. Demak *O* nuqta, qidirilayotgan yarim tekislikka tegishli ekan.

Shu kabi, (2) – (4) to‘g‘ri chiziqlarni quramiz.



1.3.6-rasm.

Gradiyent $\overline{gradF} = -\bar{i} + 4\bar{j}$ topdik, gradiyentga perpendikulyar bo‘lgan funksiyaning sath chizig‘ini o‘tkazdik, uni o‘ziga parallel ravishda, $gradF$ yo‘nalishi bo‘yicha siljitamiz. Bu to‘g‘ri chiziq, mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi (1) va (2) tengsizliklarga mos bo‘lgan, to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan $X^{\bullet}$ o‘tadi. Quyidagi sistemani yechib, $X^{\bullet}$ nuqtaning koordinatalarini topamiz

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2, \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

$X^{\bullet}(1,3)$ hosil qildik. Bundan esa maqsad funksiyaning qiymati kelib chiqadi $F(X^*) = -6 - 1 + 4 \cdot 3 = 5$. Demak, $\max F(1;\, 3) = 5$.

Chiziqli programmalashtirish masalasi doimo matematik model ko‘rinishida berilmaydi.

Mahsulot ishlab chiqarishning optimal rejasini aniqlaymiz.

Masala. Kompaniya ikki turdagi muzqaymoq ishlab chiqaradi: qaymoqli va shokoladli. Muzqaymoq ishlab chiqarish uchun ikkita mahsulotdan foydalaniladi: sut va uning to‘ldiruvchilari. Sutka davomida 1 kg muzqaymoq uchun sarflangan mahsulotlar va ularning zaxirasi 1.3.1 - jadvalda berilgan.

1.3.1- jadval

Boshlang‘ich mahsulot	1 kg muzqaymoq uchun sarflangan mahsulotlar		Zaxira, kg
	qaymoqli	shokoladli	
Sut	0,8	0,5	400
To‘ldiruvchilari.	0,4	0,8	365

Bozor talabini o‘rganish shuni ko‘rsatdiki, qaymoqli muzqaymoqqa bo‘lgan kundalik talab, shokoladli muzqaymoqqa nisbatan 100 kg dan ortiq emas. Bundan tashqari, shokoladli muzqaymoqqa bo‘lgan bir sutkalik talab 350 kg dan oshmaydi. 1 kg qaymoqli muzqaymoqning narxi 16 so‘m, shokoladli muzqaymoqning narxi esa 14 so‘m.

Kompaniyaning mahsulot sotishdan tushgan daromadining maksimal bo‘lishi uchun, har bir muzqaymoq turidan qancha miqdorda ishlab chiqarish zarur.

Yechish. x_1 – kundalik ishlab chiqarilgan qaymoqli muzqaymoq hajmi (kg), x_2 – kundalik ishlab chiqarilgan shokoladli muzqaymoq hajmi (kg). Masalaning matematik modelini tuzamiz.

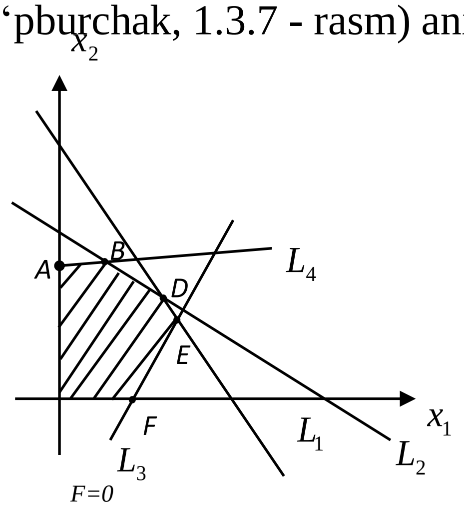
Maqsad funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$F(x) = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 \le 400, & (L_1) \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 \le 365, & (L_2) \\ x_1 - x_2 \le 350, & (L_3) \\ x_2 \le 350, & (L_4) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Masalani grafik usul bilan yechamiz. Avvalo (1) - (4) tengsizliklardan foydalanib, masalaning, mumkin bo‘lgan yechimlar sohasini (*OABDEF* ko‘pburchak, 1.3.7 - rasm) aniqlaymiz.



1.3.7 - rasm.

Normal vektor $\overline{N} = (16, 14)$ quramiz. Sath chizig‘ining F_0 tenglamasi $16x_1 + 14x_2 = const$.

Sath chizig‘ini $\overline{N}$ vektor yo‘nalishi bo‘yicha suramiz. F_0 ning mumkin bo‘lgan yechimlar sohasidan chiqib ketish nuqtasi D bo‘lib, uning koordinatalari quyidagi tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 = 400,$$
$$0,4x_1 + 0,8x_2 = 365$$

Sistemani yechib, *D*(312,5;300) ni topamiz. *D* nuqta masalaning optimal yechimini aniqlaydi, ya'ni $X_{opt} = (312{,}5;\ 300)$, bundan esa

$$F_{\max}(X) = 16 \cdot 312{,}5 + 14 \cdot 300 = 9200 \text{ (sum).}$$

Demak, mahsulotni sotishdan olingan maksimal daromad sutkasiga 9200 so'm bo'lib, bunda 312.5 kg qaymoqli va 300 kg shokoladli muzqaymoq ishlab chiqarish zarur ekan.

Masala. Mexanika sexida, uch turdagi uskunalardan foydalanib, *A* va *B* mahsulotlar tayyorlanadi. Har bir tur uskunaning, bir birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan vaqti quyidagichadir:

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4.

Uskunalarning I, II, III ishlash vaqti, mos ravishda 40, 36 va 36 soatlardan iborat. Har bir mahsulotning bir birligini sotishdan olingan foyda mos ravishda 5 va 3 pul birligidan iborat.

Firmaning bir haftada maksimal foyda olish uchun, haftalik ishlab chiqarish rejasini tuzish talab etiladi. Masalaning matematik modelini tuzib, uni grafik usulda yeching.

Yechish. Aytaylik, *A* va *B* tovarlarni haftalik ishlab chiqarish rejasi mos ravishda x_1 birlik va x_2 birlik bo'lsin.

Masala shartidan quyidagi tengsizliklar sistemasini tuzamiz

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 \le 40 \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 \le 36 \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 \le 36 \end{cases} \qquad (1.3.4)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \qquad (1.3.5)$$

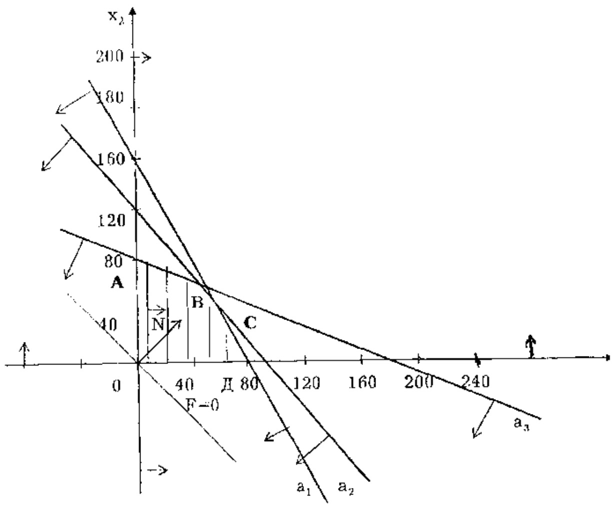
$$F(x) = 5x_1 + 3x_2 \to \max \qquad (1.3.6)$$

Masalada noma'lumlar soni ikkita, chegaraviy shartlar tengsizliklar ko'rinishida berilgan, shuning uchun optimal yechim grafik usulda aniqlanadi.

(1.3.4) va (1.3.5) chegaraviy shartlardagi tengsizliklar x_1Ox_2 koordinatlar tekisligida yarim tekisliklardan iborat bo'lib, uning chegaralari mos ravishda quyidagi to'g'ri chiziqlardan iborat (1.3.8 - rasm).

$$0,5x_1 + 0,25x_2 = 40 \qquad (a_1)$$
$$0,4x_1 + 0,3x_2 = 36 \qquad (a_2)$$
$$0,2x_1 + 0,4x_2 = 36 \qquad (a_3)$$

Yarim tekisliklarning kesishishidan hosil bo'lgan ko'pburchakni aniqlab, normal vektor yordamida $\overline{N} = (5;3)$, maqsad funksiya maksimal qiymatga erishadigan nuqtani aniqlaymiz.



1.3.8 - rasm.

Rasmdan ko'rinadiki, maqsad funksiya *ABCDO* ko'pburchakning *C* nuqtasida maksimal qiymatga erishadi.

Bu nuqta esa a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlar kesishishidan hosil bo'lib, uning koordinatalari, quyidagi tenglamalar sistemasi yechimlaridan iborat

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 = 40 & (\mathrm{a}_1) \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 = 36. & (\mathrm{a}_2) \end{cases}$$

Sistema yechimlari $(x_1; x_2) = (60; 40)$. Maqsad funksiyasining optimal qiymati esa $\max F(x) = 5x_1 + 3x_2 = 5 \cdot 60 + 3 \cdot 40 = 420$.

Demak, firma 420 birlik foyda olishi uchun, *A* tovar ishlab chiqarishni 60 birlik, *B* tovarni esa 40 birlik kabi rejalashtirish zarur ekan.

Misol. Grafik usulda funksiyaning ekstremal qiymatlarini aniqlang

$$F(x) = 6x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 - 18$$

chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right) \end{cases}$$

Yechim. Birinchi va ikkinchi chegaraviy shartlarni tengsizliklarga aylantiramiz. Ikkinchi shartdagi x_4 o‘zgaruvchini birinchi shartga qo‘yib, ixchamlasak quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + x_3 \\ x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right) \end{cases}$$

So‘ngra, birinchi shartdagi x_3 o‘zgaruvchining qiymatini ikkinchi shartga qo‘ysak quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_3 = 6 - x_1 - 3x_2 \\ x_4 = -4x_1 - 3x_2 + 12 \\ x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right) \end{cases}$$

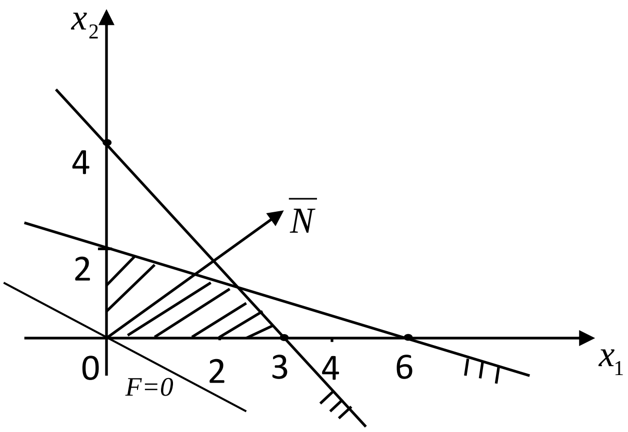
Masala shartiga ko‘ra x_3 va x_4 manfiy bo‘lmaganligi uchun, ular teng bo‘lgan ifodalar ham manfiy emas. x_3 va x_4 o‘zgaruvchilarning bu ifodalari maqsad funksiyaga qo‘yiladi. x_3 va x_4 noma’lumlarni birinchi va ikkinchi shartlardan tashlab yuborilsa, quyidagi model hosil bo‘ladi:

$$F(x) = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,2}\right) \end{cases}$$

Masalada noma’lumlar soni ikkita bo‘lib, chegaraviy shartlar tengsizliklar ko‘rinishida bo‘lgani uchun, masalaning optimal yechimini topishda grafik usuldan foydalanilsa bo‘ladi.

Yarim tekisliklarning kesishishi natijasida hosil bo‘lgan ko‘pburchakdan, normal vektor $\bar{N} = (1;\, 1)$ foydalanib, maqsad funksiya maksimal qiymatga erishadigan nuqtani aniqlaymiz.



1.3.9 – rasm.

Rasmdan ko‘rinadiki, maqsad funksiya maksimal qiymatga quyidagi to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasida erishadi:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Bu nuqtaning koordinatalari (2; 4/3) dan iborat. Minimal nuqta esa (0,0) nuqtada hosil bo‘ladi. Natijada quyidagi javoblarni olamiz:

$$\max F(2;4/3) = 10/3 .$$

II BOB. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASINING SIMPLEKS ALGORITMI

2.1. Chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy yechimlarini topish

n o‘zgaruvchili *m* ta chiziqli tenglama ushbu ko‘rinishga ega

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

yoki qisqacha

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

(2.1.1) sistemada $\left(a_{ij}\right), i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$, matritsaning rangi $r = m$ va $m < n$. (2.1.1) sistemaning *m* ta o‘zgaruvchilari oldidagi $(m < n)$ koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa determinanti noldan farqli bo‘lsa, u holda *m* ta o‘zgaruvchi bazis o‘zgaruvchi, qolgan $n-m$ tasi bazis bo‘lmagan yoki erkli o‘zgaruvchi deyiladi.

Bazis o‘zgaruvchilar guruhining mumkin bo‘lgan maksimal soni C_n^m bo‘ladi, ya’ni C_n^m dan katta bo‘lolmaydi.

Aytaylik, masala $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bazis o‘zgaruvchilar bo‘lsin, ya’ni

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

ChP masalasini yechishda $x_1, x_2, \ldots, x_m$ o‘zgaruvchilarning va maqsad funksiya o‘zgaruvchilarning nomanfiy bo‘lishi amaliy ahamiyatga ega shuning uchun (2.1.1) chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy yechimlarini topish zarur bo‘ladi.

Aytaylik, (2.1.1) chiziqli tenglamalar sistemasida barcha ozod hadlar nomanfiy sonlardan iborat bo‘lsin, aks holda -1 ga tenglamaning har ikki qismini ko‘paytirib musbat holga keltiramiz.

Dastlabki jadvalni yozamiz.

Bazis o‘zgaruchilar	$x_1 \ x_2 \ldots x_j \ldots x_n$	Ozod hadlar
	$a_{11} \ a_{12} \ \ldots \ a_{ij} \ldots a_{1n}$ $a_{21} \ a_{22} \ \ldots \ a_{2j} \ldots a_{2n}$ $\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$ $a_{i1} \ a_{i2} \ \ldots \ a_{ij} \ldots a_{in}$ $\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$ $a_{m1} \ a_{m2} \ \ldots \ a_{mj} \ldots a_{mn}$	b_1 b_2 $\ldots$ b_i $\ldots$ b_m

(2.2.2)

Masalani yechish hal qiluvchi elementni tanlashdan boshlanadi. Buni quyidagicha amalga oshiramiz.

1. Hal qiluvchi ustunni shunday tanlaymizki, unda hech bo‘lmaganda bitta musbat element bo‘lsin.
2. Aytaylik, hal qiluvchi ustunda bir nechta musbat elementlar bor bo‘lsin. Bunday holda ularga mos ozod hadlarni shu elementlarga nisbatini olamiz va ularning eng kichigini hal qiluvchi element qilib tanlaymiz. (agar ustunda faqat bitta musbat element bo‘lsa, shu sonli hal qiluvchi element sifatida qabul qilamiz). Bunday almashtirish simpleks almashtirish deyiladi.

Teorema. Tenglamalar sistemasining barcha ozod hadlari nomanfiy bo‘lsa, u holda simpleks almashtirishdan so‘ng ham sistemaning ozod hadlari nomanfiy bo‘lib qoladi.

Isbot. Aytaylik, (2.2.2) ning j – nchi ustunida musbat element bo‘lsin. Bu element $a_{ij} > 0$ bo‘lsin va b_i / a_{ij} nisbat ozod hadlarni o‘zlariga mos musbat elementlariga nisbati ichida eng kichigi bo‘lsin. a_{ij} ni aniqlovchi element sifatida qabul qilamiz. Keyingi jadvalga o‘tamiz (2.2.3):

Bazis o‘zgaruchilar	$x_1 \ x_2 \ldots x_j \ldots x_n$	Ozod hadlar
	$a'_{11} \quad a'_{12} \quad \ldots \quad 0 \ \ldots a'_{1n}$ $a'_{21} \quad a'_{22} \quad \ldots \quad 0 \ldots a'_{2n}$ $\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$ $a'_{i1} \quad a'_{i2} \quad \ldots \quad 1 \ldots a'_{in}$ $\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$ $a'_{m1} \quad a'_{m2} \quad \ldots \quad 0 \ \ldots a'_{mn}$	b'_1 b'_2 $\ldots$ b'_i $\ldots$ b'_m

(2.2.3)

Bunda $b'_i = \dfrac{b_i}{a_{ij}}$. Ammo $b_i > 0,\ a_{ij} > 0$, shuning uchun $b'_i > 0$. Har qanday boshqa b'_i elementni qaraymiz.

$$b'_i = \frac{a_{ij}b_i - b_i a_{ij}}{a_{ij}} = b_i - \frac{a_{ij}}{a_{ij}} b_i$$

Agar $a_{ij} < 0$ bo‘lsa, u holda $b'_i > 0$. Agar $a_{ij} < 0$ bo‘lsa, u holda b'_ini quyidagicha qaraymiz.

$$b'_i = a_{ij}\left(\frac{b_i}{a_{ij}} - \frac{b_i}{a_{ij}}\right).$$

Teorema shartiga ko‘ra $\dfrac{b_i}{a_{ij}} \le \dfrac{b_i}{a_{ij}}$, demak $\dfrac{b_i}{a_{ij}} - \dfrac{b_i}{a_{ij}} \ge 0$ va demak, $b'_i \ge 0$.

Shuni isbotlash talab etilgan edi. Shunday qilib, agar ozod hadlari musbat bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda simpleks almashtirish bajarilsa, u holda hosil qilingan bazis yechim nomanfiy bo‘ladi (agar sistemaning nomanfiy bazis yechimi mavjud bo‘lsa). Aslida simpleks almashtirishni ketma-ket amalga oshirish natijasida biz quyidagi sistemaga kelamiz.

$$\begin{cases} x_1 = a^0_{1,m+1}x_1 + x_{m+1} + \ldots + a^0_{1n}x_n + b^0_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = a^0_{m,mn}x_{m+1} + \ldots + a^0_{mn}x_n + b^0_m \end{cases}$$

Bu yerdan ma’lumki, $x_{m+1},\ldots,x_n$ larni nolga teng deb olib $\left(b^0_1,\ldots b^0_m,0\ldots0\right)$ bazis yechimga ega bo‘lamiz.

Agar hech bo‘lganda bitta nomanfiy bazis yechim topilgan bo‘lsa, u holda simpleks almashtirish yordamida boshqa nomanfiy bazis yechimga o‘tiladi (agar u bor bo‘lsa).

2.1-masala. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasining barcha nomanfiy yechimlarini toping:

$$\begin{cases} x_1 \quad -3x_4 + 2x_5 = -3 \\ \quad x_2 \quad +2x_4 - 3x_5 = 8 \\ \quad\quad x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -7 \end{cases}$$

Yechish. Barcha ozod hadlarni nomanfiy holga keltiramiz.

$$\begin{cases} -x_1 \quad +3x_4 - 2x_5 = 3 \\ \quad x_2 \quad +2x_4 - 3x_5 = 8 \\ \quad\quad -x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 7 \end{cases}$$

Dastlabki jadvalni tuzamiz. Hal qiluvchi element sifatida 4-nchi ustundan 3 ni tanlaymiz:

$$\frac{3}{3} = \min\left\{\frac{3}{3};\frac{8}{2};\frac{7}{2}\right\}$$

Bazis o‘zgaruvchilar	x_1 x_2 x_3 x_4 x_5	Ozod hadlar
–	-1 0 0 $\boxed{3}$ -2	3
x_2	0 1 0 2 -3	8
–	0 0 -1 2 5	7

(1)

Bazis o‘zgaruvchilar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ozod hadlar
x_4	$-1/3$	0	0	1	$-2/3$	1
x_2	$2/3$	1	0	0	$-5/3$	6
–	$\boxed{2/3}$	0	-1	0	$19/3$	2

(2)

Bazis o‘zgaruvchilar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ozod hadlar
x_4	0	0	$-1/2$	1	$5/2$	$7/2$
x_2	0	1	1	0	-8	1
x_1	1	0	$-3/2$	0	$19/2$	$15/2$

(3)

Nomanfiy bazis yechimga ega bo‘ldik.

$$\left(\frac{15}{2}:\ 1;\ \ 0;\ \ \frac{7}{2};\ \ 0\right)$$

qolgan nomanfiy bazis yechimlarni topamiz.

(3) nchi jadvaldan 5-nchi ustunning $\frac{19}{2}$ elementini olish yoki 3-chi ustundan 1 ni olish ham mumkin.

Bazis o‘zgaruvchilar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ozod hadlar
x_4	$-5/19$	0	$-2/19$	1	0	$29/19$
x_2	$16/19$	1	$-5/19$	0	0	$139/19$
x_5	$2/19$	1	$-3/19$	0	1	$15/19$

(4)

Bazis yechim: $\left(0;\ \frac{139}{19};\ 0;\ \frac{29}{19};\ \frac{15}{19}\right)$.

Keyingi bazis yechimni topish uchun (3) jadvaldan 1 ni hal qiluvchi element qilib olamiz.

Bazis o‘zgaruvchilar	x_1 x_2 x_3 x_4 x_5	Ozod hadlar
x_4 x_2 x_1	0 $1/2$ 0 1 $-3/2$ 0 1 1 0 -8 1 $3/2$ 0 0 $-5/2$	4 1 9

(5)

Bazis yechim: $(9;\ 0;\ 1;\ 4;\ 0)$.

(4) va (5) jadvaldan ko‘rinib turibdiki, boshqa bazis yechim yo‘q.

2.2-masala. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasining barcha nomanfiy bazis yechimlarini toping.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Yechish.

Bazis o‘zgaruvchilar	x_1 x_2 x_3	Ozod hadlar
– –	$\boxed{1}$ -1 1 2 3 5	1 10
Bazis o‘zgaruvchilar	x_1 x_2 x_3	Ozod hadlar
x_1 –	1 -1 1 0 $\boxed{5}$ 3	1 8

Bazis o‘zgaruvchilar	x_1 x_2 x_3	Ozod hadlar
x_1 x_2	1 0 $\boxed{8/5}$ 0 1 $3/5$	$13/5$ $8/5$

$$x_1 = \left(\frac{13}{5};\ \frac{8}{5};\ 0\right)$$

Bazis o‘zgaruvchilar	x_1 x_2 x_3	Ozod hadlar
x_3 x_2	5/8 0 1 $-3/8$ 1 0	13/5 5/8

$x_2 = \left(0; \frac{5}{8}; \frac{13}{8}\right)$ boshqa bazis yechim yo‘q.

2.2. Standart ko‘rinishdagi masalani simpleks usulda yechish

Simpleks metodni birinchi bo‘lib 1949-yilda amerikalik olim D.Dansig tomonidan kiritilgan. Uning asosiy g‘oyasi 1939-yilda sovet olimi L.V.Kantorovich tomonidan ishlab chiqilgan.

Simpleks metod yordamida har qanday chiziqli programmalashtirish masalasini yechish mumkin, ya’ni bu metod universal metod hisoblanadi. Hozirgi paytda bu metoddan kompyuter hisoblarda foydalaniladi, ba’zan oddiy masalalarni qo‘lda, simpleks usulni qo‘llab yechish mumkin.

Simpleks metodni amalga oshirishda uchta asosy elementni o‘zlashtirish lozim:

1. Boshlang‘ich joiz bazis yechimni topish usulini aniqlash;
2. Yaxshi yechimga o‘tish (yomon bo‘lmagan) qoidasini o‘zlashtirish;
3. Topilgan yechimni optimallik kriteriyasini tekshirish.

Simpleks metoddan foydalanganda chiziqli programmalashtirish masalasi kanonik holga keltirilishi kerak, ya’ni o‘zgaruvchilarga qo‘yilgan cheklov shartlari tenglamalar ko‘rinishida bo‘lishi lozim.

Simpleks usulda hisoblash algoritmini misollarda ko‘ramiz.

Chiziqli funksiyani maksimumini izlash

2.1-misol. Ushbu masalani simpleks usulda yeching.

$$\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 \le 18\\
&2x_1 + x_2 \le 16\\
&\qquad x_2 \le 5\\
&3x_1 \qquad \le 21\\
&x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0\\
&F = 2x_1 + 3x_2 \to \max
\end{aligned}$$

Yechish. Nomanfiy qo‘shimcha o‘zgaruvchilarni kiritib, standart ko‘rinishdagi masalani kanonik ko‘rinishida yozib olamiz.

Bu masalada barcha tengsizliklar "$\le$" ko‘rinishda bo‘lganligi uchun yordamchi o‘zgaruvchilarning barchasi “plyus” ishorada kiritiladi.

Cheklov tengsizliklarini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + x_3 = 18,\\
&2x_1 + x_2 \quad + x_4 = 16,\\
&\qquad x_2 + \quad x_5 = 5\\
&3x_1 + \qquad\quad x_6 = 21\\
&F - 2x_1 - 3x_2 = 0
\end{aligned}$$

Boshlang‘ich bazis yechimlarni topish uchun o‘zgaruvchilarni ikki guruhga ajratamiz – bazis va bazis bo‘lmagan o‘zgaruvchilar.

Bizning misolda x_3, x_4, x_5, x_6 larni bazis o‘zgaruvchi qilib olamiz, chunki bu o‘zgaruvchilar faqat bitta tenglamada ishtirok etmoqda.

Simpleks jadvalini tuzamiz.

2.2.1-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	OH
x_3	1	3	1	0	0	0	18
x_4	2	1	0	1	0	0	16
x_5	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	5
x_6	3	0	0	0	0	1	21
$F(x)$	-2	-3	0	0	0	0	0

BU – bazis o‘zgaruvchi, OH – ozod had.

Boshlang‘ich bazis yechim $X_1 = (0;\ 0;\ 18;\ 16;\ 5;\ 21)$ bu yechim joiz yechim.

F ning qiymatini oshirish uchun x_1 va x_2 o‘zgaruvchilarning katta koeffitsiyentlarini tanlaymiz. Demak, x_2 koeffitsiyenti tanlanadi. Aniqlovchi elementni belgilaymiz.

$$x_2 = \min\left\{\frac{18}{3}; \frac{16}{1}; \frac{5}{1}; \infty\right\} = 5$$

x_5 ni bazisdan chiqaramiz va bazisga x_2 ni kiritamiz.

2.2.2-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	OH
x_3	$\boxed{1}$	0	1	0	-3	0	3
x_4	2	0	0	1	-1	0	11
x_2	0	1	0	0	1	0	5
x_6	3	0	0	0	0	1	21
F	-2	0	0	0	3	0	15

$$x_2 = (0, 5, 3, 11, 0, 21)$$

Aniqlovchi elementi o‘rnida 1 hosil qilib, undan boshqa shu ustundagi barcha elementar nolga aylantiriladi. 2.2.2-jadvalning oxirgi satri, birinchi ustunda – 2 bo‘lganligi uchun, shu ustun aniqlovchi ustun bo‘ladi.

$$x_1 = \min\left\{\frac{3}{1}; \frac{11}{2}; \infty; \frac{21}{3}\right\} = 3$$

x_3 o‘zgaruvchi o‘rniga x_1 bazisga kiradi.

2.2.3-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	OH
x_1	1	0	1	0	-3	0	3
x_4	0	0	-2	1	$\boxed{5}$	0	5
x_2	0	1	0	0	1	0	5
x_6	0	0	-3	0	9	1	12
F	0	0	2	0	-3	0	21

Hosil qilingan yechim ham optimal emas, $x_3 = (3;5;0;5;0,12)$ chunki maqsad funksiya koeffitsiyentlarida bitta manfiy element – 3 bor.

Keyingi jadvalga o‘tamiz,

$$x_5 = \min\left\{\frac{5}{5};\ 5;\ \frac{12}{9}\right\} = 1$$

bazisga x_5 kiradi. Aniqlovchi element 5 uning o‘rnida 1 hosil qilamiz va shu ustun elementlarini (aniqlovchi elementdan boshqa) nolga aylantiramiz.

2.2.4-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	OH
x_1	1	0	$-1/5$	$3/5$	0	0	6
x_5	0	0	$-2/5$	$1/5$	1	0	1
x_2	0	1	$2/5$	$-1/5$	0	0	4
x_6	0	0	$3/5$	$-9/5$	0	1	3
F	0	0	$4/5$	$3/5$	0	0	24

Optimallik sharti bajarildi, oxirgi satrda maqsad funksiya o‘zgaruvchilari oldidagi koeffitsiyentlar ichida manfiylari qolmadi. (2.2.4-jadval)

Maqsad funksiya bazis bo‘lmagan o‘zgaruvchilar orqali $F = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$ bog‘landi. Optimal yechim $X^* = (6;4;0;0;1;3)$

$$F_{\max} = 24$$

Demak, optimallik kriteriyasini umumiy holda bayon qilish mumkin. Agar masalada chiziqli funksiyaning maksimum izlanayotgan bo‘lsa, chiziqli funksiya bazis bo‘lmagan o‘zgaruvchilar orqali ifoda etilganda ularning koeffitsiyentlari ichida musbat elementlar, u holda bazis yechim optimal bo‘ladi.

Chiziqli funksiyani minimumini izlash

Z chiziqli funksiyaning minimumini izlashning ikki yo‘li mavjud:

1. $F - Z$ deb olib va $Z_{\min} = -F_{mzx}$ ekanligini hisobga olib F funksiyaning maksimumini izlash.

2. Har bir qadamda maqsad funksiya qiymatini chiziqli funksiya ifodasiga kiruvchi manfiy koeffitsiyentli bazis bo‘lmagan o‘zgaruvchi hisobiga kamaytirib borish yo‘li bilan.

Buni quyidagi misolda ko‘ramiz.

2.2-misol. Ushbu masalani simpleks usulda yeching.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3$$
$$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5$$
$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,3}\right)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi F funksiya minimumini toping, ya’ni

$$F(x) = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$$

Yechish. Standart masalani kanonik ko‘rinishga keltiramiz.

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = 3$$
$$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_6 = 5$$
$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,6}\right)$$
$$F + x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

Simpleks jadvalni tuzamiz.

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	OH
x_4	-1	-1	-2	1	0	0	5
x_5	$\boxed{2}$	-3	1	0	1	0	3
x_6	2	-5	0	0	0	1	5
F	1	-3	-2	0	0	0	0

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	OH
x_4	0	$-5/2$	$-3/2$	1	$-1/2$	0	$-13/2$
x_1	1	$-3/2$	$1/2$	0	$1/2$	0	$3/2$
x_6	0	-2	5	0	-1	1	2
F	0	$-3/2$	$-5/2$	0	$-5/2$	0	$-3/2$

BU – bazis o‘zgaruvchilar

OH – ozod hadlar

Simpleks jadvaldan foydalanib masalaning optimal yechimini aniqlaymiz.

$$X^* = (3/2,\ 0,\ 0,\ 13/2,\ 0,\ 2) \quad \min F(X^*) = -3/2$$

Minimum masalasini izlashda optimallik kriteriyasini bayon qilamiz:

Agar maqsad funksiya ifodasida bazis bo‘lmagan o‘zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlar ichida manfiy bo‘lmaganlari bo‘lmasa, yechim optimal bo‘ladi. Bizning misolda

$$F = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_5 .$$

Simpleks metod algoritmi

1. Yordamchi o‘zgaruvchilarni kiritib chiziqli tenglamalar sistemasini kengaytirilgan sistema ko‘rinishida yozib olamiz:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2,\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{m+n} = b_m,\\
&F - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0
\end{aligned}$$

Bu yerda yordamchi o‘zgaruvchilar ishorasi ozod hadlar ishorasi bilan bir xil bo‘ladi, aks holda sun’iy bazis usulidan foydalaniladi.

2. Kengaytirilgan sistemani dastlabki simpleks jadvaliga joylashtiramiz. Jadvalning oxirgi satrida maqsad funksiya koeffitsiyentlari joylashtirilgan. Masalani optimal yechimini, masalan maksimumini topishda, optimallik kriteriyasini bajarilishini tekshiramiz, agar jadvalning oxirgi satrida manfiy koeffitsiyentlar bo‘lmasa, u holda yechim optimal bo‘lib, uning qiymati jadvalning oxirgi ustuni va oxirgi satri kesishgan joyda bo‘ladi.

3. Agar optimallik kriteriyasi bajarilmasa, u holda oxirgi satrdagi manfiy koeffitsiyentni modul bo‘yicha eng katta hal qiluvchi ustun S ni aniqlaydi.

Har bir satr uchun baholash chegaralarini tuzamiz:

1) agar b_i va a_{is} turli ishorali bo‘lsa, ∞;

2) agar $b_i = 0$ va $a_{is} < 0$ bo‘lsa, ∞;

3) agar $a_{is} = 0$ bo‘lsa, ∞;

4) agar $b_i = 0$ va $a_{is} < 0$ bo‘lsa, 0;

5) agar a_{i0} va a_{is} bir xil ishoraga ega bo‘lsa,

$\frac{b_i}{a_{is}}$.

$\min\limits_i \left\{ \left| \frac{b_i}{a_{is}} \right| \right\}$ ni aniqlaymiz. Agar chekli minimum bo‘lmasa, u holda chekli minimum bo‘lmasa, u holda chekli optimumga ega bo‘lmaydi $(F_{\max} = \infty)$. Agar minimum chekli bo‘lsa, u holda q satrni tanlaymiz va uni ham hal qiluvchi satr deb ataymiz. Hal qiluvchi ustun va hal qiluvchi satr kesishmasida a_{qs} element hal qiluvchi element bo‘ladi.

4. Navbatdagi jadvalga quyidagi qoida bo‘yicha o‘tamiz: chap ustunda yangi bazisni kiritamiz:

a) bazis o‘zgaruvchi x_q o‘rniga x_s ni kiritamiz;

b) bazis o‘zgaruvchiga mos ustunlarda nollar va 1 qo‘yamiz. O‘zining qarshisida 1, boshqa o‘zgaruvchilar qarshisida nollar qo‘yiladi;

d) q nomerli yangi satrni hal qiluvchi a_{qs} elementga bo‘lish yo‘li bilan aniqlaymiz;

e) qolgan barcha a_{ij} elementlarni to‘g‘ri to‘rtburchak qoidasiga ko‘ra hisoblaymiz:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}}$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{is}b_q}{a_{qs}}$$

$$\begin{array}{ccccc} & | & & | & \\ \text{——} & a_{ij} & \text{– – –} & a_{is} & \text{– –} \\ & | & & & \\ \text{——} & a_{qj} & \text{– – –} & a_{qs} & \text{– –} \\ & | & & | & \end{array}$$

va shu yo‘sinda algoritmga o‘tamiz.

2.3. Sun’iy bazis usuli

Kanonik holga keltirilgan chiziqli programmalashtirish masalasining o‘zgaruvchilariga qo‘yilgan cheklovlar sistemasining boshlang‘ich yechimi joiz bo‘lmasa, bunday holda masalani simpleks jadval yordamida yechganda *M* – metod yoki sun’iy bazis usulidan foydalanish qo‘llay bo‘ladi. Bu metodni bayon qilamiz.

Bazis yechimda manfiy yechim beradigan har bir tenglamaga nomanfiy sun’iy $u_1, u_2, \ldots, u_k$ o‘zgaruvchilarni ozod hadlar qanday ishorada bo‘lsa xuddi shunday ishorada kiritamiz. Yangi chiziqli $f(x) = F - M(u_1 + \ldots + u_k)$ funksiyani kiritamiz, bunday *M* – ixtiyoriy katta son va uning maksimumini izlaymiz (1-masala). $M(u_1 + \ldots + u_k)$ ifodani *M* – funksiya deb yuritamiz. Quyidagi teorema o‘rinli (isbotini keltirmaymiz).

1. Agar *f* –masalaning optimal yechimida barcha sun’iy o‘zgaruvchilar nolga teng bo‘lsa, u holda unga mos boshqa o‘zgaruvchilar dastlabki masalaning optimal yechimini beradi ($f_{\max} = F_{\max}$, agar $u_1 = u_2 = \ldots = u_k = 0$), ya’ni *M* –funksiyaning minimumi 0 ga teng.

2. Agar *f* masalaning optimal yechimida hech bo‘lmaganda bitta sun’iy o‘zgaruvchi noldan farqli bo‘lsa, u holda dastlabki masalaning cheklovlar sistemasi ham joyni bo‘lmaydi.

3. Agar $f_{\max} = \infty$ bo‘lsa, u holda dastlabki masala yechimga ega emas, yo $F_{\max} = \infty$, yoki masalaning sharti ziddiyatga ega bo‘ladi.

Teorema shartidan kelib chiqadiki, dastlab *M* – funksiyaning minimumi topiladi. Agar u nolga teng bo‘lsa va barcha sun’iy o‘zgaruvchilar nolga aylansa, u holda bu o‘zgaruvchilar tashlab yuboriladi va joiz bazis yechimlar hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan masalani optimal yechimi topiladi. Amaliyotda *M* –funksiyani minimumi emas, balki $(-M)$ funksiyaning maksimumi topiladi.

2.3-masala. Simpleks jadvalidan foydalanib sun’iy bazis metodi yordamida ushbu masalani yeching.

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
$$F = 7x_1 + 20x_2 \to \min$$

Yechish. Dastlab standart ko‘rinishidagi masalani kanonik ko‘rinishga keltiramiz.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 + 5x_2 - x_4 = 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Yangi kiritilgan o‘zgaruvchi x_3 va x_4 lar bazis o‘zgaruvchi bo‘lolmaydi.

Sun’iy bazis o‘zgaruvchilarni kiritamiz.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + u_1 = 2$$
$$x_1 + 5x_2 - x_4 + u_2 = 3$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4},\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$
$$f = 7x_1 + 20x_2 - M(u_1 + u_2) \to \min$$

Birinchi simpleks jadvalni tuzamiz. (3.4-jadval)

2.3.1-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	OH
u_1	1	2	-1	0	1	0	2
u_2	1	$\boxed{5}$	0	-1	0	1	3
F	-7	-20	0	0	0	0	0
M	-2	-7	1	1	-1	-1	-5

Oxirgi qator, bu $(-M)$ funksiya, ya’ni $-M(u_1 + u_2)$ funksiya. Bu qatorni to‘ldirish uchun u_1 va u_2 qatorlarni (-1) ga ko‘paytirib ustun bo‘yicha ularni qo‘shamiz. $(-M)$ funksiyani maksimumini izlashda optimallik kriteriyasini bajarilishini tekshirish maqsadida oxirgi qatorning manfiy elementlari ichida eng kichigini tanlaymiz, bu ikkinchi ustunda; demak, u hal qiluvchi element 5 bo‘ladi. Sun’iy bazis o‘zgaruvchi u_2 ni keyingi jadvalga kiritmaymiz. Yangi 2.5-jadvalni tuzamiz.

2.3.2-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	OH
u_1	$\boxed{3/5}$	0	-1	2/5	1	4/5
x_2	1/5	1	0	-1/5	0	3/5
F	-3	0	0	-4	0	12
M	-3/5	0	-1	-2/5	-1	-4/5

2.3.3-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	OH
x_1	1	0	-5/3	2/3	4/3
x_2	0	1	1/3	-1/3	1/3
F	0	0	-5	-2	16
M	0	0	0	0	0

Oxirgi qator shuni ko‘rsatadiki, optimallik kriteriyasi bajariladi, $\max(-M)=0$, demak, $\min M=0$, F funksiya uchun ham optimallik kriteriyasi bajarildi. $X^* = \left(4/3;\ \frac{1}{3};\ 0;\ 0\right)$ $F_{\min}=16$.

Agar $\min M=0$ bo‘lib, F funksiya uchun optimallik kriteriyasi bajarilmasa, M qatorni jadvaldan chiqarib tashlaymiz va masalani yechishni oxiriga yetkazib qo‘yamiz.

2.4-masala.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 - x_4 &= -3 \\ x_1 \qquad + x_5 &= 3 \\ F = x_1 + 2x_2 &\to \max \end{aligned}$$

Yechish. Cheklovlar sistemasining manfiy bo‘lgan ozod hadlarini musbat holga keltirib olamiz.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1 \qquad + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Birinchi tenglamaga sun’iy bazis o‘zgaruvchi u_1 ni keltiramiz.

$$-x_1+x_2-x_3+u_1=1$$
$$-x_1+x_2 \qquad +x_4=3$$
$$x_1 \qquad\qquad +x_5=3$$
$$f=x_1+2x_2-Mu_1\to\max$$

Simpleks jadvalni tuzamiz.

2.3.4-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	OH
u_1	-1	$\boxed{1}$	-1	0	0	1	1
x_4	-1	1	0	1	0	0	3
x_5	1	0	0	0	1	0	3
F	-1	-2	0	0	0	0	0
M	1	-1	1	0	0	-1	-1

2.3.5-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	OH
x_2	-1	1	-1	0	0	1
x_4	0	0	1	1	0	2
x_5	1	0	0	0	1	3
F	-3	0	-2	0	0	2
M	0	0	0	0	0	0

2.3.6-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	OH
x_2	-1	1	-1	0	0	1
x_4	0	0	1	1	0	2
x_5	$\boxed{1}$	0	0	0	1	3
F	-3	0	-2	0	0	2

Birinchi ustun aniqlovchi ustun, aniqlovchi element 1. Birinchi ustunda 1 aniqlovchi elementdan boshqa barchasida 0 hosil qilamiz.

2.3.7-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	OH
x_2	0	1	-1	0	1	4
x_4	0	0	$\boxed{1}$	1	0	2
x_1	1	0	0	0	1	3
F	0	0	-2	0	3	11

2.3.8-jadval

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	OH
x_2	0	1	0	1	1	6
x_3	0	0	1	1	0	2
x_1	1	0	0	0	1	3
F	0	0	0	2	3	15

$X^* = (3;6;2;0;0)$ $F_{\max} = 15$

Mustaqil yechish uchun misollar

Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy bazis yechimlarini toping.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 = 12 - 11x_3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 22 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 31 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 6x_1 + 8x_2 - 18x_3 = 20 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_6 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_7 = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 2 \end{cases}$

Chiziqli programmalashtirish masalalarini grafik usulda yeching.

1. $$F(x)=3x_1+x_2\to\max$$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2\le 6\\ 2x_1-3x_2\le 3\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(2,25;0,5),\quad \max F(x)=7,25$

2. $$F(x)=2x_1-10x_2\to\min$$
$$\begin{cases}x_1-x_2\ge 0\\ x_1-5x_2\ge -5\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(0;1),\quad \min F(x)=-10$

3. $$F(x)=2x_1+3x_2\to\max$$
$$\begin{cases}x_1+4x_2\ge 8\\ x_1\le 4\\ 2x_2\ge 5\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
J. Yechimi mavjud emas.

4. $$F(x)=x_1+4x_2\to\min$$
$$\begin{cases}4x_1-3x_2\le 12\\ x_1-x_2\ge 1\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(1,0),\ \min F(x)=1$

5. $$F(x)=x_1+x_2\to\max$$
$$\begin{cases}2x_1-3x_2\le 6\\ x_1+4x_2\le 4\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(36/11;\ 2/11),\ \max F(x)=38/11$

6. $$F(x)=2x_1+x_2\to\min$$
$$\begin{cases}2x_1-x_2\le 2\\ 5x_1-x_2\le 5\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(0;\ 0),\ \min F(x)=0$

7. $$F(x)=x_1+3x_2\to\min$$
$$\begin{cases}3x_1-x_2\ge 6\\ 5x_1-x_2\ge 10\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(2;\ 0),\ \min F(x)=6$

8. $$F(x)=2x_1+3x_2\to\max$$
$$\begin{cases}5x_1+3x_2\le 15\\ 5x_1+4x_2\le 20\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(0;\ 5),\ \max F(x)=15$

Chiziqli programmalashtirish masalalarini simpleks usulda yeching

9. $$F(x)=x_1+2x_2\to\max$$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2\le 24\\ x_1+3x_2\le 15\\ x_1\le 4\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(4;\ 11/3),\ \max F(x)=34/3$

10. $$F(x)=x_1+x_2\to\max$$
$$\begin{cases}-2x_1+3x_2\le 12\\ 3x_1-5x_2\le 3\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
$J.\ X^*=\infty$

11. $$F(x)=x_1-x_2\to\max$$
$$\begin{cases}-2x_1+3x_2\le 12\\ x_1+x_2\le 9\\ x_1-x_2\le 3\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(6;\ 3),\ \max F(x)=3$

12. $$F(x)=9x_1+5x_2+4x_3+3x_4+2x_5\to\max$$
$$\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3\le 6\\ x_1+x_2+x_3+x_4=24\\ 2x_1+x_2-4x_3+x_5=30\\ x_1\ge 0,\ j=\overline{1,5}\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(0;\ 7;\ 10;\ 0;\ 63),\ \max F(x)=201$

13. $$F(x)=x_1-x_2-3x_3\to\max$$
$$\begin{cases}4x_1-2x_2+x_3\le 1\\ 4x_1-2x_2+x_3\ge -2\\ 3x_1+x_3\le 5\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(1/3;\ 11/3;\ 4),\ \max F(x)=46/3$

14. $$F(x)=3x_1+4x_2\to\max$$
$$\begin{cases}x_1+2x_2\le 4\\ x_1+x_2\le 3\\ 2x_1+x_2\le 8\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$$
$J.\ X^*_{opt}=(0;\ 0),\ \max F(x)=0$

III BOB. SHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISHLAR IKKILANMA NAZARIYASI

3.1. Ikkilanma nazariyasining asosiy teoremalari va iqtisodiy talqini

Har qanday chiziqli programmalashtirish masalasiga ikkilanma yoki qo‘shma masala mavjud bo‘ladi. Ikkilanmalik nazariyasi chiziqli programmalashtirish masalasini sifatli tadqiq etish imkoniyatini beradi.

I-bobda ishlab chiqarish modeli qaralgan edi. (Bu masalaning talqini 3.1-jadvalning chap qismida keltirilgan). Keltirilgan modelda $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)\ S_i$ resurs zaxirasini ifodalaydi, $a_{ij} - P_j$ turdagi mahsulotni bir birligini ishlab chiqarishda sarflanadigan S_i resursning birlik miqdori, C_j - ishlab chiqarilgan P_j mahsulotni bir birligini sotishda olinadigan foydani, ya’ni P_j mahsulot narxini bildiradi.

Aytaylik, qandaydir tashkilot shu korxonaning $S_1, S_2, \ldots, S_m$ resurslarini sotib olishga qaror qilgan bo‘lsin. Bu resurslarga optimal $y_1, y_2, \ldots, y_m$ narx belgilash lozim.

Ravshanki, sotib oluvchi tashkilotni mahsulotni $b_1, b_2, \ldots, b_m$ miqdorda resusrlarni olishdagi mos narxlari $y_1, y_2, \ldots, y_m$ lar minimal bo‘lishini xohlaydilar, ya’ni barcha resurslar uchun xarajat Z minimal bo‘lsin.

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

Ikkinchi tomondan resurslarni sotuvchi korxona ishlab chiqargan mahsulotlarini sotishdan keladigan daromaddan kam bo‘lmasligini xohlaydilar.

P_1 mahsulotni tayyorlash uchun S_1 resursdan a_{11} birlik, S_2 resursdan a_{21} birlik, $\ldots, S_i$ resursdan a_{21} birlik, $\ldots, S_m$ resursdan a_{m1} birlik sarflanadi. Ularning narxlari mos ravishda $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Shuning uchun sotuvchining talabi P_1 mahsulotni ishlab chiqarishda sarflanadigan resurs narxi C_1 dan kichik bo‘lmasligi kerak, ya’ni

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

Shunga o‘xshash har bir $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mahsulot uchun chiziqli tengsizliklar ko‘rinishida cheklovlar tuzishimiz mumkin.

Shunday qilib ikkilanma masalaning iqtisodiy matematik modelini hosil qilamiz.

3.1.1-jadval

Masala I (dastlabki)	**Masala II (dastlabki)**
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$ Ishlab chiqarishni shunday $X = (x_1, \ldots, x_n)$ rejasini tuzish kerakki, bunda ishlab chiqarilgan mahsulotni sotishdan keladigan foyda eng katta bo‘lsin.	$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1,$ $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2,$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n,$ $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$ $Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$ Shunday $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ narxlar to‘plamini topish kerakki, bunda sarflangan umumiy xarajat eng kam bo‘lsin.

I va II chiziqli programmalash masalalari quyidagi xossalarga ega:

1. Bir masalada chiziqli funksiyaning maksimumi izlansa, ikkinchi masalada minimum topiladi.
2. Bir masalaning chiziqli funksiyasining koeffitsiyentlari ikkinchi masalaning ozod hadlaridan iborat bo‘ladi.
3. Standart ko‘rinishdagi masalada agar maksimum izlansa barcha tengsizliklar "$\leq$" ko‘rinishda, minimum izlansa barcha tengsizliklar rejasini "$\geq$" da bo‘ladi.
4. Har ikkala masalada o‘zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsalar bir biriga transponirlangan bo‘ladi.

I masala uchun II masala uchun

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{21} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12} a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} a_{2n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

5. Bir masaladagi cheklovlar sistemasidagi tengsizliklar soni ikkinchi masaladagi o‘zgaruvchilar soniga teng bo‘ladi.

6. Har ikkala masalada o‘zgaruvchilarga qo‘yilgan nomanfiylik shartlari saqlanadi.

7. Ikkilanma masalasini tuzish algoritmi:

1. Dastlabki masalaning barcha tengsizliklari bir xil bo‘lsin: agar dastlabki masalada maksimum izlansa, cheklovlar sistemasi "$\le$", minimum izlansa "$\ge$" ko‘rinishda bo‘lishi kerak.

2. A_1 matritsaga transponirlangan A_1' matritsa topamiz.

3. O‘zgaruvchilarga qo‘yilgan nomanfiylik shartini va yuqoridagilarni hisobga olib ikkilanma masala tuzamiz.

Ushbu masalaga ikkilanma masala tuzing:

$$\begin{aligned} &3x_1 - x_2 \ge 2 \\ &-x_1 + 4x_2 \le 12 \\ &x_1 - x_2 \le 3 \\ &x_1 + x_2 \ge 4 \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \\ &F = -2x_1 + 3x_2 \to \max \end{aligned}$$

Yechish. 1. Dastlabki masalada maksimum izlanmoqda, shuning uchun cheklovlar sistemasidagi barcha tengsizliklar sistemasi "$\le$" ko‘rinishga keltiramiz, buning uchun birinchi va to‘rtinchi tengsizliklarni har ikkala qismini -1 ga ko‘paytiramiz.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le -2 \\ -x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ -x_1 - x_2 \le -4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. Sistemaning ko‘paytirilgan matritsasini tuzamiz.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & : & -2 \\ -1 & 4 & : & 12 \\ 1 & -1 & : & 3 \\ -1 & -1 & : & -4 \\ -2 & 3 & : & F \end{pmatrix}$$

3. A_1 matritsaga transponirlangan A_1' matritsani topamiz.

$$A_1' = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & 12 & 3 & -4 & Z \end{pmatrix}$$

4. Ikkilanma masalani yozamiz.

$$\begin{cases} -3y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -2 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_1 \ge 3 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0$$

$$Z = -2y_1 + 12y_2 + 3y_3 - 4y_4 \to \min$$

Ikkilanmalik nazariyasining asosiy tengsizligi

Aytaylik, ikki juft I va II ikkilanma masala berilgan bo‘lsin. Dastlabki va ikkilanma masalalarning $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ joiz yechimlari uchun ushbu tengsizlik o‘rinli

$$F(X) \le Z(Y) \text{ yoki } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Isbot. Dastlabki masalaning cheklov sistemasining tengsizlariga $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$ mos ravishda $y_1, y_2, \dots, y_m$ larga ko‘paytirib chap va o‘ng qismlarini qo‘shamiz va ushbuga ega bo‘lamiz.

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (3.1.)$$

Shunga o‘xshash $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \geq c_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right)$ tengsizliklarni har ikkala qismini $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilarga ko‘paytirib qo‘shish natijasida ushbuga ega bo‘lamiz.

$$\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3.2.)$$

(3.1.) va (3.2.) tengsizliklarning chap qismlari $\sum_{i=1}^{m} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j y_i$ ifodadan iborat bo‘lgani uchun tengsizliklarning tranzitivlik xossasiga ko‘ra isbotlanishi zarur bo‘lgan tengsizlikni olamiz, ya’ni

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_j$$

Optimallikning yetarlilik alomati

Teorema. Agar o‘zaro ikkilanma masalalarning joiz yechimlari $X^* = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ va $y^* = \left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right)$ iborat bo‘lib, ular uchun

$$F\left(x^*\right) = Z\left(y^*\right) \qquad (3.3)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda X^*- dastlabki I masalaning, y^* - esa ikkilanma II masalaning optimal yechimlari bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik X_1 –dastlabki I masalaning ixtiyoriy joiz yechimi bo‘lsin, u holda asosiy tengsizlikka ko‘ra $F(x_1) \leq Z(y^*)$. X_1 dastlabki I masalaning ixtiyoriy yechimi bo‘lgani uchun (3.3) dan $F(x_1) \leq F(x^*)$ ekanligi kelib chiqadi, ya’ni X^* - I masalaning optimal yechimi. Shunga o‘xshash II masala uchun optimallik isbotlanadi.

Ikkilanmalikning birinchi teoremasi.

Teorema. Agar ikkilanma masalalarning biri optimal yechimga ega bo‘lsa, u holda unga ikkilanma masala ham optimal yechimga ega bo‘lib, ularning chiziqli funksiyalarining optimal qiymatlari teng bo‘ladi.

$$F_{\max} = Z_{\min} \quad \text{yoki} \quad F\left(X^*\right) = Z\left(y^*\right) \qquad (3.4)$$

Agar chiziqli funksiyalardan birortasi chegaralanmaydigan bo‘lsa, u holda unga ikkilanma masala joiz yechimga ega bo‘lmaydi.

Isbot. Teoremaning birinchi qismining tasdig‘iga (biz uni isbotsiz qabul qilamiz) ko‘ra, (3.3) tenglik na faqat optimallikning yetarlilik sharti, balki unga ikkilanma masala optimallanganining zaruriy sharti ham bo‘ladi.

Teoremaning ikkinchi qismini isboti teskarisiga faraz qilish metodi yordamida oson isbotlanadi. Faraz qilaylik, dastlabki masalaning chiziqli funksiyasi chegaralanmagan bo‘lsin, ya’ni $F_{\max} = \infty$, ikkilanma masalaning cheklov sharti esa hech bo‘lmaganda bitta yechimga ega bo‘lsin, ya’ni $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. U holda ikkilanmalikning asosiy tengsizligiga $F(x) \le Z(y)$ ko‘ra, $F(x)$ ning chegaralanmaganligiga zid bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki, $F_{\max} = \infty$ da dastlabki masalaga ikkilanma masala joiz yechimga ega bo‘lmaydi.

Ikkilanmalikning birinchi teoremasiga doir misol ko‘ramiz

O‘zaro ikkilanma masalalar berilgan:

I

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

II

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \to \min$$

Bu masalalarni yechib $F_{\max} = 24$ I masala uchun, II masala uchun esa $Z_{\min} = 24$ hosil qilamiz.

3.2. Iqtisodiy masalalar yechimining talqini

Ikkilanmalikning asosiy teoremasiga iqtisodiy talqini

Ishlab chiqarishni rejasi $X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va narxlar to‘plami $Y^* = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ optimal bo‘ladi faqat va faqat, qachonki oldindan ma’lum bo‘lgan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ “tashqi” narxda mahsulotni sotishdan olinadigan foyda, “ichki” resurs uchun sarflangan xarajat narxi

$y_1, y_2, \dots, y_m$ ga teng bo‘lsa. Boshqa har qanday reja X va Y uchun ikkilanmalik nazariyasining asosiy tengsizligiga ko‘ra ishlab chiqarilgan mahsulotni sotishdan olinadigan foyda resurslar uchun sarflangan xarajatdan kichik bo‘ladi.

3.2-masala. Resurslardan foydalanish (1.1) masalani simpleks usulda yechamiz.

$$x_1 + 3x_2 \le 18$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_2 \le 5$$
$$3x_1 \le 21$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Yechish. Masalani kanonik holda yozib olamiz.

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 18$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 16$$
$$x_2 + x_5 = 5$$
$$3x_1 + x_6 = 21$$
$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,6}$$
$$F - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

Simpleks jadvalni tuzamiz.

3.2.1-jadval

BO‘	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	OH
x_3	1	3	1	0	0	0	18
x_4	2	1	0	1	0	0	16
x_5	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	5
x_6	3	0	0	0	0	1	21
F	-2	-3	0	0	0	0	0

$$x_2 = \min\left\{\frac{18}{3}; 16; 5; \infty\right\} = 5$$

3.2.2-jadvalni tuzamiz. Ba’zis o‘zgaruvchilar x_3, x_4, x_2, x_6

Ikkinchi ustunda to‘rtburchakka olingan hal qiluvchi element 1 dan boshqa barchasida nollar hosil qilamiz.

3.2.2-jadval

BO‘	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	OH
x_3	$\boxed{1}$	0	1	0	-3	0	3
x_4	2	0	0	1	-1	0	11
x_2	0	1	0	0	1	0	5
x_6	3	0	0	0	0	1	21
F	-2	0	0	0	3	0	15

Optimallik kriteriyasi bajarilmadi. Endi birinchi ustun hal qiluvchi ustun bo‘ladi. x_1 bazisga kiradi, chunki $x_1 = \{3/1; 4/2; \infty; 7\} = 3$ yangi 3.2.3-simlpeks jadval quyidagi ko‘rinishni oladi.

3.2.3-jadval

BO‘	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	OH
x_1	1	0	1	0	-3	0	3
x_4	0	0	-2	1	$\boxed{5}$	0	5
x_2	0	1	0	0	1	0	5
x_6	0	0	-3	0	9	1	12
F	0	0	2	0	-3	0	21

Bu holda ham optimallik kriteriyasi bajarilmadi.

3.2.4-jadvalni tuzamiz. x_5 bazisga kiradi.

3.2.4-jadval

BO‘	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	OH
x_1	1	0	$-1/5$	$3/5$	0	0	6
x_5	0	0	$-2/5$	$1/5$	1	0	1
x_2	0	1	$2/5$	$-1/5$	0	0	4
x_6	0	0	$3/5$	$9/5$	0	1	3
F	0	0	$4/5$	$3/5$	0	0	24

Optimallik kriteriyasi bajarildi, demak $F_{\max} = 24$, optial bazis yechim $X^* = (6;\ 4;\ 0;\ 0;\ 1;\ 3)$

Endi I ga ikkilanma II masalani yechamiz. Sun’iy bazis usulidan foydalanamiz.

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + \ \ 3y_4 - y_5 + u_1 = 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \qquad\quad - y_6 + u_2 = 3 \end{cases}$$

$$z - 18y_1 - 16y_2 - 5y_3 - 21y_4 + M(u_1 + u_2) = 0$$

3.2.5-jadval

BO‘	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	u_1	u_2	OH
u_1	1	2	0	3	-1	0	1	0	2
u_2	$\boxed{3}$	1	1	0	0	-1	0	1	3
Z	-18	-16	-5	-21	0	0	0	0	0
F	-4	-3	-1	-3	1	1	-1	-1	-5

Keyingi jadvalni tuzamiz.

3.2.6-jadval

BO‘	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	u_1	OH
u_1	0	$5/3$	$-1/3$	$\boxed{3}$	-1	$1/3$	1	1
y_1	1	$1/3$	$1/3$	0	0	$-1/3$	0	1
Z	0	-10	-1	-21	0	-6	0	18
M_ϕ	0	$-5/3$	$1/3$	-3	1	$-1/3$	-1	-1

3.2.7-jadval

BO‘	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	OH
y_4	0	$\boxed{5/9}$	$-1/3$	1	$-1/3$	1	1
y_1	1	$1/3$	$1/3$	0	0	$-1/3$	1
Z	0	$5/3$	$-4/3$	0	-7	$-4/3$	25
M_ϕ	0	0	0	0	0	0	0

Optimallik kriteriyasi bajarilmadi. Keyingi jadvalni tuzamiz.

3.2.8-jadval

BO‘	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	OH
y_2	0	1	$-1/5$	$9/5$	$-3/5$	$1/5$	$3/5$
y_1	1	0	$2/3$	$-3/5$	$1/5$	$-2/3$	$4/5$
Z	0	0	-1	-3	-6	-4	24

Optimallik kriteriyasi bajarildi, ya’ni jadvalning oxirgi qatorida musbat element qolmadi. Demak, $Y^* = (4/5; 3/5; 0;\ 0;\ 0;\ 0)$ da $Z_{\min} = 24$. Shunday qilib, $F_{\max} = Z_{\min} = 24$. Optmal bo‘lmagan boshqa har qanday rejada $F(x) \le 24,\ Z(y) \ge 24$ bo‘ladi.

Ikkilanmalikning birinchi teoremasining iqtisodiy ma’nosini quyidagicha talqin qilish mumkin. Korxona $X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ optimal rejada mahsulot ishlab chiqarib maksimal foyda olish mumkin yoki $Y^* = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ optimal rejada resurs sotib, minimal xarajat qilib, optimal foyda ko‘rishi ham mumkin.

3.3. Ikkilanma simpleks usul

Aytaylik, bizga ikkita o‘zaro ikkilanma masalalar berilgan bo‘lsin (3.3.1-jadval). Agar bu masalalarning har birini simpleks metod yordamida yechishimiz uchun bu masalalarning har birini kanonik holga keltiramiz. I masalaning cheklov sharti $\sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j \le b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right)$ ga m ta nomanfiy $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$ o‘zgaruvchilarni kiritamiz. II masalaning cheklov sharti $\sum_{i=1}^{n} a_{lj} x_j \ge c_j \ \left(j = \overline{1,n}\right)$ ga n ta $y_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, y_{n+m}$, bu yerda $x_{n+i} \ge 0, y_{m+j} \ge 0.$

U holda har bir ikkilanma masalaning cheklov sistemalari ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_{n=i} = b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right) \qquad (3.5.)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{lj} y_j - y_{m+j} = c_j \ \left(j = \overline{1,n}\right) \qquad (3.6.)$$

O‘zaro ikkilanma masalalardan birining dastlabki o‘zgaruvchilari bilan ikkinchi masalaning yordamchi o‘zgaruvchilari orasida moslik o‘rnatamiz.

3.3.1-jadval

Dastlabki I masalaning o‘zgaruvchilari	
Dastlabki	Yordamchi
$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_{m-1} & y_{m+2} & \dots & y_{m+j} & \dots & y_{m+n} \end{matrix}$	$\begin{matrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & \\ y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & y_m \end{matrix}$
Yordamchi	Dastlabki
Ikkilanma II	Masalaning o‘zgaruvchilari

(3.7)

Teorema. Ikkilanma masalalardan birining optimal yechimidan musbat (nol bo‘lmagan) komponentlari ikkinchi masalalarning optimal yechimidagi nolli komponentlariga mos keladi, ya’ni har qanday $i=\overline{1,m}$ va $j=\overline{1,n}$ uchun $x_j^*>0$ bo‘lsa, u holda $y_{m+j}^*=0$; agar $x_{n+i}^*>0$ bo‘lsa, u holda $y_i^*=0$, va shunga o‘xshash agar $y_i^*>0$ bo‘lsa, u holda $x_{n+i}^*=0$, agar $y_{m+j}^*>0$, u holda $x_j^*=0$.

I va II o‘zaro ikkilanma masalalarning (3.5) va (3.6) cheklov sistemasining har bir tenglamasiga mos ravishda $y_1, y_2, \dots, y_m$ ko‘paytirib qo‘shamiz va ushbuga ega bo‘lamiz.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{n+j}\cdot y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i\cdot y_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j y_i \tag{3.8}$$

Shunga o‘xshash (3.6) sistemaning har bir tenglamasiga $x_j \ge 0$ ni ko‘paytirib qo‘shamiz va ushbuga ega bo‘lamiz.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\cdot y_{m+j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.9}$$

(3.8) va (3.9) tengliklar o‘zgaruvchilarning har qanday joiz qiymatlarida o‘rinli, jumladan $x_j^*, x_{n+i}^*, y_i^*, y_{m+j}^*$ optimal qiymatlar uchun ham. Ikkilanmalikning birinchi teoremasiga ko‘ra $F(x^*)=Z(y^*)$ yoki $\sum_{j=1}^{n} c_j\cdot x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$, shuning uchun (3.8) va (3.9) tengliklarning o‘ng qismlari faqat ishorasi bilan farq $\sum_{i=1}^{m} x_{n+j}\cdot y_i$ va $\sum_{j=1}^{n} x_j\cdot y_{m+i}$ ifodalarning nomanfiyligini hisobga olsak, (3.8) va (3.9) tengliklarning o‘ng qismlari ham nomanfiy ekanligi kelib chiqadi. Bu shart bajarilishi uchun, ya’ni o‘zgaruvchilarning optimal qiymatlarida ularning o‘ng qismlari nolga teng bo‘lishi kerak:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}^{*} y_i^{*} = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} x_j^{*} y_{m+j}^{*} = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

(3.10) da o‘zgaruvchilarning nomanfiyligidan

$$\begin{cases} x_{n+i}^{*} y_i^{*} = 0 & i = \overline{1,m} \\ x_j^{*} y_{m+j}^{*} = 0 & j = \overline{1,n} \end{cases}$$

bundan yuqoridagi teoremaning isboti kelib chiqadi.

Ikkilanmalikning ikkinchi teoremasi

O‘zaro ikkilanma masalalarning optimal yechimidagi komponentlar dastlabki masalaning chiziqli funksiyasini o‘zgaruvchilari oldidagi koeffitsiyentlarning absolyut qiymatidan, dastlabki masalaning optimal qiymatidagi komponentlar esa unga ikkilanma masalaning chiziqli funksiyasi oldidagi koeffitsiyentlarning absolyut qiymatidan iborat bo‘ladi.

(3.2) va unga ikkilanma masalalarning yechimlariga e’tibor berib o‘zaro ikkilanma masalalarning ikkinchi teoremasini o‘rinli ekanligini ko‘rishimiz mumkin.

(3.7) ifodaga ko‘ra o‘zgaruvchilar orasida ushbu munosabatni yozamiz.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}$$

Dastlabki I masala	Ikkilanma II masala
$F = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$ $F(X^*) = F_{\max} = 24$ (3.11) $X^* = (6;\ 4;0;0;1;3)$	$Z = 24 + y_3 + 3y_4 + 6y_5 + 4y_6$ $Z(Y^*) = Z_{\min} = 24$ (3.12) $Y^* = \left(\frac{4}{5};\ \frac{3}{5};0;0\right)$

IV BOB. BUTUN SONLI PROGRAMMALASHTIRISH

4.1. Butun sonli dasturlash masalasi

Ko‘pgina iqtisodiy masalalar chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirilib, uning butun sonli yechimini topish talab qilinadi. Bunday masalalarda, o‘zgaruvchilar, bo‘linmaydigan mahsulot miqdori birliklaridan iborat. Masalan, materiallarni qirqish, uskunalarni yuklash, mashinalar (agregatlar, uskunalar, chorvadagi mollar) miqdori, paroxodlarni yo‘nalishlar bo‘yicha taqsimlash, samolyotlarni reyslar bo‘yicha taqsimlash hamda bo‘linmaydigan mahsulot ishlab chiqish masalalaridan iborat.

Bunday masalalar chiziqli va chiziqsiz bo‘lishi mumkin. Bunda, butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasi chiziqli, ya’ni, maqsad funksiya va uni chegaralovchi shartlar chiziqli deb olinadi. Bunda optimal yechim, manfiy bo‘lmagan butun sonlardan iborat bo‘lishi talab etiladi.

Masalaning qo‘yilishi. Chegaraviy shartlarda

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_j \geq 0,\ x_j\ butun,\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n},$$

ushbu chiziqli funksiyaning ekstremal qiymatini aniqlang

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max(\min)$$

4.2. Grafik va Gomori usuli

Aytaylik, chiziqli programmalashtirish masalasini simpleks usulda yechganda uning optimal yechimi topilgan bo‘lib, ushbu tenglamalar sistemasi hosil qilingan, bunda $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_m$ bazis o‘zgaruvchilar bazis bo‘lmagan $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+i}, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilar orqali ifodalangan bo‘lsin, ya’ni

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \beta_1 - \alpha_{1m+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{1n}x_n\,, \\
&x_2 = \beta_2 - \alpha_{2m+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{2n}x_n\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_i = \beta_i - \alpha_{im+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{in}x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_m = \beta_m - \alpha_{mm+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{mn}x_n\,,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

bunda optimal yechim $\chi^* = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_i, \ldots, \beta_m, 0, 0, \ldots 0)$. Faraz qilaylik bunda β_i komponent butun bo‘lmasin. U holda ushbu tengsizlik

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - \ldots - \{\alpha_{in}\}x_n \le 0 \tag{4.2}$$

tengsizlik (4.1) sistemaning barcha shartlarini qanoatlantirishini ko‘rsatish mumkin. (4.2) da $\{\ \}$ belgi sonning kasr qismini ifodalaydi.

$\{a\} = a - [a]$, $[a]$ – a sonining o‘zidan katta bo‘lmagan butun qismi.

Butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasini yechish uchun Gomori usulidan foydalanish algoritmi:

1. Chiziqli programmalashtirish masalasi butun sonli shartini hisobga olmagan holda simpleks usulda yechiladi. Agar optimal yechimning barcha komponentlari butun bo‘lsa, unda masala optimal yechimga ega bo‘lib, butun sonli programmalash masalasi optimal yechimga ega bo‘ladi. Agar dastlabki masala optimal yechimga ega bo‘lmasa, butun sonli programmalash masalasi ham optimal yechimga ega bo‘lmaydi.

2. Agar optimal yechimlar ichida butun bo‘lmagan komponentlar bo‘lsa, u holda ularning kasr qismi katta bo‘lgani tanlanadi va (4.2) kesim qo‘llaniladi.

3. (4.2) tengsizlik nomanfiy butun yordamchi o‘zgaruvchi kiritish bilan tenglama ko‘rinishga keltiriladi va uni cheklov shartlariga qo‘shiladi.

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - \ldots - \{\alpha_{in}\}x_n + x_{n+1} = 0 \tag{4.3}$$

4. Hosil qilingan kengaytirilgan masala simpleks metodi yordamida yechiladi. Agar topilgan optimal reja butun sonli reja bo‘lsa, u holda butun sonli programmalashtirish masalasi yechilgan bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan masala, Gomori usuli bilan yechtlsin. Masalaning matematik modeli:

$$Z(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = \frac{19}{3}$$

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 10$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \quad \text{butun}$$

Yechish.

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	OH
x_3	2	1	1	0	$19/3$
x_4	1	$\boxed{3}$	0	1	10
Z	-2	-4	0	0	0

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	OH
x_3	$\boxed{5/3}$	0	1	$-1/3$	3
x_2	$1/3$	1	0	$1/3$	$10/3$
Z	$-2/3$	0	0	$4/3$	$40/3$

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	OH
x_1	1	0	$3/5$	$-1/5$	$9/5$
x_2	0	1	$-1/5$	$2/5$	$41/15$
Z	0	0	$2/5$	$6/5$	$218/15$

3-qadamdagi 1-satr uchun qo‘shimcha kesuvchi tenglama tuzamiz.

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} - \left\{\frac{3}{5}\right\}x_3 - \left\{-\frac{1}{5}\right\}x_4 \leq 0$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x_4 + \frac{5}{3}x_5$$

BU	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	OH
x_1	1	0	0	-1	1	1
x_2	0	1	0	$2/3$	$-1/5$	3
x_3	0	0	1	$4/3$	$-5/3$	$4/3$
Z	0	0	0	$2/3$	$2/3$	14

$$X^* = (1;3),\ Z_{\max} = 14$$

4.3. Chegaraviy usulni tushunish

Chegaraviy metod – kombinator metodlardan biri hisoblanadi. Bu metodda tartiblangan variantlar shunday tanlanadiki, bunda maqsadga tez yetkazuvchi masalalar qaraladi, maqsaddan uzoqlashadiganlari tashlab yuboriladi.

Bu metod quyidagidan iborat masalaning joiz yechimlar to‘plami qandaydir usul yordamida qism to‘plamlarga ajratiladi, xuddi shunday metod bilan yana qism to‘plamlarga ajratiladi. Bu jarayon optimal yechim topilguncha davom ettiriladi.

Aytaylik, berilgan masalaning maksimumga simpleks usulda (o‘zgaruvchilarni butunligi hisobga olinmagan holda) yechilgan bo‘lib, har bir butun o‘zgaruvchining quyi va yuqori chegarasi ma’lum bo‘lsin

$$X_j :\ v_j \le x_j \le w_j \qquad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

hamda z_0 chiziqli funksiyaning quyi chegarasi har qanday X rejada $z(X) \ge z_0$ bo‘lsin. Aniqlik uchun faqat birinchi x_1^* komponent optimal X^* rejani butun sonli shartini qanoatlantirmasin. U holda masalaning joiz yechimidan $[x_1^*] < x_1^* < [x_1^*]+1$, soha olib tashlanadi, bunda $[x_1^*] - x_1^*$ ning butun qismi. Natijada bu masaladan 2 ta masala hosil bo‘ladi. Dastlabki masalaga

$$v_1 \le< x_1^* < [x_1^*]+1 \quad \text{va} \quad [x_1^*]+1 \le x_1^* \le w_1$$

shartlar qo‘shiladi. Bu masalalardan birini ixtiyoriy tartibda yechamiz. Hosil qilingan yechimdan masalalar ro‘yxati ko‘payadi yoki kamayadi. Agar bu 2 ta masalalardan birini yechishdan hosil qilingan yechim butun sonli optimal reja bo‘lmasa, uning uchun $z(x^*) \le z_0$ bo‘lsa, u holda bu masala ro‘yxatdan chiqariladi. Agar $z(x^*) \le z_0$, bo‘lsa u holda bu masaladan yana 2 ta masala hosil qilamiz. Agar hosil qilingan X^* butun sonlilik shartini qanoatlantirsa va $z(x^*) > z_0$ bo‘lsa, u holda z_0 butun sonli optimal yechim sifatida qabul qilinadi. Bu jarayon ro‘yxatdan masalalar yo‘qolguga qadar davom etadi, ya’ni barcha masalalar yechilmagunga qadar.

Ushbu masalani yechamiz.

$$4x_1 + 3x_2 \le 18,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$0 \le x_1 \le 5,$$
$$0 \le x_2 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \quad \textit{бутун}$$
$$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

Yechish. Chiziqli funksiyaning quyi chegarasi sifatida $(0,0)$ nuqtani olamiz, uning qiymati bu nuqtada $z_0 = z(0;0) = 0$.

1-qadam. Berilgan masalani simpleks usulda yechib $X_1^* = (4{,}5; 0; 0; 1{,}5; 0{,}5; 4)$ da $z_{\max} = 13$ ni hosil qilamiz.

Ko‘rinib turibdiki, x_1^* komponent kasr sondan iborat, u holda yechimlar sohasidan x_1^* kasrli optimal qiymat yo‘qotiladi, ya’ni $4 < x_1 < 5$. Shuning uchun berilgan dastlabki masala 2 va 3 masalalarga bo‘linadi.

2 masala

$$4x_1 + 3x_2 \le 18,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$0 \le x_1 \le 4$$
$$0 \le x_2 \le 4$$
x_1, x_2 – butun sonlar
$$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

3 masala

$$4x_1 + 3x_2 \le 18,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$5 \le x_1 \le 5$$
$$0 \le x_2 \le 4$$
x_1, x_2 – butun sonlar
$$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

Masalalar ro'yxati: 2 va 3. Chiziqli funksiyaning quyi chegarasi o'zgarmadi $Z_0 = 0$.

2-qadam. Ro'yxatdagi masalalardan birini masalan, 3 ni simpleks usulda yechamiz. Cheklov shartlari umumiy qismga ega emasligini aniqlaymiz.

3-qadam. 2-masalani simpleks usulda yechamiz va $x_2^* = \left(4; \frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}; 0; \frac{10}{3}\right)$ da $Z_{\max} = 4\frac{2}{3}$ ni hosil qilamiz.

$Z(x_3^*) = 4\frac{2}{3} > Z_0 = 0;$ ammo hali ham $Z_0 = 0$ yoki x_3 reja butun sonli emas, chunki x_2^* - kasr son, yechimlar sohasidan $0 < x_2 < 1$ chiziqni yo'qotamiz va 2-masalani ikkita 4 va 5-masalaga ajratamiz.

4 masala	3 masala
$4x_1 + 3x_2 \le 18,$	$4x_1 + 3x_2 \le 18,$
$x_1 + 2x_2 \le 6,$	$x_1 + 2x_2 \le 6,$
$0 \le x_1 \le 4$	$0 \le x_1 \le 4$
$0 \le x_2 \le 0$	$1 \le x_2 \le 4$
$x_1, x_2 -$ butun sonlar	$x_1, x_2 -$ butun sonlar
$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$	$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

Masalalar ro'yxati: 4 va 5 $Z_0 = 0$.

4-qadam. 4-masalani simpleks usulda yechamiz. $x_4^* = (4; 0; 2; 2; 0; 0)$ da $Z_{\max} = 12$ hosil qilamiz.

Masalani ro'yxatdan chiqaramiz, ammo Z_0 ni almashtiramiz $Z_0 = Z(x_4^*) = 12,\ x_4^* -$ butun sonli.

5-qadam. 5-masalani simpleks usulda yechamiz. $x_5^* = (3{,}75; 1; 0; 0{,}25; 0{,}25; 0{,}3)$ da $Z_{\max} = 12{,}25$ ni hosil qilamiz. Z_0 o'zgarmayapti, ya'ni $Z_0 = 12,\ x_5^* -$butun sonli emas, $x_1^* -$kasr son, yechimlar sohasidan $3 < x_1 < 4$ chiziqni yo'qotamiz va 5-masalani 6 va 7-masalalarga bo'lamiz.

6 masala	7 masala
$4x_1+3x_2\le 18,$ $x_1+2x_2\le 6,$ $0\le x_1\le 3$ $1\le x_2\le 4$ $x_1, x_2 -$ butun sonlar $Z=3x_1+x_2\to\max$	$4x_1+3x_2\le 18,$ $x_1+2x_2\le 6,$ $4\le x_1\le 4$ $1\le x_2\le 4$ $x_1, x_2 -$ butun sonlar $Z=3x_1+x_2\to\max$

masalalar ro'yxati 6 va 7. $Z_0=12$.

6-qadam. Ro'yxatdagi masalalardan biri masalan, 7-masalani simpleks metod yordamida yechamiz.

Masalaning cheklov sharti umumiy qismga ega emas.

7-qadam. 6-masalani simpleks metod yordamida yechamiz. $x_6^*=(3{,}1{,}5;1;5;0;0;0{,}5;2{,}5)$ da bunday holda masalani ro'yxatdan chiqaramiz.

Shunday qilib, ro'yxat oxiriga yetdi va dastlabki masalaning butun sonli optimal yechimi $x^*=x_4^*=(4{,}0;2;2;0;0)$ da $Z_{\max}=12$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Butun sonli programmalashtirish masalasini yeching.

1. $Z(x)=x_1+2x_2\to\max$
$$\begin{cases}7x_1+5x_2\le 35\\ -2x_1+3x_2\le 6\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\quad butun\end{cases}$$

J: $X_{opt}^*=(2;3),\ \max Z(x)=8$

2. $Z(x)=2x_1+2x_2\to\max$
$$\begin{cases}6x_1+4x_2+x_3=24\\ 3x_1-3x_2+x_4=9\\ -x_1+3x_2+x_5=3\\ x_j\ge 0,\quad butun,\ \ j=\overline{1{,}5}\end{cases}$$

J: $X_{opt}^*=(3;1;\ 2;\ 3;\ 3),\ \max Z(x)=19$

3. $Z(x)=-x_1-x_2\to\min$
$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=6\\ 3x_1+2x_2+x_4=9\\ x_j\ge 0,\quad butun,\ \ j=\overline{1{,}4}\end{cases}$$

J: $X_{opt}^*=(2;1;2;1),\ \min Z(x)=-3$

4. $Z(x)=-4x_1-3x_2\to\min$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=8\\ 4x_1+x_2+x_4=10\\ x_j\ge 0,\quad butun,\ \ j=\overline{1{,}4}\end{cases}$$

J: $X_{opt}^*=(2;1;\ 1;\ 1),\ \min Z(x)=-11$

5. $Z(x) = -x_1 - x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \ge 0, \quad butun, \ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

J: $X^*_{opt} = (0;3;2;0), \ \min Z(x) = -3$

6. $Z(x) = -16x_1 + 9x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_j \ge 0, \quad butun, \ j = \overline{1,2} \end{cases}$$

J: $X^*_{opt} = (2;4), \ \max Z(x) = 68$

7. $Z(x) = 4x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 15 \\ x_j \ge 0, \quad butun, \ j = \overline{1,2} \end{cases}$$

J: $X^*_{opt} = (1;1), \ \max Z(x) = 5$

8. $Z(x) = 3x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_j \ge 0, \quad butun, \ j = \overline{1,2} \end{cases}$$

J: $X^*_{opt} = (1;1), \ \max Z(x) = 4$

V BOB. O‘YINLAR NAZARIYASI

5.1. O‘yinlar nazariyasi modeli haqida tushuncha

Matematik modellashtirishda optimal yechim va strategiyalar XVIII asrda taklif etilgan. Emmanuel Lasker, Ernst Sermelo va Emil Borel kabi olimlar XX asr boshlarida matematik ziddiyatli maqsadlar nazariyasi g’oyasini ilgari surdilar.

So‘ngra o‘yinlar nazariyasi J. Nesh tomonidan tahlil qilinadi, bunga ko‘ra, o‘yinda qatnashayotgan o‘yinchilardan biri g’olib bo‘lib yutishi, ikkinchi o‘yinchining esa yutqazishidan iborat bo‘lgan ziddiyatli vaziyat hosil bo‘lib, bunda o‘yinchilar uchun, *muvozanat turg’unligiga* asoslangan *optimal strategiyalar* aniqlanadi. Bunga ko‘ra, o‘yinchilar o‘zlarining optimal strategiyalarida qolishligi talab etiladi, aksincha esa o‘yin natijasi o‘yinchilar foydasiga hal bo‘lmaydi.

Amaliyotda shunday masalalar bo‘ladiki, aniqmaslik sharoitida qaror qabul qilishga to‘g’ri keladi, ya’ni ziddiyatli vaziyatlar sodir bo‘ladi, ya’ni ikki (undan ham ko‘p bo‘lishi mumkin) tomonning qiziqishlari har xil bo‘lib, ular har birining ziddiyatli vaziyatdagi harakati, boshqasining harakatiga bog’liq bo‘ladi.

Shunday vaziyatlarda, bir qatnashuvchi harakatining samarasi, boshqa qatnashuvchilarning harakatiga bog’liq bo‘lishi, ikki turga bo‘linadi: qatnashuvchilarning maqsadlari mos tushib, ular kelishgan holda birgalikda harakat qilishadi va qatnashuvchilarning maqsadlari mos tushmaydi. Ikkinchi tur vaziyat, *ziddiyatli vaziyat* deyiladi. Ziddiyatli vaziyatlarning matematik modellarini qurish hamda bunday vaziyatdagi masalalarni yechish uchun usullar ishlab chiqish bilan, o‘yinlar nazariyasi shug’ullanadi. Ziddiyatli vaziyatlarda optimal qaror qabul qilish uchun, ziddiyatli vaziyatlarning matematik nazariyasini ishlab chiqish *o‘yinlar nazariyasi* deyiladi.

Ziddiyatli vaziyatlarga misollar: korxonaning tovar sotishdan oladigan daromadi, tovarga qo‘yilgan narx bilan birga, iste’mol-chilarning sotib olgan shu tovarlari miqdoriga ham bog’liq. Tashkilot, tovarlar assortimentini tanlashda, boshqa tashkilotlarning qanday assortimentdagi tovarlar ishlab chiqarishlarini hisobga olishi zarur.

Iqtisodiyotda ziddiyatli vaziyatlar ko‘p uchrab, u xilma-xil xarakterda bo‘ladi. Masalan, ta’minotchi va iste’molchi, bank va mijoz, sotuvchi va xaridor orasidagi munosabatlar. Ular har birining, o‘z maqsadlari bo‘lib, unga erishish uchun, optimal yechim qabul qilishadi. Bunda ularning har biri, o‘z maqsadlari bilan birga, o‘z sheriklarining maqsadga erishish uchun qabul qilayotgan qarorlarini ham hisobga olishlari kerak.

O‘yinlar nazariyasining masalasi, o‘yinchilarning har biri uchun aniq optimal strategiya ishlab chiqishdan iborat. *O‘yinchining strategiyasi* deb, shunday mumkin bo‘lgan harakatlar sistemasiga aytiladiki, o‘yinning har bir etapida alternativ variantlardan shunday yurish tanlanadiki, bu boshqa o‘yinchilarning harakatiga qarshi bo‘lgan bir qiymatli aniqlangan eng yaxshi yurish hisoblanadi.

Optimal strategiya, o‘yin ko‘p marta qaytarilganda, o‘yinchini maksimal o‘rtacha yutuq bilan ta’minlaydi (yoki qarshi tomonni minimal o‘rtacha yutqazish bilan ta’minlaydi).

Ziddiyatli vaziyat, *antagonistik (nol yig’indili)* deyiladi, agar bir tomon yutug’ining biror miqdorga o‘sishi, ikkinchi tomon yutug’ining shu miqdorga kamayishiga olib kelsa va aksincha.

O‘yin – bu real ziddiyatli vaziyatning matematik modelidir. O‘yinda qatnashayotgan tomonlar, *o‘yinchilar* deyiladi. Ziddiyatning natijasi *yutuq* deyiladi. O‘yin qoidasi – o‘yinchilar harakatlari variantlarini aniqlaydigan sistema bo‘lib: bu o‘yinchining sherigi to‘g’risidagi axborotlar hajmi, yutuqqa olib boradigan harakatlar to‘plamidan iboratdir. O‘yin qoidasiga asosan, harakatlar variantini tanlash va amalga oshirish, o‘yinchining *yurishi* deyiladi.

Shaxsiy yurish – o‘yinchining ongli ravishda, harakatlar variantidan birini tanlashdan iborat (masalan, shaxmat o‘yinida).

Tasodifiy yurish – o‘yinchining tasodifiy tanlagan harakatidir (masalan, o‘yin soqqasini otish). Biz faqat shaxsiy yurishlarni ko‘rib chiqamiz.

O‘yinchi yurishni, o‘yinning har bir bosqichidagi konkret vaziyatga bog’liq ravishda tanlaydi. O‘yinchi ma’lum bir strategiyani, oldindan tanlagan bo‘lishi ham mumkin.

O‘yin *chekli* deyiladi, agar har bir o‘yinchining chekli sondagi strategiyalari mavjud bo‘lsa, va aksincha bo‘lsa, *cheksiz* deyiladi.

O‘yin *juft* deyiladi, agar unda ikkita o‘yinchi qatnashsa. *Ko‘pchilik bilan* o‘yin bo‘ladi, agar unda ikkitadan ortiq o‘yinchi qatnashsa. Biz faqat juft o‘yinlarni ko‘rib chiqamiz. O‘yinchilarni A va B bilan belgilaymiz.

Antagonistik o‘yinning yechimi, bu har bir o‘yinchi uchun *optimal strategiyalarni* aniqlashdan iborat. Bunga ko‘ra, B o‘yinchi qanday strategiyani tanlashidan qat’iy nazar, A o‘yinchi kafolatlangan maksimal yutuqni olishi kerak, ikkinchi holda esa, A o‘yinchi qanday strategiyani tanlashidan qat’iy nazar, B o‘yinchi o‘zining minimal yutqizishiga erishishi zarur. Optimal strategiyalar, *turg’unligi* bilan xarakterlanadi, ya’ni bunda har bir o‘yinchining optimal strategiyalaridan chetlanishi, ular uchun zararli oqibatlarga olib keladi.

To‘lov matritsasi. Sof strategiyalar

To‘lov matritsasi. Juft chekli o‘yinni ko‘rib chiqamiz. A o‘yinchi, m ta $A_1, A_2, ..., A_m$ strategiyaga ega bo‘lsin. B o‘yinchining esa, n ta, $B_1, B_2, ..., B_n$ strategiyasi bo‘lsin (5.1.1 - jadval). O‘yinchilar ixtiyoriy A_i va B_j $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ juft strategiyalarni tanlashidan, bir qiymatli o‘yin natijasi hosil bo‘ladi. Bu degani, A o‘yinchining a_{ij} yutug’i (manfiy yoki musbat) va B o‘yinchining $(-a_{ij})$ yutqazishi sodir bo‘ladi. Ixtiyoriy (A_i, B_j) juftlik uchun v, *o‘yin narxi* deyiladi. A_i va B_j o‘yin juftligiga mos elementlari a_{ij} yutuqlardan iborat bo‘lgan matritsa

$A=\left(a_{ij}\right)$ $i=\overline{1,m};$ $j=\overline{1,n}$ *to'lov matritsasi* deyiladi. Bu matritsaning umumiy ko'rinishi 5.1.1 - jadvalda keltirilgan. A o'yinchi, m ta, $A_1, A_2, ..., A_m$ strategiyadan, B o'yinchi esa, n ta, $B_1, B_2, ..., B_n$ strategiyaga ega.

5.1.1- jadval

O'yinchilar	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Jadvalning satrlari A o'yinchining strategiyalariga, ustunlari esa B o'yinchining strategiyalariga mos keladi. Quyidagi o'yin uchun to'lov matritsasini tuzamiz.

Misol. A yoki B o'yinchilarning har biri, bir biriga bog'liq bo'lmagan holda 1,2, 3 raqamlarini yozadi. Agar raqamlarning ayirmasi musbat bo'lsa, u holda A o'yinchi ayirmaga teng bo'lgan yutuqqa erishadi. Agar ayirma noldan kichik bo'lsa, u holda B o'yinchi yutadi. Agar ayirma nolga teng bo'lsa, durang bo'ladi.

A o'yinchining uchta strategiyasi mavjud: $A_1=1$, $A_2=2$, $A_3=3$,

B o'yinchining ham uchta strategiyasi bor: $B_1=1$, $B_2=2$, $B_3=3$.

A o'yinchining maqsadi-o'zining yutug'ini maksimallashtirishdan, B o'yinchining maqsadi esa-o'zining yutqazishini minimallashtirishdan iborat. Bu nol summali juft o'yin hisoblanadi.

O'yinchilar	$B_1=1$	$B_2=2$	$B_3=3$
$A_1=1$	0	-1	-2
$A_2=2$	1	0	-1
$A_3=3$	2	1	0

Masalan, $a_{13} = -2-$ A o‘yinchining yutug’i, $-a_{13} = 2-$ B o‘yinchining yutug’i. Bu matritsali o‘yin bo‘lib, uning to‘lov matritsasi ushbu ko‘rinishdan iborat.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Misol. Ikki o‘yinchi bir biridan farqli 1-5 diapazonda bittadan son aytishadi. Agar sonlar yig’indisi toq bo‘lsa, u holda 2 o‘yinchi birinchiga aytilgan sonlarning maksimumini to‘laydi, aksincha esa 1 o‘yinchi to‘laydi.

Yechish. Musbat sonlar, 1-o‘yinchining yutuqlari, manfiylari esa 2-o‘yinchining yutuqlari. Bu o‘yinning to‘lov matritsasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & -3 & 4 & -5 \\ 4 & -4 & 4 & -4 & 5 \\ -5 & 5 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

O‘yinning yuqori va quyi chegaralari. O‘lchovi $m \times n$, bo‘lgan, $A = \left(a_{ij}\right)$ $i = \overline{1,m};$ $j = \overline{1,n}$ matritsali o‘yindan, $A_1, A_2, ..., A_m$ strategiyalardan eng yaxshisini aniqlaymiz. A o‘yinchi A_i strategiyalardan birini tanlashi bilan, B o‘yinchi ham, A o‘yinchining yutuqlari minimal (B o‘yinchi, A o‘yinchiga zarar keltirishga intiladi) bo‘ladigan, B_j strategiyalardan birini qo‘llaydi. α_i bilan, A o‘yinchining A_i strategiyalari orasidan, eng kichik yutug’ini (to‘lov matritsasi i - satridagi eng kichik son), B o‘yinchining mumkin bo‘lgan barcha strategiyalarini hisobga olgan holda, belgilaymiz, ya’ni

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \tag{5.1}$$

$\alpha_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ sonlar orasidan eng kattasini tanlaymiz. α ni o‘yinning *quyi narxi*, yoki *maksimal yutuq* (*maksimin*) deb ataymiz. Bu, B

o‘yinchining har qanday strategiyasida, A o‘yinchi uchun *kafolatlangan yutuq* bo‘ladi. Demak,

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij} \tag{5.2}$$

Agar strategiya, maksiminga mos kelsa, bu *maksimin strategiya* deyiladi. B o‘yinchining maqsadi, A o‘yinchining yutuqlarini kamaytirish bo‘lib, buning uchun B_j strategiyalardan birini tanlayotganda, A ning mumkin bo‘lgan barcha maksimal yutuqlarini hisobga oladi. Belgilash kiritamiz

$$\beta_j = \min_i a_{ij} \tag{5.3}$$

β_j sonlar orasidan eng kichigini β bilan belgilab, uni o‘yinning *yuqori chegarasi* yoki *minimaks yutuq* (*minimaks*) deb ataymiz. Bu, B o‘yinchi uchun *kafolatlangan yutqazish* bo‘ladi. Demak,

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \tag{5.4}$$

Agar strategiya, minimaksga mos kelsa, bu *minimaks strategiya* deyiladi. Agar o‘yinchilarga ehtiyot chora sifatida minimaks va maksimin strategiyalardan birini tanlash zarur bo‘lsa, bu *minimaks prinsipi* deyiladi.

O‘yin narxi, quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi: $\alpha \le v \le \beta$.

Iqtisodiy masalalarni yechishda, o‘yinlar nazariyasini qo‘llash. Iste’molchilar bozorining mavsum bo‘yicha o‘zgarib turishi, kompaniyalar strategiyalarini doimo, qayta ishlab chiqishlariga sabab bo‘ladi. Bozordagi aniqmasliklardan optimal strategiyalarni aniqlash yetarlicha murakkab bo‘lsada, matematik usullarni qo‘llab va ma’lum bir yo‘nalishlarni hisobga olib, maksimal foyda olish mumkin.

Aniqmaslik sharoitida, bozor strategiyasini to‘g’ri qo‘llash asosida, tasodifiy faktorlarni kamaytirib, katta ehtimollik bilan foyda olishni prognoz qilish mumkin.

Iste’molchilar talabi va ko‘pgina tovarlarni sotish hajmi mavsumga bog’liqdir. Qayd etilganki, bir qancha tovarlarga talabning o‘sishi yozga, ba’zilarida bahor-kuz davrlariga, ba’zilarida esa qish mavsumiga mos keladi. Shundan kelib chiqib, kompaniyalar, o‘tish davrlari uchun optimal strategiyalar ishlab chiqishlari zarur.

Sof strategiyalar. Agar o‘yinning quyi va yuqori narxlari mos kelsa, bu narxlarning umumiy qiymati $\alpha=\beta=v$ *o‘yinning sof strategiyasi*, yoki *o‘yin narxi* deyiladi. O‘yin narxiga mos keluvchi minimaks strategiyalar, *optimal strategiyalar*, yoki *optimal yechim*, yoki *o‘yinning yechimi* deb ataladi. Bunday holda, A o‘yinchi maksimal kafolatlangan yutuq (B o‘yinchi harakatiga bog’liq bo‘lmagan holda) v ga, B o‘yinchi minimal kafolatlangan yutqazishga (A o‘yinchi harakatiga bog’liq bo‘lmagan holda) v ga ega bo‘ladi. Optimal yechim esa turg’unlik xarakteriga ega.

A_i va B_j juftlik sof strategiyalarning optimal yechimi bo‘lishi uchun, ularga mos a_{ij} elementning bir vaqtda satr elementlari orasida eng kichik, ustun elementlari orasida eng katta bo‘lishi zarur va yetarli. Agar bu vaziyat mavjud bo‘lsa, u *egar nuqta* (sirti egarga o‘xshashligidan, ya’ni bir tomondan yuqoriga, boshqa tomondan quyiga qarab qiyshayishiga asoslanadi) deyiladi.

Demak, (A_i, B_j) optimal juft strategiyalar, egar nuqta bo‘lar ekan.

Misol. Berilgan to‘lov matritsasidan foydalanib, egar nuqtani va qatnashchilarning sof strategiyalarini aniqlang.

O‘yinchilar	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	7	0	6
A_2	6	8	5	10

Yechish. To‘lov matritsasining egar nuqtasini aniqlaymiz. Buning uchun o‘yinning quyi va yuqori chegaralarini aniqlaymiz. $\alpha=\max\limits_i \min\limits_j \alpha_{ij}=\max\limits_i(0,\ 5)=5$ dan ko‘rinadiki, A_2 maksimal sof strategiya ekan. $\beta=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=\min\limits_j(8,\ 8,\ 5,\ 10)=5$ dan ko‘rinadiki B_3 minimal sof strategiya ekan. O‘yinning egar nuqtasi (A_2, B_3) iborat bo‘lib, unig narxi $v=5$ ekan.

5.2. Aralash strategiyadagi o‘yinning yechimi

Agar o‘yin matritsasida, $\alpha \neq \beta$ bajarilsa egar nuqta mavjud emas. Bunday holda, sof strategiyalarda optimal yechim mavjud bo‘lmaydi. Lekin, sof strategiyalarni, aralash strategiyalar bilan kengaytirsak, aniqmas o‘yin masalalarining ham optimal yechimini aniqlash algoritmini topish mumkin. Bunday hollarda, antagonistik o‘yinlarning optimal yechimini topish uchun, statistik (ehtimollarga asoslangan) usullarni qo‘llash tavsiya etiladi. Bunda, har bir o‘yinchining, mumkin bo‘lgan strategiyalar to‘plami bilan birga, noma’lum bo‘lgan ehtimollik vektorlari (nisbiy chastotalar) orasidagi munosabat kiritiladi.

A o‘yinchining berilgan strategiyalarini, tanlash ehtimollik vektorlari (nisbiy chastotalar) quyidagicha belgilanadi:

$$P=\left(p_1, p_2, ..., p_m\right), \qquad \text{bunda} \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i=\overline{1,m}.$$

p_i miqdor, A_i strategiyani qo‘llash *ehtimoli* (*nisbiy chastota*) deyiladi.

A o‘yinchining, S_A aralash strategiyasi deb, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sof strategiyalarni $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ ehtimollar bilan tatbiq etishga aytiladi, bunda $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

A o‘yinchining aralash strategiyasi ushbu matritsa ko‘rinishda yoziladi.

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_m \end{bmatrix} \text{ yoki } S_A = \left[p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_i, \quad \ldots, \quad p_m\right]$$

ko‘rinishda yozish ham mumkin.

Shu kabi, B o‘yinchining, noma’lum ehtimollik vektorlari (nisbiy chastotalar) quyidagicha belgilanadi:

$$Q=\left(q_1, q_2, ..., q_n\right), \qquad \text{bunda} \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}.$$

q_j miqdor, B_j strategiyani qo‘llash *ehtimoli* (*nisbiy chastota*) deyiladi. Shunga o‘xshash B o‘yinchi uchun aralash strategiya quyidagicha yoziladi:

$$S_B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n \end{bmatrix}, \quad \text{yoki} \qquad S_B=\left[q_1,\ \ q_2,\ \ \dots,\ \ q_j,\ \ \dots,\ \ q_n\right],$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

$A_1, A_2, ..., A_m$ va $B_1, B_2, ..., B_n$ sof strategiyalar to‘plami, mos ravishda $P=(p_1, p_2, \dots, p_m)$ va $Q=(q_1, q_2, ..., q_n)$ ehtimollik vektorlari bilan birgalikda, *aralash strategiyalar* deyiladi.

Sof strategiyalar, aralash strategiyalarning xususiy holi bo‘lib, vektor ehtimolning birga teng bo‘lishidan, sof strategiyalar kelib chiqadi.

Ixtiyoriy matritsali o‘yinning optimal strategiyasi va o‘yin narxini, aralash strategiyalarda topish mumkin.

Teorema. Aralash strategiyalarda, ixtiyoriy chekli matritsali o‘yin egar nuqtaga ega.

Aralash strategiyalarda o‘yinning optimal yechimi - (P^*, Q^*) juft optimal strategiyalar bo‘lib, u quyidagiga asoslanadi: agar bir o‘yinchi o‘zining optimal strategiyasida muqim tursa, ikkinchisining o‘z optimal strategiyasidan chetlanishi, unga zararli bo‘ladi. Optimal yechimga mos bo‘lgan yutuq, o‘yinning ν *narxi* deyiladi. O‘yinning narxi ushbu shartni qanoatlantiradi: $\alpha \le \nu \le \beta$.

O‘yinlar nazariyasining quyidagi asosiy teoremasi o‘rinlidir.

Teorema (Neyman teoremasi). Har qanday nol yig’indili chekli o‘yin, aralash strategiyalarda yechimga ega.

$P^*=(p_1^*, p_2^*, ..., p^*_m)$ va $Q^*=(q_1^*, q_2^*, ..., q^*_n)$- optimal juft strategiyalar bo‘lsin. Agar sof strategiya, aralash strategiyaning optimal yechimida, noldan farqli ehtimollik bilan qatnashsa, u *aktiv* strategiya deyiladi.

Teorema (*Aktiv strategiya to‘g’risida*). Agar o‘yinchilardan biri aktiv strategiyalar chegarasidan chiqmasa va, boshqa o‘yinchi o‘zining optimal aralash strategiyasida qolsa, u holda yutuq o‘zgarmas bo‘lib, o‘yin narxi ν ga teng bo‘ladi.

Bu teorema katta amaliy ahamiyatga ega, chunki agar egar nuqta mavjud bo‘lmasa, u optimal strategiyalarni topishning aniq modelini beradi.

O‘lchovi 2×2 **bo‘lgan o‘yin**. Bu o‘yin chekli o‘yinning sodda holidir. Agar bu o‘yin egar nuqtaga ega bo‘lsa, u holda optimal yechim, bu nuqtaga mos bo‘lgan strategiyalar, sof juft strategiyalardir.

Neyman teoremasini qanoatlantiradigan, egar nuqtasi mavjud bo‘lmagan, o‘yinning optimal yechimi mavjud va u, aralash strategiyalar jufti $P^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$, $Q^* = \left(q_1^*, q_2^*\right)$ bilan aniqlanadi.

A o‘yinchining yutishi (B o‘yinchining yutqazishi) – tasodifiy miqdor bo‘lib, matematik kutilishi o‘yinning narxi bo‘ladi. Shuning uchun A o‘yinchi optimal strategiyani qo‘llaganda, uning o‘rtacha yutug’i v: birinchi o‘yinchiga ham, ikkinchi o‘yinchiga ham tegishli bo‘ladi.

Masalan, to‘lov matritsasi bilan berilgan bo‘lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Agar B o‘yinchi, B_1 sof strategiyada (to‘lov matritsaning birinchi ustuni) bo‘lib, A o‘yinchi esa $P^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$ optimal aralash strategiyani qo‘llaganda, uning o‘rtacha yutug’i v ga teng, ya’ni

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v\ .$$

Shu kabi, qarshi tomon B_2 strategiyani qo‘llasa, A o‘yinchining o‘rtacha yutug’i $a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v$ ga teng bo‘ladi. $p_1^* + p_2^* = 1$ ni hisobga olsak, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases} \qquad (5.5)$$

(20.3.1) sistemani yechib, P^* optimal strategiyani va o‘yin narxi v ni aniqlash mumkin.

B o‘yinchining optimal strategiyasini aniqlash uchun, yuqoridagi kabi tenglamalar sistemasi tuziladi:

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = \nu \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = \nu \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases} \tag{5.6}$$

Agar A o‘yinchi $P=\left(p_1, p_2, ..., p_m\right)$ aralash strategiyani, B o‘yinchi esa $Q=(q_1, q_2, ..., q_n)$ aralash strategiyani qo‘llasa, A va B o‘yinchilarning o‘rtacha yutug’i (matematik kutilishi) quyidagicha aniqlanadi

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \ .$$

Optimal strategiyani qo‘llash o‘yin narxiga teng bo‘lgan yutuqqa, ega bo‘lishga imkon beradi: $\alpha \le \nu \le \beta$.

To‘lov matritsasini soddalashtirish. Agar to‘lov matritsasining o‘lchami qancha katta bo‘lib, egar nuqtasi bo‘lmasa, u holda masalaning aralash optimal strategilarini aniqlash shuncha qiyinlashadi. Shuning uchun o‘lchami katta to‘lov matritsasini, qulay bo‘lmagan strategiyalarni tashlab yuborish orqali soddalashtiriladi.

Agar A o‘yinchining, $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ matritsali o‘yindagi A_i strategiyasiga mos i – satri elementlari, boshqa satrning mos elementlaridan katta bo‘lmasa (kichik yoki teng), u holda A_i ning i – strategiyasi *qulay bo‘lmagan strategiya* deyiladi va bu satr to‘lov matritsasidan chiqarib tashlanadi.

Agar B o‘yinchining, $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ matritsali o‘yinning biror B_j strategiyasiga mos j – ustun elementlari, boshqa ustunning mos elementlaridan kichik bo‘lmasa (katta yoki teng), u holda B_j ning j – strategiyasi *qulay bo‘lmagan strategiya* deyiladi va bu ustun to‘lov matritsasidan chiqarib tashlanadi..

Misol. Ushbu to‘lov matritsasini soddalashtiring:

	B_1	B_2	B_3	V_4	V_5	α_i
A_1	8	6	4	5	1	1
A_2	5	4	3	2	3	2
A_3	6	7	6	3	5	3
A_4	3	3	2	1	2	1
β_j	8	7	6	5	5	

$$\alpha = \max\{1;2;3;1\} = 3;$$
$$\beta = \min\{8,7,6,5,5\} = 5.$$

$\alpha = 3 \neq \beta = 5$. Demak, to‘lov matritsasi egar nuqtaga ega emas.

Ikkinchi va uchinchi satr elementlarini mos ravishda taqqoslaganimizda, ikkinchi satr elementlarining barchasi mos ravishda, uchinchi satrning mos elementlaridan kichik. Demak, *A* o‘yinchining ikkinchi strategiyasi qulay bo‘lmagan strategiya bo‘lib, uni tashlab yuborsak bo‘ladi. Shu kabi, A_3 va A_4 ni taqqoslab, A_4 ni tashlab yuborib, quyidagi o‘yin matritsasini hosil qilamiz:

	B_1	B_2	B_3	V_4	V_5
A_1	8	6	4	5	1
A_3	6	7	6	3	5

E’tibor bersak, *V* o‘yinchining 1, 2, 3 strategiyalari 5 – strategiyaga nisbatan qulay bo‘lmagan strategiyalardir, chunki *V* o‘yinchi, *A* o‘yinchining yutuqlarini minimallashtiradi. Bu strategiyalarni tashlab yuborsak 2×2 o‘lchamli matritsa hosil qilamiz, bunda qulay bo‘lmagan strategiyalar mavjud emas.

	V_4	V_5
A_1	5	1
A_3	3	5

To‘lov matritsasidagi strategiyalarni belgilab chiqamiz:

	V_1	V_2	α_i
A_1	5	1	1
A_2	3	5	3
β_j	5	5	

$\alpha = 3, \beta = 5.$

Agar soddalashtirilgan matritsada $\alpha=\beta$ bo‘lsa, u holda soddalashtirilgan matritsadagi $\alpha = \beta = v$ narx, berilgan matritsaga ham tegishlidir. Agar $\alpha < \beta$ bo‘lsa, soddalashtirilgan matritsa analiz qilinadi va olingan natija, berilgan matritsaga ham tegishli bo‘ladi.

Misol. To‘lov matritsasining egar nuqtasini toping

$$\begin{matrix} 4 & 7 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{matrix}$$

Yechish. To‘lov matritsaning egar nuqtasi mavjudligini tekshiramiz. I – o‘yinchi maksimal yutuq olish uchun, o‘z strategiyalarini tanlaydi, II – o‘yinchi esa, I – o‘yinchi yutuqlarini minimallashtirish uchun, o‘z strategiyalarni tanlaydi.

O‘yinchilar	B_1	B_2	B_3
A_1	4	7	2
A_2	7	3	2
A_3	2	1	8

A o‘yinchining, A_1 maksimal sof strategiyasiga mos bo‘lgan, kafolatlangan yutuqni, ya’ni o‘yinning $\alpha = \max\limits_i(2,\,2,\,1) = 2$ quyi narxini aniqlaymiz.

O‘yinning yuqori narxi esa $\beta = \min\limits_j(7,\,7,\,8) = 7$ dan iborat. Bundan $\alpha \neq \beta$ ekanligidan, o‘yinning egar nuqtasi mavjud emasligi va o‘yin narxi $2 < \nu < 7$ oraliqda o‘zgarishi kelib chiqadi. O‘yin yechimini aralash strategiyalarda topamiz. Buning sababi, o‘yinchilar o‘zlarining sof strategiyalarini qarshi tomondan sir tutishidadir.

2. To‘lov matritsani soddalashtiramiz. Matritsaning qulay bo‘lmagan satri va ustuni mavjud emas.

3. Aralash strategiyalarda o‘yinning yechimini topamiz.

Tenglamalar sistemasini yozamiz.

I o‘yinchi uchun

$$\begin{cases} 4p_1 + 7p_2 + 2p_3 = \nu \\ 7p_1 + 3p_2 + p_3 = \nu \\ 2p_1 + 2p_2 + 8p_3 = \nu \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

II o‘yinchi uchun

$$\begin{cases} 4q_1 + 7q_2 + 2q_3 = \nu \\ 7q_1 + 3q_2 + 2q_3 = \nu \\ 2q_1 + q_2 + 8q_3 = \nu \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss usuli bilan yechib, quyidagilarni topamiz:

$p_1 = {}^{29}/_{68}$ (1 – strategiyani qo‘llash ehtimoli).

$p_2 = {}^{4}/_{17}$ (2 – strategiyani qo‘llash ehtimoli).

$p_3 = {}^{23}/_{68}$ (3 – strategiyani qo‘llash ehtimoli).

I o‘yinchining optimal aralash strategiyasi: $P = \left({}^{29}/_{68};{}^{4}/_{17};{}^{23}/_{68}\right)$

$q_1 = {}^{6}/_{17}$ (1 – strategiyani qo‘llash ehtimoli).

$q_2 = {}^{9}/_{34}$ (2 – strategiyani qo‘llash ehtimoli).

$q_3 = {}^{13}/_{34}$ (3 – strategiyani qo‘llash ehtimoli).

II o‘yinchining optimal aralash strategiyasi: $Q = \left({}^{6}/_{17};{}^{9}/_{34};{}^{13}/_{34}\right)$.

O‘yinning narxi: $\nu = 4\,{}^{1}/_{34}$.

Grafik usul. *2x2* o‘lchamli o‘yinning geometrik yechimini, tekislikda yaqqol tasvirlash mumkin. Bunday o‘lchamdagi o‘yinlarni grafik usulda yechish mumkin.

2x2 o‘lchamli o‘yinni grafik usulda yechish, umumiy holda, quyidagilardan iborat.

1. Birinchi (ikkinchi) o‘yinchining mos strategiyalari uchun, to‘g‘ri chiziqlar quriladi.

2. Kesishish nuqtasining koordinatalari aniqlanadi, ya’ni bunda birinchi (ikkinchi) o‘yinchining optimal strategiyalari va o‘yin narxi aniqlanadi.

3. Boshqa o‘yinchining optimal strategiyasi, uning faol strategiya-laridan tashkil topgan tenglamalar sistemasini yechish orqali aniqlanadi.

(2xn) va (mx2) o‘lchamli o‘yinlarni grafik usulda yechish. Grafik usul, o‘yinda, hech bo‘lmaganda bitta o‘yinchining ikkita strategiyasi bo‘lishiga asoslanadi.

$(2\times n)$ o‘lchamli o‘yinni ko‘rib o‘tamiz. Aytaylik, o‘yin egar nuqtaga ega emas.

Birinchi o‘yinchi	Ikkinchi o‘yinchi			
	q_1	q_2	$\ldots$	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
$p_2=1-p_1$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}

Belgilash kiritamiz: p_1- birinchi o‘yinchining 1-strategiyani tanlash ehtimoli, p_2- birinchi o‘yinchining 2-strategiyani tanlash ehtimoli, bunda $p_2=1-p_1$, q_1- ikkinchi o‘yinchining 1-strategiyani tanlash ehtimoli, q_2- ikkinchi o‘yinchining 2-strategiyani tanlash ehtimoli va hokazo, q_n - ikkinchi o‘yinchining n - strategiyani tanlash ehtimoli.

Ikkinchi o‘yinchi, 1-strategiyani qo‘llaganda, birinchi o‘yinchining kutayotgan yutug‘i:

$$a_{11}p_1+a_{21}p_2=a_{11}p_1+a_{21}(1-p_1)=(a_{11}-a_{21})\,p_1+a_{21}\,.$$

Shu kabi, ikkinchi o‘yinchining, 2-, 3-, …, n - strategiyalarni qo‘llaganda, birinchi o‘yinchining kutayotgan yutuqlarini aniqlaymiz. Olingan natijalarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

Ikkinchi o‘yinchining sof strategiyalari	Birinchi o‘yinchining kutayotgan yutuqlari
1	$(a_{11}-a_{21})p_1+a_{21}$
2	$(a_{12}-a_{22})p_1+a_{22}$
…	…
n	$(a_{1n}-a_{2n})p_1+a_{2n}$

Jadvaldan ko‘rinadiki, birinchi o‘yinchining kutayotgan yutuqlari p_1 ga chiziqli bog‘langan. Birinchi o‘yinchining kutayotgan yutuqlariga mos, to‘g‘ri chiziqlarni quramiz.

Birinchi o‘yinchi, kutayotgan minimal yutuqlarini maksimallashtiradigan, strategiyalarni tanlaydi. Shuning uchun, birinchi o‘yinchining, kutayotgan minimal yutuqlarini maksimallashtiradigan, optimal strategiyasi, to‘g‘ri chiziqlar kesishishidan hosil bo‘lgan nuqtadan iborat.

Shu kabi, ikkinchi o‘yinchining optimal strategiyasini topamiz. Bunda, kutilayotgan maksimal yutqazishlarini minimallashtiradigan, to‘g‘ri chiziqlar kesishishidan hosil bo‘lgan nuqtadan iborat.

Misol. To‘lov matritsasi $(2\times n)$ ko‘rinishda berilgan, o‘yin yechimini aniqlang

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu holda $\alpha=\max(2,\,2)=2,\ \ \beta=\min(4,3,3)=3,\ \ 2\le\nu\le 3$. O‘yinning yechimi, aralash strategiyalarda aniqlanadi. Avvalo, yuqoridagi masalani quyidagicha yozib olamiz

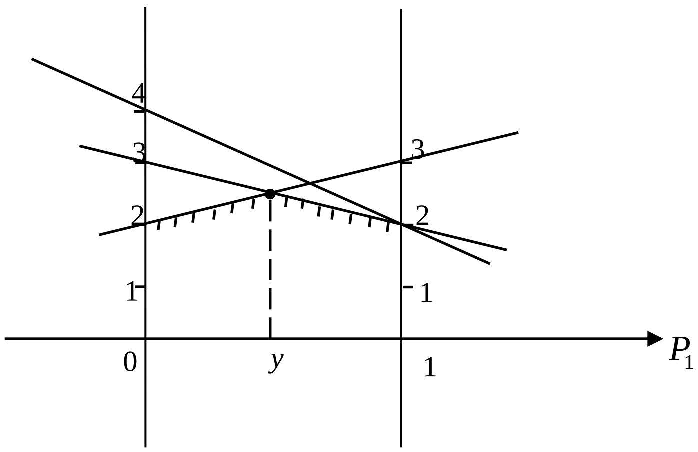
$$\begin{array}{r|c} p_1 & \\ & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ p_2=1-p_1 & \end{array}$$

Birinchi o‘yinchining kutilayotgan yutuqlarini aniqlaymiz

Ikkinchi o‘yinchining sof strategiyalari	Birinchi o‘yinchining kutayotgan yutuqlari
1	$2p_1 + 4(1 - p_1) = -2p_1 + 4$
2	$2p_1 + 3(1 - p_1) = -p_1 + 3$
3	$3p_1 + 2(1 - p_1) = p_1 + 2$

O‘yinning yechimini grafik usulda topamiz (5.1-rasm). p_1 o‘qda, $p_1 = 0$ va $p_1 = 1$ nuqtalarni belgilab, ular orqali p_1 ga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. $p_1 = 0$ ni, $-2p_1 + 4$ ifodaga qo‘yib, 4 va 2 sonlarini hosil qilamiz. Ularni mos to‘g‘ri chiziqlarda belgilaymiz. Bu nuqtalarni tutashtirib, $-2p_1 + 4$ to‘g‘ri chiziqni hosil qilamiz.

Shu kabi, $-p_1 + 3$ va $p_1 + 2$ to‘g‘ri chiziqlarni quramiz (5.1-rasm).



5.1-rasm

Birinchi o‘yinchining optimal strategiyasi, $-p_1 + 3$ va $p_1 + 2$ to‘g‘ri chiziqlar kesishishidan hosil bo‘lgan nuqtadan iborat. Chunki, birinchi o‘yinchi yutuqlarini maksimallashtirishni xohlaydi.

$-p_1 + 3 = p_1 + 2,\quad p_1 = 1/2,\quad p_2 = 1/2$.

O‘yin narxi $v=-p_1+3=-1/2+3=5/2$.

Birinchi o‘yinchining optimal strategiyasi $\overline{P}_{опт}=(1/2, 1/2)$ bo‘lib, o‘yin narxi esa $v=5/2$ dan iborat.

Ikkinchi o‘yinchining optimal strategiyasini aniqlaymiz. 5.1-rasmdan ko‘rinib turibdiki, ikkinchi o‘yinchining optimal strategiyasi $-p_1+3$ va p_1+2 to‘g‘ri chiziqlar kesishishidan hosil bo‘lgan nuqtadan iborat. Bu esa ikkinchi o‘yinchining 2- va 3- sof strategiyalariga to‘g‘ri keladi, ya’ni $q_1=0$, $q_3=1-q_2$.

Endi to‘lov matritsasini ko‘ramiz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Avvalo to‘lov matritsasini quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ q_2 & q_3=1-q_2 \end{pmatrix}$$

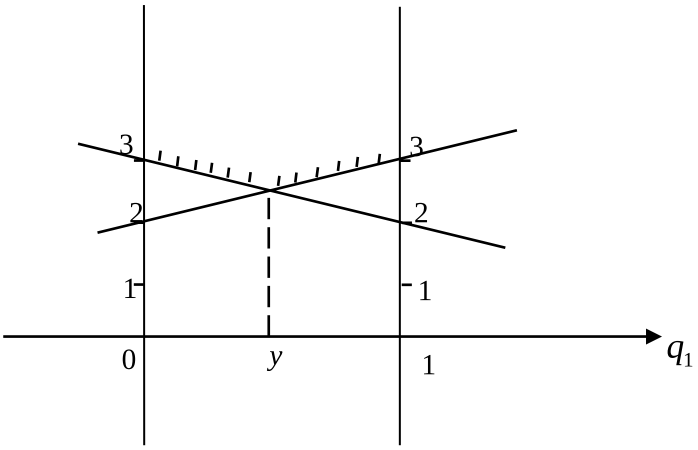
Ikkinchi o‘yinchining kutayotgan yutuqlarini aniqlaymiz

Birinchi o‘yinchining sof strategiyalari	Ikkinchi o‘yinchining kutayotgan yutuqlari
1	$2q_2+3(1-q_2)=-q_2+3$
2	$3q_2+2(1-q_2)=q_2+2$

Bundan, 5.2-rasmdan

$$-q_2+3=q_2+2, \quad q_2=1/2, \; v=q_2+2=1/2+2=5/2$$

Demak, ikkinchi o‘yinchining optimal strategiyasi $\overline{Q}_{опт}=(0; 1/2; 1/2)$ bo‘lib, o‘yin narxi esa $v=5/2$ dan iborat.



5.2 - rasm.

Keltirilgan misoldan ko‘rinadiki, agar to‘lov matritsaning (m va n katta bo‘lmaganda) o‘lchamlari kichik bo‘lsa, ya’ni har bir o‘yinchining strategiyalari soni ko‘p bo‘lmasa, uning aralash strategiyaning, optimal strategiyasini osonlik bilan topish mumkin ekan. Agar o‘yinning o‘lchami katta bo‘lsa, uning yechimini aniqlash murakkablashadi. Shuning uchun ham, optimal aralash strategiyalarni aniqlashda, to‘lov matritsasi yuqoridagi kabi yetarlicha soddalashtiriladi.

Tabiat bilan o‘yin

Agar tabiat to‘g‘risidagi axborot yetarli bo‘lmasa, u holda tabiatning barcha holatlari uchun teng ehtimolli bo‘lgan, Laplasning yetarli bo‘lmagan prinsipini qo‘llash mumkin. U holda optimal strategiya, ma’lum satr elementlari o‘rtacha arifmetigining maksimalligiga asoslangan ifodadan aniqlanadi.

$$\max_i \frac{(\alpha_{i1}+\alpha_{i2}+...+\alpha_{in})}{n}.$$

Optimal strategiyalarni tanlashda, bir qator kriteriyalar mavjud.

Valde kriteriyasi. Maksimin strategiyani qo‘llash tavsiya etiladi. U, o‘yinning $\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}$ quyi narxi bilan mos tushadi. Bu passiv kriteriy bo‘lib, tabiat insonga yomon ta’sir qilishiga asoslangan.

Shu kabi, ikkinchi o‘yinchining, ustunlar bo‘yicha maksimal yutuqlar orasidan, minimal qiymatni aniqlashdan iborat bo‘lgan, eng yaxshi strategiyani tanlashdan iborat.

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij} .$$

Agar ikkinchi o‘yinchi, minimaks strategiyada qolsa, u holda kafolatlangan β dan katta bo‘lmagan miqdorda yutqizadi.

Maksimallik kriteriysi. Strategiya quyidagi shartdan aniqlanadi

$$\max_i \max_j \alpha_{ij} .$$

Kriteriya optimistik bo‘lib, tabiat insonga yoqimli ta’sir qilishiga asoslangan.

Gurvis kriteriysi. Strategiya quyidagi formuladan aniqlanadi

$$\max_i \left(\alpha \min_j \alpha_{ij} + (1-\alpha) \max_j \alpha_{ij} \right),$$

bunda α - optimallik darajasi bo‘lib, $[0, 1]$ oraliqda o‘zgaradi.

Bu kriteriy tabiatning yomon hamda yoqimli tomonlariga asoslanadi. Bu formula $\alpha = 1$ da Valde kriteriysiga, $\alpha = 0$ da esa, maksimum kriteriysiga aylanadi. Strategiyani tanlaydigan mas’ul shaxs, α ga ta’sir etadi. Noto‘g‘ri yechimning oqibatlari qancha katta bo‘lsa, α shuncha birga yaqinlashadi, ya’ni bunda kafolatlash zaruriyati kelib chiqadi.

Sevidj kriteriysi. Kriteriyning mazmuni: shunday strategiyani tanlashdan iboratki, bunda juda katta yo‘qotishlar bo‘lmaydi. Agar inson tabiatning har bir holatiga eng yaxshi strategiyani tanlay olmasa, elementlari yutqazishlardan iborat bo‘lgan, risk matritsasini aniqlashdan iborat. Matritsa elementlari $\left(r_{ij}\right)$ formuladan topiladi

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} ,$$

bunda $\max_i a_{ij}$ - berilgan matritsa ustunidagi maksimal elementdir.

Optimal strategiya quyidagi ifodadan topiladi

$$\min_i \max_j \left(\max_i a_{ij} - a_{ij} \right) .$$

Kriteriylar orasidagi munosabat. Aniqmaslik sharoitida bir qancha kriteriylar bo‘yicha qaror qabul qilishda, har xil variantlarni baholashga to‘g‘ri keladi. Agar tavsiyalar mos kelsa, ishonch bilan optimal yechim tanlanadi, agar tavsiyalar bir-biriga qarama-qarshi bo‘lsa, oxirgi yechimni qabul qilayotganda, uning kuchli va kuchsiz tomonlari hisobga olinishi zarur.

5.3. Matritsali o‘yinni chiziqli programmalashtirishga keltirish mxn o‘yinni, chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish

$m\times n$ o‘lchamli o‘yinni, umumiy holda geometrik talqin qilib bo‘lmaydi. m va n lar katta bo‘lgan holda, $m\times n$ o‘lchamli matritsali o‘yinni optimal yechimini topish yetarli darajada qiyinchilikka olib keladi, ammo uni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish orqali yechish bunday qiyinchiliklardan xalos etadi.

Teorema. To‘lov matritsasi va v o‘yin narxi berilganda, $P^*=\left(p_1^*,p_2^*,...,p_m^*\right)$ va $Q^*=\left(q_1^*,q_2^*,...,q_n^*\right)$ aralash strategiyalarning optimal bo‘lishi uchun, quyidagi tengsizliklarning

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}p_i^*\geq v,\quad j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_i^*\leq v,\quad i=\overline{1,m},$$

bajarilishi zarur va yetarli.

Demak, teorema tasdiqlaydiki, B o‘yinchining ixtiyoriy B_j sof strategiyasida, A o‘yinchi p^* aralash optimal strategiyani qo‘llasa, u holda, A o‘yinchi v o‘yin narxidan kam bo‘lmagan yutuqqa ega bo‘lishi, ta’minlanadi; agar A o‘yinchining ixtiyoriy A_i sof strategiyasida, B o‘yinchi q^* aralash optimal strategiyani qo‘llasa, u holda, B o‘yinchi v o‘yin narxidan ko‘p bo‘lmagan yutuqqa ega bo‘lishi ta’minlanadi.

Demak, o‘yin yechimi optimalligi to‘g‘riligini tekshirish uchun, yuqoridagi optimal strategiyalar kriteriyalaridan foydalanamiz.

A o‘yinchi, $A_1, A_2, ..., A_m$ strategiyalardan, B o‘yinchi esa, $B_1, B_2, ..., B_n$ strategiyalardan iborat bo‘lsin. O‘yinchilarning P^* i Q^* optimal strategiyalarini aniqlash talab etilsin.

A o‘yinchining P^* optimal strategiyasini ko‘rib chiqamiz.

Yuqoridagi teoremadan, quyidagi tasdiqning to‘g‘riligi kelib chiqadi. Agar A o‘yinchi $P^* = \left(p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*\right)$ aralash startegiyasini, B o‘yinchining B_j sof strategiyalariga qarshi ishlatsa, u holda uning o‘rtacha yutug‘i yoki matematik kutilishi quyidagidan iborat bo‘ladi.

$$a_j = a_{1j} p_1^* + a_{2j} p_2^* + ... + a_{mj} p_m^*, \quad j = \overline{1, n}.$$

P^* optimal strategiya uchun, barcha o‘rtacha yutuqlar, o‘yin narxi-dan kam bo‘lmaydi, shuning uchun quyidagi tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* + \cdots + a_{m1} p_m^* \geq v, \\ a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* + \cdots + a_{m2} p_m^* \geq v, \\ ---------------- \\ a_{1n} p_1^* + a_{2n} p_2^* + \cdots + a_{mn} p_m^* \geq v. \end{cases} \tag{5.1}$$

Aniqlik uchun, $v > 0$ bo‘lsin.

Bunga doimo erishish mumkin, ya’ni agar A matritsaning har bir elementiga biror o‘zgarmas S sonni qo‘shish, optimal strategiyani o‘zgartirmaydi, balki faqat o‘yin narxini S ga oshiradi.

Sistemaning har bir tengsizlikni $v > 0$ songa bo‘lib, ushbu yangi o‘zgaruvchilarni kiritamiz:

$$X_1 = \frac{p_1^*}{v}, X_2 = \frac{p_2^*}{v}, ..., X_m = \frac{p_m^*}{v}.$$

U holda (5.1) sistema, quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\begin{cases} a_{11} X_1 + a_{21} X_2 + \cdots + a_{m1} X_m \geq 1, \\ a_{12} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots + a_{m2} X_m \geq 1, \\ ---------------- \\ a_{1n} X_1 + a_{2n} X_2 + \cdots + a_{mn} X_m \geq 1, \end{cases} \tag{5.2}$$
$$X_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

So‘ngra quyidagi tenglikni ko‘ramiz: $p_1^* + p_2^* + \cdots + p_m^* = 1$.

Bu tenglikni $v (v \neq 0)$ songa bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_m = 1/v$$

$$F(X) = X_1 + X_2 + \ldots + X_m \to \min \qquad (5.3)$$

A o‘yinchining maqsadi o‘zining kafolatlangan yutug’ini maksimallashtirish, ya’ni o‘yinning narxi, v ni maksimallashtirish bo‘lib, bu esa, $1/v$ miqdorni minimallashtirishga ekvivalentdir. Shuning uchun *masala quyidagicha qo‘yi*ladi: $X_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$ o‘zgaruvchilarni shunday qiymatlarini aniqlash kerakki, bunda ular (5.2) sistemani qanoatlantirib, (5.5.3) funksiyaga minimal qiymat bersin.

Hosil bo‘lgan chiziqli programmalashtirish masalasining matematik modelini keltiramiz.

A o‘yinchining matematik modeli	B o‘yinchining matematik modeli
$F(X) = X_1 + X_2 + \ldots + X_m \to \min$; $\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \dots + a_{m1}X_m \geq 1, \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{m2}X_m \geq 1, \\ ----------------- \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \dots + a_{mn}X_m \geq 1. \end{cases}$ $X_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$	$S(\overline{Y}) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \to \max$ $\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \dots + a_{1n}Y_n \leq 1, \\ a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \dots + a_{2n}Y_n \leq 1, \\ ----------------- \\ a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + \dots + a_{mn}Y_n \leq 1. \end{cases}$ $Y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$

Ko‘rinib turibdiki, bu o‘zaro ikkilangan juft chiziqli programmalashtirish masalasini ifodalaydi. Ularning yechimi mazkur o‘yin masalasining yechimidir.

Bunda:

$$v = \frac{1}{F(X^*)} = \frac{1}{S(Y^*)};$$
$$p_i^* = v \cdot X_i^*, \quad i = \overline{1, m}; \qquad (5.4)$$
$$q_j^* = v \cdot Y_j^*, \quad j = \overline{1, n}$$

Demak, matritsali o‘yin masalasini, chiziqli programmalashtirish masalasi usullari bilan yechish, quyidagi bosqichlardan iborat bo‘ladi.

1. Berilgan juft o‘yin masalasiga ekvivalent, o‘zaro juft ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalasini tuzish.

2. Ikkilangan masalaning optimal rejalarini aniqlash.

3. Ikkilangan masalaning optimal rejalaridan foydalanib, optimal strategiyalarni va o‘yin narxini aniqlash (5.4).

Chekli mxn o‘lchamli matritsali o‘yinni, chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish uchun tavsiyalar quyidagi sxema bo‘yicha bo‘ladi

1. To‘lov matritsasidagi qulay bo‘lmagan strategiyalar tashlab yuborilib, to‘lov matritsasi yetarlicha soddalashtiriladi.

2. O‘yinning quyi va yuqori narxlari aniqlanib, egar nuqtaning mavjudligi tekshiriladi. Agar egar nuqta mavjud bo‘lsa, unga mos strategiyalar, optimal strategiyalar bo‘lib, o‘yinning narxi, quyi (yuqori) narx bilan mos tushadi.

3. Agar egar nuqta mavjud bo‘lmasa, yechim aralash strategiyalarda topiladi. Agar to‘lov matritsasi 2xn yoki nx2 o‘lchamli bo‘lsa, o‘yin grafik usulda yechiladi. Agar to‘lov matritsasi mxn o‘lchamli bo‘lsa, chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirilib, simpleks usul orqali masalaning yechimi aniqlanadi.

Mustaqil yechish uchun misollar

To‘lov matritsasini soddalashtiring va uning yechimini aniqlang.

1. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

To‘lov matritsasidan foydalanib o‘yinning optimal strategiyasi va narxini aniqlang.

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. 7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. 8. $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. 9. $A=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

To'lov matritsasidan foydalanib, o'yinning optimal strategiyasi va narxini grafik usulda toping.

15. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 16. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 19. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. 22. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. 25. $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

VI BOB. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH

6.1. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining qo‘yilishi va turlari

Ko‘pgina iqtisodiy vaziyatlar chiziqli modellar bilan ifodalanmaydi. Hayotda chiziqli modellar kam uchraydi. Masalan, x birlik tovarni p narxdan sotib px daromadni hosil qilar edik. Daromadning narxga to‘g‘ri proporsional ekanligi kelib chiqadi. Lekin hayotda narx talabga bog‘liq ravishda o‘zgarib, ularni sotish hajmi talab va tovar narxiga bog‘liq bo‘ladi. Sotish hajmi narxga bog‘liq bo‘lgan $f(p)$funksiyadan iborat bo‘lsa, u holda daromad $p\cdot f(p)$ga teng bo‘lib, bu esa p o‘zgaruvchiga nisbatan chiziqsiz funksiyadan iborat bo‘ladi.

Iqtisodiyotda korxona faoliyati natijalarining o‘sishi yoki kamayishi, resurslarning o‘zgarishiga proporsional ravishda o‘zgarmaydi, masalan, tovarlarning ko‘pligidan talabning kamayishi, buning asosida esa, har bir tovarning sotilishi avvalgisidan ham mushkullashib boradi.

Iqtisodiyot masalalari ko‘p faktorlarga asoslangani uchun, ularning o‘zgarish qonuniyatlari chiziqsiz modellarga olib keladi. Shuning uchun chiziqsiz modellarni yechish zaruriyati kelib chiqadi.

Chiziqsiz programmalashtirish – matematik programmalashtirishning bir bo‘limi bo‘lib, masalalarning ekstremal qiymatini aniqlashning nazariyasi va yechish usullaridan iborat hamda maqsad funksiya yoki chegaraviy shartlar (yoki ikkalasi ham birgalikda) izlanayotgan miqdorning chiziqsiz ekanligiga asoslanadi. Chiziqsiz programmalashtirishning umumiy matematik modeli: shunday $\bar{x}=(x_1,\, x_2,\, ...,x_n)$ vektorni topish kerakki, u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirib

$$g_i\left(x_1,\, x_2,\, ...,x_n\right)=b_i,\quad i=\overline{1,\, m_1};$$
$$g_i\left(x_1,\, x_2,\, ...,x_n\right)\le b_i,\quad i=\overline{m_1+1,\, m_2};$$
$$g_i\left(x_1,\, x_2,\, ...,x_n\right)=b_i,\quad i=\overline{m_2+1,\, m},$$

maqsad funksiyasiga

$$F(X)=f(x_1,x_2,...,x_n),$$

ekstremum qiymat bersin. Bunda $x_j,\ j=\overline{1,n}$ o‘zgaruvchilar; $L,\ f,\ g_i\ \ i=\overline{1,m}$

- berilgan funksiyalar; b_i - fiksirlangan qiymatlar.

Chiziqsiz programmalashtirishning, chiziqli programmalashtirishdan farqi shundaki, bunda yagona yechish usuli mavjud emas. Maqsad funksiyaning va chegaraviy shartlarga asoslanib maxsus yechish usullari ishlab chiqilgan. Bularga, Lagranjning ko‘paytuvchilar usuli, kvadratik va qavariq programmalashtirish, gradiyentlar usuli, taqribiy yechish usuli, grafik usullar mavjud.

Chiziqsiz programmalashtirishda maqsad funksiyaning global maksimum yoki minimumini aniqlash talab etiladi. Funksiyaning *global maksimumi* (*minimumi*), bu uning lokal maksimumlari orasidan eng kattasi (eng kichigi), yoki yopiq soha chegarasidagi funksiyaning maksimum (minimum) qiymatidan iborat.

Ta’rif. S to‘plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning, $x_0\in S$ nuqtada global minimumga ega bo‘lishi uchun, quyidagi tengsizlikning

$$f(x_0)\le f(x),\quad x\in S,$$

bajarilishi zarur va yetarli.

Chiziqsiz programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish

Chiziqsiz programmalashtirish masalasining geometrik talqini, uni tekislikda geometrik tasvirlashdan iborat. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi, chiziqli programmalashtirish masalasiga nisbatan kengroqdir. Chiziqsiz programmalashtirish masalasida, chegaraviy shartlari chiziqli, maqsad funksiyasi chiziqsiz bo‘lgan holdagi natijalar ko‘p olingan. Bunday holda ham, masalaning optimal yechimi juda tor maqsad funksiyalari uchun, olingan. Chiziqli programmalashtirish masalasida ekstremum nuqtalar, yechimlar ko‘pburchakning uchlarida bo‘lsa, chiziqsiz programmalashtirish masalasida bu optimal yechimlar sohaning ichida, qirralarida yoki uchlarida bo‘lishi mumkin. Shunga asoslanib, chiziqli programmalashtirish masalasi usullarini qo‘llash uchun, chiziqsiz masalada, maqsad funksiyasiga qo‘shimcha chegaralar qo‘yish talab etiladi.

Agar chiziqsiz masalada chegaraviy shartlar ham chiziqsiz bo‘lsa, optimal yechimni aniqlash yanada qiyinlashadi. Bunday holda, optimal yechimni aniqlash uchun, maqsad funksiya va chegaraviy shartlardagi funksiyalar ma’lum bir xossalarga ega bo‘lishi zarur.

Chiziqsiz programmalashtirish masalasining optimal yechimini grafik usulda topish. Masala ikki o‘zgaruvchidan iborat bo‘lganda, uni grafik usulda yechish mumkin. Grafik usulda, masalaning mumkin bo‘lgan yechimlar sohasini geometrik tasviri va bu sohada maqsad funksiyaning ekstremumini aniqlashdan iborat. Lekin, mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi shakli ixtiyoriy shaklda, hatto ikkita va undan ko‘p qismlardan iborat bo‘lishi ham mumkin.

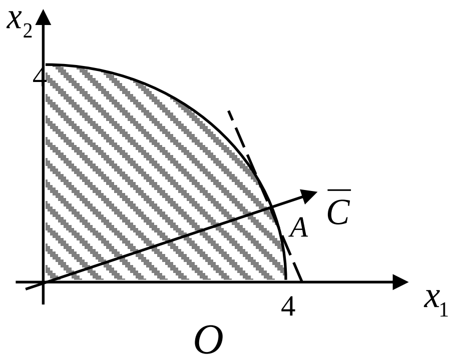
Grafik usulda masalalar yechish.

Misol. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$x_1^2 + x_2^2 \le 16, \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

maqsad funksiyaning $F(X) = 2x_1 + x_2$ global ekstremumlarini aniqlang.

Yechish. Mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi – radiusi 4 teng bo‘lgan, birinchi chorakda yotgan, doiraning bir qismidan iborat (6.1-rasm).



6.1-rasm.

Maqsad funksiyaning sath chizig‘i, burchak koeffitsiyentlari -2 ga teng bo‘lgan, parallel to‘g‘ri chiziqlardan iborat. Global minimum *O*(0,0) nuqtada, global maksimum esa – sath chizig‘i va aylana tutashgan *A* nuqtada yotadi. *A* nuqta orqali sath chizig‘iga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g’ri chiziqning burchak koeffitsiyenti ½ ga teng, tenglamasi esa $x_2 = x_1 / 2$ dan iborat bo‘lib, u koordinatalar boshidan o‘tadi.

Ushbu tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_2 = x_1 / 2. \end{cases}$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz

$$x_1 = 8\sqrt{5}\ /5,\ \ x_2 = 4\sqrt{5}/5,\ \max F(X) = 16\sqrt{5}\ /\ 4\sqrt{5}/5 = 4\sqrt{5}$$

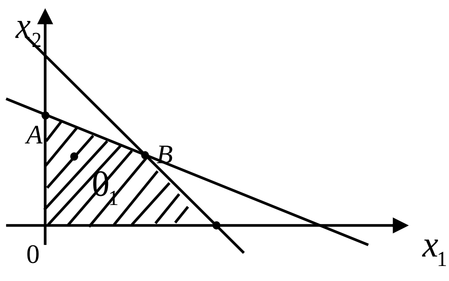
Demak, global minimum nolga teng bo‘lib, u *O*(0, 0) nuqtada erishadi. Global maksimum $4\sqrt{5}$ ga teng bo‘lib, u $A\left(8\sqrt{5}/5, 4\sqrt{5}/5\right)$ nuqtada erishadi.

Misol. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$x_1 + 2x_2 \le 12,$$
$$x_1 + x_2 \le 9, \qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

maqsad funksiyaning $L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ global ekstremumini toping.

Yechish. Bu masalada mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plami *OABD* ko‘pburchakdan iborat (6.2-rasm). Sath chizig’i, markazi O_1 nuqtada bo‘lgan aylanadan iborat. Maqsad funksiya maksimal nuqtasiga *D*(9; 0) nuqtada, minimal qiymatiga $O_1(2;3)$ nuqtada erishadi.



6.2-rasm.

Bunda $L(D)=(9-2)^2+(0-3)^2=58$.

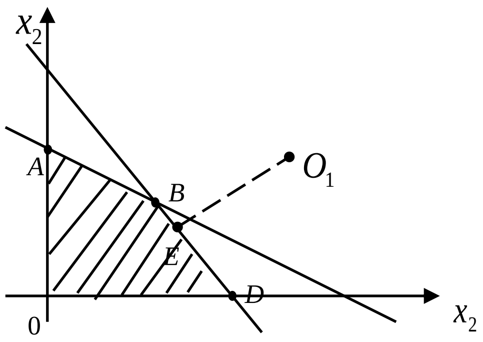
Demak, global maksimum $\max L(D)=58$, minimum nuqtasi esa $\min L(D)=0$ teng ekan.

Misol. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$2x_1+3x_2\le 14,$$
$$3x_1+2x_2\le 15 \qquad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

$L=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2$ funksiyaning global ekstremumini toping.

Yechish. Bu masalada mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plami *OABD* ko‘pburchakdan iborat (6.3-rasm). Sath chizig‘i, markazi $O_1(6;3)$ nuqtada bo‘lgan aylanadan iborat. Global maksimum O_1 nuqtadan eng uzoq bo‘lgan $\mathrm{O}(0;0)$ nuqtada yotadi. Global minimum esa, $3x_1+2x_2=15$ to‘g‘ri chiziq va unga O_1nuqtadan o‘tkazilgan perpendikulyar kesishadigan, *E* nuqtadan iborat.



6.3-rasm

E nuqtaning koordinatalari quyidagicha topiladi: $3x_1+2x_2=15$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti -3/2 ga teng. Shuning uchun O_1E perpendikulyarning burchak koeffitsiyenti 2/3 ga teng. O_1 nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti 2/3 ga teng va uning tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$x_2-3=\frac{2}{3}(x_1+6)\text{, bundan } 2x_1-3x_2=3\,.$$

Tenglamalar sistemasidan

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 15 \end{cases}$$

E nuqtaning koordinatalari topiladi: $(x_1; x_2) = (51/13; 21/13)$, bunda $\min L(E) = 1053/169$.

Misol. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$x_1^2 + x_2^2 \le 16, \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ funksiyaning global ekstremumini aniqlang.

Yechish. Masalaning mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi birinchi chorakda yotuvchi, radiusi 4 ga teng bo‘lgan doiradan iborat (6.4 rasm). Sath chizig‘i, markazi $O_1(2;1)$ nuqtada bo‘lgan aylanalardan iborat.

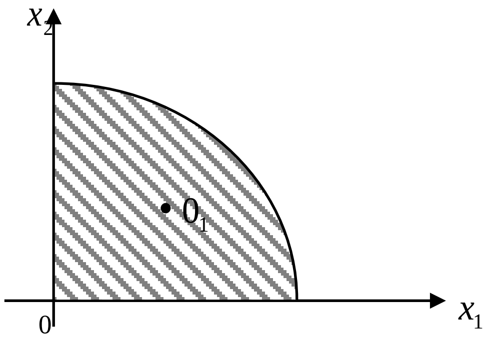
Funksiya global minimumga O_1 nuqtada

$$\min L = (2-2)^2 + (1-1)^2 = 0,$$

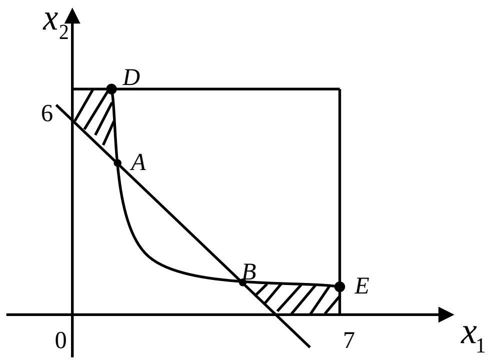
global maksimumga esa A(0; 4) nuqtada erishadi, ya’ni

$$\max L = (0-2)^2 + (4-1)^2 = 13.$$

Demak, funksiya global minimumga $O_1(2;1)$ nuqtada erishib nolga teng, global maksimumga esa A(0; 4) nuqtada erishib 17 ga teng bo‘lar ekan.



6.4-rasm.



6.5-rasm.

Misol. $L = x_1^2 + x_2^2$ funksiyaning global ekstremumlarini quyidagi boshlang‘ich shartlarda aniqlang

$x_1x_2 \le 4,\ \ x_1 + x_2 \ge 5,\ \ x_1 \le 7,\ x_2 \le 6,\ \ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$

Yechish. Ko‘rilayotgan masalaning mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi qavariq bo‘lmasdan, u ikki qismdan iborat (6.5 rasm). Sath chizig’i, markazi $O(0;\ 0)$ nuqtada bo‘lgan aylanalardan iborat.

Quyidagi sistemani yechib A va B nuqtalarning koordinatalarini topamiz

$$x_1x_2 = 4,\ \ x_1 + x_2 = 5.$$

Bundan $A(1;\ 4)$, $B\ (4;\ 1)$ ni hosil qilamiz. Bu nuqtalarda maqsad funksiya global minimumga erishadi, ya’ni

$$\min L(1,4) = x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 4^2 = 17,$$

$$\min L(4,1) = x_1^2 + x_2^2 = 4^2 + 1^2 = 17.$$

Demak, $A(1;\ 4)$, $B\ (4;\ 1)$ nuqtalarda, maqsad funksiyaning global minimumi 17 ga teng bo‘lar ekan. Quyidagi sistemani yechib D va E nuqtalarning koordinatalarini topamiz

$$\begin{cases} x_1x_2 = 4, \\ x_2 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1x_2 = 4, \\ x_1 = 7 \end{cases}$$

Bundan esa $D(2/3,6)$ va $E(7;\ 4/7)$ nuqtalarni topamiz. Bu nuqtalarning har birida maqsad funksiyaning qiymatlarini aniqlaymiz

$$L(D) = x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 6^2 = \frac{328}{9},$$

$$L(E) = x_1^2 + x_2^2 = 7^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{2417}{49}.$$

Demak, maqsad funksiya ikkita global ekstremumga ega bo‘lib, u $\min L(D) = 17$, global maksimumga esa $E(7;4/7)$ nuqtada erishib $\max L(E) = \frac{2417}{49}$ bo‘lar ekan.

6.2. Shartli ekstremum

Shartsiz chiziqsiz programmalashtirish masalasi va uni yechish usuli. Agar chiziqsiz programmalashtirish masalasida

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \qquad (6.1)$$

noma’lum o‘zgaruvchilarga shartlar qo‘yilmasa, u holda bu masala *shartsiz chiziqsiz programmalashtirish masalasi* deyiladi. Bu masala vektor ko‘rinishda quyidagicha bo‘ladi

$$f\left(X\right)\to \max \tag{6.2}$$

ya’ni, $X\in R^{n}$. Bu masala *chiziqsiz programmalashtirishning shartsiz maksimal masalasi* deyiladi.

Bu shartsiz chiziqsiz programmalashtirish masalaning ekstremal qiymatlarini aniqlashni, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi mavzusida ko‘rib o‘tgan edik. Bunga ko‘ra, bu kabi funksiyalarning ekstremum qiymatlari, ikkinchi tartibli xususiy hosiladan tuzilgan Gesse matritsasining musbat yoki manfiy aniqlanganligidan iborat bo‘lib, bu esa o‘z navbatida Silvestr usuli bilan topilar edi.

Shartli chiziqsiz programmalashtirish masalasi. Lagranj ko‘paytuvchilar usuli.

Chiziqli programmalashtirish masalasi berilgan bo‘lsin

$$F(X)=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\to \max(\min) \tag{6.3}$$

$$g_i\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_n\right)=0,\quad i=\overline{1,\ m}. \tag{6.4}$$

Faraz qilamiz, funksiyalar $f\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_n\right)$, $g_i\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_n\right)=0,\quad i=\overline{1,\ m}$ o‘zlarining uzluksiz birinchi tartibli hosilalariga ega bo‘lsin.

Chegaraviy masalalar tenglamalar ko‘rinishida berilgani uchun, masalani yechish uchun, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning shartli ekstremumini topish usulidan foydalanamiz.

Masalani yechish uchun Lagranj funksiyasi tuziladi

$$F\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_n,\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\lambda_m\right)=f\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_n\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_n\right) \tag{6.5}$$

So‘ngra, uning birinchi tartibli xususiy hosilalari aniqlanadi

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}\ \left(j=\overline{1,n}\right),\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\ \left(i=\overline{1,m}\right)$$

Bu hosilalarni nolga tenglashtirib quyidagi sistema hosil qilinadi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, & \left(j = \overline{1,n} \right), \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i \left(x_1,\ x_2,\ ...,x_n \right) = 0, & \left(i = \overline{1,m} \right) \end{cases} \tag{6.6}$$

Sistemani yechib, $F(X)$ funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtalar to‘plami topiladi.

(6.5) funksiya, *Lagranj funksiyasi*, λ_i - sonlar *Lagranj ko‘paytuvchilari* deyiladi. Agar $L\left(\bar{x}\right) = f\left(x_1,\ x_2, ..., x_n\right)$ funksiya $X^0 = \left(x_1^0,\ x_2^0, ...,\ x_n^0\right)$ nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, u holda shunday $\Lambda^0 = \left(\lambda_1^0,\ \lambda_2^0, ...,\ \lambda_m^0\right)$ vektor topiladiki, bunda $\left(x_1^0,\ x_2^0, ...,\ x_n^0, \lambda_1^0,\ \lambda_2^0, ...,\ \lambda_m^0\right)$ nuqta (6.3.6) sistemaning yechimi bo‘ladi.

Demak, (6.3.6) sistemani yechib, $L\left(\bar{x}\right)$ funksiyaga ekstremal qiymatlar beruvchi nuqtalar to‘plami hosil qilinadi. Bu nuqtalardan foydalanib funksiyaning global ekstremum qiymatlarini aniqlash mumkin.

Lagranj $F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right)$ funksiyasining ikkinchi tartibli to‘la differensiali quyidagicha beriladi

$$d^2F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2\sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j\ . \tag{6.3.7}$$

Bu formuladagi dx^2 yozuv, dx ning kvadratini ifodalaydi, ya’ni $dx^2 = \left(dx\right)^2$.

d^2F formulaning ishorasini aniqlash uchun, dx va dy ifodalar orasidagi munosabatni ham aniqlash zarur. Bu (6.3.7) formuladan ko‘rinib turibdiki, $\lambda_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy hosilalar mavjud emas. Statsionar nuqtada $g_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ funksiyaning to‘la differensiali nolga teng:

$$dg_i = \frac{\partial g_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_i}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial g_i}{\partial x_n} dx_n = 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Lagranj ko‘paytuvchilar usuli asosida masalani yechish etaplari:

1. Lagranj funksiyasi tuziladi

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

2. Lagranj funksiyasidan barcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha(6.3.6) xususiy hosila topilib, nolga tenglashtiriladi. Hosil bo‘lgan tenglamalar sistemasini yechish natijasida, barcha statsionar nuqtalar topiladi.

3. Lagranj funksiyasining ikkinchi tartibli to‘la differensiali tuziladi va uning ishorasi har bir statsionar nuqtada aniqlanadi. Agar $(x_1, x_2, ..., x_n)$ statsionar nuqtada $d^2F < 0$ shart bajarilsa, bu statsionar nuqta lokal maksimum, aksincha esa, ya’ni $d^2F > 0$ bo‘lsa, lokal minimum bo‘ladi.

Misol. Funksiyaning shartli ekstremum nuqtasini toping

$$L(\bar{x}) = 2x_1x_2 - x_2^2$$

chegaraviy shartda:

$$x_1 + x_2 = 5$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1x_2 - x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5).$$

Lagranj funksiyasining xususiy hosilalarini aniqlaymiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_2 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_1 - 2x_2 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasining yechimi $\lambda = \dfrac{10}{3}$ da $\bar{x}\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarini aniqlaymiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = (2x_2 + \lambda)'_{x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = (2x_1 - 2x_2 + \lambda)'_{x_2} = -2, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = (2x_2 + \lambda)'_{x_2} = 2. \end{cases}$$

Bu statsionar $\bar{x}\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ nuqtani ekstremumga tekshiramiz:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\cdot dx_1^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\cdot dx_2^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\cdot dx_1 dx_2 = 0\cdot dx_1^2 - 2\cdot dx_2^2 + 4\cdot dx_1 dx_2 = -2dx_2^2 + 4dx_1 dx_2$$

Endi d^2F ning ishorasini aniqlash uchun statsionar nuqtalarning xossasidan foydalanamiz, $g = x_1 + x_2 - 5$ belgilash olib

$$d\varphi = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2 = \left(x_1 + x_2 - 5\right)'_{x_1} dx_1 + \left(x_1 + x_2 - 5\right)'_{x2} dx_2 = dx_1 + dx_2 = 0\,.$$

Demak, $dx_1 = -dx_2$, bundan esa

$$d^2F = -2dx_2^2 + 4\left(-dx_2\right)dx_2 = -6dx_2^2 < 0\,.$$

Demak, $\bar{x}\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ nuqta berilgan funksiyaning maksimum nuqtasi ekan

$$\max L\left(\bar{x}\right) = 2\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}\,.$$

Masalani ikkinchi usul bilan hisoblaymiz.

Ushbu simmetrik matritsadan foydalanib masalaning optimal yechimini aniqlaymiz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Agar statsionar nuqtada $|A| < 0$ bo‘lsa, berilgan funksiya bu nuqtada minimumga erishadi aksincha esa, ya’ni $|A| > 0$ bo‘lsa, maksimumga erishadi.

A matritsani, $\bar{x}\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ nuqta uchun yozib olamiz

Bunda

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_1} = \left(x_1 + x_2 - 5\right)'_{x_1} = 1, \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} = \left(x_1 + x_2 - 5\right)'_{x_2} = 1. \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&2\\1&2&-2\end{vmatrix}=6>0.$$

Demak, $|A|=6>0$ bo‘lgani uchun, $\bar{x}\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$ nuqta berilgan funksiyaning maksimum nuqtasi bo‘lar ekan, bundan esa

$$\max L\left(\bar{x}\right)=2\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{3}.$$

Misol. Un kombinati unni ikki turda sotadi: do’konlarga chakana savdo orqali va savdo agentlari orqali ulgurji savdo tarzida sotadi. x_1 kg unni do’konlarda sotganda x_1^2 pul birligi miqdorida xarajat bo‘ladi, x_2 kg unni savdo agentlari orqali ulgurji savdo tarzida sotganda x_2^2 pul birligi miqdorida xarajat bo‘ladi.

Agar har sutkada 5000 kg un sotishga qo‘yilsa, uni sotish xarajati minimal bo‘lishi uchun, qancha kilogramm unni, qanday turda sotishni aniqlash talab etiladi.

Yechish. Masalaning matematik modeli tuziladi. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$x_1+x_2=5000,\quad x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

xarajatlarning minimum yig‘indisini aniqlash talab etilsin

$$L\left(\bar{x}\right)=x_1^2+x_2^2.$$

Matematik modelni yechish uchun Lagranj ko‘paytuvchilar usulidan foydalaniladi. Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$F\left(x_1,x_2,\lambda\right)=x_1^2+x_2^2+\lambda\left(x_1+x_2-5000\right).$$

Lagranj funksiyasi F dan $x_1,\ x_2$ noma’lum o‘zgaruvchilar va λ parametr bo‘yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5000 = 0 \end{cases}$$

bunda $\lambda = -5000,\ x_1 = 2500$ *кг*, $x_2 = 2500$ *кг*.

$L(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 = 2500^2 + 2500^2 = 12\,500\,000$ so‘m.

O‘zgaruvchi x_1 ga 2500 dan katta va kichik qiymatlar berib, ta’rif-ga asosan $L(\bar{x})$ ning ekstremal qiymati minimum ekanligi aniqlanadi.

Demak, sutka davomida, xarajatlarning minimalligini ta’minlash uchun do’kon va savdo agentlari orqali 2500 kg unni sotish kerak ekan. Bunda, sotish xarajatlari 12 500 000 pul birligidan iborat bo‘lar ekan.

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping

$L(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min(\max)$

chegaraviy shartlarda:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 4) + \lambda_2(2x_1 - 3x_2 - 12)$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_2, x_3 noma’lum o‘zgaruvchilar va λ_1, λ_2 parametrlar bo‘yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 2x_1 - 3x_2 - 12 = 0 \end{cases}$$

Bundan $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{72}{19}, -\frac{28}{19}, \frac{32}{19}\right)$, $\min L\left(\bar{x}\right) = 19{,}37$.

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping

$$L\left(\bar{x}\right) = x_1x_2 + x_2x_3$$

chegaraviy shartlarda:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi

$$F\left(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2\right) = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1\left(x_1 - x_2 - 2\right) + \lambda_2\left(x_2 + 2x_3 - 4\right)$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_2, x_3 noma’lum o‘zgaruvchilar va λ_1, λ_2 parametrlar bo‘yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = x_2 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 - x_2 - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

Bundan $x_1 = -2,\ x_2 = -4,\ x_3 = 4,\ \min L\left(\bar{x}\right) = -8$.

Statsionar nuqtani ekstremumga tekshiramiz. Soddalik uchun o‘zgaruvchilarni yo‘qotish orqali ikkita tenglamadan iborat boshlang’ich shartni, bitta tenglamadan iborat boshlang‘ich shartga o‘zgartiramiz. Buning uchun boshlang‘ich shartdagi birinchi tenglamadan x_2 o‘zgaruvchini topib, ikkinchi tenglamaga va maqsad funksiyasiga qo‘ysak quyidagi holat bo‘ladi

$$\begin{cases} L\left(\bar{x}\right)=x_1x_2+x_2x_3 \\ x_2=x_1-2 \\ x_2+2x_3=4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\left(\bar{x}\right)=x_1\left(x_1-2\right)+\left(x_1-2\right)x_3 \\ x_2=x_1-2 \\ \left(x_1-2\right)+2x_3=4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\left(\bar{x}\right)=x_1^2+x_1x_3-2x_1-2x_3 \\ x_2=x_1-2 \\ x_1+2x_3=6. \end{cases}$$

Lagranj funksiyasi tuziladi

$$F\left(x_1,x_3,\lambda\right)=x_1^2+x_1x_3-2x_1-2x_3+\lambda\left(x_1+2x_3-6\right)$$

Lagranj funksiyasi F dan $x_1,\ x_3$ noma’lum o‘zgaruvchilar va λ parametr bo‘yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=2x_1+x_3-2+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3}=x_1-2+2\lambda=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x_1+2x_3-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+x_3-2+\lambda=0 \\ x_1-2+2\lambda=0 \\ x_1+2x_3-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ x_1=-2 \\ x_3=4. \end{cases}$$

Bundan $M\left(-2,\,4\right)$ statsionar nuqtani aniqlaymiz. Bu nuqtani ekstremumga tekshiramiz. Buning uchun ikkinchi tartibli xususiy hosilani aniqlaymiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}=\left(2x_1+x_3-2+\lambda\right)'_{x_1}=2, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}=\left(x_1-2+2\lambda\right)'_{x_3}=0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_3}=\left(2x_1+x_3-2+\lambda\right)'_{x_3}=1. \end{cases}$$

$$d^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\cdot dx_1^2+\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}\cdot dx_3^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_3}\cdot dx_1dx_3=2\cdot dx_1^2-0\cdot dx_3^2+2\cdot dx_1dx_3=2\cdot dx_1^2+2dx_1dx_3.$$

Endi d^2F ning ishorasini aniqlash uchun statsionar nuqtalarning xossasidan foydalanamiz, $g=x_1+2x_3-6$ belgilash olib

$$dg=\frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial g}{\partial x_3}dx_3=\left(x_1+2x_3-6\right)'_{x_1}dx_1+\left(x_1+2x_3-6\right)'_{x_3}dx_3=dx_1+2dx_3=0\,.$$

Demak, $dx_3=-\frac{dx_1}{2}$, bundan esa

$$d^2F=2dx_1^2+2\cdot dx_1\cdot\left(-\frac{dx_1}{2}\right)=2dx_1^2-dx_1^2=dx_1^2>0\,.$$

Demak, statsionar $M(-2,\,4)$ nuqta maqsad funksiyasining minimum nuqtasi bo‘lar ekan

$$L\left(\bar{x}\right)=x_1^2+x_1x_3-2x_1-2x_3=\left(-2\right)^2+\left(-2\right)\cdot 4-2\left(-2\right)-2\cdot 4=-8\,.$$

Bundan esa berilgan masalaning ekstremal qiymati quyidagicha bo‘ladi

$$\begin{cases}L\left(\bar{x}\right)=x_1x_2+x_2x_3\\ x_2=x_1-2\\ x_2+2x_3=4.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L\left(\bar{x}\right)=-2\cdot\left(-4\right)+\left(-4\right)\cdot 4\\ x_2=-2-2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L\left(\bar{x}\right)=-8\\ \left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(-2,-4,4\right)\end{cases}$$

6.3. Lagranj ko‘paytuvchilari usuli

n **o‘zgaruvchili funksiyalar uchun Lagranjning ko‘paytuvchilar usuli**. Aytaylik n o‘zgaruvchili $z=f\left(x_1,\,x_2,\,...,x_n\right)$ funksiya va m ta chegaraviy shartlar berilgan bo‘lsin

$$z=f\left(x_1,\,x_2,\,...,x_n\right)$$
$$\begin{cases}\varphi_1\left(x_1,\,x_2,\,...,x_n\right)=0,\\ \varphi_2\left(x_1,\,x_2,\,...,x_n\right)=0,\\ ....\\ \varphi_m\left(x_1,\,x_2,\,...,x_n\right)=0.\end{cases}.$$

Lagranj funksiyani tuzamiz

$$F\left(x_1,\,x_2,\,...,x_n,\lambda_1,\,\lambda_2,\,...,\lambda_m\right)=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+...+\lambda_m\varphi_m\,.$$

Lagranj funksiyasining barcha noma’lumlari bo‘yicha xususiy hosila olib ularni nolga tenglashtirib, statsionar nuqtalarni aniqlaymiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0, & \left(i = \overline{1,n}\right) \\ \varphi_j = 0, & \left(j = \overline{1,m}\right) \end{cases}.$$

Yuqoridagi kabi to‘la differensial d^2F ning ishorasini aniqlaymiz. Agar aniqlangan statsionar nuqtada $d^2F < 0$ shart bajarilsa, bu nuqta shartli maksimum, aksincha esa, ya’ni $d^2F > 0$ bo‘lsa, shartli minimum bo‘ladi. Buni boshqacha usulda, ya’ni quyidagi matritsadan foydalanib ham aniqlashimiz mumkin.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

A matritsadagi

$$H(X)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

matritsa, Gesse matritsasidir.

Quyidagi qoidani kiritamiz:

- Agar A matritsaning burchak minorlari $H_{2m+1}, H_{2m+2}, ..., H_{m+n}$ ishoralari $(-1)^m$ ning ishoralari bilan mos bo‘lsa, u holda bu statsionar nuqta $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo‘ladi.
- Agar A matritsaning burchak minorlari $H_{2m+1}, H_{2m+2}, ..., H_{m+n}$ ishoralari almashinib tursa va H_{2m+1} minorning ishorasi $(-1)^{m+1}$ ning ishoralari bilan mos tushsa, u holda bu statsionar nuqta $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo‘ladi.

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping

$$L(\bar{x}) = x + 3y$$

chegaraviy shartda:

$$x^2 + y^2 = 10$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi

$$F(x, y, \lambda) = x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 10).$$

Lagranj funksiyasining xususiy hosilalarini aniqlaymiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 3 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 10 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = -\dfrac{3}{2\lambda}, \\ \left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{2\lambda}\right)^2 - 10 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}; \quad x_1 = -\dfrac{1}{2\lambda_1} = 1; \quad y_1 = -\dfrac{3}{2\lambda_1} = 3 \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}; \quad x_2 = -\dfrac{1}{2\lambda_2} = -1; \quad y_2 = -\dfrac{3}{2\lambda_2} = -3 \end{cases}$$

Demak, sistema ikkita yechimga ega ekan

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}, \qquad M_1(1,\, 3) \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}, \qquad M_2\ (-1,\, -3). \end{cases}$$

Bu nuqtalarning har birida Gesse matritsasini hisoblaymiz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(x^2 + y^2 - 10\right)'_x = 2x, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(x^2 + y^2 - 10\right)'_y = 2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(1 + 2\lambda x\right)'_x = 2\lambda, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \left(3 + 2\lambda y\right)'_y = 2\lambda, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \left(1 + 2\lambda x\right)'_y = 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

$M_1(1,\, 3)$ nuqtada

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 3 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = 40 > 0.$$

Demak, $M_1(1,3)$ nuqtada $L(\bar{x}) = x_1 + 3x_2$ funksiya shartli minimumga ega ekan

$$\min L(\bar{x}) = 1 + 3 \cdot 3 = 10.$$

Shu kabi $M_2(-1,-3)$ nuqtada quyidagini aniqlaymiz

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -3 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = -40 < 0.$$

Demak, $M_2(-1,-3)$ nuqtada $L(\bar{x}) = x_1 + 3x_2$ funksiya shartli minimumga ega bo‘lar ekan

$$\min L(\bar{x}) = -1 + 3 \cdot (-3) = -10.$$

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping

$$L(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min(\max)$$

chegaraviy shartlarda:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Yechish. Lagranj funksiyasi tuziladi

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 4) + \lambda_2(2x_1 - 3x_2 - 12)$$

Lagranj funksiyasi F dan x_1, x_2, x_3 noma’lum o‘zgaruvchilar va λ_1, λ_2 parametrlar bo‘yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 2x_1 - 3x_2 - 12 = 0 \end{cases}$$

Bundan $(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{72}{19}, -\dfrac{28}{19}, \dfrac{32}{19}\right)$, $\min L(\bar{x}) = 19{,}37$.

Misol. Funksiya shartli ekstremum nuqtasini toping

$$L(\overline{x}) = x_1x_2 + x_2x_3$$

chegaraviy shartlarda:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Yechish. I *usul*. Lagranj funksiyasi tuziladi

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1(x_1 - x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + 2x_3 - 4)$$

Lagranj funksiyasi F dan $x_1,\ x_2,\ x_3$ noma'lum o'zgaruvchilar va λ_1, λ_2 parametrlar bo'yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = x_2 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 - x_2 - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

Bundan $(x_1,\ x_2, x_3) = (-2,\ -4,\ 4),\ \ \min L(\overline{x}) = -8$.

II *usul*. Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli. Buning uchun chegaraviy shartdagi ikkita tenglamadan birini yo'qotib, bitta tenglamadan iborat chegaraviy shart tuzamiz. Chegaraviy shartdagi birinchi tenglamadan x_2 noma'lumni topib, ikkinchi tenglamaga va maqsad funksiyasiga qo'yib, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini hosil qilamiz

$$\begin{cases} L(\overline{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 \\ x_2 = x_1 - 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L(\overline{x}) = x_1(x_1 - 2) + (x_1 - 2)x_3 \\ x_2 = x_1 - 2 \\ (x_1 - 2) + 2x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L(\overline{x}) = x_1^2 + x_1x_3 - 2x_1 - 2x_3 \\ x_2 = x_1 - 2 \\ x_1 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$F(x_1, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_1x_3 - 2x_1 - 2x_3 + \lambda(x_1 + 2x_3 - 6)$$

Lagranj funksiyasi F dan $x_1,\ x_3$ o‘zgaruvchilar va λ parametr bo‘yicha xususiy hosilalar olib, ularni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + x_3 - 2 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = x_1 - 2 + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + 2x_3 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2 + \lambda = 0 \\ x_1 - 2 + 2\lambda = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ x_1 = -2 \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Bundan $M(-2,\ 4)$ statsionar nuqtani aniqlaymiz. Bu nuqtani ekstremumga tekshiramiz. Buning uchun ikkinchi tartibli xususiy hosilani aniqlaymiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \left(2x_1 + x_3 - 2 + \lambda\right)'_{x_1} = 2, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = \left(x_1 - 2 + 2\lambda\right)'_{x_3} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = \left(2x_1 + x_3 - 2 + \lambda\right)'_{x_3} = 1. \end{cases}$$

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \cdot dx_1^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \cdot dx_3^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \cdot dx_1 dx_3 = 2 \cdot dx_1^2 - 0 \cdot dx_3^2 + 2 \cdot dx_1 dx_3 = 2 \cdot dx_1^2 + 2dx_1 dx_3$$

.

Endi d^2F ning ishorasini aniqlash uchun statsionar nuqtalarning xossasidan foydalanamiz, $\varphi = x_1 + 2x_3 - 6$ belgilash olib

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 = \left(x_1 + 2x_3 - 6\right)'_{x_1} dx_1 + \left(x_1 + 2x_3 - 6\right)'_{x_3} dx_3 = dx_1 + 2dx_3 = 0.$$

Demak, $dx_3 = -\dfrac{dx_1}{2}$, bundan esa

$$d^2F = 2dx_1^2 + 2 \cdot dx_1 \cdot \left(-\frac{dx_1}{2}\right) = 2dx_1^2 - dx_1^2 = dx_1^2 > 0.$$

Demak, statsionar $M(-2,\ 4)$ nuqta maqsad funksiyasining minimum nuqtasi bo‘lar ekan

$$\min L\left(\bar{x}\right) = x_1^2 + x_1 x_3 - 2x_1 - 2x_3 = (-2)^2 + (-2) \cdot 4 - 2(-2) - 2 \cdot 4 = -8.$$

Bu optimal yechimlardan foydalanib, boshlang‘ich masalaning yechimini aniqlaymiz. Bundan esa berilgan masalaning ekstremal qiymati quyidagicha bo‘ladi

$$\begin{cases} L\left(\bar{x}\right) = x_1x_2 + x_2x_3 \\ x_2 = x_1 - 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\left(\bar{x}\right) = -2\cdot(-4) + (-4)\cdot 4 \\ x_2 = -2 - 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1, x_2, x_3) = (-2, -4, 4) \\ \min L\left(\bar{x}\right) = -8 \end{cases}$$

III usul. Endi masalaning optimal yechimini tuzilgan matritsaning burchak minorlaridan foydalanib aniqlaymiz. Buning uchun, quyidagi xususiy hosilalarni aniqlaymiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \left(x_1 - x_2 - 2\right)'_{x_1} = 1, \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \left(x_1 - x_2 - 2\right)'_{x_2} = -1 \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = \left(x_1 - x_2 - 2\right)'_{x_3} = 0. \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \left(x_2 + 2x_3 - 4\right)'_{x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = \left(x_2 + 2x_3 - 4\right)'_{x_2} = 1 \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = \left(x_2 + 2x_3 - 4\right)'_{x_3} = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = x_2 + 2\lambda_2 = 0. \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \left(x_2 + \lambda_1\right)'_{x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \left(x_1 + x_3 - \lambda_1 + \lambda_2\right)'_{x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3^2} = \left(x_2 + 2\lambda_2\right)'_{x_3} = 0. \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(x_2 + \lambda_1\right)'_{x_2} = 1 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = \left(x_2 + \lambda_1\right)'_{x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = \left(x_1 + x_3 - \lambda_1 + \lambda_2\right)'_{x_3} = 1. \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matritsaning burchak minorlarining $H_{2m+1}, H_{2m+2}, ..., H_{m+n}$ ishoralarini aniqlashimiz kerak. Bunda m parametr masalaning chegaraviy shartlar soni, n parametr esa noma'lumlar soni. Bu masalada ikkita chegaraviy shart va uchta noma'lum qatnashmoqda, shuning uchun $m=2, n=3$. $2m+1=5, \ n+m=5$ bo'lgani uchun, bunda faqat H_5 minor qaraladi.

A matritsa 5-tartibli bo'lgani uchun H_5 minor bu matritsa bilan ustma-ust tushadi. H_5 minorning tartibini pasaytirish orqali uning ishorasini aniqlaymiz.

$$H=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=4>0$$

Ta'rifga asosan $(-1)^m=(-1)^2=1$ bo'lgani uchun, H_{2m+1} ning ishorasi, $(-1)^m$ ning ishorasi bilan mos tushadi. Bundan kelib chiqib, topilgan statsionar $(x_1, x_2, x_3)=(-2, -4, \ 4)$ nuqta, berilgan funksiyaning minimal nuqtasi bo'lar ekan $\min L(\bar{x})=-8$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Grafik usul yordamida chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yeching.

1. $$F(X)=x_1+x_2 \to \max(\min)$$
$$\begin{cases} (x_1-5)^2+(x_2-3)^2 \le 36 \\ x_1+x_2 \ge 2 \\ x_1, \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. $$F(X)=x_1+x_2 \to \max(\min)$$
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \ge 2 \\ x_1^2+x_2^2 \le 16 \\ x_1, \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(X)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2\le 2 \\ x_1+x_2\le 9 \\ x_1,\ x_2\ge 0 \end{cases}$

$J;\ \max F(9;\ 0)=58,\ \min F(2;3)=0$

$$F(X)=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2$$

4. $\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 14 \\ 3x_1+2x_2\le 15 \\ x_1,\ x_2\ge 0 \end{cases}$

$J;\ \max F(0;\ 0)=45,\ \min F(51/13;21/13)=1053/169$

$$F(X)=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2$$

5. $\begin{cases} 3x_1+5x_2\le 15 \\ 5x_1+3x_2\le 15 \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \end{cases}$

$J;\ \max F(3;\ 0)=\max L(0;3)=5,\ \min F(1;\ 1)=0$

Lagranjning ko‘paytuvchilar usulidan foydalanib funksiyaning shartli ekstremumlarini toping.

$$F(X)=2x_1x_3-x_2x_3$$

6. $\begin{cases} x_2+2x_3=3 \\ x_1+x_2=2 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$

$J;\ X^*_{opt}=(-1/2;\ 5/2;\ 1/4),\ \max F(X^*)=-7/8$

$$F(X^*)=x_1x_2+x_2x_3$$

7. $\begin{cases} x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2=2 \\ x_1,\ x_2\ge 0 \end{cases}$

$J;\ X^*_{opy}=(1;1;1),\max F(X^*)=2$

$$F(X^*)=x_1x_3-x_2x_3$$

8. $\begin{cases} x_2+x_3=4 \\ x_1-2x_2=2 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$

$J;\ X^*_{opt}=(8/3;\ 1/3;\ 11/3),\ \min F(X^*)=1/3$

9. $$F\left(X^*\right) = 2x_1 - x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1^2 + +x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$J;\ X^*_{opt} = \left(\sqrt{6}/3;\ -\sqrt{6}/6;\ \sqrt{6}/6\right),\ \max F\left(X^*\right) = \sqrt{6}$$

10. $$F\left(X^*\right) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$J;\ X^*_{opt} = (3/25;\ 4/25),\ \min F\left(X^*\right) = 0{,}04$$

11. $$F\left(X^*\right) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_3^2$$
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$J;\ X^*_{opt} = (-1/2;\ 3/2),\ \min F\left(X^*\right) = 1/2$$

12. $$F\left(X^*\right) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$J;\ X^*_{opt} = (-5/11;\ -8/11;\ -8/11),\ \max F\left(X^*\right) = 249/121$$

13. $$F\left(X^*\right) = x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$J;\ X^*_{opt} = (6;\ 4;\ -3),\ \max F\left(X^*\right) = 24$$

14. $$F\left(X^*\right) = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 200 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$J;\ X^*_{opt} = (99;\ 101),\ \min F\left(X^*\right) = 20398$$

15. $$F\left(X^*\right) = x_1 \cdot x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$J;\ X^*_{opt} = (1;\ 3),\ \min F\left(X^*\right) = 3$$

VII BOB. QAVARIQ PROGRAMMALASHTIRISH

Chiziqsiz programmalashtirishning faqat qavariq funksiyalar va qavariq to‘plamlar bilan ish ko‘ruvchi bo‘limiga qavariq programmalashtirish deyiladi. Bu bo‘limning asosiy elementlari qavariq funksiyalar va qavariq to‘plamlar bo‘lib, ularning ayrim o‘ziga xos xususiyatlari masala yechimini topishga imkon beradi.

7.1. Yo‘nalish bo‘yicha hosila va gradiyent

$F(x)=F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyaning l yo‘nalish bo‘yicha X nuqtadagi hosilasi $\frac{\partial F}{\partial l}$ deb ushbu limitga aytiladi.

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\lim_{\lambda\to+0}\frac{F(x+\partial l)-F(x)}{\lambda}$$

Odatda l yo‘nalish $l=(l_1,\ldots,l_n)$ vektor orqali beriladi.

Agar F funksiya X nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiya shu nuqtada har qanday l yo‘nalish bo‘yicha hosilaga ega bo‘lib, u xususiy hosila bo‘yicha ushbu formula orqali ifodalanadi

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\frac{1}{|l|}\sum_{i=1}^{n}l_q\cdot\frac{\partial F}{\partial x_i} \tag{7.1}$$

bunda $|l|$ – l vektorning uzunligi, ya’ni

$$|l|=\sqrt{l_1^2+\ldots+\ln^2}$$

yo‘nalish bo‘yicha hosilaning absolyut qiymati shu yo‘nalish funksiya o‘zgarishning tezligini beradi, ishorasi esa funksiya o‘zgarishining xarakterini (o‘sish yoki kamayish) ko‘rsatadi.

$F(x)=F(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyaning gradiyenti ∇F deb shunday vektorga aytiladiki, uning koordinata o‘qlariga proeksiyalari ushbu xususiy hosilalar bo‘lib xizmat qiladi, ya’ni

$$\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

$\frac{\partial F}{\partial l}$ maksimumga erishadi qachonki, agar *l* yo‘nalish ∇F yo‘nalishi bilan mos tushsa (7.1) formuladan *F* funksiyaning ∇F gradiyent yo‘nalishi bo‘yicha hosilasi quyidagiga teng

$$\frac{\partial F}{\partial(\nabla F)}=\frac{1}{|\nabla F|}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_i}=|\nabla F|$$

Shunday qilib, har qanday *X* nuqtada gradiyent yo‘nalishi funksiyaning eng katta o‘sish yo‘nalishini, gradiyent uzunligi esa bu nuqtada eng katta o‘sish tezligini ifodalaydi.

7.1-misol. $F=x_1\cdot x_2\cdot x_3+2x_3$ funksiyaning $A(0;1;2)$ nuqtada eng katta o‘sish tezligini toping va $l=(1;-2;2)$ yo‘nalish bo‘yicha *A* nuqtada funksiyaning o‘zgarish xarakterini aniqlang.

Yechish. Ravshanki, $\frac{\partial F}{\partial x_1}=x_2\cdot x_3$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}=x_2\cdot x_3$, $\frac{\partial F}{\partial x_3}=x_1\cdot x_2+2$, u holda

$\nabla F=(x_2x_3;x_1x_2+2)$ va $\nabla F/_A=(2;\ 0;2)$. Shunday qilib, *A* nuqtada funksiyaning eng katta o‘sish tezligi

$|\nabla F|_A=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $l=\sqrt{1+4+4}=3$ va

$\left.\frac{\partial F}{\partial \ell}\right|_A=\frac{1}{3}(1\cdot 2+1(-2)\cdot 0+2\cdot 2)=\frac{6}{3}=2$ $\left.\frac{\partial F}{\partial \ell}\right|_A>0$ bo‘lganligi uchun *F* funksiya *l* yo‘nalish bo‘yicha *A* nuqtada o‘sadi. Ma’lumki, nuqtalar to‘plami qavariq deyiladi, agar u o‘zining har qanday ikki nuqtasini tutashtirishdan hosil bo‘lgan kesma $[a,b]$ va $x\in[a,b]$ bo‘lsa

$$X=\alpha a+(1-\alpha)b,\quad 0\le\alpha\le 1 \text{ yoki}$$

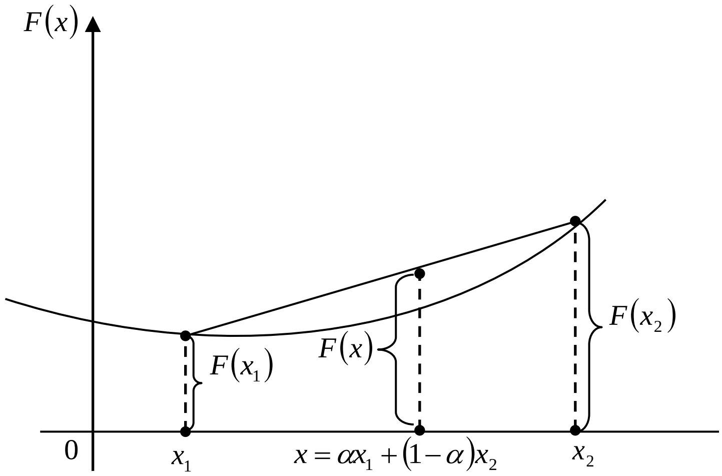
$$X=\alpha_1a+\alpha_2b,\quad \alpha_1+\alpha_1=1,\ \alpha_1\ge 0,\alpha_2\ge 0 \tag{7.2}$$

Uning teskarisini ko‘rish qiyin emas: agar (7.2) bajarilsa, u holda $x\in[a,b]$. Shunday qilib, $[a,b]$ kesmani (7.2) shartli qanoatlantiruvchi barcha *x* nuqtalar to‘plami sifatida aniqlash mumkin.

(7.2) tenglikdan induksiya metodi yordami bilan, agar *M* – qavariq fazo bo‘lsa, u holda har qanday $x_1,x_2,\cdots,x_r\in M$ nuqtalar uchun va har qanday $t_i\ge 0$ son uchun $\sum_{i=1}^{r}t_ix_i\in M$ ekanligini ko‘rsatish mumkin, bunda $\sum_{i=1}^{r}t_i=1$.

n – o‘lchovli foizning qavariq M to‘plamida aniqlangan $F(x)=F(x_1,...,x_n)$ funksiya shu to‘plamda qavariq deyiladi, agar har qanday $\alpha\in[0;1]$ son uchun ushbu tengsizlik o‘rinli bo‘lsa

$$F(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le \alpha F(x_1)+(1-\alpha)F(x_2) \qquad (7.3)$$



7.1-rasm.

Agar (7.3) shartda tengsizlik ishorasi "$\le$" dan "$\ge$" ga o‘zgarsa, u holda botiq funksiya ta’rifini hosil qilamiz. Agar (7.3) da tengsizlik ishorasi qat’iy bo‘lsa, u holda funksiya qat’iy qavariq (yoki qat’iy botiq) deyiladi.

7.1-rasmda bir o‘zgaruchili funksiyaning butun sonlar o‘qida qavariq bo‘lgan funsiya grafigi tasvirlangan.

Qavariq funksiya xossalari:

1. Agar $F(x)$ funksiya qavariq bo‘lsa, u holda $-F(x)$ botiq bo‘ladi.
2. $F(x)=c$ va $F(x)=ax+b$ chiziqli funksiya barcha sohalarda botiq va qavariq bo‘ladi.
3. Agar $F_i(x), (i=\overline{1,m})$ funksiya qavariq bo‘lsa, u holda barcha $\alpha_i\ge 0$ sonlar uchun $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i F(x)$ funksiya ham qavariq bo‘ladi.
4. Agar $F(x)$ funksiya qavariq bo‘lsa, u holda har qanday α son uchun $F(x)<\alpha$ tengsizlikning yechimlar sohasi yo qavariq yoki bo‘sh to‘plam bo‘ladi.

5. Agar $\varphi_i(x)$ funksiya o‘zgaruvchining barcha manfiy qiymatlarida qavariq bo‘lsa, u holda $\varphi_i(x) \le b_i,\ i = \overline{1,m}$ tengsizliklar sistemasining yechimlar to‘plami qavariq bo‘ladi (agar u bo‘sh to‘plam bo‘lmasa).

6. M qavariq to‘plamda aniqlangan qavariq (botiq) funksiya, bu to‘plamning barcha ichki nuqtalarida uzluksiz bo‘ladi.

7. Har qanday qavariq (botiq) funksiya hech bo‘lmaganda bitta statsionar nuqtaga ega, bunda qavariq (botiq) funksiyalar statsionar nuqtada har doim lokal va global ekstremumga ega bo‘ladi.

7.2. Qavariqlikka tekshirishning Silvestr usuli

Ikki marta differensiallanuvchi $F(x) = F(x_1,...,x_n)$ funksiya qavariq bo‘ladi faqat va faqat

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \cdot \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j \ge 0 \qquad (7.4)$$

shart har qanday $X \in M$ va $\Delta x_i, \Delta x_j$ lar uchun (bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan) o‘rinli bo‘lsa.

(7.4) shart Silvester kriteriyasi deb yuritiladi. (7.4) shart bajarilishi uchun $F(x) = F(x_1,...,x_n)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalaridan tashkil topgan matritsaning barcha asosiy minoralari Δ_k nomanfiy bo‘lishi lozim, ya’ni

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix},\ a_{ij} = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i \cdot \partial x_j},\ k = \overline{1,n} \qquad (7.5)$$

Agar $\Delta_k > 0$ bo‘lsa, u holda (7.4) tengsizlik qat’iy bajariladi va F funksiya qat’iy qavariq bo‘ladi.

7.2-misol. Quyidagi funksiyalarni qavariq ekanligini ko‘rsating:

1) $F = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 + 8$

2) $Z = -\sqrt{x_1x_2}$

Yechish. 1) Xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=4x_1-x_2+5,\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2-x_1-6,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}=4,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}=-1,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}=2$$

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalardan tashkil topgan matritsa

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Uning asosiy minoralari $\Delta_1=|4|=4>0,\ \Delta_2=\det A=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=7>0$.

Demak, Silvester kriteriyasiga ko‘ra F funksiya qat’iy qavariq bo‘ladi (barcha x larda).

2) $$\frac{\partial Z}{\partial x_1}=-\frac{x_2}{2\sqrt{x_1x_2}},\ \frac{\partial Z}{\partial x_2}=-\frac{x_1}{2\sqrt{x_1x_2}},$$
$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2}=\frac{-x_2}{2}\left[(x_1x_2)^{-\frac{1}{2}}\right]_{x_1}^{1}=\frac{x_2^2}{4(x_1x_2)^{3/2}}=\frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2}=\frac{1}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

Ikkinchi tartibli xususiy matritsasi quyidagidan iborat.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} & \frac{1}{4x_2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1=\frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}},\qquad \Delta_2=\det A=\frac{1}{16x_1x_2}-\frac{1}{16x_1x_2}=0$$

Shunday qilib, Z funksiya qavariq bo‘ladi $x_1>0, x_2>0$, ammo qat’iy qavariq emas.

7.3. Qavariq progrmmalsh masalasining geometrik talqini

Aytaylik, $\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)\ge b_i$, $i=1,2,...,m$ (7.6)

Tengsizliklar sistemasi va $Z=f(x_1,...,x_n)$ funksiya berilgan bo‘lsin, bunda $\varphi_i(x)$ qandaydir M qavariq to‘plamda qavariq, Z funksiya esa M to‘plamda qavariq yoki botiq funksiya.

Qavariq programmalashtirish masalasining quyilishi: (7.6) shartni qanoatlantiruvchi tengsizliklar sistemasini shunday yechimlarini topish lozimki, bu Z funksiya o‘zining minimum qiymatiga yoki Z botiq funksiya o‘zining maksimum qiymatiga ega bo‘lsin.

Har qanday chiziqli programmalashtirish masalasi qavariq programmalashtirish masalasining xususiy holi hisoblanadi. Umumiy holda qavariq programmalashtirish masalasi chiziqsiz programmalashtirish masalasi hisoblanadi.

Agar Z maqsad funksiya qat’iy qavariq (qat’iy botiq) va (7.6) sistemaning yechimlar sohasi bo‘sh to‘plam bo‘lmasa va chegaralangan bo‘lsa, u holda qavariy programmalashtirish masalasi har doim yagona yechimga ega bo‘ladi.

Bunday holda qavariq funksiya minimumga (botiq funksiya maksimumga) yechimlar sohasining ichki nuqtasida erishadi, agar ichki nuqtada statsionar nuqta mavjud bo‘lsa, yechimlar sohasining chetki nuqtasida ekstremumga ega bo‘ladi, agar yechimlar sohasining ichki nuqtasida statsionar nuqta mavjud bo‘lmasa.

7.3-misol. Ushbu qavariq programmalashtirish masalasini geometrik talqin yordamida yeching.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 4, \\ x_1 \le 2x_2, \\ x_2 \le 2x_1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $Z = 2 + (x_1 - 1)^2 + (x_2 - x_1)^2$ funksiyaning minimumini toping.

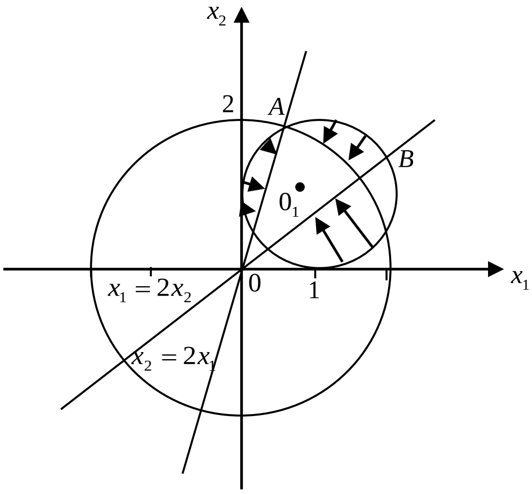
Yechish. Masalaning joiz topamiz:

1) $x_1^2 + x_2^2 = 4$ markazi koordinata boshida radiusi $R = 2$ bo‘lgan aylanani yasaymiz. $x_1^2 + x_2^2 \le 4$ tengsizlikning yechimlar to‘plami aylananing ichki va aylana ustidagi nuqtalardan iborat bo‘ladi;

2) $x_1 = 2x_2$ to‘g‘ri chiziqni ikki nuqtasi masalan (0;0) va (2;1) orqali yasash mumkin. $x_1 \le 2x_2$ tengsizlikning yechimlar to‘plami – bu to‘g‘ri chiziqni ustidagi nuqtalar va undan yuqoridagi nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘ladi;

3) $x_2 = 2x_1$ to‘g‘ri chiziqni yasaymiz, masalan (0;0) va (1;2) nuqtalar yordamida $x_2 = 2x_1$ tengsizlikning yechimlar to‘plami bu to‘g‘ri chiziq ustidaginkuqtalardan iborat bo‘ladi. O‘zgaruvchilarni

nomanfiyligini hisobga olsak, berilgan masalaning yechimlar sohasi *OAB* yopiq sektordan (7.2-rasm) iborat bo‘ladi.



7.2-rasm.

Endi Z sath chizig‘ini yasaymiz va Z funksiyaning kamayish yo‘nalishini aniqlaymiz. Sath chizig‘ining tenglamasi $Z = C$, ya’ni

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = C - 2. \qquad C = 3 \text{ bo‘lsa}$$

$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ - bu markazi (1;1) nuqtada, radiusi $R = 1$ bo‘lgan aylanadan iborat. Ravshanki, O_1 markazdan uzoqlashgan nuqtalarda sath chizig‘i Z o‘sadi, markazga tomon sath chizig‘ini ko‘chirsak funksiya kamayadi. Shunday qilib, Z funksiyaning minimumi $O_1(1;1)$ nuqtada $Z_{\min} = 2$ $(1;1)$ nuqta Z funksiyaning statsionar nuqtasi ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Quyidagi funksiyalarni qavariqlikka tekshiring:

1) $y = \dfrac{2}{x}, \quad x > 0$

2) $Z = e^{2x_1 - x_2}$

3) $Z = 5 - x_1^2 - x_2^2$

4) $Z = -x_1 x_2 + 2x_1$

5) $Z=-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}, \quad x_1>0,\ x_2>0$

2. Qavariq programmalashtirish masalasini geometrik talqin yordamida yeching.

1) $\begin{cases} x_2 \le 4-x_1^2; \\ x_1+x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z=2-x_1^2-x_2^2 \to \max$

2) $\begin{cases} x_1+4x_2 \le 16 \\ 3x_1+x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z=(x_1-3)^2+2(x_2-2)^2 \to \min$

VIII BOB. FOIZLAR

8.1. Oddiiy, murakkab va uzluksiz foizlarda jamg‘arish

Faraz qilaylik, P pul mablag‘i i foiz stavkasi bilan T muddatga investitsiya qilingan bo‘lsin. Demak, investor berilgan muddat oxirida o‘zining P miqdoridagi mablag‘ini va asosiy mablag‘ning i foiz stavkasi bo‘yicha olingan foizlaridan keladigan foydani oladi. Oddiy foizlar ushbu formula yordamida hisoblanadi:

$$I = P \cdot i \cdot T \tag{8.1}$$

bunda I – oddiy foizlar, P – asosiy investitsiya mablag‘i, i – berilgan muddatdagi foiz stavkasi, T – foiz stavkasiga mos muddat.

Agar (8.1) formulada i yillik foiz stavkasini ifodalasa, T davr yillarda ko‘rsatilishi kerak.

1-misol. 300 ming so‘m olti oyga kreditga ushbu stavkada berilgan: a) oyiga 3%; b) yiliga 6%. Shu pulga nisbatan muddat oxirida oddiy foizlar topilsin.

Yechish. a) $I = 300 \cdot 0{,}03 = 9$ ming so‘m; b) $I = 300 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{1}{2} = 9$ ming so‘m. Agar P – asosiy mablag‘ (bank omonati, kredit va boshqalar), I – muddat oxirida bu mablag‘ga investitsiya qilingan foizlar bo‘lsa, u holda,

$$S = P + I \tag{8.2}$$

dastlabki P mablag‘ning jamg‘arilgan qiymati deb yuritiladi.

$$S = P(1 + iT) \tag{8.3}$$

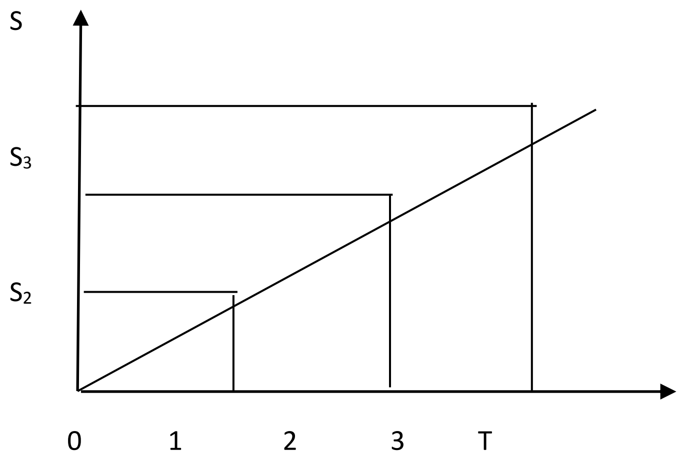
formula esa oddiy foiz formulasi deyiladi.

$$a(T) = 1 + i \cdot T \tag{8.4}$$

kattalik esa o‘sish koeffitsiyenti yoki ko‘paytuvchi deb nomlanadi. (8.3) va (8.4) dan

$$S = P \cdot a(T) \tag{8.5}$$

(8.3) yoki (8.5) formuladan ko‘rinib turibdiki, jamg‘arilgan mablag‘ S ning qiymati T davrga bog‘liq, ya’ni vaqtning funksiyasidir. Bu funksiya chiziqli funksiya bo‘lib, uning grafigi 8.1 – rasmda tasvirlangan.



8.1-rasm.

(8.1) – (8.3) formulalar oddiy foizlarning asosiy tenglamalari deb yuritiladi. Ular beshta P, S, I, i, T kattaliklar bilan bog‘langan. Birinchi uchta kattalikdan boshqa barcha uchta kattalikning berilishi boshqa kattaliklarni bir qiymatli aniqlaydi. Ularning har biri (8.1) – (8.3) tenglamalarni yechish bilan amalga oshiriladi.

2-misol. Ssuda uchun uch oyga berilgan 100 ming so‘mning foizi 12 ming so‘mni tashkil etsa, yillik foiz stavkasi qanday?

Yechish: $I = 12$ ming so‘m, $P = 100$ ming so‘m, $T = 3/12 = 1/4$, (8.1) tenglamadan

$$i = \frac{I}{P \cdot T} = \frac{12}{100 \cdot 1/4} = 0{,}48 \quad \text{yoki} \quad i = 48\%.$$

3-misol. Har bir yarim yilda bank yiliga 5% li omonat bo‘yicha 50 ming so‘m to‘laydi. Bankka qo‘yilgan pul miqdori qancha?

Yechish. $I = 50$ ming so‘m, $i = 0{,}05$, $T = 1/2$. (8.1) tenglamadan

$$P = \frac{I}{i \cdot T} = \frac{50}{0{,}05 \cdot 1/2} = 2000000 \text{ so‘m, ya’ni } P = 2 \text{ mln. so‘m.}$$

4-misol. Bankka qo‘yilgan 200 million so‘m pul uchun 20% dan to‘lansa, uning miqdori ikki marta ortishi uchun necha yil kerak bo‘ladi?

Yechish: $S = P(1+iT)$ formuladan

$$T = \frac{S-P}{P\cdot i} = \frac{400-200}{200\cdot 0{,}2} = 5 \text{ yil.}$$

Aniq va oddiy foizlar

Biz yuqorida ko‘rgan barcha misollarda investirlash muddati yillarda, oylarda va h.k. ifodalandi. Bu muddatlar birinchi va oxirgi kunlarning kalendardagi sanalari orqali berilishi mumkin. Bunday holda (8.1) oddiy foiz formulasidan foydalanish uchun muddat sifatida ssudalar kunining sonini yildagi kunlar soniga nisbatini olish lozim, ya’ni

$$yildagi\ muddat = \frac{ssudalar\ kunining\ soni}{yildagi\ kunlar\ soni} \quad \text{yoki} \quad T = \frac{D}{Y}$$

Bunga asoslangan holda hisoblashlarning turli variantlari mavjud.

Yildagi kunlar soni (Y) 360 ga teng deb olinsa, bunday holda oddiy foizlar, agar 365 deb olinsa, u holda aniq foizlar deb yuritiladi, ya’ni

$$T_{odat} = \frac{D}{360}, \qquad T_{aniq} = \frac{D}{365}, \qquad \frac{D}{360} > \frac{D}{365}, \qquad \text{demak,}$$

$T_{odat} > T_{aniq}$.

Bundan tashqari investirlash muddati uchun kunlar sonini aniqlashning yana ikkita usuli mavjud. Ko‘rsatilgan muddatda aniq kunlar sonini hisoblash keng tarqalgan bo‘lib, yildagi har bir kunning tartib nomeri berilgan (Ilova 1) jadval yordamida hisoblash mumkin. Kabisa yili uchun har bir kun nomeriga 29 fevraldan so‘ng 1 qo‘shiladi. d_1 va d_2 sanalarga mos yildagi kunlar nomerini $N(d_1)$ va $N(d_2)$ hamda ikkita sanalar orasidagi kunlar soni

$$D = N(d_2) - N(d_1) \text{ (oddiy yil uchun)}$$

$$D = N(d_2) - N(d_1) + 1$$ (kabisa yili uchun, agar 29 fevral sanalar orasiga tushsa) formulalar yordamida hisoblanadi.

5-misol. 13 fevral va 7 aprel orasidagi aniq kunlar soni topilsin (oddiy yil uchun).

Yechish: (Ilova.1) jadvaldan 13 fevralga 44-kun, 7 aprelga 97-mos keladi. U holda, bu sanalar orasidagi kunlar soni

$$97 – 44 = 53 \text{ kun.}$$

Bundan tashqari sanalar orasidagi kunlar sonining taqribiy qiymatini aniqlash usuli ham mavjud. Bunda har bir oy 30 kun deb hisoblanadi.

6-misol. 5 mart va 28 sentyabr orasidagi taqribiy kunlar soni topilsin.

Yechish: Darhaqiqat, bu sanalar orasida 6 oy bo‘lib (5 martdan 5 sentyabrgacha), yana 23 kun qolyapti. Ravshanki, berilgan sanalar orasidagi kunlar soni $(6\cdot 30)+23 = 203$ ga teng.

Demak, aniq va oddiy foizlarni hamda investirlash muddati uchun aniq va taqribiy kunlar sonini hisobga olib, oddiy foizlarni hisoblashning quyidagi to‘rtta usulini hosil qilamiz:

1. Aniq kunlar sonidagi oddiy foizlar.
2. Aniq kunlar sonidagi aniq foizlar.
3. Taqribiy kunlar sonidagi oddiy foizlar.
4. Taqribiy kunlar sonidagi aniq foizlar.

Birinchi usul bank faoliyatida eng ko‘p qo‘llaniladi, ikkinchi va uchinchi usullar undan kamroq qo‘llaniladi, to‘rtinchi usuldan deyarli foydalanilmaydi.

Joriy qiymat

Investitsiya qiymati P va foiz stavkasi i ni bilgan holda vaqtning ixtiyoriy momentida jamg‘arilgan S summaning qiymatini oddiy foiz bo‘yicha

$$S = P(1+i\cdot T)$$

formula yordamida hisoblash mumkin. Ayrim hollarda bunga teskari bo‘lgan masalani hal qilishga to‘g‘ri keladi. T muddatdan so‘ng S jamg‘armaning qiymatiga ko‘ra, i foiz stavkasi bo‘yicha P ni ushbu formuladan topamiz.

$$P = \frac{S}{1+i\cdot T} \tag{8.2}$$

P ning qiymati S summaning joriy qiymati deb yuritiladi. Joriy qiymatni hisoblash jarayoni berilgan foiz stavkasi bo‘yicha diskontirlash deyiladi:

$$v = \frac{1}{1+i\cdot T}, \tag{8.4}$$

bu tenglik T muddat uchun oddiy foiz stavkasi i bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi deyiladi. (8.2) va (8.4) dan

$$P = S\cdot v$$

formulani yozishimiz mumkin.

7-misol. Investor 115 ming so‘mni jamg‘arish uchun 15% li yillik oddiy foiz stavkasi bo‘yicha qanday miqdordagi pulni a) bir yilga; b) ikki yilga; v) to‘rt yilga qo‘yish kerak.

Yechish: $S=115$ ming so‘m, $T=1$ yil, $i=15\%$.

a) $P=115/1+0{,}15=115/1{,}15=100$ ming so‘m,

b) $P=115/1+0{,}15\cdot 2=115/1{,}3=88{,}46$ ming so‘m,

v) $P=115/1+0{,}15\cdot 4=115/1{,}6=71{,}875$ ming so‘m.

Joriy qiymat vaqtning boshlang‘ich momentida hisoblanganligi uchun, go‘yo u vaqtga bog‘liq emasdek tuyuladi.

$$P = \frac{S}{1+i\cdot T}$$

formuladan P ning T ga bog‘liq ekanligi ko‘rinib turibdi. Darhaqiqat, joriy qiymat vaqtga bog‘liq bo‘lgan S jamg‘arma, ya’ni $S=S(T)$ uchun hisoblanadi. Yuqoridagi formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$P(T) = \frac{S(T)}{1+i\cdot T}.$$

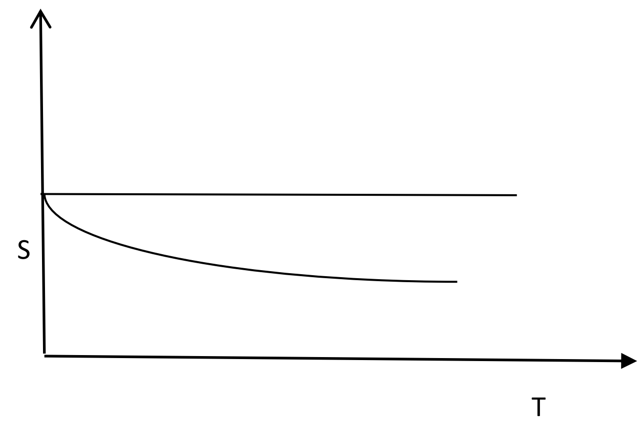
Agar $S(T)=1$, ya’ni vaqtning ixtiyoriy qiymatida birlik jamg‘armadan iborat bo‘lsa, u holda joriy qiymat diskont ko‘paytuvchi bilan bir xil bo‘ladi.

$$v(T) = \frac{1}{1+i\cdot T} = P(T)$$

Vaqtning ixtiyoriy momentidagi joriy qiymat va jamg‘arma orasidagi bog‘lanishni quyidagicha yozish mumkin:

$$P(T) = S(T) \cdot \nu(T)$$

S jamg‘armaning fiksirlangan qiymatida joriy qiymat T ning o‘sishi bilan kamayadi. Haqiqatan, investitsiya muddati ortsa, zarur bo‘lgan jamg‘armani yig‘ish uchun mablag‘ (kapital) kamayadi. $P = P(T)$ ning grafigi 8.2-rasmda ko‘rsatilgan.



8.2-rasm

Joriy qiymat (joriy narx) moliyaviy muammolarni tahlil qilishda muhim o‘rin egallaydi. Bunday muammolar, masalan, naqd pul bilan to‘lash kerakmi yoki kredit olish kerakmi? – degan muqobillar orasida vujudga keladi.

8-misol. Investor 5 mln. pul birligidagi naqd pulga yoki bir yildan so‘ng 5 mln. 400 ming p.b.ga kvartira sotib olishi mumkin. Agar investor hisobida bankda 5 mln. p.b.dan kam bo‘lmagan pul bo‘lsa va bank yiliga 7% to‘lasa, u holda qaysi muqobil afzal bo‘ladi?

Yechish: 5 mln. so‘m va 5 mln. 400 ming so‘mlar vaqtning turli momentlariga bog‘liq bo‘lganligi uchun ularni biz taqqoslay olmaymiz. Ammo yil oxirida 5 mln. 400 ming p.b. so‘mni olish uchun yil boshida bankka

$P = 5400000/1{,}07 = 5046730$ p.b. qo‘yish kerak.

Shunday qilib, joriy qiymat naqd to‘lanadigan qiymatdan katta, ya’ni $5046730 > 5000000$.

Demak, bunday holda naqd pul to‘lab kvartirani olish afzal ekan. Bularni taqqoslash foiz stavkasiga bog‘liq. Agar bank 7% dan emas, balki 9% dan to‘laganda edi, $P = 5400000/1{,}09 = 4954130$p.b bo‘lardi. Bu holda kvartirani bir yildan so‘ng olish kerak bo‘ladi.

Agar berilgan muddat ichida operatsiyalar oddiy foiz bo‘yicha bir necha marta o‘zgaruvchi stavkalar bilan amalga oshirilsa, u holda jamg‘arilgan umumiy mablag‘

$$S = P(1+T_1 i_1)\cdot(1+T_2 i_2)\cdot\ldots\cdot(1+T_i i_i)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi, bu yerda i_i – “stavkalar”, T_i – ssuda muddatlari $(T_i = \frac{D_i}{Y};\ D_i -$ ssuda kunlarining soni, $Y = 360$ yoki $Y = 365)$.

Agar ustama foizning muddatlari va vaqt bo‘yicha foiz stavkalar o‘zgarmasa, u holda $S = P(1+Ti)^m$, bu yerda $m -$ pul tushimining takrorlanishlar soni.

Diskont va hisob stavkasi

Turli moliyaviy operaysiyalarda qimmatbaho qog‘oz kursini tovar narxidan chiqarib tashlashdan hosil bo‘lgan pul miqdori diskont deyiladi.

Aytaylik, 100 ming so‘mlik vekselni 5 oy muddatga olgan shaxs, pul zarurligidan vekselni sotib olgandan 2 oy o‘tgach bankka qaytarib sotdi. Endi bank bu shaxsga 100 ming so‘m emas, to‘lov muddatini hisobga olgan holda, masalan, 94 ming so‘m to‘laydi. Bunday holda diskont qiymati 100 – 94 = 6 ming so‘m yoki veksel narxining 6%ini tashkil etadi. Ya’ni bankning hisob stavkasi 3 oy uchun 6%ni tashkil etadi deb aytamiz.

Umumiy holda berilgan muddat uchun hisob stavkasi deb, vekselni to‘liq narxi va uni sotib olish narxi ayirmasining, ya’ni diskontni uning to‘la narxiga nisbatiga aytiladi.

$$d = \frac{D}{S} = \frac{S-P}{S}, \tag{8.5}$$

bunda S – to‘lov uchun berilgan qarz miqdori; P – sotib olish narxi; D – diskont kattaligi.

Ma’lumki, diskont va hisob stavkasi hamda sotib olish narxining qiymatlari berilgan qarz muddatining uzunligiga bog‘liq bo‘lganligi uchun (8.5) formulani qat’iy holda

$$d_1 = \frac{D_1}{S} = \frac{S-P_1}{S} \tag{8.6}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu formuladan

$$D_1 = S \cdot d_1, \tag{8.7}$$

$$P_1 = S \cdot (1 - d_1) \tag{8.8}$$

formulalarni hosil qilamiz.

Banklar odatda, ya’ni ma’lum fiksirlangan muddatda, hisob stavkasini qoidaga ko‘ra bir yilga ko‘rsatishadi. Bunday hisob stavkasi yillik hisob stavkasi deyiladi.

Ma’lum muddat uchun hisob stavkasi va yillik stavka orasidagi bog‘lanish ushbu formuladan topiladi.

$$d_t = d \cdot t \tag{8.9}$$

bunda d – yillik hisob stavkasi; t – to‘lovgacha qolgan yillardagi muddat. Shunday qilib, yuqoridagi formulalar quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$D_t = S \cdot d \cdot t \tag{8.10}$$

$$P_t = S \cdot (1 - d \cdot t) \tag{8.11}$$

(8.9 – 8.11) formulalar yordamida aniqlanadigan hisob stavkasi oddiy va bank diskonti deb yuritiladi. $V_t = 1 - d \cdot t$ kattalik t muddat uchun d hisob stavkasi bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi deyiladi.

9-misol. Agar bankning hisob stavkasi to‘lovgacha qolgan 4 oy muddat uchun veksel narxining 8% ini tashkil etsa, yillik hisob stavkasi va to‘lovgacha bo‘lgan oy uchun vekselning narxini toping. Vekselning belgilangan muddat uchun narxi 100 ming so‘m.

Yechish: (8.9) formuladan

$d = \frac{d_1}{t} = 8\big/{1/3} = 24\%,$ bu yerda $t = 4$ oy yoki $t = 1/3.$

Vekselning narxi $P = S \cdot (1 - d \cdot t) = 100 \cdot (1 - 24/100 \cdot 1/3) = 92$ ming so‘m.

10-misol. Veksel 2013-yil 10-yanvarda chiqarilgan bo‘lib, to‘lov muddati 2013-yil 10-oktyabrgacha. Veksel bo‘yicha yillik kirim 12%. Agar veksel 2013-yil 10-mayda 10% hisob stavkasi bo‘yicha hisobga olingan bo‘lsa, u holda vekselni sotib olish narxi qancha? To‘lovgacha bo‘lgan muddat uchun vekselning hisob narxi 100 ming so‘m.

Yechish: 2013-yil 10-yanvardan 10-oktyabrgacha aniq kunlar soni (1-ilov) jadval bo‘yicha $283 - 10 = 273$ kun. To‘lov muddatining yillardagi uzunligi $T = \frac{273}{360} = 0{,}75$ yil. U holda vekselning umumiy narxi

$S = P \cdot (1 + i \cdot T) = 100 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 0{,}75) = 109$ ming so‘m.

Agar veksel 10 maydan hisobga olinsa, u holda to‘lovgacha bo‘lgan muddat $283 – 130 = 153$ kun bo‘ladi yoki $t = \frac{153}{360} = 0{,}42.$

Bunday holda $d = 10\%$ hisob stavkasi bo‘yicha vekselning yillik hisob narxi $P = S \cdot (1 - d \cdot t) = 109 \cdot (1 - 0{,}1 \cdot 0{,}42) = 104{,}422$ ming so‘m.

Yillik murakkab foizlar

Aytaylik, omonatga qo‘yilgan pul uchun bank yiliga i foiz stavkasi bo‘yicha to‘laydigan va bu stavka ikki yil davom etadigan bo‘lsin. Berilgan $t_0 = 0$ vaqtda omonat egasi boshlang‘ich $S(0)$ omonat bo‘yicha hisob ochishi va uni to‘ldirishi yoki xohlagan paytda hisobni yopishi mumkin.

Agar omonat egasi bir yildan so‘ng hisobni yopgan bo‘lsa, u holda quyidagi miqdorda pul oladi

$$S(1) = S(0) \cdot (1 + i) \qquad (8.1.1)$$

Faraz qilaylik, omonat egasi bu pulni yana bir yilga qo‘ygan bo‘lsin. U holda ikkinchi yil oxirida

$$S(2) = S(1) \cdot (1 + i) = S(0) \cdot (1 + i)^2 = S(0) \cdot (1 + 2i + i^2) \qquad (8.1.2)$$

miqdorda pul oladi.

Agar omonat egasi o‘z omonatini oddiy foizga qo‘yganda edi, u holda omonatchi $S(0)\cdot i^2$ ga kam bo‘lgan pulni, ya’ni $S(0)\cdot(1+2i)$ miqdordagi pulni olgan bo‘lardi. Bu qo‘shimcha $[S(0)\cdot i]i$ ga o‘sishni, ikkinchi yil oxirida birinchi yil uchun foizlar $S(0)\cdot i$ miqdorga qo‘shilgan foydaga nisbatan qo‘shib berishni, ya’ni ikkinchi yilga reinvestrlashni ifodalaydi. Qo‘shilgan foydaning boshlang‘ich pul miqdori bilan birlashmasini foizlarni kapitallashtirish deyiladi.

Yiliga bir marta foizlar kapitallashtiriladigan hol uchun o‘sish qiymatini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

Faraz qilaylik, $S(0)$ boshlang‘ich pul miqdori i yillik foiz stavkasi bo‘yicha n yilga qo‘yilgan bo‘lib, bu davrda hech qanday pul qo‘shilmagan va olinmagan bo‘lsin. Bunday holda birinchi yil oxirida foizlar $S(0)\cdot i$ ga, o‘sish miqdori esa

$$S(1)=S(0)+S(0)\cdot i=S(0)(1+i)$$

ga teng bo‘ladi. Ikkinchi yil oxirida o‘sish miqdori

$$S(2)=S(0)(1+i)^2$$

va n - yil oxirida o‘sgan (ortgan) umumiy pul (jamg‘arma) miqdori

$$S(n)=S(n-1)+S(n-1)i=S(n-1)(1+i)$$

ga teng bo‘ladi. $S(n-1)$ ni $S(n-2)$, $S(n-2)$ni $S(n-3)$ va h.k orqali ifodalab,

$$S(n)=S(0)\cdot(1+i)^n,\ n=1,2,... \qquad (8.1.3)$$

formulani, ya’ni i yillik stavkaga ega bo‘lgan murakkab foiz bo‘yicha o‘sish qiymatini yozamiz:

$$\frac{S(n)}{S(0)}=(1+i)^n. \qquad (8.1.4)$$

Bu nisbat o‘sish koeffitsiyenti deb yuritiladi. Uni $A(0,n)$ bilan belgilaymiz:

$$A(0,n)=\frac{S(n)}{S(0)}=(1+i)^n$$

(8.1.3) formula faqat n ning butun qiymatlarida o‘rinli ekanligini ko‘rsatgan edik, endi bu formulani n ning barcha nomanfiy qiymatlarida ham o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz, ya’ni (8.1.3) formulani umumlashtiramiz.

Buning uchun investitsiya muddatini va vaqtni yillarda o‘lchab, t muddat uchun dastlabki $S(t_0)$ jamg‘armaning o‘sish qiymatini yozamiz:

$$S(t) = S(t_0)\cdot(1+i)^{t-t_0}, \quad t \ge t_0, \tag{8.1.5}$$

(t_0, t) intervaldagi o‘sish koeffitsiyenti

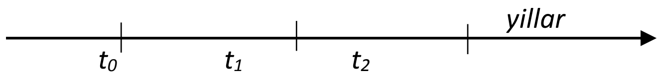
$$A(t_0,t) = (1+i)^{t-t_0}, \quad t \ge t_0 . \tag{8.1.6}$$

Agar $t = t_0$ bo‘lsa, barcha i larda $A(t_0,t) = 1$ bo‘ladi. Agar $t_0 = 0$ va $t = n$ bo‘lsa, bu formulalar mos ravishda (8.1.3) va (8.1.4) formulalar bilan bir xil bo‘ladi.

Teorema (bozorning barqarorlik prinsipi).

Agar soliq va boshqa xarajatlar hisobga olinmasa, u holda qandaydir oraliqda o‘sish koeffitsiyenti shu intervalning tashkil etuvchilaridan iborat bo‘lgan qism intervallaridagi o‘sish koeffisientlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Isbot. Soddalik uchun (t_0,t_2) intervalni (t_0,t_1) va (t_1,t_2) qism intervallarga ajratamiz.



$$A(t_0,t_2) = \frac{S(t_2)}{S(t_0)} \Leftrightarrow S(t_2) = S(t_0)\cdot A(t_0,t_2) \tag{8.1.7}$$

Ikkinchi tomondan

$$S(t_1) = S(t_0)\cdot A(t_0,t_1),$$

$$S(t_2) = S(t_1)\cdot A(t_1,t_2) = S(t_0)\cdot A(t_0,t_1)\cdot A(t_1,t_2) \tag{8.1.8}$$

(8.1.7) va (2.1.8) lardan

$$A(t_0,t_2) = A(t_0,t_1)\cdot A(t_1,t_2). \tag{8.1.9}$$

Yuqoridagi teorema moliyaviy operatsiyalarda taqriban o‘rinli bo‘ladi, chunki bunda soliqlar, shartnomalarni qayta ko‘rib chiqish va boshqa faktorlar hisobga olinmaydi.

Endi bir yil mobaynida ustama haq yozilishining bir nechta davrlarini ko‘rib chiqaylik. Ustama haq yozilishining bir yildan kichik bo‘lgan davrini qaraymiz. Aytaylik, bir yil mobaynida *m* marta ustama haq yoziladigan bo‘lsin. Ko‘p uchraydigan ustama haq yozilish davrlari va unga mos *m* ning qiymatlari ushbu jadvalda berilgan:

Ustama haq yozilish davri	1 yil	1 hafta	1 oy	2 oy	3 oy	4 oy	6 oy	12 oy
m	365	52	12	6	4	3	2	1

Faraz qilaylik, g_m - bir yilda *m* marta ustama haq yozilishdagi murakkab foiz stavkasi bo‘lsin. U holda *n* yil uchun ustama haq yozilish davrlarining soni $m \cdot n$ bo‘ladi. (8.1.4) formulaga asosan

$$A(0,n) = (1+g_m)^{mn}, \qquad n = 1,2,... \tag{8.1.10}$$

Buni quyidagicha umumlashtirish mumkin:

$$A(t_0, t_0+T) = (1+g_m)^{mT}, \qquad T \geq 0. \tag{8.1.11}$$

Kelajakdagi pul miqdorining boshlang‘ich narxini hisoblash operatsiyasi matematik diskontirlash deyiladi.

$$S(t_0) = \frac{S(t_0+T)}{1+i(t_0)T},$$

bunda $S(t_0)$ - t_0 vaqtda investitsiya qilinadigan boshlang‘ich pul miqdori; $S(t_0+T)$ - T vaqt o‘tgandan keyingi pul miqdori; $i(t_0)$ - t_0 vaqtdagi foiz stavkasi; $\frac{1}{1+i(t_0)T}$ - diskont ko‘paytuvchisi.

1-misol. Investor yarim yilda 200 ming so‘m pul olishi uchun yiliga 50% to‘laydigan korxonaga qancha pul o‘tkazishi lozim?

Yechish: $S(0) = \frac{200000}{1+0,5\cdot 0,5} = 160000$ (so‘m).

8.2. Foiz stavkasi va hisob stavkasining ekvivalentligi

Diskont va diskont stavkasi ham, foiz va foiz stavkasiga o‘xshagan kredit operatsiyalarining parametrlari kabi bo‘ladi, lekin hisob sxemalarining yo‘nalishi bo‘yicha farq qiladi. Foizni va foiz stavkasini hisoblashda boshlang‘ich narx (joriy) tayanch kattalik bo‘lib, diskont va hisob stavkasini hisoblashda esa oxirgi jamg‘arma miqdori tayanch kattalik bo‘lib xizmat qiladi. Endi yuqorida aytilgan gaplar uchun quyidagi tengliklarni yozamiz. $T = t_2 - t_1$ davr uchun foizlar $I_T = S - P$ ni tashkil etadi. Bu davr uchun foiz stavkasi $i_T = \frac{I_T}{P} = \frac{S-P}{P}$, ikkinchi tomondan shu davr uchun hisob stavkasi esa $d_T = \frac{D_T}{S} = \frac{S-P}{S}$. Shunday qilib, ixtiyoriy t davr uchun foiz va hisob stavkasi ikkita boshlang‘ich (P) va oxirgi (S) jamg‘armalarni o‘zaro bog‘laydi, ya’ni

$$S = P \cdot (1 + it) \tag{8.2.1}$$

$$P = S \cdot (1 - dt) \tag{8.2.1}$$

Bu munosabatlardan

$$(1 + it) \cdot (1 - dt) = 1 \tag{8.2.3}$$

yoki

$$1 - dt = \frac{1}{1 + it}$$

kelib chiqadi, bundan i_t va d_t larni bog‘lovchi tengliklarni olamiz:

$$dt = \frac{it}{1 + it} \tag{8.2.4}$$

va

$$it = \frac{dt}{1 - dt} \tag{8.2.5}$$

Agar it va dt lar i va d yillik stavkalarga mos keluvchi oddiy foiz va hisob stavkalari, ya’ni $t = 1$ va $d_t = d \cdot t$ bo‘lsa, u holda bir yil uchun

$$d = \frac{i}{1+i}, \qquad (8.2.6)$$

$$i = \frac{d}{1-d} \qquad (8.2.7)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Bu munosabatlar diskont haqida yana bir talqin berish imkonini beradi. Aytaylik, birlik jamg‘arma i foiz stavkasi bo‘yicha investitsiya qilinayotgan bo‘lsin. U holda yil oxirida bu jamg‘arma foizlari i ni tashkil etadi, bu kattalikning joriy qiymati esa

$$\frac{i}{1+i} = d$$

ga teng bo‘ladi. (8.2.7) formula ham xuddi shuni beradi: $(1-d)\cdot i = d$. Boshqacha aytganda diskontga ham foiz kabi qarash mumkin, lekin bunda yil oxirida emas, balki yil boshida to‘lanadi, shuning uchun ba’zan diskont stavkasini oldindan beriladigan foiz stavkasi deb yuritiladi.

Foiz stavkasi va hisob stavkalari kredit operatsiyalarining turli ikki tomonini ifoda etadi. (8.2.4–8.2.5) formulalar bu kattaliklardan ixtiyoriy bittasini bitta davr uchun topish imkonini beradi. Ayrim hollarda bu formulalarni hisob va foiz stavkalarining ekvivalentlik shartlari deb yuritiladi.

$P = S\cdot(1 - d\cdot t)$ formula hisob stavkasidan kelib chiqib joriy qiymatni hisoblashning yana boshqa usulini beradi.

Agar i – t muddatga mos keluvchi foiz stavkasi bo‘lsa, u holda $P = \frac{S}{1+i\cdot t}$ formula xuddi shu natijani beradi, ya’ni i va d ning ekvivalentligi $\frac{i}{1+i\cdot t} = 1 - d\cdot t$ tenglikning bajarilishini bildiradi.

11-misol. 100 ming so‘mning bir yildan so‘ng olinadigan a) foiz stavkasi 8%; b) hisob stavkasi 8% bo‘lgan holdagi joriy qiymati topilsin.

Yechish: a) 8% li foiz stavkasi uchun $S = 100$ ming so‘m, $i = 0{,}08$, $t = 1$ yil. $P = \frac{S}{1+i\cdot t} = \frac{100}{1+0{,}08} = 92{,}59$ ming so‘m.

b) 8% li hisob stavkasi uchun $S=100$ ming so‘m, $d=0{,}08$, $t=1$ yil. $P=S\cdot(1-d\cdot t)=100(1-0{,}08)=92$ ming so‘m.

12-misol. Faraz qilaylik, oddiy yillik foiz stavkasi 12% bo‘lsin, a) bir oy;

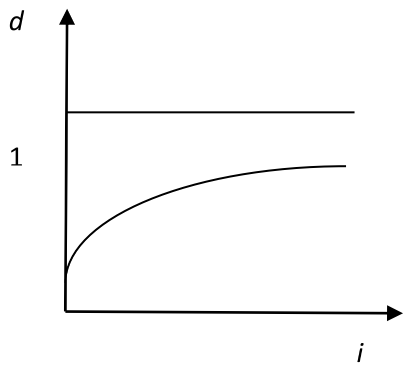
b) yarim yil muddatlar uchun ekvivalent yillik hisob stavkalari topilsin.

Yechish: a) bu holda $i=0{,}12$, $t=1/12$, $d\cdot t=\dfrac{i\cdot t}{1+i\cdot t}$ tenglamadan

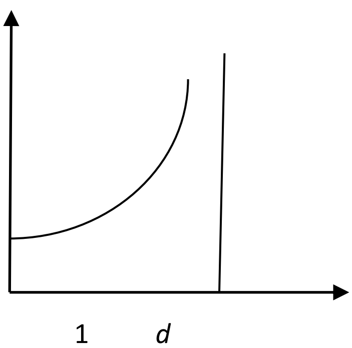
$$d=\frac{i}{1+i\cdot t}=\frac{0{,}12}{1+0{,}12\cdot 1/12}=\frac{0{,}12}{1+0{,}01}=0{,}118.$$

b)bu yerda $i=0{,}12$, $t=6/12=0{,}5$, $d=\dfrac{i}{1+i\cdot t}=\dfrac{0{,}12}{1+0{,}12\cdot 0{,}5}=\dfrac{0{,}12}{1{,}06}=0{,}113.$

Bir yillik davr uchun $d=d(i)$ va $i=i(d)$ grafiklarni keltiramiz.



8.3-rasm.



8.4-rasm.

Endi oddiy foizda o‘zgaruvchi stavkalarni ko‘rib chiqamiz. Faraz qilaylik, inflyatsiya oddiy foiz stavkasini tez-tez o‘zgartirib turadigan bo‘lsin. $(t_\circ;\, t_\circ+T)$ davr uchun shartnomada vaqtning $t_1<t_2\ldots<t_{m-2}<t_{m-1}$ momentlarida yillik stavkalar $m-1$ marta o‘zgaradigan bo‘lsin. $t_\circ+T=t_m$ deb belgilab shartnoma davri $(t_\circ;\, t_m)$ ni o‘zgarmas yillik stavkalarda m ta intervallarga shunday bo‘lamizki, $(t_\circ;\, t_1)$ intervalda foiz stavkasi $j_\circ$, $(t_1;t_2)$ ga $j_1, \ldots, (t_{m-1};t_m)$ intervalda foiz stavkasi j_{m-1} ga teng bo‘lsin.

Quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

Teorema: Agar boshlang‘ich jamg‘arma $S(t_\circ)$ yuqorida ko‘rsatilganidek, o‘zgaruvchi yillik foiz stavkalarda oddiy foizga qo‘yilgan bo‘lib, oraliq operatsiyalar mavjud bo‘lmasa, u holda har bir $(t_\circ;t_m)$ intervaldagi o‘sish koeffitsiyenti

$$A(t_\circ;t_m)=\frac{S(t_m)}{S(t_\circ)}=1+\sum_{S=0}^{m-1}(t_{S+1}-t_S)\,j_S$$

dan iborat bo‘ladi.

Isbot: (8.2.2) formulaga asosan

$$S(t_m)=S(t_\circ)+I(t_\circ,t_m,S(t_\circ)), \qquad (*)$$

bu yerda $I(t_\circ,t_m,S(t_\circ))$ boshlang‘ich jamg‘arma $P=S(t_\circ)$ ning $(t_\circ;t_m)$ intervaldagi orttirmasi, $I(t_\circ;t_m)=\dfrac{I(t_\circ,\,t_m,\,S(t_\circ))}{S(t_\circ)}$ esa nisbiy orttirmasi.

Biz bilamizki, boshlang‘ich jamg‘arma $S(t_\circ)$ ni har bir $(t_S;t_{S+1})$ intervaldagi oddiy foiz bo‘yicha o‘sishi boshqa intervaldagi foiz o‘sishiga bog‘liq bo‘lmaydi. $(t_S;t_{S+1})$ intervaldagi absolyut orttirmasini $I(t_\circ;t_m,\,S(t_\circ))$, nisbiy orttirmasini esa $i(t_S;t_{S+1})=\dfrac{I(t_S,\,t_{S+1},\,S(t_\circ))}{S(t_\circ)}$ bilan belgilaymiz. U holda har bir $(t_\circ;t_m)$ intervaldagi absolyut orttirma har bir qism intervallardagi absolyut orttirmalar yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$I(t_\circ,t_m,S(t_\circ))=\sum_{S=0}^{m-1}I(t_S,\,t_{S+1},S(t_\circ)), \qquad (a)$$

bu formulaning ikkala qismini $S(t_\circ)$ ga bo‘lib, $i(t_\circ,t_m)=\sum\limits_{S=0}^{m-1}i(t_S,t_{S+1})$ ni hosil qilamiz. Bundan ko‘rinadiki, $(t_\circ;t_m)$ intervaldagi nisbiy orttirma har bir qism intervallardagi nisbiy orttirmalar yig‘indisiga teng bo‘ladi (oddiy foizlar bo‘yicha)

$$I(t;S(0))=S(0)\cdot i\cdot t$$

formula asosan har qanday $S=0,1,2,...,m-1$ uchun

$$i(t_S,t_{S+1})=(t_{S+1}-t_S)\cdot j_S. \qquad (b)$$

Bundan (a) formulaga ko‘ra,

$$i(t_0, t_m) = \sum_{S=0}^{m-1}(t_{S+1} - t_S)\cdot j_S, \qquad \text{(v)}$$

(b) formula geometrik nuqtai nazardan, asoslari (t_S, t_{S+1}) va balandliklari j_S bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzini ifodalaydi (8.5-rasm). Demak,

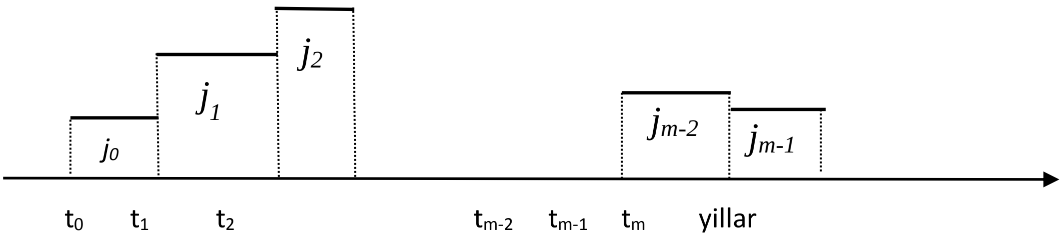
$$I(t_\circ, t_m, S(t_\circ)) = S(t_\circ)\sum_{S=0}^{m-1}(t_{S+1} - t_S)\cdot j_S.$$

Bu formulani (*) ga qo‘yib,

$$S(t_m) = S(t_\circ) + S(t_\circ)\sum_{S=0}^{m-1}(t_{S+1} - t_S)\cdot j_S$$

yoki $A(t_\circ, t_m) = \dfrac{S(t_m)}{S(t_\circ)} = 1 + \sum\limits_{S=0}^{m-1}(t_{S+1} - t_S)\cdot j_S$ ni hosil qilamiz.

Teorema isbot bo‘ldi.



8.5 – rasm.

13-misol. Birinchi yili 60%, keyingi har bir yarim yilda 10% dan ortib boradigan shartnoma asosida oddiy foiz bo‘yicha ko‘payadigan sxema asosida 2,5 yil uchun o‘sish koeffitsiyenti topilsin.

Yechish: bu yerda dastlabki qism interval uzunligi 1 yildan, birinchi, ikkinchi, uchinchi qism intervallar uzunligi yarim yillardan iborat. Shartnomaga ko‘ra,

$$j_\circ = 0{,}60, \quad j_1 = 0{,}70, \quad j_2 = 0{,}80, \quad j_3 = 0{,}90.$$

Shuning uchun teoremaga asosan,

$$A(2{,}5) = 1 + \sum_{S=0}^{3}(t_{S+1} - t_S)\cdot j_S =$$

$$= 1 + 1\cdot 0{,}60 + 0{,}5\cdot 0{,}70 + 0{,}5\cdot 0{,}80 + 0{,}5\cdot 0{,}90 = 2{,}80.$$

Demak, vekselni belgilangan muddatdan oldin sotishda uning narxini belgilash uchun quyidagi teoremani isbotlash zarur.

Teorema. Vaqt uzunligi bir yilga teng bo‘lgan $(0,\ 1)$ intervalni qaraymiz va yillik hisob stavkasi d, bir yilning qismlaridagi vaqtni t, joriy (dastlabki) qiymat $P = S(0)$ ning orttirilgan (o‘sgan) qiymatini $S = S(1)$ bilan belgilaymiz. U holda $S(t)$ ning $t<1$ bo‘lgandagi $S(1)$ va d bilan ifodalangan qiymati

$$S(t) = S(1)\cdot[1-(1-t)d], \qquad 0 \le t \le 1 \qquad\qquad (**)$$

formuladan iborat bo‘ladi.

Isbot. $S(t)$ ning $S(0)$ va i orqali ifodalangan (8.2.3) formulasiga ko‘ra,

$$S(t) \ = \ S(0)\cdot(1+i\cdot t)$$

tenglikni yozib, bu tenglikka

$S(0) = \dfrac{S(1)}{1+i}, \qquad \dfrac{1}{1+i} = 1-d, \qquad \dfrac{i}{1+i} = d$ ifodalarni qo‘yib,

$$S(t) \ = \ \frac{S(1)}{1+i}(1+t\cdot i) \ = \ S(1)\cdot(1/1+i \ + \ t\cdot i/1+i \ = S(1)\cdot(1-d+t\cdot d) \ =$$
$$= S(1)[1-(1-t)d]$$

ni hosil qilamiz. Teorema isbot bo‘ldi.

Shunday qilib, agar t ga bog‘liq holda muddat belgilanishidan shartnomaga qadar vaqt oralig‘ida $S(0)$ ni $I(t) = \ S(0)\cdot t\cdot i$ miqdorga ortishi natijasida hosil qilingan jamg‘arma $S(t)$ bo‘lsa, u holda $S(1)$ dan $D(1-t) = S(1)\cdot(1-t)d$ diskontni ushlab qolish natijasida $S(t)$ hosil qilinadi.

Ushbu vekselni qaraylik:

2000 doll. 1- sentyabr 2014 -yil. London.. 60 kundan so‘ng ko‘rsatilgan sanada Janob A. ning taklifiga binoan 2000 doll. ni 11% yillik foiz stavkasi bo‘yicha to‘lashni bo‘ynimga olaman. Imzo Janob B.

Vekselning nominal (dastlabki) qiymati 2000 doll. Real qiymati esa $2000\cdot(1+0{,}11\cdot 60/365)=2036{,}16$ dollar. To‘lash muddati 2014-yil 31-oktyabrda tugaydigan taqdirda ham uni diskont bilan muddatidan oldin sotish mumkin.

Aytaylik, Janob A. vekselni bankka 2014-yil 2-oktyabrda yillik hisob stavkasi 9,5% bo‘lgan diskont bilan sotishni rejalashtirdi. Bank qanday narxda sotib olishni va Janob A. ning hamda bankning bu operatsiyadan ko‘rgan foydasini hisoblaylik. Bunday holda vekselni sotishgacha 29 kun qolgan bo‘ladi.

Demak, $2036{,}16\cdot(1-29/365\cdot 0{,}095)=2020{,}79$ doll. Shuning uchun Janob A. va bank uchun foyda normasi mos ravishda quyidagi ko‘rinishlarda bo‘ladi:

$$\frac{2020{,}79-2000}{2000}\cdot\frac{365}{31}\cdot 100=12{,}24\%\,,$$
$$\frac{2036{,}16-2020{,}79}{2020{,}79}\cdot\frac{365}{29}\cdot 100=9{,}57\%.$$

$[1-(1-t)d]$ kattalik diskont koeffitsiyenti deyiladi. Bu ifoda manfiy bo‘laolmaydi. Shuning uchun

$$d\le\frac{1}{1-t},\qquad\qquad 0\le t<1$$

munosabat bajariladi. Bu munosabat shuni ko‘rsatadiki, vekselni hisobga olishda uni sotish muddatiga uzoq vaqt qolgan holda katta d diskont bilan to‘lash ayrim hollarda vekselni 0 yoki manfiy (zarar ko‘rish) narxda sotishga olib kelishi mumkin. Masalan, $d=200\%$ va $t=0{,}5$ bo‘lsa, vekselni hisobga olishda hech narsa bermaydi.

8.3. O‘zgaruvchi foizlarda jamg‘arish

2-misol. Boshlang‘ich omonat $S(0)=250$ ming so‘m pul 4 yil muddatga 100% stavka bo‘yicha murakkab foizga qo‘yilgan.

Jamg‘arilgan oxirgi pul miqdorining yillar bo‘yicha qanday o‘zgarishi ushbu jadvalda keltirilgan:

t	0	1	2	3	4
$(1+i)^t$	1	2	4	8	16
$S(t)=S(0)\cdot 2^t$, so‘m	$250\cdot 10^3$	$5\cdot 10^5$	10^6	$2\cdot 10^6$	$4\cdot 10^6$

Katta inflyatsiya davrlarida omonatchi bilan kelishgan holda bank o‘zining murakkab foiz bo‘yicha stavkalarini tez-tez o‘zgartirib turadi. Bunday holdagi o‘zgarib turuvchi stavkalarni murakkab foizning qalqib turuvchi stavkalari deb yuritiladi. Bu holda qo‘shilgan umumiy pul miqdorini aniq hisoblab bo‘lmaydi. Ba’zi hollarda ustama haq yozilishining biridan ikkinchisiga o‘tishi shartnomada qarab chiqiladi (oldindan foiz stavkalarini belgilagan holda). Agar kelishilgan holdagi foiz stavkalari $j_1, j_2, ..., j_k$ va shu stavkalar bo‘yicha ustama haq yozilish davrlari mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ bo‘lsa, u holda butun davr mobaynidagi jamg‘arma koeffitsiyenti

$$(1+j_1)^{n_1}\cdot(1+j_2)^{n_2}\cdot...\cdot(1+j_k)^{n_k} \qquad (8.1.12)$$

formuladan topiladi.

Murakkab o‘zgariuvchi foizda jamg‘arish.

$$S=P\cdot(1+j_1)^{n_1}\cdot(1+j_2)^{n_2}\cdot...\cdot(1+j_k)^{n_k}$$

3-misol. Birinchi yil kvartalda ssuda bo‘yicha foiz stavkasi 30% va plyus 2% marjinal xarajat (komission xarajatlar uchun to‘lov) va ikkinchi yilning birinchi yarim yilida 40% va plyus marjinal xarajat 3%ni tashkil etsa, u holda jamg‘arma koeffitsiyenti quyidagiga teng bo‘ladi:

$$1{,}32^4\cdot 1{,}45^2=3{,}036\cdot 2{,}045=6{,}208.$$

Oddiy o‘zagruvchi foizda jamg‘arish.

$$S=P\cdot(1+i_1n_1+i_2n_2+\ldots+i_{1k}n_k)$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. 500 ming so‘m miqdordagi depozit bankka 3 yil muddatga qo‘yilgan. Agar yillik foiz stavkasi 80% bo‘lsa, oddiy foiz bo‘yicha jamg‘arilgan pul miqdorini toping.

2. Investor 1 mln. so‘mni jamg‘arish uchun 15% li yillik oddiy foiz stavkasi bo‘yicha qanday miqdordagi pulni 10 yilga qo‘yishi kerak.

3. 250 ming so‘mning bir yildan so‘ng olinadigan hisob stavkasi 10% bo‘lgan holdagi joriy qiymatini toping.

4. Omonatchi 500 ming so‘mni 1 mln. so‘m qilish maqsadida bankka 120% li oddiy foiz stavkasi bo‘yicha qo‘ydi. Bu pulni olish uchun qancha kun kerak bo‘ladi?

5. Vekselning nominal narxi 500 ming so‘m bo‘lib, muddat tugashiga 90 kun qolganda 16% hisob stavkasi bo‘yicha hisobga olindi. Vekselning diskontirlangan qiymati va diskont qiymatini toping?

6. Tijorat banki tomonidan berilgan veksel bo‘yicha veksel egasi bir yildan so‘ng 220 ming so‘m olishi ma’lum bo‘lsa, vekselni sotib olishda bankka qancha pul berilgan. Vekselning daromadliligi 120%.

7. Firma bankdan 8 mln. so‘m ssudani yarim yilga olganligi ma’lum bo‘lib, qarz miqdori 10 mln. so‘mni tashkil etgan bo‘lsa, foiz stavkasi qanday bo‘lgan?

8. Agar bankning hisob stavkasi to‘lovgacha qolgan 4 oy muddat uchun veksel narxining 10%ini tashkil etsa, yillik hisob stavkasi va to‘lovgacha bo‘lgan oy uchun vekselning narxini toping. Vekselning belgilangan muddat uchun narxi 120 ming so‘m.

9. Firma 10 mln. so‘m miqdorda qarz olishni rejalashtirmoqda. Bankning yillik foiz stavkasi 200%. Firma qaytarishi kerak bo‘lgan pul miqdori 15 mln. so‘m bo‘lsa, firma qarzni qancha muddatga olishi lozim bo‘ladi?

10. Firma o‘zgaruvchi stavkalar bilan bir yilga 1 mln. so‘m qarz oldi. Birinchi yarim yil uchun 20%, qolgan yarim yilning 4 oyi uchun 15% va qolgan 2 oy uchun 40% stavka bo‘yicha qarz to‘lanishi ma’lum. Bir yil mobaynidagi oddiy foiz bo‘yicha umumiy qarz miqdorini toping.

IX BOB. TO‘LOVLAR OQIMI. RENTALAR

9.1. Rentalar va ularni jamg‘arish

To‘lovlar oqimi

Amaliyotda to‘lovlar oqimi ko‘p uchraydi. Har oyda ikki marta (taxminan har 15 kunda) to‘lanadigan ish haqi, kvartira uchun har oyda to‘lanadigan to‘lovlar. Kreditga olingan uskuna uchun bankka ma’lum miqdordagi pullarni to‘lash va h.k. Shuning uchun to‘lovlar oqimini o‘rganish juda muhim.

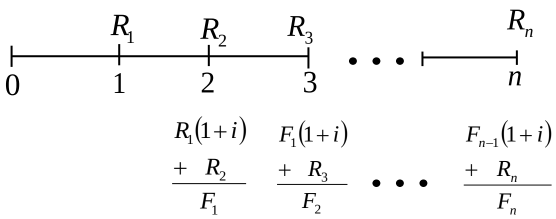
To‘lovlar oqimi – bu berilgan vaqtda (ishorasi bo‘yicha) amalga oshiriladigan to‘lovlar ketma-ketligidir.

To‘lovlar musbat ishorali deb qabul qilinadi, agar tushim bo‘lsa, chiqim to‘lovi manfiy ishorali kabi qabul qilinadi. To‘lovlar miqdoriga qarab to‘lovlar chekli va cheksiz bo‘ladi. Musbat hadli to‘lovlar renta deb yuritiladi.

Aytaylik to‘lovlar oqimi $\{R_k, t_k\}$ bo‘lsin, bunda R_k – to‘lovlar, t_k – vaqt muddatlari. Foiz stavkasi esa i bo‘lsin. Endi to‘lovlar oqimining (rentaning) joriy va jamg‘arma qiymatlarini topamiz.

To‘lovlar oqimi quyidagi sxema yordamida berilgan bo‘lsin.

$(R_1,1), (R_2,2), \ldots, (R_n,n)$, foiz stavkasi i



9.1-чизма.

Shu tarzda hosil qilingan F_n rentaning jamg‘arma qiymatiga teng bo‘ladi, uni $S(n)$ bilan belgilaymiz.

$$S(n) = F_n = R_n(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + \ldots + R_n$$

Agar $R_1 = R_2 = \ldots = R_n = R$ bo‘lsa, ya’ni to‘lovlar o‘zgarmas bo‘lsa, u holda

$$S(n) = R\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1\right] = \frac{R\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}, \qquad S_{n|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ – rentaning jamg‘arma koeffitsiyenti.

$$S(n) = R \cdot S_{n|i}$$

0 momentga diskontirlangan renta yig‘indisi rentaning joriy qiymati yoki hozirgi qiymati deb yuritiladi.

$$A = S(0) = \frac{S(n)}{(1+i)^n} = \frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}, \qquad a_{n|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$a_{n|i}$ - rentaning keltirilgan koeffitsiyenti

$$A = R \cdot a_{n|i}$$

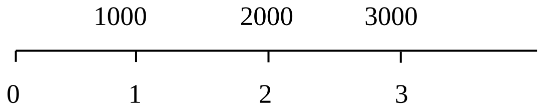
shunday qilib, $\{R, n, i\}$ chekli rentaning hozirgi qiymati

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n} = \frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

9.1-misol. Ushbu rentaning jamg‘arma va joriy qiymtalarini toping.

$(1000, 1)$; $(2000; 2)$; $(3000; 3)$. Foiz stavka $i = 100\%$.

Yechish. To‘lovlar turli bo‘lganligi uchun (9.1) sxemadan foydalanishimiz mumkin.



$i = 10\%$

$$\begin{array}{r} 1000 \cdot 1{,}1 \\ +\ 2000 \\ \hline 3100 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3100 \cdot 1{,}1 \\ +\ 3000 \\ \hline 6410 \end{array}$$

Demak, 3 yildagi rentaning jamg‘arma qiymati $S(3) = 6410$.

Endi rentaning joriy qiymatini topamiz.

$$A = \frac{6410}{1{,}13} = 4815{,}93$$

Agar to‘lovlar muddat oxirida amalga oshirilsa, bunday rentani postnumerando, muddat boshida amalga oshirilsa uni prenumerando renta deb yuritiladi.

Yillik renta parametrlarini aniqlash

Biz yuqorida yillik renta yillik to‘lov R, muddat n foiz stavka i orqali xarakterlanishini ko‘rdik. Shularga asosan joriy qiymat A va jamg‘arma qiymat S larni aniqladik. Bu kattaliklar erkli bo‘laolmaganligi boshqalarini topish mumkin.

1)Agar $R,\ n, i$ berilgan bo‘lsa, $A = R \cdot a_{n|i}$, $S = R \cdot S_{n|i}$;

2)Agar $R,\ A, i$ berilgan bo‘lsa, u holda $A = \frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$ tenglikdan $n = -\frac{\ln\left(1-\frac{Ai}{R}\right)}{\ln(1+i)}$, $a_{n|i} = \frac{A}{R}$ topamiz.

3) Agar $R,\ s, i$ berilgan bo‘lsa $S = \frac{R\left[1-(1+i)^{n}-1\right]}{i}$ tenglikdan $n = \frac{\ln\left(1+\frac{Si}{R}\right)}{\ln(1+i)}$.

4)Agar $A,\ n, i$ berilgan bo‘lsa $A = \frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$ dan $R = \frac{A \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$.

5)Agar S, n, i berilgan bo‘lsa, $R = \frac{S \cdot i}{(1+i)^{n}-1}$ topamiz.

Bu tengliklardan foiz stavkasi i ni kompyuter yordamida taqribiy hisoblaymiz.

Chekli rentalarda to‘lovlar va foiz to‘lovlari bir yilda bir necha marta amalga oshirilganda rentaning jamg‘arma va joriy qiymatlari qanday aniqlanadi degan savol tug‘iladi.

Aytaylik to‘lovlar bir yilda P marta amalga oshirilsin, agar yillik R bo‘lsa, birlik to‘lov R/p bo‘ladi, foizlar bir yilda m marta qo‘shiladigan bo‘lsa, bunday holda rentaning jamg‘arma qiymati

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \qquad (9.2)$$

formuladan topiladi. Joriy qiymat esa

$$A = \frac{S}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}} \qquad (9.3)$$

Agar bir yildagi to‘lovlar soni *P*, foiz to‘lovlari yilda bir marta $m=1$ bo‘lsa (9.2) va (9.3) lardan

$$S=\frac{R}{P}\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} \quad (9.4) \quad \text{va} \quad A=\frac{S}{(1+i)^n} \quad (9.5)$$

Yoki $p=1$ bo‘lib, foiz bir yilda *m* marta qo‘shiladigan bo‘lsin, bunday holda (9.2) va (9.3) formulalardan

$$S=\frac{R\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1\right]}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1} \tag{9.6}$$

$$A=\frac{S}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}} \tag{9.7}$$

Agar $m=p$ bo‘lsa $S=\frac{R}{m}\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{i/m}=\frac{R\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1\right]}{i}$

Abadiy renta

Adabiy renta deganda biz to‘lovlar ketma – ketligi chegaralan-magan holni, ya’ni to‘lovlar chegaralanmagan muddatda amalga oshirilishini tushunamiz.

Bunday holda rentaning joriy qiymati

$$A=\frac{R}{i}$$

haqiqatan ham

$$A=\frac{R}{1+i}+\frac{R}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{R}{(1+i)^n}+\ldots=\frac{R}{i}$$

ya’ni $A=\frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$ dan $n\to\infty$ da $A=\frac{R}{i}$ ni hosil qilamiz.

9.2-misol. Fermer o‘zining ekin maydonini bir yil uchun $200000\$$ ga ijaraga berdi. Ijaraning yillik to‘lov foiz stavkasi 10% bo‘lsa, ijarani sotib olish narxi qancha bo‘ladi.

Yechish. Ijaraning narxi rentaning barcha ijara to‘lovlarining joriy qiymatiga teng bo‘ladi. $A=\frac{R}{i}=\frac{200000}{0{,}1}=20000\$$

Agar foiz stavkalar o‘zgaruvchi bo‘lsa, u holda rentaning joriy qiymati ushbu formula yordamida hisoblanadi.

$$A=\frac{R_1}{1+i_m}+\frac{R_2}{(1+i_i)(1+i_2)}+\frac{R_3}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_1)}+\ldots+\frac{R_n}{(1+i_1)(1+i_2)\cdot\ldots\cdot(1+i_n)} \qquad (9.8)$$

Jamg‘arma qiymati esa

$S=A\cdot(1+i_1)(1+i_2)\cdot\ldots(1+i_n)$ (9.9) formula yordamida hisoblandi.

9.3-misol. Yillik to‘lovlar $R=1000\$$ bo‘lgan 4 yillik rentani ushbu o‘zgaruvchi foiz stavkalarda rentaning joriy qiymatini hisoblang: birinchi ikki yil 5%, uchinchi yili 8%, to‘rtinchi yili 10%.

Yechish. (9.8) formuladan

$$A=\frac{1000}{1{,}05}+\frac{1000}{1{,}05^2}+\frac{1000}{1{,}05^2\cdot 1{,}08}+\frac{1000}{1{,}05\cdot 1{,}08\cdot 1{,}1}=2860{,}5\$$$

9.2. Vaqt bo‘yicha hadlari bir xil absolyut o‘zgaradigan rentalar

Rentaning birinchi hadi *R* va ayirmasi *a* bo‘lgan arifmetik progressiya bo‘yicha o‘zgaradigan bo‘lsin, ya’ni

$$R, R+a, R+2a, \ldots, R+(n-1)a\,.$$

Rentaning *t*-hadi $R+(t-1)a$ ga teng. Bu rentaning yig‘indisi (joriy qiymati) yillik postnumerando renta uchun

$$S(0)=\left(R+\frac{a}{i}\right)a_{n|i}-\frac{nav^n}{i} \qquad (9.2.1)$$

Isbot. Yuqoridagi ketma-ketlikning joriy qiymatini topamiz:

$$S(0)=Rv+(R+n)v^2+\cdots+[R+(n-1)a]v^n \qquad (*)$$

(*) ning har ikkala qismini $(1+i)$ ga ko‘paytirib hosil bo‘lgan tenglikdan (*) ning unga mos qismlarini ayiramiz, natijada

$$iS(0)=R+av+av^2+\cdots+av^{n-1}-\left[R+(n-1)a\right]v^n=$$

$$=R\left(1-v^n\right)+a\sum_{1}^{n-1}v^t-nav^n+av^n=R\left(1-v^n\right)+aa_{n|i}-nav^n.$$

Bundan

$$S(0)=R\left(\frac{1-v^n}{i}\right)+\frac{aa_{n|i}-nav^n}{i}$$

$$\frac{1-v^n}{i}=a_{n|i}$$

ekanligini hisobga olib,

$$S(0)=\left(R+\frac{a}{i}\right)a_{n|i}-\frac{nav^n}{i}$$

ni hosil qilamiz.

(9.2.1) formulani $(1+i)^n$ ga ko‘paytirib, jamg‘arilgan mablag‘ qiymati formulasini yozamiz:

$$S(n)=\left(R+\frac{a}{i}\right)S_{n|i}-\frac{na}{i} \tag{9.2.2}$$

Endi to‘lovlar absolyut o‘sishi rentaning joriy qiymatiga qanday ta’sir qilishini ko‘raylik. Buning uchun (9.2.1) formulani quyidagicha yozamiz.

$$S(0)=Ra_{n|i}+\frac{a_{n|i}-nv^n}{i}a \tag{9.2.3}$$

Bu formula $S(0)$ ni a ga chiziqli bog‘langanligini ko‘rsatadi. Shunga o‘xshash (9.2.2) formula asosida $S(t)$ ni a ga chiziqli bog‘liqligini ko‘ramiz.

$$S(n)=R_{S_{n|i}}+\frac{\left(S_{n|i}-n\right)}{i}a \tag{9.2.4}$$

(9.2.1) va (9.2.2) formulalarni almashtirish natijasida hosil bo‘lgan (9.2.3) va (9.2.4) formulalar postnumerando renta uchun hosil qilinadi. O‘z navbatida prenumerando renta uchun

$$S(0)=\left[\left(R+\frac{a}{i}\right)\ddot{a}_{n|i}-\frac{nav^n}{i}\right](1+i)=\left(R+\frac{a}{i}\right)\ddot{a}_{n|i}-\frac{nav^{n-1}}{i} \tag{9.2.5}$$

$$S(n)=\left(R+\frac{a}{i}\right)\ddot{S}_{n|i}-\frac{na}{i}(1+i)$$ (9.2.6)

1-misol. Postnumerando to‘lovlari vaqt bo‘yicha bir xil oqimni tashkil etib uning birinchi hadi 15 mln. so‘m. Har bir keyingi to‘lovlar har doim 2 mln. so‘mga oshadi. Yillik foiz stavkasi 20% ni tashkil etib, to‘lovlar muddati 10 yil. Shu ma’lumotlar asosida joriy va jamg‘arilgan pul mablag‘lari topilsin.

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra, $R=15,\ a=2,\ i=20\%,\ n=10$. Jadvaldan $a_{10|20}=4{,}192472,\ v^{10}=0{,}161505$ larni topamiz.

(9.2.1) formulani tatbiq etib,

$$S(0)=\left(15+\frac{2}{0{,}2}\right)\cdot 4{,}192472-\frac{10\cdot 2\cdot 0{,}161505}{0{,}2}=88{,}661$$ mln. so‘m.

ni topamiz. (9.2.3) va (9.2.4) formulalarni tatbiq etib ham shu natijalarga ega bo‘lish mumkin.

$$S(0)=15a_{10|20}+\frac{a_{10|20}-10\cdot 1{,}2^{10}}{0{,}2}\cdot 2=62{,}887+25{,}774=88{,}661$$ mln. so‘m,

$$S(n)=15S_{10|20}+\frac{S_{10|20}-10}{0{,}2}\cdot 2=389{,}380+159{,}585=548{,}965$$ mln. so‘m.

Ba’zan o‘zgaruvchi rentalarni tahlil qilishda teskari masalani yechishga to‘g‘ri keladi, ya’ni rentaning birinchi hadi R yoki uning a o‘sishini boshqa parametrlar bo‘yicha aniqlashga to‘g‘ri keladi.

Yillik postnumerando renta uchun (9.2.1) va (9.2.2) lardan R ni topamiz.

$$R=\frac{S(0)+\frac{nav^n}{i}}{a_{n|i}}-\frac{a}{i},$$ (9.2.7)

$$R=\frac{S(n)+\frac{na}{i}}{S_{n|i}}-\frac{a}{i},$$ (9.2.8)

O‘z navbatida R berilgan holda a ni topamiz:

$$a = \frac{\left(S(0) - Ra_{n|i}\right)i}{a_{n|i} - nv^n}, \tag{9.2.9}$$

$$a = \frac{\left(S(n) - RS_{n|i}\right)i}{S_{n|i} - n} \tag{9.2.10}$$

9.3. O‘zgarmas uzluksiz rentalar. Rentalar konversiyasi

Yuqorida qaralgan rentalarda to‘lovlar oqimining hadlari fiksirlangan vaqt oralig‘ida, ya’ni to‘lovlar diskret holda o‘zgarishini ko‘rdik. To‘lovlarning tez-tez amalga oshishini uzluksiz jarayon deb hisoblash mumkin. O‘zgarmas uzluksiz rentalarning joriy va jamg‘arilgan qiymatlarini hisoblaymiz. Uzluksiz rentaning ta’rifiga ko‘ra to‘lovlar soni yiliga $m \to \infty$. Bunday rentaning diskontirlash koeffitsiyentini $a_{n|i}$ deb belgilaymiz. Buni hisoblash uchun $m \to \infty$ limitga o‘tamiz.

$$\bar{a}_{n|i} = \lim_{m\to\infty} a_{n|i}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{m[(1+i)^{1/m} - 1]}$$

Lopital qoidasini tatbiq etib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}$$

Demak,

$$\bar{a}_{n|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \tag{9.3.1}$$

Uzluksiz rentaning jamg‘arma koeffitsiyentini ham shunga o‘xshash aniqlaymiz.

$$\bar{S}_{n|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{\ln(1+i)} \tag{9.3.2}$$

Ravshanki, diskret to‘lovlar postnumerando rentadan uzluksiz rentaga o‘tganda diskontirlash va jamg‘arma koeffitsiyentlari $\frac{i}{\ln(1+i)}$ marta ortadi. Shunday qilib,

$$\bar{a}_{n|i} = \frac{i}{\ln(1+i)} a_{n|i}; \qquad \bar{S}_{n|i} = \frac{i}{\ln(1+i)} S_{n|i}.$$

(9.3.1) va (9.3.2) formulalar uzluksiz pul tushishini va diskret ustama foiz qo‘shilishini bildiridi. Aslida, har ikkala jarayon (pul tushishi va ustama foiz qo‘shilishi) ham uzluksiz bo‘lgan hol tabiiyroq bo‘ladi. Bu koeffitsiyentlarga mos formulalarni hosil qilish uchun uzluksiz va diskret stavkalarning ekvivalentligidan foydalanamiz.

$\delta = \ln(1+i), \qquad i = e^{\delta} - 1,$ bunda δ-o‘sish kuchi.

Bularni hisobga olib, (9.3.1) va (9.3.2) formulalarni quyidagicha yozamiz:

$$\bar{a}_{n|i} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} \tag{9.3.3}$$

$$\bar{S}_{n|i} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta} \tag{9.3.4}$$

(9.3.1), (9.3.2) va (9.3.3), (9.3.4) formulalar bir xil natijani berishi uchun uzluksiz va diskret stavkalar ekvivalent bo‘lishi kerakligini sezamiz.

3-misol. Qazilma boylik chiqadigan joyni ekspluatatsiya qilishdan keladigan daromad yiliga 1 mlrd. so‘m, ekspluatatsiya davri 10 yil, qazib olgan mahsulotni ortish va ularni sotish uzluksiz bo‘lsin deb faraz qilaylik. Daromadning jamg‘arilgan narxi 10% stavka bo‘yicha diskontirlangandagi joriy qiymat quyidagiga teng bo‘ladi.

$$S(0) = 10^9 \cdot \frac{1 - 1{,}1^{-10}}{\ln 1{,}1} = 6446{,}91 \text{ mln.so‘m.}$$

Agar diskontirlash o‘sish kuchi 10% bo‘lgan holda amalga oshsa, u holda

$$S(0)=R\ddot{a}_{n|i}=10^9\cdot\frac{1-e^{-0,1\cdot 10}}{0,1}=6321,21 \text{ mln.so‘m.}$$

Ekvivalent diskret stavka 10% bo‘lsa, o‘sish kuchi $\delta=\ln 1,1=0,09531$ yoki 9,531% bo‘ladi. Bundan

$$S(0)=10^9\cdot\frac{1-e^{-0,09553\cdot 10}}{0,09531}=6446,91 \text{ mln. so‘m}$$

(9.3.3) va (9.3.4) formulalarni integral amali yordamida ham hosil qilish mumkin. Masalan, diskontirlash koeffitsiyentini quyidagicha topamiz:

$$\bar{a}_{n|i}=\int_0^n e^{-\delta t}dt=-\frac{1}{\delta}e^{-\delta t}\Big|_0^n=\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}.$$

Endi bir muhim xususiy holni qaraymiz. Vaqtning bir yillik intervali uchun uzluksiz rentaning jamg‘arma koeffitsiyentini topamiz. m marta to‘lanadigan rentaning shu interval uchun jamg‘arma koeffitsiyentini $\bar{S}_t$ bilan belgilaymiz. Uning $m\to\infty$ limiti

$$\bar{S}_t=\frac{i}{\ln(1+i)}.$$

Bu funksiyani dastlabki uchta hadi bilan chegaralangan holda darajali qatorga yoyamiz:

$$\bar{S}_1=1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{12}i^2.$$

Bu natijaga binom yoyilmasining dastlabki uchta hadi yaqinroq bo‘ladi:

$$(1+i)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{8}i^2$$

Natijada

$$\bar{S}_1=(1+i)^{1/2}$$

ga ega bo‘lamiz.

Shunga o‘xshash yillik davr uchun uzluksiz rentaning diskontirlash koeffitsiyentini topamiz:

$$\bar{a}_1=(1+i)^{-\frac{1}{2}}$$

Endi o‘zgarmas uzluksiz renta uchun stavka muddati va o‘lchovini topamiz. $S(0)=R\bar{a}_{n|i}$ ni hisobga olib, (9.3.1) ni n ga nisbatan yechamiz:

$$n=-\frac{\ln\left(1-\frac{S(0)}{R}\delta\right)}{\delta} \tag{9.3.5}$$

Demak, dastlabki qiymat jamg‘arma qiymatidan iborat bo‘lgan hol uchun

$$n=\frac{\ln\left(\frac{S(n)}{R}\delta+1\right)}{\delta} \tag{9.3.6}$$

Endi uzluksiz o‘zgaruvchi to‘lovlar oqimi haqida gaplashamiz. Uzluksiz o‘zgarmas to‘lovlarda yillik pul miqdori R uzluksiz va tekis taqsimlangan deb qaralar edi. Amalda, ayniqsa ishlab chiqarish investitsiyalarni tahlil qilishda to‘lovlar oqimi vaqt bo‘yicha qandaydir qonunga ko‘ra o‘zgaradi.

Agar to‘lovlar oqimi uzluksiz va qandaydir $R_t=f(t)$ funksiya bo‘yicha aniqlanadigan bo‘lsa, u holda n vaqt mobaynida umumiy pul miqdorining tushimi

$$\int_0^n f(t)dt$$

ga teng. Bunday holda jamg‘arilgan pul miqdori

$$S=\int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt$$

formuladan topiladi. Bunday to‘lovlar oqimining joriy qiymati

$$S(0)=\int_0^n f(t)e^{-\delta t}dt$$

S va $S(0)$ larning qiymatlarini topish uchun $f(t)$ funksiyaning ko‘rinishini aniqlash lozim. Bu funksiyaning chiziqli va eksponensial bo‘lgan hollarida joriy qiymat hisoblashni ko‘ramiz.

Oqimlar funksiyasi chiziqli

$$R_t=R_0+at \tag{9.3.7}$$

ko‘rinishda bo‘lsin, bunda R_0- to‘lovning boshlang‘ich qiymati.

Joriy qiymatni topamiz:

$$S(0)=\int_0^n (R_0+at)e^{-\delta t}dt = R_0\int_0^n e^{-\delta t}dt + a\int_0^n te^{-\delta t} = \qquad (9.3.8)$$
$$= R_0\overline{a}_{n|\delta} + \frac{1}{\delta}\left(\overline{a}_{n|\delta} - ne^{-\delta n}\right)a = \left(R_0+\frac{a}{\delta}\right)\overline{a}_{n|\delta} - \frac{a}{\delta}ne^{-\delta n}$$

bunda $\overline{a}_{n|\delta}$ – uzluksiz rentaning diskontirlash koeffitsiyenti. Endi to‘lovlar eksponensial o‘sgan holni qaraylik:

$$R_t = \mathrm{Re}^{qt}\ , \qquad (9.3.9)$$

bu yerda q – to‘lovlarning uzluksiz o‘sish tezligi.

Bunday rentalarning joriy qiymati:

$$S(0)=R\int_0^n e^{qt}\cdot e^{-\delta t}dt = R\int_0^n e^{(q-\delta)t}dt = R\left.\frac{e^{(q-\delta)t}}{q-\delta}\right|_0^n = R\frac{e^{(q-\delta)n}-1}{q-\delta}, \qquad (9.3.10)$$

$q-\delta$ ayirmani quyidagi formuladan topamiz:

$$q-\delta = \ln\frac{1+k}{1+i}$$

bu yerda k – diskret o‘sish tezligi.

4-misol. Daromadning o‘sishi yiliga 5%. Agar $R=100,\ \ i=7\%,\ \ n=3$ yil bo‘lsa, u holda joriy va jamg‘arma qiymat topilsin. Masala shartiga ko‘ra,

$$q-\delta = \ln\frac{1+0{,}05}{1+0{,}07} = -0{,}01887$$
$$S(0)=100\frac{e^{-0{,}01887\cdot 3}-1}{-0{,}01887} = 291{,}5$$
$$S(n)=S(0)(1+i)^3 = 291{,}5\cdot 1{,}07^3 = 357{,}1.$$

Rentalar konversiyasi

Amalda shartnoma shartlarini ishlab chiqish bosqichida yoki ularning bajarilishi davomida qandaydir sabablarga ko‘ra rentalar to‘lash shartlarini o‘zgartirishga to‘g‘ri keladi. Qisqacha qilib aytganda, so‘z qaralayotgan moliyaviy rentalarni to‘lashdagi shartlarni konvertirlash haqida bormoqda. Konversiyaning sodda holiga rentalarni bir marotaba to‘lash bilan yoki aksincha, bir marotabali to‘lovni renta bilan almashtirish kiradi. Konversiyaning murakkab holiga turli xarakterdagi bir qancha rentalarni bitta rentaga birlashtirish – rentalar konsolidatsiyasi deb yuritiluvchi konversiya kiradi. Konversiyaning umumiy holiga rentani bir shartdan boshqa shartdagi rentaga, masalan, abadiy rentani qoldirilgan rentaga, yillik rentani qoldirilgan rentaga almashtirish va h.k. misol bo‘ladi.

Rentalarni birlashtirish deganda bir qancha rentalarni bitta rentaga almashtirishni tushunamiz. Bunday holda moliyaviy ekvivalentlik prinsipiga asosan almashtiruvchi rentaning joriy qiymati almashuvchi rentaning joriy qiymati teng bo‘ladi.

$$P=\sum_q P_q \qquad (9.3.11)$$

bunda $P-$almashtiruvchi rentaning joriy qiymati P_q-q-almashuvchi rentaning joriy qiymati.

Rentalarni birlashtirish ixtiyoriy bo‘lishi mumkin: abadiy va qoldirilgan, yillik va $m-$karrali va h.k.

Agar almashtiruvchi postnumerando renta abadiy bo‘lsa va uning muddati n berilgan bo‘lsa, u holda (9.4.1) dan

$$R=\frac{\sum P_q}{a_{n|i}} \qquad (9.3.12)$$

O‘z navbatida, agar to‘lov qiymati (almashtiruvchi renta hadining o‘lchovi) va uning davriyligi berilgan bo‘lsa, u holda yangi rentaning muddati izlanadi. Odatda masala $a_{n|i}$ ning qiymati bo‘yicha n ni hisoblashga olib keladi.

Abadiy posnumerando renta uchun ushbuga ega bo‘lamiz:

$$a_{n|i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{\sum_q P_q}{R} \qquad (9.3.13)$$

Agar $\sum_q P_q$ ma’lum bo‘lsa, u holda (9.4.3) ga asoslanib n ni topamiz.

$$n=\frac{-\ln\left(1-\frac{\sum P_q}{R}i\right)}{\ln(1+i)} \qquad (9.3.14)$$

Masala yechimga ega bo‘lishi uchun

$$\frac{i\sum P_q}{R}<1$$

shart bajarilishi lozim.

5-misol. Uchta postnumerando rentalar – abadiy, yillik rentalar bitta qoldirilgan postnumerando renta bilan uch yilga almashadi. Shartnoma bo‘yicha almashadigan renta qoldirilganligini hisobga olgan holda 10 yil muddatga ega. Almashuvchi rentalarning xarakteristikalari $R_q = 100;\ 120;\ 300$ ming so‘m, ularning muddatlari 6; 11 va 8 yil. Agar hisobda murakkab foiz stavkasi 20% deb qabul qilinsa, u holda bu rentaning boshlang‘ich summasi (joriy) 2002,9 ming so‘mdan ko‘proq.

Bunday holda almashuvchi renta hadining qiymati

$$R=\frac{2002{,}946}{a_{7|20}v^3}=\frac{2002{,}946}{3{,}60459\cdot 1{,}2^{-3}}=960{,}189 \text{ ming. so‘m}$$

Agar almashuvchi renta abadiy bo‘lsa, u holda

$$R=\frac{2002{,}946}{3{,}60459}=555{,}665 \text{ ming so‘m.}$$

Ushbu jadvalda almashuvchi rentalar hadlarini aniqlash ko‘rsatilgan:

Renta(q)	R_q	n_q	i	$a_{n_q\|20}$	$Ra_{n_q\|20}$
1	100	6	20	3,32551	332,551
2	120	11	20	4,32706	519,472
3	300	8	20	3,83716	1151,148
jami	520				2002,946

Faraz qilaylik, muddat berilmagan bo‘lib, yillik to‘lov qiymati berilgan bo‘lsin, masalan bu 1500 ming so‘mdan iborat bo‘lsin.

Almashuvchi rentaning muddatini topish lozim bo‘lsin. Dastlab, abadiy rentaning joriy qiymatini, so‘ngra uning muddatini topamiz:

$$P = 2002{,}946 \cdot 1{,}2^3 = 3461{,}091 \text{ ming so‘m.}$$

(9.3.14) formuladan

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{3461{,}091}{1500} \cdot 0{,}2\right)}{\ln 1{,}2} = 3{,}395 \text{ yil.}$$

Natijani 3 yoki 4 yilga qadar yaxlitlab yetishmagani yoki ortiqchasi renta muddatini aniqlash mobaynida qoplanadi.

Yana bir xususiy holni qaraymiz. Aytaylik, almashuvchi rentaning hadi $R = \sum_q R_q$ bo‘lsin. Barcha rentalar yillik, postnumerando. Agar barcha rentalarning foiz stavkalari bir xil bo‘lsa, u holda (9.3.14) formuladan

$$R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum_q R_q\left[1-(1+i)^{-n_q}\right]}{i}$$

hosil bo‘ladi, bunda *n*- almashuvchi rentaning muddati. Bu tenglikdan

$$n = \frac{\ln R - \ln \sum R_q (1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)} \qquad (9.3.15)$$

kelib chiqadi. Endi abadiy rentani qoldirilgan rentaga almashuvini ko‘raylik. Faraz qilaylik, abadiy postnumerando renta R_1 va n_1 parametrlarga ega bo‘lib, foiz stavkasi i ga teng bo‘lsin. To‘lovlarni t yilga qoldirish zarurati tug‘ilgan bo‘lsin. Boshqacha aytganda abadiy renta qoldirilgan rentaga R_2, n_2, t ($t-$renta muddatiga kirmaydi) parametrlar bilan almashadi. Agar muddat berilgan bo‘lsa, R_2 aniqlanadi va aksincha. $n_2 = n_1 = n$ bo‘lsin, bu hol uchun ushbu tenglik o‘rinli:

$$R_1 a_{n|i} = R_2 a_{n|i} \cdot v^t,$$

bundan

$$R_2 = R_1 (1+i)^t \qquad (9.3.16)$$

kelib chiqadi.

Yangi rentaning hadi almashuvchi rentaning *t* vaqt ichida jamg‘arilgan qiymatiga teng bo‘ladi.

Umumiy holda $n_2 = n_1$ bo‘lganda $P_1 = P_2$ tenglikdan

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1|i}}{a_{n_2|i}} \cdot (1+i)^t \qquad (9.3.17)$$

kelib chiqadi.

6-misol. Abadiy renta postnumerando $R_t = 2$ mln. so‘m va 8 yil muddat sharti bilan 2 yilga renta muddati o‘zgarmagan holda qoldirildi. Foiz stavkasi yiliga 20%. (9.3.16) formuladan

$$R_2 = 2 \cdot 1{,}2^2 = 2{,}88 \text{ mln.so‘m}$$

Shunday qilib, abadiy renta to‘lovlaridan voz kechish yillik to‘lovlarni 0,88 mln. so‘mga ko‘paytirib yuboradi. Agar to‘lovlar o‘zgarishi bilan renta muddati ham ortsa, masalan 8 yil o‘rniga $n = 11$ yil bo‘lsa, u holda (9.3.17) formuladan

$$R_2 = R_1 \frac{a_{8|20}}{a_{n|i}} \cdot 1{,}2^2 = 2 \cdot \frac{3{,}83716}{4{,}32706} \cdot 1{,}2^2 = 2{,}55393 \text{ mln. so‘m}$$

Endi rentaning hadlari o‘zgarmas bo‘lgan holda yangi rentaning muddatini aniqlaymiz. Aytaylik to‘lovlar *t* yilga qoldirilsin. Bunday holda

$$Ra_{n_1|i} = Ra_{n_2|i} \cdot v^t \text{ tenglikdan}$$

$$n_2 = \frac{-\ln\left\{1 - \left[1 - (1+i)^{-n}\right](1+i)^t\right\}}{\ln(1+i)} \qquad (9.3.18)$$

hosil bo‘ladi.

7-misol. $R = 2$ mln. so‘m, $n = 5$ yil, $i = 8\%$ shart bilan renta to‘lovlar o‘zgarishsiz qolgan holda 3 yilga qoldirilgan bo‘lsin. Yangi muddatni topish zarur bo‘lsin. (5.4.8) formuladan

$$n_2 = \frac{-\ln\left[1 - \left(1 - 1{,}08^{-5}\right)1{,}08^3\right]}{\ln 1{,}08} = 6{,}689 \text{ yil.}$$

Shunday qilib, rentaning abadiy to‘lovlaridan voz kechish to‘lov muddatini 1,7 yilga ko‘paytirib yuboradi.

Agar R_1 va n_1 parametrli abadiy renta m karrali rentaga R_2, n_2, m parametrlar bilan almashadigan bo‘lsa hamda almashadigan rentalar muddati, uning davriyligi va stavkasi berilgan bo‘lsa, u holda

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1|i}}{a_{n_2|i}^{(m)}}. \tag{9.3.19}$$

Agar $n_2 = n_1 = n$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{a_{n|i}}{a_{n|i}^{(m)}} = \frac{m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]}{i}, \text{ bundan}$$

kelib chiqadi.

$$R_2 = R_1 \frac{m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]}{i} \tag{9.3.20}$$

8-misol. $R_1 = 2,$ $n_1 = n_2 = n$ bo‘lsin. Agar yillik postnumerando renta kvartallik rentaga o‘tsa, u holda renta muddati o‘zgarmagan holda rentalar ekvivalentligiga ko‘ra, $i = 20\%$ uchun

$$R_2 = 2 \cdot \frac{4(1{,}2^{\frac{1}{4}} - 1)}{0{,}2} = 1{,}86541$$

Agar $n_1 = 3,$ $n_2 = 4$ yil bo‘lsa, (9.3.20) formuladan

$$R_2 = 2 \cdot \frac{a_{3|20}}{a_{4|20}^{(4)}} = 2 \cdot \frac{2{,}10648}{2{,}77552} = 1{,}51791.$$

X BOB. KREDIT HISOBI

10.1. Qarzni yopishning umumiy usuli yuqori foizlarda fond tashkil etish orqali qarzlarni yopish

Qarz, kredit, Ssuda – bu qadimiy moliyaviy operatsiyalar hisoblanadi. Bu uchala so‘zlar – “qarz”, “kredit”, “Ssuda” – bitta narsani ifodalab pul yoki qandaydir tovarni qarzga berib, uni foiz to‘lovi bilan qaytarishni tushuniladi. Kreditga pul yoki tovar beruvchi tomon – qarz beruvchi (kreditor), qarz oladigan tomon esa – qarzdor (yosh debitor) deb yuritiladi.

Kreditni berish va uni yopish shartlari turlicha bo‘ladi. Bu yerda eng sodda va keng tarqalgan qarz berish va uni yopish usullari haqida gap boradi.

1. **Qarzni muddat oxirida bitta to‘lov orqali yopish**

Aytaylik, *D* miqdordagi qarz *i* foiz stavka bo‘yicha murakkab foizda *n* yilga berilgan bo‘lsin, qarzni jamg‘arilgan miqdori *n* – nchi yil oxirida $D(1+i)^n$ ga teng bo‘ladi. Agar qarz bitta to‘lov orqali amalga oshiriladigan bo‘lsa, to‘lov miqdori $R = D(1+i)^n$ ni tashkil etadi.

1-misol. 100 mln. so‘m qarz 10 yilga 10% ga berilgan, agar qarz bitta to‘lov orqali yopish shartida berilgan bo‘lsa, qarz miqdori qancha bo‘ladi.

Yechish. $R = 100(1+0{,}1)^{10} = 100 \cdot 1{,}1^{10} = 259{,}37$ mln.

2. **Asosiy qarzni muddat oxirida bitta to‘lov orqali yopish**

Boshlang‘ich qarz miqdorning o‘zi – asosiy qarz deb, foiz puli deb esa, foiz qo‘shilmasini tushunamiz. Aytaylik, D miqdordagi qarz *n* yilga murkaab *i* foiz stavkada berilgan bo‘lsin, bunday shartda birinchi yili foiz puli $R_i = iD$ ni tashkil etadi.

Buni to‘lagandan so‘ng, yana qarz miqdori *D* bo‘lib qoladi. Har yil oxirida foiz puli iD ga teng bo‘ladi. *n*-nchi yili to‘lov miqdori $R_n = iD + D$, ya’ni foiz puli va asosiy qarz miqdori yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

3. Asosiy qarzni yillik teng to‘lovlar orqali yopish

Aytaylik, D miqdordagi qarz n yilga murakkab i foizda berilgan bo‘lsin, qaralayotgan bu usulda to‘lovlar asosiy qarzli n qismini tashkil etadi, ya’ni $\frac{D}{n}$. Bundan tashqari 1-nchi yil oxirida, bunga D ning foiz puli qo‘shiladi. Natijada, birinchi yil oxirida to‘lov $R_1 = \frac{D}{n} + iD$ bo‘ladi.

Ikkinchi yil oxiridagi to‘lov esa $R_2 = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{D}{n}\right)$ va h.k.

$k+1$ - nchi yildagi to‘lov

$$R_{k+1} = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{k}{n}D\right)$$

Ko‘rinib turibdiki, k_1, k_2 to‘lovlar ketma-ketligi berilgan hadi $R_1 = \frac{D}{n} + iD$ va ayirmasi $\frac{iD}{n}$ bo‘lgan kamayuvchi arifmetik progressiyani tashkil etadi.

2-misol. Faraz qilaylik $D = 30\text{млн.},\ n = 5,\ i = 10\%$ har yilgi to‘lovlar miqdorini yuqoridagi usulda hisoblang.

Yechish.

$$R_1 = \frac{D}{n} + i\,D = \frac{30}{5} + 0{,}1 \cdot 30 = 6 + 3 = 9$$

$$R_2 = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{D}{n}\right) = 6 + 0{,}1(30 - 6) = 8{,}4$$

$$R_3 = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{2D}{n}\right) = 6 + 0{,}1(30 - 12) = 7{,}8$$

$$R_4 = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{3D}{n}\right) = 6 + 0{,}1(30 - 18) = 7{,}2$$

$$R_5 = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{4D}{n}\right) = 6 + 0{,}1(30 - 24) = 6{,}6$$

4. Qarzni yillik teng to‘lovlar asosida

Aytaylik, D miqdordagi qarz n yilga i murakkab foiz stavkada berilgan bo‘lsin, qaralayotgan bu usulda har yil oxirida bir xil R to‘lovni amalga oshirish kerak. Bu to‘lov yillik rentani tashkil etadi. Bu rentaning hozirgi qiymatini (joriy qiymati).

Qarz miqdoriga tenglashtiramiz.

$$\frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}=D$$

$$R=\frac{D\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$$

3-misol. Aytaylik qarz miqdori $D=30.000.000 сўм,\ n=5 йил,\ i=10\%$ bo‘lsin, qarzni yillik teng to‘lovlar asosida yopish shartida amalga oshiriladigan bo‘lsa, yillik to‘lov qanday bo‘ladi?

Yechish. $R=\dfrac{D\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}=\dfrac{30000000\cdot 0,1}{1-1,1^{-5}}=7,913479,3 сўм.$

5. Qarzni yillik teng to‘lovlar orqali bir yilda bir necha marta to‘lov asosida yopish

Aytaylik, yillik R miqdordagi to‘lov bir yilda m marta amalga oshirilsin, u holda to‘lovlar nm marta bo‘ladi. Bu to‘lovlarga $\frac{i}{m}$ stavkada m marta foiz qo‘shiladi. Bu to‘lovlar rentani tashkil etib, uning jamg‘arma qiymati ushbuga teng.

$$S=\frac{R\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1\right]}{i/m}$$

Qarzni jamg‘arilgan qiymati esa $D\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$ bo‘ladi, ularni tenglashtiramiz

$$D\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}=\frac{R\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1\right]}{i/m}$$

$$R=\frac{D\cdot i\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}}{m\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1\right]}$$

6. Yuqori foizlar fond tashkil etish orqali qarzni yopish

Olingan qarz turli usullarda yopilishi mumkin. Masalan, qarzdor o‘zining pulini olingan qarz foizidan yuqori foizda fond tashkil etish orqali qarzni yopishi mumkin, aytaylik, *D* miqdordagi qarz *n* yilga murakkab foizdan *i* stavkada olingan bo‘lsin. U holda *n* – nchi yil oxirida qarz miqdori $D(1+i)^n$ ga o‘sadi. Fondga to‘lanadigan *R* miqdordagi to‘lov rentani tashkil etadi, agar fond stavkasi $g > i$ bo‘lsa, u holda fonddagi pul miqdori $S = \frac{R\left[(1+g)^n - 1\right]}{g} = D(1+i)^n$ tenglikdan topiladi.

$$R = \frac{D \cdot g\,(1+i)^n}{(1+g)^n - 1}$$

4-misol. **A**ytaylik, $D = 5000, i = 4\%, g = 8\%, n = 10$ bo‘lsin. Fondga to‘lanadigan yillik to‘lov miqdorini toping?

Yechish. $R = \frac{5000 \cdot 0{,}08 \cdot 1{,}04^{10}}{1{,}08^{10} - 1} = 510{,}91$

10.2. Iste’mol krediti. Imtiyozli kreditlar. Absolyut va musbat grant-element

Ayrim hollarda kreditlar imtiyozli beriladi. Eng keng tarqalgan kreditlardan biri berilgan momentda taklif etilayotgan kreditning kichik foiz stavkasida berilishidir. Natijada bunday imtiyozda qarzdor yaxshi mablag‘ imkoniyatiga ega bo‘ladi. Kreditor esa bunday operatsiyada ma’lum miqdorda mablag‘ni qo‘ldan chiqaradi. Berilgan momentning mablag‘lar bozorida past stavkada kredit berilishini grant-element (grant-element) deb yuritiladi. Grant-element ikki ko‘rinishda aniqlanadi: absolyut va nisbiy.

Absolyut grant-element miqdori quyidagicha topiladi:

$$W = D - G \tag{10.2.1}$$

bu yerda W - absolyut grant-element, D - qarz summasi, G - kredit bozorining real stavkasi bo‘yicha qarzni qoplash uchun tushadigan hozirgi to‘lovlar miqdori.

Nisbiy grant-element absolyut grant-elementning qarz summasiga bo‘lgan nisbati bilan aniqlanadi:

$$S = \frac{W}{D} = \frac{D-G}{D} = 1 - \frac{G}{D} \qquad (10.2.2)$$

S - nisbiy grant-element.

Endi W va S ni hisoblashning ishchi formulalarini qarz va foizlar o‘zgarmas zudlik to‘lovlari sharoiti uchun keltirib chiqaramiz.

Aytaylik, qarz n yilga berilgan bo‘lib, uni to‘lash imtiyozli g stavka bo‘yicha amalga oshirilsin. Pul bozorida shunga o‘xshash muddat bo‘yicha va qarz miqdori i stavka bo‘yicha beriladi. Bunday holda imtiyozli davr bo‘lmaganda zudlik to‘lovi

$$Y = \frac{D}{a_{n|g}}, \qquad (10.2.3)$$

qarzdorning barcha to‘lovlarining hozirgi qiymati esa $Ya_{n|i}$ ga teng. Natijada

$$W = D - Y a_{n|i} = D\left(1 - \frac{a_{n|i}}{a_{n|g}}\right) \qquad (10.2.4)$$

$$\delta = 1 - \frac{a_{n|i}}{a_{n|g}}, \qquad (10.2.5)$$

bunda $a_{n|i}, a_{n|g} - i$ va g foiz stavkalari uchun $(i > g)$ aniqlangan o‘zgarmas yillik postnumerando rentaning keltirilgan koeffitsiyentlari.

Misol. Imtiyozli kredit 10 yilga 3,8% ga berildi. Qarzni teng zudlik to‘lovlar asosida to‘lash ko‘zda tutilmoqda. Bunday muddat uchun bozor stavkasi 8%. Kreditning dastlabki miqdori 10 mln. so‘m bo‘lsa, nisbiy grant-element va absolyut grant-elementlarni toping.

$$\delta = 1 - \frac{a_{10|8}}{a_{10|3,8}} = 1 - 6{,}71008 \cdot \frac{0{,}038}{1 - 1{,}038^{-10}} = 0{,}1809$$

$W = 10 \cdot 0{,}1809 = 1{,}809$ mln. so‘m.

Demak, kreditorning yutqazgan pul miqdori yoki qarzdorning yutug‘i 1,809 mln. so‘mni tashkil etadi.

Agar imtiyozli davrda qarzdor foiz to‘lasa, u holda qarz bo‘yicha tushayotgan pul miqdori imtiyozli davrda foiz to‘lovlarining hozirgi qiymati va qolgan davrdagi zudlik to‘lovlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. Shunday qilib,

$$G = D_g \cdot a_{L|i} + Y \cdot a_{n-L|i} v^L \qquad (10.2.6)$$

bunda $n-L$ - qarzni to‘lash davrining davomiyligi; L - imtiyozli davrning davomiyligi. (10.2.5) formuladan

$$\delta = 1 - \frac{G}{D} = 1 - \left(\frac{a_{n-L|i} v^L}{a_{n-L|g}} + g \cdot a_{L|i} \right) \qquad (10.2.7)$$

hosil qilamiz. Bu formulani hosil qilish uchun (10.2.6) dan va $Y = D/a_{n-L|i}$ formuladan foydalanamiz:

$$\frac{G}{D} = g\, a_{L|i} + \frac{1}{a_{n-L|g}} \cdot a_{n-L|g} \cdot v^L$$

Natijada

$$\delta = 1 - \frac{a_{n-L|i}}{a_{n-L|g}} v^L + g \cdot a_{L|i}$$

10.3. Ipoteka ssudasi. Qarzlarni birlashtirish va almashtirish

Ipoteka ssudasi

Bozor iqtisodiyoti rivojlangan mamlakatlarda garovga berilgan ko‘chmas mulk yoki ipoteka keng tarqalgan. Bunday operatsiyada ko‘chmas mulk (yer, uy va h.k) egasi (mortgagor) shu mulk uchun garovga qarz oladi. Qarz belgilangan muddatda qaytarilmasa, garovga olingan mulk qarz beruvchining (mortgage) shaxsiy mulkiga aylanadi.

Odatda ssuda garovga olingan mulk narxidan kichik bo‘ladi. Ipoteka ssudasining afzalligi uni to‘lash muddatining kattaligidadir. Ipoteka ssudalari tijorat va maxsus ipoteka banklari tomonidan beriladi. Ipoteka ssudasi O‘zbekistonda ham joriy qilinmoqda. Respublikamizda bir nechta ipoteka banklari faoliyat ko‘rsata boshladi. Ipoteka ssudalarining bir nechta turlari mavjud.

To‘lovlarning o‘sib borishidagi ssudalar (graduated mortgage, GPM). Bunday turdagi ssudalarda birinchi yillarda qarz xizmatlari bo‘yicha xarajatlarning bir xil o‘sishi qaraladi. Qolgan vaqtlarda to‘lov o‘zgarmas badallar bo‘yicha amalga oshiriladi. Ipoteka ssudasining bunday variantida to‘lovlar kelishilgan grafik asosida har 3-5 yilda badallar summasi ortib boradi.

Imtiyozli davr ssudasi. Ipoteka sharoitida imtiyoz davrida qarz bo‘yicha faqat foizlar to‘lanadi. Yuqorida ta’kidlanganidek, ipoteka ssudasi uzoq muddatga beriladi. Shu sababli hatto iqtisod bir maromda bo‘lgan davrda ham risk bo‘ladi, xususan, kredit bozorida foiz stavkasining o‘zgarishi riskni yuzaga keltiradi. Bunday ipotekaga quyidagilar kiradi.

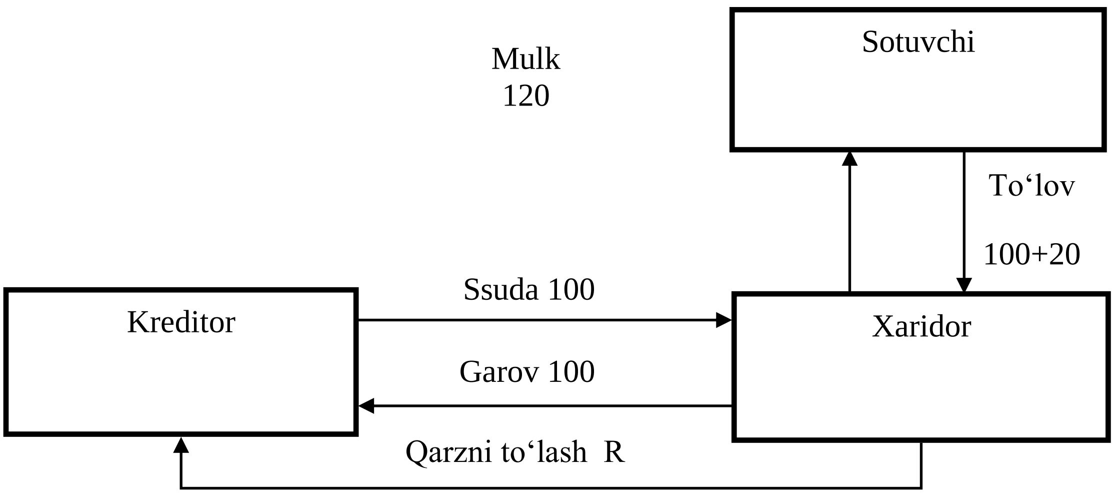
Foiz stavkasi davriy o‘zgarishidagi ssudalar (rollover mortgage, RM). Bunday ssudada tomonlar har 3-5 yilda foiz stavkasining o‘zgarish darajasini qarab chiqadilar. Natijada bozor sharoitiga ma’lum miqdorda moslashuv imkoniyati yaratiladi.

O‘zgaruvchi foiz stavkali ipoteka (variable-rate mortgage, VRM). Bu yerda stavka darajasi qandaydir keng tarqalgan moliyaviy ko‘rsatkichga yoki indeksga bog‘lanadi. Odatda stavkani qarab chiqish har yarim yilda amalga oshiriladi. Stavka o‘zgarishi tez-tez yuz bermasligi uchun stavkaning yuqori va quyi chegarasi qarab chiqiladi (masalan, 2% dan ko‘p emas).

Ipoteka tahlilining asosiy masalasi qarzni to‘lash rejasini ishlab chiqishdan iborat. Qarzni to‘lash jarayonining istalgan paytida qolgan qarzlar summasini aniqlash juda muhim.

Quyida uchta ipoteka sxemalari uchun bu muammoni yechish usullari muhokama qilinadi.

Garov uchun (qurilish) obyektni sotib olishda ipotekani amalga oshirish uchun uchta agent qatnashadigan bo‘lsin: sotuvchi, xaridor(qarzdor) va kreditor. Ular orasidagi o‘zaro bog‘lanish ushbu sxemada ko‘rsatilgan.



Sotuvchi xaridordan to‘la narxi (120) bo‘lgan qandaydir mulkni oladi. Buning uchun xaridor bu mulkdan garovga ssuda (100) oladi va o‘zining shaxsiy mablag‘iga (20) qo‘shadi. Natijada oylik qarz to‘lovi *R* ning miqdorini aniqlash va qarzni to‘la qoplashgacha bo‘lgan davrda qolgan qarzni to‘lash masalasi yuzaga keladi.

Darhaqiqat, qarz to‘lovlari (badallar) o‘zgarmas rentani tashkil etadi, qo‘yilgan masalani hal qilishda uzoq muddatli qarzlarni to‘lash rejasini ishlab chiqish usulini tatbiq etamiz. Buning uchun ssudaning miqdori bilan zudlik to‘lov miqdorini tenglashtiramiz. Oylik postnumerando badallar uchun $D = Ra_{N|i}$ formulani yozamiz, bundan D – ssuda miqdori; N - umumiy to‘lovlar soni, $N = 12n$ (n – yillardagi to‘lash muddati); i oylik foiz stavkasi; R oylik badallar miqdori; $a_{N|i}$ – o‘zgarmas rentaning keltirilgan koeffitsiyenti.

Izlangan badal qiymati

$$R = \frac{D}{a_{N|i}} \tag{10.3.1}$$

Prenumerando renta uchun

$$R = \frac{D}{a_{N|i}}(1+i) \tag{10.3.2}$$

(10.3.1) yoki (10.3.2) formulalardan topilgan zudlik to‘lovining qiymati qarz to‘lash rejasini ishlab chiqish negizi hisoblanadi.

Qabul qilingan qoidaga binoan bu summadan foizlar to‘lanadi, qolgan pullar qarzni to‘lashga sarflanadi.

Misol. Ko‘chmas mulk uchun garovga 100 mln. so‘m pul 10 yil muddatga qarzga berildi. To‘lov oylik postnumerando, qarz uchun 12% nominal yillik stavka bo‘yicha ustama foiz to‘lanadi. Qarzni to‘lash rejasi tuzilsin.

Yechish: $N = 12n = 12 \cdot 10 = 120,\quad i = \frac{0,12}{12} = 0,01,\quad a_{120|1} = 69,70052.$

Bu shartlar uchun qarzdorning oylik xarajatlari

$R = \frac{100\ \text{млн.сум}}{69,70052} = 1,434$ mln. so‘m.

Birinchi oy uchun foizlar

$100\ \text{млн. сум} \cdot 0,01 = 1$ mln. so‘m.

Qarzni to‘lash uchun 1,434-1=0,434 mln. so‘m. Qarzni to‘lash rejasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Endi boshqa masalaga o‘tamiz. Ssudani garovga berishda ikkala tomon uchun to‘langan qarz summasini va ixtiyoriy oraliq momentida (masalan, shartnomani bajarilmasligi yoki uni ko‘rib chiqish to‘xtatilganda) qarzning qancha qismi qolganini bilish muhim ahamiyatga ega.

Oy	oy boshida qolgan qarz miqdori	badal	foizlar	qarzni to‘lash
1	100,000	1,434	1,000	0,434
2	99,565	1,434	0,995	0,439
3	99,126	1,434	0,991	0,443
...				
37	81,274	1,434	0,813	0,622
38	80,652	1,434	0,806	0,628
39	80,018	1,434	0,800	0,634
…				
118	4,219	1,434	0,042	1,392
119	2,827	1,434	0,028	1,406
120	1,421	1,434	0,042	1,421

Ipoteka shartiga asoslangan holda quyidagi munosabatni yozamiz:

$$d_t = d_{t-1}(1+i) = d_1(1+i)^{t-1},$$

bunda d_t – to‘lanadigan qarz miqdori, t - oyning tartib nomeri, i - oylik foiz stavkasi.

Oy boshidagi qoldiq qarz

$$D_{t+1} = D_t - d_t, \qquad t = 1,...,12n$$

Qarzni ketma-ket to‘lash summalari birinchi hadi d_1 va maxraji $(1+i)$ ga teng bo‘lgan geometrik progressiyani tashkil etadi. Ma’lumki,

$$d_1 = R - Di \tag{10.3.3}$$

To‘lash boshidan t gacha (t - bu davr oralig‘iga kiradi) bo‘lgan davr orasida bu geometrik progressiyaning yig‘indisi

$$W_t = d_1\, S_{t|i} \tag{10.3.4}$$

bunda $S_{t|i}$ – o‘zgarmas postnumerando rentaning jamg‘arma koeffitsiyenti oy boshidagi qolgan qarzni quyidagi formuladan topamiz:

$$D_{t+1} = D_1 - W_t \tag{10.3.5}$$

<u>Qarzni to‘la to‘lamagan holdagi va muddat oxirida qoldiq qarzni to‘lashdagi standart ipoteka (ballon mortgage)</u>. Bunday ipotekaning sharti davriy badallar miqdorini kamaytirishga yoki ssuda muddatini qisqartirishga imkon yaratadi. Zudlik to‘lovi shunday hisoblanadiki, bunda ular hamma qarzni to‘la qoplamaydi. Muddat oxirida to‘lanadigan qoldiq (ballon) qarzni B bilan belgilaymiz.

Ipotekaning balans tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega

$$D = R a_{N|i} + B\nu^N$$

Quyidagi hollardan birida balansga erishiladi:

a) zudlik to‘lovining miqdori beriladi, B ning qiymati aniqlanadi:

$$B = (1+i)^N \cdot (D - R\, a_{N|i}$$

b) B beriladi, zudlik to‘lovining miqdori topiladi:

$$R = \frac{D_1 - B\nu^N}{a_{N|i}}$$

<u>Badallarning davriy ravishda o‘sishidagi ssuda</u>.

Bu variantda ipoteka badallar ketma-ketligi yordamida beriladi. Aytaylik, badallarning o‘sishi *m* vaqtning teng intervallari orqali amalga oshsin.

Har bir intervalda badal o‘zgarmas. Ravshanki, to‘la balanslash-tiruvchi sxema uchun oxirga badal miqdori berilmaydi, u qarzning qoldiqlari yig‘indisi bo‘yicha aniqlanadi.

Faraz qilaylik, badallar miqdori $R_1,\dots,R_k$ bo‘lsin. Oxirgi badal qiymatini aniqlaymiz. Buning uchun birdan $k-1$ gacha oraliqda operatsiya boshida badalning hozirgi narxini topamiz. Uni Q bilan belgilaymiz:

$$Q=\sum_{1}^{k-1} R_t\, a_{m|i} v^{(t-1)m}$$

Badallar bilan qoplanmagan qarzning hozirgi narxi oxirgi davr boshida

$$W=D-Q\,.$$

Bundan ipotekaning oxirgi davrida badal miqdori quyidagi formula yordamida topiladi:

$$R_k=\frac{W}{a_{m|i}\, v^{(k-1)m}}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Postnumerando to‘lovlari vaqt bo‘yicha bir xil oqimni tashkil etib, uning birinchi hadi 12 mln. so‘m. Har bir keyingi to‘lovlar har doim 2 mln. so‘mga ortadi. Yillik foiz stavkasi 20%. To‘lovlar muddati 5 yil. Shu ma’lumotlar bo‘yicha joriy va jamg‘arilgan pul miqdorlari topilsin.

2. Qazilma boylik chiqaradigan joyni ekspluatatsiya qilishdan keladigan daromad yiliga 2 mlrd. so‘m, ekspluatasiya davri 5 yil, qazib olingan mahsulotni ortish va ularni sotish uzluksiz bo‘lsin deb hisoblab, daromadni jamg‘arilgan narxi 10% stavka bo‘yicha diskontirlangandagi joriy qiymat topilsin.

3. Daromadning o‘sishi yiliga 10%. Agar $R = 100,\ i = 10\%,\ n = 2$ yil bo‘lsa, u holda joriy va jamg‘arma qiymat topilsin.

4. Abadiy postnumerando renta $R_t = 3$ mln. so‘m va 5 yil muddat sharti bilan 2 yilga renta muddati o‘zgarmagan holda qoldirildi. Foiz stavkasi yiliga 20% bo‘lsa, almashuvchi rentaning hadi topilsin.

5. $R = 3$ mln. so‘m, $n = 4$ yil, $i = 10\%$ shart bilan renta to‘lovlar o‘zgarishsiz qolgan holda 3 yilga qoldirilgan bo‘lsa, yangi muddatni toping?

6. 200 mln. so‘m pul 5 yilga 20%ga qarzga berilgan. Bu qarzni to‘lash uchun to‘lov fondi tashkil etiladi. Investirlanayotgan narsaga 22% stavka bo‘yicha foiz to‘lanadi. Agar fond 5 yilga tashkil etilgan bo‘lib, badallar har yil oxirida bir xil pul miqdorida amalga oshiriladigan bo‘lsa, zudlik to‘lov miqdori topilsin.

7. To‘lov fondiga yillik postnumerando renta bo‘yicha 5 yil davomida pul tushadi. To‘lov miqdori har gal 200 ming so‘mga ortib boradi. Qarzni qoplash momentidagi qarz miqdori 5 mln. so‘m bo‘lib, badallar 10% yillik stavka bo‘yicha ko‘payadigan bo‘lsa, to‘lov fondini tashkil etish uchun birinchi badal miqdori va yil oxiridagi jamg‘arma topilsin.

8. Uchta postnumerando rentalar – abadiy, yillik rentalar bitta qoldirilgan postnumerando renta bilan uch yilga almashadi. Shartnoma bo‘yicha almashadigan renta qoldirilganligini hisobga olgan holda 10 yil muddatga ega. Almashuvchi rentalarning xarakteristikalari $R_q = 100;\ 120;\ 200$ ming so‘m, ularning muddatlari 5; 10; 8 yil. Agar hisobda murakkab foiz stavkasi 20% deb qabul qilinsa, u holda bu rentaning boshlang‘ich (joriy) qiymati hamda almashuvchi rentalar hadlarining qiymatlari topilsin.

XI BOB. SARMOYA JARAYONLARI TAHLILI

11.1. Boshlang‘ich sarmoyali va o‘zgarmas daromad chekli loyihalar xarakteristikalarini hisoblash

Normal iqtisodiyotda ichki moliyaviy sferada mablag‘ni aylantirish bilan katta daromad olish mumkin emas. Sarmoya kiritish yo‘li orqali mablag‘ni ko‘paytirish mumkin. Buning uchun sarmoya jarayonlarini tahlil qilishni bilish kerak. Bunday jarayonlar – to‘lovlar oqimidir, bunda sarmoya manfiy, daromadlar musbat deb qabul qilinadi.

Ba’zi umumiy tushunchalarni qaraymiz. Aytaylik, $\{R_k, t_k\}$- sarmoya jarayoni bo‘lsin, bunda R_k to‘lov, t_k momentdagi to‘lovlar oqimi. Agar R_k musbat bo‘lsa – bu daromad, manfiy bo‘lsa xarajat yoki sarmoya. Jarayon chekli deyiladi, agar oxirgi to‘lov mavjud bo‘lsa, aks holda cheksiz deyiladi.

Keltirilgan sof daromad $NPV(Net\ \mathrm{Pr}esent\ Value)$ deb i foiz stavkadagi 0 ga qadar diskontirlangan barcha to‘lovlar oqimining algebraik yig‘indisiga aytiladi.

$$NPV = \sum_k \frac{R_k}{(1+i)^{t_k}}$$

jarayon chekli bo‘lgan hol uchun jamg‘arilgan sof daromad $NFV(Net\ Future\ Value)$ ni aniqlash mumkin. Uning qiymati i foiz stavka bo‘yicha oxirgi t_n to‘lovgacha diskontirlashgan to‘lovlar oqimining algebraik yig‘indisidan iborat.

$$NFV = \sum_k \frac{R_k}{(1+i)^{t_k - t_n}}$$

Ravshanki, $NFV = NPV(1+i)^{t_n}$

Agar $NPV > 0$ bo‘lsa jarayon qoplanadi deyiladi.

Biz faqat 0 momentdagi sarmoya jarayonlarini qaraymiz, boshqa to‘lovlar musbat, ya’ni bular daromadlar bo‘lgan holni qaraymiz. Bunday jarayonlar xarakteristikalaridan biri jarayonning ichki samaradorligi q, ya’ni eng kichik musbat son, q stavka bo‘yicha 0 momentga diskontirlangan to‘lovlarning algebraik yig‘indisi 0 ga teng, ya’ni

$$\sum_k \frac{R_k}{(1+q)^{t_k}} = 0$$

Ravshanki, $i < q$ bo‘lsa jarayon qoplanadi. Ushbu masalani yechamiz: yil boshida ushbu miqdorda sarmoya kiritilgan $InV = 2000,$ so‘ngra 4 yil mobaynida $R_1 = 1000, R_2 = 800, R_3 = 800, R_4 = 600$ daromadlar olingan.

Foiz stavkasi yillik 8%.

Ayniqsa xarakteristikalarini hisoblaymiz.

-2000	1000	800	800	600
0	1	2	3	4
	$-2000\cdot 1{,}08$	$-1160\cdot 1{,}08$	$-452{,}8\cdot 1{,}08$	$311\cdot 1{,}08$
	$+\ 1000$	$+\ 800$	$+\ 800$	$+\ 600$
	-1160	$-452{,}8$	311	$935{,}9$

oxirgi hosil qilingan son $NFV = 935{,}9$

$$NPV = \frac{NFV}{(1+i)^n} = \frac{935{,}9}{1.08^4} = 688{,}2$$

Loyiha samaradorligi

$$0| = \frac{NPV}{(-InV)} = \frac{688{,}2}{2000} = 0{,}344 \text{ yoki } 34{,}4\%$$

11.2. Qarzni yopish muddatini aniqlash

Agar t – qarzni yopish muddati bo‘lsa, u holda t minimal bo‘lib, barcha n sonlar uchun

$$InV + Ra_{T>i} \geq 0 \quad \text{yoki} \quad a_{T>i} \geq -\frac{InV}{R},$$

ammo $a_{T>i} = \dfrac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$ bo‘lganligi uchun

$$T \geq -\frac{\ln\left(1+\frac{InV}{R}\cdot i\right)}{\ln(1+i)},\ T = \left[\frac{\ln\left(1+\frac{InV}{R}\cdot i\right)}{\ln(1+i)}\right]+1$$

Loyihaning ichki samaradorligi $InV + R \cdot a_{n/q} = 0$ shartni hisob-lantiradi.

Agar bu tenglama bir necha yechimga ega bo‘lsa, ular ichida eng kichigi olinadi. Agar $-InV \geq nR$ bo‘lsa, u holda yuqoridagi tenglama yechimga ega emas,

$$Ra_{n>q} = \frac{R}{1+q} + \frac{R}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+q)^n} < nR < -InV$$

Shuning uchun $-InV < nR$. Bunday holda izlanayotgan q mavjud va uni iteratsiya usulida hisoblash mumkin, jarayon $-InV < \frac{R}{1+q} + \frac{R}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+q)^n}$ tengsizlik o‘rinli bo‘lmagunga qadar davom etadi.

Ushbu masalani yechamiz: $InV = -10000,\ R = 2000, n = 10,\ i = 10\%$ bo‘lsa loyiha xarakteristikalarini toping.

Yechish. 1) Qarzni yopish muddatini topamiz

$$T = \left[-\frac{\ln\left(1 - \frac{1000}{2000} \cdot 0{,}1\right)}{\ln(1+0{,}1)} \right] + 1 = 8$$

2) NPV ni topamiz.

$$NPV = InV + \frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} = -10000 + \frac{2000\left(1-1{,}1^{-10}\right)}{0{,}1} = 2289$$

Loyiha samaradorligi

$$d = \frac{NPV}{(1-InV)} = \frac{2289}{10000} = 0{,}2289 \qquad \text{yoki } 22{,}89\%.$$

11.3. Sarmoya miqdorini aniqlash. Jarayonlar xarakteristikalarining foiz stavkasiga bog‘liqligi

Aksionerlar kompaniyasi sarmoya loyihasini ishlab chiqadi. Aksionerlar loyiha muddati n, sarmoya miqdori InV ga rozi bo‘ladilar, faqat ular odatdagi i foiz stavkadan katta bo‘lgan j samaradorlik bilan ta’minlashini talab qiladilar. Bunda yillik minimal daromad R qancha bo‘lishi shart!

Ravshanki, yillik daromad ushbu tenglamani qanoatlantirish kerak.

$- InV = R \cdot a_{n>j}$, $- InV = \frac{R\left[1-(1+j)^{-n}\right]}{j}$ bunda $R = -\frac{jInV}{1-(1+j)^{-n}}$

Jarayonlar xarakteristikasini foiz stavkasiga bog‘liqligi

Jarayonni ushbu berilganlar bo‘yicha qaraymiz: InV, R, n. Ma’lumki, daromadlar oqimining joriy qiymati

$A = R \cdot a_{n>i}$ bunda $a_{n>i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$

Ko‘rinib turibdiki, i ning o‘sishi bilan bu yig‘indi kamayadi. Ya’ni $a_{n>i}$ kamayadi. Shuning uchun xulosa chiqarish lozim: foiz stavkasi ortganda keltirilgan sof daromad $NPV = InV + R \cdot a_{n>i}$ kamayadi, bundan kelib chiqadiki, qarzni yopish muddati ortadi. Ichki samaradorlik foiz stavkasiga bog‘liq emas, u daromadlar oqimi va sarmoya miqdoriga bog‘liq bo‘ladi. Shunday qilib, sarmoya loyihasi bitta foiz stavkasi bilan yopiladi va katta foiz stavkada yopilmaydi.

XII BOB. QIMMATLI QOG‘OZLAR BOZORI

12.1. Obligatsiyalar va uning kursi

Qimmatli qog‘ozlar bozori savdo kapitalining rivojlanish bo‘sag‘asida paydo bo‘lgan va ko‘pchilik g‘arb mamlakatlarida u xo‘jalik mexanizmining eng barqaror va yo‘lga qo‘yilgan qismlaridan biri hisoblanadi.

O‘zbekistonda qimmatli qog‘ozlar bozorining paydo bo‘lishi davlat korxonalarini xususiylashtirish va aksiyadorlik korxonalariga aylantirish jarayonlari bilan bog‘liq.

Bu bozor boshqa barcha bozorlardan eng avvalo unda aylanadigan tovar - qimmatli qog‘ozlar bilan ajralib turadi. O‘z navbatida, ularning aylanishi bu bozor ishtirokchilarining alohida tarkibi, uning qoidalari va hokazoni belgilaydi.

Qimmatli qog‘ozlarning eng keng tarqalgan turi obligatsiyalar hisoblanadi.

Obligatsiya – uning egasi pul mablag‘lari to‘langanligini bildiradigan va unga qat’iy foiz to‘lagan holda belgilangan muddatda o‘z nominal qiymatini qoplash majburiyatini tasdiqlaydigan qimmatli qog‘oz.

Obligatsiyani chiqargan tashkilot (emitent) pul qarz oluvchi va obligatsiya xarid qilgan tomon (investor) kreditor sifatida namoyon bo‘ladi.

Obligatsiyaning aksiyadan asosiy farqlari quyidagicha:

- unda ko‘rsatilgan muddat mobaynidagina daromad keltiradi;
- odatda egasiga oldindan ko‘rsatilgan foiz bo‘yicha daromad keltiradi;
- aksiyadorlik jamiyatining obligatsiyasi uning egasiga ushbu jamiyat aksiyalari sifatida harakat qilish huquqini bermaydi.

Obligatsiyalarni sotib olish aksiyalarni sotib olishga nisbatan xavfsizroq hisoblanadi. Kompaniya singan holda obligatsiya egasi faqat oddiy aksiya egasigagina emas, balki imtiyozli aksiya egasiga nisbatan ham oldinroq qarzini undirish huquqiga ega.

Obligatsiyalar quyidagi turlarda chiqariladi:

1. Davlat va mahalliy ichki zayom obligatsiyalari.
2. Korxonalarning obligatsiyalari.

Ular oddiy va yutuqli, foizli va foizsiz (maqsadli) erkin muomalada bo‘ladigan va muomala doirasi cheklangan qilib chiqarilishi mumkin.

Obligatsiyalarning nominal narxi, qaytarib olish narxi va bozor narxi bo‘ladi.

Nominal narx obligatsiyaning o‘ziga yozib qo‘yiladi hamda keyingi qayta hisoblashlar va foizlarni chiqarish uchun asos bo‘ladi.

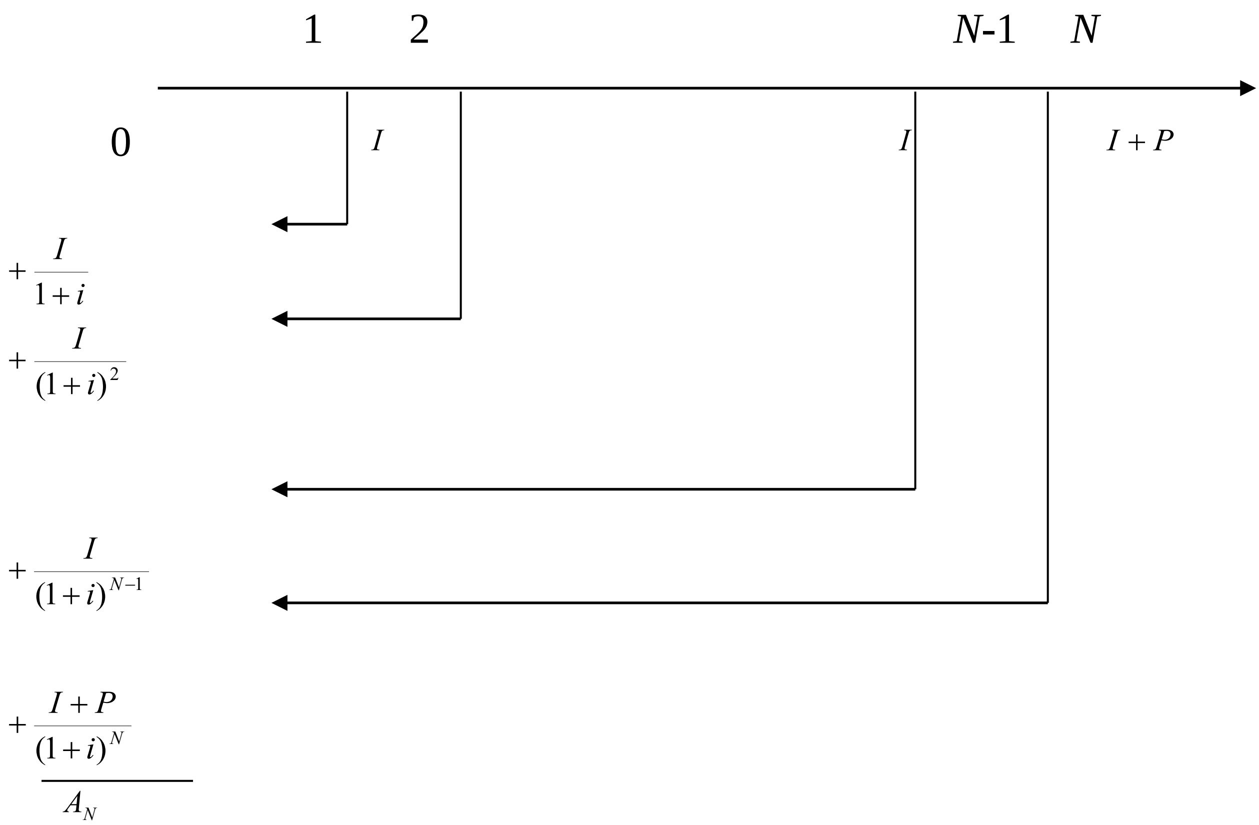
Qaytarib olish narxi-zayom muddati tugagandan so‘ng emitent obligatsiyani qaytarib oladigan narx nominal narxdan farq qilishi mumkin. Obligatsiyaning nominaliga nisbatan foizlarda ifodalangan bozor narxi obligatsiya kursi deb ataladi.

Har qanday qimmatbaho qog‘ozning narxi, bu qog‘ozlar bilan bog‘liq holda to‘lovlar oqimining joriy qiymati kabi aniqlanadi.

Obligatsiya holatida to‘lovlar oqimi kuponli foizlar to‘lovidan iborat bo‘lgan oddiy rentani tashkil etadi. Obligatsiyaning joriy qiymati bunday rentaning joriy qiymatiga teng bo‘ladi.

Aytaylik, $i-$ joriy foiz stavkasi, $P-$obligatsiyaning nominal narxi, k-kuponli foiz stavkasi, $I=P\cdot k-$kuponli to‘lov miqdori, A_N-obligatsiyaning bozordagi joriy narxi, $N-$ obligatsiya to‘lovigacha bo‘lgan muddat.

Bu holat uchun quyidagicha to‘lovlar diagrammasini keltiramiz:



Bunday holda

$$A_N = \frac{I}{1+i} + \frac{I}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{I}{(1+i)^{N-1}} + \frac{I+P}{(1+i)^N} \qquad (12.1.1)$$

yoki

$$A_N = I\frac{1-(1+i)^{-N}}{i} + P(1+i)^{-N} \qquad (12.1.2)$$

Bu narx nominal narxga teng bo‘lishi uchun ushbu tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak.

$P = I \cdot \frac{1-(1+i)^{-N}}{i} + P(1+i)^{-N}$ yoki $P(1-(1+i)^{-N}) = \frac{I}{i} \cdot (1-(1+i)^{-N})$ bundan $I = P \cdot i,$ ya’ni $i = k$ kelib chiqadi.

Demak, agar kuponli foiz stavkasi foiz stavkasiga teng bo‘lsa, obligatsiya narxi nominal narxga teng bo‘lar ekan.

1-misol. Qandaydir X kompaniya har birining narxi 1000 so‘mdan bo‘lgan 50 mingta obligatsiya sotib, 50 mln. so‘m pul miqdorida kredit olgan bo‘lsin. Bu kompaniya obligatsiya egalari uchun tayinlangan muddat ichida foiz to‘lash majburiyatini oldi, agar X kompaniyaning obligatsiyasi 2000-yil 2-yanvarda chiqarilgan bo‘lib, 2015-yil 1-

yanvarda to‘lash mo‘ljallangan bo‘lsa, u holda obligatsiyaning to‘lov muddati 15 yil bo‘ladi. Agar *X* kompaniya har bir obligatsiya uchun yiliga 150 so‘m to‘lasa, u holda kuponli foiz stavka $\frac{150}{1000}=0,15=15\%$ ni tashkil etadi. Bunday holda emissiya paytidagi *X* kompaniya obligatsiyasining joriy qiymati bozordagi foiz stavka 15% bo‘lganda nominal qiymatiga teng bo‘ladi.

Haqiqatan,

$$A_{15} = \sum_{i=1}^{15}\frac{150}{(1,15)^t}+\frac{1000}{(1,15)^{15}}=150\cdot\frac{1-(1,15)^{-15}}{0,15}+1000\cdot(1,15)^{-15}=1000$$ so‘m.

Aytaylik, *X* kompaniyaning obligatsiyasi chiqarilgan kundan boshlab bir yil davomida foiz stavkasi 10% gacha kamaygan va kuponli foiz stavkalari o‘zgarmasdan qolgan bo‘lsin, u holda obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab 1 yil o‘tgandan so‘ng obligatsiyaning bozor narxi ushbuga teng bo‘ladi:

$$A_{14}=\frac{150}{1,1}+\frac{150}{1,1^2}+\ldots+\frac{150}{1,1^{14}}+\frac{1000}{1,1^{14}}=150\cdot\frac{1-1,1^{-14}}{0,1}+1000\cdot(1,1)^{-14}=1368,33$$ so‘m,

ya’ni nominaldan yuqori $1368,33|1000$ obligatsiya narxining o‘sishi shu bilan belgilandiki, bunda foiz stavkasining pasayishi yangi chiqariladigan obligatsiya kuponli stavkasining kamayishiga olib keladi, ya’ni yangi chiqarilgan 1000 so‘mlik obligatsiya yiliga 150 so‘m emas, balki 100 so‘m daromad keltiradi. Demak, eski chiqarilgan, ya’ni 15% kupon stavkali obligatsiyaga talab ortadi. 10% kuponli obligatsiya qancha daromad keltirsa, 1368,33 so‘mlik obligatsiya ham shunday daromad keltiradi.

Agar bozor foiz stavkasi qolgan 14 yil mobaynida o‘zgarmas 10% bo‘lib qolsa, u holda X kompaniya obligatsiyasining narxi sekin-asta 1368,33 so‘mdan 1000 so‘mga qadar tushib ketadi. 10% li obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab ikki yil o‘tgandan so‘ng uning narxi

$$A_{13}=150\cdot\frac{1-(1,1)^{-13}}{0,1}+1000\cdot(1,1)^{-13}=1355,17$$ so‘mni tashkil etadi.

1368,33 so‘mga olingan obligatsiyani sotishdan ko‘riladigan zarar

1368,33 – 1355,17=13,16 so‘m.

Sotishdan keladigan umumiy daromad

150 – 13,16=136,84 so‘m.

Qimmatbaho qog‘ozlarning narxidan boshqa ularning asosiy xarakteristikalaridan biri daromadlilik yoki foyda normasi hisoblanadi.

$$Narx\, o‘zgarishi\, hisobi\, uchun\, daromadlilik\,(davr\, uchun) =$$

$$= \frac{kuponni\, stavka\, miqdori}{davr\, boshidagi\, obligasiya\, narxi} = \frac{150}{1368,33} = 0,1096 = 10,96\% \qquad (12.1.3)$$

$$Narx\, o‘zgarishi\, hisobi\, uchun\, daromadlilik\,(davr\, uchun) =$$

$$= \frac{davr\, boshidagi\, harx - davr\, oxiridagi\, narx}{davr\, boshidagi\, obligasiya\, narxi} = -\frac{13,16}{1368,33} = -0,00096 = -0,96\% \qquad (12.1.4)$$

$$Foyda\ normasi\,(davr\, uchun) =$$

$$= \frac{kuponni\ to‘\mathrm{lov}\ miqdori + obligasiya\, narxining\ farqi}{davr\, boshidagi\ obligasiya\ narxi} =$$

$$= \frac{150 - 13,6}{1368,33} = \frac{136,4}{1368,33} = 0,1001 = 10\% \qquad (12.1.5)$$

Endi bozor foiz stavkasi emissiya davridan birinchi yil mobaynida 15% dan 20% ga ortgan holni qaraylik. Bunday holda obligatsiya narxi tushadi. Obligatsiya narxi birinchi yil oxirida

$$A_{14} = \frac{150}{1,2} + \frac{150}{1,2^2} + \ldots + \frac{150}{1,2^{14}} + \frac{1000}{1,2^{14}} = 150 \cdot \frac{1 - (1,2)^{-14}}{0,2} + 1000 \cdot (1,2)^{-14} = 769,47$$

so‘m.

Bunday holda birinchi yil oxirida obligatsiya 230,53 diskont bilan sotilishi mumkin.

$$Diskont = bozor\, narxi - no\min al\, narxi$$

$$-230,53 = 769,47 - 1000 \qquad (12.1.6)$$

Obligatsiyaning daromadliligini hisoblash uchun emissiya davridan ikkinchi yil oxiriga qadar uning bozor narxini topamiz.

$$Joriy\, daromadlilik = \frac{150}{769,47} = 0,1949 = 19,49\%$$

$$Narx\ o‘zgarishi\, hisobi\, uchun\, daromadlilik =$$

$$=\frac{773,37-769,47}{769,47}=\frac{4,9}{769,47}=0,0051=0,51\%$$

Demak,

$$daromadlilik=\frac{150+773,37-769,47}{769,47}=0,20=20\%$$

12.2. Davriy ravishda kupon foizi to‘lanadigan obligatsiya kursi va samaradorligi

Faraz qilaylik, kupon stavkasi q, foiz stavka i bo‘lib, obligatsiyaning nominal narxi N bo‘lsin. U holda kupon to‘lovlari $\{qN\}$ abadiy rentani tashkil etadi. Bu to‘lovlarni i foiz stavka bo‘yicha diskontirlab, bu rentaning hozirgi narxi P ni topamiz va bu obligatsiyaning bozordagi narxini ifodalaydi. Shunday qilib,

$$P=\frac{qN}{1+i}+\frac{qN}{(1+i)^2}+...=\frac{qN}{i} \quad .$$

Bu tenglikni har ikkala qismini N ga bo‘lib, obligatsiya kursi K ni topamiz

$K=\frac{q}{i}$, foizda ifodalasak $K=\frac{100q}{i}$.

Agar kupon to‘lovlari bir yilda p marta $\frac{qN}{p}$ dan amalga oshirilsa, u holda bir yilda yana qN to‘lov hosil bo‘ladi, bunday holda $\left\{\frac{qN}{p}\right\}$ to‘lovlarni $(1+i)^{1/p}$ stavka bo‘yicha diskontirlab ushbu formulani hosil qilamiz.

$$K=\frac{q}{P\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-p\right]}$$

Aytaylik, endi obligatsiyaning kursi K ma’lum bo‘lsin. Endi obligatsiyaning joriy samaradorligini topamiz. Agar kupon to‘lovlari yiliga bir marta amalga oshirilsa, u holda obligatsiya yiligi qN daromad keltiradi, bu uchun p miqdorda pul sarflangani uchun samaradorlik $j=\frac{qN}{p}$ bo‘ladi yoki $j=\frac{q}{K}$. Agar kurs foizda ifodalansa $j=\frac{100q}{K}$.

Bunday turdagi obligatsiyaning samaradorligini aniqlashning boshqacha usulini ham ko‘rishimiz mumkin.

Aytaylik, obligatsiya samaradorligi j bo‘lsin, u holda kupon to‘lovlari obligatsiya narxiga teng bo‘lgan summani shu stavka bo‘yicha jamg‘aradi, bunday holda to‘lovlar oqimining hozirgi qiymatiga teng bo‘lgan summani hosil qilamiz, aynan shu summa obligatsiya narxi bo‘ladi. Kupon to‘lovlari abadiy rentani tashkil etadi, bu rentaning hozirgi qiymati $\frac{qN}{j}$ ga teng. Bunday holda ushbu tenglamaga ega bo‘lamiz.

$$\frac{qN}{j} = KN, \quad \text{bundan} \quad j = \frac{q}{K} \quad \text{yoki} \quad j = \frac{100q}{K}.$$

Qaralayotgan bunday obligatsiyalar uchun joriy va to‘la samaradorlik mos tushadi.

Agar kupon to‘lanmaydigan obligatsiyani qaraydigan bo‘lsak, u holda bunday obligatsiya daromadi N va p lar ayirmasi bo‘yicha topiladi. Agar joriy to‘lov bo‘lmasa, joriy samaradorlik nolga teng bo‘ladi. Agar obligatsiya muddatiga m yil qolganda sotib olinsa, u holda N to‘lovgacha i stavka bo‘yicha diskontirlab hozirgi qiymatini hosil qilamiz.

$p = \frac{N}{(1+i)^m}$, bundan $K = \frac{1}{(1+i)^m}$ yoki foizlarda obligatsiya kursi $K = \frac{100}{(1+i)^m}$.

Endi obligatsiya narxi ma’lum bo‘lganda obligatsiya narxini topamiz. Bu oson topiladi: j stavka bo‘yicha m yilda jamg‘arilgan obligatsiya narxi p obligatsiyaning nominal narxiga teng bo‘ladi.

$$p(1+j)^m = N \qquad \text{yoki} \quad K = \frac{1}{(1+j)^m}$$

bundan $j = \left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{m}} - 1$ yoki foizda $j = \left(\frac{100}{K}\right)^{\frac{1}{m}} - 1$.

Endi kuponsiz obligatsiyani yopishda kupon foizi to‘lanadigan obligatsiya kursi va samaradorligini qaraymiz.

Bunday obligatsiya uchun foizlar q kupon stavkasi bo‘yicha murakkab foizda muddat oxirida to‘lanadi. Bunday holda ham joriy to‘lov yo‘q, demak joriy samaradorlik nolga teng. Aytaylik, q, i – mos ravishda kupon stavka va foiz stavka bo‘lsin va obligatsiya chiqqanidan n yil o‘tgandan so‘ng obligatsiya yopilsin. U holda obligatsiya egasiga $N(1+q)^n$ miqdorda pul to‘lanadi.

Aytaylik, obligatsiya yopilishiga m yil qolganda sotib olingan bo‘lsin. Bu muddatga $N(1+q)^n$ summani i stavka bo‘yicha diskontirlab obligatsiyaning bozordagi narxi p ni hosil qilamiz.

$p=\frac{N(1+q)^n}{(1+i)^m}$, bundan obligatsiya kursi $K=\frac{N(1+q)^n}{(1+i)^m}$.

Endi obligatsiya samaradorligini topamiz. j stavka bo‘yicha jamg‘arilgan narx p ma’lum, m yil davomida u $N(1+q)^n$ ga o‘sadi. Shuning uchun

$$p(1+j)^m=N(1+q)^n, \text{ bundan } j=\frac{(1+q)^{\frac{n}{m}}}{k^{\frac{1}{m}}}-1$$

12.3. Obligatsiya narxining (kursining) foiz stavkasiga bog‘liqligi

Obligatsiyaning eng umumiy turini qarab chiqamiz, ya’ni davriy ravishda foiz to‘lanadigan va davriy ravishda yopiladigan obligatsiyani qaraymiz. Bunday obligatsiyaning narxi obligatsiyaning nominali N ni hozirgi qiymatga diskontirlangan qiymati bilan $\{qN\}$ kupon to‘lovlarining yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

Haqiqatan,

$$p=qN\frac{\left[1-(1+i)^{-m}\right]}{i}+N(1+i)^{-m} \qquad (12.3.1)$$

Ravshanki, ikkala qo‘shiluvchining qiymati foiz stavkasi i ning o‘sishi bilan kamayadi, demak obligatsiya narxi tushadi.

Bu narx nominal narxga teng bo‘lishi uchun ushbu tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak.

$$N=\frac{qN\left[1-(1+i)^{-m}\right]}{i}+N(1+i)^{-m}$$

$$1=\frac{q}{i}\left[1-(1+i)^{-m}\right]+(1+i)^{-m}$$

$$1-(1+i)^{-m}=\frac{q\left[1-(1+i)^{-m}\right]}{i}$$ bundan $i=q$ kelib chiqadi.

Demak, agar kuponli stavka foiz stavkaga teng bo‘lsa, obligatsiya narxi nominal narxga teng bo‘ladi.

Misol. Qandaydir χ kompaniya har birining narxi 1000 so‘mdan bo‘lgan 50 mingta obligatsiya sotib, 50 mln.so‘m pul miqdorda kredit olgan bo‘lsin. Bu kompaniya obligatsiya egalari uchun tayinlangan muddat ichida foiz to‘lash majburiyatini oldi, agar χ kompaniyaning obligatsiyasi 2000-yil 2-yanvarda chiqarilgan bo‘lib, 2015-yil 1-yanvarda to‘lash mo‘ljallangan bo‘lsa, u holda obligatsiyaning to‘lov muddati 15 yil bo‘ladi. Agar χ kompaniya har bir obligatsiya uchun yiliga 150 so‘m to‘lasa, u holda kuponli foiz stavka $\frac{150}{1000}=0{,}15$ yoki 15% bo‘lganda nominal qiymatiga teng bo‘ladi.

Haqiqatan,

$$p=1000\cdot 1{,}15^{15}+\frac{150\cdot\left[1-1{,}16^{-15}\right]}{0{,}15}=1000$$ so‘m.

Aytaylik, χ kompaniyaning obligatsiyasi chiqarilgan kundan boshlab bir yil davomida foiz stavkasi 10% gacha kamaygan va kuponli foiz stavkalari o‘zgarmasdan qolgan bo‘lsin, u holda obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab 1 yil o‘tgandan so‘ng obligatsiyaning bozor narxi ushbuga teng bo‘ladi.

$$p=1000\cdot 1{,}1^{-14}+\frac{150\cdot\left[1-1{,}1^{-14}\right]}{0{,}1}=1368{,}33$$ so‘m, ya’ni nominaldan yuqori 1368,33/1000 obligatsiya narxining o‘sishi shu bilan belgilanadiki, bunda foiz stavkasining pasayishi yangi chiqarilgan obligatsiya kuponli stavkasining kamayishiga olib keladi, ya’ni yangi chiqarilgan 1000 so‘mlik obligatsiya yiliga 150 so‘m emas, balki 100 so‘m daromad keltiradi. Demak, eski chiqarilgan, ya’ni 15% kupon stavkali obligatsiyaga talab ortadi. 10% kuponli obligatsiya qancha daromad keltirsa, 1368,33 so‘mlik obligatsiya ham shunday daromad keltiradi.

Agar bozor foiz stavkasi 14 yil davomida o‘zgarmas 10% bo‘lib qolsa, u holda χ kompaniya obligatsiyasining narxi sekin-asta 1368,33 so‘mdan 1000 so‘mga qadar tushib ketadi. 10% li obligatsiya chiqarilgan kundan boshlab ikki yil o‘tgandan so‘ng uning narxi

$p = 1000 \cdot 1{,}1^{-13} + \dfrac{150 \cdot \left[1 - 1{,}1^{-13}\right]}{0{,}1} = 1355{,}17$ so‘mlik tashkil etadi.

1368,33 so‘mga olingan obligatsiyani sotishdan ko‘radigan zarar $150 - 13{,}16 = 136{,}84$ so‘m.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Har yili bir marta davriy ravishda amalga oshiriladigan foiz to‘lovlari $q = 8\%$ va $i = 5\%$ bo‘lgandagi obligatsiya kursini toping. Xuddi shu obligatsiyaning kursi 120 bo‘lsa, uning samaradorligi qanday bo‘ladi?

2. Kuponsiz obligatsiya yopilishiga 5 yil qolganda foiz stavka $i = 6\%$ bo‘lsa, obligatsiya kursini toping. Xuddi shu obligatsiya kursi 70 bo‘lsa uning samaradorligini toping?

3. Kuponsiz obligatsiyaning kupon to‘lovi bo‘yicha kursi kompyuter yordamida 212,7 ekanligi topildi. Agar kupon stavkasi 10%, obligatsiya muddati 10 yil bo‘lib, yopilishiga 4 yil qolganda foiz stavka 6% bo‘lsa, kompyuter hisobini tekshirib ko‘ring.

4. Har yili davriy ravishda to‘lov amalga oshiriladigan obligatsiya kursini kupon stavkasi 8% va foiz stavkasi 5% bo‘lganda toping.

XIII BOB. NOANIQLIK SHAROITIDA MOLIYAVIY OPERAtSIYA NARXINING KLASSIK SXEMASI

13.1.Risk tushunchasi

Ishlab chiqarish investitsiyasining moliyaviy tahlilida biz xarajat va to‘lov ko‘rsatkichlarining bir qiymatli emasligiga duch kelamiz. Shunga bog‘liq ravishda riskni o‘lchash va uning investitsiya natijasiga ta’sir etish muammosi kelib chiqadi.

Iqtisodiy faoliyatda riskni o‘lchash bilan bog‘liq masalalar qadimgi adabiyotlarda yetarli darajada o‘rganilmaganligining guvohi bo‘lamiz. Risk to‘g‘risida iqtisodchi olimlarning fikrlari xilma-xil bo‘lib, ular bu tushunchaning mohiyatini turlicha talqin qilayotirlar. Buning sababi shundaki, risk keng ma’noli, faoliyatning, jarayonlarning turli bosqichlarida uchrab turuvchi ko‘p qirrali tushunchadir. Risk kutilmagan hodisalar yuzaga kelganda yo‘qotish xavfi yoki imkoniyatidir deb ta’rif beradi G.Panova.

Taniqli iqtisodchi olim O.I.Lavrushin fikricha risk ehtimoliy hodisaning qiymat o‘lchovi bo‘lib, u yo‘qotishlarga olib keladi.

Kredit riski deb qarz oluvchi tomondan kredit shartnomasi shartlarining bajarilmasligi, ya’ni kredit summasining (qisman yoki to‘liq) va u bo‘yicha foizlarning shartnomada ko‘rsatilgan muddatlarda to‘lanmasligi tushuniladi.

Keng tarqalgan risk atamasi bir qiymatli emas, uning mazmuni aniq masalalar orqali yoritiladi. Bunga misol qilib quyidagi tushunchalarni, masalan, qarz berishdagi, valyuta ayirboshlashdagi, investitsiya qilishdagi siyosiy va texnologik risklar va hokazolarni olish mumkin.

Iqtisodiy amaliyotda, ayniqsa, moliyaviy faoliyatda risk va noaniqlik orasida tafovut yo‘q deb hisoblanadi.

Investitsion qarorlarni qabul qilishda riskni kamaytirish yo‘llaridan biri diversifikatsiya (umumiy investitsiya summasini bir qancha obyektlarga taqsimlash) hisoblanadi. Diversifikatsiya har qanday ko‘rinishdagi riskni kamaytirish quroli sifatida qabul qilingan.

Investitsion tahlilda va sug‘urtaviy ishda risk dispersiya va o‘rta-cha kvadratik chetlanish kabi statistik sonli xarakteristikalar yordamida o‘lchanadi. Bu ikkala kattaliklar daromad tebranishini o‘lchaydi. Ular qancha katta bo‘lsa, daromadning shu o‘rtacha atrofida yoyilishi shuncha katta bo‘lib, risk darajasi yuqori bo‘ladi.

Ravshanki, dispersiya D va o‘rtacha kvadratik chetlanish σ orasida

$$\sigma = \sqrt{D}$$

bog‘liqlik mavjud. O‘z navbatida dispersiya o‘rtacha tanlanma $\bar{x}$ orqali

$$D = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

formula yordamida topiladi. Bu yerda n – kuzatishlar soni, $\bar{x}$ – tasodifiy o‘zgaruvchi x ning o‘rta qiymati.

13.2. Investorning riskka bo‘lgan munosabati

Ma’lumki, kishilar riskka turlicha munosabatda bo‘ladilar, ayrimlari tavakkal qilishni yoqtirmaydi, ayrimlari esa o‘zlarini “omadli” hisoblaydilar. Investorning riskni qabul qilmasligini baholash mumkin. Buni lotereyalar misolida ko‘ramiz.

Faraz qilaylik, $1, 2, \ldots, n$ yutuqlarga ega bo‘lgan n ta lotereya berilgan bo‘lsin. Bu yutuqlar investorning qarashi bo‘yicha teng qiymatli emas.

Oddiy lotereya deb, yutuqlar to‘plamidagi $L = (p_1, \ldots, p_n)$ ehtimollar taqsimotiga aytiladi. Oddiy lotereyalardan murakkabroq lotereyalarni qurish mumkin. k ta oddiy $L_1, \ldots, L_k$ lotereyalarni olamiz. Har biriga p_i, $i = 1, \ldots, k$ ehtimolni yozib murakkab lotereya $(L_1, p_1, \ldots, L_k, p_k)$ ni hosil qilamiz.

Bu lotereya quyidagicha yoritiladi: avval mos keluvchi tasodifiy mexanizm yordamida $(p_1,...,p_k)$ ehtimollar taqsimoti o‘ynaladi va $1,...,k$ nomerlar to‘plamidan qandaydir i nomerni olamiz. So‘ngra oddiy L_i lotereyalar o‘ynaladi. Bunday lotereyani birinchi tartibli murakkab lotereya deb yuritiladi. Lotereyalardan 2-tartibli murakkab lotereyalarni qurish mumkin va h.k.

Investor uchun turli lotereyalar turlicha qadrga ega, shuning uchun lotereyalar to‘plamida afzallik munosabati kelib chiqadi: $L \le L'$ yozuv investor uchun L' ning afzal ekanligini bildiradi. Afzallik munosabati quyidagi xossalarga ega:

1) refleksivlik; 2) tranzitivlik; 3) yetuklilik. Refleksivlik har qanday lotereya uchun $L' \le L$ bo‘lishini; tranzitivlik, agar $L_1 \le L_2$ va $L_2 \le L_3$ bo‘lsa, u holda $L_1 \le L_3$ ekanligini; yetuklilik esa ikkita loteriya uchun yo $L' \le L$ yoki $L \le L'$ to‘g‘riligini bildiradi.

Lotereyaning har bir $i = 1,2,...,n$ yutuqlariga shunday U_i son yozilsaki, bunda ikkita $L_1 = (p_1,..., p_n)$, $L' = (p_1^1,..., p_n^1)$ lotereyalar uchun $\sum_i p_i U_i \le \sum_i p_i^1 U_i$ tengsizlik bajarilsa, u holda $L \le L^1$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. $i-$yutuqlarga yozilgan U_i sonlar lotereyaning foydaliligi deyiladi.

$$U(L) = \sum_i p_i U_i$$

son esa lotereyaning o‘rtacha foydaliligi deyiladi. Ehtimollar nazariyasi nuqtai nazari bo‘yicha bu matematik kutilmadir. Demak, lotereyaning foydaliligi matematik kutilma formulasi yordamida hisoblanadi.

$(L_1, p_1,..., L_k, p_k)$ birinchi tartibli murakkab lotereya oddiy lotereyaga ekvivalent bo‘lishi uchun uning $j-$yutug‘ining ehtimoli $\sum p_i p_{ij}$ ga teng bo‘lishi lozim. Bunda p_{ij} – $i-$lotereya L_i ning $j-$yutug‘ining ehtimoli.

Misol. Ikkita oddiy $L_1 = (0{,}1;\ 0{,}9)$ va $L_2 = (0{,}4;\ 0{,}6)$ lotereyalarni olamiz.

$(L_1,\ 0{,}3;\ L_2,\ 0{,}7)$ murakkab lotereya qanday oddiy lotereyaga ekvivalent bo‘ladi?

Yuqoridagi qabul qilingan ta’rifga ko‘ra

$$(0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}7\cdot 0{,}4;\ \ 0{,}3\cdot 0{,}9+0{,}7\cdot 0{,}6)=(0{,}31;0{,}69)$$

Bu misolni quyidagicha davom ettiramiz. Ikkita lotereyadan bittasi 0 yutuqqa, ikkinchisi 1 yutuqqa ega bo‘lsin. 0 yutuqlisi 0 foydalilikka, 1 yutuqlisi esa 100 foydalilikka ega bo‘lsa, $L_1=(0{,}1;0{,}9)$, $L_2=(0{,}4;0{,}6)$ va $(L_1,\ 0{,}3;\ L_2,0{,}7)$ lotereyalarning o‘rtacha foydaliligini topamiz.

$$U_{\circ}=0,\ U_1=100,\ L_3=(L_1,\ 0{,}3;\ L_2,0{,}7)=(0{,}31;\ 0{,}69)\,.$$

$$U(L_1)=0{,}1\cdot 0+0{,}9\cdot 100=90;$$

$$U(L_2)=0{,}4\cdot 0+0{,}6\cdot 100=60;$$

$$U(L_3)=0{,}31\cdot 0+0{,}69\cdot 100=69.$$

Misol. Investorning boshlang‘ich mablag‘i 4 mln. so‘m bo‘lib, pulning foydaliligi $U(x)=\sqrt{x}$ bo‘lsin. Unga quyidagicha loteriya taklif etiladi: 0,5 ehtimol bilan 12 mln, 0,5 ehtimol bilan 0 mln. so‘m. Investor o‘yinda ishtirok etishi kerakmi?

Yechish: $U(4)=\sqrt{4}=2.$ Investorning 12 mln. so‘mni yutgandan keyingi mablag‘i $U(4+12)=U(16)=4$, 0 mln. so‘mni yutgandan keyingi mablag‘i $U(4)=2.$ O‘rtacha kutiladigan foydalilik boshlang‘ich qiymatdan katta. Demak, investor o‘yinda qatnashishi kerak.

13.3. Riskning miqdoriy bahosi va uni kamaytirish usullari

Agar moliyaviy operatsiyada har bir natijaning ehtimoli mavjud bo‘lsa, bunday operatsiya ehtimoliy moliyaviy operatsiya deyiladi. Bunday operatsiyalarning daromadi, ya’ni oxirgi va boshlang‘ich pul miqdorlari ayirmasining bahosi tasodifiy miqdor bo‘ladi.

1-misol. Ushbu ikkita ehtimoliy operatsiyani qaraymiz:

0_1:	-5	25
	0,01	0,99

0_2:	15	25
	0,5	0,5

0_1 – birinchi operatsiyada investor -5 ga teng bo‘lgan pul birligini (daromad) 0,01 ehtimol bilan, 25 ga teng bo‘lgan pul birligini esa 0,99 ehtimol bilan oladi. 0_2 – ikkinchi operatsiyada esa 15 va 25 ga teng bo‘lgan pul birliklarini 0,5 ehtimol bilan oladi. Investor qaysi operatsiyani tanlaydi? Albatta qaysi operatsiyada risk kichik bo‘lsa, o‘shani tanlaydi.

Endi riskni miqdoriy baholashga o‘tamiz. Operatsiyaning har bir natijasining ehtimolini yozib, investorning daromadini baholaymiz. Demak, investorning daromadi tasodifiy miqdor bo‘lib, uni biz tasodifiy daromad deb ataymiz. Hozircha diskret bo‘lgan hol bilan chegaralanamiz.

0:	q_j	q_1	q_2	$\dots$	q_n
	p_j	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Bunda q_j – daromad, p_j – shu daromadning ehtimoli. Endi ehtimollar nazariyasini qo‘llash mumkin. Kutiladigan o‘rtacha daromad - Q daromadning matematik kutilishi, ya’ni

$$M(Q) = q_1 p_1 + \dots + q_n p_n,$$

ba’zan m_Q bilan belgilanib operatsiyaning samaradorligi deb ham yuritiladi.

$D(Q)$ – operatsiyaning dispersiyasi D_Q bilan belgilanadi.

$$D(Q) = M\left[(Q - m_Q)^2\right] = M(Q^2) - (M(Q))^2,$$

o‘rtacha kvadratik chetlanish

$$\sigma(Q) = \sqrt{D(Q)}, \quad \sigma_Q \text{ bilan belgilanadi.}$$

Operatsiyaning samaradorligi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi bir xil birlikda daromad qanday birlikda o‘lchansa, xuddi shunday birlikda o‘lchanadi.

Operatsiyaning risklik darajasini baholash daromad tasodifiy miqdorining o‘rtacha kvadratik chetlanishi orqali amalga oshirish maqsadga muvofiqdir.

Shunday qilib, operatsiyaning riski deb Q tasodifiy daromadning o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ_Q soniga aytiladi va uni biz r_Q bilan belgilashni kelishib olamiz. Endi 1-misoldagi operatsiyalarning risklarini topamiz.

Dastlab matematik kutilishlarni, so‘ngra dispersiyalarni hisoblaymiz.

$$m_1 = -5\cdot 0{,}01 + 25\cdot 0{,}99 = 24{,}7$$

$$D_1 = M(Q_1^2) - m_1^2 = 25\cdot 0{,}01 + 625\cdot 0{,}99 - 24{,}7^2 = 8{,}91$$

$$r_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{8{,}91} = 2{,}98$$

$$m_2 = 15\cdot 0{,}5 + 25\cdot 0{,}5 = 0{,}5\cdot 40 = 20$$

$$D_2 = 225\cdot 0{,}5 + 625\cdot 0{,}5 - 20^2 = 0{,}5\cdot 850 - 400 = 425 - 400 = 25$$

$$r_2 = \sqrt{25} = 5.$$

Demak, birinchi operatsiyaning riski kamroq.

$$2{,}98 < 5.$$

2-misol. Investor quyidagi ikkita o‘yinni qaramoqda. Bu o‘yinlarning birida tanga tashlanmoqda. Agar tanga gerb tomoni bilan tushsa, investor 10 pul birligini oladi, agar raqam tomoni bilan tushsa, 10 pul birligini to‘laydi. Bu o‘yinda to‘lovlar quyidagicha taqsimlangan:

	raqam	gerb
to‘lovlar	-10	10
	0,5	0,5

Ikkinchi o‘yinda o‘yin soqqasi tashlanmoqda va bunda investorning to‘lovlari quyidagicha taqsimlangan:

	1	2	3	4	5	6
to‘lovlar	-20	-10	0	0	10	20
	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Ikkala holda ham kutiladigan yutuq 0 ga teng. Dispersiyalarni va risklarni hisoblaymiz.

$$D_1 = 100\cdot 0{,}5 + 100\cdot 0{,}5 = 100; \quad D_2 = 2(400+100)\cdot\frac{1}{6} = \frac{500}{3} \approx 167$$

$$r_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{100} = 10; \quad r_2 = \sqrt{D_2} = \sqrt{167} \approx 13.$$

Operatsiyaning kutiladigan o‘rtacha daromadi, ya’ni m_Q samaradorlik va uning riski Chebishev tengsizligi bilan quyidagicha bog‘langan:

$$P(|Q - m_Q| > \varepsilon) \le \frac{r_Q^2}{\varepsilon^2} \quad \text{yoki} \quad P(|Q - m_Q| \le \varepsilon) > 1 - \frac{r_Q^2}{\varepsilon^2}$$

Ma’lumki, bu tengsizlikning xatoligi katta bo‘lib u amalda ko‘p qo‘llanilmaydi.

Agar operatsiyaning daromadi tasodifiy bo‘lib, normal taqsimot qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsa, u holda risk samaradorlik bilan bog‘liq bo‘lgan qandaydir ehtimolni aniqroq ko‘rsatadi.

$$P(|Q - m_Q| < 3r_Q) \approx 0{,}997; \quad P(|Q - m_Q| < 2r_Q) \approx 0{,}95$$

Ba’zan bu baholar juda foydali bo‘ladi.

To‘lovlar oqimining dyuratsiyasi

Faraz qilaylik, i va $\mu = (1+i)$ mos ravishda foiz stavkasi va jamg‘arma koeffitsiyenti bo‘lsin. Shuningdek, to‘lovlar oqimi $\Phi = (R_k, t_k)$ bo‘lsin, bunda R_k kattalik t_k momentdagi to‘lov miqdori. Bu oqimning joriy qiymatini A bilan belgilaymiz: $A = \sum_k A_k$, bunda keyingi to‘lovning joriy qiymati

$$A_k = R_k / (1+i)^{t_k} = R_k (1+i)^{-t_k} = R_k e^{-t_k \ln\mu}$$

Ta’rif: Φ to‘lovlar oqimining dyuratsiyasi deb, joriy qiymatining jamg‘arma koeffitsiyenti μ bo‘yicha “minus” ishora bilan olingan elastikligiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$E_\mu^A = (dA / d\mu) : (\text{A}/\text{M})$$

Belgilash kiritsak, $Dur(\Phi) = -E_\mu^A$ hosil bo‘ladi.

Elastiklik ta’rifini eslatamiz. Aytaylik, $x-$ argument, $y-$ funksiya bo‘lsin, u holda y ning x bo‘yicha x_0 nuqtadagi elastikligi deb y ning nisbiy o‘zgarishini x ning nisbiy o‘zgarishiga nisbatining $\Delta x \to 0$ dagi limitiga aytiladi va $E_x^y(x_0)$ kabi belgilanadi. Shunday qilib,

$$E_x^y(x_0) = \left(\frac{dy / y_0}{dx / x_0} \right) = (dy / dx) : (y_0 / x_0) = y'(x_0) \frac{x_0}{y_0}.$$

Agar $E_x^y = -2$ bo‘lsa, u holda x ning 1% ga ortishi y ning 2% ga kamayishini bildiradi. Dyuratsiya jamg‘arma koeffitsiyentini o‘zgarishidagi oqimning joriy qiymatining o‘zgarishini bildirar ekan, agar oqimning dyuratsiyasi 2 bo‘lsa, jamg‘arma koeffitsiyentining 1% ga ortishidagi oqimning joriy qiymatini jamg‘arma koeffitsiyenti μ bo‘yicha differensiallaymiz.

Demak,

$$\frac{dA}{d\mu} = \frac{d\left(\sum_k R_k e^{-t_k \ln \mu} \right)}{d\mu} = \left(\sum_k -t_k R_k e^{(-t_k - 1)\ln \mu} \right) : A / \mu = -\left(\sum_k t_k \left(R_k e^{-t_k \ln \mu / A} \right) \right) =$$

$$= -\sum_k t_k (A_k / A) = -dur(\Phi)$$

$$dur(\Phi) = \sum_k t_k (A_k / A).$$

Endi barcha to‘lovlar nomanfiy deb hisoblaylik, u holda barcha A_k lar ham nomanfiy bo‘ladi va ularning yig‘indisi A ga teng bo‘lib, barcha A_k / A lar yig‘indisi 1ga teng bo‘ladi. Shuning uchun A_k / A nisbatlarni ehtimollar, $\sum_k t_k A_k / A$ ni esa to‘lovlarning o‘rta momenti sifatida qarab, ushbu ma’noda tushunish mumkin: T tasodifiy miqdorni diskret deb hisoblab, uning ehtimolini shunday aniqlash kerakki, bunda

$$P(T = t_k) = A_k / A \ ,$$

uning matematik kutilishi esa

$$M[T] = \sum_k t_k (A_k / A)$$

ga teng bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki,

$$\sum_k t_k (A_k / A) = dur(\Phi)$$

Demak, quyidagi xulosaga kelamiz: nomanfiy to‘lovlarning o‘rta momenti va to‘lovlar oqimining dyuratsiyasi o‘zaro teng ekan. Agar to‘lovlar oqimining dyuratsiyasi 2 ga teng bo‘lsa, u holda jamg‘arma koeffitsiyenti 1% ga oshganda to‘lovlar oqimining o‘rta momenti 2% ga oshadi. Bundan ko‘rinadiki, nomanfiy to‘lovlar oqimining jamg‘arma koeffitsiyenti bo‘yicha elastikligi manfiy bo‘lsa, bunday to‘lovlar oqimining dyuratsiyasi musbat bo‘ladi. Agar to‘lovlar jamg‘arma qiymati ma’lum bo‘lsa, u holda to‘lovlarning chekli momentigacha, katta cheksizga qadar diskontirlash mumkin.

Bunga oydinlik kiritish maqsadida $R=100$ ming so‘m bo‘lgan 5 yillik rentaning dyuratsiyasini yillik 10% stavkada topish talab etiladi.

Ma’lumki, T momentdagi $\Phi=\{R_k;t_k\}$ to‘lovlar oqimining shu muddatga diskontirlangan qiymati

$$\Phi(T)=\sum_k R_k(1+i)^{T-t_k}, \qquad A_k=R_k(1+i)^{T-t_k}.$$

Rentaning jamg‘arma qiymati

$$A=\frac{1000(1,1^5-1)}{0,1}=6105.$$

$$A_1=1000(1+0,1)^{5-1}=1000\cdot 1,1^4=1464,$$

$$A_2=1000\cdot 1,1^3=1331,$$

$$A_3=1000\cdot 1,1^2=1210,$$

$$A_4=1000\cdot 1,1=1100,$$

$$A_5=1000\cdot 1,1^0=1000.$$

$P(T=t_k)=A_k/A$ formuladan

$$P_1=\frac{1464}{6105}=0,24,$$

$$P_2=\frac{1331}{6105}=0,22,$$

$$P_3=\frac{1210}{6105}=0,20,$$

$$P_4=\frac{1100}{6105}=0,18,$$

$$P_5=\frac{1000}{6105}=0,16.$$

Dyuratsiyani T ning momentlik kutilmasi sifatida hisoblaymiz:

$$dur(\Phi)=M[T]=1\cdot 0,24+2\cdot 0,22+3\cdot 0,20+4\cdot 0,18+5\cdot 0,16=2,8.$$

Risk haqida quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

1. Operatsiya miqyosi k marta ortsa, ya'ni tasodifiy daromadning barcha qiymatlari k marta ortsa, operatsiyaning samaradorligi k marta, riski esa $|k|$ marta ortadi.

2. Barcha daromadlar bir xil o‘zgarmas son qiymatiga ortsa, operatsiyaning samaradorligi shu o‘zgarmas songa o‘zgaradi, risk esa o‘zgarmaydi.

3. 0_1 va 0_2 operatsiyalar yig‘indisining dispersiyasi dispersiyalar yig‘indisiga teng bo‘ladi, shuning uchun yig‘indi operatsiyaning riski $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ ga teng bo‘ladi.

4. Umumiy holda, ya'ni ikkita ixtiyoriy 0_1 va 0_2 operatsiyalar uchun operatsiyalar yig‘indisining riski $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2k_{12}}$ ga teng, bunda k_{12} – operatsiyalarning tasodifiy daromadlarining korrelyatsiya koeffitsiyenti.

Endi umumiyroq holni qaraymiz. Yutuqlar to‘plami barcha nomanfiy pul miqdori $R^+ = [0, \infty)$ dan iborat. Lotereya R^+ da ehtimollar taqsimoti bilan F taqsimot funksiya yordamida berilgan bo‘lsin. Kutiladigan foydalilikni topish qoidasiga ko‘ra investor uchun R^+ da aniqlangan $U(x)$ foydalilik funksiyasini topish mumkin. Lotereyaning foydaliligi F ushbu formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$U(F) = \int_{R^+} U(x)\, d\, F(x),$$

agar qaralayotgan taqsimot uzluksiz, ya'ni $f(x)$ zichlik funksiyaga ega bo‘lsa, u holda

$$U(F) = \int_{R^+} U(x)\, f(x)\, dx,$$

bu esa lotereyaning o‘rtacha kutiladigan foydaliligi, $U(x)$ - Bernulli funksiyasi, $U(F)$ - Neyman-Morgenshtern funksiyasi deb yuritiladi.

Misol. Aytaylik, Bernulli funksiyasi $U(x) = \sqrt{x}$ ko‘rinishda bo‘lib, lotereyaning yutuqlari $[0, 1]$ kesmada tekis taqsimlangan bo‘lsa, u holda o‘rtacha kutiladigan foydalilik

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$ ga teng bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Ikkita oddiy lotereyalar $L_1 = (0,2;\ 0,8)$ va $L_2 = (0,3;\ 0,7)$ qaralayotgan bo‘lsin. $(L_1,\ 0,4;\ L_2,\ 0,6)$ murakkab lotereya qanday oddiy lotereyaga ekvivalent bo‘ladi?

2. Yuqoridagi lotereyalardan bittasi 0 yutuqqa, ikkinchisi 1 yutuqqa ega bo‘lsin. 0 yutuqlisi 0 foydalikka, 1 yutuqlisi esa 100 foydalikka ega bo‘lsa, $L_1 = (0,2;\ 0,8)$, $L_2 = (0,3;\ 0,7)$ va $(L_1, 0,4;\ L_2,\ 0,6)$ lotereyalarning o‘rtacha foydaliligini toping?

3. Investorning boshlang‘ich mablag‘i 3 mln. so‘m bo‘lib, pulining foydaliligi $U(x) = \sqrt{x+1}$ bo‘lsin. Unga quyidagicha lotereya taklif etiladi: 0,5 ehtimol bilan 12 mln, 0,5 ehtimol bilan 0 mln. so‘m, investor o‘yinda ishtirok etishi kerakmi?

4. Ushbu ikkita ehtimoliy operatsiya uchun quyidagilar ma’lum bo‘lsin.

0_1:	-10	50
	0,01	0,99

0_2:	25	50
	0,5	0,5

0_1 - birinchi operatsiyada investor -10 ga teng bo‘lgan pul birligini 0,01 ehtimol bilan, 50 ga teng bo‘lgan pul birligini esa 0,99 ehtimol bilan oladi. 0_2 - ikkinchi operatsiyada esa 25 va 50 ga teng bo‘lgan pul birliklarini 0,5 ehtimol bilan oladi. Investor qaysi operatsiyani tanlaydi?

5. Investor quyidagi ikkita o‘yinni qaramoqda. Bu o‘yinlarning birida tanga tashlanmoqda. Agar tanga gerb tomoni bilan tushsa,

investor 100 pul birligini oladi, agar raqam tomoni bilan tushsa, 100 pul birligini to‘laydi. Bu o‘yinda to‘lovlar quyidagicha taqsimlangan:

	raqam	gerb
to‘lovlar	- 100	100
	0,5	0,5

Ikkinchi o‘yinda o‘yin soqqasi tashlanadi va bunda investorning to‘lovlari quyidagicha taqsimlangan:

	1	2	3	4	5	6
to‘lovlar	-200	-100	0	0	100	200
	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

6. Agar Bernulli funksiyasi $U(x)=\sqrt[3]{x}$ ko‘rinishda bo‘lib, lotereyaning yutuqlari $[0;1]$ kesmada tekis taqsimlangan bo‘lsa, u holda kutiladigan o‘rtacha foydalilikni toping.

XIV BOB. DAROMAD DISPERSIYASI

14.1. Investorning diversifikatsiyasi va daromad dispersiyasi

Riskni kamaytirish uchun diversifikatsiya nima berishini va bu maqsadga qanday sharoitda erishishni aniqlaymiz. Buning uchun tahlil obyekti sifatida qimmatbaho qog‘ozlar savatini qabul qilamiz. Biz oldingi mavzuda uzoq muddatli moliyaviy operatsiyalarda tavakkalchilikning o‘lchovi sifatida keng tarqalgan o‘lchov – vaqt bo‘yicha daromad dispersiyasi ekanligini ta’kidlagan edik. Savatni diversifikatsiyalash har qanday sharoitda to‘g‘ri tatbiq etilsa, daromad dispersiyasi albatta kamayadi. Agar savatning har bir komponenti (qaralayotgan masalada qimmatbaho qog‘oz turi) qandaydir daromad dispersiyasi orqali xarakterlanadigan bo‘lsa, u holda savatdan keladigan daromad uning tarkibini aniqlovchi dispersiyaga ega bo‘ladi. Shunday qilib, savat tarkibini o‘zgartirib, daromadning jamg‘arma dispersiyasini o‘zgartirish, ba’zi hollarda esa uni minimum holatga keltirish mumkin.

Faraz qilaylik, n $x$il qimmatbaho qog‘ozlardan iborat bo‘lgan savat mavjud bo‘lsin. i turdagi bitta qog‘ozdan keladigan daromad d_i ni tashkil etsin. Bunday holda jamg‘arilgan A daromad ushbuga teng:

$$A = \sum_i a_i \, d_i \qquad (14.1.1)$$

bunda a_i – i turdagi qog‘ozlar miqdori. Agar i turdagi qog‘ozdan keladigan daromad d_i o‘rtacha daromadni ifoda etsa, u holda A savatdagi qog‘ozlardan keladigan o‘rtacha daromadni ifoda etadi. Aytaylik, turli qog‘ozlardan keladigan daromadlar ko‘rsatkichi statistik erkli (boshqacha aytganda, bir-birini korrelyatsiyalamaydigan) kattaliklardan iborat bo‘lsin. Savatning daromad dispersiyasini D bilan belgilaymiz, u holda

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, D_i \,, \qquad (14.1.2)$$

bunda $D_i - i$ turdagi qog‘ozlardan keladigan daromad dispersiyasi, $n -$ qimmatbaho qog‘ozlar turlarining soni.

Faraz qilaylik, a_i savatdagi i turdagi qog‘ozning ulushini xarakterlasin, ya’ni

$$0 \le a_i \le 1, \qquad \sum a_i = 1$$

Alohida qog‘ozlarning statistik nuqtai nazardan bog‘liq daromad ko‘rsatkichlari uchun jamg‘arilgan daromad dispersiyasini quyidagi formuladan topamiz:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i + 2\sum_{i \ne j} a_i a_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j \qquad (14.1.3)$$

Bu yerda $D_i - i$ turdagi qog‘ozlardan keladigan daromad dispersiyasi, $r_{ij} - i$ va j turdagi qog‘ozlardan keladigan daromadlar korrelyatsiyasining koeffitsiyenti, σ_i va $\sigma_j - i$ va j turdagi qog‘ozlardan keladigan daromadlarning o‘rtacha kvadratik chetlanishlari. Ikkita x va y tasodifiy o‘zgaruvchilarning korrelyatsiya koeffitsiyenti ushbu formuladan topilishi bizga ma’lum:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \sigma_x \sigma_y} \qquad (14.1.4)$$

bu yerda $\bar{x}, \ \bar{y} -$ o‘rta qiymatlar (bizning misolimizda ikki xil qog‘ozlardan keladigan o‘rtacha daromadlar). Ko‘p hollarda qulay hisob uchun quyidagi ishchi formuladan foydalaniladi:

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum \bar{x} \sum \bar{y}}{\sqrt{\left|\sum x^2 - \left(\sum \bar{x}\right)^2\right| \cdot \left|n\sum y^2 - \left(\sum \bar{y}\right)^2\right|}}$$

Ma’lumki, korrelyatsiya koeffitsiyenti musbat va manfiy kattaliklar bo‘lishi mumkin, demak (14.1.3) formuladan musbat korrelyatsiyada jamg‘arilgan daromad dispersiyasi ortadi, manfiy korrelyatsiyada esa u kamayadi. Aslini olganda sezilarli darajada manfiy korrelyatsiyada bir qog‘ozning o‘rta daromadidan musbat chetlanishi boshqasining manfiy chetlanishini qoplaydi va aksincha, musbat korrelyatsiyada chetlanish jamg‘ariladi, natijada umumiy dispersiya va risk ortadi. Endi diversifikatsiyaning miqyosi risk o‘lchoviga qanday ta’sir qilishini kuzataylik.

Diversifikatsiyalash miqyosi deganda biz investitsiya uchun tanlangan (qimmatbaho qog‘ozlar turlarining soni) obyektlar miqdorini tushunamiz. Aytaylik, savat turli qog‘ozlardan tashkil topgan bo‘lib, bir xil σ_0^2 daromad dispersiyasiga ega bo‘lsin. Savatdagi qog‘ozlarni har birining solishtirma og‘irligi ham bir xil, umumiy yig‘ilgan jamg‘arma miqdori esa 1 ga teng. Alohida qog‘ozlarning daromadlilik ko‘rsatkichlari statistik erkli, ya’ni (14.1.2) formula tatbiq etilsin deb hisoblaymiz. Bunday sharoitda savat daromadi o‘rtacha kvadratik chetlanishining bahosi uchun ushbu formulani hosil qilamiz:

$$D = \frac{1}{n}\sigma_\circ^2$$

bunda $n -$ qimmatbaho qog‘ozlar turlarining soni. Keltirilgan formuladan hamda ikki va uch turdagi qog‘ozlardan tashkil topgan savat uchun daromad dispersiyasini aniqlaymiz. Ikki tur qog‘oz uchun

$$D = \frac{1}{2}\sigma_\circ^2 \quad \text{va} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}\sigma_\circ = 0{,}71\sigma_\circ$$

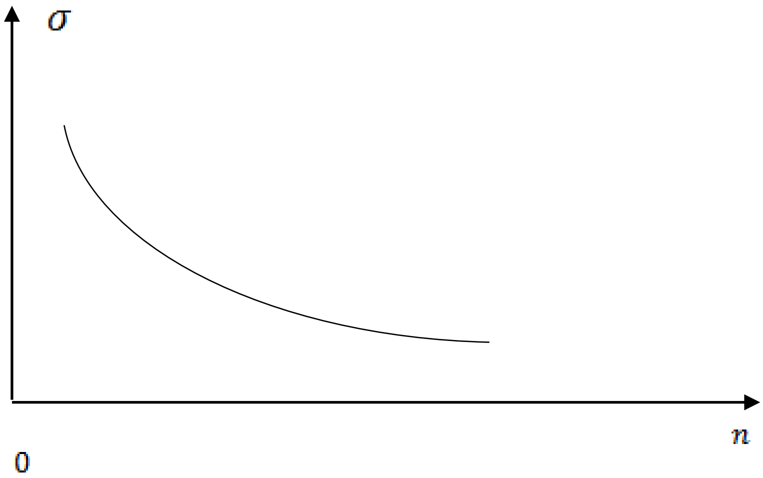
hosil qilamiz. Shunga o‘xshash uch tur qog‘oz uchun savatning o‘rtacha kvadratik chetlanishi $0{,}58\sigma_\circ$ ni tashkil etadi. Shunday qilib, savatning tashkil etuvchilari soni ortishi bilan hatto tashkil etuvchi elementlarning dispersiyasi bir xil bo‘lgan holda ham, risk kamayishini ko‘ramiz. Yuqorida qaralgan misolda bir turdagi qog‘ozdan to‘rt tur qog‘ozga o‘tganda o‘rtacha kvadratik chetlanish

$$\frac{\sigma_\circ - \sqrt{\frac{1}{4}}\sigma_\circ}{\sigma_\circ}\cdot 100\% = 50\%$$ ga,

Bir tur qog‘ozdan sakkiz tur qog‘ozga o‘tganda esa

$$\frac{\sigma_\circ - \sqrt{\frac{1}{8}}\sigma_\circ}{\sigma_\circ}\cdot 100\% = 65\%$$ ga kamayadi.

O‘rtacha kvadratik chetlanish va qog‘oz turlarining soni orasidagi bog‘lanish quyidagi rasmda ko‘rsatilgan.



14.1.1-rasm

Olingan bu natijalar, ya’ni o‘rtacha kvadratik chetlanishni savatning tashkil etuvchilariga bog‘liq holda o‘zgarishi faqat dispersiya o‘zgarmas bo‘lgan holda emas, balki umumiyroq bo‘lgan hollarda ham o‘rinli bo‘lishi ravshandir.

Endi savat tarkibi o‘zgarganda daromad va risk qanday o‘zgarishini ko‘ramiz. Buning uchun (14.1.2) va (14.1.3) formulalarga qaytamiz va ularni faqat ikki tur qog‘ozlar uchun (*X* va *Y*) yozamiz. Bunday tahlil qilish amaliy ahamiyatga ega.

Erkli daromadlar uchun

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y \qquad (14.1.5)$$

bog‘liq daromadlar uchun esa

$$D = a_x^2 \sigma_x^2 + a_y^2 \sigma_y^2 + 2a_x a_y r_{xy} \sigma_x \sigma_y \qquad (14.1.6)$$

formulalarni hosil qilamiz. Bunda $a_y = 1 - a_x$. Bunday holda jamg‘arilgan daromadning o‘rta qiymati quyidagicha aniqlanadi.

$$A = a_x a_y + (1 - a_x) d_y \qquad (14.1.7)$$

Aytaylik, $d_y > d_x$ va $\sigma_y > \sigma_x$ bo‘lsin. Ravshanki, bunday holda ikkinchi tur qog‘oz ulushining o‘sishi savat daromadliligini orttiradi. (14.1.7) formuladan quyidagini

$$A = d_y + (d_y - d_x)a_y \qquad (14.1.8)$$

hosil qilamiz.

Savatning daromad dispersiyasi (14.1.6) formuladan topiladi, bunda uning qiymati korrelyatsiyaning ishorasi va darajasiga bog‘liq bo‘ladi. Shunga bog‘liq holda uch holatni qaraymiz:

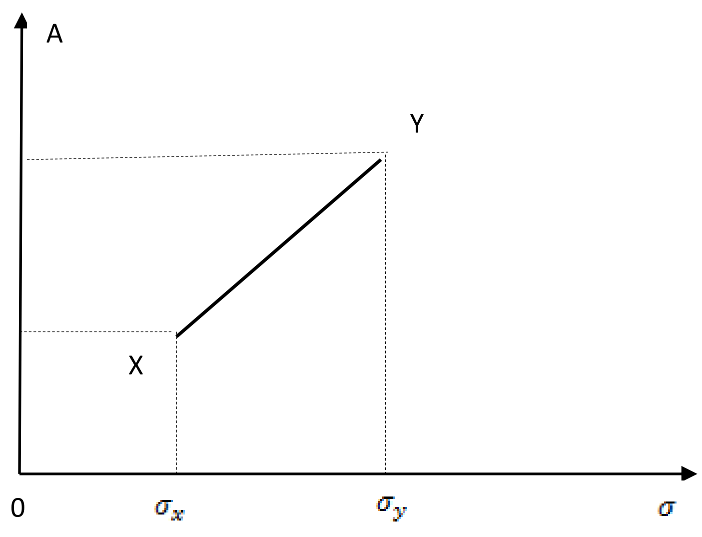
a) to‘la musbat daromadlar korrelyatsiyasi ($r_{xy} = 1$),

b) to‘la manfiy daromadlar korrelyatsiyasi ($r_{xy} = -1$),

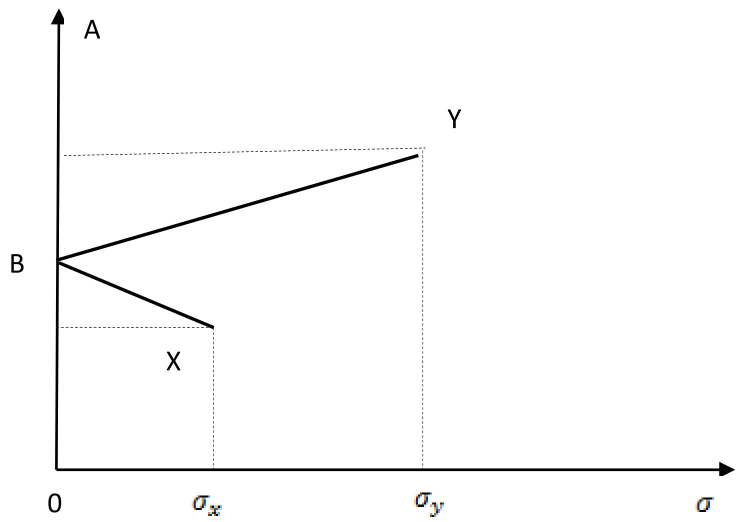
v) daromadlar erkliligi yoki 0 korrelyatsiya ($r_{xy} = 0$).

Birinchi holda ikkala qog‘ozni o‘z ichiga olgan savat uchun o‘rtacha kvadratik chetlanish $\sigma_x < \sigma < \sigma_y$ chegarada topiladi (19-rasm, *X* nuqta faqat *X* qog‘ozlardan iborat bo‘lgan savatni, *Y* esa *Y* qog‘ozlardan iborat bo‘lgan savatni ifoda etadi).

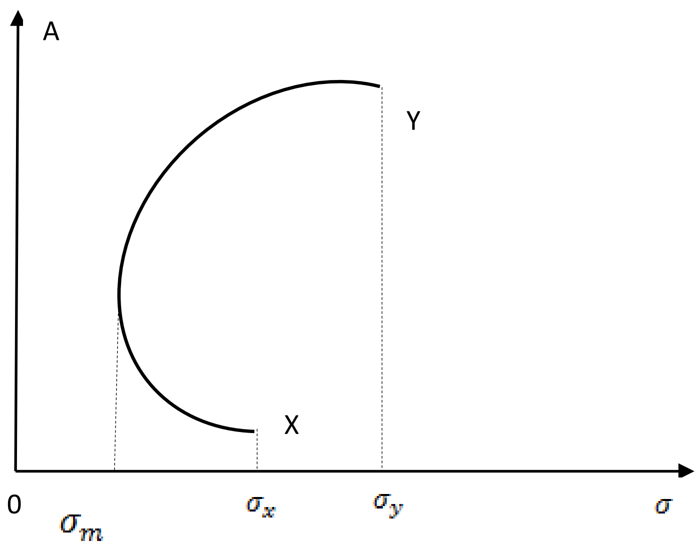
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ bo‘lgan xususiy hol uchun $D = \sigma^2$ ni (14.1.6) formuladan olamiz, boshqacha aytganda, to‘la musbat korrelyatsiyada investitsiyaning “ko‘chishi” dispersiya qiymatiga hech qanday ta’sir etmaydi.



14.1.2-rasm



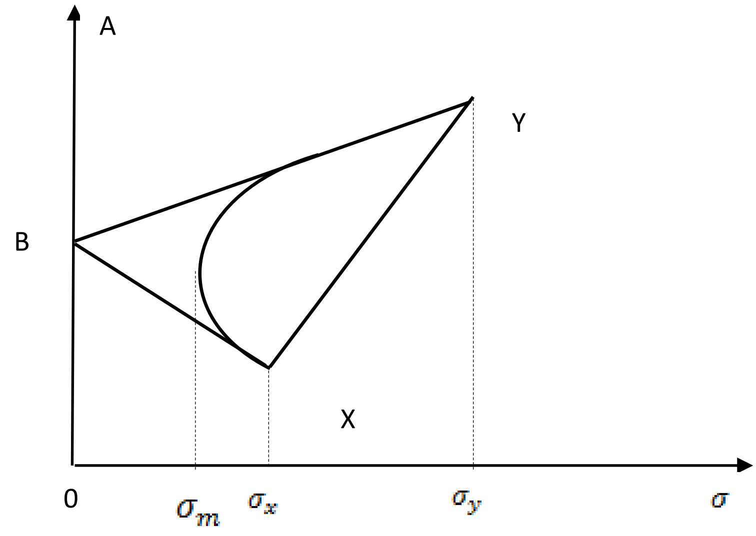
14.1.3-rasm



14.1.4-rasm

To‘la manfiy daromadlar korrelyatsiyasi holida savat daromad-larining o‘rtacha kvadratik chetlanish dinamikasi ancha murakkabdir. *X* nuqtadan *Y* nuqtaga o‘tishda bu qiymat dastlab qisqaradi va *B* nuqtada nolga yetadi, so‘ngra o‘sadi (20-rasm). E’tibor bersak, *X* nuqtadan *B* nuqtaga o‘tishda risk kamayadi (o‘rtacha kvadratik chetlanish).

Oxirgi holatda Y qog‘oz ulushining ortishida kvadratik chetlanish σ_m ga teng bo‘lgan minimum qiymatga ega bo‘ladi, u σ_y ga qadar o‘sishi mumkin (14.1.4-rasm).



14.1.5-rasm

Endi uchala grafikni bitta koordinata tekisligiga joylashtiramiz (14.1.5-rasm). Demak, “daromad – o‘rtacha kvadratik chetlanish” XBY uchburchakda topiladi.

Yuqoridagi tahlildan diversifikatsiyaning samaradorligi (riskka nisbatan) faqat manfiy yoki nolli korrelyatsiyada kuzatiladi.

Misol. Savat ikki xil qog‘ozlardan tashkil topgan bo‘lib uning parametrlari quyidagicha bo‘lsin: $d_x = 2,\ \sigma_x = 0{,}8;\ d_y = 3;\ \sigma_y = 1{,}1$. Savatdan keladigan daromad: $A = 2a_x + 3a_y$. Ulushlardan keladigan daromad: $2 \le A \le 3$ bo‘ladi. Jamg‘arma daromad dispersiyasi

$$D = a_x^2 \cdot 0{,}8^2 + a_y^2 \cdot 1{,}1^2 + a_x a_y r_{xy}\, 0{,}8 \cdot 1{,}1$$

qog‘ozlardan keladigan daromad ulushlari $0{,}3$ va $0{,}7$ bo‘lsin. U holda $A = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}7 = 2{,}7$, $D = 0{,}651 + 0{,}37 r_{xy}$. Shunday qilib, to‘la musbat daromadlar korrelyatsiyasi uchun $D = 1{,}021$, to‘la manfiy daromadlar korrelyatsiyasi uchun $D = 0{,}281$. 95% ehtimol bilan birinchi hol uchun jamg‘arma daromad $2{,}7 \pm 2\sqrt{1{,}021} = 2{,}7 \pm 2{,}02$ chegarada, ikkinchi hol uchun esa $2{,}7 \pm 2\sqrt{0{,}781} = 2{,}7 \pm 1{,}06,$ nolli korrelyatsiya uchun daromadlar chegarasi $2{,}7 \pm 2\sqrt{0{,}651} = 2{,}7 \pm 1{,}64$ ni tashkil etadi.

Endi ikki tur qog‘oz bo‘yicha tahlilni davom ettirib, savatga risksiz (risk free) investitsiyani kiritish daromadga qanday ta’sir etishini o‘rganamiz. (Risksiz investitsiya deganda iqtisodi turg‘un bo‘lgan davlatlarda davlat tomonidan chiqarilgan qimmatbaho qog‘ozlar tushuniladi). Buning uchun savatdagi Y qog‘ozni d_y, σ_y parametrlarga xuddi shunday daromadlilik, lekin nolli dispersiya bilan almashtiramiz. Bunday almashtirishdagi savatning daromadliligi o‘zgarmaydi. Dispersiyaga kelsak, u quyidagiga teng bo‘ladi:

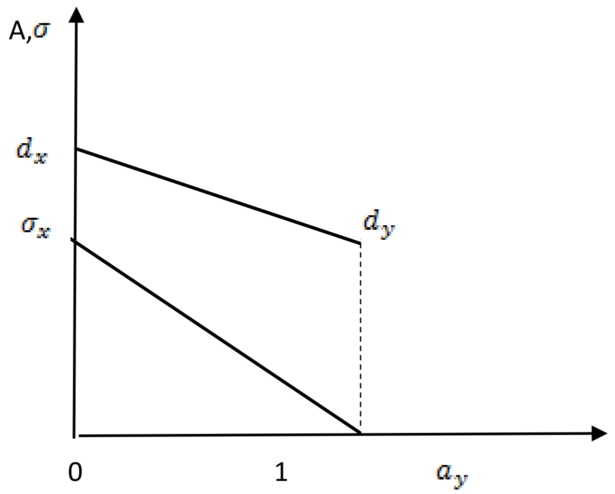
$$D = a_x^2\,\sigma_x^2$$

Savat daromadining dispersiyasi risksiz qog‘ozlarni tashkil etuvchilarining solishtirma og‘irligiga bog‘liq bo‘ladi:

$$\sigma = a_x\sigma_x = (1 - a_y)\,\sigma_x \tag{14.1.9}$$

Shunday qilib, savatga risksiz qog‘ozlarning qo‘shilishi savat riskini kamaytiradi, savat daromadining o‘rtacha kvadratik chetlanishi esa risksiz qog‘ozlar ulushining chiziqli funksiyasi sifatida aniqlanadi. Agar $d_x > d_y$ (aks holda savatni tanlash muammosi yo‘qoladi - u faqat risksiz qog‘ozlardan tashkil topishi kerak) bo‘lsa, u holda savatning daromadi risksiz qog‘ozlar ulushining ortishida d_x dan d_y gacha, o‘rtacha kvadratik chetlanish esa σ_x dan 0 gacha kamayadi (14.1.6-rasm). Ikki xil qog‘ozdan tashkil topgan savat uchun oxirgi tasdiqni (14.1.7) formulani almashtirish natijasidan kelib chiqqan (14.1.10) formula izohlaydi:

$$A = d_y + (d_x - d_y)\,a_x \tag{14.1.10}$$



14.1.6-rasm

O‘z navbatida (14.1.9) formuladan $a_x = \frac{\sigma}{\sigma_x}$ ni topamiz.

Natijada quyidagi munosabatni yozamiz:

$$A = d_y + \frac{d_x - d_y}{\sigma_x}\sigma \tag{14.1.11}$$

Bu ifodadagi kasr riskning bozor narxi deb yuritiladi. Agar bu kattalik $0{,}5$ ga teng bo‘lsa, u holda kvadratik chetlanishning 1% o‘sishida daromad $0{,}5\%$ ga o‘sdi deb tushunamiz.

14.2. Daromad dispersiyasini minimallashtirish

Dispersiyaning minimumini topish uchun uni aniqlovchi formulaga qaytamiz. Agar alohida investitsiya turlaridan keladigan daromadlar orasida statistik bog‘liqlik yo‘q deb hisoblansa, u holda savatning optimal tuzilishini aniqlash qiyin emas. Aytaylik, savat ikki xil *X* va *Y* qog‘ozlardan tashkil topgan bo‘lib, ularning savatdagi ulushlari a_x va $1 - a_x$, dispersiyalari esa D_x va D_y bo‘lsin. Umumiy dispersiya (8.2.5) formuladan topiladi. Bu funksiya uzluksiz bo‘lganligi uchun ekstremumni topishning standart usulini tatbiq etamiz. Yig‘indi dispersiya minimal qiymatga ega bo‘lishi uchun

$$a_x = \frac{D_y}{D_x + D_y} \qquad (14.2.1)$$

tenglik bajariladi.

Haqiqatan,

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y = a_x^2 D_x + (1 - a_x)^2 D_y$$

$$D'_{a_x} = 2a_x D_x - 2(1 - a_x) D_y = 0$$

$$a_x = \frac{D_y}{D_x + D_y}$$

Bu qiymatga D minimal qiymatga ega bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas. (8.3.1) formulani dispersiyalar nisbati kabi ham ifodalashadi.

$$D_{x/y} = \frac{D_x}{D_y} \qquad (14.2.2)$$

(8.3.1) formuladan surat va maxrajini D_y ga bo‘lib

$$a_x = \frac{1}{D_{x/y} + 1} \qquad (14.2.3)$$

formulani hosil qilamiz. Daromadlar orasida korrelyatsiya mavjud bo‘lgan holda (8.2.6) formulaga murojaat qilamiz. Bu funksiya minimal qiymatga

$$a_x = \frac{D_y - r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{D_x + D_y - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y} \qquad (14.2.4)$$

tenglik bajarilganda erishadi. Dispersiyalar nisbati orqali ifodalasak, bu formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$a_x = \frac{1 - r_{xy}\sqrt{D_{x/y}}}{D_{x/y} + 1 - 2r_{xy}\sqrt{D_{x/y}}} \qquad (14.2.5)$$

Bu keltirilgan formulalardan qog‘ozlardan birini ulushining hisob qiymati ba’zi sharoitlarda manfiy bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki, bu qog‘oz turini savatga kiritish kerak emas.

Endi savat uch xil X, Y, Z qog‘oz turlaridan iborat bo‘lsin deb faraz qilaylik. Ularning ulushlari a_x, a_y va $a_z = 1 - (a_x + a_y)$. Ayrim qog‘oz turlaridan keladigan daromadlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan holda savat daromadining dispersiyasi

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y + [1-(a_x + a_y)]^2 D_z .$$

Dispersiya minimum qiymatga ega bo‘lishi uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:

$$a_x = \frac{D_{y/z}}{D_{x/z} \cdot D_{y/z} + D_{x/z} + D_{y/z}}$$

$$a_y = \frac{D_{x/z}}{D_{x/z} \cdot D_{y/z} + D_{x/z} + D_{y/z}}$$

Uch xil qog‘oz daromadlarining statistik bog‘liq bo‘lgan holiga to‘xtalmaymiz. Masalaning umumiy qo‘yilishiga o‘tamiz va savat tuzilishini *n* ta tashkil etuvchilar bilan aniqlaymiz. Daromadlar erkli, ya’ni daromadlar orasida korrelyatsiya yo‘q deb hisoblaymiz. Bunday holda dispersiya (14.2.2) formula bo‘yicha hisoblanadi. *n ta* ulush uchun bu formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$D = \sum_1^{n-1} a_i^2 D_i + \left(1 - \sum_1^{n-1} a_i\right)^2 D_n \qquad (14.2.6)$$

O‘z navbatida

$$\left(1 - \sum_1^{n-1} a_i\right)^2 = 1 - 2\sum a_i + \left(\sum a_i\right)^2,$$

bunda

$$\left(\sum_1^{n-1} a_i\right)^2 = \sum_1^{n-1} a_i^2 + 2\sum_1^{n-1} a_i \sum_2^{n-1} a_i$$

nihoyat quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left(1 - \sum_1^{n-1} a_i\right)^2 = 1 - 2\sum_1^{n-1} a_i + 2a_1 \sum_2^{n-1} a_i + 2a_2 \sum_3^{n-1} a_i + \ldots + 2a_{n-2}a_{n-1} + \sum_1^{n-1} a_i^2 \qquad (14.2.7)$$

(8.3.7) ni (8.3.6) ga qo‘yamiz va $n-1$ tartibli xususiy hosilani aniqlaymiz:

$$f'(a_1) = a_1 D_1 + \left(\sum_1^{n-1} a_i - 1\right) D_n,$$
$$f'(a_2) = a_2 D_2 + \left(\sum_1^{n-1} a_i - 1\right) D_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f'(a_{n-1}) = a_{n-1} D_{n-1} + \left(\sum_1^{n-1} a_i - 1\right) D_n \qquad (14.2.8)$$

(8.3.8) sistemaning har bir tenglamasini D_n ga bo‘lamiz va nolga tenglashtiramiz. Ma’lum almashtirishlardan so‘ng ushbuga ega bo‘lamiz:

$$a_1\left(\frac{D_1}{D_n} + 1\right) + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 1,$$
$$a_1 + a_2\left(\frac{D_2}{D_n} + 1\right) + a_3 + \dots + a_{n-1} = 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}\left(\frac{D_{n-1}}{D_n} + 1\right) = 1 \qquad (14.2.9)$$

(8.3.9) tenglamalar sistemasini matritsa ko‘rinishida yozamiz: $\overline{A}D = e.$

Bundan izlangan natijani olamiz:

$$\overline{A} = D^{-1} e \qquad (14.2.10)$$

bunda $e -$ savat tuzilishini xarakterlovchi birlik vektor, $\overline{A} -$ savat tuzilishining $n-1$ ta elementini xarakterlovchi vektor.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D_n} + 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{D_2}{D_n} + 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & \frac{D_{n-1}}{D_n} + 1 \end{pmatrix}$$

Misol. Ekspertlar to‘rt xil qog‘ozdan iborat bo‘lgan savat uchun dispersiyani quyidagicha baholashdi: $D_{1/4} = 1{,}5;\ D_{2/4} = 2;\ D_{3/4} = 1.$

(8.3.10) formuladan

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot e = \begin{pmatrix} 5/9{,}5 & -1/9{,}5 & -2/9{,}5 \\ -1/9{,}5 & 4/9{,}5 & -1{,}5/9{,}5 \\ -2/9{,}5 & -1{,}5/9{,}5 & 6{,}5/9{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}210 \\ 0{,}158 \\ 0{,}316 \end{pmatrix}.$$

Bundan

$$a_4 = 1 - \sum_{1}^{3} a_i = 1 - 0{,}684 = 0{,}316.$$

14.3. Daromadlar matritsasi va uning riski

Barcha moliyaviy operatsiyalar noaniqlik sharoitida qabul qilinadi va shuning uchun uning natijasini to‘la ishonch bilan aytib bo‘lmaydi, ya’ni har qanday moliyaviy operatsiya riskka ega. operatsiyani qabul qiluvchilar qaror qabul qiluvchi shaxslar (QQSH) deb yuritiladi.

Aytaylik, QQSh turli mumkin bo‘lgan $i = 1, 2, \ldots, m$ qarorlarni qarab chiqayotgan bo‘lsin. Holat noaniq, faqat $i = 1, 2, \ldots, n$ variantlar ma’lum. Agar *j* –nchi holat uchun *i* – nchi qaror qabulm qilinsa, u holda QQSH tomonidan boshqarilayotgan firma q_{ij} daromad oladi. $Q = (q_{ij})$ daromadlar matritsasi deb yuritiladi. QQSH qanday qarorni qabul qilishi kerak, ya’ni uning riskka munosabati qanda degan savol tug‘iladi. Aytaylik, bizga *i* – nchi qaror olib keluvchi riskni baholash talab qilinayotgan bo‘lsin. Bizga real holat noma’lum. Agar biz uni bilsak, u holda biz eng katta daromad olib keluvchi qarorni qabul qilgan bo‘lardik, agar *j* – nchi holat eng katta $q_j = \max q_{ij}$ daromad olib keladigan bo‘lsa, u holda qaror qabul qilingan bo‘lardi. Biz *i* – nchi qarorni qabul qilib q_j daromadni olishga risk qilamiz.

$R = (r_{ij})$ - matritsa riski deb yuritiladi.

$r_{ij} = q_j - q_{ij}$

14.3-misol. Daromad matritsasi

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

berilgan. Risklar matritsasini tuzamiz.

$q_1 = \max\limits_{i} q_{i_1} = 8,\ q_2 = 5,\ q_3 = 8;\ q_4 = 12$

Bundan risklar matritsani ushbuga tengligi ko‘rinadi.

$$R=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0 & 8\\ 6 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 2\\ 7 & 1 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

Noaniqlik sharoitida qaror qabul qilish qoidalarini qarab chiqamiz.

Vald qoidasi. Bu qoidada i –nchi qarorni qabul qilishda eng yomon holatni, ya’ni eng kam daromad keltiradigan holat qaraladi

$$a_i=\min_j q_{ij}$$

hamda eng a_{i_0} daromadli i_0 qarorni qabul qilamiz. Shunday qilib, Vald qoidasi i_0 qarorni qabul qilib

$a_{i_0}=\max_i a_i=\max_i\left(\min_i q_{ij}\right)$ ni taklif qiladi. 14.3-misolda Vald qoidasi bo‘yicha

$$a_1=2,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=1$$

$\max\{2,2,3,1\}=3$. Demak, Vald qoidasi bo‘yicha 3-nchi qaror qabul qilinadi.

Sevidj qoidasi. Bu qoidani tatbiq qilishda $R=(r_{ij})$ matritsa riski tahlil qilinadi. Bu qoida bo‘yicha i –nchi qarorni qabul qilib $b_i=\max_j r_{ij}$ holat qaraladi. Bundan keyin b_{i_0} ning eng kichigi bo‘lgan i_0 qaror qabul qilinadi.

Shunday qilib, Sevidj qoidasi quyidagini taklif qiladi.

$$b_{i_0}=\min_i b_i=\min_i\left(\max_j r_{ij}\right)$$

14.3-misolda $b_1=8, b_2=6,\ b_3=5,\ b_4=7$

$$\min\{8,6,5,7\}=5$$

Demak, Sevidj qoidasi 3-qarorni qabul qiladi.

Gurvis qoidasi. Bu qoidada

$$\left\{\lambda\min_j q_{ij}+(1-\lambda)\max q_{ij}\right\},\quad 0\le\lambda\le1$$

ifodani eng katta qiymatga ega qiladigan i – qaror qabul qilinadi.

Agar λ son 1 ga yaqinlashsa, u holda Gurvis qoidasi Vald qoidasiga yaqinlashadi. 14.3 misolda $\lambda=\frac{1}{2}$ bo‘lsa bu qoida ikkinchi qarorni taklif etadi.

XV BOB. SUG‘URTAVIY RENTALAR

15.1. Sug‘urtada moliyaviy ekvivalentlik

Sug‘urta va qandaydir investitsion loyihani tahlil qilishda shartli rentalardan foydalanish zarurati tug‘iladi. Shu yo‘sindagi rentalardan biri sug‘urta hisoblanadi. Sug‘urtada rentaning to‘lovlar hadi sug‘urta hodisasining yuz berishiga bog‘liq bo‘ladi. Bunday rentalarni sug‘urtaviy annuitetlar deb ataymiz. Sug‘urtaviy annuitetlarda to‘lovlar soni, ba’zan ularning muddati o‘zgarmay qoladi.

Sug‘urta shartnomasi bo‘yicha sug‘urtalanuvchi oldindan sug‘urtalovchiga qandaydir summani to‘laydi. Bu summani mukofot (premium) deb ataymiz. O‘z navbatida sug‘urtalanuvchi sug‘urta hodisasi yuz berganda sug‘urta summasi S ni oladi. Agar bu hodisaning yuz berish ehtimoli q oldindan ma’lum bo‘lsa, u holda nazariy jihatdan har qanday faktorni hisobga olmagan holda mukofot qiymati quyidagiga teng bo‘ladi:

$$p = S\,q\,.$$

Keltirilgan bu tenglik faqat sug‘urtalovchi va sug‘urtalanuvchi majburiyatining moliyaviy ekvivalentlik prinsipini ifodalaydi. Bu prinsip sug‘urta narxi sifatida tushuniladigan – sug‘urtaviy “netto-mukofot”ni hisoblashda qanday amalga oshirilishini umumiy holda ko‘rsatamiz. Amalda sug‘urtaviy tashkilotga tushadigan mukofot, odatda netto-mukofot qiymatini oshiradi, ya’ni netto-mukofotga qo‘shimcha mablag‘ tushadi Bu mablag‘ ish yuritish bo‘yicha barcha xarajatlarni qoplaydi va sug‘urtaviy tashkilotga qandaydir foyda keltiradi. Bu qo‘shimcha mablag‘ni brutto-mukofot deb yuritiladi. Brutto-mukofotni aniqlash oddiy arifmetik masala bo‘lganligi uchun gap faqat netto-mukofot haqida boradi.

Faraz qilaylik, mukofot qiymati p, sug‘urtaviy hodisaning ehtimoli q_n (masalan, sug‘urtalanuvchining sug‘urta qilingandan n yil o‘tgandan keyingi o‘limi) bo‘lsin.

Agar sug‘urtaviy hodisa sug‘urtaning birinchi yili yuz bersa, u holda sug‘urtalanuvchi p miqdordagi summani oladi (mukofot yil boshida beriladi deb faraz qilinadi), agar hodisa ikkinchi yili yuz beradigan bo‘lsa, u holda mukofot qiymati $2p$ va hokazo.

Bunday mukofot qatorining matematik kutilmasi quyidagini tashkil etadi:

$$pq_1 + 2pq_2 + ... + npq_n$$

hosil qilingan bu kattalik sug‘urtalanuvchining barcha badallarini ularning to‘lovlar ehtimolini hisobga olgan holda umumlashtiradigan bo‘lsada, mos kattaliklarning yig‘indisini hisoblashda mukofot vaqtning turli momentlarida to‘lanishi hisobga olinmaydi. Bu faktorni hisobga olgan holda (diskontirlash yordamida to‘lovlar yig‘indisini) badallarni hozirgi qiymatining matematik kutilmasini topamiz:

$$E(A) = p[q_1 + (1+\nu)q_2 + (1+\nu+\nu^2)q_3 + ... + (1+\nu+...+\nu^{n-1})q_n]$$

bu yerda $\nu - i$ stavka bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi. Endi sug‘urtaviy summa to‘lovlariga e’tibor beramiz. Aytaylik, u yil oxirida to‘lanadigan bo‘lsin. U holda to‘lovlarning matematik kutilmasi birinchi yili Sq_1, ikkinchi yili Sq_2 va hokazo vaqt faktorini hisobga olgan holdagi to‘lovlarning matematik kutilmasi (aktuar narx) quyidagicha aniqlanadi:

$$E(S) = S(\nu q_1 + \nu^2 q_2 + ... + \nu^n q_n)\,.$$

Sug‘urtalovchi va sug‘urtalanuvchilar majburiyatining ekvivalentlik prinsipidan kelib chiqqan holda, quyidagi tenglikni yozishimiz mumkin:

$$E(S) = E(A)$$

bu netto-mukofot qiymati p ni aniqlash imkonini beradi. Umumiy holda shaxs sug‘urtasida netto-mukofotni hisoblash metodiga shu tarzda yondashiladi.

Aytaylik, endi gap mulk sug‘urtasi haqida borayotgan bo‘lsin. Agar sug‘urtaviy hodisaning yuz berish ehtimoli o‘zgarmas deb faraz qilinsa, u holda n yil uchun mukofotning aktuar narxi quyidagini tashkil etadi.

$$E(A) = p[q + (1+\nu)q + ... + (1+\nu+...+\nu^{n-1})q] = PqK,$$

bunda $K = n + \sum_{1}^{n-1}(n-t)\nu^t$.

O‘z navbatida sug‘urtaviy summa to‘lovlarining aktuar narxi

$$E(S) = Sq\sum_{1}^{n}\nu^t .$$

Badallar va to‘lovlar aktuar narxlarining tengligidan izlangan netto-mukofot qiymatini topamiz.

Sug‘artaviy annuitetlarni shakllantirish masalasiga qadar, insonlarning hayoti bilan va ularni mukofotni hisoblashda qo‘llash bilan bog‘liq bo‘lgan zaruriy ehtimollarni hisoblash metodiga tayanish lozim bo‘ladi. Bu metod yordamida qo‘yilgan masala oson hal qilinadi.

Ayrim insonlar hayotining davomiyligi tasodifiy hodisa bo‘ladi va yetarli darajada keng chegara bo‘ylab tebranib turadi. Demografik statistika bo‘yicha inson o‘limining uning yoshiga bog‘liqligi aniqlangan. Bu bog‘liqlik o‘limlik jadvali deb yuritiladi.

15.2. O‘limlik jadvali va sug‘urtaviy ehtimollar

Aktuar hisoblarni yoritish uchun, jumladan, sug‘urtaviy annuitetlar narxini hisoblashda, sug‘urtalanuvchining jinsi va yoshi, shuningdek demografik ko‘rsatkichlarining normativ sistemalarini xarakterlovchi dastlabki ma’lumotlar zarur bo‘ladi.

O‘limlik jadvali (mortality tables) insonlarni yoshlari bo‘yicha qandaydir insonlar majmuasining o‘lish jarayonining sonli modelini bildiradi. Bunday jadval inson yoshining ketma-ket ortishi bilan bu majmua chegaraviy yoshga yetganidan so‘ng nolga yaqinlashishini ko‘rsatadi. Bu qandaydir davr oralig‘ida berilgan demografik statistikani umumlashtiradi.

O‘zbekistonda o‘limlik jadvali butun Respublika bo‘yicha statistik tashkilotlar tomonidan katta tuman va viloyatlar hamda shahar va qishloq aholilari uchun alohida ishlab chiqiladi.

Biz quyida Amerika aholisining o‘limlik jadvalidan namuna keltiramiz:

x	l_x	d_x	p_x	q_x
18	96514	108	-99888	-00112
19	96406	113	-99883	-00117
20	96293	115	-99881	-00119
21	96178	113	-99882	-00118
22	96065	110	-99886	-00114
23	95955	104	-99892	-00108
24	95851	98	-99898	-00102
25	95753	95	-99901	-00099
26	95658	94	-99902	-00098
27	95564	96	-99900	-00100
28	95468	99	-99896	-00104
29	95369	104	-99891	-00109
30	95265	110	-99885	-00115
31	95155	115	-99879	-00121
32	95040	122	-99872	-00128
33	94918	129	-99864	-00136
34	94789	137	-99855	-00145
35	94652	147	-99845	-00155
36	94505	158	-99833	-00167
37	94347	171	-99819	-00181
38	94176	185	-99804	-00196
39	93991	201	-99786	-00214
40	93790	220	-99765	-00235

Odamlar boshlang‘ich majmuasi l_0 dan tirik qolganlarining naqd x yoshdagilarining soni l_x o‘limlik jadvalining asosiy ko‘rsatkichi hisoblanadi.

l_x ning qiymati ($l_\circ$ dan boshqa) o‘lish ehtimoli q_x yoki o‘lganlar soni d_x ni berilishi asosida aniqlanadi.

Hozirgi o‘limlik jadvalining izlangan ko‘rsatkichi odatda o‘lish ehtimoli, ya’ni x yoshgacha yashaydiganlar orasidan x yoshdan $x+1$ yoshgacha o‘lganlarining qismi xizmat qiladi.

O‘limlik jadvalining ko‘rsatkichlari quyidagi munosabatlar bilan bog‘langan.

$$l_{x+1} = l_x - d_x; \qquad d_x = l_x \cdot q_x$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}.$$

O‘limlik jadvalining berilishiga asosan yashash ehtimollari sistemasini hosil qilishimiz mumkin. Bu ehtimollar sistemasi sug‘urtaviy ko‘rsatkichlarni hisoblash uchun zarur bo‘ladi.

Shunday ehtimollardan eng zarurini qarab chiqamiz.

x yoshdan $x+n$ yoshgacha yashash ehtimoli

$$nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (15.2.1)$$

x yoshdan so‘ng yana bir yil yashash ehtimoli

$$P_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Misol. 30 yoshli erkak kishining yana 10 yil yashash ehtimoli ${}_{10}P_{30} = \frac{93790}{95265} = 0{,}9845$ni tashkil etadi.

Berilgan o‘limlik jadvali bo‘yicha ma’lum yoshdagilarning o‘lish ehtimolini ham topishimiz mumkin. Masalan, x yoshdan $x+n$ yoshgacha bo‘lganlarning o‘lish ehtimoli

$$nq_x = 1 - nP_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=x}^{x+n-1} d_j \qquad (15.2.2)$$

Misol. 30 yoshli erkak kishining 10 yil davomida o‘lish ehtimoli

$${}_{10}q_{30} = 1 - {}_{10}P_{30} = 1 - 0{,}9845 = 0{,}0155,$$

x yoshdagi shaxsning m yildan so‘ng o‘lish ehtimoli

$$ {}_{m|}q_x = {}_mP_x \cdot q_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+m}}{l_{x+m}} = \frac{d_{x+m}}{l_x} \qquad (15.2.3) $$

O‘z navbatida, x yoshdagi shaxsning $x+m$ yoshdan $x+m+n$ yoshgacha bo‘lgan intervalda o‘lish ehtimoli quyidagicha topiladi:

$$ {}_{m|n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} \qquad (15.2.4) $$

Oxirgi tenglikdan

$$ {}_{m|n}q_x = {}_mP_x \cdot {}_n q_{x+m}. $$

Boshqacha aytganda izlangan ehtimollik $x+m$ yoshgacha yashash ehtimoli va keyingi n yil ichida o‘lish ehtimollarining ko‘paytmasiga teng.

Ba’zi bir aktuar hisoblarda (masalan, pensiya sug‘urtalarda) er-xotinlarning yashash ehtimollari zarur bo‘ladi. Bu ehtimollar ham o‘limlik jadvali yordamida hisoblanadi.

Faraz qilaylik, x va y yoshdagi er-xotinlarni har birining yana n yil yashash ehtimollarini baholash zarur bo‘lsin. Bu ehtimollarni np_x va np_y kabi belgilaymiz. Ularni quyidagicha topamiz:

$$ np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \qquad np_y = \frac{l_{y+n}}{l_y} $$

bu yerda l_x, l_y – x va y yoshgacha yashaydigan shaxslar soni (bu sonlar erkak va ayollar uchun tuzilgan o‘limlik jadvalidan olinadi).

Quyidagi ikkita ishchi gipotezani kiritib yana ikkita ehtimolni hisoblaymiz:

- er-xotinlarning ikkalasi ham x va y yoshga bir kunda to‘ladi;

- ulardan bittasining o‘limi – boshqasining o‘limiga bog‘liq bo‘lmagan sug‘urtaviy hodisa.

Er-xotinlarning birga yana n yil yashash ehtimoli (er-xotin juftligini “saqlanish” ehtimoli) ikkita erkli hodisa ehtimollarining ko‘paytmasi kabi hisoblanadi:

$$ {}_nP_{xy} = {}_nP_x \cdot {}_nP_y = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \cdot l_y} \qquad (15.2.5) $$

Ushbu formuladagi ko‘paytmalarni quyidagicha belgilashadi:

$$l_x \cdot l_y = l_{xy}, \qquad l_{x+n} \cdot l_{y+n} = l_{xy+n}$$

Bularni e’tiborga olib, (15.2.5) formulani

$$_nP_{xy} = \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}} \qquad (15.2.6)$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin.

Endi er (er x yoshda bo‘lganda sug‘urta qilingan, bu paytda xotini y yoshda bo‘lgan) $x+n$ yoshgacha yashamaydigan, xotin esa $y+n$ yoshgacha yashaydigan holdagi ehtimolni hisoblaymiz.

Izlangan ehtimol (uni $_nP_{x|y}$ deb belgilaymiz) ushbu ehtimollar ko‘paytmasiga teng.

$$_nP_{x|y} = {}_nq_x \cdot {}_nP_y = (1 - {}_nP_x) \cdot {}_nP_x = {}_nP_y - {}_nP_x \cdot {}_nP_y = \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}} \qquad (15.2.7)$$

Misol. Er va xotin yoshlari mos ravishda 50 va 45 bo‘lsin. O‘limlik jadvalidan (Sobiq SSSR aholisining o‘limlik jadvali olindi) erkaklar uchun $l_{50} = 83640$, $l_{55} = 77007$, ayollar uchun $l_{45} = 96261$, $l_{50} = 94348$. Er va xotinni yana 5 yil birga yashash ehtimoli

$$_5P_{50;45} = {}_5P_{50} \cdot {}_5P_{45} = \frac{77007}{83640} \cdot \frac{94348}{96261} = 0{,}92070 \cdot 0{,}98013 = 0{,}9024.$$

Erni 5 yil yashamaslik, xotinini esa yana 5 yil yashash ehtimoli (15.2.7) formuladan

$$_5P_{50|45} = (1 - {}_5P_{50}) \cdot {}_5P_{45} = (1 - 0{,}92070) \cdot 0{,}98013 = 0{,}007772.$$

15.3. Kommutatsion funksiya. Sug‘urtaviy rentaning narxi

Sug‘urtaviy annuitetlarni qisqa yozish va hisoblashlarni soddalash-tirishda kommutatsion funksiyalar yoki kommutatsion sonlar qo‘llaniladi. Kommutatsion sonlar yoki funksiyalarni yordamchi miqdor sifatida tushunamiz.

Standart kommutatsion funksiyalar ikki guruhga bo‘linadi. Birinchisiga ma’lum yoshgacha yashaydiganlar soni, ikkinchisiga o‘lganlar soni kiradi. Birinchi guruhning asosiy funksiyalari D_x va N_x

$$D_x = l_x \cdot v^x \qquad (15.3.1)$$

$$N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j \qquad (15.3.2)$$

bu yerda $\nu - i$ murakkab stavka bo‘yicha diskont ko‘paytuvchisi, $\omega -$ o‘limlik jadvalida hisobga olingan chegaraviy yosh. Ta’rifga ko‘ra

$$N_x = N_{x+1} + D_x, \qquad N_\omega = D_\omega.$$

Ba’zi aktuar hisoblarda D_x kommutatsion sonlar yig‘indisini berilgan yosh intervallari bo‘yicha hisoblash zarur bo‘ladi. Bunday holda N_x kommutatsion sonlardan foydalanish mumkin:

$$\sum_{t=1}^{k} D_{x+t} = N_{x+1} - N_{x+k+1}.$$

Amaliyotda N_x ning yana ikkita varianti qo‘llaniladi, unga to‘lovlar yiliga m marta to‘langanda murojaat qilinadi. Postnumerando to‘lovlar uchun quyidagi ifodani qo‘llaymiz:

$$N_x^{(m)} = N_x + \frac{m-1}{2m} D_x,$$

Prenumerando to‘lovi uchun

$$\ddot{N}_x^{(m)} = N_x - \frac{m-1}{2m} D_x \qquad (15.3.4)$$

Ikkinchi guruh kommutatsion funksiyalar C_x va M_x hisoblanadi.

$$C_x = d_x \nu^{x+1} \qquad (15.3.5)$$

$$M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j \qquad (15.3.6)$$

Ikkala guruh kommutatsion sonlari orasida o‘zaro bog‘lanish mavjud:

$$C_x = d_x \nu^{x+1} = (l_x - l_{x+1}) \nu^{x+1} = l_x \nu^x \nu - l_{x+1} \nu^{x+1} = D_x \nu - D_{x+1}.$$

Shunga o‘xshash

$$M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j = \sum_{j=x}^{\omega} d_j \nu^{j+1} = \sum_{j=x}^{\omega} (l_j - l_{j+1}) \nu^{j+1} = \sum_{j=x}^{\omega} D_j \nu - \sum_{j=x}^{\omega} D_{j+1} = N_x \nu - N_{x+1}$$

ekanligini isbotlashimiz mumkin.

Sug‘urtaviy tashkilotlar kommutatsion funksiyalar jadvalining daromad normasini hisobga olgan holda ishlab chiqadilar.

Kommutatsion funksiyalar jadvalidan namuna (bu jadval $i = 9\%$ da sobiq SSSR aholisining o‘limlik jadvali asosida hisoblangan).

x	l_x	D_x	N_x	$N_x^{(12)}$	C_x	M_x
18	100000	21199	244593	254309	28,98	1003,6
19	99851	19420	223393	232294	30,82	974,7
20	99678	17786	203973	212125	31,98	943,8
30	96991	7310	80677	84027	25,55	648,9
35	94951	4651	49910	52042	20,78	530,3
40	92327	2940	30376	31723	19,09	431,4
50	83640	1125	10465	10981	14,54	260,7
60	68505	389	3082	3261	10,25	134,7
70	45654	110	684	734	5,72	53,1
80	19760	20	85	95	2,14	13,0

Er-xotin juftligini sug‘urta qilishda ushbu kommutatsion funksiyaning zarurligi kelib chiqadi:

$$D_{xy} = l_{xy} \cdot v^{(x+y)/2} \tag{15.3.7}$$

l_{xy} ning qiymati (15.2.6) formula bo‘yicha ${}_nP_{xy}$ ni hisoblash orqali topilgan.

(15.3.7) funksiyani D_x, D_y kommutatsion funksiyalar asosida quyidagicha topiladi:

$$D_{xy} = D_x \cdot D_y \cdot v^{-(x+y)/2} = D_x \cdot D_y \cdot (1+i)^{\frac{x+y}{2}} \tag{15.3.8}$$

O‘z navbatida

$$D_{xy+n} = l_{xy+n} \cdot v^{n+\frac{x+y}{2}},$$

$$D_{xy+n} = D_{x+n} \cdot D_{y+n} \cdot v^{-[n+(x+y)/2]} = D_{x+n} \cdot D_{y+n} (1+i)^{n+(x+y)/2}$$

Kommutatsion sonlar ko‘paytmasi katta o‘lchovga ega bo‘lganligi uchun ularni 10^{-3} ga ko‘paytiriladi.

Misol. Er-xotin juftligi uchun $D_{50;45}$ va $D_{55;50}$ kommutatsion sonlarni aniqlang.

Avval, $\frac{x+y}{2}=\frac{50+45}{2}=47{,}5$ ni aniqlaymiz.

Foiz stavkasi $i=9\%$ bo‘lgan holdagi kommutatsion sonlar quyidagi qiymatlarga ega (birinchi qator – erkaklar uchun, ikkinchi qator – ayollar uchun)

$$D_{50}=1124{,}8, \qquad D_{55}=673{,}1$$
$$D_{45}=1991{,}9, \qquad D_{50}=1268{,}8.$$

Bulardan

$$D_{50;45}=10^{-3}\cdot 1124{,}8\cdot 1991{,}9\cdot 1{,}09^{47,5}=134308,$$
$$D_{55;50}=10^{-3}\cdot 673{,}1\cdot 1268{,}8\cdot 1{,}09^{5+47,5}=78770.$$

N_x funksiyani topish qoidasiga asosan N_{xy} ni topamiz:

$$N_{xy}=\sum_{t=0}^{\omega-y} D_{x+t;y+t} \qquad (15.3.9)$$

Sug‘urtaviy annuitet narxi

Yillik postnumerando annuitetlarning narxi uchun formulalarni yozish maqsadida ushbu belgilashlarni kiritamiz:

a_x – umrbod zudlik annuitet uchun,

$a_{x:t|}$ – chegaralangan zudlik annuitet uchun,

${}_{n|}a_x$ – qoldirilgan umrbod annuitet uchun,

${}_{n|}a_{x:t|}$ – chegaralangan qoldirilgan annuitet uchun.

Shunga o‘xshash belgilashlar prenumerando annuitetlar uchun kiritiladi, faqat bunda a yozuv o‘rniga $\ddot{a}$ yoziladi.

Faraz qilaylik, qandaydir shaxsga x yoshdan boshlab umrining oxirigacha har yil oxirida 1 pul birligi to‘lab boriladigan bo‘lsin (umrbod annuitet, postnumerando, zudlik).

U holda

$$a_x = P_x\cdot\nu + {}_2P_x\cdot\nu^2+\ldots+{}_{\omega-x}P_x\cdot\nu^{\omega-x}=\frac{l_{x+1}\cdot\nu}{l_x}+\frac{l_{x+2}\cdot\nu^2}{l_x}+\ldots+\frac{l_\omega\cdot\nu^{\omega-x}}{l_x}.$$

Har bir qo‘shiluvchining surat va maxrajiga v^x ni ko‘paytirib, so‘ngra zudlik, umrbod postnumerando annuitetlar uchun yillik to‘lovlarni hisoblash maqsadida kommutatsion funksiyalarni tatbiq etish mumkin:

$$a_x = \frac{\sum_{j=1}^{\omega-x} l_{x+j} \cdot v^{x+j}}{l_x \cdot v^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

Boshqa turdagi annuitetlar narxini shu tarzda aniqlashimiz mumkin. Umrbod zudlik annuitet prenumerando uchun yillik to‘lov 1 pul birligi bo‘lgan holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\ddot{a}_x = 1 + P_x \cdot v + {}_2P_x \cdot v^2 + \ldots + {}_{\omega-x}P_x \cdot v^{\omega-x} = \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} l_{x+j\cdot v^{x+j}}}{l_x \cdot v^x} = \frac{N_x}{D_x},$$

$\ddot{a}_x = a_x + 1$ yoki $a_x = q_{x+1} \cdot v$ tengliklar o‘rinli bo‘lishiga ishonch hosil qilamiz.

Turli xil yillik annuitetlarni hisoblash formulalarini quyidagi jadvalda keltiramiz:

Annuitet turlari	Postnumerando	Prenumerando
Umrbod zudlik	$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$ (10.4.1)	$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$ (10.4.2)
n yilga qoldirilgan umrbod	${}_{n\vert}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$ (10.4.3)	${}_{n\vert}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$ (10.4.4)
Chegaralangan, zudlik (to‘lovlar t yil mobaynida)	$a_{x:t\vert} = \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x}$ (10.4.5)	$\ddot{a}_{x:t\vert} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}$ (10.4.6)
n yilga qoldirilgan chegaralangan (to‘lovlar t yil mobaynida)	${}_{n\vert}a_{x:t\vert} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1}}{D_x}$ (10.4.7)	${}_{n\vert}\ddot{a}_{x:t\vert} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}$ (10.4.8)

Misol. 20 yilga qoldirilgan, 5 yil bilan chegaralangan prenumerando annuitet narxini 30 yoshli erkaklar uchun aniqlaymiz:

$$ {}_{20|}\ddot{a}_{30:\overline{5|}} = \frac{N_{50}-N_{55}}{D_{30}} = \frac{10465{,}3-5826{,}7}{7310{,}3} = 0{,}63453. $$

Agar to‘lovlar bir yilda m marta to‘lanadigan bo‘lsa, u holda yuqoridagi formulalarda keltirilgan N_x o‘rniga $N_x^{(m)}$ yoki $\ddot{N}_x^{(m)}$ lardan foydalanamiz. $m=12$ bo‘lgan holda annuitetlar formulalarini keltiramiz. Oylik prenumerando to‘lovlar uchun quyidagi ifodalarga ega bo‘lamiz.

Umrbod zudlik annuitet:

$$ \ddot{a}_x = \frac{\ddot{N}_x^{(12)}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{11}{24} \tag{15.3.10} $$

Chegaralangan umrbod annuitet:

$$ \ddot{a}_{x:t}^{(12)} = \frac{\ddot{N}_x^{(12)} - \ddot{N}_{x+t}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+t} - \frac{11}{24}(D_x - D_{x+t})}{D_x} \tag{15.3.11} $$

Qoldirilgan umrbod annuitet:

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{\ddot{N}_{x+n}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n} - \frac{11}{24}D_{x+n}}{D_x} \tag{15.3.12} $$

Qoldirilgan chegaralangan annuitet:

$$ {}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{t|}}^{(12)} = \frac{\ddot{N}_{x+n}^{(12)} - \ddot{N}_{x+n+t}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t} - \frac{11}{24}(D_{x+n} - D_{x+n+t})}{D_x} \tag{15.3.13} $$

Misol. Yuqoridagi misol uchun oylik to‘lovlar bo‘yicha quyidagini olamiz:

$$ {}_{20|}\ddot{a}_{30:\overline{5|}}^{(12)} = \frac{N_{50} - N_{55} - \frac{11}{24}(D_{50} - D_{55})}{D_{30}} = \frac{10405{,}3 - 5826{,}7 - \frac{11}{24}(1124{,}8 - 673{,}1)}{7310{,}3} = 0{,}60484. $$

Oylik postnumerando to‘lovlar uchun ushbu munosabatlarni topamiz.

Umrbod zudlik annuitet:

$$ a_x^{(12)} = \frac{N_{x+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{11}{24} \tag{15.3.14} $$

Chegaralangan zudlik annuitet:

$$ a_{x:\overline{t|}}^{(12)} = \frac{N_{x+1}^{(12)} - N_{x+t+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1} + \frac{11}{24}(D_{x+t} - D_{x+t+1})}{D_x} \tag{15.3.15} $$

n yilga qoldirilgan umrbod annuitet:

$$ {}_{n|}a_x^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} + \frac{11}{24} D_{x+n+1}}{D_x} \tag{15.3.16} $$

Qoldirilgan (to‘lovlar *t* yil mobaynida) chegaralangan annuitet:

$$ {}_{n|}a_{x:t}^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)} - N_{x+n+t+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1} + \frac{11}{24}(D_{x+n+1} - D_{x+n+t+1})}{D_x} \tag{15.3.17} $$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. 45 yoshli erkak kishining yana 10 yil yashash ehtimolini toping?
2. 45 yoshli erkak kishining 10 yil ichida o‘lish ehtimolini toping?
3. Er va xotin yoshlari mos ravishda 45 va 40 bo‘lsin. O‘limlik jadvalidan foydalanib er va xotinni yana 5 yil birga yashash ehtimolini toping?
4. “Ilova”dan foydalanib 20 yilga qoldirilgan, 5 yil bilan chegaralangan prenumerando annuitet narxini 40 yoshli erkaklar uchun aniqlang?
5. Yuqoridagi masala uchun oylik prenumerando to‘lovlar bo‘yicha qoldirilgan chegaralangan annuitet va qoldirilgan umrbod annuitetlarni toping?
6. “Ilova”dan foydalanib 15 yilga qoldirilgan, 5 yil bilan chegaralangan prenumerando annuitet narxini 35 yoshli ayollar uchun aniqlang?
7. 6-masala uchun oylik prenumerando to‘lovlar bo‘yicha umrbod zudlik va chegaralangan umrbod annuitetlarni hisoblang?
8. 6-masala uchun oylik postnumerando to‘lovlar bo‘yicha umrbod zudlik va chegaralangan zudlik annuitetlarni hisoblang?

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Блау С.Л. Финансовая математика: практикум. Учебное пособие. –М.:Академия, 2011. – 208 с.

2. Высшая математика для экономистов. / Н.Ш.Кремер и др. - М.:ЮНИТИ – ДАНА, 2008. - 479 с.

3. Высшая математика. Учеб.пособие / Г.Л.Луканкин, Н.Н.Мартынов и др. - М.: Просвещение, 1988. - 431 с.

4. Ковалев С.В. Экономическая математика. - М.:КНОРУС, 2010. - 248 с.

5. Костевич Л.С., Гайдукевич И.В. Математическое программирование. Практикум. – Мн.: БГЭУ, 2007 . - 204 с.

6. Красс.М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике. Математические методы и модели. Учебник. –М.: Финансы и статистика, 2007. - 544 с.

7. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. - М.: ”ДЕЛО”АНХ, 2008. - 720 с.

8. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономических специальностей. - М.: Высшее образование, 2008. - 893 с.

9. Кремер Н.Ш. и др. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. - М.: Высшее образование, 2007. - 646 с.

10. Кузнецов Ю.Н. и др. Математическое программирование. Учеб.пособие. – М.: Высш.школа, 1976. -352 с.

11. Кундышева Б.С. Математика: учебник для экономистов. - М.:”Дашков и $к^0$”, 2009. - 564 с.

12. Методы оптимальных решений в экономике и финансах. Учебник. /под ред. В.М.Гончаренко, В.Ю Попова. – М.: КНОРУС, 2015. - 400 с.

13. Новиков А.И. Экономико – математические методы и модели: Учебник для бакалавров. - М.: ”Дашков и $к^0$”, 2020. - 532 с.

14. Общий курс высшей математики для экономистов. /Под ред. В.И.Ермакова. - М.:ИНФРА-М, 2010. - 656 с.

15. Сборник задач по высшей математике для экономистов. / Под ред. В.И.Ермакова. - М.:ИНФРА-М, 2009. - 575 с.

16. Финансовая математика: Математическое моделирование финансовых операций. Учебное пособие./Под ред. В.А.Половникова, А.И.Пилипенко –М.:ИНФРА-М, 2010. – 360 с.

17. Четыркин Е.М. Финансовая математика. Учебник. –М.:Дело, 2008. – 400 с.

18. Saipnazarov SH.A., Ortiqova M.T. Moliyaviy matematika. Darslik. - T.: Fan va texnologiya, 2017. 244 b.

19. Safayeva Q., Moliya matematikasi. Darslik. - T.: IQTISOD-MOLIYA, 2012.-264 b.

20. Safayeva Q., «Moliya matematikasi» fanidan masalalar to‘plami. Darslik. - T.: IQTISOD-MOLIYA, 2013.

21. Sauxanov J.K., Mamurov I.N., Abdikarimov R.A. Finans matematikasi, O‘quv qo‘llanma. Nukus:. Qoraqalpog‘iston. 2020. 176 b.

ILOVALAR

1-ilova

Yildagi kunlar soni

kunlar	yanvar	fevral	mart	aprel	may	iyun	Iyul	avgust	sentabr	oktabr	noyabr	dekabr
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

2-ilova

O‘lim darajasi jadvali (AQSh aholisi uchun)

x	l_x	d_x	p_x	q_x
0	100000	2449	-97551	-02449
1	97551	153	-99843	-00157
2	97398	96	-99901	-00099
3	97302	67	-99931	-00069
4	97235	60	-99938	-00062
5	97175	55	-99943	-00057
6	97120	51	-99948	-00052
7	97069	47	-99952	-00048
8	97022	43	-99956	-00044
9	96979	40	-99959	-00041
10	96939	38	-99961	-00039
11	96901	37	-99962	-00038
12	96864	37	-99962	-00038
13	96827	40	-99959	-00041
14	96787	45	-99953	-00047
15	96742	57	-99941	-00059
16	96685	75	-99922	-00078
17	96610	96	-99901	-00099
18	96514	108	-99888	-00112
19	96406	113	-99883	-00117
20	96293	115	-99881	-00119
21	96178	113	-99882	-00118
22	96065	110	-99886	-00114
23	95955	104	-99892	-00108
24	95851	98	-99898	-00102
25	95753	95	-99901	-00099
26	95658	94	-99902	-00098
27	95564	96	-99900	-00100
28	95468	99	-99896	-00104
29	95369	104	-99891	-00109
30	95265	110	-99885	-00115
31	95155	115	-99879	-00121
32	95040	122	-99872	-00128
33	94918	129	-99864	-00136
34	94789	137	-99855	-00145

35	94652	147	-99845	-00155
36	94505	158	-99833	-00167
37	94347	171	-99819	-00181
38	94176	185	-99804	-00196
39	93991	201	-99786	-00214
40	93790	220	-99765	-00235
41	93570	242	-99741	-00259
42	93328	268	-99713	-00287
43	93060	297	-99681	-00319
44	92763	330	-99644	-00356
45	92433	369	-99601	-00399
46	92064	412	-99552	-00448
47	91652	463	-99495	-00505
48	91189	520	-99430	-00570
49	90669	584	-99356	-00644
50	90085	656	-99272	-00728
51	89429	736	-99177	-00823
52	88693	825	-99070	-00930
53	87868	923	-98949	-01051
54	86945	1029	-98816	-01184
55	85916	1144	-98669	-01331
56	84772	1265	-98508	-01492
57	83507	1393	-98332	-01668
58	82114	1526	-98141	-01859
59	80588	1664	-97935	-02065
60	78924	1805	-97713	-02287
61	77119	1947	-97475	-02525
62	75172	2088	-97222	-02778
63	73084	2228	-96951	-03049
64	70856	2366	-96661	-03243
65	68490	2499	-96352	-03648
66	65991	2625	-96022	-03978
67	63366	2745	-95668	-04332
68	60621	2856	-95288	-04712
69	57765	2959	-94878	-05122
70	54806	3051	-94434	-05566
71	51755	3130	-93953	-06047
72	48625	3195	-93430	-06570

73	45430	3243	-92861	-07139
74	42187	3273	-92241	-07759
75	38914	3282	-91566	-08434
76	35632	3266	-90833	-09167
77	32366	3225	-90037	-09963
78	29141	3154	-89176	-10824
79	25987	3054	-88248	-11752
80	22933	2923	-87253	-12747
81	20010	2763	-86192	-13808
82	17247	2576	-85066	-14934
83	14671	2365	-83878	-16122
84	12306	2137	-82634	-17366

3-ilova

O‘limlik jadvali (Rossiya aholisi uchun)

Yosh	Erkaklar			Ayollar		
x	l_x	d_x	q_x	l_x	d_x	q_x
0	100000	2047	0,02047	100000	1512	0,01512
1	97953	200	0,002042	98488	161	0,001635
2	97753	113	0,001156	98327	98	0,000997
3	97640	85	0,000871	98229	69	0,000702
4	97555	78	0,0008	98160	57	0,000581
5	97477	74	0,000759	98103	45	0,000459
6	97403	69	0,000708	98058	41	0,000418
7	97334	62	0,000637	98017	39	0,000398
8	97272	57	0,000586	97978	39	0,000398
9	97215	57	0,000586	97939	37	0,000378
10	97158	54	0,000556	97902	31	0,000317
11	97104	54	0,000556	97871	31	0,000317
12	97050	56	0,000577	97840	31	0,000317
13	96994	63	0,00065	97809	35	0,000358
14	96931	70	0,000722	97774	38	0,000389
15	96861	105	0,001084	97736	47	0,000481
16	96756	151	0,001561	97689	68	0,000696
17	96605	208	0,002153	97621	92	0,000942
18	96397	261	0,002708	97529	92	0,000943
19	96136	299	0,00311	97437	93	0,000954
20	95837	351	0,003662	97344	93	0,000955

21	95486	379	0,003969	97251	94	0,000967
22	95107	388	0,00408	97157	95	0,000978
23	94719	375	0,003959	97062	98	0,00101
24	94344	392	0,004155	96964	98	0,001011
25	93952	441	0,004694	96866	99	0,001022
26	93511	473	0,005058	96767	107	0,001106
27	93038	529	0,005686	96660	132	0,001366
28	92509	543	0,00587	96528	137	0,001419
29	91966	547	0,005948	96391	138	0,001432
30	91419	597	0,00653	96253	149	0,001548
31	90822	639	0,007036	96104	164	0,001706
32	90183	695	0,007707	95940	172	0,001793
33	89488	757	0,008459	95768	180	0,00188
34	88731	797	0,008982	95588	197	0,002061
35	87934	832	0,009462	95391	218	0,002285
36	87102	905	0,01039	95173	234	0,002459
37	86197	907	0,010522	94939	250	0,002633
38	85290	940	0,011021	94689	267	0,00282
39	84350	1006	0,011926	94422	279	0,002955
40	83344	1145	0,013738	94143	310	0,003293
41	82199	1198	0,014574	93833	344	0,003666
42	81001	1194	0,014741	93489	382	0,004086
43	79807	1208	0,015137	93107	417	0,004479
44	78599	1212	0,01542	92690	458	0,004941
45	77387	1292	0,016695	92232	449	0,004868
46	76095	1394	0,018319	91783	481	0,005241
47	74701	1379	0,01846	91302	512	0,005608
48	73322	1432	0,01953	90790	547	0,006025
49	71890	1536	0,021366	90243	571	0,006327
50	70354	2001	0,028442	89672	680	0,007583
51	68353	2107	0,030825	88992	847	0,009518
52	66246	2156	0,032545	88145	884	0,010029
53	64090	2143	0,033437	87261	966	0,01107
54	61947	2088	0,033706	86295	959	0,011113
55	59859	2028	0,03388	85336	949	0,011121
56	57831	1974	0,034134	84387	952	0,011281
57	55857	1917	0,03432	83435	954	0,011434
58	53940	1870	0,034668	82481	1009	0,012233

59	52070	1824	0,03503	81472	1012	0,012421
60	50246	2127	0,042332	80460	1121	0,013932
61	48119	2458	0,051082	79339	1334	0,016814
62	45661	2395	0,052452	78005	1499	0,019217
63	43266	2309	0,053368	76506	1621	0,021188
64	40957	2234	0,054545	74885	1745	0,023302
65	38723	2167	0,055962	73140	1785	0,024405
66	36556	2055	0,056215	71355	1812	0,025394
67	34501	2009	0,05823	69543	1834	0,026372
68	32492	1955	0,060169	67709	1844	0,027234
69	30537	1933	0,0633	65865	1914	0,029059
70	28604	1933	0,067578	63951	2075	0,032447
71	26671	1902	0,071313	61876	2198	0,035523
72	24769	1820	0,073479	59678	2375	0,039797
73	22949	1803	0,078566	57303	2515	0,043889
74	21146	1735	0,082049	54788	2712	0,0495
75	19411	1782	0,091804	52076	2987	0,057358
76	17629	1831	0,103863	49089	3173	0,064638
77	15798	1762	0,111533	45916	3337	0,072676
78	14036	1734	0,123539	42579	3538	0,083093
79	12302	1687	0,0137132	39041	3399	0,087062
80	10615	1461	0,137635	35642	3301	0,092615
81	9154	1283	0,140157	32341	3287	0,101636
82	7871	1153	0,146487	29054	3224	0,110966
83	6718	1078	0,160464	25830	3156	0,122184
84	5640	960	0,170213	22674	3151	0,13897
85	4680	861	0,183974	19523	3001	0,153716

4-ilova

Kommutatsion funksiyalar jadvali

Erkaklar **Yillik foiz stavkasi – 5%**

Yosh x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
0	100000	1887590	1949,524	10114,77	342608,9	17,8759	0,101148
1	93288,57	1787590	181,4059	8165,4059	332494,2	18,16194	0,087527
2	88664,85	1694301	97,61365	7983,838	324328,9	18,10905	0,090045
3	84345,10	1605636	69,92971	7886,224	316345,1	18,03651	0,093499
4	80258,74	1521291	61,11504	7816,294	308458,9	17,95484	0,097389
5	76375,78	1441033	55,21994	7755,179	300642,6	17,86766	0,010154
6	72683,62	1364657	49,03701	7699,959	292887,4	17,7753	0,105938
7	69173,46	1291973	41,96404	7650,922	285187,4	17,6773	0,110605
8	65837,52	1222800	36,74271	7608,958	277536,5	17,57299	0,115572
9	626665,66	1156962	34,99306	7572,216	269927,6	17,46246	0,120835
10	59646,58	1094297	31,57268	7537,223	262355,3	17,34634	0,126365
11	56774,70	1034650	30,06922	7505,65	254818,1	17,22379	0,132201
12	54041,07	977875,3	29,698	7475,581	247312,5	17,09504	0,138331
13	51437,99	923834,2	31,81928	7445,883	239836,9	16,96015	0,144755
14	48956,74	872396,2	33,6712	7414,063	232391	16,81974	0,151441
15	46591,80	823439,5	48,10171	7380,392	224976,9	16,76349	0,158405
16	44325,04	776847,7	65,8808	7332,29	217596,5	16,52616	0,165421
17	42148,44	732522,7	86,4283	7266,41	210264,3	16,37959	0,1734
18	40054,94	690374,2	103,2866	7179,981	202997,8	16,23568	0,179253
19	38044,28	650319,3	112,69	7076,695	195817,9	1609375	0,18660
20	36119,96	612275	125,9888	6964,005	18741,2	15,95116	0,192802
21	34273,97	576155	129,5611	6838,016	181777,2	15,81028	0,19951
22	32512,32	541881,1	126,3217	6708,455	174939,2	15,66695	0,206336
23	30837,79	509368,8	116,2755	6582,133	168230,7	15,51768	0,213444
24	29253,05	478531	115,7587	6465,858	161648,6	15,35833	0,221032
25	27744,29	449277,9	124,0272	6350,099	155182,7	15,19353	0,22888
26	26299,10	421533,6	126,6923	6226,072	148832,6	15,02844	0,236741
27	24920,07	395234,5	134,9445	6099,38	142606,5	14,86009	0,244758
28	23598,46	370314,5	131,9199	5964,435	136507,2	14,69232	0,252747
29	22342,80	346716	126,5635	5832,515	130542,7	14,51802	0,261047
30	21152,29	324373,2	131,5546	5705,952	124710,2	14,33513	0,269756
31	20013,49	303220,9	134,1045	5574,397	119004,3	14,15083	0,278532
32	18926,36	283207,4	138,9114	5440,293	113429,9	13,96365	0,287445

33	17886,19	264281,1	144,0986	5301,381	107989,6	13,7757	0,296395
34	16890,37	246394,9	144,4884	5157,283	102688,2	13,58789	0,305339
35	15941,58	229504,5	143,651	5012,794	97530,9	13,3966	0,314448
36	15038,81	213562,9	148,8142	4869,144	92518,1	13,20079	0,323772
37	14173,86	198524,1	142,0411	4720,329	87648,96	13,00636	0,333031
38	13356,87	184350,3	140,1991	4578,288	82928,63	12,8019	0,342767
39	12580,63	170993,4	142,898	4438,089	78350,34	12,5918	0,352772
40	11838,66	158412,7	154,8974	4295,191	73912,25	12,38097	0,362811
41	11120,01	14674,1	154,3499	4140,294	69617,06	12,18111	0,372328
42	10436,14	135454,1	146,5091	3985,944	65476,77	11,97933	0,381937
43	9792,67	125017,9	141,1685	3839,435	61490,83	11,76648	0,392072
44	9185,184	115225,3	134,8914	3698,266	57651,39	11,54469	0,402634
45	8612,903	106040,1	136,9477	3563,375	53953,12	11,31177	0,413725
46	8065,817	97427,19	140,7232	3426,427	50389,75	11,07902	0,424808
47	7541,007	89361,37	132,58	3285,704	46963,32	10,85006	0,435712
48	7049,332	81820,36	131,1195	3153,124	43677,62	10,60683	0,447294
49	6582,53	74771,03	133,9449	3022,005	40524,49	10,35901	0,459095
50	6135,131	68188,5	166,1854	2888,06	37502,49	10,11443	0,470741
51	5676,797	62053,37	166,656	2721,874	34614,43	9,931054	0,479474
52	5239,817	56376,57	162,4112	2555,218	31892,56	9,759264	0,487654
53	4827,891	51136,76	153,7447	2392,807	29337,34	9,591946	0,495622
54	4444,246	46308,86	142,6655	2239,062	26944,53	9,419959	0,503811
55	4089,95	41864,62	131,9676	2096,397	24705,47	9,235973	0,512573
56	3763,223	37774,67	122,3368	1964,429	22609,07	9,03785	0,522007
57	3461,685	34011,44	113,1469	1842,092	20644,64	8,825112	0,532138
58	3183,696	30549,76	105,117	1728,946	18802,55	8,59569	0,543062
59	2926,974	27366,06	97,6488	1623,829	17073,6	8,349608	0,554781
60	2689,946	24439,09	108,4477	1526,18	15449,78	8,085346	0,567364
61	2453,406	21749,14	119,3563	1417,732	13923,6	7,864879	0,577863
62	2217,22	19295,74	110,7592	1298,376	12505,86	7,70267	0,585587
63	2000,879	17078,52	101,6972	1187,617	11207,49	7,535506	0,593547
64	1803,902	15077,64	93,70844	1085,919	10019,87	7,358345	0,601984
65	1624,294	13273,74	86,56955	992,211	8933,951	7,172005	0,610857
66	1460,377	11649,44	78,18596	905,6415	7941,74	6,977011	0,620142
67	1312,649	10189,07	72,79601	827,4555	7036,099	6,762216	0,630371
68	1177,346	8876,416	67,46603	754,6595	6208,643	6,539344	0,640984
69	1053,816	7699,07	63,5303	687,1935	5453,984	6,305897	0,6521
70	940,1039	6645,254	60,50505	623,6632	4766,79	6,068639	0,663398
71	834,832	5705,15	56,69973	563,1581	4143,127	5,833891	0,674577
72	738,3783	4870,319	51,67168	506,4584	3579,969	5,595966	0,685906
73	651,5458	4131,94	48,75146	454,7867	3073,511	5,34175	0,698012
74	571,7683	3480,394	44,67886	406,0353	2618,724	5,087071	0,710139

75	499,8624	2908,626	43,70398	361,3564	2212,689	4,818853	0,722912
76	432,3555	2408,764	42,76735	317,6524	1851,332	4,571258	0,734702
77	368,9998	1976,408	39,19589	274,8851	1533,68	4,356123	0,744947
78	312,2324	1607,408	36,73622	235,6892	1258,795	4,148115	0,754852
79	260,628	1295,176	34,03856	198,953	1023,106	3,969443	0,76336
80	214,1786	1034,548	28,07482	164,9144	824,1526	3,830305	0,769985
81	175,9048	820,3694	23,48033	136,8396	659,2382	3,663712	0,777918
82	144,0481	644,4646	20,09636	113,3593	522,3986	3,473956	0,786954
83	117,0923	500,4165	17,89442	93,2629	409,0393	3,273695	0,796491
84	93,62201	383,3243	15,17682	75,36848	315,7764	3,094382	0,805029
85	73,987	289,7023	12,96353	60,19166	240,408	2,915583	0,813544

Ayollar **Yillik foiz stavkasi – 5%**

Yosh x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
0	100000	1977650	1440	5826,207	226663,7	18,7765	0,058262
1	93798,57	1877650	146,0317	4386,207	220837,4	19,01799	0,046762
2	89185,49	1783852	84,65608	4240,176	216451,2	19,00159	0,047543
3	84853,9	1694666	56,76647	4155,52	212211,1	18,97157	0,048973
4	80756,47	1609812	44,66099	4098,753	208055,5	18,93416	0,050754
5	76866,27	1529056	33,57969	4054,092	203956,8	18,89241	0,052742
6	73172,39	1452189	29,13793	4020,512	199902,7	18,84614	0,054946
7	69658,85	1379017	26,39674	3991,374	195882,2	18,79672	0,057299
8	66315,37	1309358	25,13975	3964,978	191890,8	18,74442	0,05979
9	63132,35	1243043	22,71479	3939,838	187925,8	18,68947	0,062406
10	60103,34	1179910	18,12506	3917,123	183986	18,63136	0,065173
11	57223,15	1119807	17,26196	3898,998	180068,9	18,56913	0,068137
12	54480,97	1062584	16,43996	3881,736	176169,9	18,50376	0,071249
13	51870,2	1008103	17,67738	3865,296	172288,1	18,43511	0,074519
14	49382,51	956232,8	18,27865	3847,619	16842,8	18,36379	0,077915
15	47012,69	906850,3	21,53124	3829,34	164575,2	18,28948	0,081453
16	44752,46	859837,6	29,66817	3807,809	160745,9	18,21319	0,085086
17	42591,72	815085,1	38,2279	3778,141	156938,1	18,13717	0,088706
18	40525,31	772493,4	36,40752	3739,913	153159,9	18,062	0,092286
19	38559,13	731968,1	35,05072	3703,505	149420	17,983	0,096047
20	36687,93	693409	33,38164	3668,455	145716,5	17,90019	0,099991
21	34907,5	656721	32,13389	3635,073	142048,1	17,81318	0,104134
22	33213,11	621813,5	30,92927	3602,939	138413	17,72193	0,108479
23	31600,6	588600,4	30,38666	3572,01	134810,1	17,62624	0,113036
24	30065,42	556999,8	28,93967	3541,623	131238	17,52626	0,117797

25	28604,8	526934,4	27,84283	3512,683	127696,4	17,42119	0,1228
26	27214,82	498329,6	28,65977	3484,841	124183,7	17,31096	0128049
27	25890,22	471114,8	33,67236	3456,181	120698,9	17,19663	0133494
28	24623,68	445224,6	33,28365	3422,509	117242,7	17,08116	0138993
29	23417,84	420600,9	31,93009	3389,225	113820,2	16,9607	0,144728
30	22270,77	397183,1	32,83356	3357,295	110431	16,83427	0,150749
31	21177,43	374912,3	34,41805	3324,461	107073,7	16,70339	0,156981
32	20134,56	353734,9	34,37808	3290,043	103749,2	16,56854	0,163403
33	19141,39	333600,3	44,26386	3255,665	100459,2	16,42821	0,170085
34	18195,63	314458,9	35,71419	3221,401	97203,52	16,28211	0,177043
35	17293,46	296263,3	37,63932	3185,687	93982,11	16,13152	0,184213
36	16432,32	278969,8	38,47794	3148,048	90796,43	15,97689	0,191577
37	15611,35	262537,5	39,15134	3109,57	87648,38	15,81709	0,199186
38	14828,81	246926,1	39,82251	3070,418	84538,81	15,65179	0,207058
39	14082,85	232097,3	39,63075	3030,596	81468,39	15,48085	0,215198
40	13372,61	218014,5	41,9373	2990,965	78437,8	15,30306	0,223664
41	12693,88	204641,9	44,32083	2949,028	75446,83	15,1213	0,232319
42	12045,09	191948	46,87308	2904,707	72497,8	14,93579	0,241153
43	11424,64	179902,9	48,73118	2857,834	69593,1	14,74692	0,250147
44	10831,88	168478,3	50,9738	2809,103	66735,26	14,55393	0,259337
45	10265,1	157646,4	47,59251	2758,129	63926,16	14,35751	0,26869
46	9728,693	147381,3	48,55657	2710,537	61168,03	14,14914	0,278613
47	9216,865	137652,6	49,22476	2661,98	58457,49	13,93486	0,288816
48	8728,742	128435,7	50,08546	2612,755	55795,51	13,71412	0,299328
49	8263,002	119707	49,79333	2562,67	53182,76	13,48711	0,310138
50	7819,733	111444	56,47479	2512,876	50620,09	13,25164	0,321351
51	7390,89	103624,2	66,99461	2456,402	48107,21	13,02054	0,332355
52	6971,948	96233,36	66,59159	2389,407	45650,81	12,80294	0,342717
53	6573,359	89261,41	69,30347	2322,815	43261,4	12,57927	0,353368
54	6191,038	82688,05	65,52502	2253,512	40938,59	12,35609	0,363996
55	5830,702	76497,01	61,75405	2187,987	38685,08	12,11969	0,375253
56	5491,295	70666,31	58,99931	2126,233	36497,09	11,86879	0387201
57	5170,806	65175,02	56,30786	2067,234	34370,86	11,60442	0,399789
58	4868,269	60004,21	56,71821	2010,926	32303,62	11,32557	0,413068
59	4579,729	55135,94	54,17795	1954,207	30292,7	11,03913	0,426708
60	4307,468	50556,21	57,15554	1900,03	28338,49	10,73687	0,441101
61	4045,195	46248,74	64,77677	1842,874	26438,46	10,43301	0,455571
62	3787,79	42203,55	69,32275	1778,097	24595,59	10,142	0,469429
63	3538,096	38415,76	71,39501	1708,774	22817,49	9,857748	0,482964
64	3298,221	34877,66	73,19661	1637,379	21108,71	9,574691	0,496443
65	3067,966	31579,44	71,30902	1564,183	19471,34	9,93284	0,509844
66	2850,563	28511,48	68,94062	1492,874	17907,15	9,00205	0,523712

67	2645,881	25660,91	66,4549	1423,933	16414,28	8,698437	0,53817
68	2453,432	23015,03	63,63547	1357,478	14990,35	8,380749	0,553298
69	2272,967	20561,6	62,90584	1293,843	13632,87	8,046151	0,569231
70	2101,824	18288,63	64,94981	1230,937	12339,02	7,701314	0,585652
71	1936,788	16186,81	65,52366	1165,987	11108,09	7,357555	0,602021
72	1779,036	14250,02	67,4287	1100,464	9942,1	7,009968	0,618573
73	1626,891	12470,99	68,00328	1033,035	8841,637	6,665531	0,634975
74	1481,417	10844,09	69,83807	965,0315	7808,602	6,320082	0,651425
75	1341,035	9362,677	73,25689	895,1935	6843,57	5,981679	0,667539
76	1203,92	8021,642	74,11294	821,9366	5948,377	5,662939	0,682717
77	1072,477	6817,723	74,23195	747,8236	5126,44	5,356987	0,697286
78	947,1748	5745,245	74,95545	673,5917	4378,617	5,065666	0,711159
79	827,1158	4798,071	68,58154	598,6362	3705,025	4,800966	0,723764
80	719,1478	3970,955	63,43257	530,0547	3106,389	4,521751	0,737059
81	621,4701	3251,807	60,15575	466,6221	2576,334	4,232444	0,750836
82	531,7205	2630,337	56,19313	406,4664	2109,712	3,946842	0,764436
83	450,2074	2098,617	52,38849	350,2732	1703,246	3,661444	0,778026
84	376,3804	1648,409	49,81475	297,8847	1352,972	3,379636	0,791446
85	308,6428	1272,029	45,18417	248,07	1055,088	3,121362	0,803745

5-ilova

O‘zbekiston aholisining o‘lim darajasi jadvali

Yoshi x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x
0	100 000	2126	100 000	1 061 502	1 933	3 500	25 732
1	97 874	662	88 976	961 502	547	1 567	22 232
2	97 212	222	80 340	872 526	167	1 020	20 665
3	96 990	119	72 870	792 185	81	853	19 645
4	96 871	79	66 164	719 315	49	772	18 792
5	96 792	63	60 100	653 151	36	723	18 020
6	96 729	60	54 601	593 051	31	687	17 297
7	96 669	52	49 606	538 450	24	657	16 610
8	96 617	49	45 073	488 843	21	632	15 953
9	96 568	48	40 954	443 771	19	611	15 321
10	96 520	48	37 213	402 816	17	593	14 709
11	96 472	50	33 813	365 604	16	576	14 116
12	96 422	49	30 723	331 791	14	560	13 540
13	96 373	52	27 916	301 068	14	546	12 980
14	96 321	60	25 364	273 152	14	532	12 434

15	96 261	67	23 044	247 788	15	518	11 902
16	96 194	81	20 935	224 744	16	503	11 384
17	96 113	90	19 015	203 809	16	487	10 880
18	96 023	101	17 271	184 794	17	471	10 393
19	95 922	113	15 684	167 523	17	455	9 922
20	95 809	124	14 241	151 839	17	438	9 467
21	95 685	132	12 930	137 598	16	421	9 029
22	95 553	149	11 738	124 668	17	405	8 608
23	95 404	148	10 655	112 929	15	388	8 203
24	95 256	170	9 671	102 275	16	373	7 815
25	95 086	169	8 776	92 604	14	358	7 442
26	94 917	185	7 964	83 828	14	343	7 084
27	94 732	196	7 226	75 864	14	329	6 741
28	94 536	204	6 555	68 638	13	316	6 412
29	94 332	215	5 947	62 082	12	303	6 096
30	94 117	229	5 394	56 136	12	290	5 794
31	93 888	237	4 891	50 742	11	279	5 503
32	93 651	248	4 436	45 851	11	267	5 225
33	93 403	252	4 022	41 415	10	257	4 957
34	93 151	274	3 646	37 393	10	247	4 701
35	92 877	281	3 305	33 747	9	237	4 454
36	92 596	295	2 995	30 442	9	228	4 217
37	92 301	293	2 714	27 447	8	219	3 989
38	92 008	313	2 460	24 733	8	211	3 770
39	91 695	340	2 229	22 273	8	204	3 558
40	91 355	373	2 018	20 044	7	196	3 354
41	90 982	387	1 827	18 026	7	189	3 158
42	90 595	410	1 654	16 198	7	182	2 969
43	90 185	452	1 497	14 544	7	175	2 788
44	89 733	466	1 354	13 047	6	168	2 613
45	89 267	545	1 225	11 693	7	162	2 445
46	88 722	596	1 107	10 468	7	155	2 283
47	88 126	633	999	9 361	7	148	2 128
48	87 493	715	902	8 362	7	142	1 980
49	86 778	763	813	7 460	6	135	1 838
50	86 015	867	733	6 647	7	128	1 703
51	85 148	926	659	5 914	7	122	1 575
52	84 222	1035	593	5 255	7	115	1 453

53	83 187	1060	532	4 662	6	109	1 338
54	82 127	1126	478	4 130	6	102	1 229
55	81 001	1230	428	3 652	6	96	1 127
56	79 771	1217	384	3 223	5	91	1 030
57	78 554	1286	343	2 840	5	85	940
58	77 268	1388	307	2 496	5	80	855
59	75 880	1511	274	2 189	5	75	775
60	74 369	1721	244	1 915	5	70	699
61	72 648	1811	217	1 671	5	65	629
62	70 837	1893	192	1 454	5	60	564
63	68 944	2037	170	1 262	5	55	504
64	66 907	2093	150	1 092	4	51	449
65	64 814	2224	132	942	4	47	398
66	62 590	2353	116	809	4	42	351
67	60 237	2461	102	693	4	38	309
68	57 776	2571	89	592	4	35	271
69	55 205	2617	77	503	3	31	236
70	52 588	2706	67	427	3	28	205
71	49 882	2715	57	360	3	25	177
72	47 167	2700	49	303	3	22	152
73	44 467	2667	42	253	2	19	130
74	41 800	2718	36	211	2	17	111
75	39 082	2619	31	175	2	15	94
76	36 463	2609	26	144	2	13	79
77	33 854	2548	22	118	2	11	66
78	31 306	2574	18	96	1	10	55
79	28 732	2563	15	77	1	8	45
80	26 169	2487	13	62	1	7	37
81	23 682	2570	11	49	1	6	30
82	21 112	2570	9	39	1	5	24
83	18 542	2339	7	30	1	4	19
84	16 203	2265	5	23	1	3	15
85	13 938	2110	4	18	1	3	11
86	11 828	1791	3	14	0	2	9
87	10 037	1653	3	10	0	2	7
88	8 384	1341	2	8	0	1	5
89	7 043	1059	1	6	0	1	4
90	5 984	951	1	5	0	1	3

91	5 033	826	1	3	0	1	2
92	4 207	645	1	3	0	0	2
93	3 562	534	1	2	0	0	1
94	3 028	454	0	1	0	0	1
95	2 574	325	0	1	0	0	1
96	2 249	298	0	1	0	0	1
97	1 951	273	0	1	0	0	0
98	1 678	273	0	0	0	0	0
99	1 405	171	0	0	0	0	0
100	1 234	1234	0	0	0	0	0
		100000					

MUNDARIJA

SH.A. SAIPNAZAROV

BIZNES MATEMATIKA

Toshkent – «INNOVATSION RIVOJLANISH NASHRIYOT-MATBAA UYI» – 2022

Muharrir:	**N. Abdullayeva**
Texnik muharrir:	**M.Tursunov**
Musavvir:	**A. Shushunov**
Musahhih:	**L. Ibragimov**
Kompyuterda sahifalovchi:	**M. Zoyirova**

E-mail: nashr2019@inbox.ru, Tel.: +99899920-90-35
№ 3226-275f-3128-7d30-5c28-4094-7907, 10.08.2020.
Bosishga ruxsat etildi 02.08.2022.
Bichimi 60x84 $^1/_{16}$. «Timez Uz» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 16,0. Nashriyot bosma tabog‘i 15,25.
Tiraji: 50. Buyurtma № 115

«INNOVATSION RIVOJLANISH NASHRIYOT-MATBAA UYI»
bosmaxonasida chop etildi.
100174, Toshkent sh, Olmazor tumani,
Universitet ko‘chasi, 7-uy.